

2 mil. 2782.7

Université de Montréal

REEMPLACEMENT PRÉVENTIF BASÉ SUR
L'ÂGE AVEC RÉPARATION MINIMALE
IMPARFAITE

par

ABOU LASSISSI Mouhamadou

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Maître ès sciences (M.Sc.)
en Statistique

avril 2000

© ABOU LASSISSI Mouhamadou, 2000



5.585.508
QA
3
U54
2000
N.019

Université de Zintan

REEMPLACEMENT PRÉVENTIF BASÉ SUR
L'ÂGE AVEC RÉPARATION MINIMALE
IMPARFAITE

1997

ABOU LAZIZI Mohamed

Le Directeur de l'Université de Zintan
Le Directeur de la Faculté de Médecine

Le Directeur de l'Unité de Formation et de Recherche
Le Directeur de l'Unité de Recherche et de Développement
Le Directeur de l'Unité de Service et de Santé

1997



Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**REMPLACEMENT PRÉVENTIF BASÉ SUR
L'ÂGE AVEC RÉPARATION MINIMALE
IMPARFAITE**

présenté par

Mouhamadou ABOU LASSISSI

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Jean-François Angers
(président-rapporteur)

Robert Cléroux
(directeur de recherche)

Narayan Giri
(membre du jury)

Mémoire accepté le :

26 avril 2000

SOMMAIRE

La politique de maintenance de systèmes est un domaine de recherche incontournable par ces temps où la concurrence est sévère sur le marché de la production.

En effet tout dispositif de production en fonctionnement se détériore de façon aléatoire, sa durée de vie est aléatoire et il tombera probablement en panne. Or le coût d'une panne peut être énorme, au point de paralyser toute une chaîne de production. La survie d'une unité de production est alors en jeu. Pour ne pas se retrouver dans une situation aussi inconfortable, et dans le souci de minimiser les coûts, on cherche à mettre au point des politiques de maintenance de systèmes de production. Chaque politique définit une structure de coût appropriée. La principale idée dans ces politiques est d'effectuer des remplacements préventifs des pièces du système.

Lorsque ces remplacements sont faits à intervalles de temps fixes, indépendamment de l'âge de la pièce, on parle de remplacement préventif périodique. Ce type de politique a été étudié entre autres par Tilquin et Cléroux (1975) puis par Ait Kadi et Cléroux (1991).

Lorsque les remplacements dépendent de l'âge de la pièce, on parle de remplacement préventif basé sur l'âge. Ce type de politique a été étudié entre autres par Bai et Yun (1986), par Block, Borges et Savits (1988) puis par Kapur, Garg et Butani (1989).

La relation entre ces deux types de politique a été étudiée entre autres par Savits (1988).

Ce que l'on convient d'appeler la politique classique de remplacement préventif a été initié par Barlow et Proschan (1965). C'est une politique basée sur l'âge de la pièce. Elle consiste à remplacer la pièce :

- soit lorsqu'elle tombe en panne, on parle alors de *remplacement à la panne*;
- soit avant la panne lorsque la dite pièce atteint un âge T unités de temps, il s'agit dans ce cas d'un *remplacement préventif*.

Dans cette politique dite de type âge, T est un paramètre à trouver de façon optimale.

Avec une structure de coût relativement simple par rapport au contexte réel, la politique classique du remplacement préventif a mis en place les bases d'une formalisation mathématique. La valeur optimale de T proposée est celle qui minimise le coût moyen de maintenance du système par unité de temps sur un horizon infini, tenant ainsi compte du fait que la stratégie optimale est un processus à long terme. Un exemple numérique relié à la durée de vie de tubes électroniques a été produit par les auteurs.

Au fil des années, des politiques de remplacement préventif basé sur l'âge ont été proposées avec des structures de coût plus réalistes puisqu'elles prennent en compte au moins un des quatre éléments suivants :

- puisque la stratégie optimale est un processus à long terme, il faut *actualiser les coûts* en tenant compte de la dévaluation du dollar.
- Les coûts discrets que sont les intérêts à payer à intervalles fixes et les coûts de dépréciation du système.

- Les coûts continus d’opération qui sont des fonctions continues de l’âge du système et qui tiennent compte de la perte de qualité ou de productivité ainsi que de la baisse de sa valeur de revente.

- Les coûts aléatoires : à la panne, on peut être tenté d’effectuer une réparation minimale¹. On évalue alors le coût aléatoire de la réparation minimale avant de décider s’il faut l’effectuer ou s’il faut remplacer la pièce défectueuse par une neuve.

L’une de ces politiques de remplacement préventif, développée entre autres par Cléroux, Dubuc et Tilquin (1979) prend en compte les coûts aléatoires. Son développement théorique montre que l’optimisation est possible pour tout système dont la distribution de durée de vie est à fonction taux de panne continue et strictement croissante vers $+\infty$. De plus, les auteurs font ressortir, sur un exemple numérique, les points saillants suivants :

- si on permet des réparations minimales dans la politique classique de type âge, on diminue les coûts;
- cette diminution des coûts est plus forte quand la probabilité de réparer est plus grande;
- les coûts sont semblables même lorsque la distribution de durée de vie varie entre la loi normale tronquée en 0, la loi gamma, la loi de Weibull.

Ce mémoire présente une politique de remplacement préventif qui prend en compte les coûts aléatoires. Elle est très proche de celle de Cléroux, Dubuc et Tilquin (1979) avec la nuance probabiliste suivante : à la panne, la réparation parfaite² est possible avec une probabilité p non nulle. Les seuls remplacements autorisés sont donc les remplacements préventifs.

1. La réparation minimale remet le système dans l’état où il était juste avant la panne.

2. La réparation est dite parfaite lorsqu’elle restitue à la pièce défectueuse les performances d’une pièce identique neuve.

Sur le plan théorique, je présente un critère d'optimisation, que je crois original au moins dans la façon de l'obtenir, permettant une optimisation lorsque la distribution de durée de vie est à fonction taux de panne continue, strictement croissante et bornée avec une condition sur la borne.

Sur le plan numérique, dans un premier temps je vérifie que les conclusions numériques de Cléroux, Dubuc et Tilquin (1979) s'appliquent au modèle et dans un deuxième temps, je montre de façon originale que :

- la loi des valeurs extrêmes de type 1 est un exemple de distribution dont la fonction taux de panne vérifie mon critère d'optimisation.
- les conclusions numériques obtenues pour les trois précédentes distributions s'appliquent encore à la distribution des valeurs extrêmes de type 1 qui elle est à fonction taux de panne bornée.

REMERCIEMENTS

Je veux tout d'abord remercier mon directeur de recherche, Robert Cléroux, pour son encadrement exceptionnel à tous points de vue. La fréquence mesurée et la précision de ses interventions ont relevé d'un cran mon sens de l'autonomie et mes aptitudes à la recherche.

Je le remercie aussi, et avec lui François Perron, pour leur côté humain et pour leur constante disponibilité sur des sujets divers reliés à la vie professionnelle au Canada.

Ce mémoire a bénéficié *exclusivement* du support financier des fonds de recherche octroyés à mon directeur de recherche. Par son intermédiaire, je veux donc remercier également le Conseil de Recherche en Sciences Naturelles et en Génie du Canada (CRSNG) qui subventionne ces fonds.

Je remercie ensuite toute ma famille d'ici et d'ailleurs pour l'intérêt régulièrement porté à ce travail dont les exigences énormes n'ont pas toujours été compatibles avec la routine de la vie familiale. Plus victimes que les autres de ce désagrément, je remercie Yasmine, Mohamed, Wahida et Asina qui par leur sacrifice ont permis de mener ce travail à terme.

Par l'intermédiaire de Marie Paule Lebrun, je remercie enfin l'organisme communautaire "BAOBAB FAMILIAL" dont l'action à domicile a contribué à me rendre plus disponible à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Sommaire	iii
Remerciements	vii
Table des figures	xii
Liste des tableaux	xiv
Introduction	1
Chapitre 1. Quelques résultats de base	3
1.1. Notations	3
1.1.1. Notations introductives	3
1.1.2. Notations des processus qui engendrent le modèle	4
1.1.3. Donnée principale du modèle	5
1.1.4. Autres notations	5
1.2. Seuil du coût de réparation	5
1.3. Formes explicites de F_p et de r_p	6
1.4. Fonction de répartition K_p de Y^*	8
1.5. Durée de vie moyenne de Y^*	9
1.6. Fréquence des réparations parfaites sur un horizon infini	11
1.7. Fréquence des remplacements préventifs sur un horizon infini	13

1.8.	Coût moyen de réparation par unité de temps sur un horizon infini	16
Chapitre 2. Fonction de coût		18
2.1.	Première forme de $B(q, T)$	19
2.2.	Première forme de $E(W^*)$	19
2.3.	Forme explicite de $E(C C \leq c_0)$	20
2.4.	Première forme de $E[N(Y^*)]$	21
2.4.1.	Forme explicite de $P(M_n < T)$	24
2.4.1.1.	Durée de vie résiduelle d'un système d'âge s	24
2.4.1.2.	Première forme de $P(M_n < T)$	25
2.4.1.3.	Deuxième forme de $P(M_n < T)$	29
2.4.1.4.	Forme explicite de $g_n(m_n)$	30
2.4.1.5.	Forme explicite de $P(M_n < T)$	31
2.5.	Formes explicites de $E[N(Y^*)]$, $E(W^*)$ et $B(q, T)$	31
2.6.	Comparaison avec d'autres études	34
2.6.1.	$B(q, T)$ comme fonction de q et de T	34
2.6.2.	$B(q, T)$ comme fonction de T	34
2.6.3.	$B(q, T)$ comme fonction de q	35
2.6.3.1.	Comportement de $B(q, T)$ quand $q \rightarrow 0$	35
2.6.3.2.	Comportement de $B(q, T)$ quand $q \rightarrow 1$	36
Chapitre 3. Les classes de distribution ifr, ifra nbu et nbue		38
3.1.	Les classes de distribution IFR et IFRA	38
3.1.1.	Classe IFR	39
3.1.2.	Classe IFRA	40

3.2. Les classes de distribution NBU et NBUE	41
3.2.1. Classe NBU	42
3.2.2. Classe NBUE	42
3.3. Relation entre les classes IFR et NBU	44
Chapitre 4. Critères d'optimisation de la fonction de coût de réparation.....	46
4.1. Variations de la fonction de coût $a : T \mapsto a(T)$	47
4.2. Condition d'existence d'une solution unique T^* de l'équation $a'(T) =$ 0	47
4.3. Condition sur r pour l'existence et l'unicité de T^*	48
4.4. Obtention de la politique optimale	50
Chapitre 5. Applications numériques	51
5.1. Exemple	51
5.2. Résultats obtenus par d'autres auteurs	52
5.2.1. Modèle classique du remplacement préventif basé sur l'âge	52
5.2.2. Le modèle ARPMR	53
5.3. Comparaison avec les résultats du modèle ARPMR	58
5.3.1. Démarche globale des calculs	60
5.3.2. Optimisation lorsque F est la fonction de répartition de la normale $N_0(\mu, \sigma^2)$ tronquée en 0	62
5.3.3. Optimisation lorsque F est la fonction de répartition de la gamma(b_0, c_0), $b_0 = \frac{\mu^2}{\sigma^2}$, $c_0 = \frac{\sigma^2}{\mu}$	63

5.3.4. Optimisation lorsque F est la fonction de répartition de la Weibull (α, λ)	64
5.4. Optimisation avec une nouvelle distribution F : celle des valeurs extrêmes de type 1.....	69
5.5. La loi des valeurs extrêmes de type 1.....	71
5.6. Étude des variations de la fonction taux de panne associée à loi des valeurs extrêmes de type 1.....	71
Conclusion	89
Annexe A. Programme de calcul des quatre grandeurs indépendantes de F	90
Annexe B. Programme de calcul de T_0 pour la distribution normale tronquée en 0	92
Annexe C. Programme de calcul de grandeurs optimales pour la distribution normale tronquée en 0	95
Annexe D. Calcul numérique de T_0 pour la distribution normale tronquée en 0	97
Bibliographie	102

Table des figures

1.1.1	Processus des durées de vie dans un contexte sans remplacement préventif.....	3
1.6.1	Processus des réparations parfaites associé au processus Y^*	12
1.7.1	Processus des remplacements préventifs associé au processus Y^*	14
1.8.1	Processus des coûts de réparation associé au processus Y^*	16
2.4.1	Subdivision de l'intervalle $[m_j, m_{j+1}[$ en k_j intervalles d'amplitude h_j	26
5.3.1	Fonction de densité l de $N(\mu_0, \sigma_0^2)$	60
5.6.1	Fonctions taux de panne associées à la loi normale tronquée en 0, à la loi gamma et à la loi de Weibull	76
5.6.2	Fonction taux de panne associée à la loi des valeurs extrêmes de type 1	77
5.6.3	Fonction de coût associée à la loi des valeurs extrêmes de type 1 pour $\delta = 0,09$. $(T_0; a(T_0)) = (4318,02; 0,027)$	78
5.6.4	Fonction de coût associée à la loi des valeurs extrêmes de type 1 pour $\delta = 0,27$. $(T_0; a(T_0)) = (4328,02; 0,027)$	79
5.6.5	Fonction de coût associée à la loi des valeurs extrêmes de type 1 pour $\delta = 0,45$. $(T_0; a(T_0)) = (4379,21; 0,026)$	80
5.6.6	Fonction de coût associée à la loi des valeurs extrêmes de type 1 pour $\delta = 0,64$. $(T_0; a(T_0)) = (4489,50; 0,026)$	81

5.6.7	Fonction de coût associée à la loi des valeurs extrêmes de type 1 pour $\delta = 0,73$. $(T_0 ; a(T_0)) = (4532,61 ; 0,025)$	82
5.6.8	Fonction de coût associée à la loi des valeurs extrêmes de type 1 pour $\delta = 0,82$. $(T_0 ; a(T_0)) = (4554,31 ; 0,025)$	83
5.6.9	Fonction de coût associée à la loi des valeurs extrêmes de type 1 pour $\delta = 0,90$. $(T_0 ; a(T_0)) = (4559,09 ; 0,025)$	84
5.6.10	Fonction de coût associée à la loi des valeurs extrêmes de type 1 pour $\delta = 0,91$. $(T_0 ; a(T_0)) = (4559,12 ; 0,025)$	85
5.6.11	Fonction de coût associée à la loi des valeurs extrêmes de type 1 pour $\delta = 1$. $(T_0 ; a(T_0)) = (4557,17 ; 0,025)$	86
5.6.12	Fonction de coût associée à la loi des valeurs extrêmes de type 1 pour $\delta = 0,09 ; 0,45 ; 0,64 ; 1$ correspondant respectivement aux courbes de haut en bas.	87
5.6.13	Illustration graphique du critère d'optimisation " $r_\infty > \frac{\alpha}{\beta\mu}$ "	88

Liste des tableaux

5.2.1	Modèle classique du remplacement préventif basé sur l'âge pour trois distributions.....	53
5.2.2	Modèle ARPMP pour la loi gamma.....	55
5.2.3	Modèle ARPMP pour la loi normale tronquée.....	56
5.2.4	Modèle ARPMP pour la loi de Weibull.....	57
5.3.1	Remplacement préventif basé sur l'âge avec réparation minimale imparfaite pour la loi gamma.....	66
5.3.2	Remplacement préventif basé sur l'âge avec réparation minimale imparfaite pour la loi normale tronquée.....	67
5.3.3	Remplacement préventif basé sur l'âge avec réparation minimale imparfaite pour la loi de Weibull.....	68
5.4.1	Remplacement préventif basé sur l'âge avec réparation minimale imparfaite pour la loi des valeurs extrêmes de type 1.....	70
5.6.1	Calcul de $\frac{\alpha}{\beta\mu}$ en fonction de δ , où $\alpha = \beta + c_2$	75

INTRODUCTION

On sait qu'en pratique la réparation d'une pièce en panne ne peut lui restituer les performances d'une pièce identique neuve. En théorie, on supposera ici que cette restitution est possible avec une probabilité p *non nulle*.

Le modèle alterne les réparations et les remplacements selon le schéma suivant: On remplace la pièce qui survit à T unités de temps (remplacement préventif). Si la pièce tombe en panne à l'âge $s < T$,

*ou bien elle subit une réparation parfaite³ avec une probabilité p *non nulle*.

*ou bien elle subit une réparation imparfaite⁴ avec une probabilité $q = 1 - p$ *différente de 1*.

Soulignons déjà que lorsque q tend vers 1 ou encore que p tend vers 0, alors les réparations imparfaite et minimale sont équivalentes. Le modèle de Cléroux, Dubuc et Tilquin (1979), le modèle de Fontenot et Proschan (1984) ainsi que celui de Beichelt (1993) entrent dans ce cadre.

On adoptera les hypothèses suivantes :

- le mot « réparation » tout seul signifiera « réparation imparfaite ».
- tout remplacement (remplacement préventif ou réparation parfaite) remet le système à neuf. Donc les mots « remplacement » et « renouvellement » sont interchangeables.
- toutes les pannes sont détectées et réparées instantanément.

3. Une réparation parfaite est équivalente à un remplacement par une pièce identique neuve.

4. La pièce retrouve les mêmes performances qu'une pièce identique d'âge s .

Le mémoire comprend cinq chapitres. Les quatre premiers recouvrent le développement théorique du modèle de la façon suivante.

Le chapitre 1 met en place les *principaux ingrédients de la formalisation mathématique du coût moyen de maintenance par unité de temps sur un horizon infini*. Il s'agit notamment des premières notations, des données du modèle et des facteurs qui déterminent le coût de maintenance, comme le nombre moyen de réparations parfaites, le nombre moyen de remplacements préventifs et le coût moyen de réparation.

Le chapitre 2 donne la *forme explicite de ce coût moyen de maintenance* en fonction des seules données du modèle. Cette forme explicite est ensuite comparée sous plusieurs angles à celles déjà établies par différents auteurs dans des études analogues.

Puisque *le problème à résoudre est d'optimiser (minimiser) le coût moyen de maintenance par unité de temps sur un horizon infini*, il faut d'abord établir les critères d'une telle optimisation. Le chapitre 3 donne le *développement détaillé d'un résultat* qui sera utilisé de façon déterminante dans le chapitre 4, lequel est consacré à la *recherche des critères d'optimisation*. Le chapitre 5 présente quelques *applications numériques*. Une conclusion suit le chapitre 5.

Chapitre 1

QUELQUES RÉSULTATS DE BASE

1.1. NOTATIONS

1.1.1. Notations introductives

Dans un contexte sans remplacement préventif, on a pour $0 < p < 1$ le processus décrit ci-dessous où S_i est l'instant de la $i^{\text{ème}}$ panne et $U_i = S_i - S_{i-1}$ est la $i^{\text{ème}}$ durée de vie.

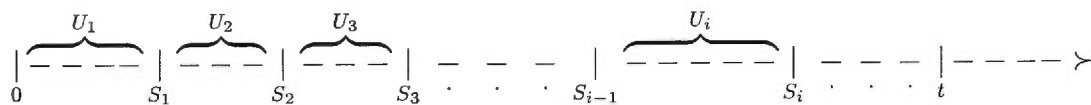


FIG. 1.1.1. *Processus des durées de vie dans un contexte sans remplacement préventif*

La suite S_i , $i = 1, 2, \dots$, contient une sous suite S_j^p , $j = 1, 2, \dots$, où S_j^p est l'instant de la $j^{\text{ème}}$ réparation parfaite.

Désignons par F_p , la distribution des $Y_j = S_{j+1}^p - S_j^p$ (durées successives entre les réparations parfaites) et par r_p la fonction "taux de panne" correspondante :

$$r_p(t) = \frac{f_p(t)}{\bar{F}_p(t)},$$

où $\bar{F}_p(t) = 1 - F_p(t)$.

Remarque 1.1.1. $r_p(t)$ est le taux de panne en t où t est l'âge de la pièce. Cela suppose donc qu'il n'y a pas eu de réparation parfaite sur $[0, t[$.

1.1.2. Notations des processus qui engendrent le modèle

Le processus Y^* qui décrit le modèle est obtenu progressivement à l'aide de trois processus X, U, Y définis ci-après.

$X = \{X_i, i = 1, 2, \dots, \}$ est le processus des durées de vie successives avec seulement des réparations parfaites. Les X_i sont iid¹ avec respectivement F, f, r et μ comme fonction de répartition, fonction de densité, fonction "taux de panne" et durée de vie moyenne.

$U = \{U_i, i = 1, 2, \dots, \}$ est le processus X dans lequel on inclut seulement les réparations imparfaites. Les U_i sont iid avec respectivement H et h comme fonction de répartition et fonction de densité.

$Y = \{Y_i, i = 1, 2, \dots, \}$ est le sous-processus de U correspondant aux seules réparations parfaites. Comme indiqué précédemment, les Y_i sont iid avec comme fonction de répartition $F_p, 0 < p < 1$ et comme durée de vie moyenne $\mu(p) = E(Y)$. On notera que les processus Y et X sont différents et que quand p tend vers 1, le processus Y vient se confondre avec le processus X .

Le processus Y^* qui décrit le modèle est alors obtenu comme suit:

$Y^* = \min(Y, T)$ est le processus Y dans lequel on inclut les remplacements préventifs à l'âge T unités de temps. Sa durée de vie moyenne dépend non seulement de p mais aussi de la politique T . On pose $\mu^*(p, T) = E(Y^*)$

Il faudra par la suite trouver la distribution de Y^*

1. indépendantes et identiquement distribuées

1.1.3. Donnée principale du modèle

Dans le processus X , on laisse la pièce (ou le système) fonctionner librement (sans aucune opération de maintenance) jusqu'à la panne.

À l'aide de multiples enregistrements ainsi effectués sur la durée de vie d'une pièce donnée, on finit par connaître son histoire à travers la distribution F .

