Université de Montréal

EFFETS DE LA FORMATION FONDAMENTALE SUR LES COMPÉTENCES D'ÉTUDIANTS UNIVERSITAIRES DANS LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

par
France CARON

Département de didactique
Faculté des sciences de l'éducation

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Philosophiae Doctor (Ph.D) en sciences de l'éducation,
option didactique

juin, 2001

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée :

EFFETS DE LA FORMATION FONDAMENTALE
SUR LES COMPÉTENCES D'ÉTUDIANTS UNIVERSITAIRES
DANS LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

présentée par :

France CARON

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

....[redacted]
président - rapporteur

...[redacted]
directeur de recherche

.[redacted]
membre du jury

[redacted]
examinateur externe

....[redacted]....
représentant du doyen de la FES

RÉSUMÉ

Avec la fréquence des réformes de programmes en mathématiques au niveau secondaire, il apparaît souhaitable d'être mieux informé des effets à long terme des programmes antérieurs. Dans cette étude évaluative de nature exploratoire, nous nous sommes intéressée à des étudiants universitaires inscrits dans des programmes qui font appel aux mathématiques. Nous avons cherché à établir leurs compétences en résolution de problèmes et à identifier les liens entre ces compétences et l'histoire éducative de ces étudiants. L'étude a été réalisée au début de l'an 2000 auprès de quarante étudiants de trois facultés différentes (génie, gestion et informatique).

En combinant les résultats de travaux de mathématiciens et didacticiens des mathématiques (Polya, 1945 ; Schoenfeld, 1985) avec ceux d'un sociologue du travail (de Terssac, 1996), nous avons pu élaborer une grille d'analyse pour classer les erreurs commises par les étudiants dans la résolution de problèmes d'application des mathématiques rencontrés dans le cadre de leur formation universitaire, et identifier ainsi de façon quantitative les compétences démontrées. Une mise en relation de ces compétences avec les données recueillies par voie de questionnaire a permis de mettre en évidence les difficultés d'ordre stratégique des étudiants qui ont fortement adhéré à une approche procédurale de l'apprentissage. L'application de cette grille, tout en intégrant une composante didactique à l'évaluation, a aussi mis en évidence les difficultés liées à l'évaluation de compétences, qui apparaît relativement coûteuse en temps et n'échappe pas à une part d'interprétation.

Par l'analyse qualitative des productions des étudiants et de leurs témoignages recueillis en entrevue, nous avons pu approfondir les liens entre formation et compétences démontrées, en nous intéressant plus particulièrement aux effets de l'orientation procédurale des programmes du secondaire des années 80 et des rôles joués respectivement par l'application et l'informatique sur le développement des compétences mathématiques. Les résultats d'une telle analyse montrent clairement qu'une bonne *performance* en mathématiques dans un curriculum (ou un cours) d'orientation procédurale n'est pas un indice fiable de *compétences* mathématiques, car on a pu dans un tel environnement se limiter à associer questions et procédures, en faisant abstraction du sens derrière l'écriture et en se fiant aux solutionnaires pour valider la démarche.

Si la contextualisation des concepts mathématiques enseignés dans des applications réelles peut inciter certains étudiants à en comprendre le sens et à en sonder la portée, la motivation nécessaire à cet apport dépend fortement de l'intérêt de l'élève pour le domaine d'application proposé.

Du côté de l'informatique, l'impact des outils logiciels sur les compétences mathématiques paraît dépendre de la période d'exposition à ces outils, de leur mise à contribution dans l'évaluation, et du degré d'analyse requis par les tâches proposées. Par ailleurs, la présence de ces logiciels dans les pratiques professionnelles de référence commande une élévation de la barre des compétences mathématiques minimales pour assurer un degré d'autonomie dans leur utilisation et maintenir un regard critique sur leurs productions. Finalement, l'étude a mis en évidence les différences qui existent entre la logique de la démonstration et celle de la programmation, et l'avantage que paraît détenir le futur informaticien qui a d'abord développé une pensée déductive rigoureuse en mathématiques.

De ces résultats, émergent quelques propositions curriculaires susceptibles de favoriser la *compréhension* et la *structuration* des concepts mathématiques nécessaires au développement des compétences requises.

MOTS CLÉS : curriculum mathématique, évaluation, savoir théorique, savoir pratique, application, informatique, démonstration, approche procédurale.

ABSTRACT

The rate at which we proceed with reforms in the mathematics high school curriculum suggests that there might be a need for long term effects assessment of programs prior to the implementation of new ones. To this end, the present study constitutes an assessment of mathematical competences of college students (as displayed in solving applied math problems encountered in their current courses), and explores possible linkages with educational history. The study was conducted at the beginning of Year 2000 with forty students in three mathematics-intensive majors : engineering, business and computer science.

By combining results of research in mathematics education on problem solving (Polya, 1945; Schoenfeld, 1985) with those of research in labour sociology (de Terssac, 1996), we designed a grid for classifying errors made by students in solving their applied math problems. This classification allowed assessment of student competencies and identification, through correlation analysis, of possible linkages with individual educational history components (as obtained from a questionnaire). Results showed that students with an inclination towards procedural approach in learning math were the ones who had most troubles in identifying underlying concepts and deciding of a solving strategy. The use of the grid, while proving its value in helping analyze the reasons behind the errors, also showed the inherent difficulties of evaluating competencies: the process is time-consuming and not entirely free from subjective interpretation.

Through qualitative analysis of students' productions and testimonies, we have been able to circumscribe the effects of the procedural orientation of the mathematics curriculum designed in the 80's, and the roles played by application and technology in developing their competencies in mathematics. The results clearly showed that a good performance in mathematics within a curriculum (or a course) designed from a procedural orientation is by no means an indicator of mathematical competence, as one can limit oneself, within such environment, to associating questions and procedures, rely on solved problems for validation, and bypass the meaning of the concepts used.

The use of real-life applications can encourage some students to engage actively in understanding the meaning of the mathematical concepts and their span of application, but the motivation required for this to happen relies heavily on the interest to the students of the applications presented.

The impact of the use of computer software tools on student mathematical competencies appears to depend on the duration of the period of use, the possibility of using these tools at evaluation time, and the degree of analysis required by the learning tasks. At the same time, the presence of these tools in the work environment may well require an increase in mathematical knowledge in order to ensure a degree of autonomy in using them and judging of the validity of the output produced. Finally, the study has shown the differences that exist between the logic of proving and the logic of programming, and the advantage of having developed rigorous deductive thinking in mathematics prior to programming.

Based on the results, we conclude with some curriculum proposals expected to improve the *understanding* and *structuring* of mathematical concepts necessary to develop the competencies that are now required in fields where mathematics are being used.

KEY-WORDS : mathematics curriculum, evaluation, assessment, theory, application, technology, formal proof, procedural approach.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, j'aimerais exprimer ma profonde reconnaissance à ma directrice de recherche, madame Gisèle Lemoyne, qui m'a encouragée dans mon choix de projet peu orthodoxe et m'a soutenue avec une grande générosité tout au long de son développement.

Cette étude n'aurait pu se faire sans la collaboration d'un grand nombre d'individus, dans les trois secteurs universitaires où s'est déroulée la cueillette de données. En plus de témoigner ma gratitude aux quarante étudiants qui se sont aimablement portés volontaires pour participer à la recherche, je tiens à remercier les personnes suivantes : de l'École Polytechnique de Montréal, mesdames Chantal Capistran et Carole Burney-Vincent, ainsi que messieurs Michel Derenne, Christian Dupuis, John Gaspo, Richard Prégent, Michel Prud'homme et Jean-Claude Warmoes ; de l'École des Hautes études commerciales de Montréal, mesdames Nadia Live, Jacqueline Mukamurenzi et Patricia Pitcher, ainsi que messieurs Gilbert Laporte, Fabien Chauny, et Jacques Desrosiers ; du Département d'informatique et de recherche opérationnelle de l'Université de Montréal, mesdames Ilfat Gamlouche, Jacinthe Granger-Piché et Renée Touzin, ainsi que messieurs Jacques Ferland, Bernard Gendron, Jean Meunier, Ianis Queval et Daniel St-Arnaud.

Par ailleurs, les échanges que j'ai eus avec les professeurs du département de didactique et des autres départements de la Faculté des sciences de l'éducation ont aidé à préciser les orientations de ce projet. Je leur en suis très reconnaissante à tous.

Je remercie aussi le Conseil de la recherche en sciences humaines du Canada pour le soutien financier.

Finalement, mes plus grands mercis vont à vous trois, Jean, Adèle et Viviane, pour m'avoir aidée au quotidien dans la réalisation de ce projet et avoir fait preuve de tant de compréhension.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

Introduction

Les réformes dans l'enseignement des mathématiques au Québec se succèdent à un rythme très rapide. En 1998, on n'avait pas encore terminé l'implantation des derniers remaniements de programmes de mathématiques au secondaire démarrée au début des années 1990, que déjà, sans avoir pu encore juger des résultats, on décidait d'une nouvelle réforme.

Parallèlement à l'élaboration des nouveaux programmes associés à cette réforme, on s'interroge actuellement au Ministère de l'éducation sur les difficultés rencontrées par les étudiants québécois à partir de la fin du secondaire en mathématiques et en sciences en dépit d'excellents résultats aux épreuves internationales de mathématiques au primaire et au début du secondaire :

> *« Avec ces succès au primaire et au début du secondaire, comment se fait-il qu'une proportion encore trop importante de nos élèves terminent leur secondaire sans avoir acquis les connaissances leur permettant de choisir au cégep des cours scientifiques ou à fort contenu mathématique ? En troisième année du secondaire, tous les élèves prennent les mêmes cours. À la fin de leur secondaire, seulement 30 p.100 d'entre eux ont les acquis nécessaires pour faire ces choix. Et pire, parmi ceux qui choisiront un programme scientifique au cégep, un autre 50 p. 100 échoueront ou abandonneront. Comment peut-on expliquer tout cela ? »*

François Legault, ministre d'État à l'Éducation et à la Jeunesse
Congrès mathématique de l'an 2000, Université Laval, 5 mai 2000[1]

Se pourrait-il que la formation mathématique soit en cause dans la difficulté à accéder aux études scientifiques ? Si oui, y aurait-il lieu de s'inquiéter aussi du niveau de préparation des étudiants qui poursuivent après une telle formation des études où ils auront à utiliser leurs connaissances mathématiques ? Ces questions nous semblent d'autant plus légitimes que les nouvelles exigences du monde de l'emploi font de plus en plus appel à une capacité d'utilisation de concepts avancés des mathématiques (statistiques, réseaux, calcul matriciel,

---

[1] Extrait de l'allocution prononcée à l'occasion de la conférence grand public du Congrès mathématique de l'an 2000 et reproduite dans Le Bulletin AMQ, Vol. XL, n° 2, mai 2000, Bibliothèque Nationale du Québec.

etc.) et à des capacités d'analyse et de synthèse qui permettent d'organiser et de traiter des données, d'en comprendre le sens, et de porter un regard critique sur des résultats ou des conclusions tirées de résultats.

On peut donc être amené à se demander si l'enseignement actuel des mathématiques prépare adéquatement à leur utilisation éventuelle dans les pratiques professionnelles où l'on retrouve la plus forte « consommation » de mathématiques comme « carburant » nécessaire à la recherche, à l'analyse et au développement. Observe-t-on des lacunes chez les étudiants universitaires qui se préparent à une carrière où l'on applique des connaissances mathématiques? Y aurait-il lieu de chercher dans la formation fondamentale à faciliter le passage du savoir théorique mathématique au savoir pratique en usage dans les domaines d'application des mathématiques? Est-il défendable et pertinent de prendre en compte, dans la définition de l'enseignement des mathématiques qu'on dispense aux niveaux secondaire et collégial, le passage éventuel à la pratique dans des domaines comme le génie, le développement de logiciels ou l'analyse financière? Si oui, comment devrait-on orienter l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques pour faciliter ce passage? Les caractéristiques de la pratique devraient-elles teinter l'apprentissage de la théorie?

Une évaluation des effets à long terme des programmes pourrait apporter des réponses à ces questions et en faire bénéficier l'élaboration des nouveaux programmes. Cette réflexion est à l'origine de notre étude sur les rapports et tensions entre savoir théorique et savoir d'action chez des étudiants universitaires inscrits dans des programmes d'études où l'on applique des mathématiques. Connaître ces rapports et tensions nous apparaît nécessaire avant de nous lancer dans des propositions curriculaires.

Dans le premier chapitre, nous tâcherons de cerner la problématique associée à un enseignement des mathématiques qui chercherait à faciliter le passage à la pratique. Nous nous interrogerons d'abord sur les finalités associées à l'enseignement du savoir mathématique, sur la tension et la complémentarité entre savoir théorique et savoir d'action. Ceci nous mènera sur la voie périlleuse des compétences que nous emprunterons avec précaution pour repenser l'apprentissage des mathématiques en fonction de leur utilisation.

Nous poursuivrons au chapitre 2 en examinant la place à accorder à l'application et à l'informatique dans le cours de mathématique, en fonction de leurs potentialités et des difficultés mises en lumière par différentes analyses didactiques. Cet examen nous conduira à la définition des objectifs de recherche, où nous chercherons à mettre en relation l'histoire éducative d'étudiants universitaires avec leurs compétences en situation de résolution de problèmes de mathématiques appliquées. La méthodologie de la recherche sera exposée au chapitre 3 ; celle-ci fait intervenir deux niveaux d'analyse : un niveau quantitatif et un niveau qualitatif. L'analyse des résultats obtenus au niveau quantitatif fera l'objet du chapitre 4, et l'analyse qualitative des données sera présentée au chapitre 5. Nous conclurons avec une synthèse et une discussion des résultats en regard des objectifs annoncés, et les orientations curriculaires qui pourraient en découler.

1 Problématique

D'une façon récurrente, quel que soit le niveau d'enseignement, les professeurs imputent à la formation qui a précédé les lacunes observées chez leurs étudiants. Les professeurs à l'université n'échappent pas à ce phénomène. En particulier, dans les programmes de formation faisant appel aux mathématiques, on s'interroge sur le niveau de préparation mathématique des étudiants. Ce questionnement invite à la réalisation d'études visant à mieux comprendre les rapports aux mathématiques des étudiants inscrits dans ces programmes universitaires. La compréhension de ces rapports est nécessaire avant de mettre de l'avant des propositions curriculaires et didactiques visant la correction de ces lacunes.

Un examen éclairé des rapports des étudiants aux mathématiques, dans une perspective d'utilisation professionnelle des mathématiques, ne peut faire l'économie d'une analyse des finalités et des objectifs de l'enseignement des mathématiques. Cette analyse permet de mieux définir la problématique de notre recherche. Nous y aborderons les rapports entre les savoirs théoriques et les savoirs d'action ainsi que l'impact de l'informatique dans l'évolution de ces rapports. La recherche d'une articulation entre ces savoirs nous conduira vers la notion de *compétence* et son potentiel d'utilisation dans le curriculum.

1.1 Un questionnement curriculaire

Avant d'aborder l'enseignement des mathématiques dans une perspective d'utilisation professionnelle, il convient de questionner la légitimité de cette approche. Un tel questionnement s'inscrit dans les études curriculaires et met à contribution de vastes domaines de recherche et de réflexion. Il nécessite une étude objective des connaissances, de leurs contextes d'apprentissage et d'utilisation, ainsi qu'une prise de position quant aux valeurs, aux finalités à associer avec le projet d'éducation. La figure suivante donne une idée du nombre d'éléments à prendre en compte dans la recherche de légitimation d'un projet d'enseignement des mathématiques qui chercherait à faciliter le passage à l'application. Cette recherche commande une vision pluridisciplinaire.

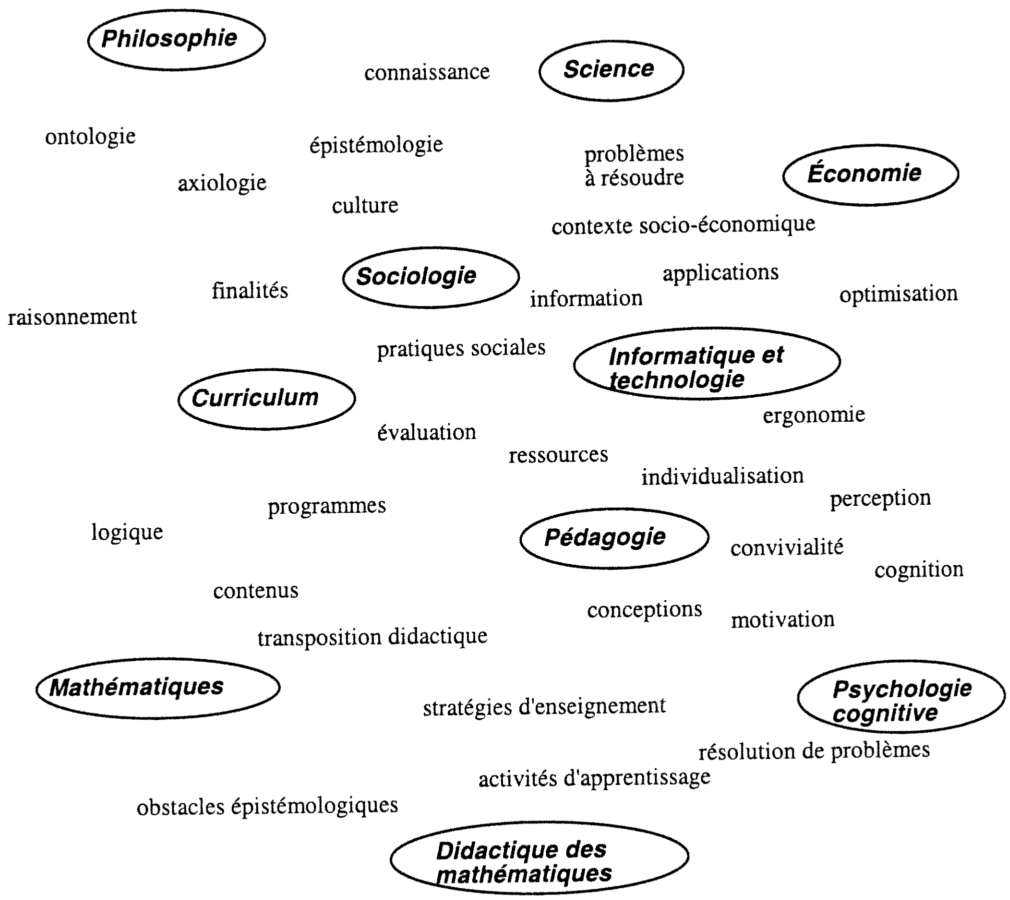


Figure 1- Éléments susceptibles d'influencer le curriculum mathématique

Dans un ouvrage consacré à l'analyse de besoins en éducation, Stufflebeam, McCormick, Brinkerhoff et Nelson (1985) regroupent en quatre types les critères pour juger de la valeur et de la légitimité d'un objectif en éducation. Ces critères seraient liés à l'*éthique*, à l'*utilité* (pour la collectivité), à la *virtuosité* (pour l'individu) ou à la *faisabilité*. Il apparaît donc intéressant de confronter la recherche d'une approche d'enseignement des mathématiques qui préparerait à leur utilisation en contexte professionnel à l'aune de ces quatre types de critères.

Pour évaluer l'approche sur le plan de la *faisabilité*, il faudrait en avoir d'abord défini les conditions d'opérationnalisation. Or celles-ci constituent le cœur de ce projet de recherche. Il nous faudra donc attendre de les avoir identifiées avant d'en évaluer la viabilité au regard des contraintes politiques et économiques.

A priori, orienter un curriculum mathématique en visant *aussi* une préparation à leur utilisation en contexte professionnel paraît satisfaire aux critères d'*utilité* collective, bien qu'il faille reconnaître que cette notion d'*utilité* collective repose sur un ensemble de valeurs et de croyances subjectives et liées à la culture. Si l'on croit que, de façon générale, les développements technologiques contribuent à améliorer la condition humaine (en permettant par exemple des avancées en médecine et en télécommunications), on favorise sans hésitation une orientation de l'enseignement qui prépare à prendre une part active à ces développements. Par ailleurs, une position plus sceptique face à de tels développements ou au marché de l'emploi qui s'y rattache ne libère pas de la nécessité d'en comprendre les enjeux et les mécanismes, afin de pouvoir exercer, comme le permet et le veut la démocratie, un jugement critique bénéfique à l'ensemble de la société.

> *« The fact that science is understood by few people other than the scientists themselves has created a terrible situation. One aspect is that our life hinges on vital decisions about science and technology policy. But these decisions are all too often taken either by people so closely concerned that they have strong vested interest, or by people who went through the schools with no math or science. Thus every country would be far better off if understanding and appreciation of some significant aspect of science could become more widespread amont its citizens. This demands a liberal education that includes substantial instruction in math. »*
>
> Benoit B. Mandelbrot, mathématicien,
> *International Conference on Mathematics Education -7*, 1992

On note que l'opinion publique en général, particulièrement aux États-Unis et en Allemagne, est favorable à une orientation de l'enseignement des mathématiques qui prépare aux exigences du marché du travail (Forman et Steen, 1994; Graf, 1992). La force de ce courant est sans doute attribuable au fait qu'il peut compter sur l'appui de trois groupes importants: les entreprises qui ont tout intérêt à recevoir une main d'œuvre sur mesure, les gouvernements qui veulent garder leur position stratégique dans une économie mondiale, et les parents qui souhaitent voir leurs enfants avoir accès aux emplois en demande.

> *« Learning to think and reason mathematically is the only way our children can be sure that they are in control, not being controlled. (...) More practically, almost every job these days requires at least some elementary understanding of mathematics. In fact, many of the jobs that keep our country competitive and*

successful in the global market are jobs that require more than basic mathematics comprehension. »

Zell Miller, gouverneur de Georgie,
High School Mathematics at Work, 1998

Sur un plan *éthique*, on pourrait reprocher à un tel projet de risquer d'asservir l'éducation aux besoins économiques d'une société, et d'aller ainsi à l'encontre d'un respect des droits et libertés individuelles. Il faudrait en effet s'élever contre quelque pratique éducative qui négligerait le développement de la personne dans son ensemble au profit d'une adéquation aux demandes spécifiques d'employeurs. Mais dans le contexte actuel où il est difficile de prévoir de telles demandes plus de cinq ans à l'avance, la formation fondamentale paraît relativement à l'abri des excès en ce sens. Il lui revient plutôt d'outiller la personne avec ce qui lui permettra de s'adapter aux variations du contexte socio-économique, en sollicitant constamment son intelligence, en la préparant à se situer et à prendre sa place dans la société, et aussi à opposer une résistance quand elle lui paraît nécessaire.

Les critères de *virtuosité* sont ceux qui sont liés au développement de la connaissance, du potentiel individuel, de la créativité ou d'habiletés techniques supérieures. Pour bien des mathématiciens et enseignants de mathématiques, une approche utilitariste, pragmatique[2], ou instrumentaliste de l'enseignement des mathématiques est jugée incompatible avec une telle recherche de « *virtuosité* ». Ceux-ci font une distinction claire entre mathématiques utilitaires (qu'ils associent à technicité) et mathématiques pour former le raisonnement. Pour cette école de pensée qu'on pourrait qualifier de *classique* ou d'*académique*, l'enseignement des mathématiques doit mettre l'accent sur la *théorie*, et ce pour plusieurs raisons. Cette théorie est d'abord le bagage cohérent accumulé et organisé par l'humanité au cours de milliers d'années de réflexion. C'est donc un trésor culturel inestimable qu'il importe de transmettre et dont il faut sensibiliser à la valeur, à la beauté, à la force.

« *Mathematics, rightly viewed, possesses not only truth, but supreme beauty—a beauty cold and austere, like that of sculpture, without appeal to any part of our*

---

[2] Il est intéressant de constater que le fondateur du pragmatisme, Charles Sander Peirce (1839-1914), était à la fois mathématicien, astronome, philosophe et logicien, et, fait amusant, le fils de Benjamin Peirce, algébriste et astronome, considéré comme le père des mathématiques pures aux États-Unis.

weaker nature, without the gorgeous trappings of painting or music, yet sublimely pure, and capable of a stern perfection such as only the greatest art can show... Remote from human passions, remote even from the pitiful facts of nature, the generations have gradually created an ordered cosmos, where pure thought can dwell as in its nature home, and where one, at least, of our nobler impulses can escape from the dreary exile of the natural world. »

Bertrand Russell, mathématicien,
Principia Mathematica, 1910

Le témoignage de Russell, ce philosophe et logicien qui chercha à fonder les mathématiques sur la logique (courant logiciste), confirme qu'on se trouve bien ici dans le domaine pur des idées, en lien direct avec l'idéalisme de Platon. En réalisant avec ses Principia Mathematica l'idéal visé par Spinoza de philosopher « à la manière des géomètres », selon une argumentation développée en une suite de formules logiques, Russell illustre aussi la valeur accordée par cette école au raisonnement déductif mathématique.

Car au-delà d'une simple transmission culturelle, l'enseignement des mathématiques associé au courant classique vise aussi le développement du raisonnement chez l'individu selon le modèle déductif mathématique. Cette vision est encore bien présente, notamment en France et au sein de la plupart des départements universitaires de mathématiques, nonobstant les échecs des courants logiciste et structuraliste (Bourbaki) qui en furent de farouches défenseurs.

« Les mathématiques jouent un rôle central dans la civilisation occidentale. Il faut transmettre quelque chose qui soit représentatif de ce qu'elles sont. (Au secondaire) ce devrait être la géométrie, d'abord et avant tout et sans visée utilitaire. L'objectif serait que chacun comprenne ce qu'est une théorie, comment, à partir d'axiomes et de règles de déduction, on peut arriver, par le raisonnement déductif, à démontrer des choses qui ne sont pas évidentes. Il ne s'agit pas de faire des élèves des géomètres, ni même des mathématiciens, mais bien des citoyens qui puissent juger par eux-mêmes, qui auront fait l'expérience d'une démonstration et appris que le savoir humain ne repose pas entièrement sur l'observation empirique, qu'on peut comprendre la nature par le raisonnement, sans en faire l'expérience directe. Faire une démonstration plutôt que d'imposer une vérité est une exigence au cœur de la démocratie. »

André Joyal, mathématicien,
Le Devoir, novembre 1997

La position de l'école classique mérite qu'on s'attarde sur les relations entre savoir théorique et savoir pratique, et qu'on examine le niveau de virtuosité qu'exige aujourd'hui le savoir pratique en contexte d'utilisation de connaissances mathématiques. Ce sera l'objet de la section suivante.

1.2 Savoirs théoriques et savoirs d'action

Les divergences d'opinions quant aux finalités à donner à l'enseignement des mathématiques seraient un reflet de la tension et de la complémentarité qui existent entre les *savoirs théoriques* et les *savoirs d'action*. Barbier (1996) a dirigé un ouvrage collectif sur ce thème, dans lequel il énonce que la distinction entre ces deux types de savoirs s'inscrit dans le paradigme plus large de la *bipolarisation théorie-pratique*:

- *théorie:* ce qui appartient à l'ordre de l'universel, de l'abstrait, des "*hautes terres*", du déductif, de l'applicable, du transposable dans la pratique;
- *pratique:* ce qui appartient à l'ordre du contingent, du local, de l'éphémère, du complexe, de l'incertain, des « *basses terres* », de l'inductif, de ce qui nourrit la théorie.

Dans ce même ouvrage, Gagnepain et André (1996) lient les savoirs d'action à la technicité, à la création, à la maîtrise et l'entretien de flux de matière, d'information ou d'énergie servant à l'homme. En somme, ils tireraient leur raison d'être de la création et de la transformation par l'homme de *systèmes artificiels* qui lui sont *utiles*. De façon complémentaire, les savoirs théoriques seraient liés à une vision d'un monde plus intellectualisé, sans recherche d'un lien direct d'utilité pour la société, mais préoccupé d'abord de la *connaissance*, par l'observation et la compréhension des *systèmes naturels*. A priori, une telle classification paraît exclure à la fois les savoirs théoriques développés pour répondre à des besoins associés à des systèmes artificiels, et le recours à l'expérimentation dans la quête de la connaissance des systèmes naturels. Cette vision dualiste peut donc sembler par trop simplificatrice, mais dans la mesure où elle peut servir de référence à des positions antagonistes dans les débats sur le curriculum mathématique, nous croyons pertinent d'en poursuivre l'exposé et de la nuancer au passage.

Gagnepain et André insistent sur la légitimité de ces deux types de savoirs scientifiques. Par leur prise en compte de la complexité et des contraintes sociétales, les savoirs d'action sont indéniablement utiles pour la société. De façon différente, puisqu'ils ne reposent pas sur un principe d'utilité immédiate, les savoirs théoriques demeurent utiles, à la fois pour l'individu et la société, car ils permettent d'assurer la liberté de pensée, de laisser l'espace nécessaire à la créativité, de favoriser le développement de connaissances nouvelles, ce qui se traduirait en bout de ligne par une meilleure compétitivité industrielle et intellectuelle.

Gagnepain et André illustrent enfin comment ces deux types de savoirs se nourrissent mutuellement, dans une association incontournable. En effet, la construction de savoirs d'action selon le cycle des évolutions technologiques soumis au potentiel et à la demande sociétale peut conduire à un épuisement des « réservoirs » de connaissances sur un sujet particulier, imposant un ressourcement par la science, par la construction de nouveaux savoirs théoriques. Par conséquent, en adoptant une perspective à long terme, même une vision essentiellement technologique de la science se doit de maintenir en opération un milieu de construction de savoirs théoriques. Réciproquement, la construction de savoirs théoriques pour répondre à une quête de nouvelles connaissances peut mener à des résultats scientifiques majeurs dont les répercussions dans la société conduiront au développement de nouveaux savoirs d'action. À cela, il faudrait ajouter, pour contribuer à illustrer l'association entre ces deux types de savoirs, que le recours à l'expérimentation dans la construction de nouveaux savoirs théoriques peut aussi mener au développement de nouveaux savoirs d'action.

On pourrait aller plus loin et faire évanouir cette frontière déjà poreuse entre savoirs théoriques et savoirs d'action en avançant que la construction de tout savoir scientifique fait immanquablement appel à une forme de théorisation (ou modélisation), et que l'attribution d'un caractère théorique au savoir ne relève en fait que d'une évaluation subjective de la distance entre le réel, issu de systèmes naturels ou artificiels, et l'objet de savoir produit par cette théorisation. Mais une telle vision, elle-même une théorisation de l'activité scientifique, se situe à un niveau d'abstraction tel qu'elle ne permet plus de refléter et d'expliquer les tensions bien réelles qui existent dans les différents camps qui s'affrontent sur le plan curriculaire. Nous maintiendrons donc, de façon peut-être artificielle, cette distinction entre savoirs théoriques et savoirs de l'action.

Si l'on accepte cette distinction, peut-on affirmer que les savoirs mathématiques relèvent tous du domaine théorique ? Sans doute, si l'on parle du savoir mathématique dans sa forme achevée, théorisée, codifiée, validée et donc amputée du contexte dont il est issu et de l'activité qui l'a fait naître. Non, si l'on parle du savoir du mathématicien.

Il convient d'abord de reconnaître que nombre de mathématiciens ont été attirés par leur domaine en raison de sa cohérence, de son universalité, de sa pérennité, de son abstraction idéaliste, et donc témoignent d'un penchant naturel pour l'aspect théorique de ce savoir.

> *« I then make a case for the notion that the most significant link between math and music is a spirirtual one and that the practitioneers of both subjects are seeking for the true, the unchanging, the eternal; that mathematics and music are manifestations of human idealism. »*
>
> Jan E.H. Johansson, University of Vermont
> *74th Annual NCTM Meeting*, 1996

En revanche, ceux qui effectuent des contributions marquantes en mathématiques sont ceux qui apprécient le moment où ils sortent du cadre déductif pour explorer et ouvrir une nouvelle fenêtre vers les connaissances, incorporant ici une approche inductive, voire expérimentale, un savoir d'action dans un contexte théorique.

> *« Pour les grands mathématiciens, les mathématiques sont avant tout un lieu de jeu, de plaisir, de liberté pour l'imagination; la démonstration ne vient qu'après, seulement "pour convaincre les collègues. »*
>
> J. Nimier et M. Lefèvre, Univ. de Reims,
> *Science et Vie*, septembre 1992

« Les activités qui peuvent s'exercer sur la base d'un savoir purement théorique sont excessivement rares », écrit Lehmann (1996). Si même le mathématicien incorpore à sa pratique des savoirs d'action, ceux-ci jouent un rôle encore plus grand lorsque l'utilisation des savoirs mathématiques se fait dans un contexte appliqué, comme, par exemple, en génie, en informatique ou en gestion. En mathématiques appliquées, comme dans les autres secteurs d'activité humaine, le savoir d'action cherche à traiter de façon adéquate la

complexité intrinsèque des problèmes réels. Il ne peut être question ici de simplifier le problème pour maintenir l'élégance du modèle. On a plutôt recours aux diverses approches développées pour aborder les problèmes complexes (à un grand nombre de degrés de liberté): les méthodes d'approximation, la simulation, la logique floue, les systèmes experts, etc. Mais selon Lehmann, le savoir d'action ne s'arrête pas là, il doit aussi intégrer les éléments nécessaires des différentes sciences humaines et sociales pour constituer avec les sciences naturelles et la technologie un *« corpus de sciences de l'action »*.

Sans aller jusqu'à intégrer à l'intérieur du cours de mathématiques un tel corpus des sciences de l'action, on peut se demander s'il n'y aurait pas lieu de préparer davantage à l'utilisation de ces mathématiques, à la prise en compte de la complexité. Dans leur enseignement traditionnel, les mathématiques suggèrent une vision idéaliste d'un monde de concepts où tout se tient, sans faille, de façon logique, universelle, avec une garantie de pérennité. Si cette vision permet de se raccrocher à des invariants dans un monde de changements, elle peut aussi, lorsque poussée à l'extrême, handicaper l'adaptation au monde extra-scolaire où les connaissances sont souvent localement significatives, éphémères, floues, et même arbitraires.

> *« Une formation trop abstraite ne donne pas suffisamment l'habitude d'appréhender le monde qui vous environne comme un monde réel. »*
>
> Evry Schatzmann, astrophysicien,
> *Science et Vie*, septembre 1992

1.3 L'impact de l'informatique

Par ses possibilités de calcul et de visualisation, l'ordinateur permet d'aborder cette complexité; l'informatique fait donc désormais incontestablement partie de tout corpus des sciences de l'action et pourrait même prétendre à un certain statut au sein du cours de mathématiques. De fait, les mathématiques, savoir essentiellement théorique, et l'informatique, savoir dont la composante pratique est incontournable, entretiennent un rapport très riche en se nourrissant mutuellement dans leur évolution et en partageant plusieurs éléments communs. Historiquement, l'informatique est une science qui a émergé des mathématiques. Ce qui distingue principalement l'informatique tient au fait qu'elle prend en compte les rapports avec une réalité humaine (la signification de l'information) et une réalité physique (la matérialisation de l'information) (Bertrandias, 1992). Ceci en fait à la fois une science dont l'*objet* est l'information et la manière dont celle-ci peut s'élaborer, se transmettre, se conserver, se traiter et éventuellement s'utiliser, ainsi qu'une technique dont les *actions* permettent la matérialisation, la transmission, la conservation et le traitement de l'information.

Bertrandias (1992) montre comment ces dimensions de l'informatique amènent une modification des concepts qu'elle paraît avoir empruntés aux mathématiques. Si comme en mathématiques, la *variable* en informatique est une liaison entre un symbole et une valeur pouvant varier dans un ensemble précis, on doit ici prendre en compte la réalisation matérielle de la valeur et donc aussi matérialiser la liaison entre le nom et la valeur. Changer la valeur associée à un identificateur devient une opération toute naturelle dans ce contexte (contrairement à ce qui se fait normalement en mathématiques). Par ailleurs, le concept de *fonction*, pour être utilisable en informatique, doit faire appel à une définition constructive, soit à partir des opérations de construction par composition, projection et récursion, au moyen de formules ou d'*expressions*, soit à partir d'*actions* matérielles sur les symboles matérialisant les valeurs, en décrivant des "procédures" ou des actions de fabrication des valeurs. Le concept de *structure* a aussi connu une transformation en s'éloignant du champ algébrique traditionnel (groupes, anneaux, corps) au profit de nouvelles structures rendues importantes par les applications de l'informatique: piles, files, arbres et graphes. De façon plus générale encore, l'informatique a mis en évidence l'importance du choix du *langage*, en fonction de la signification de l'information qu'il permet de refléter et de sa relation avec les réalités matérielles qu'il doit commander.

Parallèlement à ces développements conceptuels, on a assisté à une transformation par l'informatique de l'activité mathématique (Cornu, 1992). En premier lieu, il convient de mentionner l'apparition d'une nouvelle forme de *preuve* qu'il a fallu faire accepter par la communauté mathématique, la preuve par ordinateur dont le *Théorème des quatre couleurs* est sans contredit l'exemple le plus célèbre (Rauzy, 1992). Ce type de preuve, qui nécessite souvent de nouveaux développements théoriques, se définit généralement selon l'articulation suivante: on réduit d'abord le problème à une vérification finie et la mise en œuvre effective de cette vérification est ensuite confiée à l'ordinateur. On peut en retrouver des variantes avec un enchaînement conditionnel de vérifications dont la longueur effective de la séquence n'est donc pas déterminée à priori. Ce nouveau type de preuve a amené au sein de la communauté mathématique une extension de l'activité de validation d'une démonstration en y introduisant une composante informatique: en effet, s'il demeure possible de vérifier la partie théorique selon les critères habituels, il faut en plus vérifier que le programme est correct et le passer sur une machine en espérant que celle-ci est fiable. On peut imaginer que la prise en compte de telles contingences matérielles a représenté à elle-seule une véritable petite révolution au sein d'une communauté habituée à oeuvrer dans le monde parfait des idées. Le passage par la suite à la *démonstration automatique* à l'aide de *systèmes experts* aura sans doute été plus facile à accepter, une fois ce premier pas franchi.

Il n'y a pas qu'au niveau des possibilités de démonstration que l'ordinateur a modifié l'activité mathématique. Il a permis de *calculer* mieux, plus et plus vite (Cornu, 1992). Les nouvelles possibilités de calcul amenées par l'informatique ont favorisé le développement des *méthodes de calcul numérique* et plus largement celui des *mathématiques discrètes* par l'étude des *algorithmes* car ceux-ci devenaient opérationnalisables sur ordinateur et pouvaient désormais être considérés comme moyen de résolution de problèmes. Par l'extension du domaine des problèmes qu'il devenait envisageable de résoudre, et de celui des nombres sur lesquels il devenait possible de calculer, la notion de *complexité* (temps d'exécution d'un algorithme en fonction de la taille du problème) a tout naturellement émergé de la prise en considération des limites physiques et temporelles qui contraignent la résolution de problèmes par ordinateur. De manière plus fondamentale encore, la mise en œuvre d'un algorithme doit être précédée de deux types de preuve (Rauzy, 1992; Bertrandias, 1992): la *preuve de terminaison* (prouver qu'il aboutit) et la *preuve de correction* (prouver que s'il aboutit, il fournit bien le résultat escompté). Rauzy présente l'algorithme ainsi accompagné de ces deux preuves comme un *théorème* accompagné de sa démonstration. Qui plus est, un tel théorème est non seulement une preuve d'existence mais aussi une méthode de construction validée, utilisable, qui lui donne un net avantage pratique sur une simple preuve d'existence, longtemps primée par les mathématiciens en raison de son élégance.

La recherche en mathématiques appliquées s'est ainsi développée, fortement dirigée par les exigences des applications qui trouvaient en l'algorithme une nouvelle voie pour la résolution de leurs problèmes spécifiques. Les différentes applications physiques, militaires, administratives et commerciales, tout en contribuant à accélérer la recherche fondamentale en algorithmique ont elles-mêmes relancé ou ouvert l'étude de domaines mathématiques (analyse numérique, recherche opérationnelle, etc.). Et la boucle a été bouclée quand ce sont les exigences spécifiques de l'informatisation et du traitement de l'information qui ont amené de nouveaux problèmes mathématiques: par exemple, l'étude des grands nombres premiers en cryptographie, la théorie des langages, les algorithmes de factorisation pour le développement de calculateurs symboliques: de l'informatique-outil pour la résolution de problèmes de mathématiques (pures ou appliquées), on est passé aux mathématiques-outil pour la résolution de problèmes informatiques.

Par ailleurs, les possibilités de *visualisation* de l'ordinateur ont à la fois donné l'occasion de mettre en œuvre les connaissances des propriétés algébriques et géométriques, et permis de détecter de nouveaux phénomènes et régularités qui ont amené de nouvelles recherches en analyse pour en expliquer l'origine. Un exemple bien connu est celui des fractals de Mandelbrot qui ont contribué à relancer la recherche sur les itérées de fonctions complexes.

Ces possibilités de visualisation combinées à celles de calcul de l'ordinateur en ont fait un outil d'*expérimentation* et de *simulation* pour le mathématicien où la simple modification d'un ou d'une combinaison de paramètres permet de multiplier les expériences, de simuler des phénomènes autrement trop longs ou trop coûteux à réaliser, de formuler des conjectures, des hypothèses. Cela a donné lieu à une transformation de l'activité mathématique en amplifiant le rôle de la démarche expérimentale dans le travail inductif et en la mettant à la portée d'un plus grand nombre de personnes.

> *« Sans que l'on puisse dire que les mathématiques deviennent une science plus expérimentale, l'activité mathématique devient plus expérimentale. »*
>
> Cornu, 1992

1.4 L'émergence de la notion de compétence

La recherche d'articulation dans l'enseignement entre savoir théorique et savoir de l'action fait actuellement l'objet d'une réflexion dans les milieux scientifiques et mathématiques. Une telle réflexion conduit naturellement à la notion de compétence, une « *notion intermédiaire qui permet de penser les relations entre le travail et les savoirs détenus par l'individu, tout ce qui est engagé dans l'action organisée et tout ce qui permet de rendre compte de l'organisation de l'action* » (de Terssac, 1996). Le cas de la France est plutôt intéressant à cet égard car on a commencé à remettre en question dans les années 90 le parti pris pour l'approche essentiellement théorique et déductive de l'enseignement des mathématiques, longtemps considérée comme intouchable en vertu de ses principales qualités: développement du raisonnement et objectivité de l'évaluation.

On pointe désormais du doigt les conséquences d'une domination dans les processus de sélection, et donc dans l'enseignement qui y prépare, des mathématiques théoriques reposant sur une démarche essentiellement déductive[3]. D'abord, par sa non-prise en compte de l'imaginaire et de la logique des associations d'idées, cette approche qui se rattache à l'école classique serait en partie responsable de l'inefficacité de l'enseignement et des échecs scolaires (Nimier et Lefèvre, 1992). Ensuite, elle nuirait aux sciences en en donnant une fausse idée (Testard Vaillant, 1992a). Finalement, elle menacerait la position stratégique de la France dans l'économie mondiale en étouffant le goût du risque et en conduisant à des prises en compte insuffisantes de l'ensemble des contraintes qui encadrent le développement d'une production appelée à se rendre réellement jusqu'au marché (Lehmann, 1996; Testard Vaillant, 1992b).

Ce dernier argument est sans contredit celui qui retient l'attention de ceux qui y voient la raison de l'émergence de la notion de compétence dans le système français d'éducation, par quelque sournoise « *extension de la rationalité, du calcul économique, de la raison scientifique et technique* » (Tanguy et Ropé, 1995). En associant la notion de compétence en éducation à une approche scientifique et comportementale de la formation (contrats

---

[3] Chevallard (1992b) voit dans ce phénomène de rejet le reflet d'une certaine *"phobie culturelle"*, de *"coquetteries anti-mathématiques"*.

d'apprentissage, pédagogie par objectifs, évaluation de comportements en situation donnée, unification, efficacité, équité), Tanguy et Ropé font ressortir un troublant parallélisme avec le monde de l'entreprise, ses contrats de partenariat, son management par objectifs et ses évaluations de performance. Ce rapprochement paraît d'autant plus inquiétant que le glissement sémantique associé au remplacement dans l'entreprise française de la notion de *qualification* par celle de *compétence* est perçu par certains, au-delà du passage d'une vision statique à une vision évolutive du travail, comme une occasion pour les directions d'entreprises de se libérer des contraintes liant les postes aux spécialistes, et de s'octroyer toute la flexibilité souhaitée pour embaucher, promouvoir et mettre à pied, selon les besoins du moment (Dugué et Mallebouis, 1994). De Terssac (1996) donne une interprétation moins défaitiste de ce changement de vocabulaire dans l'entreprise française, changement d'ailleurs relativement récent et qui paraît coïncider dans le temps avec l'accélération de la mondialisation. Il y voit avant tout une modification de dimension: la qualification privilégiait la dimension politique du poste avec une connotation sociale et conflictuelle (les postes réservés aux diplômés des Grandes Écoles en sont sans doute le meilleur exemple); par opposition, la compétence privilégie la dimension instrumentale du poste, sa valeur fonctionnelle, et apparaît au départ plus démocratique.

Mais de toute façon, n'associer le concept de compétence en éducation qu'à une approche comportementale paraît réducteur. Pour de Terssac (1996), la notion de compétence est d'une grande utilité pour cerner les différents types de savoirs *« qui aujourd'hui différencient les individus et les mettent en concurrence, qui naissent dans et par l'expérience »*. Pourquoi faudrait-il que la recherche, dans le cadre de la formation fondamentale, des conditions qui favoriseraient l'émergence future de ces savoirs prenne nécessairement une tangente béhavioriste? Pour y voir plus clair, nous sommes retournés aux sources de l'approche par compétences en allant explorer du côté américain, là où déjà en 1979, on évaluait les retombées des premières expériences de ce paradigme curriculaire dans les établissements universitaires (Ewens, 1979).

L'approche par compétences cherche à définir un curriculum à partir de l'analyse du rôle dans la société qu'aura plus tard à jouer l'étudiant, et à faire le suivi du progrès de l'étudiant sur la base d'une démonstration de sa performance dans quelques (ou tous les) aspects de ce rôle, indépendamment, en théorie, du temps consacré à sa formation. L'émergence de cette approche en éducation serait liée à la démocratisation de l'éducation et représenterait essentiellement un déplacement du groupe d'étudiants visé par cette éducation : des meilleurs vers ceux qui se situent dans la moyenne et même en-dessous. Ce faisant, on aurait rejeté les principes élitistes et sans visée pratique de la culture académique et de la recherche universitaire pour adhérer à des principes de démocratie et d'utilité (Grant, 1979). Cette interprétation n'est pas sans rappeler la raison évoquée par de Terssac pour expliquer le passage en entreprise de la notion de qualification à celle de compétence.

L'approche par compétences peut prendre deux formes très distinctes (Neumann, 1979):

- une, fortement *comportementale* et administrative, où le rôle et le curriculum sont définis en termes de *micro-habiletés*;
- une autre, plus *humaniste* et davantage soucieuse de la pédagogie, et qui tient compte de façon globale de l'ensemble des rôles qu'aura à jouer l'étudiant dans sa vie future en intégrant des éléments de culture, personnalité et citoyenneté.

La première forme tire évidemment ses origines du monde de l'entreprise:

> *« Each job should be carefully subdivided into its elementary operations, and each of these units should receive the most careful time study. »*
>
> Frederick W. Taylor,
> *The Principles of Scientific Management, 1911.*

Toutefois, il est intéressant de noter que le passage de tels principes au monde de l'éducation ne s'est pas fait de façon directe, mais plutôt après un transit par l'armée, où lors de la première guerre mondiale, on avait mis sur pied, grâce au concours de directeurs de formation en entreprise, de gigantesques programmes de formation des militaires qui allaient se révéler très efficaces et donner des munitions aux défenseurs d'une gestion scientifique de l'éducation. Parmi ceux-ci, Franklin Bobbitt, un des disciples de Taylor qui connut une grande influence dans le milieu éducatif, écrivit en 1918 le premier livre entièrement consacré au curriculum (*The Curriculum*) qui se voulait une description de l'application de la méthode scientifique à la conception de programmes d'éducation, où le rôle auquel de tels programmes devaient préparer était tout bonnement celui de la vie.

Si en 1962, Gagné élevait encore l'analyse de tâche au rang de moyen par excellence pour concevoir des systèmes de formation, cette vision à la fois comportementale et compartimentée de l'éducation comptait en 1979 plusieurs détracteurs dans le milieu éducatif américain[4], incluant certaines personnes impliquées dans la conception de programmes d'éducation orientés-compétences (Neumann, 1979).

En effet, vers la fin des années 70, le milieu éducatif américain connaissait un regain d'intérêt pour l'approche par compétences, parce que les niveaux de compétence jusque là considérés comme acceptables pour la société se révélaient inadéquats au regard de la complexification de cette société et de la multiplication des connaissances (Riesman, 1979). Mais cet intérêt se dirigeait de plus en plus vers la seconde forme de cette approche, introduite par Dewey en réaction immédiate à la première jugée antidémocratique et considérée comme une insulte à l'individu et à la société (Neumann, 1979):

> « *To predetermine some future occupation for which education is to be a strict preparation is to injure the possibilities of present development and thereby reduce the adequacy of preparation for a future right employment. (...) In an autocratically managed society, it is often a conscious object to prevent the development of freedom and responsibility; a few do the planning and ordering, the others follow directions and are deliberately confined to narrow and prescribed channels of endeavor.* »
>
> John Dewey, *Democracy and Education,* 1915.

Tout comme Bobbitt, Dewey reconnaissait que l'éducation devait préparer à la vie. Mais ce qui distingue d'abord Dewey, c'est d'avoir affirmé que cette vie ne pouvait se résumer à un rôle, qu'il était nécessaire de considérer la multitude de rôles impliqués. Pour Dewey, le curriculum idéal devrait être suffisamment large pour couvrir la richesse des possibilités: compréhension par l'histoire des conditions présentes, formation en sciences pour

[4] Il convient de rappeler qu'en cette même année 1979, on publiait au Québec le fameux Livre Orange qui, en dépit de principes éducatifs plutôt humanistes, allait lancer une vaste réforme des programmes au secondaire dont les quelques milliers d'objectifs de comportement témoignent d'une assimilation certaine des “principes de gestion scientifique”.

développer l'intelligence et l'initiative, éducation économique, civile et politique pour comprendre les problématiques et les processus associés. Et surtout, ajoutait-il, ce curriculum devrait développer le *pouvoir de réadaptation aux conditions changeantes*, de façon à ce que les futurs travailleurs ne deviennent pas aveuglément assujettis à un destin qui leur aurait été imposé. Cette position, qui nous paraît visionnaire avec le recul, trouve écho de nos jours dans l'appel à la formation continue et la recherche d'une pédagogie du « *apprendre à apprendre* » (souvent éloignée, il faut bien le reconnaître, des préoccupations originales de Papert (1987)) que semblent imposer aujourd'hui la mutation accélérée du milieu du travail et l'effritement de la relation employeur-employé.

Toute cette discussion sur l'approche par compétences est fort intéressante, mais en quoi fait-elle avancer la réflexion sur l'enseignement des mathématiques? Rappelons ici simplement que nous cherchons à cerner les éléments qui favoriseront l'application des connaissances mathématiques, le passage du savoir théorique au savoir d'action. Or si ce savoir d'action se développe principalement avec l'expérience, il revient à la formation fondamentale d'en favoriser l'éclosion, en se questionnant sur les contextes d'utilisation future par l'étudiant du savoir mathématique, et donc sur l'ensemble des rôles qui peuvent en bénéficier. La notion de compétence apparaît donc utile pour analyser cette articulation, mais son succès populaire des dernières années a donné lieu à un certain galvaudage du concept. Puisque nous nous identifions à la seconde forme, plus globale, de cette approche, une mise au point par un retour aux sources nous était donc apparue nécessaire.

1.5 La résolution de problèmes comme cadre de développement

Cette recherche d'articulation dans l'apprentissage des mathématiques, par le biais des compétences, entre savoir théorique et savoir d'action s'apparente aux préoccupations de la didactique des sciences (Orange, 1997), où la compétence est présentée comme un concept plus « *modeste* » permettant de traduire en classe les enjeux, à la fois pour la société et pour l'individu, d'une « *culture scientifique* »: partage d'une technicité, bien sûr, mais aussi « *développement des structures mentales, des outils intellectuels, des capacités de penser qui ouvrent de nouvelles possibilités de compréhension* ». Les mots semblent avoir été choisis avec soin pour rallier l'école classique. On prend bien sûr la précaution de se distancier d'une approche béhavioriste et, dans le même élan, d'une orientation pragmatique :

> *« Tout d'abord, nous parlons bien de compétences, et non de simples habiletés, savoirs limités, souvent de nature procédurale. Les compétences s'appuient au contraire sur des savoirs étendus et explicites, et restent pertinentes pour une large classe de problèmes. »*[5]
>
> *« C'est donc tout naturellement que ces questions nous amènent à nous intéresser à la maîtrise des problèmes scientifiques par les élèves; à ce que nous avons appelé les* savoirs opérants. *Il ne faut pas y voir une orientation pragmatique de la biologie discipline scolaire, qui chercherait telle efficacité immédiate, mais bien la volonté d'ouvrir aux élèves le champ intellectuel des possibles. »*

Le travail d'Orange en didactique de la biologie est intéressant et potentiellement transférable au domaine des mathématiques. Il montre d'abord que la notion de compétence n'est utile que lorsqu'on y lie contenu et mise en œuvre, ou objets de savoir et méthodes. Si l'on définit plutôt, comme dans certains programmes, les compétences indépendamment du contenu (ex. *Distinguer les données utiles et les données négligeables*), on s'expose à deux critiques. La première est de donner à croire qu'on adopte la conception positiviste, dénoncée par Bachelard[6] et Canguilhem[7], d'une méthode scientifique générale. La seconde est de rendre absurde l'évaluation d'une compétence tout au long du parcours scolaire: reconnue comme acquise pour un élève à un certain niveau, elle ferait soudainement défaut au niveau suivant, pour la simple et bonne raison qu'elle ne porte évidemment plus sur les mêmes contenus.

Orange poursuit en suggérant que la mise en relation à travers la notion de compétence des contenus et de leur mise en œuvre se définisse par la *maîtrise de classes de problèmes*. Cette approche exploite le schéma circulaire qui lie de façon historique connaissances et problèmes[8] dans un phénomène d'alimentation mutuelle qui rappelle celui exposé dans la

---

[5] Ph. Perrenoud, "Enseigner des savoirs ou développer des compétences: l'école entre deux paradigmes" in *Les entretiens Nathan*, actes V, Paris, Nathan, 1995.

[6] G. Bachelard, *La formation de l'esprit scientifique*, Paris, Vrin, 1938

[7] G. Canguilhem, *Études d'histoire et de philosophie des sciences*, Paris, Vrin, 1983.

[8] K. Popper, *La connaissance objective*, Paris, Aubier, 1991 (éd. originale 1971).

section 1.2 pour lier les savoirs théoriques et les savoirs d'action: des connaissances peut naître un problème dont la résolution modifie la connaissance, et un problème entraîne des connaissances qui modifient à leur tour le champ des problèmes. On retrouve un discours similaire en didactique des mathématiques, avec Gascon Pérez (1996), qui définit l'*étude des champs de problèmes* comme une « *construction de champs de problèmes au fur et à mesure qu'avance le processus d'étude, par l'utilisation et surtout la production de techniques nouvelles (par variation ou par intégration). Ce développement de techniques et l'élargissement du champ de problèmes qui en découle crée de nouveaux besoins théoriques.* » Il associe l'*étude des champs de problèmes* à une forme d'interprétation de la résolution de problèmes pour l'enseignement qui englobe l'ensemble des dimensions de l'activité mathématique, contrairement aux perspectives réductionnistes du *théoricisme* (apprentissage de théories toutes faites, montrées par le professeur, où les problèmes ne servent que de support aux concepts théoriques), du *technicisme* (réaction au théoricisme par l'enseignement programmé de techniques de calcul et la réduction de la résolution de problèmes à l'application de ces techniques sur des problèmes canoniques) et du *modernisme* (réaction au technicisme par la définition de l'activité mathématique comme l'exploration libre et créative de problèmes ouverts ou non-triviaux et la dispersion volontaire des contenus).

Les problèmes, lorsque bien choisis, permettent la mise en concordance des faits et des théories, ce qui correspond dans l'activité scientifique à un double travail, signalé par Bachelard, car elle renvoie à deux approches, l'une plus expérimentale, l'autre plus théorique, et fait par conséquent appel à deux types de compétences bien distincts qui permettent d'aborder l'articulation entre savoirs théoriques et savoirs pratiques (ou expérimentaux). Orange les définit ainsi:

- *savoirs opérants expérimentaux*: compétences de construction et de conduite de protocoles expérimentaux, dans un cadre théorique donné, pour la mise à l'épreuve de résultats théoriques ou la mise en évidence de phénomènes;

- *savoirs opérants théoriques*: compétences pour l'élaboration de constructions théoriques, dans un paradigme, pour rendre compte de phénomènes, les expliquer, les prévoir.

On pourrait s'objecter à la transférabilité aux mathématiques de cet élément de l'analyse car après tout, il ne s'agit pas d'une science expérimentale à proprement parler, même si certains définissent volontiers les mathématiques comme une *« science expérimentale où chaque objet mathématique est un outil construit pour résoudre des classes de problèmes »* (Dupin, 1996). De toute façon, comme nous en avons discuté à la section 1.3, l'évolution qu'a connue l'activité mathématique avec l'informatique justifie d'autant plus qu'on s'intéresse aussi à l'aspect expérimental. Par ailleurs, l'apprentissage des mathématiques qui fait place à la résolution de problèmes met à l'épreuve les connaissances individuelles (qui peuvent être vues comme une projection personnelle, plus ou moins fidèle, des connaissances théoriques) et en ce sens incorpore inévitablement une composante expérimentale:

> *« C'est dans la résolution de problèmes que sont élaborées les notions (...) et que sont éprouvées les connaissances opératoires. »*
>
> Gérard Vergnaud, 1981

1.6 Les compétences à développer en mathématiques

S'il semble qu'on assiste à l'émergence d'un certain consensus sur le *« comment »* du développement des compétences en mathématiques, i.e. à travers l'expansion progressive du champ de problèmes dont on maîtrise la résolution, le *« quoi »* reste encore à définir. Quelles compétences ou, de façon équivalente, quels types de problèmes faisant appel à quelles méthodes et portant sur quels contenus devrait-on privilégier?

On peut associer compétences en mathématiques avec l'utilisation en contexte des différents *modes mathématiques de la pensée*. Une première classification de ces modes nous est donnée dans (NRC, 1989). Elle comprend la *modélisation*, l'*optimisation,* le *traitement symbolique*, l'*inférence*, l'*analyse logique* et l'*abstraction*. Cuoco (1998) en dresse une seconde liste qui inclut la *pensée algorithmique* (conception et utilisation d'algorithmes), le *raisonnement combinatoire* (ou comment compter sans compter), l'*expérimentation par la pensée* (la simulation mentale de systèmes aux interactions complexes), le *raisonnement proportionnel* (incluant la mesure et les probabilités), la *pensée algébrique* (incluant les propriétés des opérations dans les différents systèmes symboliques) et la *pensée topologique*. Cette seconde catégorisation semble être davantage liée aux domaines d'étude des mathématiques.

Ces classifications demeurent toutefois à un niveau très général. Il reste encore à répondre (dans l'ordre) aux deux questions suivantes: quels types de problèmes veut-on faire résoudre aux étudiants? Quels savoirs théoriques et quels savoirs pratiques permettent de les aborder?

Une précision s'impose ici. Par *type* de problème, nous entendons une catégorie suffisamment large pour justifier l'apprentissage d'un grand pan du savoir mathématique, avec sa logique, ses structures, ses liens internes et externes. Il faut éviter à tout prix le morcellement des connaissances qui résulterait d'un apprentissage comportemental par micro-habiletés. Et puisque nous nous situons sans hésitation dans le second courant de l'approche par compétences, il nous faut ratisser large dans la considération des problèmes à résoudre, en ne les limitant pas à ceux susceptibles d'être rencontrés dans la « vraie vie », mais en incluant aussi ceux qui fourniront des outils cognitifs nécessaires au développement du *pouvoir de réadaptation à des conditions changeantes*. L'aspect instrumentaliste de l'approche n'exclut donc pas une formation théorique solide contribuant au développement du raisonnement, bien au contraire. D'ailleurs comme ces conditions changeantes se retrouvent aussi au sein de l'entreprise, en se conjuguant à une multiplication des connaissances et à de nouveaux problèmes de plus en plus *complexes*, aux contextes d'action de moins en *moins structurés*, sur des objets de plus en plus *abstraits* (de Terssac, 1996), les entreprises joignent désormais leurs voix pour réclamer de la formation fondamentale qu'elle favorise le développement des habiletés d'analyse, de synthèse, de traitement de données numériques, de communication, des capacités d'apprentissage et du jugement critique (Resnick, 1987; Conseil Supérieur de l'Éducation, 1994). Après avoir remplacé le *« faire »* par le *« savoir faire »*, le monde du travail valoriserait maintenant à son tour le *« savoir que faire »* (de Terssac, 1996). Cette réalité devrait pouvoir rallier ceux qui croient encore qu'une préparation à une utilisation professionnelle des mathématiques pourrait aller à l'encontre du développement d'une *virtuosité* conceptuelle.

Quels *types*, donc, de problèmes faut-il considérer ? Deux changements majeurs dans la société nous apparaissent importants à prendre en compte dans une recherche d'articulation entre savoir théorique mathématique et savoir d'action : la complexification des problèmes et l'utilisation de ressources informatiques. Les deux sont évidemment liés dans un nouveau schéma d'alimentation mutuelle.

Pour favoriser la prise en compte éventuelle de la complexité des problèmes, sans doute faut-il éveiller à cette complexité. Plusieurs facteurs peuvent contribuer à rendre un problème complexe: la taille du problème (i.e. le nombre de variables impliquées), le bagage de connaissances requises (spécialisées ou interdisciplinaires) pour en comprendre les enjeux, des buts flous ou conflictuels, des données manquantes, des contraintes multiples et difficiles à satisfaire, etc. Ces problèmes font appel à la modélisation, à l'exploration, à l'analyse, à l'utilisation d'heuristiques, à la simplification, à l'ajout d'hypothèses, à une combinaison de techniques, d'algorithmes, etc. L'informatique, le génie, la gestion et autres applications actuelles des mathématiques sont riches en problèmes complexes.

L'ordinateur est en partie responsable de la complexification de ces problèmes car, avec ses possibilités de calcul et de visualisation, il ouvre les champs de problèmes accessibles, aussi bien à l'élève qu'au professionnel. De fait, l'analyse des transformations récentes de l'activité mathématique amène à penser que pour le mathématicien, aussi bien pour l' « appliqué » que pour le « pur », l'avènement de l'informatique a entraîné le développement de nouvelles *compétences*, et qu'une formation traditionnelle qui choisirait de les ignorer pourrait handicaper le passage au savoir pratique, même dans le cadre de la recherche fondamentale. Par ailleurs, pour le non-mathématicien ou pour celui qui utilise des concepts mathématiques dans un contexte appliqué (scientifique, ingénieur, technicien, architecte, médecin, gestionnaire, chercheur en sciences humaines ou sociales, etc.), cette évolution conjointe des mathématiques et de l'informatique a créé une situation où l'on a désormais à disposition une foule d'outils informatiques de calcul mathématique: logiciels statistiques, graphiques, de calcul numérique ou symbolique, etc. Cette situation pose sous un nouvel angle le problème des *compétences minimales* à développer en mathématiques (Hodgson, 1987) et mérite une attention particulière en raison de la multiplication et de la rapide évolution de ces outils et du nombre sans cesse croissant de travailleurs appelés à les utiliser.

Comment l'enseignement actuel contribue-t-il au développement de telles compétences? Quelles sont effectivement les compétences développées par les étudiants qui ont complété leurs études collégiales et qui sont engagés dans des études universitaires impliquant une application des mathématiques, telles le génie, la gestion, l'informatique? Comment ces compétences sont-elles utilisées dans les cours de mathématiques appliquées à leur discipline? Comment éclairent-elles notre compréhension des succès ou des difficultés des étudiants à ces cours?

Mais, pour mieux comprendre la portée de ces questions et mieux orienter notre recherche, d'autres questions doivent être examinées. Est-il raisonnable de vouloir développer de telles compétences à l'intérieur des cours de mathématiques du secondaire et du collégial ? Les caractéristiques de la pratique devraient-elles teinter l'apprentissage de la théorie? Quels avantages y voit-on? Comment le faire? Quelles sont les conditions à mettre en place? Quelles en sont les difficultés, les exigences ? Quels en sont les risques?

Ces questions feront l'objet du chapitre suivant où l'on étudiera la pertinence d'intégrer au cours de mathématiques des problèmes issus d'applications réelles et des moyens informatiques pour aider à les résoudre. Cette étude permettra de mieux cibler notre objet, nos questions et nos objectifs de recherche.

2 Cadre théorique

Le développement de compétences en mathématiques est un long processus qui commence bien avant les études universitaires. Comprendre les difficultés rencontrées par les étudiants universitaires peut permettre de mieux apprécier l'enseignement et de proposer, au besoin, des transformations curriculaires et didactiques. Dans la poursuite de ce but, il apparaît primordial d'analyser les rapports entre savoirs théoriques et savoirs d'action dans l'enseignement des mathématiques, et d'étudier les places respectives de l'application et de l'informatique dans l'évolution de ces rapports. Cette analyse est à la base de l'étude exploratoire qui est réalisée dans cette recherche et qui porte sur les compétences mathématiques observées chez des étudiants universitaires.

2.1 La place de l'application

Faire une place à l'application dans le cours de mathématiques, c'est allouer du temps pour *contextualiser* et *modéliser*. Dans la perspective de développement de compétences par la résolution de problèmes, l'intérêt didactique de la contextualisation et de la modélisation est difficilement contestable. Les difficultés associées à ces actions ne sont toutefois pas négligeables.

2.1.1 Contextualisation

La *contextualisation* par l'application ne vise pas la simple mise en scène d'un concept par le choix d'une situation simplifiée, surdéterminée, conçue pour illustrer rapidement ce concept et n'ayant que peu de rapport avec une application réelle. On cherche plutôt ici à faire comprendre un problème quasi-authentique, le plus réaliste possible, qui incorpore des informations non-mathématiques, dont la résolution fait typiquement appel à une combinaison de concepts et de méthodes mathématiques, et qui sert à la fois à illustrer ces concepts et méthodes, à témoigner de leur utilisation et à développer des savoirs pratiques de résolution de problèmes.

2.1.1.1 Potentialités de la contextualisation

Une des premières potentialités associées à la contextualisation touche à la *motivation.* Dans l'introduction à leur article traitant de scénarios de modélisation, Béguin, Marcellus et Vitale (1996) insèrent la citation suivante, dont on pourrait recueillir une version similaire un peu partout dans le monde:

> *"On nous apprend des tas de choses, on dit que ça nous servira plus tard, mais on ne nous montre pas dans quelle situation. Les mathématiques, c'est le meilleur exemple."*
>
> Olga Béguin, 13 ans, Genève

Pour décrire cette situation, Parnell (1998) parle de l' *« approche du congélateur »* (!) dans l'enseignement des mathématiques: on demande aux étudiants de conserver en mémoire à long terme des morceaux de savoir, isolés de toute application, et de croire l'enseignant qui leur assure qu'ils pourraient en avoir besoin plus tard et qu'ils seront en mesure de les retrouver intacts. Pour bien des étudiants, le travail au niveau abstrait est difficile; comme par surcroît, ils n'en voient pas l'utilité, ils se refuseraient tout simplement à l'apprentissage. À l'inverse, conclut Parnell (1998), si l'on dirigeait l'enseignement dans la recherche de liens entre le contenu disciplinaire et le contexte d'utilisation, entre l'école et les autres formes d'expérience, ainsi qu'entre les disciplines, on stimulerait l'intérêt chez les élèves et on favoriserait le développement de la pensée, des compétences et des outils nécessaires à la *« survie dans notre société complexe et interconnectée »* (!!!).

Car la force de la contextualisation ne résiderait pas uniquement dans la motivation. Elle permettrait d'attribuer un sens aux symboles et règles formels qui sont souvent enseignés comme des conventions arbitraires sans liens plutôt que comme l'expression d'invariants fondamentaux, de relations entre des quantités et des entités physiques (Resnick, 1987). Si l'on admet qu'un tel enseignement ne favorise pas chez l'élève la reconnaissance de liens entre les règles mathématiques et ses propres intuitions mathématiques développées de façon autonome, on peut comprendre qu'on ait pu assister simultanément à un accroissement des habiletés de calcul chez les élèves et à une régression des habiletés liées à la résolution de problèmes. La contextualisation d'un concept pourrait aider à en reconstruire le sens, à condition, tout comme pour le recours à l'exemple, qu'elle ne se limite pas à un seul contexte; si un seul contexte peut difficilement être source de motivation pour tous les élèves, ses particularités font de plus écran à la généralité du concept et pourraient par conséquent nuire au transfert à d'autres problèmes.

Par ailleurs, et c'est là un élément important dans une perspective qui cherche à développer des compétences, les applications contemporaines des mathématiques, aussi bien dans le monde du travail que dans celui qui entoure de plus près l'élève, regorgent de problèmes très riches d'un point de vue mathématique. Leur intégration à l'enseignement des mathématiques permettrait d'appréhender la *complexité* et de s'adapter progressivement à la *variabilité* de contextes d'utilisation, au caractère local ou interdisciplinaire de certaines connaissances, et d'en dégager les invariants.

De plus, en fournissant des contextes qui se prêtent bien à l'élaboration de projets "*complexes et ouverts*", à réaliser en équipe, l'utilisation de l'application semble aussi aller dans le sens d'une pédagogie *"constructiviste"*, en vogue maintenant aussi aux États-Unis (Bailey, 1998).

Finalement, en raison du fait qu'elle peut combiner des mathématiques de haut calibre avec la prise en compte de leur utilisation en milieu de travail, l'intégration de l'application au cours de mathématiques pourrait permettre d'éviter l'approche du *"tracking"*, très répandue aux États-Unis bien que souvent dénoncée, qui consiste à séparer les élèves du secondaire en deux voies: académique (en préparation à des études supérieures) et professionnelle (en préparation au marché du travail) (Bailey, 1998; Forman et Steen, 1994). Les deux groupes d'étudiants en bénéficieraient, avec, d'une part, une compréhension plus en profondeur des concepts et une meilleure rétention pour ceux qui poursuivent leurs études, et d'autre part, un souci de développement d'habiletés intellectuelles de haut niveau pour ceux qui prévoient passer au milieu du travail, en accord avec les nouvelles exigences de ce milieu et comme préparation à une éventuelle poursuite au niveau universitaire (Bailey, 1998).

2.1.1.2 Difficultés de la contextualisation

La contextualisation demande du temps et des ressources, difficilement disponibles si elle n'est pas intégrée au *curriculum*. Or, repenser un curriculum académique en intégrant une perspective d'application est un exercice qui ne s'inscrit pas dans la tradition curriculaire, ni dans celle de l'école classique, ni même dans celle de l'école pragmatique. Aux États-Unis, les mathématiciens qui s'intéressent au curriculum de la formation fondamentale le font principalement dans une perspective de préparation à une formation universitaire mathématique ou scientifique et ne se soucient pas vraiment de l'utilisation des concepts mathématiques en milieu de travail; ceux qui en revanche définissent les mathématiques enseignées dans le secteur professionnel privilégient le développement d'habiletés essentiellement techniques et ne cherchent pas à développer une compréhension du savoir mathématique (Forman et Steen, 1994).

Qui plus est, les enseignants eux-mêmes ont généralement une *expérience* limitée d'application du savoir mathématique qu'ils enseignent, avec pour la plupart aucune expérience de travail autre que celle acquise en milieu éducatif (Parnell, 1998; Forman et Steen, 1994). Le mot-même d'*application* semble prêter à confusion: les interprétations sont très variées (Roitman, 1995), de celle qui y voit l'application d'un concept à d'autres domaines des mathématiques (comme le souhaitent d'ailleurs certains professeurs de mathématiques à l'université), à celle qui l'entend comme l'application d'une technique simple de calcul à la vie quotidienne de l'élève.

En laissant plus de place à l'application, on voit aussi le risque d'un enseignement qui viserait les *procédures* au dépens des concepts (Taylor, 1998), ou qui, par l'importance accordée à la notion d'utilité, négligerait même la démarche au profit de la *solution* (Bkouche, Charlot, et Rouche, 1991). Une façon de se prémunir contre ce danger serait de se rappeler que les procédures utilisées en milieu de travail sont souvent appelées à être modifiées pour s'adapter aux changements contextuels, et que pour pouvoir rendre les élèves aptes à participer à de tels changements (plutôt qu'à les subir) et à identifier de façon autonome les nouvelles solutions à considérer, il faut maintenir une place importante pour l'apprentissage des concepts mathématiques sous-jacents. En d'autres termes, dans un environnement de travail qui fait appel à des connaissances mathématiques, la compétence repose nécessairement sur un savoir théorique.

À cela, il faut ajouter un problème de perception. Pour bien des mathématiciens et bien des enseignants, les mathématiques appliquées sont perçues comme des mathématiques de second ordre (Breiteig, 1994). On pourrait ajouter que de passer systématiquement par une motivation extérieure aux mathématiques, par un sens extrinsèque, on semble nier la possibilité (qui existe pour certains, les mathématiciens en sont la preuve) d'y trouver un sens, une valeur, une motivation intrinsèques. Il faudrait veiller à ne pas tomber dans un nouvel excès.

Anderson, Reder et Simon (1995) se sont donné comme mission de critiquer la contextualisation excessive telle qu'elle semble vouloir émerger dans le discours de l'apprentissage contextualisé où l'abstraction est dénigrée et où l'on clame que tout apprentissage doit être ancré dans un contexte d'utilisation. Ils utilisent les résultats d'expériences en psychologie pour montrer que les connaissances apprises à un niveau abstrait sont plus facilement transférables à des situations nouvelles. À la lumière des recherches les plus récentes, les auteurs signalent, qu'en termes d'apprentissage, la stratégie gagnante consisterait à combiner un enseignement à un niveau abstrait avec des exemples concrets. De plus, ils mettent en garde contre la recherche d'authenticité absolue dans le contexte de résolution des problèmes concrets, car la démarche de résolution s'alourdit alors d'une dispersion des efforts dans des tâches répétitives sans grand intérêt cognitif. Quant à la complexité des problèmes à considérer, ils recommandent fortement de la choisir en relation avec la complexité de la "tâche" visée par l'apprentissage, en n'oubliant pas qu'une tâche complexe peut être décomposée en sous-tâches plus simples. Si l'on sent des relents de béhaviorisme dans le paradigme du traitement de l'information adopté par des cognitivistes comme Anderson (on parle de tâches et non de concepts, ceux-ci étant moins facilement décomposables...), il reste que la plupart des arguments amenés méritent considération.

Notamment au niveau du temps requis par la contextualisation, à la fois pour la recherche des problèmes, leur présentation et leur résolution, il est sûr qu'il s'agit là d'une surcharge non-négligeable qui dépend fortement du niveau d'authenticité visé. Il est sans doute nécessaire de simplifier dans bien des cas, mais ce faisant, il faudrait toutefois veiller à ne pas simplifier à outrance et rendre ces problèmes inutiles et même néfastes dans les fausses représentations qu'ils génèrent.

2.1.2 Modélisation

La *modélisation* mathématique permet le passage du problème contextualisé à une forme manipulable par les outils mathématiques, appelée *modèle mathématique*. Elle implique typiquement (mais pas exclusivement) une définition des variables, des paramètres, et une mise en équations.

Dans la trilogie d'Astolfi et Drouin (1992), le modèle résultant de la modélisation mathématique (ou *mathématisation*) retient en premier lieu la dimension formelle. Ceci le distingue des autres formes de modèles scientifiques qui privilégieront tantôt l'aspect figuratif (avec l'image: maquette, schéma, analogie, etc.) tantôt le côté construit (avec la théorie) (Dupin, 1996). Il n'est évidemment pas exclu que la modélisation mathématique s'accompagne de la création de schémas ou même de théories, bien au contraire. Tous ces modèles ont en commun d'être une construction intellectuelle à partir d'un objet pour rendre compte d'une réalité.

2.1.2.1 Potentialités de la modélisation

Orange a étudié l'utilisation de la modélisation en classe de biologie. Selon lui, la construction de modèles est une *« compétence essentielle pour un scientifique et certainement parmi les plus intellectuellement riches car les modèles sont des outils d'intelligibilité »*. Vertus pratiques et intellectuelles, donc. Poursuivant dans cette voie, il énonce que *« la recherche d'un 'savoir-modéliser' est certainement identique à la recherche d'un savoir théorique pris dans tout son sens opérationnel. »* On retrouverait donc ici une voie pour rallier les deux écoles de l'enseignement des mathématiques, pour viser la compétence en conjuguant savoir théorique et savoir d'action. Même son de cloche chez Di Martino, Legrand et Pintard (1996) pour qui *« la compréhension du jeu de la modélisation scientifique est un préalable à la compréhension scientifique des concepts* *fondamentaux de toute science; son approfondissement doit donc (pour que le sens soit préservé) être explicite et (pour le moins) concomitant à l'introduction de ces concepts. »*

De fait, on peut supposer que la modélisation permet de comprendre par l'action les caractéristiques très riches du modèle, telles que décrites par Dupin (1996): le modèle est calculable, explicatif, prédictif, pertinent, cohérent à la fois de façon interne (avec ses différentes composantes) et de façon externe (avec la réalité qu'il cherche à représenter). Le modèle conjuguerait donc plusieurs propriétés qui le rendent très intéressant autant d'un point de vue utilitaire que d'un point de vue cognitif.

La modélisation dans l'enseignement des mathématiques permet aussi de donner à l'algèbre une fonction d'outil en l'utilisant comme langage opératoire permettant de formuler et de résoudre un problème (Capponi et Balacheff, 1989). Cette fonction qui peut aider à conférer à l'algèbre une pertinence aux yeux des élèves pourrait aussi favoriser la distanciation souhaitée avec l'arithmétique, lors du difficile passage de l'une à l'autre.

Béguin, de Marcellus et Vitale (1996) abondent dans ce sens. À partir de leurs observations d'expériences de modélisation mathématique de phénomènes physiques et biologiques avec des élèves de douze à seize ans, ils énumèrent un certain nombre de bénéfices retirés par l'élève d'une activité de modélisation:

- le renforcement de notions fondamentales de la pensée formelle (ex. variable),
- la maîtrise et la contextualisation des opérations élémentaires de calcul et de représentation graphique,
- le développement du concept de relation fonctionnelle,
- la facilitation du passage de l'arithmétique à l'algèbre.

Finalement, plusieurs études en psychologie cognitive ont souligné le rôle déterminant de la *représentation* du problème dans les capacités de résolution (Hinsley, Hayes et Simon, 1977; Chi, Feltovich et Glaser, 1981). Puisqu'en mathématiques comme en sciences, cette représentation fait largement appel aux capacités de modélisation, le développement de celles-ci pourrait favoriser les capacités de résolution.

2.1.2.2 Difficultés de la modélisation

Si la contextualisation semble être un élément favorisant la motivation à l'apprentissage, il n'est pas sûr que cette motivation profite à la modélisation. Bien que l'élève puisse être motivé à identifier les règles qui régissent un phénomène physique, il peut très bien se contenter d'un énoncé spontané (ex. *« un liquide se refroidit plus quand il est chaud »*) en ne voyant pas la pertinence de lui substituer un énoncé plus formel (ex. *« dans un intervalle de temps, la chute de température est proportionnelle à la différence entre la température instantanée et la température environnante »*) et encore moins la formule mathématique qui lui est associée (Béguin, Marcellus et Vitale, 1996). Pour reprendre la terminologie de Dupin (1996), on pourrait dire que l'élève peut se contenter d'un modèle dont l'aspect *explicatif* le satisfait et que s'il n'a pas à construire des expériences comme le scientifique dans son travail, il n'est alors que très peu sensible aux aspects *prédictif, calculable* et donc économique du modèle. Ceci ramène peut-être à la nécessité d'utiliser comme situations d'apprentissage un ensemble d'applications suffisamment complexes et authentiques qui pourraient alimenter la motivation à trouver des moyens de résolution économiques et réutilisables, et donc à se réconcilier avec une approche plus formelle.

Par ailleurs, si le cours de mathématiques prétend à un certain degré d'interdisciplinarité par l'intégration d'applications, il lui faut reconnaître que le modèle formel n'est pas le seul modèle envisageable. Orange (1997) regrette la domination des équations au royaume des modèles, regret d'autant plus compréhensible que la biologie à laquelle il s'intéresse fait plus souvent usage de modèles analogiques que de modèles algébriques. Pour rallier à sa cause ceux qui voient le modèle mathématique comme le seul modèle accompli, il rappelle que la théorie mathématique des catastrophes de Thom fait appel à des modèles topologiques et qualitatifs, et non quantitatifs. Selon Orange, il est incorrect de réduire un modèle à un ensemble d'équations, car *« une même loi mathématique peut correspondre à plusieurs modèles »*, plus riches en informations sur les relations impliquées, et une loi, toute mathématique soit-elle, peut être une image erronée de la réalité. Pour prétendre au statut de modèle, une représentation abstraite doit garder comme composantes le processus de construction qui l'a fait naître et les liens avec la réalité qu'elle essaie de représenter. *« Ce ne sont pas les lois qui donnent sens au modèle, mais les images des objets (...) qui se* *cachent derrière. »* Si l'on a toujours utilisé à l'intérieur du cours de mathématiques des modèles autres que le système d'équations (la figure géométrique ou les différents diagrammes relationnels en sont des exemples), peut-être faudrait-il rendre explicite ce statut de modèle et ouvrir la porte à d'autres modèles de ce genre (en incluant les schémas structurels: arbres, listes, graphes, etc.) pour favoriser une meilleure compréhension du processus de modélisation, et une articulation plus naturelle avec les autres sciences.

La modélisation en classe souffre aussi d'un manque de tradition didactique (Dupin, 1996). Elle introduit un nouveau contrat didactique où *« l'élève a maintenant le droit et même le devoir de formuler des hypothèses »* . La question de la *dévolution du problème*[9] reste entière et implique que le problème doit être suffisamment ouvert aux yeux de l'élève pour motiver à la recherche d'un modèle, tout en demeurant à sa portée pour qu'il puisse mettre en oeuvre ses connaissances. La contrainte imposée par le *temps* crée une tension entre la volonté de modéliser et l'efficacité de la démarche. Si, comme le soutiennent Di Martino, Legrand et Pintard (1996), *« l'enseignement de la modélisation est une opération didactique très subtile et toute naturalisation ou imposition trop rapide à ce niveau peut devenir métaphoriquement contradictoire avec le sens de l'enseignement envisagé »*, il faut allouer du temps pour discuter des critères de validation d'un modèle, choisir en fonction les hypothèses des modèles à construire, et discuter de la pertinence des modèles « tout faits » à utiliser pour résoudre des problèmes.

La prise en compte de la modélisation dans le *curriculum*, qui pourrait aider à dégager du temps, pose la double difficulté de l'intégration dans une perspective curriculaire des processus de modélisation (associables au savoir d'action) et des modèles produits (associables au savoir théorique). Une approche par l'*étude de champs de problèmes* (Gascon Pérez, 1996) pourrait apporter des pistes intéressantes. Mais il reste à apporter une réponse claire à la question suivante: que va-t-on institutionnaliser et évaluer par conséquent? Le processus de modélisation ou le modèle produit?

[9] « La dévolution est l'acte par lequel l'enseignant fait accepter à l'élève la responsabilité d'une situation d'apprentissage (a-didactique) ou d'un problème et accepte lui-même les conditions de ce transfert.» (Brousseau, 1998, p.325)

Sur ce thème, Dupin (1996) relate le récit d'une expérience d'enseignement de modélisation en sciences menée auprès d'étudiants de niveau universitaire. Devant leur incapacité au moment de l'évaluation à modéliser de nouveaux problèmes dont la structure profonde (i.e. le système) était pourtant jugée proche de celle d'un problème vu précédemment, les professeurs substituèrent progressivement aux problèmes posés à l'évaluation des problèmes de plus en plus semblables aux problèmes vus en classe. La compétence évaluée se déplaça donc insidieusement de la *modélisation* de problèmes à la *reconnaissance* et la *reproduction* de problèmes modélisés. Peut-être faudrait-il reconnaître que le temps est une composante non-négligeable du processus de modélisation et envisager par conséquent de nouveaux modes d'évaluation (ex. travaux pratiques), qui alloueraient le temps nécessaire à la conception et à la validation d'un modèle.

À la lumière de leurs travaux, Béguin, de Marcellus et Vitale (1996) ont identifié des conditions nécessaires à la réussite de l'activité de modélisation en classe:

- L'activité de modélisation doit être *enracinée dans une situation concrète* : elle renvoie donc immanquablement à une contextualisation.
- Elle doit faire preuve d'un *dosage délicat d'incitation à la découverte* (heuristique) et de *transmission de connaissances.*
- Elle doit s'insérer à l'intérieur d'un *entraînement progressif à partir de situations simples.*
- Elle requiert une formation spécifique des enseignants.

2.2 La place de l'informatique

L'informatique est au cœur de nombreux débats dans l'enseignement des mathématiques, car elle en modifie considérablement le paysage. On pourrait reprocher à certains tenants de l'intégration dans la classe de mathématiques d'éléments informatiques (matériel, logiciels, concepts) de succomber à une *« propension à survaloriser la nouveauté »* (Chevallard, 1992a), mais, utilisée seule, cette affirmation ne rendrait pas justice au rapport très riche qu'entretient l'informatique avec les mathématiques (voir section 1.3) et qu'il apparaît raisonnable de vouloir exploiter dans l'enseignement. Ce rapport va au-delà du simple soutien par l'informatique de l'apprentissage de mathématiques traditionnelles, voie par ailleurs très souvent privilégiée dans l'enseignement.

Ces considérations serviront de repères dans les sections suivantes.

2.2.1 Approches d'intégration dans l'enseignement

La richesse du rapport qu'entretiennent les mathématiques avec l'informatique et l'utilisation croissante de l'ordinateur par les mathématiciens amènent à considérer l'ordinateur comme un outil pour l'enseignement des mathématiques et cela, même dans une perspective de formation essentiellement théorique. Par ailleurs, le potentiel d'individualisation de l'apprentissage par l'intermédiaire de la machine encourage aussi l'exploration des différentes approches d'utilisation en mathématiques des outils informatiques. Si l'on compte un grand nombre d'approches possibles, celles-ci ne contribuent pas de façon égale aux différents objectifs visés par l'intégration des outils informatiques. Pour faire le tri qui s'impose, Cornu (1992) distingue d'abord différentes approches matérielles:

- l'ordinateur *tableau noir* utilisé par l'enseignant pour une présentation du savoir,
- l'ordinateur *outil de laboratoire*, typiquement en réseau, utilisé par les élèves en séance de travaux pratiques,
- l'ordinateur *ressource* utilisé par l'élève en dehors des heures de cours pour des séances d'entraînement, d'approfondissement ou d'évaluation,
- l'ordinateur *à la maison*, utilisable par l'élève mais peu ou pas pris en compte par l'enseignement en dépit du fait que de plus en plus d'élèves possèdent un ordinateur à la maison,

- la calculatrice de poche, dont les possibilités numériques, graphiques et maintenant symboliques qui s'ajoutent à celles de programmation en font une alternative économique et pratique à l'ordinateur.

Il convient ensuite de superposer les différentes *approches logicielles* (Balacheff, 1994; Cornu, 1992), chacune applicable à un sous-ensemble d'approches matérielles, et qu'on peut regrouper en trois grands groupes: la *programmation*, l'utilisation de *logiciels d'apprentissage* et l'utilisation de *logiciels-outils*.

- La *programmation* (ex. FORTRAN, C, C ++, JAVA) est sans doute une des premières approches logicielles à avoir fait son entrée dans la classe de mathématiques. Même si elle est semée d'embûches en raison de la grande artillerie informatique à déployer à l'intérieur d'un cours de mathématiques (Johnson, 1987; Tall, 1992), elle compte encore d'irréductibles adeptes qui voient en elle la voie privilégiée pour apprécier toute la richesse du rapport entre mathématiques et informatique (Mandelbrot, 1987; Rouchier, 1992; Graf, 1992) et à qui la simplicité d'utilisation des plus récentes calculatrices graphiques programmables apporte de nouvelles munitions (Côté, 1998).

- Les *logiciels d'apprentissage* ne sont pas non plus des nouveaux venus en enseignement des mathématiques. Ils visent d'abord et avant tout l'apprentissage d'un contenu mathématique et, à moins d'intégrer à ce contenu des éléments informatiques comme c'est le cas avec la programmation dans LOGO, ils ne contribuent pas de façon directe à la compréhension de l'informatique et de sa relation avec les mathématiques. On peut les diviser en quatre sous-catégories:

- les *systèmes-tuteurs* (ex. GEOMETRY-TUTOR, MON PROF DE MATH) : bien que ce soient les ancêtres des didacticiels et qu'ils aient beaucoup été critiqués, il est remarquable de constater qu'ils continuent de se multiplier, derrière des interfaces plus ou moins conviviales. Ils ont pour caractéristique commune de laisser très peu d'initiative à l'étudiant en encadrant fortement son action. On y retrouve deux grands paradigmes de conception: le *dialogue tutoriel*, proche d'un enseignement frontal, et l'*accompagnement directif* en résolution de problèmes qui traite l'erreur avec rétroaction immédiate et éventuellement indication de la correction à apporter. Ces derniers systèmes ont été particulièrement critiqués pour leur réduction de l'apprentissage à une sorte de dressage aux réactions particulières du tuteur, sans la nécessité de passer par la connaissance.

