

Université de Montréal

Comportement asymptotique des splines
des moindres carrés en estimation fonctionnelle

par

Marie-Claude Guertin

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Philosophiae Doctor (Ph.D.)

en statistique

Février 1999

© Marie-Claude Guertin, 1999



Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Cette thèse de doctorat intitulée :
Comportement asymptotique des splines
des moindres carrés en estimation fonctionnelle

présentée par

Marie-Claude Guertin

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Président-rapporteur :	Yves Lepage
Directeur de recherche :	Gilles Ducharme
Membre du jury :	Jean-François Angers
Examineur externe :	Robert Sabatier

Sommaire

On peut succinctement résumer cette thèse en disant qu'elle se penche sur le problème de faire parler une série de points (X_i, Y_i) , $i = 1, \dots, n$, en utilisant comme outils les splines de régression.

Elle est constituée de cinq chapitres. Le premier introduit le problème et discute de la place des splines de régression dans l'univers de la régression non paramétrique. Les différentes sections qui le composent visent principalement à présenter des notions indispensables à une bonne compréhension du reste du travail. Ainsi, on discute des propriétés des B-splines, lesquels forment une base pour l'espace des fonctions splines, dans les sections 1.1, 1.2 et 1.4. Dans la section 1.3, on définit le concept de norme matricielle et un bref portrait des polynômes de Bernoulli, qui jouent un rôle important dans le chapitre 2, est brossé à la section 1.5.

Le chapitre 2 porte sur l'aspect mathématique des splines de régression, c'est-à-dire leurs qualités comme objets d'approximation. La projection en norme $L_2[0,1]$ d'une fonction inconnue $f(\cdot)$ sur une classe de fonctions approximantes composée de splines est définie comme étant la meilleure approximation en norme $L_2[0,1]$ de $f(\cdot)$ parmi les splines de cette classe. Cette projection, qu'on note $s_f(\cdot)$, peut s'exprimer sous une forme faisant intervenir un noyau dont les principales propriétés sont décrites à la section 2.1. Tout au long de la section 2.2, on exploite ces propriétés pour caractériser, de façon extrêmement précise, l'erreur d'approximation $f(\cdot) - s_f(\cdot)$.

Les chapitres 3 et 4 portent quant à eux sur l'utilisation des splines dans des contextes statistiques. Présument qu'une certaine fonction inconnue

se profile derrière les points observés, le chapitre 3 s'interroge sur le comportement du spline obtenu par la méthode des moindres carrés en tant qu'estimateur de cette fonction. On y démontre qu'en contrôlant adéquatement la croissance du nombre de noeuds et du nombre d'observations, l'estimateur spline est asymptotiquement normal et sans biais sous des conditions de régularité que nous avons tenté de maintenir aussi peu restrictives que possible. Dans la section 3.1, la démonstration s'inscrit dans le contexte déterministe où les X_i sont choisis par l'expérimentateur alors que la section 3.2 s'insère dans le contexte stochastique où les (X_i, Y_i) sont plutôt des couples de variables aléatoires.

Le chapitre 4 s'emploie à métamorphoser l'estimateur spline du chapitre 3 qui s'exprime incidemment comme une combinaison linéaire des Y_i . Ainsi, à la section 4.1, on le dérive l fois pour obtenir un estimateur de la l -ième dérivée de la fonction qui sous-tend les points observés. Il s'avère que ce simple exercice nous dote d'un estimateur asymptotiquement normal et sans biais; les sections 4.1.1 et 4.1.2 le démontrent sous certaines conditions dans les contextes déterministe et stochastique respectivement. A la section 4.2, également scindée en deux pour tenir compte des différents contextes, on lui substitue ses Y_i par les fonctions indicatrices $1_{(Y_i \leq y)}$ et on discute des propriétés asymptotiques de l'estimateur de la fonction de répartition conditionnelle qui résulte de cette manipulation.

Cette thèse se clôt au chapitre 5 par une conclusion générale et une invitation à explorer de nouvelles avenues de recherche.

L'annexe A contient les démonstrations des résultats énoncés sans preuve dans la section 1.4.

Table des matières

Sommaire	i
Table des matières	iii
Chapitre 1: Introduction	1
1.1 Propriétés des B-splines	5
1.2 Dérivées des B-splines	8
1.3 Normes matricielles	12
1.4 Propriétés de la matrice M	15
1.5 Polynômes de Bernoulli	18
Chapitre 2: Splines de régression et qualité d'approximation	20
2.1 Propriétés du noyau	25
2.2 Erreur d'approximation	30
Chapitre 3: Aspects statistiques	60
3.1 Contexte déterministe	61
3.2 Contexte stochastique	87
Chapitre 4: Extensions	110
4.1 Dérivées de l'estimateur spline	110
4.1.1. Contexte déterministe	111
4.1.2. Contexte stochastique	122
4.2 Fonction de répartition conditionnelle	128
4.2.1. Contexte déterministe	128

4.2.2. Contexte stochastique	138
Chapitre 5: Conclusion	151
5.1 Noeuds optimaux	151
5.2 Estimation de la fonction de répartition conjointe	155
5.3 Fonctionnelles de la fonction de répartition conditionnnelle	156
5.4 Conclusion	158
Bibliographie	160
Annexe A	v
Remerciements	xxii

Chapitre 1

Introduction

Dans plusieurs champs d'étude, et tout spécialement dans le domaine biomédical, il est courant d'être confronté à une série de points (x_i, Y_i) , $i = 1, \dots, n$, dont on veut préciser le comportement. Un exemple tiré d'un lointain passé remonte au comte de Montbeillard qui, au 18-ième siècle, mesura la taille de son fils (Y_i) à des âges différents (x_i), pendant plus de 17 ans, dans le but d'établir sa courbe de croissance (Scammon (1927)). D'autres paramètres biologiques peuvent aussi être envisagés: concentration d'un médicament dans le sang en fonction du temps après l'administration, quantité d'anesthésiants requis lors d'une chirurgie en fonction du volume sanguin transfusé, poids de naissance en fonction de l'âge gestationnel, etc.

Dans ces situations, on suppose souvent que derrière les points observés se profile une fonction $f(\cdot)$ unissant les x aux Y . Plus précisément, on émet l'hypothèse d'un modèle sous-jacent du type

$$Y_i = f(x_i) + \varepsilon_i,$$

$i = 1, \dots, n$, où les ε_i sont des erreurs aléatoires. La fonction $f(\cdot)$ étant inconnue, il faut l'estimer et pour ce faire, différentes stratégies sont possibles. L'une d'elles, largement répandue, consiste à utiliser la régression polynomiale où on remplace la fonction $f(\cdot)$ du modèle par un polynôme $p(\cdot)$ de degré donné. Les polynômes sont des objets faciles à manipuler dont l'usage est principalement cautionné par les théorèmes de Weierstrass et Taylor qui assurent que localement, toute fonction continue sur un intervalle borné peut être approchée d'aussi près que l'on veut par un polynôme de degré d pour peu que d

soit suffisamment grand. Des oscillations indésirables peuvent cependant résulter d'un degré trop élevé (Eubank (1984)) et, un polynôme étant globalement déterminé, son ajustement dans une région du domaine d'intérêt a un impact sur tout le domaine.

De ces limitations des polynômes a germé l'idée qu'on pouvait user du théorème de Taylor avec plus de discernement en estimant le reste plutôt qu'en le négligeant. C'est ce qui a donné naissance aux splines qui sont, en quelques mots, des polynômes par morceaux dont les points de jonction sont appelés noeuds. Des conditions de continuité peuvent être imposées en ces noeuds de façon à ce que le spline possède un certain degré de continuité. Les splines partagent la simplicité des polynômes, mais ils les surclassent par une plus grande souplesse qui permet un ajustement local.

Les splines ont d'abord été étudiés comme objets d'approximation dans un contexte mathématique. Schoenberg, dans les années 50, fut sans doute le premier à se pencher sur leurs propriétés mathématiques et après lui, d'autres ont suivi. Leur utilisation en statistique est cependant moins bien explorée. Dans ce travail, nous débutons aussi par l'aspect mathématique; avant d'en faire des outils statistiques, il importe en effet de préciser jusqu'à quel point les splines peuvent s'approcher d'une fonction inconnue $f(\cdot)$. Le chapitre 2 se penche sur les propriétés des splines de régression comme classe de fonctions approximantes et répond à la question en caractérisant, avec une remarquable acuité, l'erreur d'approximation. Les chapitres subséquents se concentrent sur l'aspect statistique. Au chapitre 3, on démontre que l'estimateur spline obtenu par la méthode des moindres carrés possède, sous certaines conditions de régularité, une distribution asymptotiquement normale quand le nombre de points observés et le nombre de noeuds tendent vers l'infini. On fait aussi

la preuve qu'il est asymptotiquement sans biais pour la fonction inconnue si la croissance du nombre de points est convenablement contrôlée. Le chapitre 4 étend les résultats du chapitre 3 en examinant le comportement asymptotique des dérivées de l'estimateur spline, lesquelles, on le devine, seront liées aux dérivées de $f(\cdot)$, et en proposant un estimateur pour la fonction de répartition conditionnelle de Y . Notre travail s'achève sur le chapitre 5 qui offre quelques pistes pour des recherches futures.

Avant de poursuivre, attardons-nous brièvement à situer la régression spline parmi les autres méthodes de régression non paramétrique (non paramétrique parce qu'on refuse d'affubler $f(\cdot)$ d'une forme fonctionnelle connue à quelques paramètres près). Les splines se retrouvent en fait aux confins de plusieurs méthodes.

Leur parenté avec les polynômes n'est plus à démontrer. L'idée des polynômes est d'approcher la fonction $f(\cdot)$ par des combinaisons linéaires de puissances de x . Il est cependant tout naturel de penser substituer d'autres fonctions aux puissances de x et c'est ce qui est à la base des séries de Fourier qui se présentent comme des combinaisons linéaires de sinus et de cosinus, mais qui peuvent aussi s'exprimer sous la forme d'estimateurs du noyau (Eubank (1988)).

Au chapitre 2, on exprimera les splines sous une forme faisant intervenir un noyau, ce qui mettra en lumière le fait qu'eux aussi entretiennent un lien étroit avec les estimateurs du noyau. Pour contrer les effets de bords cependant, c'est-à-dire le fait que l'estimation est toujours plus difficile aux frontières de l'intervalle d'intérêt qu'au centre en raison d'une densité moins grande d'observations (Härdle (1990), p. 130), les estimateurs du noyau doi-

vent être adaptés (Gasser et Müller (1979)) alors que les splines ont l'élégance de n'exiger aucune manipulation particulière (Agarwal et Studden (1980)).

La régression polynomiale locale, une autre méthode produisant des estimateurs dont l'écriture transite par des noyaux, partage avec la régression spline l'avantage de s'adapter à l'estimation aux frontières sans qu'il ne soit nécessaire de procéder à de quelconques ajustements (Fan et Gijbels (1996)). Cette méthode récente provoque un engouement de plus en plus grand chez les expérimentateurs et ses belles propriétés en font peut-être le compétiteur le plus sérieux à la régression spline développée dans ce travail.

Soulignons aussi l'approche des ondelettes qui gagne en popularité bien qu'elle semble surtout performante lorsqu'un nombre imposant d'observations sont disponibles. Les splines y sont liés car la construction d'ondelettes s'opère à partir de fonctions de base dont les splines font partie (Donoho et Johnstone (1994)).

Nous ne pouvons clore cette brève revue des méthodes de régression non paramétrique sans mentionner les splines de lissage. Il s'agit de splines présentant n noeuds se confondant avec les observations x_i ; c'est d'ailleurs ce qui les distingue principalement des splines de régression qui ont l'avantage de dépendre de moins de noeuds, et donc de considérablement moins de paramètres (Ramsay (1988)). On peut aussi les exprimer sous la forme d'estimateurs du noyau si on ne joute pas les frontières de l'intervalle d'intérêt de trop près (Silverman (1984)) et tout comme les estimateurs issus de la régression polynomiale locale, ils ne présentent pas d'effets de bords (Eubank (1988), p. 325). Mentionnons aussi que les résultats que l'on trouve dans Cox (1984) montrent que sous certaines conditions restreignantes (la finitude du dixième

moment des erreurs ε_i entre autres), les splines de lissage sont asymptotiquement de loi normale.

Lorsqu'on ignore la forme fonctionnelle de la fonction $f(\cdot)$ du modèle, la régression spline est, avec la régression polynomiale et les séries de Fourier, certainement l'une des méthodes les plus faciles à utiliser. La raison en est fort simple: une fois que les noeuds sont déterminés, elle ne présente pas de plus grand défi que la régression usuelle en termes de calcul et d'obtention d'estimateurs. Les splines ont aussi la particularité d'être conceptuellement simples; ce ne sont après tout que des polynômes mis bout à bout. Le présent travail vise à exhiber leurs remarquables qualités dans le but de promouvoir leur utilisation.

Le reste de ce chapitre est voué à la présentation de concepts de base, de notions et de définitions qui préparent le terrain pour la suite.

1.1 Propriétés des B-splines

Aux chapitres 9 et 10 de son bouquin de 1978, DeBoor discute abondamment des B-splines. On peut y trouver des références pour à peu près tout ce qui est présenté dans cette section.

Un spline $s(x, \theta)$ de degré d , avec coefficients $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{k+d+1})'$ et noeuds $\tau = (\tau_{-d}, \dots, \tau_{k+d+1})'$ satisfaisant $0 = \tau_{-d} = \dots = \tau_0 < \tau_1 \leq \dots \leq \tau_k < \tau_{k+1} = \dots = \tau_{k+d+1} = 1$ et $\tau_{i-d-1} < \tau_i, i = 1, \dots, k+d+1$, peut s'écrire sous la forme $s(x, \theta) = \sum_{i=1}^{k+d+1} \theta_i N_{d,i}(x, \tau)$ où les B-splines normalisés sont définis par

$$\begin{aligned} N_{d,i}(x, \tau) &= (\tau_i - \tau_{i-d-1})[\tau_{i-d-1}, \dots, \tau_i](t-x)_+^d \\ &= [\tau_{i-d}, \dots, \tau_i](t-x)_+^d - [\tau_{i-d-1}, \dots, \tau_{i-1}](t-x)_+^d \end{aligned} \quad (1.1)$$

où $[y_1, \dots, y_n]g(y)$ désigne l'opérateur des différences divisées et où $(t-x)_+^d$ est égal à $(t-x)^d$ si $t-x > 0$ et est nul sinon. La seconde égalité découle des propriétés des différences divisées (Isaacson et Keller (1966)). On liste ici les principales caractéristiques des B-splines.

(i) L'ensemble $\{N_{d,1}(x, \tau), \dots, N_{d,k+d+1}(x, \tau)\}$ forme une base de l'espace vectoriel des fonctions splines de degré d et de noeuds τ .

(ii) Les B-splines sont localement définis, c'est-à-dire que $\forall i = 1, \dots, k+d+1$, $0 < N_{d,i}(x, \tau) \leq 1$ si $x \in (\tau_{i-d-1}, \tau_i)$ et $N_{d,i}(x, \tau) = 0$ sinon. En particulier, ils sont nuls aux extrémités de leur support: $N_{d,i}(\tau_{i-d-1}, \tau) = N_{d,i}(\tau_i, \tau) = 0$.

(iii) Les B-splines "partitionnent l'unité" car $\forall x \in [0, 1]$,

$$\sum_{i=1}^{k+d+1} N_{d,i}(x, \tau) = 1.$$

(iv) L'intégrale d'un B-spline est donnée par

$$\int_0^1 N_i(x, \tau) dx = \frac{(\tau_i - \tau_{i-d-1})}{d+1}.$$

Une conséquence importante de la propriété (ii) réside dans le fait que si $x \in [\tau_r, \tau_{r+1}]$ pour un certain indice $r \in \{0, \dots, k\}$, seuls les B-splines $N_{d,r+1}(x, \tau), \dots, N_{d,r+d+1}(x, \tau)$ sont différents de zéro. Ainsi, pour $\theta \in \mathbb{R}^{k+d+1}$, le spline $s(x, \theta)$ s'écrit

$$s(x, \theta) = \sum_{i=r+1}^{r+d+1} \theta_i N_{d,i}(x, \tau) \tag{1.2}$$

et comme seconde répercussion,

$$\frac{1}{d+1} \leq \sum_{i=1}^{k+d+1} N_{d,i}^2(x, \tau) \leq 1, \tag{1.3}$$

indépendamment de l'intervalle $[\tau_r, \tau_{r+1}]$ dans lequel se situe x , car en passant par Cauchy-Schwarz et en exploitant la propriété (iii),

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\sum_{i=1}^{k+d+1} N_{d,i}(x, \tau) \right)^2 = \left(\sum_{i=r+1}^{r+d+1} N_{d,i}(x, \tau) \right)^2 \leq (d+1) \sum_{i=r+1}^{r+d+1} N_{d,i}^2(x, \tau) \\ &= (d+1) \sum_{i=1}^{k+d+1} N_{d,i}^2(x, \tau) \leq (d+1) \sum_{i=1}^{k+d+1} N_{d,i}(x, \tau) = d+1. \end{aligned}$$

Bien souvent dans les développements à venir, on privilégiera la notation matricielle, c'est-à-dire qu'on trimbalera la base des B-splines de degré d et de noeuds τ sous la forme vectorielle $N_d(x) = \{N_{d,i}(x, \tau)\}_{i=1, \dots, k+d+1}$. Avec cette notation par exemple, l'inégalité (1.3) devient

$$\frac{1}{d+1} \leq N_d(x)' N_d(x) \equiv \|N_d(x)\|_E^2 \leq 1 \quad (1.4)$$

où $\|\cdot\|_E^2$ désigne la norme euclidienne habituelle des vecteurs. Soulignons qu'à la lumière de ce qu'on a dit des propriétés locales des B-splines, le vecteur $N_d(x)$ ne contient en fait que $d+1$ éléments non nuls et si $x \in [\tau_r, \tau_{r+1}]$, $N_d'(x)' = (N_{d,r+1}(x), \dots, N_{d,r+d+1}(x))$ désignera cette portion non nulle.

Avant de clore cette section, mentionnons que la base des B-splines n'est pas la seule base de l'espace des fonctions splines. Historiquement, la base dite des puissances tronquées, $\{1, x, \dots, x^d, (x - \tau_1)_+^d, \dots, (x - \tau_k)_+^d\}$, fut la première à faire son apparition. Tout spline $s(x)$ de degré d et de noeuds τ peut donc aussi s'exprimer sous la forme

$$s(x) = \sum_{j=0}^d \beta_j x^j + \sum_{j=1}^k \delta_j (x - \tau_j)_+^d$$

pour certains coefficients β_0, \dots, β_d et $\delta_1, \dots, \delta_k$ (Schumaker (1969)). Si on privilégie la base des B-splines, c'est que ses belles propriétés facilitent l'étude des

splines. Numériquement, elle présente aussi un avantage sur celle des puissances tronquées car l'utilisation de cette dernière, surtout si le nombre de noeuds est grand, peut mener à des problèmes de calcul. De Boor en précise les conséquences et les raisons dans son chapitre 8.

1.2 Dérivées des B-splines

On amorce cette section en introduisant la notation δ_{\min} et δ_{\max} pour désigner respectivement la distance minimum et maximum séparant deux noeuds de τ , c'est-à-dire

$$\delta_{\min} = \min_{1 \leq j \leq k+1} (\tau_j - \tau_{j-1}) \text{ et } \delta_{\max} = \max_{1 \leq j \leq k+1} (\tau_j - \tau_{j-1}).$$

En dérivant (1.1), on tombe sur une relation de récurrence qui lie les dérivées des B-splines de degré d aux B-splines de degré inférieur et qui prend la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{d,i}(x, \tau)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} ([\tau_{i-d}, \dots, \tau_i](t-x)_+^d - [\tau_{i-d-1}, \dots, \tau_{i-1}](t-x)_+^d) \\ &= -d([\tau_{i-d}, \dots, \tau_i](t-x)_+^{d-1} - [\tau_{i-d-1}, \dots, \tau_{i-1}](t-x)_+^{d-1}) \\ &= d \left(\frac{N_{d-1,i-1}(x, \tau)}{(\tau_{i-1} - \tau_{i-d-1})} - \frac{N_{d-1,i}(x, \tau)}{(\tau_i - \tau_{i-d})} \right). \end{aligned} \quad (1.5)$$

De cette relation, on déduit qu'il existe des constantes B_r , ne dépendant que du degré, telles que pour $i = 1, \dots, k+d+1$,

$$\max_{x \in [0,1]} \left| \frac{\partial^r N_{d,i}(x, \tau)}{\partial x^r} \right| \leq \frac{B_r}{\delta_{\min}^r} \quad (1.6)$$

avec $B_0 = 1$ et, si on s'intéresse à la dérivée première, $B_1 = 2$. Il découle de cette inégalité et des propriétés locales des B-splines que $\forall r = 0, \dots, k$,

$$\max_{x \in [\tau_r, \tau_{r+1}]} \left| \frac{\partial^l s(x, \theta)}{\partial x^l} \right| = \max_{x \in [\tau_r, \tau_{r+1}]} \left| \sum_{i=r+1}^{r+d+1} \theta_i \frac{\partial^l N_{d,i}(x, \tau)}{\partial x^l} \right| \leq \frac{(d+1)B_l}{\delta_{\min}^l} \max_{r+1 \leq i \leq r+d+1} |\theta_i|. \quad (1.7)$$

Nous allons maintenant démontrer qu'une inégalité comme (1.4) est aussi disponible si, au lieu de travailler avec le vecteur de B-splines $N_d(x)$, on considère le vecteur des dérivées $\partial^l N_d(x)/\partial x^l$. Pour ce faire, il faut introduire P_d , une matrice bidiagonale de dimensions $(k+d+1) \times (k+d)$ dont l'élément (i, j) , $i = 1, \dots, k+d+1, j = 1, \dots, k+d$, est donné par

$$(P_d)_{ij} = \begin{cases} -d/(\tau_j - \tau_{j-d}) & \text{si } i = j \\ d/(\tau_j - \tau_{j-d}) & \text{si } i = j+1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On souligne incidemment que $\forall z \in \mathbb{R}^{k+d+1}$, par l'inégalité de Minkowski,

$$\|z'P_d\|_E^2 \leq d^2 \frac{\sum_{i=1}^{k+d} (z_{i+1} - z_i)^2}{\min_{1 \leq j \leq k+d} (\tau_j - \tau_{j-d})^2} \leq \frac{1}{\delta_{\min}^2} \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{k+d} z_{i+1}^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{k+d} z_i^2} \right)^2 \leq \frac{4}{\delta_{\min}^2} \|z\|_E^2. \quad (1.8)$$

Il faut aussi se pencher sur la matrice tridiagonale $P_d'P_d$ de dimensions $(k+d) \times (k+d)$ ayant, comme élément (i, j) ,

$$(P_d'P_d)_{ij} = \begin{cases} 2d^2/(\tau_j - \tau_{j-d})^2 & \text{si } i = j \\ -d^2/(\tau_j - \tau_{j-d})(\tau_i - \tau_{i-d}) & \text{si } i = j-1 \text{ ou } i = j+1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les sous-matrices $PP_d' = \{(P_d'P_d)_{ij}\}_{i,j=r+1, \dots, r+d}$ seront appelées sous-matrices principales de dimensions $d \times d$ de $P_d'P_d$. Elles peuvent s'exprimer sous la forme $PP_d' = D_d'Q_dD_d'$ où D_d' est une matrice diagonale avec éléments $\{d/(\tau_j - \tau_{j-d}), j = r+1, \dots, r+d\}$ et où la matrice tridiagonale Q_d présente des 2 sur sa diagonale principale et des -1 sur ses deux diagonales secondaires. Comme les matrices Q_d sont symétriques et définies positives (Graybill (1969), p. 182), leurs valeurs propres sont strictement positives et ne dépendent que de d . Ainsi, si $\lambda_{1d}, \lambda_{2d}$

> 0 désignent respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de Q_d , $\lambda_{1d} \leq z'Q_d z / z'z \leq \lambda_{2d} \forall z \in \mathbb{R}^d$ et de ce fait,

$$\frac{\lambda_{1d}}{\delta_{\max}^2} \leq \frac{z'(PP_d^r)z}{z'z} = \frac{z'D_d^r Q_d D_d^r z}{z'D_d^r D_d^r z} \frac{z'D_d^r D_d^r z}{z'z} \leq \frac{\lambda_{2d}}{\delta_{\min}^2} \quad (1.9)$$

quelque soit $r \in \{0, \dots, k\}$.