On notera que quand F est connue, f , r et μ le sont à travers les égalités suivantes:

$$f(x) = F'(x), r(x) = \frac{f(x)}{F(x)} \text{ et } \mu = \int_0^\infty \bar{F}(x) dx$$

(une preuve de cette dernière égalité sera donnée en proposition 1.5.1).

F est donc la donnée principale du modèle (on verra plus loin qu'elle détermine la distribution correspondante dans le processus Y^*). C'est pour cette raison que par la suite, on fera référence à la distribution F .

1.1.4. Autres notations

Soit $N(Y_i^*)$ la variable aléatoire égale au nombre total des réparations successives durant le $i^{\text{ème}}$ cycle Y_i^* du processus Y^* , le cycle désignant la période située entre deux instants de renouvellement successifs.

Les variables aléatoires $N(Y_i^*)$ sont iid. On conviendra de les noter $N(Y^*)$.

Désignons par $C = \{C_j, j = 1, 2, \dots, N(Y^*)\}$ le processus des coûts aléatoires de réparation dans un cycle donné. Les C_j sont iid de moyenne finie avec respectivement L et l comme fonctions de répartition et de densité.

1.2. SEUIL DU COÛT DE RÉPARATION

Soit c_1 le coût d'une réparation parfaite.

Supposons que la performance Π d'une pièce qui subit une réparation est une fonction g du coût C de cette réparation, c'est-à-dire

$\Pi = g(C)$ où $C \in [0, c_1[$.

Supposons de plus que g est une fonction continue et croissante (dans le sens que chaque cent de plus consacré à la réparation a pour effet d'accroître la performance ou, dans le pire des cas, de la maintenir). On peut donc admettre qu'en dessous d'un certain seuil c_0 qui dépend de c_1 , aucune réparation parfaite ne peut raisonnablement plus être envisageable. En dessous de c_0 , on n'envisagera donc que des réparations imparfaites. On pose alors : $q = P(C \leq c_0) = L(c_0)$ où c_0 dépend de c_1 .

Cléroux, Dubuc et Tilquin (1979) définissent c_0 comme étant un certain pourcentage δ de c_1 , c'est-à-dire

$$c_0 = \delta c_1 \text{ où } 0 \leq \delta \leq 1 .$$

J'utiliserai cette forme de c_0 seulement dans les applications numériques au chapitre 5. Notons que dans cette forme, δ ne dépend pas de l'âge de la pièce (bien que la politique soit du type âge).

Le lecteur intéressé par le cas où δ est une fonction de l'âge de la pièce pourra consulter le modèle de Berg, Bienvenu et Cléroux (1986) qui est une extension du modèle de Cléroux, Dubuc et Tilquin (1979).

1.3. FORMES EXPLICITES DE F_p ET DE r_p

Elles ont été données dans Brown et Proschan (1983).

Proposition 1.3.1. *Soit F la distribution de la durée de vie du système qui ne subit que des réparations parfaites et r la fonction "taux de panne" associée à F , alors:*

$$r_p(t) = pr(t) , \tag{1.3.1}$$

$$\bar{F}_p(t) = [\bar{F}(t)]^p . \tag{1.3.2}$$

PREUVE. • Sachant qu'aucune réparation parfaite n'est intervenue sur $[0, t[$:

- la pièce qui fonctionne à l'instant t se comporte comme une pièce d'âge t et son taux de panne est $r(t)$.

- la pièce qui tombe en panne à l'instant t subit une réparation parfaite avec probabilité p et son taux de panne s'améliore pour devenir $r_p(t) = pr(t)$

$$\begin{aligned}
 \bullet \int_0^t r_p(y) dy &= \int_0^t \frac{f_p(y)}{F_p(y)} dy \\
 &= - \int_0^t \frac{[\overline{F}_p(y)]'}{\overline{F}_p(y)} dy \\
 &= - [\ln [\overline{F}_p(y)]]_0^t \\
 &= \ln [\overline{F}_p(0)] - \ln [\overline{F}_p(t)] \\
 &= - \ln [\overline{F}_p(t)] .
 \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\overline{F}_p(t) = e^{-\int_0^t r_p(y) dy} , \quad (1.3.3)$$

où r_p est la fonction taux de panne associée à F_p .

$$\begin{aligned}
 \overline{F}_p(t) &= e^{-\int_0^t [pr(y)] dy} \\
 &= \left[e^{-\int_0^t r(y) dy} \right]^p .
 \end{aligned}$$

Par analogie avec l'égalité (1.3.3) on a:

$$\overline{F}(t) = e^{-\int_0^t r(y) dy} .$$

On déduit finalement que :

$$\overline{F}_p(t) = [\overline{F}(t)]^p .$$

□

Remarque 1.3.1. *On notera que*

$$\lim_{p \rightarrow 1} F_p = F .$$

En effet, quand p tend vers 1, les réparations imparfaites deviennent inexistantes. Le processus Y (dont la distribution est F_p) se confond au processus X (dont la distribution est F)

On sait désormais que quand p est donné, F_p et r_p sont entièrement déterminés par les égalités (1.3.1) et (1.3.2).

1.4. FONCTION DE RÉPARTITION K_p DE Y^*

Proposition 1.4.1. *Pour $0 < p < 1$, la fonction de répartition K_p de Y^* est donnée par:*

$$K_p(y^*) = \begin{cases} F_p(y^*) & \text{si } y^* \leq T , \\ 1 & \text{si } y^* > T . \end{cases} \quad (1.4.1)$$

PREUVE.

$$\begin{aligned} K_p(y^*) &= P(Y^* < y^*) \\ &= P[\min(Y, T) < y^*] \end{aligned}$$

- Si $y^* \leq T$, alors:

$$\begin{aligned} [\min(Y, T) < y^*] &\implies \min(Y, T) \neq T \\ &\implies \min(Y, T) = Y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_p(y^*) &= P(Y < y^*) \\ &= F_p(y^*) . \end{aligned}$$

- Si $y^* > T$, alors, par définition du processus Y^* , l'événement $(Y^* < y^*)$ est toujours vrai et on a :

$$\begin{aligned} K_p(y^*) &= P(Y^* < y^*) \\ &= 1 . \end{aligned}$$

□

1.5. DURÉE DE VIE MOYENNE DE Y^*

Proposition 1.5.1.

$$E(Y^*) = \int_0^{+\infty} \bar{K}_p(t) dt \quad (1.5.1)$$

où $\bar{K}_p(t) = 1 - K_p(t)$

PREUVE. On sait que K_p est la fonction de répartition de Y^* . Soit k_p la fonction de densité de Y^* .

$$k_p(t) = [-\bar{K}_p(t)]'$$

$$\begin{aligned}
E(Y^*) &= \int_0^{+\infty} tk_p(t) dt \\
&= \underbrace{\int_0^a tk_p(t) dt}_{J(a)} + \int_a^{+\infty} tk_p(t) dt, \quad a > 1.
\end{aligned}$$

Intégrons $J(a)$ par parties.

$$u = t \implies du = dt$$

$$dv = k_p(t)dt \implies v = [-\bar{K}_p(t)]$$

$$\begin{aligned}
J(a) &= [-t\bar{K}_p(t)]_0^a + \int_0^a \bar{K}_p(t) dt \\
&= -a\bar{K}_p(a) + \int_0^a \bar{K}_p(t) dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(Y^*) &= \lim_{a \rightarrow +\infty} [J(a)] \\
&= \int_0^{+\infty} \bar{K}_p(t) dt - \lim_{a \rightarrow +\infty} [a\bar{K}_p(a)]
\end{aligned}$$

Il reste à montrer que $\lim_{a \rightarrow +\infty} [a\bar{K}_p(a)] = 0$

Soit $I(a) = \int_a^{+\infty} tk_p(t) dt$, $a > 1$.

$$\begin{aligned}
\left. \begin{array}{l} t \geq a \\ k_p(t) > 0 \end{array} \right\} &\implies tk_p(t) \geq ak_p(t) \\
&\implies \int_a^{+\infty} tk_p(t) dt \geq \int_a^{+\infty} ak_p(t) dt \\
&\implies I(a) \geq a\bar{K}_p(a).
\end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq a\bar{K}_p(a) \leq I(a) \\ \lim_{a \rightarrow \infty} [I(a)] = 0 \end{array} \right\} \implies \lim_{a \rightarrow \infty} [a\bar{K}_p(a)] = 0.$$

On en déduit que $E(Y^*) = \int_0^{+\infty} \bar{K}_p(t) dt$

□

Corollaire 1.5.1.

$$E(Y^*) = \int_0^T [\bar{F}(t)]^p dt$$

PREUVE. D'après l'égalité (1.4.1), on a:

$$\bar{K}_p(t) = \begin{cases} \bar{F}_p(t) & \text{si } t \leq T, \\ 0 & \text{si } t > T. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} E(Y^*) &= \int_0^{+\infty} \bar{K}_p(t) dt \\ &= \int_0^T \bar{F}_p(t) dt \\ &= \int_0^T [\bar{F}(t)]^p dt \text{ par (1.3.2)}. \end{aligned}$$

□

1.6. FRÉQUENCE DES RÉPARATIONS PARFAITES SUR UN HORIZON INFINI

Proposition 1.6.1. *Soit $N_1(t)$ la variable aléatoire égale au nombre de réparations parfaites dans $[0, t]$ durant le processus Y^* . Alors*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{E[N_1(t)]}{t} \right) = \frac{1 - [\bar{F}(T)]^p}{\int_0^T [\bar{F}(t)]^p dt} \quad (1.6.1)$$

PREUVE. Soit $N(t)$ le nombre de renouvellements dans $[0, t]$.

Associons au processus Y^* , le processus $R^* = \{R_i^*, i = 1, 2, \dots\}$ décrit ci-dessous :

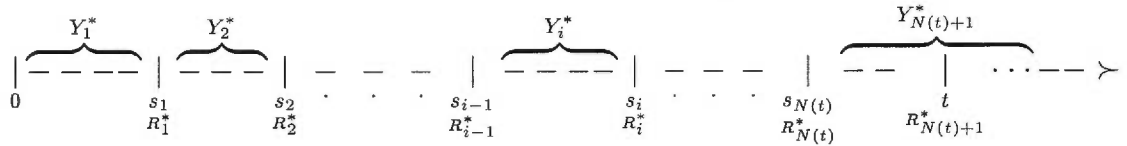


FIG. 1.6.1. Processus des réparations parfaites associé au processus Y^*

où les s_i sont les instants de renouvellement et :

$$\forall i, R_i^* = \begin{cases} 1 & \text{si } Y_i^* = Y_i, \\ 0 & \text{si } Y_i^* = T. \end{cases}$$

Le processus R^* compte les réparations parfaites. Sur un horizon infini (c'est-à-dire quand $t \rightarrow +\infty$), $s_{N(t)} \xrightarrow{p.s} t$. Donc sur un horizon infini, l'intervalle $[s_{N(t)}, t]$ se réduit à la borne $s_{N(t)}$.

Sur un horizon infini, on peut dire avec probabilité 1 qu'il n'y a aucune réparation parfaite sur $[s_{N(t)}, t]$.

$$\text{Donc sur un horizon infini, } N_1(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} R_i^*.$$

Avec les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} N_1(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} R_i^*, \\ E(Y^*) \text{ et } E(R^*) \text{ sont finis.} \end{cases}$$

On peut utiliser le résultat (ii) du théorème 3.16 de Ross (1970).

Ce résultat est :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{E[N_1(t)]}{t} \right) = \frac{E(R^*)}{E(Y^*)}.$$

$$\begin{aligned}
\text{Or } E(R^*) &= P(Y^* = Y) \\
&= P(Y \leq T) \\
&= F_p(T) . \\
\text{Donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{E[N_1(t)]}{t} \right) &= \frac{F_p(T)}{E(Y^*)} \\
&= \frac{1 - [\overline{F}(T)]^p}{\int_0^T [\overline{F}(t)]^p dt} .
\end{aligned}$$

□

Dans le processus Y^* , $\frac{1 - [\overline{F}(T)]^p}{\int_0^T [\overline{F}(t)]^p dt}$ est le nombre moyen de réparations parfaites par unité de temps sur un horizon infini. C'est une fonction du couple (p, T) connue quand F est donnée.

1.7. FRÉQUENCE DES REMPLACEMENTS PRÉVENTIFS SUR UN HORIZON INFINI

Proposition 1.7.1. *Soit $N_2(t)$ la variable aléatoire égale au nombre de remplacements préventifs dans $[0, t]$ durant le processus Y^* . Alors*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{E[N_2(t)]}{t} \right) = \frac{[\overline{F}(T)]^p}{\int_0^T [\overline{F}(t)]^p dt} . \quad (1.7.1)$$

PREUVE. Soit $N(t)$ le nombre de renouvellements dans $[0, t]$, c'est-à-dire $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$.

Associons au processus Y^* , le processus $Z^* = \{Z_i^*, i = 1, 2, \dots\}$ décrit ci-dessous :

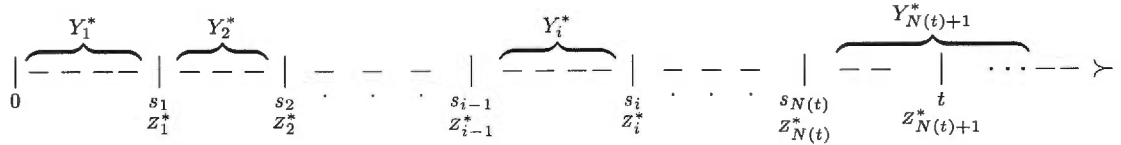


FIG. 1.7.1. Processus des remplacements préventifs associé au processus Y^*

où les s_i sont les instants de renouvellement et :

$$\forall i, Z_i^* = \begin{cases} 1 & \text{si } Y_i^* = T, \\ 0 & \text{si } Y_i^* = Y_i. \end{cases}$$

Le processus Z^* compte les remplacements préventifs. Sur un horizon infini (c'est-à-dire quand $t \rightarrow +\infty$), $s_{N(t)} \xrightarrow{p.s.} t$. Donc sur un horizon infini, l'intervalle $[s_{N(t)}, t]$ se réduit à la borne $s_{N(t)}$.

Sur un horizon infini, on peut dire avec probabilité 1 qu'il n'y a aucun remplacement préventif sur $[s_{N(t)}, t]$.

$$\text{Donc sur un horizon infini, } N_2(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i^*.$$

Avec les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} N_2(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i^*, \\ E(Y^*) \text{ et } E(Z^*) \text{ sont finis.} \end{cases}$$

Comme dans la preuve précédente,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{E[N_2(t)]}{t} \right) = \frac{E(Z^*)}{E(Y^*)}.$$

$$\begin{aligned}
\text{Or } E(Z^*) &= P(Y^* = T) \\
&= 1 - P(Y^* < T) \\
&= 1 - P(Y < T) \\
&= 1 - F_p(T) \\
&= \bar{F}_p(T) . \\
\text{Donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{E[N_2(t)]}{t} \right) &= \frac{\bar{F}_p(T)}{E(Y^*)} \\
&= \frac{[\bar{F}(T)]^p}{\int_0^T [\bar{F}(t)]^p dt} .
\end{aligned}$$

□

Dans le processus Y^* , $\frac{[\bar{F}(T)]^p}{\int_0^T [\bar{F}(t)]^p dt}$ est le nombre moyen de remplacements préventifs par unité de temps sur un horizon infini. C'est une fonction du couple (p, T) , connue quand F est donnée.

Remarque 1.7.1. La variable aléatoire $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ est le nombre de renouvellements dans $[0, t]$ pour le processus Y^* . À partir des égalités (1.6.1) et (1.7.1), on retrouve le théorème élémentaire du renouvellement qui dit que le nombre moyen de renouvellements par unité de temps sur un horizon infini est égal à $\frac{1}{E(Y^*)}$ (Brown et Proschan, 1983, Théorème 2.6 page 55).

En effet, ce nombre moyen est :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{E[N(t)]}{t} \right) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{E[N_1(t)]}{t} \right) + \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{E[N_2(t)]}{t} \right) \\ &= \frac{F_p(T) + \bar{F}_p(T)}{E(Y^*)} \\ &= \frac{1}{E(Y^*)}. \end{aligned}$$

1.8. COÛT MOYEN DE RÉPARATION PAR UNITÉ DE TEMPS SUR UN HORIZON INFINI

Proposition 1.8.1. Soit $W(t)$ la variable aléatoire égale au coût total des réparations dans $[0, t]$ durant le processus Y^* et soit W^* le processus des coûts de réparation associé au processus Y^* . Alors,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{E[W(t)]}{t} \right) = \frac{E(W^*)}{\int_0^T [\bar{F}(t)]^p dt}. \quad (1.8.1)$$

PREUVE. $N(t)$ étant le nombre de renouvellements dans $[0, t]$ et

$W^* = \{W_i^*, i = 1, 2, \dots, \}$ étant le processus des coûts de réparation associé à $Y^* = \{Y_i^*, i = 1, 2, \dots, \}$, on peut schématiser par la figure suivante.

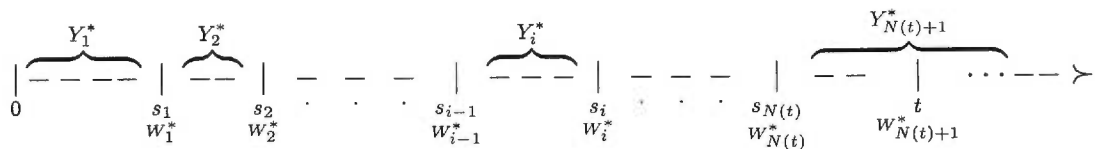


FIG. 1.8.1. Processus des coûts de réparation associé au processus Y^*

où :

- les s_i sont les instants de renouvellement,
- les W_i^* sont les coûts de réparation durant les Y_i^* correspondants.

Sur un horizon infini (c'est-à-dire quand $t \rightarrow +\infty$), $s_{N(t)} \xrightarrow{p.s} t$

Donc sur un horizon infini, on peut dire avec probabilité 1 que :

$$W_{N(t)+1}^* = 0 .$$

Sur un horizon infini, $W(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} W_i$.

Avec les hypothèses suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} W(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} W_i , \\ E(Y^*) \text{ et } E(W^*) \text{ sont finis} , \end{array} \right.$$

le théorème de Ross précédemment évoqué permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{E[W(t)]}{t} \right) &= \frac{E(W^*)}{E(Y^*)} \\ &= \frac{E(W^*)}{\int_0^T [\bar{F}(t)]^p dt} . \end{aligned}$$

□

Dans le processus Y^* , $\frac{E(W^*)}{\int_0^T [\bar{F}(t)]^p dt}$ est le coût moyen de réparation par unité de temps sur un horizon infini. Mais ce coût moyen n'est pas encore entièrement déterminé par les données F et p du modèle. En effet, $E(W^*)$ reste encore à expliciter.

Ceci sera fait *progressivement* dans les prochains chapitres.

Chapitre 2

FONCTION DE COÛT

On rappelle que :

- l'utilisation du mot "réparation" tout seul signifie "réparation imparfaite";
- $q = 1 - p = L(c_0)$, où L est la fonction de répartition du processus C des coûts de réparation dans un cycle donné;
- c_1 est le coût d'une réparation parfaite;
- $N_1(t)$ est le nombre de réparations parfaites dans $[0, t]$;
- $N_2(t)$ est le nombre de remplacements préventifs dans $[0, t]$;
- $W(t)$ est le coût des réparations dans $[0, t]$.

Désignons maintenant par c_2 , le coût d'un remplacement préventif à l'âge T avec $c_2 < c_1$, et par $C(t)$ le coût total dans $[0, t]$. Alors :

$$\underbrace{C(t)}_{\text{coût total}} = \underbrace{c_1 N_1(t)}_{\text{coût des réparations parfaites}} + \underbrace{c_2 N_2(t)}_{\text{coût des rempl. prév.}} + \underbrace{W(t)}_{\text{coût des réparations}}, \quad (2.0.2)$$

où $N_1(t)$, $N_2(t)$ et $W(t)$ sont des variables aléatoires qui dépendent de q et de T .

Le problème (à étudier au chapitre 4) est de minimiser par rapport à T , le coût moyen par unité de temps sur un horizon infini, c'est-à-dire minimiser par rapport à T , l'expression

$$B(q, T) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{E[C(t)]}{t} \right)$$

Dans le présent chapitre, on se contente de donner à $B(q, T)$ des formes de plus en plus explicites.

2.1. PREMIÈRE FORME DE $B(q, T)$

Corollaire 2.1.1. *W^* étant le processus des coûts de réparation associé au processus Y^* , alors:*

$$B(q, T) = \frac{(c_1 - c_2) \left[1 - [\overline{F}(t)]^{1-q} \right] + c_2 + E(W^*)}{\int_0^T [\overline{F}(t)]^{1-q} dt} \quad (2.1.1)$$

PREUVE.

$$B(q, T) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{E[C(t)]}{t} \right) = c_1 \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{E[N_1(t)]}{t} \right) + c_2 \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{E[N_2(t)]}{t} \right) + \frac{E[W(t)]}{t}$$

En remplaçant $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{E[N_1(t)]}{t} \right)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{E[N_2(t)]}{t} \right)$ et $\frac{E[W(t)]}{t}$ par leurs expressions respectives dans les égalités (1.6.1), (1.7.1) et (1.8.1), on aboutit aisément au résultat cherché.

□

Pour mieux expliciter $B(q, T)$, il suffit de donner à $E(W^*)$ des formes de plus en plus explicites.

2.2. PREMIÈRE FORME DE $E(W^*)$

Les notations annoncées dans la sous-section 1.1.4 s'appliquent particulièrement ici.