- les *micromondes* (ex. LOGO, CABRI-GÉOMÈTRE) : un micromonde se définit par *« la création de réalités matérielles et artificielles épurées de tout bruit parasite de l'authentique réel et fournissant un modèle (au sens des logiciens) d'une théorie »* (Capponi et Laborde, 1996). Au contraire des systèmes-tuteurs, les micromondes laissent « toute » l'initiative à l'apprenant (à l'intérieur des contraintes nécessaires à la communication); sans régulation extérieure, représentée au moins par une tâche donnée précise, la nature et le contenu d'éventuels apprentissages ne peuvent être déterminés a priori (Balacheff, 1994). Capponi et Laborde (1996) rapportent qu'après des débuts euphoriques avec Minsky et Papert dans les années 70 laissant croire aux possibilités de reconstruction spontanée chez l'élève des théories ainsi modélisées, quelques expériences ont montré vers la fin des années 80 que les apprentissages attendus ne se produisaient pas (ex. Hillel et Kieran, 1987). On a alors identifié la nécessité de l'organisation didactique d'un milieu, des interventions de l'enseignant, de phases d'institutionnalisation et d'une analyse du micromonde en termes de validité épistémologique (Balacheff et Sutherland, 1994). On note ici un parallèle frappant avec l'évolution de la Théorie des situations (Brousseau, 1986 et 1997).

- les *« nouveaux didacticiels »* (ex. DÉFI-CABRI) : ces didacticiels représentent une solution intermédiaire entre les systèmes-tuteurs et les micromondes. On y retrouve deux paradigmes de conception (Balacheff, 1994): le *système-coach* qui laisse une liberté apparente et ne donne de rétroaction aux erreurs que si l'on a la certitude que l'élève est en position de faiblesse, et la *découverte guidée* qui vise un état d'équilibre en prenant en compte l'état de l'apprenant d'une part, et la complexité de l'objet d'enseignement d'autre part

- les logiciels de *simulation* et de *visualisation* (ex. STELLA, IMAGICIELS) : certains de ces logiciels intègrent une démarche pédagogique, d'autres ne servent que comme outil de visualisation reposant sur une analyse didactique et pédagogique externe, dans l'approche de l'ordinateur tableau-noir (Cornu,1992). Ils permettent une visualisation dynamique qui peut servir à enseigner la modélisation, l'analyse, les fonctions, la géométrie des transformations, etc.

Contrairement aux logiciels d'apprentissage, les *logiciels-outils* n'ont pas été (exclusivement) conçus dans une perspective d'apprentissage, mais plutôt dans une perspective d'utilisation, comme aide à l'analyse de données ou, de façon plus générale, à la résolution de problèmes. Puisque leur fonction exige d'eux qu'ils soient très flexibles pour s'adapter aux différents problèmes à résoudre, ils laissent donc une grande liberté à l'utilisateur qui choisit les conditions d'entrée et les commandes à exécuter. Sur ce plan, on pourrait donc penser à les rapprocher des micromondes lorsqu'on les utilise dans une perspective d'apprentissage des mathématiques. Quatre types de logiciels-outils sont particulièrement intéressants dans un tel contexte:

- les *tableurs* (ex. EXCEL) : ces logiciels sont couramment utilisés pour l'établissement d'un budget, la planification, et d'autres tâches comptables. Bien qu'utilisés depuis de nombreuses années pour la comptabilité et la gestion, l'intérêt pour l'utilisation des tableurs dans l'enseignement des mathématiques est relativement récent (Cornu, 1992). Ils offrent en plus des possibilités de calcul itératif, permettent la gestion commode des paramètres et des variables, et se révèlent utilisables pour l'apprentissage de l'algèbre (Capponi et Balacheff, 1989), des calcul itératifs (étude de suites, étude de fonctions, résolution des équations, ...), des statistiques, etc.

- les *logiciels de calcul numérique* (ex. MATLAB): ces logiciels puissants, conçus spécifiquement pour le calcul scientifique et largement utilisés dans la communauté des ingénieurs, permettent la résolution numérique de systèmes complexes d'équations, et la visualisation des résultats par leurs capacités graphiques. Ils intègrent en outre des éléments de programmation pour décrire les systèmes à résoudre. L'utilisation de tels logiciels en classe est plus fréquente au niveau universitaire dans un contexte d'application (ex. École Polytechnique), mais certains essais ont été faits dès le niveau secondaire pour introduire les concepts sous-jacents à la modélisation et la programmation (notamment dans le cadre du projet *Envision It!* aux États-Unis[10]).

- les *logiciels de calcul symbolique* (ex. MAPLE, DERIVE, MATHEMATICA, MATHCAD) : ces logiciels permettent d'effectuer un traitement symbolique (algébrique) d'expressions mathématiques (par opposition à un traitement numérique). Ils intègrent pour la plupart à la fois une composante graphique qui permet de visualiser les objets mathématiques (ex. une fonction à deux variables) ainsi qu'une composante numérique qui permet de calculer la valeur d'une expression (ex. une intégrale définie entre deux valeurs a et b) ou de résoudre un système d'équations, mais cette dernière composante est de loin plus modeste que dans les logiciels de calcul numérique. L'utilisation de tels logiciels en classe aux niveaux collégial et universitaire a mis du temps à être acceptée par les professeurs, et si elle ne fait pas encore l'unanimité, le phénomène de leur intégration semble en voie de se généraliser[11].

2.2.2 Potentialités de l'intégration

Dans une perspective d'enseignement, et ceci à travers les différentes disciplines enseignées, ce qui a rapidement milité en faveur d'une technologie informatique éducative a sans contredit été la possibilité d'un *enseignement plus convivial et individualisé*, s'adaptant au rythme et aux besoins de l'élève. Mais de façon intéressante, ce n'est ni cet élément ni la possibilité de « vérifier ses réponses » qui semblent retenir l'attention de ceux qui se portent avec conviction à la défense de l'intégration des outils informatiques à l'intérieur du cours de mathématiques. Là encore, on retrouve des arguments issus d'une école plus théorique des mathématiques (qui intègre souvent les arguments pédagogiques et didactiques) et d'autres qui proviennent d'une perspective plus appliquée.

Certains y voient une *aide à la motivation* par l'expérimentation et la manipulation, tôt dans la vie de l'élève, d'objets mathématiques « séduisants » (Sendov, 1987; Mandelbrot, 1994), inaccessibles dans tout autre contexte, du fait de leur complexité inhérente. Prêchant pour

---

[10] http://www.ties.k12.mn.us/envision/

sa paroisse, et non sans raison, Mandelbrot élève au rang de tels objets les fractals qui ont connu un succès qu'on pourrait presque qualifier de « populaire », mais inclut aussi la dynamique du chaos et l'infographie en général.

Cette position semble partager à la source certains éléments avec celle qui soutient que les outils informatiques permettent de « *passer outre des obstacles mathématiques pour continuer à apprendre* » (Artigue, 1997), bien que dans ce cas, on s'intéresse davantage à la connaissance qu'à la motivation.

Un argument qui semble rallier tous les tenants de l'utilisation en classe d'outils informatiques est cette possibilité qui est offerte à l'élève de mieux *intégrer les différentes représentations (graphique, numérique et symbolique)* de mêmes concepts mathématiques, grâce aux fonctions des logiciels qui permettent de passer facilement de l'une à l'autre. Des expériences d'apprentissage de l'analyse ont montré que les groupes ayant utilisé dans leur apprentissage un logiciel qui intégrait les trois représentations ont développé une meilleure compréhension des concepts de fonction, limite et dérivée (Tall, 1992; Schwartz et Dreyfus, 1995). De même, cette approche permettrait à l'étudiant de découvrir le sens des équations différentielles, en leur associant une image par la représentation du champ de pentes associées (Tall, 1992; Beaudin, 1998).

On pourrait craindre un déplacement de l'activité mathématique de la réflexion vers la simple utilisation d'outils, mais plusieurs voient au contraire dans certaines des approches informatiques une aide au *développement de la rigueur et des compétences d'explicitation*. Rouchier (1992) attribue à l'activité de programmation la nécessité d'expliciter de façon rigoureuse, en relation avec la connaissance qu'on a du dispositif programmable, les modèles qu'on engage à propos de l'objet du programme. Mandelbrot (1994) concourt en ce sens et va jusqu'à proclamer que l'ordinateur est le seul véritable ami de la rigueur:

> « *When I was a student a non-rigorous proof did not order me to try harder. In the case of a computer program, on the contrary, being rigorous is not simply an esthetic requirement; in most cases, a non-rigorous program fails completely, and*

---

[11] 2e colloque - *Utilisation des calculateurs symboliques dans l'enseignement,* Montréal, ETS, 7 novembre 1998.

> *the slightest departure from absolute rigor makes it scream 'error' at the programmer.* »

Même les frustrations qu'engendre l'échec à faire fonctionner également un même programme dans deux systèmes d'opération différents sont vues par Mandelbrot comme une *illustration* très riche par la technologie *de la variabilité et du côté arbitraire des systèmes axiomatiques*. En ce sens, on pourrait ajouter que cette illustration contribue à *préparer au caractère de plus en plus éphémère, local et arbitraire des connaissances* que l'individu sera appelé à acquérir plus tard dans sa vie professionnelle.

La programmation n'est pas la seule voie perçue comme pouvant contribuer au développement de la rigueur. Hodgson (1987) présente l'utilisation de calculateurs symboliques comme une étape facilitant le passage à la conception d'une preuve formelle par la possibilité qu'ils offrent au mathématicien (ou à l'étudiant) de vérifier les hypothèses qu'il aura formulées.

Cette séquence *formulation-vérification* est d'ailleurs au cœur de l'*approche inductive* favorisée par l'expérimentation. En faisant de l'activité mathématique au niveau scolaire une activité plus *expérimentale* grâce à l'informatique, on se rapprocherait des pratiques scientifiques de référence, aussi bien en recherche fondamentale qu'en recherche appliquée (Cornu, 1992).

Les possibilités de calcul de l'ordinateur ouvrent par ailleurs considérablement le champ de problèmes qu'il devient envisageable de considérer dans le cadre scolaire. On peut désormais espérer aborder des problèmes qui intègrent un niveau de complexité jusque là inabordable, des *problèmes plus riches, plus vastes, plus près de la réalité*. Au delà de l'*aide à la motivation* qu'une telle approche semble permettre (Artigue, 1997; Parnell, 1998) on peut supposer qu'elle aide à libérer du temps pour travailler au niveau de la modélisation et pour développer des capacités de résolution de problèmes, un sens de la complexité, et une saine modestie face aux problèmes issus du monde réel. Ce faisant, elle favoriserait le passage au savoir pratique tel que défini par Lehmann (1996).

2.2.3 Difficultés de l'intégration

Tous les arguments en faveur de l'intégration de l'informatique au cours de mathématiques semblent extrêmement prometteurs, mais sans vérification dans la réalité que constitue une classe, ils demeurent eux-aussi essentiellement théoriques et, à la limite, peuvent même être associés à un discours de propagande naïve qui verrait dans l'introduction de l'ordinateur l'occasion de renouveler un enseignement vu comme sclérosé (Artigue, 1997; Chevallard, 1992a). Dans le domaine de l'enseignement des mathématiques, comme dans toute autre sphère de l'activité humaine, il convient de développer un savoir pratique qui résulte d'une analyse des conditions et des résultats de mise à l'essai des idées. Car, il ne faut pas se leurrer, l'intégration de la technologie informatique dans le cours de mathématiques comporte sa part de difficultés.

2.2.3.1 Des conditions à établir

Bien que souvent occultées, les *difficultés logistiques* de cette intégration sont loin d'être négligeables (Chevallard, 1992a; Cornu, 1992). Les logiciels souhaités ne sont pas toujours disponibles, l'approche ordinateur-tableau noir nécessite un ordinateur facilement accessible, prêt à être utilisé rapidement et spontanément à l'intérieur d'un cours, les réseaux sont souvent vulnérables à la surcharge, et tout redémarrage détruit le momentum d'un cours, si fragile comme chacun sait. Toutes ces contingences matérielles ne doivent guère sourire à ceux parmi les enseignants de mathématiques qui ont toujours aimé leur discipline en raison de son côté éthéré, idéal, intouchable. Par ailleurs, à cause du nombre limité d'ordinateurs disponibles pour une classe, les élèves doivent souvent travailler par paires, et si un tel apprentissage est souvent riche, il n'est pas rare de constater des équipes constituées d'un acteur et d'un observateur. En fait, et cet élément n'est sans doute pas étranger à une telle polarisation des équipes, il a été montré que l'engagement des étudiants dans des mathématiques faisant appel à l'informatique dépendait plus de leur *attitude envers l'ordinateur*, en termes de confiance et d'intérêt, que de leur attitude envers les mathématiques (Galbraith et Haines, 1998). Il n'est donc pas acquis, sans l'établissement de conditions qui favorisent le développement d'un rapport favorable avec l'ordinateur, que son utilisation dans le cours de mathématiques constitue une *aide à la motivation.*

De plus, en l'absence d'intégration de l'ordinateur au *curriculum* de mathématiques, toute intégration, même partielle, est entièrement laissée à l'initiative et à la charge de l'enseignant. Ceci a pour effet de conférer aux activités intégrant l'ordinateur un statut extra-curriculaire, peu apprécié des étudiants en raison de la surcharge de travail. Ce fut le cas lors des premières expériences avec MAPLE[12] à Waterloo (Hodgson, 1987) et c'est encore le cas dans les cours du collégial où l'enseignant de MAT 203 qui utilise MAPLE dans son cours doit préparer aussi à une suite en MAT 303 qui se ferait avec un enseignant ne l'utilisant pas (Lemelin, 1998). L'enseignant ne peut donc pas choisir de limiter l'entraînement aux techniques d'intégration « à la main » pour consacrer plus de temps à une analyse conceptuelle par l'exploration et la résolution de problèmes, car ce faisant, il se mettrait directement en opposition avec les pratiques curriculaires en usage. Or ce manque d'harmonisation et le surplus de travail qu'il entraîne suffisent à décourager plusieurs enseignants de tenter l'expérience. Cette situation n'est pas sans rappeler les réserves des enseignants du primaire et du secondaire face à l'utilisation en classe des calculatrices (Hodgson, 1987). Une enquête conduite auprès de 263 enseignants aux États-Unis (Shuard, 1994) avait révélé que leurs réserves venaient à la fois du manque d'harmonisation des pratiques à l'intérieur des districts scolaires, de la crainte que les étudiants n'acquièrent pas les notions de base, d'inquiétudes quant à la disponibilité pour tous les élèves de tels outils, et de la méconnaissance chez les parents et les enseignants des bons usages en classe de la calculatrice.

De fait, l'intégration d'éléments informatiques au curriculum de mathématiques ne va pas de soi. L'ordinateur est un corps étranger au cours traditionnel de mathématiques. Il est donc tout à fait naturel qu'on constate un certain rejet dans le milieu, du moins initialement. Au cœur du problème, on trouve la nécessité de la *légitimation* des environnements informatiques par rapport au projet d'apprentissage que se donne l'école (Artigue, 1997; Chevallard, 1992a). Selon Chevallard, cette légitimation sociale et culturelle dépend du niveau d'enseignement. Au niveau universitaire, particulièrement dans les facultés où l'on cherche à préparer à une profession d'intervention, il apparaîtrait plus naturel de faire place à ces outils qui à la fois permettent une simulation sans risque et autorisent, en raison de la

---

[12] http://www.maplesoft.com/ et http://daisy.uwaterloo.ca/

continuité avec le monde professionnel, des pratiques didactiques qui ne sont pas des créations didactiques *« ex nihilo »*. En revanche, l'ordinateur ne pourrait prétendre à pareil statut au secondaire, niveau par ailleurs davantage soumis au regard critique de la société: *« La référence à des pratiques professionnelles déterminées est ici trop lointaine pour constituer une caution suffisante, ni même négociable. »* (Chevallard, 1992a). À partir de telles prémisses, Chevallard conclut que l'acceptation à ce niveau serait donc essentiellement dépendante d'une argumentation didactique.

On peut nuancer ce propos en fonction du contexte culturel. Si l'on a des raisons de croire qu'en France une partie de la société souhaite avant tout que les cours de mathématiques préparent adéquatement aux concours des Grandes Écoles et donc se méfie de toute intrusion du curriculum par un objet qui ne s'inscrit pas dans cette perspective, on note toutefois que dans des pays comme l'Allemagne ou les États-Unis, la population semble beaucoup plus disposée à accueillir l'ordinateur en classe, qu'il ait ou non fait ses preuves d'un point de vue didactique dans l'apprentissage des mathématiques (Graf, 1992; Forman et Steen, 1994). Mais il reste que pour les enseignants comme pour les élèves, une intégration réussie nécessite une *prise en compte de la dimension didactique*. Car en l'absence d'une telle analyse, on risque de précipiter l'intégration en succombant à l'attrait de la nouveauté, de la laisser à la charge de l'enseignant et donc, conclut rapidement Chevallard (1992a), de la condamner.

Or cette analyse didactique n'est pas aisée. S'il est relativement facile de décrire l'utilisation de l'ordinateur pour l'enseignement des mathématiques, il est beaucoup plus difficile de mesurer l'effet de l'ordinateur sur l'apprentissage. En effet, l'ordinateur ne se rajoute pas au système didactique élève-savoir-enseignant comme quatrième composante isolable, il modifie plutôt ces trois composantes à la fois (Cornu, 1992).

2.2.3.2 Des savoirs transformés

Au niveau des obstacles d'ordre didactique, force est de constater que l'ordinateur introduit une nouvelle couche au phénomène de *transposition didactique* (Chevallard, 1991) qui transforme le savoir savant en savoir enseigné. Balacheff (1994) définit à cet égard le terme de *transposition informatique* en tant que *« travail sur la connaissance qui en permet* *une représentation symbolique et la mise en oeuvre de cette représentation par un dispositif informatique, qu'il s'agisse de "montrer" la connaissance ou de la "manipuler"* ». Cette transposition a ceci de particulier qu'elle met en interaction deux systèmes cognitifs (celui de l'élève et celui de l'ordinateur) dont la communication se fait au niveau de l'interface.

Comme première condition à cette interaction, on retouve la nécessité de recourir à un répertoire commun de communication. Lorsque celui-ci se rapproche davantage du système cognitif de l'ordinateur (en utilisant la programmation procédurale notamment), on multiplie les difficultés didactiques (Jonhson, 1987).

D'une part, l'apprentissage d'un langage avec sa syntaxe, sa sémantique, sa structure, de l'ensemble des opérations périphériques (édition, compilation, etc.) et du pseudo-code (langage intermédiaire utilisé pour formaliser un algorithme) nécessite du temps curriculaire, soustrait par conséquent du temps d'apprentissage des concepts mathématiques; ce glissement de contenu peut faire déplacer le centre d'attention des élèves et étouffer, sous la foule de détails techniques à considérer, l'habileté de certains à résoudre les problèmes mathématiques. Cette question nous ramène à nouveau à la tension entre savoir théorique et savoir pratique, et aux compétences privilégiées dans les choix curriculaires; nous y reviendrons plus loin. Mais il n'est point besoin d'aller jusqu'à la programmation pour observer pareille dispersion des efforts cognitifs: un logiciel de calcul symbolique comme DERIVE superpose aux rétroactions liées au contenu mathématique une multitude de rétroactions liées à des questions de communication avec l'environnement; l'élève novice a du mal à faire le tri, ne pouvant compter ni sur une expertise mathématique ni sur sa connaissance du logiciel pour en contrôler les productions (Artigue, 1997). Par ailleurs, tout logiciel de calcul symbolique, tout comme dans une certaine mesure le sans doute désuet langage APL, fait appel, dans son fonctionnement interne, à des niveaux avancés de manipulation symbolique qui peuvent amener l'élève à utiliser des fonctions dont il ne comprend pas les *mécanismes mathématiques sous-jacents* (Johnson, 1987).

D'autre part, de l'utilisation d'un outil informatique découle le risque de *mouler*, à l'application, au langage de programmation ou au système, la façon dont l'élève perçoit et comprend les concepts et problèmes (Johnson, 1987). L'*écran*, dans toute la dualité sémantique de son nom, donne à voir mais cache en même temps (Balacheff, 1998); il offre une représentation, une projection de l'objet mathématique mais cet objet n'existe en totalité que dans le monde des concepts dont il est issu. Cette préoccupation, qui donne une résonance nouvelle au concept de *médiation* de Vygotsky (Rivière, 1990), semble confirmée par les observations relevées dans le cadre d'études didactiques de l'utilisation de tableurs (Capponi et Balacheff, 1989) et de logiciels de calcul symbolique (Artigue, 1997).

Dans leur analyse, Capponi et Balacheff rappellent d'abord que les tableurs introduisent une nouvelle notion de variable, à la fois différente de la variable algébrique et de la variable d'un langage de programmation. Puisque la variable d'un tableur est la cellule identifiée par son adresse « géographique » dans le tableau, à l'aide de références relatives ou absolues, on opère directement sur des adresses qui renvoient à des nombres ou des nouvelles formules. De plus, les *formules* utilisées dans les tableurs ne peuvent prétendre non plus à un statut d'expression algébrique puisque leur but est exclusivement de calculer et non de fournir un langage opératoire pour analyser et manipuler des relations entre les nombres. Cette différence conceptuelle s'interpose chez l'élève comme obstacle supplémentaire au passage de l'arithmétique à l'algèbre en se conjuguant aux obstacles épistémologiques normalement observés.

Dans un même ordre d'idée, Artigue (1997) identifie le phénomène de *pseudo-transparence* associé au logiciel de calcul symbolique DERIVE (et qu'on peut supposer présent de façon plus ou moins importante et sous une forme différente dans la plupart des logiciels). Par pseudo-transparence, on entend ici les décalages entre les modes de représentation, interne et à l'interface, des objets. En apparence minimes, ils perturbent de façon non négligeable le fonctionnement didactique, et même de façon importante chez les élèves les plus faibles. Par exemple, DERIVE peut supprimer à l'affichage certaines parenthèses entrées par l'utilisateur, si elles sont jugées inutiles dans les écritures usuelles, vu les conventions et les règles de priorité. Mais, et c'est ce qui est le plus perturbant, cette suppression justifiée n'est pas systématique. Un autre exemple est celui des deux types de crochets présents à l'affichage: ceux introduits par l'utilisateur et ceux que donnent à l'affichage les parenthèses entourant les expressions "multi-étages"; en dépit d'une apparence semblable, il s'agit de deux objets différents, gérés différemment par certaines commandes DERIVE, et ouvrant la porte par conséquent à une certaine confusion. Finalement, l'élève faible est particulièrement vulnérable au fait qu'il ne peut pas gérer à l'interface la longueur des traits de fraction et des signes radicaux, bien que DERIVE puisse les prolonger à sa guise. Il lui est donc impossible de produire une expression sémiotiquement conforme à ce que peut lui renvoyer le système. Ne pensant pas à faire appel aux parenthèses, il se contente d'entrer une expression qui lui apparaît perceptivement la meilleure retranscription de l'original et fait confiance au système pour l'interpréter « correctement ». Artigue reconnaît toutefois que ces phénomènes de pseudo-transparence, et en particulier le dernier, sont souvent mathématiquement ou didactiquement exploitables, à condition d'être acceptés et contrôlés, en explicitant les repères utilisés par les élèves et en évaluant la distance avec ceux visés par l'enseignement.

Mais les problèmes de décalage ne s'arrêtent pas là. Retranché dans ses limites d'implantation, le dispositif informatique peut faire preuve, non plus de pseudo-transparence mais carrément d'*incohérence* ou *d'invraisemblance* à l'égard du concept mathématique illustré. Pour éviter de tels écueils, Balacheff (1998) insiste sur la nécessité d'une approche préventive lors du développement d'un système qui en explore le *domaine de validité épistémologique*, pose les problèmes d'apprentissage en termes de modélisation et explore le *domaine de validité didactique*, en un mot, qui ne laisse pas les informaticiens agir seuls. Tall (1992) offre un autre angle d'approche. Il donne d'abord comme exemple l'approximation numérique de la dérivée par $(f(x+h)-f(x))/h$, où en faisant tendre h vers 0, les erreurs numériques des ordinateurs courants risquent de mener à des résultats étranges qui s'éloignent de la limite avant de l'avoir approchée d'assez près. Tout en concédant que l'observation d'un tel phénomène pourrait contribuer à développer chez l'étudiant une phobie encore plus grande du calcul des limites, il y voit surtout un appel à la nécessité pour l'enseignant et l'élève d'être conscients des limites de l'arithmétique des ordinateurs, et donc des déficiences possibles. Face au même problème, Hodgson (1987) raisonne de façon similaire en y voyant l'occasion de combiner et de confronter logiciels symboliques et numériques dans une véritable perspective de préparation à la résolution de problèmes réels. Il y a là en effet une occasion pour l'élève de « battre » l'ordinateur à la fois en en comprenant les limites techniques et en lui opposant une maîtrise conceptuelle. À l'exploitabilité mathématique ou didactique des écarts entre les deux systèmes cognitifs identifiée par Artigue, nous pourrions donc aussi ajouter l'exploitabilité informatique.

2.2.3.3 Des activités à définir

Parce qu'il modifie l'activité mathématique en ouvrant l'horizon d'exploration et de résolution, l'ordinateur, lorsqu'intégré à l'apprentissage des mathématiques, porte en lui le potentiel d'en modifier les activités, tout aussi fondamentalement. Pour qui comme Chevallard (1992a) perçoit le fonctionnement didactique comme *« fait d'abord de permanences, de régularités fonctionnelles, que l'on peut exprimer par des lois s'appliquant quels que soient les objets qui entrent dans leur domaine de validité »*, un certain scepticisme s'impose devant toute nouvelle activité qu'il convient alors d'analyser au regard de sa prise en compte de ces *permanences* et *régularités*. Or, il apparaît de plus en plus clairement que nombre d'éléments que l'on croyait immuables en vertu du contrat didactique se trouvent remis en question dès lors que l'ordinateur est utilisé en classe: l'enseignant n'a plus le monopole du savoir et il devient maintenant possible pour l'élève de contourner une activité proposée par une autre, non prévue par l'enseignant, qui le conduira à la réponse sans passer par la connaissance visée. Le jeu traditionnel de négociation de la connaissance s'en trouve donc fortement ébranlé.

Artigue (1997) définit le phénomène de *double-référence* comme l'ensemble des décalages, observés à l'intérieur de l'espace de transposition, du cadre de résolution de problèmes (interprétation des tâches, choix des actions, gestions de leur légitimité, validation des résultats), en d'autres mots la différence entre ce qui est attendu par l'enseignant et ce qu'il est possible pour l'élève de faire. Par exemple, des étudiants à qui l'on avait demandé de trouver à l'aide de DERIVE une formule générale pour factoriser $x^n - 1$, et chez qui l'on souhaitait voir le raisonnement précéder et guider l'expérimentation (ex. factorisation par $(x\text{-}1)$ pour tout n, par $(x\text{-}1)(x\text{+}1)$ pour tout n pair, etc.) ne se sont pas sentis encouragés dans cette voie par les fonctionnalités de DERIVE qui les auraient contraints à gérer eux-mêmes un arbre d'expressions; ils ont donc plutôt opté pour une approche *boîte-noire* en cherchant à établir des conjectures à partir des résultats produits par DERIVE pour un ensemble de cas particuliers, ce qui les a amenés à organiser les production de DERIVE en catégorisant de façon subtile les exposants *n*. Cette nouvelle interprétation de la tâche qui a surpris à la fois enseignants et chercheurs paraît pourtant s'inscrire tout à fait dans le nouveau paradigme de la recherche en mathématiques. Heureusement, les enseignants et chercheurs surent reconnaître à l'activité ainsi transformée un statut mathématique, et choisirent, en dépit d'une perte d'élégance et d'une augmentation du temps requis, de s'adapter à la situation et d'allouer du temps d'exploration hors-classe. Si l'auteur constate l'avantage qu'il y a à prévoir de tels renversements de situation, pour des raisons évidentes de logistique, le lecteur se demande comment s'en prémunir avec les outils qui n'en finissent pas d'évoluer. Par ailleurs, bien qu'il apparaisse légitime d'encadrer les activités pour assurer le passage par la connaissance, il apparaît tout aussi souhaitable qu'existe à l'occasion une marge de créativité pour l'élève qui lui permette d'innover, de surprendre et, qui sait, peut-être même d'instruire son professeur.

La question des vertus de l'exploration mérite toutefois d'être posée car elle est au cœur des potentialités associées à l'utilisation des ressources informatiques dans le cours de mathématiques. Observe-t-on systématiquement un remplacement du travail technique (maintenant assumé par la machine) par un travail stratégique, conceptuel, porteur d'apprentissages ? Non, répond Artigue qui constate chez les étudiants deux tendances antagonistes: une première qui réalise la distanciation souhaitée par rapport à une approche exclusivement technique au profit d'une approche plus réflexive, et une seconde qui vise au contraire une économie de la réflexion grâce à la multiplication à peu de frais d'essais dans les nombreuses directions possibles. Ces essais, difficilement réintégrables dans une même démarche cohérente, sont assimilables à un *phénomène de pêche* qu'on peut en partie expliquer en raison de problèmes liés à la non-différentiation des différents types d'erreurs à l'interface. Un tel phénomène de pêche paraît universellement reconnu. Déjà en 1987, Hodgson dénonçait l'attitude du *« compute first and think second »* et semblait disposé à lui attribuer, en citant Mason (1985), une origine psychologique qui pourrait s'approcher de l'angoisse:

> *"The hardest button to press is the off-button. Once a program is running, the path of least resistance is to 'try another case', or 'let's see what happens if…'. Such behaviour would be admirable if it involved conjecturing, but sadly it is*

> *more often curiosity spawned from reluctance to turn off the machine than anything else. One of the main forces for keeping the machine going is the sudden sense of let-down, of emptiness when the machine is switched off."* [13]

Lemelin (1998) semble plutôt associer ce phénomène à l'insouciance de ses jeunes étudiants en parlant d' *« essais frivoles »*. Mais il reste, et on sait gré à Artigue de n'avoir pas renoncé à le documenter, que *« les observations faites tendent à démontrer que ces comportements de pêche sont souvent d'une productivité raisonnable pour les élèves, autant sinon plus productifs que les comportements plus réfléchis qui leur sont a priori accessibles. »* En adoptant un point de vue essentiellement pragmatique, on pourrait s'en contenter. Mais, par delà l'incontournable fait que « ça marche », est-ce vraiment tout ce que l'on vise avec l'enseignement des mathématiques? Bien sûr que non, mais peut-être que la technique de « pêche assistée par ordinateur » ainsi développée par certains élèves sera pour eux un de leurs apprentissages faits en mathématiques les plus permanents, les plus transférables, et par conséquent les plus utiles. Une telle éventualité mérite réflexion. Ce ne serait pas la première fois qu'il y aurait tiraillement entre savoir pratique et savoir théorique.

Là où évidemment l'activité mathématique tombe complètement à plat, c'est lorsque ce qu'on supposait devoir faire appel à une démarche de résolution se liquide tout-à-coup en une pression de touche sur la calculatrice la plus récente ou par l'appel direct à une seule fonction de la nouvelle version du logiciel de calcul. Les professeurs au collégial et à l'université qui utilisent les ressources informatiques dans leurs cours sont régulièrement confrontés à pareil problème avec des logiciels comme MAPLE qui offrent maintenant jusqu'à une fonction donnant instantanément la transformée de Laplace inverse (Beaudin, 1998). Faut-il redoubler d'imagination en concevant des situations si torturées qu'elles perdent toute relation avec des problèmes réels ? On choisirait alors de passer à côté d'un des grands avantages que nous apporte cette technologie, i.e. cette possibilité qu'on a de pouvoir aborder des applications réelles dans toute leur complexité. Faut-il alors imposer de façon cyclique une période de purgatoire pendant laquelle l'accès à la machine est

---

[13] Mason, J.H., "What happens when you switch off the machine?" in *The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching* (Supporting Papers for the ICMI Symposium, Strasbourg, 1985) IREM, Université Hughes-Pasteur, Strasbourg, 1985, pp.163-168.

interdit ? À ce chapitre, les enseignants au collégial qui, en raison du manque d'harmonisation curriculaire, choisissent d'alterner entre des périodes de calcul à la main et de résolution de problèmes à l'aide de l'ordinateur sont les premiers à reconnaître le manque de motivation chez leurs étudiants à revenir au calcul à la main, du jour où ils connaissent les touches ou les fonctions qui leur permettraient de le court-circuiter (Lemelin, 1998). Faut-il enfin se limiter à la ligne dure en n'utilisant comme outils informatiques dans l'apprentissage que les tuteurs dont le résolveur adhère au principe de Rogalski (1994) selon lequel *« le résolveur doit fonctionner selon les méthodes qu'il veut enseigner et non pas selon les méthodes expertes les plus générales du domaine concerné »*? Il est vrai que <u>si</u> le but d'un cours est strictement l'apprentissage de méthodes, de techniques, un système qui dit à l'utilisateur « j'ai tout essayé et j'ai fini par trouver un truc qui marche » ne présente pas grand intérêt didactique, à moins de se limiter à une utilisation pour fin de vérification, comme ce fut longtemps le cas avec la calculatrice au primaire (Shuard, 1994). La question n'est donc pas simple; elle alimentera elle aussi la réflexion curriculaire qui suit.

2.3 Une analyse de besoins

Les sections 2.1 et 2.2 se voulaient une synthèse critique de différents éléments qu'il serait possible d'intégrer au curriculum mathématique dans le but de développer des compétences qui faciliteraient le passage du savoir théorique au savoir pratique. Les écrits retenus ont été puisés dans des domaines variés, du curriculum à la didactique, en passant par la psychologie cognitive. On peut les regrouper en deux grandes catégories: ceux qui par une réflexion philosophique ou un échafaudage théorique proposent des éléments de modèles d'enseignement, et ceux qui par une analyse expérimentale en milieu éducatif identifient certains effets (à court ou moyen terme) des éléments proposés.

Mais il reste un certain sentiment d'insatisfaction. Quels sont les *effets à long terme* des choix faits au niveau de l'enseignement des mathématiques? Existe-t-il des stratégies qui maximisent le succès du passage au savoir pratique, qui tout comme le savoir théorique de l'individu doit pouvoir évoluer avec le temps? Qui est le mieux armé pour affronter de nouveaux problèmes ? Celui qui a appris les mathématiques par la modélisation et l'expérimentation informatique ? Ou celui dont le cours de mathématiques visait le développement d'une logique déductive rigoureuse et qui a su développer en parallèle (autres cours, activités parascolaires, etc.) une approche inductive et expérimentale ?

En fait, une fois admise la validité de la prise en compte du contexte professionnel dans la définition du curriculum mathématique, nous nous situons dans une problématique d'*analyse de besoins*, en utilisant, comme le font Stufflebeam, McCormick, Brinkerhoff et Nelson (1985) la définition d'un besoin comme *ce qui est nécessaire ou utile à l'accomplissement d'un objectif valable, défendable*[14].

À partir des nombreux travaux consacrés à l'évaluation de besoins, Stufflebeam (1977) a identifié quatre grandes approches pour mener ce type d'étude. Ces approches diffèrent à la source par leur interprétation de la notion de besoin.

L'*approche de l'écart* considère un besoin comme un écart entre la performance observée ou prévue et la performance désirée. Cette approche est généralement bien acceptée aux niveaux administratifs car elle a l'avantage de se prêter admirablement bien au contexte éducatif où les examens ministériels constituent une façon d'évaluer la performance. Par contre, elle a tendance à se limiter alors aux seules variables prises en compte dans ces évaluations et à ne remettre en question ni ces variables ni la façon dont elles sont mesurées. Il s'agit en fait d'une simplification abusive du problème où l'on réduit l'évaluation des besoins à l'application d'une procédure mécanique.

L'*approche démocratique* reconnaît comme besoin un changement désiré par la majorité à l'intérieur d'un groupe de référence. Si cette approche favorise l'acceptation par le milieu où elle est appliquée, elle a aussi l'avantage d'ouvrir la problématique à un éventail de perspectives et de variables. Sa simplicité d'application lui fait toutefois sacrifier la rigueur de l'analyse: on tend à y confondre besoins et préférences, à privilégier les aspects logistiques, économiques au détriment d'aspects plus fondamentaux, et on peut même dévier facilement vers un objectif qui perd de sa légitimité. La valeur de cette approche repose en fait sur l'objectivité et le niveau d'information du groupe de référence.

L'*approche analytique* essaie de mettre à contribution toute l'information disponible sur l'état actuel de la situation pour identifier une direction future dans laquelle il devrait y avoir amélioration. Cette direction définit alors un besoin. En cherchant à prononcer un jugement à partir d'une information aussi complète que possible, la démarche tient de la résolution de problèmes, et fait appel autant à la rigueur qu'à l'abstraction.

L'*approche diagnostique* prend pour besoin un élément dont la présence est jugée bénéfique et l'absence néfaste. Cette approche utilise la logique et les éléments de recherche disponibles pour identifier les besoins satisfaits et ceux qui ne le sont pas. Ses principales faiblesses viennent du fait que les relations causales entre l'absence d'un élément et les carences qui en résultent sont difficiles à identifier; elle a donc tendance à privilégier les besoins de base au détriment de besoins d'ordre supérieur et à chercher à combler les manques plutôt qu'à améliorer ce qui existe.

S'il fallait cataloguer le travail que nous avons accompli jusqu'à présent dans l'évaluation des besoins liés au développement d'un enseignement des mathématiques qui faciliterait le passage à l'application, nous dirions que nous avons tenté de mettre à contribution les travaux de différents chercheurs pour aboutir à une amorce d'*approche analytique*. Cependant, nous ne croyons pas pouvoir ainsi arriver à une prise de position définitive quant aux besoins, i.e. aux moyens à mettre en place pour favoriser ce passage, surtout en raison du manque d'information liée aux effets à long terme.

Il nous apparaît donc pertinent d'ajouter à cette analyse une étude exploratoire pour tenter d'établir des liens de causalité entre les éléments curriculaires identifiés (qu'on retrouve à des degrés divers dans le système éducatif) et les compétences en résolution de problèmes quand vient le temps d'appliquer à un secteur professionnel les connaissances mathématiques.

La diversité des approches qui coexistent actuellement dans l'enseignement des mathématiques suggère la pertinence et la faisabilité d'une telle étude. En particulier, il nous apparaît important d'étudier les effets associés aux modalités de développement du

---

[14] Traduction libre de la définition du Webster's Third International Dictionary, G & C Merriam Company, Springfield, Mass., 1976, rapportée dans Stufflebeam, McCormick, Brinkerhoff et Nelson (1985).

savoir théorique, d'utilisation d'applications (contextualisation et modélisation) et de l'informatique (de l'utilisation de la calculatrice à la programmation). Les effets peuvent être positifs ou négatifs. Nous formulons simplement l'hypothèse que du degré d'exposition à ces différents éléments, et du moment de leur rencontre peut dépendre la facilité avec laquelle l'individu pourra élargir le champ de problèmes dont il assumera la résolution.

Cette recherche ne prétend pas isoler les contributions respectives des connaissances théoriques et d'habiletés plus pratiques dans le développement des compétences car il est fort probable qu'il ne s'agit pas là d'entités indépendantes. En effet, il apparaît raisonnable de croire que le développement de telles habiletés pratiques peut aussi avoir un impact sur l'intégration chez l'élève des connaissances théoriques, de même que les connaissances théoriques peuvent jouer sur l'intégration des habiletés pratiques. Tout au mieux, pouvons-nous observer les effets liés à leur conjugaison que nous pourrons qualifier en fonction du degré d'exposition à la théorie mathématique et du degré d'exposition à des contextes de développement d'habiletés pratiques. Comment apprécier ces effets, comment les mesurer ? Dans cette étude exploratoire, nous nous tournons une fois de plus vers la notion de *compétence*.

2.4 Les compétences dans la résolution de problèmes

Pour préciser le concept de *compétence* responsable des interactions entre savoir théorique et savoir pratique à l'intérieur du processus de résolution de problèmes, nous avons choisi d'utiliser la classification en trois *types* donnée par de Terssac (1996) d'après des recherches en sociologie du travail, que nous avons ensuite projetée sur les différents modes d'utilisation du savoir mathématique :

- les *compétences d'explicitation* (les *"savoir-dire")* pour traduire ce qui est, ce qu'il y a à faire et ce qui a été fait; en mathématiques, cela implique la maîtrise d'au moins trois langages[15] différents (naturel, symbolique et graphique) (De Serres et Groleau, 1997) et

[15] Pour simplifier, nous utilisons le terme langage, bien qu'il y aurait des distinctions à faire entre le langage naturel et les autres systèmes de représentation.

du passage de l'un à l'autre, par la modélisation et l'interprétation; on peut penser ajouter éventuellement d'autres langages quand on étend l'activité mathématique à la définition d'algorithmes (pseudo-code), la programmation (langage de programmation) et l'utilisation de logiciels de calculs (communication à l'interface) ;

- les *compétences d'intervention* (les *"savoir-intervenir")* pour agir en mettant en situation les connaissances disponibles et en transformant les situations rencontrées en connaissances réutilisables dans d'autres contextes; dans le contexte présent, cela correspond à l'utilisation des différentes méthodes (analytiques et algorithmiques) permettant de calculer, d'appliquer une transformation sur un objet, de résoudre un système d'équations, d'optimiser une fonction, etc., ainsi qu'à la généralisation par l'abstraction pour étendre des résultats ou l'emploi de méthodes à une classe de problèmes ;

- les *compétences d'évaluation* (les *"savoir-se-situer")* pour identifier, légitimer et valider tout ce qu'on engage dans l'action; en mathématiques, cela pourrait correspondre à la décomposition en sous-problèmes, à l'identification des cas possibles, à la reconnaissance des champs théoriques appropriés à la navigation dans le réseau des concepts, à l'utilisation du raisonnement mathématique, à la vérification de propriétés, etc.

Avant d'étudier comment ces compétences interviennent dans la résolution de problèmes mathématiques, il convient d'abord de décortiquer les différentes phases du processus de résolution et d'en saisir les articulations. Plusieurs chercheurs et professeurs de mathématiques se sont intéressés à ce problème.

Polya (1945) définit la résolution de problèmes comme un processus à quatre temps, où les deux premiers temps de la démarche de résolution font essentiellement appel à l'analyse, et les deux derniers à la synthèse (Figure 2). Une *« idée brillante »* de la part de l'étudiant permet d'en accélérer le processus et de passer plus rapidement à la synthèse.

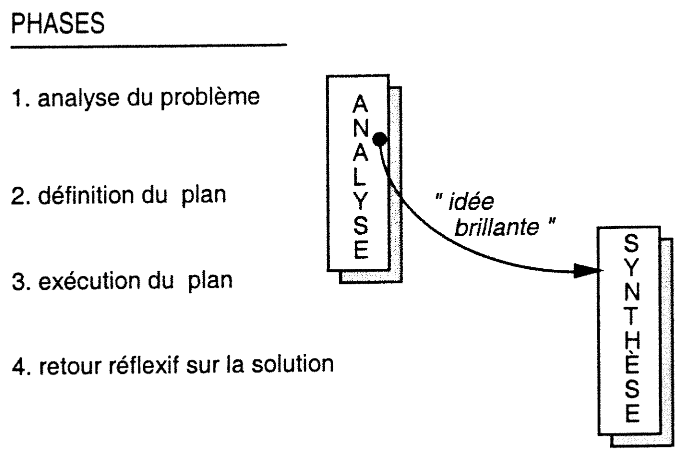


Figure 2 - Phases de résolution d'un problème (Polya, 1945)

Cette description, très linéaire, convient aux problèmes bien posés, résolubles et pour lesquels on possède tous les éléments et les notions pour en effectuer la résolution. Polya n'effleure qu'à peine les problèmes qui ne répondent pas à toutes ces conditions, et qui exigeraient davantage d'allers-retours entre les phases d'analyse et de synthèse. Ce parti-pris, qui fait abstraction d'une part importante des problèmes pratiques et réalistes et contribue à alimenter le *contrat didactique*, l'amène à une classification un peu naïve des problèmes en « *problèmes-à-trouver* » et « *problèmes-à-prouver* » et au constat qui veut que les premiers soient plus importants dans les cours de mathématiques élémentaires, et les seconds dans les cours de mathématiques avancées... En dépit de ces réserves, il convient de reconnaître aux travaux de Polya un caractère précurseur et visionnaire et une contribution très valable au chapitre de l'identification des heuristiques couramment utilisées en mathématiques.[16]

Schoenfeld (1985) a contribué à faire avancer l'étude du processus de résolution de problèmes en identifiant l'existence et la nécessité d'un processus de *contrôle* pour gérer le

[16] Les études de Polya sur la résolution de problèmes ont inspiré plusieurs chercheurs et didacticiens des mathématiques, et ont connu aussi un rayonnement dans l'enseignement supérieur. Ainsi, à l'École Polytechnique de Montréal, on s'est intéressé au développement chez les étudiants d'une approche systématique dans la résolution de problèmes. Dans le cadre du cours de mécanique de première année (ING 1010), on encourage donc les étudiants à suivre les étapes d'une « *Méthodologie de résolution de problèmes* » (http://www.cours.polymtl.ca/ing1010/mrp/mrp.htm) directement inspirée des travaux de Polya. Si l'on semble avoir perdu à nouveau l'aspect itératif de la démarche car il s'agit ici d'un modèle *prescriptif* et non pas *descriptif*, il demeure intéressant de constater son utilisation pour l'encadrement et le soutien des étudiants en génie.

passage d'une phase à l'autre, autant pour poursuivre que pour revenir en arrière. Cette recherche l'a amené à raffiner la décomposition de Polya et à lui conférer un premier caractère itératif.

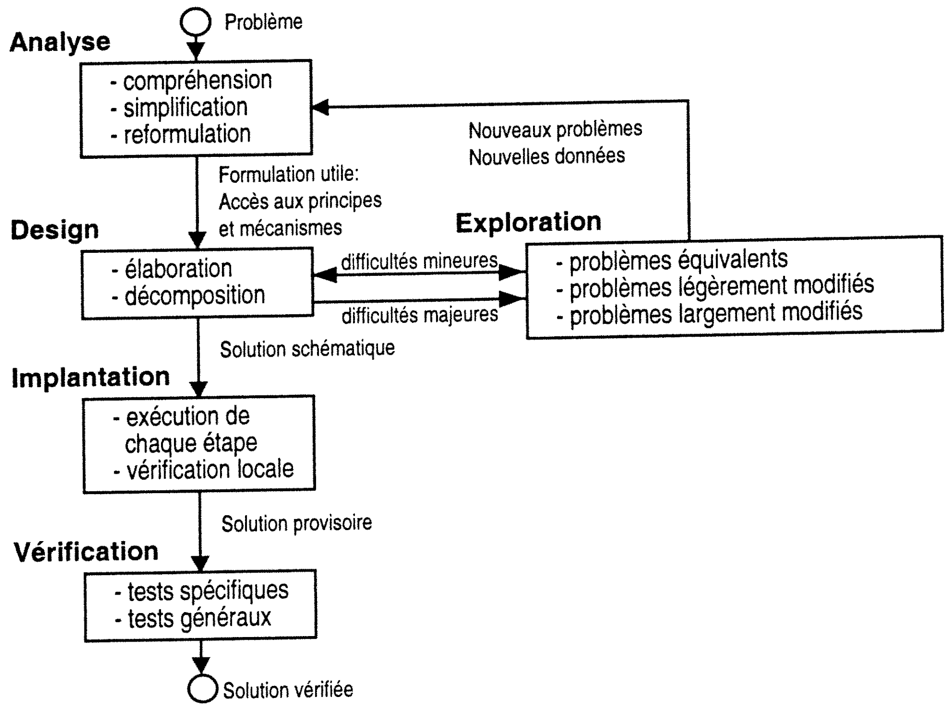


Figure 3 - Vue schématique de la stratégie de résolution de problèmes (Schoenfeld, 1985)

Schoenfeld (1989) a ensuite étudié et comparé le niveau d'un tel *contrôle* chez les experts et les novices. L'analyse a montré que des retours en arrière pouvaient se produire à chaque phase du processus et que la fréquence des changements de phases était beaucoup plus fréquente chez les experts que chez les novices. De par leur grande expérience, les experts ont automatisé les tâches de bas niveau, ce qui a pour effet de libérer des ressources cognitives pour les tâches de plus haut niveau. En particulier, la réflexion de l'expert se fera surtout au niveau du choix et du contrôle de la stratégie de résolution d'un problème, ce que nous appelons les *compétences d'évaluation*, le *« savoir que faire »*. L'expert fera donc preuve d'une plus grande souplesse dans l'adaptation de sa stratégie à l'arrivée de nouvelles informations au fil de la résolution d'un problème. Schoenfeld a bien illustré cette autorégulation de l'expert entre les phases d'analyse, d'exploration, de planification, d'implantation, et de vérification, qu'il a contrastée avec l'approche plus linéaire du novice qui lit le problème et s'obstine à explorer une seule voie même si elle ne semble mener nulle part.

Les trois types de compétences définies par de Terssac peuvent servir à mieux caractériser les différentes *phases* du processus de résolution de problèmes. En phase d'*analyse*, comme il s'agit essentiellement de traduire un énoncé de problème en une forme résoluble, on fait appel en premier lieu aux *compétences d'explicitation* et en second lieu aux *compétences d'évaluation.* Les compétences d'explicitation servent aussi de support à la communication lors de l'*exécution* de la stratégie et du *retour* sur la solution. Les *compétences d'évaluation* jouent un rôle-clé dans la *planification* et le *contrôle* de la résolution ainsi que dans le *retour* sur la solution, c'est-à-dire partout où il convient de prendre une décision sur la direction à prendre ou de porter un jugement sur le progrès accompli. Quant aux *compétences d'intervention*, elles sont les grandes responsables de la phase d'exécution, mais elles sont aussi mises à contribution en phase de *planification* ou de *contrôle* de la stratégie pour structurer la résolution en sous-problèmes et en articuler les résultats intermédiaires. La figure suivante schématise les principales associations envisagées entre les phases de résolution et les types de compétences et nous servira de modèle de base dans l'analyse des compétences :

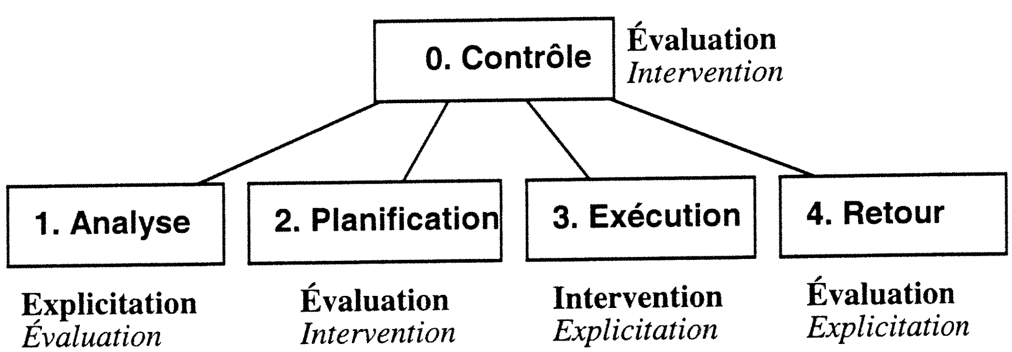


Figure 4 - Les compétences dans la résolution de problèmes

2.5 Objectifs de la recherche

Notre étude vise donc à clarifier les relations entre l'histoire éducative d'étudiants universitaires et leurs compétences en situation de résolution de problèmes de mathématiques appliquées. Pour ce faire, nous chercherons à établir l'état des compétences mathématiques de ces étudiants que nous mettrons en relation avec leur formation fondamentale et les autres éléments de leur histoire éducative individuelle.

Dans la constitution de l'histoire éducative de ces étudiants, nous essaierons de cerner les places respectives faites à la théorie mathématique, à l'informatique et à l'application dans la formation reçue et les rapports qu'entretiennent ces étudiants avec ces composantes de leur formation. L'état des compétences mathématiques de ces étudiants sera défini à la suite d'une analyse des compétences d'intervention, d'explicitation et d'évaluation manifestées par ces étudiants, lors de la résolution de problèmes de mathématiques appliquées.

3 Méthodologie

Pour définir notre démarche de recherche, nous présentons d'abord les critères de sélection des sujets. Nous rappelons ensuite les caractéristiques de notre étude exploratoire et décrivons enfin les instruments de cueillette et de traitement des données.

3.1 Sujets de l'étude

Bien que nous prétendions chercher à identifier les éléments favorisant le passage au savoir pratique, qui typiquement s'exerce en dehors du milieu académique, il nous est apparu préférable de nous situer en amont dans cette évaluation en ciblant non pas les jeunes professionnels, chez qui les effets de leur formation universitaire et ceux de la culture de leur entreprise d'affiliation peuvent brouiller les schémas de causalité visés par la recherche, mais plutôt les étudiants universitaires d'écoles ou de facultés préparant à une profession où l'on applique des connaissances mathématiques de niveau supérieur. De plus, nous avons choisi de nous situer en début de cette formation professionnelle (en première session) pour éviter un effet de filtre : puisque nous cherchions à évaluer non pas les compétences de ceux qui ont réussi à passer à l'application mais plutôt les compétences de ceux qui en ont l'intention, il aurait été malheureux de priver l'étude de données relatives à ceux qui ne réussissent pas ce passage.

À ces raisons fondamentales, s'ajoutent aussi des considérations pratiques et méthodologiques: plus grande facilité d'accès au milieu académique qu'au milieu professionnel, hétérogénéité curriculaire de la clientèle universitaire par la variété des parcours scolaires, réduction de l'*effet Hawthorne* par l'utilisation de *données invoquées*: copies d'examens, travaux pratiques, etc. En fait, ce choix de contexte confère à l'étude un caractère écologique, où les perturbations créées par la recherche ont été minimales.

Sans chercher à conférer à l'étude un caractère statistique, nous nous sommes inspirée de principes statistiques pour assurer un certain degré de représentativité de l'échantillon que nous étudierions. Dans un effort de *stratification*, nous avons choisi de couvrir trois domaines d'application différents: le génie, l'administration, et l'informatique. Le choix de ces domaines n'est pas tout à fait innocent: en plus de toucher des secteurs où l'on fait une forte « consommation » du « carburant » mathématiques, ce sont des domaines dont les diplômés sont très en demande et qui attirent par conséquent une importante clientèle étudiante. De même, nous pouvions prétendre à une certaine *aléatorisation* en invitant, dans chacun des secteurs, tous les étudiants d'une même classe à participer à l'étude. Nous avons donc choisi de suivre sur une session (hiver 2000) des étudiants de trois groupes différents: un premier groupe à l'École des Hautes Études Commerciales, un second à l'École Polytechnique et un troisième au Département d'informatique et de recherche opérationnelle de la Faculté des arts et sciences de l'Université de Montréal. Comme chacune de ces entités a ses propres règles et critères d'admission, nous pouvions compter sur une certaine hétérogénéité des sujets. Par ailleurs, le fait que ces différentes écoles ou facultés soient géographiquement proches et relèvent toutes de l'Université de Montréal, à des degrés divers, a permis de faciliter l'établissement d'ententes et d'un calendrier de travail (été 1999), la mise en place d'une phase de validation (automne 1999) et la coordination de cueillette des données (hiver 2000).

Dans chacun des secteurs, nous cherchions un cours de première session qui permettrait d'utiliser et d'alimenter les liens entre la pratique professionnelle et les connaissances mathématiques et qui, possiblement, ferait une place à l'informatique. Le choix final s'est fait en collaboration avec les départements concernés, après deux ou trois semaines d'observation en septembre 1999. À l'École des Hautes Études Commerciales, nous avons choisi deux cours du tronc commun, d'un crédit chacun : *Modélisation et optimisation* (1-611) et *Mathématiques financières* (1-612) ; ces cours qui sont orientés vers l'application font appel à l'analyse, au calcul et à l'utilisation du logiciel EXCEL. À l'École Polytechnique, après avoir considéré le cours *Équations différentielles* (MAT 135) qui, en dépit du fait qu'il s'adresse à des étudiants de deuxième session, nous apparaissait intéressant par sa mise à contribution du logiciel MAPLE, nous avons finalement opté pour le cours *Mécanique pour ingénieurs* (ING 1010) : en plus d'être un cours de tronc commun de première session, il fait appel à un vaste et riche contenu mathématique et sollicite fortement les capacités de modélisation. En informatique, c'est le cours *Structures discrètes en informatique* (IFT 1063) qui a retenu notre attention pour l'importance accordée dans ce cours aux structures, à la logique, aux preuves, à l'analyse combinatoire et aux algorithmes. Il convient d'ajouter que tous les cours que nous avons retenus se donnent aussi bien en automne qu'en hiver, ce qui nous a permis de faire précéder la session de cueillette des données (hiver 2000) d'une session de validation des outils de cueillette (automne 1999) à même les cours retenus.

3.2 Une étude exploratoire à deux niveaux

Les deux aspects de l'étude - évaluation des compétences d'étudiants universitaires en résolution de problèmes et établissement de liens avec l'histoire éducative - ont incité à entreprendre l'étude exploratoire sur deux niveaux: un premier niveau sur l'ensemble des sujets volontaires des trois classes, niveau que nous qualifierons de *quantitatif* sans pour autant le doter d'une méthodologie statistique, pour cerner les relations possibles entre formation et compétences; et un second niveau, dit *qualitatif,* sur un ensemble beaucoup plus restreint d'individus, pour décortiquer plus en profondeur les articulations qui s'opèrent entre l'histoire éducative, les éléments de la formation fondamentale qui nous intéressent plus particulièrement, et le passage à l'application.

L'étude au *niveau quantitatif* constitue un rempart contre la généralisation à partir de cas particuliers. L'inclusion de trois secteurs d'application ainsi que le fait de cibler des étudiants en début de formation nous assuraient d'une certaine variété de sujets et de conditions d'application. Il ne s'agissait pas tant ici de voir les différences qui pourraient exister d'un département à l'autre mais au contraire de chercher à identifier des invariants au niveau des compétences à partir d'éléments de l'histoire éducative et de la formation fondamentale en particulier. Nous voulions d'abord identifier des catégories d'individus, des tendances, et peut-être même repérer des esquisses de corrélations, des règles apparentes avec fort probablement des exceptions.

Avec le *niveau qualitatif*, nous avons cherché à ajouter de la profondeur à l'analyse, en étudiant plus à fond la biographie éducative de douze sujets contrastés et en effectuant une analyse didactique détaillée de leurs productions et erreurs en situation de résolution de problèmes. Cette partie de l'étude avait pour but de comprendre comment s'articulent les liens entre l'histoire éducative et les compétences en résolution de problèmes, si les tendances identifiées au niveau quantitatif résistent à cette analyse, et si les liens appréhendés peuvent être associés à des schémas de causalité.

La Figure 5 résume la structure de l'étude.

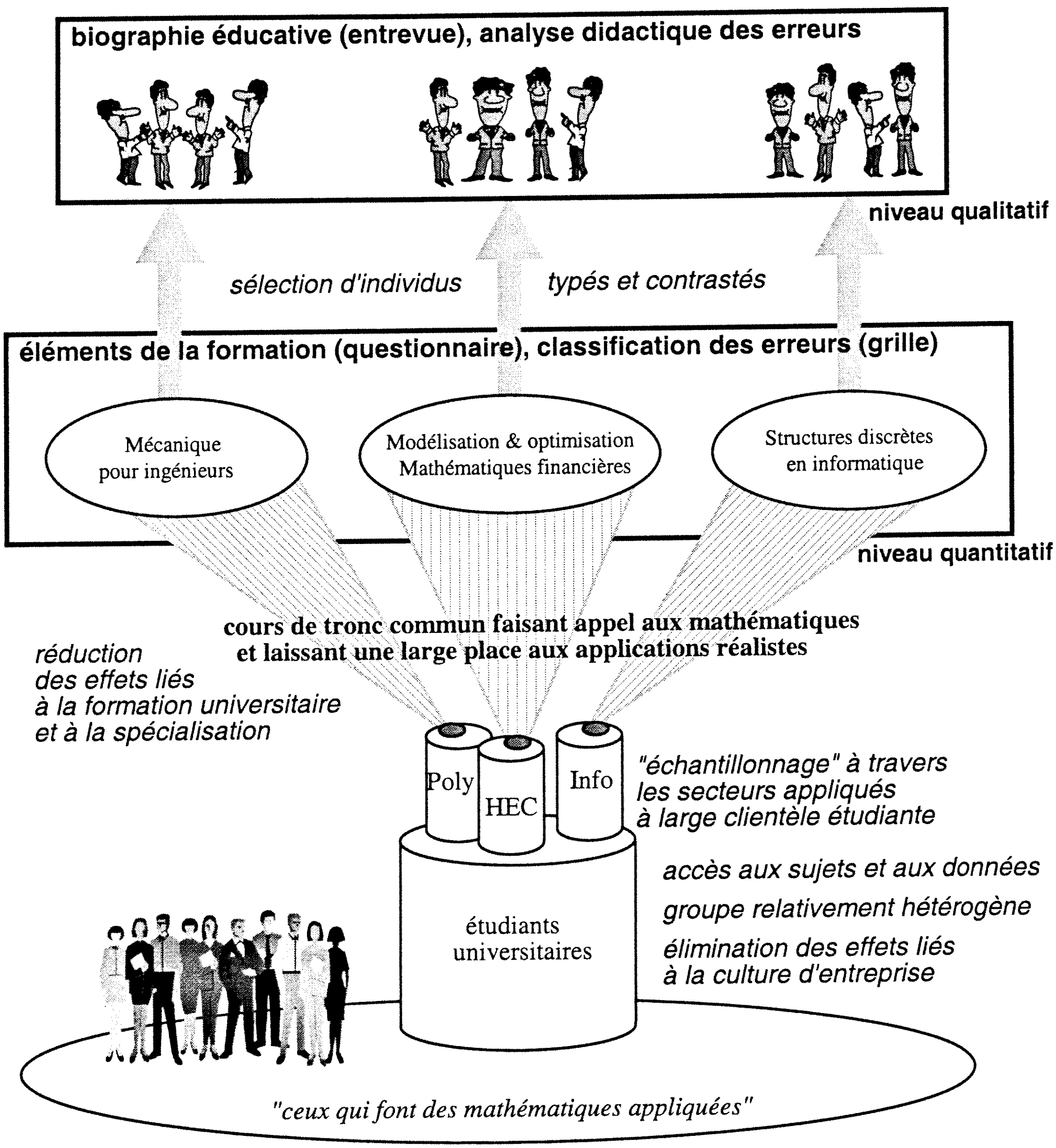


Figure 5 - Structure générale du projet d'étude à deux niveaux

Aux deux niveaux (quantitatif et qualitatif), nous avons mis à contribution des *données invoquées* qui sont les plus écologiques et les plus fiables (Van der Maren, 1996).

Au premier rang des données invoquées, nous avons choisi d'utiliser les examens et travaux pratiques qui s'inscrivent naturellement dans les processus d'évaluation des trois cours choisis pour repérer les erreurs des étudiants et évaluer ainsi le niveau d'atteinte des différentes compétences mises à contribution en situation de résolution de problèmes. Pour regrouper l'ensemble de ces données au niveau quantitatif, nous avons utilisé une grille de classification des erreurs, et nous nous sommes permis une analyse didactique plus fine pour les sujets de l'étude qualitative.

Au second rang des données invoquées, nous avons consulté les programmes et manuels qui ont caractérisé la formation de la plupart des étudiants.

Pour caractériser les histoires éducatives individuelles de chacun des sujets, nous avons eu recours à un questionnaire. Celui-ci visait à recueillir de l'information sur la formation institutionnelle et sur les autres contextes moins formels de formation: parascolaires, expériences de travail, initiatives individuelles. Bien qu'on reproche souvent au questionnaire le caractère *provoqué* des données qu'il génère (Van der Maren, 1996), nous croyons que son emploi se justifie ici par le fait qu'il ne servait pas de base à une étude statistique, mais plutôt de crible pour nous aider à cerner des catégories, des types d'individus selon les caractéristiques de leur histoire éducative. On se rapproche donc de la *morphologie sociale* pour laquelle le questionnaire se révèle un moyen approprié (Javeau, 1982). Pour éviter les écueils associés à l'utilisation d'un questionnaire, nous avons cherché à recueillir des faits objectifs, tout en laissant une certaine place aux préférences et à un degré moindre aux opinions. Nous avons évité volontairement tout ce qui touche aux attitudes, aspirations, et motivations que nous n'avons abordées qu'au niveau qualitatif de l'étude.

Nous avons ajouté par la suite des *données suscitées* à l'étude en demandant aux sujets de l'étude qualitative de bien vouloir faire le *récit biographique* de leur histoire éducative que nous avons encadré à l'intérieur d'une entrevue semi-structurée. Ici, en plus d'aborder les questions délicates des aspirations, des motivations, des influences, des conceptions, des préférences, de l'évolution de la perception de leurs forces et difficultés, nous avons tenté d'enrichir notre compréhension de leur parcours mathématique et de l'ensemble de leur histoire éducative.

3.3 Cueillette et traitement des données au niveau quantitatif

Nous présentons maintenant les instruments de cueillette des données et les stratégies de traitement de ces données.

3.3.1 Élaboration du questionnaire

L'élaboration du questionnaire a représenté un certain défi. Les données qu'il générerait devaient être suffisamment précises, comparables, pertinentes et fiables pour permettre de caractériser adéquatement les sujets. Nous examinerons le *contenu* du questionnaire dans les sections consacrées au traitement des données. Pour le moment, nous présentons les techniques que nous avons appliquées pour concevoir la *forme* du questionnaire, techniques recommandées par plusieurs chercheurs en sciences humaines (Javeau, 1982; Bradburn et Sudman, 1979; Jones, 1985; Fowler, 1988 et 1995.). La version finale du questionnaire est donnée dans l'Annexe B.

Pour pouvoir refléter les dimensions qui nous intéressent, nous avons cherché à qualifier, à l'intérieur de la formation fondamentale reçue et dans l'ensemble de l'histoire éducative, la profondeur et la rigueur de l'enseignement des mathématiques, l'utilisation de la programmation et de la technologie en général, ainsi que le niveau d'exposition aux applications des mathématiques. Tout en privilégiant la recherche de faits objectifs (ex. « *Quels cours de mathématiques avez-vous suivis à l'université ?* », « *Veuillez dresser la liste de vos expériences de travail, en incluant le bénévolat.* »), nous avons laissé une certaine place à l'expression de préférences et opinions (ex. « *Êtes-vous satisfait de votre formation en mathématiques ?* », « *Quels sont vos jeux préférés ?* ») .

Pour atténuer le caractère *provoqué* des données, nous avons laissé une large place aux *questions ouvertes*. Celles-ci pouvaient donner lieu à des réponses courtes (ex. « *Dans toute votre formation, (…) quel cours de mathématiques avez-vous le mieux réussi?* »), à une énumération (ex. « *Veuillez dresser la liste des langages de programmation que vous* *connaissez* »), ou à des réponses plus élaborées (ex. « *Quel est le programme le plus complexe que vous ayez conçu? Veuillez en résumer le contexte, l'objectif, les contraintes et difficultés, les stratégies utilisées, le langage de programmation et la taille du programme.* »). Mais nous nous sommes aussi permis quelques *questions fermées* (ex. « *Avez-vous déjà participé à un concours de mathématiques, un camp scientifique ou toute autre activité parascolaire liée aux mathématiques ?* » , « *Qu'est-ce qui vous donne le plus de satisfaction en mathématiques? Veuillez choisir un ou deux énoncés parmi ceux de l'encadré ci-dessous.* »). Ces questions dont le choix de réponses était limité se sont avérées très utiles pour procéder à une classification rapide et préliminaire des sujets, classification qu'il était possible de réviser en fonction des réponses données aux questions ouvertes.

La répartition des questions s'est faite en cherchant à minimiser les *effets de halo* (qui orientent la réponse à une question selon la réaction suscitée par la question précédente) ; en particulier, nous avons mis une certaine distance entre la question traitant des éléments de satisfaction en mathématiques (question 14) et les questions qui étaient liées à l'évocation de cours particuliers de la formation (questions 7 et 8). Pour éviter une centration sur les événements récents, nous avons encouragé par des questions explicites, la recherche d'événements anciens (ex. « *De quels manuels (ou cahiers ou recueils) de mathématiques vous souvenez-vous particulièrement? Niveaux collégial et universitaire ; Niveau secondaire ; Niveau primaire* »).

Pour minimiser les interférences avec les facteurs affectifs qui auraient pu nuire à l'authenticité des réponses, nous avons pris quelques précautions. Le questionnaire commençait avec des questions faciles pour créer un climat de confiance (ex. « *Veuillez énumérer tous les établissements académiques et scolaires que vous avez fréquentés* », « *Dans toute votre formation (...), quel cours de mathématiques avez-vous le mieux réussi ?* »). Aucune question ne portait sur les performances en mathématiques ; nous n'avons pas cherché non plus à connaître leur code permanent ou matricule qui aurait pu nous donner accès à leur dossier. Ces restrictions ne nous apparaissaient pas limitatives, puisque nous cherchions davantage à caractériser les *éléments* de l'histoire éducative que la *performance*[17] à l'évaluation institutionnalisée.

Finalement, nous avons évité les questions qui font appel de façon explicite à une opinion personnelle (ex. les questions qui commencent par *« à votre avis »*) et avons fait attention à ne pas utiliser des mots à connotation émotive (ex. « *Quel cours de mathématiques vous a le moins apporté ?* » plutôt que *« Quel cours de mathématiques avez-vous aimé le moins ?* ») .

Les questions ont été formulées de façon à éviter de provoquer chez le répondant le désir de se conformer à une norme sociale ou à des éléments de prestige : nous avons ainsi laissé très ouvertes les questions portant sur les loisirs, les lectures et les jeux, et nous avons choisi des institutions publiques comme exemples d'établissements scolaires (question 1), et un poste de préposé à l'entretien dans un restaurant libre-service comme exemple pour la liste des expériences de travail admissibles (question 19). Nous avons aussi cherché à contrôler les situations où les réponses pourraient être biaisées par l'attrait de la réponse positive ou de la première réponse dans les questions à choix multiple. Par exemple, quand nous demandions, « *avez-vous déjà ...? oui / non* », il nous est apparu préférable de poursuivre plus en profondeur en recherchant à l'aide de sous-questions des faits, des indices qui donnent du poids à la réponse pour en valider la fiabilité (ex. « *Si oui, veuillez indiquer à quel(s) niveau(x) et pour quel(s) contenu(s) mathématique(s).* »).

Nous avons utilisé un vocabulaire accessible, en évitant ou en expliquant les références locales auxquelles ne pourraient s'identifier les étudiants étrangers (ex. « *Quels cours de mathématiques avez-vous suivis au CEGEP (ou à tout autre établissement préparant aux études universitaires)?* ») . Nous avons fait précéder les questions d'un texte d'introduction, et nous avons regroupé les questions selon les thèmes sous-jacents (formation mathématique, compétences informatiques, expériences de travail, renseignement complémentaires) de façon à faire sentir la cohérence interne du questionnaire.

---

[17] Nous aborderons plus loin la performance individuelle sous l'angle des compétences témoignées en situation de résolution de problèmes. Ces compétences seront évaluées à partir de données invoquées.

Le questionnaire a été limité à une vingtaine de questions auxquelles on pouvait répondre en moins d'une heure. La présentation générale a été soignée ainsi que l'ordre et l'articulation entre les questions.

Le questionnaire a fait l'objet d'une validation (automne 1999) avec trois étudiants de première session en enseignement des mathématiques ou des sciences au secondaire qui ont accepté d'y répondre devant nous. Leurs hésitations et commentaires nous ont permis d'effectuer quelques ajustements. Nous avons ainsi ajouté à la question 1 un élément expliquant comment indiquer un changement d'orientation dans l'énumération du parcours académique. Nous avons fait une place aux cahiers et recueils dans la question 5 qui portait sur les manuels. Nous avons précisé la question 7 en remplaçant sa formulation initiale plutôt générale (« *Quel cours de mathématiques vous a le plus apporté ?* ») par une formulation qui situait clairement cet apport sur le plan mathématique (« *Quel cours de mathématiques (ou d'une autre discipline) a le plus contribué à votre compréhension des mathématiques ?* »). Nous avons augmenté de deux à quatre le nombre d'énoncés qu'il était possible de choisir pour caractériser les cours marquants et la formation mathématique en générale (questions 7, 8, 9 et 10). Nous avons précisé à la question 20 la nature des contextes des projets admissibles. Et nous avons ajouté dans les notes d'introduction une justification de la demande d'initialisation de chaque page.

Finalement, puisqu'il s'agit de renseignements personnels liés à la vie privée des sujets, nous avons soumis le questionnaire au Comité d'éthique de la recherche (CÉR) ayant l'autorité sur ce projet. Il s'agit ici d'une exigence (Règle 3.1) de l'énoncé de politique portant sur l'éthique de la recherche (CRM-CRSNG-CRSH, 1998), auquel souscrit le Conseil de recherches en sciences humaines du Canada dont nous sommes boursier pour ce projet.

3.3.2 Élaboration d'une grille de classification des erreurs

Pour pouvoir traduire en termes de compétences les productions des étudiants en situation de résolution de problèmes, nous voulions nous munir d'une grille d'analyse qui associerait aux différentes *phases* du processus de résolution de problèmes les compétences mises à contribution. Pour être applicables à l'ensemble des secteurs d'application, ces compétences devaient être exprimées sous forme « générique », en reflétant les différents modes de pensée impliqués dans l'application des mathématiques et en évitant d'être liés de façon explicite à des contenus spécifiques. Ces objectifs et contraintes commandaient un travail original qui puisse à la fois décrire avec précision les compétences impliquées et s'appliquer à des problèmes relevant de champs conceptuels variés. Nous avons donc élaboré une nouvelle décomposition du processus de résolution de problèmes qui reprend les résultats des travaux cités en 2.4, reflète notre propre expérience des problèmes de mathématiques appliquées et, principalement puisqu'il s'agit là de l'objectif de la recherche, permette de mettre en relief les différentes compétences mathématiques impliquées en précisant s'il s'agit de compétences d'*évaluation*, d'*intervention* ou d'*explicitation*.

Cette décomposition a servi de base à la conception d'une *grille d'analyse* des productions des étudiants dont la version finale est présentée dans l'Annexe E. Le niveau de détail de la décomposition a été déterminé en tenant compte à la fois de l'objet de la recherche et de considérations pratiques : la longueur de la grille devait demeurer raisonnable pour en permettre une utilisation efficace.

Nous n'entendions pas utiliser cette grille pour pointer les compétences démontrées : comme chaque développement dans la résolution peut faire appel à plusieurs compétences, cette approche risquait à la fois d'être laborieuse et de laisser une grande place à l'interprétation. Les données ainsi réduites auraient donc pu perdre sensiblement de leur valeur. Nous avons jugé pouvoir gagner à la fois en temps, en fiabilité et en fidélité en utilisant la grille pour classer les erreurs commises par les étudiants : chacune de ces erreurs serait associée avec la compétence qui semblerait avoir fait défaut.

Dès les débuts de la planification du projet, il est apparu clairement que la collaboration des professeurs, chargés de cours et auxiliaires d'enseignement nous serait très précieuse à la fois pour la validation et l'utilisation de cette grille. En effet, par leur connaissance du champ de problèmes associé au contenu disciplinaire et aux méthodes enseignées, des stratégies à privilégier et des confusions possibles, ils pouvaient mieux prendre en compte le contexte d'application dans la classification des erreurs. Ils avaient de plus un accès naturel aux copies des étudiants puisqu'ils devaient les corriger. Cette collaboration nous permettait finalement de soumettre au regard de la pratique un outil conçu dans le cadre d'une recherche didactique. Nous avons donc élaboré à l'intention de ces collaborateurs un *Guide d'utilisation* de la grille (Annexe E).

Avec ces collaborateurs, nous avons procédé à une amélioration itérative de la grille et du guide d'utilisation durant la session d'automne 1999 à travers différentes séances de validation et sur l'ensemble des trois secteurs. Pendant ces séances, les utilisateurs de la grille (professeurs, chargés de cours et auxiliaires d'enseignement des cours retenus) nous faisaient part individuellement des résultats du codage de copies d'étudiants (demeurés anonymes) pour des problèmes que nous avions choisis conjointement. Ils nous signalaient les hésitations qu'ils avaient connues, les formulations qu'ils jugeaient ambiguës, les éléments manquants de la grille, etc. En réponse à ces commentaires, nous apportions les correctifs nécessaires et enrichissions la grille de nouveaux éléments.

Dès les débuts de cette validation, il nous a ainsi fallu ajouter l'élément « *Démarrer* » (item 0.01) pour traiter le cas où il n'y avait même pas tentative de solution. De façon plus spécifique, pour mieux répondre aux besoins identifiés par les collaborateurs des HEC, nous avons intégré les « *formules* » aux « *principes et lois* » à identifier dans l'application (item 1.05) ; nous avons aussi ajouté la compétence « *Calculer un résultat avec précision* » (item 3.11), car, et cela est particulièrement vrai en mathématiques financières, le fait d'arrondir prématurément la valeur d'une variable (typiquement le taux d'intérêt) peut mener rapidement à une erreur d'approximation aux conséquences importantes (ex. plusieurs milliers de dollars).

Au département d'informatique, la diversité des problèmes à résoudre dans le cours de *Structures discrètes* (élaboration de preuves, calculs d'analyse combinatoire, conception d'algorithmes, etc.) et les discussions que nous avons eues avec les collaborateurs de ce département nous ont amenée à préciser dans le *Guide d'utilisation* ce que nous entendions par *objet mathématique* et *méthode de résolution* (voir Annexe E). Ces précisions avaient pour objectif de permettre une application de la grille qui rende compte des difficultés de résolution de problèmes, selon les phases et les types de compétence impliqués, pour chacun des types de problèmes susceptibles d'être rencontrés. Cette démarche a conduit par la suite à remplacer l'item « *Définir un algorithme* » qui intégrait des éléments de planification par une formulation qui ciblait davantage l'exécution : « *Écrire un algorithme* » (item 3.06) ; en effet, à partir du moment où l'on a rendu explicite le fait que concevoir un algorithme pouvait être assimilé à une démarche de résolution de problèmes, la part de planification de l'algorithme pouvait alors être traitée par les items de la deuxième phase (« *choix de la méthode* », « *structuration de la résolution* », « *identification des cas possibles* », « *utilisation des règles d'inférence* », etc.). Au contact de nos collaborateurs du département d'informatique, nous avons aussi validé le caractère « *récursif* » de la grille, caractère nécessaire puisque la résolution d'un problème mène souvent à la *décomposition de ce problème en sous-problèmes* (item 2.08) qu'il faut alors résoudre et dont il faut aussi *articuler les résultats* (item 0.02). Ces discussions ont ainsi conduit à ajouter un test de terminaison à la résolution : « *Reconnaître l'atteinte de l'objectif ou d'un sous-objectif* » (item 0.07).

Suite à l'utilisation de la grille, certains collaborateurs nous ont aussi fait part de leur appréciation de sa valeur pédagogique et didactique. Comme nous l'a dit un des auxiliaires d'enseignement : *« au lieu de regarder simplement le quoi, on cherche aussi à comprendre le pourquoi. »*

À travers ce processus, nous avons cherché à évaluer le niveau de *fiabilité* de la grille en faisant remplir la grille indépendamment par deux correcteurs qualifiés, pour un même ensemble de copies[18]. Cette précaution méthodologique documentée dans Miles et Huberman (1984) nous apparaissait importante puisque nous prévoyions continuer de faire appel à des collaborateurs pour le codage des copies lors de la véritable cueillette des données. Au département d'informatique, nous avons demandé à quelques reprises à deux codeurs qualifiés d'appliquer indépendamment la grille sur un même ensemble de dix copies. Les améliorations itératives qui en ont découlé nous ont permis d'accroître la fiabilité de 40% à 64%. En fait, si ce niveau de fiabilité demeure inférieur à ce que recommandent Miles et Huberman, il est dû au fait qu'on tolérait qu'une même erreur soit

[18] Le niveau de la fiabilité était égal au rapport entre le nombre d'erreurs des étudiants pour lesquelles les deux codages concourent et le nombre total d'erreurs des étudiants.

attribuée à l'occasion à plus d'une compétence en défaut. Lors de la dernière itération, un des deux codeurs s'est prévalu abondamment de cette possibilité tandis que l'autre a tout fait pour identifier de façon univoque la source de l'erreur. Par conséquent, le premier codeur a coché beaucoup plus d'éléments que le second ; la liste des éléments cochés par ce dernier, plus limitée, était incluse à 93% dans celle du premier. À Polytechnique, nous avons pu procéder à une seule évaluation de la fiabilité de la grille en comparant les résultats obtenus par deux codeurs indépendants sur des copies de l'examen « intra » du cours de mécanique. Là, nous avons obtenu des résultats plus variables, particulièrement dans le choix de la *phase* des erreurs d'*évaluation* : une erreur de stratégie était tantôt associée à la *planification*, au *contrôle* ou au *retour*, ou à une combinaison de tout cela, car les codeurs pouvaient juger que l'étudiant aurait dû être en mesure de récupérer une erreur de *planification* en reconnaissant une invraisemblance (*contrôle*) ou en vérifiant les propriétés physiques de la solution (*retour*). Cependant, les regroupements des erreurs selon le *type* de compétence impliquée (explicitation, évaluation ou intervention) ont fait montre d'un meilleur accord.

À la lumière de ces résultats, il nous est apparu clairement que la grille constituait un outil d'analyse intéressant mais que son application comportait une part non négligeable d'interprétation en raison notamment des contours relativement flous des compétences et de la difficulté à repérer dans les productions des étudiants, caractérisées par une explicitation souvent très fragmentaire, les différents processus cognitifs impliqués. En l'absence d'une certaine forme d'entraînement, les résultats pouvaient varier sensiblement avec le codeur. Nous avons donc résolu de collaborer étroitement avec les futurs codeurs de la cueillette officielle des données pour assurer une certaine homogénéité à l'ensemble, sans toutefois chercher à donner à cette collaboration la forme d'un double codage. En effet, nous avons préféré laisser la responsabilité du codage entre les mains du professeur (ou chargé de cours ou auxiliaire d'enseignement) et limiter notre intervention à un travail d'orientation et de soutien. Cette approche avait pour avantages de mettre à profit les compétences disciplinaires de chacun et d'éviter un biais dans le codage puisque les codeurs n'avaient pas accès à l'histoire éducative des étudiants

3.3.3 Présentation en classe

Cette étape était cruciale car elle devait permettre et encourager la participation volontaire et éclairée des étudiants. Elle a eu lieu en tout début de session (janvier 2000), peu après la présentation du syllabus du cours, de façon à minimiser les perturbations avec le déroulement normal du cours.

Nous avons décrit aux étudiants l'objectif général du projet (i.e. comprendre les effets de leur formation sur leurs compétences en résolution de problèmes) sans toutefois en dévoiler les intentions précises (i.e. l'étude du rôle des différentes composantes de cette formation auxquelles nous nous intéressions plus particulièrement). Il nous apparaissait essentiel aussi de leur donner une vision précise de la méthodologie utilisée, pour qu'ils soient assurés que leur participation (ou leur refus de participer) n'entraînerait aucun effet sur leur évaluation au cours, qu'il n'y aurait aucune transmission d'information personnelle aux professeurs ou correcteurs, et qu'il n'auraient pas à se soumettre à des épreuves cliniques. En plus de ces garanties, la possibilité de pouvoir faire entendre à travers le projet leur opinion de la formation reçue et l'intérêt à participer à une étude dont les sujets auraient plus tard une copie des résultats ont aidé à atteindre un niveau de participation acceptable pour ce type d'étude de nature exploratoire. Nous y reviendrons à la section 4.1.

Puisqu'on cherchait à mettre en relation l'histoire éducative individuelle avec les compétences témoignées en situation de résolution de problèmes, il était clair que l'étude ne pouvait se faire sur une base anonyme. Nous avons donc expliqué clairement les mécanismes qui permettraient de préserver la confidentialité de l'information qu'ils voudraient bien partager avec nous et d'assurer l'anonymat lors de toute publication des résultats (thèse, articles, conférences).

À la suite de la présentation, nous avons distribué les copies du questionnaire auquel était joint le formulaire de consentement (Annexe A). L'obtention par écrit du consentement libre et éclairé émanait non seulement d'une considération d'ordre déontologique, mais aussi d'une exigence (Règles 2.1 à 2.4) du Conseil de la Recherche en Sciences Humaines du Canada (CRM-CRSNG-CRSH, 1998).

Étant donné le temps requis pour répondre soigneusement au questionnaire (un peu moins d'une heure), il n'apparaissait pas envisageable d'intégrer cette activité au cours. Elle a donc pris la forme d'un « devoir » (facultatif, il va sans dire) à faire à la maison pour le prochain cours. Tout en ayant encouragé les étudiants à compléter rapidement le questionnaire, nous avons fait notre apparition aux deux ou trois cours suivants pour recueillir les questionnaires complétés, tant et aussi longtemps que des étudiants nous manifestaient leur intention de le compléter pour le prochain cours.

3.3.4 Dépouillement du questionnaire

Avec le dépouillement du questionnaire, nous avons procédé à la caractérisation de la formation fondamentale de chacun des sujets en mettant à contribution les réponses données aux questions factuelles ainsi qu'aux questions faisant appel à un jugement plus personnel. Cette caractérisation devait servir d'abord à déterminer le choix des sujets de l'étude au niveau qualitatif et ensuite à permettre, lors de la mise en relation avec les compétences démontrées en situation de résolution de problèmes, l'identification de liens possibles.

Nous avons d'abord déterminé pour chacun des sujets les valeurs associées aux variables représentant les éléments factuels et quantifiables de cette formation et pour lesquels nous avions recueilli des informations par la voie du questionnaire. Pour caractériser de façon numérique le rapport à l'informatique, nous avons utilisé la somme des niveaux de maîtrise associés à l'utilisation de différents types de *logiciels* à contenu mathématique (question 16) ainsi que la somme des niveaux de maîtrise associés à différents langages de *programmation* (question 17).

Pour caractériser la formation mathématique reçue, nous avons d'abord extrait le nombre de *cours de mathématiques* suivis aux niveaux collégial et universitaire ainsi que le nombre de cours où l'on a eu à rédiger des *démonstrations* (Annexe B, question 12). La question 11 nous a servi à quantifier l'étendue et la profondeur des connaissances mathématiques. La valeur de l'étendue était obtenue en effectuant simplement la somme des niveaux de maîtrise associés à chacun des éléments de la liste de contenus de la question tandis que la valeur de l'indicateur de profondeur était calculée en additionnant les produits des niveaux de maîtrise de deux éléments liés : par exemple, une valeur de 1 pour la maîtrise du concept de *probabilité conditionnelle* et une valeur de 0 pour celle du *théorème de Bayes* résultaient en une contribution nulle de ces éléments au calcul de la profondeur.

Les expériences liées à l'application, à l'informatique ou aux mathématiques plus théoriques (ex. concours de math, enseignement) ont aussi été prises en compte mais ces données ne pouvaient prétendre à une représentation adéquate sur un axe numérique.

Les questions fermées ont été particulièrement utiles pour effectuer une caractérisation globale et rapide de la perception de la formation reçue en mathématiques et des intérêts de l'étudiant participant. Nous avons accordé un soin particulier à la mise à contribution de différentes questions pour définir des indicateurs d'intérêt. La connaissance de ces intérêts nous est apparue un moyen d'appréhender les articulations entre compétences et formation, d'une part parce que les intérêts en mathématiques se sont en partie développés au travers cette formation, et d'autre part parce que ces intérêts ont pu avoir une influence sur ce que l'étudiant a retiré de sa formation.

Dans le but d'identifier les intérêts, nous avons d'abord tenté de caractériser pour chaque étudiant la formation qui semblait correspondre le mieux à sa vision de la formation idéale. Pour ce faire, nous avons défini des variables pour chacun des énoncés servant à décrire un cours de mathématiques et donnés dans l'encadré de la page 4 du questionnaire (Annexe B). Pour chaque étudiant, nous avons arbitrairement accordé deux points à un énoncé s'il était associé à la vision de la formation souhaitée (question 10b), ajouté un point s'il était associé au cours le plus apprécié (question 7), et retranché un point s'il était associé au cours le moins apprécié (question 8). Puis nous avons aussi considéré les choix par l'étudiant des énoncés de la question 14 pour décrire ce qui lui donne satisfaction en mathématiques. En utilisant différentes combinaisons linéaires de ces deux types de variables, nous avons construit quelques indicateurs d'intérêt :

- *l'intérêt pour la théorie* qui tient surtout à un attrait pour les concepts formels, les espaces abstraits, les structures mathématiques, les définitions et les propriétés, à une volonté de compréhension de la théorie, à une recherche de cohésion, et à une certaine sensibilité à l'égard des preuves ;

- *l'intérêt pour le raisonnement* qui se manifeste surtout par un souci de développement du raisonnement et du sens de la démonstration, un attrait particulier pour les preuves, la recherche de nouveaux concepts formels pour développer la pensée, une volonté d'exploration et d'expérimentation pour découvrir soi-même certains pans de la théorie ou pour tester sa compréhension dans la résolution de problèmes difficiles ;

- *l'intérêt pour l'approche procédurale* détectable à une focalisation sur les exercices d'application de formules, à un attrait pour des formules blindées qui « marchent toujours » ou tout au moins assorties de façon claire de leurs conditions d'utilisation, au plaisir associé à la manipulation algébrique, et à la nécessité d'une rétroaction externe (ex. à l'aide d'un corrigé) pour valider le résultat et la démarche ;

- *l'intérêt pour l'application* qui se manifeste avant tout par un attrait envers l'apprentissage en mathématiques des possibilités d'application des concepts enseignés et des conditions d'utilisation, par la satisfaction de revoir et réutiliser dans d'autres disciplines ces concepts appris, et par un goût pour l'exploration, la visualisation, l'expérimentation et la résolution de problèmes concrets possiblement complexes;

- *l'intérêt pour la technologie*, visible à une ouverture sur la technologie, un attrait pour les possibilités qu'elle offre en termes de visualisation, d'expérimentation et de programmation.

Les formules utilisées pour ces différents indicateurs sont données en Annexe C.

3.3.5 Classification des erreurs

Au fur et à mesure de la session, nous avons procédé avec les professeurs et chargés de cours à la sélection des problèmes du cours qui serviraient à évaluer les compétences des étudiants par le biais de la grille de classification des erreurs. Les problèmes devaient être « tout-garnis » en ce sens qu'ils devaient faire appel à un vaste répertoire de compétences. Nous avions au départ une représentation du problème idéal : représentatif du domaine d'application, il nécessiterait une modélisation par l'étudiant, pourrait avoir à être décomposé en sous-problèmes, exigerait une compréhension fine de concepts mathématiques avancés, des développements logiques et mathématiques et possiblement une utilisation de moyens informatiques de résolution. Nous avons donc retenu les problèmes qui se rapprochaient le plus de cette représentation et dont la combinaison pour un cours donné permettait de couvrir les principales notions.