L'introduction de la matrice P_d prend tout son sens quand on remarque que la relation (1.5) qui unit les dérivées d'un B-spline aux B-splines de degré inférieur peut être réécrite sous la forme $\partial N_d(x) / \partial x = P_d N_{d-1}(x)$ et que, de façon plus générale,

$$\frac{\partial^l N_d(x)}{\partial x^l} = \frac{\partial^{l-1}}{\partial x^{l-1}} (P_d N_{d-1}(x)) = P_d \frac{\partial^{l-1} N_{d-1}(x)}{\partial x^{l-1}}. \quad (1.10)$$

Cette relation est à la base de la démonstration du lemme suivant. Pour alléger la notation, on pose

$$D^l N_d(x) = \partial^l N_d(x) / \partial x^l \text{ et } M_d^l = \int_0^1 (D^l N_d(x))(D^l N_d(x))' dF(x)$$

où $F(\cdot)$ est une fonction de répartition continue sur $[0,1]$. La matrice $M_d \equiv M_d^0$ fera l'objet de la section 1.4 à venir, on verra alors qu'il existe une constante C_d , ne dépendant que du degré, telle que $\forall a \in \mathbb{R}^{k+d+1}$,

$$|a'M_d a| \leq C_d \delta_{\max} \|a\|_E^2. \quad (1.11)$$

Lemme 1.1

(i) Il existe deux constantes positives et indépendantes de k , $C_{1,d,l}$ et $C_{2,d,l}$ telles que $\forall x \in [0,1]$,

$$\frac{C_{1,d,l}}{\delta_{\max}^{2l}} \leq \|D^l N_d(x)\|_E^2 \leq \frac{C_{2,d,l}}{\delta_{\min}^{2l}}.$$

(ii) Il existe une autre constante $C_{d,l}$ telle que $\forall a \in \mathbb{R}^{k+d+1}$,

$$|a' M_d^l a| \leq C_{d,l} \frac{\delta_{\max}^{2l}}{\delta_{\min}^{2l}} \|a\|_E^2.$$

Démonstration

La démonstration procède par induction.

Pour démontrer (i), notons $[\tau_r, \tau_{r+1}]$ l'intervalle dans lequel se situe x et regardons le cas $l = 1$, c'est-à-dire examinons $\|D^1 N_d(x)\|_E^2 = N_{d-1}(x)' P_d' P_d N_{d-1}(x)$. Le vecteur $N_{d-1}(x)$ ne contenant que d éléments non nuls, seule une portion $d \times d$ de la matrice $P_d' P_d$ est impliquée dans la norme, laquelle portion correspond précisément à la sous-matrice principale PP_d^r . Rappelant que $N_{d-1}^r(x)$ désigne la portion non nulle de $N_{d-1}(x)$, ce qui justifie incidemment que la norme euclidienne de $N_{d-1}^r(x)$ coïncide avec celle de $N_{d-1}(x)$,

$$\|D^1 N_d(x)\|_E^2 = \frac{N_{d-1}^r(x)' PP_d^r N_{d-1}^r(x)}{N_{d-1}^r(x)' N_{d-1}^r(x)} \|N_{d-1}(x)\|_E^2$$

et par (1.4) et (1.9), on déduit que

$$\frac{\lambda_{1d}}{d\delta_{\max}^2} \leq \|D^1 N_d(x)\|_E^2 \leq \frac{\lambda_{2d}}{\delta_{\min}^2}.$$

Supposons maintenant que (i) tienne pour $l-1$. En exploitant (1.10), le raisonnement évoqué dans le cas $l = 1$ permet de conclure que

$$\begin{aligned} \|D^l N_d(x)\|_E^2 &= (D^{l-1} N_{d-1}(x))' P_d' P_d (D^{l-1} N_{d-1}(x)) \\ &= \frac{(D^{l-1} N_{d-1}^r(x))' PP_d^r (D^{l-1} N_{d-1}^r(x))}{(D^{l-1} N_{d-1}^r(x))' (D^{l-1} N_{d-1}^r(x))} \|D^{l-1} N_{d-1}(x)\|_E^2, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\lambda_{1d} \frac{C_{1,d-1,l-1}}{\delta_{\max}^{2l}} \leq \|D^l N_d(x)\|_E^2 \leq \lambda_{2d} \frac{C_{2,d-1,l-1}}{\delta_{\min}^{2l}}.$$

La démonstration de (ii) s'expédie en quelques lignes. Commençons encore une fois par examiner le cas $l = 1$. Puisque $D^1 N_d(x) = P_d N_{d-1}(x)$, il est facile de voir que par (1.8) et (1.11),

$$|a' M_d^1 a| = |a' P_d M_{d-1} P_d' a| \leq C_{d-1} \delta_{\max} \|a' P_d\|_E^2 \leq 4C_{d-1} \frac{\delta_{\max}}{\delta_{\min}^2} \|a\|_E^2$$

$\forall a \in \mathbf{R}^{k+d+1}$. Remarquons maintenant que par (1.10),

$$a' M_d^l a = a' P_d \left(\int_0^1 (D^{l-1} N_{d-1}(x))(D^{l-1} N_{d-1}(x))' dF(x) \right) P_d' a = a' P_d M_{d-1}^{l-1} P_d' a.$$

Ainsi, si on suppose (ii) vrai pour $l-1$, on déduit que pour l ,

$$|a' M_d^l a| = |a' P_d M_{d-1}^{l-1} P_d' a| \leq C_{d-1,l-1} \frac{\delta_{\max}}{\delta_{\min}^{2(l-1)}} \|a' P_d\|_E^2 \leq 4C_{d-1,l-1} \frac{\delta_{\max}}{\delta_{\min}^{2l}} \|a\|_E^2.$$

CQFD

1.3 Normes matricielles

Comme on travaillera souvent avec des matrices, il est nécessaire de définir la notion de norme matricielle. On peut le faire de plusieurs façons; on trouve à ce sujet une bonne discussion au chapitre 10 du bouquin de Lancaster et Tismenetsky (1985), duquel est tiré le matériel présenté ici. Précisément, pour toutes matrices carrées A et B , une norme matricielle $\| \cdot \|$ doit satisfaire les axiomes suivants:

- (i) $\|A\| \geq 0$ avec $\|A\| = 0$ si et seulement si A est une matrice nulle,
- (ii) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$ pour tout α dans \mathbf{R} ,

$$(iii) \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|,$$

$$(iv) \|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Nous nous contenterons de présenter deux normes matricielles dont la première est celle adoptée par Agarwal et Studden (1980).

Norme spectrale

Soit A une matrice carrée $p \times p$. Posant $S_p = \{x \in \mathbb{R}^p : \|x\|_E = \sqrt{x'x} = 1\}$, la norme spectrale de A est définie par

$$\|A\|_s \equiv \max_{x \in S_p} \|Ax\|_E = \max_{x \in S_p} \sqrt{x'A'Ax}$$

où $\|\cdot\|_E$ désigne la norme euclidienne. Par les propriétés de cette norme,

$$\|A^{-1}\|_s = \frac{1}{\min_{x \in S_p} \|Ax\|_E}$$

si A est inversible et on pose $\|A^{-1}\|_s = \infty$ sinon.

La construction de cette norme invite à deux commentaires. Le premier a pour but de faire remarquer que pour une matrice carrée A $p \times p$ et deux vecteurs v_1, v_2 dans \mathbb{R}^p quelconques,

$$|v_1 A v_2| \leq \|v_1\|_E \|A\|_s \|v_2\|_E. \quad (1.12)$$

Ceci se déduit aisément en combinant l'inégalité de Cauchy-Schwarz $|v_1 A v_2| \leq \|v_1\|_E \|A v_2\|_E$ avec le fait que

$$\|A\|_s \equiv \max_{x \in S_p} \|Ax\|_E = \max_{\substack{y \in \mathbb{R}^p \\ y \neq 0}} \frac{\|Ay\|_E}{\|y\|_E} \geq \frac{\|A v_2\|_E}{\|v_2\|_E}.$$

Le second commentaire porte sur le lien entre la norme spectrale d'une matrice A et les valeurs propres de A si A est symétrique. Dans un contexte de symétrie où on dénote les valeurs propres par $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, on peut montrer en effet que

$$\|A\|_s = \max_{1 \leq j \leq p} |\lambda_j| \text{ et } \frac{1}{\|A^{-1}\|_s} = \min_{1 \leq j \leq p} |\lambda_j|. \quad (1.13)$$

De plus, puisque $\min_{1 \leq j \leq p} \lambda_j = \min_{x \in \mathcal{S}_p} x'Ax$ et $\max_{1 \leq j \leq p} \lambda_j = \max_{x \in \mathcal{S}_p} x'Ax$, on a, pour A symétrique et semi-définie positive,

$$\|A\|_s = \max_{x \in \mathcal{S}_p} x'Ax \text{ et } \frac{1}{\|A^{-1}\|_s} = \min_{x \in \mathcal{S}_p} x'Ax. \quad (1.14)$$

Norme maximale

Soit A une matrice carrée $p \times p$. Posant $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,p}$, on définit la norme maximale de A par

$$\|A\|_{\max} \equiv \max_{1 \leq i \leq p} \sum_{j=1}^p |a_{ij}|.$$

Autrement dit, si on somme les éléments de chaque ligne de $|A|$ où $|A|$ est composée des éléments de A en valeur absolue, $\|A\|_{\max}$ coïncide avec la plus grande de ces sommes. De plus, par construction, $|A|\mathbf{1}_p \leq \|A\|_{\max} \mathbf{1}_p$ où $\mathbf{1}_p$ désigne le vecteur unitaire de dimension p .

On a vu en (1.13) que pour A symétrique, $\|A\|_s = \lambda_A$ où $\lambda_A = \max_{1 \leq j \leq p} |\lambda_j|$. Le théorème 10.3.1 de Lancaster et Tismenetsky (1985) assurant que $\lambda_A \leq \|A\|$ pour n'importe quelle norme matricielle $\|\cdot\|$, on obtient, dans un contexte de symétrie, l'inégalité

$$\|A\|_s \leq \|A\|_{\max} \quad (1.15)$$

qui jette un pont entre les deux normes.

1.4 Propriétés de la matrice M

A partir de maintenant, nous laisserons tomber l'indice d pour alléger la notation.

La matrice $M = \int_0^1 N(x)N(x)'dF(x)$ où $F(\cdot)$ est une fonction de répartition continue sur $[0,1]$ constitue le fondement de presque tous nos développements; il est donc important de la décrire exhaustivement. Elle est bien documentée dans la littérature (DeBoor (1973, 1976), Agarwal et Studden (1980)) et nous avons choisi de concentrer dans cette section tous les résultats qui s'y rapportent afin qu'il soit facile de s'y référer.

Pour n points x_1, \dots, x_n dans $[0,1]$, on étudiera parallèlement la matrice $M_n = \int_0^1 N(x)N(x)'dF_n(x)$ où $F_n(\cdot)$ est la fonction de répartition empirique des x_i . On se doute que M et M_n seront proches pour n grand si $F_n(\cdot)$ converge vers $F(\cdot)$ et on verra que, conditionnellement à cette convergence, M_n partage les mêmes propriétés que M , du moins asymptotiquement, notamment en ce qui a trait aux normes et aux inverses.

Toutes les démonstrations se trouvent dans l'annexe A, on se borne ici à énoncer les résultats. Ils sont soumis aux deux conditions suivantes.

Condition 1

Il existe deux constantes indépendantes de k , C_1 et C_2 , telles que

$$\frac{C_1}{k} < \delta_{\min} \leq \delta_{\max} < \frac{C_2}{k}.$$

Condition 2

Il existe une sous-suite $\{n_k\}_{k=1,\dots,\infty}$ telle que

$$\sup_{x \in [0,1]} |F_{n_k}(x) - F(x)| \leq \frac{r_k}{k}$$

où $\{r_k\}_{k=1,\dots,\infty}$ est une suite positive qui tend vers zéro. On présume en outre que $F(\cdot)$ est dérivable sur $[0,1]$ et que sa dérivée, qu'on note $\lambda(\cdot)$, est positive et satisfait $0 < \lambda_{\min} \leq \lambda(x) \leq \lambda_{\max} < \infty \forall x \in [0,1]$.

Théorème 1.2

Les éléments de M sont positifs ou nuls et de la forme

$$m_{ij} = \int_0^1 N_i(x, \tau) N_j(x, \tau) dF(x) \leq \begin{cases} \lambda_{\max} \delta_{\max} & \text{si } |i-j| \leq d+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\forall i, j = 1, \dots, k+d+1$. En outre, $M_{n_k} = M + E_{n_k}$ où l'élément (i, j) de E_{n_k} satisfait

$$|e_{n_k, ij}| \leq \begin{cases} C \sup_{x \in [0,1]} |F_{n_k}(x) - F(x)| & \text{si } |i-j| \leq d+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour une constante C qui ne dépend pas de k . Autrement dit, $|e_{n_k, ij}| = O(r_k/k)$ quand $k \rightarrow \infty$.

Corollaire 1.3

- (i) $\|M\|_s \leq \|M\|_{\max} \leq (2(d+1)+1) \lambda_{\max} \delta_{\max}$
- (ii) $\|E_{n_k}\|_s \leq \|E_{n_k}\|_{\max} \leq (2(d+1)+1) C \sup_{x \in [0,1]} |F_{n_k}(x) - F(x)| = O(r_k/k)$.

Les prochains résultats portent sur les inverses M^{-1} et $M_{n_k}^{-1}$. La proximité de M_{n_k} et M ayant été établie, il est raisonnable de penser qu'il en est de même des inverses. Cette intuition s'avère juste comme en fait foi le théorème 1.4

qui montre que les éléments de $M_{n_k}^{-1}$ et M^{-1} décroissent de façon exponentielle à mesure qu'ils s'éloignent de la diagonale et que les éléments de $M_{n_k}^{-1} - M^{-1}$ tendent vers 0 de la même façon. Notons par ailleurs que l'existence de M^{-1} est garantie par le fait que M est définie positive. Pour le voir, soulignons que les fonctions $\{N_j(x, \tau)\}_{j=1, \dots, k+d+1}$ sont linéairement indépendantes car elles forment une base de l'espace des fonctions splines. Ainsi, si $a' = (a_1, \dots, a_{k+d+1})$ est un vecteur quelconque mais non nul de \mathbf{R}^{k+d+1} ,

$$a'Ma = \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{k+d+1} a_j N_j(x, \tau) \right)^2 dF(x) > 0$$

puisque par l'indépendance linéaire, la seule façon d'annuler cette quantité est de choisir $a = 0$.

Théorème 1.4

Posons $M^{-1} = \{m^{ij}\}_{i, j=1, \dots, k+d+1}$, $M_{n_k}^{-1} = \{m_{n_k}^{ij}\}_{i, j=1, \dots, k+d+1}$ et désignons l'élément (i, j) de $M_{n_k}^{-1} - M^{-1}$ par $(M_{n_k}^{-1} - M^{-1})_{ij}$, $i, j = 1, \dots, k+d+1$. Alors pour $\gamma \in (0, 1)$ ne dépendant que de d et $\lambda(\cdot)$,

(i) Il existe une constante C telle que

$$|m^{ij}| \leq \frac{C}{\delta_{\min}} \gamma^{|i-j|}.$$

(ii) Il existe des quantités C_k et c_k , respectivement $O(1)$ et $o(1)$ quand $k \rightarrow \infty$, telles que

$$|m_{n_k}^{ij}| \leq \frac{C_k}{\delta_{\min}} (\gamma + c_k)^{|i-j|}.$$

(iii) Il existe des quantités C_{1k} et $C_{2k} > 0$ d'ordre $O(1)$ quand $k \rightarrow \infty$ telles que

$$|(M_{n_k}^{-1} - M^{-1})_{ij}| \leq r_k \frac{C_{1k}}{\delta_{\min}} (|i-j| + C_{2k})(\gamma + |c_k|)^{|i-j|}.$$

Corollaire 1.5

(i) Il existe C'_1 et C'_2 , deux constantes indépendantes de k , telles que pour tout $a \in \mathbb{R}^{k+d+1}$,

$$C'_1 k \leq \frac{a' M^{-1} a}{a' a} \leq C'_2 k,$$

et, lorsque $k \rightarrow \infty$,

(ii) $\|M^{-1}\|_s \leq \|M^{-1}\|_{\max} = O(k),$

(iii) $\|M_{n_k}^{-1}\|_s \leq \|M_{n_k}^{-1}\|_{\max} = O(k),$

(iv) $\|M_{n_k}^{-1} - M^{-1}\|_s \leq \|M_{n_k}^{-1} - M^{-1}\|_{\max} = O(r_k k).$

1.5 Polynômes de Bernoulli

C'est au chapitre 2 qu'on croquera les polynômes de Bernoulli. Comme ils jouent un rôle important dans la caractérisation de l'erreur d'approximation des splines de régression, on en brosse ici un bref portrait.

On peut les définir de façon récursive par

$$B_d(x) = d \int_0^x B_{d-1}(y) dy + B_d$$

où $B_0(x) = 1$ et où le d -ième nombre de Bernoulli, B_d , est choisi pour que soit satisfaite l'égalité $\int_0^1 B_d(y) dy = 0$. Leurs principales propriétés sont listées ci-dessous.

$$(i) \quad \int_0^1 B_d(y) dy = 0, \quad d \geq 0,$$

$$(ii) \quad \frac{\partial B_d(x)}{\partial x} = dB_{d-1}(x), \quad d \geq 0,$$

$$(iii) \quad \left. \frac{\partial^r B_d(x)}{\partial x^r} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial^r B_d(x)}{\partial x^r} \right|_{x=1}, \quad r = 0, \dots, d-1 \text{ et } d \geq 1,$$

$$(iv) \quad B_{2d+1}(0) = B_{2d+1}(1) = 0, \quad d \geq 1.$$

Pour de plus amples détails, on peut se tourner vers Schoenberg (1969).

Chapitre 2

Splines de régression et qualité d'approximation

L'étude d'une série de points (x_i, Y_i) , $i = 1, \dots, n$, passe fréquemment par le postulat de l'existence d'une fonction $f(\cdot)$ telle que

$$Y_i = f(x_i) + \varepsilon_i,$$

$i = 1, \dots, n$, où les erreurs ε_i sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de moyenne nulle et de variance finie.

Les x_i , éléments de $[0,1]$ sans perte de généralité, sont supposés fixes, sans être forcément uniformes. On étudiera éventuellement un contexte plus conforme aux contingences de la réalité où ce sont plutôt des couples aléatoires (X_i, Y_i) qui sont observés, mais pour le moment, on assume que les x_i peuvent être choisis selon le bon vouloir de l'expérimentateur. Il existe incidemment des critères permettant de choisir l'emplacement des x_i de façon optimale; c'est le concept du "optimal design" tel que discuté par exemple par Kiefer et Studden (1976) dans un contexte de régression polynomiale, mais cet aspect du problème ne sera pas traité dans le cadre du présent travail.

Si la forme fonctionnelle qui unit les x_i aux Y_i est connue à certains paramètres près, on tombe dans le cadre bien balisé de la régression. Le véritable défi se présente donc quand $f(\cdot)$ est inconnue et une stratégie parmi d'autres consiste à l'approcher par l'entremise d'une classe de fonctions approximantes. Pour cela toutefois, il faut minimalement supposer que $f(\cdot)$ possède un certain degré de continuité. Ainsi sommes-nous prêts à accepter que $f(\cdot)$ est $d+1$ fois continûment dérivable sur $[0,1]$ et comme classe de fonc-

tions approximantes, on choisit dans ce travail S_k^d , l'ensemble des splines de régression de degré d possédant k noeuds intérieurs.

Nous discuterons dans ce chapitre du pouvoir approximant des splines. Celui-ci est contrôlé par deux leviers: le degré et les noeuds. Le fait d'augmenter d et/ou k accroît la flexibilité des splines et, par ricochet, les oscillations indésirables (Eubank (1988), p. 356). Il faut donc bien gérer ces leviers et Eubank suggère de se concentrer sur les noeuds car leur influence est plus marquée que celle du degré, surtout pour les splines de degré égal ou supérieur à 3. D'ailleurs, il insiste pour dire qu'il y a peu de cas où il est nécessaire de faire grimper le degré au delà de 3 et que le placement des noeuds peut bien souvent compenser pour un degré mal choisi. Dans cette optique, les résultats concernant le pouvoir d'approximation des splines que nous rapportons révèlent le comportement de la distance entre $f(\cdot)$ et les splines de degré d fixe quand $k \rightarrow \infty$.

Notre examen des splines se fera toujours dans le cadre bien précis où on dispose, pour chaque k , d'un vecteur de noeuds $\tau^k = (\tau_{-d}, \dots, \tau_{k+d+1})'$ satisfaisant $\tau_{-d} = \dots = \tau_0 = 0$ et $\tau_{k+1} = \dots = \tau_{k+d+1} = 1$ et où on laisse tendre k vers l'infini. On flairait intuitivement que les noeuds ne doivent pas augmenter de manière imprévisible et c'est la raison pour laquelle plusieurs auteurs tels Agarwal et Studden (1980) et Barrow et Smith (1978) considèrent des noeuds générés selon une fonction de densité, c'est-à-dire qu'ils obtiennent τ^k via

$$\int_0^{\tau_i} p(x) dx = \frac{i}{k+1},$$

$i = 0, \dots, k+1$, où $p(\cdot)$ est une densité continue et bornée sur $[0,1]$. Si on adopte la notation $(t^{-1}(\cdot))' = p(\cdot)$, cette égalité peut être réexprimée de façon équiva-

lente sous la forme $t(i/k+1) = \tau_i$. Cette mécanique n'est cependant pas nécessaire pour que les splines se comportent bien asymptotiquement; comme on le verra, il suffit que les noeuds deviennent localement uniformes. Notons enfin qu'en s'inscrivant délibérément dans un cadre de travail où on dispose d'un vecteur de noeuds pour chaque k , on échappe à l'épineux problème des noeuds variables (Jupp (1978)).