Proposition 2.2.1. *Soit $N(Y^*)$ la variable aléatoire égale au nombre de réparations successives durant un cycle du processus Y^* .*

Désignons par

$$C = \{C_j, j = 1, 2, \dots, N(Y^*)\}$$

le processus des coûts aléatoires de réparation associé à ce cycle, puis par $(C|C \leq c_0)$ la variable aléatoire égale au coût d'une réparation étant donné qu'on répare. On a alors :

$$E(W^*) = E[N(Y^*)].E(C|C \leq c_0). \quad (2.2.1)$$

PREUVE. • On a

$$W^* = \sum_{j=1}^{N(Y^*)} (C_j | C_j \leq c_0)$$

les C_j étant iid de moyenne finie.

- $N(Y^*)$ est une variable aléatoire positive entière telle que l'événement $\{N(Y^*) = n\}$ est indépendant de $C_{n+1}, C_{n+2}, \dots, \forall n$.

D'après l'équation de Wald, voir définition 3.2 et théorème 3.6 dans Ross (1970), on a l'égalité :

$$E(W^*) = E[N(Y^*)].E(C|C \leq c_0)$$

□

Pour expliciter $E(W^*)$, il faut expliciter $E(C|C \leq c_0)$ et $E[N(Y^*)]$

2.3. FORME EXPLICITE DE $E(C|C \leq c_0)$

Proposition 2.3.1. *Le coût moyen d'une réparation étant donné qu'on répare est :*

$$E(C|C \leq c_0) = \frac{c_m}{q}, \quad (2.3.1)$$

où $c_m = \int_0^{c_0} xl(x)dx$.

PREUVE. La fonction de densité l de C est définie sur $]0, +\infty[$. La fonction de densité l_{c_0} de $(C|C \leq c_0)$ est la densité tronquée de C sur $]0, c_0]$. Elle est définie par : $\forall c \in]0, c_0], l_{c_0} = kl(c)$ où k est tel que $\int_0^{c_0} l_{c_0}(c) dc = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } k \int_0^{c_0} l(c) dc = 1 &\implies kL(c_0) = 1 \\ &\implies kq = 1 \\ &\implies k = \frac{1}{q}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Nous avons donc que } \forall c \in]0, c_0], l_{c_0}(c) &= \frac{1}{q}l(c), \\ \text{et } E(C|C \leq c_0) &= \int_0^{c_0} cl_{c_0}(c) dc \\ &= \frac{1}{q} \int_0^{c_0} cl(c) dc \\ &= \frac{c_m}{q}. \end{aligned}$$

□

2.4. PREMIÈRE FORME DE $E[N(Y^*)]$

Proposition 2.4.1. *Soit M_n la variable aléatoire égale à l'instant de la $n^{\text{ème}}$ panne durant Y^* . Alors,*

$$E[N(Y^*)] = \sum_{n=1}^{\infty} q^n P(M_n < T) \quad (2.4.1)$$

PREUVE. On rappelle que le vocabulaire «durant Y^* » signifie «durant un cycle» ou encore «entre deux instants de renouvellement consécutifs». Désignons par A , B , D , E les événements suivants:

A : «Durant Y^* , n pannes consécutives ont subi des réparations imparfaites».

B : «La $(n + 1)^{\text{ème}}$ panne a subi une réparation parfaite».

D : «Un remplacement préventif a eu lieu après la $n^{\text{ème}}$ panne».

E : «Aucun remplacement préventif n'a eu lieu après la $n^{\text{ème}}$ panne».

Alors, l'événement $[N(Y^*) = n]$ est donné par :

$$\begin{aligned} [N(Y^*) = n] &= A \cap [D \cup (E \cap B)] , \\ &= (A \cap D) \cup [A \cap (E \cap B)] . \end{aligned}$$

On vérifie aisément que les événements $(A \cap D)$ et $[A \cap (E \cap B)]$ sont disjoints puisque les événements D et E le sont. Désignons par M_j la variable aléatoire égale à l'instant de la $j^{\text{ème}}$ panne durant Y^* , avec $M_0 = 0$.

Remarque 2.4.1. *L'indice j décrit la séquence des réparations dans un cycle de renouvellement donné.*

Les événements D et E sont donnés par :

$$\begin{aligned} D &= (M_n < T) \cap (M_{n+1} > T) , \\ E &= (M_{n+1} < T) . \end{aligned}$$

Des trois précédentes égalités, de l'indépendance des événements A et D d'une part et des événements A et $(E \cap B)$ d'autre part, on déduit l'égalité suivante :

$$P[N(Y^*) = n] = P(A)P[(M_n < T) \cap (M_{n+1} > T)] + P(A)P[(M_{n+1} < T) \cap B].$$

Explicitons d'abord les termes du membre de droite de cette dernière égalité.

$$\begin{aligned}
 \bullet P(A) &= q^n . \\
 P\left[(M_n < T) \cap (M_{n+1} > T)\right] &= P(M_n < T) \cdot P\left[(M_{n+1} > T) | (M_n < T)\right] , \\
 &= P(M_n < T) \cdot \left[1 - P\left[(M_{n+1} < T) | (M_n < T)\right]\right] . \\
 \text{Or } P\left[(M_{n+1} < T) | (M_n < T)\right] &= \frac{P\left[(M_n < T) \cap (M_{n+1} < T)\right]}{P(M_n < T)} , \\
 &= \frac{P(M_{n+1} < T)}{P(M_n < T)} . \text{ Alors on a :}
 \end{aligned}$$

$$\bullet P\left[(M_n < T) \cap (M_{n+1} > T)\right] = P(M_n < T) - P(M_{n+1} < T) .$$

Puisque $P(B) = 1 - q$ et que E et B sont indépendants, alors on a :

$$\begin{aligned}
 \bullet P\left[(M_{n+1} < T) \cap B\right] &= P(M_{n+1} < T) \cdot P(B) , \\
 &= (1 - q)P(M_{n+1} < T) .
 \end{aligned}$$

On peut maintenant écrire que :

$$P\left[N(Y^*) = n\right] = q^n P(M_n < T) - q^n P(M_{n+1} < T) + q^n (1 - q) P(M_{n+1} < T) .$$

$$P\left[N(Y^*) = n\right] = q^n P(M_n < T) - q^{n+1} P(M_{n+1} < T) . \quad (2.4.2)$$

$$E[N(Y^*)] = \sum_{n=1}^{\infty} n P\left[N(Y^*) = n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} n q^n P(M_n < T) - \sum_{n=1}^{\infty} n q^{n+1} P(M_{n+1} < T)$$

$$\text{avec } n q^{n+1} P(M_{n+1} < T) = (n + 1) q^{n+1} P(M_{n+1} < T) - q^{n+1} P(M_{n+1} < T)$$

$$E[N(Y^*)] = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} nq^n P(M_n < T) - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)q^{(n+1)}P(M_{n+1} < T) \\ + \\ \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n+1)}P(M_{n+1} < T) \end{cases}$$

$$E[N(Y^*)] = \left[\sum_{n=1}^{\infty} nq^n P(M_n < T) - \sum_{n=2}^{\infty} nq^n P(M_n < T) \right] + \sum_{n=2}^{\infty} q^n P(M_n < T)$$

$$E[N(Y^*)] = qP(M_1 < T) + \sum_{n=2}^{\infty} q^n P(M_n < T) = \sum_{n=1}^{\infty} q^n P(M_n < T) .$$

□

Pour expliciter $E[N(Y^*)]$, il faut d'abord expliciter $P(M_n < T)$.

2.4.1. Forme explicite de $P(M_n < T)$

La détermination de la forme explicite de $P(M_n < T)$ nécessitera cinq étapes de calcul.

2.4.1.1. Durée de vie résiduelle d'un système d'âge s

Proposition 2.4.2. *Soit X_s la variable aléatoire égale à la durée de vie du système qui à l'âge s subit une réparation et F_s la fonction de répartition de X_s . Alors, on a les deux égalités suivantes :*

$$F_s(t) = \frac{F(s+t) - F(s)}{\bar{F}(s)} . \quad (2.4.3)$$

Si dt est infinitésimal,

$$F_s(dt) = r(s)dt \quad (2.4.4)$$

(c'est la probabilité qu'il y ait une seule panne dans $[s, s+dt]$).

PREUVE. Démontrons d'abord l'égalité (2.4.3)

De $[F_s(t) = P(X_s \leq t)]$ et $[(X_s \leq t) = [(X \leq s+t)|(X > s)]]$, on tire :

$$F_s(t) = \frac{F(s+t) - F(s)}{\bar{F}(s)}$$

Démontrons maintenant l'égalité (2.4.4)

On sait que :

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{F(s+dt) - F(s)}{dt} = f(s) ,$$

ou encore que pour dt infinitésimal, on a :

$$\frac{F(s+dt) - F(s)}{dt} = f(s) .$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } F(s+t) - F(s) &= f(s)dt \\ \text{et } F_s(t) &= \frac{F(s+t) - F(s)}{\bar{F}(s)} \\ &= \frac{f(s)}{\bar{F}(s)} \\ &= r(s)dt . \end{aligned}$$

□

2.4.1.2. Première forme de $P(M_n < T)$

Proposition 2.4.3.

$$P(M_n < T) = \int_{m_1}^{m_2} \int_{m_2}^{m_3} \cdots \int_{m_n}^T r(t_1) \cdots r(t_{n-1}) f(t_n) dt_1 \cdots dt_n , \quad (2.4.5)$$

où (m_1, m_2, \dots, m_n) décrit le domaine

$$\Theta = \{(m_1, m_2, \dots, m_n) / 0 \leq m_1 \leq \dots \leq m_n < T = m_{n+1}\} .$$

PREUVE.

$$(M_n < T) = \bigcap_{j=1}^n (M_j \in [m_j, m_{j+1}[) ,$$

où (m_1, m_2, \dots, m_n) décrit Θ et les évènements $(M_j \in [m_j, m_{j+1}[)$ sont indépendants.

Alors,

$$P(M_n < T) = \prod_{j=1}^n P(M_j \in [m_j, m_{j+1}[) .$$

- Calculons d'abord $P(M_j \in [m_j, m_{j+1}[)$ pour un j donné.

Considérons une subdivision de l'intervalle $[m_j, m_{j+1}[$ d'amplitude a_j en k_j intervalles d'amplitude h_j où $k_j = \sup \left\{ \eta \in \mathbb{N} / \eta \leq \frac{a_j}{h_j} \right\}$ (c'est-à-dire que k_j est la partie entière de $\frac{a_j}{h_j}$) (voir figure).

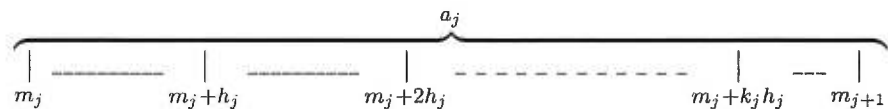


FIG. 2.4.1. Subdivision de l'intervalle $[m_j, m_{j+1}[$ en k_j intervalles d'amplitude h_j

On sait qu'en prenant des subdivisions de plus en plus fines (c'est-à-dire quand $h_j \rightarrow 0$) alors: $k_j \rightarrow \infty$ et $m_j + k_j h_j \rightarrow m_{j+1}$

$$\begin{aligned}
[m_j, m_j + k_j h_j[&= \bigcup_{z=0}^{k_j-1} [m_j + z h_j, m_j + (z+1) h_j[\\
[m_j, m_{j+1}[&= \lim_{\substack{h_j \rightarrow 0 \\ k_j \rightarrow \infty}} [m_j, m_j + k_j h_j[\\
&= \lim_{\substack{h_j \rightarrow 0 \\ k_j \rightarrow \infty}} \bigcup_{z=0}^{k_j-1} [m_j + z h_j, m_j + (z+1) h_j[\\
&= \lim_{\substack{h_j \rightarrow 0 \\ k_j \rightarrow \infty}} \bigcup_{z=0}^{k_j-1} [u_j, u_j + h_j[\text{ où } u_j = m_j + z h_j .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Ainsi, } P(M_j \in [m_j, m_{j+1}[) &= \lim_{\substack{h_j \rightarrow 0 \\ k_j \rightarrow \infty}} P \left[\bigcup_{z=0}^{k_j-1} (M_j \in [u_j, u_j + h_j[) \right] \\
&= \lim_{\substack{h_j \rightarrow 0 \\ k_j \rightarrow \infty}} \sum_{z=0}^{k_j-1} P(M_j \in [u_j, u_j + h_j[) .
\end{aligned}$$

Comme h_j est infinitésimal, on a :

$$\begin{aligned}
P(M_j \in [u_j, u_j + h_j[) &= P(X_{u_j} < h_j) \\
&= F_{u_j}(h_j) \\
&= r(u_j) h_j \text{ par (2.4.4).}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Donc } P(M_j \in [m_j, m_{j+1}[) &= \lim_{h_j \rightarrow 0} \sum_{z=0}^{\infty} r(u_j) h_j \\
&= \lim_{h_j \rightarrow 0} \sum_{z=0}^{\infty} r(m_j + zh_j) h_j \\
&= \int_{m_j}^{m_{j+1}} r(t_j) dt_j,
\end{aligned}$$

où pour tout $t_j \in [m_j, m_{j+1}[$, $r(t_j) = \frac{f(t_j)}{\overline{F}(t_j)}$.

En particulier,

$$P(M_n \in [m_n, m_{n+1}[) = P(M_n \in [m_n, T[) = \int_{m_n}^T r(t_n) dt_n = \int_{m_n}^T \frac{f(t_n)}{\overline{F}(t_n)} dt_n.$$

Par ailleurs, le système devant survivre à tout $t_n \in [m_n, T[$ (de façon qu'on ait exactement n pannes), alors, $\overline{F}(t_n) = 1$

$$P(M_n \in [m_n, m_{n+1}[) = \int_{m_n}^T f(t_n) dt_n.$$

$$\text{et } P(M_j \in [m_j, m_{j+1}[) = \begin{cases} \int_{m_j}^{m_{j+1}} r(t_j) dt_j & \text{si } j \in \{1, \dots, (n-1)\} , \\ \int_{m_n}^T f(t_n) dt_n & \text{si } j = n . \end{cases}$$

- Écrivons enfin $P(M_n < T)$

$$\begin{aligned}
P(M_n < T) &= \prod_{j=1}^n P(M_j \in [m_j, m_{j+1}[[) \\
&= \left[\prod_{j=1}^{n-1} \underbrace{P(M_j \in [m_j, m_{j+1}[[)}_{\int_{m_j}^{m_{j+1}} r(t_j) dt_j} \right] \cdot \underbrace{[P(M_n \in [m_n, T[)]]}_{\int_{m_n}^T f(t_n) dt_n} \\
&= \int_{m_1}^{m_2} \int_{m_2}^{m_3} \cdots \int_{m_n}^T r(t_1) \cdots r(t_{n-1}) f(t_n) dt_1 \cdots dt_n .
\end{aligned}$$

□

2.4.1.3. Deuxième forme de $P(M_n < T)$

Désignons par $(g_n)_{n \geq 2}$ la suite récurrente de fonctions définie par :

$$\begin{cases} g_2(t) = \int_0^t r(m) dm = -\ln [\bar{F}(t)] \\ \forall n > 2, g_n(t) = \int_0^t g_{n-1}(m) r(m) dm \end{cases} \quad (2.4.6)$$

Corollaire 2.4.1.

$$P(M_n < T) = \int_0^T g_n(m_n) f(m_n) dm_n, \quad n \geq 2. \quad (2.4.7)$$

PREUVE.

$$P(M_n < T) = \int_{\Theta} r(m_1) \cdots r(m_{n-1}) dm_1 \cdots dm_n,$$

où Θ est obtenu de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
&m_n \text{ décrit } [0, T], \\
&m_{n-1} \text{ décrit } [0, m_n], \\
&\vdots \\
&m_1 \text{ décrit } [0, m_2]
\end{aligned}$$

$$P(M_n < T) = \int_0^T \left[\underbrace{\int_0^{m_n} \cdots \int_0^{m_2} r(m_1) \cdots r(m_{n-1}) dm_1 \cdots dm_{n-1}}_{g_n(m_n)} \right] f(m_n) dm_n .$$

□

2.4.1.4. Forme explicite de $g_n(m_n)$

Proposition 2.4.4. *Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a :*

$$g_n(m_n) = \frac{1}{(n-1)!} [-\ln \bar{F}(m_n)]^{n-1} . \quad (2.4.8)$$

PREUVE. Montrons par récurrence la propriété

$$\mathcal{P} : \forall n \geq 2, g_n(m_n) = \frac{1}{(n-1)!} [-\ln \bar{F}(m_n)]^{n-1} .$$

- $g_2(m_2) = -\ln \bar{F}(m_2)$ (par (2.4.6)).
 $= \frac{1}{(2-1)!} [-\ln \bar{F}(m_2)]^{2-1} .$

Donc \mathcal{P} est vraie au rang $n = 2$.

- Supposons que \mathcal{P} est vraie jusqu'à un rang quelconque n , on admet en particulier l'égalité (2.4.7). Montrons qu'alors, \mathcal{P} est vraie au rang $(n+1)$, ou encore que $g_{n+1}(m_{n+1}) = \frac{1}{n!} [-\ln \bar{F}(m_{n+1})]^n$.

$$\begin{aligned}
g_{n+1}(m_{n+1}) &= \int_0^{m_{n+1}} g_n(m) r(m) dm \\
&= \int_0^{m_{n+1}} \frac{1}{(n-1)!} [-\ln \bar{F}(m_n)]^{n-1} r(m_n) dm_n \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{m_{n+1}} [-\ln \bar{F}(m_n)]^{n-1} [-\ln \bar{F}(m_n)]' dm_n \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \frac{1}{n} [[-\ln \bar{F}(m_n)]^n]_0^{m_{n+1}} \\
&= \frac{1}{n!} [-\ln \bar{F}(m_{n+1})]^n .
\end{aligned}$$

Donc \mathcal{P} est vraie au rang $n + 1$.

□

2.4.1.5. Forme explicite de $P(M_n < T)$

Corollaire 2.4.2.

$$P(M_n < T) = \int_0^T \frac{[-\ln \bar{F}(m)]^{n-1}}{(n-1)!} f(m) dm \quad (2.4.9)$$

PREUVE. En utilisant l'égalité (2.4.8) dans l'égalité (2.4.7), on aboutit aisément à l'égalité (2.4.9). □

2.5. FORMES EXPLICITES DE $E[N(Y^*)]$, $E(W^*)$ ET $B(q, T)$

Corollaire 2.5.1.

$$E[N(Y^*)] = \frac{q}{1-q} \left[1 - [\bar{F}(T)]^{1-q} \right] \quad (2.5.1)$$

PREUVE. Soit (v_n) la série numérique à termes positifs tels que $v_n = \frac{k^{(n-1)}}{(n-1)!}$ où $k = |\ln \bar{F}(T)|$ et $T < \infty$.

Il est évident que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{v_{n+1}}{v_n} \right) = 0 < 1$, donc que (v_n) est une série numérique convergente.

Soit la série de fonctions (u_n) définie sur $[0, T]$ par :

$$u_n(t) = \frac{q^n [-\ln \bar{F}(T)]^{n-1}}{(n-1)!} f(t) .$$

À partir des doubles inégalités $0 \leq q \leq 1$, $0 \leq f(t) \leq 1$ et $0 \leq F(t) \leq F(T)$, on vérifie aisément que :

$\forall t \in [0, T]$, $|u_n(t)| \leq v_n$ où, on le sait déjà, (v_n) est une série numérique convergente.

Donc la série $(u_n(t))$ converge normalement sur $[0, T]$. Comme la convergence normale est une condition suffisante de convergence uniforme, alors la série $(u_n(t))$ converge uniformément sur $[0, T]$ vers sa somme $u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)$, donc la série de terme général $w_n(T) = \int_0^T u_n(t) dt$ converge uniformément sur $[0, T]$ vers $\int_0^T u(t) dt$.

Cela se traduit par $\sum_{n=1}^{\infty} w_n(T) = \int_0^T u(t) dt$,

ou encore par $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T u_n(t) dt = \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \right) dt$.

En utilisant l'égalité (2.4.9) dans l'égalité (2.4.1), on obtient:

$$\begin{aligned} E[N(Y^*)] &= \sum_{n=1}^{\infty} q^n \int_0^T \frac{[-\ln \bar{F}(t)]^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt , \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T u_n(t) dt , \\ &= \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \right) dt \text{ par ce qui précède,} \\ &= \int_0^T qS(t)f(t) dt , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{où } S(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[-q \ln \bar{F}(t)]^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[-q \ln \bar{F}(t)]^n}{n!} \\
&= e^{-q \ln \bar{F}(t)} \\
&= [\bar{F}(t)]^{-q}, \\
E[N(Y^*)] &= \int_0^T -q [\bar{F}(t)]^{-q} [\bar{F}(t)]' dt \\
&= -q \left[\frac{[\bar{F}(t)]^{1-q}}{1-q} \right]_0^T \\
&= \frac{q}{1-q} \left[1 - [\bar{F}(T)]^{1-q} \right].
\end{aligned}$$

□

Corollaire 2.5.2. Soit $c_m = \int_0^{c_0} xl(x)dx$. Alors, on a :

$$E(W^*) = \frac{c_m}{1-q} \left[1 - [\bar{F}(T)]^{1-q} \right]. \quad (2.5.2)$$

PREUVE. En utilisant les égalités (2.3.1) et (2.5.1) dans l'égalité (2.2.1), on obtient l'égalité (2.5.2).

□

Corollaire 2.5.3. Le coût moyen par unité de temps sur un horizon infini est :

$$B(q, T) = \frac{\left(c_1 - c_2 + \frac{c_m}{1-q} \right) \left(1 - [\bar{F}(T)]^{1-q} \right) + c_2}{\int_0^T [\bar{F}(t)]^{1-q} dt}, \quad (2.5.3)$$

où $0 < q < 1$ et $c_m = \int_0^{c_0} xl(x)dx$.