En adaptant la sélection à la disponibilité des collaborateurs et à la complexité des problèmes, nous avons pu mettre à contribution 3 problèmes à Polytechnique, 4 aux HEC et 5 en informatique (voir Annexe F). Nous avons préféré ne pas nous limiter aux problèmes d'examens en incluant, là où c'était possible, des problèmes de travaux pratiques, souvent plus près d'un contexte d'application professionnelle où la complexité des problèmes, les ressources disponibles et les contraintes liées au temps ne ressemblent guère aux conditions d'un examen. Même si les travaux pratiques sont souvent faits en équipe et reflètent par conséquent un partage de compétences, il demeure qu'une erreur peut raisonnablement être attribuée aux deux membres de l'équipe puisqu'aucun n'a pris l'initiative de la corriger.

Nous nous devons de souligner ici l'extraordinaire contribution des professeurs, chargés de cours et auxiliaires d'enseignement dans cette étape exigeante de classification des erreurs. Une telle collaboration des gens du milieu a entraîné un gain en efficacité substantiel dans le déroulement du projet. Certains codeurs nous ont fait partager leur appréciation de l'exercice : d'une part, il leur aurait permis de revoir la correction, en faisant par exemple ressortir la cohérence d'une démarche d'un étudiant, en dépit d'une maladresse dans l'analyse du problème ; d'autre part, il faciliterait le repérage des erreurs qui reviennent le plus souvent et dont il convient de se préoccuper dans l'enseignement. Il n'en demeure pas moins que cette tâche représentait pour eux une charge de travail supplémentaire non négligeable car elle ne se résumait pas à un transfert d'informations déjà colligées lors de la correction : elle exigeait plutôt une lecture différente des productions des étudiants. Pour aider à passer à ce mode de lecture, sommairement expliqué par le *Guide d'utilisation* (Annexe E), nous avons personnalisé le soutien offert, selon les préférences exprimées par chacun des codeurs : tantôt en les accompagnant lors d'un codage « en direct », tantôt en revoyant avec eux les décisions prises lors d'un codage antérieur.

Nous avons ensuite procédé à la compilation sur tableur de toutes les erreurs recensées. En premier lieu, pour chacun des secteurs observés, nous avons identifié les erreurs les plus courantes. En second lieu, nous avons regroupé les erreurs d'abord selon leur *phase (analyse, planification, exécution, retour* et *contrôle)* et ensuite selon leur *type* (*évaluation, explicitation, intervention).* Ces regroupements ont été effectués individuellement, pour chacun des étudiants, et collectivement, pour chacun des secteurs.

Comme chaque compétence est associée à une seule phase, les regroupements par phase se sont effectués par une simple somme des erreurs associées. Pour ce qui est des regroupements par type, comme nous sommes permis d'associer une même compétence à plusieurs types (voir Annexe E), nous avons procédé par sommes pondérées des erreurs. Nous avons donc accordé, pour chaque type de compétence, un poids unitaire si la compétence problématique est associée à ce type exclusivement, un poids nul si elle ne l'est pas, et des poids fractionnaires si elle l'est en partie : 0,7 si c'est le premier de deux types, 0,3 si c'est le second ; 0,5 si c'est le premier de trois types, 0,3 si c'est le deuxième et 0,2 si c'est le troisième. Les poids ont été évidemment déterminés de façon à préserver le nombre total d'erreurs.

À la suite des traitements appliqués sur les données du questionnaire et sur celles obtenues par la classification des erreurs, il devenait envisageable de chercher à identifier des relations entre les éléments de l'histoire éducative et les compétences observées.

3.4 Cueillette et traitement des données au niveau qualitatif

Comme nous l'avons dit précédemment, l'objectif associé à l'étude au niveau qualitatif était de sonder les pistes identifiées au niveau quantitatif, d'en décortiquer les articulations et d'identifier possiblement de nouvelles relations entre l'histoire éducative et les compétences en résolution de problèmes.

3.4.1 Sélection des sujets

Dans la chronologie des étapes du projet, la mise en relation des compétences avec la formation n'a pu s'effectuer qu'une fois que nous disposions de toutes les données relatives aux productions des étudiants, c'est-à-dire à la toute fin de la session. Entre temps, il nous fallait avoir choisi et reçu en entrevue les étudiants retenus pour le niveau qualitatif. Ceux-ci ont donc été sélectionnés uniquement sur la base de leurs réponses au questionnaire caractérisant leur formation, et donc indépendamment des compétences qu'ils allaient démontrer en situation de résolution de problèmes.

Pour chaque groupe-classe considéré, nous avons cherché à constituer un échantillon représentatif, contrasté et révélateur. Pour des raisons pratiques, nous avons limité à quatre le nombre d'individus choisis par classe. Nous avons cherché à répartir, autant que possible, ces quatre sujets dans le plan défini par les dimensions théorique (richesse des connaissances mathématiques, place accordée à la démonstration, intérêt pour le raisonnement, etc.) et pratique (utilisation de la technologie, place accordée à l'application, expériences de travail, etc.) de la formation reçue. Dans notre recherche d'un échantillon aussi riche et contrasté que possible, nous avons pris soin d'éviter le *biais d'élite* (Miles et Huberman, 1984) qui nous aurait amenée, par exemple, à ne choisir que les sujets dont les réponses aux questions ouvertes paraissaient particulièrement articulées. Nous avons communiqué avec les sujets retenus (principalement par courriel) pour savoir s'ils acceptaient de poursuivre avec une entrevue, et, le cas échéant, pour déterminer un moment et un lieu de rencontre. Si un étudiant retenu refusait l'entrevue, il était remplacé par un autre sujet pouvant aussi contribuer à assurer une diversité à l'échantillon.

3.4.2 Entrevues individuelles

À la suite d'un entretien avec un sujet, il fallait être en mesure de pouvoir expliquer son choix d'orientation professionnelle, ses intérêts en mathématiques, les raisons qui l'amènent à valoriser ou à dénigrer sa formation fondamentale, l'origine des forces et difficultés rencontrées dans l'acquisition de nouvelles compétences. Pour y arriver, nous cherchions à sonder ses conceptions, ses préférences, ses représentations du savoir, la perception qu'il pouvait avoir de ses forces et difficultés, son attitude face à la théorie, face à un problème à résoudre, l'évolution de ses aspirations, les parts respectives de l'école et des autres milieux dans l'acquisition de connaissances, dans l'expérience de la complexité, de la technologie, etc. Dans l'approche méthodologique de cette composante du projet, nous avons donc mis à profit les résultats de travaux utilisant la *biographie didactique* (Mercier, 1992 et 1995) ou *éducative* (Dominicé, 1992) comme moyen de recherche.

Puisqu'il nous était à toute fin pratique impossible d'évoquer l'ensemble du parcours éducatif, il nous fallait appliquer une certaine sélection. Il convient de rappeler ici que l'histoire de vie n'est pas une initiative du sujet, et qu'il n'en a pas entièrement le contrôle. Sur la *biographie éducative*, Dominicé (1992) écrit ceci:

> *« La biographie éducative n'est pas une autobiographie, parce que le chercheur demande à ses interlocuteurs de reconstruire leur parcours de vie selon une direction qu'il considère, lui, comme décisive par rapport à sa recherche. »*

Nous avons donc demandé aux étudiants de privilégier toute information relative à la construction de leur choix d'orientation académique et professionnelle, ainsi qu'à l'évolution de leurs rapports avec les mathématiques, l'informatique et toute autre discipline ayant contribué, de façon positive ou négative, à ce choix d'orientation.

En contrepartie, il fallait veiller à ne pas provoquer chez les sujets, par des directives externes trop précises, un *effet Rosenthal* qui les amènerait, en voulant satisfaire l'enquêteur, à biaiser le travail d'interprétation, à chercher par eux-mêmes (et éventuellement créer de toutes pièces) les liens visés par la recherche; il convenait donc faire preuve à la fois d'encadrement et d'ouverture dans la recherche d'information sur les différents éléments de leur passé. Nous avons donc opté pour l'approche de l'*entretien semi-directif* (Chauchat, 1985) en nous octroyant à la fois des interventions non-directives (reformulations, résumés) et quelques interventions plus directives (consignes, relances, recentrations) pour guider le répondant et l'amener à élaborer ses commentaires. Quand les circonstances s'y prêtaient, nous avons cherché à favoriser par les relances une évocation précise de l'action, selon le modèle de l'*entretien d'explicitation* (Vermersch, 1994).

Dans l'utilisation de la biographie éducative chez des adultes en formation professionnelle, Dominicé suggère de chercher à couvrir également les *composantes intellectuelles, professionnelles et sociales* qu'il considère être les trois dominantes de la formation. Comme l'expérience en milieu de travail est maintenant le lot de la majorité des étudiants, il apparaissait fort probable de trouver là des éléments de formation aptes à être mobilisés dans leurs apprentissages scolaires subséquents et dans la pratique professionnelle qui suivra. Quant à la formation académique, Dominicé soutient que les apprentissages significatifs du temps de la scolarité semblent tenir davantage à la socialisation due aux expériences scolaires qu'aux progressions de l'enseignement; il en voit l'illustration dans le fait que dans les biographies éducatives d'adultes, le souvenir d'une matière, lorsqu'il est mentionné, n'est jamais dissocié de la personnalité de l'enseignant. À partir de ces hypothèses, nous avons souhaité encourager dans les entretiens l'apport d'information relative aux différents enseignants ainsi qu'à tous les milieux sociaux ayant pu jouer un rôle dans la formation (famille, milieux de travail et autres groupes d'appartenance), tout en réservant au participant l'initiative d'amener ces différents éléments.

Dans ses travaux portant sur la *biographie didactique*, Mercier (1992) avait dressé une liste de questions à utiliser avec les élèves pour cerner leur rapport aux mathématiques et aux contraintes temporelles de l'enseignement (ex. *"À quel moment de votre scolarité avez-vous le moins aimé les mathématiques? Vous rappelez-vous pourquoi ?"*). Si nous nous sommes inspirée de ces questions pour conclure l'entrevue, nous avons cependant privilégié un fil chronologique pour le cœur de l'entretien de façon à laisser émerger le plus grand nombre possible d'événements, plutôt que d'encourager le sujet à effectuer lui-même une sélection. Pour certaines questions liées aux conceptions

Les entrevues ont été conduites à l'aide d'un *guide d'entrevue* que nous avions préparé pour l'ensemble des sujets (voir Annexe D) et que nous ajustions pour chacun d'entre eux à partir des informations recueillies par le questionnaire. Ce guide permettait en outre d'intégrer une prise de notes succinctes de façon à nous assurer de couvrir au fil de l'entrevue les principaux items.

Le guide reflétait la structure que nous cherchions à donner à l'entrevue. Après une introduction pour informer le sujet, lui donner quelques consignes et répondre à ses questions, l'entrevue se divisait en trois temps. Dans un premier temps, nous cherchions à sonder sa vision actuelle des choses : les motivations derrière le choix de la formation universitaire, ses représentations des mathématiques et de l'informatique, comme disciplines propres et en relation avec la formation choisie. Pour favoriser une telle prise de conscience, nous avons utilisé des questions propices à une *verbalisation de l'imaginaire* (Vermersch, 1994) (ex. « *Y a-t-il quelque chose qui te déplaît en informatique ? À quoi cela te fait-il penser ?* » ou encore « *Tu entres dans une classe d'université; on y donne un cours mais tu ne sais pas a priori de quel cours il s'agit. Qu'est-ce qui te permettrait de conclure rapidement qu'il s'agit d'un cours de mathématiques (et non d'un cours de physique ou d'économie ou d'informatique) ?* ») Dans un second temps, nous voulions amener le sujet à faire le récit chronologique de sa biographie éducative, en la découpant selon les cycles institutionnels (pré-scolaire, primaire, secondaire, cégep, universitaire, post-scolaire) pour pouvoir en apprécier l'environnement didactique et social ainsi que les personnes influentes. Dans un troisième temps, nous avons cherché à compléter et synthétiser l'information déjà donnée en amenant le sujet à identifier les cours qui l'ont marqué, à évoquer de façon précise un apprentissage particulier, et à exprimer son opinion sur l'ensemble de sa formation. Le guide a été soumis à l'approbation du Comité d'éthique de la recherche (CÉR) ayant l'autorité sur ce projet, comme l'exige la Règle 3.2 portant sur la conduite d'entrevues (CRM-CRSNG- CRSH, 1998).

Nous avions prévu un maximum de deux heures par entrevue, et nous avons pu nous y conformer. Les entrevues ont été enregistrées sur bande audio, avec l'accord des participants. Si un participant s'était opposé à l'enregistrement, ce qui n'est pas arrivé, la cueillette des données se serait alors limitée à la prise de notes.

3.4.3 Codage des entrevues

Les douze entrevues ont été retranscrites de façon fidèle et intégrale (400 pages de verbatim). Le contenu de chaque entrevue a ensuite été soumis à un processus de codage. Nous avons défini et ajusté les codes pour refléter les éléments de la formation qui nous intéressaient et permettre de repérer les processus et étapes importantes de cette formation. Selon Dominicé, il existerait des processus-clés dans la formation des individus, notamment l'*autonomisation à l'égard de la famille d'origine* et la *construction du choix professionnel,* processus auxquels nous pourrions ajouter l'*autonomisation à l'égard du milieu didactique*. Sans le nommer ainsi, Dominicé y fait toutefois allusion lorsqu'il mentionne la nécessité pour l'individu de rechercher sa place dans l'espace scolaire, processus qui passe par un délicat rapport dialectique entre le respect des normes et leur transgression pour conduire à la prise en charge personnelle. On pourrait y voir un parallèle sur une échelle de temps différente avec la *dévolution* (Brousseau, 1998), où l'étudiant en arrive à s'approprier non plus un problème donné par l'enseignant, mais l'ensemble de la formation qu'il reçoit. Nous avons donc pris soin de couvrir ces éléments dans le choix des codes.

Le codage s'est fait en choisissant les segments d'entrevue les plus significatifs, i.e. tous les extraits traitant, de près ou de loin, des différents milieux d'apprentissage, du choix d'orientation professionnelle, du parcours académique, du rapport aux différentes disciplines scolaires et aux mathématiques en particulier. Pour chaque entrevue, nous avons ainsi retenu entre 100 et 200 de ces segments que nous avons ensuite traduits en fiches dans une base de données. Ces quelque 2000 fiches ont été définies à partir de huit champs (*nom, secteur, catégorie, élément, attribut, idée, citation, page*). Les deux premiers champs (*nom, secteur)* visaient à identifier l'individu et son secteur d'étude ; les deux champs suivants (*catégorie, élément*) permettaient de situer le contexte social et/ou disciplinaire d'apprentissage auquel se référait le segment d'entrevue (ex. *mathématiques, application*). L'*attribut* servait à associer le commentaire du participant à une composante curriculaire de ce contexte (*contenu, enseignement, évaluation, temps, espace, ressources)* ou à un aspect de la relation du participant avec ce contexte. Le segment choisi se retrouvait de façon intégrale dans le champ *citation*, et de façon schématique (en moins de 30 caractères) dans le champ *idée.* La *page* permettait de situer cette citation dans le fichier du verbatim associé à cette entrevue, pour en retrouver éventuellement le contexte. L'extrait d'entrevue qui suit permet d'illustrer le processus de codage.

Quelle utilité vois-tu aux mathématiques dans ta formation? [Honnêtement, avant, je voyais pas grande utilité. Ça a été mon problème longtemps, parce que je faisais mes maths juste pour les passer. Fait que j'arrivais la veille de l'examen, j'étudiais, j'étudiais, le lendemain, je faisais mon examen puis après ça "oups! c'était quoi que j'ai étudié?", j'oubliais totalement.] [Mais là, je m'en rends compte. En étant en informatique, plus ou moins en entreprise, je me rends compte que il y a des choses que tu peux faire, que tu peux utiliser les concepts mathématiques pour simplifier ton traitement, ou l'améliorer, le rendre plus rapide, prendre moins de ressources. Tout ce qui a	Nom : *François* Secteur : *Info* Catégorie : *Math* Élément : *Application* Attribut : *Motivation* Idée : *avant : inutile ; passer.* Page : *2* Catégorie : *Math* Élément : *Info* Attribut : *Motivation* Idée : *algorithme=>math util =>+*

rapport aux algorithmes, ça, c'est très utile.]	Page : *2*
As-tu des exemples en tête? [Un petit exemple, niaiseux, là, si je peux dire ça de même, c'est la logique booléenne. Juste le fait que tu utilises une variable, que tu testes une variable avant une autre, ça va te faire un test de moins, fait que ton algorithme se fait automatiquement.]	Catégorie : *Math* Élément : *Info* Attribut : *Motivation* Idée : *log.bool.=>efficacité code* Page : *2*
Es-tu en accord avec la place qu'on leur accorde dans ton bacc ? Les math? Je dirais pas qu'il y en a trop, mais c'est peut-être la profondeur des mathématiques qui est... non, pas la profondeur, parce que je trouve ça intéressant, surtout que là, on rentre dans... 1400, je l'ai lâché, mais ça rentre dans [les dérivations, je pense, ouais, c'est ça, à plusieurs variables entre autres, puis c'est des concepts que tu retrouves, entre autres, en programmation en trois dimensions, beaucoup de ça. Ça c'est une autre utilité des mathématiques que j'ai pas mentionnée.] C'était sur quoi que je... (rires) J'ai oublié c'était quoi la question...	Catégorie : *Math* Élément : *Info* Attribut : *Motivation* Idée : *f '(x,y) => programm3D* Page : *3*
Si t'es d'accord avec la place qu'on leur accorde... Tu disais que c'était une question de profondeur... Ouais, c'est ça, sauf que... [le problème, je dirais, c'est les professeurs. Ils prennent souvent pour acquis que les étudiants, ils savent ça, fait qu'ils passent par-dessus des étapes, puis moi, qui a été un étudiant qui a pas mal fait ses math… « on the side », j'arrive là, puis je me souviens plus de rien, là. Fait que là, le prof, lui, il sous-entend "eux autres, ils savent tout, là", fait que là, il passe par-dessus ben des étapes.	Catégorie : *Math* Élément : *Université* Attribut : *Enseignement* Idée : *prof suppose étud. savent* Page : *3*
As-tu un exemple en tête? Euhh... un exemple en tête... Ben, mettons, il y a une dérivée, ok, ou une intégrale, ok, j'vais prendre une intégrale, parce dans les séries tu peux comparer avec une intégrale, là, ben, le prof va faire l'intégrale, mais il la démontrera pas, comment il a utilisé les propriétés qu'il a utilisées, puis tout ça.] Fait que là, t'arrives puis... [Juste des concepts niaiseux comme les logarithmes, les propriétés des logarithmes, je m'en souviens quasiment... là, je m'en souviens, mais avant ça, il a fallu je revienne puis je coure.]	Catégorie : *Math* Élément : *Secondaire* Attribut : *Apprentissage* Idée : *a oublié propriétés de log* Page : *3*
[c'est pour ça je l'ai lâché, justement, à cause de mon 203 qui était par-dessus, que je viens juste de finir, la semaine passée-là... Je le faisais à distance, fait que là, je courais un petit peu trop pour tout me rappeler... Même mon 203, avant de le commencer, je l'ai fait à peu près en un mois et demi, ce cours-là...]	Catégorie : *Math* Élément : *Collégial* Attribut : *Temps* Idée : *203 : récent & intensif* Page : *3*
Par correspondance? Oui, par correspondance... [puis juste avant de le faire, je me souvenais plus des concepts, les limites, je me souvenais plus c'était quoi, fait qu'il a fallu que je me revire en arrière,]	Catégorie : *Math* Élément : *Collégial* Attribut : *Apprentissage* Idée : *a oublié concept de limite* Page : *3*
[j'ai été sur internet même chercher des sites en ang... qui étaient là-dessus, des cours universitaires mais qu'ils donnaient, peut-être pas universitaires, mais des cours de collèges, qu'ils donnaient sur internet. Fait que j'ai beaucoup de rattrapage, en tout cas.]	Catégorie : *Math* Élément : *Collégial* Attribut : *Ressources* Idée : *203 : internet pour rattraper* Page : *3*

La figure qui suit donne la distribution selon le champ *catégorie* des 2020 fiches ainsi créées, et précise la distribution selon le champ *élément* des fiches associées aux *catégories* les plus peuplées.

CATÉGORIE	NB	→
Administration	25	○
Amis	29	○
Arts	28	○
École	176	●
Famille	62	●
Génie	35	○
Informatique	254	●
Jeux	88	○
Langues	120	●
Mathématiques	814	●
Sciences hum.	47	○
Sciences nat.	235	●
Sports	44	○
Travail	63	○

École

ÉLÉMENT	NB
Pré-scolaire	2
Primaire	32
Secondaire	35
Collégial	25
Université	62
Général	20

Informatique

ÉLÉMENT	NB
Internet	6
Jeux	11
Langage	24
Logiciel-outil	45
Progrmation	82
Général	84
Autre	2

Langues

ÉLÉMENT	NB
Anglais	13
Français	93
Général	5
Autre	9

Mathématiques

ÉLÉMENT	NB
Application	37
Informatique	126
Langage	24
Preuve	80
Pré-scolaire	2
Primaire	50
Secondaire	121
Collégial	165
Université	69
Général	140

Sciences nat.

ÉLÉMENT	NB
Biologie	17
Chimie	61
Physique	77
Langage	4
Primaire	7
Secondaire	31
Collégial	25
Université	3
Général	10

Figure 6 – Distribution des segments d'entrevue dans la base de données

Dans l'attribution des codes, nous avons visé un maximum de précision au regard des questions de recherche. Par exemple, un extrait d'entrevue traitant de l'utilisation de l'ordinateur en mathématiques au collégial était associé à *Mathématiques-Informatique*, plutôt qu'à *Mathématiques-Collégial* (réservé à une caractérisation générale des cours de mathématiques au collégial) ou *Informatique-Logiciels* (réservé à une utilisation des logiciels dans un cadre autre que celui des mathématiques).

Une fois cette base de données constituée, il a été relativement facile, en variant les paramètres de sélection et de tri, d'extraire les fiches permettant de repérer les caractéristiques de la formation pour en explorer plus tard les effets. Nous adoptions une approche tantôt transversale pour repérer les tendances générales (ex. extraction de toutes les fiches associées à l'élément « *langage* » ou à la catégorie « *langue* »), tantôt longitudinale pour mieux comprendre les parcours éducatifs au niveau individuel (ex. extraction de toutes les fiches associées à un même « *nom* » et à l'attribut « *motivation* »). Le champ « *idée* » permettait de parcourir rapidement les différentes fiches ainsi extraites.

3.4.4 Analyse didactique des productions

Nous avons fait une lecture détaillée des productions des participants de l'étude qualitative en réponse aux problèmes retenus. Pour éviter un délai dans la remise aux étudiants des examens et travaux, cette lecture s'est faite à partir des photocopies que nous ont faites les professeurs, chargés de cours et auxiliaires d'enseignement.

Pour chacun des sujets étudiés, nous avons cherché à retrouver des phénomènes récurrents dans les erreurs, en les regroupant selon le *type* de compétence impliquée. Dans cette phase d'analyse, nous avons mis à contribution la classification des erreurs effectuée par nos collaborateurs et avons discuté des phénomènes repérés avec notre directrice de recherche. Au niveau des compétences d'explicitation, les travaux de De Serres et Groleau (1997) ont servi de référence dans l'analyse des erreurs sémantiques, syntaxiques et mixtes liées à l'utilisation des langages naturel, symbolique et graphique. Ces auteurs ont par ailleurs observé que la plupart des erreurs langagières semblent se produire dans des situations impliquant plus d'un langage, soit parce que plusieurs langages sont imbriqués dans une même phrase, soit parce que la question ou le problème exige de faire une traduction d'un langage à un autre (comme c'est le cas en modélisation).

Pour expliquer les difficultés d'un étudiant, nous avons cherché à identifier, parmi les causes envisageables, celles qui paraissent les plus probables en vertu de ses données biographiques et de celles du groupe, et à les lier aux environnements qui en ont favorisé l'émergence. Les causes peuvent être variées: des lacunes en contenus notionnels (ex. en algèbre ou en probabilités), des difficultés langagières, une absence de transfert en situation d'application, le refus de la complexité, le refus de l'indétermination, la recherche des intentions du professeur, la recherche d'une formule, la volonté de reproduire quelque chose de connu, la valorisation d'une approche essai-erreur, la généralisation à partir de cas particuliers, etc.

Par ailleurs, il nous est apparu tout aussi important, sinon plus, d'identifier les forces apparentes qui distinguent certains étudiants du groupe et de comprendre ce qui dans leur histoire éducative a pu contribuer au développement de ces forces. Ces éléments pourraient être d'une grande utilité dans l'élaboration curriculaire.

Comme nous nous savions particulièrement vulnérable au *biais holistique* (Miles et Huberman, 1984), issu de cette volonté qui caractérise bien des chercheurs de tout vouloir expliquer par un super-modèle intégrateur, nous avons veillé à nous rappeler constamment qu'on ne peut tout expliquer, que face à une même situation, ou à un même ensemble de circonstances, deux individus peuvent réagir différemment, qu'il existe une influence mutuelle entre individus et situations (Jones, 1985). La complexité et la richesse des données ont grandement aidé en ce sens.

Finalement, il nous a fallu résister tout autant au *biais de la confirmation* qui aurait concentré notre attention sur les cas qui semblaient corroborer certaines intuitions initiales et qui aurait tenu pour négligeables les "exceptions" aux "règles" anticipées. Les cas contraires aux intuitions ont été très riches dans le processus de recherche car ils ont aidé à l'identification de nouvelles pistes d'investigation et d'éléments de rupture dans les articulations prévues.

4 Résultats de l'analyse quantitative des données

L'analyse quantitative des données de notre recherche vise à identifier des observations et tendances générales. En relation avec les objectifs de notre étude exploratoire, il s'agit de cerner les relations entre l'histoire éducative, la formation en mathématiques et les compétences des étudiants en résolution de problèmes. Nous donnons une vision générale de l'ensemble des étudiants qui ont participé à l'étude, de la formation qu'ils ont reçue en mathématiques, de la perception qu'ils en ont, des intérêts qu'ils ont développés en mathématiques et des compétences qu'ils manifestent en situation de résolution de problèmes de mathématiques appliquées. Le chapitre se termine une mise en relation préliminaire des caractéristiques de la formation avec les compétences observées.

4.1 Présentation des étudiants

Dans les trois classes où nous avons présenté le projet, 43 étudiants se sont portés volontaires pour y participer : 15 à l'École des Hautes Études Commerciales (sur une possibilité de 60), 18 au département d'Informatique et de recherche opérationnelle (sur une possibilité de 80), et 10 à l'École Polytechnique (sur une possibilité de 30). Si ce niveau de participation est tout de même appréciable (environ 25% des étudiants sollicités), la taille de l'échantillon demeure modeste et amène à renoncer définitivement à vouloir attribuer une valeur statistique aux résultats présentés.

Aux HEC, les étudiants de première année suivent, au cours de la première session, les cours du tronc commun ; ils sont répartis dans des groupes sans référence à leur spécialisation ultérieure : finance, comptabilité, gestion, etc. Fait à noter, la composante scientifique de la formation des étudiants de notre échantillon aux HEC est loin d'être négligeable. 9 étudiants sur les 15 avaient d'abord entrepris une formation collégiale en sciences (de la nature, de la santé ou pures) et 3 l'ont menée à terme. Parmi ceux qui ont plutôt choisi de changer d'orientation au cours de leurs études collégiales, une étudiante a un DEC professionnel en techniques administratives. Si tous les étudiants de l'échantillon sont à leur première session aux HEC et donc suivent les cours *Modélisation et optimisation* (1-611) et *Mathématiques financières* (1-612) pour la première fois, 7 étudiants n'en sont pas à leur première session universitaire: 2 ont déjà à leur actif des cours universitaires d'administration et 3 autres ont antérieurement été inscrits dans des programmes de formation scientifique (génie, biologie, mathématiques et informatique).

À l'École Polytechnique, un étudiant sur les 10 de l'échantillon de départ décidera en cours de session d'abandonner le génie pour l'administration. Sur les 9 qui resteront, 2 en sont à leur deuxième session de génie (un en génie chimique et l'autre en génie informatique) et par conséquent à leur deuxième tentative avec le cours *Mécanique pour ingénieurs* (ING 1010). Les 7 autres sont tous inscrits en génie chimique et viennent directement du cégep: 6 avec un DEC général en sciences et 1 avec un DEC professionnel en techniques industrielles. On peut questionner la représentativité d'un tel groupe pour caractériser les étudiants en génie, puisqu'il n'est pas farfelu de supposer que le cours de physique obligatoire ne rejoint peut-être pas les intérêts des étudiants en génie chimique. Toutefois, le résultat moyen à l'examen final de mécanique du groupe dont est issu notre échantillon (avec là aussi une très forte majorité d'étudiants en génie chimique) s'est révélé tout à fait comparable à celui de tous les groupes, avec une différence de moins de 2%. Notre échantillon a eu un peu moins de chance, avec un déficit de 13% sur ce résultat moyen.

Au département d'Informatique et de recherche opérationnelle, 4 étudiants sur les 18 abandonneront le cours de *Structures discrètes*. Sur les 14 qui persévéreront, 5 suivent le cours pour la seconde fois et n'en sont donc pas à leur première session en informatique. Des 9 qui tenteront de réussir le cours «à leur première tentative », seulement 2 viennent directement du cégep, dont un muni d'un DEC en techniques informatiques. Six autres proviennent de différents programmes universitaires (génie, physique, philosophie, psychologie) avec une formation collégiale en sciences pour la plupart.

On le constate, les parcours des 38 étudiants que nous avons suivis jusqu'à l'examen final sont plutôt variés. À cette variété, il convient d'ajouter les formations reçues à l'étranger (France, Algérie, Tchad, Roumanie, Libye) pour 6 des étudiants; ce petit nombre et cette dispersion ne pouvaient évidemment pas servir de base à une étude comparée. Dans une première étape, nous avons plutôt cherché à dégager des tendances générales dans les formations reçues et les compétences démontrées, pour ensuite tenter d'identifier les relations possibles entre ces deux éléments.

4.2 Traits généraux de la formation reçue

Pour caractériser la formation reçue par les étudiants qui participent à notre étude, nous avons examiné les programmes d'études secondaires et collégiales et la place faite à la démonstration, à l'informatique, à l'application.

4.2.1 Les programmes d'études secondaires et collégiales

Chez la plupart des étudiants participants, la formation mathématique au secondaire a été complétée à l'intérieur des programmes 436 et 536 qui constituent la formation nécessaire pour entreprendre des études au niveau collégial dans les programmes pré-universitaires ayant des préalables mathématiques. Au collégial, les étudiants ont tous suivi les deux premiers cours de *Calcul différentiel et intégral* (103 et 203) et celui d'*Algèbre vectorielle et linéaire*(105) ou des cours jugés équivalents, car ces trois cours sont pré-requis à l'admission dans chacun des trois secteurs universitaires visités.

Les programmes du secondaire qui ont encadré la formation des étudiants ont été élaborés dans les années 80 (MÉQ, 1984, 1987, 1988), puis revus de façon mineure au début des années 1990 sous une forme transitoire (MÉQ, 1992) en préparation aux remaniements plus importants dont l'implémentation a été complétée en 1998 (MÉQ, 1996 et 1997). Les cours suivis par les étudiants sont ceux des versions transitoires, antérieures aux remaniements. On peut donc d'emblée reprocher à cette étude de se révéler prématurément obsolète. Cependant, il faut garder en tête que les enseignants ne modifient pas radicalement du jour au lendemain leur façon d'enseigner et que plusieurs des éléments identifiés pas l'étude peuvent encore être présents dans l'application des nouveaux programmes. En un sens, l'étude comporte l'avantage d'aborder les effets d'un enseignement maîtrisé, au bout de plusieurs années d'application du même programme, et permet donc d'en faire ressortir les caractéristiques, à un état presque « pur », ainsi que les variantes qui ont pu en émerger.

Qui plus est, il s'agit de la formation qu'ont reçue nombre d'enseignants, actuels et futurs; il ne serait donc pas surprenant d'en déceler des effets persistants ou tout au moins des traces dans les cours de mathématiques pour plusieurs années à venir. Nous aurons l'occasion d'aborder cette question lors de l'interprétation des résultats de notre recherche.

Conçus en réaction aux programmes-cadres relativement peu contraignants des années 70, ces programmes du secondaire visaient à assurer une formation homogène à l'échelle de la province, accessible à tous, en encadrant de façon serrée la séquence de contenus à l'aide d'une longue liste de micro-objectifs. L'atteinte de ces objectifs devait être elle aussi assurée de façon rigoureuse à l'aide de la pédagogie de la maîtrise fondée sur la vérification des préalables, la pratique, la répétition, et la rétroaction par l'évaluation. Il n'est donc pas étonnant de constater que la plupart des objectifs commencent par *« calculer »*, *« tracer»*, *« trouver »*, *« définir »*, *« identifier »*, *« énoncer»* (MÉQ, 1986,1987,1992) car ils se prêtaient ainsi merveilleusement bien à l'évaluation objective. Comme ce sont ces même objectifs qui étaient évalués dans les examens de fin d'année du ministère, il apparaît raisonnable de croire que cette approche procédurale a eu un effet non négligeable d'uniformisation dans l'enseignement des mathématiques au secondaire.

Fait intéressant, ce phénomène de « procéduralisation » de l'enseignement des mathématiques au secondaire ne s'est pas limité au Québec, ni même à l'Amérique du Nord. Il se serait étendu aussi en France vers la fin des années 80 avec la réforme Chevènement. Bkouche (1991) en fait une critique sévère :

> *« L'enseignement se réduit à un simple apprentissage de procédures dont le sens importe peu, l'efficacité de l'enseignement se mesurant par la capacité des élèves à restituer les procédures, ce qu'on appelle pompeusement l'évaluation. »*

Au niveau collégial, toutefois, la formation mathématique se révèle beaucoup plus variable, d'abord en termes de cours suivis mais aussi dans les contenus et les approches d'enseignement d'un même cours. En plus de la possibilité qu'ont les étudiants de choisir comme cours à option d'autres cours de mathématiques, chaque institution collégiale est libre d'imposer des cours supplémentaires à l'intérieur des programmes dispensés, comme ce fut le cas dans certains collèges avec le cours de mathématiques 100 « *Méthodes de* *preuve* » rendu momentanément obligatoire pour leur programme de Sciences de la nature. Dans notre échantillon, 18 étudiants avaient à leur actif un cours de mathématiques supplémentaire, 9 en avaient deux, et 1 en avait trois. Le tableau suivant donne la distribution des cours supplémentaires suivis par les participants :

Sigle	Titre	Total	HEC	Info	Poly
307	Probabilités et statistique	11	5	4	2
303	Calcul diff. et intégral III	10	1	8	1
100	Méthodes de preuve	8	4	2	2
101	Compléments de math.	3	0	3	0
337	Statistique	3	2	1	0
257	Probabilités et statistique	2	0	2	0
205	Algèbre vectorielle II	1	0	1	0
122	Math. appliquées	1	0	1	0
Nombre d'étudiants		*43*	*15*	*18*	*10*

Tableau 1 – Cours supplémentaires de mathématiques de niveau collégial suivis par les participants

De plus, les programmes de ces cours sont définis par le Ministère de façon très sommaire et sont rédigés en termes de contenus minimaux et non d'objectifs d'apprentissage (ex. *« Calcul d'aires de toutes sortes. Volumes de révolution (axes verticaux et horizontaux). Intégrale impropre. »* [19]). Une plus grande marge de manœuvre est donc accordée à l'enseignant, autant sur le plan des contenus que sur le niveau de formalisme. Cette flexibilité est visible dans les concepts que les étudiants disent avoir vus (Annexe B, question 11). Par exemple, sur les 16 étudiants qui ont suivi un cours de statistiques au collégial, seulement 3 déclarent avoir vu le théorème de Bayes ; de même, parmi les 17 étudiants qui disent avoir vu le théorème de Rolle, 12 l'auraient vu au deuxième cours de calcul différentiel et intégral (203) commun à tous (à quelques équivalences près), alors que 3 autres y auraient été plutôt exposés dans le troisième cours de calcul (303), optionnel celui-là.

[19] http://www.meq.gouv.qc.ca/m_ped-ens-sup.htm

4.2.2 La place faite à la démonstration

La démonstration ne s'inscrivait pas dans les objectifs officiels du programme de mathématiques au secondaire suivi par les étudiants de notre étude. Dans la section réservée à la géométrie du programme de mathématiques 536 (MÉQ, 1992), on déclare sans ambiguïté que :

> « *Rendre l'élève capable de démontrer des théorèmes n'est pas un objectif visé par ce programme. On peut, bien sûr, démontrer à l'élève un théorème ; il faut cependant être conscient qu'on doit surtout aider l'élève à s'approprier ce théorème, à reconnaître quand l'utiliser et à l'intégrer à l'ensemble de ses connaissances en géométrie.* »

Faire une place à la démonstration relevait donc du choix de l'enseignant, et amener à l'élève à en faire pouvait être associé à une forme d'enrichissement. De fait, sur les 43 étudiants ayant complété le questionnaire, seulement 9 reconnaissent avoir eu à rédiger des démonstrations au secondaire.

Il convient de mentionner par ailleurs que les programmes de géométrie au secondaire avaient pris leurs distances par rapport à la géométrie euclidienne pour privilégier la géométrie des transformations. Cette orientation se reflète dans nos données : alors que sur les 23 étudiants qui se souviennent avoir vu l'*homothétie*, 19 l'auraient vue au secondaire (ou même au primaire !), seulement 7 des 14 étudiants ayant abordé le *théorème de Thalès* l'auraient fait au secondaire (les autres au collégial), et de ce nombre, 6 ont reçu leur formation secondaire à l'étranger. Quant aux *axiomes d'Euclide*, ils ont carrément été relégués au musée : seulement 4 étudiants disent y avoir été exposés : un au collégial, deux à l'Université et un quatrième à l'étranger.

L'apprentissage de la logique, qui aurait pu servir d'assises au développement ultérieur de la démonstration, ne semblait guère plus présent au secondaire. Sur les 24 étudiants qui disent avoir déjà vu les *tables de vérité*, 6 les auraient rencontrées pour la première fois au collégial et 5 à l'université ; seulement 13 étudiants sur les 43 se souviennent y avoir été exposés au secondaire. Par surcroît, la notion de *contraposée*, qui apparaît à première vue intimement liée aux *tables de vérité*, ne semble vouloir dire quelque chose qu'à 11 des 43 étudiants interrogés, et de ce nombre, seulement 2 en auraient entendu parler au secondaire.

Pour la majorité des étudiants, le collégial a donc représenté le premier contact véritable avec la démonstration. Mais là encore, la place qu'on lui accorde est plutôt variable, et ne paraît pas dictée par les programmes, si ce n'est pour les cours de Mathématiques 100 (Méthodes de preuve) et de Mathématiques 303 où l'on inclut, parmi les objectifs, celui de « *Revenir plus formellement sur les notions vues plus intuitivement aux cours 103 et 203* », et parmi les contenus, les « *Théorèmes d'analyse* »[20]. Les étudiants rencontrés en entrevue aideront à préciser cette situation dans la section 5.2.2.

Les probabilités aidant, la plupart des étudiants seront exposés dans au moins un cours à une approche formelle où on leur donnera à voir des démonstrations. Mais plusieurs s'en sortiront sans avoir eu à en rédiger eux-mêmes : parmi les participants, 23 étudiants déclarent n'avoir jamais eu à élaborer une démonstration.

4.2.3 La place faite à l'informatique

Pour ce qui est de la place à donner à l'informatique dans l'enseignement des mathématiques, les programmes du secondaire conçus dans les années 80 s'intéressaient davantage à l'utilisation de la calculatrice, qu'on souhaitait voir précédée d'une estimation, suivie d'un processus de vérification, et évitée pour « *les calculs que le cerveau effectue plus vite* » (!) (MÉQ, 1984b). L'ordinateur, absent des cours de mathématiques du secondaire, n'a été visible que dans les cours optionnels d'initiation à l'informatique, pour les étudiants qui y ont eu accès. Au-delà du temps consacré au traitement de texte, seulement 9 étudiants déclarent avoir été initiés au secondaire à un logiciel à contenu mathématique (ex. EXCEL) et 8 à un langage de programmation.

Au collégial, les ressources informatiques sont davantage utilisées dans les cours de mathématiques, mais une fois de plus, la décision d'utiliser ces ressources relève du professeur ou du collège. Le Tableau 2 donne le nombre d'étudiants ayant utilisé les différents types de ressources dans le cadre d'un cours de mathématiques de niveau collégial ainsi que ceux qui y ont été familiarisés dans un autre contexte (cours d'informatique, de physique, travail, initiative personnelle, etc.) :

---

[20] http://www.meq.gouv.qc.ca/m_ped-ens-sup.htm

Titre	Exemple	Math collégial	Autre contexte
Tableur	EXCEL	3	22
Logiciel statistique	SPSS	5	2
Calculatrice graphique	TI-83	5	2
Calculateur symbolique	MAPLE	3	4
Calcul numérique	MATLAB	0	1
Micro-monde	CABRI-Géomètre	1	0
Calculatrice financière	HP-12C	0	1

Tableau 2 – Nombre d'étudiants ayant appris à utiliser un logiciel à contenu mathématique

On le constate : l'utilisation de la technologie apparaît encore relativement peu répandue dans les cours de mathématiques de niveau collégial ; d'après nos données, elle se produirait dans environ 15% des cours. Dans toute leur formation, environ le tiers des étudiants interrogés ont eu à utiliser un logiciel ou une calculatrice graphique dans au moins un cours de mathématiques: 6 étudiants aux HEC, 6 en informatique et 3 à Polytechnique.

Par ailleurs, l'accès aux cours d'informatique, très en demande, n'est pas toujours chose facile. En entrevue, deux étudiants nous ont mentionné que l'administration du cégep n'avait pu accéder à leur demande d'un cours de programmation, bien qu'il ait été offert comme cours au choix. Néanmoins, au moment d'entreprendre la session, 23 étudiants avaient déjà une expérience de programmation : 17 en informatique, 1 aux HEC et 5 à Polytechnique.

Finalement, on retrouve chez certains étudiants des indices d'un apprentissage de mathématiques plus particulièrement liées à l'informatique: 7 étudiants auraient des rudiments d'analyse numérique avec l'algorithme de Newton-Raphson, 34 en auraient les germes avec la série de Taylor, 3 étudiants auraient acquis des connaissances liées aux fractals, et 1 étudiante aurait déjà entendu parler du théorème des quatre couleurs.

4.2.4 La place faite à l'application

L'application était à toute fin pratique absente des programmes de mathématiques du secondaire. Si certains objectifs généraux pouvaient laisser supposer le contraire (ex.

« Favoriser chez l'élève une meilleure interprétation du réel à partir de relations binaires »), leur réalisation à travers les micro-objectifs ramenait invariablement à l'application directe de règles mathématiques simples, de « formules » (ex. *« Étant donné les coordonnées du sommet et du foyer d'une parabole, TROUVER l'équation associée à ce lieu géométrique, et vice-versa. »).* On semble ici avoir joué avec toute l'ambiguïté que permet le mot « *réel* »... Les cours de sciences, qui auraient pu contribuer à illustrer avec des applications « réelles » d'un autre ordre certains des concepts mathématiques enseignés ont été pour la plupart repoussés d'un an dans les programmes des années 80, ne laissant qu'une année, la cinquième secondaire, pour aborder enfin, mais à la course, physique et chimie, après une année de biologie et une année d'initiation aux sciences physiques.

Au collégial, le terme « application » apparaît à quelques reprises dans les programmes de mathématiques, mais il n'est pas toujours évident de savoir s'il s'agit d'applications à des situations concrètes, ou d'applications d'un théorème à la résolution de problèmes mathématiques, sans le recours à un lien avec une situation concrète et réelle. Par exemple, on prescrit de jumeler à des « applications » l'*intégrale de Riemann* en 203, le *produit scalaire*, le *produit vectoriel* et le *produit mixte* en 105. Or, des calculs d'aire, d'angle et de volume peuvent être vus comme des applications de ces notions. Ce sont en soi des « applications » très valables, au sens mathématique du terme, que nous ne cherchons pas à dénigrer ici, mais qui, selon le degré de *contextualisation* du problème de départ, pourront engager l'élève dans un travail plus ou moins important de modélisation. Ce que nous disons simplement c'est qu'à partir des programmes, il n'est toujours pas possible de juger de la place que tiendra l'application, au sens où nous l'entendions dans la section 2.

Certains programmes de cours sont plus explicites quant à la place à accorder à cette l'application : dans ce cas, on fait usage des expressions « *situations concrètes* » ou « *problèmes concrets* ». Par exemple, le programme de 303 inclut dans sa liste de contenus la « *mathématisation de situations concrètes surtout en ce qui concerne les fonctions à plusieurs variables, les équations différentielles et les intégrales multiples* » ; le programme de 307 compte parmi ses 3 objectifs généraux de « *passer progressivement de situations* *abstraites (modèles probabilistes) à des situations concrètes où l'interprétation joue un grand rôle* ».

Parmi les cours de mathématiques qu'ont suivis les étudiants, celui qui, d'après l'énoncé du programme, accorde la plus grande importance à l'application est sans contredit le cours 122 « *Mathématiques appliquées* », suivi par un seul des étudiants du groupe. Il est offert en techniques informatiques, entre autres, et son contenu est ajusté à la spécialité. Celui-ci comprend une liste substantielle d'applications à couvrir.

> « Applications des modèles exponentiel et logarithmique à la résolution de problèmes de mathématiques financières. Application de l'algèbre de Boole à la conception de circuits logiques. Application à des situations concrètes des notions relatives aux vecteurs et matrices. Application à des situations concrètes des notions relatives aux systèmes d'équations linéaires. Application à des situations concrètes des notions relatives aux systèmes d'inéquations linéaires. Résolution de systèmes de dénombrement. »

4.2.5 Les manuels utilisés

Le parcours en mathématiques des étudiants est aussi marqué par les manuels qu'ils ont utilisés. Sur les 15 étudiants qui ont donné le nom d'un manuel de mathématiques du secondaire dont ils se souvenaient particulièrement, 14 ont mentionné la série *Mathématiques-Soleil.* Cette série de manuels a en effet dominé pendant quelques années le paysage mathématique scolaire québécois à tous les niveaux du secondaire ; on doit lui reconnaître une application rigoureuse à viser l'acquisition des habiletés procédurales définies par les micro-objectifs. Il s'agit à toute fin pratique d'une suite d'exposés et d'exercices qui correspondent à chacun des objectifs dont on retrouve l'énoncé (et le numéro!) au début de chaque section. Le cours y est limité au minimum, souvent construit à l'aide d'exemples à partir desquels on généralise pour faire place rapidement à l'entraînement par la répétition d'exercices très semblables. Jusqu'aux mots qui semblent avoir été choisis de façon à décourager tout travail formel et autonome chez l'élève (Doré, Lambert, L'Écuyer et Rochette, 1987):

> « *En* ***répétant*** *la* ***même*** *démarche* ***mais*** *avec un point de coordonnées* (x_1, y_1) *et l'équation générale d'une droite, tu découvres une* ***formule*** *pour le* ***calcul*** *de la distance entre un point et une droite.* »

La démarche n'y est évidemment pas « *répétée* » et l'on fournit de suite la formule à l'élève. Tout y est parfaitement décomposé et encapsulé dans cette correspondance stricte définitions-exemples-formules-exercices, quitte à occulter les liens qui pourraient favoriser l'intégration des connaissances chez l'élève.

Au collégial, on ne retrouve pas une telle uniformité en termes de manuels. De façon générale, pour un même cours, les professeurs semblent distribuer à peu près équitablement leur choix parmi un ensemble de 5 ou 6 manuels, s'ils ne choisissent pas d'utiliser leur propre recueil de notes ou celui préparé par les professeurs de mathématiques du collège.

4.3 Perceptions de la formation reçue

Pour juger des constantes et des variantes dans l'application des programmes d'études secondaires et collégiales, nous avons cherché à connaître les perceptions que les étudiants avaient de leur formation mathématique. Il nous a semblé aussi intéressant d'inviter les étudiants à se prononcer sur la formation qu'il aurait souhaitée recevoir.

4.3.1 Perception générale

Nous avons d'abord demandé à chacun des 43 étudiants de choisir de un à quatre items parmi un ensemble d'énoncés pour décrire de la façon la plus juste possible l'ensemble de la formation qu'ils avaient reçue en mathématiques (Annexe B, question 9). Les énoncés ont ensuite été classés selon leur fréquence d'apparition dans les choix, en regroupant les énoncés différenciés seulement par l'accent mis sur un même aspect (ouverture ou focalisation). Ce regroupement est une union dans le sens où lorsqu'il y avait intersection, c'est-à-dire lorsqu'un étudiant choisissait simultanément les deux énoncés associés à un même aspect, nous ne comptions que le plus fort des deux (i.e. la « focalisation »). Les choix les plus fréquents sont donnés dans le tableau suivant :

Énoncé	Pourcentage d'étudiants (%) ayant choisi cet énoncé			
	Total	HEC	Info	Poly
D. un enchaînement progressif de concepts, du plus simple au plus complexe	51	47	67	30
H. une série d'exercices pour appliquer les formules enseignées	40	40	39	40
C. une suite de problèmes pour faire comprendre la théorie	40	40	39	40
K U L. une ouverture/focalisation sur le développement du raisonnement et du sens de la démonstration	31 (26+5)	60 (47+13)	11 (11+0)	20 (20+0)
I. un ensemble de techniques de calcul avec leurs conditions d'utilisation	28	27	39	10
G. une suite de théorèmes et de preuves donnés par le professeur	26	27	28	20
F. une suite de définitions d'objets et de leurs propriétés	21	13	33	10
M U N. une ouverture/focalisation sur les possibilités d'application des concepts enseignés	21 (15+5)	33 (33+0)	11 (0+11)	20 (20+0)
Nombre d'étudiants ayant répondu à cette question	*43*	*15*	*18*	*10*

Tableau 3 - Perception générale de la formation reçue

Ce tableau peut donner lieu à quelques interprétations préliminaires. D'une part, on y voit une confirmation de l'importance accordée dans la formation reçue aux exercices (item H) et aux problèmes en lien direct avec la théorie (item C). D'autre part, les étudiants reconnaissent majoritairement la cohésion et la progression de cette formation (item D). Faits intrigants, les étudiants en génie sont ceux qui se voient le moins outillés en termes de techniques de calcul avec leurs conditions d'utilisation (item I), et ceux en informatique sont ceux qui sont le moins enclins à reconnaître à leur formation une contribution au développement du raisonnement et du sens de la démonstration (items K et L); la connaissance des exigences de leur formation universitaire oriente peut-être leur perception de leur formation fondamentale.

Par ailleurs, l'orientation professionnelle des étudiants en génie et en administration les a apparemment conduits à être plus sensibles à une ouverture sur les applications dans les cours de mathématiques (items M et N), tandis que deux étudiants en informatique qui ont relevé cet aspect l'ont davantage perçu comme une focalisation; peut-être n'y retrouvaient-ils pas le côté général auquel, en futurs informaticiens, ils seraient plus sensibles. À cet égard, ces derniers ont aussi démontré une plus grande sensibilité aux définitions et aux propriétés des objets mathématiques (item F).

Finalement, il convient de mentionner que l'utilisation de la technologie (items Q et R) brille par son absence dans ce tableau : de fait, seul l'étudiant ayant un DEC en techniques industrielles a parlé d'ouverture sur la technologie pour caractériser la formation qu'il a reçue en mathématiques, même si quinze étudiants ont eu à utiliser dans au moins un cours de math un logiciel ou une calculatrice graphique : pour la plupart de ces étudiants, cette place accordée à la technologie n'était donc pas représentative de l'ensemble des cours.

4.3.2 Perception des cours

Pour enrichir ce premier portrait, nous avons aussi demandé aux étudiants de caractériser à partir des mêmes énoncés le cours qui avait le plus contribué à leur compréhension des mathématiques et celui qui y avait contribué le moins. Le Tableau 4 donne la caractérisation des cours les plus appréciés.

On y retrouve sensiblement la même distribution dans le choix des énoncés que pour l'ensemble de la formation reçue, mais quelques différences émergent, notamment avec la « *suite de définitions d'objets et de leurs propriétés* » (item F) qui ne semble pas jouir d'un impact proportionnel à sa présence, car seulement 5% des étudiants l'ont associé au cours le plus important de leur formation. À nouveau, l'aspect technologique n'a pas retenu l'attention : une seule étudiante l'a associé au cours ayant le plus contribué à sa compréhension.

Énoncé	Pourcentage d'étudiants (%) ayant choisi cet énoncé			
	Total	HEC	Info	Poly
D. un enchaînement progressif de concepts, du plus simple au plus complexe	65	71	64	56
H. une série d'exercices pour appliquer les formules enseignées	51	43	43	78
C. une suite de problèmes pour faire comprendre la théorie	38	40	39	40
K U L. une ouverture/focalisation sur le développement du raisonnement et du sens de la démonstration	27 (19+8)	35 (21+14)	14 (7+7)	33 (33+0)
M U N. une ouverture/focalisation sur les possibilités d'application des concepts enseignés	22 (19+3)	21 (21+0)	21 (14+7)	22 (22+0)
I. un ensemble de techniques de calcul avec leurs conditions d'utilisation	22	21	29	11
G. une suite de théorèmes et de preuves donnés par le professeur	19	7	29	22
E. une étude formelle d'espaces abstraits et de structures mathématiques	8	7	14	0
J. une volonté de faire découvrir la théorie par l'étudiant	8	7	7	11
Nombre d'étudiants ayant répondu à cette question	*37*	*14*	*14*	*9*

Tableau 4 - Caractérisations du cours de math ayant le plus contribué à la compréhension

Le Tableau 5 regroupe en ordre décroissant les énoncés choisis le plus fréquemment pour caractériser le cours de mathématiques ayant le moins contribué à la compréhension. Sa lecture demande toutefois de garder en tête que seulement 6 étudiants de Polytechnique ont répondu à cette question :

Énoncé	Pourcentage d'étudiants (%) ayant choisi cet énoncé			
	Total	HEC	Info	Poly
G. une suite de théorèmes et de preuves donnés par le professeur	41	40	38	50
A U B. une suite de puzzles/ problèmes difficiles sans lien évident avec la théorie	35 (5+30)	47 (7+40)	25 (0+25)	34 (17+17)
F. une suite de définitions d'objets et de leurs propriétés	32	27	38	33
H. une série d'exercices pour appliquer les formules enseignées	22	20	25	17
E. une étude formelle d'espaces abstraits et de structures mathématiques	19	27	13	17
I. un ensemble de techniques de calcul avec leurs conditions d'utilisation	14	20	13	0
K U L. une ouverture/focalisation sur le développement du raisonnement et du sens de la démonstration	13 (8+5)	20 (7+13)	6 (6+0)	17 (17+0)
Nombre d'étudiants ayant répondu à cette question	*37*	*15*	*16*	*6*

Tableau 5 - Caractérisations du cours de math ayant le moins contribué à la compréhension

On le voit : la complexité, la difficulté inhérente à la résolution d'un problème (items A et B) ne semble pas perçue par les étudiants comme porteuse d'apprentissage. Faut-il en conclure qu'ils auront du mal à faire face à la complexité des problèmes qui les attendent dans leur formation professionnelle ? Ou faut-il plutôt distinguer un temps pour apprendre et un temps pour appliquer ? De façon révélatrice, aucun des cours issus de la liste noire produite pas les étudiants n'était associé à une ouverture ou à une focalisation sur les applications. De là à conclure que les cours qui ont fait une place à l'application ne présentaient pas un degré de complexité représentatif de la réalité, il n'y a donc qu'un pas, que nous ne ferons pas pour le moment ; cette question sera toutefois abordée à nouveau dans la section 5.3 consacrée au rapport développé avec l'application.

Si l'on sent un certain rejet d'un classicisme théorique (items G, F, E, K et L), on constate tout autant que l'approche procédurale n'a pas toujours été bien perçue (items H et I). Bien que l'intégration technologique ne soit pas très répandue dans les cours de mathématiques et donc n'apparaît pas parmi les énoncés les plus fréquemment utilisés pour caractériser le cours de mathématiques ayant le moins contribué à la compréhension, il est intéressant de noter que parmi les quinze étudiants qui ont fait l'expérience d'une forme d'intégration technologique dans un de leurs cours de mathématiques (section 4.2.3), deux l'ont associée au cours qui leur avait le moins apporté. La valeur didactique des situations proposées est peut-être en cause.

4.3.3 Formation souhaitée

Il nous a semblé pertinent de compléter cette section sur la perception de la formation, en demandant à nouveau aux étudiants de recourir aux énoncés utilisés précédemment pour caractériser la formation souhaitée en mathématiques, une telle caractérisation témoignant à la fois des éléments de leur formation qui leur ont plu et de ceux qu'ils auraient aimé y voir.

30 étudiants, dont seulement 5 à Polytechnique, ont bien voulu se prononcer sur la formation mathématique qu'ils auraient souhaité recevoir (Tableau 6).

Les étudiants du département d'informatique souhaitent presque à l'unanimité que le développement du raisonnement et du sens de la démonstration soit au cœur de la formation mathématique, et ce phénomène s'explique peut-être en partie par la réputation du cours dans lequel ils s'engagent (IFT 1063). Ce cours qui connaît des taux d'abandon et d'échec importants accorde en effet une grande importance à la preuve, importance que leur a confirmée, dès la première rencontre, le professeur dans sa présentation du plan de cours.

Si chacun des trois secteurs semble favorable à tout au moins une ouverture sur les possibilités d'application des concepts enseignés (items M et N), on tient par ailleurs à assurer une cohérence à la formation sur un plan mathématique, en maintenant la cohésion des concepts et l'aspect progressif de leur enseignement (item D). Ce n'est donc pas le choix des applications qui devrait dicter la séquence des contenus mathématiques, mais plutôt l'inverse.

Énoncé	Pourcentage d'étudiants (%) ayant choisi cet énoncé			
	Total	HEC	Info	Poly
K U L. une ouverture/focalisation sur le développement du raisonnement et du sens de la démonstration	56 (50+13)	42 (42+0)	85 (54+31)	20 (20+0)
M U N. une ouverture/focalisation sur les possibilités d'application des concepts enseignés	50 (30+20)	50 (33+17)	54 (23+31)	40 (40+0)
D. un enchaînement progressif de concepts, du plus simple au plus complexe	30	25	31	40
Q U R. une ouverture/focalisation sur la technologie (calculatrice, logiciels ou programmation)	24 (17+7)	8 (8+0)	31 (23+8)	40 (20+20)
O U P. une ouverture/focalisation sur l'exploration et l'expérimentation	23 (23+0)	25 (25+0)	23 (23+0)	20 (20+0)
C. une suite de problèmes pour faire comprendre la théorie	23	33	23	0
J. une volonté de faire découvrir la théorie par l'étudiant	17	33	8	0
Nombre d'étudiants ayant répondu à cette question	*30*	*12*	*13*	*5*

Tableau 6 - Caractérisation par les étudiants de la formation souhaitée en mathématiques

Un pourcentage non négligeable d'étudiants en informatique et d'étudiants en génie souhaite une utilisation de la technologie dans leur formation. Mais, fait intéressant, parmi les sept participants qui se sont prononcés en faveur de cette utilisation, seulement deux étudiants appartiennent au groupe des quinze qui en avaient fait l'expérience dans un de leurs cours de mathématiques (section 4.2.3). On idéalise plus facilement ce qu'on n'a pas vécu.

Par ailleurs, les étudiants paraissent donner raison aux tendances actuelles en pédagogie et en didactique en disant préférer une approche centrée sur l'exploration, l'expérimentation, la découverte et la résolution de problèmes (items O, C, J) à une autre, plus procédurale, qui leur donne les formules et techniques de calcul (items H et I, en chute de popularité). Mais comme 30% des étudiants n'ont pas jugé nécessaire d'indiquer leur vision de la formation qu'ils auraient souhaité avoir, il y a tout lieu de croire que plusieurs d'entre eux ont trouvé leur compte dans la formation reçue. De fait, les 13 étudiants qui n'ont pas répondu à cette question se sont tous déclarés « plutôt satisfaits » de leur formation en mathématiques[21]. Pour l'ensemble des étudiants interrogés, le taux de satisfaction est légèrement inférieur, à 86% : 14% se disent « plutôt insatisfaits », 69% « plutôt satisfaits », et 17% « tout à fait satisfaits ».

Tous ces éléments nous portent à croire qu'il y aurait lieu de nuancer la vision de la formation idéale avec l'expérience de la formation reçue et plus particulièrement des cours marquants pour mieux prendre en compte la complexité de la réalité.

C'est ce que nous avons cherché à faire en attribuant un « score » aux différents énoncés : nous avons choisi, arbitrairement, d'accorder deux points à un énoncé s'il était associé à la vision de la formation souhaitée, de lui ajouter un point s'il était associé au cours le plus apprécié, et de lui retrancher un point s'il était associé au cours le moins apprécié. Nous avons ensuite classé par ordre décroissant les énoncés ayant obtenu le plus haut score. Ces manipulations ont eu pour effets de ramener vers le haut la pratique par les exercices et de faire évanouir une fois de plus la place accordée à la technologie, tout en continuant de laisser une place importante à la compréhension en profondeur de la théorie ainsi qu'à la connaissance d'applications associées. Malgré le côté « bricolage » et non rigoureux d'un tel traitement des données, la nouvelle liste ainsi produite et donnée ci-dessous reflète peut-être de façon plus réaliste la formation apte à répondre aux différents besoins exprimés.

D. un enchaînement progressif de concepts, du plus simple au plus complexe
K **U** L. une ouverture/focalisation sur le développement du raisonnement et du sens de la démonstration
M **U** N. une ouverture/focalisation sur les possibilités d'application des concepts enseignés
H. une série d'exercices pour appliquer les formules enseignées
C. une suite de problèmes pour faire comprendre la théorie

Figure 7 - La formation véritablement souhaitée en mathématiques ?

Force est de reconnaître que le retour à l'entraînement par les exercices (item H) n'a en soi rien de très séduisant pour caractériser la formation souhaitable en mathématiques. Mais

[21] Ceux qui s'en déclaraient tout à fait satisfaits n'avaient pas à répondre à la question ; on prenait d'office leur description de la formation reçue comme étant celle de la formation souhaitée

nous tâcherons de rester ouvert, surtout si, comme nous prévient Chevallard (1996), il s'agit là d'un biais du milieu de la didactique, plus particulièrement préoccupé du « *premier moment, celui de la rencontre* » et enclin par conséquent « *à minorer, voire parfois à ignorer largement, le moment du travail de la technique – moment dont l'examen des pratiques non scolaires pousse à penser que, bien que regardé souvent comme dénué de noblesse épistémologique, il est pourtant essentiel à une entrée authentique, effective, dans l'œuvre.* »

4.4 Intérêts en mathématiques

Si la formation souhaitée reflète en partie les manques perçus de la formation reçue, elle témoigne aussi des intérêts en mathématiques. Pour mieux connaître les intérêts des étudiants, nous leur avons demandé de choisir un ou deux énoncés parmi neuf (Annexe B, question 14) pour identifier ce qui leur apportait le plus de satisfaction en mathématiques.

Les résultats sont consignés dans le Tableau 7. L'énoncé choisi le plus souvent (item B) confirme leur intérêt pour l'application, intérêt que nous avaient laissé entendre la caractérisation par les étudiants des cours appréciés et de la formation souhaitée, et qui s'inscrit naturellement dans l'orientation qu'ils ont donnée à leurs études.

Le choix des deux énoncés suivants (items F et G) illustrerait selon nous une piste à explorer dans l'analyse des effets possibles de la formation qui a précédé : on semble aimer calculer « à la main », « *travailler la technique* » en s'entraînant sur des exercices, mais on n'est pas toujours en mesure de porter soi-même un *jugement* sur la qualité de la solution obtenue.

On paraît apprécier l'*outillage conceptuel* et même *formel* que développe l'apprentissage des mathématiques (items D et I) et on le place loin en avant de l'*outillage informatique* (items E et H), comme s'il n'y avait pas de liens entre les deux. D'ailleurs le fait qu'aucun étudiant n'ait choisi l'item H nous apparaît très révélateur, particulièrement avec 18 étudiants en informatique : ce qu'on connaît ou aime de la programmation ne semble pas s'appliquer aux mathématiques.

Énoncé	Pourcentage d'étudiants (%) ayant choisi cet énoncé			
	Total	HEC	Info	Poly
B. la réutilisation dans d'autres disciplines de concepts ou de méthodes vus en mathématiques	58	53	56	70
F. la simplification d'une expression complexe par des manipulations algébriques	35	53	22	30
G. la confirmation par le corrigé de votre maîtrise d'un concept ou d'une méthode mathématique	26	33	28	10
D. la compréhension d'un nouveau concept formel qui amène à penser autrement	23	27	28	10
C. la recherche fructueuse d'une approche de résolution à un problème mathématique complexe	16	13	22	10
A. la connaissance d'une formule ou d'une méthode générale applicable à tous les cas	16	13	11	30
I. la découverte d'une preuve élégante	9	7	6	20
E. l'expérimentation et la visualisation à l'aide de l'ordinateur de phénomènes mathématiques	5	0	6	10
H. la conception réussie d'un programme ou d'une procédure logicielle pour résoudre un problème	0	0	0	0
Nombre d'étudiants ayant répondu à cette question	*43*	*15*	*18*	*10*

Tableau 7 – Éléments de satisfaction en mathématiques

Finalement, sur le plan de la *complexité*, on semble partagé entre le plaisir de résoudre un problème complexe (item C) et le sentiment d'assurance que confère la connaissance d'une méthode sûre, universellement applicable. Il convient ici de se rappeler que les cours les moins appréciés étaient ceux qui étaient truffés de *« puzzles »*, de *« problèmes difficiles sans lien évident avec la théorie »* (voir section 4.3.2). Peut-être faut-il envisager qu'on aime bien trouver mais qu'on n'aime pas toujours chercher...

4.5 Erreurs recensées et identifications des compétences

Dans cette section, nous nous intéressons aux compétences de ces étudiants, faisant abstraction pour le moment de leur histoire éducative, de leur formation, et des intérêts développés.

La caractérisation des compétences des étudiants s'est effectuée à partir de l'application par les professeurs ou auxiliaires d'enseignement de la Grille de classification des erreurs (Annexe E) sur les problèmes choisis (voir Annexe F). Nous présentons d'abord les erreurs recensées, puis nous interprétons ces erreurs en faisant appel aux compétences d'explicitation, d'évaluation et d'intervention mises en œuvre dans la résolution des problèmes.

4.5.1 Erreurs recensées

Au total, 334 erreurs ont été classées selon la grille pour les 38 participants qui se sont rendus jusqu'à l'examen final. Même si le nombre de problèmes retenus n'est pas le même pour les trois secteurs (4 aux HEC, 6 en informatique et 3 à Polytechnique), le nombre d'erreurs commises en moyenne sur l'ensemble des problèmes demeure comparable : 7,9 aux HEC, 9,6 en informatique et 9,0 à Polytechnique. Cette relative homogénéité du nombre d'erreurs n'implique pas une distribution équivalente de ces erreurs : plus encore que la différence de clientèle étudiante, c'est la nature des problèmes soumis aux étudiants qui explique les différences notables. Mais il reste que certaines erreurs reviennent fréquemment indépendamment du secteur. Le Tableau 8 donne la répartition des 25 erreurs les plus fréquentes, en fonction des compétences qui semblent faire défaut : pour identifier ces compétences, nous référons à la phase de la résolution où cette compétence est mise à contribution (1 : analyse ; 2 : planification ; 3 : exécution ; 4 : retour ; 0 : contrôle) et au(x) type(s) dont elle relève (EV : évaluation ; IN : intervention : EX : explicitation) ; pour simplifier la présentation des données, nous parlons en termes d'échec à un item pour référer à un défaut dans l'application d'une compétence dans la résolution d'un problème spécifique. Nous examinons ces erreurs d'abord par secteur.

Item	Pourcentage d'erreurs (%) liées à l'échec de cet item			
	Total	HEC	Info	Poly
2.06 Identifier les méthodes de résolution applicables (EV)	10	15	7	6
1.08 Identifier le ou les objets mathématiques sous-jacents (EV)	8	8	6	11
2.04 Raisonner à partir d'une propriété d'un objet sous-jacent au problème (EV/IN)	6	7	5	6
3.02 Utiliser une propriété associée à un objet mathématique (niveau micro) (IN/EV)	6	11	1	7
2.08 Structurer la résolution en décomposant en sous-problèmes (EV/IN)	6	1	10	6
1.07 Identifier les paramètres (EX)	5	8	5	1
1.02 Identifier/interpréter les données, les hypothèses à partir de l'énoncé (EX)	5	4	9	0
0.02 Articuler les résultats des différents sous-problèmes et/ou cas possibles (IN/EX)	4	7	3	3
1.05 Identifier les principes, lois et/ou formules qui s'appliquent (EV/EX)	4	2	1	14
1.03 Découper le système en en gardant l'essentiel (EV/EX)	4	0	2	12
2.01 Raisonner à partir d'un graphique/diagramme/schéma (EX/EV)	3	0	4	8
1.11 Mettre en équations (EX)	3	5	0	6
2.09 Identifier les cas possibles (niveau macro) (EV)	3	2	7	0
4.06 Interpréter les résultats (EX/EV)	3	2	3	4
1.01 Identifier/interpréter l'objectif à partir de l'énoncé (EX)	3	2	4	2
2.07 Choisir la ou les méthodes de résolution en fonction de critères (précision, coût, etc.) (EV)	3	3	4	0
0.01 Démarrer (EV/EX)	3	0	7	0
1.04 Représenter à l'aide d'un graphique/diagramme/schéma (EX)	2	4	1	1
3.05 Effectuer des manipulations algébriques/analytiques (IN)	2	5	0	2
1.06 Identifier les variables (EX)	2	3	1	1
2.02 Raisonner à partir de cas particuliers (EV/IN)	2	0	4	0
4.01 Vérifier les propriétés générales (unités, ordre de grandeur, invariants, etc.) (EV)	1	3	0	2
0.03 Détecter un raisonnement circulaire et l'éliminer de la solution (EV)	1	0	3	1
3.11 Calculer un résultat avec précision (IN/EV)	1	2	2	0
0.04 Reconnaître une impasse ou une invraisemblance (EV)	1	1	1	1
Nombre d'étudiants ayant contribué à cette compilation	*38*	*15*	*14*	*9*

Tableau 8 – Répartition des principales erreurs

Aux HEC, les deux cours retenus (*Mathématiques financières* et *Modélisation et optimisation*), bien que relativement limités dans leur contenu puisqu'il s'agit de cours de 1 crédit, ont mis à contribution des compétences complémentaires ; cela a entraîné une répartition plus étendue dans la classification des erreurs que si nous nous étions limitée à un seul de ces cours.

Les problèmes du cours de mathématiques financières ont une composante de calcul importante. Les erreurs recensées se situent principalement dans

- l'interprétation de l'énoncé (1.01 et 1.02), notamment avec la confusion possible entre certains termes (ex. *taux effectif* ou *nominal*) ;
- la représentation des transactions impliquées par un *diagramme temporel* (1.04) ;
- l'identification de la *méthode de calcul* appropriée (2.06), la reconnaissance des *formules* à appliquer (1.05) et l'identification des paramètres associés (1.07) ;
- l'articulation des résultats intermédiaires (0.02), en reconnaissant par exemple que la *valeur future* d'un fonds pour lequel on effectue des versements deviendra la *valeur actuelle* au moment où l'on commencera à en retirer des rentes ;
- le respect de la précision requise dans le calcul (2.07 et 3.11), surtout lorsqu'il s'agit d'appliquer un même *taux* à répétition, car une erreur d'arrondi s'y propagera de manière exponentielle ;
- l'interprétation du résultat (4.06) et sa validation par le signe et l'ordre de grandeur (4.01).

Les problèmes du cours d'optimisation font surtout appel à la modélisation et à l'analyse. La composante de *modélisation* a donné lieu à quelques erreurs liées principalement à l'interprétation de l'énoncé (1.01 et 1.02), la mise en équations (1.11), l'interprétation et la validation des résultats (4.01 et 4.06) ; celle d'analyse a permis de mettre en relief les difficultés liées :

- à l'identification des objets mathématiques sous-jacents (ex. *fonctions convexes, dérivées*) et à l'utilisation de leurs propriétés (1.08, 2.04 et 3.02),

- aux calculs de dérivée (3.05), qui représentent davantage un défi pour ceux dont les cours de calcul différentiel remontent à quelques années ;

- et à l'articulation des résultats en une justification rigoureuse (0.02) où il peut être requis d'identifier les cas possibles (2.09).

Dans les deux cours, l'utilisation par les étudiants des fonctions du logiciel EXCEL requises pour certains calculs (fonctions financières ou recherche d'un maximum avec le « *solveur* ») n'a pas semblé créer de difficultés, hormis un cas de confusion liée au sens à donner à un paramètre.

En informatique, le thème sous-jacent au cours, les *mathématiques discrètes*, introduit à plusieurs domaines d'étude liés aux mathématiques et à l'informatique : logique propositionnelle, méthodes de preuve, algorithmes, analyse combinatoire et théorie des graphes. Dans les problèmes retenus, les étudiants ont eu à concevoir trois démonstrations, une méthode et un algorithme, et à modéliser pour fins de calcul une situation d'analyse combinatoire. Tous ces problèmes partagent comme difficultés

- l'interprétation de l'énoncé (1.01 et 1.02), surtout quand il y a des termes mathématiques dont les étudiants ne maîtrisent pas les définitions (ex. *ensembles différents* ou *profondeur d'un arbre*) ;

- l'identification des objets mathématiques sous-jacents (1.08), lorsqu'ils ne sont pas donnés au départ et qu'ils résultent d'une opération de modélisation : *matrices, tiroirs de Dirichlet* (ou *« pigeonniers »*), *permutations*, *répétitions*, etc.

Les problèmes qui demandent de <u>concevoir</u> une preuve, une méthode ou un algorithme font généralement appel à

- une décomposition en sous-problèmes et en cas possibles (2.08 et 2.09),
- l'identification des méthodes appropriées (2.06),

- l'articulation (0.02) de ces éléments à l'aide d'un raisonnement rigoureux (2.01, 2.02 et 2.04).

Il n'est donc pas étonnant de retrouver chez les étudiants en informatique plusieurs erreurs associées à ces compétences.

Avec les *preuves par récurrence*, il nous a en plus été donné d'observer des manifestations de raisonnement circulaire (0.03) sur quatre copies distinctes d'un problème d'examen : suite à l'application pour $n + 1$ de la formule qu'on a supposée vraie pour n, on arrive tout naturellement à la « conclusion » que c'est aussi vrai pour $n+1$...

La conception et l'écriture en *pseudo-code* de deux versions, itérative et récursive, d'un même algorithme a donné lieu au plus fort taux de page blanche (0.01), très possiblement en raison d'un manque de temps car il s'agissait du dernier problème d'un examen très long. Avec, chez la majorité de ceux qui ont abordé le problème, une identification erronée des paramètres de l'algorithme à partir de l'énoncé (1.07), il nous a été possible d'apprécier toute la difficulté que peut représenter la compréhension d'un énoncé qui juxtapose langage naturel et langage symbolique, a fortiori si ces symboles ont aussi un sens particulier en informatique.

À l'École Polytechnique, les principales difficultés des étudiants relevées dans les problèmes de mécanique résident dans

- la compréhension du <u>système physique</u> (1.03) décrit par l'énoncé et le diagramme associé (2.0l), en reconnaissant les lois de la physique qui s'appliquent (1.05);

- l'élaboration par la *modélisation* d'un <u>système mathématique</u> équivalent (1.08 et 1.11) et résoluble (2.04 et 2.06), et non pas une simple séquence de formules à appliquer;

- le retour au <u>système physique</u> par l'*interprétation* des résultats (4.06) et leur *validation* (4.01).

Dans ce secteur, certaines erreurs se retrouvaient systématiquement sur les copies recueillies : par exemple, dans un problème où l'on demandait de maximiser la distance (Annexe F, problème P-2), aucun des 9 étudiants participants n'a songé à utiliser la dérivée (1.08) ; de même, pour un problème qui demandait à situer un point de contact entre une crémaillère et une roue d'engrenage (Annexe F, problème P-1), personne n'a vu la nécessité d'imposer à ce point de contact d'être l'extrémité du rayon de la roue perpendiculaire à la crémaillère. En contrepoint, les éléments de calcul (différentiel ou algébrique) ne semblent pas représenter un problème majeur chez ces étudiants.

Nous reviendrons ultérieurement sur les différentes erreurs recensées, que nous tâcherons d'expliquer avec l'histoire éducative.

4.5.2 Caractérisation des compétences

Pour avoir une vue d'ensemble de toutes ces erreurs, nous les avons d'abord regroupées selon la phase de la résolution de problèmes à laquelle elles correspondent. Le Tableau 9 donne le résultat de cette compilation.

Phase	Pourcentage d'erreurs (%) liées à cette phase			
	Total	HEC	Info	Poly
0. Contrôle de la résolution	13	11	16	10
1. Analyse du problème	37	35	31	48
2. Planification de la stratégie	33	28	43	26
3. Exécution de la stratégie	12	20	6	10
4. Retour sur la solution	5	6	4	6
Nombre d'étudiants ayant contribué à cette compilation	*38*	*15*	*14*	*9*

Tableau 9 - Classification des erreurs selon la phase du processus de résolution de problèmes

Ici encore, on retrouve les spécificités des différents cours. Les problèmes du cours de mécanique ont pour principaux obstacles la *compréhension* du système physique du problème et sa conversion en un système mathématique équivalent : beaucoup d'erreurs seront donc commises d'emblée dans la phase d'analyse. En informatique, comme les problèmes du cours faisaient régulièrement appel à un travail de conception de la part de l'étudiant, on retrouvera davantage d'erreurs liées à la *structuration* et à la rigueur, ce qui a pour effet de faire grimper les pourcentages associés aux phases de planification et de contrôle. Quant aux cours de mathématiques financières et d'optimisation, dans leur format de cours-outil de 1 crédit, ils font appel à une modélisation relativement simple et comportent une part non négligeable de *calcul* et de *justification* de ces calculs par l'utilisation des propriétés des objets mathématiques sous-jacents. Ceci explique qu'on retrouve dans ces cours un plus haut taux d'erreur en phase d'exécution.

Pour tenter de caractériser les compétences démontrées de façon globale et à travers les trois secteurs, nous avons ensuite regroupé les erreurs selon le *type de compétence* (*évaluation*, *explicitation*, *intervention*) qui semble avoir fait défaut pour expliquer leur occurrence. Le tableau suivant en donne les résultats :

Type de compétence	Pourcentage d'erreurs (%) liées à ce type			
	Total	HEC	Info	Poly
Évaluation (EV)	54	47	56	59
Explicitation (EX)	30	31	31	28
Intervention (IN)	16	22	13	13
Nombre d'étudiants ayant contribué à cette compilation	*38*	*15*	*14*	*9*

Tableau 10 - Classification des erreurs selon le type de compétence

Ce regroupement qui donne lieu à trois indicateurs a l'avantage de faire ressortir une constante à travers les secteurs : les erreurs paraissent liées avant toute chose à l'évaluation, puis à l'explicitation et finalement à l'intervention. Si aux HEC, la nature des cours de 1 crédit a pu leur faire jouer un plus grand rôle, les erreurs d'intervention n'ont contribué que de façon marginale aux échecs ou aux failles dans la résolution des problèmes.

Avant de nous engager plus à fond dans des analyses à partir de ce regroupement, il convient d'abord de nous demander si ces indicateurs représentent ce qu'ils prétendent représenter, s'ils ont un sens, s'ils ont une utilité, en un mot, s'ils sont pertinents. Pour ce faire, nous avons étudié différentes corrélations[22] possibles dont les résultats seront rapportés dans les tableaux suivants.

Nous avons d'abord cherché à connaître le degré de corrélation qui lie les indicateurs deux à deux, puisqu'une même erreur pouvait contribuer à faire augmenter simultanément la valeur de deux indicateurs, ou même des trois.

	HEC			Informatique			Polytechnique		
Indicateur	EV	EX	IN	EV	EX	IN	EV	EX	IN
Évaluation (EV)	1	0,14	0,05	1	0,27	0,56	1	0,33	-0,58
Explicitation (EX)	0,14	1	0,16	0,27	1	0,23	0,33	1	-0,24
Intervention (IN)	0,05	0,16	1	0,56	0,23	1	-0,58	-0,24	1

Tableau 11 – Coefficients de corrélation entre les indicateurs des trois types d'erreurs

Aux HEC, les trois indicateurs paraissent relativement indépendants. En informatique et à Polytechnique, on note un certain lien entre les erreurs associées à l'explicitation et celles associées à l'évaluation, tandis que la corrélation positive apparemment forte qui apparaît en informatique entre erreurs d'évaluation et erreurs d'intervention est aussitôt démentie à Polytechnique avec une corrélation aussi forte mais négative. Globalement, nous croyons pouvoir affirmer, sans pour autant prétendre à une rigueur statistique, que ces trois indicateurs semblent bien mesurer des choses différentes.

---

22 Pour évaluer le degré de corrélation entre deux variables X et Y, nous avons calculé le coefficient de corrélation du produit des moments de Pearson ($r = \frac{\mathrm{cov}_{X,Y}}{S_X S_Y}$). À noter, nous avons retiré de tous les calculs de corrélations les données associées à un étudiant en informatique dont le profil très particulier venait brouiller les pistes à l'occasion. Nous nous sommes permis un tel filtre car il s'agit d'un des étudiants (François) à qui nous nous sommes particulièrement intéressée au niveau qualitatif (voir chapitre 5).

Nous avons ensuite cherché à savoir si ces indicateurs pouvaient être liés aux notes obtenues par les étudiants. À partir des informations dont nous disposions, et celles-ci excluent la note finale pour le cours car nous nous étions engagée à ne pas recueillir cette information, nous avons cherché à identifier des liens possibles avec les trois indicateurs. Le Tableau 12 donne les coefficients de corrélation entre les différents indicateurs et deux notes obtenues : la première correspond à la somme des notes obtenues pour les différents problèmes à partir desquels s'est faite la classification des erreurs ; la seconde représente exclusivement des résultats d'examens et inclut des problèmes que nous n'avons pas retenus. En informatique, cette seconde note représente la somme des notes des deux examens; à Polytechnique, elle correspond à la note de l'examen final qui incluait un quatrième problème. Aux HEC, elle représente la note obtenue à l'examen final du cours d'optimisation.

	Erreurs commises								
	HEC			Info			Poly		
Notes	EV	EX	IN	EV	EX	IN	EV	EX	IN
Note 1	-0,56	-0,41	-0,26	-0,78	-0,32	-0,47	-0,65	-0,65	0,51
Note 2	-0,19	-0,30	-0,70	-0,74	-0,27	-0,24	-0,80	-0,60	0,68

Tableau 12 – Coefficients de corrélation entre le nombre d'erreurs de chaque type et les notes obtenues

D'après ce tableau, la corrélation la plus forte est presque systématiquement celle qui existe entre la note pour les différents problèmes (Note 1) et le nombre d'erreurs associées aux compétences d'évaluation (indicateur EV) ; à Polytechnique et en informatique, cet indicateur semble même être un bon prédicteur des notes obtenues à l'examen (Note 2), mais on n'observe pas ce phénomène avec le dernier examen des HEC. Il faut mentionner toutefois que ce dernier examen comportait une part importante de questions à choix multiple, ce qui a pu donner un plus grand poids aux erreurs d'intervention.

Se pourrait-il après tout que le nombre total d'erreurs, indépendamment des compétences impliquées, soit un meilleur indice de la performance aux examens ? Pour tester cette hypothèse, nous avons repris le nombre total d'erreurs (TOT) commises par chaque étudiant et nous l'avons comparé à l'indicateur EV dans les corrélations affichées avec les notes.

Notes	Erreurs commises					
	HEC		Info		Poly	
	EV	TOT	EV	TOT	EV	TOT
Note 1	-0,56	-0,65	-0,78	-0,73	-0,65	-0,63
Note 2	-0,19	-0,56	-0,74	-0,63	-0,80	-0,59

Tableau 13 – Coefficients de corrélation entre le nombre d'erreurs (total et d'évaluation) et les notes obtenues

À Polytechnique et au département d'informatique, le nombre total d'erreurs paraît moins fortement lié à la note que ne l'est le nombre d'erreurs associées aux compétences d'évaluation, ce qui laisse supposer un impact beaucoup plus important de ces erreurs sur la performance telle qu'évaluée à la correction. Ce n'est apparemment pas le cas aux HEC, où la prise en compte de toutes les erreurs paraît fournir un meilleur indicateur de performance, particulièrement pour un examen avec des questions à choix multiples (voir Note 2).

4.6 Mise en relation préliminaire des compétences avec la formation

Les analyses des erreurs des étudiants nous ont permis de mettre en évidence des compétences qui semblent faire défaut, à des degrés divers, chez ces étudiants dans la résolution de problèmes spécifiques aux différents cours universitaires considérés. Dans l'identification des pistes qui favoriseraient le développement de ces compétences, nous avons cherché à mettre en relation le niveau de chacun des trois types de compétences avec les caractéristiques individuelles de la formation.

Dans une première étape de cette analyse, nous nous sommes limitée aux éléments factuels et quantifiables de cette formation et pour lesquels nous avions recueilli des informations par la voie du questionnaire : nombre de cours où l'on a eu à rédiger des démonstrations (Annexe B, question 12), somme des niveaux de maîtrise associés à l'utilisation de différents types de logiciels à contenu mathématique (question 16), somme des niveaux de maîtrise associés à différents langages de programmation (question 17), étendue et profondeur des connaissances mathématiques (question 11). Les valeurs des variables utilisées sont consignées dans le tableau de l'Annexe G. Nous avons croisé ces données avec le nombre d'erreurs associées aux différents types de compétence, en calculant à nouveau les coefficients de corrélation[23].

Un seul lien est ressorti de façon claire de cet exercice, et encore, pas à travers les trois secteurs : il s'agit de la relation entre les *compétences logicielles* des étudiants et leurs *compétences d'évaluation* en situation de résolution de problèmes : on retrouve en effet entre la somme des compétences logicielles (question 16) et les erreurs associées à l'évaluation un facteur de corrélation de - 0,63 à Polytechnique et de - 0,65 aux HEC (mais ce facteur n'est que de - 0,10 en informatique). Plusieurs raisons peuvent être envisagées pour expliquer ce phénomène et il ne faut pas chercher à y voir nécessairement une relation directe de cause à effet. Peut-être en effet que les étudiants qui ont eu accès à ces logiciels ont pu développer une meilleure compréhension des fonctions, du calcul et de l'analyse et se trouvent ainsi avantagés pour associer la théorie aux applications qu'ils étudient maintenant. Mais peut-être aussi que les étudiants qui ont au départ de la facilité en mathématiques, en finance ou en physique, se sont davantage intéressés à acquérir une maîtrise de ces logiciels. Et peut-être finalement que, dans des cours comme ceux des HEC où l'ordinateur est la ressource de base, autant pour les notes de cours et les exercices que pour les examens, l'étudiant qui n'est pas familier avec cet environnement se trouve confronté à une difficulté supplémentaire dans l'apprentissage et l'évaluation. Nous examinerons ces différentes hypothèses dans la section 5.4.

Dans une seconde étape de cette analyse, nous sommes retournés du côté des intérêts en mathématiques, que nous décrivions en 4.4 comme un moyen d'appréhender les

---

[23] voir note 22.

articulations possibles entre formation et compétences. Pour identifier des corrélations possibles, nous avons utilisé les indicateurs composites dont les définitions sont données dans la section 3.3.4 et dont les valeurs sont consignées dans le tableau de l'Annexe G.

Comme les éléments associés à la technologie n'étaient que très rarement sélectionnés, nous avons choisi de rejeter l'indicateur de l'intérêt pour la technologie dont la valeur était presque toujours égale à 0 : une échelle de mesure aurait permis une meilleure gradation et par conséquent un indicateur peut-être plus fidèle. Autre fait à signaler, la corrélation entre notre indicateur d'*intérêt pour le raisonnement* et le nombre de cours où l'on a eu à concevoir des preuves est plutôt « volatile » : de 0,58 aux HEC, elle passe à -0,34 à Polytechnique avec un passage à vide à 0,03 en informatique.

Nous avons ensuite mis en relation les autres indicateurs d'intérêt avec les erreurs commises par les étudiants, en calculant les coefficients de corrélations que nous avons consignés dans le tableau suivant :

Intérêts en math	Erreurs commises								
	HEC			Info			Poly		
	EV	EX	IN	EV	EX	IN	EV	EX	IN
Théorie	-0,06	-0,28	-0,31	**-0,49**	-0,11	0,10	-0,29	-0,08	-0,15
Raisonnement	-0,04	-0,31	-0,16	**-0,54**	-0,31	0,17	**-0,62**	-0,12	0,31
Procédural	0,09	-0,05	0,14	0,35	-0,38	-0,19	**0,83**	0,14	**-0,67**
Application	0,08	-0,01	0,08	-0,31	-0,05	-0,26	0,12	0,29	-0,16

Tableau 14 – Coefficients de corrélation entre les intérêts et le type d'erreurs commises

En supposant que nos indicateurs reflètent tout au moins partiellement les intérêts que nous cherchions à quantifier, les données recueillies en informatique et à Polytechnique semblent indiquer que l'intérêt pour le *raisonnement* pourrait aller de pair avec les compétences d'*évaluation*, alors qu'un intérêt pour l'approche *procédurale* pourrait être un symptôme de difficultés d'*évaluation*. Si, à Polytechnique, cet intérêt pour le *procédural* semble associé à moins d'erreurs d'*intervention*, deux interprétations peuvent être envisagées : soit qu'une focalisation sur le travail de la technique réduise les risques d'erreurs d'intervention, soit que les erreurs ou les blocages en phase d'analyse ou de planification empêchent de poursuivre correctement la résolution et de s'exposer à de nouveaux risques d'erreurs d'intervention. À nouveau ici, les cours-outils aux HEC ne nous mènent pas exactement aux mêmes pistes, mais on y remarque toutefois une possibilité de lien entre compétences d'*explicitation* observées et intérêt pour le *raisonnement* ou la *théorie*, possibilité que ne démentent pas les autres secteurs. Quant à l'intérêt pour l'*application*, de la façon dont nous l'avons mesuré tout au moins, il ne semble pas jouer un rôle déterminant ; il ne faudrait pas en conclure rapidement qu'il n'y aurait rien à gagner à intégrer l'application au cours de mathématiques : l'intérêt seul, s'il n'a jamais été nourri ou utilisé sur un plan didactique, n'est pas en soi porteur d'apprentissage.