On désignera par $S_k^d(\tau^k)$ le sous-ensemble de S_k^d constitué des splines de noeuds τ^k , ou, autrement dit, des combinaisons linéaires des B-splines $N(x)' = (N_1(x, \tau^k), \dots, N_{k+d+1}(x, \tau^k))$ (on laissera dorénavant tomber l'indice d du chapitre 1 pour ne pas alourdir la notation). Une façon de jauger le pouvoir approximant de ce sous-ensemble, qui forme incidemment un sous-espace vectoriel, consiste à évaluer la distance entre $f(\cdot)$ et sa meilleure approximation en norme $L_2[0,1]$ dans $S_k^d(\tau^k)$. Un spline $s_f(\cdot) \in S_k^d(\tau^k)$ est une meilleure approximation de $f(\cdot)$ en norme $L_2[0,1]$ selon $\lambda(\cdot)$ si

$$\int_0^1 (f(x) - s_f(x))^2 \lambda(x) dx \leq \int_0^1 (f(x) - s(x))^2 \lambda(x) dx$$

pour tout spline $s(\cdot) \in S_k^d(\tau^k)$ où $\lambda(\cdot)$ est une densité continue sur $[0,1]$ avec $0 < \lambda_{\min} \leq \lambda(\cdot) \leq \lambda_{\max} < \infty$. Cette meilleure approximation est unique (Schumaker (1969), théorème 4.2) et correspond à la projection L_2 selon $\lambda(\cdot)$ de $f(\cdot)$ sur $S_k^d(\tau^k)$,

$$s_f(x) = N(x)' M^{-1} \int_0^1 N(y) f(y) \lambda(y) dy, \quad (2.1)$$

où $M = \int_0^1 N(x) N(x)' \lambda(x) dx$. On choisit de travailler avec la norme $L_2[0,1]$ en raison du parallèle qui existe entre la meilleure approximation selon cette

norme et le spline des moindres carrés qu'on verra dans les chapitres à venir portant sur l'aspect statistique.

Parmi les auteurs qui se sont penchés sur la distance séparant $f(\cdot)$ de $s_f(\cdot)$, Barrow et Smith (1978) sont peut-être ceux qui l'ont évaluée avec le plus de précision. Sous l'hypothèse que $f(\cdot) \in C^{d+1}[0,1]$, ils ont démontré que si les noeuds τ^k sont générés par une densité $p(\cdot)$, alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k^{2(d+1)} \int_0^1 (f(x) - s_f(x))^2 dx = \frac{|B_{2(d+1)}|}{(2(d+1))!} \left(\int_0^1 |f^{(d+1)}(t(x))|^2 (t'(x))^{2(d+1)+1} dx \right) \quad (2.2)$$

où $(t^{-1}(\cdot))' = p(\cdot)$ et où $B_{2(d+1)}$ est le $2(d+1)$ -ième nombre de Bernoulli. Comme on le devine à la vue de cette formule, ils ont considéré $\lambda(\cdot) = 1$.

Plus récemment, Huang et Studden (1993b), qui ont cependant travaillé avec des noeuds équidistants sur toute la droite réelle et $\lambda(\cdot) = 1$, ont montré que si $f(\cdot)$ est Lipschitz d'ordre $(d+1, \alpha)$ sur \mathbb{R} pour un certain $\alpha > 0$ et si les noeuds sont donnés par $\xi = \{\xi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ où $\xi_{i+1} - \xi_i = h \forall i$, alors pour $x \in [\xi_i, \xi_{i+1})$,

$$f(x) - s_f(x) = \frac{f^{(d+1)}(x)}{(d+1)!} B_{d+1} \left(\frac{x - \xi_i}{h} \right) h^{d+1} + O(h^{d+1+\alpha}) \quad (2.3)$$

quand $h \rightarrow 0$ où $B_{(d+1)}(\cdot)$ est le $(d+1)$ -ième polynôme de Bernoulli.

Nous allons généraliser ce résultat en donnant la forme exacte de $f(x) - s_f(x)$ sur l'intervalle fini $[0,1]$ quand les noeuds ne sont pas équidistants et quand $\lambda(\cdot)$ n'est pas la densité uniforme. La possibilité d'obtenir une caractérisation extrêmement précise de cette erreur (et de ses dérivées) est l'une des propriétés remarquables des splines et montre la pertinence de les considérer comme classe de fonctions approximantes. Pour obtenir notre résultat, on exploite le fait que $s_f(x)$ peut s'exprimer sous une forme faisant intervenir un

noyau d'ordre $d+1$, c'est-à-dire une fonction $K(\cdot)$ ayant un support fini et satisfaisant

$$(i) \quad \int K(u)du = 1$$

$$(ii) \quad \int u^j K(u)du = 0 \text{ pour } j = 1, \dots, d \text{ et } \int u^{d+1} K(u)du \neq 0$$

$$(iii) \quad \int K(u)^2 du < \infty.$$

En clair, cela signifie qu'on préférera réécrire (2.1) sous la forme

$$s_f(x) = \int_0^1 K_x(y) f(y) \lambda(y) dy \quad (2.4)$$

où $K_x(y) \equiv K(x,y) = N(x)' M^{-1} N(y)$. Huang et Studden (1993a,1993b) semblent avoir été les premiers à mettre en évidence cette écriture qui permet de voir les splines sous un autre angle et d'utiliser l'expression des noyaux pour simplifier les preuves. Les deux premiers résultats de ce chapitre illustrent certaines propriétés du noyau $K(x,y)$.

Comme nous l'avons mentionné plus tôt, on relaxera ici les hypothèses de Barrow et Smith (1978): là où ils supposent que les noeuds sont générés par une densité, nous assumons seulement que les noeuds des vecteurs τ^k deviennent localement uniformes quand $k \rightarrow \infty$, c'est-à-dire que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\delta_{i+1}}{\delta_i} = 1$$

$\forall i = 1, \dots, k$ avec $\delta_i = \tau_i - \tau_{i-1}$. Cette "uniformité locale asymptotique" est d'ailleurs satisfaite en présence d'une fonction génératrice de noeuds. En effet, si $\tau_i = t(i/(k+1))$, $i = 0, \dots, k+1$, pour une certaine fonction $t(\cdot) \in C^1[0,1]$ satisfaisant $t(0) = 0$, $t(1) = 1$ et $t'(\cdot) \geq \eta > 0$ et si $\omega(\cdot, t')$ est le module de continuité de

$t'(\cdot)$, alors il existe des points ξ_i et ξ_{i+1} , respectivement compris dans les intervalles $[(i-1)/(k+1), i/(k+1)]$ et $[i/(k+1), (i+1)/(k+1)]$, tels que $\forall i = 1, \dots, k$,

$$\frac{\delta_{i+1}}{\delta_i} = \frac{\tau_{i+1} - \tau_i}{\tau_i - \tau_{i-1}} = \frac{t'(\xi_{i+1})}{t'(\xi_i)} = \frac{t'(i/(k+1)) + s_{i+1,k}}{t'(i/(k+1)) + s_{i,k}}$$

où, par la continuité de $t'(\cdot)$, $|s_{i,k}| < \omega((k+1)^{-1}, t') = o(1)$ quand $k \rightarrow \infty$, indépendamment de i . Il en découle que le rapport tend bien vers 1. On rappelle que le module de continuité d'une fonction $g(\cdot) \in C[a, b]$ est défini par

$$\omega(h, g) = \max\{|g(x) - g(y)| : x, y \in [a, b], |x - y| \leq h\}.$$

Dans tous les résultats de ce chapitre, on suppose que les noeuds de la suite $\{\tau^k\}_{k=1, \dots, \infty}$ deviennent localement uniformes. Le minimum et le maximum des δ_i , $i = 1, \dots, k+1$, sont notés δ_{\min} et δ_{\max} respectivement et en raison de l'uniformité locale asymptotique, δ_{\max} tend vers 0 quand $k \rightarrow \infty$.

2.1 Propriétés du noyau

Propriété 2.1 (reproductibilité des polynômes)

Si $q(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à d , alors

$$\int_0^1 K(x, y) q(y) \lambda(y) dy = q(x).$$

Démonstration

Tout polynôme de degré inférieur ou égal à d peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des éléments d'une base de B-splines de degré d . On peut donc écrire $q(x) = N(x)' \theta$ pour un certain vecteur θ de dimension $k+d+1$ et par conséquent,

$$\int_0^1 K(x,y)q(y)\lambda(y)dy = N(x)'M^{-1}\int_0^1 N(y)N(y)'\theta\lambda(y)dy$$

$$= N(x)'M^{-1}M\theta = N(x)'\theta = q(x).$$

CQFD

Soulignons qu'un cas particulier important est celui où $q(x) \equiv 1$. On a alors

$$\int_0^1 K(x,y)\lambda(y)dy = 1. \quad (2.5)$$

En outre, comme tous les splines de $S_k^d(\tau^k)$ peuvent s'écrire sous la forme $N(x)'\theta$, il est évident que le noyau reproduit également $S_k^d(\tau^k)$.

Propriété 2.2

Pour un certain $0 < \gamma < 1$ et pour $l = 0, \dots, d-1$, le noyau $K(x,y)$ satisfait

$$\left| \frac{\partial^l K(x,y)}{\partial x^l} \right| \leq \frac{C_d \gamma^{n(x,y)}}{\delta_{\min}^{l+1}}$$

où C_d est une constante indépendante de k et où $n(x,y)$ désigne le nombre de noeuds entre x et y . En particulier, si $l = 0$,

$$|K(x,y)| \leq \frac{C_d \gamma^{n(x,y)}}{\delta_{\min}}.$$

Démonstration

Avant de débiter la démonstration, rappelons que par les propriétés des B-splines, il existe une constante B_l telle que $\forall i = 1, \dots, k+d+1$,

$$\max_{x \in [0,1]} \left| \frac{\partial^l N_i(x, \tau^k)}{\partial x^l} \right| \leq \frac{B_l}{\delta_{\min}^l}$$

(où $B_0 = 1$). Ainsi, en récupérant la notation $|M^{-1}| = \{|m^{ij}|\}_{i,j=1,\dots,k+d+1}$ du théorème 1.4, on a, par définition du noyau et pour $l = 0, \dots, d-1$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^l K(x, y)}{\partial x^l} \right| &\leq \left| \frac{\partial^l N(x)}{\partial x^l} \right| |M^{-1}| N(y) \\ &= \sum_{i=1}^{k+d+1} \sum_{j=1}^{k+d+1} \left| \frac{\partial^l N_i(x, \tau^k)}{\partial x^l} \right| |m^{ij}| N_j(y, \tau^k) \leq \frac{C}{\delta_{\min}} \sum_{i=1}^{k+d+1} \sum_{j=1}^{k+d+1} \left| \frac{\partial^l N_i(x, \tau^k)}{\partial x^l} \right| \gamma^{|i-j|} N_j(y, \tau^k) \end{aligned}$$

où $\gamma \in (0, 1)$ et où C ne dépend pas de k . Supposons momentanément que $x \leq y$ et désignons par α l'indice tel que $\tau_\alpha \leq x < \tau_{\alpha+1}$ et par β celui satisfaisant $\tau_\beta \leq y < \tau_{\beta+1}$. On a bien-sûr $\alpha \leq \beta$ avec $\alpha, \beta \in \{0, \dots, k\}$ et sous cette notation, $n(x, y) \equiv \beta - \alpha$. En outre, par les propriétés locales des B-splines, $N_i(x, \tau^k)$ est nul si $i \neq \alpha+1, \dots, \alpha+d+1$ et, de façon similaire, $N_j(y, \tau^k)$ l'est aussi si $j \neq \beta+1, \dots, \beta+d+1$. Puisque les B-splines sont positifs et inférieurs à 1, on se retrouve donc avec

$$\left| \frac{\partial^l K(x, y)}{\partial x^l} \right| \leq \frac{CB_l}{\delta_{\min}^{l+1}} \sum_{i=\alpha+1}^{\alpha+d+1} \sum_{j=\beta+1}^{\beta+d+1} \gamma^{|i-j|}. \quad (2.6)$$

Afin de mieux cerner cette double somme, soulignons que par les propriétés des séries géométriques, si $i < \beta+1$,

$$\sum_{j=\beta+1}^{\beta+d+1} \gamma^{|i-j|} = \sum_{j=\beta+1-i}^{\beta+d+1-i} \gamma^j = \frac{\gamma^{\beta+1-i} - \gamma^{\beta+d+2-i}}{1-\gamma} = \gamma^{\beta+1} \left(\frac{1-\gamma^{d+1}}{1-\gamma} \right) \gamma^{-i}$$

alors que si $\beta+1 \leq i \leq \beta+d+1$,

$$\sum_{j=\beta+1}^{\beta+d+1} \gamma^{|i-j|} = \sum_{j=0}^{i-\beta-1} \gamma^j + \sum_{j=1}^{\beta+d+1-i} \gamma^j = \frac{1+\gamma}{1-\gamma} - \frac{1}{1-\gamma} (\gamma^{-\beta} \gamma^i + \gamma^{\beta+d+2} \gamma^{-i}).$$

Armé de ces égalités, considérons maintenant deux cas, nommément celui où $\alpha+d+1 < \beta+1$ et celui où $\beta+1 \leq \alpha+d+1$. Dans le premier cas,

$$\sum_{i=\alpha+1}^{\alpha+d+1} \sum_{j=\beta+1}^{\beta+d+1} \gamma^{|i-j|} = \gamma^{\beta+1} \left(\frac{1-\gamma^{d+1}}{1-\gamma} \right) \sum_{i=\alpha+1}^{\alpha+d+1} \gamma^{-i} = \gamma^{\beta+1} \left(\frac{1-\gamma^{d+1}}{1-\gamma} \right) \left(\frac{\gamma^{-(\alpha+1)} - \gamma^{-(\alpha+d+2)}}{1-\gamma^{-1}} \right)$$

$$= \gamma^{\beta-\alpha} \left(\frac{1-\gamma^{d+1}}{1-\gamma} \right) \left(\frac{1-\gamma^{-(d+1)}}{1-\gamma^{-1}} \right).$$

La deuxième situation nécessite un peu plus d'acrobaties algébriques, mais il demeure relativement simple de montrer que

$$\begin{aligned} \sum_{i=\alpha+1}^{\alpha+d+1} \sum_{j=\beta+1}^{\beta+d+1} \gamma^{|i-j|} &= \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \sum_{j=\beta+1}^{\beta+d+1} \gamma^{|i-j|} + \sum_{i=\beta+1}^{\alpha+d+1} \sum_{j=\beta+1}^{\beta+d+1} \gamma^{|i-j|} \\ &= \gamma^{\beta+1} \left(\frac{1-\gamma^{d+1}}{1-\gamma} \right) \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \gamma^{-i} + (d+1+\alpha-\beta) \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma} \right) \\ &\quad - \frac{1}{1-\gamma} \left(\gamma^{-\beta} \sum_{i=\beta+1}^{\alpha+d+1} \gamma^i + \gamma^{\beta+d+2} \sum_{i=\beta+1}^{\alpha+d+1} \gamma^{-i} \right) \\ &= \gamma^{\beta-\alpha} \left\{ \left(\frac{-2\gamma + \gamma^{d+2} + \gamma^{d+2+2(\alpha-\beta)}}{(1-\gamma)^2} \right) + (d+1+\alpha-\beta) \gamma^{\alpha-\beta} \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma} \right) \right\} \\ &\leq \gamma^{\beta-\alpha} \left\{ \left(\frac{-2\gamma + \gamma^{d+2} + \gamma^{2-d}}{(1-\gamma)^2} \right) + (d+1) \frac{1}{\gamma^d} \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma} \right) \right\} \end{aligned}$$

où la dernière inégalité se justifie en observant que $-d \leq \alpha - \beta \leq 0$ puisqu'on se situe dans le cas où $\beta + 1 \leq \alpha + d + 1$ avec $\alpha \leq \beta$.

En d'autres termes, quand $x \leq y$, la double somme apparaissant dans (2.6) peut être majorée par $\tilde{C}_{d,\gamma} \gamma^{\beta-\alpha} \equiv \tilde{C}_{d,\gamma} \gamma^{n(x,y)}$ où $\tilde{C}_{d,\gamma}$ est une constante qui dépend du degré et de γ . Par symétrie, cette majoration demeure valide si $x \geq y$, de sorte que la propriété est démontrée si on pose $C_d = CB_l \tilde{C}_{d,\gamma}$.

CQFD

Le lemme suivant est surtout technique, mais il sera utile à plusieurs reprises car il traite d'une intégrale qu'on rencontrera souvent, à la fois dans ce chapitre et dans ceux à venir.

Lemme 2.3

Soient $H(\cdot)$ une fonction de répartition quelconque et $0 \leq v_1, v_2 < \infty$. Si $0 < \gamma < 1$, alors pour $k = 1, 2, \dots$,

$$\max_{x \in [0,1]} \int_0^1 \gamma^{n(x,y)} (n(x,y) + v_1)^{v_2} dH(y) \leq B \max_{0 \leq j \leq k} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} dH(y)$$

où $n(x,y)$ désigne le nombre de noeuds entre x et y et où B est une constante ne dépendant que de γ, v_1 et v_2 .

Démonstration

Si x se situe entre les noeuds τ_r et τ_{r+1} et y entre τ_j et τ_{j+1} , il n'est pas difficile de déduire, après une courte réflexion, que $n(x,y) = |r - j|$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \max_{x \in [0,1]} \int_0^1 \gamma^{n(x,y)} (n(x,y) + v_1)^{v_2} dH(y) &= \max_{0 \leq r \leq k} \max_{x \in [\tau_r, \tau_{r+1})} \sum_{j=0}^k \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \gamma^{n(x,y)} (n(x,y) + v_1)^{v_2} dH(y) \\ &\leq \max_{0 \leq r \leq k} \left\{ \sum_{j=0}^r \gamma^{r-j} (r - j + v_1)^{v_2} + \sum_{j=r+1}^k \gamma^{j-r} (j - r + v_1)^{v_2} \right\} \max_{0 \leq j \leq k} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} dH(y) \\ &= \max_{0 \leq r \leq k} \left\{ \sum_{j=0}^r \gamma^j (j + v_1)^{v_2} + \sum_{j=1}^{k-r} \gamma^j (j + v_1)^{v_2} \right\} \max_{0 \leq j \leq k} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} dH(y) \\ &\leq \left\{ 2 \sum_{j=0}^k \gamma^j (j + v_1)^{v_2} \right\} \max_{0 \leq j \leq k} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} dH(y) \end{aligned}$$

et le fait que $0 < \gamma < 1$ garantit que les sommes entre accolades sont bornées puisque la série $\sum_{m=1}^{\infty} \gamma^m (m + v_1)^{v_2}$ est convergente pour v_1 et v_2 finis par le critère d'Alembert. Ceci a été démontré à la fin de la preuve du corollaire A.7 de l'annexe A.

CQFD

2.2 Erreur d'approximation

Notre théorème principal stipule que si les noeuds deviennent localement uniformes, alors l'erreur d'approximation a essentiellement l'allure, sur chaque intervalle $[\tau_r, \tau_{r+1})$ de $[0,1]$, d'un polynôme de Bernoulli. Ces objets seront constamment sur notre route à partir de maintenant. Leurs propriétés ont été discutées à la section 1.5. Afin de mieux comprendre pourquoi il était prévisible qu'il en soit ainsi et aussi pour décrire la démarche qui mène à ce résultat, transportons-nous un instant dans le cadre plus simple où les noeuds sont équidistants, où la fonction à approximer est le polynôme $q(x) = x^{d+1}/(d+1)!$ et où la densité $\lambda(\cdot)$ de (2.1) est uniforme.

En 1969, Schoenberg démontre que la différence entre $q(x)$ et sa meilleure approximation en norme $L_2[0,N+1]$, parmi tous les splines de degré d et de noeuds uniformes $\{i\}_{i=1,\dots,N}$ dont l'erreur satisfait certaines conditions de périodicité, correspond à la fonction $\bar{B}_{d+1}(x) \equiv B_{d+1}(x-i)$ pour $x \in [i, i+1)$ où $B_{d+1}(\cdot)$ est le $(d+1)$ -ième polynôme de Bernoulli, c'est-à-dire que $\bar{B}_{d+1}(\cdot)$ est construite en répétant $B_{d+1}(\cdot)$ sur chaque intervalle $[i, i+1)$, $i = 0, \dots, N$. Ce résultat est la source d'inspiration du lemme 2.4 à venir duquel on déduit l'existence d'un spline $s(\cdot)$ sur $[0,1]$ tel que

$$q(y) - s(y) = r(y) \tag{2.7}$$

où le reste $r(\cdot)$ est essentiellement formé de polynômes de Bernoulli mis bout à bout.

On veut pouvoir caractériser de la même façon l'erreur de la meilleure approximation selon la norme $L_2[0,1]$, c'est-à-dire obtenir l'expression exacte

de $q(x) - s_q(x)$ où $s_q(x) = \int_0^1 K(x,y)q(y)dy$. Or, puisque le noyau $K(x,y)$ reproduit les splines, son application de part et d'autre de (2.7) donne

$$s_q(x) - s(x) = \int_0^1 K(x,y)r(y)dy = N(x)'M^{-1} \int_0^1 N(y)r(y)dy$$

et si d'aventure les B-splines du vecteur $N(y)$ étaient orthogonaux à $r(y)$, on aurait $\int_0^1 K(x,y)r(y)dy = 0$ et l'erreur d'approximation de $s_q(x)$ serait précisément $r(x)$.

Le lemme 2.5 indique que ce n'est pas toujours le cas. En fait, c'est aux frontières de $[0,1]$ que s'observe une particularité; contrairement aux autres B-splines de la base, ceux dont le domaine jouxte les extrémités de $[0,1]$, et ils sont en nombre fini, ne sont pas orthogonaux au reste $r(\cdot)$. Conséquemment, on se retrouve avec

$$q(x) - s_q(x) = r(x) - \int_0^1 K(x,y)r(y)dy = r(x) + z(x)$$

où la contribution de $z(x)$ est plus modeste au centre qu'aux extrémités de $[0,1]$. Ceci est exposé en détail au lemme 2.6. L'ordre de grandeur de $z(x)$ ne dépasse toutefois jamais celui de $r(x)$, c'est-à-dire que si $k \rightarrow \infty$, $r(x) = O(k^{-(d+1)})$ $\forall x \in [0,1]$ alors que $z(x)$ est $O(k^{-(d+1)})$ ou $o(k^{-(d+1)})$ selon l'emplacement de x . En outre, la longueur des intervalles sur lesquels $z(x) = O(k^{-(d+1)})$ tend vers 0 quand $k \rightarrow \infty$.

Ceci brosse le portrait du cas uniforme où on souhaite approximer le polynôme $x^{d+1}/(d+1)!$. Notre cadre de travail réel s'en distingue de 4 façons: les noeuds des vecteurs τ^k ne sont pas équidistants, la densité par rapport à laquelle on intègre n'est pas uniforme, on veut approximer une fonction qui n'est pas un polynôme et, non content de l'approximer, on veut aussi appro-

ximer ses dérivées. Chacune de ces dérogations au cadre simpliste exposé plus haut a un impact qui se reflète sur le résultat principal dont nous entamons maintenant la démonstration.

Comme première étape, nous présentons le lemme 2.4 qui généralise un résultat de Barrow et Smith (1979). Pour le démontrer, deux lemmes portant sur les combinaisons linéaires de B-splines sont nécessaires et nous les énonçons ici sans preuve. Ils reposent en partie sur les propriétés locales des B-splines, c'est-à-dire sur le fait que si $s(x,t) = \sum_{i=1}^{k+d+1} a_i N_i(x,t)$ est un spline quelconque avec noeuds $t = \{t_{-d}, \dots, t_{k+d+1}\}$, alors sur $[t_r, t_{r+1}]$, il s'écrit $s(x,t) = \sum_{i=r+1}^{r+d+1} a_i N_i(x,t)$ et ne dépend que des $2(d+1)$ noeuds $t_{r-d}, \dots, t_{r+d+1}$. On peut se référer à Barrow et Smith (1979) pour les détails.