PREUVE. En utilisant l'égalité (2.5.2) dans l'égalité (2.1.1), on obtient l'égalité (2.5.3)

□

2.6. COMPARAISON AVEC D'AUTRES ÉTUDES

2.6.1. $B(q, T)$ comme fonction de q et de T

- Une étude analogue réalisée par Cléroux, Dubuc et Tilquin (1979) a conduit à la même expression de $B(q, T)$ (voir égalité (21), page 1162 de la dite référence)

- Une autre étude menée par Beichelt (1993) a conduit au même résultat (voir le modèle 7 de la dite référence, égalité (22), page 59). Dans cet article, l'auteur désigne (en fin de page 51) par c_m le coût moyen d'une réparation étant donné qu'on répare. Cela correspond exactement à $E(C|C \leq c_0)$ dans (2.3.1) qui contient une constante que je note c_m et qui est définie par $c_m = \int_0^{c_0} xl(x)dx$.

2.6.2. $B(q, T)$ comme fonction de T

- Quand $T \rightarrow +\infty$, les pannes interviennent avant T unités de temps. Mon modèle se retrouve alors dans un contexte sans remplacement préventif et se confond à celui étudié par Brown et Prochan (1983). Le coût correspondant est

$$B(q, \infty) = \frac{c_1 + \frac{c_m}{1-q}}{\int_0^{\infty} [\bar{F}(t)]^{1-q} dt}. \quad (2.6.1)$$

Dans cet article, les auteurs n'ont pas étudié la fonction de coût. Toutefois, ils ont étudié la distribution F_p entre les réparations parfaites et sa relation avec F . J'ai déjà utilisé des résultats de cette étude (égalités (1.3.1) et (1.3.2))

Dans le présent contexte ($T \rightarrow +\infty$) qui reviendra plus tard au chapitre 4, j'utiliserai un autre résultat de cet article.

• Le même contexte sans remplacement préventif a aussi été étudié par Beichelt (1993). Il traite de la fonction de coût. Dans son modèle numéro 6, pages 56 et 57, la probabilité p d'effectuer une réparation est une fonction du temps. Lorsque p est une constante (comme dans mon modèle), le coût moyen par unité de temps sur un horizon infini est donné par l'égalité (14) de la référence. Cette égalité correspond à l'égalité (2.6.1). Je rappelle que pour l'auteur, $c_m = E(C|C \leq c_0)$, ce que moi je désigne par $\frac{c_m}{q}$ où $c_m = \int_0^{c_0} xl(x)dx$.

2.6.3. $B(q, T)$ comme fonction de q

Rappelons que l'expression du coût moyen par unité de temps sur un horizon infini, $B(q, T)$ est valide pour q appartenant à l'intervalle $]0, 1[$.

Il serait donc intéressant d'étudier le comportement de $B(q, T)$ aux voisinages de 0 et de 1 puis de comparer les résultats obtenus à ceux établis dans d'autres études.

2.6.3.1. Comportement de $B(q, T)$ quand $q \rightarrow 0$

Quand q tend vers 0, on se retrouve à la limite dans un contexte où aucune réparation (imparfaite) n'est effectuée. Dans un tel contexte, le coût moyen de réparation sachant qu'on répare, $E(C|C \leq c_0)$, est nul. Soit, d'après l'égalité (2.3.1), $c_m = 0$. Il n'y a donc que des réparations parfaites, théoriquement équivalentes à des remplacements par des pièces identiques neuves.

À la limite, on s'attend donc à obtenir le modèle classique du remplacement préventif basé sur l'âge tel qu'initié par Barlow et Proschan (1965).

En utilisant $c_m = 0$ dans l'égalité (2.5.3), on trouve :

$$\lim_{q \rightarrow 0} [B(q, T)] = \frac{(c_1 - c_2) F(T) + c_2}{\int_0^T \overline{F}(t) dt}$$

Cette expression est bien celle du coût moyen par unité de temps sur un horizon infini correspondant au modèle classique précédemment cité.

2.6.3.2. Comportement de $B(q, T)$ quand $q \rightarrow 1$

Quand q tend vers 1, on se retrouve à la limite dans un contexte où toutes les pannes subissent systématiquement des réparations minimales à la panne.

À la limite, on s'attend donc à obtenir la politique du remplacement préventif périodique avec réparation minimale à la panne, politique initiée par Barlow et Hunter (1960) à la page 96 sous la désignation "Policy II". La même politique est encore présentée dans Barlow et Proschan (1965) aux pages 96 et 97.

Vérifions maintenant que $\lim_{q \rightarrow 1} [B(q, T)]$ est le coût moyen par unité de temps correspondant au modèle cité précédemment.

Si l'on pose $\gamma(q) = [\bar{F}(T)]^{1-q}$, alors l'égalité (2.5.3) devient :

$$B(q, T) = \frac{(c_1 - c_2) [1 - \gamma(q)] + c_m \frac{\gamma(q) - 1}{q-1} + c_2}{\int_0^T [\bar{F}(t)]^{1-q} dt} .$$

$$\text{Par ailleurs, } \lim_{q \rightarrow 1} [\gamma(q)] = \gamma(1) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{q \rightarrow 1} [1 - \gamma(q)] = 0 , \\ \lim_{q \rightarrow 1} \left[\frac{\gamma(q) - 1}{q - 1} \right] = \gamma'(1) . \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \gamma'(q) = -\ln [\bar{F}(T)] \gamma(q) &\Rightarrow \gamma'(1) = -\ln [\bar{F}(T)] \\ &= \int_0^T r(t) dt . \end{aligned}$$

On peut maintenant écrire que:

$$\lim_{q \rightarrow 1} [B(q, T)] = \frac{c_2 + c_m \int_0^T r(t) dt}{T}$$

On retrouve l'expression attendue du coût établie par Barlow et Hunter (1960).

Chapitre 3

LES CLASSES DE DISTRIBUTION IFR, IFRA NBU ET NBUE

Ce chapitre présente des notions et des résultats sur quatre importantes classes de distribution F utilisées dans les politiques de maintenance systèmes. Certains de ces résultats seront utilisés pour la détermination des critères d'optimisation dans le chapitre 4.

Je rappelle que F est la fonction de répartition de la durée de vie X , f est la fonction de densité de X , $r : t \mapsto \frac{f(t)}{F(t)}$ est la fonction taux de panne associée à F et $\mu = E(X)$.

3.1. LES CLASSES DE DISTRIBUTION IFR ET IFRA

On désigne par :

classe IFR, la classe des distributions à fonction taux de panne croissante (en anglais : Increasing Failure Rate distributions). Par opposition, la classe est dite DFR pour des distributions à fonction taux de panne décroissante (en anglais : Decreasing Failure Rate distributions);

classe IFRA, la classe des distributions dont la fonction taux de panne moyen est croissante (en anglais : Increasing Failure Rate Average). Par opposition, la classe est dite DFRA pour des distributions dont la fonction taux de panne moyen est décroissante (en anglais : Decreasing Failure Rate Average).

3.1.1. Classe IFR

La classe IFR est caractérisée par la proposition suivante:

Proposition 3.1.1. *La distribution F est dans la classe IFR si et seulement si pour tout réel $\Delta > 0$, la fonction $\tau : t \mapsto \frac{F(t+\Delta)-F(t)}{\bar{F}(t)}$ définie sur $D_\tau = \{t \geq 0 / F(t) < 1\}$ est croissante.*

PREUVE. $\bullet(\Rightarrow)$ Soit F dans la classe IFR.

Alors, r est croissante sur D_τ . Cela se traduit par :

pour tout couple de réels $(t_1, t_2) \in D_\tau^2$ tel que $t_1 \leq t_2$ alors $r(t_1) \leq r(t_2)$.

$\forall t, t + t_1 \leq t + t_2 \Rightarrow r(t + t_1) \leq r(t + t_2)$.

Soit $\Delta > 0$, on a alors la chaîne d'inégalités suivante:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\int_0^\Delta r(t+t_1) dt}_{\int_{t_1}^{t_1+\Delta} r(u) du} &\leq \underbrace{\int_0^\Delta r(t+t_2) dt}_{\int_{t_2}^{t_2+\Delta} r(u) du} \\
 \Rightarrow e^{-\left(\int_{t_2}^0 r(u) du + \int_0^{t_2+\Delta} r(u) du\right)} &\leq e^{-\left(\int_{t_1}^0 r(u) du + \int_0^{t_1+\Delta} r(u) du\right)} \\
 \Rightarrow \frac{e^{-\int_0^{t_2+\Delta} r(u) du}}{e^{-\int_0^{t_2} r(u) du}} &\leq \frac{e^{-\int_0^{t_1+\Delta} r(u) du}}{e^{-\int_0^{t_1} r(u) du}} \\
 \Rightarrow \frac{\bar{F}(t_2 + \Delta)}{\bar{F}(t_2)} &\leq \frac{\bar{F}(t_1 + \Delta)}{\bar{F}(t_1)} \text{ par (2.4.6)} \\
 \Rightarrow \frac{1 - F(t_2 + \Delta)}{\bar{F}(t_2)} &\leq \frac{1 - F(t_1 + \Delta)}{\bar{F}(t_1)} \\
 \Rightarrow \frac{1 - F(t_2 + \Delta)}{\bar{F}(t_2)} - \underbrace{\frac{1 - F(t_2)}{\bar{F}(t_2)}}_1 &\leq \frac{1 - F(t_1 + \Delta)}{\bar{F}(t_1)} - \underbrace{\frac{1 - F(t_1)}{\bar{F}(t_1)}}_1
 \end{aligned}$$

On en déduit que
$$\frac{F(t_2) - F(t_2 + \Delta)}{\overline{F}(t_2)} \leq \frac{F(t_1) - F(t_1 + \Delta)}{\overline{F}(t_1)},$$
ou que
$$-\tau(t_2) \leq -\tau(t_1),$$
c'est-à-dire que
$$\tau(t_1) \leq \tau(t_2).$$

On vient d'établir qu'étant donné $\Delta > 0$, pour tout couple $(t_1, t_2) \in D_\tau^2$ tel que $t_1 \leq t_2$, alors $\tau(t_1) \leq \tau(t_2)$.

Cela signifie que τ est croissante sur D_τ .

•(\Leftarrow) Supposons maintenant qu'étant donné $\Delta > 0$, τ est croissante sur D_τ .

Alors, pour $\Delta > 0$, la fonction $\tau_\Delta = \frac{1}{\Delta}\tau$ est aussi croissante sur D_τ . De même, la fonction limite θ (obtenue quand $\Delta \rightarrow 0$) est croissante sur D_τ .

Déterminons la fonction limite $\theta : t \mapsto \lim_{\Delta \rightarrow 0} [\tau_\Delta(t)]$

$$\begin{aligned} \tau_\Delta(t) &= \frac{1}{\Delta}\tau(t) \\ &= \frac{F(t + \Delta) - F(t)}{\Delta} \cdot \frac{1}{\overline{F}(t)} \\ \theta(t) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} [\tau_\Delta(t)] \\ &= \frac{1}{\overline{F}(t)} \underbrace{\lim_{\Delta \rightarrow 0} \left[\frac{F(t + \Delta) - F(t)}{\Delta} \right]}_{F'(t)=f(t)} \\ &= r(t). \end{aligned}$$

Donc les fonctions r et θ sont égales. Comme on sait déjà que θ est croissante, alors r l'est aussi. Donc F est dans la classe IFR.

□

3.1.2. Classe IFRA

Définition 3.1.1. *Le taux de panne cumulatif dans $[0, t]$ est : $\int_0^t r(u) du$.*

Définition 3.1.2. Le taux de panne moyen dans $[0, t]$ est : $\frac{\int_0^t r(u)du}{t}$. C'est la valeur moyenne de r sur $[0, t]$.

Définition 3.1.3. La distribution F est dans la classe IFRA si sa fonction "taux de panne moyen dans $[0, t]$ ", $\eta : t \mapsto \frac{\int_0^t r(u)du}{t}$ est croissante.

Proposition 3.1.2. La classe IFR est incluse dans la classe IFRA.

PREUVE. Soit F dans la classe IFR.

Alors r est croissante et on déduit que :

$$\begin{aligned} \underbrace{r(t)}_{\text{valeur de } r \text{ en } t} &\geq \underbrace{\eta(t)}_{\text{valeur moyenne de } r \text{ sur } [0, t]} \\ \implies r(t) &\geq \frac{\int_0^t r(u) du}{t} \\ \implies tr(t) - \int_0^t r(u) du &\geq 0 \\ \implies \frac{tr(t) - \int_0^t r(u) du}{t^2} = \eta'(t) &\geq 0 \\ \implies \eta \text{ est croissante.} & \end{aligned}$$

Donc F est dans la classe IFRA. □

3.2. LES CLASSES DE DISTRIBUTION NBU ET NBUE

On désigne par :

classe NBU, la classe des distributions de type "meilleur neuf qu'usagé" (en anglais New Better than Used). La fonction taux de panne correspondante est donc croissante. Par opposition, on parle de classe NWU pour désigner la classe des distributions de type "pire neuf qu'usagé" (en anglais New Worse than Used).

La fonction taux de panne correspondante est décroissante. Cela signifie qu'il existe des systèmes qui, durant leur période d'activité, s'améliorent dans le temps.

Classe NBUE, la classe des distributions de type "meilleur neuf qu'usagé en moyenne" (en anglais New Better than Used in Expectation). De la même façon que précédemment, on parlera à l'opposé de classe NWUE.

3.2.1. Classe NBU

Définition 3.2.1. *La distribution F appartient à la classe NBU si pour tout couple (x_1, x_2) de réels positifs ou nuls, on a: $\bar{F}(x_1 + x_2) \leq \bar{F}(x_1) \cdot \bar{F}(x_2)$*

Par ailleurs, notons que :

$$\begin{aligned} \bar{F}(x_1 + x_2) \leq \bar{F}(x_1) \cdot \bar{F}(x_2) &\Leftrightarrow \frac{\bar{F}(x_1 + x_2)}{\bar{F}(x_1)} \leq \bar{F}(x_2) \\ &\Leftrightarrow \frac{P(X > x_1 + x_2)}{P(X > x_1)} \leq P(X > x_2) \\ &\Leftrightarrow P[(X > x_1 + x_2) | (X > x_1)] \leq P(X > x_2) . \end{aligned}$$

On en déduit la remarque suivante.

Remarque 3.2.1. *La probabilité qu'un système survive à x_2 unités de temps supplémentaires sachant qu'il a déjà survécu à x_1 unités de temps est inférieure à la probabilité que le système neuf survive à x_2 unités de temps.*

3.2.2. Classe NBUE

Définition 3.2.2. *La distribution F appartient à la classe NBUE si pour tout $t \geq 0$, $\int_t^\infty \bar{F}(x)dx \leq \mu \bar{F}(t)$ où $\mu = E(X)$.*

Notons que :

- la fonction $F : x \mapsto F(x) = P(X \leq x)$ est la fonction de répartition de la durée de vie X .

- la fonction F_t définie sur $[t, +\infty[$ par:

$$\begin{aligned} F_t(x) &= \frac{F(x) - F(t)}{\overline{F}(t)} \\ &= P[(X \leq x)|(X > t)] \end{aligned}$$

est la fonction de répartition de la durée de vie " X conditionnelle à $(X > t)$ ". F_t est en fait la distribution F tronquée en t .

- D'après l'égalité (1.5.1), la moyenne de " X conditionnelle à $(X > t)$ " est :

$$\begin{aligned} E[X|(X > t)] &= \int_t^\infty \overline{F}_t(x) dx \\ \text{avec } \overline{F}_t(x) &= 1 - F_t(x) = \frac{\overline{F}(x)}{\overline{F}(t)}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } E[X|(X > t)] = \int_t^\infty \frac{\overline{F}(x)}{\overline{F}(t)} dx .$$

- Par définition, dire que F est NBUE revient à dire que:

$$\int_t^\infty \frac{\overline{F}(x)}{\overline{F}(t)} dx \leq \mu$$

c'est-à-dire que: $\forall t \geq 0, E[X|(X > t)] \leq E(X)$. D'où cette remarque.

Remarque 3.2.2. *La durée de vie moyenne d'une pièce usagée d'âge t est inférieure ou égale à la durée de vie moyenne d'une pièce identique neuve.*

Proposition 3.2.1. *La classe NBU est incluse dans la classe NBUE.*

PREUVE. Soit F dans la classe NBU . Alors, pour tout couple (x_1, x_2) de réels positifs, on a :

$$\begin{aligned} \overline{F}(x_1 + x_2) &\leq \overline{F}(x_1) \cdot \overline{F}(x_2) \\ \text{et } \int_0^\infty \overline{F}(x_1 + x_2) dx_2 &\leq \overline{F}(x_1) \cdot \underbrace{\int_0^\infty \overline{F}(x_2) dx_2}_{\mu} . \end{aligned}$$

Posons $x = x_1 + x_2$ dans $\int_0^\infty \overline{F}(x_1 + x_2) dx_2$. La précédente inégalité devient :

$$\forall x_1 \geq 0, \int_{x_1}^\infty \overline{F}(x) dx \leq \mu \cdot \overline{F}(x_1) .$$

Ce qui signifie que F est dans la classe NBUE.

□

3.3. RELATION ENTRE LES CLASSES IFR ET NBU

Désignons par IFR, IFRA, NBU, NBUE les classes de distribution respectives de mêmes noms. On a la chaîne d'inclusions suivante.

Théorème 3.3.1. *IFR \subset IFRA \subset NBU \subset NBUE.*

PREUVE. Les première et troisième inclusions ont déjà été établies dans les propositions précédentes. Il reste à montrer que la classe IFRA est incluse dans la classe NBU. Soit F dans la classe IFRA. Alors, la fonction η est croissante.

Pour tout couple de réels positifs (x_1, x_2) , on a :

$$\begin{aligned} x_1 \leq x_1 + x_2 &\Rightarrow \eta(x_1) \leq \eta(x_1 + x_2) \\ &\Rightarrow \frac{\ln [\overline{F}(x_1 + x_2)]}{x_1 + x_2} \leq \frac{\ln [\overline{F}(x_1)]}{x_1} \\ &\Rightarrow \frac{x_1 \ln [\overline{F}(x_1 + x_2)]}{x_1 + x_2} \leq \ln [\overline{F}(x_1)] . \end{aligned}$$

En permutant x_1 et x_2 , on obtient l'inégalité analogue :

$$\frac{x_2 \ln [\overline{F}(x_1 + x_2)]}{x_1 + x_2} \leq \ln [\overline{F}(x_2)] .$$

La sommation membre à membre de ces inégalités analogues donne :

$$\ln [\overline{F}(x_1 + x_2)] \leq \ln [\overline{F}(x_1) \cdot \overline{F}(x_2)]$$

c'est-à-dire : $\overline{F}(x_1 + x_2) \leq \overline{F}(x_1) \cdot \overline{F}(x_2)$, ce qui signifie que F est dans la classe NBU.

□

On sait maintenant que si F est dans la classe IFR, alors F est aussi dans la classe NBUE. *Ce résultat sera déterminant par la suite pour la recherche des critères d'optimisation du coût.*

Chapitre 4

CRITÈRES D'OPTIMISATION DE LA FONCTION DE COÛT DE RÉPARATION

Le problème à résoudre est de trouver la valeur T_0 de T qui minimise $B(q, T)$ (le coût moyen par unité de temps sur un horizon infini) pour q fixé. Pour cela, il faudra d'abord étudier l'existence et l'unicité de T_0 .

Posons $a(T) = B(q, T)$ et :

$$\begin{cases} \beta = c_1 - c_2 + \frac{c_m}{1-q} > 0, \\ \alpha = \beta + c_2. \end{cases} \quad (4.0.1)$$

L'égalité (2.5.3) devient alors :

$$a(t) = \frac{\alpha - \beta [\bar{F}(T)]^{1-q}}{\int_0^T [\bar{F}(t)]^{1-q} dt}, \quad (4.0.2)$$

où $0 < q < 1$.

4.1. VARIATIONS DE LA FONCTION DE COÛT $a : T \mapsto a(T)$

Proposition 4.1.1. *Pour tout réel T appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$, $a'(t)$ a même signe que :*

$$b(T) = r(T) \cdot \underbrace{\int_0^T [\bar{F}(t)]^{1-q} dt}_{E(Y^*)} + \frac{[\bar{F}(T)]^{1-q}}{1-q} - \frac{\alpha}{\beta(1-q)}. \quad (4.1.1)$$

PREUVE. Le calcul de $a'(T)$ donne les expressions suivantes.

$$\begin{aligned} & \frac{\beta(1-q) [\bar{F}(T)]^{-q} f(T) \int_0^T [\bar{F}(t)]^{1-q} dt - (\alpha - \beta [\bar{F}(T)]^{1-q}) [\bar{F}(T)]^{1-q}}{\left(\int_0^T [\bar{F}(t)]^{1-q} dt \right)^2} \\ &= \frac{\beta(1-q) [\bar{F}(T)]^{-q} r(T) \int_0^T [\bar{F}(t)]^{1-q} dt - (\alpha - \beta [\bar{F}(T)]^{1-q}) [\bar{F}(T)]^{1-q}}{\left(\int_0^T [\bar{F}(t)]^{1-q} dt \right)^2} \\ &= \underbrace{\frac{\beta(1-q) [\bar{F}(T)]^{-q}}{\left(\int_0^T [\bar{F}(t)]^{1-q} dt \right)^2}}_{\lambda(T) > 0} \left[\underbrace{r(T) \cdot \int_0^T [\bar{F}(t)]^{1-q} dt + \frac{[\bar{F}(T)]^{1-q}}{1-q} - \frac{\alpha}{\beta(1-q)}}_{b(T)} \right] \end{aligned}$$

Donc $a'(T)$ a même signe que $b(T)$. \square

4.2. CONDITION D'EXISTENCE D'UNE SOLUTION UNIQUE T^* DE L'ÉQUATION $a'(T) = 0$

Proposition 4.2.1. *Si r est continue et croissante, une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation :*

$$b(T) = 0 \quad (4.2.1)$$

(c'est-à-dire $a'(T) = 0$) admette une solution unique T^* est

$$\lim_{T \rightarrow \infty} [b(T)] > 0. \quad (4.2.2)$$

PREUVE.

$$\begin{aligned} \bullet \text{Posons } b_0 &= \lim_{T \rightarrow 0} [b(T)] \\ b_0 &= \frac{1}{1-q} - \frac{\alpha}{\beta(1-q)} \text{ par (4.1.1)} \\ &= \frac{-c_2}{\beta(1-q)} < 0 \text{ par (4.0.1)}. \end{aligned}$$

$$\bullet \forall T, b'(T) = r'(T) \underbrace{\int_0^T [\bar{F}(t)]^{1-q} dt}_{E(Y^*) > 0} + \underbrace{r(T) \cdot [\bar{F}(T)]^{1-q} - [\bar{F}(T)]^{-q} \cdot f(T)}_0$$

Les fonctions b' et r' ont même signe, donc les fonctions b et r ont le même sens de variation. On en déduit que si r est continue et croissante, b est aussi continue et croissante. Puisque b est continue et croissante sur $]0, +\infty[$ et que $\lim_{T \rightarrow 0} [b(T)] = b_0 < 0$, on a qu'une condition nécessaire et suffisante pour que T^* existe est :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} [b(T)] > 0.$$

□

4.3. CONDITION SUR r POUR L'EXISTENCE ET L'UNICITÉ DE T^*

Proposition 4.3.1. Soit $r_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} [r(T)]$ et $\lim_{T \rightarrow \infty} [b(T)] > 0$. Alors,

$$r_\infty > \frac{\alpha}{\beta p \mu(p)} \quad (4.3.1)$$

où $\mu(p)$ est la durée de vie moyenne entre les réparations parfaites.