Pour contre-examiner les différentes relations envisagées, nous sommes retournés aux notes disponibles.

	HEC		Informatique		Polytechnique	
Facteurs possibles	Note 1	Note 2	Note 1	Note 2	Note 1	Note 2
Compétences logicielles	**0,50**	0,31	0,24	0,11	**0,45**	**0,67**
Intérêt pour la théorie	0,28	0,35	**0,40**	**0,43**	0,12	0,09
Intérêt pour le raisonnement	**0,43**	0,33	0,38	**0,55**	**0,48**	**0,60**
Intérêt pour le procédural	0,09	0,12	-0,05	-0,16	**-0,74**	**-0,82**
Intérêt pour l'application	-0,10	0,01	0,25	0,39	0,09	-0,16

Tableau 15 – Coefficients de corrélation entre les notes et des éléments associés à la formation

Le Tableau 15 tend à corroborer les observation précédentes. Il est par ailleurs fascinant d'observer une corrélation négative aussi forte entre l'intérêt pour le procédural et la note obtenue à l'examen final du cours de mécanique (Note 2 de Polytechnique). Notre indicateur d'intérêt pour l'approche procédurale pourrait peut-être servir à l'élaboration d'un outil de dépistage précoce...

4.7 Synthèse

Avant de poursuivre avec les résultats de l'analyse qualitative, il apparaît approprié de résumer les principaux résultats auxquels a donné lieu l'analyse des données quantitatives de ces étudiants inscrits à un programme de gestion, génie ou informatique.

À l'exception des étudiants étrangers qui ont reçu une formation jugée équivalente, tous les participants à l'étude ont complété avec succès leurs cours de mathématiques 436, 536 du secondaire ainsi que les cours de mathématiques 103, 203 et 105 du collégial, pré-requis à leur formation universitaire. La plupart de ces étudiants ont commencé leurs études collégiales à l'intérieur du programme de sciences ; la moitié comptent un cours supplémentaire de mathématiques dans leur formation collégiale, et le quart en comptent deux. La formation mathématique reçue au secondaire apparaît généralement conforme aux programmes des années 80, définis selon une approche procédurale : les concepts y étaient présentés selon une gradation de la complexité, l'accent était mis sur les exercices, et le développement de capacités à démontrer n'était pas inclus dans la liste des objectifs visés. La formation mathématique reçue au collégial était définie en termes de contenus minimaux et non d'approches, et laissait par conséquent davantage de latitude à l'enseignant.

L'intégration de l'informatique en mathématiques s'est limitée à la calculatrice numérique au secondaire et, pour un tiers des étudiants, à l'utilisation d'une autre approche technologique (calculatrice graphique, logiciel statistique, calculateur symbolique, etc.) dans un cours (ou plus) au collégial. Si la réutilisation des concepts mathématiques dans d'autres disciplines constitue la principale source de satisfaction en mathématiques chez l'ensemble des étudiants interrogés, une minorité d'entre eux inclut la présence de l'application dans les caractéristiques de la formation reçue en mathématiques. Parmi les autres sources importantes de satisfaction en mathématiques, on note aussi la simplification d'expressions par des manipulations algébriques et la confirmation de la maîtrise par le corrigé, éléments caractéristiques d'une approche procédurale des mathématiques.

Les erreurs recensées dans les productions mathématiques de ces étudiants se situent principalement dans les phases d'*analyse* et de *planification*. De façon duale, on peut les associer principalement à des lacunes sur le plan des compétences d'*évaluation* et d'*explication*. Une mise en relation préliminaire des compétences démontrées avec la formation reçue laisse entrevoir les pistes suivantes :

- Des compétences d'*évaluation* supérieures pourraient être associées à un intérêt pour le raisonnement ainsi qu'à des compétences logicielles, alors qu'un intérêt pour l'approche procédurale pourrait être un signe de lacunes sur le plan des compétences d'*évaluation*.

- Des compétences d'*explicitation* supérieures pourraient être liées à un intérêt pour la théorie et pour le raisonnement.

- Un intérêt pour l'approche procédurale pourrait être associé à moins d'erreurs d'*intervention*.

L'analyse qualitative qui suit explorera plus à fond ces pistes, mais ne s'y limitera pas.

5 Résultats de l'analyse qualitative des données

L'analyse qualitative des résultats de notre recherche, selon les objectifs énoncés au chapitre 3, vise à comprendre comment s'articulent les liens entre l'histoire éducative et les compétences en résolution de problèmes de mathématiques appliquées. Elle permet aussi de mieux interpréter les tendances observées à partir de l'analyse quantitative des relations entre la formation des étudiants et leurs compétences en résolution de problèmes.

Dans ce chapitre, nous présentons d'abord les étudiants retenus pour l'analyse qualitative. Nous traitons ensuite des influences de l'approche procédurale qui a orienté les programmes du secondaire de ces étudiants. Nous examinons finalement les rapports de ces étudiants à l'application et à l'informatique ; cet examen est éclairé par l'histoire éducative de chacun et les compétences observées en résolution de problèmes.

5.1 Présentation des étudiants

Les étudiants retenus pour l'analyse qualitative ont été sélectionnés à partir des réponses données au questionnaire (voir section 3.4.1). Seuls deux des étudiants que nous avions choisis ont décliné l'offre d'une entrevue (et ont été remplacés par de nouveaux participants, très intéressants au demeurant), et aucun parmi ceux qui ont participé aux entrevues n'a abandonné le cours en milieu de session.

Nous avions cherché à distribuer les sujets dans l'espace *théorie-pratique* en recrutant des participants qui soient représentatifs des étudiants du groupe, et en nous intéressant aussi aux cas plus particuliers. Pour ce faire, nous avions pris en compte, de façon globale et intuitive, plusieurs éléments d'information obtenus par le questionnaire (ex. les intérêts exprimés, les expériences rapportées, les connaissances mathématiques) que nous avions associés tantôt à une orientation *théorique*, tantôt à une orientation *pratique*, tantôt aux deux. Dans les sections 5.1.1, 5.1.2, 5.1.3, nous résumons les principales informations que nous donnait à voir le questionnaire pour les étudiants que nous avons retenus. À la lumière des entrevues, nous avons pu raffiner notre perception de la position qu'occuperaient ces étudiants dans un plan théorie-pratique où l'on associerait l'origine aux valeurs attendues (espérées ?) pour l'engagement *théorique* et l'engagement *pratique* chez des étudiants universitaires de secteurs où l'on applique les mathématiques. La Figure 8 en donne une représentation ; bien qu'elle ne soit basée sur aucune donnée numérique, elle pourra peut-être servir de repère dans la lecture des résultats de l'analyse. Toujours dans le but d'organiser la lecture, les prénoms que nous avons attribués aux étudiants reflètent la position qu'ils nous paraissent occuper dans ce plan.

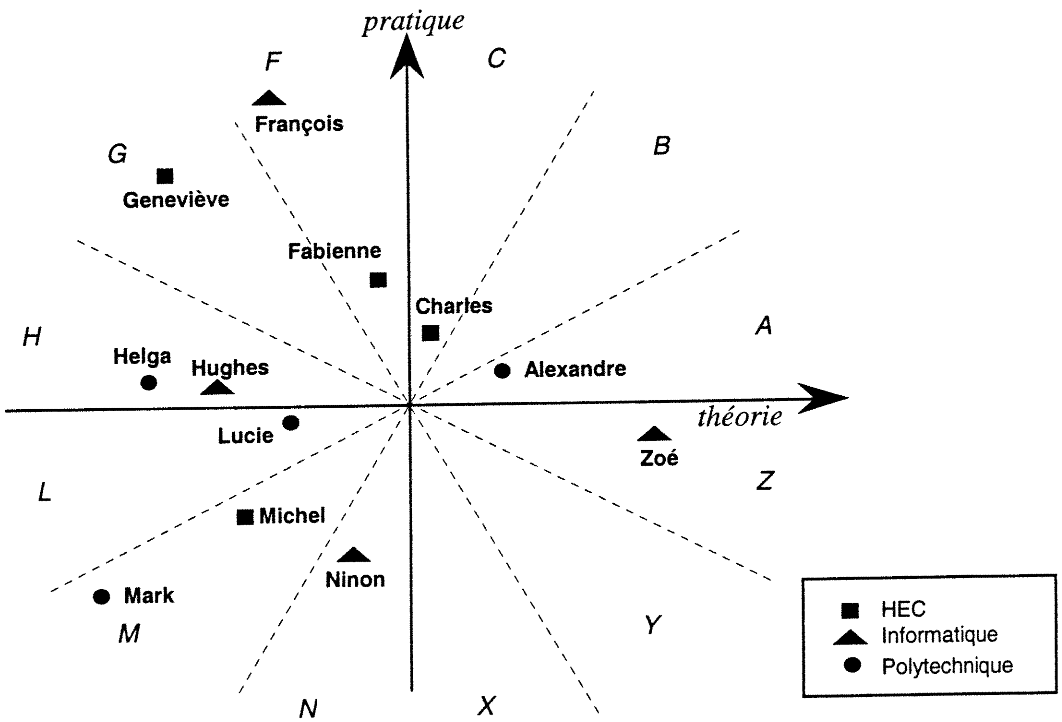


Figure 8 – Répartition (perçue) des étudiants dans l'espace théorie-pratique

5.1.1 Étudiants des HEC

Aux HEC, les quatre étudiants retenus sont les suivants :

- Charles : Il effectue un retour aux études après un DEC en communications, un certificat en cinéma et quelques expériences de travail dans différentes fonctions liées tantôt à la technique tantôt à la gestion. Pour être admis aux HEC, il a dû compléter récemment sa formation collégiale en mathématiques, qu'il avait d'abord entreprise dans le cadre d'un DEC en sciences. Son diplôme d'études secondaires avait été obtenu dans une école privée de la banlieue nord de Montréal. Il est sensible à la cohésion des mathématiques mais aurait préféré la découvrir par l'application et l'expérimentation plutôt que par l'abstraction, approche qui, selon lui, a connu un sommet avec son cours *Algèbre vectorielle et linéaire* (105). Il n'a jamais eu à élaborer lui-même de démonstrations. Il connaît assez bien le logiciel EXCEL qu'il a appris en milieu de travail.

- Geneviève : Elle possède un DEC en techniques administratives, orientation qu'elle a choisie après un début d'études collégiales en sciences. Elle aime calculer, surtout dans un contexte d'application, et se déclare tout à fait satisfaite de sa formation en mathématiques, à l'exception de deux cours du cégep, *Calcul différentiel et intégral 2* (203) et *Méthodes de preuve* (100), qui accordaient, selon elle, une place exagérée à la démonstration. Elle a fréquenté successivement deux écoles pour ses études secondaires : une école internationale pour les deux premières années, puis une école du secteur public régulier de Montréal pour les trois autres. Elle connaît assez bien EXCEL, qu'elle a appris par elle-même, ainsi que la calculatrice financière et les logiciels comptables qu'elle a appris dans ses cours et utilisés dans un bureau de comptable où elle travaille à l'occasion.

- Fabienne : Elle possède un DEC en sciences administratives, après un début en sciences de la santé. Elle aurait préféré une formation mathématique avec une plus grande ouverture sur l'application, comme ce fut le cas dans son cours *Probabilités et statistiques* du niveau collégial (307) où elle a, de plus, appris à utiliser un logiciel statistique. Elle a fréquenté trois écoles publiques de la banlieue sud de Montréal pour sa formation secondaire, dont les troisième et quatrième années se sont déroulées dans une petite école réservée aux élèves du programme enrichi du deuxième cycle. Là, elle a suivi en parallèle les cours 436 et 431 (segment enrichi du programme de mathématiques de quatrième secondaire). Si elle déclare avoir particulièrement apprécié le 436 qu'elle décrit comme une série d'exercices pour appliquer les formules enseignées, elle s'est sentie quelque peu déstabilisée par la difficulté du 431 qui faisait par ailleurs une place importante à la calculatrice scientifique pour une introduction à l'intégration par des méthodes numériques. Elle aussi connaît bien EXCEL, qu'elle a appris et utilisé dans plusieurs de ses cours. Elle compte plusieurs expériences de travail liées aux tâches administratives.

- Michel : Il détient un DEC en sciences de la nature et a complété sa formation secondaire dans une école internationale. Tout en reconnaissant au cours « *Méthodes de preuve* » (100) d'avoir profondément contribué à sa compréhension des mathématiques, il reproche à sa formation mathématique l'importance accordée aux théorèmes, aux preuves et à la démonstration ; il aurait préféré découvrir la théorie par lui-même, à travers la résolution de problèmes. Il aime les formules et les méthodes générales qui s'appliquent dans tous les cas. Il ne fait pas montre d'une sensibilité particulière à l'application. Il a appris à utiliser EXCEL pour ses rapports de laboratoire en physique.

Les données relatives aux types d'erreurs commises en résolution de problèmes de ces différents étudiants sont résumées au tableau suivant, et comparées aux valeurs moyennes et médianes associées à l'ensemble des 15 étudiants du niveau quantitatif :

Erreurs commises	HEC – qualitatif				HEC – quantitatif	
	Charles	Geneviève	Fabienne	Michel	Moyenne	Médiane
Erreurs (EV) d'évaluation	**2,3**	3,6	3,0	**5,0**	3,8	4,0
Erreurs (EX) d'explicitation	2,0	**1,0**	**4,0**	2,3	2,4	2,3
Erreurs (IN) d'intervention	1,7	2,4	1,1	1,7	1,7	1,7

Tableau 16 – Répartition des erreurs chez les étudiants des HEC

Si l'on se limite à ces données, on note des compétences supérieures à la moyenne en évaluation chez Charles et en explicitation chez Geneviève. Du côté des difficultés, on retrouve l'évaluation chez Michel, l'explicitation chez Fabienne et peut-être l'intervention chez Geneviève. Nous approfondirons l'analyse de leurs productions dans les sections qui suivront.

5.1.2 Étudiants du département d'informatique

Au département d'informatique, nous avons rencontré les quatre étudiants suivants, qui à l'exception de Zoé, sont tous inscrits au baccalauréat spécialisé en informatique :

- François : Il possède un DEC en techniques informatiques, obtenu à l'intérieur d'un programme intensif, après un DEC en sciences humaines (sans mathématiques) et une très brève incursion en sciences politiques. Il se déclare plutôt insatisfait de la formation en mathématiques qu'il a reçue au secondaire dans une école privée de la banlieue sud de Montréal et qui, selon lui, a privilégié l'apprentissage de formules au détriment du développement de la conceptualisation, du raisonnement et de la compréhension des possibilités d'application. Il connaît plusieurs langages de programmation, qu'il a appris dans les deux dernières années, au cégep, en milieu professionnel dans le cadre d'un stage, ou par lui-même. Il déclare maîtriser EXCEL et bien connaître sa nouvelle calculatrice graphique. Il a d'ailleurs choisi d'en tirer parti dans la résolution des problèmes de son second cours de *Calcul différentiel et intégral* (203) qu'il vient de compléter dans le cadre d'un programme de formation à distance.

- Hughes : Il vient de Polytechnique après une session en génie informatique, un DEC en sciences de la nature et des études secondaires dans une école publique de la banlieue nord de Montréal. Il décrit sa formation mathématique comme une combinaison de définitions, de propriétés, de théorèmes, de preuves, et d'exercices de calcul. Sans la condamner totalement, il aurait préféré qu'on lui laisse la possibilité de « découvrir » la théorie en focalisant sur le développement du raisonnement et en ouvrant sur la technologie. Il connaît bien EXCEL et a été amené à utiliser la calculatrice graphique dans son premier cours de *Calcul différentiel et intégral* (103). De lui-même, il s'est initié aux fonctions de base du logiciel MAPLE. Du côté de la programmation, il s'est familiarisé très jeune avec le langage BASIC puis il a acquis, dans le cadre de cours formels, des rudiments du PASCAL au secondaire et une assez bonne connaissance du C++ à Polytechnique.

- Ninon : Elle arrive de France avec un baccalauréat scientifique, option mathématiques. Elle aime effectuer des manipulations algébriques, et elle a apprécié de sa formation mathématique l'apprentissage par exercices où elle avait à utiliser les formules et les méthodes de calculs enseignées. Par ailleurs, elle aurait préféré qu'on y limite la place accordée aux définitions, propriétés, théorèmes et preuves, pour accorder plus d'importance au développement de stratégies de résolution. Elle a appris en Terminale à maîtriser la calculatrice graphique, mais elle n'a jamais eu à utiliser de logiciel à contenu mathématique. En préparation à sa formation universitaire en informatique, dans les semaines qui ont précédé le début des cours, elle s'est initiée de façon autonome à la programmation à partir d'un livre sur le langage JAVA.

- Zoé : Elle est inscrite à un majeur en philosophie après un bref passage en math-physique, un DEC en sciences et une formation secondaire reçue dans une école publique de Montréal. Elle se déclare plutôt satisfaite de sa formation en mathématiques, mais elle aurait apprécié qu'elle prenne davantage la forme d'une étude formelle d'espaces abstraits et de structures mathématiques, avec une focalisation sur le développement du raisonnement et du sens de la démonstration. Pour elle aussi, l'initiation à la programmation s'est faite tout récemment, à la session précédente, dans un cours universitaire de programmation avec JAVA ; cette expérience l'a conduite à s'inscrire à un mineur en informatique. Elle possède des rudiments d'EXCEL.

Le Tableau 17 donne la classification des erreurs commises par ces étudiants.

Erreurs commises	Info – qualitatif				Info – quantitatif	
	François	Hughes	Ninon	Zoé	Moyenne	Médiane
Erreurs (EV) d'évaluation	**7,6**	**7,4**	4,8	**2,0**	5,3	6,3
Erreurs (EX) d'explicitation	3,3	3,3	2,6	**1,3**	3,0	3,0
Erreurs (IN) d'intervention	**3,2**	**2,3**	**0,6**	1,7	1,2	1,1

Tableau 17 – Répartition des erreurs chez les étudiants en informatique

Ces données laissent présager des compétences supérieures à la moyenne en évaluation et en explicitation chez Zoé et en intervention chez Ninon. On devine chez Hughes et François des difficultés principalement en évaluation mais aussi en intervention, bien qu'à un degré moindre.

5.1.3 Étudiants de l'École Polytechnique

Les quatre étudiants de Polytechnique qui ont accepté notre invitation de participer à l'étude qualitative possèdent tous un DEC en sciences et sont tous étudiants en génie chimique :

- Alexandre : Il a suivi cinq cours de mathématiques au collégial et, dans l'ensemble, il se dit entièrement satisfait de sa formation qu'il dépeint comme un ensemble cohérent de concepts, de théorèmes et de preuves, favorisant le développement du raisonnement et faisant une place à l'exploration et l'expérimentation. Mais il n'a pas aimé son cours de *Probabilités et statistiques* (307) qu'il réduit à une suite de définitions, de propriétés et d'exercices. Il a étudié au secondaire dans deux écoles publiques de la banlieue nord de Montréal. Il aime réutiliser ses connaissances dans d'autres disciplines, et particulièrement dans la résolution de problèmes complexes. Il a eu à utiliser EXCEL pour ses rapports de laboratoire en physique, ainsi qu'un logiciel graphique (WINPLOT) dans le cadre de son troisième cours de *Calcul différentiel et intégral* (303). Il a été initié à la programmation dans un cours optionnel au niveau secondaire où il a appris les rudiments du TURBO-PASCAL.

- Lucie : Elle reconnaît à sa formation mathématique une progression et une cohésion, mais elle lui reproche d'avoir été trop abstraite et d'avoir trop focalisé sur les définitions, propriétés, théorèmes et preuves, comme ce fut le cas dans son cours *Méthodes de preuve* (100). Au niveau secondaire, elle fréquentait une école privée de la banlieue sud de Montréal. Elle dit aimer apprendre à utiliser des méthodes de calcul, appliquer des formules, effectuer des manipulations algébriques, et réutiliser dans d'autres disciplines les méthodes et concepts appris en mathématiques. Elle a appris à utiliser EXCEL pour ses rapports de laboratoire en physique, et elle l'utilise aussi dans un bureau d'ingénieurs où elle travaille comme secrétaire et commis.

- Helga : Elle constate la place importante des théorèmes, des preuves et des exercices dans sa formation et, sans nécessairement rejeter cet aspect, elle regrette le peu de place accordée à l'application et la technologie. Les cours qui l'ont le plus marquée faisaient montre d'une ouverture sur le développement du raisonnement et sur la technologie. Elle a eu à utiliser MAPLE dans son cours d'*Algèbre vectorielle et linéaire* (105) et elle dit apprécier visualiser à l'aide de l'ordinateur des phénomènes mathématiques. Sa formation de niveau secondaire s'est faite dans une école publique de l'île de Montréal. C'est là qu'elle a été initiée à la programmation avec l'utilisation du langage VISUAL BASIC.

- Mark : Il aime appliquer des formules dans des problèmes spécifiques, mais apprécie pouvoir s'appuyer sur une formule ou une méthode générale, applicable dans tous les cas. Il ne se juge compétent avec aucun logiciel mathématique. Il a étudié au secondaire dans deux écoles publiques de la banlieue nord de Montréal.

Erreurs commises	Poly – qualitatif				Poly – quantitatif	
	Alexandre	Lucie	Helga	Mark	Moyenne	Médiane
Erreurs (EV) d'évaluation	**3,5**	6,0	5,2	**6,8**	5,3	5,2
Erreurs (EX) d'explicitation	2,0	**1,9**	**5,0**	**5,1**	2,5	2,0
Erreurs (IN) d'intervention	2,5	1,2	1,9	**0,2**	1,2	1,1

Tableau 18 – Répartition des erreurs chez les étudiants de Polytechnique

À partir des données compilées dans le Tableau 18, on suppose des compétences particulières en évaluation chez Alexandre, en explicitation chez Lucie et en intervention chez Mark. Mark et Helga feraient preuve de difficultés en explicitation, et l'évaluation représenterait un problème particulièrement chez Mark et Lucie.

5.2 Les influences de l'approche procédurale

Avant de pouvoir juger des différents rapports développés individuellement avec l'application et l'informatique, et d'en analyser les contributions respectives dans le développement des compétences, il nous est apparu nécessaire de considérer les effets généraux de la formation théorique reçue en mathématiques dans ce qu'elle a de commun à l'ensemble des participants et de spécifique à leur génération. En ce sens, si le Tableau 3 (Section 4.3.1) permet de constater que, sur le plan des contenus, la majorité des étudiants associent leur formation à *un « enchaînement progressif de concepts du plus simple au plus complexe »*, il amène aussi à percevoir la *« série d'exercices pour appliquer les formules enseignées »* comme le mode d'apprentissage prédominant.

Ce mode d'apprentissage nous semble bien refléter une appropriation par le système d'enseignement de l'approche procédurale des programmes (voir 4.2.1). Or la mise en relation préliminaire des compétences avec les intérêts a laissé entrevoir que les étudiants qui auraient fait leur cette approche pourraient éprouver des difficultés particulières, notamment au niveau des compétences d'évaluation. En mettant à contribution les données recueillies au cours des entrevues, nous essaierons donc de mieux cerner dans cette section les influences de l'approche procédurale, le niveau d'adhésion des étudiants, les raisons qui en expliquent les variations, ainsi que les effets observés sur les productions de ces étudiants.

5.2.1 Perception, motivation et apprentissage

De façon générale, l'approche procédurale inspirée de la pédagogie de la maîtrise était surtout présente dans l'organisation des programmes du secondaire.

Le but poursuivi par la pédagogie de la maîtrise était, et cela est tout à son honneur, de démocratiser l'apprentissage. Pour ce faire, on a constamment cherché à faciliter cet apprentissage en découpant en petites bouchées digestes les contenus mathématiques et en identifiant clairement les connaissances préalables à l'atteinte de chacun des objectifs. Le message était clair : *« pour être capable de faire ceci, il faut et il suffit de se souvenir de cela. »* La responsabilité de l'établissement et de la recherche des liens entre les notions n'incombait donc pas à l'élève. Par ailleurs, on ne visait pas par ces liens à rendre compte de la richesse du tissu mathématique, mais plutôt à tirer les quelques fils qui apparaissaient nécessaires à la progression du cours, quitte à laisser en suspens quelques interrogations.

> *« Je trouve que les mathématiques, c'est beaucoup garroché: "c'est de même, puis prenez-le comme ça!" Tu sais, mettons au secondaire, "telle chose c'est telle affaire, je peux pas vous le prouver, vous avez pas encore la matière pour le voir, mais croyez-moi, c'est ça!" Ça m'est arrivé souvent au secondaire; un petit peu moins au cégep, mais ça arrive encore au cégep. »*
>
> Hughes, étudiant en informatique

> *« Des fois, c'est un peu garroché ... Ils te donnent ça, mais tu sais pas à quoi ça sert, puis pourquoi c'est là ... Ok, ça va faire plus tard... Je sais ben qu'ils font ça dans un but pédagogique, mais des fois, on sait pas trop d'où ça vient. »*
>
> Alexandre, étudiant à Polytechnique

Dans un « *but pédagogique* », donc, on a enseigné les notions mathématiques comme des connaissances compartimentées, presque indépendantes les unes des autres, qu'on pouvait maîtriser individuellement.

> *« C'est vrai que ça devient plus complexe, là, mais, moi, dans ma jeunesse, j'ai trouvé les mathématiques plus faciles à apprendre que la physique parce que c'était pas trop mélangé. »*
>
> Mark, étudiant à Polytechnique

Cette approche avait comme conséquence « heureuse » de permettre de rattraper facilement les mauvaises notes, car on y limitait l'impact des manques dans les connaissances antérieures : une bonne étude des nouvelle procédures requises par les nouveaux problèmes et une application dans l'exécution des exercices achevaient de redresser momentanément la trajectoire. Mark nous fait partager sa remontée spectaculaire en 436 qui l'a lui-même étonné :

« J'avais de la difficulté à suivre, je pense mes premiers examens, j'avais pas la moyenne, la moyenne était quand même très forte, dans les 80; et moi, j'avais 70, 60... Et, je sais pas, j'ai commencé à regarder plus en profondeur mes problèmes, et à la fin, j'ai terminé avec 93, ce qui m'a vraiment étonné parce que j'avais débuté avec 60 et 70. »

Mark, étudiant à Polytechnique

En schématisant grossièrement, on pourrait dire qu'au secondaire on pouvait très bien réussir en se contentant de « faire ses exercices » et d'étudier « ses formules ».

« Au secondaire, ça se limitait vraiment à voir si t'étais capable de faire, si t'étais capable d'appliquer une formule. Je pense que l'application de formules suffisait, oui. On n'était pas aussi exigeant au niveau de la compréhension. »

Michel, étudiant aux HEC

« Je faisais ce qu'il y avait en classe; ils te donnaient tout le temps la moitié du cours pour faire les exercices, je les finissais toujours en classe ou dans les périodes d'étude que t'avais sur l'heure du midi, obligatoires. Fait que tout était fait là, j'arrivais le soir chez nous, j'avais plus rien à faire. »

Fabienne, étudiante aux HEC

Cette approche qui permettait donc un traitement expéditif n'était pas pour déplaire entièrement aux étudiants. Charles explique la popularité d'un apprentissage confiné à la mémorisation et à l'application de formules par le fait que justifier et comprendre requièrent un investissement en temps qui serait incompatible avec le rythme de la société actuelle :

« Parce que présentement, je trouve que les mathématiques, dans le fond, c'est juste des formules que t'appliques à un moment donné. C'est sûr que t'as un problème, puis tout ça, puis t'as un développement qui est en arrière de ça, pourquoi on a cette formule-là, sauf que... on veut pas faire ça, on va pas faire ça. On est dans une société, je pense, qui est: "Pourquoi perdre du temps quand on peut faire plus vite?" Fait que, on va juste passer, on va dire "ok, ben c'est ça ma formule?" C'est tout. »

Charles, étudiant aux HEC

Cette vision, évidemment regrettable d'un point de vue mathématique, est sans doute d'autant plus juste que les étudiants ont une vie plus chargée que jamais, entre leurs études, la multiplication des loisirs, et leur travail rémunéré qui a pris depuis quelques années de nouvelles proportions.

> « *Avant, je travaillais plus. Là, je me suis rendu compte avec l'École, je peux pas. Là, j'en travaille quinze à dix-sept, environ. Les samedis, dimanches puis un soir la semaine.* »
>
> Geneviève, étudiante aux HEC

> « *Je travaillais beaucoup aussi. J'étais professeur de natation, je travaillais dix, douze heures par semaine, même quinze heures des fois. Je restais à une heure et quart du cegep; le plus tôt que j'arrivais chez nous dans la semaine, à part le vendredi, c'était six heures et demie, le soir; le plus tard, à neuf heures. J'avais pas le temps pour faire des devoirs, puis j'arrivais pour travailler, puis ça me tentait pas de faire des devoirs, fait que j'en faisais pas!...* (rires) »
>
> Hughes, étudiant en informatique

Dans ces conditions, la compréhension en profondeur, par l'investissement en temps qu'elle requiert, cède le pas à l'exécution rapide que paraît favoriser une orientation procédurale de l'apprentissage. En raison de son manque de régularité dans l'étude, Hughes compensait au collégial par des fins de semaines d'entraînement intensif à l'approche d'un examen, avec les effets connus sur la rétention à long terme :

> « *J'ai jamais eu une super-méthode de travail, je l'ai toujours su...*(rires) *J'étudiais des fois dans l'autobus, vu que je faisais beaucoup d'autobus. Mettons que j'ai un test de physique le lundi, ben le dimanche, je faisais tous mes exercices, toute la journée; je me levais de bonne heure, je me couchais tard, je faisais de la physique.* »
>
> Hughes, étudiant en informatique

Pour ceux qui ont déjà connu des difficultés en mathématiques, l'entraînement par les exercices a par ailleurs quelque chose de rassurant par l'emprise qu'il leur donne sur leur apprentissage. Ceux-là sont prêts à y consacrer beaucoup de temps. Helga, Michel et Mark nous en donnent une illustration. Tous les trois ont en commun d'avoir éprouvé des difficultés en mathématiques au primaire. Pour Helga, cela a commencé dès la première année :

> *« Quand on a appris la soustraction, l'addition… C'était totalement un autre monde pour moi, puis j'étais perdue là-dedans. C'était, je pense, trop abstrait à l'époque. »*
>
> Helga, étudiante à Polytechnique

Elle a d'abord pu retrouver une certaine confiance après un programme spécial de première année du secondaire étalé sur deux ans où tous les contenus et les procédures étaient bien découpés :

> *« Parce que vraiment, ils ont commencé de la base, puis à chaque fois que quelque chose marchait pas, ils réglaient ça tout de suite, puis on passait à autre chose. Fait que j'ai vu que c'était possible d'avoir des bonnes notes puis de comprendre. »*
>
> Helga, étudiante à Polytechnique

Elle s'est ensuite approprié cette approche « action-rétroaction » pour l'appliquer avec discipline dans ses apprentissages ultérieurs en mathématiques :

> *« Je travaillais plus fort, je trouve, j'en faisais plus… Par rapport au primaire. Je travaillais plus fort. Puis je m'assurais d'avoir vraiment bien compris la matière. Je relisais les notes du prof en arrivant chez nous, puis je faisais tout de suite les exercices. Si j'avais des problèmes, j'allais revoir le prof, le lendemain, après le cours. (…) C'est d'avoir plus confiance, aussi. De dire que il y a rien qui est vraiment compliqué, faut juste s'y mettre puis le comprendre. »*
>
> Helga, étudiante à Polytechnique

Michel a commencé à se heurter à des problèmes de compréhension au moment d'entreprendre les fractions, puis les aires et les volumes :

> *« Jusqu'en 3e année, bon, c'étaient les opérations de base, là, multiplication, addition, tout ça…Il me semble c'était plus naturel. C'est bizarre, parce que à un moment donné ça a comme coupé, sans que je réussisse beaucoup moins bien, mais c'est au niveau de la compréhension, c'était moins naturel. Puis, je me souviens, à un moment donné, je m'étais ramassé avec quelque chose comme 60, puis c'était la première fois que j'avais une note comme ça… Jje me souviens, ma mère avait été traumatisée un peu!… Puis moi aussi je l'étais, je me disais "voyons, qu'est-ce qui se passe?" Puis j'ai perdu un peu de confiance aussi, à ce moment-là. »*
>
> Michel, étudiant aux HEC

Cette perte de confiance, sans doute amplifiée par la réaction parentale, s'est vue compensée par un redoublement d'efforts teinté tout autant des conceptions parentales sur la réussite :

> *« Mes parents sont très travaillants puis ils m'ont tout le temps poussé beaucoup. Beaucoup de contrôle sur les devoirs, puis : "quand t'arrives à la maison, tu fais tes devoirs, puis si tu travailles bien, peut-être que tu pourras jouer un peu ensuite, là"... Si on compare ça à des gens qui ont plus ça naturel puis qui travaillent moins, moi c'était plus... Si j'avais des bonnes notes, c'était vraiment à cause du travail. Mes parents m'ont tout le temps élevé comme ça, m'ont tout le temps dit de me donner à fond, de travailler à chaque soir, puis "c'est comme ça que tu vas avoir des bonnes notes"... Dans ce temps-là, ça me dérangeait pas, j'étais motivé, j'aimais l'école. Quand c'était le temps de travailler, je travaillais. Si je reviens à mes maths, même quand c'était laborieux, je bûchais, je bûchais, puis la plupart du temps, ça finissait quand même bien. »*
>
> Michel, étudiant aux HEC

L'encadrement et les résultats obtenus l'ont encouragé à poursuivre avec cette discipline de travail au secondaire :

> *« Dans ce temps-là, je dirais que j'étais comme au primaire, là, j'étais encore très motivé... Puis je mettais du temps, puis je lâchais pas. Je prenais exactement ce que le professeur marquait au tableau, puis je faisais tous mes devoirs... J'avais peur d'avoir des devoirs non faits. Donc, très motivé, puis la veille de l'examen, j'étais un petit peu stressé, donc j'étudiais beaucoup, puis quand j'arrivais à l'examen, j'étais bien préparé. Mais je pense pas que ça signifiait que j'avais un immense talent, là, c'était plus lié au fait que j'avais travaillé. »*
>
> Michel, étudiant aux HEC

Peur des échecs et des conséquences négatives, reproduction de comportements, entraînement : nous retrouvons ici plusieurs éléments d'une relation béhavioriste à l'apprentissage - ce qui ne permet pas pour autant d'inférer qu'une telle relation est le reflet d'une approche béhavioriste de l'enseignement. Si cette relation à l'apprentissage lui a permis d'obtenir de bonnes notes, à l'exception de celles obtenues en troisième et en quatrième année du secondaire (années d'introduction à l'algèbre et aux fonctions) où il a à nouveau éprouvé des problèmes plus profonds de compréhension, il ne semble pas toutefois qu'elle ait fait accroître sa confiance en ses capacités mathématiques, puisqu'il attribue ses succès exclusivement à son travail.

Chez Mark, les premières difficultés en mathématiques remontent à la troisième année du primaire :

> *« J'étais pas capable de voir comment appliquer les mathématiques dans un problème. Fait que quand ça commençait à être dur pour moi, j'ai laissé tomber… »*
>
> Mark, étudiant à Polytechnique

Chez lui aussi, c'est l'influence parentale qui a amené un redressement, et les efforts qu'il a consentis à partir de là ont rapidement porté fruit :

> *« Comme mon père m'a fait remarquer que j'ai failli échouer ma troisième année, je pense que c'est à partir de là que je me suis pris en main parce qu'en quatrième année, j'ai eu des hauts scores en mathématiques, et dans toutes les autres matières, mais plus en mathématiques. Et j'ai vu que si j'y mettais un peu d'effort et si je commençais à aimer ça, je pense que je pourrais être très fort en mathématiques. »*
>
> Mark, étudiant à Polytechnique

Et si lui aussi a connu de nouvelles difficultés en 3^{e} année du secondaire et au début de la 4^{e}, un regain d'application pour redresser la situation lui a fait croire à nouveau en ses capacités :

> *« C'est parce que je me suis beaucoup appliqué; en m'appliquant, j'ai vu que j'aimais ça, et j'ai commencé à faire les problèmes facilement … »*
>
> Mark, étudiant à Polytechnique

Pour ceux qui éprouvaient moins de difficultés, le rythme du secondaire semblait suffisamment lent et l'enseignement suffisamment explicite et répétitif pour conduire certains étudiants comme Charles et Zoé à se dispenser de faire des exercices à la maison, en misant plutôt sur une compréhension en classe.

> *« J'étais en classe, j'écoutais, puis je faisais les exercices en classe, puis après ça, on ferme les livres... C'est tout. Fait que c'est juste que t'es en classe, t'écoutes le prof. Si tu comprends pourquoi il le fait, t'es correct après, tu vas faire le même raisonnement. »*
>
> Charles, étudiant aux HEC

> *« Moi, je fais pas d'exercices, j'écoute le cours, puis j'aime mieux réfléchir aux notions que j'ai vues dans le cours que de faire des exercices, comme ça, n'importe comment, au hasard. (...) C'est que, ils passent beaucoup de temps sur une notion, puis ils font plein d'exemples en classe, ils te répètent ça souvent, là... Juste assister aux cours, ça te pratique tout seul, t'as pas besoin... J'étudiais la veille de mes examens, puis c'était suffisant. »*
>
> Zoé, étudiante en informatique

Chez Zoé, par surcroît, le temps passé à faire les exercices n'accroît en rien sa capacité à répondre correctement aux questions d'un examen, car elle dit éprouver des problèmes de mémorisation.

> *« Quand tu comprends, t'as pas besoin de pratiquer. Tu sais, je peux faire un exercice pour m'assurer que je comprends bien, si je suis pas sûre de bien comprendre, je teste, mais... Mais c'est que ça me rentre pas dans la tête, même si je fais des exercices, c'est pas rentable, là... (...) Si on a une formule puis pratiquer pour qu'elle te rentre dans la tête, moi ça marche pas. Faut que je comprenne. »*
>
> Zoé, étudiante en informatique

Si elle semble se situer ici à l'opposé de Mark et Michel, cette opposition se manifestait aussi au primaire. Au contraire des deux autres, elle a commencé à se distinguer à partir du moment où l'on quittait les opérations arithmétiques pour aborder les fractions, car l'accent n'était plus autant mis sur la mémorisation des tables.

> *« Au primaire, les fractions, j'étais bonne. En 5e année, j'étais la meilleure de la classe, la prof, elle m'avait serrée dans ses bras, à cause que j'étais la seule à avoir compris une affaire!... (rires) Mais le début du primaire, apprendre les multiplications, les divisions, ça, je pense que je les sais pas encore. Tu sais, genre 7 fois 8, je le sais pas qu'est-ce que ça donne, j'étais pas bonne, là... Ça me rentre pas dans la tête. Je sais pas, je les ai étudiées, mes parents, ils me les faisaient réciter, puis tu sais, faut que je me concentre puis que je fasse comme un détour dans ma tête pour trouver la réponse ...»*
>
> Zoé, étudiante en informatique

Le fait qu'elle puisse se permettre d'emprunter « *un détour dans sa tête* » pour effectuer une simple opération arithmétique témoigne sans doute d'une intégration, propice à leur utilisation, des propriétés des opérations dans l'organisation de ses connaissances. Ce qu'elle perd en rapidité d'exécution, elle le gagne en compréhension et en « espace-mémoire ».

Hughes relève aussi le caractère répétitif de la formation en mathématiques au secondaire, mais selon lui, elle ne se limitait pas au mode d'enseignement utilisé pour exposer un même concept, mais elle se retrouvait aussi sur le plan des reprises de contenus, d'une année à l'autre, d'un concept à l'autre.

> *« Au secondaire, j'ai tout le temps trouvé que c'était répétitif. À part secondaire 5… Le 5, c'était différent mais ça revenait répétitif à un moment donné : faire des fonctions, puis des fonctions, puis des fonctions… »*
>
> Hughes, étudiant en informatique

Pour lui non plus, la répétition par les exercices ne représentait pas une condition nécessaire à la réussite des examens.

> *« Secondaire, j'étudiais avant l'examen, pas beaucoup, puis j'avais des bonnes notes, fait que… c'était correct. Si je faisais beaucoup d'exercices? Non. Je suis même pas sûr si j'en faisais. (rires) Je lisais les notes. C'est sûr j'en faisais un petit peu, les devoirs qu'on était obligé de faire, je les faisais, mais… »*
>
> Hughes, étudiant en informatique

Dans son cas, ce sont surtout les capacités de mémorisation qui étaient mises à contribution, et une mémorisation plutôt particulière, en surface, au niveau de la forme :

> *« En secondaire 5, j'ai plus étudié que les autres années. Mais, les autres années d'avant, j'étudiais avant le test. Mettons le test était à 10h le matin… j'avais étudié la veille, puis j'étudiais juste avant l'examen, je lisais toutes mes notes, j'ai une excellente mémoire photographique. »*
>
> Hughes, étudiant en informatique

> *« Le Math Soleil, je me rappelle de ce livre-là. Je me rappelle que je l'aimais pas. Je suis visuel, j'aime ça les belles choses, je vais faire une page de*

présentation, elle va être belle… Un livre qui est pas beau, j'ai de la misère à étudier avec ça. »

Hughes, étudiant en informatique

Cette stratégie de mémorisation graphique est évidemment exigeante sur le plan de la mémoire et elle perd de son efficacité quand le contenu augmente rapidement. Ainsi, il en a vécu les limites lorsque le rythme s'est accéléré en cinquième secondaire :

« J'ai jamais vraiment étudié, puis là en 536, j'aurais dû étudier un petit peu plus que qu'est-ce que j'ai fait. »

Hughes, étudiant en informatique

Il n'est toutefois pas le seul à avoir vécu une baisse de performance en 536, où l'on passait rapidement à travers les fonctions exponentielles, logarithmiques, trigonométriques et les côniques :

« Maths 536, ça a baissé, un peu. (rire) *Mais c'était quand même bien. Je pense j'avais dû avoir 75 en maths, c'était bien, c'était dans la moyenne. C'était pas facile, mais encore là, je donnais pas assez de temps. »*

Alexandre, étudiant à Polytechnique

Mais ceux qui privilégient l'apprentissage par les exercices s'en sont bien sortis, adaptés qu'ils étaient avec leur discipline de travail apte à absorber ce qui constituait davantage une augmentation de quantité que de complexité :

« Sûrement, si je compare avec mes amis qui aiment vraiment pas les maths, eux autres ont trouvé ça vraiment très, très grand, la marche; mais moi, ça a bien été, c'est juste des maths, on va en faire, c'est tout ! »

Geneviève, étudiante aux HEC

« Math 536? C'est un cours qui ressemble à 436. Tout le monde dit que ça serait dur parce qu'il y avait beaucoup de matière, mais en fin de compte, tu sais, c'était correct, là. Fallait juste se mettre à date. Même si on n'était pas à date, fallait au moins faire tous ses exercices. Et c'est juste ça. C'est comme ça que je vois 536. »

Mark, étudiant à Polytechnique

> *« Donc secondaire 1, 2, ça a bien été; 3, 4, ça a été beaucoup plus difficile; puis 5, là, je suis revenu plus avec des meilleures notes. »*
>
> Michel, étudiant aux HEC

> *« À quel moment j'ai le mieux compris? En secondaire 5. La façon ordonnée que le prof donnait un cours. Je sais pas... Je faisais mes exercices puis je révisais quelques jours avant les examens ou la veille, je sais plus trop... Puis, bon, ça allait bien, j'arrivais à l'examen, j'avais 95. »*
>
> Lucie, étudiante à Polytechnique

On le remarque, les étudiants font souvent référence à leurs notes pour décrire leur parcours éducatif. Il faut dire que l'évaluation par les examens (*formatifs* et *sommatifs*) est au cœur de l'approche procédurale de l'apprentissage car elle en constitue l'outil de régulation privilégié. Et les objectifs d'apprentissage constituent un contrat clair des procédures qui seront évaluées et qu'il convient donc d'apprendre.

> *« Ce que je trouve facile en mathématiques ? Bon, c'est spécial aux cours, quoi, mais par exemple, on s'entraîne, on fait des exercices, puis, aux contrôles, les exercices, bon, c'est pas exactement la même chose, mais ils ressemblent, donc on n'est pas perdu, quoi. »*
>
> Ninon, étudiante en informatique

La transparence de l'évaluation permet aussi de moduler les efforts selon la performance visée. Ainsi, Mark et François se fixaient a priori des objectifs en termes de notes pour déterminer le niveau d'étude requis :

> *« En 436, tu sais, je visais pas vraiment le 80 parce que je le savais que dans ce groupe-là, tout le monde était fort. Je me suis dit "Je serai jamais à leur niveau! Je vais faire juste pour être dans la moyenne ou sinon d'avoir au moins 75 de moyenne." Et là, quand j'ai vu que j'avais quand même du potentiel, que je pourrais réussir pareil, c'est là que j'ai commencé à regarder, à faire toutes mes exercices et à en faire plus aussi, comme les examens des autres années, je les faisais tous pour être sûr de ce que je faisais. (...) En 536, j'ai vu que j'avais un bon coussin... c'est pour ça que, après avoir eu des grosses notes à la première étape, j'ai baissé un petit peu mon niveau d'étude, et comme ça, rendu à l'examen final, j'ai pas eu une grosse note, là... »*
>
> Mark, étudiant à Polytechnique

> *« Je dis que j'étais plus ou moins intéressé, que j'étais pas bon, mais j'étais capable de réussir pareil. Parce que je réussissais sur la limite, juste pour réussir finalement, c'était ça mon but. »*
>
> François, étudiant en informatique

Mais l'effet de l'évaluation va plus loin quand on l'utilise dans un processus de rétroaction. Elle dispense de la nécessité de se questionner sur ce qu'on a compris. Fabienne décrit la façon dont elle mettait à profit l'évaluation formative pour juger de sa compréhension :

> *« Au secondaire, moi j'avais juste besoin d'écouter au cours, puis j'étudiais pas pour mon formatif, c'étaient des examens cool tu sais; tout dépendant de la note que j'avais au formatif, je pouvais dire… surtout en mathématiques, ça m'aidait beaucoup, j'étudiais pas pour le formatif, puis si j'avais eu 52% dans mon formatif - puis lui, dans le fond, il apparaît pas nulle part - je me disais "ok, cette sorte de fonction-là, je la comprends pas; ça, je le comprends pas". Fait que j'étudiais juste qu'est-ce que j'avais poché dans le formatif. »*
>
> Fabienne, étudiante aux HEC

Décomposition des connaissances en micro-objectifs, mémorisation de formules, entraînement par les exercices, régulation par l'évaluation : voilà donc les principales caractéristiques de l'approche procédurale qu'on retrouvait de façon assez répandue au niveau secondaire. On peut questionner la valeur d'une telle approche pour le développement d'un savoir théorique : en particulier, elle apparaît assez peu compatible avec l'apprentissage de la démonstration et, de façon plus générale, avec le développement d'une pensée déductive.

5.2.2 La présence discrète de la démonstration

La démonstration en mathématiques vise à assurer la cohérence interne de ce champ de connaissances. Mais quand ce champ est découpé en petits éléments de connaissances formulés de façon à les faire paraître presque indépendants les uns des autres, la nécessité d'assurer une telle cohérence paraît s'évanouir. Il n'est donc pas surprenant que l'on n'encourageait pas particulièrement dans les programmes du secondaire le recours à la démonstration dans l'enseignement, et que l'on y proclamait haut et fort que l'apprentissage de la démonstration ne constituait pas un objectif visé (voir 4.2.2). Il semblerait donc qu'en visant la démocratisation des apprentissages, on ait négligé la démocratisation de certaines habiletés liées à la pensée, comme si ces habiletés n'étaient considérées nécessaires que pour une certaine élite (Resnick, 1987).

Si certains ont quand même eu à rédiger quelques preuves au secondaire, l'expérience était souvent circonscrite dans le temps et limitée à un module spécifique (géométrie ou logique). Elle était donc vécue comme une discontinuité ponctuelle dans l'apprentissage des mathématiques, d'un niveau de difficulté auquel on n'avait pas été habitué :

> *« Au secondaire, les seules preuves qu'on a faites, c'est en géométrie, en secondaire 4. Ça, j'aimais quand même ça. Je trouvais que c'était différent, ça demande plus de stratégie, là... »*
>
> Zoé, étudiante en informatique

> *« En logique en secondaire 4, je me rappelle avoir fait des preuves. Puis c'était très dur. J'avais eu de la misère dans ce bulletin-là. »*
>
> Alexandre, étudiant à Polytechnique

> *« Des preuves en géométrie, oui, oui... D'ailleurs, c'est un volet que j'ai détesté, je dirais. T'avais un énoncé de départ puis "prouve-moi ça", puis la page était blanche, puis ça, ça me rendait extrêmement inconfortable. Ça a été une session où j'ai jamais eu le contrôle vraiment, puis j'étais très inquiet face à l'examen... »*
>
> Michel, étudiant aux HEC

Pour plusieurs, le collégial a constitué le premier contexte où la preuve était régulièrement présente :

> *« Ah, oui, faire des preuves en 105, ça j'ai eu de la misère. C'était la première fois que j'en faisais. »*
>
> François, étudiant en informatique

> *« Partout, dans tous les cours de maths au cégep, on avait des démonstrations à faire: des fois en exercice, des fois dans l'examen, fallait démontrer... ça me suivait tout le temps, les démonstrations! »*
>
> Helga, étudiante à Polytechnique

> *« Quand j'étais en sciences, là, c'étaient les preuves. En sciences de la santé, c'est beaucoup de preuves. »*
>
> Fabienne, étudiante aux HEC

Mais pour un même cours, selon l'orientation privilégiée par le collège ou le professeur, la démonstration pouvait céder le pas à un contenu orienté vers les techniques de calcul. Les étudiants nous donnent une idée de la variabilité de l'espace occupé par les preuves.

Fabienne, qui a dû reprendre le cours d'*Algèbre vectorielle et linéaire* (105) qu'elle avait échoué une première fois, soupçonne que le contenu du cours varie selon l'orientation du programme :

> *« Je l'ai vu en sciences santé puis je l'ai vu en sciences administratives, puis je peux dire que c'est deux Math complètement différents. En sciences santé, c'est des preuves, des preuves et des preuves. Puis en sciences administratives, c'est que t'appliques la formule. Concrètement là. Puis il fait des exemples aussi avec, pour te montrer à quoi ça sert une matrice, toutes ces choses-là. »*
>
> Fabienne, étudiante aux HEC

Alexandre et Michel donnent leur vision respective de leur deuxième cours de *Calcul différentiel et intégral* (203), qu'ils ont suivi tous deux en sciences de la nature, mais dans deux cégeps différents :

> *« C'était calcul. Non, ça, j'étais bon. C'était vraiment juste comme « intégrez ça », là, « calculez ». Il y avait comme aucune preuve dans ce cours-là. »*
>
> Alexandre, étudiant à Polytechnique

> *« J'ai l'impression que ça a été ça tout le long de la session: des théorèmes après des théorèmes, des théorèmes puis encore des théorèmes!... Des preuves... Des trucs absolument, complètement abstraits. On avait comme deux preuves à l'examen. Je pense qu'ils se basaient sur des preuves déjà vues, mais c'était quelque chose quand même qu'on n'avait pas fait nécessairement. »*
>
> Michel, étudiant aux HEC

Mais finalement, de telles disparités pouvaient exister pour un même cours au sein d'un même collège et d'une même orientation. Mark explique ses frustrations avec le cours d'algèbre linéaire (105) :

> *« Au cours 105, mon prof, il faisait juste donner une petite formule, il disait « la petite formule, ça s'applique juste comme ça », c'est tout, mais... on voyait pas d'où venait la formule, ou comment chercher en profondeur à quoi ça servait... Dans les autres cours, mes amis disaient que c'était très dur parce qu'il y avait beaucoup de preuves à donner. Alors que dans mon cours, il y avait aucune preuve, c'était juste appliquer la formule, c'est tout. »*
>
> Mark, étudiant à Polytechnique

Il y a lieu de s'interroger sur l'existence de telles disparités, même si elles s'expliquent en partie par le caractère peu contraignant de l'énoncé des programmes de mathématiques au collégial. Reflètent-elles des différences dans les conceptions personnelles des enseignants du collégial à l'égard de l'enseignement des mathématiques ? Ou s'agit-il plutôt d'une adaptation progressive visant à concilier les caractéristiques des étudiants, formés à l'approche procédurale, et les demandes institutionnelles exprimées en termes d'objectifs de diplômation ?

5.2.3 Liens avec les compétences d'intervention

Comme nous l'avons vu dans la section 4.2, la formation mathématique a accordé une grande place au développement de compétences de calcul, particulièrement au secondaire mais aussi au collégial. Au point où ceux qui ont adhéré à l'approche procédurale en viennent à considérer comme une compétence particulière le fait d'appliquer correctement une formule, sans chercher à la prouver ou même à en comprendre l'origine. L'analyse précédente des perceptions des étudiants montre bien qu'une telle compétence a pu leur assurer la réussite à plusieurs cours de mathématiques. Cette réalité légitime en quelque sorte leur perception.

> *« Qu'est-ce que je trouve facile en mathématiques? Peut-être l'application de formules. Je dirais que je suis moins bon pour prouver la formule, mais du moment qu'on me donne la formule, telle quelle, puis qu'on me donne des problèmes avec, là, je dirais que je performerai beaucoup plus à ce niveau-là. »*
>
> Michel, étudiant aux HEC

« En mathématiques c'est des formules, quoi, qu'il faut se souvenir, mais en biologie, bon, c'est tout ton cours! En math, tu peux plus facilement… ben moi, j'arrive plus facilement à me retrouver.

Ninon, étudiante en informatique

« Moi, j'aime les maths. J'aime ça parce que j'ai peut-être de la facilité à faire des maths sans vraiment toujours comprendre d'où ça vient, là. Faire, appliquer des formules, j'ai pas de problèmes. »

Geneviève, étudiante aux HEC

Dans le même esprit que Geneviève, Ninon préfère se souvenir de formules applicables directement que de comprendre et de se rappeler d'où elles viennent. Elle n'hésite donc pas à allonger la liste des formules qu'elle mémorise car cette approche lui apparaît plus efficace et plus sûre.

« Par exemple, ici, à l'université, quand je demande: "Oui, mais il y a pas une formule spéciale pour faire ça?", ils font "Si, mais bon ça, tu la retiens pas, tu peux redémontrer à partir de ça." Tandis que moi… J'ai appris toutes mes formules, comme ça pour pas avoir à redémontrer à chaque fois, ce genre de… à faire des démonstrations, quoi! En Math 1400, par exemple, je lui ai dit "Il y a une formule pour cos de ax+b, pour dériver tout ça", il m'a fait "Oui, mais bon, tu peux le démontrer à partir de… de "rond"… en faisant la composée de deux fonctions et tout ça. J'ai dit "c'est vrai." Mais je pense c'est plus facile de retenir des formules que de… surtout pour les dérivées parce que des fois, je crois que si on se trompe de formule, ben, on a pas la même dérivée. Alors c'est pour ça que je préfère retenir des formules, surtout pour y arriver, quoi. »

Ninon, étudiante en informatique

Pour plusieurs, les formules sont donc les briques à partir desquelles s'échafaude leur savoir mathématique et qu'il convient d'agencer savamment, un peu comme les pièces d'un puzzle, lors de la résolution de problèmes.

« Moi, ce que j'aime c'est quand on a appris toutes les formules et qu'on fasse un problème synthèse, qu'on mixe ça dans un, et qu'on essaye de mélanger ça, de chercher comment appliquer les formules dans le bon ordre. »

Mark, étudiant à Polytechnique

La recherche du « *bon ordre d'application des formules* » révèle ainsi une centration sur la démarche, sur la procédure, et non sur les concepts mathématiques. L'analyse des productions permet d'observer aussi chez Michel une manifestation subtile d'une telle centration sur la démarche : dans le problème d'examen du cours d'optimisation qui demandait de trouver un maximum (Annexe F, Problème H-4), il écrit :

> *On trouve un point stationnaire en dérivant* $k(x)$.
> $k(x) = 150\,x - 0{,}50\,x^2 - 60\,x$
> $k'(x) = 150 - 1\,x - 60$
> $k'(x) = -x + 90$
>
> *La dérivée doit égaler 0.*
> $0 = -x + 90$
> et $x = 90$
>
> *On vérifie si c'est un maximum absolu selon la dérivée 2*^{e}.
> $k''(x) = -1$
> *La dérivée 2*^{e} *est* < 0 *pour tout* x , [0,100]
> *Donc la fonction est concave et notre point stationnaire est un max absolu.*

Si le traitement est tout à fait correct et complet, il est intéressant de noter la décomposition en deux étapes de la recherche du point maximum : il ne pose pas directement l'équation à résoudre ($k'(x) = 0$) applicable au point maximum ; il paraît davantage procéder selon une recette : on dérive d'abord et on met le tout à zéro ensuite.

Sur le plan de la rétention, si l'approche procédurale est efficace à court terme en permettant une performance honorable et encourageante aux examens, ses mérites sont plus discutables à long terme. Geneviève est la première à en témoigner, elle qui a momentanément perdu contact avec les calculs algébriques dans le cadre de sa formation technique et qui aujourd'hui trouve laborieuses les retrouvailles dans son cours d'optimisation:

> *« J'avais plus de facilité au secondaire, ou encore au début de mon cégep, à faire ça des simplifications algébriques parce que j'étais toujours là-dedans puis c'était rien que… Mais depuis… Là, on en fait un peu puis des fois, puis j'ai de la misère!… Les lois sur les exposants, ça, ça va; mais les "log", les "ln", je me souviens pas du tout !… Puis j'étais capable de le faire avant! C'est fâchant, là,*

mais j'oublie. Mais c'est peut-être parce que je l'ai pas assez pratiqué, c'est comme loin, là... C'est sûr ça me revient, tranquillement pas vite... »

Geneviève, étudiante aux HEC

Il est intéressant de noter sa rectification : ce n'est pas avec les « *lois* » des exposants qu'elle dit avoir des problèmes, mais avec celles des racines et des logarithmes. On voit donc les limites qu'il y a à «*faire des maths sans vraiment toujours comprendre d'où ça vient* »...

François, qui lui aussi a délaissé quelque temps les mathématiques apprises au secondaire, s'est heurté à des problèmes de rétention avec les même concepts, même si, nuance intéressante, il parle de *propriétés* plutôt que de *lois*, témoignant ici d'une certaine ouverture à l'approche déductive :

« Juste des concepts niaiseux comme les logarithmes, les propriétés des logarithmes, je m'en souviens quasiment pas... là, je m'en souviens, mais avant ça, il a fallu je revienne puis je coure... »

François, étudiant en informatique

C'est d'ailleurs François qui, en informatique, commet le plus d'erreurs d'intervention, après avoir arrêté les mathématiques pendant trois ans. Même si aujourd'hui, il manifeste un intérêt particulier pour le raisonnement mathématique qui lui vient de son expérience des applications informatiques, il s'est longtemps confiné à une forme particulièrement réductrice de l'apprentissage des mathématiques.

« Honnêtement, avant, je voyais pas grande utilité. Ça a été mon problème longtemps, parce que je faisais mes maths juste pour les passer. Fait que j'arrivais la veille de l'examen, j'étudiais, j'étudiais, le lendemain, je faisais mon examen puis après ça "oups! c'était quoi que j'ai étudié?", j'oubliais totalement. »

François, étudiant en informatique

En se limitant à mémoriser pour l'examen, ses compétences d'intervention ont donc été mises à rude épreuve lorsqu'il a recommencé à faire des mathématiques, après sa période d'arrêt.

« Ça faisait trois ans déjà que j'avais pas touché à des mathématiques, puis là, j'arrive avec 103 et 105, et... il y en avait! J'en avais quatre jours par semaine. La première semaine, là, je me fermais les yeux, puis mon cerveau partait. Il calculait, lui là: "calme-toi!" C'était infernal. »

François, étudiant en informatique

Si Charles ne voit pas d'inconvénient à gagner du temps en utilisant directement les formules enseignées, cela ne l'empêche pas de chercher à comprendre :

« Tout est facile un coup que tu l'as conceptualisé. Toutes les mathématiques qui sont à venir sont tout le temps difficiles. Au début. »

Charles, étudiant aux HEC

Même s'il a connu lui aussi une période d'arrêt de quelques années en mathématiques, il s'en sort bien dans les calculs, ne commettant pas plus d'erreurs d'intervention que la moyenne. Son retour aux mathématiques dans le deuxième cours calcul différentiel et intégral (203) s'est assez bien passé, à l'exception de l'utilisation du concept de « limite » pour lequel son apprentissage antérieur s'était résumé à la mémorisation des cas et des procédures associées :

« Ça faisait cinq ans j'avais pas fait de sinus-cosinus, mais quatre ans que j'avais fait mes 103. Puis, qu'est-ce que j'ai trouvé, que j'ai eu plus de misère, ça a été les limites, chose que j'ai faite en 103 puis je trouvais ça super facile, sauf que... Parce que les limites, c'est que tu dis: "Si c'est limite de ça, tu vas faire ça. »

Charles, étudiant aux HEC

Michel, Mark et Ninon qui manifestent une forte orientation procédurale dans leur apprentissage des mathématiques mais qui n'ont pas eu à souffrir de période d'arrêt dans leur pratique mathématique, commettent très peu d'erreurs d'intervention (voir section 5.1). Il faut cependant ajouter qu'ils s'arrêtent ou se trompent plus souvent en début de résolution, dans les phases d'analyse et de planification, là où interviennent davantage les autres compétences.

5.2.4 Liens avec les compétences d'explicitation

Sans aller jusqu'à succomber à l' « *illusion langagière* » dénoncée par Bkouche, Charlot et Rouche (1991) qui conduirait à réduire les objets mathématiques à des définitions et à confondre le respect des procédures logiques avec le raisonnement, il faut reconnaître que le développement d'une certaine maîtrise de différents langages (symbolique, numérique, graphique, naturel) et du passage de l'un à l'autre est essentiel à la compréhension des mathématiques et a fortiori à leur application.

> *« Comment tu peux savoir que t'as compris?... C'est que tu vas comprendre exactement l'énoncé, tu vas savoir de quoi il parle. C'est comme parler en anglais, je pense. Au début, ma sœur, elle écoutait ses émissions en anglais, je comprenais absolument rien; puis là après ça, les mots font du sens... Je pense c'est ça, de quoi il parle prend sens. C'est pas juste un 3 avec un x, tu vas savoir, tu vas comprendre que ça, comme, mettons, la dérivée, ben tu vas savoir que c'est la tangente. »*
>
> Charles, étudiant aux HEC

Dans l'utilisation des langages, on retrouve à nouveau des traces de l'enseignement procédural des mathématiques ; elles se manifestent ici par l'importance accordée à la manipulation symbolique. Ninon en donne une démonstration éloquente en expliquant le concept de *barycentre* qu'elle a vu en Terminale :

> *« Euh, barycentre, c'est... Ben je connais pas la vraie définition... Je me rappelle des formules. C'est-à-dire que si il y a un point... Deux points? Le barycentre de... Faut mettre des coefficients... Bon, d'un point A et B. Supposons G barycentre de A 1,B 2, c'est-à-dire que GA + 2 GB est égal au vecteur nul et après, ben, tu... on se débrouille pour trouver le point, où le placer, quoi. »*
>
> Ninon, étudiante en informatique

De même, Fabienne explique le plaisir qu'il y a à effectuer des simplifications algébriques, en « *annulant au dénominateur* » et en « *mettant au numérateur* » :

> *« Bon, t'as une racine au dénominateur, on multiplie ça par une racine sur une racine, tout se simplifie facilement. Là, j'ai ma formule, j'avais 1+ i en bas, mais si tu multiplies, fois 1+ i par 1+ i , j'annule au dénominateur, fait que je me retrouvais avec juste un i ou quelque chose comme ça. Je le sais plus si en 105 on le faisait, mais je sais qu'en intégration, on en faisait, t'avais souvent des*

> *radicaux en dénominateur puis fallait que t'ailles annuler ça puis les mettre au numérateur. »*
>
> Fabienne, étudiante aux HEC

Le *concept* peut donc être réduit à son *symbole*, qui devient alors la réalité « *concrète* » à manipuler.

> *« En 536, il y avait pas beaucoup de problèmes à développement. C'étaient plus des problèmes concrets, là, tu sais, comme "écrire la formule sous forme canonique", là, des choses de même. »*
>
> Mark, étudiant à Polytechnique

Ainsi, pour certains, la recherche de racines se réduit à « *calculer les x* ». Fabienne évoque sur ce mode l'utilité de l'apprentissage de la formule pour calculer les racines des fonctions quadratiques :

> *« À prime abord, ce que j'ai vu en 436, on le voit encore à l'université. C'est la base, pas mal. Ben, par exemple, mon prof l'appelait la Grosse Bertha, la formule pour aller chercher les x… »*
>
> Fabienne, étudiante aux HEC

De même, Helga explique l'usage de la formule de Newton-Raphson, pour calculer de façon numérique et itérative les racines d'une fonction dont on connaît la dérivée :

> *« C'était pour calculer le x, là… C'est ça. »*
>
> Helga, étudiante à Polytechnique

et nous renseigne sur ses préférences en mathématiques en substituant au calcul différentiel et à l'algèbre leur « équivalent » symbolique :

> *« J'aime travailler avec x, y. Puis moins avec les i, les j, les k… »*
>
> Helga, étudiante à Polytechnique

Hughes décrit avec force symboles le contexte dans lequel il a eu à faire des preuves en algèbre vectorielle et linéaire (105), ayant tout oublié des objets mathématiques auxquels ces symboles se rattachent :

> *« Il y avait... les propriétés, mettons, des « plus » avec des « cercles », puis des « fois » avec des « cercles », l'associativité, puis il fallait prouver ça... En tout cas, c'est flou, mais je sais que j'ai déjà prouvé ça. Puis il y avait une autre chose... c'était une figure, avec des vect... ben des lignes, des segments de lignes, puis il fallait, mettons AM = AC + CA + ... en tout cas, il fallait prouver ça, ou telle longueur est la moitié de l'autre, des choses comme ça... »*
>
> Hughes, étudiant en informatique

Sans doute y a-t-il là les effets de l'apprentissage de formules développé au secondaire, où l'accent était mis sur la mémorisation de leur expression symbolique :

> *« Ben parce que au secondaire, on apprenait les choses par cœur, on n'avait pas les formules avec nous... Et c'est ça, je devais comme plus me concentrer à apprendre comment la formule est écrite que comment elle est appliquée, ce qui m'énervait un peu. »*
>
> Mark, étudiant à Polytechnique

> *« Moi, j'ai été trop longtemps à vivre sur la fonction du bourrage de crâne, parce qu'on te donnait la formule, puis t'appliques la formule, puis c'est ça. "Ouais, mais ça sert à quoi?", "Ah, c'est pas dans le cours!". Ils nous disaient "Ah, vous allez voir ça au cégep ", "Ouais, mais on apprend pas plus à le comprendre!" »*
>
> Fabienne, étudiante aux HEC

Cette centration sur le symbolique permet par ailleurs d'occulter ce qu'on n'a pas compris, c'est-à-dire le *sens* qui pourrait se cacher derrière ce langage. On peut ainsi se limiter à viser une cohérence interne, en reproduisant dans une langue étrangère une régularité qui nous a été imposée comme une loi.

> *« Parce qu'avant, c'était plus "bon, j'applique quelque chose que je comprends pas nécessairement, ça va donner une réponse." »*
>
> Michel, étudiant aux HEC

> *« Si je comprends, je vais expliquer un petit peu plus. Ou je fais un examen, et je suis capable de détailler en écriture. C'est pas juste le calcul. Sinon, je vais pas m'avancer à dire des choses que je sais je vais me tromper. Mettons j'arrive à une réponse mais je suis pas trop sûr de ma démarche, je vais pas écrire des choses en plus… »*
>
> Hughes, étudiant en informatique

Et l'on va jusqu'à conclure à la compréhension dès lors qu'on sait ce qui se cache derrière chaque symbole associé à l'utilisation d'une formule :

> *« Quand est-ce que je sais que j'ai compris? Disons que je prends une formule, quand je peux vraiment comprendre ce que signifie chaque variable… et puis quand je sais ce que ma réponse signifie. C'est sûr qu'une réponse, c'est juste un chiffre, mais quand je suis capable de comprendre, de voir, qu'est-ce qu'elle veut dire cette réponse-là, puis de quelle façon les variables peuvent l'affecter. »*
>
> Michel, étudiant aux HEC

On remarquera au passage l'emploi à contresens du mot « chiffre », témoignant du peu de cas fait du vocabulaire exact dans la formation générale en mathématiques ; les professeurs d'université sont d'ailleurs conscients du problème et choisissent de suppléer aux manques en apportant des précisions dans la rédaction d'énoncés de problèmes, comme on peut l'observer dans l'énoncé du problème I-3 de l'examen final du cours d'informatique (Annexe F) :

> *« Note : il existe 10 chiffres différents : 0, 1 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 »*

Or, l'établissement de liens entre les différents langages constitue une première façon de retrouver le sens derrière le symbole. Le langage graphique est souvent utilisé à cette fin car il donne à voir. Ainsi, Helga et François ont apprécié dans leur cours 203 le fait de pouvoir *voir* par le graphique le sens et l'utilité de l'intégrale :

> *« Ben, déjà là que c'était pas un cours d'algèbre, ça me plaisait plus. Des intégrales, des aires sous la courbe… Parce que j'arrivais à comprendre pourquoi on faisait ça. C'est ça que j'aimais, je le voyais, puis ça, ça m'aidait à comprendre. »*
>
> Helga, étudiante à Polytechnique

« Comme une preuve que j'ai souvent trouvée qui était bien faite, c'est les preuves qui ont rapport aux intégrales, justement, ok, que c'est une surface. Si t'es capable de t'imager ça, c'est plus clair. »

François, étudiant en informatique

De même, Geneviève a apprécié la composante graphique du premier cours de calcul différentiel et intégral (103) qui en a favorisé la synthèse :

« Ce que j'avais trouvé le fun, c'est que toute la théorie qu'on a ramassée, à la fin, je me rappelle, on faisait des graphiques, puis telle affaire de l'équation, ça voulait dire telle affaire dans le graphique : les maximums, les minimums, la concavité, convexité... J'avais été bien impressionnée par ça!... Fait que ça m'est revenu très vite en Optimisation parce que j'avais aimé ça. »

Geneviève, étudiante aux HEC

Quant au langage naturel, on peut sans doute affirmer qu'il est sous-utilisé dans l'apprentissage des mathématiques, si l'on fait exception des interactions en classe. Lucie, qui a une facilité et un intérêt pour le français, choisit d'investir beaucoup d'énergie dans sa prise de notes pour refléter au mieux le discours et les attentes du professeur (Brousseau, 1998), à défaut d'en comprendre le sens en classe :

« Souvent le prof, il va dire une phrase, tu vas la noter, puis là, tu vas relire, tu dis "ah oui, oui, oui, oui, ce qu'il disait, là, oui, c'est ça! c'est ça!..." Tu sais, tu vas faire le lien. J'écris pas mot à mot tout ce qu'il dit, mais je porte attention à ce qu'il dit puis à son intonation. Tu sais, souvent, les profs, hein, c'est dans leur intonation qu'il disent... Là, tu notes, petit nuage, ok, petite flèche, petite étoile, tu sais, t'as ton petit code... »

Lucie, étudiante à Polytechnique

Le recours au langage naturel dans l'expression des problèmes et des solutions attendues permettrait aussi de se libérer momentanément des nombres et symboles qui peuvent masquer, ou même entraver, la compréhension véritable, au point où l'on ne peut juger soi-même de sa compréhension.

«Quand est-ce que je sais que j'ai compris? Quand j'arrive à répondre à une question, pas une grosse question avec plein de chiffres dedans où tu peux te mélanger avec les chiffres, une question juste comme pour dire l'essentiel, en une

ligne. Juste pour dire que si tu raisonnes correctement, ça veut dire que t'as compris. »

Alexandre, étudiant à Polytechnique

« *Je lis la preuve, généralement, puis souvent, je la comprends pas d'un coup... Des fois, il y a des détails que je trouve stupides, je passe dessus, c'est pas grave... Moi, je vais prendre mon théorème puis là, je vais le traduire en mes mots, puis là, je vais le comprendre, je vais comprendre la preuve, je vais comprendre toute la signification qui va derrière ça. Des fois, c'est souvent ça, hein, une preuve, quand tu te l'expliques toi-même dans tes mots: "Mon Dieu! c'est tellement logique! Pourquoi ils ont fait un théorème là-dessus!"* »

François, étudiant en informatique

Mais pour espérer atteindre une précision mathématique avec le langage naturel, il faut redoubler de rigueur dans le choix du vocabulaire et de la syntaxe. Or, l'approche procédurale n'a pas toujours accordé une grande importance au vocabulaire mathématique et aux définitions, leur préférant les symboles et les formules qui combinent économie dans la forme, non-ambiguïté et efficacité dans l'exécution d'exercices.

« *Ben, on nous donne une définition formelle, pour nous la donner, je pense, hein? Et puis après, sinon, c'est que des trucs de calculs! C'est-à-dire que la définition formelle... par exemple, on nous a dit par exemple "limite"... "la dérivée c'est la limite quand h tend vers 0" et tout ça... En fait, ça on l'utilise jamais, c'est juste pour savoir; surtout dans les exercices, tu dois jamais utiliser ce genre de chose, t'as toujours une formule pour démontrer.* »

Ninon, étudiante en informatique

Si l'on ne fait pas usage des définitions comme « *instruments pour raisonner* » (Rouche, 1987), cela pourrait expliquer pourquoi chez François, *comprendre* une preuve consiste avant tout à décoder le langage mathématique en « *passant par-dessus les détails* » qui garantissent la rigueur du raisonnement.

Par ailleurs, la responsabilité de problèmes liés à l'utilisation du langage naturel ne peut incomber entièrement à l'apprentissage des mathématiques. La plupart des étudiants qui éprouvent des difficultés langagières en mathématiques en ont aussi éprouvées dans les cours de français, notamment au collégial où ils étaient confrontés à une nouvelle rigueur dans l'usage des mots.

« Mon vocabulaire des fois va être trop simple… C'était là, je te dirais, plus ma difficulté, mais c'était pas tant au niveau orthographe. Orthographe en général, c'était correct. »

Charles, étudiant aux HEC

« En français, j'ai toujours été très forte. J'ai toujours été une génie en orthographe. Au primaire, c'était "A", "B" quand j'étais vraiment fatiguée. Puis au secondaire, j'ai eu une note de mon école, comme quoi je pouvais citer ça en référence… Depuis le cégep, j'ai été moins forte. Les profs aiment pas mes mots, ils disent qu'ils verraient plus un mot à la place de l'autre, que j'ai des troubles de français… »

Fabienne, étudiante aux HEC

« Le français, j'ai toujours détesté ça. Puis je déteste ça encore! Ben surtout rédiger des… ou la compréhension de textes, ça aussi j'ai de la difficulté. L'orthographe, ça allait, oui. Les dictées, ça allait bien. »

Helga, étudiante à Polytechnique

« J'ai jamais été fort en français. Malgré qu'au secondaire, on a m'a mis dans un groupe d'enrichi en français, puis dans ce temps-là, le prof, il était pas trop appliqué dans les règles de grammaire parce que tout le monde était bon en français, fait que moi, j'ai jamais appris à avoir une bonne base en français… »

Mark, étudiant à Polytechnique

Il n'est donc pas surprenant de constater que ces étudiants manifestent des difficultés au niveau de l'explicitation (voir section 5.1). À l'opposé, Geneviève, Lucie et Zoé, qui se sont distinguées par leurs compétences d'explicitation, témoignent d'un rapport tout à fait différent avec le français. Enfant déjà, Geneviève montrait un intérêt marqué pour la lecture :

« J'ai toujours aimé le français, j'ai toujours aimé lire, j'ai toujours aimé écrire. Quand j'étais au primaire, je me rappelle, en première année, je suis revenue de la première journée d'école en pleurant parce que j'avais pas appris à lire. Quand j'étais jeune, je disais toujours "maman, lis-moi des histoires". Je me couche rarement sans lire. »

Geneviève, étudiante aux HEC

Au secondaire, Zoé s'intéressait à l'analyse grammaticale. Si sa difficulté à mémoriser lui cause encore des problèmes au niveau de l'orthographe, son intérêt pour la logique l'avantage sur le plan grammatical :

> *« J'étais bonne en grammaire, disons... Des fautes d'orthographe, ça j'en fais... Pas de grammaire. Tu sais, des fautes de participes passés, moi, je peux pas en faire, c'est sûr que non, parce que je comprends comment la phrase est, puis c'est comme ça... Puis je crois que c'est la façon comment je pense qui fait ça, puis c'est ça qui fait aussi que je suis bonne en logique. »*
>
> Zoé, étudiante en informatique

Lucie évoque le plaisir qu'elle avait en fin de primaire à fouiller dans les dictionnaires pour trouver le *sens* exact d'un mot dans une phrase :

> *« Le lundi matin, le prof donnait une liste de mots de vocabulaire, on en avait comme cinq ou six qu'on connaissait pas, on devait les chercher dans le dictionnaire, donner la définition, construire une phrase qui avait un sens. J'adorais ça, j'avais deux dictionnaires, un Larousse et un Robert, puis je cherchais le mot dans un, je cherchais le mot dans l'autre. Puis, souvent le Larousse était pas complet, t'arrivais le lendemain à l'école, tu disais au prof qu'est-ce que t'avais trouvé comme définition, puis c'était pas ça qu'elle voulait, parce que dans ta lecture, c'était pas ce sens-là; moi, avec mes deux dictionnaires, j'avais toujours le bon sens, j'avais tout le temps tout bon là-dedans, tu sais, j'étais bonne, j'aimais ça! »*
>
> Lucie, étudiante à Polytechnique

Aujourd'hui, elle et Zoé accordent une grande importance à connaître et comprendre les définitions dans leurs cours de mathématiques :

> *« Dans le fond c'est tout le temps ça, c'est tout le temps des définitions, si tu connais pas ta définition, tu sais pas de quoi tu parles, fait que tu peux pas comprendre, tu peux pas faire de liens. »*
>
> Lucie, étudiante à Polytechnique

> *« Les définitions et les propriétés, je trouve que c'est ça qui est important, c'est une base pour pouvoir construire. Dans les cours de math, en général, l'accent était pas mis là-dessus, mais je trouve que c'était l'essentiel... »*
>
> Zoé, étudiante en informatique

Lucie et Zoé ont particulièrement apprécié leur passage au collégial car il leur permettait enfin de découvrir, à travers l'analyse, le *sens* et par conséquent le plaisir de la littérature, au lieu de se cantonner à chercher « la bonne réponse », comme c'était le cas au secondaire :

> *« C'est plate ce qu'on fait en français au secondaire... Les examens de lecture... Ils te font lire des textes, puis il faut que tu les analyses, puis je trouve que c'est un peu bizarre. C'était toujours un peu ambigu ... Genre, un examen, deux ou trois pages de texte, puis là, après, ils te posaient des questions. Il y avait des questions à choix multiples ou des questions à développement. Des fois, on corrigeait les examens en classe, puis on voyait c'était quoi les bonnes réponses, là, la prof, elle nous les disait, puis ... en tout cas, souvent, je me serais obstinée. J'aime mieux le français au cégep. C'étaient des analyses ... Au secondaire, c'est comme si on savait pas trop où ils voulaient en venir, c'est bizarre... Mais au cégep, ça avait du sens, là, ça se tenait; ce qu'ils te demandent de faire, c'est analyser dans une certaine perspective... »*
>
> Zoé, étudiante en informatique

> *« Quand tu fais de l'analyse, admettons, comme au cégep, on avait analysé "Boule de suif" de Maupassant, de comprendre les enjeux de la société dans ce que l'auteur peut écrire, je trouvais ça vraiment... pété!!! J'avais jamais pensé qu'il y avait des gens qui écrivaient des choses puis qui disaient leurs impressions au travers de leur histoire, tu sais! »*
>
> Lucie, étudiante à Polytechnique

Il semble donc qu'il ait été aussi possible de « faire » du français au secondaire en faisant abstraction du sens derrière l'écriture. Le parallèle qui en découle avec l'apprentissage des mathématiques n'est pas le fruit du hasard. Les programmes ont été conçus selon la même philosophie et la même méthodologie par micro-objectifs facilement mesurables. Le développement d'une culture littéraire et d'une analyse en profondeur se prête difficilement à une telle approche et représentait par conséquent une forme d'enrichissement. Il fallait souvent attendre au cégep pour être exposé de façon officielle à la littérature :

> *« Au cégep, je suis tombée dans la vraie littérature, mais avant ça, je lisais plus des romans populaires, des traductions... Au cégep, j'ai découvert Anne Hébert, j'aime beaucoup. Elle, je l'aime beaucoup. Dans les français, j'ai aimé Balzac... Ah! J'en ai un autre, j'ai oublié son nom, c'est mon préféré... Ah... Je vais te donner ses romans, il a fait "L'étranger", il a fait "La peste"... »*
>
> Fabienne, étudiante aux HEC

> *« Des Hercule Poirot, au début du secondaire, j'en ai lus… je lisais deux heures par soir, au début du secondaire. Historiques, j'ai toujours aimé ça, j'en lis pas beaucoup, j'ai lu, au primaire, les deux "Filles de Caleb". Euh… ben, les livres qu'on a lus au cégep, je les ai pas mal tous aimés… Il y avait Poulin… ça j'ai aimé ça. Dans ce style-là… J'en lis pas beaucoup, j'ai pas vraiment le temps, j'ai d'autres préoccupations, mais quand j'ai à lire un livre, j'aime ça. »*
>
> Hughes, étudiant en informatique

Une culture littéraire souvent assez mince pourrait être à la fois un symptôme et une cause du peu de temps consacré à la lecture. Dans ces conditions, il apparaît difficile, voire utopique, de baser le développement des compétences d'explicitation en mathématiques sur les compétences d'utilisation du langage naturel sans engager une action didactique visant un enrichissement du vocabulaire et un accroissement de la rigueur analytique.

5.2.5 Liens avec les compétences d'évaluation

Les compétences d'évaluation sont celles qui permettent de guider, de contrôler et de valider la résolution d'un problème. Ces compétences déterminent entre autres le choix de la stratégie qui sera utilisée et nécessitent une navigation efficace dans le réseau des concepts et méthodes envisageables. Pour assurer l'efficacité d'une telle navigation, il faut pouvoir compter sur une structuration riche et intelligente des connaissances, riche par la quantité de liens valables et intelligente par l'importance hiérarchique accordée aux savoirs-clés, générateurs de savoirs secondaires.

Par la décomposition en micro-objectifs aussi indépendants que possible, l'approche procédurale ne favorisait pas l'établissement de liens entre les connaissances :

> *« Comme je disais, au secondaire, ça se limitait vraiment à voir si t'étais capable d'appliquer une formule. J'aurais aimé ça qu'ils fassent plus de liens avec la théorie, puis à quoi ça pouvait nous servir… Parce que je pense que quand tu fais des liens comme ça, tu vas t'en souvenir beaucoup plus longtemps que si tu fais qu'appliquer une formule; après l'examen, tu t'en souviens plus, là. Mais si tu te forces pour faire des liens, puis entre la théorie, puis… ben ça va rester marqué, ça va te marquer plus longtemps. »*
>
> Michel, étudiant aux HEC

Dans ces conditions, il était tout à fait envisageable de réussir ses mathématiques du secondaire sans avoir eu à procéder à une structuration intelligente de ses connaissances. Il suffisait de se laissait guider par la hiérarchie des objectifs, reflétée parfaitement dans le manuel et constituant un contrat sans équivoque de ce qui pouvait être demandé à l'évaluation.

Une des « séquelles » de cette approche se retrouve chez certains étudiants qui limitent la recherche de structure dans leurs cours actuels à la *classification des problèmes* selon la *procédure* à appliquer.

> *« Certaines marches à suivre s'appliquent comme une recette, aussi. Quand t'as un problème typique, t'as trois, quatre étapes à faire, là, c'est quand même... c'est bien structuré, les mathématiques. »*
>
> Geneviève, étudiante aux HEC

> *« Par exemple, des limites indéterminées, ben, je me sers, il y en a 3, je me dis "il y en a 3, ça peut être lesquelles, ah ben, c'est celle-là, celle-là, et celle-là." »*
>
> Ninon, étudiante en informatique

> *« Pour moi c'est important de voir la question puis je sais comment le faire. Mais penser à la question, puis là dire "ah peut-être ça, peut-être ça", c'est ça que j'aimais pas des sciences humaines. Mais en mathématiques, ils te posent la question, tu sais comment résoudre, t'es sûr d'arriver à la bonne réponse. »*
>
> Helga, étudiante à Polytechnique

> *« Moi souvent, mettons qu'il y a une question je comprends pas, je vais fouiller dans mes notes, je vais voir "ah! un exemple! ça ressemble!"; si mon exemple, je le comprends bien, je le saisis, d'habitude, je vais l'appliquer, ça va marcher. Mais juste relire ma théorie, des fois, je vais pas débloquer. Mais si je vois un exemple, "ah! oui! ok!" Ça, ça m'aide beaucoup les exemples. Tu sais, c'est là que mes lumières vont allumer. Puis quand tu fais plusieurs problèmes qui sont semblables puis tu dis "ah oui! ça, ce cas-là, oui je sais", t'appliques ta façon, ta méthode, puis là, prochain numéro, "ah! c'est semblable encore, je sais comment faire". Quand tu te rends compte que ta méthode fonctionne, tu sais que t'as compris. »*
>
> Lucie, étudiante à Polytechnique

La *recherche de la procédure à appliquer* peut donc conduire, comme chez Lucie, à privilégier comme stratégie d'apprentissage une reproduction dans les exercices de ce qu'on a repéré dans les exemples. Si cette approche peut peut-être contribuer au développement d'un raisonnement inductif, elle risque plus probablement de favoriser le développement d'un biais non souhaitable, et contraire au raisonnement déductif : la *généralisation à partir de cas particuliers.*

Zoé, quant à elle, préfère procéder à un travail de structuration non pas au niveau des problèmes et des procédures mais bien au niveau des *concepts*, pour minimiser ce qu'elle aura à mémoriser. Mais cela lui demande un travail non négligeable car le cours est rarement organisé en ce sens, et pour y arriver, elle privilégie l'*analogie* et la *pensée déductive* :

> *« Écoute, les cours, je prenais des notes, puis après, faut que je fasse une synthèse de tout ça, puis que je mette en concepts de... comment je pense. Tu sais, c'est quand même un travail qui demande un petit peu d'effort, là... Tout remettre ça en forme, ça fait des résumés quand même assez condensés, puis là j'étudie ça, puis je sais tout. (...) Trouver c'est quoi la notion la plus importante de toutes... de laquelle toutes les autres découlent... ou si on peut faire des analogies... Puis d'organiser par style d'idées, par champ d'idées, fait que là, tu te rappelles, mettons, trois grandes classifications puis tu sais, t'as juste, trois grandes classifications à retenir puis après, tu te rappelles du reste parce que ça découle de... tu te rappelles de comment c'est organisé, tu te rappelles d'une organisation plus que des choses, là. Des choses, là, tu sais, une liste de choses, comment que tu peux retenir ça?... »*
>
> Zoé, étudiante en informatique

Mais pour bien des étudiants qui ne voient pas de problèmes à mémoriser, il n'y a pas de motivation à procéder à une telle restructuration. En fait, en raison de l'importance accordée à l'évaluation, du reflet qu'elle renvoie et de sa fidélité comme prédicteur de performance aux examens du ministère, on ne sent même pas le besoin de se questionner sur sa compréhension. On se satisfait d'un *jugement extérieur* sur cette compréhension et l'on en est même dépendant, avec la possibilité qui est souvent donnée dans les exercices de pouvoir comparer « sa réponse » avec « la réponse ».

« Puis si c'est la bonne réponse, ben tant mieux, t'es content de toi-même, t'as trouvé la bonne réponse. »

Michel, étudiant aux HEC

« Je sais que l'exercice marche si j'arrive à la réponse. Ça me motive pas à faire les numéros qu'il y a pas de réponse. On dirait je me fie vraiment à la réponse. Sinon, je suis pas sûre de moi-même si il y a pas la réponse. »

Helga, étudiante à Polytechnique

« Quand est-ce que je sais que j'ai compris? Quand j'ai un problème puis j'ai la solution puis j'arrive au même résultat. »

Geneviève, étudiante aux HEC

« Habituellement, je sais que je fais toujours mes mathématiques avec mes réponses. Juste la réponse, pas la méthode. Si ma réponse avec ma méthode aboutit à la sienne, c'est parce que j'ai compris. Habituellement en mathématiques, ils font à peu près cinq, six problèmes similaires, donc si j'ai compris les six, au moins quatre sur les six, je suis obligée de comprendre la méthode. »

Fabienne, étudiante aux HEC

On voit que Fabienne va jusqu'à intégrer des considérations probabilistes dans l'évaluation de sa compréhension par l'obtention de la réponse. Elle considère peut-être que des fautes d'attention peuvent brouiller les cartes, car elle se refuse à voir dans chaque erreur l'indice d'un besoin de revoir la théorie ou sa résolution du problème.

L'utilisation d'un solutionnaire permet de valider non seulement la réponse mais toute la démarche. Lucie s'appuie sur le solutionnaire pour compenser des compétences d'évaluation plutôt fragiles.