Lemme 2.4.1

Soient deux vecteurs de $2(d+1)$ noeuds distincts dans \mathbb{R} , $t = \{t_i\}_{i=-d, \dots, d+1}$ et $t^m = \{t_i^m\}_{i=-d, \dots, d+1}$, tels que $t_i^m \rightarrow t_i$ lorsque $m \rightarrow \infty$. Soient également deux splines de degré d , $s(x,t) = \sum_{i=1}^{d+1} a_i N_i(x,t)$ et $s^m(x,t^m) = \sum_{i=1}^{d+1} a_i^m N_i(x,t^m)$ satisfaisant

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{x \in [\alpha, \beta]} |s^m(x,t^m) - s(x,t)| = 0$$

où $[\alpha, \beta] \subset [t_0, t_1]$. Alors il existe une suite positive $\{\delta_m\}_{m=1, \dots, \infty}$, tendant vers 0 et dont l'élément δ_m dépend du degré, de α et β , de t , du maximum sur $[\alpha, \beta]$ de $|s^m(x,t^m) - s(x,t)|$ de même que du maximum des $|t_i^m - t_i|$ telle que $|a_i^m - a_i| < \delta_m$, $i = 1, \dots, d+1$.

Lemme 2.4.2

Soient $t, t^m, s(x,t)$ et $s^m(x,t^m)$ tels que définis au lemme précédent. Si, pour $i = 1, \dots, d+1$, $|a_i^m - a_i| < \delta_m$ avec $\{\delta_m\}_{m=1, \dots, \infty}$ une suite tendant vers 0, alors il existe une autre suite $\{\varepsilon_m\}_{m=1, \dots, \infty}$, tendant elle aussi vers 0, telle que

$$\max_{x \in [t_0, t_1]} \left| \frac{\partial^l (s^m(x, t^m) - s(x, t))}{\partial x^l} \right| < \varepsilon_m,$$

$l = 0, \dots, d-1$, où ε_m dépend de δ_m , du degré, de t et du maximum des $|t_i^m - t_i|$.

Lemme 2.4

Pour $j = 0, \dots, k$, posons

$$s_j(x) = \frac{\delta_{j+1}^{d+1}}{(d+1)!} B_{d+1} \left(\frac{x - \tau_j}{\delta_{j+1}} \right)$$

où $B_{d+1}(\cdot)$ représente le $(d+1)$ -ième polynôme de Bernoulli et soit

$$r(x) = \begin{cases} s_0(x) & \text{si } x \in [\tau_0, \tau_1) \\ s_1(x) & \text{si } x \in [\tau_1, \tau_2) \\ \vdots & \\ s_k(x) & \text{si } x \in [\tau_k, \tau_{k+1}] \end{cases}.$$

Si le rapport $\delta_{\max}/\delta_{\min}$ demeure borné quand $k \rightarrow \infty$, alors il existe un spline $s^k(x) \in S_k^d(\tau^k)$ et une fonction $w(\cdot)$ définie sur $[0,1]$ tels que

$$\frac{x^{d+1}}{(d+1)!} - s^k(x) = r(x) + w(x)$$

avec, pour $l = 0, \dots, d-1$, $\max_{x \in [0,1]} \left| \frac{\partial^l w(x)}{\partial x^l} \right| = o(\delta_{\max}^{d+1-l})$ lorsque $k \rightarrow \infty$.

Démonstration

Dans leur article de 1979, Barrow et Smith définissent un opérateur $Q_k: C^{d+1}[0,1] \rightarrow S_k^d(\tau^k)$ tel que pour toute fonction $f(\cdot) \in C^{d+1}[0,1]$, $Q_k f(\cdot)$ se comporte essentiellement comme la meilleure approximation, en norme $L_2[0,1]$, de $f(\cdot)$ dans $S_k^d(\tau^k)$. Nous allons nous inspirer de leur article pour démontrer notre lemme qui constitue une légère généralisation de leur lemme 1, en ce sens

que contrairement à eux, nous nous affranchissons de l'hypothèse de la fonction génératrice de noeuds.

Soit d'abord $q(x)=x^{d+1}/(d+1)!$ et écrivons $Q_k q(x) = \sum_{i=1}^{k+d+1} \alpha_i N_i(x, \tau^k)$. Les noeuds du vecteur τ^k scindent l'intervalle $[0,1]$ en $k+1$ sous-intervalles de la forme $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, \dots, k$ et à l'instar de Barrow et Smith, nous ne préciserons l'allure de $Q_k q(x)$ que pour les x tombant dans certains sous-intervalles $[\tau_i, \tau_{i+1})$. Formellement, on considère $[\tau_0, \tau_1), [\tau_{d+1}, \tau_{d+2}), \dots, [\tau_{I(d+1)}, \tau_{(I+1)(d+1)})$ avec $I = \lfloor k/(d+1) \rfloor$ où $\lfloor z \rfloor$ désigne la partie entière de z , et on requiert que si x vit dans l'un de ces sous-intervalles, c'est-à-dire si $x \in [\tau_m, \tau_{m+1})$ avec $m = i(d+1)$ pour un certain $i \in \{0, \dots, I\}$, alors

$$(q - Q_k q)(x) = \frac{\delta_{m+1}^{d+1}}{(d+1)!} B_{d+1} \left(\frac{x - \tau_m}{\delta_{m+1}} \right) = s_m(x).$$

Les coefficients α_i qui assurent cela sont obtenus explicitement par Barrow et Smith.

Revenons à la fonction $\bar{B}_{d+1}(\cdot)$ dont nous avons discuté avant d'énoncer le lemme. Comme $B_{d+1}^{(r)}(0) = B_{d+1}^{(r)}(1)$ si $r \in \{0, \dots, d-1\}$, $\bar{B}_{d+1}(\cdot) \in C^{d-1}(\mathbb{R})$. En outre, sur tout intervalle $[r, r+k+1]$, $\bar{B}_{d+1}(x)$ peut s'écrire sous la forme $x^{d+1} + s(x, t)$ avec $s(x, t)$ un spline de degré d et noeuds $t = \{t_i \equiv i\}_{i=r, \dots, r+k+1}$ (Schoenberg (1969), théorème 4.1).

Fixons maintenant $j \in \{0, \dots, k\}$ et écrivons, pour $x \in [-j, -j+k+1]$,

$$P(x, j) = \frac{(\delta_{j+1}/\delta_{\max})^{d+1}}{(d+1)!} \bar{B}_{d+1}(x)$$

et, pour $x \in [-\tau_j/\delta_{j+1}, (1-\tau_j)/\delta_{j+1}]$,

$$R_k(x, j) = (1/\delta_{\max})^{d+1} (q - Q_k q)(\tau_j + x\delta_{j+1}).$$

On montre d'abord qu'en augmentant k , l'écart entre $R_k(x, j)$ et $P(x, j)$ peut être rendu arbitrairement petit sur $[0,1]$, un intervalle qui se situe incidemment dans $[-j, -j+k+1]$ et $[-\tau_j/\delta_{j+1}, (1-\tau_j)/\delta_{j+1}]$, indépendamment de j .

Rappelons que $Q_k q(\cdot)$ est un spline sur $[0,1]$ avec noeuds $0=\tau_0, \dots, \tau_{k+1}=1$. La quantité $Q_k q(\tau_j + x\delta_{j+1})$ qui apparaît dans la définition de $R_k(x, j)$ est ce même spline, mais transposé sur l'intervalle $[-\tau_j/\delta_{j+1}, (1-\tau_j)/\delta_{j+1}]$. Une façon d'illustrer l'effet de ce changement d'échelle est de remarquer que

$$Q_k q(\tau_j + x\delta_{j+1}) = \begin{cases} Q_k q(0) & \text{si } x = -\tau_j/\delta_{j+1} \\ \vdots & \\ Q_k q(\tau_j) & \text{si } x = 0 \\ Q_k q(\tau_{j+1}) & \text{si } x = 1 \\ \vdots & \\ Q_k q(1) & \text{si } x = (1-\tau_j)/\delta_{j+1} \end{cases}$$

à partir de quoi on peut établir une correspondance entre les noeuds τ_i et les noeuds du spline $Q_k q(\tau_j + x\delta_{j+1})$. En effet, si on pose

$$t_i^k = \frac{\tau_{j+i} - \tau_j}{\delta_{j+1}}, \quad (2.8)$$

alors on peut associer au noeud $\tau_i \in [0,1]$ le noeud $t_{i-j}^k \in [-\tau_j/\delta_{j+1}, (1-\tau_j)/\delta_{j+1}]$ et on en déduit que $t^k = \{t_i^k\}_{i=-j, \dots, -j+k+1}$ constitue le vecteur de noeuds de $Q_k q(\tau_j + x\delta_{j+1})$. Par construction, $t_0^k = 0$, $t_1^k = 1$ et, plus généralement pour i fini, $t_i^k \rightarrow t_i \equiv i$ lorsque $k \rightarrow \infty$. Il s'agit d'une conséquence de l'uniformité asymptotique et pour s'en convaincre, remarquons qu'en utilisant des sommes télescopiques, on obtient, pour i fini,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} t_i^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{r=0}^{i-1} \delta_{j+i-r}}{\delta_{j+1}} = \sum_{r=0}^{i-1} \prod_{m=1}^{i-r-1} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\delta_{j+m+1}}{\delta_{j+m}} \right) = \sum_{r=0}^{i-1} 1 = i$$

si $i > 1$ alors que si $i < 0$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} t_i^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{r=0}^{|i|-1} (-\delta_{j+i+r+1})}{\delta_{j+1}} = -\sum_{r=0}^{|i|-1} \prod_{m=0}^{|i|-r-1} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\delta_{j-m}}{\delta_{j-m+1}} \right) = -\sum_{r=0}^{|i|-1} 1 = i.$$

Soulignons qu'on a construit l'opérateur Q_k en requérant que l'erreur $(q - Q_k q)(\cdot)$ soit essentiellement un polynôme de Bernoulli sur chaque sous-intervalle $[\tau_m, \tau_{m+1})$ avec $m=i(d+1)$, $i=0, \dots, I$. Comme le changement d'échelle fait correspondre les noeuds τ_m et t_{m-j}^k , cette propriété, une fois transposée sur $[-\tau_j/\delta_{j+1}, (1-\tau_j)/\delta_{j+1}]$, se traduit par le fait que pour $x \in [t_{m-j}^k, t_{m-j+1}^k)$,

$$R_k(x, j) = \frac{1}{\delta_{\max}^{d+1}} \frac{\delta_{m+1}^{d+1}}{(d+1)!} B_{d+1} \left(\frac{x - t_{m-j}^k}{t_{m-j+1}^k - t_{m-j}^k} \right). \quad (2.9)$$

Pour le j fixé, soit maintenant \bar{j} le plus grand entier égal ou inférieur à j tel que $[\tau_{\bar{j}}, \tau_{\bar{j}+1})$ est précisément l'un de ces sous-intervalles de $[0,1]$ sur lesquels $(q - Q_k q)(\cdot)$ prend la forme d'un polynôme de Bernoulli, c'est-à-dire que $\bar{j} = \bar{i}(d+1)$ pour un certain $\bar{i} \in \{0, \dots, I\}$. Pour tout $k = 1, 2, \dots$, $j - \bar{j}$ est élément de l'ensemble $\{0, \dots, d\}$, mais pour alléger la notation, on supposera que $j - \bar{j} \equiv l$ avec l une constante indépendante de k . Ceci ne constitue pas une perte de généralité car on peut l'obtenir en choisissant une sous-suite de vecteurs de noeuds pour laquelle $j - \bar{j}$ est constant.

Ainsi, par définition de l et par la discussion ayant mené à (2.9),

$$R_k(x, j) = \frac{1}{\delta_{\max}^{d+1}} \frac{\delta_{\bar{j}+1}^{d+1}}{(d+1)!} B_{d+1} \left(\frac{x - t_{-l}^k}{t_{-l+1}^k - t_{-l}^k} \right)$$

pour $x \in [t_{-l}^k, t_{-l+1}^k) \equiv [t_{\bar{j}-j}^k, t_{\bar{j}-j+1}^k)$. De plus, puisque l est fini, $t_{-l}^k \rightarrow -l$ et $t_{-l+1}^k \rightarrow -l + 1$ quand $k \rightarrow \infty$ si bien qu'il existe un intervalle fixe, $[\alpha, \beta]$, tel que si k est assez grand, $[\alpha, \beta] \subset [t_{-l}^k, t_{-l+1}^k) \cap [-l, -l+1)$. En outre, si on note

$$w_{-l}(x) = B_{d+1} \left(\frac{x - t_{-l}^k}{t_{-l+1}^k - t_{-l}^k} \right) - B_{d+1}(x - (-l))$$

pour $x \in [\alpha, \beta]$, alors cette convergence et la continuité uniforme des polynômes de Bernoulli assurent que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{x \in [\alpha, \beta]} |w_{-l}(x)| = 0.$$

Par la périodicité de l'erreur $(q - Q_k q)(\cdot)$ à se mouler à un polynôme de Bernoulli, on a, façon similaire

$$R_k(x, j) = \frac{1}{\delta_{\max}^{d+1}} \frac{\delta_{j+d+2}^{d+1}}{(d+1)!} B_{d+1} \left(\frac{x - t_{-l+d+1}^k}{t_{-l+d+2}^k - t_{-l+d+1}^k} \right)$$

si $x \in [t_{-l+d+1}^k, t_{-l+d+2}^k)$. Il existe aussi un intervalle fixe, disons cette fois $[\gamma, \delta]$, tel que si k est grand, $[\gamma, \delta] \subset [t_{-l+d+1}^k, t_{-l+d+2}^k) \cap [-l+d+1, -l+d+2)$ et sur cet intervalle, le maximum de $w_{-l+d+1}(x)$ tend vers 0.

On peut maintenant montrer que sur $[\alpha, \beta]$ et $[\gamma, \delta]$, la distance entre $R_k(x, j)$ et $P(x, j)$ s'amenuise quand k augmente. Si on regarde d'abord $[\alpha, \beta]$ et si on observe que $\forall j \in \{0, \dots, k\}$, $\delta_{j+1}/\delta_{j+1} = 1$ si $l = 0$ et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\delta_{j+1}}{\delta_{j+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\delta_{j-l+1}}{\delta_{j+1}} = \prod_{m=0}^{l-1} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\delta_{j-m}}{\delta_{j-m+1}} \right) = (1)^l = 1$$

si $1 \leq l \leq d$, alors on obtient bien, tel qu'annoncé,

$$\begin{aligned} & \max_{x \in [\alpha, \beta]} |R_k(x, j) - P(x, j)| \\ &= \frac{1}{\delta_{\max}^{d+1}} \frac{1}{(d+1)!} \max_{x \in [\alpha, \beta]} \left| \delta_{j+1}^{d+1} B_{d+1} \left(\frac{x - t_{-l}^k}{t_{-l+1}^k - t_{-l}^k} \right) - \delta_{j+1}^{d+1} B_{d+1}(x - (-l)) \right| \\ &= \frac{(\delta_{j+1}/\delta_{\max})^{d+1}}{(d+1)!} \max_{x \in [\alpha, \beta]} \left| \left(\frac{\delta_{j+1}^{d+1}}{\delta_{j+1}^{d+1}} \right) (B_{d+1}(x+l) + w_{-l}(x)) - B_{d+1}(x+l) \right| \\ &\leq \frac{1}{(d+1)!} \left\{ \left(\frac{\delta_{j+1}^{d+1}}{\delta_{j+1}^{d+1}} - 1 \right) \max_{x \in [\alpha, \beta]} |B_{d+1}(x+l)| + \left(\frac{\delta_{j+1}^{d+1}}{\delta_{j+1}^{d+1}} \right) \max_{x \in [\alpha, \beta]} |w_{-l}(x)| \right\} = o(1) \end{aligned}$$

$\forall j \in \{0, \dots, k\}$ quand $k \rightarrow \infty$ car l'expression entre accolades est $o(1)$. Par une argumentation similaire, on a aussi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\delta_{j+d+2}}{\delta_{j+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\delta_{j-l+d+2}}{\delta_{j+1}} = \prod_{m=1}^{-l+d+1} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\delta_{j+m+1}}{\delta_{j+m}} \right) = (1)^{-l+d+1} = 1$$

et

$$\begin{aligned} & \max_{x \in [\gamma, \delta]} |R_k(x, j) - P(x, j)| \\ &= \frac{1}{\delta_{\max}^{d+1}} \frac{1}{(d+1)!} \max_{x \in [\gamma, \delta]} \left| \delta_{j+d+2}^{d+1} B_{d+1} \left(\frac{x - t_{-l+d+1}^k}{t_{-l+d+2}^k - t_{-l+d+1}^k} \right) - \delta_{j+1}^{d+1} B_{d+1}(x - (-l+d+1)) \right| = o(1). \end{aligned}$$

Maintenant que nous avons établi la convergence sur $[\alpha, \beta]$ et $[\gamma, \delta]$ de $R_k(x, j)$ vers $P(x, j)$, remarquons que puisqu'on peut écrire $\bar{B}_{d+1}(x) = x^{d+1} + s(x, t)$ avec $t = \{t_i \equiv i\}_{i=-j, \dots, -j+k+1}$, la quantité

$$s_j(x, t) = P(x, j) - \frac{(\delta_{j+1}/\delta_{\max})^{d+1} x^{d+1}}{(d+1)!} = \frac{(\delta_{j+1}/\delta_{\max})^{d+1}}{(d+1)!} s(x, t)$$

est un spline sur $[-j, -j+k+1]$ qu'il est possible de représenter par $s_j(x, t) = \sum_{i=1}^{k+d+1} a_i N_i(x, t)$, une combinaison linéaire de B-splines de degré d et de noeuds t . De la même façon, si on pose

$$s_j^k(x, t^k) = R_k(x, j) - \frac{(\delta_{j+1}/\delta_{\max})^{d+1} x^{d+1}}{(d+1)!}$$

où $x \in [-\tau_j/\delta_{j+1}, (1-\tau_j)/\delta_{j+1}]$, alors le fait que $q(x) = x^{d+1}/(d+1)!$ et que $(\tau_j + x\delta_{j+1})^{d+1} = (x\delta_{j+1})^{d+1} + p_j(x)$ avec $p_j(x)$ un polynôme de degré d en x , atteste que

$$\begin{aligned} s_j^k(x, t^k) &= \frac{1}{\delta_{\max}^{d+1}} \left\{ \frac{(\tau_j + x\delta_{j+1})^{d+1}}{(d+1)!} - Q_k q(\tau_j + x\delta_{j+1}) - \frac{(x\delta_{j+1})^{d+1}}{(d+1)!} \right\} \\ &= \frac{1}{\delta_{\max}^{d+1}} \left\{ \frac{p_j(x)}{(d+1)!} - Q_k q(\tau_j + x\delta_{j+1}) \right\} \end{aligned}$$

constitue également un spline, de degré d avec noeuds t^k , qu'on peut écrire sous la forme $s_j^k(x, t^k) = \sum_{i=1}^{k+d+1} a_i^k N_i(x, t^k)$ pour certains coefficients a_i^k . Ainsi, parce que $R_k(x, j)$ et $P(x, j)$ sont proches, $s_j^k(x, t^k)$ et $s_j(x, t)$ le sont forcément. Autrement dit, $\forall j \in \{0, \dots, k\}$,

$$\max_{x \in [\alpha, \beta] \cup [\gamma, \delta]} |s_j^k(x, t^k) - s_j(x, t)| = o(1)$$

quand $k \rightarrow \infty$. Les lemmes 2.4.1 et 2.4.2 déjà présentés permettent de tirer des conclusions de cette proximité.

En effet, observons que sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$, inclus à la fois dans $[t_{-l}^k, t_{-l+1}^k)$ et $[t_{-l}, t_{-l+1})$, $s_j^k(x, t^k) = \sum_{i=-l+1}^{-l+d+1} a_i^k N_i(x, t^k)$ et $s_j(x, t) = \sum_{i=-l+1}^{-l+d+1} a_i N_i(x, t)$. Ainsi, si on circonscrit notre regard sur cet intervalle, chacun de ces splines ne dépend plus que de $2(d+1)$ noeuds, nommément $t_{-l-d}^k, \dots, t_{-l+d+1}^k$ et $t_{-l-d}, \dots, t_{-l+d+1}$, où, par la finitude de l , $t_i^k \rightarrow t_i \equiv i$ quand $k \rightarrow \infty$. Les conditions du lemme 2.4.1 étant réunies, il existe une suite $\{\delta_k\}_{k=1, \dots, \infty}$ qui tend vers 0 telle que $|a_i^k - a_i| < \delta_k$ pour $i = -l+1, \dots, -l+d+1$.

En répétant ce petit manège pour $[\gamma, \delta]$, inclus dans les intervalles $[t_{-l+d+1}^k, t_{-l+d+2}^k)$ et $[t_{-l+d+1}, t_{-l+d+2})$, on arrive à la conclusion que la convergence des coefficients a_i^k vers a_i est également vérifiée pour $i = -l+d+2, \dots, -l+2d+2$.

Cela signifie que quelle que soit la valeur de l entre 0 et d , $|a_i^k - a_i| < \delta_k$ si $i = 1, \dots, d+1$ et cette égalité tient indépendamment du j choisi au départ (quel qu'il soit, $l = j - \bar{j}$ est toujours compris entre 0 et d par construction). Puisque $[t_0, t_1] \equiv [0, 1]$, on peut recourir au lemme 2.4.2 pour attester de l'existence d'une suite $\{\varepsilon_k\}_{k=1, \dots, \infty}$, qui ne dépend pas de j et qui tend vers 0 quand $k \rightarrow \infty$, telle que pour $l = 0, \dots, d-1$,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_k &> \max_{x \in [0,1]} \left| \frac{\partial^l}{\partial x^l} \left(\sum_{i=1}^{d+1} a_i^k N_i(x, t^k) - \sum_{i=1}^{d+1} a_i N_i(x, t) \right) \right| \\
&= \max_{x \in [0,1]} \left| \frac{\partial^l (s_j^k(x, t^k) - s_j(x, t))}{\partial x^l} \right| = \max_{x \in [0,1]} \left| \frac{\partial^l (R_k(x, j) - P(x, j))}{\partial x^l} \right| \\
&= \max_{x \in [0,1]} \left| \frac{\partial^l}{\partial x^l} \left(\frac{1}{\delta_{\max}^{d+1}} (q - Q_k q)(\tau_j + x \delta_{j+1}) - \frac{(\delta_{j+1}/\delta_{\max})^{d+1}}{(d+1)!} B_{d+1}(x) \right) \right| \\
&= \max_{x \in [0,1]} \frac{1}{\delta_{\max}^{d+1}} \left| \frac{\delta_{j+1}^l (\tau_j + x \delta_{j+1})^{d+1-l}}{(d+1-l)!} - \frac{\partial^l Q_k q(\tau_j + x \delta_{j+1})}{\partial x^l} - \frac{\delta_{j+1}^{d+1} B_{d+1-l}(x)}{(d+1-l)!} \right|
\end{aligned}$$

et en effectuant le changement de variable $y = \tau_j + x \delta_{j+1}$, cela revient à dire qu'il existe un spline $s^k(y) \in S_k^d(\tau^k)$, en l'occurrence $Q_k q(y)$, tel que $\forall j \in \{0, \dots, k\}$,

$$\max_{y \in [\tau_j, \tau_{j+1}]} \frac{\delta_{j+1}^l}{\delta_{\max}^{d+1}} \left| \frac{y^{d+1-l}}{(d+1-l)!} - \frac{\partial^l s^k(y)}{\partial y^l} - \frac{\delta_{j+1}^{d+1-l}}{(d+1-l)!} B_{d+1-l}\left(\frac{y - \tau_j}{\delta_{j+1}}\right) \right| < \varepsilon_k.$$

Le résultat final vient du fait que le rapport $\delta_{\max}/\delta_{\min}$ demeure borné quand $k \rightarrow \infty$, ce qui assure que $\delta_{\max}^{d+1}/\delta_{j+1}^l \leq \delta_{\max}^{d+1}/\delta_{\min}^l = O(\delta_{\max}^{d+1-l})$.