PREUVE. On rappelle que quand $T \rightarrow +\infty$, les pannes interviennent avant T donc on se retrouve dans un contexte sans remplacement préventif.

Posons $b_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} [b(T)]$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{T \rightarrow \infty} [E(Y^*)] = E(Y) = \mu(p) \\ \lim_{T \rightarrow \infty} [\bar{F}(T)] = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow b_\infty = r_\infty \mu(p) - \frac{\alpha}{\beta p} \text{ par (4.1.1).}$$

De cette égalité et de l'hypothèse $b_\infty > 0$, on obtient : $r_\infty > \frac{\alpha}{\beta p \mu(p)}$

□

Remarque 4.3.1. Rappelons que quand $T \rightarrow +\infty$, le modèle se confond à celui étudié par Brown et Proschan (1983).

Proposition 4.3.2. Si F est dans la classe NBUE, alors

$$r_\infty > \frac{\alpha}{\beta \mu} \quad (4.3.2)$$

où $p \in]0, 1]$.

PREUVE. Soit F dans la classe IFR (c'est-à-dire r croissante). D'après le théorème 3.3.1, on sait que F est aussi dans la classe NBUE. Or d'après le théorème 3.1(i) dans Brown et Proschan (1983), quand F est NBUE, $\mu(p) \leq \frac{\mu}{p}$.

$$\left. \begin{array}{l} r_\infty > \frac{\alpha}{\beta p \mu(p)} \\ \mu(p) \leq \frac{\mu}{p} \end{array} \right\} \Rightarrow r_\infty > \frac{\alpha}{\beta \mu}.$$

□

Remarque 4.3.2. *De ce qui précède, on sait maintenant qu'une condition suffisante à l'existence et à l'unicité de T^* est que r soit continue et croissante vers $r_\infty > \frac{\alpha}{\beta\mu}$.*

4.4. OBTENTION DE LA POLITIQUE OPTIMALE

Corollaire 4.4.1. *La politique optimale T_0 cherchée est T^* .*

PREUVE. T^* étant l'unique solution de l'équation $a'(T) = 0$, il suffit d'établir que T^* minimise $a(T)$. De ce qui précède, on sait que la fonction b est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et s'annule en T^* . On peut donc écrire que :

$$b(T) \begin{cases} < 0 \text{ si } T \in]0, T^*[, \\ = 0 \text{ si } T = T^* , \\ > 0 \text{ si } T \in]T^*, +\infty[. \end{cases}$$

D'après la proposition 4.1.1 , on a aussi :

$$a'(T) \begin{cases} < 0 \text{ si } T \in]0, T^*[, \\ = 0 \text{ si } T = T^* , \\ > 0 \text{ si } T \in]T^*, +\infty[. \end{cases}$$

Donc T^* minimise $a(T)$, d'où $T_0 = T^*$

□

En conclusion, on retiendra le critère d'optimisation suivant. *Une condition suffisante à l'existence et à l'unicité d'une politique optimale T_0 est donnée par : “ r continue et croissante vers $r_\infty > \frac{\alpha}{\beta\mu}$ ”.*

Remarque 4.4.1. T_0 est la solution numérique de l'équation $b(T) = 0$.

Des exemples de calcul de T_0 seront donnés dans le chapitre 5.

Chapitre 5

APPLICATIONS NUMÉRIQUES

Rappelons que quand $q \rightarrow 0$, le modèle devient le modèle classique du remplacement préventif basé sur l'âge de Barlow et Proschan (1965). Les auteurs présentent un exemple numérique d'optimisation de coût. Par la suite, d'autres auteurs qui ont fait des études analogues ont utilisé cet exemple pour leurs applications numériques. C'est le cas de Glasser (1967), Hanscom et Cléroux (1975), puis Cléroux, Dubuc et Tilquin (1979).

Je vais aussi me servir de cet exemple.

5.1. EXEMPLE

Certains tubes électroniques utilisés dans les communications des compagnies aériennes commerciales ont une durée de vie moyenne de $\mu = 9080$ heures avec un écart-type $\sigma = 3027$ heures. On suppose que $c_1 = 1100$ \$ et $c_2 = 100$ \$. Je cherche la politique optimale de remplacement préventif basé sur l'âge avec réparation minimale imparfaite.

- Dans un premier temps, je détermine la politique optimale dans chacun des cas où F est la fonction de répartition d'une normale tronquée, d'une gamma puis d'une Weibull. Cela me permettra de comparer les résultats à ceux obtenus par Cléroux, Dubuc et Tilquin (1979) dans le modèle analogue, modèle que je désignerai dans la suite par ARPMR.

• Dans un deuxième temps, je refais le même travail avec une nouvelle distribution : celle des valeurs extrêmes de type 1. Cela me permettra de voir si l'on obtient des résultats semblables.

Remarque 5.1.1. *Pour toute distribution F utilisée, les paramètres de F sont déterminés comme étant les solutions du système suivant :*

$$\begin{cases} \mu = 9080 , \\ \sigma = 3027 , \end{cases} \quad (5.1.1)$$

où μ et σ^2 sont respectivement la moyenne et la variance de F

5.2. RÉSULTATS OBTENUS PAR D'AUTRES AUTEURS

5.2.1. Modèle classique du remplacement préventif basé sur l'âge

Dans le chapitre 4 de Barlow et Proschan (1965), les auteurs trouvent :

- $a(T) = \frac{c_2 + (c_1 - c_2) F(T)}{\int_0^T \bar{F}(u) du} \geq \frac{c_2}{T}$ pour $c_2 \leq c_1$;
- si r est continue et croissante vers $+\infty$, la solution optimale T_0 est la solution de l'équation :

$$r(T) \cdot \int_0^T \bar{F}(u) du - F(T) - \frac{c_2}{c_1 - c_2} = 0 , \quad (5.2.1)$$

- si F est IFR, $T_0 > \frac{c_2}{c_1} \mu$. Ce qui signifie que l'on ne devra jamais effectuer le remplacement préventif avant $\frac{c_2}{c_1} \mu$ unités de temps de fonctionnement.

Une résolution numérique de l'équation (5.2.1), faite par les auteurs puis par Glasser (1967) sur la base de l'exemple a produit le tableau 5.2.1 . Ce tableau donne les solutions obtenues d'une part par Barlow et Proschan (1965) quand F est la fonction de répartition d'une normale tronquée et d'autre part par Glasser (1967) quand F est la fonction de répartition d'une gamma ou d'une Weibull.

TAB. 5.2.1. *Modèle classique du remplacement préventif basé sur l'âge pour trois distributions*

	Normale tronquée	Gamma	Weibull
T_0	4127	4036	3923
$a(T_0)$	0,037	0,030	0,037

Dans un contexte sans remplacement préventif ($T \rightarrow +\infty$), on a comme coût quelle que soit la distribution F , $a(+\infty) = \frac{c_1}{\mu} = 0,121$.

On observe donc bien que quand on effectue des remplacements, on réduit les coûts respectivement de 69%, 75%, 69% pour la loi normale tronquée, la loi gamma, la loi de Weibull.

5.2.2. Le modèle ARPMR

Les tableaux 5.2.2, 5.2.3 et 5.2.4 donnent les solutions obtenues par Cléroux, Dubuc et Tilquin (1979) respectivement quand F est la fonction de répartition d'une gamma, d'une normale tronquée et d'une Weibull. Dans ces tableaux, les notations δ , p , c^*/p , T_0 , $E(V_0)$, $E(N_0)$, $E(W_0)$ et $J(T_0)$ sont celles des auteurs. Dans mon modèle, elles correspondent respectivement à δ , q , c_m/q , T_0 , $E(Y_0^*)$, $E(N_0^*)$, $E(W_0^*)$ et $a(T_0)$ où,

c_m/q est le coût moyen d'une réparation étant donné qu'on répare,

T_0 est la politique qui minimise $a(T)$ le coût moyen par unité de temps sur un horizon infini,

$a(T_0)$ est le coût moyen optimal par unité de temps sur un horizon infini.

$E(Y_0^*)$, $E(N_0^*)$, $E(W_0^*)$ sont des grandeurs intermédiaires qui facilitent le calcul de $a(T_0)$. Leurs significations sont données dans la sous-section 5.3.1.

Je reproduirai les mêmes formats de tableau dans la section 5.3. C'est à partir de ces trois tableaux que les auteurs ont fait ressortir les points saillants annoncés dans le sommaire en page v.

TAB. 5.2.2. *Modèle ARPMR pour la loi gamma*

δ	1	0,91	0,90	0,82	0,73	0,64	0,45	0,27	0,09
p	0,98	0,93	0,93	0,84	0,69	0,50	0,16	0,02	0,00
c^*/p	689,13	672,42	670,08	642,67	598,39	540,70	395,63	228,20	62,88
T_0	4345,64	4348,06	4348,06	4341,60	4312,54	4255,42	4118,18	4049,97	4036,65
$E(V_0)$	4345,15	4346,65	4346,51	4338,32	4306,46	4246,45	4106,17	4037,55	4024,25
$E(N_0)$	0,03	0,03	0,03	0,03	0,02	0,01	0,00	0,00	0,00
$E(W_0)$	21,89	20,44	20,22	17,45	12,85	7,78	1,50	0,11	0,00
$J(T_0)$	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028	0,029	0,030	0,030	0,030

TAB. 5.2.3. *Modèle ARPMR pour la loi normale tronquée*

δ	1	0,91	0,90	0,82	0,73	0,64	0,45	0,27	0,09
p	0,98	0,93	0,93	0,84	0,69	0,50	0,16	0,02	0,00
c^*/p	689,13	672,42	670,08	642,67	598,39	540,70	395,63	228,20	62,88
T_0	4553,50	4557,77	4557,77	4549,84	4511,43	4433,99	4243,76	4147,42	4128,52
$E(V_0)$	4551,46	4551,87	4551,29	4536,02	4485,50	4394,70	4187,58	4087,37	4068,15
$E(N_0)$	0,07	0,07	0,07	0,06	0,05	0,03	0,01	0,00	0,00
$E(W_0)$	47,42	44,24	43,76	37,80	28,05	17,29	3,49	0,27	0,00
$J(T_0)$	0,033	0,033	0,033	0,033	0,033	0,034	0,036	0,037	0,037

TAB. 5.2.4. *Modèle ARPMR pour la loi de Weibull*

δ	1	0,91	0,90	0,82	0,73	0,64	0,45	0,27	0,09
p	0,98	0,93	0,93	0,84	0,69	0,50	0,16	0,02	0,00
c^*/p	689,13	672,42	670,08	642,67	598,39	540,70	395,63	228,20	62,88
T_0	4370,67	4374,72	4374,72	4366,62	4324,11	4243,13	4044,74	3943,52	3923,28
$E(V_0)$	4369,11	4370,36	4369,93	4356,52	4305,43	4215,36	4006,89	3904,14	3883,91
$E(N_0)$	0,06	0,06	0,06	0,05	0,04	0,03	0,00	0,00	0,00
$E(W_0)$	41,99	39,19	38,77	33,47	24,69	15,08	2,97	0,22	0,00
$J(T_0)$	0,033	0,033	0,033	0,033	0,033	0,034	0,036	0,037	0,037

5.3. COMPARAISON AVEC LES RÉSULTATS DU MODÈLE ARPMR

D'abord, revenons en détail sur les résultats du modèle ARPMR sur la base des tableaux 5.2.2, 5.2.3 et 5.2.4 .

- Dans ces tableaux, la dernière colonne correspond à $p \rightarrow 0$ donc au résultat obtenu dans le cas de la politique classique de remplacement préventif de Barlow et Proschan (1965). Il n'y a donc pas de réparation. On observe que le coût moyen optimal $a(T_0)$ s'établit à :

0,030 pour la loi gamma,

0,037 pour la loi normale tronquée en 0 et pour la loi de Weibull.

Quand p diffère significativement de 0 (colonnes 2 à 8), le coût moyen optimal $a(T_0)$ diminue et cela quelle que soit la distribution. Cela montre bien que quelle que soit la distribution, on améliore la politique classique de remplacement préventif de Barlow et Proschan (1965) en y autorisant des réparations minimales, c'est-à-dire en permettant à p d'être non nulle.

- La diminution de coût précédemment évoquée est plus forte quand p augmente (voir l'évolution de $a(T_0)$ dans le sens colonne 8 à colonne 2). Cela montre bien que quelle que soit la distribution, l'amélioration de la politique classique de Barlow et Proschan (1965) est d'autant plus significative que l'on répare plus souvent.

- Enfin, pour une valeur donnée de la probabilité p de réparer, on observe que la distribution a peu d'effet sur le coût moyen optimal $a(T_0)$ (comparer les $a(T_0)$ correspondant aux mêmes numéros de colonne).

S'agissant maintenant de mon modèle, les tableaux 5.3.1, 5.3.2 et 5.3.3 donnent les solutions que j'obtiens respectivement quand F est la fonction de répartition d'une gamma, d'une normale tronquée et d'une Weibull. On observe bien que ces

tableaux sont similaires à leurs homologues respectifs 5.2.2, 5.2.3 et 5.2.4 du modèle ARPMP. On peut donc affirmer que les conclusions numériques du modèle ARPMP s'appliquent au modèle étudié.

Comme annoncé à la fin de la section 1.2 (en page 6), les applications numériques sont faites avec la forme donnée à c_0 dans le modèle ARPMP, à savoir, $c_0 = \delta c_1$ où $0 \leq \delta \leq 1$.

Désormais, $q = L(\delta c_1)$ et $c_m = \int_0^{\delta c_1} xl(x) dx$ où δ décrit l'intervalle $[0, 1]$. Notons qu'il n'y a aucune justification théorique pour le choix de la fonction de répartition de la variable aléatoire ($C/C \leq \delta c_1$). L'intérêt d'un choix de L réside dans le fait que quand L est donnée, q , c_m , α et β sont connus pour un δ donné. Donc la fonction a (coût moyen par unité de temps sur un horizon infini), donnée par l'égalité (4.0.2) est connue pour cette valeur de δ .

Je prends la fonction de répartition L du modèle ARPMP à savoir $L =$ fonction de répartition de $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ tronquée en 0 (voir page 61) où les auteurs du modèle ont choisi $(\mu_0, \sigma_0) = (700, 200)$ pour rendre négligeable la probabilité d'un coût négatif, comme l'indique la figure 5.3.1.

Voici le détail de toutes les opérations qui ont permis d'obtenir les différents tableaux. Dans le but de rendre facile la comparaison avec les résultats du modèle ARPMP, ces opérations ont été construites de façon à pouvoir calculer dans mon modèle, les grandeurs analogues calculées dans le modèle ARPMP. Les programmes informatiques qui accompagnent ces opérations sont donnés en annexe. Ils ont été conçus et exécutés à l'aide du logiciel GAUSS. Un guide de ce logiciel est disponible à l'adresse suivante :

www.cirano.umontreal.ca/publication/guides

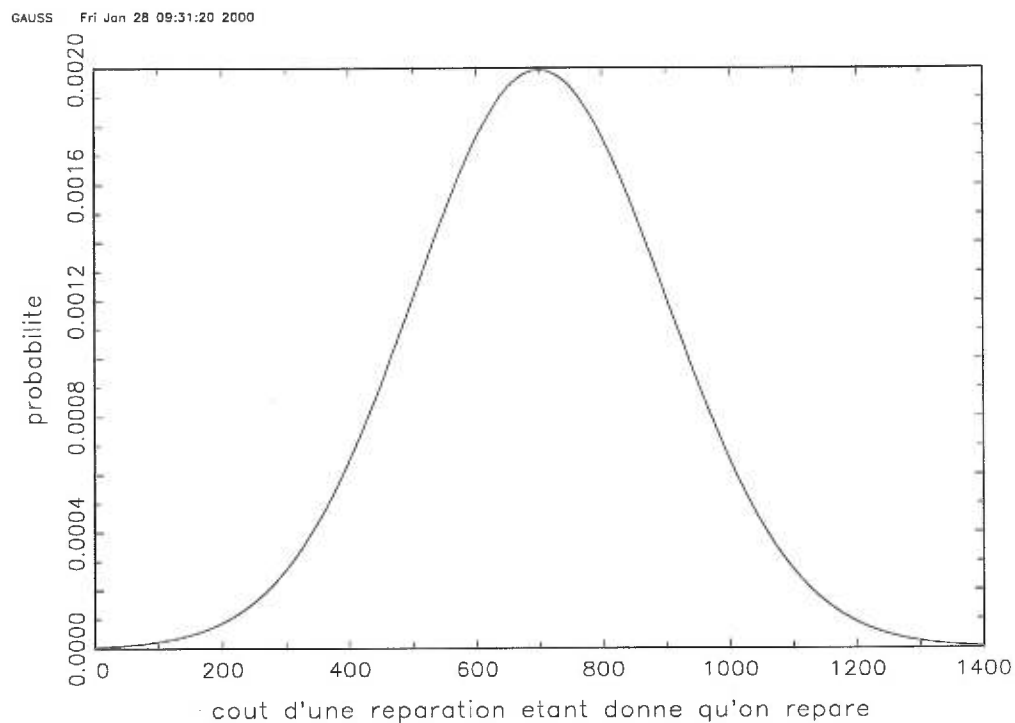


FIG. 5.3.1. *Fonction de densité l de $N(\mu_0, \sigma_0^2)$*

5.3.1. Démarche globale des calculs

X est la variable aléatoire «durée de vie des tubes électroniques» et sa fonction de répartition est F . D'après l'exemple, on pose :

$$E(X) = \mu = 9080 ,$$

$$\text{var}(X) = \sigma^2 = 3027 .$$

Pour un δ donné, je calcule d'abord les quatre grandeurs indépendantes de F que sont :

- $q = \int_0^{\delta c_1} l(x) dx$ où c_1 est donné et

$$l(x) = \frac{\varphi\left(\frac{x-700}{200}\right)}{200\phi(3, 5)},$$

φ et ϕ étant les fonctions de densité et de répartition respectives de la normale $N(0, 1)$;

- $\frac{c_m}{q}$ où $c_m = \int_0^{\delta c_1} xl(x) dx$;
- $\beta = c_1 - c_2 + \frac{c_m}{1-q}$ où c_2 est donné;
- $\alpha = \beta + c_2$.

Cette séquence de calculs est exécutée par le programme donné en annexe A.

Pour la même valeur de δ utilisée dans les quatre précédentes expressions, je calcule ensuite cinq grandeurs optimales qui elles dépendent de F . Ces cinq grandeurs sont définies comme suit.

- La politique optimale T_0 , solution (à obtenir numériquement) de l'équation $b(T) = 0$ où:

$$b(T) = r(T) \cdot \int_0^T [\bar{F}(u)]^{1-q} du + \frac{[\bar{F}(T)]^{1-q}}{1-q} - \frac{\alpha}{\beta(1-q)}.$$

Le programme donné en annexe B exécute la détermination numérique de T_0 à 10^{-2} lorsque F est la fonction de répartition de la normale tronquée en 0. Les sorties de résultats sont données dans l'annexe D. On peut reproduire sans difficulté des annexes analogues pour les autres distributions.

Les quatre grandeurs restantes sont optimales parce que calculées en T_0 , c'est-à-dire :

- le temps moyen optimal entre deux renouvellements successifs,

$$E(Y_0^*) = \int_0^{T_0} [\bar{F}(u)]^{1-q} du,$$

- le nombre moyen optimal de réparations entre deux renouvellements successifs,

$$E(N_0^*) = \frac{q}{1-q} \left[1 - [\bar{F}(T_0)]^{1-q} \right] ,$$

- le coût moyen optimal de réparation entre deux renouvellements successifs,

$$E(W_0^*) = \frac{c_m}{q} E(N_0^*) ,$$

- le coût moyen optimal par unité de temps sur un horizon infini,

$$\min_T [a(T)] = a(T_0) = \frac{\left[\frac{\beta(1-q)}{q} \right] E(N_0^*) + c_2}{E(Y_0^*)} .$$

La séquence des quatre derniers calculs est exécutée par le programme donné dans l'annexe C lorsque F est la fonction de répartition de la normale tronquée en 0. On peut facilement adapter ce programme aux autres distributions.

En définitive, il suffit de connaître $r(T)$ et $F(T)$ pour mener à bien les différentes optimisations. Les expressions de $r(T)$ et $F(T)$ utilisées sont données ci-après pour chaque distribution F .