« Moi, je sais que j'aime bien ça travailler avec le solutionnaire. Parce que des fois, c'est bien beau d'avoir la réponse mais ce que tu fais, est-ce que ça a de l'allure ?... Ou des fois, juste pour te partir, tu regardes dans le solutionnaire, puis ça va. »

Lucie, étudiante à Polytechnique

Pour Hughes, la possibilité de pouvoir comparer avec la bonne réponse est une condition essentielle pour qu'il prenne l'initiative de faire un exercice ou un problème non imposé.

> *« Je vais pas faire les exercices qui ont pas de réponse à cause que… Mettons je veux faire un test, ça m'intéresse pas de savoir si le numéro, là, je le fais, je veux savoir si je l'ai bon ou pas. »*
>
> Hughes, étudiant en informatique

Il précise toutefois que ce n'est pas le solutionnaire, avec le détail de la démarche de résolution, qui l'intéresse. Uniquement la réponse.

> *« Pas le solutionnaire, la réponse à côté, puis je peux la vérifier après, ça me dérange pas. Je fais toute la démarche, je regarde la réponse, si j'arrive à la réponse, puis que je vois que je comprends, là j'aime ça faire les maths. »*
>
> Hughes, étudiant en informatique

Dans ces conditions, la résolution de problèmes de mathématiques revêt pour lui un caractère ludique qui le motive : il ne s'agit pas tant de *« faire des mathématiques »* (Bkouche, Charlot, et Rouche, 1991), en cherchant à identifier une approche de résolution, que de trouver la bonne réponse, un peu comme dans une énigme ou un quiz où, là non plus, la validation n'est pas à la charge du joueur.

> *« S'il faut vraiment que je me casse la tête puis que j'arrive à la réponse, je vais aimer ça. Que je me casse la tête puis que j'arrive pas à la réponse, ça, je vais moins aimer ça. Une analogie avec les romans, ça serait: tu lis un Hercule Poirot d'Agatha Christie puis tu trouves le meurtrier avant d'arriver à la fin. »*
>
> Hughes, étudiant en informatique

Ce plaisir ludique disparaît pour lui avec les preuves à faire, car « la réponse », la solution à l'énigme lui apparaît moins clairement définie, puisqu'il s'agit de la stratégie dans son ensemble plutôt que de la valeur d'une variable.

> *« J'aime pas les preuves à cause que j'arrive pas aux réponses!!! (rires) Y a pas de réponse toute faite. Tu sais c'est quoi la fin, tu sais c'est quoi le début, faut juste que tu trouves entre les deux. Mais j'ai pas l'impression d'arriver… je sais que c'est utile, mais j'ai pas l'impression d'arriver à quelque chose quand j'ai fait la preuve. C'est à cause que les preuves, t'arrives à la réponse, puis t'es pas*

sûr que ta preuve est bonne. Avec les calculs, si t'arrives à la réponse, tu sais que t'as la bonne réponse. »

Hughes, étudiant en informatique

Comme il ne perçoit pas le sens de la démonstration et qu'il ne peut juger de sa valeur, il peut difficilement en organiser la structure :

« Je le sais pas par où commencer. Je vois un problème, je bloque. Je lis la question. Je prends les mots qui sont importants, les définitions, je lis les définitions... Je le sais pas par où commencer. »

Hughes, étudiant en informatique

Il est vrai, comme nous l'avons évoqué en 5.2.2, que la notion de preuve, qui pourrait contribuer à lier et structurer les connaissances mathématiques, s'accommode difficilement d'une approche procédurale de l'apprentissage axée sur le découpage en éléments indépendants, la mémorisation, l'exécution et la régulation par la vérification de la réponse. Mais ceux qui ont adopté cette approche dans leur apprentissage des mathématiques chercheront à l'appliquer dans leurs premiers rapports avec la preuve, en faisant appel aux stratégies qui paraissaient fonctionner auparavant : mémorisation et classification des problèmes selon la méthode à utiliser.

« Le prof nous disait "Ok, la semaine prochaine, il y a un examen, vous devez savoir ces preuves-là, on va en demander une ou deux là-dedans." Toi, t'apprenais toutes tes preuves par cœur. Si tu les apprenais, t'avais une chance d'avoir au moins dix points dans ton examen. »

Lucie, étudiante à Polytechnique

« C'était vraiment, là "ok, tel genre d'équation, c'est une preuve par ça puis après une preuve par ça, là; pour tel genre d'équation, c'est une preuve..." - je me souviens juste "par induction", les autres, je m'en souviens pas là... »

Geneviève, étudiante aux HEC

Ce n'est certes pas avec de telles stratégies d'apprentissage que les compétences mathématiques peuvent bénéficier de la structuration des connaissances apportées par la preuve.

François regrette que la preuve ait été absente de sa formation au secondaire et attribue à un enseignement orienté formules les difficultés qu'il éprouve aujourd'hui en mathématiques :

> *« Au lieu de faire comprendre le théorème, vraiment, puis comprendre la preuve qu'il y a derrière, comme moi, je pense qu'ils devraient faire, c'est "ok, t'as c'te formule-là, applique-moi-la, définis-la-moi, là, jusqu'à temps que tu la comprennes, tu sais, comme, pratique-la". C'est pas bon ça, parce que tu te souviens pas de toute façon après. Fait que si tu comprends vraiment la logique qu'il y a derrière un problème, c'est beaucoup plus intéressant. Sinon, c'est plate, là, c'est juste "écris tes exercices", puis, non, je suis pas capable de faire ça, moi. C'est une de mes faiblesses, en maths, à cause de ça. »*
>
> François, étudiant en informatique

Par ailleurs, son manque d'exposition à la preuve n'est sans doute pas étranger aux difficultés qu'il connaît aujourd'hui à en rédiger et qui font que ses productions témoignent, comme celles de Hughes, de lacunes importantes dans la *planification de la stratégie*, dans la rigueur du *raisonnement déductif*. Chez François, on retrouve notamment une tendance à *généraliser à partir de cas particuliers* et à surévaluer l'exemple. Quitte à pécher par ce que nous dénonçons (!), nous allons en donner un exemple.

Dans un problème de l'examen final (voir Annexe F, Problème I-4), il fallait démontrer que pour un sous-ensemble A quelconque comportant 10 éléments de l'ensemble des 50 premiers naturels non nul, on pouvait trouver deux sous-ensembles différents de 5 éléments dont les sommes des éléments sont identiques; l'idée était ici d'utiliser dans la preuve le principe des tiroirs de Dirichlet (aussi connu sous le nom du « Pigeonhole Principle »). Au-delà d'une erreur d'explicitation dans la confusion des termes « différents » et « disjoints », François a choisi comme stratégie de preuve de définir un sous-ensemble A à partir duquel il a construit des sous-ensembles qui vérifiaient la propriété à prouver :

> *Supposons que A comporte au moins 2 sous-ensembles différents de 5 éléments dont les sommes des éléments sont identiques.*
>
> *Puisque* $|A| = 10$, *et qu'il s'agit d'ensembles différents*
> *et notons* X_1 *le premier sous-ensemble et* X_2 *le deuxième sous-ensemble.*
> *Alors* $X_1 \cup X_2 = A$ *et* $|X_1 \cup X_2| = 10$

ex. 49 + 1 + 48 + 2 + 47 = 147
46 + 4 + 45 + 8 + 44 = 147

- 5 nombres différents
- 2 ensembles
- sommes des éléments des 2 sous-ensembles identiques

Mais les difficultés d'évaluation des étudiants dans l'élaboration de stratégies ne se manifestent pas que dans le contexte où ils ont à rédiger une démonstration. Elles peuvent être présentes dès que le problème ne peut être associé immédiatement à une procédure de résolution, aussi bien dans un contexte appliqué (dont nous donnerons des exemples en 5.3 lorsque nous étudierons le rapport à l'application) que dans un contexte théorique. Sur le plan théorique, certains problèmes de mathématiques au collégial se distinguaient déjà de ceux du secondaire par leurs exigences plus élevées en termes d'analyse et de raisonnement.

> *« Au début, en 103, je comprenais pas beaucoup. Je trouvais ça vraiment dur. C'était de l'analyse, pas mal. T'avais une équation, fallait trouver les courbes, les maximums, les minimums, puis tout ça... Fallait trouver le rapport, puis au début, je voyais pas trop... Quand c'étaient des exercices comme "trouvez la dérivée de ça", j'étais bon. Mais quand qu'ils demandaient des fois des relations, j'étais pas trop bon... »*
>
> Alexandre, étudiant à Polytechnique

> *« En fait, il y a surtout l'aspect de la compréhension qui est entré en jeu à cette époque-là. Là, j'ai commencé à me soucier de la compréhension, donc j'ai plus saisi. (...) Les suites et la combinatoire, je pense ça prend quand même du raisonnement aussi pour faire ça, même si t'as une formule habituellement, là. »*
>
> Michel, étudiant aux HEC

Ce qui en déroutera plusieurs, c'est que la discipline de travail qui semblait les avantager au secondaire ne leur sera là d'aucun secours. Et comme l'approche procédurale a eu pour effet de créer une dépendance chez certains étudiants à l'égard d'un jugement extérieur sur leur compréhension, on n'est pas toujours outillé pour repérer ce qu'on ne comprend pas.

> *« C'est qu'il y a des gens qui sont là, dans la classe, qui ne prennent aucune note, qui ne font aucun exercice, qui ne posent aucune question, puis ils ont 90 à l'examen. Toi, tu prends des notes, t'étudies 20 heures avant l'examen, puis t'as 60, là. J'ai trouvé ça ben décourageant! »*
>
> Geneviève, étudiante aux HEC

> *« Ma première session, c'est vrai que je me suis forcé pour avoir des bonnes notes, mais... je voyais que le fait d'étudier énormément ou moyennement, je revenais toujours à la même note, je comprenais pas. »*
>
> Mark, étudiant à Polytechnique

Contrairement à certains qui auront du mal à décrocher de leur rôle d'exécutant dans leurs rapports avec les mathématiques, Alexandre fera de son premier cours de calcul (103) l'élément déclencheur d'un processus d'affranchissement à l'égard des effets de l'approche procédurale.

> *« Moi au début, je m'y prenais pas de la bonne façon. Premier examen, je me rappelle, j'essayais d'apprendre par cœur les choses, " s'il y a telle question, j'essaie de faire telle méthode", parce que dans la majorité des cours, ça a fonctionné. Je disais "s'il y a telle question, je fais telle chose, telle question, je fais telle chose" mais là, ça marchait plus parce que aussitôt qu'il changeait un petit intervalle, ou intervalle fermé-ouvert, ça changeait complètement la chose, puis moi, ben je... ça m'a comme dit "bon, ben là, va falloir que je comprenne la matière à la place de juste l'apprendre, va falloir que je comprenne la matière". (...) Je trouvais ça vraiment dur, mais c'est peut-être ça qui m'a réveillé, là, qui m'a peut-être dit "ben là, va falloir que tu te forces puis que t'essaies de comprendre la logique, là, pas juste appliquer ça de même." »*
>
> Alexandre, étudiant à Polytechnique

Ce processus a été suspendu dans le deuxième cours de calcul (203) car Alexandre y a retrouvé le cadre familier d'apprentissage où il pouvait à nouveau se limiter à mémoriser et appliquer des techniques de calcul.

> *« 203, j'ai comme pris un break, parce que c'était plus ça du tout; il y avait aucune analyse dans ce cours-là, de ce que je me rappelle en tout cas. Je trouvais ça facile, fait que j'aimais ça. »*
>
> Alexandre, étudiant à Polytechnique

Mais dans le cadre du dernier cours de calcul (303) qu'il avait choisi comme cours à option, la nécessité de comprendre s'est à nouveau imposée, et ce second appel à l'analyse fut moins déstabilisant que le premier.

> *« 303, je trouvais ça très difficile, mais j'aimais ça. »*
>
> Alexandre, étudiant à Polytechnique

Alexandre a réussi à travers ce cours à confronter ses habitudes développées au secondaire. Pour développer sa *compréhension*, il a d'abord choisi d'investir dans la *lecture*.

> *« Je mettais plus de temps à comprendre, justement, à lire mes notes. Tu sais, au début, je faisais mes exercices, je lisais pas vraiment. Je lisais mes exercices, je vérifiais un exemple, je le refaisais. Tu sais, je copiais un peu l'exercice. Puis là je pensais: "je l'ai fait!" Tu sais: "je l'ai fait!"... Je disais pas "j'ai compris!", je disais "je l'ai fait!"... Tu sais, à c't'heure, j'essaie de dire "bon, je l'ai compris, je vais passer à l'autre."»*
>
> Alexandre, étudiant à Polytechnique

S'il se sert encore des exercices pour repérer les cas et les approches possibles dans son cours actuel de mathématiques, le niveau d'analyse requis pour les résoudre lui rappelle constamment qu'il doit viser une compréhension qui va au-delà de la simple association :

> *« Maths, c'est parce qu'il y a une structure, aussi, à faire, là. Tu sais, là c'est vraiment dans tel cas qu'est-ce que j'applique, dans tel cas qu'est-ce que j'applique. C'est un peu plus ça, je trouve, en maths. En faisant les examens, ou en faisant les exercices, je me rends compte "ok, s'il arrive telle chose, faut je fasse ça" ou "tel cas, là j'essaie"... En même temps, ça me pousse à comprendre un peu plus, là, tu sais. Je fais pas juste associer, là. Je fais pas juste dire "s'il y a telle question, je fais ça", tu sais. Au début, je pensais c'était comme ça. Au début de cette session. J'ai fait un examen de l'année passée, là j'ai dit "bon, parfait, il y a tel genre de questions". Je réessaye l'autre, puis j'avais pas aucune réponse de bonne. J'avais vraiment essayé d'appliquer ce genre de questions-là... Ça marche pas du tout! Fait que là j'ai dit "bon, ben, je vais comprendre!" »*
>
> Alexandre, étudiant à Polytechnique

Pour Zoé qui avait pris l'habitude de structurer les concepts selon une démarche déductive, les mathématiques du collégial n'ont pas représenté une difficulté particulière au niveau de la compréhension. Si elle a trouvé faciles les cours obligatoires de calcul et d'algèbre

(103, 203 et 105), elle a bien apprécié le nouveau défi que représentait le cours *Compléments de mathématiques* (101) :

> *« C'était quand même plus difficile que le secondaire. Je trouvais que c'était le fun, là … Ça demandait un petit effort … »*
>
> Zoé, étudiante en informatique

Cependant elle n'a pas prisé l'orientation plus procédurale du cours optionnel de calcul (303) :

> *« J'ai pas mal aimé mes cours de maths au cégep. C'est juste Maths 303 que… Je trouvais que c'était tout discontinu, là… c'étaient tous des petits bouts pas rapport puis… Faut que tu pratiques puis faut que ça te rentre dans la tête. Puis moi, ça me rentre pas. Tu sais, il y a rien à comprendre, là, il y a pas de concepts… Moi, j'appellerais pas ça de la compréhension. C'est apprendre, c'est pas comprendre. »*
>
> Zoé, étudiante en informatique

Sa volonté de comprendre et ses compétences d'explicitation l'amènent à une plus grande autonomie dans la validation. Elle ne dépend pas du solutionnaire pour juger de la valeur de son raisonnement, particulièrement dans la rédaction de preuves ; elle peut s'appuyer sur les *définitions* et la *pensée déductive* qu'elle a particulièrement développée dans la restructuration de ses cours :

> *« J'ai les définitions en tête. Quand on peut s'appuyer sur les définitions puis quand nos raisonnements découlent directement des définitions, c'est certain que c'est bon. »*
>
> Zoé, étudiante en informatique

De même pour Charles, le passage au collégial n'a pas été trop difficile, car il a pu continuer à miser sur sa compréhension.

> *« J'avais vraiment beaucoup de facilité à conceptualiser, comme les dérivées… Tu sais, comme, il y en a qui vont, qu'il faut qu'il fassent des exercices. J'ai jamais fait ça… 103, j'ai passé à 70, je pense j'ai jamais fait d'exercices, puis j'allais à la moitié de mes cours, l'autre moitié je jouais aux cartes. »*
>
> Charles, étudiant aux HEC

Il apprécie le défi que constitue un problème pour lequel la stratégie de résolution n'apparaît pas clairement a priori, et la fierté qui résulte de l'avoir résolu :

> *« Si tu travailles un peu puis là tu dis "voyons, ça marche pas...", puis après ça, tu dis "ah! tiens! je vais faire ça!", c'est sûr tu vas être plus content de l'avoir accompli. C'est comme avoir franchi, avoir grimpé l'Everest... »*
>
> Charles, étudiant aux HEC

Et en refusant d'exécuter sans comprendre, il cherche à déterminer la *portée* des concepts et des méthodes par le *questionnement* et l'*argumentation.*

> *« Ça m'a pris vingt ans, je pense, à comprendre le principe. Dans le fond, c'est que quand tu vas à l'école, tu devrais pas tout accepter, tu devrais faire l'inverse: tu rejettes tout, puis après, tu comprends pourquoi, tu l'acceptes. (...) Mettons je vais faire un exemple, puis là, je vais lire l'exemple, j'y vais avec les notes, puis là, je dis: "oui mais ça, ça a pas d'allure!" Là, je peux aller voir le prof. (...) Je vais le faire aussi avec mes amis. Normalement, on va être trente à s'obstiner, puis après ça on va comprendre, puis après ça on va dire au prof: "Excusez-moi, est-ce que c'est correct si on dit que ça et ça..." Puis là, il va nous corriger. »*
>
> Charles, étudiant aux HEC

Privilégiant la compréhension des concepts à l'exécution d'exercices et témoignant d'une recherche d'*autonomie* à l'égard du milieu didactique, Zoé et Charles n'ont jamais totalement adhéré à l'approche procédurale. Avec Alexandre qui a réussi à s'en dégager, du moins partiellement, durant ses études collégiales, ce sont ceux qui se sont distingués dans leur groupe respectif au niveau des compétences d'évaluation.

À l'opposé, d'autres étudiants comme Ninon demeurent encore aujourd'hui dans l'attente de l'algorithme qu'on leur fournissait auparavant.

> *« Qu'ils nous mettent, par rapport à un exercice donné, comment on peut le résoudre, de la façon la plus simple, pour que ça devienne un mécanisme. Par exemple, si on arrive à un devoir, comment tout de suite savoir quelle preuve on va utiliser pour démontrer ce théorème. Ça devient une préparation à autre chose. Qu'on soit pas pendant deux heures à chercher: "si je fais cette preuve-là... ça marche pas! si je fais celle-là... ça marche pas!" Et en plus, étant donné qu'on a droit à avoir six, sept preuves, on peut pas toutes les essayer...»*
>
> Ninon, étudiante en informatique

Devant un problème pour lequel elle ne peut identifier rapidement la stratégie à appliquer, Ninon préfère s'abstenir complètement. De tous les étudiants en informatique, c'est celle qui, en réponse aux problèmes, a opté le plus souvent pour la page blanche.

5.2.6 Synthèse

La Figure 9 résume dans un modèle schématique les idées ressorties de l'analyse des influences exercées par l'approche procédurale. Il convient de rappeler que les éléments et les relations qui apparaissent dans ce modèle ont été identifiés par une démarche exploratoire et inductive, à partir des données pour les 12 sujets du niveau qualitatif ; ces résultats demanderaient à être validés de façon plus rigoureuse sur un échantillon plus vaste.

Les « *effets* » associés ont été dégagés en analysant les forces et difficultés des étudiants manifestant dans leur discours une inclination pour une approche procédurale dans leur apprentissage des mathématiques. Ces forces et difficultés ont pu être rapportées en entrevue ou observées en situation de résolution de problèmes. En repérant les caractéristiques particulières du parcours éducatif de ces étudiants et en cherchant à voir si ces caractéristiques ne pourraient pas contribuer à expliquer leur adhésion à l'approche procédurale, nous avons pu identifier des éléments qui paraissent favoriser une telle adhésion et donc l'émergence des effets associés, et leur avons par conséquent attribué le rôle de « *catalyseurs* ».

De façon symétrique, nous avons cherché à identifier des « *inhibiteurs* » qui paraissent avoir freiné ou contrecarré chez certains étudiants les influences procédurales de la formation. Pour ce faire, nous avons accordé une attention particulière aux caractéristiques de l'histoire éducative des étudiants qui, par leur discours, paraissent n'avoir jamais totalement adhéré à une approche procédurale de l'apprentissage ou qui s'en sont détachés.

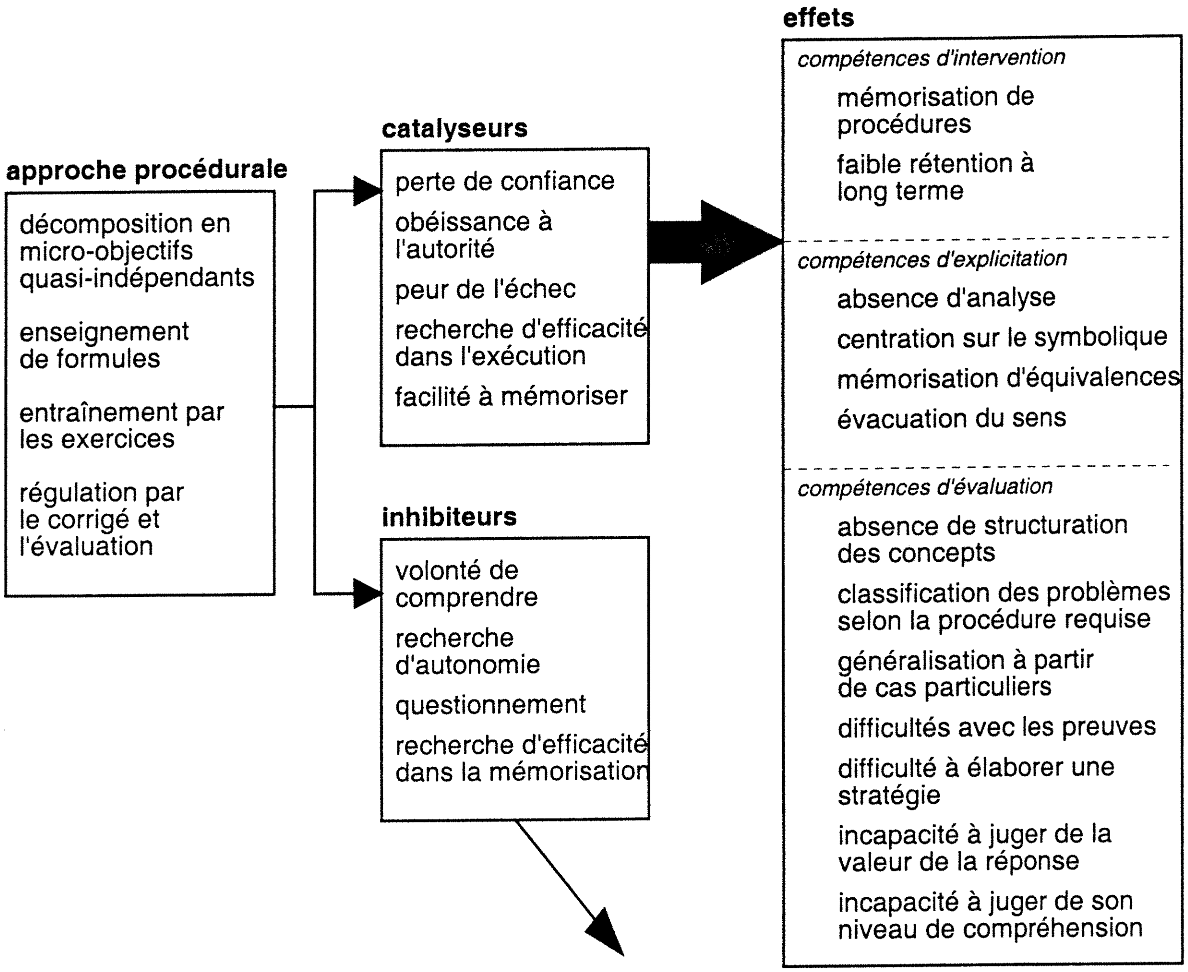


Figure 9 – Effets observés de l'approche procédurale

L'analyse des effets observés de l'approche procédurale nous permet de mieux comprendre les raisons qui font que nous avions détecté et rapporté dans la section 4.6 une corrélation positive importante, dans deux secteurs sur trois, entre l'intérêt pour l'approche procédurale et le nombre d'erreurs d'évaluation commises.

À ce stade, il nous apparaît important de faire ressortir le fait suivant : une bonne performance à des examens orientés selon l'approche procédurale ne constitue pas en soi un indice fiable de la compréhension. Fait plus grave, elle peut constituer un leurre pour l'étudiant.

5.3 Le rapport à l'application

Les étudiants qui participent à cette étude sont tous inscrits dans des programmes dans lesquels les mathématiques appliquées occupent une place privilégiée, voire déterminante. Nous chercherons à identifier ici comment le niveau de développement du rapport à l'application a pu agir sur les compétences en résolution de problèmes de mathématiques appliquées.

5.3.1 Perception, motivation et apprentissage

Comme cela a été dit dans les sections 4.3 et 4.4, la plupart des étudiants qui commencent leur formation dans un secteur où l'on applique les mathématiques témoignent d'un intérêt marqué pour l'application et presque tous arrivent au constat qu'elle était en général absente de leur formation mathématique. D'où leur vient alors leur intérêt pour l'application des mathématiques ? Comment s'est-il développé ? Y a-t-il eu des occasions où l'application était présente en mathématiques ? Cette section apporte quelques réponses.

5.3.1.1 Dans le cours de mathématiques

Aux dires des étudiants, l'application a été peu présente dans les cours de mathématiques qu'ils ont suivi au secondaire et au collégial.

> *« C'était application de formules, un petit peu de trigonométrie, un petit peu d'algèbre... C'est sûr que les contextes... ils essayaient peut-être des fois, comme dans un problème, de faire allusion à des vrais cas, mais je pense qu'en bout de ligne, là, ça se limitait à l'école puis pour moi, ça sortait pas vraiment de là. »*
>
> Michel, étudiant aux HEC

Si plusieurs des étudiants disent maintenant regretter que leur formation mathématique n'ait pas accordé davantage de place à l'application, il existe quand même de façon assez répandue une tolérance voire même une acceptation du caractère général et non appliqué de l'enseignement des mathématiques. D'abord, certains reconnaissent aux mathématiques, dans leur forme « *pure* », dégagée de la prise en compte d'éléments externes, arbitraires ou flous, la vertu de contribuer au développement du *raisonnement* et de la *logique*, et que cela-même suffit à leur conférer une *utilité*, supérieure même à un cours plus près de leur nouveau champ de spécialisation.

> *« Ça dépasse pas le champ, avec tes hypothèses puis ta conclusion, c'est bien cerné le champ puis t'es sûr, si tu fais un raisonnement, tu peux être certain, c'est ça que j'aime. »*
>
> Zoé, étudiante en informatique

> *« J'ai pas fait Chimie organique II. Parce que j'avais le choix… j'ai préféré maths à chimie. Je pensais qu'il y aurait plus d'utilité dans la vie… ben pas dans la vie là, mais je dirais dans toutes mes autres matières. Que chimie ça impliquait chimie, mais que maths, ça impliquait tout! Ça a développé ma logique pas mal plus que juste un cours de par cœur de chimie organique, là. »*
>
> Alexandre, étudiant en génie chimique à Polytechnique

Si l'on n'est pas toujours convaincu que la logique soit utile dans la vie (!), on la considère toutefois, au même titre que l'ensemble des mathématiques, comme la base nécessaire à l'apprentissage des autres disciplines, même si, ce faisant, on réduit parfois l'utilité des mathématiques à une utilité scolaire qui n'a que peu à voir avec l'utilité professionnelle:

> *« Mon but en fait, c'est de réussir mes cours, donc… quand je les ai réussis, ben, je suis contente. (…) Et bon, les mathématiques quand même, c'est un peu la base, quoi. Des sciences en fait. C'est-à-dire que si on s'y connaît pas bien en mathématiques, ben pour faire de la physique, de la chimie, pas trop la biologie, mais l'informatique, tu sais, ça va être plus difficile. »*
>
> Ninon, étudiante en informatique

> *« Je crois que les mathématiques, c'est fondamental en génie. Parce que je crois que dans le tronc commun, sans les mathématiques, je pourrais pas passer tous mes cours de physique. »*
>
> Mark, étudiant à Polytechnique

> *« Ça occupe une très grande place, quelle que soit la sorte de mathématiques, algèbre ou calcul. Dans tous les cours que j'ai, on utilise les mathématiques, c'est vraiment la base de tous les cours que j'ai. Si je pense utiliser les mathématiques quand je vais travailler en génie chimique? Non. Non, mais ça me dérange pas de suivre les cours, parce que… j'aime ça en faire. »*
>
> Helga, étudiante à Polytechnique

> *« Les maths, je pense qu'elles s'appliquent plus pour ceux qui veulent aller en finance, ou quoi que ce soit. C'est sûr que c'est bon d'avoir une base en mathématiques, mais pour la comptabilité comme telle, il y en a pas besoin tant que ça. »*
>
> Geneviève, étudiante aux HEC

Ces étudiants, qui sont rendus là où ils sont, ont donc généralement admis l'argument de l'utilisation ultérieure sous-jacent à l' « *approche du congélateur* », et ont même eu l'occasion d'en vérifier la validité.

> *« Ça a tout le temps été utile pour moi puis je considère que c'est utile pour ce que je fais maintenant. Tu sais j'ai jamais fait un cours de math en me disant que c'était inutile comme cours. »*
>
> Hughes, étudiant en informatique

> *« Je pense que sur le coup, j'avais pas nécessairement compris pourquoi on faisait ça. Mais maintenant quand j'y pense, je trouve que c'est vraiment utile. Mais je pense c'est plus arrivée à l'université que j'ai compris. Au secondaire, on voyait pas c'était quoi l'utilité, par exemple, de l'hyperbole, parabole, puis tout ça. Mais arrivés au cégep, on a vu que ça revenait puis on s'en est servi. Dans d'autres matières aussi. Mais même dans un cours de thermodynamique, à un moment donné, c'est revenu. On avait un graphique... C'était une parabole, fait que là, on pouvait voir que c'était ça, on a pris l'équation puis on a joué avec ça. »*
>
> Helga, étudiante à Polytechnique

Pour cette raison, on est prêt à admettre un certain délai avant de voir utilisé ce qu'on a appris en mathématiques.

> *« Moi, ce que j'aime, c'est, bon, j'apprends des choses en mathématiques, je "rush", puis à un moment donné, je finis par comprendre, puis "ah, regarde donc! j'en ai besoin en physique!" Ou des fois ça va être en chimie, aussi, on va apprendre des choses en maths, puis on en a besoin, ça je trouve ça le fun. »*
>
> Lucie, étudiante à Polytechnique

Et en attendant, on se raccroche aux éléments graphiques et géométriques pour donner un *sens concret* et une *utilité* aux concepts appris ou aux formules qu'on manipule :

> *« Je sais que je me souviens au secondaire, quand j'ai commencé, j'avais de la misère avec l'algèbre, je comprenais pas le but. Le prof, il parlait, puis je comprenais pas ce qu'il disait, puis… ça me touchait pas. Puis là en 4, je me suis rendu compte que quand on se sert de l'algèbre, on peut dessiner des graphiques!!! Tu sais c'est pas juste comme 3x + y = 4. On peut faire des graphiques! Tu te sers de ta formule, tu changes tes termes de place, puis ah! mon dieu! ça te donne des dessins!… Mais quand c'est juste des formules, puis des termes, puis des trucs comme ça, ça me dit rien; mais quand je vois une application, ah oui, je trouve ça le fun… »*
>
> Lucie, étudiante à Polytechnique

> *« En tout cas, le prof était génial : il voulait vraiment qu'on réussisse, puis il se forçait pour que ça soit concret. Il faisait des dessins au tableau, puis il voulait qu'on comprenne. »*
>
> Hughes, étudiant en informatique

> *« J'ai trouvé intéressants les calculs de volumes, les calculs d'aires. C'est le premier cours où je me suis dit : "Aie, c'est important les mathématiques, ça sert à quelque chose." En faisant mon 203, j'ai vraiment appris, là, finalement, les mathématiques… que je connaissais rien avant… »*
>
> François, étudiant en informatique

Mais plusieurs se découragent avant d'accéder à l'application. Geneviève a longtemps accepté le caractère abstrait et général de l'enseignement des mathématiques, car il s'agissait selon elle d'un passage obligé avant l'application. Mais elle a atteint un niveau de saturation pendant ses études collégiales en sciences, et s'est sentie soulagée après son changement d'orientation pour les techniques administratives.

> *« Je me suis rendu compte, les maths au cégep, j'étais tannée de faire des maths pour faire des maths. Apprendre pour apprendre, puis ça sert à rien... J'étais vraiment tannée, là, tu sais les deux dernières années du secondaire, tu fais des maths pour faire des maths, t'arrives au cégep : "encore!…" J'ai dit "non, non, je ferai pas encore deux ans d'apprendre juste pour apprendre, là!…" C'est peut-être ça, j'avais besoin de quelque chose de plus concret. Puis je l'ai vraiment réalisé quand je suis arrivée dans les cours pour ma première session, là, j'ai dit "enfin!", là, tu sais, "quelque chose qui va me servir, qui a une utilité quelque part.»*
>
> Geneviève, étudiante aux HEC

Devant la difficulté à en percevoir l'utilité, François avait perdu tout intérêt pour les mathématiques durant ses études secondaires, ce qui l'a conduit à choisir une formation collégiale en sciences humaines sans mathématiques. Il dut alors consentir des efforts considérables de rattrapage lorsque plus tard il voulut s'inscrire à un programme collégial en techniques informatiques et eut à renouer avec les mathématiques. Depuis, il est convaincu de l'utilité des mathématiques à la formation d'informaticien, en particulier pour la conception d'algorithmes efficaces:

> *« Ça apporte une certaine logique quand même dans les programmes, dans la façon de voir les choses puis de calculer les algorithmes. Ça, c'est une chose que je voyais, je lisais souvent dans les livres, ok, ça, c'est un algorithme de type "log", je savais pas c'était quoi, j'ai jamais compris, surtout que moi, en math, dès que je voyais un log, je virais "arghh!" »*
>
> François, étudiant en informatique

Il déplore aujourd'hui qu'on n'ait pas pu l'intéresser auparavant aux mathématiques par le biais d'applications réelles, notamment en informatique.

> *« Si les professeurs pouvaient orienter leurs mathématiques en fonction de ça, vraiment à l'utilité dans la programmation. Parce que généralement, ils vont t'enseigner des concepts généraux, tu vois pas tout le temps l'utilité de ça, puis c'est plus difficile à s'imaginer aussi. Ce qui m'intéresserait finalement, j'ai pas vu ça encore, mais... qu'on soit capable d'utiliser nos concepts directement, de les appliquer "ok, si vous voulez calculer du 3D, ça, ça va vous être pratique, si vous voulez faire ça". Les profs disent tout le temps qu'ils peuvent pas mais... »*
>
> François, étudiant en informatique

Les quelques problèmes d'application couramment utilisés dans l'enseignement secondaire (prolifération des bactéries, taux d'intérêt) lui semblent aller à l'encontre de la motivation souhaitée :

> *« Ou bien, à un moment donné, ils vont décider qu'il y a un bloc qui va être réservé à résoudre des problèmes; c'est pas des problèmes intéressants, moi, je m'excuse, mais calculer le chose exponentiel des bactéries... ou les taux d'intérêt! Tu sais... C'est pas bon, ça là, applique ça à d'autres domaines! »*
>
> François, étudiant en informatique

Avec le recul, plusieurs étudiants en viennent à juger de la valeur d'un cours de mathématiques au regard de l'utilisation qu'ils en font dans leurs cours aujourd'hui. Cette perception peut donc changer selon le secteur d'étude. Le cas du cours d'*Algèbre vectorielle et linéaire* (105) est particulièrement intéressant. D'une part, il est d'abord perçu comme une sorte de discontinuité par rapport au développement de leur formation mathématique depuis la fin du secondaire, i.e. la séquence fonctions-dérivées-intégrales ; par conséquent, sa contribution à la cohésion de l'ensemble qui permettrait de justifier sa présence n'apparaît pas clairement. D'autre part, si l'utilité des vecteurs et des matrices ressort maintenant clairement pour les étudiants de Polytechnique qui en voient l'illustration quotidienne dans leur cours de mécanique, elle est rarement illustrée de façon explicite à l'intérieur du cours 105, en dépit des nombreuses applications fascinantes de ces objets mathématiques : infographie, simulations numériques de systèmes dynamiques, optimisation, etc.

> *« Parce que là, les matrices, bon, je trouvais ça un petit peu plate au début, puis après ça, les vecteurs, c'était comme trop abstrait puis j'en voyais pas la nécessité, quelconque, je voyais aucune nécessité. »*
>
> Charles, étudiant aux HEC

> *« Au cégep, je voyais pas l'utilité de Math 105, mais là, je la vois, puis je sais que pour moi, ça va être super-utile»*
>
> Hughes, étudiant en informatique

> *« J'ai été chercher ça sur le site de Sun, c'est l'API-2D, comment manipuler des images en deux dimensions ... pour faire les translations puis les rotations... Ils utilisent les matrices, un concept de matrices. Fait que là, j'ai vu l'utilité des mathématiques, là, ça devient intéressant. Mais sans ça, c'est quoi des matrices? Ça m'intéresse pas, là... Je commence à appliquer un peu les concepts, fait que là, ça commence à être intéressant. »*
>
> François, étudiant en informatique

Les quelques fois où l'application est abordée en 105, c'est souvent rapidement.

> *« Quand on avait commencé à faire les matrices au cégep, le prof expliquait que c'était ben pratique pour les ordinateurs, puis il en avait parlé comme pendant 5-10 minutes, mais... »*
>
> Lucie, étudiante à Polytechnique

> *« Tu sais, comme les Maths 105 avec les matrices, ils disaient que ça servait en informatique. Ben, moi, je comprenais pas vraiment où c'est que ça peut rentrer là-dedans, mais je présume, c'est sûr, qu'il y a une raison quelconque. »*
>
> Charles, étudiant aux HEC

Charles, avec qui nous avons choisi d'aborder, à la fin de l'entrevue, ces différentes applications pour répondre enfin à ses interrogations, finit par s'exclamer :

> *« Si elle avait commencé son cours en projetant un "making of" de "Jurassic Park", avec le dinosaure en 3D avec les lignes, puis tout ça, puis qui tourne, puis que là elle avait dit "Voyez vous? Ça, c'est juste des vecteurs. Puis ça, qu'est-ce que vous allez apprendre, c'est pour ça."... j'aurais été quatre fois plus intéressé, je pense, que là, elle me dise "Regarde, ça c'est une sphère." "Ok. So?" »*
>
> Charles, étudiant aux HEC

Mais l'utilisation de l'application ne peut être considérée comme une panacée dans le domaine de la motivation en mathématiques. Elle a ceci de particulier qu'elle ne fonctionne véritablement qu'avec ceux qui ont un intérêt pour l'application spécifique qui est utilisée. Alors que François s'ennuyait avec les taux d'intérêt et aurait rêvé d'applications liées à l'informatique, Michel n'a que très peu d'intérêt pour l'informatique et est donc resté froid face à l'évocation de telles applications ; il se souvient vaguement que son professeur de 105, qui leur avait donné un travail pratique en lien avec le calcul de projection en perspective, leur ait parlé de l'utilisation qui en est faite en animation par ordinateur :

> *« Il me semble qu'il avait mentionné...ouais, quelque chose...Si ça a agi sur ma motivation ? Pas vraiment, là... Pas vraiment. D'ailleurs, c'est pour ça que je m'en souviens plus ou moins... »*
>
> Michel, étudiant aux HEC

De même, Geneviève paraît excuser le fait qu'on ait utilisé des applications scientifiques dans son premier cours de *Calcul différentiel et intégral* (103) parce qu'il s'agissait d'un cours donné dans le cadre du programme de sciences où elle s'était inscrite initialement.

« C'étaient des applications scientifiques. Parce que moi, j'étais en 103 pour les sciences, puis là, c'était correct dans le contexte. »

Geneviève, étudiante aux HEC

Pour elle comme pour Fabienne, le côté appliqué des cours de statistiques en a grandement facilité l'apprentissage.

« Ça rentrait tout seul, c'était d'une simplicité, peut-être aussi parce que c'est très concret, les statistiques... Elle, elle faisait des exemples, d'échantillonnage et tout, fait que, je sais pas, tout était très, très clair pour moi, ça allait très vite. »

Fabienne, étudiante aux HEC

« C'étaient "Statistiques descriptives". La médiane, puis des hypothèses, des interprétations, là, mais... Moi, j'ai trouvé ça ben facile, là, puis il y avait rien pour moi d'abstrait là-dedans. »

Geneviève, étudiante aux HEC

Mais dans cet enseignement pré-universitaire, application ne rime pas toujours avec complexité. Ainsi, malgré son côté dit « appliqué », le cours de statistiques qu'a suivi Geneviève semble avoir pris lui aussi des raccourcis procéduraux :

« Statistiques, j'ai adoré ça. Peut-être parce que j'ai de la facilité à voir, il y a une formule, ça veut dire ça, tu « plogues » les chiffres dedans puis ça fonctionne. »

Geneviève, étudiante aux HEC

Par ailleurs, et de façon surprenante, la faible place accordée à l'*application* dans les autres cours de mathématiques n'empêche en rien plusieurs étudiants d'utiliser tout autant les mots « *concret* » et « *pratique* » pour caractériser le cours de math. En fait, le choix de ces qualificatifs tient davantage à la forme procédurale, « travaux pratiques », de plusieurs cours de mathématiques où sitôt que l'on voit un concept, un théorème ou une formule, on l'utilise dans des exercices ou des problèmes.

« Parce que souvent, on apprend une formule, on l'applique tout de suite dans un problème en maths. »

Mark, étudiant à Polytechnique

Ce qui mène à la situation paradoxale où l'*abstraction* et la *théorie* paraissent relever davantage du domaine d'*application.*

> *« Parce qu'un cours de maths, ça va travailler directement avec les chiffres. En économie, ça va être conceptuel, abstrait, dépendant des théorèmes, là... dans notre cours d'économie, elle va juste nous dire "Ben si je veux calculer ça, je l'utilise avec cette formule-là, puis ça c'est la réponse, au pire calcule-le chez toi." Tandis qu'au cours de mathématiques, ils vont dire " ok, regarde, tu vas peut-être calculer ça, mettons que c'est pour de l'économie, c'est ça ton problème, mais on va le calculer ensemble", fait que tu vas passer du temps à le calculer, tandis que l'autre, tu vas pas passer de temps à le calculer. »*
>
> Charles, étudiant aux HEC

> *« Dans le fond, c'est "Applique ta formule". Des fois c'est sûr que... moi, j'ai fait un cours où est-ce qu'il fallait que je fasse des preuves, ça, c'est un peu plus "touchy", mais... C'est ça que j'aime, c'est que c'est très concret, c'est abstrait et concret en même temps. T'appliques ta formule, t'aboutis à ta réponse, et c'est ta réponse qui va te diriger après. »*
>
> Fabienne, étudiante aux HEC

> *« Ce que je trouve facile en mathématiques, comparé à la physique, c'est qu'il y a pas de, comment dire... il y a pas trop de physique ! Ce que j'aime, c'est plus concret. »*
>
> Mark, étudiant à Polytechnique

Dans ces conditions où les mathématiques paraissent pouvoir se limiter à un travail de calcul, l'utilisation de l'application ne motiverait pas qu'à écouter le cours, mais à comprendre les concepts en profondeur pour pouvoir les appliquer correctement.

> *« Au secondaire, c'étaient des grosses notes tout le temps, sauf que je travaillais pas, c'était plus si j'avais un bon bourrage de crâne, mais j'avais pas à comprendre, ça rentrait tout seul... Sauf que maintenant, plus ça va, plus on l'applique, puis pour ça, j'ai besoin de comprendre. S'agit de le savoir. »*
>
> Fabienne, étudiante aux HEC

5.3.1.2 Dans les autres cours

Si l'application est peu présente dans les cours de mathématiques du secondaire et du collégial, l'occasion d'appliquer les concepts mathématiques dans les autres disciplines tarde aussi à venir. Au primaire, d'abord, les sciences ne sont pas du tout présentées sous un angle mathématique. Alexandre qui maintenant se débrouille fort bien en physique à Polytechnique croyait à l'époque ne pas aimer les sciences de la nature.

> *« Je sais que j'aimais pas « Sciences de la nature », j'aimais pas ça du tout. On allait dehors, on prenait des feuilles, on faisait un petit calepin. C'était un petit peu trop artistique puis mon côté artistique est pas développé du tout, ni en dessin, ni en collage. »*
>
> Alexandre, étudiant à Polytechnique

Au secondaire, la situation n'est pas tellement plus propice à l'établissement de liens entre mathématiques et sciences, surtout avec le report de la chimie et la physique à la cinquième année du secondaire. La nécessité de comprendre à la fois les principes scientifiques et les concepts mathématiques sous-jacents s'impose alors avec urgence, mais on n'est pas nécessairement outillé pour y faire face. Alexandre le reconnaît aisément :

> *« C'était très dur, là, j'ai trouvé ça très difficile la physique, en secondaire 5, surtout. C'était comme notre première fois qu'on faisait face à ça, là, des notions comme ça. »*
>
> Alexandre, étudiant à Polytechnique

Michel corrobore ce sentiment de déstabilisation :

> *« Mais sciences physiques, chimie, c'était quelque chose que j'aimais pas particulièrement, c'était quand même assez difficile à la limite, là; mais bon, comme je travaillais pas mal, je m'en sortais, mais je l'avais pas naturel, je pense, puis je m'en suis rendu compte assez vite. »*
>
> Michel, étudiant aux HEC

Ceux qui se sentent à l'aise dans l'approche procédurale tentent donc de recréer le cadre familier d'apprentissage développé en mathématiques, c'est-à-dire la répétition d'exercices pour cerner l'utilisation correcte des formules. Mais avec une telle approche, Mark se bute durement aux limites de sa compréhension, étonné de voir qu'il ne suffit plus d'utiliser les formules, mais qu'il faut aussi être en mesure de les interpréter et de les manipuler et de revenir aux équations de départ:

> *« En chimie, il y avait juste une formule, mais je comprenais pas pourquoi on utilisait cette formule-là, fait que… Et en physique, il fallait chercher les formules, par nous-mêmes. Tu sais, le prof il va donner une formule, mais, quand on l'applique, il fallait la modifier, tu sais. J'étais tout déboussolé de voir ça… il fallait que je change ça parce que le x, il valait zéro, puis tout ça… C'est pour ça que ça m'était tout confus la physique, et que j'aimais pas ça. Alors que les mathématiques, c'est plus simple, c'est tout!… »*
>
> Mark, étudiant à Polytechnique

Quant au cours d'économie, toujours en cinquième secondaire, on semble pouvoir le réduire à un apprentissage par cœur, ce qui ne motive pas à en comprendre les principes et encore moins les concepts mathématiques utilisés.

> *« Ben en fait, en secondaire 5, le cours d'économie, c'était beaucoup de par cœur… ça, j'ai trouvé ça dommage un peu, parce que durant le cours, on remplissait des pages puis l'examen, c'était les apprendre par cœur, donc je pense que ça mesurait plus ou moins notre intérêt en économie, là… »*
>
> Michel, étudiant aux HEC

Malgré (ou faudrait-il dire « en raison de » ?) la faible présence de la physique et de la chimie au secondaire, il existe une pression du milieu, à la fois de l'école et des parents, pour orienter les étudiants vers des études collégiales en sciences, pour « *se garder toutes les portes ouvertes* ». À défaut d'une connaissance en profondeur de ce que cela implique, ils sont donc un grand nombre à passer par-dessus les difficultés qu'ils éprouvent pour s'engager dans cette voie, mais plusieurs finissent par revoir leur orientation au cours de leurs études collégiales.

> *« Ah mais, c'est à cause qu'au secondaire, on se fait dire, tout le monde, "ah! allez en sciences de la santé, ou en sciences pures". Tout le monde va en sciences de la santé ou en sciences pures au cégep. J'aimais mieux les sciences pures que les sciences de la santé… puis, ben, c'est ça, j'y ai été, tu sais, j'avais quand même de la facilité pour ça. »*
>
> Zoé, étudiante en informatique

« J'étais dans un collège privé, puis les enseignants avaient l'air à considérer... ils disaient à tout le monde d'aller en sciences pures, mais j'ai été quand même en sciences humaines... »

François, étudiant en informatique

« L'orienteur, il m'a conseillé d'aller dans les sciences santé parce que d'après leurs tests d'aptitude, en tout cas, il m'a dit que j'avais l'aptitude plus élevée, comparée aux autres, en sciences santé que dans les autres. »

Mark, étudiant à Polytechnique

« Je suis abouti là, malgré moi, parce que... encore la pression familiale: mes parents qui s'imaginaient que aller dans d'autres choses que sciences pures, ça serait mal, dans le sens que je me fermerais des portes et puis il y aurait pas d'emplois au bout de ça. »

Michel, étudiant aux HEC

« Je me suis dit "je vais aller là-dedans; après, j'aurai toutes les portes d'ouvertes, puis je vais décider au cégep, dépendant des matières que je vais aimer au cégep." »

Helga, étudiante à Polytechnique

« Ça ouvrait les portes à tout, mais je me suis rendu compte ça ouvre les portes à tout si t'as des bonnes notes. »

Geneviève, étudiante aux HEC

Il est amusant de constater au passage que ce ne sont pas les mêmes considérations qui semblent avoir orienté le choix de notre étudiante française, même si en France, on dénonce souvent la domination des sciences sur le système d'éducation :

« Parce que, en français, j'étais vraiment très faible. Je me suis dit "bon, je peux pas faire littéraire, le français je peux pas; je peux pas faire sciences économiques ou de commerce ou tout ça, ça m'intéresse pas; donc, je fais scientifique. »

Ninon, étudiante en informatique

Une fois au cégep, les étudiants seront donc plus souvent en contact avec l'application, mais comme ce contact se vivra surtout à l'extérieur des cours de mathématiques, l'application ne sera donc pas toujours présentée sous son angle mathématique ou on ne l'exploitera pas à son plein potentiel.

> *« Physique, je trouvais ça le fun, plus au cégep qu'à l'université. Parce que t'as moins besoin de maths, là... C'était plus intuitif, c'est ça que j'aimais. »*
>
> Zoé, étudiante en informatique

Si cet aspect intuitif peut aider à saisir la portée de certains concepts mathématiques, il ne contribue pas nécessairement à donner tout son sens au calcul différentiel et intégral enseigné dans les cours de mathématiques du niveau collégial. Par exemple, comme l'explique Lucie, il y a sous-utilisation de la puissance de l'intégrale à l'intérieur des cours de physique au cégep, mais il apparaît difficile de faire autrement puisque certains de ces cours de physique se donnent en même temps que le cours de calcul intégral (203) ou même avant.

> *« Quand je faisais de la physique électrique ou physique mécanique au cégep, il y avait des fois des démonstrations de formules avec les intégrales. Mais étant donné que l'accélération était constante, on n'avait pas besoin de faire les intégrales. Mais maintenant dans le cours de physique, de mécanique, on en a besoin, on a besoin de travailler avec les intégrales, ce qu'on faisait pas au cégep. Pas comme ça. On prenait la formule, comme toute faite. Mais maintenant il faut comme établir les choses. »*
>
> Lucie, étudiante à Polytechnique

Car l'approche procédurale paraît aussi fonctionner à l'occasion dans l'apprentissage des sciences au niveau collégial, et même ressortir dans certains cas comme le modèle d'enseignement privilégié par le professeur. Dans ces conditions, l'application en sciences ne règle en rien les problèmes développés en mathématiques ; elle ne fait que les étendre.

> *« Moi, je vais être bonne pour retenir tout par cœur. Moi, l'histoire, c'est facile, t'avais rien à comprendre, t'avais juste du par cœur, t'arrivais à l'examen, t'avais 100 si tu retenais tout par cœur. Chimie organique, c'est pareil! Le prof donnait comme dix réactions à faire, si tu les savais toutes par cœur qu'est-ce qui se passait, t'avais tout bon ! »*
>
> Lucie, étudiante à Polytechnique

« Mais le dernier cours de physique, le cours d'ondes, là, il y avait beaucoup de formules, puis c'était plus du « pluggage » de formules sans comprendre vraiment c'est quoi qui se passe. »

Helga, étudiante à Polytechnique

« Mais le cours d'astrophysique, j'ai vraiment pas aimé ça! C'est que je pensais vraiment pas comme le prof, là ... C'est ça, c'était pas intéressant. Écoutez, lui, qu'est-ce qu'il trouvait intéressant c'est de donner le plus de formules possible... Comment tu calcules telle affaire : comme ça, comme ça, comme ça; telle chose, comme ça... »

Zoé, étudiante en informatique

Finalement, comme nous l'évoquions précédemment, le côté « abstrait » de l'application n'est pas toujours en mesure d'apporter un nouvel éclairage sur les concepts mathématiques, de les donner à voir : on assiste même à l'effet opposé où la couche de contenu supplémentaire introduite par l'application peut faire écran aux mathématiques sous-jacentes que l'on croyait maîtrisées, dans leur forme « concrète » et « pratique ». La compréhension des mathématiques devient alors une condition nécessaire mais non suffisante à l'application.

« Fait que les cours de sciences, là, c'était tellement abstrait, il y avait plus rien de concret, il y avait plus rien, rien, rien du tout ».

Fabienne, étudiante aux HEC

« Chimie des solutions, ah... ça, ça a été pénible. J'ai rien compris, j'ai rien du tout retenu de ce cours-là. C'est pas les math qui me causaient des problèmes, c'était la compréhension derrière le problème... je comprenais pas... »

Hughes, étudiant en informatique

« Je trouve qu'il faut une compréhension plus avancée en physique pour comprendre certains concepts, c'est pas toujours évident. »

Helga, étudiante à Polytechnique

> *« Physique, je pense qu'il faut que tu aies une bonne base en math pour comprendre la physique, je crois. Et déjà, moi, j'aimais bien les math mais en physique, je sais pas, je voyais pas... j'aimais mieux faire des math que de la physique. »*
>
> Mark, étudiant à Polytechnique

> *«Oui, il y a un contenu mathématique, mais c'est beaucoup d'interprétation en économie. Les notions mathématiques sont là, sauf que c'est pas pour les mêmes choses... Faut que t'aies la base, mais tu peux pas juste faire des maths puis comprendre de l'économie. Faut que t'aies la théorie qui a derrière l'économie pour pouvoir faire les mêmes interprétations. »*
>
> Geneviève, étudiante aux HEC

Ces témoignages nous ramènent donc au questionnement initial : au-delà d'une aide à la motivation, quels sont les effets sur les compétences mathématiques des rapports développés avec l'application ? Question qu'on se doit de compléter avec sa réciproque : quel rôle jouent les différentes compétences mathématiques dans le développement du rapport avec l'application ? Les sections suivantes s'intéressent à ces deux aspects de la problématique, pour chacun des types de compétences étudiés.

5.3.2 Liens avec les compétences d'intervention

Chez plusieurs, le passage à l'application s'est fait en étendant l'approche procédurale au contexte d'application : on cherche à repérer les cas et les procédures associées et à les mémoriser en les appliquant à une série de problèmes. Chez ceux-là, on travaille donc surtout les compétences d'intervention. Il est important de préciser que ce phénomène n'illustre pas le risque décrit par Taylor (1998) et que nous rapportions en 2.1.1.2 : ce n'est pas tant la place faite à l'application dans l'enseignement des mathématiques qui aurait favorisé une centration sur les procédures au détriment des concepts, c'est plutôt l'habitude développée avec une approche procédurale de l'enseignement des mathématiques (et des autres disciplines) qui aurait conduit plusieurs étudiants à aborder les applications sous l'angle d'une démarche à appliquer. Geneviève donne l'illustration d'une telle approche poussée à l'extrême dans le cadre de son cours de physique au collégial.

> *« Premier examen, j'ai eu 40; dernier examen, j'ai eu 92. Mais pour cet examen-là, j'ai étudié je-sais-pas-combien d'heures, j'ai tout fait les problèmes, je savais tout par cœur. Tu sais, comme, pour l'examen final, là, je savais que c'était un travail avec des forces, là, fallait je fasse ça-ça-ça-ça-ça-ça-ça... Cinq minutes après l'examen, je suis sûre que j'aurais plus été capable de rien faire... »*
>
> Geneviève, étudiante aux HEC

D'après Geneviève, l'application dans d'autres disciplines des connaissances qu'elle a acquises en mathématiques l'amène à les réviser régulièrement, ce qui lui permet de les garder vivantes et opérationnelles et de contrer ainsi les effets normalement associés à une approche procédurale :

> *« En optimisation, on a commencé par faire les fonctions à une variable; en économie, on fait les fonctions à une variable. Tu sais, l'analogie est là, parce qu'on fait à peu près les mêmes choses... Les différentielles dans les deux cours... Je trouve ça intéressant parce que tu dis "j'ai appris quelque chose dans un cours, puis ça me sert dans d'autre chose." Puis tes connaissances, elles restent, parce que tu les utilises toujours. Tu sais, c'est pas comme "je l'ai appris, j'ai l'examen, j'oublie". Fait que ça nous force toujours à réviser, finalement. »*
>
> Geneviève, étudiante aux HEC

Puisque chez elle, l'utilisation d'applications lors de l'apprentissage d'un concept mathématique constitue par surcroît un élément de motivation, sa rétention en serait favorisée d'autant plus.

> *« Mais comme 103, tu vois, sur le coup, ça m'a servi, puis là, tu vois, je les ai oubliées. Puis là, je m'en ressers, puis, tu vois, c'est revenu; c'est revenu vite, là!... J'ai eu juste quelques rappels puis c'est revenu. Ça m'est revenu très vite parce que j'avais aimé ça. Puis les problèmes aussi d'optimisation comme on a fait, à une variable, j'avais bien aimé ça, je trouvais ça logique! Oui, mais sauf que c'étaient des applications scientifiques. C'est sûr qu'avec le recul... Si j'avais fait mon 103 en Techniques, j'aurais voulu avoir des applications financières, mais là, j'en ai plein, fait que c'est correct. »*
>
> Geneviève, étudiante aux HEC

Faudrait-il donc enseigner les méthodes de calcul et autres contenus liés aux compétences d'intervention à travers les applications ? Sur ce thème, ils sont plusieurs à clamer la nécessité d'un enseignement théorique, décontextualisé, avant de passer à l'application, tantôt pour éviter une surcharge d'information à assimiler, tantôt pour permettre de structurer les notions. Faire précéder la théorie de l'application ne serait donc bienvenu que pour motiver à l'apprentissage, et non pour réaliser cet apprentissage.

> *« J'aime mieux avoir vu les maths à l'extérieur, sans contexte, amenées dans un contexte par la suite, que me faire expliquer tout en même temps! C'est plus facile, je trouve, à assimiler peut-être, parce que t'as déjà une affaire que tu sais, il te reste juste à apprendre avec la nouvelle matière, tandis que quand tout est nouveau, faut que t'apprennes tout en même temps. »*
>
> Geneviève, étudiante aux HEC

> *« Puis dans le fond, c'est le fun quand tu sais, tu comprends d'où qu'elle vient, c'est plus facile après de l'appliquer. Les physiciens l'ont peut-être trouvée avant, mais maintenant avec les maths, on peut savoir que… je peux juste avoir une formule en physique puis, à partir de dérivées, puis de manipulations, toutes trouver les autres. »*
>
> Fabienne, étudiante aux HEC

> *« J'aime mieux voir qu'est-ce qui est le plus important, là, puis, après, c'est réfléchir aux conséquences de ça… c'est ça l'essentiel, je trouve. Puis, tu sais, de toute façon, si un cours, c'est des exemples d'applications, faut que je trouve les règles générales, sinon je peux pas le retenir, fait que j'aime mieux quand le cours, c'est directement les règles générales. Des fois, pour comprendre les règles générales, faut un exemple, là, parce quand c'est trop abstrait, des fois, genre, on peut pas saisir c'est quoi, là, mais… »*
>
> Zoé, étudiante en informatique

Ces commentaires font écho aux analyses d'Anderson, Reder et Simon (1995) que nous énoncions en 2.1.1.2 et qui recommandent, pour favoriser le transfert, de situer l'enseignement à un niveau théorique et abstrait et de le compléter avec des exemples concrets ; on retrouve aussi chez Zoé l'idée d'*économie cognitive* (Sternberg et Smith,1988) concernant la *factorisation des concepts*, et donc des propriétés (ou règles) associées.

En dépit de la rapidité avec laquelle lui reviennent ses notions de calcul différentiel apprises dans un cours où elle a pu les mettre en application, Geneviève a quand même commis à quatre reprises une même erreur de dérivation de polynômes dans le cadre du problème du devoir (Annexe F, Problème H-3). Même si elle a fait ce devoir avec une coéquipière, on peut lui attribuer une part de responsabilité dans cette erreur puisqu'elle n'a pas pris l'initiative de la corriger. Par ailleurs, elle et sa coéquipière ont reçu la même formation technique au cégep ; elles ont donc connu un même temps d'arrêt dans la pratique du calcul « à la main », et selon Geneviève, elles partageraient une vision commune du travail scolaire.

> *« C'est quelqu'un avec qui j'ai étudié au cégep qui est avec moi, maintenant à l'Université, à l'école... Très minutieuses tous les deux. Sinon, je serais pas capable. Non, non, moi je suis très exigeante avec moi-même, donc, il me faut quelqu'un qui soit très exigeant avec lui-même dans ses travaux, sinon ça marche pas. »*
>
> Geneviève, étudiante aux HEC

Voici donc ce qu'on retrouvait dans ce devoir, où l'on cherchait à analyser la concavité des morceaux U_1, U_2, U_3 et U_4 d'un polynôme en m_1, m_2, m_3 et m_4 :

$U_1 = (0{,}04\, m_1) - (0 * m_1)^2$
$U_1' = 0{,}04 - (2)(0 * m_1)$
$U_1'' = 0{,}04$ => *la fonction U_1 est donc concave sur tout son domaine*, $m_i \geq 0$

$U_2 = (0{,}12\, m_2) - (0{,}16\, m_2)^2$
$U_2' = 0{,}12 - (2)(\,0{,}16\, m_2)\,(0{,}16)$
$U_2'' = 0{,}12 - 0{,}0512 = 0{,}0688$
=> *la fonction U_2 est donc concave sur tout son domaine*, $m_i \geq 0$

$U_3 = (0{,}13\, m_3) - (0{,}14\, m_3)^2$
$U_3' = 0{,}13 - (2)(0{,}14\, m_3)\,(0{,}14)$
$U_3'' = 0{,}13 - 0{,}0392 = 0{,}0908$
=> *la fonction U_3 est donc concave sur tout son domaine*, $m_i \geq 0$

$U_4 = (0{,}07\, m_4) - (0{,}03\, m_4)^2$
$U_4' = 0{,}07 - (2)(0{,}03\, m_4)\,(0{,}03)$
$U_4' = 0{,}07 - 0{,}0018\, m_4$
$U_4'' = 0{,}07 - 0{,}0018 = 0{,}0982$
=> *la fonction U_4 est donc concave sur tout son domaine*, $m_i \geq 0$

Quelques éléments ressortent dans ce traitement. D'abord, pour U_1, on n'a pas jugé sûr de se débarrasser de la composante en m_1^2, même si le coefficient était nul ; on a préféré lui appliquer les règles de dérivation. Ce *souci d'application de la règle* se retrouve également dans le traitement de la dérivée des termes de la forme $(ax)^2$ où l'on applique rigoureusement la règle de dérivation des fonctions composées, même si dans ce cas, on aurait pu s'attendre à un traitement plus direct.

Ensuite, on a préservé dans chacune des dérivées secondes, la partie constante de la dérivée première (0,04, 0,12, 0,13 et 0,7 respectivement), comme si, n'étant pas une constante dans la fonction initiale, on se devait d'en retrouver des traces jusque dans la dérivée seconde. Il y a là une claire défaillance au niveau des *compétences d'intervention* qui n'ont pu être fixées au moment de l'apprentissage du calcul différentiel, même avec l'utilisation d'applications.

Finalement, même si le maintien de cette partie constante rend strictement positive la dérivée seconde, on conclut quand même et à tort que la fonction est concave. Au-delà d'une confusion de termes ou de définitions, on peut voir ici un effet du *contrat didactique* (Brousseau, 1986) : puisque le problème demande de maximiser, on « se doit » d'être en présence d'une fonction concave ; on ne sent donc pas le besoin de vérifier les définitions, même avec le temps alloué pour un devoir. La contextualisation à l'aide d'une application qui se veut réaliste ne permet donc pas d'échapper à la nature scolaire des problèmes et aux effets de contrat qui peuvent en découler. En fait, l'application conduirait peut-être à encourager chez certains étudiants un biais connu, en centrant l'attention sur le *résultat* et non sur la démarche, comme le laissaient entrevoir Bkouche, Charlot et Rouche (1991).

D'autres participants de l'étude corroborent le fait que la compréhension du domaine d'application ne rend pas les compétences d'intervention moins sensibles aux interruptions dans la pratique mathématique. En informatique, c'est François qui commet le plus d'erreurs d'intervention, après un DEC en techniques informatiques et trois ans sans faire de mathématiques. Aux HEC, celui qui a commis le plus d'erreurs d'intervention effectue un retour aux études après six ans de travail et un DEC en techniques administratives.

En fait, il est important de souligner que les compétences d'intervention mises à contribution dans les problèmes sélectionnés des cours retenus ne sont pas nécessairement celles qui sont les plus visibles dans les pratiques professionnelles de référence. De même qu'en industrie, on verra rarement un informaticien convaincre ses collègues à l'aide d'une preuve formelle (comme celles requises dans le cours « *Structures discrètes en informatique* »), on ne verra pas plus souvent un gestionnaire présenter à un conseil d'administration le calcul du Hessien de la fonction de revenu pour justifier le maximum identifié (tel que prescrit dans le cours « *Modélisation et optimisation* »). Et comme l'application va de pair avec l'ordinateur, on est en droit de supposer qu'on n'utilisera peut-être jamais dans son domaine d'application professionnelle certaines des compétences d'intervention développées et évaluées dans les cours de la formation universitaire :

> *« Parce que tu vois, ce qu'on apprend présentement en mécanique, les ordinateurs le font. »*
>
> Lucie, étudiante à Polytechnique

> *« Comme Optimisation, moi, je pense pas utiliser ça vraiment de même. C'est que tu vas avoir l'ordinateur qui va te demander, puis tu lui donnes les données, et c'est tout. On s'en sert pas de faire manuellement. Fait que, je te dirais, c'est plus pour... c'est de l'exercice mental. »*
>
> Charles, étudiant aux HEC

Face aux mathématiques, l'application apparaît donc comme une arme à double tranchant : autant elle peut motiver à acquérir de nouvelles connaissances en en montrant l'utilité, autant elle amène à questionner à l'aune de cette même utilité le développement de certaines compétences d'intervention. Questionnement d'autant plus légitime que tous ceux qui ont développé un rapport plus direct avec l'application par le biais d'études collégiales dans un domaine technique se sont retrouvés à mettre de côté, et à oublier bien souvent, une portion importante de leurs connaissances mathématiques.

5.3.3 Liens avec les compétences d'explicitation

L'utilisation d'un langage spécifique que l'on se plaît à qualifier d'universel caractérise la résolution de problèmes mathématiques, mais on ne le retrouve pas toujours « aussi universellement » utilisé dans les applications :

> *« Les maths et la comptabilité, c'est pas vraiment le même langage. Le cours de comptabilité que j'ai eu, les mathématiques qu'on fait, c'est de l'arithmétique*

> *pure et simple. Tandis qu'un cours de mathématiques, tu vas avoir des théorèmes, des flèches "si et seulement si"...* » .
>
> Geneviève, étudiante aux HEC

Nous avons mis en évidence dans la section 5.2.4 l'importance accordée par les étudiants à l'écriture symbolique en mathématiques, au détriment du sens quelquefois. Dans l'analyse du rapport avec l'application, le symbole mathématique de l'égalité représente un cas particulier qu'il convient d'étudier car il est au cœur de l'opération de modélisation. Si lors de l'apprentissage de l'arithmétique au primaire, les élèves lui attribuent souvent un sens opératoire (« *ça donne...* »), on serait en droit de penser que le passage à l'algèbre, une fois complété, ait permis de lui restituer son sens original et de voir une équation pour ce qu'elle est, c'est-à-dire une égalité entre deux membres qui lient entre elles variables et constantes. Or, il semble que l'approche procédurale ait eu pour effet chez certains de perpétuer le caractère opératoire de l'*égalité* en la réduisant à un élément de liaison entre deux étapes d'une procédure, ou même à un nouveau « *ça donne* » entre la formule et la réponse. Cette vision opératoire de l'égalité, qui a sans doute été renforcée par l'utilisation de la calculatrice et de sa touche « = », est malheureusement incompatible avec la conception d'un système d'*équations* lors de la *modélisation* d'un problème de mathématiques appliquées.

Mark en fait la démonstration dans ses tentatives de résolution des problèmes de physique. Celles-ci se lisent comme un enchaînement séquentiel de formules, car les équations qu'il choisit, si elles ne modélisent pas le système physique de façon adéquate, ont cependant presque toujours la propriété suivante : le membre de gauche représente l'inconnue cherchée et le membre de droite utilise exclusivement des variables dont les valeurs sont connues ou auront été calculées grâce à l'équation précédente. Voilà sans doute le résultat de ce qu'il appelle « *chercher comment appliquer les formules dans le bon ordre* ». Par exemple, pour le problème P-1 (Annexe F), il fallait remarquer que la vitesse au point de contact (c) était la même pour la crémaillère et l'engrenage, établir à partir de ces deux corps les deux expressions pour le vecteur-vitesse (v) à ce point de contact à partir des vitesses angulaires (w) et des vecteurs position (r),

$$\vec{v}_c = \vec{v}_A + \vec{w}_{AB} \times \vec{r}_{C/A} \quad \text{(crémaillère)}$$

$$\vec{v}_c = \vec{v}_O + \vec{w}_O \times \vec{r}_{C/O} \quad \text{(engrenage)}$$

développer ces équations et résoudre le système défini par l'égalité des expressions représentant les mêmes composantes du vecteur-vitesse. Chez Mark, on retrouve plutôt la séquence suivante :

$$\tan\theta = \frac{0,2}{0,8} \Rightarrow \theta = 14,04$$

$$w = \frac{v}{r} = \frac{0,3 \quad m/s}{0,2 \quad m} = 1,5 rad/s$$

$$t = \frac{0,8m}{0,3m/s} = 2,66s$$

$$\frac{v}{t} = \frac{0,3m/s}{2,66s} = 0,113m/s^2$$

$$a_c = 0,113m/s^2 = \alpha_c$$

Donc,

$$w = w_0 + \alpha_0 t$$

$$1,5rad/s = w_o + 0,113m/s2 \cdot 2.66s$$

$$w_o = 1,2rad/s$$

On est donc très loin du système d'équations que commandait le problème physique : d'une part, de vecteur qu'elle était, la vitesse est devenu une simple quantité scalaire ; d'autre part, le fait qu'on ait calculé le temps comme s'il s'agissait d'un mouvement rectiligne uniforme n'empêche pas d'enchaîner à la ligne suivante avec un calcul d'accélération, comme si les « formules » étaient toujours valables, indépendamment du contexte. De façon générale, Mark ne semble pas disposé à considérer comme recevable une égalité qui ferait place à plus d'une inconnue et qui perdrait alors le statut de « formule ».

Il apparaît que la combinaison du langage graphique avec le symbolique n'est pas en soi un gage de succès dans la compréhension du sens et dans le transfert éventuel à l'application.

On peut très bien se limiter, ici aussi, à mémoriser le passage de l'un à l'autre de ces langages, en court-circuitant le concept qui donne sens à cette traduction. Si Ninon reconnaît sa facilité à restituer les équivalences ainsi apprises :

> « *Ben en fait, le genre de questions "interprétation graphique" en math, c'est du genre "x=y, quelle est l'interprétation graphique de ça?" Ben, tu dis "c'est une droite 45 degrés", tout ça... C'était plutôt ça, c'était plus facile.* »
>
> Ninon, étudiante en informatique

cela ne l'aide en rien à analyser et interpréter un graphique dans un contexte d'application comme celui de la biologie :

> « *Parce que la biologie, c'est un peu compliqué, démontrer des trucs comme ça... Ben, par exemple, surtout des lectures de graphiques: "Qu'est-ce que ça vous permet de déduire?", "Ben, je sais pas". Tu vois, des choses comme ça... En fait, si, c'est-à-dire, le graphique, je peux le dire qu'est-ce qu'il permet de conclure, mais, par exemple, pas en une page. C'est-à-dire qu'il faut... moi, je dis "bon, ça me permet de conclure ça", bon, ça me ferait deux lignes. Tandis qu'il faut analyser la courbe des y, l'abscisse des y...ah, je me mélange!...les y, les x, qu'est-ce que ça a montré, comment ça varie, et tout ça, qu'est-ce que ça a...Oh la la! c'est tellement dur, ça!* »
>
> Ninon, étudiante en informatique

L'utilisation de l'application, par la modélisation qu'elle nécessite, est une autre façon d'éviter un apprentissage qui ferait abstraction du sens. Le symbole doit perdre le statut « *concret* » qu'on a pu lui octroyer, comme réalité propre sur laquelle on se satisfaisait de travailler, pour redevenir une *représentation* d'un concept *abstrait*, lui-même *abstraction* possible de *réalités concrètes.*

> « *Quand je suis capable de me l'imager, quand je suis capable de le transporter ailleurs puis de bâtir par-dessus un concept mathématique, là je le sais j'ai compris.* »
>
> François, étudiant en informatique

Pour plusieurs, l'application permet ainsi de donner un sens aux concepts mathématiques étudiés. Alors que les applications et les graphiques utilisés dans le premier cours de calcul (103) lui ont permis de bien comprendre le sens de la dérivée, Geneviève déclare ne rien avoir compris de l'intégrale enseignée exclusivement sur un plan symbolique dans le second cours de calcul (203) :

> *« En tout cas, moi je vois pas, je vois pas même pas à quoi ça ressemble, là, tu sais, l'intégrale dans la vie, là!!! Tu sais, au moins, une fonction de revenu, de profit ou pour la température d'un liquide, au moins, tu vois c'est quoi. Mais une intégrale, là, non, non, non, ça marche pas!... Si j'avais peut-être développé vers des applications, peut-être que j'aurais plus embarqué, là, mais on s'arrêtait vraiment... on voyait la théorie, on voyait une équation, c'est tout! Tu fais ça pour cette équation-là! Mais on a jamais fait de problèmes avec un contexte. Il y avait jamais, jamais, jamais, il y avait jamais d'exemples concrets, là! C'étaient tout le temps des exemples, je dirais, avec des chiffres. »*
>
> Geneviève, étudiante aux HEC

L'application lui fournirait l'occasion d'attacher une *image* au concept, de voir « *à quoi ressemble* » l'objet enseigné, même s'il s'agit d'applications scientifiques qui ne l'intéressent pas particulièrement :

> *« Parce que moi, ça me permet de comprendre. Je le vois, c'est comme "ok, c'est ça dans la vraie vie, ou c'est ça à quoi ça sert." Mais montre-moi le juste de même... ça marche pas! Je suis peut-être terre-à-terre, mais il me semble que c'est plus facile à comprendre si t'as un lien avec qu'est-ce qui te touche de plus près. Même si t'en feras jamais, au moins tu sais à quoi ça peut servir ou à quoi ça peut ressembler, toutes ces fonctions-là ou ces applications-là. »*
>
> Geneviève, étudiante aux HEC

Pour plusieurs, cette *image* n'apparaît pas disponible à l'intérieur du domaine mathématique et de l'enseignement qui généralement s'y confine. Voici la description d'un cours de mathématiques typique tel que vu par Lucie et Michel. On notera au passage que Lucie parle quand même de concepts (vecteurs) tandis que Michel se limite aux symboles :

> *« Premièrement, le prof de maths en donnant son cours, il va pas donner des exemples concrets, comme en physique le prof va faire. Tu sais la prof de physique, elle va parler d'accélération, elle va parler de vitesse, elle va dire "pensez à telle chose", elle va s'appuyer sur la table pour montrer c'est quoi. Tu verras pas le prof de maths se prendre pour un vecteur, tu sais!... Il va pas parler d'industrie, il va pas parler d'autre chose, il va juste parler de maths, tu comprends ? »*
>
> Lucie, étudiante à Polytechnique

> *« Je verrais des formules, des chiffres, mais sans vraiment faire de liens avec d'autres types de notions. On dirait qu'on fait plus ou moins le lien avec la vie de tous les jours… Fait que je pense que si je m'assoyais cinq minutes puis tout ce que j'entendrais, ça serait des x, des y, des chiffres, des formules, sans faire de liens avec autre chose, je pense que je pourrais conclure que c'est un cours de maths! »*
>
> Michel, étudiant aux HEC

Le peu d'importance accordé dans l'apprentissage au sens derrière les manipulations symboliques permet sans doute d'expliquer le fait que parmi les neuf participants de Polytechnique, aucun n'ait pensé à utiliser la *dérivée* pour déterminer dans le problème P-2 de l'examen de mécanique (Annexe F) la hauteur du tremplin qui permettrait à la rondelle de « *parcourir la plus grande distance* ». Pourtant, s'il y a un objet mathématique qui caractérise l'enseignement collégial, c'est bien la dérivée ; par surcroît, le programme du cours 103 dans lequel on découvre cet objet inclut les *extrema* et l'*optimisation* dans la liste des contenus à voir. Toutefois, il ne prescrit pas l'utilisation d'*applications* ou de *situations concrètes* pour illustrer les principes d'optimisation.

Sans une compréhension suffisante du sens des objets mathématiques enseignés, il devient difficile de les mettre à contribution de façon adéquate dans une activité de modélisation. Par exemple, dans le problème I-3 de l'examen final d'informatique, Hughes n'a pas vu que les *répétitions* d'un même élément diminuaient le nombre de *permutations* possibles, témoignant ainsi d'une compréhension limitée du sens de ces deux concepts et d'une utilisation aveugle des formules associées.

Faut-il en conclure que la contextualisation des notions mathématiques dans des applications réelles permet invariablement d'en retrouver le sens et d'en favoriser le transfert ? Pas forcément. Ici, comme avec les graphiques, il est possible de mémoriser des liens sans gain appréciable au niveau du sens, surtout lorsqu'on se limite fortement au niveau des contextes :

> *« Pour moi, c'est pas un exemple très… Tu sais, "log-bactéries"… tu sais, c'est sûr, là, dans ta tête, c'est rendu que c'est un lien, mais… »*
>
> Lucie, étudiante à Polytechnique

De plus, même lorsque le cours de mathématiques accorde une place à l'application, il court le risque de la faire apparaître à nouveau sous une forme relativement abstraite qui, pour certains, n'éclairera que peu le concept. Ainsi, François manifeste des degrés d'enthousiasme et d'*insight* différents quand il décrit deux cours où il a fait l'apprentissage d'un même contenu. D'abord dans son cours collégial de *Mathématiques appliquées* (122), il a « fait » l'algèbre de Boole, les circuits et le calcul binaire :

> *« On a fait l'algèbre de Boole, on a fait les circuits, ce qu'on fait en 1213, je l'ai fait en Mathématiques 122. Calcul binaire: tous les compléments à 2, compléments à 1, signés, ... Ça on a vu ça. Puis on a vu les matrices aussi, puis c'est là qu'on a fait tout particulièrement les preuves. On en a pas eu autant qu'en 105; en 105, c'était vraiment beaucoup de preuves à faire. »*
>
> François, étudiant en informatique

Maintenant, dans son cours universitaire d'*Architecture des ordinateurs* (1213), il lui est donné de voir directement sur les circuits le sens de cette algèbre, ce qui constitue pour lui une révélation et l'amène enfin à un niveau de compréhension qui lui permet d'envisager l'application de façon autonome:

> *« En 1213, la logique des circuits, j'en avais vu un peu au cégep, mais là, c'est vraiment plus défini... Extrêmement intéressant, c'est une chose que j'aime bien, regarder des circuits. Comme tout-à-l'heure, pour montrer un bon exemple, il y avait un circuit, puis c'est un full-ladder. C'est au niveau circuit, comment qu'on va faire les additions et les soustractions, mais vraiment au niveau des circuits. Mais là, juste en regardant le circuit, j'ai compris qu'il y avait... ce qu'on faisait en mathématiques pour additionner des nombres binaires, le complément à deux, entre autres, là, ben le complément à deux, il est exactement représenté dans tes circuits. Fait que c'est là que c'est intéressant. C'est ça, là, je le vois, fait que là je peux faire mon circuit n'importe quand, parce que je l'ai compris, je l'ai vu l'utilité du cas C2, ils utilisent les XOR, là, pour faire la soustraction, puis c'est le XOR qui va faire le... Fait que je trippe dans ce temps-là, c'est le fun !!! »*
>
> François, étudiant en informatique

Pour lui comme pour les autres étudiants en informatique qui, pour la plupart, voient pour la première fois les notions d'algèbre de Boole à l'intérieur de ce cours, on ne peut plus parler de transfert des connaissances mathématiques ; elles sont enseignées à même le contexte anticipé d'utilisation, au point où il peut devenir difficile de distinguer entre ce qui relève d'une propriété mathématique et ce qui relève de l'implémentation physique ; un tel couplage inextricable pourrait handicaper le transfert à d'autres applications.

Car sur le plan de l'explicitation, l'application ne fait pas que donner un sens aux mathématiques enseignées. Elle arrive avec ses propres écrits et son propre langage dont il faut pouvoir tenir compte.

Dans une discipline comme la mécanique, on accorde une importance au réalisme de la représentation graphique des corps impliqués, importance tout à fait justifiée car c'est ainsi que les problèmes se présentent. Cette représentation peut, du moins temporairement, faire obstacle à la notion de modèle car elle peut occulter des éléments essentiels et mettre en valeur des éléments accessoires. Une étape importante consiste donc à extraire les éléments essentiels en mettant à contribution à la fois les principes physiques et la géométrie de l'ensemble. Cette étape représente une difficulté non négligeable si l'on se fie aux productions des étudiants pour le problème P-1 de l'examen (Annexe F).

En effet, parmi ceux qui ont cherché le *point de contact* entre l'engrenage et la crémaillère, essentiel à la résolution du problème, aucun ne l'a situé correctement en C ; on lui a préféré le point D.

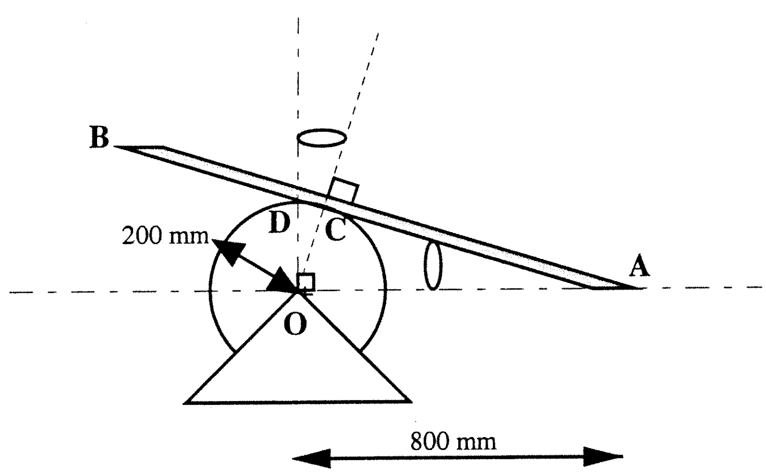


Figure 10 – Identification du point de contact

Ici, il est clair que la figure donnée dans l'énoncé du problème (voir Annexe F) privilégie le réalisme à la pureté géométrique à laquelle l'enseignement des mathématiques a pu habituer. Le contact entre l'engrenage et la crémaillère ne paraît pas, en raison des dents associées à ces objets, se limiter à un seul point. Dans ces conditions, il peut être tentant de choisir D comme point de contact car il permet de travailler avec le triangle rectangle suggéré par la figure initiale. Ce problème illustre bien la nécessité d'un certain niveau d'abstraction dans la phase d'analyse pour réussir ce passage du dessin technique au modèle géométrique apte à guider la résolution.[24]

Du côté de la langue naturelle, l'application peut associer un sens différent à un terme rencontré initialement en mathématiques. Par exemple, l'*équation chimique* est très loin de *l'équation mathématique* (De Serres, 2000); elle serait en fait plus près de la vision qu'ont les étudiants de la *formule mathématique* (elle-même très loin de la *formule chimique*) car elle représente une transformation possible, un traitement applicable et non une égalité. Par conséquent, elle pourrait même renforcer les biais conceptuels introduits par l'approche procédurale, en permettant à l'étudiant de « voir » le « résultat » de l'équation, d'associer fortement la petite flèche au signe « = », et de perpétuer ainsi le caractère opératoire de ce dernier.

> *« Mais en chimie, c'est… t'écris ton équation, puis… je vois plus, c'est plus clair pour moi la chimie que la physique. »*
>
> Helga, étudiante à Polytechnique

L'application consacre aussi l'usage d'un vocabulaire, en imposant aux mots un sens précis et un usage rigoureux. Or, on retrouve souvent des erreurs liées au mauvais emploi d'un terme particulier : un cas classique, que nous avons rencontré régulièrement en période de validation de la grille, consiste à confondre en mathématiques financières le « *taux effectif* » avec le « *taux nominal* ». Toujours en mathématiques financières, on a pu noter chez Michel, Charles et Fabienne, un mauvais traitement des termes « *mensuel* », « *trimestriel* »

[24] Cette erreur que nous présentons comme un problème d'explicitation, où l'on ne reconnaît pas le géométrique derrière la représentation graphique, pourrait aussi être vue comme un problème d'évaluation où l'on n'associe pas au concept de tangente la propriété d'être perpendiculaire au rayon. À défaut de pouvoir trancher sans information supplémentaire, nous avons associé cette erreur aux compétences 2.01 et 2.04 de la grille.

ou *« annuel »*. Chez Charles, ce manque de rigueur dans le vocabulaire se voit aussi au niveau des concepts mathématiques, car il passe volontiers, et en dépit des définitions, de *« fonction »* à *« équation »*, d'*« objective »* à *« optimale »*. À Polytechnique, Helga a confondu les termes *« glissement »* et *« frottement »*, et, en entrevue, Mark a parlé de *« gravité »* pour décrire une *« force centrifuge »*. On peut voir dans ces erreurs ou glissements sémantiques des illustrations des difficultés langagières identifiées pour ces étudiants (voir section 5.2.4), qu'on n'a pas su corriger au secondaire où, en français comme en mathématiques, les examens à choix multiples n'ont pas favorisé le développement d'une rigueur dans l'explicitation.

Le rapport avec le français joue aussi un rôle crucial dans la compréhension de l'application dans toute sa complexité. En effet, avant de pouvoir saisir les subtiles ramifications de l'application, il faut d'abord savoir et aimer lire, synthétiser, traduire, autant pour comprendre la théorie du cours :

> *« Il y a beaucoup de textes qui parlent beaucoup comment interagissent les procédés puis tout ça, puis ça a toujours l'air que ça me prend peut-être plus de temps, et comme je manque de temps pour étudier aussi, je survole toujours ces paragraphes-là, et j'essaie de voir tout de suite la formule et... de retenir toutes les formules qu'il y a là-dedans, comment jouer avec et j'essaie de faire les problèmes. »*
>
> Mark, étudiant à Polytechnique

> *« J'aime pas ça lire. J'aime ça m'attaquer directement aux problèmes, puis ça, c'est pas... faut pas vraiment faire ça. Faut vraiment lire la théorie parce que le prof, elle fait juste tirer les grandes lignes. Faut vraiment lire, comprendre les exemples, puis après faire les exercices. Ça, ça cause un problème, faut je m'habitue à lire plus. »*
>
> Helga, étudiante à Polytechnique

que pour suivre l'état des recherches ou en effectuer de nouvelles :

> *« Une fois que t'as ta théorie, c'est passablement assez facile de faire du code. Mais il faut que tu fasses de la recherche. Si t'aimes ça faire de la recherche... Lire, beaucoup lire, c'est très important parce que, sinon, t'arrives devant ton "chose", faut que tu "devines" comment que tu vas créer ton protocole, c'est niaiseux un peu, à quelque part... »*
>
> François, étudiant en informatique

> *« Comment je procède? Généralement, c'est que tu y vas par définitions. Mettons que quelqu'un va te remettre un projet à faire en C ++. Tu lis ton projet. Tu définis tes entités, un peu comme en bases de données. »*
>
> François, étudiant en informatique

> *« Juste sur les OGM, puis tout ça, je lis des articles là-dessus. Je sais pas, j'aime un peu, comme, m'intéresser à ça, là. J'aime savoir autre chose que sur juste des calculs, savoir un petit peu des relations humaines, c'est quoi le lien, qu'est-ce qui se passe un peu, là; tu sais, c'est quoi les recherches là-dedans puis tout ça, là. »*
>
> Alexandre, étudiant à Polytechnique

> *« Le projet, c'était faire l'analyse du lait. Il y avait beaucoup de recherche à faire… Recherche sur c'était quoi un lactose, définition, c'était quoi les autres constituants… Recherche dans l'histoire aussi, avec le lait. Sur internet aussi, un peu, mais beaucoup dans les livres. On a appris comment faire des recherches, aussi, puis comment travailler dans un projet. Parce qu'on n'en avait jamais fait avant. »*
>
> Helga, étudiante à Polytechnique

Il n'est donc pas surprenant que l'explicitation dans l'application représente un problème pour ceux qui disent aimer les mathématiques parce qu'elles leur apparaissent, tout au moins à travers l'enseignement qui leur en a été donné, moins exigeantes que d'autres disciplines en termes de lecture, d'interprétation et de compréhension.