CQFD

Nous avons prétendu avant le lemme que l'erreur $x^{d+1}/(d+1)! - s^k(x)$ se moulat parfaitement à des polynômes de Bernoulli quand les noeuds étaient uniformes. Pour le voir, supposons un instant que les noeuds de τ^k sont équi-distants pour tout k et revoyons la démonstration dans cette optique. On note que les noeuds du vecteur t^k du spline $Q_k q(\tau_j + x \delta_{j+1})$ (éq. (2.8)) sont alors situés aux entiers comme ceux de t et les conséquences de ceci découlent en cascade: sur les intervalles $[\alpha, \beta]$ et $[\gamma, \delta]$, $R_k(x, j)$ et $P(x, j)$ se confondent, il en va donc de même pour $s_j^k(x, t^k)$ et $s_j(x, t)$ et cette égalité entre les splines ne va pas sans celle des coefficients a_i^k et a_i pour $i = 1, \dots, d+1$, il s'ensuit que les fonctions $R_k(x,$

j) et $P(x, j)$ sont égales sur $[0,1]$, ce qui signifie en bout de ligne que $w(x)$ est identiquement égal à zéro sur $[0,1]$ comme on l'avait annoncé.

Le lemme suivant illustre la "presqu'orthogonalité" des B-splines et de la fonction $r(x)$.

Lemme 2.5

Soit la fonction $r(x)$ définie au lemme précédent et pour $i = 1, \dots, k+d+1$, définissons

$$P_i = \int_0^1 N_i(x, \tau^k) r(x) \lambda(x) dx = \sum_{j=0}^k \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} N_i(x, \tau^k) s_j(x) \lambda(x) dx.$$

Alors lorsque $k \rightarrow \infty$,

$$\max_{i \in \{d+1, \dots, k+1\}} |P_i| = O(\delta_{\max}^{d+2}) \text{ et } \max_{i \in \{d+1, \dots, k+1\}} |P_i| = o(\delta_{\max}^{d+2}).$$

Démonstration

Pour alléger la notation, on écrit $N_i(x) = N_i(x, \tau^k)$. Le cas $i \notin \{d+1, \dots, k+1\}$ est immédiat. En effet, se souvenant que les B-splines $N_i(x)$ sont toujours inférieurs à 1 et que les polynômes de Bernoulli sont bornés sur $[0,1]$,

$$\begin{aligned} \max_{i \in \{d+1, \dots, k+1\}} |P_i| &= \max_{i \in \{d+1, \dots, k+1\}} \left| \sum_{j=i-d-1}^{i-1} \frac{\delta_{j+1}^{d+1}}{(d+1)!} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} N_i(x) B_{d+1} \left(\frac{x - \tau_j}{\delta_{j+1}} \right) \lambda(x) dx \right| \\ &\leq \lambda_{\max} \max_{x \in [0,1]} |B_{d+1}(x)| \max_{i \in \{d+1, \dots, k+1\}} \sum_{j=i-d-1}^{i-1} \frac{\delta_{j+1}^{d+1}}{(d+1)!} (\tau_{j+1} - \tau_j) \\ &\leq \lambda_{\max} \max_{x \in [0,1]} |B_{d+1}(x)| \frac{\delta_{\max}^{d+2}}{d!} = O(\delta_{\max}^{d+2}). \end{aligned}$$

Pour le cas $i \in \{d+1, \dots, k+1\}$, rapportons-nous à Barrow et Smith (1978) qui ont été confrontés à des quantités similaires, bien qu'inscrites dans le

contexte où $\lambda(\cdot) \equiv 1$, et récupérons à notre profit leur argumentation qui consiste en des intégrations par parties successives.

Pour tenir compte de la densité par rapport à laquelle on intègre, on note que $\forall x$ dans $[\tau_{i-d-1}, \tau_i]$, $\lambda(x) = \lambda(\tau_i) + \gamma_i(x)$ où la valeur absolue de $\gamma_i(x)$ est inférieure à $\omega((d+1)\delta_{\max}, \lambda)$ avec $\omega(\cdot, \lambda)$ le module de continuité de $\lambda(\cdot)$. Soulignons également que puisque $\lambda(\cdot)$ est continue et que $\delta_{\max} \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$, $\omega((d+1)\delta_{\max}, \lambda) = o(1)$. Avec cette écriture, pour $i = d+1, \dots, k+1$,

$$P_i = \lambda(\tau_i) \sum_{j=i-d-1}^{i-1} \frac{\delta_{j+1}^{d+1}}{(d+1)!} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} N_i(x) B_{d+1} \left(\frac{x - \tau_j}{\delta_{j+1}} \right) dx$$

$$+ \sum_{j=i-d-1}^{i-1} \frac{\delta_{j+1}^{d+1}}{(d+1)!} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} N_i(x) B_{d+1} \left(\frac{x - \tau_j}{\delta_{j+1}} \right) \gamma_i(x) dx = P_{i1} + P_{i2}.$$

On borne facilement P_{i2} en ayant recours aux principes de majoration évoqués au début de la démonstration:

$$\max_{i \in \{d+1, \dots, k+1\}} |P_{i2}| \leq \omega((d+1)\delta_{\max}, \lambda) \max_{x \in [0,1]} |B_{d+1}(x)| \frac{\delta_{\max}^{d+2}}{d!} = o(\delta_{\max}^{d+2}).$$

Il reste à montrer que le maximum des P_{i1} est aussi de cet ordre, ce qui est un peu plus délicat. Il faut d'abord rappeler que la dérivée d'un polynôme de Bernoulli est liée au polynôme de degré inférieur via $\partial B_d(x)/\partial x = dB_{d-1}(x) \forall d \geq 0$. Ainsi,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\delta_{j+1}}{d+2} B_{d+2} \left(\frac{x - \tau_j}{\delta_{j+1}} \right) \right) = B_{d+1} \left(\frac{x - \tau_j}{\delta_{j+1}} \right)$$

et en intégrant P_{i1} par parties, on constate que

$$P_{i1} = \lambda(\tau_i) \sum_{j=i-d-1}^{i-1} \frac{\delta_{j+1}^{d+2}}{(d+2)!} \left\{ N_i(x) B_{d+2} \left(\frac{x - \tau_j}{\delta_{j+1}} \right) \Big|_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} - \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} N_i^{(1)}(x) B_{d+2} \left(\frac{x - \tau_j}{\delta_{j+1}} \right) dx \right\}.$$

L'idée de Barrow et Smith est de répéter le processus d'intégration jusqu'à ce que l'intégrale de P_{i1} soit de la forme

$$\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} N_i^{(d)}(x, \tau^k) B_{2d+1} \left(\frac{x - \tau_j}{\delta_{j+1}} \right) dx = 0.$$

Cette intégrale est nulle $\forall i$ parce que la d -ième dérivée d'un B-spline de degré d est constante sur chaque intervalle (τ_j, τ_{j+1}) et que l'intégrale d'un polynôme de Bernoulli sur $[0,1]$ égale 0. La quantité P_{i1} se résume donc à la somme finie des autres termes issus des intégrations successives, lesquels s'expriment, à une constante -1 près, sous la forme

$$s_{il} = \lambda(\tau_i) \sum_{j=i-d-1}^{i-1} \frac{\delta_{j+1}^{d+l}}{(d+l)!} N_i^{(l-2)}(x) B_{d+l} \left(\frac{x - \tau_j}{\delta_{j+1}} \right) \Bigg|_{\tau_j}^{\tau_{j+1}}$$

pour $l = 2, \dots, d+1$ et si on montre que les s_{il} sont d'ordre $o(\delta_{\max}^{d+2})$ lorsque $k \rightarrow \infty$, on pourra affirmer que P_{i1} est également $o(\delta_{\max}^{d+2})$. Pour ce faire, rappelons que les polynômes de Bernoulli satisfont $B_d^{(r)}(0) = B_d^{(r)}(1)$, $r = 0, \dots, d-1$. Si $i \in \{d+1, \dots, k+1\}$, le B-spline $N_i(x)$ partage une propriété semblable car ses dérivées sont nulles aux extrémités de son domaine, c'est-à-dire que $N_i^{(r)}(\tau_{i-d-1}) = N_i^{(r)}(\tau_i) = 0$ pour les mêmes valeurs de r . En utilisant ces deux propriétés et en réarrangeant les termes de la somme, on arrive finalement à

$$\begin{aligned} s_{il} &= \lambda(\tau_i) \frac{B_{d+l}(0)}{(d+l)!} \sum_{j=i-d-1}^{i-1} \delta_{j+1}^{d+l} (N_i^{(l-2)}(\tau_{j+1}) - N_i^{(l-2)}(\tau_j)) \\ &= \lambda(\tau_i) \frac{B_{d+l}(0)}{(d+l)!} \sum_{j=i-d}^{i-1} N_i^{(l-2)}(\tau_j) (\delta_j^{d+l} - \delta_{j+1}^{d+l}). \end{aligned} \quad (2.10)$$

On souligne en passant que si $d+l$ est impair, alors $B_{d+l}(0) = 0$ et $s_{il} = 0$ pour $i = d+1, \dots, k+1$. C'est ici qu'entre en jeu l'uniformité locale asymptotique. Elle assure que $\delta_j^{d+l} - \delta_{j+1}^{d+l} = \delta_j^{d+l} (1 - \delta_{j+1}^{d+l} / \delta_j^{d+l}) = o(\delta_j^{d+l})$ et elle permet de dire que le

maximum sur $[0,1]$ de $N_i^{(l-2)}(x)$ est borné par B_l/δ_i^{l-2} pour une constante B_l parce que l est fini et par (1.6) qui illustre la façon de borner les dérivées des B-splines. Ces deux phénomènes rassemblés montrent que pour $l = 2, \dots, d+1$,

$$\max_{i \in \{d+1, \dots, k+1\}} |s_{il}| \leq \lambda_{\max} \frac{|B_{d+l}(0)|}{(d+l)!} \max_{i \in \{d+1, \dots, k+1\}} \frac{C_1}{\delta_i^{l-2}} \sum_{j=i-d}^{i-1} |\delta_j^{d+l} - \delta_{j+1}^{d+l}| = o(\delta_{\max}^{d+2})$$

et donc

$$\max_{i \in \{d+1, \dots, k+1\}} |P_{il}| \leq \max_{i \in \{d+1, \dots, k+1\}} \sum_{l=2}^{d+1} |s_{il}| = o(\delta_{\max}^{d+2})$$

comme nous souhaitons le montrer.

CQFD

Prenons ici aussi le temps de revenir sur nos pas afin de discuter du cas où les noeuds τ^k sont équidistants. En survolant la démonstration, on note d'abord que si $i = d+1, \dots, k+1$ et si on intègre par rapport à la densité uniforme, alors $P_i = P_{il}$ et l'uniformité des noeuds rend nuls les s_{il} (éq. (2.10)) dont dépend P_{il} , ce qui entraîne la nullité des P_i . Si $i \neq d+1, \dots, k+1$ par contre, le fait que les noeuds soient équidistants ou non ne change rien; les P_i demeurent dans les deux cas d'ordre $O(\delta_{\max}^{d+2})$ quand $k \rightarrow \infty$. Autrement dit, dans le cas uniforme, il n'y a orthogonalité qu'entre $r(x)$ et les B-splines $N_{d+1}(x), \dots, N_{k+d+1}(x)$. A la lumière de la démonstration, ceci origine de l'égalité $N_i^{(r)}(\tau_{i-d-1}) = N_i^{(r)}(\tau_i) = 0$ qui ne tient pas pour les autres B-splines qui dépendent des noeuds $\tau_0 = 0$ et $\tau_{k+1} = 1$, lesquels sont incidemment les seuls à être de multiplicité supérieure à 1 (car $\tau_{-d} = \dots = \tau_0$ et $\tau_{k+1} = \dots = \tau_{k+d+1}$). Cette hétérogénéité des P_i aura des répercussions jusque dans l'expression de l'erreur de la meilleure approximation de $f(\cdot)$ dont le comportement est un peu différent aux frontières de $[0,1]$.

Lemme 2.6

Soient $r(x)$ la fonction du lemme 2.4 et $s_q(x) = \int_0^1 K(x,y)q(y)\lambda(y)dy$ la meilleure approximation en norme $L_2[0,1]$ selon $\lambda(\cdot)$ de $q(x) = x^{d+1}/(d+1)!$. Alors si le rapport $\delta_{\max}/\delta_{\min}$ demeure borné quand $k \rightarrow \infty$,

$$\frac{x^{d+1}}{(d+1)!} - s_q(x) = r(x) + z(x)$$

où, pour $l = 0, \dots, d-1$, lorsque $k \rightarrow \infty$,

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial^l z(x)}{\partial x^l} \right)^2 \lambda(x) dx = o(\delta_{\max}^{2(d+1-l)})$$

et $\max_{x \in [0,1]} |\partial^l z(x)/\partial x^l| = O(\delta_{\max}^{d+1-l})$. Plus précisément en fait,

$$\max_{x \in [\tau_r, \tau_{r+1}]} \left| \frac{\partial^l z(x)}{\partial x^l} \right| = \begin{cases} O(\delta_{\max}^{d+1-l}) & \text{si } r = 0, \dots, v_1 - 1 \text{ ou } r = k - v_2 + 1, \dots, k \\ o(\delta_{\max}^{d+1-l}) & \text{si } r = v_1, \dots, k - v_2 \end{cases}$$

pour deux nombres $v_1, v_2 < \infty$.

Démonstration

La première étape consiste à appliquer le noyau $K(x,y)$ de chaque côté de l'égalité du lemme 2.4. Comme le noyau reproduit les splines (propriété 2.1), on déduit que

$$\begin{aligned} s_q(x) &= \int_0^1 K(x,y) \frac{y^{d+1}}{(d+1)!} \lambda(y) dy \\ &= s^k(x) + \int_0^1 K(x,y)r(y)\lambda(y)dy + \int_0^1 K(x,y)w(y)\lambda(y)dy = \frac{x^{d+1}}{(d+1)!} - r(x) + z(x) \end{aligned}$$

avec $z(x) = T_1(x) + T_2(x) - w(x)$ où $w(x)$ est la fonction définie au lemme 2.4, $T_1(x) = \int_0^1 K(x,y)r(y)\lambda(y)dy$ et $T_2(x) = \int_0^1 K(x,y)w(y)\lambda(y)dy$.

L'étude de $T_2(x)$ passe par la propriété 2.2. Pour une constante C_d indépendante de k et $\gamma \in (0,1)$, il est facile de voir que

$$\begin{aligned} \max_{x \in [0,1]} \left| \frac{\partial^l T_2(x)}{\partial x^l} \right| &\leq \frac{C_d}{\delta_{\min}^{l+1}} \max_{x \in [0,1]} \left| \int_0^1 \gamma^{n(x,y)} w(y) \lambda(y) dy \right| \\ &\leq \frac{C_d}{\delta_{\min}^{l+1}} \max_{y \in [0,1]} |w(y)| \max_{x \in [0,1]} \int_0^1 \gamma^{n(x,y)} \lambda(y) dy \leq \frac{C_d}{\delta_{\min}^{l+1}} \max_{y \in [0,1]} |w(y)| B \lambda_{\max} \delta_{\max} \end{aligned}$$

où B est la constante du lemme 2.3. Comme $\delta_{\max}/\delta_{\min}$ reste borné quand $k \rightarrow \infty$ et que $w(x)$ est $o(\delta_{\max}^{d+1})$ sur $[0,1]$,

$$\max_{x \in [0,1]} \left| \frac{\partial^l T_2(x)}{\partial x^l} \right| = o(\delta_{\max}^{d+1-l}). \quad (2.11)$$

L'étude de $T_1(x)$ est plus complexe. On commence par écrire le noyau sous la forme $N(x)'M^{-1}N(y)$ pour obtenir $T_1(x) = N(x)'M^{-1} \int_0^1 N(y)r(y)\lambda(y)dy = N(x)'\alpha$ avec $\alpha = M^{-1}P$ où on reconnaît en $P = \{P_i\}_{i=1, \dots, k+d+1}$ le vecteur dont les éléments font l'objet du lemme 2.5. On exploite ensuite cette écriture pour étudier l'intégrale et la valeur maximum de $\partial^l T_1(x)/\partial x^l$.

Pour l'intégrale, on rappelle le lemme 1.1 du chapitre d'introduction qui, une fois appliquée à $T_1(x)$, assure qu'il existe des constantes $C_{d,l}$, $l = 0, \dots, d-1$, telles que

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial^l T_1(x)}{\partial x^l} \right)^2 \lambda(x) dx = \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{k+d+1} \alpha_j \frac{\partial^l N_j(x, \tau^k)}{\partial x^l} \right)^2 \lambda(x) dx \leq C_{d,l} \frac{\delta_{\max}}{\delta_{\min}^{2l}} \|\alpha\|_E^2$$

avec $\|\alpha\|_E^2 \leq \|M^{-1}\|_s^2 \|P\|_E^2$ par les propriétés de la norme spectrale. Le corollaire 1.5 indique que $\|M^{-1}\|_s = O(k)$ et en s'aidant du lemme précédent, on déduit que

$$\|P\|_E^2 = \sum_{i=1}^d P_i^2 + \sum_{i=d+1}^{k+1} P_i^2 + \sum_{i=k+2}^{k+d+1} P_i^2 = o(\delta_{\max}^{2(d+1)+1})$$

car les première et troisième sommes sont composées de d termes $O(\delta_{\max}^{2(d+2)})$, alors que celle du milieu contient $k-d+1$ termes dont le maximum est d'ordre $o(\delta_{\max}^{2(d+2)})$ et que sous l'hypothèse que $\delta_{\max}/\delta_{\min}$ est borné, $k\delta_{\max} = k(\delta_{\max}/\delta_{\min})\delta_{\min} = O(k\delta_{\min}) = O(1)$ puisque $\delta_{\min} \leq 1/(k+1)$. Ainsi,

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial^l T_1(x)}{\partial x^l} \right)^2 \lambda(x) dx = O\left(\frac{\delta_{\max}}{\delta_{\min}^{2l}} \right) O(k^2) o(\delta_{\max}^{2(d+1)+1}) = o(\delta_{\max}^{2(d+1-l)}). \quad (2.12)$$

Tournons-nous maintenant vers le maximum de $\partial^l T_1(x)/\partial x^l$ en allant fureter cette fois du côté de l'équation (1.7) qui indique que pour $r = 0, \dots, k$,

$$\max_{x \in [\tau_r, \tau_{r+1}]} \left| \frac{\partial^l T_1(x)}{\partial x^l} \right| = \max_{x \in [\tau_r, \tau_{r+1}]} \left| \sum_{j=r+1}^{r+d+1} \alpha_j \frac{\partial^l N_j(x, \tau^k)}{\partial x^l} \right| \leq \frac{(d+1)B_l}{\delta_{\min}^l} \max_{r+1 \leq j \leq r+d+1} |\alpha_j|$$

et donc que de façon plus générale,

$$\max_{x \in [0,1]} \left| \frac{\partial^l T_1(x)}{\partial x^l} \right| = \max_{0 \leq r \leq k} \max_{x \in [\tau_r, \tau_{r+1}]} \left| \frac{\partial^l T_1(x)}{\partial x^l} \right| = \frac{(d+1)B_l}{\delta_{\min}^l} \max_{1 \leq j \leq k+d+1} |\alpha_j|.$$

pour une constante B_l . La caractérisation des éléments du vecteur α demande une longue digression suite à laquelle nous reviendrons à l'étude de $T_1(x)$.

Si on note $M^{-1} = \{m^{ij}\}_{i,j=1,\dots,k+d+1}$, alors les éléments de α sont de la forme $\alpha_j = \sum_{i=1}^{k+d+1} m^{ji} P_i$ et le fait que l'ordre de grandeur des P_i varie avec i a des retombées sur les α_j qui présentent également un comportement un peu capricieux. Pour le voir, introduisons la notation

$$P_{(1)} = \max_{1 \leq i \leq d} |P_i|, \quad P_{(2)} = \max_{d+1 \leq i \leq k+1} |P_i| \quad \text{et} \quad P_{(3)} = \max_{k+2 \leq i \leq k+d+1} |P_i|.$$

Ces trois quantités sont respectivement $O(\delta_{\max}^{d+2})$, $o(\delta_{\max}^{d+2})$ et $O(\delta_{\max}^{d+2})$ lorsque $k \rightarrow \infty$. Par le théorème 1.4, on peut donc borner α_j par

$$|\alpha_j| \leq \frac{C}{\delta_{\min}} \left\{ P_{(1)} \sum_{i=1}^d \gamma^{|i-j|} + P_{(2)} \sum_{i=d+1}^{k+1} \gamma^{|i-j|} + P_{(3)} \sum_{i=k+2}^{k+d+1} \gamma^{|i-j|} \right\}$$

où C est une constante indépendante de k et $\gamma \in (0,1)$. On souligne incidemment que par les propriétés des séries géométriques,

$$\sum_{i=1}^{k+d+1} \gamma^{|i-j|} = \sum_{i=0}^{j-1} \gamma^i + \sum_{i=1}^{k+d+1-j} \gamma^i = \frac{1-\gamma^j}{1-\gamma} + \frac{\gamma - \gamma^{k+d+2-j}}{1-\gamma} \leq \frac{1+\gamma}{1-\gamma} \quad (2.13)$$

$\forall j = 1, \dots, k+d+1$.

Pour illustrer la dépendance envers j dont nous discutons plus haut, remarquons d'abord que par (2.13) et du fait que $\max \{P_{(1)}, P_{(2)}, P_{(3)}\} = O(\delta_{\max}^{d+2})$, le maximum sur j des α_j est $O(\delta_{\max}^{d+1})$ et le maximum sur $[0,1]$ de $\partial^l T_1(x)/\partial x^l$ est $O(\delta_{\max}^{d+1-l})$ lorsque $k \rightarrow \infty$. Cependant, on s'aperçoit, en faisant une analyse plus fine, que si on considère par exemple $j = (k+d+1)/2$ (en supposant sans perte de généralité que $k+d+1$ est pair),

$$|\alpha_j| \leq \frac{C}{\delta_{\min}} \left\{ P_{(1)} \sum_{i=((k+d+1)/2)-d}^{((k+d+1)/2)-1} \gamma^i + P_{(2)} \sum_{i=d+1}^{k+1} \gamma^{|i-j|} + P_{(3)} \sum_{i=k+2-((k+d+1)/2)}^{(k+d+1)/2} \gamma^i \right\}.$$

Or, pour γ entre 0 et 1, $\sum_{i=m_1}^{m_2} \gamma^i = (\gamma^{m_1} - \gamma^{m_2+1})/(1-\gamma)$ tend vers 0 si $m_1, m_2 \rightarrow \infty$. Ainsi, le fait que $k \rightarrow \infty$ entraîne que les première et dernière sommes sont $o(1)$ alors que la somme du milieu peut être bornée indépendamment de k par (2.13). Etant donné l'ordre de grandeur de $P_{(1)}$, $P_{(2)}$ et $P_{(3)}$, on conclut que pour ce choix de j , $\alpha_j = o(\delta_{\max}^{d+1})$.

Par contre, si on regarde $j = 1$ (ou de façon équivalente par symétrie $j = k+d+1$), alors

$$|\alpha_j| \leq \frac{C}{\delta_{\min}} \left\{ P_{(1)} \sum_{i=0}^{d-1} \gamma^i + P_{(2)} \sum_{i=d+1}^{k+1} \gamma^{|i-j|} + P_{(3)} \sum_{i=k+1}^{k+d} \gamma^i \right\}$$

où la première somme est égale à $(1-\gamma^d)/(1-\gamma)$, une quantité indépendante de k . La somme du milieu est toujours $O(1)$ lorsque $k \rightarrow \infty$ alors que la dernière

demeure $o(1)$ pour les raisons invoquées précédemment. Ainsi, dans ce cas, on a plutôt $\alpha_j = O(\delta_{\max}^{d+1})$.