Je rappelle que les paramètres de F sont déterminés conformément à la remarque 5.1.1.

5.3.2. Optimisation lorsque F est la fonction de répartition de la normale $N_0(\mu, \sigma^2)$ tronquée en 0

On rappelle que φ et Φ sont les fonctions de densité et de répartition respectives de la normale $N(0, 1)$. En s'inspirant de Barlow et Proschan (1965) pages

13 et 88, on obtient facilement :

$$\begin{cases} F(T) = \frac{\phi\left(\frac{T-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)}{\bar{\phi}\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)}, \\ r(T) = \frac{\varphi\left(\frac{T-\mu}{\sigma}\right)}{\sigma\phi\left(\frac{\mu-T}{\sigma}\right)}. \end{cases}$$

5.3.3. Optimisation lorsque F est la fonction de répartition de la $\text{gamma}(b_0, c_0)$, $b_0 = \frac{\mu^2}{\sigma^2}$, $c_0 = \frac{\sigma^2}{\mu}$

On rappelle que les paramètres b_0 et c_0 de F sont tels que F a pour moyenne μ et pour variance σ^2 .

$$F(T) = \int_0^T f(t) dt \text{ où } f(t) = \frac{t^{b_0-1} e^{-\frac{t}{c_0}}}{\Gamma(b_0)c_0^{b_0}} \text{ et } \Gamma(b_0) = \int_0^\infty e^{-x} x^{b_0-1} dx.$$

En effectuant le changement de variable $u = \frac{t}{c_0}$ dans $F(T)$, on obtient

$$F(T) = \int_0^{\frac{T}{c_0}} \frac{e^{-u} u^{b_0-1}}{\Gamma(b_0)}.$$

Cette forme de $F(T)$ est désignée dans le langage GAUSS par $\text{cdfgam}\left(b_0, \frac{T}{c_0}\right)$.

$$\begin{cases} F(T) = \int_0^{\frac{T}{c_0}} \frac{e^{-u} u^{b_0-1}}{\Gamma(b_0)} = \text{cdfgam}\left(b_0, \frac{T}{c_0}\right), \\ r(T) = \frac{f(T)}{1 - F(T)}. \end{cases}$$

5.3.4. Optimisation lorsque F est la fonction de répartition de la Weibull (α, λ)

On sait que si la durée de vie X suit la loi de Weibull (α, λ) , sa moyenne μ et sa variance σ^2 sont données par :

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)}{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}, \\ \sigma^2 &= \frac{1}{\lambda^{\frac{2}{\alpha}}} \left\{ \Gamma\left(\frac{2}{\alpha} + 1\right) - \left[\Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \right]^2 \right\}.\end{aligned}$$

Les grandeurs μ et σ étant connues (remarque 5.1.1), les paramètres α et λ sont facilement obtenus en posant ce qui suit.

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{a_0}, \\ \lambda = \left[\frac{\Gamma(a_0 + 1)}{\mu} \right]^{\frac{1}{a_0}}, \end{cases}$$

où a_0 est la solution numérique de l'équation :

$$\underbrace{\Gamma^2(a + 1) - \frac{\mu^2}{\mu^2 + \sigma^2} \Gamma(2a + 1)}_{z(a)} = 0. \quad (5.3.1)$$

Donc, il faut d'abord trouver a_0 pour en déduire α et λ . Puisque pour la Weibull (α, λ) , on sait que :

$$\begin{cases} F(T) = 1 - e^{-\lambda T^\alpha}, \\ r(T) = \lambda \alpha T^{\alpha-1}, \end{cases}$$

alors, les grandeurs $F(T)$ et $r(T)$ sont ainsi entièrement déterminées. Soulignons que a_0 est calculé séparément en résolvant numériquement l'équation (5.3.1). On

trouve que $a_0 = 0,302739$ à 10^{-6} près par défaut. Cette valeur de a_0 est ensuite intégrée dans le programme de calcul de T_0 .

TAB. 5.3.1. Remplacement préventif basé sur l'âge avec réparation minimale imparfaite pour la loi gamma

δ	1	0,91	0,90	0,82	0,73	0,64	0,45	0,27	0,09
q	0,98	0,93	0,93	0,84	0,70	0,51	0,15	0,02	0,00
c_m/q	689,12	672,65	670,08	643,40	599,92	543,23	391,63	225,62	62,15
T_0	4345,54	4348,12	4348,09	4341,95	4313,86	4258,01	4115,42	4049,43	4036,55
$E(Y_0^*)$	4345,07	4346,74	4346,56	4338,73	4308,88	4249,15	4103,39	4037,02	4024,16
$E(N_0^*)$	0,03	0,03	0,03	0,03	0,02	0,01	0,00	0,00	0,00
$E(W_0^*)$	21,90	20,47	20,23	17,53	13,00	7,97	1,43	0,11	0,00
$a(T_0)$	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028	0,029	0,030	0,030	0,030

TAB. 5.3.2. Remplacement préventif basé sur l'âge avec réparation minimale imparfaite pour la loi normale tronquée

δ	1	0,91	0,90	0,82	0,73	0,64	0,45	0,27	0,09
q	0,98	0,93	0,93	0,84	0,70	0,51	0,15	0,02	0,00
c_m/q	689,12	672,65	670,08	643,40	599,92	543,23	391,63	225,62	62,15
T_0	4568,75	4572,75	4572,79	4565,30	4528,32	4453,07	4256,33	4163,44	4145,17
$E(Y_0^*)$	4566,82	4567,11	4566,52	4552,08	4503,49	4415,32	4201,45	4104,99	4086,43
$E(N_0^*)$	0,07	0,06	0,06	0,06	0,05	0,03	0,01	0,00	0,00
$E(W_0^*)$	46,53	43,45	42,93	37,25	27,83	17,36	3,25	0,25	0,00
$\alpha(T_0)$	0,032	0,032	0,032	0,033	0,033	0,034	0,036	0,037	0,037

TAB. 5.3.3. Remplacement préventif basé sur l'âge avec réparation minimale imparfaite pour la loi de Weibull

δ	1	0,91	0,90	0,82	0,73	0,64	0,45	0,27	0,09
q	0,98	0,93	0,93	0,84	0,70	0,51	0,15	0,02	0,00
c_m/q	689,12	672,65	670,08	643,40	599,92	543,23	391,63	225,62	62,15
T_0	4369,87	4373,89	4373,89	4365,58	4325,86	4245,84	4038,84	3942,10	3923,15
$E(Y_0^*)$	4368,43	4369,69	4369,22	4355,75	4307,56	4218,52	4001,03	3902,81	3883,85
$E(N_0^*)$	0,06	0,06	0,06	0,05	0,04	0,03	0,01	0,00	0,00
$E(W_0^*)$	41,98	39,22	38,75	33,59	24,98	15,43	2,82	0,21	0,00
$a(T_0)$	0,033	0,033	0,033	0,033	0,033	0,034	0,036	0,037	0,037

5.4. OPTIMISATION AVEC UNE NOUVELLE DISTRIBUTION F : CELLE DES VALEURS EXTRÊMES DE TYPE 1

Dans Cléroux, Dubuc et Tilquin (1979), le critère d'optimisation est " r continue et strictement croissante vers l'infini" (figure 5.6.1). Dans mon modèle, le critère d'optimisation est " r continue et strictement croissante vers $r_\infty > \frac{\alpha}{\beta\mu}$ " (figure 5.6.2).

Je montrerai plus loin que quand F est la fonction de répartition de la *loi des valeurs extrêmes de type 1*, encore appelée *loi de Gumbel*, alors la fonction taux de panne correspondante vérifie mon critère d'optimisation, rendant ainsi l'optimisation possible comme l'indiquent les figures 5.6.3. à 5.6.11.

Le tableau 5.4.1 indique que les valeurs optimales du coût sont semblables à celles obtenues pour les trois autres distributions. Le modèle étudié permet donc d'étendre les conclusions numériques de Cléroux, Dubuc et Tilquin à la distribution des valeurs extrêmes de type 1. Par exemple sur la figure 5.6.12. on vérifie qu'avec la loi des valeurs extrêmes de type 1, la diminution des coûts est plus forte quand δ augmente c'est-à-dire quand la probabilité de réparer $q = L(\delta c_1)$ augmente.

La succession des calculs est analogue à celle qui a déjà été développée pour les trois précédentes distributions. Les grandeurs q , $\frac{c_m}{q}$, β et α sont les mêmes que celles déjà obtenues (puisqu'elles sont indépendantes de F).

Rappelons que pour la distribution des valeurs extrêmes de type 1, les grandeurs β et α interviennent dans le critère d'optimisation. Une attention particulière leur a donc été donnée (tableau 5.6.1. et figure 5.6.13.).

TAB. 5.4.1. Remplacement préventif basé sur l'âge avec réparation minimale imparfaite pour la loi des valeurs extrêmes de type 1

δ	1	0,91	0,90	0,82	0,73	0,64	0,45	0,27	0,09
q	0,98	0,93	0,93	0,84	0,70	0,51	0,15	0,02	0,00
c_m/q	689,12	672,65	670,08	643,40	599,92	543,23	391,63	225,62	62,15
T_0	4557,17	4559,12	4559,09	4554,31	4532,61	4489,50	4379,21	4328,02	4318,02
$E(Y_0^*)$	4556,91	4558,37	4558,26	4552,57	4529,37	4484,69	4372,62	4321,20	4311,21
$E(N_0^*)$	0,02	0,02	0,02	0,02	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00
$E(W_0^*)$	24,99	14,02	13,86	12,01	8,91	5,47	0,98	0,07	0,00
$a(T_0)$	0,025	0,025	0,025	0,025	0,025	0,026	0,026	0,027	0,027

5.5. LA LOI DES VALEURS EXTRÊMES DE TYPE 1

Si X suit la loi de Gumbel, sa fonction de répartition F possède un couple de paramètres (ν, ρ) , défini comme annoncé en remarque 5.1.1., et donné par :

$$\begin{cases} \rho = \frac{\sigma}{\pi} \sqrt{6} > 0, \\ \nu = \mu - 0.57722 * \rho \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (5.5.1)$$

En effet voir par exemple Saporta (1990) pages 48, 265 et 266 puis Johnson, Kotz et Balakrishnan (1995) pages 11 et 12 ,

$$\begin{cases} E(X) = \nu + 0.57722 * \rho = \mu, \\ Var(X) = \frac{1}{6} \pi^2 \rho^2 = \sigma^2. \end{cases}$$

La fonction taux de panne r est définie par :

$$r(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}$$

où :

$$\begin{cases} F(x) = e^{-e^{-\frac{x-\nu}{\rho}}}, \\ f(x) = \frac{1}{\rho} e^{-\frac{x-\nu}{\rho}} e^{-e^{-\frac{x-\nu}{\rho}}}. \end{cases}$$

5.6. ÉTUDE DES VARIATIONS DE LA FONCTION TAUX DE PANNE ASSOCIÉE À LOI DES VALEURS EXTRÊMES DE TYPE 1

Dans cette section, j'écrirai la fonction r comme la composée de deux fonctions simples ξ et ζ . Les propriétés recherchées sur r seront simplement obtenues à partir de ξ et ζ . Décomposons la fonction r de la façon suivante :

$$r = \xi \circ \zeta \quad (5.6.1)$$

où ξ et ζ sont les fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - 0$ et sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} \xi(x) = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} \\ \zeta(x) = e^{-\frac{x-\nu}{\rho}} \end{cases} \quad (5.6.2)$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^*, \xi'(x) &= \frac{(e^{-x} - xe^{-x})(1 - e^{-x}) - xe^{-x}(e^{-x})}{\rho(1 - e^{-x})^2} \\ &= \frac{e^{-x}[(1-x)(1 - e^{-x}) - xe^{-x}]}{\rho(1 - e^{-x})^2} \\ &= \underbrace{1 - x - e^{-x}}_{\kappa(x)} \cdot \underbrace{\frac{e^{-x}}{\rho(1 - e^{-x})^2}}_{>0}. \end{aligned}$$

Donc $\xi'(x)$ a même signe que $\kappa(x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \kappa'(x) = e^{-x} - 1 \begin{cases} > 0 \text{ si } x < 0, \\ < 0 \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

Par ailleurs, il est évident que $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\kappa(x)] = -\infty$, que $\lim_{x \rightarrow -\infty} [\kappa(x)] = -\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow 0} [\kappa(x)] = 0$. Les variations de la fonction κ peuvent maintenant se résumer par la remarque suivante:

Remarque 5.6.1. *La fonction κ croît sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ de $-\infty$ à 0, puis décroît sur l'intervalle $]0, +\infty[$ de 0 à $-\infty$*

On en déduit que: $\forall x \in \mathbb{R}^*, \kappa(x) < 0$, donc que $\xi'(x) < 0$

On obtient alors la remarque suivante:

Remarque 5.6.2. *La fonction ξ est décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$*

Par ailleurs, il est évident que ζ est décroissante sur \mathbb{R} .

Puisque ζ est continue et strictement décroissante sur $] -\infty, 0[$,

$$\text{que } \zeta (]-\infty, 0[) = \left] \lim_{x \rightarrow 0} \zeta (x), \lim_{x \rightarrow -\infty} \zeta (x) \right[= \left] e^{\frac{\nu}{\rho}}, +\infty \right[$$

et que ξ est continue et strictement décroissante sur $\zeta (]-\infty, 0[)$,

alors l'égalité (5.6.1) permet de dire que r est continue et strictement croissante sur $] -\infty, 0[$. On démontre de la même façon que r est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Dans ce qui suit, je rappelle que $r_\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} r(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} \xi(x) \stackrel{(5.6.2)}{=} \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} \\ = \exp'(0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \xi(x) = \frac{1}{\rho} \end{array} \right\} \stackrel{(5.6.1)}{\Rightarrow} r_\infty = \frac{1}{\rho}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{-x}) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x}) = 0 \end{array} \right\} \stackrel{(5.6.2)}{\Rightarrow} \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \zeta(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \xi(x) = 0 \end{array} \right\} \stackrel{(5.6.1)}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow -\infty} r(x) = 0$$

X est une variable aléatoire «durée de vie». Elle prend ses valeurs x dans l'intervalle $]0, +\infty[$, avec un taux de panne $r(0)$ en 0 quasiment nul.

En effet, $r(0) = \frac{1}{\rho} \frac{e^{\frac{\nu}{\rho}}}{e^{\frac{\nu}{\rho}} - 1} \approx 4.10^{-14}$. Les variations de r seront résumées par la remarque suivante.

Remarque 5.6.3. La fonction taux de panne r est continue sur $]0, +\infty[$ et croît strictement sur $]0, +\infty[$ de $r(0) \approx 4.10^{-14}$ à $r_\infty = \frac{1}{\rho} \approx 0,00042$.

Il reste maintenant à constater sur la figure 5.6.13 que l'on a:

$$\forall (\alpha, \beta), r_\infty > \frac{\alpha}{\beta\mu}$$

En effet, la droite horizontale de hauteur $r_\infty = \frac{1}{\rho} \approx 0,00042$ (représentant graphiquement la fonction: $\delta \mapsto \frac{1}{\rho}$) est au-dessus de la représentation graphique de la fonction: $\delta \mapsto \frac{\alpha}{\beta\mu}$ où α et β sont des fonctions de δ (comme expliqué à la fin de la section 5.3.).

Par ailleurs, cette dernière représentation graphique (quasiment horizontale) permet de s'apercevoir que $\frac{\alpha}{\beta\mu}$ est une borne intéressante puisqu'en définitive elle est quasiment constante donc indépendante de δ (voir aussi le tableau 5.6.1).

En résumé, on retiendra ce qui suit.

- À partir des différents calculs numériques effectués dans ce chapitre, il a été possible de vérifier que sur l'exemple traité, le modèle étudié confirme les résultats de Cléroux, Dubuc et Tilquin (1979) obtenus on le sait pour la loi gamma, la loi normale tronquée et la loi de Weibull. Notamment le modèle vérifie que l'on améliore la politique classique de Barlow et Proschan (1965) en y intégrant les réparations et que le niveau du coût moyen optimal de maintenance est pratiquement indépendant de la distribution choisie.

- Il a été aussi possible de vérifier que le modèle étudié est une extension de celui de Cléroux, Dubuc et Tilquin (1979). En effet, avec un critère d'optimisation plus large, le modèle a permis d'utiliser une nouvelle distribution; celle des valeurs extrêmes de type 1 dont la fonction taux de panne est bornée contrairement aux trois autres. Les résultats obtenus avec cette quatrième distribution confirment ceux obtenus avec les trois autres.

TAB. 5.6.1. Calcul de $\frac{\alpha}{\beta\mu}$ en fonction de δ , où $\alpha = \beta + c_2$

δ	1	0,91	0,90	0,82	0,73	0,64	0,45	0,27	0,09
β	30594,92	10491,68	94440,93	4473,51	2377,75	1560,59	1070,46	1005,01	1000,07
$\frac{\alpha}{\beta\mu}$	0,00012	0,00012	0,00012	0,00012	0,00011	0,00011	0,00011	0,00011	0,00011

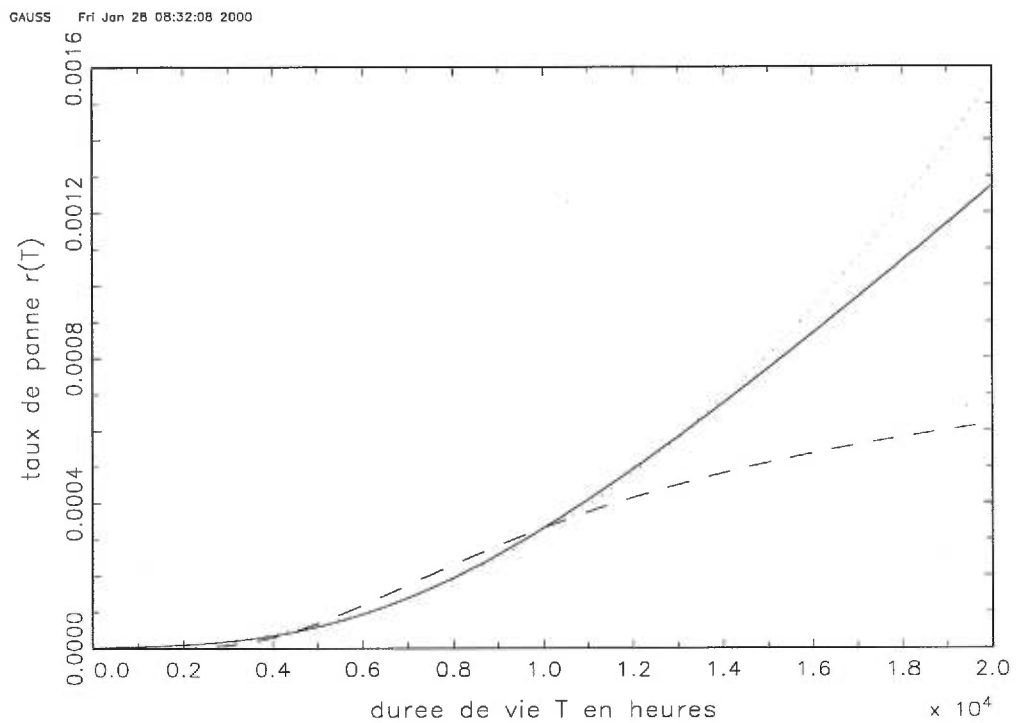


FIG. 5.6.1. Fonctions taux de panne associées à la loi normale tronquée en 0, à la loi gamma et à la loi de Weibull

- : loi normale tronquée en 0
- - - : loi gamma
- : loi de Weibull

GAUSS Fri Jan 28 08:40:37 2000

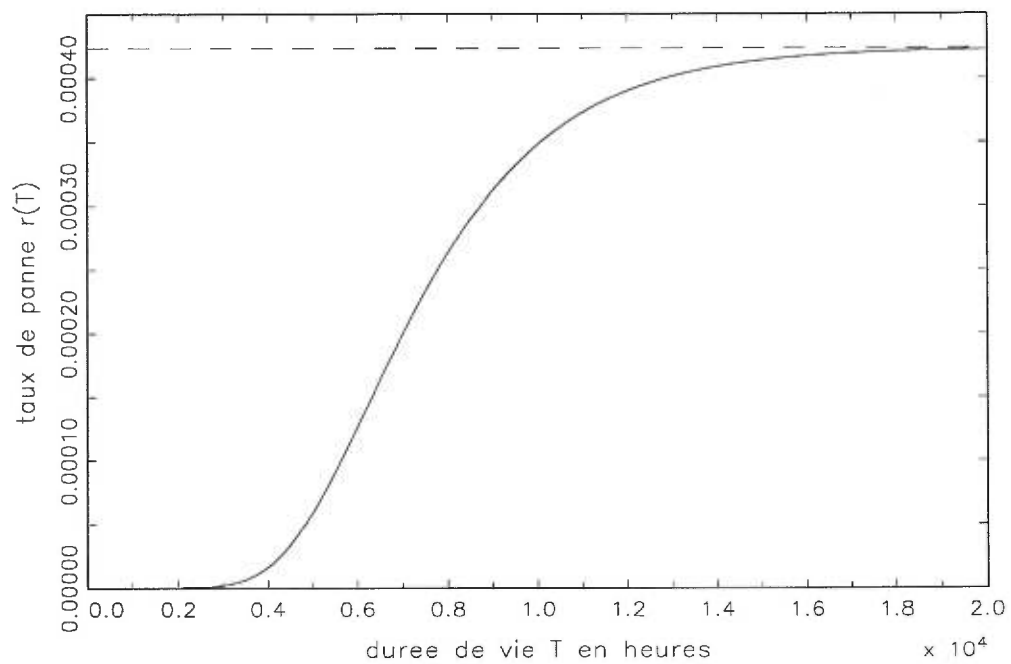


FIG. 5.6.2. Fonction taux de panne associée à la loi des valeurs extrêmes de type 1