> *« Ce que j'aime en mathématiques, c'est moins théorique, d'une part. Parce que j'aime pas ça lire. J'aime mieux voir les formules, les démonstrations. Puis pratiquer. »*
>
> Helga, étudiante à Polytechnique

> *« Je trouve ça, les mathématiques, plus faciles, dans le sens que, tu sais, il y a moins de choses à comprendre. »*
>
> Mark, étudiant à Polytechnique

5.3.4 Liens avec les compétences d'évaluation

Comme nous l'avons décrit antérieurement, la structure par micro-objectifs sous-jacente aux programmes de l'enseignement secondaire semble avoir eu des effets déterminants sur le développement des compétences d'évaluation. Les étudiants qui ont adhéré fortement à l'approche procédurale tiraient parti de cette structure qui leur était imposée de façon externe. Certains ont donc cherché ensuite, parfois en vain, une structure « prête-à-porter » dans leurs cours subséquents. Mark décrit sous cet angle ses cours de chimie du collégial qu'il dit avoir apprécié :

> *« Leur méthodes de travail pour enseigner étaient, comment dire, plus faciles à apprendre. Le prof, il donnait des bonnes notes au tableau, toutes structurées, on avait un cahier de notes qui était relié aux notes du prof, donc tout ce qu'on faisait c'était rajouter ce qu'elle disait. »*
>
> Mark, étudiant à Polytechnique

Pour chercher à structurer soi-même, il fallait être animé d'une volonté personnelle de le faire. Pour Fabienne, celle-ci a commencé à se manifester au cégep, après un choc initial :

> *« Première session de cégep, j'ai eu mes trois premiers examens, math, chimie, physique: 30, 30, 30. J'ai dit "Ah… je pense que faudrait étudier!" »*
>
> Fabienne, étudiante aux HEC

C'est là, dans l'apprentissage des autres disciplines, qu'elle a enfin appris à faire la recherche des éléments essentiels :

> *« Ce qu'ils nous faisaient faire au cégep, c'est génial; ils te donnaient une feuille 8 $^{1}/_{2}$ par 11, puis t'avais juste droit à ça comme notes, fait que le monde écrivait tout petit, évidemment… En sciences, j'ai commencé à faire ça, des examens où c'est que t'avais beaucoup de stock à apprendre par cœur, là ils te l'offraient tous… à part en mathématiques. Comme j'avais une section "Formules": toutes mes formules étaient là, là j'allais chercher toutes mes formules. En économie, je me rappelle, mettons, la loi de la demande avec les facteurs, j'avais une section "Demande", j'énonçais ma loi, mes facteurs, juste les choses importantes… »*
>
> Fabienne, étudiante aux HEC

Elle souhaite maintenant appliquer cette stratégie d'apprentissage à tous ses cours, incluant ceux de mathématiques :

> *« Je pense je vais me le refaire à l'université, juste le fait d'essayer de trouver ce qu'il y a de plus important pour marquer dans ta liste... dans ton seul document que tu peux emmener, là, ça me donne l'étude, je l'ai jamais utilisée cette feuille-là à l'examen. Juste le fait de retranscrire, d'aller les chercher, d'essayer de comprendre, c'était déjà tout rentré dans ma tête. C'est ce que j'ai l'intention de faire maintenant, que ce soient des cours où c'est qu'il y a beaucoup de matière, je trouve ça génial, tu sais, c'est d'abstraire ce qu'il y a de plus important, puis avec ça, ben tu fais tes liens tout seul. »*
>
> Fabienne, étudiante aux HEC

Ce début de structuration se combine chez elle à un intérêt pour la *compréhension de systèmes organisés*. Quand elle était plus jeune, cet intérêt était dirigé en sciences biologiques, et maintenant, elle manifeste une volonté semblable de comprendre les systèmes de gestion, les opérations de production.

> *« J'étais très "sciences", j'ai fait partie d'un club qui s'appelait "Les petits débrouillards" je crois, un petit stage de sciences que t'avais le soir, puis on apprenait l'électricité, les lasers, des petites formules chimiques, on présentait ça à nos parents. Moi, j'étais plus biologie, biologie animale, chimie... »*
>
> *« J'ai été commis à la facturation, ça c'était super intéressant parce qu'ils étaient en implantation de système pour l'an 2000. Donc on travaillait sur deux systèmes en même temps. (...) Tout était inter-relié. »*
>
> *« Mon objectif pour le moment, j'ai changé récemment, je voudrais m'en aller en gestion internationale, peut-être G.O.P. (Gestion des opérations de production). »*
>
> Fabienne, étudiante aux HEC

En classe, elle cherche surtout à comprendre le cours et consacre chaque soir à retranscrire ses notes en les structurant. Cela lui permet déjà d'extraire les connaissances-clés qui lui permettront de déduire les autres :

> *« Si je prends Math financières, présentement celui que j'ai, j'ai besoin peut-être de trois formules, puis avec les manipulations, tu trouves les autres. Future Value, Present Value, puis ton taux de rendement, puis à partir de ces trois-là, je peux aller chercher mes taux équivalents, je peux aller chercher mes autres ... »*
>
> Fabienne, étudiante aux HEC

Chez elle, on pourrait dire que la volonté d'organiser ses connaissances procède d'un intérêt pour l'application :

> *« Plus on avance, plus on applique des affaires, plus ça va, plus je me rends compte que tout ce qu'on a vu au secondaire, on l'applique encore… Puis plus ça va, plus je comprends, plus je suis capable de faire le lien avec mes mathématiques, de l'abstrait au concret. »*
>
> Fabienne, étudiante aux HEC

Pour ceux qui comme Geneviève ou François manifestent un même intérêt pour l'application mais chez qui le manque de pratique mathématique a gommé les procédures mémorisées, il est plus difficile de procéder à une telle structuration des connaissances : les concepts sont perdus et les liens pour les retrouver n'ont jamais été établis.

Certains cherchent encore à structurer au niveau de la forme des problèmes plutôt qu'au niveau des concepts ou des principes sous-jacents.

> *« Puis, même des fois en lisant, j'essaie de faire les problèmes comme les exemples qu'ils donnent, tu sais, la même stratégie, mais sans comprendre le pourquoi des choses. »*
>
> Helga, étudiante à Polytechnique

Helga est consciente que ce n'est pas la meilleure stratégie, mais ses difficultés en lecture la contraignent quelques fois à se limiter à cet apprentissage superficiel. Une telle forme d'apprentissage se heurte tôt ou tard au grand nombre de cas de figures introduits par l'application. Lucie en témoigne, elle qui, rappelons-le, met à profit les exemples et les problèmes résolus pour construire ses connaissances.

> *« En maths, à Polytechnique, c'est le fun, on a accès aux examens des sessions passées. Tu fais tes exercices, tu comprends, t'essaies les examens, ça va quand même bien, t'arrives à l'examen, t'as PAS DE SURPRISES. L'examen va être, comme…Ils ont comme un standard dans leur examen, le format est semblable, les questions sont semblables d'une année à l'autre, puis, bon, tu sais à quoi t'attendre. Mais en mécanique, ils vont encore me donner quelque chose que je comprendrai pas, un gros problème fou, c'est sûr! »*
>
> Lucie, étudiante à Polytechnique

Hughes, qui travaille aussi à partir des problèmes et qui a, de plus, tendance à ne les aborder qu'à la dernière minute, était déconcerté dans ce même cours de mécanique (qu'il avait suivi lors de sa session à Polytechnique), car il n'était pas en mesure de juger a priori de ce qu'impliquait un problème et de l'importance, par conséquent, de l'inclure dans sa liste des problèmes à faire.

> *« Dans le chapitre, il y avait 150 numéros, puis ils nous disaient pas lesquels qu'il fallait faire, lesquels qui étaient importants... »*
>
> Hughes, étudiant en informatique

Pour éviter d'avoir à exercer un tel jugement dans le cours de *Structures discrètes*, Ninon choisit de faire presque tous les exercices du livre de référence en préparation à un examen.

> *« Ouais, ben j'essaie de tous les faire! Je les fais tous sauf les "démontrer"... Les derniers exercices où ils nous disent de démontrer le théorème, alors ça, je les fais pas!!!...* (rires) *J'ai une amie, elle, elle fait pas d'exercices, elle bosse surtout le cours. Elle essaie surtout de comprendre le cours. Mais moi, je lui fais "bon, ben, moi, je te conseille surtout de faire les exercices, de tous les faire, que ça te prépare mieux, pour pas que tu sois trop en terrain inconnu." »*
>
> Ninon, étudiante en informatique

À l'opposé, Alexandre ne ressent pas la nécessité de faire tous les exercices dans le cours de mécanique.

> *« Ben, j'essaie vraiment de comprendre. Là, je pousse plus sur la compréhension. Je fais pas tous les exercices, mais j'essaie de comprendre. Peut-être, parce que je suis structuré, là. »*
>
> Alexandre, étudiant à Polytechnique

En plus de consacrer plus de temps à lire, il s'applique à poser des questions au professeur pour comprendre la portée d'un concept et son utilisation dans les problèmes.

> *« Je pose pas mal de questions au prof. Je pense c'est ça qui aide aussi. Mettons qu'il y a une séance de trois heures, c'est toujours moi qui reste pendant une heure tout seul avec le professeur pour poser des questions. Tout le monde s'en va. Tout le monde a mieux à faire ... »*
>
> Alexandre, étudiant à Polytechnique

L'utilisation du questionnement pour structurer les connaissances en cherchant à comprendre la portée d'un concept et les limites d'une méthode peut dépendre de l'utilité personnelle qu'on associe à ces connaissances. Si l'utilité est perçue comme essentiellement scolaire, on aura plus tendance à se limiter à une préparation aux problèmes susceptibles d'être posés à l'examen. Ainsi, si Helga ne prend pas toujours le temps de « *comprendre le pourquoi* » en mécanique, elle n'en voit pas non plus l'utilité, au-delà de la note requise pour poursuivre son programme de génie chimique :

> « *C'est une démotivation totale, en physique, là, depuis le début!... Je sais qu'il y aura pas d'utilité, vraiment... Je vais pas utiliser la physique dans qu'est-ce que je vais faire en génie chimique...* »
>
> Helga, étudiante à Polytechnique

En revanche, si l'on perçoit que, sur un plan personnel, cette utilité déborde du cadre scolaire, alors on sera davantage enclin à prendre des initiatives pour tester les possibilités d'utilisation d'un concept ou d'une approche, ce qui mènera à une meilleure compréhension de ses propriétés.

> « *Maths financières, ça m'intéresse un peu plus parce que j'en vois une nécessité, je vois que je peux m'en servir concrètement là, donc ça, ça peut aider... Des questions que tu te poses aussi... si je suis chez nous, je voudrais faire ça, "ah, ben je pourrais peut-être...", t'arrives à ton prof, tu dis "Écoute, chez nous, je voulais faire ça puis là, avec ça, c'est-tu avec ça que je peux me servir...?", "Ben oui." Là tu vois que tu peux situer pourquoi t'apprends ça. C'est plus motivant. Quand c'est plus motivant, tu vas être plus attentif, si t'es plus attentif, tu comprends plus facilement, puis après ça, c'est une joke.* »
>
> Charles, étudiant aux HEC

Ces initiatives seront d'autant plus probables que l'orientation des études et le cours en particulier correspondent à un intérêt véritable, comme chez Charles, qui à travers son expérience dans le milieu du cinéma et du spectacle, s'est découvert un intérêt en production et en finance :

> « *Pour être responsable de projet, ou si c'est en finance, bien, gestion de porte-feuilles. Des choses comme ça. À l'École, je commence à regarder la Bourse, puis je trouve ça intéressant, tu sais. Parce que la Bourse, je trouvais ça un petit peu fascinant, mais je comprenais pas trop trop comment ça fonctionnait... Mais maintenant, je comprends comment ça fonctionne, puis tout ça... Tu sais, tu vois les possibilités qu'il y a, c'est des choses que je trouve intéressantes.* »
>
> Charles, étudiant aux HEC

Elles risquent d'être moins présentes chez celui dont l'orientation des études représente, comme chez Michel, le résultat d'un compromis :

> *« J'ai pas encore choisi précisément où je me m'oriente… comptabilité ou… bon, il y a cinq, six autres domaines, là. Mais je dirais que c'est vraiment d'acquérir une formation qui va me permettre de bien m'installer sur le marché du travail. L'administration, parce que je pense que j'ai les aptitudes pour bien réussir là-dedans… comparativement à un domaine de sciences où peut-être que au niveau des aptitudes, je serais moins bien nanti. »*
>
> Michel, étudiant aux HEC

Même si elles en dépendent fortement, les compétences d'évaluation ne se réduisent pas à la *structure* des connaissances. Elles requièrent aussi que soient inscrits et développés les processus de *planification* de stratégie et de *validation* de solution qui feront appel à ce réseau de connaissances.

Au niveau de la planification qui consiste à identifier les ramifications de la stratégie qu'on se propose d'utiliser, on sent une certaine résistance chez ceux qui ont fortement adhéré à l'approche procédurale à renoncer au schéma habituel données→ formule(s)→réponse. Nous en avions eu une illustration dans la section précédente (5.3.3) avec la tentative de résolution de Mark, mais dans son cas, le problème se doublait d'une incapacité à modéliser le système par les équations appropriées. Si Lucie, lors de la résolution du même problème, a su définir correctement les équations de départ (à une erreur de géométrie près dans l'identification du point de contact), elle n'a pas pu élaborer une stratégie de résolution adéquate. Comme chaque équation faisait intervenir plus d'une inconnue ($\vec{v}_c$ et w_{AB} dans l'équation de la crémaillère ; $\vec{v}_c$ et w_o dans celle de l'engrenage), Lucie s'est débarrassée de cette « impasse » apparente en posant, à tort, le vecteur $\vec{v}_c$ à zéro au lieu de considérer l'ensemble du système d'équations défini par l'égalité des composantes de $\vec{v}_c$.

Toujours dans l'examen de Polytechnique, le Problème 4 était sûrement celui qui faisait appel à la stratégie la plus élaborée. La figure suivante donne un schéma des étapes impliquées :

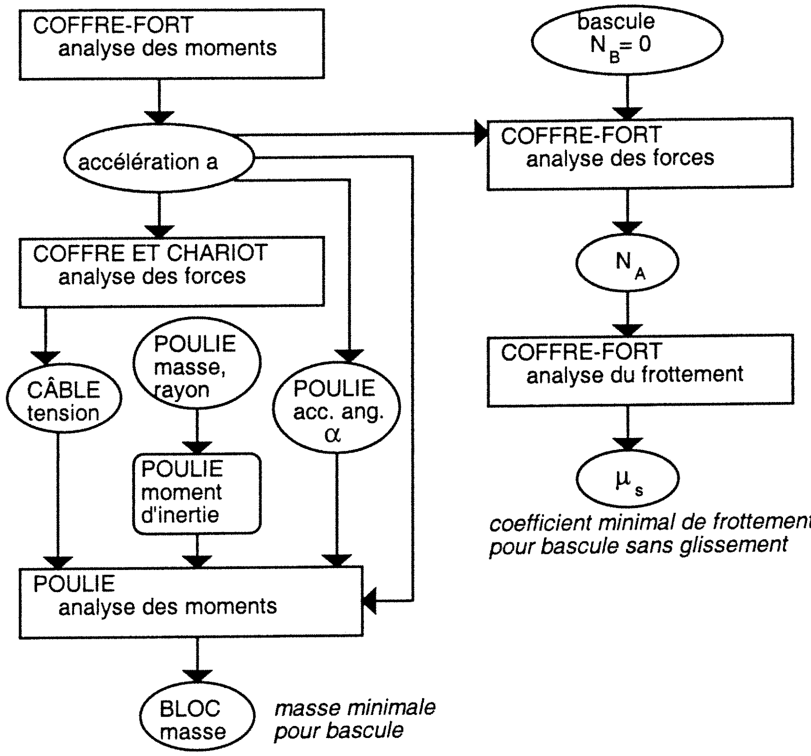


Figure 11 – Stratégie pour résoudre le Problème 3 de mécanique

Contrairement au Problème 1, le Problème 4 n'exigeait pas la résolution algébrique d'un système d'équations, dans le sens où il était possible de définir un ordre d'utilisation des différentes formules pour retrouver les valeurs recherchées. Cette réalité aurait pu avantager Mark, mais il n'a pas su, là non plus, modéliser correctement le système physique. Alexandre a fait intervenir correctement toutes les différentes analyses requises, mais il n'a pas cherché à en agencer l'ordre, se satisfaisant de la définition d'un système de 5 équations à 5 inconnues, qu'il choisira de ne pas résoudre. Si Lucie a fait une bonne analyse de la poulie, elle a omis l'analyse des moments sur le coffre-fort et n'a pas cherché à regrouper ses résultats. Il s'agit presque d'un complément du travail d'Helga, où l'on retrouve un bon traitement du coffre-fort (incluant l'analyse des moments) mais une mauvaise analyse de la poulie et pas de prise en compte du chariot.

Aux HEC, on retrouve d'autres manifestations des difficultés à entrevoir et agencer les différentes ramifications requises dans la résolution d'un problème. Dans le Problème H-2 de l'examen de mathématiques financières (Annexe F) où il fallait définir un plan financier pour constituer un fonds d'études universitaires, Michel a traité indépendamment les montants à accumuler pour les fonds du bacc et de la maîtrise, sans réaliser que les intérêts pour constituer celui de la maîtrise couraient aussi pendant la période du bacc. Lorsqu'à la question 3 de ce problème, il fallait analyser l'effet d'un changement de taux d'intérêt sur les versements à effectuer pour constituer le fonds dont on retirerait plus tard une rente mensuelle pré-déterminée sur une période de temps finie, Geneviève n'a pas vu que ce changement, en plus de modifier les versements pour constituer le fonds, redéfinissait au départ le montant à accumuler.

Du côté de la validation de la solution, l'application apporte de nouvelles possibilités en permettant de juger du réalisme d'une réponse obtenue. Mais pour ce faire, il faut avoir compris le sens des variables dans l'application en question et avoir développé l'habitude de valider par ce sens.

> *« Mettons c'est des intérêts, ou des montants, des profits ou quoi que ce soit, là, tu vois que ça a du bon sens, tu peux le voir avec l'ordre de grandeur de la réponse. »*
>
> Geneviève, étudiante aux HEC

De par son changement récent d'orientation, des sciences vers l'administration, Michel n'est apparemment pas encore rendu à ce stade, puisqu'il ne cherchera pas à revoir sa réponse selon laquelle une diminution des taux d'intérêt lors de la constitution du fonds d'étude entraînerait une diminution des versements à effectuer pour constituer ce fonds.

De même, Mark qui se trompera d'unités dans le calcul des forces (faisant intervenir des grammes là où il aurait dû utiliser des kilogrammes) affichera sans hésitation la valeur impressionnante de 490 500 N pour le poids exercé par le coffre-fort.

Toujours dans cette perspective de validation par le sens, on aurait pu en principe récupérer de l'erreur de géométrie du Problème 1 de l'examen de mécanique. En effet, l'utilisation de D comme (faux) point de contact (voir Figure 10) conduisait, si les calculs étaient effectués correctement, à une vitesse angulaire nulle pour la crémaillère, réponse qui aurait dû être rejetée d'un simple regard intuitif sur le mouvement de l'ensemble puisqu'il était clair qu'en tirant sur A, on abaissait l'angle décrit par la crémaillère avec l'horizontale. Or, trois étudiants sur les neuf (incluant Alexandre) aboutiront à cette réponse et en sembleront satisfaits.

Il y a peut-être dans ces exemples une illustration d'un manque dans la formation mathématique où l'on n'a pas cherché à développer une habitude de validation par le sens de la solution :

> *« Si le prof s'arrête à donner une réponse, puis pas à aller plus loin… Si on arrête à la réponse, j'ai l'impression que c'est des maths. »*
>
> Fabienne, étudiante aux HEC

Et comme les étudiants ont tendance à se limiter dans leur travail personnel aux problèmes où la réponse est donnée, ils ne ressentent jamais alors le besoin de valider de façon autonome la solution qu'ils obtiennent. Puisque dans un examen à développement, comme dans la « vraie vie », la réponse n'est pas disponible a priori, ce manque dans leur apprentissage se fait alors sentir.

La portée des compétences de validation ne se limite pas à la vérification de la solution. Celles-ci peuvent aussi être mises à contribution lors de la planification de la stratégie. En effet, pour bien des problèmes, la résolution consiste à trouver le vecteur X^* (défini par l'adjonction des différentes variables) tel que $f(X^*) = b$, système donné par l'ensemble des équations liant ces variables ; pour d'autres problèmes, le vecteur X^* cherché est celui qui minimise $f(X)$ pour l'ensemble des X admissibles.[25] Selon ces modèles, valider une solution X^s consiste à évaluer $f(X^s)$ et à le comparer à la valeur cible b (dans le cas de la résolution d'un système d'équations) ou à des valeurs alternatives (dans le cas d'un problème d'optimisation). En l'absence d'une solution identifiée, on peut envisager d'utiliser différents vecteurs X pour analyser le comportement de $f(X)$. En particulier, il est possible d'utiliser comme vecteurs X des points extrêmes du domaine réalisable pour chercher à encadrer $f(X)$. On peut aussi choisir un point X^0 quelconque de ce domaine dont on évalue $f(X^0)$ et à partir duquel on calcule par itérations successives de nouveaux vecteurs X^n tels que $f(X^n)$ se rapproche progressivement de la valeur cible ou d'un minimum. Cette

[25] Un problème qui chercherait à maximiser $g(X)$ est évidemment équivalent à celui qui cherche à minimiser $f(X)=-g(X)$.

approche numérique itérative, couramment utilisée en calcul scientifique et en recherche opérationnelle, est intimement liée à la complexité des systèmes d'équations générés par les applications réalistes et est évidemment rendue praticable par les moyens informatiques.

Un étudiant du groupe de Polytechnique a fait montre d'une aptitude à envisager une telle approche dans la résolution du problème P-2 (Annexe F). Comme il ne fait pas partie du groupe des participants au niveau qualitatif, nous avons peu d'information sur son rapport avec l'application ; nous savons cependant qu'il détient un DEC en techniques de génie. Pour sortir de l'impasse où l'avait conduit l'incapacité à identifier la dérivée comme concept-clé dans la recherche de la hauteur permettant de maximiser la distance parcourue par la rondelle, il s'est rabattu sur les cas extrêmes.

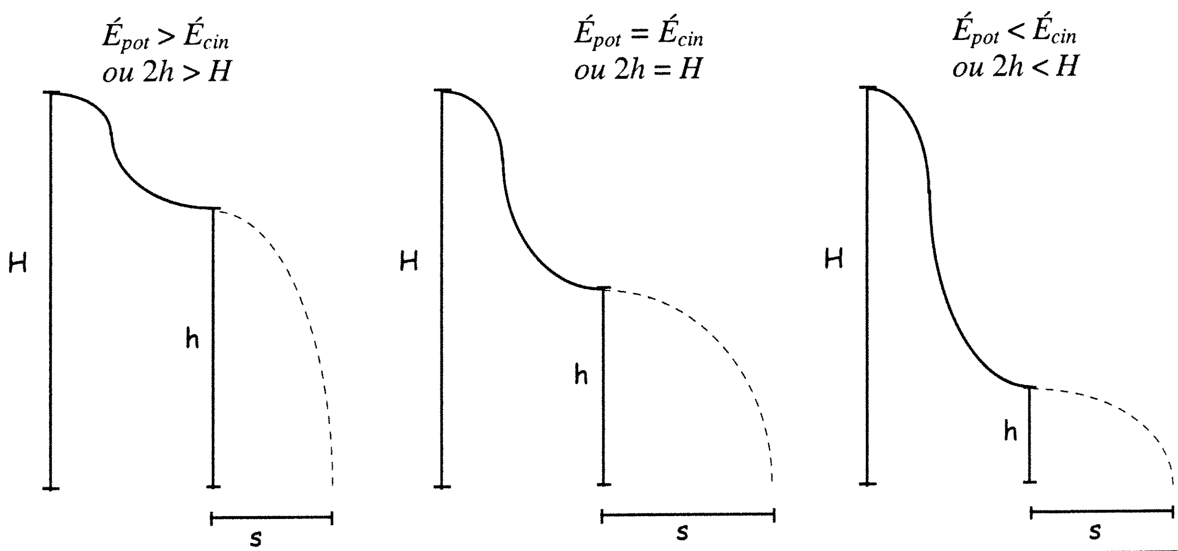
Énergie potentielle $= mgh$

Énergie cinétique $= \frac{1}{2}mv2$

au sommet: seulement énergie potentiel (sic)
au sol : seulement énergie cinétique
donc pour que s soit maximale, il faut que $\acute{E}_{pot} = \acute{E}_{cin}$ *et cela est lorsque*

$$2h=H \ ou \ h = \frac{1}{2}H$$

car voici ce qui se passe lorsque :



Il convient de reprocher à cette démarche un manque de rigueur dans les déductions, manque qui, l'on s'en doute, fut fortement pénalisé à la correction. Toutefois, si l'on adopte une perspective essentiellement pragmatique, il reste que cette approche a permis d'« arriver » à la réponse ($h = \frac{H}{2}$), là où effectivement il y a égalité entre les énergies cinétique et potentielle de la rondelle, puisque, par conservation d'énergie, la somme de ces deux quantités demeure constante et que l'énergie potentielle décroît de façon linéaire par rapport à h. Ce qui est moins clair, cependant, c'est que cette distribution d'énergie est celle qui maximise la distance parcourue. Les représentations graphiques cherchent donc à compléter la démarche en « simulant » la distance parcourue pour différentes valeurs de h. Ce qu'on n'a pas su montrer par l'analyse mathématique et le calcul, on le devine par le sens accordé aux variables et on est aidé en ce sens par la chance, car il serait utopique de croire que de trancher la poire en deux constitue systématiquement la stratégie optimale.

Que penser alors d'une telle stratégie ? Prise seule, elle a en effet peu de valeur. Mais accompagnée d'un environnement informatique où il devient possible de calculer exactement et rapidement la distance parcourue pour différentes valeurs de h, elle fournit alors une valeur initiale plus qu'acceptable tout en préservant chez l'utilisateur la capacité d'exercer un certain jugement critique sur la solution.

5.3.5 Synthèse

Comme nous l'avons vu, l'entrée des étudiants dans des domaines faisant une place privilégiée à l'application ne se fait pas sans heurts chez ceux dont les habitudes en résolution de problèmes mathématiques sont marquées par les approches procédurales antérieures d'enseignement et d'apprentissage. Par ailleurs, il semble qu'un intérêt pour l'application puisse avoir pour effet chez certains d'atténuer ou même de contrer certains des effets associés à l'approche procédurale, en incitant à comprendre le *sens* et la *portée* des concepts. La Figure 12 résume les principaux effets observés de l'introduction de l'application sur les compétences mathématiques, en utilisant à nouveau le modèle

« *effets – catalyseurs – inhibiteurs* » appliqué à cette question et une approche équivalente à celle décrite en 5.2.6.

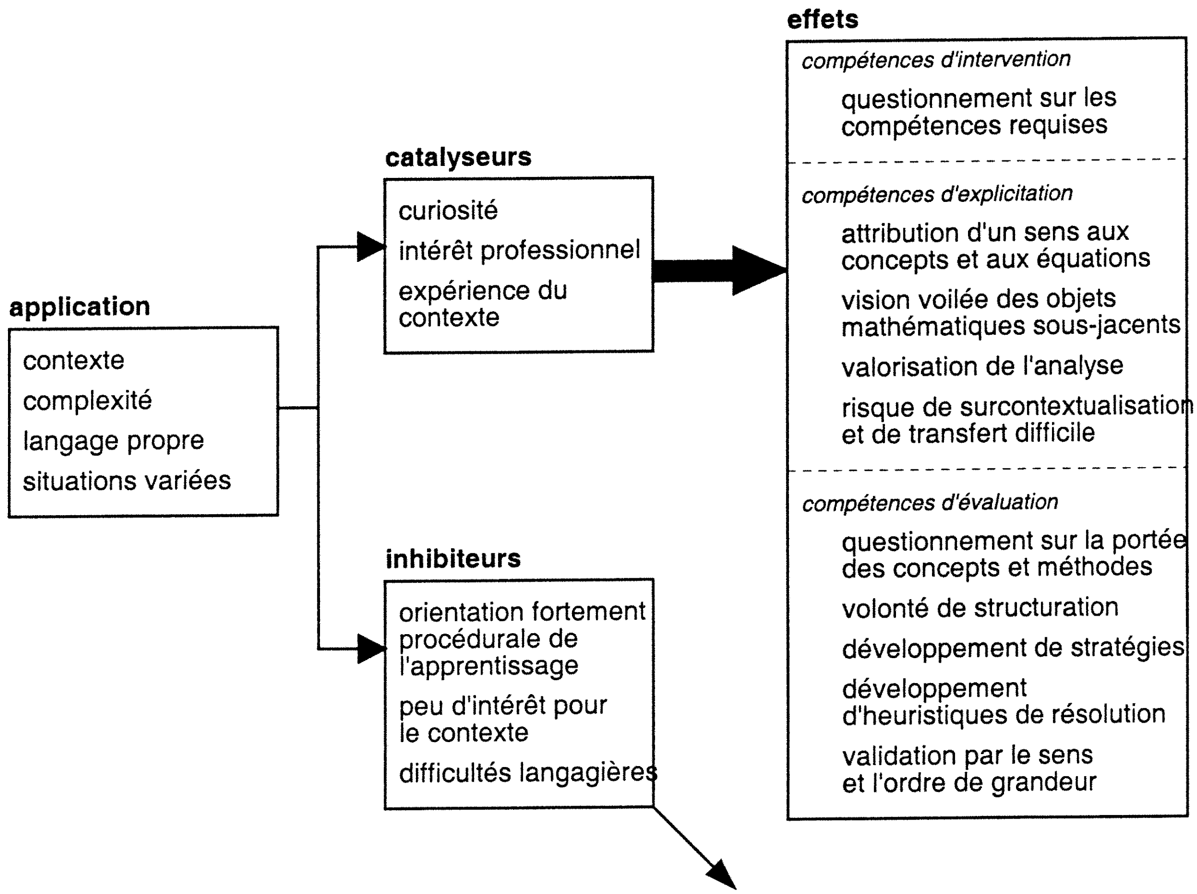


Figure 12 – Effets observés du rapport à l'application

De façon générale, les effets apparaissent plus positifs que négatifs, mais ils requièrent de la part de l'étudiant autant une sensibilité particulière à l'application présentée que la possibilité de se dégager des influences de l'approche procédurale.

5.4 Le rapport à l'informatique

D'après le Tableau 6 de la section 4.3.3, environ le tiers des étudiants de Polytechnique et d'informatique auraient souhaité une forme d'intégration de la technologie dans la formation mathématique qu'ils ont reçue. Comment interpréter un tel souhait? Comment expliquer qu'on ne le trouve pas aussi clairement exprimé chez les étudiants des HEC qui pourtant utilisent quotidiennement leur ordinateur portatif, y compris pour leurs cours de mathématiques? Quel rapport à l'informatique les étudiants ont-ils construit au cours de leur formation secondaire et collégiale? Quels en sont les effets sur leurs compétences actuelles en résolution de problèmes? À nouveau, les étudiants que nous avons reçus en entrevue viennent apporter l'éclairage nécessaire.

5.4.1 Perception et motivation

S'ils ne témoignent pas tous d'un intérêt spontané envers l'informatique, les étudiants considèrent, de façon unanime, la technologie comme un incontournable sur le plan professionnel et, par conséquent, attribuent un caractère nécessaire au développement de compétences qui lui sont liées. La place importante accordée à l'utilisation de l'ordinateur aux HEC contribue ainsi à attirer certains étudiants.

> *« Moi, je veux devenir comptable agréé. Donc j'ai choisi les HEC pour le programme, surtout à cause de l'utilisation de l'ordinateur. Si tu vas travailler en comptabilité, t'auras pas le choix de travailler sur informatique, fait que t'es mieux de l'apprendre dans ta formation puis de faire des erreurs là, que quand t'es rendu sur le marché du travail puis que t'as tout à apprendre. »*
>
> Geneviève, étudiante aux HEC

Dans leurs propos, les étudiants font surtout référence à l'internet, au traitement de texte, à l'utilisation de logiciels en lien aux activités professionnelles qu'ils envisagent, même si cette vison est encore assez floue pour plusieurs. Mais il est intéressant de noter que certains excluent de façon explicite la programmation de la liste des compétences nécessaires, et même de ce qu'on entend généralement par « informatique ».

> *« C'est sûr que la programmation, c'est peut-être moins utile, mais vraiment « informatique », comment manier l'ordinateur puis tout ça, je pense que ça va être plus utile. »*
>
> Alexandre, étudiant à Polytechnique

En plus de ne pas être perçu comme nécessaire, l'apprentissage de la programmation apparaît pour certains réservé à une catégorie particulière d'individus, ceux qui peuvent en comprendre à la fois la logique et les aspects techniques.

> *« Je pense que ça prend un esprit quand même très perspicace, quelqu'un qui voit les choses venir avant qu'elles soient écrites. »*
>
> Michel, étudiant aux HEC

> *« C'est pas tout le monde qui serait capable de faire de la programmation. Il me semble que la programmation, il y a du monde qui l'ont, puis il y a du monde qui l'ont pas. »*
>
> Hughes, étudiant en informatique

Au-delà d'une adaptation à la pression sociale exercée par l'omniprésence des ordinateurs, plusieurs attribuent aux compétences d'utilisation de l'ordinateur un gain en efficacité dans leur travail futur ou même dans leur travail scolaire actuel.

> *« Dans le fond, pourquoi on a un ordinateur, c'est juste parce que c'est plus rapide. »*
>
> Charles, étudiant aux HEC

> *« L'informatique peut te permettre de résoudre tes problèmes peut-être plus vite parce que des fois, il connaît les formules puis quand l'ordinateur connaît les formules, bon, ça peut aller peut-être plus vite. »*
>
> Lucie, étudiante à Polytechnique

> *« Avec un ordinateur portable, c'est plus rapide, les notes sont beaucoup plus claires. Moi, je prends mes notes sur informatique, c'est génial, à part en maths, parce c'est plus dur de faire des diagrammes. Mais dans les autres cours, c'est génial, j'ai pas besoin de retranscrire mes notes, elles sont telles quelles. »*
>
> Fabienne, étudiante aux HEC

Si certains, comme Helga, y voient aussi la possibilité de résoudre des problèmes de grande taille, jusque là difficilement abordables :

> *« Par exemple, si t'as une matrice vraiment grande, puis tu veux la résoudre, ben si t'as un programme puis tu sais comment l'utiliser, ben tu peux le faire. »*
>
> Helga, étudiante à Polytechnique

cela n'exclut pas un certain scepticisme quant à la valeur ajoutée de l'ordinateur face aux capacités humaines. Selon Charles, cet appareil ne ferait que répéter, plus rapidement, ce qu'on a bien voulu y « entrer » :

> *« Parce qu'à la base, tu sais, quand ils nous disent "c'est impossible de le faire tout seul, c'est juste un ordinateur qui le fait", ben l'ordinateur, il l'a pas deviné, c'est quelqu'un qui l'a fait lui même puis qui l'a rentré dans l'ordinateur, donc c'est possible que tu le fasses. C'est juste que toi, ça te tente pas de prendre deux semaines à développer pendant des heures et des heures et des heures… »*
>
> Charles, étudiant aux HEC

Chez Hugues, Geneviève et Ninon, la motivation à utiliser un ordinateur procède d'une fascination pour l'appareil qui remonte à l'enfance. Chez François qui avait d'abord développé au primaire un certain intérêt pour l'ordinateur, c'est vraiment plus tard, lors de ses études collégiales, que cet intérêt s'est imposé, lorsqu'il a pu être en mesure de vraiment comprendre comment fonctionnait l'appareil

> *« Mes parents ont acheté un autre ordinateur plus récent, puis j'ai recommencé à m'intéresser. J'avais beaucoup d'amis qui étaient justement en informatique, puis qui me disaient ce qu'ils voyaient, puis ils m'aidaient souvent quand j'avais un problème. Puis j'ai même monté mon ordinateur moi-même par la suite avec toutes mes pièces puis tout ça, puis c'est là j'ai commencé à me dire "aie, c'est le fun, ça, finalement, je devrais peut-être aller là-dedans!" »*
>
> François, étudiant en informatique

Cet attrait pour la machine est loin d'être partagé par tous. En plus de la complexité technique qui, nous le verrons, peut poser problème pour certains étudiants, d'autres facteurs, liés à la nature physique de l'objet, peuvent contribuer à en éloigner d'autres, du moins initialement. Ainsi, Charles supporte difficilement d'avoir à dépendre des caprices de fonctionnement de son ordinateur :

> *« J'ai une très grande frustration avec les ordinateurs vu que ça plante tout le temps. Tu sais, tu fais un travail, puis là, à un moment donné, il fige. Tout d'un coup, on dirait que, de nulle part, il plante, c'est tout. »*
>
> Charles, étudiant aux HEC

Chez Zoé, qui témoigne d'une sensibilité artistique qui s'exprime dans la peinture, c'est l'aspect extérieur de l'objet qui paraît faire obstacle :

> *« J'adore pas les ordinateurs.* (rires) *Comme objets, là, je trouve pas ça super-attirant… Je sais pas, l'écran, là, je trouve ça un petit peu froid, je trouve, c'est pas un objet qui m'attire vraiment. Faut que je passe par-dessus ça. »*
>
> Zoé, étudiante en informatique

Zoé réussit à « passer par-dessus » la machine et l'interface-usager pour s'intéresser à la nature conceptuelle de l'informatique, en particulier dans son rapport avec les mathématiques, là où elle peut retrouver un noyau *universel* et *éternel*, cher aux idéalistes.

> *« Mais qu'est-ce que je trouve bien dans le fait qu'on fasse des maths dans un bacc en informatique, c'est que… ben, tu sais, qu'est-ce qu'on voit en maths, c'est des choses toujours vraies, tu sais c'est sûr, là, tandis qu'en informatique, c'est toujours de l'application puis… par exemple, le fait qu'on voit du pseudo-code en 1063, ben, ça fait, tu sais, ça fait comme une base, là… tu sais, c'est sûr que c'est général, là, ça s'applique tout le temps, à n'importe quoi. »*
>
> Zoé, étudiante en informatique

Mais selon elle, l'informatique ne constitue pas tant un champ où l'on *applique* des mathématiques qu'une discipline où on les *« implique »* (Guedj, 1997).

> *« Tu sais, c'est pas un rapport direct, c'est un exercice intellectuel qui fait que tu peux penser d'une manière logique, puis cette pensée-là, si tu l'as quand tu fait de la programmation, ça t'aide; mais, c'est pas en appliquant des trucs directement, là… »*
>
> Zoé, étudiante en informatique

La contribution des mathématiques à l'informatique apparaît un peu plus clairement pour Hughes et François qui s'intéressent depuis plus longtemps à cette discipline :

« Veut, veut pas, l'informatique, toute la théorie informatique était mathématique avant, autrefois... juste à regarder la logique, là... Les dérivations à plusieurs variables, entre autres, c'est des concepts que tu retrouves en programmation en trois dimensions, beaucoup de ça. Ça, c'est une autre utilité des mathématiques que j'ai pas mentionnée. »

François, étudiant en informatique

« Le cours d'algèbre linéaire, c'est sûr qu'il va me servir en infographie si je vais là-dedans. Les mondes avec des vecteurs, puis les projections orthogonales, c'est sûr que ça va me servir. Puis, en intelligence artificielle aussi, c'est sûr que c'est utile. Un ordinateur, ça peut pas être intelligent, fait que c'est sûr qu'il y a des statistiques là-dedans[26]*... »*

Hughes, étudiant en informatique

Mais pour la plupart, la part des mathématiques en informatique demeure nébuleuse :

« Dans l'informatique, je trouve qu'il y a beaucoup de mathématiques aussi. Je sais pas mais c'est parce que, un jour, je suis rentrée dans la classe puis il y avait un prof d'informatique, puis elle faisait un dessin avec des axes, puis des formes, puis j'ai vu qu'il y avait des mathématiques dans l'informatique... »

Helga, étudiante à Polytechnique

« On m'a dit qu'il y avait beaucoup de mathématiques là-dedans et que... je pense que les mathématiques, c'est un des éléments principaux en informatique, ça se peut-tu ? Parce que mon frère, il est en info, il fait une technique, en tout cas, je me suis jamais renseigné s'il avait beaucoup de mathématiques, mais j'ai parlé avec d'autre monde qui est en génie info, qui ont dit que c'est une question de logique, qu'il y avait des mathématiques, beaucoup de mathématiques, je crois. »

Mark, étudiant à Polytechnique

« Le langage universel, c'est les mathématiques. C'est reconnu, c'est ce qu'il y a de plus facile à comprendre. Fait que l'ordinateur, lui, il va comprendre juste des chiffres. Donc, tout le principe est de numériser, là va prendre l'essence des mathématiques avec l'informatique, je pense. »

Charles, étudiant aux HEC

[26] Évidemment, ce commentaire ne devrait pas être cité hors contexte, ne serait-ce que par respect pour les satisticiens !

> *« Où je vois que les mathématiques peuvent servir en informatique? Euh... nulle part!...* (rires) »
>
> Ninon, étudiante en informatique

Pour sa part, Fabienne a une bonne intuition du rôle important que peuvent jouer les matrices en informatique, intuition qu'elle a développée au contact du logiciel EXCEL.

> *« Pour le moment, je suis surtout avec EXCEL, mais dans le fond, toutes ces formes-là, c'est des matrices. Sûrement, qu'en programmation, ça doit être des matrices, des choses comme ça. »*
>
> Fabienne, étudiante aux HEC

Mais elle ne se voit pas personnellement appelée à utiliser ses connaissances mathématiques en informatique :

> *« Je crois que les maths peuvent servir pour l'informatique pour ceux qui sont plus poussés en informatique. Comme ceux qui doivent faire, justement, de la programmation, qui doivent aller eux-autres dans le DOS que je comprends pas, j'ai l'impression que c'est là que les maths doivent aider. Mais pour les applications que moi je fais, je pense que c'est plutôt le contraire. C'est l'informatique qui sert pour faire des mathématiques. »*
>
> Fabienne, étudiante aux HEC

Fabienne résume assez bien le rapport établi avec l'informatique pour la plupart des étudiants : celui d'utilisation d'un outil, applicable en mathématiques ou ailleurs. Il convient maintenant de qualifier plus précisément ce rapport en explorant la façon dont il a pu se développer.

5.4.2 Apprentissage et développement

Le rapport à l'informatique s'est développé dans une variété de situations selon les différentes utilisations possibles de l'ordinateur : jeu, utilisation de logiciels-outils, programmation et intégration dans le cours de mathématiques. Nous allons donc examiner chacun de ces contextes d'apprentissage.

5.4.2.1 Entrée par le jeu

Pour ceux qui ont développé dès l'enfance une complicité avec l'ordinateur, celle-ci s'est presque toujours établie par le jeu. Il est important de distinguer entre *jeux d'action* et *jeux de stratégie*, car ces deux jeux ne font pas du tout appel aux mêmes habiletés et peuvent par conséquent teinter de façon très différente l'orientation du rapport à l'informatique, tout au moins à ses débuts.

Avec les *jeux d'action*, ce sont la vitesse et la précision qui sont mises en valeur dans un rapport qui se situe principalement au niveau de l'interface où l'on cherche à maîtriser une procédure bien définie, et qui constitue ou un prolongement (ou un substitut) de ce qui a pu se développer avec les jeux vidéo.

Du côté des jeux de stratégie, on retrouve les *jeux de quête,* autant sur l'ordinateur qu'en version vidéo :

> *« Ils appellent ça un « quest », là, c'est, mettons ça commence, faut que t'ailles sauver la princesse. Mais là, en premier, faut que tu trouves les sept cristaux qui sont dans différents mondes, fait que là, il s'en va dans chaque monde, faut que tu cherches, puis là, tu dis: "ok, je vais aller là, ok, je vais aller là", puis là, t'as des passages secrets, fait que là, tu dis "ok, je vais ouvrir ça"… »*
>
> Charles, étudiant aux HEC

Ce type de jeu ne fait pas nécessairement appel à une stratégie élaborée, planifiée plusieurs coups d'avance comme ce serait le cas aux échecs. On peut s'ajuster de façon *itérative*, dans une *approche essais-erreurs*, qui conduit éventuellement, par le *raisonnement inductif*, à identifier des *régularités.*

> *« Exploration, puis c'est plus aussi de chercher par techniques de tâtonnement, c'est sûr au début. Puis à un moment donné, les adeptes, ceux qui ont tout le temps joué à ça, ils vont comprendre le principe qu'il y a en arrière. Ils ont compris le pattern, fait que là, ils vont embarquer sur le « Zelda - Deuxième génération », ils vont dire "ok, ça non, ok, va là, puis tu devrais avoir ça là." »*
>
> Charles, étudiant aux HEC

Dans leurs versions plus primitives sur ordinateur, ces jeux représentaient aussi un défi en termes d'*explicitation*, dans la recherche et l'utilisation des *instructions* acceptées.

> *« Des jeux que j'aimais, entre autres, surtout les petits jeux comme Sierra, tout ce qui est « quest »... Ça c'était intéressant, c'était un challenge, parce qu'il fallait que tu trouves ce qu'il fallait que tu dises aux personnages, entre autres. Parce que tu parlais à ton personnage, tu lui faisais prendre ses mouvements, puis il fallait que tu l'écrives, genre "Take gem", il y avait un "gem" à terre. Plus le jeu est vieux, plus c'est un challenge, parce qu'il était pas intelligent ce jeu-là - c'est pas intelligent de toutes façons, un programme, là,* (rires) *mais il fallait vraiment que tu utilises les termes que le programmeur avait définis pour cette action-là. »*
>
> François, étudiant en informatique

Puisqu'ils font appel à des habiletés différentes, les jeux de stratégie et les jeux d'action ne plaisent pas également à tous. Charles et François ont toujours été plus attirés par les jeux de stratégie. Si Hughes est passé progressivement des jeux d'action aux jeux de stratégie, Ninon, Geneviève, Alexandre, Michel et Mark manifestent encore une nette préférence pour les jeux d'action. Dans le cas de Michel et Mark, l'intérêt pour les jeux vidéo ne s'est pas traduit en un intérêt pour l'ordinateur, satisfaits qu'ils étaient des jeux disponibles sur console vidéo et perplexes devant la complexité que leur semblait représenter la communication avec le système d'exploitation alors « en vigueur ».

5.4.2.2 Utilisation de logiciels

Pour plusieurs, c'est au niveau secondaire que l'ordinateur a acquis un statut d'outil, du moins à l'intérieur des cours où il fallait l'utiliser. Avant l'omniprésence d'internet, les cours d'informatique donnés au secondaire traitaient surtout de traitement de texte et, à un niveau moindre, d'utilisation de tableurs.

Une crainte de la complexité technique combinée à une absence de l'ordinateur durant l'enfance semble avoir engendré chez Mark et Michel un *complexe de novice*, difficile à surmonter même à travers ces cours d'informatique donnés à l'école secondaire, où le travail en équipe permettait de se reposer sur les compétences du coéquipier plus expérimenté et de contourner ainsi les apprentissages visés.

> *« J'avais eu un cours d'informatique, aussi, où... ça avait plus ou moins bien été, mais ça, c'est dû au fait, je pense, que j'étais probablement un des seuls qui avaient pas d'ordinateur à la maison. »*
>
> Michel, étudiant aux HEC

> *« J'ai jamais aimé ça l'informatique. Jamais aimé, mais, comment dire, jamais appris à connaître. (…) J'ai pris un cours d'option au secondaire en info et, dans le temps, on n'avait pas beaucoup d'ordinateurs, fait qu'on se mettait deux par ordi, j'avais un gars qui était très bon en traitement de texte, et quand on faisait du traitement de texte, c'était toujours lui qui tapait. »*
>
> Mark, étudiant à Polytechnique

Dans ces cours orientés « utilisation de logiciels », on ne voyait presque jamais les structures, les algorithmes ou la technologie sous-jacente (mémoire, processeurs, réseaux, etc.). On se situait donc essentiellement au niveau de l'*interface-usager*, ce qui pouvait effectivement avantager ceux qui avaient développé une certaine aisance avec cet aspect de l'ordinateur (clavier, souris, gestion des fichiers, fonctions d'édition, etc.). Ce faisant, on ne donnait pas toujours une image juste de la *science informatique*, un peu comme si l'on avait réduit la chimie à l'utilisation de produits chimiques d'usage domestique ou la physique à la conduite automobile. Cette vision a peut-être détourné de l'informatique certains étudiants qui auraient pu s'y intéresser, comme ce fut le cas à l'époque pour François :

> *« Ce que je voyais de l'informatique dans ce temps-là, c'était WORD puis tout ça, tu sais, j'avais pas la notion complète d'informatique. Puis je dirais que la majorité des gens avec qui que je discute, ils ont cette image-là de l'informatique, ils comprennent pas tout l'aspect qu'il y a derrière. Je sais pas pourquoi, j'ai toujours pensé que c'était pas valorisant d'aller en informatique. Je me disais : « C'est beau, ça va être un marché qui va être ouvert, là, mais ça vaut pas la peine d'aller là-dedans. Je vais aller dans quelque chose de plus concret. »*
>
> François, étudiant en informatique

Il attribue cette perception aux compétences limitées en informatique des enseignants au secondaire qui dispensaient alors les cours dans cette discipline.

> *« C'était trop superficiel, l'informatique. Les profs que j'ai eus, il y avait personne qui était compétent vraiment en informatique, qui connaissait vraiment ça. Fait que quand tu connais pas, tu peux pas vraiment enseigner à quelqu'un c'est quoi vraiment l'informatique, tu sais. »*
>
> François, étudiant en informatique

Ces cours optionnels donnés au secondaire sont loin d'avoir constitué les seules occasions pour les étudiants de s'initier à ces logiciels. Ce sont souvent les mêmes habiletés qui faisaient l'objet des cours optionnels de niveau collégial d'introduction à l'informatique, puisqu'on ne pouvait compter sur une formation homogène au secondaire.

> *« Oui, un cours d'introduction à EXCEL. J'ai eu deux cours, j'en ai eu un au secondaire, puis un au cégep, puis on apprenait pas mal l'essentiel. On a appris dans mes cours d'introduction, comment aller faire, chercher les fonctions, ces choses-là. »*
>
> Fabienne, étudiante aux HEC

> *« J'en ai refait au cégep dans mon cours d'Introduction à l'informatique, mais je me souviens d'en avoir fait aussi au secondaire. Je me souviens d'avoir donné les formules pour additionner de telle case à telle case, puis faire des calculs, puis faire des graphiques aussi. Oui, au secondaire, je m'en souviens. Au cégep, ça a été un petit peu plus en profondeur. »*
>
> François, étudiant en informatique

> *« Ça a été une erreur. C'était au cégep. "Initiation à EXCEL et à WORD "… Je savais c'était quoi, je connaissais le principe, mais c'est à cause que j'aimais beaucoup l'informatique, puis à la première session, c'était juste ce cours-là qui était offert. Dans ce cours-là, j'ai perdu mon temps, littéralement. J'ai fait des tableaux, que tu rentres des chiffres. Non, j'ai pas aimé ça. Puis, le monde dans la classe, il y avait la moitié qui était dans la même position que moi, puis l'autre moitié qui était comme en arrière, qui savait pas double-cliquer …»*
>
> Hughes, étudiant en informatique

En sciences au niveau collégial, selon l'orientation technologique du professeur ou du collège, le cours de physique pouvait aussi conduire à une plus grande familiarisation avec un tableur comme EXCEL. Pour Alexandre, Lucie, Michel et Mark, l'utilisation d'EXCEL était obligatoire dans leur cours de physique pour produire les graphiques des rapports de laboratoire et les analyser en incluant un traitement des incertitudes.

> *« EXCEL, je faisais des graphiques en physique avec ça. On faisait des rangées de chiffres, on faisait des relations entre les chiffres, ça additionnait, ça faisait la moyenne, la somme, ça faisait des graphiques, pente max, pente min… C'était au cégep, en Physique 2, Physique 3. Parce que c'était le même prof. Puis ce prof-*

là, il focussait sur l'ordinateur. Il voulait pas qu'on fasse des graphiques à la main. Fallait juste remettre par ordinateur. »

Alexandre, étudiant à Polytechnique

« C'était en physique, puis c'étaient les résultats de laboratoire qu'on rentrait. Puis on calculait les incertitudes avec ça, on appliquait certaines formules aussi... C'était la première fois que j'utilisais EXCEL, *là, au cégep. »*

Michel, étudiant aux HEC

Pour Michel comme pour Mark, cette nouvelle expérience avec l'ordinateur n'a pas contribué à éliminer les réticences ou à accroître le niveau de confiance :

« Disons que j'ai pas particulièrement apprécié mon premier contact avec EXCEL. *Je laissais plus les autres s'en servir. Encore une fois, j'avais pas d'ordinateur à la maison, donc l'informatique... Ça a sûrement affecté, là, j'étais plus ou moins à l'aise avec ça. Même des fonctions de base, que moi je connaissais à peine puis que la plupart des autres personnes, c'étaient des trucs super faciles pour eux; eux-autres, ils maniaient ça facilement. »*

Michel, étudiant aux HEC

Chez certains étudiants, les expériences de travail ont constitué un nouvel environnement d'apprentissage pour ce type de logiciel. Ainsi, Lucie a eu à créer des tableaux et à modifier des fonctions mathématiques simples sur des feuilles de calcul EXCEL dans le cadre de ses fonctions de secrétariat dans un bureau d'évaluateurs en génie. Charles qui travaillait comme vendeur dans une boutique devait en principe limiter son utilisation d'EXCEL à l'entrée de données pour produire des factures, mais dans un effort pour convaincre son patron à l'aide de chiffres comparatifs, il a pris l'initiative d'en explorer les capacités graphiques. Son premier contact avec l'utilisation de formules dans un tableur s'est fait une fois où le système semblait ne plus vouloir fonctionner correctement, confirmant sa perception du manque de fiabilité des outils informatiques et de la nécessité de comprendre un peu plus en profondeur pour remédier aux défaillances :

« Formules? Non, non... Ah ben, peut-être juste une fois, parce qu'il plantait, encore une fois... (rires) *Il a fallu que je rentre les taxes, parce que c'était une facture, puis là, il a fallu que je dise bon, ben ça, c'est égal à ce montant-là fois ça... Fait que j'ai eu ma première expérience avec les formules. »*

Charles, étudiant aux HEC

Enfin, d'autres étudiants, comme Geneviève et Hughes, ont d'abord apprivoisé ces logiciels de façon autonome. Geneviève raconte avoir privilégié une approche *essais-erreurs* qu'elle a sans doute développée dans ses premiers rapports (par le jeu) avec l'ordinateur.

> « *Non, je lis pas le livre! À jouer avec les pitons, à faire des choses, de fois en fois, t'en apprends de plus en plus. La touche Help ? Non, même pas !* (rires) *Ben, des fois, mon père m'a aidée mais… c'est vraiment par tâtonnement, là!…* »
>
> Geneviève, étudiante aux HEC

5.4.2.3 Apprentissage de la programmation

Plusieurs étudiants arrivent au cégep ou à l'université sans notions de programmation. Même s'il évoque volontiers les petits programmes en BASIC qu'on retrouvait dans les manuels de la série Mathématiques-Soleil (mais qui n'étaient pas repris dans le cadre du cours de mathématiques), François n'a véritablement découvert la programmation que dans le cadre de son programme intensif de niveau collégial en techniques informatiques, où il s'est rapidement classé parmi les meilleurs étudiants. Rappelons que dans son cas, c'est l'attrait pour l'ordinateur en tant que machine qui a constitué la porte d'entrée vers l'informatique et qui a conduit à ce nouveau choix d'orientation, après un DEC en sciences humaines et une très brève incursion en sciences politiques.

Hughes s'est intéressé dès l'âge de cinq ans à la programmation, en recopiant, à partir du guide d'utilisation, des instructions en BASIC sur le Commodore 64 familial et en observant les effets de l'exécution de ces instructions. Mais, faute de soutien, cet intérêt précoce est resté en latence jusqu'à la fin du secondaire.

Zoé avait longtemps maintenu une certaine distance avec l'ordinateur et c'est seulement au niveau universitaire qu'elle a été amenée à découvrir la programmation, au hasard d'un cours optionnel dans son programme de philosophie. Cette découverte de la programmation a profondément modifié son rapport à l'informatique, séduite qu'elle fut par l'aspect conceptuel de cette activité :

« J'aime ça le style d'idées qu'il faut avoir pour programmer. Puis, le formalisme, j'aime ça, comment c'est structuré. Comme, t'as un problème, puis comment tu peux structurer ça pour que ça marche. »

Zoé, étudiante en informatique

Chez Michel et Mark, le sentiment d'insécurité ressenti au secondaire et au cégep les a conduits à ne pas chercher à explorer la programmation.

« La programmation, je pense pas que c'est quelque chose dans lequel je performerais beaucoup, fait que... Ça m'intéresse pas vraiment, je vois ça comme quelque chose de plate et difficile. »

Michel, étudiant aux HEC

« Un cours d'info au cégep? Non, je le sais pas pourquoi j'ai pas pris ça... Parce que je me suis dit que... je serais pas assez bon parce que je me suis pas habitué toute ma jeunesse. »

Mark, étudiant à Polytechnique

Il ne faudrait pas en conclure toutefois qu'il fallait nécessairement attendre au cégep ou à l'université pour être initié à la programmation. Dans plusieurs écoles secondaires, on proposait des cours en ce sens, sous forme optionnelle ou parascolaire ; cinq étudiants parmi les douze rencontrés ont ainsi fait là leurs premières armes en programmation.

Là encore, on note deux approches : une première, plus classique, d'initiation à la programmation structurée, typiquement avec le langage PASCAL, comme ce fut le cas pour Hughes et Alexandre :

« J'ai fait du PASCAL, en secondaire 4... que j'ai pas trop compris grand chose, à cause qu'on faisait beaucoup de programmation en rapport avec Windows, puis il y avait des choses que je comprenais pas, on recopiait les notes du prof, puis ça faisait la même chose. (rires) *Fait que j'ai pas poussé beaucoup, j'ai compris c'était quoi la logique d'un programme, des boucles puis tout ça, mais... »*

Hughes, étudiant en informatique

« TURBO-PASCAL ? En secondaire 3, il me semble. Je pense que c'était un cours sur l'heure du midi, que j'avais pris. C'était vraiment optionnel, c'était pas pendant les périodes de cours parce qu'il y avait pas beaucoup de monde. Je pense j'avais fait deux jeux. Ouais, c'est ça, c'étaient des boucles, là, avec... je

> *pense c'étaient des ELSE, des boucles, là, ouais. Puis des petites affaires qui calculent, là. Des petites choses qui calculent, là, si tu mets un nombre, qu'est-ce ça fait, là. Puis je me rappelle de ça, écrire des textes en entrant, puis à la sortie, là... »*
>
> Alexandre, étudiant à Polytechnique

et une seconde, plus graphique mais possiblement plus superficielle aussi, où l'on utilisait un logiciel de scénarisation (ex. HYPERCARD) ou un langage graphique pour construire un jeu ou un environnement d'exploration, comme ce fut le cas pour Helga, Charles et Lucie :

> *« C'était de faire une histoire. Par exemple, quelqu'un a fait l'histoire dans une maison; tu sais, tu rentres puis là, tu cliques puis ça t'amène dans une autre pièce, puis il y a quelque chose qui se passe là, puis là... C'était un projet comme ça. »*
>
> Helga, étudiante à Polytechnique

> *« C'était avec... je sais plus... Je sais qu'on travaillait sur Lotus, mais c'était pas Lotus pour faire ça. Non, je sais pas. Moi, je me souviens juste que ce que j'avais fait, c'était... Il y avait des noms de chevaux, tu cliquais dessus, puis il y avait une description qui apparaissait du cheval. Donc, fallait avoir montré à l'ordinateur que quand tu cliques sur ça, fallait créer un bouton, quand tu cliquais dessus, fallait comme préparer le texte, puis là, tu préparais aussi les couleurs... »*
>
> Lucie, étudiante à Polytechnique

On voit que dans la première approche, les étudiants font davantage appel aux *structures* et *mécanismes* internes de la programmation pour décrire ce qu'ils ont fait (boucles, énoncés conditionnels, calculs, etc.), tandis que dans la seconde, on est à nouveau très près de l'*interface-usager* (environnement, boutons, cliquer, etc.).

Selon le niveau de profondeur informatique déterminé par l'approche privilégiée, les capacités d'analyse étaient plus ou moins sollicitées. Ainsi, alors que Charles se souvient d'avoir appliqué une même recette à répétition :

> *« Complexe? Non, je pense c'est pas vraiment complexe, parce que ton cours de programmation, c'est juste: "Bon. Si tu veux faire, faire ça, tu t'en vas là, puis tu marques ça, tu marques ça, puis tu marques ça". Fait que c'est juste d'avoir le temps de marquer ça, ça, ça, puis ça... »*
>
> Charles, étudiant aux HEC

Alexandre, de son côté, évoque une authentique démarche de résolution de problèmes exigeant analyse et stratégie :

> *« Le programme marchait pas puis il fallait regarder les boucles en haut, qu'est-ce c'est qu'il y avait qui marchait pas, scinder l'erreur en deux, ça, je me rappelle. C'était assez abstrait, c'était dur, là. »*
>
> Alexandre, étudiant à Polytechnique

Comme ils n'avaient pas l'habitude d'être confrontés à ce type de raisonnement, les étudiants faisaient souvent appel au professeur.

Indépendamment de l'approche utilisée, ce premier rapport à la programmation a conduit les étudiants à réaliser l'importance de l'investissement en temps nécessaire à cette activité, ce qui peut sembler contraire à la conception de l'informatique, généralement associée à une économie de temps. Et, source additionnelle de frustrations, le résultat auquel on arrive finalement au prix de tous ces efforts apparaît dérisoire et sans intérêt :

> *« Mais, tu sais, même après PASCAL, ça me tentait pas de programmer, à cause que ça me tentait pas de programmer des niaiseries, comme... J'avais pas de but ou quelque chose d'important à programmer, fait que j'ai pas programmé après PASCAL, jusqu'à temps que je sois à l'Université finalement. »*
>
> Hughes, étudiant en informatique

On ne se sent d'ailleurs pas outillé pour utiliser en mathématiques ses compétences de programmation nouvellement acquises car bien souvent, on ignore tout des algorithmes numériques de base. Ainsi, sans la connaissance du procédé de recherche dichotomique (dont l'algorithme est pourtant extrêmement simple), Hughes n'a pu programmer qu'une recherche séquentielle et très approximative des racines d'une fonction.

> *« J'ai déjà essayé de faire des petits programmes pour résoudre mes problèmes en maths, là, mais... Je m'y prenais pas de la bonne manière. Mettons que je voulais trouver... au lieu de prendre une fonction... admettons, je sais pas ça, mais admettons, la forme quadratique, pour trouver les bases, ben j'y allais, je partais de moins... Fallait que les deux nombres se trouvent entre -100 puis 100, puis j'augmentais à chaque fois de... Ben tu sais, je faisais un nombre après*

> *l'autre, je faisais une chaîne, puis j'augmentais admettons "point 10", puis je prenais le plus proche, c'est ça que je faisais... »*
>
> Hughes, étudiant en informatique

5.4.2.4 Intégration en mathématiques

Dans les cours de mathématiques du secondaire, l'intégration de l'informatique et des outils associés a consisté bien souvent en une utilisation plus ou moins développée de la calculatrice. Au secondaire, l'utilisation de la calculatrice permettait d'éviter de recourir à des tables pour les fonctions trigonométriques, exponentielles et logarithmiques et d'effectuer plus rapidement les calculs requis dans l'application des formules.

Dans le cadre du cours optionnel 431 qu'a suivi Fabienne au secondaire (et qui était réservé à ceux qui avaient une forte moyenne en mathématiques), une utilisation plus poussée de la calculatrice a permis d'aborder des contenus normalement enseignés au collégial :

> *« C'est vrai, ça je m'en rappelle, j'avais beaucoup, beaucoup de choses avec la calculatrice. Comme elle nous a appris tous les modes de la calculatrices, comme moi, j'en avais quatre, dont deux modes statistiques, toutes sortes de choses, et celles que j'ai le plus... c'est mes modes statistiques... moi, faire des intégrales sur la calculatrice, là... elle nous a montré ça, elle, comment pitonner ça. »*
>
> Fabienne, étudiante aux HEC

Elle n'en a gardé qu'un souvenir plutôt flou, qui se situe davantage au niveau des manipulations requises que des concepts ainsi illustrés :

> *« Je donne mes "x", je donne mes affaires, puis, elle, elle me sort ma... je donne mon "x", ma dérivée, puis je sais pas, elle me sort une intégrale. En tout cas, c'est assez... J'ai jamais encore compris le principe, puis j'en fais des intégrales! »*
>
> Fabienne, étudiante aux HEC

Au regard de ce qu'elle a fait en mathématiques au cégep et de son orientation actuelle, elle questionne aujourd'hui la pertinence de ce cours dans sa formation, même si elle se souvient l'avoir trouvé intéressant à l'époque :

« C'était beaucoup de pitonnage, c'était beaucoup avec la calculatrice. Quand t'arrives au cégep, ils te le montrent manuellement, puis ils t'empêchent de prendre la calculatrice, donc... Puis, c'était beaucoup d'enrichi, je me rappelle presque plus de ce que j'ai vu là-dedans, je l'ai pas réutilisé. Pour ceux qui veulent s'en aller en mathématiques, ça doit être génial, ce cours-là. Mais pour quelqu'un qui s'en va pas là-dedans, on retouche plus à ce qu'on a vu. Moi, j'ai pas trouvé ça utile, mais j'ai trouvé ça intéressant. »

Fabienne, étudiante aux HEC

Il est vrai que pour les étudiants rencontrés, l'utilisation de la calculatrice ou de l'ordinateur ne représentait vraiment pas la norme dans les cours de mathématiques du collégial.

« Dans les cours de maths? Non... On travaillait jamais sur l'ordinateur en maths. »

Lucie, étudiante à Polytechnique

« Ils nous poussaient plus à faire tout à la main, là, que de rentrer les données dans une calculatrice, puis tout ça. Comme, les calculatrices programmables, je sais pas comment utiliser ça pour faire des graphiques, puis tout ça. Peut-être apprendre ça, c'est pratique. »

Helga, étudiante à Polytechnique

« C'est à cause, dans ce temps-là, j'ai même pas pensé que ça se faisait par ordinateur. Je me suis dit "des dérivées, c'est ben trop compliqué pour faire ça par ordinateur". Fait que non, ça me dérangeait pas. Mais, tu sais, on en avait peut-être faites trop, quand même... »

Hughes, étudiant en informatique

Cette absence de l'outil informatique combinée à l'accent mis sur l'apprentissage de méthodes de calcul a amené plusieurs étudiants à considérer les manipulations crayon-papier au niveau symbolique comme le cœur de l'activité mathématique et même une source de satisfaction non négligeable.

« Admettons, quand t'as "parenthèse, x à la 3, y^4, z^2, plus blablabla, ferme la parenthèse, à la 8, ferme la parenthèse, intégrale, tu sais!!! Là, tu pars de ça, t'as plein de chiffres, tu dis "ah mon dieu, qu'est-ce je vas faire, qu'est-ce je vas faire?" Puis, là, t'arrives à la fin, puis t'as une petite réponse qui donne comme 33. Tu sais, t'avais ça, là, t'arrives avec ça, je trouve ça le fun! »

Lucie, étudiante à Polytechnique

« J'aimais ça les intégrales. il y avait pas trop de contextes, de situations pour appliquer les intégrales, mais j'aimais ça faire les problèmes d'intégrales. C'est ça, c'était long, et il fallait pas faire trop d'erreurs, tu sais. »

Mark, étudiant à Polytechnique

Conséquemment, la prise en charge des calculs et manipulations algébriques par des outils informatiques peut sembler contraire à une conception répandue de l'activité mathématique et du plaisir qu'on peut en retirer.

Si plusieurs étudiants ont eu malgré tout l'occasion de suivre un cours de mathématiques de niveau collégial où l'enseignant proposait une forme d'intégration de la technologie, ces expériences se heurtaient souvent aux contraintes introduites par le manque d'harmonisation curriculaire (voir section 2.2.3.1). Hughes résume la situation, lui qui faisait partie d'une des rares classes de son cégep où l'on utilisait la calculatrice graphique, mais de façon marginale, en supplément des exercices réguliers :

« Il y avait juste deux classes de Math 103, dans tout le cégep, qui avaient une calculatrice graphique. Fait que fallait quand même faire le même programme que les autres, puis ils ont pas passé beaucoup de temps pour nous l'expliquer. On l'a pas beaucoup utilisée. On avait quand même des petites activités qui avaient rapport avec la calculatrice... Mais les exercices qu'on faisait, à part les petits exercices qu'on faisait avec la calculatrice, c'étaient les exercices qu'il y avait dans le livre ordinaire, puis c'était pas prévu pour faire avec une calculatrice, fait qu'on s'en servait pas. »

Hughes, étudiant en informatique

Après cette première expérience avec la calculatrice graphique, il n'a pas cherché à devenir plus familier avec l'outil, car cette approche lui apparaît condamnée par l'évaluation :

« Aux examens, t'as pas droit à la calculatrice graphique, fait que si t'apprends à travailler avec, t'arrives à l'examen, t'as plus d'outils, tu perds... C'est comme si tu vas en français puis t'as pas de dictionnaire : c'est difficile. »

Hughes, étudiant en informatique

De fait, même dans le cadre du cours où il utilisait la calculatrice graphique, celle-ci n'était ni requise ni permise lors de l'examen.

> *« Je sais pas, j'aurais fait ça, mais j'aurais fourni la calculatrice aux examens, ou fait un examen en fonction de ça. Mais ils auraient pas pu à cause que c'étaient pas toutes les classes qui avaient ça, puis ça aurait probablement pas été le même programme que les autres cégeps, fait que ils auraient pas pu, là, mais… »*
>
> Hughes, étudiant en informatique

En rétrospective, il ne retient de cet exercice que le souvenir d'avoir visualisé certains phénomènes et l'acquisition de compétences techniques de base qui lui seront utiles s'il a éventuellement à se servir de cet outil.

> *« Ben, ça pouvait aider pour, visuellement, faire des fonctions. Ça dessinait des fonctions. À part ça, j'ai pas trouvé que c'était super-utile. Je le sais pas pourquoi. Pourtant on l'utilisait. On s'en servait mais, tu sais, c'était pour mieux visualiser quelque chose, mais à part ça, je crois pas qu'on allait plus loin. Voir les choses différemment, probablement. (…) C'est sûr que c'est un plus, c'est pas un moins, d'avoir une calculatrice graphique. Je sais un peu plus comment ça fonctionne une calculatrice graphique, si j'en ai de besoin d'une un jour, mais… »*
>
> Hughes, étudiant en informatique

Ninon et François font preuve de plus d'enthousiasme face à la calculatrice graphique. Ninon l'a découverte en Terminale, dans son cours de mathématiques pour lequel où elle était fortement recommandée sans être obligatoire. Elle s'en est servi notamment pour apprécier rapidement, par le graphique, le comportement d'une fonction :

> *« Si on n'avait pas une calculatrice graphique, on pouvait se débrouiller, mais c'est très pratique. »*
>
> Ninon, étudiante en informatique

L'utilisation fréquente de sa calculatrice graphique ne l'a toutefois pas amenée à explorer les possibilités de programmation qu'elle offrait. Ce type d'effort lui apparaissait réservé aux « très forts ».

> *« Euh, non. Bon, en terminale, ils nous ont donné quelques programmes. Il y en a qui étaient déjà très forts, ils faisaient plein de programmes, savoir dessiner des espèces de fonctions toutes bizarres et tout ça, mais moi, non, j'étais vraiment pas… »*
>
> Ninon, étudiante en informatique

François s'est initié de façon autonome à la calculatrice graphique alors qu'il suivait un cours de mathématiques par correspondance. Il l'a surtout utilisée pour valider les réponses de ses travaux, et il continue à l'utiliser à cette fin :

> *« En math 203, pour faire mes travaux, pour vérifier mes réponses, parce que faut quand même que tu détailles, là, c'est pas à choix de réponses... Pour vérifier mes réponses. Je trouve ça bien pratique. »*
>
> François, étudiant en informatique

On le voit, c'est le côté *pratique* de l'outil, comme complice dans l'*action*, qui ressort, et non quelque forme d'aide à l'exploration ou à la compréhension de la théorie.

En dehors de la calculatrice graphique, certains étudiants ont eu à utiliser un logiciel dans le cadre de leur cours de mathématiques du collégial. Helga s'est initiée à MAPLE[27], le logiciel de calcul symbolique conçu à l'Université de Waterloo, dans des périodes de laboratoire intégrées à son cours d'algèbre linéaire (Math 105).

> *« On avait chaque semaine des labs, fait qu'on allait pratiquer qu'est-ce qu'on avait appris en théorie sur l'ordinateur. C'était bien. Ça donnait un break de la théorie aussi, puis ça mettait un peu en pratique la théorie qu'on avait appris aussi. »*
>
> Helga, étudiante à Polytechnique

Elle en garde un souvenir assez flou, mais reconnaît tout de même que cela avait pu l'aider à l'époque à visualiser certains phénomènes. Interrogée sur la pertinence de cette approche pédagogique, Helga la justifie essentiellement sur le plan technique :

> *« Ben, je sais pas, au cégep, peut-être qu'ils donnaient ce cours-là pour nous familiariser avec le programme, ils savaient que plus tard, on allait s'en servir un jour ou l'autre, là... Mais pour l'instant... je sais pas. »*
>
> Helga, étudiante à Polytechnique

---

[27] voir http://www.maplesoft.com/ et http://daisy.uwaterloo.ca/

Même si elle suit un nouveau cours d'algèbre linéaire à Polytechnique, elle ne cherche pas à réutiliser le logiciel MAPLE, pourtant disponible dans l'institution[28] et mis officiellement à contribution dans certains cours comme celui d'*Équations différentielles* qu'elle aura à suivre à la prochaine session. Elle aussi semble confiner l'outil technologique à un rôle de soutien pour les calculs ; elle ne voit pas comment il pourrait l'aider à aborder par l'exploration des problèmes plus théoriques ou à se préparer à ses examens.

> *« Je pense je saurais pas comment l'utiliser, maintenant. J'ai pas assez fait de MAPLE pour… Non, je vois pas l'utilité. Parce que le cours, il est pas conçu pour faire du MAPLE. C'était peut-être correct au cégep parce qu'il y avait beaucoup de calculs, justement, on voyait moins les théorèmes, puis avec l'utilisation de MAPLE, ça allait plus vite, aussi, pour calculer. Mais maintenant, je vois pas vraiment l'utilité de prendre MAPLE pour calculer, parce qu'il y a pas grand chose à calculer. Puis… dans l'examen, j'aurai pas MAPLE pour le résoudre non plus, fait que… j'aime mieux l'apprendre sur papier, le faire sur papier. »*
>
> Helga, étudiante à Polytechnique

Contrairement à Helga qui aurait aimé apprendre à se servir d'une calculatrice graphique programmable, Hughes aurait volontiers troqué cet outil pour MAPLE, car ce logiciel lui semble être un outil plus puissant, et donc plus utile, pour résoudre les problèmes de nature mathématique.

> *« La calculatrice graphique, plus ou moins. Mais j'aurais aimé ça apprendre MAPLE. Ça, j'aurais aimé ça. Je sais qu'il y a un cours à Polytechnique, qu'ils l'apprennent…Puis, je trouve ça utile. Puis ça, ça va plus nous servir, dans notre travail plus tard. »*
>
> Hughes, étudiant en informatique

Il a d'ailleurs pris l'initiative d'apprendre quelques rudiments de ce logiciel pour valider ce qu'il faisait dans les cours de mathématiques où l'accent était mis sur le calcul symbolique.

> *« J'avais un ami qui l'avait chez lui, je pense qu'il l'avait étudié un petit peu dans un cours, puis il me l'a prêté. J'ai appris à l'utiliser un petit peu, mais c'était plus pour résoudre des équations…des intégrales, mettons. »*
>
> Hughes, étudiant en informatique

---

[28] voir http://maple.mathappl.polymtl.ca/

De par son intérêt pour le graphisme par ordinateur, il s'est aussi amusé à créer avec MAPLE des courbes intéressantes sur le plan visuel. Mais, bien qu'il ait encore une copie de ce logiciel en sa possession, il ne l'utilise plus.

> *« Non, j'ai pas réutilisé MAPLE. Je le connais pas beaucoup. Je l'ai encore chez moi. Je m'en suis servi pour dériver puis intégrer, je me suis amusé à faire des graphiques bizarres qu'il affichait, mais à part ça, je l'ai pas vraiment utilisé. »*
>
> Hughes, étudiant en informatique

Mark aussi a été en contact avec le logiciel MAPLE pour compléter son projet de fin d'études collégiales où il avait étudié pour la formule de Newton-Raphson pour le calcul itératif de racines de fonctions.

> *« Parce qu'en faisant le rapport, il fallait faire un graphique et faire un exemple de calcul… prendre au moins quatre exemples de calcul, prendre des faciles et des durs aussi. Fait que les durs, on les faisait à l'ordi. Les faciles, on pouvait les faire à l'ordi si on veut avec le logiciel, pas EXCEL mais l'autre… MAPLE, oui, c'est ça. »*
>
> Mark, étudiant à informatique

Mais là encore, le travail en équipe a fait qu'il n'a pas senti la nécessité d'apprivoiser le logiciel.

> *« Oui, ben moi, je l'utilisais pas parce que je connaissais rien, là, tu sais, c'est plutôt celui qui était le plus informatisé!… »*
>
> Mark, étudiant à informatique

Dans le cadre de son cours de mathématiques 303, Alexandre a eu à utiliser WINPLOT, un logiciel de traçage de courbes conçu (et régulièrement mis à jour) par un professeur du Philips Exeter Academy (New Hampshire) et disponible gratuitement sur internet[29] :

> *« On a eu comme quatre ou cinq labs, là, dans la session. Il disait, mettons "tous les mercredis" ou bien "mercredi dans 3 semaines, on va aller faire un tour de*

---

[29] voir http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html ou http://www.math.hawaii.edu/lab/241/winplot.html ou http://www.dcc.uchile.cl/~pbahamon/winplot/

lab". Fait que on voyait les fonctions, puis on l'appliquait sur l'ordinateur, pour essayer de voir... »

Alexandre, étudiant à Polytechnique

Il en retient essentiellement la possibilité d'avoir pu mieux visualiser les fonctions dans l'espace.

« WINPLOT, c'était... Mettons, on mettait une équation puis ça nous traçait, comme, ça nous montrait le dessin c'était quoi, puis on pouvait prendre les courbes de niveau; on pouvait couper, comme, le graphique en 3D... Oui, c'est ça, on pouvait couper le graphique, comme, puis avoir juste une vue d'ensemble du... vu d'en haut, je pense, vu de côté, me semble... »

Alexandre, étudiant à Polytechnique

Son enthousiasme demeure toutefois plutôt modéré :

« C'était correct, oui. Ben je pense que ça nuisait pas là, on voyait... parce que dans le fond, c'était pas juste de l'ordinateur : il y avait un côté sur papier, puis l'autre, on visualisait, c'était bien. »

Alexandre, étudiant à Polytechnique

Au point où il n'a pas jugé pertinent de télécharger ce logiciel sur son ordinateur personnel :

« Tu sais, on pouvait le prendre, on pouvait l'avoir, là, sur internet, je pense qu'on pouvait aller le chercher mais j'ai jamais été... je suis jamais allé le prendre chez nous... »

Alexandre, étudiant à Polytechnique

Il finit par conclure lui aussi que la contribution principale de cette intégration est d'avoir présenté à l'étudiant une autre façon de faire, plus technologique :

« Peut-être dans le fond, peut-être qu'est-ce qui est bon, c'est que ça apporte peut-être juste... pour aller voir vers l'informatique, là, dans le fond... »

Alexandre, étudiant à Polytechnique

Fabienne paraît avoir davantage apprécié utiliser le logiciel STATVIEW dans le cadre de son cours de statistiques.

> *« STATVIEW, c'est le seul logiciel de statistiques que j'ai travaillé, mais je le trouvais génial. Pour ça, parce que, justement, c'était facile d'aller chercher nos distributions, notre intervalle, nos ci, nos ça, toutes nos choses, ça se faisait très bien. On a déjà le tableau, la grille est déjà faite. Donc, moi je l'ai trouvé très bien comme logiciel statistique. »*
>
> Fabienne, étudiante aux HEC

La facilité d'utilisation du logiciel l'amène à ne pas tant valoriser les compétences techniques qu'elle a ainsi développées, mais plutôt la part qu'elle a pu réserver à l'analyse des concepts, des données, des résultats, se sentant déchargée par l'approche informatique des tâches d'entrée des données et de calcul.

> *« Le cas était donné, on avait notre échantillon, puis c'était le même cas pour tout le monde, c'est juste l'échantillonnage qui était différent d'une équipe à l'autre. On avait quelques questions, comme "Pourquoi telle affaire?" ou "Est-ce que le lien est plus fort de tel côté ou de tel côté? Pourquoi?" Ben là, on avait comme deux pages de preuve à faire. Pour répondre au pourquoi. Ça, on n'avait aucune marche à suivre. C'était le genre de cours… »*
>
> Fabienne, étudiante aux HEC

La nature des travaux qu'elle a eu à effectuer dans ce cours, avec des questions ouvertes, paraît avoir joué un rôle important dans la perception qu'elle a du logiciel. Contrairement aux autres expériences évoquées précédemment, elle ne décrit pas le logiciel comme un contenu technologique à apprendre ou un simple soutien au calcul ou à la visualisation, mais bien comme un outil permettant de guider l'analyse, à travers une démarche d'exploration.

5.4.3 Liens avec les compétences d'intervention

Dire que l'utilisation d'un outil informatique a un effet sur les compétences d'intervention repose sur deux hypothèses : que des compétences minimales d'utilisation de cet outil aient pu être développées et alimentées et que les conditions dans lesquelles les nouveaux problèmes à résoudre soient propices à l'intégration de cet outil.

On peut considérer que ces deux hypothèses sont vérifiées avec la calculatrice de base : d'une part, elle a acquis un statut officiel à l'intérieur des cours de mathématiques du secondaire ; d'autre part, l'orientation procédurale de ces cours, avec la quantité de formules à utiliser et de calculs à effectuer, se prêtait merveilleusement bien au développement d'une rapidité d'exécution avec cet outil.

L'envers de la médaille est que chez certains étudiants, l'utilisation systématique de la calculatrice à partir du secondaire a entraîné une *dépendance* à l'égard de l'outil en effaçant la capacité à recourir au calcul mental, même pour des calculs arithmétiques simples. Ainsi, Mark témoigne de la difficulté qu'avait représenté pour lui l'entraînement aux concours de mathématiques de l'Association mathématique du Québec où la calculatrice n'était pas permise :

> *« C'était dur mais c'était parce que moi, j'avais toujours l'habitude de pitonner sur ma calculatrice, là... Mais après ça, j'ai appris à comment utiliser ma tête, comment calculer mentalement... »*
>
> Mark, étudiant à Polytechnique

Sans le recours au calcul mental, on perd de multiples occasions de « faire fonctionner » les propriétés des opérations arithmétiques, avant de passer à l'algèbre où leur connaissance devient alors essentielle. Mais là encore, la calculatrice permet de contourner le problème en passant par la vérification sur quelques exemples. Ninon nous en donne une illustration éloquente. En effet, cette étudiante a développé une relation de dépendance avec sa calculatrice à un point tel qu'elle se permet d'oublier des identités de base essentielles aux manipulations algébriques et qu'elle ne cherche pas à les retrouver en passant par les propriétés des opérations :

> *« Par exemple, des fois, je dis "a sur b, le tout sur c, est-ce que ça me donne a sur b fois 1 sur c, ou a sur b fois c?" Alors, je vais vérifier avec la calculatrice avec deux, trois exemples pour voir si ça me donne la même chose. Par exemple, en fait, c'est super-simple, a plus b au cube, est-ce que ça me donne a au cube plus b au cube? Et en fait, bon, c'est faux! Mais bon, si on est dans le doute, je vérifie deux, trois exemples avec ma calculatrice, pour voir. »*
>
> Ninon, étudiante en informatique

À première vue, ce commentaire peut sembler contradictoire avec l'importance que Ninon accorde à la mémorisation de formules et que nous rapportions dans la section 5.2.2. Mais en fait, il met en relief le caractère éphémère de cette mémorisation que nous avons identifié dans cette même section. Puisque la capacité de mémoire est limitée, les « formules » de base qu'on peut vérifier à la calculatrice seront sacrifiées au profit de nouvelles formules plus complexes et jugées plus rentables dans la préparation à l'examen. Et l'on retrouvera ces « formules de base » en généralisant sereinement à partir de deux ou trois exemples.

Dans son cas, ce sont les limites qu'elle perçoit de l'outil qui encouragent la poursuite du développement de compétences « manuelles » d'intervention.

> *« Ben, parce que là, on est dans des trucs de fonctions à deux variables, ma calculatrice, elle peut pas encore faire ça!... »*
>
> Ninon, étudiante en informatique

Si Ninon et François apprécient leur calculatrice graphique pour valider une réponse ou pour visualiser une fonction et orienter en conséquence leur analyse, ils n'utilisent pas les capacités de programmation de cet outil, car ils ne connaissent les algorithmes numériques qui pourraient les aider à étendre la classe des problèmes qu'ils pourraient résoudre. En ce sens, la calculatrice graphique ne contribue pas beaucoup à accroître leurs compétences d'intervention; ses effets se situent davantage au niveau des compétences d'explicitation et d'évaluation. Nous y reviendrons donc plus loin.

Après la calculatrice de base, le logiciel EXCEL est l'outil informatique ayant fait l'objet de l'intégration pédagogique la plus soutenue, d'abord dans les cours de physique au collégial mais surtout, dans tous les cours de mathématiques de première année aux HEC. Cette intégration a aussi été facilitée par une exposition relativement répandue à ce logiciel, à travers les cours d'initiation à l'informatique, le travail ou les initiatives personnelles.

Michel, qui a toujours gardé une certaine distance avec l'ordinateur, maintient le cap qu'il s'est donné en limitant au maximum l'utilisation de ce logiciel même dans les cours où il est fortement recommandé. Le complexe de novice qu'il éprouve toujours à l'endroit des outils informatiques se double ici d'un scepticisme à l'égard de l'apport d'un tel outil à la compréhension.

> *« Bon, on nous recommande d'utiliser beaucoup EXCEL, là, le fameux logiciel, mais moi, j'y vais encore avec la calculatrice puis le crayon. C'est sûr que ça va devenir important, parce que, bon, l'informatique, ça nous envahit, veut, veut pas, là, mais... je sais pas si... je dirais pas que c'est mieux que la méthode traditionnelle. Ça va permettre de gagner du temps, dans le fond, mais au niveau des raisonnements, au niveau de la compréhension, moi, je pense pas que ça soit meilleur. »*
>
> Michel, étudiant aux HEC

À l'opposé, Fabienne manifeste un enthousiasme particulier à utiliser EXCEL, qu'elle a d'abord découvert dans un cours d'informatique du secondaire, puis approfondi dans un autre cours au collégial, et qu'elle utilise maintenant dans presque tous ses cours aux HEC.

> *« EXCEL, je le trouve génial, ce petit logiciel-la, il est pas trop gros, je peux faire ma comptabilité, mes maths, je peux tout faire avec : l'application des formules, je peux faire des graphiques, je peux faire mon actuel des actions, mes prévisions futures... Il y en a d'autres aussi, mais je les connais un peu moins, des chiffriers, des calculateurs, mais je veux dire, c'est beaucoup plus utile que ma petite calculatrice, je trouve. »*
>
> Fabienne, étudiante aux HEC

Mais en dépit, de cet enthousiasme, elle veille à ne pas créer de dépendance envers ce logiciel, en s'imposant toujours la résolution « à la main » avant de se permettre le recours à l'outil informatique.

> *« Quand je fais mes devoirs, moi je les fais les deux : je le fais manuellement, un coup que j'ai compris manuellement, je vais essayer de le faire en EXCEL. »*
>
> Fabienne, étudiante aux HEC

Cette idée de nécessité d'un développement parallèle des compétences d'intervention, à la fois par le calcul manuel et l'utilisation du logiciel, est aussi présente chez Charles. Tout comme Fabienne et Michel, il semble lier la compréhension davantage avec l'intervention manuelle qu'avec l'intervention assistée par ordinateur.

> *« Comme pour Math financières, moi j'ai... si tu fais juste ça sur informatique, tu comprendras pas. Puis le but de ce cours-là, je pense, c'est que si j'ai pas l'ordinateur, d'être capable de le faire. Donc, c'est là que c'est important de pas juste faire l'ordinateur. »*
>
> Charles, étudiant aux HEC

Il est encouragé dans cette voie par le peu de confiance qu'il accorde à la fiabilité des ressources informatiques. Dans cette vision qu'il a de l'informatique, les mathématiques se retrouvent à jouer le rôle de *techniques de réserve* quand les outils technologiques ne sont pas disponibles.

> *« Si je veux calculer des choses, comme, par exemple, je vais discuter, tu sais, on n'a pas tout le temps une calculatrice à portée de main, donc, je vais pouvoir le calculer quand même. Ou si, état d'urgence, panne d'ordinateur, mettons qu'à la place où tu travailles, l'ordinateur plante, ben tu vas être quand même capable de comprendre c'est quoi le processus qu'il y avait en arrière de l'ordinateur, puis être capable de le faire. »*
>
> Charles, étudiant aux HEC

Plus qu'une simple prudence qui viendrait d'une prise en compte des contingences, il faut voir dans cette discipline d'apprentissage une démarche personnelle qui procède d'une authentique volonté d'autonomie.

> *« Je pense il y a une connotation d'indépendance là-dedans, plutôt que de dire "on n'est plus juste des légumes pas capables de rien faire si on n'a pas l'ordinateur". Donc, c'est sûr que t'as une notion d'indépendance là-dedans, de pas être juste dépendant des machines. »*
>
> Charles, étudiant aux HEC

Mais cette recherche d'autonomie est mise à rude épreuve quand les étudiants sont confrontés à des problèmes qui ne peuvent être résolus « à la main ». Par exemple, en mathématiques financières, lorsque le calcul du taux de rendement d'une série de flux financiers effectués à intervalles réguliers nécessite la résolution d'une équation du dixième degré, l'approche « manuelle » doit céder le pas à une approche numérique itérative, gérée sans souci pour l'utilisateur par une fonction disponible sur EXCEL (« TRI ») ou sur toute calculatrice financière.