Il transpire de cette étude que les α_j sont $O(\delta_{\max}^{d+1})$ ou $o(\delta_{\max}^{d+1})$ selon qu'ils sont situés aux extrémités ou au centre du vecteur α . En procédant par contradiction nous allons démontrer qu'en réalité, seul un nombre fini de α_j sont d'ordre $O(\delta_{\max}^{d+1})$. Supposons donc que les éléments $O(\delta_{\max}^{d+1})$ du début du vecteur α sont au nombre de v_{1k} avec $v_{1k} < (k+d+1)/2$ mais $v_{1k} \rightarrow \infty$ quand $k \rightarrow \infty$. Si on examine l'élément $\alpha_{v_{1k}}$ de plus près en écrivant

$$|\alpha_{v_{1k}}| \leq \frac{C}{\delta_{\min}} \left\{ P_{(1)} \sum_{i=1}^d \gamma^{v_{1k}-i} + P_{(2)} \sum_{i=d+1}^{k+1} \gamma^{|i-v_{1k}|} + P_{(3)} \sum_{i=k+2}^{k+d+1} \gamma^{i-v_{1k}} \right\},$$

on constate que les première et dernière sommes sont $o(1)$ quand $k \rightarrow \infty$; la première parce que $v_{1k} - i \rightarrow \infty$ pour $i = 1, \dots, d$ et la dernière parce que $v_{1k} < (k+d+1)/2$ entraîne $i - v_{1k} \rightarrow \infty$ pour $i = k+2, \dots, k+d+1$. Quant à la somme du milieu, elle est bornée comme toujours, ce qui nous conduit à la conclusion que $\alpha_{v_{1k}} = o(\delta_{\max}^{d+1})$, une contradiction de l'hypothèse de départ. De façon similaire, on peut montrer que si les éléments d'ordre $O(\delta_{\max}^{d+1})$ de l'autre extrémité du vecteur α sont au nombre de v_{2k} , alors $v_{2k} < \infty$ lorsque $k \rightarrow \infty$. Autrement dit, il existe des nombres finis, v_1 et v_2 , tels que les v_1 premiers et v_2 derniers éléments de α sont d'ordre $O(\delta_{\max}^{d+1})$, la balance étant plutôt $o(\delta_{\max}^{d+1})$.

Afin de bien saisir la signification de tout ceci et de faire le lien avec $T_1(x)$, rappelons que pour $x \in [\tau_r, \tau_{r+1}]$, la borne de $\partial^l T_1(x)/\partial x^l$ dépend de $\max\{|\alpha_{r+1}|, \dots, |\alpha_{r+d+1}|\}$. Si x se situe aux frontières de $[0,1]$, ou de façon équivalente si r avoisine 0 ou k , ce sont les éléments $O(\delta_{\max}^{d+1})$ des extrémités du vecteur α qui interviennent dans la borne. A l'opposé, si x vit au centre de l'intervalle $[0,1]$, ce sont plutôt les éléments au centre de α , d'ordre $o(\delta_{\max}^{d+1})$, qui jouent un rôle.

Cependant, le fait que seuls quelques éléments aux extrémités de α soient $O(\delta_{\max}^{d+1})$ entraîne que la dérivée $\partial^l T_1(x)/\partial x^l$ est pratiquement toujours $o(\delta_{\max}^{d+1-l})$, sauf pour certaines valeurs de r . Précisant ces propos, on arrive à

$$\max_{x \in [\tau_r, \tau_{r+1}]} \left| \frac{\partial^l T_1(x)}{\partial x^l} \right| = \begin{cases} O(\delta_{\max}^{d+1-l}) & \text{si } r = 0, \dots, \nu_1 - 1 \text{ ou } r = k - \nu_2 + 1, \dots, k \\ o(\delta_{\max}^{d+1-l}) & \text{si } r = \nu_1, \dots, k - \nu_2 \end{cases} \quad (2.14)$$

ce qui complète l'étude du maximum de $\partial^l T_1(x)/\partial x^l$.

On peut enfin revenir à $z(x)$ et conclure, par (2.11), (2.12) et (2.14), que pour $l = 0, \dots, d-1$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{\partial^l z(x)}{\partial x^l} \right)^2 \lambda(x) dx &= \int_0^1 \left(\frac{\partial^l T_1(x)}{\partial x^l} + \frac{\partial^l T_2(x)}{\partial x^l} - \frac{\partial^l w(x)}{\partial x^l} \right)^2 \lambda(x) dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\partial^l T_1(x)}{\partial x^l} \right)^2 \lambda(x) dx + \int_0^1 \left(\frac{\partial^l T_2(x)}{\partial x^l} - \frac{\partial^l w(x)}{\partial x^l} \right)^2 \lambda(x) dx \\ &\quad + 2 \int_0^1 \frac{\partial^l T_1(x)}{\partial x^l} \left(\frac{\partial^l T_2(x)}{\partial x^l} - \frac{\partial^l w(x)}{\partial x^l} \right) \lambda(x) dx \\ &\leq \int_0^1 \left(\frac{\partial^l T_1(x)}{\partial x^l} \right)^2 \lambda(x) dx + \max_{x \in [0,1]} \left| \frac{\partial^l T_2(x)}{\partial x^l} - \frac{\partial^l w(x)}{\partial x^l} \right|^2 \\ &\quad + 2 \max_{x \in [0,1]} \left| \frac{\partial^l T_1(x)}{\partial x^l} \right| \max_{x \in [0,1]} \left| \frac{\partial^l T_2(x)}{\partial x^l} - \frac{\partial^l w(x)}{\partial x^l} \right| = o(\delta_{\max}^{2(d+1-l)}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \max_{x \in [\tau_r, \tau_{r+1}]} \left| \frac{\partial^l z(x)}{\partial x^l} \right| &\leq \max_{x \in [\tau_r, \tau_{r+1}]} \left| \frac{\partial^l T_1(x)}{\partial x^l} \right| + \max_{x \in [0,1]} \left| \frac{\partial^l T_2(x)}{\partial x^l} - \frac{\partial^l w(x)}{\partial x^l} \right| \\ &= \begin{cases} O(\delta_{\max}^{d+1-l}) & \text{si } r = 0, \dots, \nu_1 - 1 \text{ ou } r = k - \nu_2 + 1, \dots, k \\ o(\delta_{\max}^{d+1-l}) & \text{si } r = \nu_1, \dots, k - \nu_2 \end{cases} \end{aligned}$$

avec $\max_{x \in [0,1]} |\partial^l z(x)/\partial x^l| = O(\delta_{\max}^{d+1-l})$ tel qu'annoncé.

La fonction $z(x)$ résulte donc du mariage de deux phénomènes: la non uniformité des noeuds qui est responsable des composantes $T_2(x)$ et $w(x)$ d'ordre $o(\delta_{\max}^{d+1})$ sur tout l'intervalle $[0,1]$, et la non orthogonalité des B-splines et de $r(x)$ qui se manifeste à travers $T_1(x)$ dont l'ordre varie selon x . On note que si les noeuds sont équidistants, les termes $T_2(x)$ et $w(x)$ s'évanouissent mais la fonction $T_1(x)$ demeure car bien que l'uniformité des noeuds entraîne la nullité des P_i , $i = d+1, \dots, k+1$, on s'aperçoit en revisitant la dernière démonstration que cela est insuffisant pour faire disparaître $T_1(x)$ ou pour modifier son allure aux frontières de $[0,1]$.

Nous avons maintenant tous les éléments nécessaires à la démonstration du théorème principal qui donne l'expression exacte de l'erreur $f(x) - s_f(x)$ sur $[0,1]$.

Théorème 2.7

Soit $f(\cdot)$ élément de $C^{d+1}[0,1]$. Si le rapport $\delta_{\max}/\delta_{\min}$ reste borné lorsque $k \rightarrow \infty$, alors

$$f(x) - s_f(x) = \tilde{z}(x) + \begin{cases} f^{(d+1)}(\tau_0) \frac{\delta_1^{d+1}}{(d+1)!} B_{d+1}\left(\frac{x - \tau_0}{\delta_1}\right) & \text{si } x \in [\tau_0, \tau_1] \\ \vdots \\ f^{(d+1)}(\tau_k) \frac{\delta_{k+1}^{d+1}}{(d+1)!} B_{d+1}\left(\frac{x - \tau_k}{\delta_{k+1}}\right) & \text{si } x \in [\tau_k, \tau_{k+1}] \end{cases}$$

où, pour $l = 0, \dots, d-1$, lorsque $k \rightarrow \infty$,

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial^l \tilde{z}(x)}{\partial x^l} \right)^2 \lambda(x) dx = o(\delta_{\max}^{2(d+1-l)})$$

et $\max_{x \in [0,1]} |\partial^l \tilde{z}(x) / \partial x^l| = O(\delta_{\max}^{d+1-l})$ avec, de façon plus précise,

$$\max_{x \in [\tau_r, \tau_{r+1}]} \left| \frac{\partial^l \tilde{z}(x)}{\partial x^l} \right| = \begin{cases} O(\delta_{\max}^{d+1-l}) & \text{si } r = 0, \dots, v_1 - 1 \text{ ou } r = k - v_2 + 1, \dots, k \\ o(\delta_{\max}^{d+1-l}) & \text{si } r = v_1, \dots, k - v_2 \end{cases}$$

pour deux nombres finis v_1 et v_2 .

La l -ième dérivée de la fonction $\tilde{z}(x)$ est donc $o(\delta_{\max}^{d+1-l})$ partout sur $[0,1]$, sauf sur les intervalles $[0, \tau_{v_1}]$ et $[\tau_{k-v_2+1}, 1]$ qui sont de toute façon de longueur $O(\delta_{\max}) = o(1)$ quand $k \rightarrow \infty$ par la finitude de v_1 et v_2 .

Démonstration

Soit d'abord $\tilde{f}(x; z)$ l'expansion de Taylor de $f(x)$ autour de z , c'est-à-dire

$$\tilde{f}(x; z) = \sum_{i=0}^{d+1} \frac{f^{(i)}(z)(x-z)^i}{i!}.$$

Puisque $f^{(d+1)}(\cdot)$ est continue, on peut montrer par induction que pour $l = 0, \dots, d-1$,

$$\frac{\partial^l (f(x) - \tilde{f}(x; z))}{\partial x^l} = o(|x-z|^{d+1-l})$$

uniformément en z quand $x \rightarrow z$ (Barrow et Smith (1979), p. 107). Autrement dit, il existe une quantité $c = o(1)$ lorsque $k \rightarrow \infty$ telle que pour tout r dans $\{0, \dots, k\}$,

$$\left| \frac{\partial^l (f(x) - \tilde{f}(x; \tau_r))}{\partial x^l} \right| \leq c |x - \tau_r|^{d+1-l}. \quad (2.15)$$

En exploitant la convergence ci-haut, on montre qu'on peut impunément substituer $\tilde{f}(x) \equiv \tilde{f}(x; \tau_r)$ à $f(x)$ sur tout intervalle $[\tau_r, \tau_{r+1}]$ car la fonction erreur $s_f(x) - f(x)$ s'y comporte essentiellement comme $s_{\tilde{f}}(x) - \tilde{f}(x)$. En effet, selon la définition de la projection L_2 sur $S_k^d(\tau^k)$,

$$\begin{aligned}
& (s_f(x) - f(x)) - (s_{\bar{f}}(x) - \bar{f}(x)) = \int_0^1 K(x, y) f(y) \lambda(y) dy - f(x) - \int_0^1 K(x, y) \bar{f}(y) \lambda(y) dy + \bar{f}(x) \\
& = \int_0^1 K(x, y) (f(y) - \bar{f}(y)) \lambda(y) dy - (f - \bar{f})(x) = s_{f-\bar{f}}(x) - (f - \bar{f})(x), \tag{2.16}
\end{aligned}$$

une fonction dont la l -ième dérivée est $o(\delta_{\max}^{d+1-l})$. On parvient à le démontrer en faisant intervenir la propriété 2.2, la convergence (2.15) et en faisant débouler les inégalités suivantes

$$\begin{aligned}
& \max_{x \in [0,1]} \left| \frac{\partial^l}{\partial x^l} (s_{f-\bar{f}}(x) - (f - \bar{f})(x)) \right| \\
& = \max_{0 \leq r \leq k} \max_{x \in [\tau_r, \tau_{r+1}]} \left| \int_0^1 \frac{\partial^l K(x, y)}{\partial x^l} (f(y) - \bar{f}(y; \tau_r)) \lambda(y) dy - \frac{\partial^l (f(x) - \bar{f}(x; \tau_r))}{\partial x^l} \right| \\
& \leq \frac{C_d}{\delta_{\min}^{l+1}} c \max_{0 \leq r \leq k} \max_{x \in [\tau_r, \tau_{r+1}]} \int_0^1 \gamma^{n(x, y)} |y - \tau_r|^{d+1} \lambda(y) dy + c \max_{0 \leq r \leq k} \max_{x \in [\tau_r, \tau_{r+1}]} |x - \tau_r|^{d+1-l} \\
& \leq \frac{C_d}{\delta_{\min}^{l+1}} c \delta_{\max}^{d+1} \max_{x \in [0,1]} \int_0^1 \gamma^{n(x, y)} (n(x, y) + 1)^{d+1} \lambda(y) dy + c \delta_{\max}^{d+1-l} \\
& \leq \frac{C_d}{\delta_{\min}^{l+1}} c \delta_{\max}^{d+1} B \lambda_{\max} \delta_{\max} + c \delta_{\max}^{d+1-l} = o(\delta_{\max}^{d+1-l})
\end{aligned}$$

quand $k \rightarrow \infty$. Pour justifier l'avant-dernière inégalité, on utilise le fait que la distance entre y et τ_r est bornée par $(n(y, \tau_r) + 1) \delta_{\max}$ et que pour x dans $[\tau_r, \tau_{r+1}]$, $n(y, \tau_r) \leq n(y, x)$.

Sur l'intervalle $[\tau_r, \tau_{r+1}]$, on peut donc sans crainte accorder toute notre attention à $s_{\bar{f}}(x) - \bar{f}(x)$ qu'on développe de la façon suivante

$$\begin{aligned}
s_{\bar{f}}(x) - \bar{f}(x) & = \int_0^1 K(x, y) f(\tau_r) \lambda(y) dy + \sum_{i=1}^d \frac{f^{(i)}(\tau_r)}{i!} \int_0^1 K(x, y) (y - \tau_r)^i \lambda(y) dy \\
& \quad + \frac{f^{(d+1)}(\tau_r)}{(d+1)!} \int_0^1 K(x, y) (y - \tau_r)^{d+1} \lambda(y) dy - \bar{f}(x; \tau_r)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f(\tau_r) + \sum_{i=1}^d \frac{f^{(i)}(\tau_r)(x-\tau_r)^i}{i!} + \frac{f^{(d+1)}(\tau_r)}{(d+1)!} \int_0^1 K(x,y)(y-\tau_r)^{d+1} \lambda(y) dy - \bar{f}(x; \tau_r) \\
&= \frac{f^{(d+1)}(\tau_r)}{(d+1)!} \left(\int_0^1 K(x,y)(y-\tau_r)^{d+1} \lambda(y) dy - (x-\tau_r)^{d+1} \right)
\end{aligned}$$

où l'avant-dernière égalité vient de (2.5) et de la reproductibilité des polynômes qui assure que $\int_0^1 K(x,y)(y-\tau_r)^i \lambda(y) dy = (x-\tau_r)^i$ pour $i = 1, \dots, d$ parce que $(y-\tau_r)^i$ est un polynôme de degré i en y . Si on utilise maintenant le théorème du binôme, on s'aperçoit que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 K(x,y)(y-\tau_r)^{d+1} \lambda(y) dy &= \int_0^1 K(x,y)y^{d+1} \lambda(y) dy + \sum_{j=0}^d \binom{d+1}{j} (-\tau_r)^{d+1-j} \int_0^1 K(x,y)y^j \lambda(y) dy \\
&= \int_0^1 K(x,y)y^{d+1} \lambda(y) dy + \sum_{j=0}^d \binom{d+1}{j} (-\tau_r)^{d+1-j} x^j \\
&= \int_0^1 K(x,y)y^{d+1} \lambda(y) dy + (x-\tau_r)^{d+1} - x^{d+1}
\end{aligned}$$

où l'avant-dernière égalité est encore une conséquence de la reproductibilité des polynômes qui assure que $\int_0^1 K(x,y)y^j \lambda(y) dy = x^j$ pour $j = 0, \dots, d$. Ainsi, un détour du côté du lemme 2.6 permet de conclure que sur $[\tau_r, \tau_{r+1})$ (et sur $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ si $r = k$),

$$\begin{aligned}
s_{\bar{f}}(x) - \bar{f}(x) &= f^{(d+1)}(\tau_r) \left\{ \int_0^1 K(x,y) \frac{y^{d+1}}{(d+1)!} \lambda(y) dy - \frac{x^{d+1}}{(d+1)!} \right\} \\
&= -f^{(d+1)}(\tau_r) \frac{\delta_{r+1}^{d+1}}{(d+1)!} B_{d+1} \left(\frac{x-\tau_r}{\delta_{r+1}} \right) - f^{(d+1)}(\tau_r) z(x). \tag{2.17}
\end{aligned}$$

En conjuguant (2.16) et (2.17) et en posant $z_1(x) = s_{f-\bar{f}}(x) - (f-\bar{f})(x)$, on peut écrire $\tilde{z}(x) = f^{(d+1)}(\tau_r) z(x) - z_1(x)$ où, par l'inégalité de Minkowski, pour $l = 0, \dots, d-1$,

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial^l \tilde{z}(x)}{\partial x^l} \right)^2 \lambda(x) dx \leq \left(|f^{(d+1)}(\tau_r)| \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{\partial^l z(x)}{\partial x^l} \right)^2 \lambda(x) dx} + \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{\partial^l z_1(x)}{\partial x^l} \right)^2 \lambda(x) dx} \right)^2$$

$$\leq \left(\max_{x \in [0,1]} |f^{(d+1)}(x)| \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{\partial^l z(x)}{\partial x^l} \right)^2 \lambda(x) dx} + \sqrt{\max_{x \in [0,1]} \left| \frac{\partial^l z_1(x)}{\partial x^l} \right|^2} \right)^2 = o(\delta_{\max}^{2(d+1-l)})$$

alors que

$$\max_{x \in [\tau_r, \tau_{r+1}]} \left| \frac{\partial^l \tilde{z}(x)}{\partial x^l} \right| = \begin{cases} O(\delta_{\max}^{d+1-l}) & \text{si } r = 0, \dots, v_1 - 1 \text{ ou } r = k - v_2 + 1, \dots, k \\ o(\delta_{\max}^{d+1-l}) & \text{si } r = v_1, \dots, k - v_2 \end{cases}$$

avec $\max_{x \in [0,1]} |\partial^l \tilde{z}(x) / \partial x^l| = O(\delta_{\max}^{d+1-l})$.

CQFD

Ce théorème donne une expression très précise de l'erreur $f(x) - s_f(x)$ et de ses dérivées et à notre connaissance, seuls les splines permettent une telle acuité. Pour en saisir les nuances, faisons quelques remarques.

La $(d+1)$ -ième dérivée de $f(\cdot)$ qui fait partie de l'erreur nous rappelle que $f(\cdot)$ est plus difficile à approximer dans les régions où elle est oscillante, c'est-à-dire où $|f^{(d+1)}(x)|$ est élevée. La forme de l'erreur suggère d'ailleurs d'écraser le terme $|f^{(d+1)}(x)|$ en plaçant davantage de noeuds là où $f(\cdot)$ bouge beaucoup. Une autre stratégie est de choisir les noeuds de façon à ce que les zéros des polynômes de Bernoulli coïncident avec les endroits où la dérivée est maximale.

Par ailleurs, la fonction $z(x)$ qui apparaît dans $\tilde{z}(x)$ a fait l'objet de commentaires suite au lemme 2.6 et ceux-ci sont toujours d'actualité. Il importe de souligner que la caractérisation de l'erreur d'approximation est moins précise aux frontières de $[0,1]$ qu'au centre, mais que cette imprécision se

manifeste sur des intervalles de plus en plus petits à mesure que k augmente et qu'elle n'est pas suffisamment importante pour compromettre la vitesse de convergence de $f(x) - s_f(x)$ vers 0, laquelle s'avère optimale. En effet, la distance du supremum entre une fonction de $C^{d+1}[0,1]$ et un spline de $S_k^d(\tau^k)$ ne peut tendre vers 0 à une vitesse supérieure à $O(\delta_{\max}^{d+1})$ (DeBoor (1978), théorème 12.1) et c'est précisément la vitesse qui est atteinte ici. Pour le voir, on récupère la fonction $r(x)$ du lemme 2.4 pour faire une économie de notation et, en remarquant que

$$\max_{x \in [0,1]} \left| \frac{\partial^l r(x)}{\partial x^l} \right| \leq \frac{\delta_{\max}^{d+1-l}}{(d+1-l)!} \max_{x \in [0,1]} |B_{d+1-l}(x)| = O(\delta_{\max}^{d+1-l})$$

lorsque $k \rightarrow \infty$, on déduit du théorème 2.7 qu'il existe une constante C , dépendant de $f(\cdot)$ et de d mais non de k , telle que

$$\max_{x \in [0,1]} |f(x) - s_f(x)| \leq \max_{x \in [0,1]} |f^{(d+1)}(x)| \max_{x \in [0,1]} |r(x)| + \max_{x \in [0,1]} |\tilde{z}(x)| \leq C \delta_{\max}^{d+1}, \quad (2.18)$$

alors que le même exercice avec les dérivées aboutit à

$$\max_{x \in [0,1]} \left| \frac{\partial^l (f(x) - s_f(x))}{\partial x^l} \right| \leq C \delta_{\max}^{d+1-l} \quad (2.19)$$

pour $l = 1, \dots, d-1$.