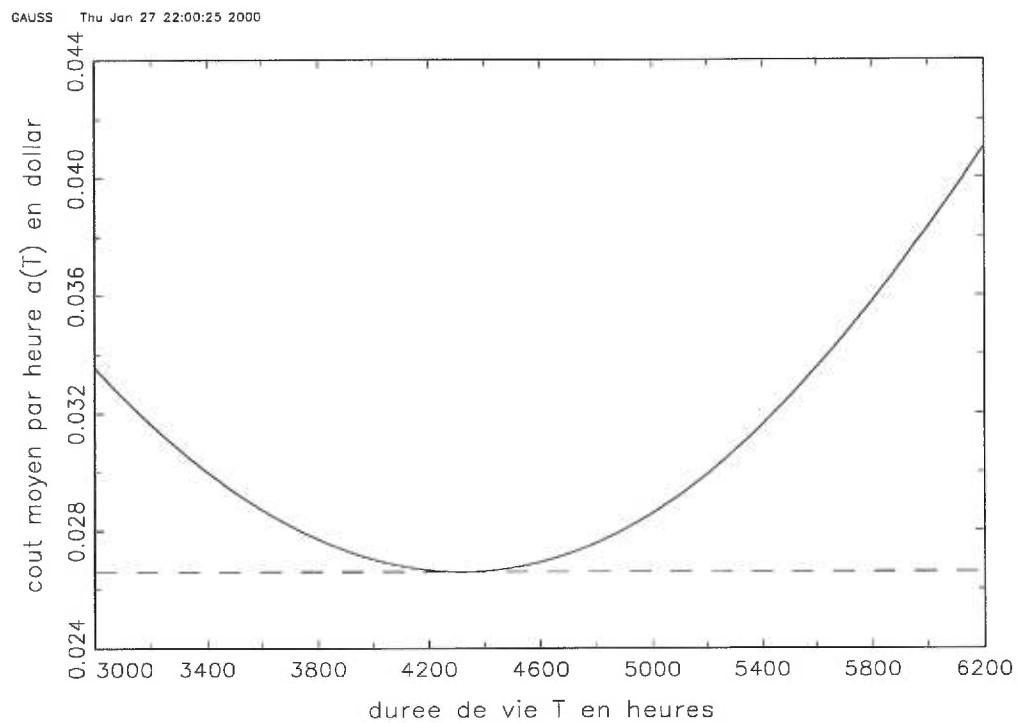


FIG. 5.6.3. *Fonction de coût associée à la loi des valeurs extrêmes de type 1 pour $\delta = 0,09$. $(T_0 ; a(T_0)) = (4318,02 ; 0,027)$*

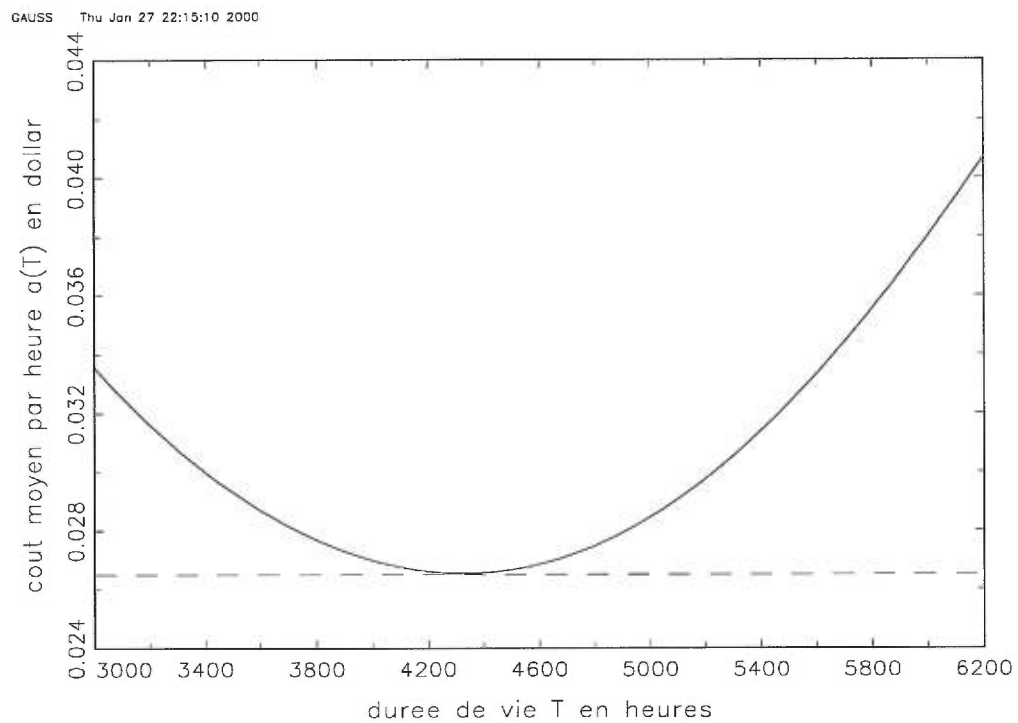


FIG. 5.6.4. *Fonction de coût associée à la loi des valeurs extrêmes de type 1 pour $\delta = 0,27$. $(T_0 ; a(T_0)) = (4328,02 ; 0,027)$*

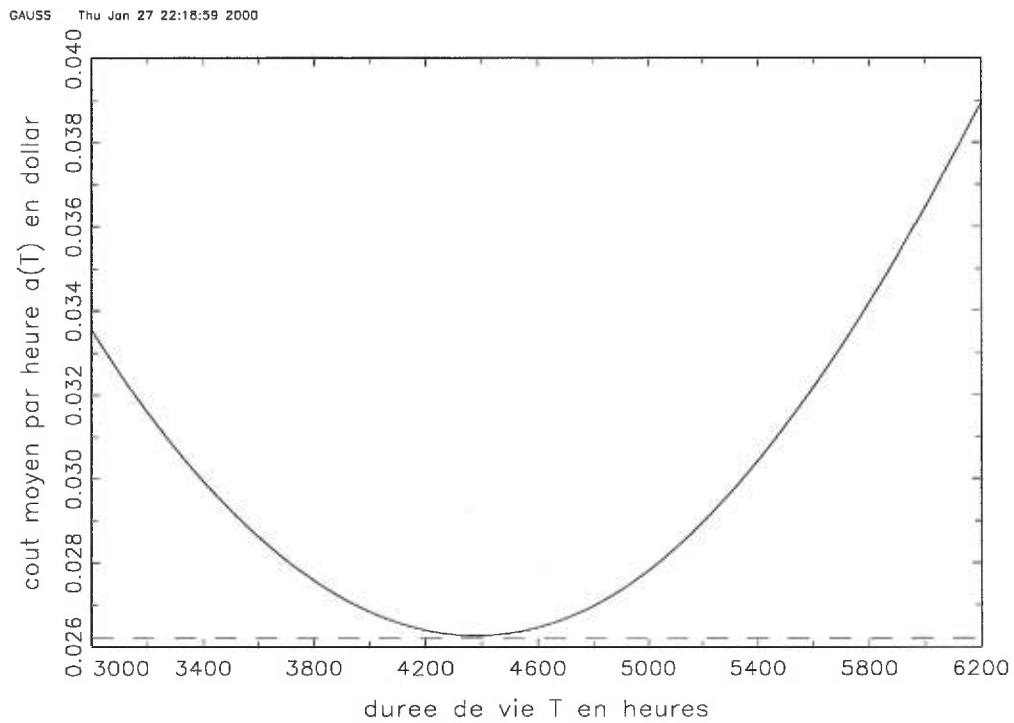


FIG. 5.6.5. *Fonction de coût associée à la loi des valeurs extrêmes de type 1 pour $\delta = 0,45$. $(T_0 ; a(T_0)) = (4379,21 ; 0,026)$*

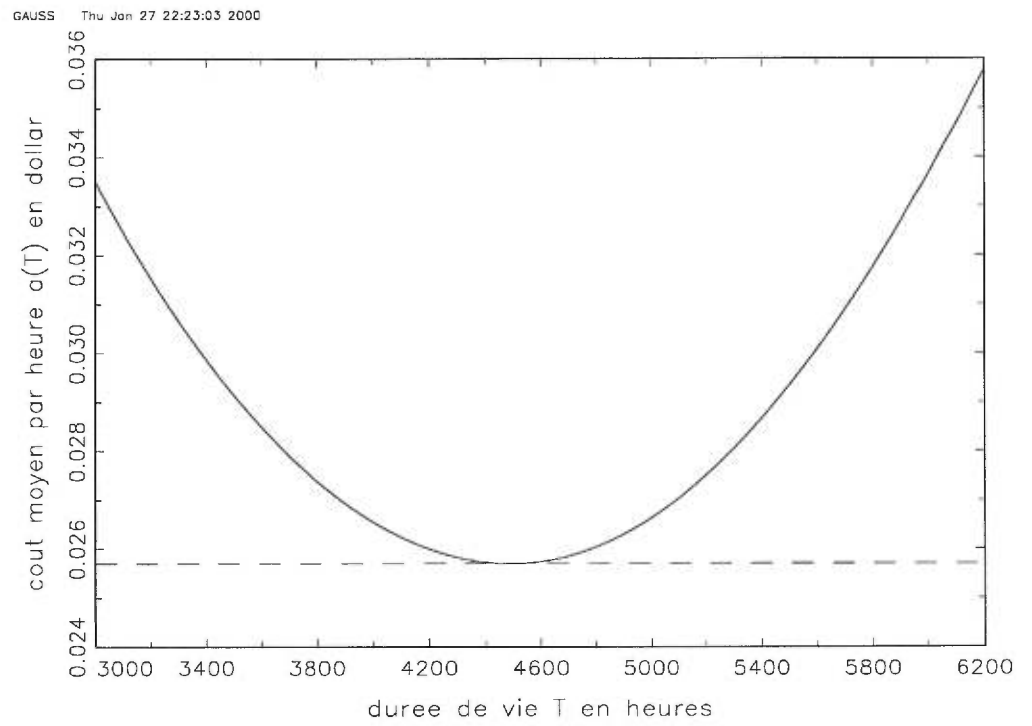


FIG. 5.6.6. *Fonction de coût associée à la loi des valeurs extrêmes de type 1 pour $\delta = 0,64$. $(T_0 ; a(T_0)) = (4489,50 ; 0,026)$*

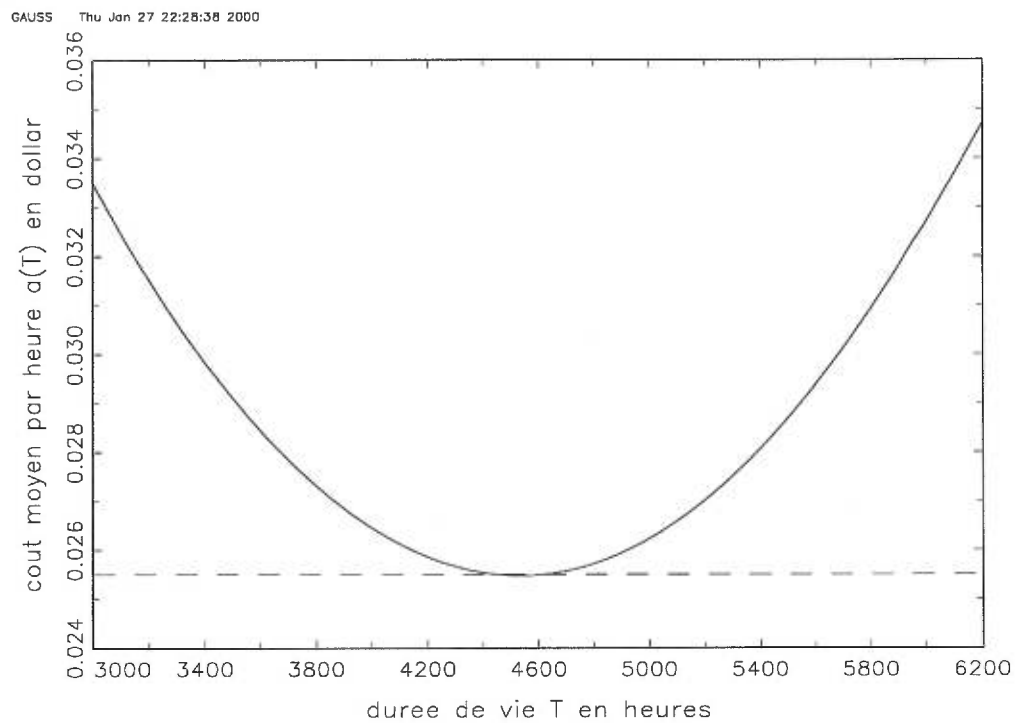


FIG. 5.6.7. *Fonction de coût associée à la loi des valeurs extrêmes de type 1 pour $\delta = 0,73$. $(T_0 ; a(T_0)) = (4532,61 ; 0,025)$*

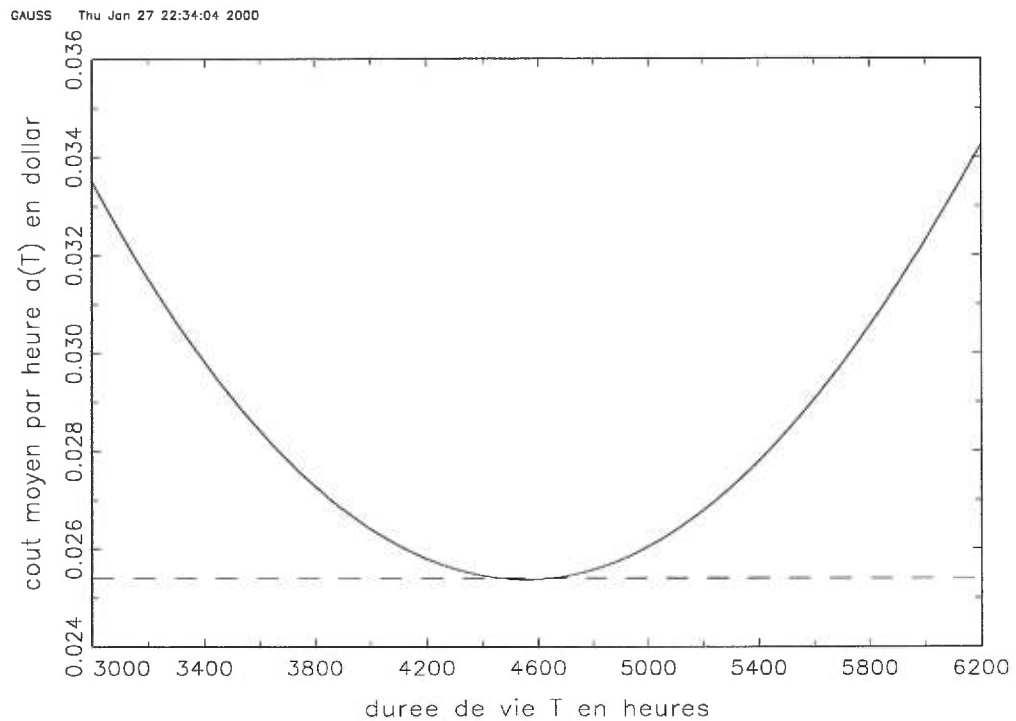


FIG. 5.6.8. *Fonction de coût associée à la loi des valeurs extrêmes de type 1 pour $\delta = 0,82$. $(T_0 ; a(T_0)) = (4554,31 ; 0,025)$*

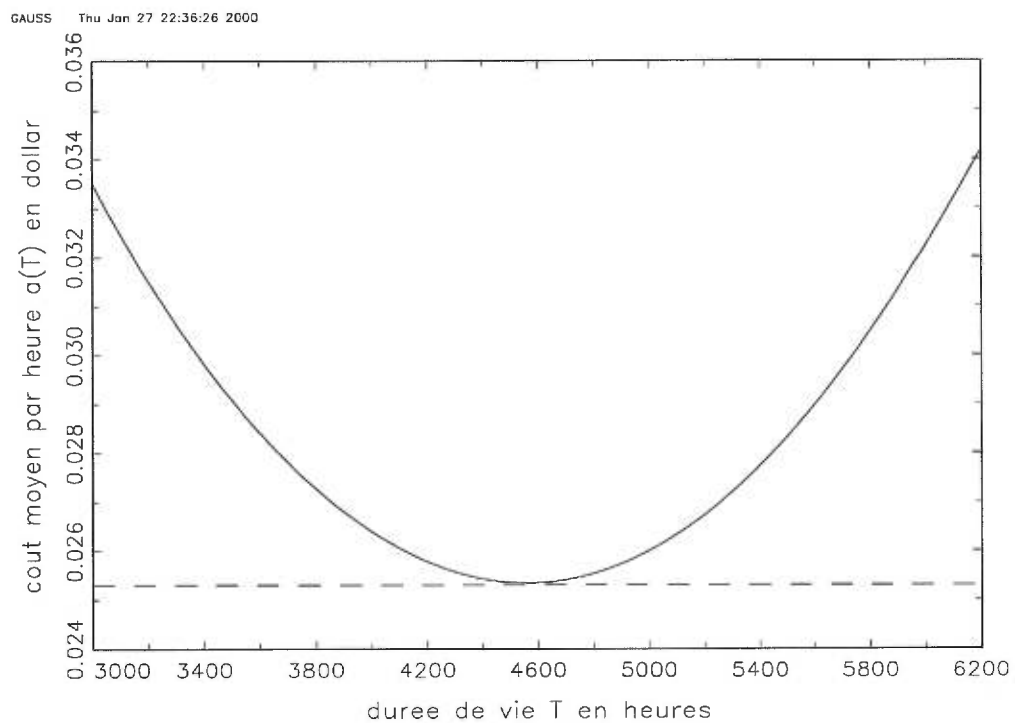


FIG. 5.6.9. *Fonction de coût associée à la loi des valeurs extrêmes de type 1 pour $\delta = 0,90$. $(T_0 ; a(T_0)) = (4559,09 ; 0,025)$*

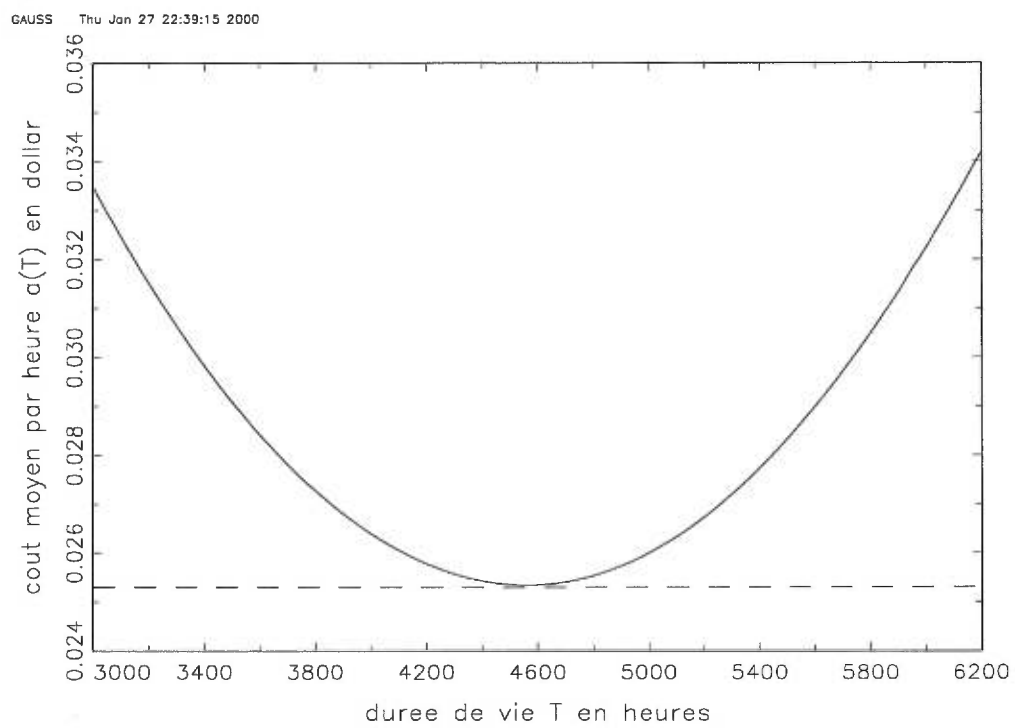


FIG. 5.6.10. *Fonction de coût associée à la loi des valeurs extrêmes de type 1 pour $\delta = 0,91$. $(T_0 ; a(T_0)) = (4559,12 ; 0,025)$*

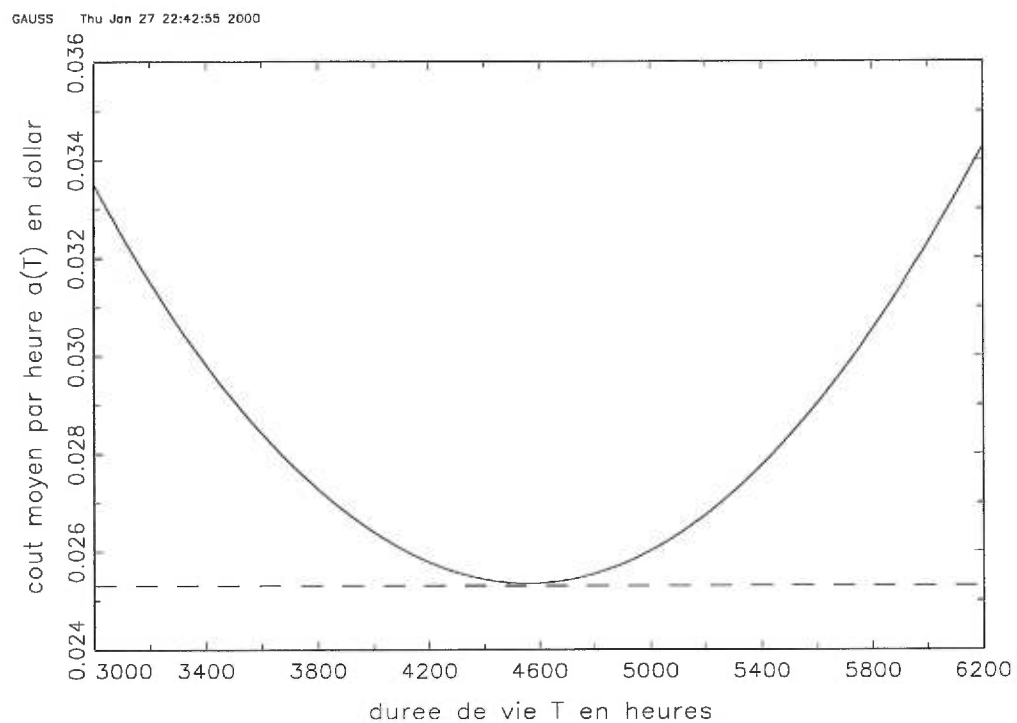


FIG. 5.6.11. *Fonction de coût associée à la loi des valeurs extrêmes de type 1 pour $\delta = 1$. $(T_0 ; a(T_0)) = (4557, 17 ; 0, 025)$*