> *« Dans nos notes, ils disent c'est impossible de le faire, que tu fais juste le rentrer sur ordinateur puis c'est tout, mais à la base, parce que si quelqu'un l'a rentré sur ordinateur, c'est que ça a été possible. »*
>
> Charles, étudiant aux HEC

Charles est revenu à quelques reprises sur cette idée, comme s'il cherchait à valider son intuition que cela devait pouvoir se faire autrement, sans l'ordinateur, bien qu'il ne sût pas vraiment comment. Il est vrai que dans les notes du cours, on n'y expliquait pas comment la fonction TRI peut aboutir à la solution, ni même pourquoi il est nécessaire d'y recourir :

> Lorsqu'une série de flux financiers est effectuée à intervalles réguliers, on ne peut utiliser la formule de la section 2.3 [30]. Par contre, la fonction Excel
>
> TRI(Valeurs ; estimation)
>
> permet d'effectuer un tel calcul.
>
> | | |
> |---|---|
> | Valeurs | Matrice ou référence à des cellules qui contient des nombres, dont au moins un (le premier nombre) est négatif et au moins un est positif. |
> | Estimation | Estimation de la réponse qui permet d'accélérer les calculs. (Excel prend par défaut la valeur de 10% si l'estimation est omise.) |

On voit ici l'illustration d'un des dangers associés à l'intégration d'outils informatiques à la formation. En effet, si l'on se limite dans la formation à associer des problèmes ou des équations avec les fonctions logicielles qui en permettent la résolution, la profondeur des compétences d'intervention ainsi développées risque de ne pas dépasser celle de l'interface-usager, dans une relation de dépendance complète. C'est ce que Charles et Fabienne cherchent à éviter, et c'est pourquoi Charles aimerait identifier une façon de s'en sortir sans la fonction logicielle.

Quant à Geneviève, elle se satisfait d'avoir appris au cégep que sans outil informatique, il faudrait recourir à des tables pour la plupart des calculs de taux.

> *« Ils nous ont expliqué d'où c'est que ça venait, parce que c'est développé d'une formule qu'on connaît, mais c'est ardu, là, à calculer, ça prend des tables. Ça prend vraiment des tables; lui, il dit "moi, je l'ai appris comme ça parce que dans mon temps, il y avait pas la calculatrice, mais", il dit, "cassez-vous pas la tête avec ça, de toute façon plus tard, vous allez le faire sur... EXCEL, il le fait*

[30] $i=\left(\frac{FV}{PV}\right)^{\frac{1}{n}}-1$

très bien, là, fait que... pas besoin de la table." On a montré la théorie, mais on a rien démontré. »

Geneviève, étudiante aux HEC

Si elle apprécie avoir un peu de contexte sur l'origine des fonctions utilisées, cela ne l'empêche pas de viser essentiellement le développement de compétences assistées par la technologie.

« D'abord, faut que tu connaisses, là, c'est sûr que j'aurais pas aimé ça qu'ils nous montrent ça puis qu'ils m'expliquent pas d'où c'est que ça venait, mais toutes les fonctions sont programmées. Calculer ça à la main, c'est très-très-très long. Tandis que là, avec une calculatrice financière, toutes les fonctions sont programmées. En tout cas, c'est bien pratique!!! Mais c'est juste parce que c'est moins compliqué, t'as pas besoin d'isoler... parce que les formules sont souvent difficiles à isoler, là, t'as deux "i" à la même place... »

Geneviève, étudiante aux HEC

Dans son cas, toutefois, le développement de compétences d'intervention avec la calculatrice financière dans ses cours de techniques administratives au cégep l'amène à une certaine réticence à utiliser le logiciel EXCEL pour faire l'équivalent.

« Moi, j'ai fait mon cégep en techniques administratives puis j'ai utilisé beaucoup un autre outil de travail, qui est une calculatrice financière, et ils veulent pas qu'on l'utilise parce qu'on a le logiciel EXCEL. Ça fait exactement la même chose, là, tu sais, c'est la même programmation, pour les fonctions, puis ils veulent pas qu'on l'utilise! Mais j'ai ben de la misère avec ça!!! »

Geneviève, étudiante aux HEC

Son attachement à la calculatrice financière lui vient à la fois d'une utilisation sur une période prolongée, dans plusieurs de ses cours de sa formation collégiale, et d'un approfondissement de l'outil avec l'un de ses professeurs.

« Dans mon cours de Méthodologie quantitative, j'avais un professeur très plate, très ennuyant, mais très calé; il nous avait vraiment montré toutes, toutes, toutes les fonctions qu'on peut faire avec cette calculatrice-là, fait c'est un outil de travail, vraiment, qu'on a appris, fait que j'ai ben de la misère à m'en défaire!... »

Geneviève, étudiante aux HEC

Mais ici encore, c'est l'évaluation qui détermine le rôle attribué à l'outil.

> *« Moi, je les fais mes problèmes avec* EXCEL *parce que j'ai pas droit à ma calculatrice à l'examen, mais je trouve ça ridicule, là, qu'ils nous disent "ben non, t'as pas le droit." »*
>
> Geneviève, étudiante aux HEC

Exception faite de la calculatrice de base et du logiciel EXCEL aux HEC, l'intégration d'outils informatiques dans les cours de mathématiques a connu un statut plutôt marginal dans la plupart des cas que nous avons étudiés. Par manque d'harmonisation curriculaire, elle ne pouvait pas prétendre à un impact sur les contenus qui feraient l'objet de l'évaluation. Les commentaires recueillis chez Helga (MAPLE), Hughes (MAPLE et calculatrice graphique), Alexandre (WINPLOT) et Mark (EXCEL et MAPLE) laissent entrevoir qu'une utilisation marginale dans le cadre d'un seul cours ne suffit ni à développer une confiance avec l'outil, ni à aborder des problèmes suffisamment complexes qui justifient le recours à l'outil.

> *« J'ai jamais été attirée vers la résolution de problèmes sur ordinateur. J'aime mieux le faire moi-même. Parce que la job se simplifie trop, on dirait que... Je sais pas, en faisant tout moi-même, je suis sûre d'avoir bien compris... comment ça se fait. »*
>
> Helga, étudiante à Polytechnique

Par conséquent, la tentative d'intégration se solde souvent par une mise au rancart éventuelle de l'outil et par un oubli des quelques procédures techniques ainsi apprises. De telles expériences se traduisent donc en un apport quasiment nul au niveau des compétences d'intervention mobilisables dans la résolution de problèmes.

5.4.4 Liens avec les compétences d'explicitation

Un des arguments les plus prometteurs en faveur de l'utilisation d'outils informatiques dans l'apprentissage des mathématiques et que nous relevions dans la section 2.2.2 concerne les possibilités de visualisation offertes qui permettraient d'intégrer différentes représentations (symbolique, graphique et numérique) de phénomènes mathématiques et d'en dégager ainsi le sens. Ici encore, soit par manque d'exposition prolongée, soit par la nature des tâches impliquées, les résultats de ces expériences, tels que rapportés par les étudiants, illustrent certains des risques ou difficultés documentés dans la littérature et rapportés dans la section 2.2.3.

D'abord, les possibilités numériques de la simple calculatrice, combinées à une formation axée sur le calcul, paraissent, chez certains, avoir contribué à transformer les concepts d'*égalité* et de *fonction* : l'égalité est devenue une touche « ENTER » qui appelle le résultat d'un calcul, accentuant ainsi la réduction de l'équation à une formule ; le sens de la fonction est passé, quant à lui, d'une relation entre deux variables à une procédure qui associe à une ou plusieurs valeurs d'entrée une valeur de sortie, procédure qu'on déclenche aussi à l'aide d'une simple touche (sin, log ou autre).

> *« Par exemple, la réponse de l'intégrale de cos c'est moins sin, sauf que c'est pas... pour moi, c'est pas vraiment là une réponse comme telle, cette réponse-là, tu vas foutre quelque chose dedans. »*
>
> Charles, étudiant aux HEC

L'utilisation du registre graphique peut aider corriger ce phénomène et favoriser le passage à l'analyse en permettant de rattacher au concept de fonction les notions de variation, de continuité, d'extrema, etc. C'est dans cette perspective que certains professeurs de mathématiques au collégial ont fait utiliser aux étudiants des logiciels graphiques. Ainsi, Alexandre paraît avoir apprécié la visualisation des concepts de coupe et de courbes de niveau des fonctions dans l'espace grâce au logiciel WINPLOT (voir 5.4.2.4).

Toutefois, pour certains étudiants comme Michel, la rapidité du traitement informatique pour tracer des graphiques paraît faire obstacle à la compréhension, car elle ne laisse pas le temps de d'observer « point par point », de chercher à comprendre les phénomènes sous-jacents et d'inférer pour l'ensemble de la fonction. Sur le plan de la compréhension, Michel soutient qu'il aurait préféré remettre des graphiques faits à la main pour ses rapports de laboratoire en physique.

> *« C'est sûr, si on avait eu le choix, je l'aurais fait papier-crayon. Parce que de cette façon-là, je pense que je peux plus... je pense que, au niveau de la compréhension, c'est beaucoup mieux, en tout cas pour moi, là, que de voir ça sur*

un écran, puis tu rentres un chiffre puis tout le tableau sort au complet, là... Sur papier, je peux plus m'attarder puis comprendre. »

Michel, étudiant aux HEC

Pour d'autres étudiants, c'est la facilité avec laquelle on peut produire un graphique par ordinateur qui dispense de se questionner sur le comportement de la fonction.

« *Faire un graphique dans* EXCEL, *encore là, c'est que tu dis "Ben regarde, mes nombres, c'est de ça à ça, de ça à ça,* ENTER*", ton graphique est là.* »

Charles, étudiant aux HEC

« *Rentrer les chiffres dans l'ordinateur, c'est ben plus simple, ça force pas grand-chose dans le fond... Faut vraiment... à moins que tu te dises "bon ben là je vais essayer de comprendre pourquoi c'est comme ça", mais d'habitude, c'est pas ça qu'on fait, là. C'est sûr que si tu regardes une fonction puis t'essaies de la tracer à la main, ça force plus, je pense, l'apprentissage.* »

Alexandre, étudiant à Polytechnique

Alexandre ne condamne pas pour autant l'utilisation de logiciels graphiques dans le cours de mathématiques. Mais il juge nécessaire de l'assortir à des tâches où l'on suscite volontairement un *questionnement* approfondi chez l'étudiant.

« *Tu sais, si tu traces ton graphique puis qu'après ça tu réponds à des questions, je pense que c'est aussi pertinent que si tu fais rien que tracer des graphiques à la main. À la place de juste dessiner le graphique à la main, ils passent par l'ordinateur pour ensuite revenir à la même chose dans le fond, au même processus de compréhension qui est d'analyser la fonction que t'as là puis avec le graphique que t'as fait sur l'ordinateur puis de te poser des questions... Mais si c'est juste tracer le graphique puis regarder, je pense pas que là, ça soit très...* »

Alexandre, étudiant à Polytechnique

Sans un tel questionnement, toute la conceptualisation requise par l'activité de traduction entre une expression symbolique et sa représentation graphique peut être laissée entièrement à la charge du logiciel ou de la calculatrice graphique. Même si ensuite on retient la correspondance observée entre les formes symbolique et graphique, cela ne veut pas dire qu'on en ait dégagé le sens.

Chez Helga qui a utilisé le logiciel MAPLE dans le cadre de son cours d'algèbre linéaire, il ne reste que des souvenirs très superficiels des expériences de visualisation faites avec ce logiciel. Elle a complètement oublié ce qu'elle avait visualisé alors (son évocation porte à croire qu'il s'agit de l'application de matrices de transformation sur une figure) et ne se rappelle qu'avoir fourni une suite de commandes après lesquelles un graphique apparaissait, comme par magie, et pouvait être métamorphosé.

> *« Je me rappelle plus c'était quoi, mais je me souviens qu'on mettait une suite de commandes puis à la fin, on avait un graphique qui apparaissait. Puis après quand on changeait les commandes, le graphique, il tournait ou c'était une autre forme, puis là, c'est ça, comme, ça m'a permis de le voir, là, visuellement, qu'est-ce qui se passait, quand on changeait les valeurs, c'était pas juste changer les valeurs pour le fun, tu sais, on voyait qu'est-ce qui se passait, graphiquement, qu'est-ce ça donnait. Mais je me rappelle plus c'était quoi, là… »*
>
> Helga, étudiante à Polytechnique

Dans son cas, on pourrait dire qu'il y a eu déplacement de l'activité d'explicitation : du plan symbolico-graphique (où l'on espérait favoriser l'établissement de liens) à l'interface-usager où il s'agissait alors de déterminer les commandes à entrer pour définir l'objet mathématique et agir ensuite sur sa représentation graphique. Avec pour résultat qu'on ne retient pas tant un concept résultant d'une synthèse de différentes représentations qu'un ensemble flou de procédures et de leurs effets.

Car l'utilisation d'un outil informatique introduit un nouveau registre d'explicitation qui peut accaparer toute l'attention dans les activités proposées et reléguer la conceptualisation mathématique au second plan. Chez Mark comme chez Michel, l'utilisation du logiciel EXCEL constitue en soi une difficulté sur le plan de l'explicitation.

> *« Peut-être les logiciels comme EXCEL, quand on me demande de faire, comment dire, tracer une courbe avec l'équation, peut-être j'aurais des difficultés à chercher tous les pitons! »*
>
> Mark, étudiant à Polytechnique

> *« Quand on commence à entrer des formules avec EXCEL, là, il y a tous les symboles, là, le symbole de dollar, le symbole d'un autre, pour indiquer, disons, qu'on répète la formule sous plusieurs lignes, puis tout ça… Donc ça, je trouvais ça mélangeant. »*
>
> Michel, étudiant aux HEC

Toutefois, les fonctions pré-programmées d'un logiciel comme EXCEL sont assez conviviales, dans le sens où l'usager peut être guidé au moment d'entrer les différents paramètres. Ainsi, les participants des HEC n'ont pas semblé éprouver de difficultés particulières à utiliser les fonctions financières (VA, VC, VPM, etc.) ou les capacités d'optimisation du « Solveur ». De fait, ces fonctions deviennent à ce point intégrées par certains étudiants qu'on retrouve des appels explicites à ces fonctions à l'intérieur des développements mathématiques rédigés pour résoudre un problème.

Par exemple, dans la résolution du problème 2 de l'examen de mathématiques financières, il fallait calculer la valeur à accumuler dans un fonds d'études avant de pouvoir toucher les rentes. Pour calculer la valeur de la variable PV à cette étape, Geneviève fait deux appels explicites à la fonction VA (valeur actuelle d'un investissement) en spécifiant les paramètres qui s'appliquent au moment de commencer à toucher les rentes.

$(1{,}12)^1 = (1 + j_{12}/12\,)^{12} \qquad j_{12}/12 = 0{,}009488$

$$PV \;= 1000\left(\frac{1-(1+0{,}009488\;)^{-24}}{0{,}00948}\right)(1{,}12)^{-3} + 800\left(\frac{1-(1+0{,}009488\;)^{-36}}{0{,}00948}\right)$$

Avec fonction VA :

$n = 24$
$i = (1{,}12)^{1/12} - 1$
$pmt = -1000$
$FV = 0$
$PV\,(1{,}12)^{-3} = 15213,\,0426$

+

$n = 36$
$i = (1{,}12)^{1/12} - 1$
$pmt = -800$

$FV = 0$ $PV = 24299{,}803$ *Valeur à accumuler* = 39 512,843 \$ *N.B. Toutes les décimales ont été conservées.*

Pour Geneviève, ces fonctions ont acquis un sens dans le développement de ses compétences d'utilisation de la calculatrice financière, compétences qu'elle transfère sans difficultés au logiciel EXCEL. Par leur nature constructive, ces fonctions logicielles ont d'emblée un caractère opératoire. L'équation qui précède ne sert qu'à lier les appels à la fonction VA. Les « PV » qui apparaissent par la suite ne réfèrent pas au PV de l'équation initiale, mais plutôt au résultat de l'appel à la fonction VA pour chacun des deux termes ; on peut voir là un effet de la transformation du concept de *variable* amenée par l'informatique (voir 1.3) où il devient naturel de changer la valeur associée à un identificateur. Ce qu'elle gagne en clarté d'explicitation logicielle, elle le perd en rigueur d'explicitation mathématique, sans impact toutefois sur la qualité de la réponse puisque ce ne sont plus les manipulations algébriques qui sont responsables de la produire.

Elle prend par ailleurs soin de ne pas calculer la somme de 1 et 0,009488 de façon à bien isoler le taux d'intérêt, paramètre de la fonction VA. D'ailleurs, même le résultat du calcul du taux mensuel (0,009488) à partir du taux annuel n'est pas utilisé dans l'appel à la fonction, car il est possible de spécifier ce paramètre à l'aide d'une expression $((1{,}12)^{1/12} - 1)$ et « s'assurer » ainsi que « *toutes les décimales* » seront « *conservées* ». Cela paraît conférer à la fonction logicielle une supériorité sur l'équation de départ qu'on n'ose même plus utiliser comme « formule ».

Pour plusieurs étudiants, c'est particulièrement au niveau de la programmation que s'impose l'exigence de rigueur dans l'explicitation avec l'ordinateur, et cette exigence est alors perçue comme un obstacle et même une source de frustration.

> *« Ce qui m'apparaît difficile? La programmation. Apprendre le langage. C'est complexe aussi : si tu manques juste de mettre un apostrophe ou un point, une virgule, il y a rien qui marche après. C'est ça l'aspect, c'est très minutieux. »*
>
> Helga, étudiante à Polytechnique

> *« Ça reste que c'est un ordinateur, c'est quand même pointu, si t'écris pas, mettons tu mets pas ton point à la bonne place, ta virgule à la bonne place, ben, ça marchera pas, tu peux peut-être chercher pendant super-longtemps pourquoi ça marche pas, mais ça marche pas, c'est tout. Pour une niaiserie, là, c'est juste que… Ça c'est pas trop bien, c'est fâchant, tu sais… »*
>
> Alexandre, étudiant à Polytechnique

L'*interaction entre les deux systèmes cognitifs*, celui de l'élève et celui de l'ordinateur, dont parle Balacheff (1994) et que nous rapportions en 2.2.3.2 apparaît donc biaisée au départ car c'est l'ordinateur qui fixe les règles de l'explicitation. Ce phénomène, au lieu d'être vécu comme une occasion de développer la rigueur (Mandelbrot, 1994 ; Rouchier, 1992) paraît plutôt justifier et alimenter chez certains un désintérêt pour l'informatique, devant l'incapacité de l'ordinateur à accepter une part d'implicite.

> *« Vu que c'est pas une personne, tu peux pas le raisonner. Lui, il est programmé d'une certaine façon, puis si t'essaies de lui parler autrement que cette façon-là, ça marche pas. Il y a pas de nuances à avoir. Il commence à en avoir, tu sais, l'intelligence virtuelle, il commence à voir ou c'est que… Comme, tu sais, si tu travailles avec WORD, il te dit "est-ce que c'est ça que tu veux dire?", tu sais, il commence à avoir des suggestions et des variantes, sauf que… C'est sûr que c'est pas idéal, c'est pas comme si je discute avec toi, où, tu sais, je vais te faire comprendre un principe; un ordinateur, tu lui fais pas comprendre un principe, tu fais juste lui dire "c'est ça." »*
>
> Charles, étudiant aux HEC

Les étudiants en informatique se distinguent sur ce plan, en ce sens où la nécessité de traduire une conception ou une intention en une forme intelligible pour l'ordinateur et selon des normes acceptées constitue pour plusieurs un défi et une source de motivation.

> *« Puis, en même temps, c'est que c'est un challenge intellectuel, veut veut pas, je trouve que de représenter les choses, et faire représenter ça aux autres, ceux qui vont utiliser ton code, parce que c'est un des avantages du C ++, c'est que c'est réutilisable par la suite… C'est ça qui est le fun, là, de faire quelque chose puis que les gens, les autres personnes vont pouvoir bâtir, sur ton code. Ils vont voir "ah, oui, je comprends, puis c'est rapide". C'est de leur donner ta vision des choses. C'est pour ça que j'aime ça tout particulièrement. »*
>
> François, étudiant en informatique

Il y a peut-être là un lien avec le plaisir que François avait, enfant, à chercher à traduire ses intentions dans les jeux de quête en *instructions* qui seraient acceptées (voir 5.4.2). Tout comme alors, il perçoit les contraintes introduites par les différents langages comme des règles qui ajoutent au piquant du jeu et nécessitent une part plus grande de créativité.

> *« Il y a certains langages qui sont limités, ça c'est une contrainte. Fait que là, ben, des fois, ce que tu peux faire, c'est que tu peux mélanger différents langages. Il y a des langages qui sont plus difficiles que d'autres aussi... Comme C ++, entre autres, tu peux programmer comme en C, mais c'est procédural, là, c'est pas de la vraie programmation C ++, fait que si tu veux vraiment faire de l'orienté-objet, faut que tu t'imposes toi-même ces contraintes-là, l'encapsulation puis tout ça. »*
>
> François, étudiant en informatique

Toutefois, la diversité des langages et des systèmes d'exploitation peut constituer une source d'agacement pour d'autres étudiants en informatique. Ainsi, Hughes regrette le manque d'uniformité à cet égard et trouve difficile le passage à la programmation orientée-objets.

> *« En informatique, qu'est-ce qui m'agace... Ben, je dirais, il y a Windows, Unix, il y a Macintosh, tout ça, ça a pas vraiment rapport... à part ça, ça serait mieux qu'il y ait pas tant de langages de programmation que ça, mais c'est pas trop dur changer d'un à l'autre, ça finit tout par se ressembler un petit peu, fait que c'est pas si pire. (...) Mais j'aime pas la programmation par objets.* (rires) *J'ai pas appris avec ça, puis là, j'ai de la programmation par objets cette session-ci, puis j'ai ben de la misère à voir "objet". C'est sûr que je passe, mais c'est pas naturel pour moi. Un coup que je vais avoir plus d'expérience, ça va être correct. »*
>
> Hughes, étudiant en informatique

Chez Hughes, la *reproduction* en programmation d'instructions tenues pour valides (car venant d'un livre ou d'un professeur) paraît avoir souvent précédé la *conceptualisation* (voir 5.4.2.3). On retrouve là un parallèle assez frappant avec son apprentissage des mathématiques, où le travail s'effectuait principalement sur le plan symbolique, dans la mémorisation et l'application de formules tenues pour vraies (voir 5.2.1 et 5.2.4).

Cette domination que paraît exercer la *forme* au détriment du *sens* a d'ailleurs amené Hughes, comme la majorité des étudiants-participants en informatique, à considérer spontanément dans le problème I-2 (voir Annexe F) les variables *i* et *j* comme des compteurs. Bien que ce soit souvent le cas autant en programmation que dans les suites et séries mathématiques, l'énoncé du problème les décrivait clairement comme les limites de l'intervalle de recherche, et donc comme des paramètres dont la valeur était fixée à l'entrée de la procédure.

Pour d'autres étudiants en informatique, la prise en compte du caractère localement valide des règles d'explicitation, illustration de *la variabilité et du côté arbitraire des systèmes axiomatiques* (Mandelbrot, 1994), ajoute à l'intérêt car elle encourage l'identification des invariants, soit par une approche inductive à partir des systèmes connus, comme c'est le cas chez François, dont le rapport avec l'application est assez développé :

> *« C'est qu'à un moment donné, si tu utilises du code qui est trop spécialisé, ben, t'oublies des systèmes d'exploitation ou des browsers ou whatever... Non, portabilité du code, c'est quelque chose qui est très important pour moi. Une contrainte? Non, non, c'est un défi. »*
>
> François, étudiant en informatique

soit par l'analyse, l'abstraction et le recours au pseudo-code, comme c'est le cas chez Zoé, qui manifeste un intérêt pour les structures théoriques et une sensibilité au caractère universel des mathématiques :

> *« Tu sais, on fait des algorithmes avec un pseudo-code, tu sais, c'est un langage comme JAVA, tout qu'est-ce qu'on dit, on pourrait le dire en JAVA. C'est qu'on attire l'attention sur le fait que c'est général puis ça peut s'appliquer à tous les langages. (...) Je connais juste JAVA maintenant mais je crois qu'il peut y avoir quelque chose d'intéressant à utiliser un nouveau langage. D'être capable de transférer d'un langage à un autre, ça prend un niveau d'abstraction, là. »*
>
> Zoé, étudiante en informatique

Zoé tient un discours semblable quand elle évoque l'apprentissage d'une nouvelle langue qu'elle conçoit comme une occasion d'enrichir la pensée :

> *« J'aime ça apprendre des langues... Je parle français, anglais, ça c'est normal, mais j'apprends l'allemand, ça je trouve ça vraiment intéressant. C'est quelque chose d'assez fondamental, puis ça fait que tu penses différemment. Tu sais, mettons, la structure des phrases est différente en allemand, comment les verbes sont placés dans une phrase, ça fait qu'il faut que tu penses différemment, puis ça*

> *fait que tu peux avoir des idées différentes. Ça change ton intuition si tu penses en une autre langue… »*
>
> Zoé, étudiante en informatique

Là aussi, elle est à la recherche des invariants :

> *« Mais je crois que la logique, c'est universel. La logique, c'est commun à toutes les langues, c'est inclus dans toutes les langues… »*
>
> Zoé, étudiante en informatique

L'attention qu'elle porte aux langues et aux définitions explique sans doute le fait qu'elle ait été l'une des trois étudiants du groupe des participants en informatique à ne pas avoir considéré les variables i et j comme des compteurs dans le problème I-2 (voir Annexe F).

5.4.5 Liens avec les compétences d'évaluation

Chez quelques étudiants, on observe une propension à utiliser un outil informatique spécifique pour aborder la résolution d'un problème ou vérifier la solution obtenue par la méthode enseignée, indépendamment des consignes liées au problème. Cette propension qui pourrait s'inscrire dans un processus d'*autonomisation à l'égard du milieu didactique* (voir 3.4.3) a un impact sur les compétences d'évaluation.

De façon générale, l'utilisation autonome par les étudiants des outils informatiques en mathématiques ne paraît pas s'inscrire dans une approche expérimentale et exploratoire. On demande plutôt à l'outil de vérifier la réponse, renforçant ainsi le réflexe du recours à la validation externe :

> *« Je fais les choses manuellement, puis après ça, je vais voir si j'ai raison. Fait que c'est comme juste un vérificateur. Parce que si je faisais d'emblée juste avec, pour Math Financières, là, si tu le fais juste avec l'ordinateur, vu que tu fais juste entrer des chiffres, ça te donne rien. T'as pas besoin de suivre un cours pour ça. »*
>
> Charles, étudiant aux HEC

> *« Je pouvais vérifier ma réponse avec la calculatrice, elle vérifie la forme du graphique, puis ces affaires-là, ça me donnait mes calculs d'aires, fait que c'est*

pratique. Les matrices, la même affaire, mes multiplications de matrices. Pour vérifier mes réponses. »

François, étudiant en informatique

« Pour vérifier les limites, les dérivées. C'est devenu automatique! »

Ninon, étudiante en informatique

On peut aussi vouloir être guidé de façon claire vers la réponse :

« Par exemple, pour voir une limite, quand tu vois à quoi la courbe elle va ressembler, ben, tu vois que par exemple, la limite ça doit être plus l'infini si la courbe elle fait comme ça. Des choses comme ça. »

Ninon, étudiante en informatique

On peut même aller jusqu'à « produire » la réponse recherchée vers laquelle on essaie de se diriger ensuite selon les méthodes de calcul enseignées. C'était l'approche privilégiée par Hughes qui s'aidait de MAPLE pour aborder les calculs d'intégrale plus coriaces dont il n'avait pas la réponse a priori :

« Mettons j'avais un devoir, puis j'arrivais pas à la réponse, ben je prenais la réponse puis là, j'essayais d'arriver à cette réponse-là. Mais, tu sais, c'est une mauvaise démarche, fait que dans le fond... C'était pour m'aider à faire les problèmes... Je le faisais un petit peu, mais quand j'étais bloqué, je faisais la réponse. »

Hughes, étudiant en informatique

Le calcul intégral se trouve donc réduit à un moyen laborieux d' *« arriver à la réponse »* alors qu'il peut être si facile de *« faire la réponse »* à l'aide d'un logiciel. À la séquence *formulation-vérification* qui caractériserait le travail du mathématicien qui utilise l'ordinateur (voir 2.2.2), il faut donc opposer la séquence *production-formulation* susceptible d'être rencontrée chez les étudiants. Avec l'introduction du calcul symbolique sur des calculatrices (ex. TI-89), cette approche est appelée à se généraliser et à provoquer un certain questionnement curriculaire, tout au moins chez les étudiants.

« Tu sais, on va pas tout résoudre tout seul. On a l'informatique avec nous autres, on a la technologie, on va s'en servir. Tu sais, je connais pas personne

qui va... Mettons quelqu'un qui dessine un plan de maison, bien ils vont tout le temps utiliser l'ordinateur maintenant, ils vont pas faire ça à la main. Tu sais, il vont l'utiliser, c'est un outil comme un autre puis je crois que MAPLE, *c'en est un, comme un autre.* »

Hughes, étudiant en informatique

Mais pour accepter la prise en charge des calculs par l'ordinateur, il faut des compétences minimales pour porter un regard critique sur les résultats produits. Sans possibilité de vérifier, on perd toute possibilité de contrôler.

Or, dans certaines situations observées, l'étudiant n'apparaît pas pleinement outillé pour porter ce regard critique. Le recours à certaines fonctions pré-programmées en mathématiques financières (TAUX, TRI) en est un exemple. Comme en témoigne Charles (voir 5.4.3), les étudiants ignorent les modèles mathématiques utilisés par ces fonctions logicielles pour produire la réponse. En fait, il ne s'agit que de méthodes numériques itératives pour le calcul de racines de polynômes, où le degré du polynôme correspond au nombre de périodes considérées (de remboursement ou de revenus). Mais sans une connaissance minimale de ces méthodes itératives, la consultation du menu d'aide d'EXCEL peut s'avérer troublante :

- Microsoft Excel calcule la fonction TRI par itération. La première de ces itérations utilise la valeur de l'argument estimation, puis la fonction TRI répète les calculs jusqu'à ce que le résultat soit exact à 0,00001 % près. Si la fonction TRI ne parvient pas à un résultat après 20 itérations, elle renvoie la valeur d'erreur #NOMBRE!
- Dans la plupart des cas, l'argument estimation n'est pas nécessaire pour les calculs de la fonction TRI. Si l'argument estimation est omis, la valeur par défaut est 0,1 (10 %).
- Si la fonction TRI renvoie la valeur d'erreur #NOMBRE! ou que le résultat est trop éloigné de ce que vous attendiez, recommencez l'opération en attribuant une valeur différente à l'argument estimation.

Au-delà de la nécessité de pouvoir estimer le taux cherché, l'étudiant devrait pouvoir comprendre pourquoi la fonction peut ne pas parvenir au résultat ou renvoyer une valeur qui ne correspond à la valeur attendue. Mais les méthodes numériques ne font pas partie des contenus mathématiques normalement enseignés au secondaire ou au collégial. En fait, il est frappant de constater qu'on consacre une part importante du cours de mathématiques de quatrième secondaire à calculer de façon analytique les racines des fonctions quadratiques, et que là s'arrête dans la formation de base l'outillage pour calculer les racines des polynômes, comme s'il était supposé peu probable qu'on rencontre un jour un polynôme de degré supérieur à 2.

Le regard critique ne s'exerce donc que dans la mesure où le résultat contredit la connaissance qu'on a du contexte d'application et du sens des concepts associés :

> « *J'accepte la réponse de l'ordinateur, mais jusque dans une certaine mesure. Si je vois que la réponse a plus ou moins d'allure, comme si je vais dans EXCEL, puis je calcule un taux, puis il me dit un taux négatif, là je vais dire "Pourquoi? non, non, il y a quelque chose qui fonctionne pas, je vais le vérifier." Donc, je vais le considérer véridique, mais je vais pas tout prendre pour du cash non plus, là. C'est sûr, il a ses limites, ne serait-ce que parce que c'est un ordinateur.* »
>
> Charles, étudiant aux HEC

Et par ailleurs, l'idée de rapidité associée à l'ordinateur et le coût de l'appareil paraissent justifier une acceptation quasi-inconditionnelle des résultats obtenus :

> « *Après tout, on paye une fortune, faut bien que ça serve à quelque chose, là!!!* (rires) *C'est juste si je vérifie à chaque fois, je gagnerai pas de temps, fait que ça me sert à rien de payer.* »
>
> Charles, étudiant aux HEC

Une autre façon d'envisager l'impact du rapport à l'informatique sur les compétences d'évaluation consiste à examiner la rigueur du raisonnement amenée par l'apprentissage de la programmation. Sur cet aspect, Hughes et François sont les premiers à clamer les vertus de la programmation :

> « *En étant en informatique, j'ai comme développé une certaine logique, puis un certain attrait, en bout de ligne, pour les mathématiques.* »
>
> François, étudiant en informatique

> « *Pour le raisonnement, l'informatique, c'est excellent. (...) Un programme, je crois que c'est juste de la logique. Je sais pas comment dire, c'est... par étapes... tu descends... C'est pas abstrait. Si tu te trompes, c'est de ta faute.* »
>
> Hughes, étudiant en informatique

On remarque au passage une conception assez primitive de la logique chez Hughes, qui la réduit à une suite d'étapes concrètes bien ordonnée.

Zoé est plus nuancée : selon elle, si la logique est importante en programmation, elle est quelques fois reléguée au second plan, voilée par les données du problème. Un cours plus théorique, plus mathématique permettrait de s'attarder davantage aux structures logiques, pour ensuite en faire bénéficier la programmation.

> *« C'est justement à ça que je pensais aujourd'hui: je trouve ça bien de prendre un petit peu de recul comme avec le cours de Structures discrètes, de passer à des trucs plus abstraits. C'est quand même pas mal les mêmes idées que t'utilises en programmation, mais c'est avec un niveau d'abstraction un peu plus élevé. Je trouve ça bien. Tu peux te concentrer sur la structure. Quand tu programmes quelque chose en particulier, t'es concentré sur tes données en particulier, mais t'accordes pas beaucoup d'attention à la structure logique des choses, à la structure des choses. En 1063, c'est plus la structure. »*
>
> Zoé, étudiante en informatique

Quant à Ninon, qui se satisfait d'une vérification sur deux ou trois exemples pour s'assurer de la validité d'une propriété arithmétique, (voir 5.4.3), elle applique une logique équivalente pour conclure à la validité d'un programme qu'elle a conçu :

> *« Parce qu'on peut vérifier si le programme, il marche. En JAVA. Bon, je pense, tous les langages de programmation… C'est ça qui est bien, c'est qu'on peut vérifier si ton programme, il marche. Donc, avant de le rendre, eh ben, on regarde si il marche bien, et puis après, on le rend. »*
>
> Ninon, étudiante en informatique

Or, tout comme un exemple ne valide pas une loi mathématique, une vérification à partir d'un seul test ne constitue pas une garantie du fonctionnement correct d'un programme, à moins que ce test ne couvre l'ensemble des cas admissibles. Elle donne encore moins d'information relativement à l'efficacité, à la généralité, à la portabilité et à l'adaptabilité du programme. En fait, si en termes d'explicitation, la programmation est soumise à des exigences de rigueur strictes, sur le plan de l'évaluation (choix des variables, des objets, structuration, conception des algorithmes, etc.), la rigueur n'apparaît plus une condition incontournable mais davantage un objectif qu'il est possible d'adapter à ses exigences personnelles ou à celles du contexte.

Dans le cadre du cours, les étudiants ont eu à produire deux versions d'un algorithme assez simple (Problème I-2, Annexe F) qui, pour une suite de termes, devait trouver le plus grand indice (dans un intervalle donné) pour lequel le terme de la suite était égal à une certaine valeur.

Nous reproduisons ci-dessous le cœur des versions itératives de l'algorithme telles que produites par Zoé, Hugues, François et Ninon :

Zoé	Hughes

début
n : = *j*
tant que ($n \geq i$ *et* $a_n \neq x$)
    début
        n : = *n* - 1
    fin
si n # i alors n : = -1
fin
	début
	    n : = 1
	    tant que $n \leq m$ *alors*
	        début
	            r : = *a_n (n)*
	            si $r = x$ *alors*
	                retourne n
	            n : = *n* + 1
	        fin
	    retourne n : = *NULL*
	fin

François	**Ninon**

début
    ind : = -1
    pour b : = *n à m*
        si $a_b = x$ *alors*
            ind : = b
fin
	début
	pour u : = *1 à n*
	    début
	    si $a_u = x$ *alors v* : = *u*
	    sinon v : = *0*
	    fin
	fin

On remarque d'abord que seule Zoé a intégré des considérations d'efficacité en ayant la bonne idée de considérer la suite dans l'ordre décroissant ; cette approche permettait d'arrêter la recherche au premier terme rencontré dont la valeur correspondait à la valeur donnée. Comme mentionné en 5.4.4, elle a correctement interprété les variables i et j comme les limites de l'intervalle de recherche. Son algorithme fonctionne pour tous les cas sauf celui où l'indice recherché est i car elle a écrit $n < i$ plutôt que $n \# i$.

Hughes s'est lui aussi arrêté au premier terme trouvé, mais ça n'était pas correct dans son cas puisqu'il effectuait la recherche selon l'ordre croissant des indices. En plus de cette erreur majeure dans la logique de l'algorithme, on dénote plusieurs problèmes d'explicitation chez Hughes qui a du mal à se défaire des spécificités des langages dans l'utilisation du pseudo-code et qui mêle des instructions (tant que – alors).

François a utilisé aussi l'ordre croissant, mais a toutefois bien poursuivi la recherche jusqu'au terme dont l'indice était le plus grand. Il a aussi bien intégré l'idée des bornes de l'intervalle pour la recherche de l'indice. Son algorithme fonctionne mais il aurait pu être plus efficace.

Ninon a procédé aussi selon l'ordre croissant, mais la façon dont elle a intégré le cas où l'on ne trouvait pas un tel terme faisait en sorte que son algorithme ne fonctionnait vraiment que dans le cas où le terme cherché était le dernier de la suite.

Il est intéressant de noter que Ninon et Hughes sont ceux qui auraient le plus bénéficié d'une validation par l'exécution de leur algorithme, ce qui paraît confirmer leur dépendance à l'égard des systèmes de validation externe. En deux ou trois itérations successives, ils auraient sans doute atteint le niveau de rigueur requis pour une exécution correcte. C'est une approche de raisonnement valable, mais qui ne peut être considérée équivalente à une planification rigoureuse.[31]

Les profils identifiés paraissent vouloir se confirmer avec la version récursive de l'algorithme :

---

[31] En informatique, il est toujours possible de corriger des lacunes de planification ou de conception au moment de la vérification, mais l'identification de ces lacunes dépend de la qualité et de l'exhaustivité du plan de vérification, lequel se soucie en général davantage du bon fonctionnement que de l'efficacité du code, et les corrections qui en découlent sont en général plus coûteuses qu'en phase de conception.

<table>
<tr>
<td>Zoé

procédure plus_grand (entrée : x, i, j ;
sortie : n)

début
si ($a_j = x$)
    n : = j
sinon si (j = i)
    n : = -1
    fin

    sinon plus_grand (x, i, j-1, n)
fin</td>
<td>Hughes

procédure plus_grand_n (entrée : n, x, m ;
sortie : n)
début
    si r = x alors
        retourne n
    sinon si $n \leq m$
        début
            r : = a_n (plus_grand_n (n+1, x, m))
        fin
    sinon si n > m alors
        retourne n : = NULL
fin</td>
</tr>
<tr>
<td>François

procédure plus_grand_indice (entrée :
$\{a_n\}$, i, n, m ; sortie : ind)
début
    si $a_n = x$ alors
        ind : = n
    n : = n + 1
    si n < m alors
        plus_grand_indice (ind, n, m)
fin</td>
<td>Ninon

(page blanche)</td>
</tr>
</table>

Dans cette version, Zoé n'a commis que des erreurs d'explicitation mineures (un « fin » sans « début », des « si » sans « alors ») qui seraient ressorties dès la compilation si l'algorithme avait été traduit dans un langage de programmation. Elle procède toujours par ordre décroissant et son algorithme est à la fois correct et efficace.

François procède encore par ordre croissant, mais il a oublié dans cette version de l'algorithme le cas où il n'y a pas de terme dans la suite égal à la valeur x. De plus, il y a une certaine confusion dans l'ordre des paramètres lors de l'appel récursif à la procédure.

On retrouve une confusion équivalente chez Hughes ainsi que des erreurs d'évaluation majeures : il n'y a pas d'initialisation de la variable *r* et il ne poursuit pas la recherche jusqu'au plus grand indice.

Ninon a préféré s'abstenir devant la complexité conceptuelle introduite par la récursivité.

S'il y a tout lieu de croire qu'au fil de leur formation, Hughes et Ninon développeront leur capacité à concevoir des algorithmes, comme François a pu le faire dans le cadre de sa formation collégiale, il demeure que Zoé, avec une expérience aussi limitée en programmation mais un intérêt marqué pour l'abstraction et les structures logico-mathématiques, se distingue sur ce problème par ses compétences de planification. Sa capacité à envisager les différents cas possibles, à structurer l'algorithme, et à intégrer des considérations d'efficacité se manifeste clairement ici. Les quelques ratures observables sur sa copie témoignent de véritables *simulations mentales* qui la rendent moins dépendante d'un processus de vérification externe.

Dans cette recherche de liens entre logique et programmation, nous avons finalement constaté des difficultés importantes chez plusieurs étudiants en informatique à concevoir une preuve par récurrence (ou induction). Nous avançons l'hypothèse que la transformation qu'applique l'informatique sur des concepts mathématiques peut contribuer à alimenter ces difficultés, en introduisant un glissement de logique chez celui qui n'a pas été appelé à développer le raisonnement déductif en mathématiques.

Rappelons d'abord que pour vérifier qu'une propriété P est vraie pour tout nombre entier *n*, une preuve par récurrence typique commence d'abord par vérifier qu'elle est vraie pour la *base* (typiquement pour $n = 1$) et vérifie ensuite que de poser P vraie pour *k* implique nécessairement que P est vraie pour $k + 1$ (ce qu'on appelle le *pas* de l'induction). Dans le cas où ces deux conditions sont vérifiées, par un effet de domino en appliquant le *pas* à partir de la *base*, la proposition « devient » vraie pour 2, puis 3, puis 4, et ainsi de suite, pour tout nombre entier *n*.

Pour bien des étudiants, la difficulté consiste à vérifier l'implication logique associée au pas de l'induction, i.e. le fameux « si P(k) alors P(k+1) ». Ce simple énoncé fait appel à deux concepts mathématiques dont on retrouve des homonymes en informatique : le concept de *fonction* et celui de *l'implication logique* (*si-alors*).

Comme le montre l'analyse de Bertrandias rapportée en 1.3, la fonction en informatique est nécessairement définie de façon constructive. D'un point de vue informatique, si P(k) existe, c'est qu'on a défini une façon de calculer P(k) à partir de k ; si P(k) est vraie, c'est que le calcul de P(k) retourne « vrai » comme valeur.

Maintenant, et ce nouvel élément nous apparaît fondamental, le *si-alors* en informatique ne veut absolument pas dire la même chose qu'en mathématiques. En mathématiques, il sert à décrire un *état (conclusion)* à partir d'un *postulat (hypothèse).* En informatique, il sert à appliquer un *traitement* (et donc à modifier un état) à partir de la *vérification d'une condition.* La différence entre ces deux interprétations paraît relever de l'opposition qui existe entre la *pensée hypothétique* (de l'imagination, on tire un état) et la *pensée-gestion* (de l'état, on tire une action) (Guedj, 1997).

Si l'on essaie d'adopter simultanément les deux perspectives, on s'expose au piège du raisonnement circulaire. Hugues nous en fait la démonstration pour le problème I-5 (Annexe F) :

Soit S(m) : « t = (m-1)p+1 ». Prouvons par induction.

S(2): « t = (2-1)p+1 » = « p+1 »

On sait que le nb de feuilles totales est égal à p+1 dans un arbre binaire, par un théorème. Donc c'est vrai pour S(2).

Induction: S(m+1) = « t = ((m+1) - 1) p + 1 »

t = m p + 1

Par l'hypothèse d'induction, on sait que pour m c'est vrai.

Alors, on a prouvé que c'est vrai.

Comme S(m) peut être construit, existe et est vraie, *alors* on appelle la fonction *S* avec *m*+1 comme argument, ce qui permettra de construire S(*m*+1). Avec un signe de l'égalité polysémique qu'on peut choisir d'interpréter comme une *affectation* dans une perspective informatique, on est amené à conclure que $S(m+1)$ est tout aussi vraie …

5.4.6 Synthèse

Parce que l'utilisation de logiciels-outils et la programmation sont deux approches très différentes d'intégration de l'informatique en mathématique, nous avons choisi de considérer séparément leurs effets respectifs sur les compétences observées. En utilisant à nouveau le modèle « *effets – catalyseurs – inhibiteurs* » et une approche équivalente à celle décrite en 5.2.6, nous avons maintenu cette séparation dans la synthèse des résultats donnée par la Figure 13 et la Figure 14.

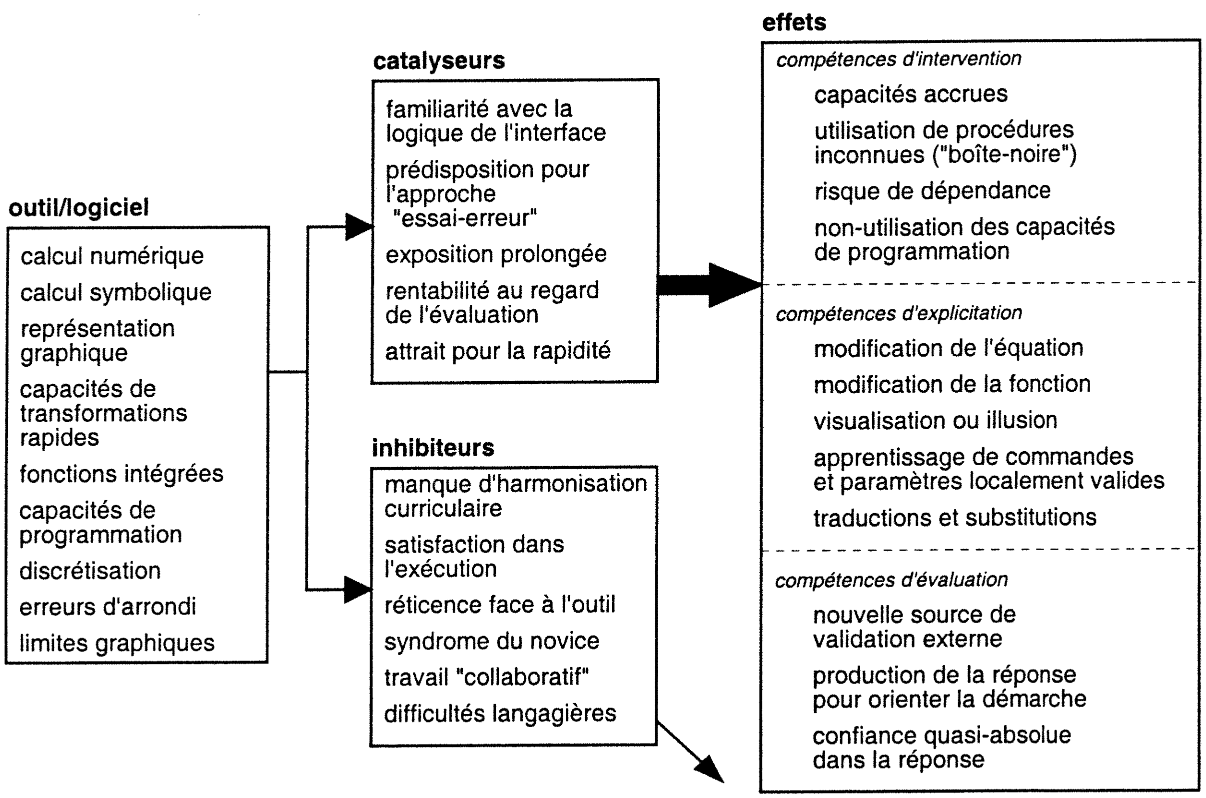


Figure 13– Effets observés de l'utilisation d'outils-logiciels

Pour avoir un impact sur les compétences en résolution de problèmes, l'utilisation de logiciels-outils en mathématiques doit pouvoir bénéficier d'une harmonisation curriculaire qui permette une exposition prolongée à un même outil et une intégration dans l'évaluation. Si dans de telles conditions, elle permet d'accroître les compétences d'intervention, elle ne peut pour autant cautionner, au nom d'une convivialité toujours croissante, l'incapacité à porter un jugement critique sur les résultats produits. La présence de ces outils nécessite plutôt de revoir les contenus enseignés en mathématiques, pour accroître les compétences d'évaluation nécessaires à une utilisation lucide.

De façon générale, on ne tire pas parti dans la formation mathématique du rapport privilégié qui existe entre cette discipline et l'informatique, et la plupart des cours d'initiation à l'informatique ou même d'initiation à la programmation ne contribuent pas à corriger la situation.

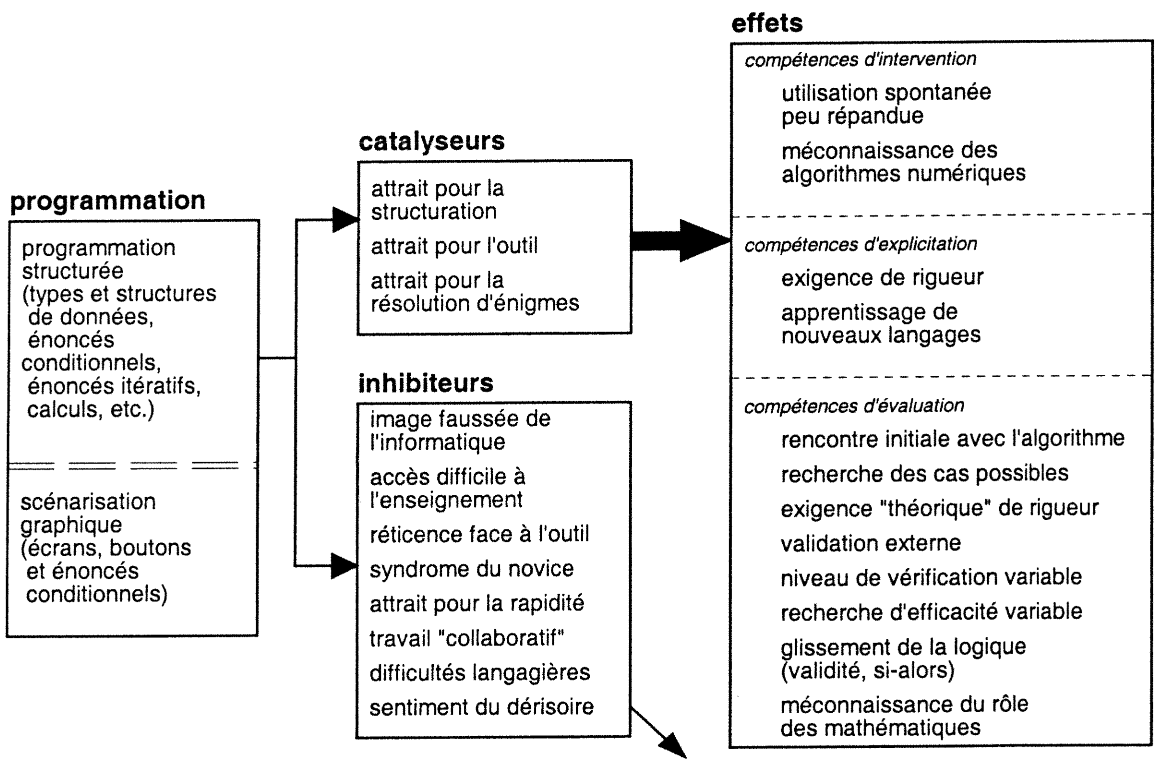


Figure 14 – Effets observés de l'apprentissage de la programmation

S'il y a un lien entre rigueur mathématique et rigueur de programmation, malgré des différences notables dans les logiques respectives, il semble que le passage de l'une à l'autre n'est pas également facile dans les deux directions. Si ceux qui ont développé une pensée déductive en mathématiques paraissent pouvoir faire preuve d'anticipation dans la conception d'algorithmes, et même à l'occasion de façon supérieure à ceux qui ont une plus vaste expérience en programmation, par leur capacité à identifier ce qui est *nécessaire* et *suffisant* à l'exécution correcte de l'algorithme, il ne semble pas que des compétences acquises en programmation facilitent le passage à la démonstration mathématique, pourtant essentielle au choix d'algorithmes efficaces.

6 Conclusions

Pour conclure cette étude, nous procéderons en quatre temps. En premier lieu, nous tâcherons de synthétiser l'ensemble des résultats en faisant ressortir les principaux phénomènes observés et les liens que nous avons repérés entre les stratégies d'apprentissage développées dans la formation fondamentale et les compétences mathématiques démontrées. Dans un second temps, nous prendrons le temps de revoir les limites de cette recherche pour mieux en cerner les apports et les perspectives de recherche qui pourraient en découler. Cela fait, nous nous permettrons d'explorer quelques pistes de développement curriculaire suggérées par les résultats, et les différents moyens qui pourraient être mis à contribution. Nous terminerons avec une réflexion sur les impacts envisagés au niveau de la formation des enseignants.

6.1 Synthèse des résultats

Ce travail a d'abord voulu cerner la problématique associée à un enseignement des mathématiques qui chercherait à faciliter le passage chez l'individu d'un savoir théorique à un savoir pratique. Après avoir conclu à la légitimité de cet objectif et en l'absence de recherches spécifiquement liées à cette problématique, nous avons opté pour une étude évaluative de nature exploratoire. Notre étude visait donc à clarifier la relation entre l'histoire éducative d'étudiants universitaires et leurs compétences en situation de résolution de problèmes de mathématiques appliquées.

En combinant les résultats de travaux de mathématiciens et didacticiens des mathématiques (Polya, 1945 ; Schoenfeld, 1985) avec ceux d'un sociologue du travail (de Terssac, 1996), nous avons pu élaborer une grille d'analyse pour classer les erreurs commises en situation de résolution de problèmes et inférer ainsi les compétences démontrées. En complétant ces données avec une analyse didactique des productions de certains étudiants aux profils contrastés, nous avons pu mettre en relation les compétences démontrées avec l'histoire éducative des étudiants.

Tout en réaffirmant le caractère exploratoire de cette étude, nous croyons important de faire ressortir les principaux phénomènes qu'elle a permis d'identifier :

- Une bonne « performance » en mathématiques dans un curriculum (ou un cours) d'orientation procédurale n'est pas un indice fiable de « compétences » mathématiques.

- La présence de l'application en mathématiques peut contribuer à donner un sens aux concepts et inciter à en sonder la portée, mais la motivation nécessaire à cette contribution dépend fortement de l'intérêt de l'élève pour le secteur d'application proposé.

- L'impact des outils informatiques sur les compétences mathématiques dépend de la période d'exposition à ces outils, de leur mise à contribution dans l'évaluation et de la nature des tâches proposées.

- La convivialité croissante des logiciels à contenu mathématique élève la barre des compétences mathématiques minimales requises pour exploiter ces logiciels de façon adéquate, autonome et inventive, tout en maintenant un regard critique sur leurs productions.

- La programmation et la démonstration procèdent de deux logiques distinctes et complémentaires, et le passage de l'une à l'autre de ces logiques n'apparaît pas également aisé dans les deux directions.

Si nous présentons ici ces propositions comme des conclusions à notre étude exploratoire, certaines d'entre elles pourraient constituer des hypothèses à vérifier par des études statistiques sur un plus grand échantillon de sujets. La construction des questionnaires utilisés dans le cadre de telles enquêtes pourrait mettre à contribution les conceptions et attitudes que nous avons repérées chez les participants ainsi que le vocabulaire utilisé.

La mise en relation des stratégies d'apprentissage privilégiées avec les compétences mathématiques démontrées a fait ressortir à plusieurs reprises l'importance de l'explicitation dans le développement des compétences d'évaluation. En effet, ceux qui font montre de compétences supérieures en évaluation investissent davantage et de façon personnelle et autonome dans l'explicitation des contenus d'apprentissage : lecture, questionnement, argumentation, utilisation des définitions, réécriture du cours, confection de résumés, etc. On pourrait, sans exagération, qualifier cette démarche d'*auto-didactique* (Brousseau, 1998), car la contribution individuelle de ces étudiants à leur formation est non seulement déterminante mais témoigne d'une distance prise de façon consciente à l'égard des pratiques d'enseignement. Cette observation nous amène à envisager un *modèle par niveaux* des efforts d'explicitation mis à contribution dans l'apprentissage (Figure 15).

Au premier niveau, on retrouve l'*association* : on peut lire, reconnaître et reproduire une expression, une figure, une définition ou un énoncé. Une fois déterminés le registre d'explicitation et l'élément qui s'y rapporte, on peut appliquer des méthodes d'intervention sur cet élément (ex. manipulation algébrique, calcul de dérivée, transformation géométrique, etc.). L'utilisation des *différents langages* (symbolique, numérique, graphique et naturel) et le passage de l'un à l'autre contribuent à solidifier ce niveau, mais ne garantissent pas l'émergence du concept à partir de la mise en relation de ses différentes représentations. On retrouve Mark tout en bas de ce niveau avec une focalisation sur la manipulation symbolique ; un peu plus haut, Michel, puis Ninon avec une valorisation de l'entraînement par les exercices pour mémoriser les différentes associations ; et finalement, avec la volonté de passer au niveau supérieur pour lier mathématiques et application, mais sans en avoir développé tout à fait les moyens, Hughes et Helga.

La quête du *sens* derrière la forme langagière amène à un second niveau, la *compréhension*, qui permet d'abstraire le concept et d'en appréhender la portée par la *recherche de liens* avec d'autres concepts, théories ou applications. Un niveau minimal de compétences langagières constitue le seuil d'entrée à ce niveau. À cette entrée, on retrouve Lucie qui s'intéresse aux définitions et au sens des objets, et plus haut, Geneviève et François, dont le rapport développé à l'application, surtout par l'expérience mais aussi par la lecture, insuffle un sens aux concepts enseignés.

Par l'analyse, on passe au troisième niveau, la *structuration*, où l'on cherche à organiser et éventuellement synthétiser les concepts en fonction de leur généralité et de la nature des relations qui les lient (équivalence, ordre, hiérarchie, causalité, etc.). Le développement à ce niveau est favorisé par une valorisation de la *pensée déductive* car celle-ci représente à la fois le mode d'argumentation nécessaire en mathématiques et le moyen de retrouver des propriétés qu'on n'est donc plus tenu de mémoriser. À l'entrée de ce niveau, on retrouve Fabienne qui, de par son intérêt pour appliquer les concepts, procède à une réécriture plus structurée de ses notes et cherche à identifier les formules maîtresses, et un peu plus haut, Charles puis Alexandre, qui utilisent le questionnement et l'argumentation pour cerner la *portée* des concepts.

Si l'on cherche ensuite à redéfinir selon les nouvelles structures les apprentissages connexes et les applications qui suivront, nous dirons qu'il y a passage au dernier niveau, celui de la *reformulation*, qui amènera, selon le cas, à un transfert efficace des connaissances ou à un conflit et une révision en conséquence des structures qui semblent poser problème. Avec sa facilité pour l'abstraction et sa capacité à transférer à l'informatique la pensée qu'elle a développée en mathématiques, Zoé se trouve à l'entrée de ce niveau.

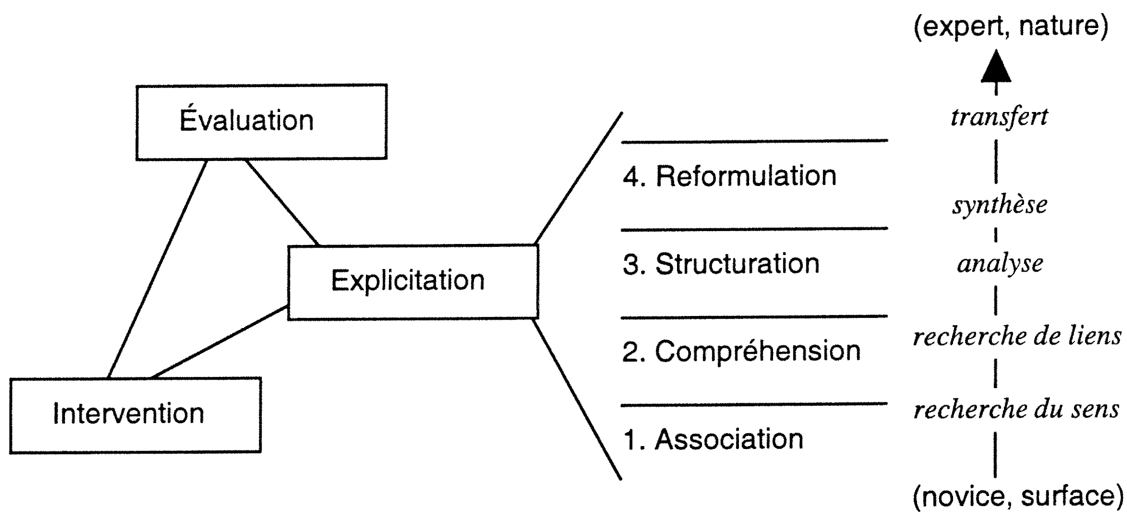


Figure 15 - Niveaux d'explicitation dans l'apprentissage

Ce modèle semble en accord avec les études qui reconnaissent aux experts la capacité d'aborder la résolution d'un problème en l'analysant en fonction de sa structure profonde plutôt qu'à partir de ses caractéristiques de surface (Chi, Feltovich et Glaser, 1981). Il permet par ailleurs d'expliquer les difficultés qu'éprouvent certains étudiants universitaires à juger, à prouver ou à aborder et résoudre de nouveaux problèmes dans leur domaine d'étude : en cherchant à mémoriser des « formules », à reconnaître des énoncés de problèmes pour identifier la méthode à appliquer, et en se fiant exclusivement aux réponses pré-fournies pour valider leur approche, ils essaient de développer des compétences d'*intervention* en travaillant presque exclusivement au niveau *associatif* de l'*explicitation*, en négligeant le niveau de compréhension et en structurant en fonction de la forme. Une telle stratégie d'apprentissage est exigeante sur le plan de la mémorisation et peu efficiente. En l'encourageant dans la formation, on court le risque d'éliminer d'emblée plusieurs élèves qui ne voient pas le sens d'une telle entreprise ou qui ont du mal à mémoriser. Par ailleurs, ceux qui apprennent ainsi n'apparaissent pas outillés pour analyser, évaluer, modéliser, décider et contrôler ; ces lacunes peuvent alors se manifester dès le niveau collégial. Cela donne des éléments de réponse aux interrogations du ministre que nous rapportions dans l'introduction à cette thèse.

Il ne faudrait pas voir les différents niveaux de ce modèle comme des stades à respecter dans l'apprentissage. Nous croyons au contraire qu'une formation générale en mathématiques devrait viser à tout moment la *compréhension* et la *structuration* des concepts chez l'élève, car l'étude tend à montrer que le fait d'entretenir pendant une période prolongée un apprentissage par association peut handicaper fortement chez certains étudiants le passage aux niveaux supérieurs.

6.2 Limites et apports de la recherche

Avant de mettre en évidence les apports éventuels de cette recherche, il convient d'en préciser les limites. À ce chapitre, il faut rappeler en premier lieu le taille limitée de l'échantillon d'étudiants sur lequel a porté cette étude, et le caractère volontaire de la participation. Ces deux éléments font en sorte qu'on ne peut attribuer de valeur statistique aux résultats. D'autres facteurs ont pu aussi biaiser l'échantillonnage : certains participants n'en étaient pas à leur première session à l'université, quelques-uns reprenaient même le cours pour une seconde fois, d'autres allaient finir par l'abandonner (et ne pas contribuer aux données), et les étudiants qui représentaient Polytechnique étaient presque tous en génie chimique.

Toute recherche évaluative en éducation est immanquablement contextualisée, dans le temps et dans l'espace. La nôtre n'y échappe pas. Si elle décrit principalement le parcours d'étudiants de Montréal et sa banlieue, elle est aussi intimement liée à une époque-charnière caractérisée à la fois par les dernières années d'application des programmes du secondaire des années 80, l'émergence de nouvelles technologies ludiques et éducatives, et l'importance croissante du travail rémunéré chez les étudiants. Les données recueillies sont donc fortement empreintes de cette réalité complexe et éphémère, ce qui commande d'user de prudence avant de vouloir transférer à d'autres contextes les résultats obtenus. En particulier, les remaniements des programmes complétés en 1998 (MÉQ, 1996 et 1997) pourraient avoir engendré certaines modifications dans l'enseignement des mathématiques au secondaire, en valorisant, tout au moins dans les principes, la capacité à raisonner et à résoudre des problèmes. La nouvelle réforme (dont les nouveaux programmes devraient toucher le premier cycle du secondaire dès 2002) tente d'aller plus loin dans cette direction en faisant de ces principes des compétences sur lesquelles portera l'évaluation (MÉQ, 2001).

Par ailleurs, la définition dans le cadre de cette étude d'une grille qui permette d'évaluer les compétences a mis en évidence la difficulté à décrire avec à la fois précision et concision le processus de résolution de problèmes de façon telle que cette description puisse représenter l'utilisation des mathématiques qui est faite dans différents contextes d'application où les notions-clés et les approches sont différentes. La validation de la grille pour classer les erreurs a aussi fait ressortir le fait qu'en raison du caractère multiple de certaines erreurs et de l'explicitation souvent partielle de la part des étudiants, une évaluation de compétences générales en situation de résolution de problèmes demande du temps, fait souvent appel à une forme d'interprétation, et ne peut, par conséquent, prétendre à une précision ou une objectivité absolue, surtout en l'absence de référence explicite au contenu. En dépit de ces réserves, nous croyons toutefois que cette grille validée et ajustée avec le milieu constitue un des apports importants de ce travail, notamment parce qu'elle permet d'associer de façon assez fidèle les erreurs aux *types* de compétences à développer (*évaluation*, *explicitation* ou *intevention*). Son application par des non didacticiens a de plus amené à intégrer une composante didactique à l'évaluation, en attirant l'attention sur la raison de l'erreur, le caractère opératoire de la connaissance, les processus impliqués, et les phénomènes récurrents.

Nous croyons que l'étude ouvre un nouveau champ de recherche par l'intégration d'une perspective curriculaire à la didactique des mathématiques. En nous intéressant à la capacité à mobiliser les connaissances dans un contexte d'utilisation, nous avons pu étudier l'impact à long terme des contenus enseignés et des approches utilisées, et identifier des pistes d'exploration pour expliquer les compétences et les lacunes des étudiants. Aborder la connaissance par son caractère opératoire a permis par ailleurs de mettre en relief l'importance du bagage théorique nécessaire à l'application et la nécessité de travailler le *sens* et la *structuration* des concepts.

Cette réflexion amène à envisager, comme retombées possibles à cette étude, un nouveau regard sur le curriculum mathématique et sur la formation des enseignants qui sont les principaux responsables de son implantation en classe. Dans la section qui suit, nous donnons un aperçu de changements curriculaires qui pourraient être considérés.

6.3 Changements curriculaires considérés

Comme nous l'avons rapporté dans les sections précédentes, l'intégration de nouveaux contenus ou de nouvelles approches créent inévitablement un besoin d'*harmonisation* sur le plan curriculaire. Or un curriculum mathématique se définit non seulement par les contenus visés, mais aussi par la finalité qu'il poursuit avec l'enseignement des mathématiques, par les objectifs institutionnels, la logique de progression interne et les préoccupations d'arrimage avec les autres ordres d'enseignement, les stratégies d'enseignement, les activités d'apprentissage, les moyens d'évaluation, les ressources utilisées, la gestion du temps et de l'espace. À la lumière des résultats de l'étude, nous allons examiner ici certaines de ces composantes et les propositions des chercheurs qui s'y sont intéressés.

6.3.1 Finalités et contenus

Avant de pouvoir répondre à la question *"quelles mathématiques faut-il enseigner ?"*, question incontournable du reste en raison des changements dans les mathématiques elles-mêmes et des changements dans le besoin de mathématiques qu'ont les autres disciplines, Cornu (1992) signale qu'il faut d'abord avoir résolu la question de l'objectif de l'enseignement des mathématiques: *"doit-on enseigner des outils, des méthodes, des résultats, une façon de raisonner, des techniques...?"*

Celui qui adopte la finalité de l'école classique dans l'enseignement des mathématiques sera beaucoup plus enclin à adopter une approche prudente dans les révisions curriculaires, et même à y opposer une certaine résistance. Par exemple, au sujet de l'intégration de l'informatique, Chevallard (1992) recommande de la limiter, dans un premier temps, à l'amélioration de l'enseignement de contenus qui eux demeurent traditionnels; ensuite, il devient envisageable de s'interroger sur les effets sur le savoir introduits par l'outil. Cette approche étapiste apparaît à première vue inefficace et peut-être même inutile: tout pertinents qu'il soient, les résultats du premier moment d'analyse risquent fort de ne pas être transférables au second. D'autre part, à moins de se limiter à des didacticiels encadrant l'apprentissage d'un contenu traditionnel, on s'expose à une tension, voire à une contradiction entre les objectifs traditionnels et les possibilités amenées par l'informatique.

L'approche par compétences, utilisant la résolution de problèmes comme cadre de développement, propose plutôt une nouvelle piste de réponse à la question de l'objectif de l'enseignement des mathématiques: il faut enseigner tout ce qui permet l'élargissement à court et à long terme du champ de problèmes résolubles, par l'élève maintenant et par l'individu plus tard.

Pour favoriser la *motivation*, la *compréhension* et la *structuration* nécessaires au développement des compétences d'explicitation et d'évaluation, on pourrait envisager une organisation du curriculum qui chercherait à étendre progressivement les champs de problèmes en fonction du sens des concepts fondamentaux mis à contribution (Usiskin, 1998). Alors que la séquence d'un curriculum traditionnel est organisée soit selon les relations de dépendance entre les habiletés procédurales (l'enseignement de l'addition et celui de la soustraction doivent précéder celui de la division), soit selon des considérations logiques (les triangles semblables doivent être vus avant le théorème de Pythagore), Usiskin soutient que le développement d'habiletés de résolution de problème doit reposer sur un curriculum dont les problèmes et les modèles évoluent en fonction de concepts fondamentaux. Par exemple, à l'élémentaire, la soustraction permet d'aborder des problèmes faisant appel à la *comparaison*, avec le *changement* comme cas particulier. La division ouvre la porte des problèmes liés à la notion de *taux* (km/h, hab./km^2, etc.). Plus tard, on a alors en mains les éléments qui permettent de résoudre des problèmes qui font appel à la notion de *taux ou vitesse de changement* qui amène, dans la représentation graphique, la notion de *pente*, puis plus tard celle de *dérivée*, etc. On regroupe donc les problèmes selon le *sens* du concept auquel ils font appel.

Cette organisation permet d'insérer de façon cohérente différentes applications qui gravitent autour d'un concept et espérer rejoindre ainsi les intérêts de chacun des élèves pour les amener à mieux comprendre le sens d'un concept, à développer des compétences de *modélisation* et à interpréter la solution d'un problème. Toutefois, elle ne nous renseigne pas sur l'organisation de l'apprentissage des méthodes mathématiques nécessaires à la résolution de ces problèmes, particulièrement pour les concepts plus avancés où deux problèmes semblables dans leur énoncé ou dans les concepts mathématiques sous-jacents feront appel à deux approches de résolution très différentes. En d'autres termes, elle ne propose pas de cadre pour le développement des *compétences d'intervention.*

Pour étendre sur le plan des *compétences d'intervention* la classe de problèmes résolubles par l'élève, les outils informatiques offrent un potentiel très alléchant dont il convient de vouloir tirer parti puisqu'il font désormais partie des ressources dont disposent ceux qui développent et appliquent les mathématiques. Cornu (1992) semble s'inscrire dans cette voie lorsqu'il écrit à propos de l'ordinateur:

> *"Il est certain que l'ordinateur peut effectuer des tâches à la place de l'élève; c'est un phénomène normal et qu'il faut bien accepter. (...) Il faut plutôt se poser la question de savoir quelles aptitudes (traditionnelles) peuvent être renforcées par l'usage de l'ordinateur. Les technologies nouvelles changent surtout la classe des problèmes accessibles à l'élève. Il est des quantités de situations, de*

> *problèmes, que l'on peut maintenant aborder, grâce aux outils modernes. Le champ des aptitudes demandées à l'élève évolue certainement: il n'est pas certain qu'il s'appauvrisse, bien au contraire."*

Sendov (1987) va jusqu'à suggérer de considérer l'ordinateur comme une extension de l'esprit humain et d'admettre par conséquent que l'objet de l'éducation a changé: le but de l'éducation serait désormais la formation d'enfants et de jeunes adultes munis d'un ordinateur et ayant à faire face à des problèmes de plus en plus complexes. Devant une telle position qui a le mérite d'être courageuse par son côté radical, une prudence s'impose. D'une part, il ne faudrait pas en arriver à une situation où le contrôle et la créativité se déplaceraient progressivement vers l'ordinateur, car on menacerait ainsi les objectifs d'autonomie et de responsabilité visés par l'enseignement. D'autre part, il faudrait à tout prix éviter de transformer par analogie l'ordinateur en nouvelle *boîte noire*, aussi mystérieuse que le cerveau.

Nous croyons plus sage de nous rallier à la position de Hodgson (1987) qui insiste sur la nécessité de développer le bagage mathématique nécessaire à une utilisation sensée des logiciels mathématiques et à l'interprétation des résultats ainsi obtenus. Il prend pour exemple la multiplication dans les années 70-80 des utilisateurs de logiciels statistiques; elle aurait eu pour effet de créer dans les universités des services de consultation statistique parce que les chercheurs qui utilisaient ces logiciels n'avaient pas les compétences requises pour choisir et interpréter les valeurs statistiques produites par l'ordinateur. Notre étude en a donné une autre illustration en mathématiques financières, où le logiciel peut produire une valeur de taux qui ne correspond à celle cherchée et où il est impossible d'en comprendre la raison si l'on s'est limité dans le développement des compétences d'intervention à *associer* aux équations les fonctions logicielles censées les résoudre. Pour extraire le sens des résultats, Hodgson rappelle qu'il est nécessaire de connaître la portée et les limites du modèle mathématique utilisé par le logiciel. Il s'agirait là de *nouvelles compétences minimales d'évaluation* définies en fonction des capacités et caractéristiques des logiciels. En raison de l'évolution très rapide de ces logiciels, il convient de mettre assez haut la barre de ces compétences minimales. En effet, viser en formation fondamentale une recherche d'adéquation entre compétences de l'individu et capacités de la machine ne peut se faire sans intégrer une perspective à long terme.

Dans cette perspective d'une utilisation responsable et autonome de ces outils, un premier ajout envisageable à la formation générale (en mathématiques ou dans un autre cours) serait l'introduction de concepts informatiques fondamentaux. Avant de se faire le défenseur d'une vigilance face à la validité épistémologique des logiciels utilisés en classe (pour éviter que des limites d'implantation ne fassent obstacle à l'illustration d'un concept mathématique), Balacheff a « autrefois » souligné la nécessité d'une telle initiation à la science informatique (et non à sa simple utilisation), concomitante ou antérieure à l'utilisation d'un outil dans le cadre d'un cours de mathématiques (Capponi et Balacheff, 1989). En plus de fournir un nouveau contexte d'application aux mathématiques, cette approche permettrait de comprendre les possibilités d'erreurs qu'engendre inévitablement un instrument de médiation et de faire ressortir des situations où l'analyse théorique s'avère supérieure au traitement informatique.

Accorder une place aux *mathématiques discrètes* et aux *algorithmes* [32] dans la formation générale constituerait un apport important car cela permettrait d'expliquer certains des modèles mathématiques utilisés par ces logiciels. On pourrait aussi alors envisager de changer l'ordre d'exposition des notions (en inversant par exemple la séquence continuité-dérivation-intégrale-discrétisation dans le cours d'analyse (Cornu, 1992)) et peut-être aider ainsi à surmonter les obstacles conceptuels associés à ces notions (par exemple, la difficile appréhension du concept de limite). Le développement d'une compréhension de l'algorithme permettrait d'agir directement sur les *compétences d'explicitation* et d'*intervention* en élargissant de façon progressive le champ de problèmes issus d'applications réelles, dans toute leur complexité, qu'il devient possible pour l'élève de modéliser et de résoudre tout en gardant un regard critique sur les résultats. En effet, l'algorithme peut être vu comme un outil, une méthode qui aide à produire un résultat, dans une variété de situations, et en ce sens, il est essentiel en informatique et en mathématiques appliquées. Par exemple, les *algorithmes numériques itératifs* de calcul de racines peuvent s'appliquer autant à des polynômes de degré n qu'à des fonctions plus complexes. De

---

[32] Il convient ici d'amener une précision puisqu'en éducation, on associe souvent l'*algorithme* à une approche procédurale, quasi-béhavioriste de l'apprentissage (Roitman, 1995), où l'élève est programmé selon une séquence d'opérations à mémoriser. Rappelons donc que par algorithme, nous entendons une séquence d'opérations typiquement destinée à un ordinateur pour produire une solution à un problème (de mathématiques ou autre).

plus, il apparaît raisonnable de supposer que la conception d'algorithmes, parce qu'elle exige des compétences de très haut niveau, contribue au développement de *compétences d'évaluation*, en amenant l'élève à déterminer les différents cas possibles, les relations de dépendance avec les variables du problème, les situations-limites, et les aspects probabilistes du problème. Finalement, un algorithme peut aussi être vu comme un objet mathématique dont les propriétés (convergence, complexité, exactitude) découlent d'une analyse théorique; l'étude des algorithmes pourrait offrir un complément à la géométrie comme moyen de développer le sens de la démonstration et le raisonnement déductif.

Car l'apprentissage de la *démonstration* demeure un élément important dans le développement de compétences mathématiques. D'une part, sur un plan théorique, elle fournit un cadre formel à la *structuration* des concepts et elle conduit à valoriser les *définitions* qu'elle utilise comme *« instruments pour raisonner »* (Rouche, 1987) ; ces deux caractéristiques en font donc un outil puissant pour développer à la fois les compétences d'*explicitation* et d'*évaluation*. D'autre part, sur un plan appliqué, la preuve se révèle fondamentale en informatique : c'est elle qui se porte garante de l'adéquation et de la convergence d'un algorithme. De plus, comme nous avons pu le constater dans l'étude, le développement du raisonnement déductif paraît favoriser le passage à une logique de programmation efficace.

Le temps requis pour un enseignement des mathématiques qui intègre autant d'éléments ne peut être disponible que si l'on coupe ailleurs. L'apprentissage par la répétition de techniques laborieuses et désormais automatisées pourrait bien être cet « ailleurs ». En particulier, au niveau collégial, on pourrait repenser complètement les cours de calcul différentiel et intégral qui consacrent énormément de temps à l'apprentissage de techniques, et passent souvent à côté de l'interprétation du problème et de sa solution. Le phénomène est particulièrement visible et pathétique avec la résolution d'équations différentielles (Beaudin, 1998), où l'on se contente de traiter les équations au niveau de la forme, de la syntaxe algébrique, en appliquant une série de règles mécaniques, sans parvenir à saisir le sens du problème. Qui plus est, plusieurs de ces techniques sont à toute fin pratique inutiles puisque la plupart des équations différentielles ou aux dérivées partielles qui décrivent les phénomènes naturels (ex. équations de Maxwell (en électro-magnétisme) ou de Navier-Stokes (en mécanique des fluides)) n'ont pas de solution analytique et nécessitent un passage par des méthodes numériques et topologiques. On pourrait mettre fin à ce gaspillage d'énergie qui ne contribue que très marginalement au développement de *compétences d'intervention.* Déplacer le centre d'attention de l'apprentissage d'une mécanique complexe à la compréhension du sens et de l'utilité des concepts nouvellement acquis permettrait par ailleurs d'en devancer l'apprentissage (Sendov, 1987).

6.3.2 Stratégies d'enseignement et activités d'apprentissage

Les stratégies d'enseignement et les activités d'apprentissage réfèrent au "*comment*" de la progression de l'élève dans l'acquisition de compétences. Elles font partie du curriculum car elles décrivent la façon de traiter les *contenus* pour espérer atteindre les objectifs de l'enseignement. Les effets sur l'apprentissage du choix des activités et des stratégies d'enseignement constituent, avec l'analyse des obstacles épistémologiques, un des domaines d'étude privilégiés en didactique des mathématiques.

Avec d'une part la complexification des problèmes issus d'application des connaissances mathématiques et d'autre part la possibilité d'utiliser le support informatique dans la résolution de ces problèmes, plusieurs chercheurs recommandent de consacrer davantage de temps d'apprentissage à la *modélisation* de problèmes, à la *traduction* d'énoncés, car ces activités sont plus difficilement automatisables et permettent de donner un sens aux concepts enseignés (Sendov, 1987; Johnson, 1987; Béguin, Marcellus et Vitale, 1996). En accordant plus d'importance à ces activités, on travaille forcément au niveau du *sens* des équations, des variables qu'elles lient et des concepts mathématiques auxquels elles font appel ; on peut donc espérer contribuer au développement de *compétences d'explicitation et d'évaluation* dans l'*analyse* du problème et la *validation* de la solution. Mais là encore, il faut viser une certaine complexité dans les situations à modéliser pour empêcher le simple apprentissage par *association* (mémorisation d'équations en fonction du problème), comme il était apparemment possible de faire avec les problèmes de taux d'intérêt et de prolifération de bactéries utilisés dans l'apprentissage des fonctions exponentielles et logarithmiques. Et pour développer l'autonomie dans la validation, il convient de limiter l'usage de solutionnaires et de problèmes aux réponses données.

Toujours dans le but de conférer un *sens* aux concepts, il est fréquemment suggéré d'intégrer, par le biais de l'ordinateur, les représentations *graphique* et *numérique* à la représentation symbolique d'un concept, et ce tout au long de l'apprentissage (Tall, 1992; Schwartz et Dreyfus, 1995; Calculus Consortium Group;1998). Mais comme en témoignent les participants de l'étude, la simple combinaison de ces représentations ne favorise pas nécessairement la compréhension du concept chez l'étudiant. Là encore, on peut se limiter à l'association, particulièrement entre les représentations symboliques et graphiques. Il convient donc d'assortir les activités de visualisation d'un *questionnement* explicite sur les raisons qui expliquent la correspondance entre ces différentes représentations.

Un telle exploration sur les propriétés d'un concept pourrait ensuite ouvrir la porte à une activité de *démonstration*. Car si l'on choisit de redonner à la démonstration une plus grande place dans la formation mathématique au secondaire, il convient là aussi d'en faire saisir la pertinence, en la situant, par exemple, comme une façon de confirmer une conjecture ayant émergé de l'exploration. Et pour amener à la rigueur, il faut revaloriser les *définitions* et les éléments de *logique*, en distinguant notamment la valeur de l'exemple et du contre-exemple.

Dans le cadre du cours de mathématiques, l'utilisation de logiciels qui ne nécessitent que des commandes simples apparaît préférable à la programmation ou à l'utilisation de logiciels plus sophistiqués, car elle est moins exigeante en temps et permet ainsi d'aller en profondeur sans sacrifier à l'étendue des contenus mathématiques couverts. Par exemple, les tableurs comme EXCEL offrent des capacités itératives qui facilitent l'implémentation d'algorithmes et permettent ainsi de résoudre rapidement des problèmes relativement complexes. Ce faisant, on privilégie le sens à travers l'application et non la forme par le biais d'un langage (Van Weert, 1987). Par ailleurs, la présence de ce type de logiciel dans la plupart des écoles permet d'envisager une période d'exposition prolongée, d'en connaître les possibilités comme les limites, d'éliminer ainsi le complexe du novice qui peut faire obstacle au développement de compétences d'intervention. Et, élément non négligeable, cette approche permet de développer une familiarité avec les outils en usage dans les pratiques professionnelles et académiques, et prépare par conséquent à l'environnement de travail mathématique (Hodgson, 1987).

Et pour que le passage à un savoir pratique se réalise effectivement, il faudrait multiplier les contextes d'utilisation des concepts, les mettre sans cesse à l'épreuve dans une nouvelle activité de résolution de problèmes. Cette recherche de contextes d'utilisation représente une voie assez peu exploitée en didactique des mathématiques, plus souvent intéressée au moment de la première rencontre avec une tâche ou un concept qu'au moment du travail de la *technique*. Mais comme il ne s'agit pas d'une simple technique procédurale à appliquer à un nouveau contexte, il convient d'allouer une période de temps suffisamment longue et des dispositifs d'étude adéquats pour permettre aux élèves d'assumer la responsabilité de la *modélisation*, de l'*exploration*, de la *résolution* proprement dite et de la *vérification*.

6.3.3 Évaluation

L'évaluation est un élément fondamental d'un curriculum car, par un remarquable phénomène d'inversion, de l'évaluation dépendent la forme d'enseignement privilégiée et l'attention accordée aux différents éléments de contenu. Elle se doit donc d'être en accord avec les finalités et objectifs de l'enseignement pour en permettre la réalisation.

L'expérience d'enseignement de modélisation relatée par Dupin (1996) et rapportée dans la section 2.1.2.2 illustre comment l'évaluation, par son format limité dans le temps, sans possibilité d'exploration et de validation, ne permettait pas aux étudiants de mettre en œuvre leurs connaissances acquises en modélisation. Pour maintenir le format d'évaluation (i.e. l'examen traditionnel) sans mener systématiquement à l'échec, les professeurs ont été amenés à modifier le contenu évalué et, ce faisant, à faire glisser le contenu de l'apprentissage, au détriment de l'objectif initial qui était le développement d'habiletés de modélisation. Pour être représentative du travail de modélisation et ainsi encourager le développement de cette compétence, l'évaluation devrait porter sur de vrais nouveaux problèmes, et permettre aux étudiants d'utiliser les ressources nécessaires à ce travail, à la fois au niveau du temps et du matériel : on aurait peut-être ici un contexte d'application en mathématiques de la *pédagogie par projet*.

Avec l'introduction de l'ordinateur dans le cours de mathématiques, Cornu signale là aussi la nécessité de modifier l'évaluation: « *les critères d'évaluation ne peuvent rester les mêmes qu'avec l'évaluation 'papier-crayon' ; il faut imaginer des modes d'évaluation qui testent effectivement les capacités et les aptitudes que l'on a voulu faire acquérir aux élèves.* » Sinon, la mesure est fausse et l'on continue de conférer aux nouvelles activités un statut extra-scolaire qui nuit forcément à la motivation (Hodgson, 1987), comme nous l'ont confirmé les sujets de l'étude.

Finalement, il faudrait sans doute, dans l'évaluation, laisser la porte ouverte aux approches de résolution non prévues. Avec les possibilités multiples des logiciels, force est de constater que la compétence peut employer des routes autres que celle de l'élégance. En particulier, elles rendent possibles des approches *heuristiques* itératives dont la maîtrise devrait pouvoir être comptabilisée dans l'évaluation des compétences : si l'on accepte ces approches pour résoudre des problèmes pour lesquels il n'existe pas de solution analytique, elles ne devraient pas, par souci de cohérence dans l'apprentissage, être rejetées d'emblée lorsqu'une telle solution existe. Car accepter l'application, c'est aussi accepter d'accorder une reconnaissance à l'obtention d'une solution adéquate de façon créative, même si l'approche utilisée ne fait pas toujours appel au concept mathématique visé.

6.3.4 Ressources

Pour donner sens aux concepts enseignés, l'enseignant de mathématiques devrait pouvoir compter sur une *banque de problèmes* qui ont à la fois une valeur didactique (dans la façon dont ils mettent à l'épreuve les connaissances antérieures et ouvrent la porte à de nouvelles connaissances) et un potentiel pour aider l'élève à comprendre le monde qui l'entoure et à y participer de façon autonome. Ce ne devrait pas être à l'enseignant de chercher et de créer ces problèmes : il devrait pouvoir se concentrer sur le développement chez l'élève des compétences de modélisation et de résolution de problèmes dans l'application des concepts qu'il enseigne.

La constitution d'une telle réserve de problèmes n'est pas une mince tâche. Elle doit d'abord impliquer mathématiciens, didacticiens et enseignants; l'ouvrage *Mathématiques d'hier et d'aujourd'hui* (Pallascio et Labelle, 2000) et le cahier *Math 2000* (Centre de recherches mathématiques de l'Université de Montréal, 2000) sont des exemples du produit d'une telle collaboration, qui fournissent des contextes et des problèmes intéressants pour l'arrimage théorie - pratique. Elle demande aussi d'agrandir le cercle des collaborateurs, au-delà des spécialistes des mathématiques et de leur enseignement. Dans la présentation et en annexe de l'ouvrage *High School Mathematics at Work*, issu d'un projet américain approuvé par le National Research Council, Forman et Steen (1998) expliquent l'ampleur du processus de consultation (gouvernement, scientifiques, industrie, spécialistes du curriculum, écoles, programmes d'insertion professionnelle, etc.) qui a permis, à partir de centaines de problèmes soumis, de choisir deux douzaines de problèmes réalistes et motivants faisant appel à des connaissances mathématiques de niveau secondaire. Ils reconnaissent avoir dû adapter ces problèmes pour mieux illustrer certaines des idées du livre et suggèrent aux enseignants de se doter d'une même liberté d'adaptation en contextualisant à leur tour. On retrouve à nouveau cette approche de consultation inter-disciplinaire dans le cadre du *Projet Harvard* [33] lancé à la fin des années 80 pour revoir l'enseignement pré-universitaire du calcul différentiel et intégral. Étalé sur plusieurs années de recherche et subventionné par le National Science Foundation, ce projet qui a donné lieu à des manuels d'enseignement a fait appel à une importante consultation de professeurs d'université en génie, physique, chimie, biologie, économie, pour décider autant du choix des contenus que du choix des applications, et revoir ces choix dans la seconde édition.