Dans le même ordre d'idée, on peut se pencher sur la norme $L_2[0,1]$ de l'erreur et de ses dérivées. Pour $l = 0, \dots, d-1$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{\partial^l (f(x) - s_f(x))}{\partial x^l} \right)^2 \lambda(x) dx &= \sum_{r=0}^k \int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} \left(f^{(d+1)}(\tau_r) \frac{\partial^l r(x)}{\partial x^l} + \frac{\partial^l \tilde{z}(x)}{\partial x^l} \right)^2 \lambda(x) dx \\ &= \sum_{r=0}^k \int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} \left(f^{(d+1)}(\tau_r) \frac{\partial^l r(x)}{\partial x^l} \right)^2 \lambda(x) dx + \int_0^1 \left(\frac{\partial^l \tilde{z}(x)}{\partial x^l} \right)^2 \lambda(x) dx \end{aligned}$$

$$+2 \sum_{r=0}^k \int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} f^{(d+1)}(\tau_r) \frac{\partial^l r(x)}{\partial x^l} \frac{\partial^l \bar{z}(x)}{\partial x^l} \lambda(x) dx$$

$$= I_1 + I_2 + I_3.$$

Le théorème 2.7 indique que I_2 est $o(\delta_{\max}^{2(d+1-l)})$. L'intégrale I_3 est également de cet ordre car par Cauchy-Schwarz,

$$|I_3| \leq 2 \max_{x \in [0,1]} |f^{(d+1)}(x)| \max_{x \in [0,1]} \left| \frac{\partial^l r(x)}{\partial x^l} \right| \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{\partial^l \bar{z}(x)}{\partial x^l} \right)^2 \lambda(x) dx} = o(\delta_{\max}^{2(d+1-l)}).$$

Quant à I_1 , on note que puisque $\lambda(\cdot)$ est continue et que $\delta_{\max} \rightarrow 0$,

$$\max_{0 \leq r \leq k} \max_{x \in [\tau_r, \tau_{r+1}]} |\lambda(x) - \lambda(\tau_r)| = \omega(\delta_{\max}, \lambda) = o(1),$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta_{\max}^{2(d+1-l)}} I_1 &= \frac{1}{\delta_{\max}^{2(d+1-l)}} \sum_{r=0}^k (f^{(d+1)}(\tau_r))^2 \lambda(\tau_r) \int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} \left(\frac{\partial^l r(x)}{\partial x^l} \right)^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{\delta_{\max}^{2(d+1-l)}} \sum_{r=0}^k (f^{(d+1)}(\tau_r))^2 \int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} \left(\frac{\partial^l r(x)}{\partial x^l} \right)^2 (\lambda(x) - \lambda(\tau_r)) dx \\ &= \sum_{r=0}^k (f^{(d+1)}(\tau_r))^2 \lambda(\tau_r) \left(\frac{\delta_{r+1}}{\delta_{\max}} \right)^{2(d+1-l)} \int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} \left(\frac{B_{d+1-l}((x - \tau_r)/\delta_{r+1})}{(d+1-l)!} \right)^2 dx + o(1) \\ &= \left(\int_0^1 \left(\frac{B_{d+1-l}(x)}{(d+1-l)!} \right)^2 dx \right) \sum_{r=0}^k \delta_{r+1} (f^{(d+1)}(\tau_r))^2 \lambda(\tau_r) \left(\frac{\delta_{r+1}}{\delta_{\max}} \right)^{2(d+1-l)} + o(1). \end{aligned}$$

Si on refuse d'enfermer les noeuds dans un carcan plus lourd que l'uniformité locale asymptotique, on ne peut guère caractériser I_1 avec plus de précision. Il est cependant possible de faire un pas de plus si on assume qu'il existe une fonction $p(\cdot)$, une sorte de densité limite des noeuds, telle que $\forall r = 0, \dots, k$, $(\delta_{r+1}/\delta_{\max})^{2(d+1-l)} = p(\tau_r)^{-2(d+1-l)} + o(\delta_{\max}^{2(d+1-l)})$ quand $k \rightarrow \infty$. Si tel est le cas en effet,

la somme ci-haut constitue une somme de Riemann puisque les δ_{r+1} tendent vers 0 et comme en outre

$$\int_0^1 \left(\frac{B_{d+1-l}(x)}{(d+1-l)!} \right)^2 dx = \frac{|B_{2(d+1-l)}|}{(2(d+1-l))!}$$

où $B_{2(d+1-l)}$ est le $2(d+1-l)$ -ième nombre de Bernoulli (Ghizzetti et Ossicini (1970)), on conclut finalement que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\delta_{\max}^{2(d+1-l)}} \int_0^1 \left(\frac{\partial^l (f(x) - s_f(x))}{\partial x^l} \right)^2 \lambda(x) dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|B_{2(d+1-l)}|}{(2(d+1-l))!} \sum_{r=0}^k \delta_{r+1} \frac{(f^{(d+1)}(\tau_r))^2}{p(\tau_r)^{2(d+1-l)}} \lambda(\tau_r) \\ &= \frac{|B_{2(d+1-l)}|}{(2(d+1-l))!} \int_0^1 \frac{(f^{(d+1)}(x))^2}{p(x)^{2(d+1-l)}} \lambda(x) dx \end{aligned} \quad (2.20)$$

qui est, dans un cadre plus général, la limite de Barrow et Smith présentée en (2.2).

Pour compléter le portrait, on discute de la norme $L_1[0,1]$ de l'erreur et de ses dérivées. En récupérant le raisonnement qui a servi à l'étude de la norme $L_2[0,1]$, on remarque que pour $l = 0, \dots, d-1$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta_{\max}^{d+1-l}} \int_0^1 \left| \frac{\partial^l (f(x) - s_f(x))}{\partial x^l} - \frac{\partial^l \bar{z}(x)}{\partial x^l} \right| \lambda(x) dx &= \frac{1}{\delta_{\max}^{d+1-l}} \sum_{r=0}^k |f^{(d+1)}(\tau_r)| \lambda(\tau_r) \int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} \left| \frac{\partial^l r(x)}{\partial x^l} \right| dx \\ &\quad + \frac{1}{\delta_{\max}^{d+1-l}} \sum_{r=0}^k |f^{(d+1)}(\tau_r)| \int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} \left| \frac{\partial^l r(x)}{\partial x^l} \right| (\lambda(x) - \lambda(\tau_r)) dx \\ &= \left(\int_0^1 \frac{|B_{d+1-l}(x)|}{(d+1-l)!} dx \right) \sum_{r=0}^k \delta_{r+1} |f^{(d+1)}(\tau_r)| \lambda(\tau_r) \left(\frac{\delta_{r+1}}{\delta_{\max}} \right)^{d+1-l} + o(1) \end{aligned}$$

et on peut ajouter, par Cauchy-Schwarz, que

$$\frac{1}{\delta_{\max}^{d+1-l}} \int_0^1 \left| \frac{\partial^l \bar{z}(x)}{\partial x^l} \right| \lambda(x) dx \leq \frac{1}{\delta_{\max}^{d+1-l}} \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{\partial^l \bar{z}(x)}{\partial x^l} \right)^2 \lambda(x) dx} = o(1)$$

quand $k \rightarrow \infty$. Or, puisque

$$\left| \int |g+h| - \int |g| \right| \leq \int (|g+h| - |g|) \leq \int |h|$$

pour toutes fonctions intégrables g et h , on déduit que si on assume encore une fois que les noeuds ont une densité limite $p(\cdot)$, alors

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\delta_{\max}^{d+1-l}} \int_0^1 \left| \frac{\partial^l (f(x) - s_f(x))}{\partial x^l} \right| \lambda(x) dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\delta_{\max}^{d+1-l}} \int_0^1 \left| \frac{\partial^l (f(x) - s_f(x))}{\partial x^l} - \frac{\partial^l \bar{z}(x)}{\partial x^l} \right| \lambda(x) dx \\ &= \left(\int_0^1 \left| \frac{B_{d+1-l}(x)}{(d+1-l)!} \right| dx \right) \int_0^1 \left| \frac{f^{(d+1)}(x)}{p(x)^{d+1-l}} \right| \lambda(x) dx. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Le résultat principal de ce chapitre, le théorème 2.7, est intéressant en soi car il permet d'obtenir avec précision l'erreur d'approximation des splines et, par ricochet, les normes (L_∞ , L_2 , L_1 etc.) de cette erreur. Il sera également utile dans les chapitres à venir qui portent sur l'utilisation des splines dans des contextes statistiques car on y fera appel pour établir les comportements asymptotiques d'estimateurs splines.

Chapitre 3

Aspects statistiques

Le chapitre précédent portait sur l'aspect mathématique des splines. Il est rassurant de savoir que ce sont des objets possédant de remarquables propriétés d'approximation et cela nous conforte dans notre choix de les utiliser comme estimateurs. Dans ce chapitre-ci, nous les étudierons justement dans un contexte statistique en nous intéressant tout particulièrement à leur distribution asymptotique. En 1988, Eubank obtient la normalité asymptotique du spline des moindres carrés, mais précise que celle-ci ne s'observe que si la fonction à estimer est elle-même un spline dont les noeuds sont connus. Ce cadre étant beaucoup trop restrictif, nous nous emploierons à l'élargir et à démontrer que la normalité asymptotique tient sans qu'il ne soit nécessaire de s'alourdir d'hypothèses difficiles à justifier.

De façon indépendante, Zhou et al. (1998) ont montré certains résultats apparaissant dans ce chapitre. Déplorant eux aussi l'insuffisance de résultats sur l'utilisation des splines dans un contexte d'inférence statistique, ils ont étudié le comportement asymptotique des splines des moindres carrés. Nous irons plus loin en établissant au chapitre 4 des résultats de convergence pour toutes les dérivées de ces splines. Pour traiter le cas où les X_i sont aléatoires, ils ont conditionné sur les observations. Les résultats que nous obtiendrons auront l'avantage d'être non conditionnels.

Nous soupçonnons par ailleurs qu'une petite erreur s'est glissée dans leur traitement du biais du spline des moindres carrés. Bien que bénigne et non compromettante pour leurs résultats de convergence, elle affecte l'étude

de la qualité du spline aux frontières de $[0,1]$. Nous y reviendrons un peu plus loin quand nous étudierons à notre tour le biais.

Dans ce chapitre, nous allons donc examiner l'estimateur spline dans deux contextes, nommément le contexte déterministe où on dispose de couples (x_i, Y_i) , $i = 1, \dots, n$, avec les x_i choisis par l'expérimentateur et les Y_i aléatoires, et le contexte stochastique dans lequel on observe des couples de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (X_i, Y_i) , $i = 1, \dots, n$.

3.1 Contexte déterministe

Soit (Ω, \mathcal{f}, P) un espace complet de probabilité. On présume que les éléments des couples (x_i, Y_i) sont liés par le modèle

$$Y_i = f(x_i) + \varepsilon_i(\omega), \quad (3.1)$$

$i = 1, \dots, n$, où $\omega \in \Omega$. Pour éviter d'alourdir la notation, le ω ne sera plus explicitement mentionné. On émet également les hypothèses suivantes.

(H1): Les ε_i , $i = 1, \dots, n$, sont i.i.d. de moyenne 0 et de variance $0 < \sigma^2 < \infty$.

(H2): $f(\cdot) \in C^{d+1}[0,1]$.

(H3): Les x_i sont déterministes et compris dans $[0,1]$. La suite des fonctions de répartition empirique de $\{x_i\}_{i=1, \dots, n}$, $F_n(\cdot)$, converge vers une fonction de répartition continue $F(\cdot)$ quand $n \rightarrow \infty$. Plus précisément, il existe une sous-suite $\{n_k\}_{k=1, \dots, \infty}$ telle que

$$\max_{x \in [0,1]} |F_{n_k}(x) - F(x)| \leq \frac{r_k}{k}$$

où $\{r_k\}_{k=1,\dots,\infty}$ est une suite de constantes qui tend vers 0 quand $k \rightarrow \infty$. De plus, $F(\cdot)$ est dérivable sur $[0,1]$ et sa dérivée, $\lambda(\cdot)$, est continue, positive et satisfait $0 < \lambda_{\min} \leq \lambda(x) \leq \lambda_{\max} < \infty \forall x \in [0,1]$.

Dans les situations où un modèle du type (3.1) est supposé, l'intérêt se concentre surtout sur l'estimation de $f(\cdot)$ et c'est précisément de cela dont il sera question dans les prochaines pages. L'estimateur que nous considérerons sera puisé dans S_k^d , l'ensemble des splines de degré d sur $[0,1]$ avec k noeuds intérieurs dont les éléments s'écrivent comme combinaison linéaire de la base des B-splines normalisés $\{N_i(x, \tau)\}_{i=1,\dots,k+d+1}$,

$$s(x, \theta) = \sum_{i=1}^{k+d+1} \theta_i N_i(x, \tau),$$

où $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{k+d+1})' \in \mathbb{R}^{k+d+1}$ et $\tau = (\tau_{-d}, \dots, \tau_{k+d+1})'$ est un vecteur de noeuds satisfaisant $\tau_{-d} = \dots = \tau_0 = 0$, $\tau_{k+1} = \dots = \tau_{k+d+1} = 1$ et $\tau_{i-d-1} < \tau_i \forall i = 1, \dots, k+d+1$.

On circonscrit notre étude au cas où on dispose, pour chaque k , d'un vecteur de noeuds $\tau^k = (\tau_{-d}, \dots, \tau_{k+d+1})'$ avec τ_1, \dots, τ_k distincts. Etant donné que l'obtention d'un bon estimateur est liée à la qualité des noeuds et peut être compromise par des noeuds exhibant un comportement erratique ou désordonné, on se contraint à ajouter une quatrième hypothèse à notre cadre de travail,

(H4a): les noeuds des vecteurs τ^k deviennent localement uniformes lorsque $k \rightarrow \infty$, c'est-à-dire que $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_{i+1} / \delta_i = 1 \forall i = 1, \dots, k$ avec $\delta_i = \tau_i - \tau_{i-1}$,

(H4b): si δ_{\min} et δ_{\max} désignent respectivement le minimum et le maximum des δ_i , alors il existe deux constantes positives C_1 et C_2 , indépendantes de k , telles que

$$\frac{C_1}{k} < \delta_{\min} \leq \delta_{\max} < \frac{C_2}{k}.$$

Soulignons que les hypothèses (H4) sont respectées quand, par exemple, les noeuds sont générés selon une fonction de densité continue tel qu'illustré entre autres dans l'article de Agarwal et Studden (1980). On peut interpréter (H4) comme une mise en garde contre une trop grande concentration de noeuds dans une région du domaine au détriment d'une autre qui en serait systématiquement dépourvue.

Ces hypothèses permettent aussi de présenter les résultats du chapitre 2 en fonction de k plutôt qu'en fonction de δ_{\max} . Par exemple, quand viendra le temps d'utiliser (2.18), on dira que la distance maximale entre $f(\cdot)$ et sa meilleure approximation est $O(k^{-(d+1)})$ plutôt que $O(\delta_{\max}^{d+1})$.

Puisque les noeuds sont fixés pour chaque k , l'estimation de $f(\cdot)$ se réduit à choisir intelligemment le vecteur des coefficients. La méthode du maximum de vraisemblance demande que la loi des ε_i soit précisée, ce que nous préférons éviter afin de réduire au minimum les hypothèses. Celle des moindres carrés s'impose donc tout naturellement.

Il est facile de voir que les fonctions

$$Q_{n_k}(\theta) = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} (Y_i - s(x_i, \theta))^2 \text{ et } Q(\theta) = \int_0^1 (f(x) - s(x, \theta))^2 dF(x) \quad (3.2)$$

sont minimisées respectivement par

$$\hat{\theta}_{n_k} = \frac{1}{n_k} M_{n_k}^{-1} \sum_{i=1}^{n_k} N(x_i) Y_i \text{ et } \tilde{\theta} = M^{-1} \int_0^1 N(x) f(x) dF(x) \quad (3.3)$$

où $N(x) = \{N_j(x, \tau^k)\}_{j=1, \dots, k+d+1}$ et $Y = \{Y_i\}_{i=1, \dots, n_k}$. Pour $x \in [0, 1]$, le spline $s(x, \tilde{\theta})$ n'est autre que la meilleure approximation de $f(x)$ en norme $L_2[0, 1]$ parmi tous les

splines de S_k^d avec noeuds τ^k dont il a été question au chapitre précédent. Quant à l'estimateur des moindres carrés $s(x, \hat{\theta}_{n_k})$, il est notre candidat pour l'estimation de $f(x)$ et on montrera qu'il converge en loi vers une normale de moyenne $s(x, \tilde{\theta})$ quand $k \rightarrow \infty$. Cette convergence, qui illustre que l'estimateur des moindres carrés tend vers le spline qui minimise l'erreur moyenne au carré du vrai modèle, s'inscrit dans la lignée des résultats de White (1981) sur les modèles mal spécifiés, c'est-à-dire les modèles où la fonction à estimer n'est pas incluse dans la classe de fonctions d'où on extrait l'estimateur.

Afin de faire un parallèle avec le chapitre précédent, soulignons que $s(x, \hat{\theta}_{n_k})$ peut s'écrire sous la forme

$$s(x, \hat{\theta}_{n_k}) = N'(x) \hat{\theta}_{n_k} = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}(x, x_i) Y_i \quad (3.4)$$

où $K_{n_k}(x, y) = N'(x) M_{n_k}^{-1} N(y)$ est la version empirique du noyau $K(x, y)$. Afin de jeter un peu de lumière sur l'estimateur (3.4), notons que si $n(x, y)$ compte le nombre de noeuds entre x et y , alors pour un certain $\gamma \in (0, 1)$, la propriété 3.2 qui s'en vient montre que $|K_{n_k}(x, y)| \leq C_k (\gamma + c_k)^{n(x, y)}$ avec $C_k = O(k)$ et $c_k = o(1)$ quand $k \rightarrow \infty$. L'importance du poids $K_{n_k}(x, x_i)$ est donc inversement proportionnelle à la distance entre x et x_i . En d'autres termes, ce sont principalement les points (x_i, Y_i) tels que x_i est dans le voisinage de x qui contribuent à l'estimation de $f(x)$, les points éloignés de x n'y participant que modestement.

La démonstration de la normalité asymptotique de $s(x, \hat{\theta}_{n_k})$ que nous nous proposons de faire nous force à étudier le noyau empirique de plus près. Il s'avère que $K_{n_k}(x, y)$ et $K(x, y)$ partagent des propriétés semblables, principalement en raison de la proximité de $F_{n_k}(\cdot)$ et $F(\cdot)$ illustrée en (H3).

Propriété 3.1 (reproductibilité des polynômes)

Soit $x_0 \in [0,1]$. Si $q(x)$ est un polynôme de degré égal ou inférieur à d , alors

$$\int_0^1 K_{n_k}(x_0, x) q(x) dF_{n_k}(x) = q(x_0).$$

Démonstration

Le polynôme $q(x)$ peut s'écrire sous la forme $N(x)' \theta$ pour un vecteur de coefficients θ de dimension $k+d+1$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_0^1 K_{n_k}(x_0, x) q(x) dF_{n_k}(x) &= N(x_0)' M_{n_k}^{-1} \int_0^1 N(x) N(x)' \theta dF_{n_k}(x) \\ &= N(x_0)' M_{n_k}^{-1} M_{n_k} \theta = q(x_0). \end{aligned}$$

CQFD

En choisissant $q(x) = 1$, on obtient comme corollaire $\int_0^1 K_{n_k}(x_0, x) dF_{n_k}(x) = n_k^{-1} \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}(x_0, x_i) = 1$. On signale que le noyau empirique reproduit aussi les splines de $S_k^d(\tau^k)$ car ceux-ci s'expriment sous la forme $N(x)' \theta$.

Propriété 3.2

Soient x_0 et x éléments de $[0,1]$. Si $n(x_0, x)$ compte le nombre de noeuds entre x_0 et x , alors sous (H3) et (H4), il existe $0 < \gamma < 1$, ainsi que deux quantités \bar{c}_k et c_k , respectivement $O(1)$ et $o(1)$ quand $k \rightarrow \infty$, telles que

$$|K_{n_k}(x_0, x)| \leq \frac{\bar{c}_k}{\delta_{\min}} (\gamma + c_k)^{n(x_0, x)}.$$

Démonstration

Soient $\alpha, \beta \in \{0, \dots, k\}$ les indices tels que $\tau_\alpha \leq x_0 < \tau_{\alpha+1}$ et $\tau_\beta \leq x < \tau_{\beta+1}$. Sous cette notation, $n(x_0, x) = |\alpha - \beta|$. Par les propriétés locales des B-splines et du fait qu'ils soient compris entre 0 et 1, on peut écrire, à l'aide du théorème 1.4,

$$\begin{aligned} |K_{n_k}(x_0, x)| &\leq N(x_0)' |M_{n_k}^{-1}| N(x) = \sum_{i=\alpha+1}^{\alpha+d+1} \sum_{j=\beta+1}^{\beta+d+1} N_i(x_0, \tau^k) |m_{n_k}^{ij}| N_j(x, \tau^k) \\ &\leq \sum_{i=\alpha+1}^{\alpha+d+1} \sum_{j=\beta+1}^{\beta+d+1} |m_{n_k}^{ij}| \leq \frac{C_k}{\delta_{\min}} \sum_{i=\alpha+1}^{\alpha+d+1} \sum_{j=\beta+1}^{\beta+d+1} (\gamma + c_k)^{|i-j|} \end{aligned} \quad (3.5)$$

avec $\gamma \in (0, 1)$, $C_k = O(1)$ et $c_k = o(1)$ quand $k \rightarrow \infty$. Puisque $\gamma + c_k$ chute dans l'intervalle $(0, 1)$ si k est grand, on peut retourner à la démonstration de la propriété 2.2 pour se convaincre que la double somme de (3.5) peut être bornée par $\tilde{C}_k (\gamma + c_k)^{n(x_0, x)}$ où \tilde{C}_k est d'ordre $O(1)$ et dépend du degré et de $\gamma + c_k$. Le choix $\bar{C}_k = C_k \tilde{C}_k$ complète la démonstration.

CQFD

Avant d'aborder le théorème de normalité de $s(x, \hat{\theta}_{n_k})$, il faut faire un dernier détour, le temps d'établir un petit lemme concernant l'erreur d'approximation $f(x) - s(x, \tilde{\theta})$.

Lemme 3.3

Soit $s(x, \tilde{\theta})$ la meilleure approximation de $f(x)$ en norme $L_2[0, 1]$ parmi tous les splines de $S_k^d(\tau^k)$ et posons $r(x, \tilde{\theta}) = f(x) - s(x, \tilde{\theta})$. Si $w_j(\tilde{\theta})$ désigne le j -ième élément du vecteur $\int_0^1 N(x) r(x, \tilde{\theta}) dF_{n_k}(x)$, alors sous les hypothèses (H2) à (H4),

$$\max_{1 \leq j \leq k+d+1} |w_j(\tilde{\theta})| \leq w_k$$

où w_k est d'ordre $o(k^{-(d+2)})$ quand $k \rightarrow \infty$.

Démonstration

Le fait que $s(x, \tilde{\theta}) = N(x)' \tilde{\theta}$ soit la meilleure approximation de $f(x)$ en norme $L_2[0,1]$ signifie, d'une part, que $\tilde{\theta}$ minimise la fonction $Q(\theta)$ présentée en (3.2) d'où

$$\frac{\partial Q(\tilde{\theta})}{\partial \theta} = -2 \int_0^1 N(x) r(x, \tilde{\theta}) dF(x) = 0,$$

et, d'autre part, qu'on peut majorer le maximum sur $[0,1]$ de $k^{d+1} |r(x, \tilde{\theta})|$ et de $k^d |\partial r(x, \tilde{\theta}) / \partial x|$ par une constante C indépendante de k tel qu'indiqué en (2.18) et (2.19). Ainsi, en intégrant par parties selon le théorème général de l'annexe A,

$$\begin{aligned} w_j(\tilde{\theta}) &= \int_{I_j} N_j(x, \tau^k) r(x, \tilde{\theta}) dF_{n_k}(x) = \int_{I_j} N_j(x, \tau^k) r(x, \tilde{\theta}) d(F_{n_k} - F)(x) \\ &= N_j(x, \tau^k) r(x, \tilde{\theta}) (F_{n_k} - F)(x) \Big|_{I_j} \\ &\quad - \int_{I_j} \left\{ N_j(x, \tau^k) \frac{\partial r(x, \tilde{\theta})}{\partial x} + r(x, \tilde{\theta}) \frac{\partial N_j(x, \tau^k)}{\partial x} \right\} (F_{n_k} - F)(x) dx \end{aligned}$$

où $I_j = (\tau_{j-d-1}, \tau_j)$ est l'intervalle de $[0,1]$ sur lequel $N_j(x, \tau^k)$ est non nul. Or, puisque chaque B-spline $N_j(x, \tau^k)$ s'annule aux extrémités de son intervalle I_j , le premier terme après la dernière égalité est zéro. Par ailleurs, on a vu en (1.6) que

$$\max_{x \in [0,1]} \left| \frac{\partial N_j(x, \tau^k)}{\partial x} \right| \leq \frac{2}{\delta_{\min}} \leq \frac{2k}{C_1}$$

$\forall j = 1, \dots, k+d+1$ où la constante C_1 est celle de (H4). Ainsi, parce que les B-splines sont inférieurs à 1 et par (H3) qui permet de borner la distance maximale entre $F_{n_k}(\cdot)$ et $F(\cdot)$,

$$w_k = \max_{1 \leq j \leq k+d+1} |w_j(\tilde{\theta})| \leq \max_{x \in [0,1]} |(F_{n_k} - F)(x)| \left\{ \max_{x \in [0,1]} \left| \frac{\partial r(x, \tilde{\theta})}{\partial x} \right| + \frac{2k}{C_1} \max_{x \in [0,1]} |r(x, \tilde{\theta})| \right\} \int_{I_j} dx$$

$$\leq \frac{r_k}{k} \left(\frac{C}{k^d} + \frac{2C}{C_1 k^d} \right) (d+1) \delta_{\max}$$

car les intervalles I_j sont tous de longueur inférieure ou égale à $(d+1)\delta_{\max}$. Le résultat découle du fait que $\delta_{\max} = O(k^{-1})$ et que $r_k = o(1)$ par (H3).