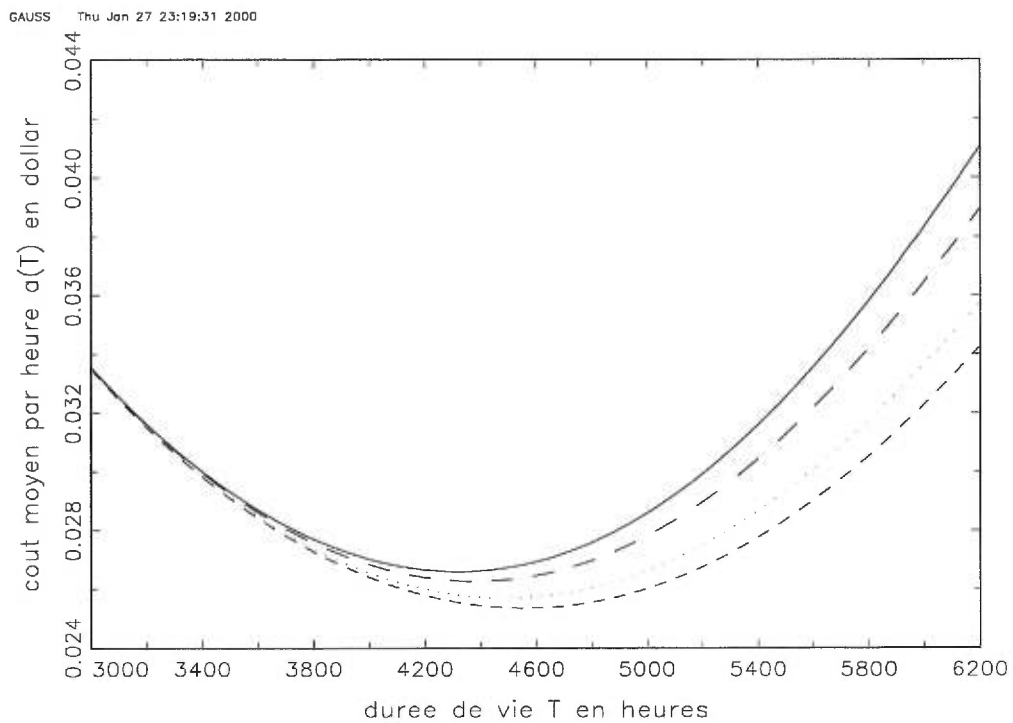


FIG. 5.6.12. *Fonction de coût associée à la loi des valeurs extrêmes de type 1 pour $\delta = 0,09$; 0,45 ; 0,64 ; 1* correspondant respectivement aux courbes de haut en bas.

GAUSS Fri Jan 28 08:58:21 2000

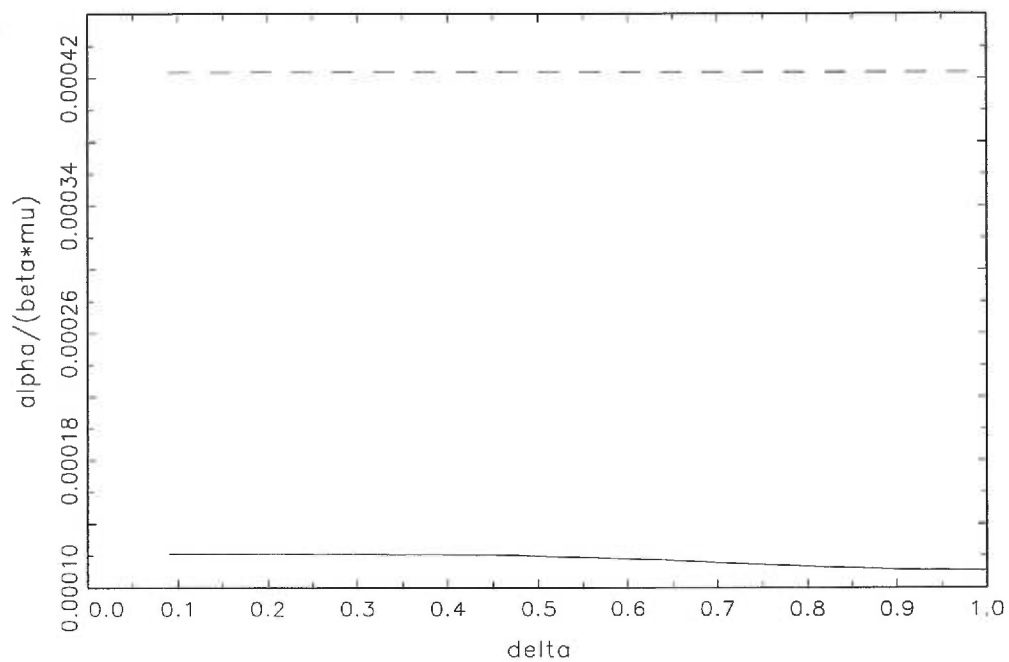


FIG. 5.6.13. Illustration graphique du critère d'optimisation " $r_\infty > \frac{\alpha}{\beta\mu}$ "

- : Comportement de la borne $\frac{\alpha}{\beta\mu}$ en fonction de δ
 - - - : Comportement de r_∞ en fonction de δ

CONCLUSION

Le développement théorique du modèle présenté dans ce mémoire montre qu'une condition suffisante à l'existence et à l'unicité d'une politique optimale de maintenance d'un système à taux de panne r est que r soit continue et croissante vers $r_\infty > \frac{\alpha}{\beta\mu}$. Cette condition n'étant pas nécessaire, il n'est pas exclu que d'autres critères permettent aussi l'optimisation du coût.

Sur le plan numérique : d'une part, ce modèle confirme les conclusions numériques de Cléroux, Dubuc et Tilquin (1979) obtenues pour la loi normale tronquée en 0, la loi gamma et la loi de Weibull. D'autre part, ce modèle innove en étendant les dites conclusions à la loi des valeurs extrêmes de type 1, qui certes est à fonction taux de panne r continue et croissante comme les trois autres, mais a la particularité d'être bornée.

Sur le plan théorique : ce modèle a l'avantage de généraliser celui de Cléroux, Dubuc et Tilquin (1979) grâce à son critère d'optimisation plus large, puis celui de Brown et Proschan (1983) en y intégrant des remplacements préventifs.

Cependant, comme indiqué plus haut, ce mémoire ne fait pas l'exhaustivité des critères d'optimisation. De plus, les calculs numériques n'ont porté que sur un seul exemple numérique. Il faut donc considérer les conclusions numériques du modèle comme étant une contribution à la problématique de l'optimisation du coût dans les politiques de maintenance de systèmes, en attendant que des calculs numériques faits sur la base de nombreux autres exemples numériques puissent permettre de tirer des conclusions plus générales.

Annexe A

PROGRAMME DE CALCUL DES QUATRE GRANDEURS INDÉPENDANTES DE F

```
@==Les 4 grandeurs indépendantes de  $F$  sont :  $q, \frac{c_m}{q}, \beta, \alpha$ ==@
c1= 1100; c2=100;
vecdel={0.09,0.27,0.45,0.64,0.73,0.82,0.90,0.91,1};@ valeurs prises par  $\delta$  @
vecres=zeros(rows(vecdel),4);
@ Calcul de  $q, c_m, \beta, \alpha$  @
cm=0;
deltac1=0;
i=1;
do while i<= rows(vecdel);
    deltac1=c1*vecdel[i];
    vecres[i,1]= intquad1(&func1x,deltac1|0) @ valeur de  $q$  @;
    cm=intquad1(&func1lx,deltac1|0) @ valeur de  $c_m$  @;
    vecres[i,2]=cm/vecres[i,1] @ valeur de  $\frac{c_m}{q}$  @;
    vecres[i,3]=c1-c2+cm/(1-vecres[i,1]) @ valeur de  $\beta$ @;
    vecres[i,4]= c1+cstar/(1-vecres[i,1]) @ valeur de  $\alpha$  @;
    i=i+1;
endo;
@=====définition des procédures =====@
```

```
proc func1x(x);
  local lx;
  lx = exp(-0.5 * (((x - 700)/200)2))/sqrt(2 * pi);
  retp(lx/cdfn(3.5)/200 );
endp;
proc func2x(t);
  local xlx;
  xlx = t. * exp(-0.5 * (((t - 700)/200)2))/sqrt(2 * pi);
  retp(xlx/cdfn(3.5)/200);
endp;
@==fin de définition des procédures=====@
print vecdel vecres ;
@ le fichier de sortie est lampgm1.out @
```

Annexe B

PROGRAMME DE CALCUL DE T_0 POUR LA DISTRIBUTION NORMALE TRONQUÉE EN 0

@=Programme zerok1.g :résolution numérique de l'équation : $b(T) = 0$, pour la distribution normale tronquée. Ce programme calcule les valeurs de T_0 correspondant au choix des paramètres q, α, β . Les valeurs de ces paramètres sont contenues dans le fichier lampgm1.out qui est le fichier de sortie du programme pgm1.g. ==@

@== Le fichier lampgm1.out qui est une matrice 9 lignes (les 9 valeurs de δ) et 5 colonnes ($\delta, q, \frac{cm}{q}, \beta, \alpha$), a été chargée dans la matrice param[9,5] par la commande load param[9,5] ==@

@== j décrit les numéros de ligne de δ , donc j varie de 1 à 9. Le cas présent j=1 indique que les calculs qui suivent sont faits pour $\delta = 0,09$ qui est la première valeur de δ . Pour obtenir les résultats avec d'autres valeurs de δ il suffit de prendre les valeurs de j correspondantes==@

mu=9080; sigma=3027;@== valeurs de μ et de σ ==@

j=1;

vectt=seqa(4145.12,0.01,10);@==le voisinage de T_0 est trouvé en exécutant ce programme de calcul de $b(T)$ plusieurs fois, de façon à encadrer T_0 en comparant $b(T)$ à 0==@

bt=zeros(rows(vectt),1);

```

q=param[j,2];
beta=param[j,4];
alpha=param[j,5];
i=1;
do while i<= rows(vectt);
bt[i]=rt(vectt[i])*func1(vectt[i]) +funcfbar(vectt[i]/(1-q) - alpha/beta/(1-q);
i=i+1;
endo;
@===définition des procédures =====@
proc rt(t);
local phit;
phit = exp(-0.5 * ((t - mu)/sigma)^2)/sqrt(2 * pi);
retp(phit/(1-cdfn((t-mu)/sigma))/sigma);
endp;
proc funcfbar(x);
local flt;
f1t = (cdfn((x - mu)/sigma) - cdfn(-mu/sigma))/cdfn(mu/sigma);
retp((1-flt)^(1-q));
endp;
proc func1(x);
retp(intquad1(&funcfbar,x|0));
endp;
@===fin de définition des procédures =====@
print vectt bt;
@===fin de zerok1.g =====@

```

Le fichier de sortie contient le vecteur des T_0 correspondant au vecteur des δ .

Ce vecteur des T_0 est noté `vect0` dans le prochain programme `pgm2k1.g`

Annexe C

PROGRAMME DE CALCUL DE GRANDEURS OPTIMALES POUR LA DISTRIBUTION NORMALE TRONQUÉE EN 0

@=programme pgm2k1.g: Ce programme calcule les grandeurs citées et correspondant aux choix des paramètres q , α et β . La première colonne du fichier de résultats (pgm2k1.out) contient les valeurs de T_0 et les 4 colonnes suivantes contiennent respectivement les valeurs de $E(Y_0^*)$, $E(N(Y_0^*))$, $E(W_0^*)$ et $a(T_0)$. Comme dans le programme précédent, le fichier lampgm1.out qui est une matrice 9 lignes (les 9 valeurs de δ) et 5 colonnes (δ , q , $\frac{c_m}{q}$, β , α), a été chargée dans la matrice param[9,5] par la commande load param[9,5];=@

```
vect0={4145.17, 4163.44, 4256.33, 4453.07, 4528.32, 4565.30, 4572.79,  
4572.75, 4568.75};@==vecteur des  $T_0$  correspondant au vecteur des  $\delta$ ==@  
c1=1100; c2=100; mu=9080; sigma=3027;  
result2=zeros(rows(vect0),4);  
j=1;  
do while j<= rows(vect0);  
q=param[j,2];  
cmq=param[j,3];@==vecteur des  $\frac{c_m}{q}$  correspondant au vecteur des  $\delta$ ==@  
beta=param[j,4];@==vecteur des  $\beta$  correspondant au vecteur des  $\delta$ ==@
```

```

alpha=param[j,5];@==vecteur des  $\alpha$  correspondant au vecteur des  $\delta$ ==@
t0=vect0[j];@== coordonnée numéro j de vect0 ==@
result2[j,1]=func1(t0);
result2[j,2]=(q/(1-q))*(1-funcfbar(t0));
result2[j,3]=cmq*result2[j,2];
result2[j,4]=((beta*(1-q)/q)*result2[j,2]+c2)/result2[j,1];
j=j+1;
endo;
@===définition des procédures =====@
proc funcfbar(x);
local flt;
flt=(cdfn((x-mu)/sigma) - cdfn(-mu/sigma))/cdfn(mu/sigma);
retp((1-flt)1-q);
endp;
proc func1(x);
retp(intquad1(&funcfbar,x|0));
endp;
@===fin de définition des procédures=====@
print vect0 result2;
@=====fin de pgm2k1.g =====@

```

Annexe D

CALCUL NUMÉRIQUE DE T_0 POUR LA DISTRIBUTION NORMALE TRONQUÉE EN 0

T_0 est la solution obtenue numériquement de l'équation $b(T) = 0$

	T	$b(T)$	
$\delta = 1$	4568.70	$-5.4e - 06$	
	4568.71	$-4.2e - 06$	
	4568.72	$-3.1e - 06$	
	4568.73	$-1.9e - 06$	
	4568.74	$-7.8e - 07$	
	4568.75	$3.7e - 07$	$T_0 = 4568.75$
	4568.76	$1.5e - 06$	
	4568.77	$2.7e - 06$	
	4568.78	$3.8e - 06$	
	4568.79	$5.0e - 06$	

$\delta = 0.91$	{	4572.70	$-5.4e-06$	
		4572.71	$-4.3e-06$	
		4572.72	$-3.1e-06$	
		4572.73	$-2.0e-06$	
		4572.74	$-8.1e-07$	
		4572.75	$3.4e-07$	$T_0 = 4572.75$
		4572.76	$1.5e-06$	
		4572.77	$2.6e-06$	
		4572.78	$3.8e-06$	
		4572.79	$4.9e-06$	
$\delta = 0.90$	{	4572.74	$-5.4e-06$	
		4572.75	$-4.3e-06$	
		4572.76	$-3.1e-06$	
		4572.77	$-2.0e-06$	
		4572.78	$-8.4e-07$	
		4572.79	$3.0e-07$	$T_0 = 4572.79$
		4572.80	$1.5e-06$	
		4572.81	$2.6e-06$	
		4572.82	$3.8e-06$	
		4572.83	$4.9e-06$	

$\delta = 0.82$	{	4565.25	$- 5.2e - 06$	
		4565.26	$- 4.1e - 06$	
		4565.27	$- 2.9e - 06$	
		4565.28	$- 1.8e - 06$	
		4565.29	$- 6.6e - 07$	
		4565.30	$4.9e - 07$	$T_0 = 4565.30$
		4565.31	$1.6e - 06$	
		4565.32	$2.8e - 06$	
		4565.33	$3.9e - 06$	
		4565.34	$5.1e - 06$	
$\delta = 0.73$	{	4528.27	$- 4.7e - 06$	
		4528.28	$- 3.6e - 06$	
		4528.29	$- 2.5e - 06$	
		4528.30	$- 1.4e - 06$	
		4528.31	$- 2.9e - 07$	
		4528.32	$8.2e - 07$	$T_0 = 4528.32$
		4528.33	$1.9e - 06$	
		4528.34	$3.0e - 06$	
	4528.35	$4.2e - 06$		
	4528.36	$5.3e - 06$		

$\delta = 0.64$	{	4453.02	$- 5.1e - 06$	
		4453.03	$- 4.0e - 06$	
		4453.04	$- 2.9e - 06$	
		4453.05	$- 1.9e - 06$	
		4453.06	$- 8.2e - 07$	
		4453.07	$2.4e - 07$	$T_0 = 4453.07$
		4453.08	$1.3e - 06$	
		4453.09	$2.4e - 06$	
		4453.10	$3.4e - 06$	
		4453.11	$4.5e - 06$	
$\delta = 0.45$	{	4256.28	$- 4.6e - 06$	
		4256.29	$- 3.6e - 06$	
		4256.30	$- 2.7e - 06$	
		4256.31	$- 1.7e - 06$	
		4256.32	$- 8.3e - 07$	
		4256.33	$1.0e - 07$	$T_0 = 4256.33$
		4256.34	$1.0e - 06$	
		4256.35	$2.0e - 06$	
		4256.36	$2.9e - 06$	
		4256.37	$3.8e - 06$	

$\delta = 0.27$	{	4163.39	$- 4.3e - 06$	
		4163.40	$- 3.4e - 06$	
		4163.41	$- 2.6e - 06$	
		4163.42	$- 1.7e - 06$	
		4163.43	$- 8.1e - 07$	
		4163.44	$6.5e - 08$	$T_0 = 4163.44$
		4163.45	$9.4e - 07$	
		4163.46	$1.8e - 06$	
		4163.47	$2.7e - 06$	
		4163.48	$3.6e - 06$	
$\delta = 0.09$	{	4145.12	$- 3.9e - 06$	
		4145.13	$- 3.0e - 06$	
		4145.14	$- 2.1e - 06$	
		4145.15	$- 1.3e - 06$	
		4145.16	$- 4.2e - 07$	
		4145.17	$4.5e - 07$	$T_0 = 4145.17$
		4145.18	$1.3e - 06$	
		4145.19	$2.2e - 06$	
		4145.20	$3.0e - 06$	
		4145.21	$3.9e - 06$	

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. AIT KADI AND R. CLÉROUX, *Replacement Strategies with Mixed Corrective Actions at Failure*, Computer and Operations Research, 18(2), 141-149, 1991.
- [2] D. S. BAI AND W. Y. YUN, *An Age Replacement Policy with Minimal Repair Cost Limit*, IEEE Transactions on Reliability, R-35(4), 452-454, 1986.
- [3] R. BARLOW AND L. HUNTER, *Optimum Preventive Maintenance Policies*, Operations Research Society of America, 8(1), 90-100, 1960.
- [4] R. BARLOW AND F. PROSCHAN, *Mathematical Theory of Reliability*, John Wiley & Sons, 1965.
- [5] F. BEICHELT, *A Unifying Treatment of Replacement Policies with Minimal Repair*, Naval Research Logistics, 40, 51-67, 1993.
- [6] M. BERG, M. BIENVENU AND R. CLÉROUX, *Age Replacement Policy with Age-Dependent Minimal Repair*, Infor, 24, 26-32, 1986.
- [7] H. W. BLOCK, W. S. BORGES AND T. H. SAVITS, *A General Age Replacement Model with Minimal Repair*, Naval Research Logistics, 35, 365-372, 1988.
- [8] M. BROWN AND F. PROSCHAN, *Imperfect Repair*, Journal of Applied Probability, 20, 851-859, 1983.
- [9] R. CLÉROUX, S. DUBUC AND C. TILQUIN, *The Age Replacement Problem with Minimal Repair and Random Repair Costs*, Journal of the Operations Research Society of America, 27(6), 1158-1167, 1979.
- [10] R. A. FONTENOT AND F. PROSCHAN, *Some Imperfect Maintenance Models*, in Reliability Theory and Models, 83-101, Academic Press, Orlando, 1984.
- [11] G. J. GLASSER, *The Age Replacement Problem*, Technometrics 9, 83-91, 1967.
- [12] M. HANSCOM AND R. CLÉROUX, *The Block Replacement Problem*, Journal of Statistical Computer Simulation, 3, 233-248, 1975.

- [13] N.L. JOHNSON, S. KOTZ AND N. BALAKRISHNAN, *Continuous Univariate Distributions*, John Wiley & Sons, 1995.
- [14] P.K. KAPUR, R. B. GARG AND N. L. BUTANI, *Some Replacement Policies with Minimal Repairs and Repair Cost Limit*, International Journal of Systems Science, 20(2), 267-279, 1989.
- [15] S.M. ROSS, *Applied Probability Models with Optimization Applications*, Holden-Day, 1970.
- [16] G. SAPORTA, *Probabilités Analyse des données et Statistique*, Éditions Technip, Paris, 1990.
- [17] T.H. SAVITS, *A Cost Relationship between Age and Block Replacement Policies*, Journal of Applied Probability, 25, 789-796, 1988.
- [18] C. TILQUIN AND R. CLÉROUX, *Periodic Replacement with Minimal Repair at Failure and General Cost Function*, Journal of Statistical Computer Simulation, 4, 63-77, 1975.