Du côté de l'informatique, la période de l'enseignant bricoleur de petits logiciels pour fins d'enseignement paraît bel et bien révolue (Chevallard, 1992a). Ici plus qu'avec l'application, l'enseignant peut compter sur plusieurs ressources disponibles: logiciels, situations didactiques d'intégration, etc. Ces ressources se multiplient, particulièrement sur Internet, on l'on retrouve, notamment avec MATHCAD, jusqu'à des versions "démo" de logiciels puissants accompagnés de livrets de problèmes à résoudre d'une grande richesse.

[33] Calculus Consortium Based at Harvard University : http://jws-edcv.wiley.com/college/cch

6.4 Formation des enseignants

6.4.1 Formation initiale

Pour conclure cette étude, nous avons cherché à savoir si les intérêts et aspirations de la nouvelle génération d'enseignants en mathématiques vont dans le sens d'un enseignement apte à répondre aux besoins que nous avons identifiés. Pour ce faire, nous avons procédé à une courte enquête chez 24 finissants du programme de formation à l'enseignement des mathématiques au secondaire à l'Université de Montréal.

À partir des mêmes énoncés que ceux qui ont été présentés aux étudiants ayant participé à notre étude (Annexe B), nous avons demandé à ces futurs enseignants de caractériser, dans l'ordre, leur formation pré-universitaire, leur formation universitaire et la vision qu'ils ont de leur propre projet d'enseignement. La liste ci-dessous donne, par ordre décroissant de fréquence d'apparition, les énoncés qui ont été retenus par plus de 15% des étudiants pour caractériser la formation pré-universitaire :

Élément ayant caractérisé la formation pré-universitaire	Pourcentage de finissants ayant choisi cet élément
C. une suite de problèmes pour faire comprendre la théorie	75%
H. une série d'exercices pour appliquer les formules enseignées	63%
I. un ensemble de techniques de calcul avec leurs conditions d'utilisation	24%
D. un enchaînement progressif de concepts, du plus simple au plus complexe	24%
F. une suite de définitions d'objets et de leurs propriétés	21%

Tableau 19 - Perception chez les finissants en enseignement de la formation pré-universitaire reçue

La caractérisation est assez proche de celle donnée par les sujets de l'étude (voir Tableau 3 en 4.3) à ceci près qu'on ne fait plus ressortir les théorèmes et les preuves (item G) et le développement du raisonnement et du sens de la démonstration (item K ou L). Ces éléments sont vus comme plus représentatifs de l'enseignement universitaire reçu en mathématiques, caractérisé par la théorie, l'abstraction et le formalisme comme l'indique la liste suivante :

Élément ayant caractérisé la formation universitaire	Pourcentage de finissants ayant choisi cet élément
G. une suite de théorèmes et de preuves donnés par le professeur	63%
E. une étude formelle d'espaces abstraits et de structures mathématiques	42%
L. une focalisation sur le développement du raisonnement et du sens de la démonstration	29%
B. une suite de problèmes difficiles sans lien évident avec la théorie	21%

Tableau 20 - Perception chez les finissants en enseignement de la formation universitaire reçue

La vision de l'enseignement futur intègre des éléments de la formation pré-universitaire reçue (items C, D), mais elle s'en distingue dans la mesure où l'on s'éloigne des tendances procédurales (item I) sans toutefois les abandonner complètement (item H).

Élément caractérisant l'enseignement futur	Pourcentage de finissants ayant choisi cet élément
D. un enchaînement progressif de concepts, du plus simple au plus complexe	58%
C. une suite de problèmes pour faire comprendre la théorie	54%
J. une volonté de faire découvrir la théorie par l'étudiant	54%
K. une ouverture sur le développement du raisonnement et du sens de la démonstration	50%
M. une ouverture sur les possibilités d'application des concepts enseignés	38%
O. une ouverture/focalisation sur l'exploration et l'expérimentation	33%
H. une série d'exercices pour appliquer les formules enseignées	25%

Tableau 21 - Vision des finissants de leur futur enseignement

Si l'on souhaite favoriser le développement du raisonnement et du sens de la démonstration (item K), on compte le faire en amenant l'élève à explorer, expérimenter et découvrir (items J et O) plutôt qu'en l'exposant à une suite de théorèmes et de preuves (item G). On prévoit aussi donner une plus grande place aux applications (item M). On semble donc vouloir accorder davantage d'importance au *sens* et à la *structuration* des concepts, ce qui nous semble positif a priori et paraît répondre aux demandes exprimés par les étudiants dans les secteurs appliqués (voir Tableau 6 et Figure 7). Par ailleurs, si plusieurs des futurs enseignants disent souhaiter favoriser l'exploration et l'expérimentation, un seul parmi ceux-là prévoit le faire en intégrant les technologies dans son enseignement des mathématiques.

Il est raisonnable de croire que les choix didactiques de ces futurs enseignants seront teintés de leurs intérêts personnels en mathématiques. C'est pourquoi nous avons cherché à valider la vision de leur enseignement futur en leur demandant aussi d'identifier les éléments qui leur apportent le plus de satisfaction en mathématiques.

Comme l'indique le tableau suivant, on aime avant tout saisir le sens des concepts, pour en faire autant des outils de pensée formelle que des ressources dans l'application et dans la résolution de problèmes en général.

Élément pouvant constituer une source de satisfaction en mathématiques	Pourcentage de finissants ayant choisi cet élément
D. la compréhension d'un nouveau concept formel qui amène à penser autrement	50%
B. la réutilisation dans d'autres disciplines de concepts ou de méthodes vus en math	46%
C. la recherche fructueuse d'une approche de résolution à un problème mathématique	42%
F. la simplification d'une expression complexe par des manipulations algébriques	25%
I. la découverte d'une preuve élégante	8%
G. la confirmation par le corrigé de votre maîtrise d'un concept ou d'une méthode math.	4%
A. la connaissance d'une formule ou d'une méthode générale applicable à tous les cas	4%
E. l'expérimentation et la visualisation à l'aide de l'ordinateur de phénomènes math.	0%
H. la conception réussie d'un programme ou d'une procédure logicielle pour résoudre ...	0%

Tableau 22 - Éléments de satisfaction en mathématiques chez les finissants en enseignement

Il semblerait donc que ces futurs enseignants ne se voient pas exclusivement comme des spécialistes disciplinaires, œuvrant dans le pur domaine des idées, que plusieurs manifestent plutôt un intérêt pour une vision interdisciplinaire des mathématiques. Nous parlons ici d'intérêt, de vision, car ce serait beaucoup demander à l'enseignant dont la fonction est déjà suffisamment complexe de devenir en plus un spécialiste des applications des mathématiques, spécialité utopique par ailleurs. Il convient cependant pour l'enseignant de développer des connaissances didactiques qui lui permettront de s'assurer que les problèmes soumis vont dans le sens d'une expansion progressive du champ de problèmes résolubles par l'élève. Il y a là une voie de recherche à exploiter par les didacticiens, particulièrement dans le développement d'une *didactique de la modélisation.*

On note aussi à nouveau quelques relents de l'orientation procédurale de leur formation pré-universitaire dans le plaisir associé pour certains aux manipulations algébriques, à l'obtention de la réponse du corrigé et à la connaissance d'une formule universellement applicable, mais ces éléments sont nettement moins populaires chez ces finissants en enseignement que chez les étudiants en début de formation qui ont participé à cette étude (voir Tableau 7 – Éléments de satisfaction en mathématiques).

Par contre, la sensibilité à l'élégance d'une preuve n'est pas plus forte ici, ce qui nous amène à douter de l'efficacité de ces futurs enseignants à pouvoir faire apprécier la valeur d'une démonstration. Il y a peut-être là un écho aux résultats de Mary (1999) qui concluait à l'absence chez les futurs enseignants d'un authentique projet de rigueur, absence que nous serions tentée d'attribuer à une rencontre tardive avec la rigueur de la démonstration.

Les éléments à caractère technologique ont été unanimement écartés de la sélection des principales sources de satisfaction en mathématiques. Il y a donc tout lieu de croire qu'il y aura sous-utilisation du potentiel des outils informatiques pour étendre les capacités de résolution, favoriser l'exploration de la portée des concepts et engager par cette voie un processus de structuration qui se situerait à mi-chemin entre l'essai sur des cas particuliers et la démonstration rigoureuse.

Ces observations suggèrent qu'il faudrait sans doute accorder, dans la formation initiale, davantage de place à l'étude du potentiel de l'informatique pour l'enseignement des mathématiques. En particulier, l'enseignant devrait pouvoir être aiguillé et bénéficier de connaissances didactiques, de critères qui l'aideraient à faire le tri entre les ressources disponibles et à concevoir lui-même certaines situations d'intégration des outils-logiciels. C'est sans doute en réponse à une difficulté vécue par les enseignants (au collégial, toutefois) que Lemelin (1998) présentait une conférence intitulée « *Qu'est-ce qu'un bon problème avec MAPLE ?* »

Mais avec l'informatique comme avec l'application, les connaissances possèdent un caractère dynamique propre au savoir de l'action ; elles devraient donc aussi être au cœur des objectifs de la formation continue, pour tirer parti de l'évolution des ressources disponibles.

6.4.2 Formation continue

Plus que jamais, l'accès à une formation continue apparaît nécessaire pour les enseignants de mathématiques (Cornu, 1992):

> *"Il faut tout d'abord rendre les enseignants aptes à évoluer. On ne peut pas donner au professeur de mathématiques le bagage de connaissances nécessaires pour toutes sa carrière. On l'a vu, les mathématiques elles-mêmes évoluent, leur rôle dans la société, leurs applications évoluent. L'enseignement évolue, sous l'effet des progrès des travaux de didactique, et parce que de nouveaux outils apparaissent et se développent. On ne peut pas former une fois pour toutes."*

En raison de cette vision évolutive des mathématiques et de leur enseignement, le milieu éducatif est appelé lui aussi à voir la qualification (et son caractère définitif) céder le pas à la compétence (et son caractère dynamique). On le constate déjà dans certaines commissions scolaires où l'on n'engage maintenant de nouveaux enseignants qu'à la condition qu'ils puissent démontrer un certain nombre de connaissances et d'habiletés de base en lien avec les outils informatiques (Gaulin, 1998).

La difficulté réside surtout dans les conditions à mettre en place pour permettre une mise à jour continue de connaissances qui par leur nature débordent souvent du milieu éducatif. À cet égard, le projet américain *Envision It!* (subventionné par le National Science Foundation entre 1994 et 1998), dont le but était de former les enseignants du secondaire dans la région de Minneapolis-St. Paul dans l'utilisation de méthodes et outils informatiques pour enrichir les cours de mathématiques et de sciences, donne quelques lignes directrices à partir des leçons tirées de cette expérience[34]. Le rapport précise aussi les avantages qu'il y a à établir, comme ce fut le cas dans le cadre du projet, un partenariat entre les entreprises et les facultés d'éducation pour concevoir et donner de telles formations. On multiplie ainsi les ressources (spécialistes, laboratoires, matériel, fonds); on injecte de l'authenticité à l'enseignement avec des applications à la fine pointe de la technologie; on ajoute à la motivation des enseignants avec le soutien de professionnels de l'entreprise; on rend disponibles des mentors pour un soutien à plus long terme; et l'on peut

---

[34] voir http://www.ties.k12.mn.us/envision/

bénéficier des stratégies de formation développées en entreprise. Le rapport conclut en avançant qu'avec des sessions de formation intensive; suivies de périodes de soutien actif, les enseignants non seulement changent leur propre pratique éducative mais vont jusqu'à chercher à étendre un tel changement dans leur milieu scolaire pour favoriser l'établissement de conditions de soutien.

Le partenariat avec l'entreprise pourrait donc offrir un élément de réponse à la question de la *faisabilité* d'un tel enseignement, question que nous soulevions au tout début de ce document (voir 1.1). Cependant, là comme ailleurs (et peut-être même plus qu'ailleurs), il faudrait veiller à préserver un certain équilibre, à maintenir une tension nécessaire à un enrichissement mutuel, en reconnaissant que les finalités de l'école sont distinctes de celles de l'entreprise, que l'école est davantage orientée vers le long-terme, que par conséquent elle privilégie la continuité à l'innovation à tout prix, et qu'elle tient le pari de l'éducabilité de tous. Une telle prise de distance apparaît fondamentale au maintien du caractère éthique du projet.

BIBLIOGRAPHIE

ANDERSON, J.R., REDER, L.M. & SIMON, H.A. (1995) *Applications and misapplications of cognitive psychology to mathematics education*, http://www.psy.cmu.edu.

ARTIGUE, M. (1997) "Le logiciel DERIVE comme révélateur de phénomènes didactiques liés à l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage" dans *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 33, No.2.

ASTOLFI, J.P. et DROUIN, A.M. (1992) "La modélisation à l'école élémentaire" dans *Enseignement et apprentissage de la modélisation en classe*, Paris, INRP.

BAILEY, T. (1998) "Integrating Vocational and Academic Education" dans *High School Mathematics at Work,* MSEB / NRC, Washington, National Academy Press.

BALACHEFF, N. (1994) "Didactique et intelligence artificielle" dans *Didactique et intelligence artificielle* (dir. N. Balacheff et M. Vinet), Grenoble, La Pensée sauvage éditions, 1994.

BALACHEFF, N. (1998) "Éclairage didactique sur les EIAH en mathématiques" dans *Actes du colloque du Groupe de didactique des mathématiques* du Québec, (coord. A. Sierpinska), Montréal, Concordia.

BALACHEFF, N. et SUTHERLAND, R. (1994) "Epistemological domain of validity of microworlds. The case of Logo and Cabri-géomètre" dans *Lessons from Learning*, Lewis, R. et Mendelsohn , P. (eds), IFIP Transatctions, A46, Amsterdam, North Holland.

BARBIER, J.M. (1996) *Savoirs théoriques et savoirs d'action*, Paris, Presses Universitaires de France.

BARON, J. (1994) *Thinking and Deciding,* New York, Cambridge University Press.

BEAUDIN, M. (1998) "Pourquoi utiliser un CAS en classe?", présenté au *2e colloque - Utilisation des logiciels de calcul symbolique en classe*, Montréal, ETS, http://www.etsmtl.ca/seg/colloque/index2.htm

BÉGUIN, C., DE MARCELLUS, O. et VITALE, B. (1996) "Scénarios de modélisation en classe" dans dans *Actes de la VIIIe École d'été de didactique des mathématiques*, (coord. R. Noirfalise et M.J. Perrin-Glorian), Édition IREM de Clermont-Ferrand.

BERTRANDIAS, J.P. (1992) "Mathématiques et informatique" dans *L'ordinateur pour enseigner les mathématiques* (dir. B. Cornu), Paris, Presses Universitaires de France.

BKOUCHE, R., CHARLOT, B. et ROUCHE, N (1991) *Faire des mathématiques: le plaisir du sens*, Paris, Armand Colin Éditeur.

BRADBURN, N.M. et SUDMAN, S. (1979), *Improving Interview Method and Questionnaire Design,* San Francisco, Jossey-Bass Inc. Publishers.

BREITEIG, T. (1994) "Mathematical Modeling in the Classroom" dans *Actes d'ICME-7 / Working Group 14*, Sainte-Foy, Les Presses de l'Université Laval.

BROUSSEAU, G. (1986) "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques", paru dans *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol. 7/2, Grenoble, La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU, G. (1997) "La Théorie des situations et les équilibres didactiques", conférence donnée aux Journées de Didactique des Mathématiques, Université de Montréal.

BROUSSEAU, G. (1998) *Théorie des situations didactiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage, textes rassemblés par N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland et V. Warfield.

CALCULUS CONSORTIUM GROUP (1998), http://jws-edcv.wiley.com/college/cch

CAPPONI, B. et BALACHEFF, N. (1989) "Tableur et calcul algébrique" dans *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 20, No.2.

CAPPONI, B. et LABORDE, C. (1996) "Modélisation à double sens" dans *Actes de la VIIIe École d'été de didactique des mathématiques*, (coord. R. Noirfalise et M.J. Perrin-Glorian), Édition IREM de Clermont-Ferrand.

CENTRE DE RECHERCHES MATHÉMATIQUES DE L'UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL (2000) *Math 2000,* supplément de la revue *Québec Science*, Volume 38, numéro 8.

CHAUCHAT, H. (1985) *L'enquête en psycho-sociologie,* Paris, Presses de l'Université de France.

CHEVALLARD, Y. (1991) *La Transposition Didactique*, Grenoble, La Pensée Sauvage, Éditions.

CHEVALLARD, Y. (1992a) "Intégration et viabilité des objets informatiques dans l'enseignement des mathématiques. Le problème de l'ingénierie didactique" dans *L'ordinateur pour enseigner les mathématiques* (dir. B. Cornu), Paris, Presses Universitaires de France.

CHEVALLARD, Y. (1992b) "Pour en finir avec une certaine phobie culturelle", *Science et Vie*, no. 180.

CHEVALLARD, Y. (1996) « Leadership didactique mathématique » dans *Actes de la VIIIe École d'été de didactique des mathématiques*, (coord. R. Noirfalise et M.J. Perrin-Glorian), Édition IREM de Clermont-Ferrand.

CHI, M.T.H., FELTOVICH, P.J. et GLASER, R. (1981) "Categorization and Representation of Physics Problems by Experts and Novices", paru dans *Cognitive Science*, No. 5.

CONSEIL DE RECHERCHES MÉDICALES DU CANADA, CONSEIL DE RECHERCHES EN SCIENCES NATURELLES ET EN GÉNIE DU CANADA, CONSEIL DE RECHERCHES EN SCIENCES HUMAINES DU CANADA (1998) *Énoncé de politique des trois conseils - Éthique de la recherche avec des êtres humains,* Gouvernement du Canada.

CONSEIL SUPÉRIEUR DE L'ÉDUCATION (1994) *Pour des apprentissages pertinents au secondaire*, Sainte-Foy, Direction des communications du Conseil supérieur de l'éducation.

CORNU, B. (1992) "Évolution des mathématiques et de leur enseignement" dans *L'ordinateur pour enseigner les mathématiques* (dir. B. Cornu), Paris, Presses Universitaires de France.

CÔTÉ, B. (1998) "La programmation en tant qu'activité mathématique" dans *Actes du colloque du Groupe de didactique des mathématiques* du Québec, (coord. A. Sierpinska), Montréal, Concordia.

CUOCO, A.A. (1998) "Mathematics as a Way of Thinking about Things" dans *High School Mathematics at Work,* MSEB / NRC, Washington, National Academy Press.

DE SERRES, M. (2000) "Habiletés langagières et réussite en sciences", présenté au colloque : *L'importance du langage dans l'enseignement et l'apprentissage,* dans le cadre du *68e Congrès de l'Acfas,* Montréal, Université de Montréal.

DE SERRES, M. et GROLEAU, J.D. (1997) *Mathématiques et langages*, Montréal, Collège Jean-de-Brébeuf - Direction Pédagogique, Service de la recherche.

DE TERSSAC, G. (1996) "Savoirs, compétences et travail" dans *Savoirs théoriques et savoirs d'action* (dir. J.M. Barbier), Paris, Presses Universitaires de France.

DI MARTINO, H., LEGRAND, M. et PINTARD, D. (1996) "Modélisation et situations fondamentales" dans *Actes de la VIIIe École d'été de didactique des mathématiques*, (coord. R. Noirfalise et M.J. Perrin-Glorian), Édition IREM de Clermont-Ferrand.

DOMINICÉ, P. (1992) *L'histoire de vie comme processus de formation,* Paris, Édition L'Harmattan, Collection DÉFI-FORMATION.

DORÉ, J., LAMBERT, J., L'ÉCUYER, N., JOBIN, C. et ROCHETTE, G. (1987) *Mathématiques Soleil Option 1*, Tome 2, Montréal, Guérin.

DUGUÉ., É. et MALLEBOUIS, M. (1994) "De la qualification à la compétence: sens et dangers d'un glissement sémantique", *Éducation permanente*, no. 118.

DUPIN, J.J. (1996) "Modèles et modélisation dans l'enseignement. Quelques contraintes didactiques" dans *Actes de la VIIIe École d'été de didactique des mathématiques*, (coord. R. Noirfalise et M.J. Perrin-Glorian), Édition IREM de Clermont-Ferrand.

ENVISION IT! (1998), http://www.ties.k12.mn.us/envision/

ELBOW, P. (1979) "Trying to Teach While Thinking About the End" dans *On Competence - A Critical Analysis of Competence-Based Reforms in Higher Education*, Grant, G. (Ed.), San Francisco, Jossey-Bass Publishers.

EWENS, T. (1979) "Analyzing the Impact of Competence-Based Approaches on Liberal Education" dans *On Competence - A Critical Analysis of Competence-Based Reforms in Higher Education*, Grant, G. (Ed.), San Francisco, Jossey-Bass Publishers.

FOWLER, F.J. (1988) *Survey Research Methods*, Thousand Oaks (CA), Sage Publications.

FOWLER, F.J. (1995) *Improving Survey Methods*, Thousand Oaks (CA), Sage Publications.

FORMAN, S. et STEEN, L.A. (1994) "Mathematics for Work", *Bulletin of the International Commission on Mathematical Instruction (ICMI),* December 1994 .

FORMAN, S. et STEEN, L.A. (1998) "Sources of Problems and Tasks" en annexe dans *High School Mathematics at Work,* MSEB / NRC, Washington, National Academy Press.

GALBRAITH, P. et HAINES, C. (1998) "Disentangling the Nexus : Attitudes to Mathematics and Technology in a Computer Learning Environment", *Educational Studies in Mathematics,* no. 36.

GAGNEPAIN, J.J et ANDRÉ, J.C. (1996) "Les savoirs de l'ingénieur" dans *Savoirs théoriques et savoirs d'action* (dir. J.M. Barbier), Paris, Presses Universitaires de France.

GASCON PÉREZ, J. (1996) "La modélisation mathématique et l'étude de champs de problèmes" dans *Actes de la VIIIe École d'été de didactique des mathématiques*, (coord. R. Noirfalise et M.J. Perrin-Glorian), Édition IREM de Clermont-Ferrand.

GAULIN, C. (1998) "Compte-rendu du groupe de travail sur l'intégration des TIC dans la formation des enseignants du primaire", dans *Actes du colloque du Groupe de didactique des mathématiques* du Québec, (coord. A. Sierpinska), Montréal, Concordia.

GRAF, K.D. (1992) "Le rôle de l'informatique dans la classe de mathématiques" dans *L'ordinateur pour enseigner les mathématiques* (dir. B. Cornu), Paris, Presses Universitaires de France.

GRANT, G. (1979) "Implications of Competence-Based Education" dans *On Competence - A Critical Analysis of Competence-Based Reforms in Higher Education*, Grant, G. (Ed.), San Francisco, Jossey-Bass Publishers.

GUEDJ, D. (1997) *La gratuité ne vaut plus rien – et autres chroniques mathématiciennes*, Paris, Éditions du Seuil.

HILLEL J., KIERAN, C. (1987) "Schemas used by 12 year-olds in solving selected turtle geometry tasks", *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol.8, 1.2.

HINSLEY, D., HAYES, J.R., et SIMON, H.A. (1977). "From words to equations: Meaning and representation in algebra work problems" dans M. Just & P. Carpenter (Eds.), *Cognitive processes in comprehension*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

HODGSON, B.R. (1987) "Symbolic and Numerical Computation: the Computer as a Tool in Mathematics" dans *Informatics and the teaching of mathematics*, D.C. Johnson and F. Lovis (Ed.), Proceedings of the International Federation for Information Processing (IFIP) TC 3 / WG 3.1 Working Conference, North-Holland.

JAVEAU, C. (1982) *L'enquête par questionnaire - Manuel à l'usage du praticien,* Bruxelles, Éditions de l'Université de Bruxelles

JOHNSON, J. (1987) "Procedural Programming Languages and the Learning of Mathematics" dans *Informatics and the teaching of mathematics*, D.C. Johnson and F. Lovis (Ed.), Proceedings of the International Federation for Information Processing (IFIP) TC 3 / WG 3.1 Working Conference, North-Holland.

JONES, R.A. (1985) *Research Methods in the Social and Behavioral Sciences*, Sunderland (MA), Sinauer Associates, Inc. Publishers.

LEHMANN, J.C. (1996) "De la gestion de la complexité à un corpus des 'sciences de l'action' " dans *Savoirs théoriques et savoirs d'action* (dir. J.M. Barbier), Paris, Presses Universitaires de France.

LEMELIN, M. (1998) "Qu'est-ce qu'un beau problème avec MAPLE V?", présenté au *2e colloque - Utilisation des logiciels de calcul symbolique en classe*, Montréal, ETS.

MARY, C. (1999) *Place et fonctions de la validation chez les futurs enseignants des mathématiques au* secondaire, Thèse de doctorat, Université de Montréal.

MANDELBROT, B.B. (1994) "Fractals, the computer, and mathematics education" dans *Choix de conférences du 7e Congrès international sur l'enseignement des mathématiques (ICME-7),* Sainte-Foy, Les Presses de l'Université Laval.

MATHEMATICAL SCIENCE EDUCATION BOARD / NATIONAL RESEARCH COUNCIL (1998) *High School Mathematics at Work,* Washington, National Academy Press.

MERCIER, A. (1992) *L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique,* Thèse de l'Université Bordeaux I.

MERCIER, A. (1995) "La biographie didactique d'un élève et les contraintes temporelles de l'enseignement - Un cas en calcul algébrique", paru dans *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol. 15/1, pp. 97-142, Grenoble, La Pensée Sauvage.

MILES, M.B. et HUBERMAN, A.M. (1984) *Qualitative Data Analysis - A Sourcebook of New Methods,* Newbury Park (CA), Sage Publications.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DU QUÉBEC (1979) "L'École québécoise", *Énoncé de politique et plan d'action,* Québec, Gouvernement du Québec.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DU QUÉBEC (1984) *Programmes d'études - Secondaire - Mathématique - Second cycle*, Gouvernement du Québec, Québec.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DU QUÉBEC (1984b) *Guide d'utilisation de la calculatrice au secondaire*, Gouvernement du Québec, Québec.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DU QUÉBEC (1986) *Guide pédagogique - Secondaire - Mathématique - Option 1*, Gouvernement du Québec, Québec.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DU QUÉBEC (1987) *Guide pédagogique - Secondaire - Mathématique - Option 2*, Gouvernement du Québec, Québec.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DU QUÉBEC (1992) *Programme d'études – Secondaire- Programme transitoire Mathématique 536 (064-536)*, Gouvernement du Québec, Québec.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DU QUÉBEC (1996) *Programme d'études – Enseignement secondaire- Mathématique 436,* Gouvernement du Québec, Québec.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DU QUÉBEC (1997) *Programme d'études – Enseignement secondaire- Mathématique 536,* Gouvernement du Québec, Québec.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DU QUÉBEC (2001) *Programme de formation de l'école québécoise,* Gouvernement du Québec, Québec.

NATIONAL RESEARCH COUNCIL (1989) *Everybody counts: A report to the nation on the future of mathematics education.* Washington, DC: National Academy Press.

NEUMANN, W. (1979) "Educational Responses to the Concern for Proficiency" dans *On Competence - A Critical Analysis of Competence-Based Reforms in Higher Education*, Grant, G. (Ed.), San Francisco, Jossey-Bass Publishers.

NIMIER, J. et LEFÈVRE, M. (1992) "À l'entre-deux des rêves et de la rationalité", *Science et Vie*, no. 180

ORANGE, C. (1997) *Problèmes et modélisation en biologie - quels apprentissages pour le lycée ?*, Paris, Presses Universitaires de France.

PALLASCIO, R. et LABELLE, G. (2000) *Mathématiques d'hier et d'aujourd'hui*, Mont-Royal, Modulo Éditeur, Collection Astroïde.

PAPERT, S. (1987). Microworlds : Transforming Education, *In* R. B. Lawler and M. Yazdani (éds.), *Artificial Intelligence and Education* (p. 79-84). Norwood, New Jersey : Ablex Publishing.

PARNELL, D. (1998) "Mathematics as a Gateway to Student Success" dans *High School Mathematics at Work,* MSEB / NRC, Washington, National Academy Press.

PAULOS, J.A. (1988) *Innumeracy: mathematical illiteracy and its consequences*, New York, Hill and Wang.

POLYA, G. (1945), *How to Solve It*, Princeton, NJ, Princeton University Press.

RAUZY, G. (1992) "L'informatique conduit-elle a des mathématiques nouvelles?" dans *L'ordinateur pour enseigner les mathématiques* (dir. B. Cornu), Paris, Presses Universitaires de France.

RESNICK, L.B. (1987) *Education and Learning to Think*, Washington, National Academy Press.

RIESMAN, D. (1979) "Society's Demands for Competence"dans *On Competence - A Critical Analysis of Competence-Based Reforms in Higher Education*, Grant, G. (Ed.), San Francisco, Jossey-Bass Publishers.

RIVIÈRE, A. (1990) *La psychologie de Vygotsky*, Liège (Belgique), Pierre Mardaga éditeur.

ROGALSKI, M. (1994) "Les concepts de l'EIAO sont-ils indépendants du domaine? L'exemple de l'enseignement de méthodes en analyse" dans *Didactique et intelligence artificielle* (dir. N. Balacheff et M. Vinet), Grenoble, La Pensée sauvage éditions.

ROITMAN, J. (1995) "What Will Be the Effect of a Standards-based Education on College Students?", *FOCUS*, Vol. 15, Num. 2.

ROUCHE, N. (1991) "L'analphabétisme mathématique" dans *Faire des mathématiques: le plaisir du sens*, Paris, Armand Colin Éditeur.

ROUCHE, N. (1987) "Du savoir à l'élève ou de l'élève au savoir ?" dans *Réussir à l'école : des enseignants relèvent le défi* (dir. P. Meirieu et N. Rouche), Bruxelles, Vie ouvrière.

ROUCHIER, A. (1992) "LOGO: exemple générique ou cas particulier?" dans *L'ordinateur pour enseigner les mathématiques* (dir. B. Cornu), Paris, Presses Universitaires de France.

SCHOENFELD, A.H. (1985), *Mathematical Problem Solving*, Orlando, FL, Academic Press, Inc.

SCHOENFELD, A.H. (1989), "Teaching Mathematical Thinking and Problem Solving", dans RESNICK, L.B. et KLOPFER, L.E. (Eds) *Toward the Thinking Curriculum: Current Cognitive Research,* , Alexandria (VA), Association for Supervision and Curriculum Development.

SCHWARZ, B. et DREYFUS, T. (1995) "New actions upon old objects: a new ontological perspective on functions", dans *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 29, No.3.

SENDOV, B. (1987) "School Mathematics in the Information Age" dans *Informatics and the teaching of mathematics*, D.C. Johnson and F. Lovis (Ed.), Proceedings of the International Federation for Information Processing (IFIP) TC 3 / WG 3.1 Working Conference, North-Holland.

SHUARD, H. (1994) "The impact of the calculator on the elementary school curriculum" dans *Actes d'ICME-7 / Working Group 16*, Sainte-Foy, Les Presses de l'Université Laval.

STERNBERG, R.J. et SMITH, E.E. (1988) *The Psychology of Human Thought,* New York, Cambridge University Press.

STUFFLEBEAM, D.L. (1977) "Working paper on Needs Assessment in Evaluation" présenté au *First Annual Educational Research Association Topical Conference on Evaluation*, San Francisco, Californie.

STUFFLEBEAM, D.L., McCORMICK, C.H., BRINKERHOFF, R.O., et NELSON, C.O. (1985) *Conducting Educational Needs Assessment*, Boston/Dordrecht/Lancaster, Kluwer Nijhoff Publishing.

TALL, D. (1992) "L'enseignement de l'analyse à l'âge de l'informatique" dans *L'ordinateur pour enseigner les mathématiques* (dir. B. Cornu), Paris, Presses Universitaires de France.

TANGUY, L. et ROPÉ, F. (1995) "La codification de la formation et du travail en termes de compétences", *Revue des Sciences de l'éducation*, vol.XXI, no. 4.

TAYLOR, J.E. (1998) "The Importance of Workplace and Everyday Mathematics" dans *High School Mathematics at Work,* MSEB / NRC, Washington, National Academy Press.

TESTARD-VAILLANT (1992a) "L'abstraction sélective", *Science et Vie*, no. 180

TESTARD-VAILLANT (1992b) "Maths et physique: de moins en moins de profs", *Science et Vie*, no. 180

USISKIN, Z. (1998) "Fitting Tasks to Curriculum" dans *High School Mathematics at Work,* MSEB / NRC, Washington, National Academy Press.

VAN DER MAREN, J.M. (1996) *Méthodes de recherche pour l'éducation*, Montréal, Presses de l'Université de Montréal.

VERGNAUD, G. (1981) "Quelques orientations théoriques et méthodologiques", *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 2/2, La Pensée Sauvage, Grenoble.

VERMERSCH, P. (1994) *L'entretien d'explicitation*, Paris, ESF – Collection Pédagogies.

VAN WEERT, T.J. (1987) "Informatics and the teaching of mathematics: ten years on" dans *Informatics and the teaching of mathematics*, D.C. Johnson and F. Lovis (Ed.), Proceedings of the International Federation for Information Processing (IFIP) TC 3 / WG 3.1 Working Conference, North-Holland.

ANNEXE A : FORMULAIRE DE CONSENTEMENT

Je, soussigné, ________________________________, consens par la présente à participer au projet de recherche suivant dans les conditions décrites ci-dessous.

Titre du projet: *Étude des effets de l'histoire éducative d'étudiants universitaires sur leurs compétences en résolution de problèmes de mathématiques appliquées*

Responsable du projet: France Caron, étudiante au doctorat
Adresse: Département de didactique, Université de Montréal, C.P. 6128, succ. Centre-ville Montréal (Québec) H3C 3J7
Courriel: carof@magellan.umontreal.ca

Nature de ma participation: contribution d'éléments d'information sur mon histoire éducative par la voie d'un questionnaire et possiblement d'une entrevue; octroi d'un droit d'accès à mes examens et travaux du (des) cours ________________________________ pour la responsable nommée ci-haut.

Durée de ma participation: de janvier à mai 2000

Avantages personnels pouvant découler de ma participation: consultation diagnostique sur mes forces et faiblesses dans l'application des mathématiques; communication des résultats du projet.

Inconvénients personnels pouvant découler de ma participation: aucun

Risques: Il est entendu que ma participation à ce projet de recherche ne me fait courir, sur le plan médical ou psychologique, aucun risque que ce soit. Il est également entendu que ma participation n'aura aucun effet (ou interférence) sur l'évaluation au cours.

Information concernant le projet: On devra répondre, à ma satisfaction, à toute question que je poserais à propos du projet de recherche auquel j'accepte de participer.

Retrait du projet: Il est entendu que ma participation au projet de recherche décrit ci-dessus est tout à fait libre; il est également entendu que je pourrai à tout moment mettre un terme à ma participation, sans aucun effet sur l'évaluation au cours.

Confidentialité: Il est entendu que les observations ou enregistrements effectués en ce qui me concerne dans le cadre du projet de recherche décrit ci-dessus demeureront strictement confidentiels, et que l'anonymat des participants sera protégé dans toute publication ou conférence rapportant les résultats de ce projet.

Je déclare avoir lu et compris les termes du présent formulaire

____

signature de l'intéressé

Fait à Montréal, le ______________ 2000.

Je, soussigné, ________________________, certifie (a) avoir expliqué au signataire intéressé les termes de la présente formule, (b) avoir répondu aux questions qu'il m'a posées à cet égard et (c) lui avoir clairement indiqué qu'il reste à tout moment libre de mettre un terme à sa participation au projet de recherche décrit ci-dessus:

____

signature de la responsable du projet

Fait à Montréal, le ______________ 2000.

ANNEXE B : QUESTIONNAIRE

Éléments d'histoire éducative

Nom:____

Adresse permanente: ______________________________________

____

____

Numéro de téléphone: ____________________________

Adresse de courriel (e-mail): ____________________________

Cours: ____

Département, Faculté ou École: __________________________________

Notes et rappels:

- La connaissance de votre numéro de téléphone et de votre adresse de courriel nous permettra de prendre contact avec vous si cela s'avère souhaitable dans la poursuite du projet.
- La connaissance d'une adresse permanente pour vous rejoindre (ex. chez vos parents) nous permettra de vous envoyer plus tard par la poste un court document résumant les principaux résultats de l'étude.
- L'initialisation de chaque page nous sera utile pour repérer les oublis (sauts de page) et regrouper les données si les questionnaires venaient à être désagrafés.
- Les renseignements contenus dans ce questionnaire resteront strictement confidentiels. Seule la responsable du projet y aura accès.
- Toute publication (thèse, article, conférence, etc.) n'utilisera ces données qu'en préservant l'anonymat des répondants.
- Vous êtes libre à tout moment de vous retirer du projet.

1. Veuillez énumérer tous les établissements académiques et scolaires que vous avez fréquentés, en commençant par le plus récent (celui que vous fréquentez actuellement) et en remontant jusqu'à l'école primaire (inclusivement). Veuillez utiliser deux lignes pour tout changement d'orientation.

	Années	**Établissement**	**Lieu**	**Niveau**	**Orientation**
ex.	*1997-1999*	*CEGEP Maisonneuve*	*Montréal, Qué.*	*collégial*	*Sc. de la nature*
	1992-1997	*École Sophie-Barat*	*Montréal, Qué.*	*secondaire*	*générale*

____

____

____

____

____

____

____

____

____

2. Dans toute votre formation, depuis (et en incluant) le secondaire, quel cours de mathématiques avez-vous le mieux réussi?

____

Quelle importance attribuez-vous à ce succès?

☐ **très grande** ☐ **grande** ☐ **modérée** ☐ **négligeable**

3. Est-ce la première fois que vous suivez le cours ____________________? ☐ **oui** ☐ **non**

4. Quels cours de mathématiques avez-vous suivis à l'université ? Veuillez en donner une appréciation générale (contenu et enseignement) en utilisant une échelle de 1 à 5 où ***1=médiocre*** et ***5=excellent***.

	Sigle	**Titre**	**Appréciation**
ex.	*MAT 1111*	*Analyse 1*	*4*
	________	______________________	______
	________	______________________	______
	________	______________________	______
	________	______________________	______
	________	______________________	______

5. Quels cours de mathématiques avez-vous suivis au CEGEP (ou à tout autre établissement préparant aux études universitaire)? Veuillez en donner une appréciation générale en utilisant une échelle de 1 à 5 où ***1=médiocre*** et ***5=excellent***.

	Sigle	Titre	Appréciation
ex.	*MAT 103*	*Calcul différentiel et intégral - 1*	*4*
	________	______________________________	______
	________	______________________________	______
	________	______________________________	______
	________	______________________________	______
	________	______________________________	______
	________	______________________________	______
	________	______________________________	______
	________	______________________________	______

6. De quels manuels (ou cahiers ou recueils) de mathématiques vous souvenez-vous particulièrement? Veuillez en donner une appréciation générale en utilisant une échelle de 1 à 5 où ***1=médiocre*** et ***5=excellent***.

Niveaux collégial et universitaire:
Sujet/Titre/Collection/Auteur
Appréciation

____ ______
____ ______
____ ______
____ ______

Niveau secondaire:
Titre/Collection/Auteur
Appréciation

____ ______
____ ______
____ ______

Niveau primaire:
Titre/Collection/Auteur
Appréciation

____ ______
____ ______

7. Quel **cours** de mathématiques (ou d'une autre discipline) **a le plus contribué** à votre compréhension des mathématiques ? ________________________________

Quel(s) énoncé(s), parmi ceux donnés dans l'encadré sous la question 8, le décrirai(en)t le mieux?

__________________ (*maximum de 4 énoncés*)

8. Quel **cours** de mathématiques **vous a le moins apporté** ?

____

Quel(s) énoncé(s) parmi ceux donnés ci-dessous le décrirai(en)t le mieux?

__________________ (*maximum de 4 énoncés*)

A. une suite de puzzles
B. une suite de problèmes difficiles sans lien évident avec la théorie
C. une suite de problèmes pour faire comprendre la théorie
D. un enchaînement progressif de concepts, du plus simple au plus complexe
E. une étude formelle d'espaces abstraits et de structures mathématiques
F. une suite de définitions d'objets et de leurs propriétés
G. une suite de théorèmes et de preuves donnés par le professeur
H. une série d'exercices pour appliquer les formules enseignées
I. un ensemble de techniques de calcul avec leurs conditions d'utilisation
J. une volonté de faire découvrir la théorie par l'étudiant
K. une ouverture sur le développement du raisonnement et du sens de la démonstration
L. une focalisation sur le développement du raisonnement et du sens de la démonstration
M. une ouverture sur les possibilités d'application des concepts enseignés
N. une focalisation sur les possibilités d'application des concepts enseignés
O. une ouverture sur l'exploration et l'expérimentation
P. une focalisation sur l'exploration et l'expérimentation
Q. une ouverture sur la technologie (calculatrice, logiciels ou programmation)
R. une focalisation sur la technologie (calculatrice, logiciels ou programmation)

9. Quel(s) énoncé(s) parmi ceux de l'encadré ci-dessus résumerai(en)t le mieux l'**ensemble de la formation que vous avez reçue** en mathématiques ?

__________________ (*maximum de 4 énoncés*)

10. Êtes vous satisfait de votre formation en mathématiques?

☐ **tout à fait satisfait** ☐ **plutôt satisfait** ☐ **plutôt insatisfait** ☐ **tout à fait insatisfait**

Si vous n'en êtes **pas "<u>tout à fait</u> satisfait"**, quel(s) énoncé(s) parmi ceux de l'encadré décrirai(en)t le mieux **la formation que vous auriez souhaité recevoir** ?

__________________ (*maximum de 4 énoncés*)

11. Parmi les concepts mathématiques suivants, veuillez identifier, pour chacun de ceux que vous avez eu l'occasion de rencontrer, votre niveau de maîtrise (***1=je l'ai déjà vu ou étudié, 2=je pourrais résoudre des problèmes faisant appel à ce concept***), le niveau scolaire où vous y avez été exposé *pour la première fois,* et le (ou les) cours où vous l'avez utilisé le plus. Veuillez ne rien indiquer pour les concepts auxquels vous n'avez jamais été exposé (plusieurs sont enseignés à l'université...).

Concept	Maîtrise	Niveau	Cours
ex. dérivée	*2*	*collégial 1*	*MAT 103, MAT 203, PHY101*
A. analyse "epsilon-delta"	_____	_______	____________________
B. anneaux et corps	_____	_______	____________________
C. axiomes d'Euclide	_____	_______	____________________
D. axiomes de Kolmogoroff	_____	_______	____________________
E. axiomes de Peano	_____	_______	____________________
F. contraposée	_____	_______	____________________
G. critère de D'Alembert	_____	_______	____________________
H. dimension fractale	_____	_______	____________________
I. ensemble de Julia	_____	_______	____________________
J. équations différentielles	_____	_______	____________________
K. espace vectoriel	_____	_______	____________________
L. homothétie	_____	_______	____________________
M. isocline	_____	_______	____________________
N. isomorphisme	_____	_______	____________________
O. méth. de Newton-Raphson	_____	_______	____________________
P. preuve par l'absurde	_____	_______	____________________
Q. preuve par récurrence (ou preuve par induction)	_____	_______	____________________
R. probabilité conditionnelle	_____	_______	____________________
S. relation d'équivalence	_____	_______	____________________
T. séries de Taylor	_____	_______	____________________
U. suites et séries	_____	_______	____________________
V. table de vérité	_____	_______	____________________
W. théorème de Bayes	_____	_______	____________________
X. théorème de Rolle	_____	_______	____________________
Y. théorème de Thalès	_____	_______	____________________
Z. théorème des 4 couleurs	_____	_______	____________________
Zb. valeurs propres	_____	_______	____________________

12. Avez-vous déjà eu à concevoir et rédiger des **démonstrations** mathématiques, entièrement par vous-même, i.e. sans aucune indication quant aux éléments à retrouver dans la preuve?

☐ **oui** ☐ **non**

Si oui, veuillez indiquer à quel(s) niveau(x) et pour quel(s) contenu(s) mathématique(s).

	Niveau	**Contenu**
ex.	*4e secondaire*	*géométrie euclidienne - propriétés des quadrilatères*
	________	________________________________
	________	________________________________
	________	________________________________
	________	________________________________
	________	________________________________

13. Avez-vous déjà participé à un concours de mathématiques, un camp scientifique ou toute autre activité parascolaire liée aux mathématiques? ☐ **oui** ☐ **non**

Si oui, veuillez indiquer à quelle(s) activité(s), à quel(s) niveau(x) et le temps que vous y avez consacré.

	Activité	**Niveau**	**Temps consacré**
ex.	*concours de math de l'AMQ*	*5e secondaire*	*1heure/semaine x 5 semaines*
	________________	________	________________
	________________	________	________________
	________________	________	________________
	________________	________	________________

14. Qu'est-ce qui vous donne le plus de **satisfaction** en mathématiques? Veuillez choisir un ou deux énoncés parmi ceux de l'encadré ci-dessous.

____________ *(maximum de 2 énoncés)*

A. la connaissance d'une formule ou d'une méthode générale applicable à tous les cas
B. la réutilisation dans d'autres disciplines de concepts ou de méthodes vus en mathématiques
C. la recherche fructueuse d'une approche de résolution à un problème mathématique complexe
D. la compréhension d'un nouveau concept formel qui amène à penser autrement
E. l'expérimentation et la visualisation à l'aide de l'ordinateur de phénomènes mathématiques
F. la simplification d'une expression complexe par des manipulations algébriques
G. la confirmation par le corrigé de votre maîtrise d'un concept ou d'une méthode mathématique
H. la conception réussie d'un programme ou d'une procédure logicielle pour résoudre un problème
I. la découverte d'une preuve élégante

15. Avez-vous déjà, de votre propre initiative, à l'aide de livres, de logiciels, ou d'autre type de matériel, cherché à explorer un concept mathématique, informatique, scientifique ou économique au-delà de ce qui était requis dans vos cours ? ☐ **oui** ☐ **non**

Si oui, veuillez indiquer à quel(s) niveau(x), pour quel(s) concept(s), et les ressources (livres, logiciels, matériel, etc.) que vous avez utilisées.

	Niveau	**Concept**	**Ressources**
ex.	*1e cegep*	*fractales*	*articles de Mandelbrot*
	______	________	______________
	______	________	______________
	______	________	______________
	______	________	______________
	______	________	______________
	______	________	______________

16. Parmi les **outils logiciels à contenu mathématique** suivants, veuillez évaluer, *pour chacun de ceux que vous avez déjà utilisés*, votre niveau de compétence (***1=novice, 2=intermédiaire, 3=expert***), l'âge que vous aviez quand vous y avez été exposé *pour la première fois,* et le (ou les) cours où vous l'avez utilisé (s'il y a lieu). Veuillez ne rien indiquer pour les logiciels que vous n'avez jamais utilisés.

Outil	**Compétence**	**Âge**	**Cours**
Tableur *("spreadsheet")* (Excel ou __________)	____	___	______________
Calculateur symbolique (Maple ou __________)	____	___	______________
Calculatrice graphique (TI-82 ou __________)	____	___	______________
Logiciel de calcul numérique. (Matlab ou __________)	____	___	______________
Logiciel statistique (SPSS ou __________)	____	___	______________
Autre: (____________)	____	___	______________

17. Veuillez dresser la liste des **langages de programmation** que vous connaissez, en évaluer votre niveau de compétence (***1=novice, 2=intermédiaire, 3=expert***), l'âge que vous aviez quand vous y avez été exposé *pour la première fois*, et cocher dans quelles circonstances vous en avez fait l'apprentissage (*cours formel* ***et/ou*** *expérience de travail* ***et/ou*** *activité parascolaire* ***et/ou*** *initiative personnelle*)

Langage	Compétence	Âge	Cours Formel	Expérience de travail	Activité parasco.	Initiative personnelle
______	____	____	☐	☐	☐	☐
______	____	____	☐	☐	☐	☐
______	____	____	☐	☐	☐	☐
______	____	____	☐	☐	☐	☐
______	____	____	☐	☐	☐	☐
______	____	____	☐	☐	☐	☐
______	____	____	☐	☐	☐	☐

18. Quel est le **programme** le plus **complexe** que vous ayez conçu? Veuillez en résumer le contexte, l'objectif, les contraintes et difficultés, les stratégies utilisées, le langage de programmation et la taille du programme.

Contexte/circonstances: ______________________________

Objectif: ______________________________________

____

____

Contr/Diff: ____________________________________

____

____

Stratégies: ____________________________________

____

____

Langage et taille: _______________________________

19. Veuillez dresser la liste de vos expériences de travail, en incluant le bénévolat.

	Années	**Entreprise**	**Lieu ou institution**	**Responsabilité**
ex.	*1997-1999*	*Mc Donald*	*Montréal*	*préposé à l'entretien*

____

____

____

____

____

____

____

____

20. Quel est le **projet** le plus **complexe** sur lequel vous ayez eu à travailler (à l'école ou dans une activité parascolaire ou sur le marché du travail)? Veuillez en résumer le contexte, l'objectif, les contraintes et difficultés associées, et les stratégies que vous avez déployées pour vous rapprocher de l'objectif.

Contexte (organisme, institution, etc.) : ______________________

Objectif: ______________________________

____

____

Contr/Diff: ______________________________

____

____

Stratégies: ______________________________

____

____

21. Quels sont vos loisirs préférés ?

22. Qu'aimez-vous lire ?

23. Quels sont vos jeux préférés?

Merci beaucoup de votre collaboration!!!

France Caron
responsable du projet
[redacted]

ANNEXE C : CALCUL DES INDICATEURS D'INTÉRÊT

Nous avons d'abord caractérisé pour chaque étudiant la formation qui semblait correspondre le mieux aux besoins exprimés. Pour ce faire, nous avons mis à contribution les questions 7 (cours ayant le plus contribué à la compréhension), 8 (cours ayant le moins contribué à la compréhension), et 10b (formation souhaitée) du questionnaire (Annexe B).

Il s'agissait ici de construire pour l'étudiant i, un ensemble de valeurs A_i, B_i, C_i, ... R_i associées respectivement à chacun des items de la liste des caractéristiques données à la page 4 du questionnaire. Par exemple, pour l'étudiant i, la valeur associée à l'item G *« une suite de théorèmes et de preuves donnés par le professeur »* a été calculée ainsi

$$G_i = V(i,7,G) + 2\,V(i,10b,G) - V(i,8,G)$$

où $V(i,n,G) =$ 1 si l'étudiant i a choisi l'item G pour répondre à la question n
0 sinon.

Puis nous avons aussi considéré les valeurs SA_i, SB_i, SC_i, ... SI_i obtenues à partir de la question 14 traitant de ce qui donne satisfaction en mathématiques. Par exemple, pour l'étudiant i, la valeur associée au nouvel item G *« la confirmation par le corrigé de votre maîtrise d'un concept ou d'une méthode mathématique »* est donnée par

$$SG_i = 2\,V(i,14,G)$$

où $V(i,14,G) = 1$ si l'étudiant i a choisi l'item G pour répondre à la question 14
0 sinon.

En utilisant différentes combinaisons linéaires des valeurs SA_i, SB_i, SC_i, ... SI_i et des valeurs A_i, B_i, C_i, ... R_i, nous avons calculé la valeur des indicateurs d'intérêt suivants:

- *l'intérêt pour la théorie* :

  $$IT_i = 4(E_i + SD_i) + 2(C_i + D_i + G_i + SI_i) + F_i + J_i + K_i + L_i + SC_i + SE_i$$

- *l'intérêt pour le raisonnement* :

  $$IR_i = 4(L_i + SI_i) + 2(A_i + B_i + E_i + J_i + K_i + SC_i + SD_i) + C_i + D_i + G_i + O_i + P_i$$

- *l'intérêt pour l'approche procédurale*:

  $$IP_i = 4(H_i + SA_i + SG_i) + 2(I_i + SF_i) + C_i + F_i + M_i + N_i + Q_i$$

- *l'intérêt pour l'application* :

  $$IA_i = 4(N_i + SB_i) + 2(I_i + M_i + O_i + P_i + SC_i + SH_i) + Q_i + R_i + SA_i + SE_i$$

- *l'intérêt pour la technologie* :

  $$IX_i = 4(R_i + SH_i) + 2(Q_i + SE_i)$$

ANNEXE D : GUIDE D'ENTRETIEN

Biographie éducative

INTRODUCTION

- But de l'entretien: connaître ton histoire éducative, en particulier
  - ☑ tout ce qui t'a amené(e) progressivement à te diriger vers *le génie/ les études commerciales/ l'informatique*
  - ☑ tes rapports avec les mathématiques, l'informatique et toute autre discipline ayant contribué à ta formation ou à ton choix d'orientation (de façon positive ou négative): ce qu'il sont, ce qu'il ont été, comment ils ont évolué

- Structure de l'entretien
  - ☑ quelques questions préliminaires, pour nous situer dans ta vision actuelle des choses
  - ☑ récit de ton histoire éducative, où l'on remontera dans le temps (je préciserai alors ce qu'on entend par histoire éducative, tu pourras me soumettre tes questions, commentaires ou conditions, et on travaillera à partir de là)
  - ☑ quelques questions synthèse, pour nous assurer qu'on a fait le tour du jardin et pour faire ressortir des éléments importants
  - ☑ conclusion

- Fonctionnement de l'entretien
  - ☑ pour les fins de la recherche: enregistrement audio et prise de notes
  - ☑ assurance de la confidentialité: rien de ceci ne sera accessible à toute autre personne que moi
  - ☑ assurance de l'anonymat: dans toute communication des résultats

- Questions et objections
  - ☑ est-ce que tout ça t'apparaît clair?
  - ☑ y a-t-il des éléments qui te dérangent?

PARTIE A: Questions préliminaires

1. Tu étudies présentement en ______________. Peux-tu m'expliquer l'objectif que tu poursuis en voulant acquérir cette formation.

2. Quelle utilité vois-tu aux mathématiques dans ta formation? Es-tu en accord avec la place qu'on leur accorde?

3. a) Y a-t-il quelque chose qui te plaît dans les mathématiques? Qu'est-ce que ce serait? *(À quoi cela te fait-t-il penser?)*

   b) Y a-t-il en revanche quelque chose qui te déplaît? Qu'est-ce que ce serait? *(À quoi cela te fait penser?)*

   c) Qu'est-ce que tu trouves facile en mathématiques? Qu'est-ce que tu trouves difficile?

   d) Comment sais-tu que tu as compris en mathématiques?

4. *(à ne pas poser aux étudiants en informatique)* Quelle utilité vois-tu à l'informatique dans ta formation? Es-tu en accord avec la place qu'on lui accorde?

5. a) Y a-t-il quelque chose qui te plaît dans l'informatique? Qu'est-ce que ce serait? *(À quoi cela te fait penser?)*

   b) Y a-t-il en revanche quelque chose qui te déplaît? Qu'est-ce que ce serait? *(À quoi cela te fait penser?)*

   c) Qu'est-ce que tu trouves facile en informatique? Qu'est-ce que tu trouves difficile?

6. Comment décrirais-tu le rapport que tu vois entre les mathématiques et l'informatique?

7. Tu entres dans une classe d'université; on y donne un cours mais tu ne sais pas a priori de quel cours il s'agit. Qu'est-ce qui te permettrait de conclure rapidement qu'il s'agit d'un cours de mathématiques (et non d'un cours de physique ou d'économie ou d'informatique)?

PARTIE B: Récit de l'histoire éducative

Quelques précisions...

- Où, avec qui et avec quoi se construit une histoire éducative?
  - ☑ à l'école, avec les enseignants, les autres élèves/étudiants et toute autre personne influente
  - ☑ à la maison, avec les parents, frères et sœurs et toute autre personne influente
  - ☑ dans les lieux d'activités parascolaires, avec les responsables et les autres participants
  - ☑ avec les média: télé, périodiques, livres, ordinateur
  - ☑ avec du matériel expérimental: électronique, biologique, chimique, physique, musical, informatique, sportif...
  - ☑ avec les jeux

- Quelle période considérer dans le récit d'une histoire éducative?
  - ☑ depuis la naissance à aujourd'hui
  - ☑ ne pas négliger la petite enfance et les années du primaire
  - ☑ autant que possible, suivre un fil chronologique, par tranche de vie

- Qu'entend-on par rapport avec les math (ou toute autre discipline)?
  - ☑ ce que cette discipline représente pour toi: essence, valeur, utilité
  - ☑ ce qui tu en comprends, ce qui t'échappe
  - ☑ ce qui t'intéresse, ce qui t'ennuie, ce que tu aimes, ce que tu n'aimes pas

- Questions et objections
  - ☑ est-ce que tout ça t'apparaît clair?
  - ☑ y a-t-il des éléments qui te dérangent?

Petite enfance et primaire

MILIEU FAMILIAL (travail des parents, valeurs, loisirs, soutien à l'apprentissage)

MILIEU SCOLAIRE ET PARASCOLAIRE (cours/enseignants marquants, contenus, projets,valeurs)

AUTRES MILIEUX SOCIAUX (amis, "idoles", groupes sportifs, ...)

MEDIA ET MATÉRIEL (télé, périodiques, livres, ordinateur, jeux...)

SUJET COGNITIF (représentations, forces, difficultés, stratégies d'apprentissage)

SUJET AFFECTIF (motivation, aspirations, intérêts)

Secondaire

MILIEU FAMILIAL

MILIEU SCOLAIRE ET PARASCOLAIRE (cours/professeurs marquants, contenus, projets, valeurs)

MILIEU DE TRAVAIL (bénévolat, travail étudiant)

AUTRES MILIEUX SOCIAUX (amis, “gangs”, groupes sportifs, etc.)

MEDIA ET MATÉRIEL (télé, périodiques, livres, ordinateur, jeux...)

SUJET COGNITIF (représentations, forces, difficultés, stratégies d’apprentissage)

SUJET AFFECTIF (motivation, aspirations, intérêts)

(feuilles équivalentes pour les études collégiales et universitaires...)

PARTIE C: Questions-synthèse

1. a) À quel moment dirais-tu que tu as le mieux compris les mathématiques enseignées?

   b) Cela coïncide-t-il avec le moment où tu as le mieux réussi en mathématiques?

   c) Cela coïncide-t-il avec le cours qui t'a le plus apporté en mathématiques et que tu as caractérisé ainsi: ______________________________ ?

   (Décris-moi ce cours plus en détails, en choisissant un moment précis où tu y as fait un apprentissage particulier)

2. a) À quel moment dirais-tu que tu as le moins bien compris les mathématiques enseignées?

   b) Cela coïncide-t-il avec le moment où tu as le moins bien réussi en mathématiques?

   c) Cela coïncide-t-il avec le cours qui t'a le moins apporté en mathématiques et que tu as caractérisé ainsi: ______________________________ ?

   (Décris-moi ce cours plus en détails, en choisissant un moment précis où tu as senti que tu perdais ton temps)

3. Tu as caractérisé l'ensemble de ta formation mathématique de la façon suivante: ______________________________

   a) Pourrais-tu me donner des exemples qui me permettraient de comprendre pourquoi tu as choisi cette description?

   b) À quelle période de ta scolarité cette description colle-t-elle le mieux?

   c) Quels cours feraient exception à cette description? Ces cours t'ont-ils apporté plus? moins?

4. Tu te déclares satisfait de ta formation mathématique. En quoi a-t-elle répondu à tes attentes?

ou

Tu aurais préféré avoir une formation mathématique qui réponde davantage à la description suivante:

---

a) Pourquoi?

b) Y a-t-il des cours que tu as suivis qui se rapprocheraient de cette description?

c) Quel serait le cours qui répondrait le moins bien à cette description?

PARTIE D: Épilogue

- ☑ y a-t-il autre chose que tu aimerais rajouter ?
- ☑ as-tu des commentaires à formuler quant à l'entretien que nous venons d'avoir ?
- ☑ un grand merci !!!

ANNEXE E : GRILLE DE CLASSIFICATION ET GUIDE D'UTILISATION

Grille de classification des erreurs

Guide d'utilisation

But de la grille

Mettre en évidence les lacunes d'un individu ou d'un groupe relativement aux *compétences* nécessaires à la *résolution* de problèmes de mathématiques appliquées susceptibles d'être rencontrés par l'individu ou par le groupe.

Définitions (ou conventions...)

Par **compétence**, on entendra un savoir-faire démontré (et donc observable) qui nécessite l'utilisation en situation de savoirs pratiques et/ou théoriques.

Par **résolution** d'un problème de mathématiques appliquées, on entendra autant la *recherche de solution* numérique ou analytique que la *démonstration* d'une propriété. Dans ce contexte, les méthodes de calcul algébrique, analytique, ou numérique ainsi que les différentes méthodes de preuve sont vues également comme des **méthodes de résolution**.

Un **objet mathématique** sera défini comme une composante du savoir mathématique (ex. nombre, triangle, sinus, logarithme, dérivée, série) caractérisée par des propriétés et liée à d'autres composantes par des relations. On exclura de la catégorie d'objet mathématique les méthodes de preuve sur lesquelles s'appuient les démonstrations des propriétés de ces objets. Une méthode de résolution qui mène à une solution n'est pas non plus en soi un objet mathématique mais un algorithme qu'elle utilise peut être étudié comme un objet mathématique avec ses propriétés (ex. convergence).

Structure de la grille

La grille est constituée des différentes *compétences* qui peuvent être mises à contribution lors de la *résolution* d'un problème de mathématiques appliquées.

Ces compétences sont regroupées dans la grille selon **quatre phases** qui caractérisent le processus de résolution de problèmes:

- 1 - *l'analyse du problème* : ou l'on cherche à comprendre le problème à résoudre, ses caractéristiques, les concepts et structures mathématiques sous-jacentes;
- 2 - *l'élaboration du plan de résolution*: où l'on cherche à établir et à structurer la stratégie à mettre en oeuvre dans la résolution, qu'elle fasse appel à des méthodes algébriques, analytiques, numériques, ou de démonstration;
- 3 - *l'exécution du plan*: où l'on applique les différentes méthodes mise à contribution, en respectant les propriétés des différents objets mathématiques impliqués;
- 4 - *la vérification*: où l'on cherche à valider les résultats obtenus.

Chez une personne qui résout un problème, ces phases ne sont pas nécessairement organisées en une séquence linéaire: plusieurs allers retours sont possibles et sont souvent effectués en pratique; ces allers retours dépendent de la progression de la résolution et du degré de contrôle exercé par la personne qui résout le problème. Pour cette raison, nous avons ajouté une **"méta-phase"**, celle du *contrôle*, qui regroupe les compétences responsables du passage d'une phase à l'autre.

Les différentes compétences sont aussi classées en **trois types**:

- les *compétences d'explicitation* (les *"savoir-dire")* pour traduire ce qui est, ce qu'il y a à faire et ce qui a été fait; en mathématiques, cela implique la maîtrise d'au moins trois langages différents (naturel, symbolique et graphique) et du passage de l'un à l'autre, par la modélisation et l'interprétation; on peut penser ajouter éventuellement d'autres langages quand on étend l'activité mathématique à la définition d'algorithmes (pseudo-code), la programmation (langage de programmation) et l'utilisation de logiciels de calculs (communication à l'interface);

- les *compétences d'évaluation* (les *"savoirs se situer")* pour identifier, légitimer et valider tout ce qu'on engage dans l'action; dans le contexte présent, cela correspond à la décomposition d'un problème en sous-problèmes, à l'identification des cas possibles, à la reconnaissance des champs théoriques appropriés, à la navigation dans l'arbre des concepts, à l'utilisation du raisonnement mathématique, à la vérification, au contrôle, etc.

- les *compétences d'intervention* (les *"savoirs d'intervention")*, pour agir en mettant en situation les connaissances disponibles et en transformant les situations rencontrées en connaissances réutilisables dans d'autres contextes; dans le contexte présent, cela correspond à l'utilisation des différentes méthodes (analytiques et algorithmiques) permettant de calculer, d'appliquer une transformation sur un objet, de résoudre un système d'équations, d'optimiser une fonction, etc., ainsi qu'à la généralisation par l'abstraction et la démonstration pour étendre des résultats ou l'emploi de méthodes à une classe de problèmes.

Dans la grille, chacune des différentes compétences est suivie des préfixes EX, EV, et IN selon qu'elle peut être associée, respectivement, aux compétences d'*explicitation*, d'*évaluation*, d'*intervention*. Certaines compétences ont été associées à plus d'un type; dans ce cas, le premier préfixe de la liste indique ce qui à notre avis constitue le type dominant.

Utilisation de la grille

La grille est appliquée sur la production écrite d'un étudiant en réponse à un problème de mathématiques appliquées. L'utilisateur de la grille essaie d'associer aux erreurs rencontrées lors de la correction les compétences qui semblent avoir fait défaut et coche alors ces dernières sur la copie de la grille utilisée. Il complète la grille en indiquant la note accordée.

Choix des compétences à cocher

Idéalement, chaque erreur devrait pouvoir être associée à une seule compétence et le nombre de compétences cochées devrait pouvoir refléter le nombre d'erreurs commises par l'étudiant pour ce problème. Mais il se peut et il est même fort probable qu'il soit difficile d'associer une erreur avec une seule compétence. Dans ce cas, il convient de se demander laquelle des compétences décrit de la façon la plus précise la source du problème. S'il n'est vraiment pas possible de trancher, on peut alors se permettre de cocher plus d'une compétence, surtout si l'erreur semble refléter une combinaison de lacunes.

Il faut toutefois se méfier de catégories qui peuvent paraître passe-partout. Par exemple, la compétence 2.03 *(Raisonner à partir d'un problème similaire (EV/IN))* ne devrait être cochée que si une référence à cet ancien problème est nécessaire à la résolution ou apparaît de façon explicite dans la production de l'étudiant; elle ne devrait pas être cochée si l'étudiant ne fait que manifester une difficulté à utiliser une méthode commune à la résolution des deux problèmes.

Validation du choix
Avant de cocher une compétence, il convient de vérifier qu'elle décrit bien le problème. Deux vérifications peuvent être effectuées rapidement:

- en validant la **phase**: l'erreur en est-elle une d'*analyse*, de *planification*, d'*exécution*, de *vérification* ou de *contrôle* ? Y a-t-il correspondance avec la compétence choisie ?
- en validant le **type**: l'erreur en est-elle une d'*explicitation*, d'*évaluation*, ou d'*intervention* ? Y a-t-il correspondance avec la compétence choisie ?

Ajout d'informations
L'utilisateur de la grille est invité à ajouter sur la même ligne que la compétence cochée toute information qui viendrait préciser rapidement (en quelques mots) l'erreur commise. Les compétences suivies d'un trait à compléter sont celles où l'on attend plus particulièrement une précision. Par exemple, si l'étudiant a commis une erreur en factorisant une expression, l'utilisateur cochera la compétence 3.05 (*Effectuer des manipulations algébriques/analytiques (IN)*) et inscrira "*Factorisation*" sur le trait qui suit.

0. Contrôler le passage d'une étape à l'autre

- ❑ 0.01 Démarrer (EV/EX)
- ❑ 0.02 Articuler les résultats des différents sous-problèmes et/ou cas possibles (IN/EX)
- ❑ 0.03 Détecter un raisonnement circulaire et l'éliminer de la solution (EV)
- ❑ 0.04 Reconnaître une impasse ou une invraisemblance (EV)
- ❑ 0.05 Identifier la source de l'impasse ou de l'invraisemblance, et y revenir (EV)
- ❑ 0.06 Anticiper la suite (EV)
- ❑ 0.07 Reconnaître l'atteinte de l'objectif ou d'un sous-objectif (EV)

1. Analyser le problème

- ❑ 1.01 Identifier/interpréter l'objectif à partir de l'énoncé (EX)
- ❑ 1.02 Identifier/interpréter les données, les hypothèses à partir de l'énoncé (EX)
- ❑ 1.03 Découper le système en en gardant l'essentiel (EV/EX)
- ❑ 1.04 Représenter à l'aide d'un graphique/diagramme/schéma (EX)
- ❑ 1.05 Identifier les principes, lois et/ou formules qui s'appliquent (EV/EX)
- ❑ 1.06 Identifier les variables (EX)
- ❑ 1.07 Identifier les paramètres (EX)
- ❑ 1.08 Identifier le ou les <u>objets</u> mathématiques sous-jacents (EV): ______________________
- ❑ 1.09 Reconnaître un problème bien défini (EV)
- ❑ 1.10 Traiter un problème mal défini (simplifications, ajout d'hypothèses) (EV/EX)
- ❑ 1.11 Mettre en équations (EX)

2. Élaborer le plan de résolution

- ❑ 2.01 Raisonner à partir d'un graphique/diagramme/schéma (EX/EV)
- ❑ 2.02 Raisonner à partir de cas particuliers (EV/IN)
- ❑ 2.03 Raisonner à partir d'un problème similaire (EV/IN)
- ❑ 2.04 Raisonner à partir d'une <u>propriété d'un objet</u> sous-jacent au problème (EV/IN): ______________
- ❑ 2.05 Explorer/expérimenter à l'aide de l'ordinateur (EV/IN/EX)
- ❑ 2.06 Identifier les <u>méthodes de résolution</u> applicables (EV)
- ❑ 2.07 Choisir la ou les <u>méthodes de résolution</u> en fonction de critères (précision, coût, etc.) (EV)
- ❑ 2.08 Structurer la <u>résolution</u> en décomposant en sous-problèmes (EV/IN)
- ❑ 2.09 Identifier les cas possibles (niveau macro) (EV)
- ❑ 2.10 Utiliser les règles d'inférence (niveau macro) (IN/EV)

3. Exécuter le plan

- ❑ 3.01 Identifier et démontrer une nouvelle propriété (EV/IN)
- ❑ 3.02 Utiliser une <u>propriété</u> associée à un <u>objet</u> mathématique (niveau micro) (IN/EV): ______________
- ❑ 3.03 Identifier les cas possibles (niveau micro) (EV/IN)
- ❑ 3.04 Utiliser les règles d'inférence (niveau micro) (IN/EV)
- ❑ 3.05 Effectuer des manipulations algébriques/analytiques (IN): ______________________
- ❑ 3.06 Écrire un algorithme (IN/EX)
- ❑ 3.07 Utiliser un algorithme (IN): ______________________________________
- ❑ 3.08 Programmer (IN/EX)
- ❑ 3.09 Utiliser une fonction logicielle (IN/EX): ______________________________
- ❑ 3.10 Estimer un résultat (EV/IN)
- ❑ 3.11 Calculer un résultat avec précision (IN/EV)
- ❑ 3.12 Vérifier localement les résultats intermédiaires (EV/IN)

4. Revenir sur la solution

- ❑ 4.01 Vérifier les propriétés générales (unités, ordre de grandeur, invariants, etc.) (EV)
- ❑ 4.02 Valider avec des cas particuliers (EV/IN)
- ❑ 4.03 Valider à partir d'un problème similaire (EV)
- ❑ 4.04 Expliquer les anomalies (EX/EV)
- ❑ 4.05 Généraliser les résultats obtenus (EV/IN)
- ❑ 4.06 Interpréter les résultats (EX/EV)

ANNEXE F : PROBLÈMES RETENUS

HEC – *Mathématiques financières*

Problème H-1 (Devoir)

Pour rembourser un prêt de 250 000 $ contracté le 1^er^ novembre 1997, vous deviez effectuer des versements mensuels égaux de 12 500 $ pendant 2 ans. Au moment d'effectuer les 11$^{\text{ième}}$,12$^{\text{ième}}$ et 13$^{\text{ième}}$ versements, votre entreprise a connu certaines difficultés financières, et en accord avec la banque, vous avez décidé de reporter ces 3 versement à la fin de la période de remboursement. Deux formules de remplacement ont été proposées : augmenter le montant du dernier versement ou effectuer deux versements supplémentaires (dont la valeur reste à déterminer) à la suite de ceux qui étaient prévus.

a) Représenter la deuxième formule sous forme de diagramme temporel.

b) Déterminer le taux nominal correspondant à l'arrangement initial.

c) Selon la première formule, il faudra effectuer un versement le 1$^{\text{er}}$ novembre 1999 qui contiendra le versement qui était prévu plus un montant qui compensera pour les 3 versements manquants. Déterminer la valeur du versement total à effectuer le 1$^{\text{er}}$ novembre 1999 selon cette formule.

d) Selon la deuxième formule, il faudra effectuer deux versements égaux le 1$^{\text{er}}$ décembre 1999 et le 1$^{\text{er}}$ janvier 2000 pour compenser pour les 3 versements manquants. Déterminer la valeur de chacun de ces deux versements.

Problème H-2 (Examen)

Une femme âgée de 30 ans décide de constituer un fonds d'étude pour son fils de 5 ans en versant un certain montant dans son compte au début de chaque trimestre, le premier versement ayant le lieu le jour du 5$^{\text{ième}}$ et le dernier aura lieu le jour de son 19$^{\text{ième}}$ anniversaire, année de fin de ses études collégiales.

Un mois après le dernier versement dans le fonds, son fils commencera à retirer une rente mensuelle de 800 $ pour les trois ans de son baccalauréat puis de 1 000 $ pour les 24 mois de sa maîtrise.

Question 1 :
Représenter la série de dépôts et retraits à l'aide d'un diagramme temporel.

Question 2 :
Combien déposera-t-elle à la fin de chaque trimestre si le taux effectif est de 12 % pour toute la durée des opérations ?

Question 3 :
Faire les mêmes calculs qu'à la question 2 en considérant que le taux effectif passe de 12% à 9% le jour de son 15$^{\text{ième}}$ anniversaire. On suppose que tous les dépôts sont égaux.

HEC – *Modélisation et optimisation*

Problème H-3 (Devoir)

Une entreprise cherche à avoir des recommandations sur la composition d'un portefeuille de placements. Les quatre types d'investissement considérés sont présentés dans le tableau 1.

Tableau 1 : Types d'investissement

Type de placement i	**Rendement moyen** R_i	**Écart-type** s_i
1- Obligations du gouvernement	4%	0
2- Actions « Nouvelles technologies »	12%	16%
3- Actions « Industrie traditionnelle »	13%	14%
4- Actions « Équitables »	7%	3%

(...) L'objectif recherché est de faire le maximum de profit, tout en considérant l'attitude envers le risque. C'est donc un objectif mixte qui est poursuivi, comprenant d'une part des profits en dollars et d'autre part une évaluation du risque dans une unité qu'on peut appeler des utiles, et qui mesure l'utilité obtenue. Le résultat, la sommation des deux objectifs, donnera le maximum de satisfaction (aussi en utiles). La manière de prendre en compte le risque dans ce problème est donnée par la formule suivante :

$$+ K\,(s_i * m_i)^2$$

où m_i est le montant d'argent investi dans le type de placement i et K est la constante d'aversion au risque.

Cette constante K doit refléter l'aversion au risque du preneur de décision. En effet, certains d'entre eux détestent le risque (appelons-les les *conservateurs*), d'autres sont indifférents (les *flegmatiques*), alors qu'un troisième tupe de preneurs de décision aiment le risque (les *intrépides*). Les conservateurs trouvent moins de satisfaction dans les placements qui ont un grand écart-type. Ils vont donc vouloir « pénaliser » ce type de placement dans leur modèle. Les intrépides, indépendamment du rendement moyen obtenu, vont attribuer plus de valeur aux placements avec un grand écart-type. Finalement, les flegmatiques ignorent tout simplement ce facteur dans leur modèle. Le tableau 2 donne les valeurs de K qui sont envisagées dans notre problème.

Tableau 2 : Valeurs de K envisagées

Constante d'aversion au risque K
-1
0
1

Vous savez que le montant total disponible pour les investissements est M = 100 000 $.

(...)

Question 4 :

Considérez maintenant les **conservateurs**, les quatre types d'investissement et l'ensemble du budget (mais pas encore les autres contraintes). Quelle devrait être la répartition du montant total entre les quatre types de placements ? Faites les calculs avec le Solveur d'Excel et confirmez formellement (manuellement) que vous avez atteint un maximum absolu. *Indice : vous pouvez montrer qu'il s'agit d'un point extrémal et que la fonction est concave à l'aide des propriétés sur les fonctions concaves et convexes.*

HEC – *Modélisation et optimisation*

Problème H-4 (Examen)

(Justifier la démarche à chaque question.)

Un entrepreneur possède un terrain vague au centre-ville qu'il se propose de transformer en stationnement, puisque justement il n'y en pas dans cette zone. Celui-ci pourrait contenir **jusqu'à 100 espaces de stationnement**. Quelques automobilistes lui ont mentionné que le prix le plus élevé qu'ils seraient prêts à payer est de **150 $ par semaine pour un abonnement !** Cependant, l'entrepreneur est conscient que ce prix est évalué sachant qu'aucun espace n'est actuellement disponible dans cette zone. En effet, il estime que le **prix de l'abonnement** pour un espace de stationnement **diminuerait de 0,50 $ pour chaque espace disponible** (selon la loi de l'offre et de la demande spécifiant que plus il y a d'espaces, moins il peut se permettre de les vendre cher).

Pour aménager et gérer le terrain, il lui en **coûterait 60$ par semaine par espace**. Avec ces informations, l'entrepreneur s'interroge sur le **nombre d'espaces de stationnement à aménager** afin de **rentabiliser le plus possible** son terrain vague.

a) Quelle est la **variable de décision** x et son domaine de définition ?

b) Exprimer le **prix de l'abonnement** à la semaine **en fonction de** x. (Indice : pour valider cette fonction, on peut vérifier que ce prix est de 150$ lorsqu'il y a 0 espace, tandis que ce prix tombe à 0$ lorsqu'il y a 300 espaces, si c'était possible).

c) Exprimer la **fonction objectif à optimiser**.

d) **Résoudre** le problème afin de **répondre à l'interrogation** de l'entrepreneur.

e) Quel serait alors le prix de l'abonnement ? Quel serait le profit de l'entrepreneur par semaine ?

Département d'informatique – *Structures discrètes en informatique*

Problème I-1 (Devoir)

La proposition suivante est-elle une tautologie :

$$[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow r$$

en justifiant votre réponse

a) à l'aide des tables de vérité

b) par un raisonnement

Problème I-2 (Examen intra)

Soit $\{ a_n \}_{n=1}^{m}$ une suite. Étant donné une valeur x, il faut déterminer le plus grand indice n, $i \leq n \leq j$, tel que $a_n = x$ ou qu'un tel indice n'existe pas. (Nous supposons que $1 \leq i$ et $j \leq m$.)

a) Spécifier à l'aide d'un pseudocode un algorithme itératif pour le faire.

b) Spécifier à l'aide d'un pseudocode un algorithme récursif pour le faire.

Problème I-3 (Examen final)

Combien existe-t-il de nombres entiers différents plus petits que 1 000 000 comportant exactement un chiffre égal à 9 et dont la somme des chiffres est plus petite ou égale à 13 ?

(Note : il existe 10 chiffres différents : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

Département d'informatique – *Structures discrètes en informatique*

Problème I-4 (Examen final)

Soit A un sous-ensemble de l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, 50\}$. Supposons que A comporte 10 éléments (i.e. $|A| = 10$). Démontrez que A comporte au moins 2 sous-ensembles différents de 5 éléments dont les sommes des éléments sont identiques.

Problème I-5 (Examen final)

Considérer un arbre m-aire complet comportant p sommets internes et t feuilles. Démontrer que

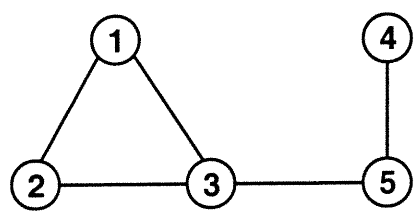
$$t = (m - 1)p + 1$$

quelque soit la profondeur de l'arbre.

Problème I-6 (Examen final)

Considérer un graphe connexe $G = (V, E)$. En utilisant la matrice d'adjacence du graphe, indiquer comment identifier un point d'articulation.

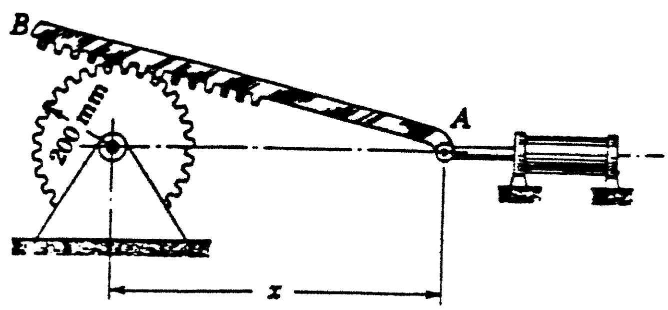
Illustrer votre méthode pour démontrer que 3 est un point d'articulation dans le graphe suivant.



École Polytechnique – *Mécanique pour ingénieurs*

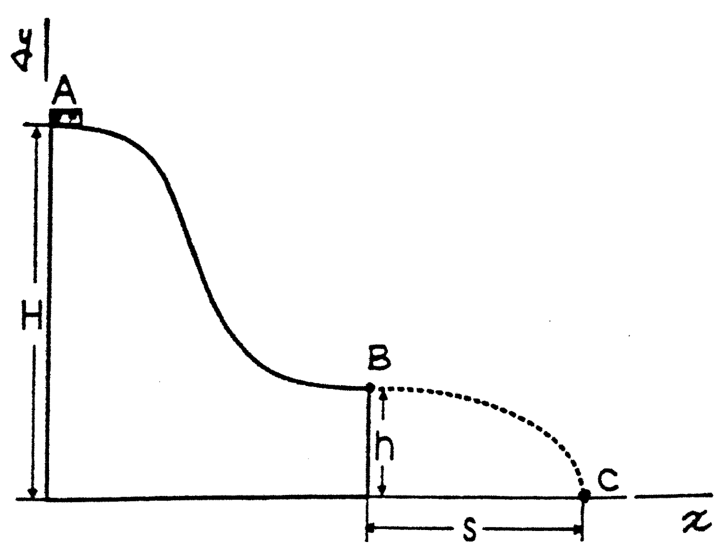
Problème P-1 (Examen final)

Pour le mécanisme montré à la figure 1, le point A se déplace vers la droite avec une vitesse constante de 300 mm/s. Trouver les vitesses de rotation ω_0 de l'engrenage et ω_{AB} de la crémaillère, à l'instant où x = 800 mm.



Problème P-2 (Examen final)

Une petite rondelle A ayant une vitesse initiale nulle, glisse sans frottement du sommet d'un monticule de hauteur H suivi d'un tremplin **horizontal** de hauteur "h" (voir figure 2). Pour une hauteur H donnée, déterminer la hauteur "h" qui permettra à la rondelle de parcourir la plus grande distance "s".



École Polytechnique – *Mécanique pour ingénieurs*

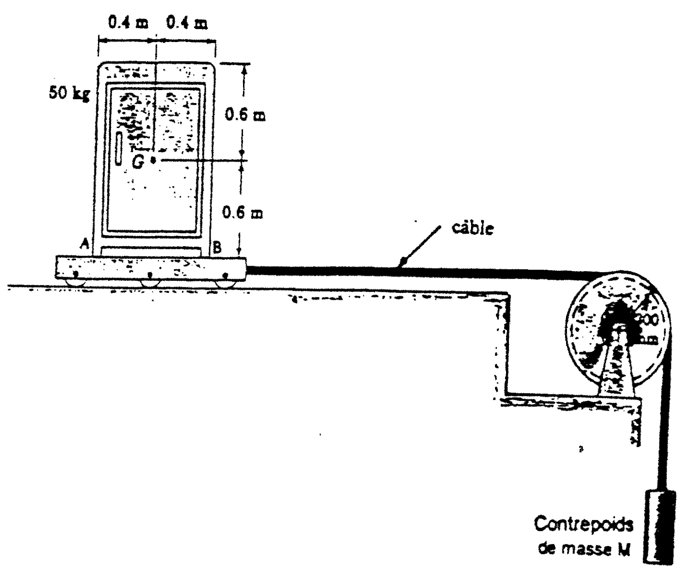
Problème P-3 (Examen final)

Comme montré sur la figure 3, on déplace un coffre-fort de 50 kg à l'aide d'un chariot de 10 kg à petites roues d'inerties négligeables. Le coefficient de frottement statique entre le coffre-fort et le chariot est μ_s. Le chariot est entraîné par un contrepoids de masse M à l'aide d'un câble de masse négligeable et d'une poulie de 3 kg qui est libre de tourner autour de son axe 0 et dont le rayon de giration centroïdal est de 200 mm.

a) Calculer le moment d'inertie de la poulie par rapport à son axe de rotation.

b) Déterminer la valeur minimale de la masse M du contrepoids qui va provoquer la bascule du coffre-fort sur le chariot.

c) Quelle serait alors la valeur minimale du coefficient de frottement μ_s qui assurerait que la bascule se produise sans glissement ?



ANNEXE G : PRINCIPALES DONNÉES QUANTITATIVES

	Compét. informat.		Formation mathématiq.			Indices d'intérêt					Erreurs commises								
											tot	par type			par phase				
Étudiants	CL	CP	PR	ET	PF	IT	IR	IP	IA	IX	Tot	EV	EX	IN	CT	AN	PL	EC	RT
H01	2	0	4	15	13	10	10	4	10	4	5.0	2.3	1.0	1.7	0	2	1	2	0
H02 (Fabienne)	4	0	2	13	5	0	-2	10	12	-4	8.0	3.0	4.0	1.1	1	4.5	1	0.5	1
H03	1	0	2	15	8	13	3	16	14	0	9.0	4.6	3.0	1.4	2	3	2	1	1
H04 (Charles)	2	0	0	10	0	2	3	14	12	0	6.0	2.3	2.0	1.7	0	2	2	2	0
H05	1	0	0	13	0	8	12	18	4	0	9.0	4.0	4.0	1.0	0	5	2	1	1
H06 (Geneviève)	4	0	2	8	4	7	4	21	12	0	7.0	3.6	1.0	2.4	2	2	0	3	0
H07	5	3	6	23	25	23	24	0	4	0	4.0	3.0	0.3	0.7	2	0	2	0	0
H08	4	0	0	6	0	6	2	9	8	0	3.0	0.6	1.7	0.7	0	1	0	1	1
H09 (Michel)	2	0	2	12	6	1	7	18	2	0	9.0	5.0	2.3	1.7	1.5	2	4	1	0.5
H10	2	0	0	8	1	4	7	24	10	0	9.0	4.7	1.3	3.0	1	1	3	3	1
H11	1	0	1	24	20	7	11	3	8	0	10.0	4.0	4.0	2.0	0	5	3	2	0
H12	1	0	0	14	2	16	11	-2	12	0	10.0	5.0	3.7	1.4	1	4.5	3	1.5	0
H13	0	0	0	11	4	5	5	2	12	0	8.0	5.7	0.6	1.7	1	1	5	1	0
H14	1	0	0	15	6	1	-3	10	10	0	10.0	5.7	3.3	1.0	1	5	4	0	0
H15	2	0	0	2	0	3	3	5	8	0	12.0	3.0	4.3	4.7	1	4	1	5	1
I01 (François)	5	13	2	18	6	14	17	3	22	0	14.0	7.6	3.3	3.2	1	4	8	1	0
I02	2	4	0	12	0	4	1	13	2	4	8.0	6.7	1.3	0.0	2	2	4	0	0
I03	3	1	0	14	8	6	1	11	0	0	10.0	6.1	2.6	1.3	2	3	5	0	0
I04	3	6	2	19	9	11	4	6	8	0	15.0	8.1	4.6	2.3	3	5	7	0	0
I05	5	5	3	27	21	6	2	10	8	0	11.0	6.8	3.3	0.9	3	3	4	0	1
I06 (Ninon)	2	1	3	6	8	2	2	24	4	0	8.0	4.8	2.6	0.6	3	1	3	0	1
I07 (Hughes)	4	4	0	14	0	7	13	11	5	2	13.0	7.4	3.3	2.3	2	2	7	1	1
I08	6	10	0	18	6	7	7	10	24	0	5.0	3.0	1.7	0.3	0	1	4	0	0
I09	6	5	0	14	0	10	15	6	24	0	4.0	1.7	2.3	0.0	0	2	1	0	1
I10	3	1	1	18	12	3	12	11	14	0	10.0	6.7	1.0	2.3	2	1	5	2	0
I11 (Zoé)	1	1	2	15	7	20	20	-6	-2	0	5.0	2.0	1.3	1.7	0	2	1	2	0
I12	3	2	1	24	12	2	1	-3	10	0	15.0	6.4	6.6	2.0	2	7	4	2	0
I13	3	6	0	6	0	2	1	4	8	0	8.0	4.0	4.0	0.0	1	3	3	0	1
I14	2	4	1	22	18	17	17	-2	6	0	8.0	3.1	4.3	0.6	0	5	2	0	1
P01	3	2	0	16	6	2	7	12	5	-2	8.0	5.5	1.4	1.2	3	2	2	1	0
P02 (Lucie)	1	0	4	18	12	-1	-1	18	12	0	9.0	6.0	1.9	1.2	3	4	2	0	0
P03	3	0	1	5	2	8	10	12	0	0	8.0	4.3	1.6	2.2	1	3	3	1	0
P04	0	1	0	7	0	0	0	11	12	4	8.0	5.2	2.7	0.2	1	4	3	0	0
P05	0	0	0	8	0	3	1	14	14	0	9.0	6.2	1.3	1.6	0	4	2	2	1
P06 (Mark)	0	0	0	6	0	8	6	21	10	0	12.0	6.8	5.1	0.2	0	8.5	3	0	0.5
P07 (Alexandre)	2	1	1	18	13	7	11	-6	14	0	8.0	3.5	2.0	2.5	0.5	2.5	2	2	1
P08 (Helga)	2	4	1	10	3	5	3	7	15	14	12.0	5.2	5.0	1.9	0	7	2	2	1
P09	2	6	0	18	8	18	9	14	14	0	7.0	4.9	2.0	0.2	0	4	2	0	1

CL : compétences logicielles
CP : compétences de programmation
PR : nombre de cours où l'on a eu à démontrer
ET : étendue des connaissances mathématiques
PF : profondeur des connaissances mathématiques
IT / IR : intérêt pour la théorie / le raisonnement
IP : intérêt pour l'approche procédurale
IA / IX : intérêt pour l'application / la technologie

Nombre d'erreurs commises :
Tot : au total
EV : d'évaluation
EX : d'explication
IN : d'intervention
CT : au niveau du contrôle
AN / PL : en phase d'analyse / de planification
EC / RT : en phase d'exécution / de retour