CQFD

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la normalité du spline obtenu par moindres carrés. Pour ce faire, nous nous inspirerons de la version de Lindeberg-Feller du théorème limite central.

Lemme 3.4 (Lindeberg-Feller)

Soit $\{Y_{ki}\}_{i=1, \dots, n_k}$ une suite de variables aléatoires doublement indexées de moyenne 0 et de variance finie s_{ki}^2 satisfaisant $\sum_{i=1}^{n_k} s_{ki}^2 = 1 \forall k \geq 1$. Si les Y_{ki} , $i = 1, \dots, n_{k'}$ sont indépendantes pour k fixe, alors

$$\sum_{i=1}^{n_k} Y_{ki} \rightarrow N(0,1)$$

si la condition de Lindeberg est satisfaite, c'est-à-dire si, pour chaque $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{i=1}^{n_k} E\left(Y_{ki}^2 \times 1_{(|Y_{ki}| \geq \varepsilon)}\right) = o(1).$$

Démonstration

Chung (1974), p. 205.

Théorème 3.5 (normalité du spline des moindres carrés)

Soit $x_0 \in [0,1]$ et, pour chaque k , soit $\hat{\theta}_{n_k}$ le vecteur de paramètres obtenu par moindres carrés et défini en (3.3). Supposons aussi que les vitesses avec lesquelles k et n_k tendent vers l'infini sont soumises aux restrictions $k/n_k = o(1)$ et $n_k = O(k^{2(d+1)+1})$. Si on pose

$$\Xi_k = \int_0^1 K^2(x_0, x) dF(x) = N'(x_0) M^{-1} N(x_0),$$

une quantité strictement positive du fait que la matrice inverse M^{-1} est définie positive, alors sous les hypothèses (H1) à (H4), lorsque $k \rightarrow \infty$,

$$\frac{\sqrt{n_k} (s(x_0, \hat{\theta}_{n_k}) - s(x_0, \tilde{\theta}))}{\sigma \sqrt{\Xi_k}} \rightarrow N(0,1)$$

où $s(x, \tilde{\theta})$ est la meilleure approximation de $f(x)$ en norme $L_2[0,1]$ parmi les splines de $S_k^d(\tau^k)$.

Démonstration

Pour appliquer le lemme de Lindeberg-Feller, commençons par écrire l'estimateur sous la forme $s(x_0, \hat{\theta}_{n_k}) = \sum_{i=1}^{n_k} X_{ki}$ où $X_{ki} = n_k^{-1} K_{n_k}(x_0, x_i) Y_i$.

On démontre dans un premier temps que la somme des espérances $\mu_{ki} = E(X_{ki}) = n_k^{-1} K_{n_k}(x_0, x_i) f(x_i)$ s'approche de $s(x_0, \tilde{\theta})$. Pour y arriver, écrivons

$$\sum_{i=1}^{n_k} \mu_{ki} = \int_0^1 K_{n_k}(x_0, x) f(x) dF_{n_k}(x)$$

$$= \int_0^1 K_{n_k}(x_0, x) s(x, \tilde{\theta}) dF_{n_k}(x) + N'(x_0) M_{n_k}^{-1} \int_0^1 N(x) r(x, \tilde{\theta}) dF_{n_k}(x)$$

où $r(x, \tilde{\theta}) = f(x) - s(x, \tilde{\theta})$. Puisque le noyau empirique reproduit les splines de $S_k^d(\tau^k)$, le premier terme de la somme est $s(x_0, \tilde{\theta})$. Pour borner le second, on utilise le lemme 3.3 qui dit que les éléments du vecteur $\int_0^1 N(x) r(x, \tilde{\theta}) dF_{n_k}(x)$ sont majorés par un scalaire w_k d'ordre $o(k^{-(d+2)})$ quand $k \rightarrow \infty$. Si $\mathbf{1}_p$ représente le vecteur unitaire de longueur p , on a ainsi

$$\begin{aligned} & \max_{x_0 \in [0,1]} \left| N'(x_0) M_{n_k}^{-1} \int_0^1 N(x) r(x, \tilde{\theta}) dF_{n_k}(x) \right| \\ & \leq w_k \max_{x_0 \in [0,1]} N'(x_0) \left\| M_{n_k}^{-1} \right\| \mathbf{1}_{k+d+1} \leq w_k \left\| M_{n_k}^{-1} \right\|_{\max} \max_{x_0 \in [0,1]} N'(x_0) \mathbf{1}_{k+d+1} = o\left(\frac{1}{k^{d+1}}\right) \end{aligned}$$

puisque la norme maximale de $M_{n_k}^{-1}$, étudiée au corollaire 1.5, est $O(k)$ et que $N(x_0)' \mathbf{1}_{k+d+1} = \sum_{j=1}^{k+d+1} N_j(x_0, \tau^k) = 1$ quel que soit x_0 . On rappelle que pour une matrice carrée A de dimensions $p \times p$, $|A| \mathbf{1}_p \leq \|A\|_{\max} \mathbf{1}_p$ par définition de la norme maximale. En conclusion, on peut écrire

$$E\left(s(x_0, \hat{\theta}_{n_k})\right) = \sum_{i=1}^{n_k} \mu_{ki} = s(x_0, \tilde{\theta}) + \eta_{1k}(x_0) \quad (3.6)$$

où $\eta_{1k} = \max_{x \in [0,1]} |\eta_{1k}(x)| = o(k^{-(d+1)})$ quand $k \rightarrow \infty$.

Quant aux variances, notons-les $\sigma_{ki}^2 = \text{Var}(X_{ki}) = \sigma^2 n_k^{-2} K_{n_k}^2(x_0, x_i)$ et tournons ici aussi notre attention vers leur somme qui se gère facilement quand on remarque que, similairement à ce que l'on observe avec le noyau $K(x_0, x)$, $\int_0^1 K_{n_k}^2(x_0, x) dF_{n_k}(x) = N(x_0)' M_{n_k}^{-1} N(x_0)$. Ainsi, par le corollaire 1.5, par (1.4) et par les propriétés des normes spectrale et euclidienne,

$$\max_{x_0 \in [0,1]} \left| \int_0^1 K_{n_k}^2(x_0, x) dF_{n_k}(x) - \Xi_k \right| = \max_{x_0 \in [0,1]} \left| N(x_0)' (M_{n_k}^{-1} - M^{-1}) N(x_0) \right|$$

$$\leq \|M_{n_k}^{-1} - M^{-1}\|_s \max_{x_0 \in [0,1]} \|N(x_0)\|_E^2 = o(k). \quad (3.7)$$

On conclut donc que

$$\text{Var}(s(x_0, \hat{\theta}_{n_k})) = \sum_{i=1}^{n_k} \sigma_{ki}^2 = \frac{\sigma^2}{n_k} \int_0^1 K_{n_k}^2(x_0, x) dF_{n_k}(x) = \frac{\sigma^2}{n_k} \Xi_k + \eta_{2k}(x_0) \quad (3.8)$$

où $\eta_{2k} = \max_{x \in [0,1]} |\eta_{2k}(x)| = o(k/n_k)$ quand $k \rightarrow \infty$.

Il n'est pas inutile à ce stade-ci de s'attarder sur $\Xi_k = N(x_0)'M^{-1}N(x_0)$. Le corollaire 1.5 nous apprend l'existence de deux constantes indépendantes de k , C'_1 et C'_2 , telles que $C'_1 k$ et $C'_2 k$ bornent, inférieurement et supérieurement, le ratio $a'M^{-1}a/a'a \forall a \in \mathbb{R}^{k+d+1}$. De ceci, on déduit que

$$C'_1 k \leq \frac{N(x_0)'M^{-1}N(x_0)}{N(x_0)'N(x_0)} = \frac{\Xi_k}{\|N(x_0)\|_E^2} \leq C'_2 k$$

et en injectant (1.4) dans cette inégalité, on trouve

$$\frac{C'_1}{(d+1)} \leq \frac{\Xi_k}{k} \leq C'_2 \quad (3.9)$$

qui indique que le rapport Ξ_k/k est pris en sandwich entre deux quantités indépendantes de k et de x_0 .

Nous avons maintenant tous les ingrédients nécessaires pour démontrer la normalité asymptotique de $s(x_0, \hat{\theta}_{n_k})$. Posons

$$Z_{ki} = \frac{X_{ki} - \mu_{ki}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n_k} \sigma_{ki}^2}} \equiv \frac{K_{n_k}(x_0, x_i) \mathcal{E}_i}{\sigma \sqrt{\sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}^2(x_0, x_i)}}$$

$i = 1, \dots, n_k$, et assurons-nous que ces variables aléatoires respectent les conditions du lemme de Lindeberg-Feller. Pour k fixe, elles sont indépendantes

puisque tributaires des ε_i qui le sont par (H1). Elles sont de moyennes nulles par construction et de variances

$$s_{ki}^2 = \text{Var}(Z_{ki}) = \frac{K_{n_k}^2(x_0, x_i)}{\sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}^2(x_0, x_i)} = \frac{\sigma_{ki}^2}{\sum_{i=1}^{n_k} \sigma_{ki}^2}$$

qui somment bien à 1. Notons par ailleurs que par la propriété 3.2,

$$\max_{1 \leq i \leq n_k} \sigma_{ki}^2 = \frac{\sigma^2}{n_k^2} \max_{1 \leq i \leq n_k} K_{n_k}^2(x_0, x_i) \leq \frac{\sigma^2}{n_k^2} \left(\frac{\bar{C}_k}{\delta_{\min}} \right)^2 \max_{1 \leq i \leq n_k} (\gamma + c_k)^{2n(x_0, x_i)} = O\left(\frac{k^2}{n_k^2}\right)$$

ce qui, combiné à (3.8) et (3.9), assure que lorsque $k \rightarrow \infty$,

$$s_{k, \max}^2 \equiv \max_{1 \leq i \leq n_k} s_{ki}^2 = \frac{\max_{1 \leq i \leq n_k} \sigma_{ki}^2}{\sigma^2 n_n^{-1} \Xi_k + \eta_{2k}(x_0)} = O\left(\frac{k}{n_k}\right) \rightarrow 0$$

et donc que les variances s_{ki}^2 sont finies. Ce résultat permet du même souffle de montrer que la condition de Lindeberg est respectée. Observons d'abord que

$$Z_{ki}^2 = \frac{K_{n_k}^2(x_0, x_i) \varepsilon_i^2}{\sigma^2 \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}^2(x_0, x_i)} = \frac{1}{\sigma^2} s_{ki}^2 \varepsilon_i^2.$$

Ainsi, parce que $|s_{k, \max}| \rightarrow 0$, on peut écrire, $\forall \varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_k} E\left(Z_{ki}^2 \times 1_{|Z_{ki}| \geq \varepsilon}\right) &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n_k} E\left(s_{ki}^2 \varepsilon_i^2 \times 1_{|s_{ki} \varepsilon_i| \geq \varepsilon \sigma}\right) \\ &\leq \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n_k} s_{ki}^2 E\left(\varepsilon_i^2 \times 1_{|\varepsilon_i| \geq \varepsilon \sigma / |s_{k, \max}|}\right) = \frac{1}{\sigma^2} E\left(\varepsilon_1^2 \times 1_{|\varepsilon_1| \geq \varepsilon \sigma / |s_{k, \max}|}\right) \sum_{i=1}^{n_k} s_{ki}^2 \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

quand $k \rightarrow \infty$ où la dernière égalité se déduit du fait que les ε_i , $i = 1, \dots, n_k$, sont i.i.d. de variance finie et que les s_{ki}^2 somment à 1 pour tout k .

Les conditions du théorème limite central étant toutes respectées, on peut en appliquer la conclusion, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{n_k} Z_{ki} \rightarrow N(0,1)$. Or, en se souvenant de (3.8), on obtient

$$\frac{\sqrt{n_k} \left(s(x_0, \hat{\theta}_{n_k}) - \sum_{i=1}^{n_k} \mu_{ki} \right)}{\sqrt{\sigma^2 \Xi_k}} = \frac{\sqrt{\sigma^2 \Xi_k / n_k + \eta_{2k}(x_0)}}{\sqrt{\sigma^2 \Xi_k / n_k}} \sum_{i=1}^{n_k} Z_{ki} \rightarrow N(0,1)$$

par le théorème de Slutsky car le quotient qui multiplie la somme des Z_{ki} tend vers 1 avec k , indépendamment de x_0 . Le théorème de normalité est ainsi démontré car par (3.6), la somme des μ_{ki} est, à un terme $\eta_{1k}(x_0) = o(k^{-(d+1)})$ près, égale à $s(x_0, \tilde{\theta})$ et que le rapport

$$\max_{x_0 \in [0,1]} \frac{\sqrt{n_k} |\eta_{1k}(x_0)|}{\sqrt{\sigma^2 \Xi_k}} = o\left(\frac{\sqrt{n_k}}{\sqrt{k}} \frac{1}{k^{d+1}}\right)$$

est $o(1)$ quand $k \rightarrow \infty$ sous l'hypothèse $n_k = O(k^{2(d+1)+1})$.

CQFD

Bien qu'intéressant en soi, ce théorème est d'un intérêt mitigé pour un expérimentateur pour deux raisons. Primo, il se préoccupera davantage du comportement asymptotique de $s(x_0, \hat{\theta}_{n_k}) - f(x_0)$ pour un certain $x_0 \in [0,1]$ et secundo, il sera bien embêté quand viendra le temps de l'appliquer sur des données réelles car il sera alors confronté aux quantités inconnues σ^2 et Ξ_k de la variance.

Le premier obstacle à l'utilisation du théorème de normalité ne constitue pas un problème sérieux si on est prêt à faire une entrave aux restrictions

concernant les vitesses de k et n_k vers l'infini en supposant plutôt que $n_k = O(k^{2(d+1)+1-\varepsilon})$ pour un certain $0 < \varepsilon < 1$. Ceci ne compromet pas le théorème de normalité 3.5 (car si $n_k = O(k^{2(d+1)+1-\varepsilon})$ alors $n_k = O(k^{2(d+1)+1})$), mais permet d'écrire

$$\frac{\sqrt{n_k} \left(s(x_0, \hat{\theta}_{n_k}) - f(x_0) \right)}{\sigma \sqrt{\Xi_k}} = \frac{\sqrt{n_k} \left(s(x_0, \hat{\theta}_{n_k}) - s(x_0, \tilde{\theta}) \right)}{\sigma \sqrt{\Xi_k}} + o(1) \quad (3.11)$$

quand $k \rightarrow \infty$. En effet, rappelant que la distance maximale séparant $f(\cdot)$ de sa meilleure approximation en norme $L_2[0,1]$ peut être majorée par $Ck^{-(d+1)}$ pour une constante C ,

$$\max_{x \in [0,1]} \frac{\sqrt{n_k} |s(x, \tilde{\theta}) - f(x)|}{\sigma \sqrt{\Xi_k}} \leq \frac{\sqrt{n_k}}{\sigma \sqrt{\Xi_k}} \frac{C}{k^{d+1}} = O\left(\frac{\sqrt{n_k}}{\sqrt{k}} \frac{1}{k^{d+1}} \right), \quad (3.12)$$

un rapport d'ordre $O(1/\sqrt{k^\varepsilon}) = o(1)$ si $n_k = O(k^{2(d+1)+1-\varepsilon})$. La normalité asymptotique de $s(x_0, \hat{\theta}_{n_k}) - f(x_0)$ constitue donc un corollaire du précédent théorème sous cette condition.

Quant au problème de la variance, il se règle en remplaçant les quantités inconnues par des estimateurs convergents.

Il est raisonnable de penser à $n_k^{-1} \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}^2(x_0, x_i)$ pour remplacer Ξ_k . De (3.7) et (3.9), on déduit que le rapport $\Xi_k / n_k^{-1} \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}^2(x_0, x_i)$ tend vers 1, de sorte que la substitution de Ξ_k par sa version empirique n'affecte pas la convergence en loi.

Le cas de σ^2 exige davantage de travail. L'estimateur naturel auquel on pense est bien-sûr

$$s^2 = \frac{1}{n_k - k - d - 1} \sum_{l=1}^{n_k} \left(Y_l - s(x_l, \hat{\theta}_{n_k}) \right)^2 \quad (3.13)$$

et nous nous emploierons dans le prochain lemme à circonscrire son comportement afin de démontrer que sa candidature mérite d'être retenue pour peu qu'on ajoute l'hypothèse

(H5): Pour n'importe quels entiers non négatifs $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ tels que $\sum_{i=1}^4 \alpha_i \leq 4$, $E(\varepsilon_1^{\alpha_1})E(\varepsilon_1^{\alpha_2})E(\varepsilon_1^{\alpha_3})E(\varepsilon_1^{\alpha_4})$ est finie et nulle si l'un des α_i est impair.

Cette hypothèse est en effet tout ce qu'il faut pour gérer l'une des formes quadratiques qui compose s^2 et nous exempt de la nécessité d'avoir recours au carcan de la normalité des erreurs. En particulier, elle est satisfaite si la distribution du vecteur des ε_i est de loi sphérique dont le quatrième moment existe ou si les ε_i sont i.i.d. et de loi symétrique avec encore une fois le quatrième moment fini (Wiens (1992)).

Lemme 3.6

Sous les conditions (H1) à (H5), l'estimateur s^2 donné en (3.13) tend en probabilité vers σ^2 lorsque $k \rightarrow \infty$.

Démonstration

Le modèle déterministe stipule que pour $i = 1, \dots, n_k$, $Y_i = f(x_i) + \varepsilon_i$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} (n_k - k - d - 1)s^2 &= \sum_{l=1}^{n_k} \left((f(x_l) + \varepsilon_l) - \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}(x_l, x_i)(f(x_i) + \varepsilon_i) \right)^2 \\ &= \sum_{l=1}^{n_k} \left(f(x_l) - \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}(x_l, x_i)f(x_i) \right)^2 + \sum_{l=1}^{n_k} \left(\varepsilon_l - \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}(x_l, x_i)\varepsilon_i \right)^2 \\ &\quad + 2 \sum_{l=1}^{n_k} \left(f(x_l) - \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}(x_l, x_i)f(x_i) \right) \left(\varepsilon_l - \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}(x_l, x_i)\varepsilon_i \right) \end{aligned}$$

$$= (n_k - k - d - 1)(T_{1n_k} + T_{2n_k} + T_{3n_k})$$

disons. Chacune de ces trois composantes sera étudiée individuellement en commençant par T_{1n_k} .

On s'évite bien du travail en remarquant que $n_k^{-1} \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}(x_l, x_i) f(x_i)$ n'est autre que l'espérance de $s(x_l, \hat{\theta}_{n_k})$ qui a été l'objet de la première partie de la démonstration du théorème 3.5. Un retour vers (3.6) nous rappelle que si $s(x, \tilde{\theta})$ est la meilleure approximation de $f(x)$ en norme $L_2[0,1]$, alors

$$\frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}(x_l, x_i) f(x_i) = s(x_l, \tilde{\theta}) + \eta_{1k}(x_l) \quad (3.14)$$

où $\max_{1 \leq l \leq n_k} |\eta_{1k}(x_l)| \leq \eta_{1k}$ avec $\eta_{1k} = o(k^{-(d+1)})$ quand $k \rightarrow \infty$. Comme la différence maximale entre $f(x)$ et $s(x, \tilde{\theta})$ est bornée par $Ck^{-(d+1)}$ sur $[0,1]$,

$$\begin{aligned} T_{1n_k} &= \frac{1}{n_k - k - d - 1} \sum_{l=1}^{n_k} \left(f(x_l) - s(x_l, \tilde{\theta}) - \eta_{1k}(x_l) \right)^2 \\ &\leq \frac{n_k}{n_k - k - d - 1} \left(\frac{C}{k^{d+1}} + \eta_{1k} \right)^2 = O\left(\frac{1}{k^{2(d+1)}} \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

lorsque $k \rightarrow \infty$ car $n_k / (n_k - k - d - 1)$ tend vers 1.

L'étude de T_{2n_k} est facilitée par un passage à la notation matricielle. Si ε désigne le vecteur contenant les erreurs ε_i , $i = 1, \dots, n_k$, et $N' = (N(x_1), \dots, N(x_{n_k}))$, de dimensions $(k+d+1) \times n_k$, est la transposée de la matrice de design, alors

$$\begin{aligned} (n_k - k - d - 1)T_{2n_k} &= \sum_{l=1}^{n_k} \left(\varepsilon_l - N(x_l) M_{n_k}^{-1} \frac{1}{n_k} N' \varepsilon \right)^2 \\ &= (\varepsilon - N(N'N)^{-1} N' \varepsilon)' (\varepsilon - N(N'N)^{-1} N' \varepsilon) = \varepsilon' (I - N(N'N)^{-1} N') \varepsilon \end{aligned}$$

car $M_{n_k} = n_k^{-1}N'N$. Sous l'hypothèse (H1), le vecteur aléatoire ε est d'espérance nulle et de matrice de variance-covariance $E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2 I$. En jouant avec les propriétés de la trace, il est facile de déduire que

$$\begin{aligned} (n_k - k - d - 1)E(T_{2n_k}) &= E\left(\text{tr}\left(\varepsilon'(I - N(N'N)^{-1}N')\varepsilon\right)\right) \\ &= E\left(\text{tr}\left((I - N(N'N)^{-1}N')\varepsilon\varepsilon'\right)\right) = \text{tr}\left((I - N(N'N)^{-1}N')E(\varepsilon\varepsilon')\right) \\ &= \sigma^2 \text{tr}(I - N(N'N)^{-1}N') = \sigma^2(n_k - k - d - 1) \end{aligned}$$

de sorte que T_{2n_k} est sans biais pour σ^2 . Par ailleurs, et c'est ici qu'intervient l'hypothèse (H5), l'espérance du carré d'une forme quadratique $Y'AY$, où A est une matrice symétrique et Y un vecteur aléatoire satisfaisant (H1) et (H5), est donnée par

$$E(Y'AY)^2 = \mu_{22}\left((\text{tr}(A))^2 + 2\text{tr}(A^2)\right) + \kappa \text{tr}(A * A)$$

où $\mu_{22} = E(Y_1^2 Y_2^2)$, $\kappa = E(Y_1^4) - 3\mu_{22}$ et $A * A$ est le produit d'Hadamard, c'est-à-dire $A * A = \{a_{ij}^2\}_{i,j=1,\dots,p}$ si $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,p}$ (Wiens, (1992)). Appliquant cette formule à T_{2n_k} , on conclut, par l'idempotence de la matrice $(I - N(N'N)^{-1}N')$, que

$$\begin{aligned} \text{Var}(T_{2n_k}) &= \frac{1}{(n_k - k - d - 1)^2} \left\{ \sigma^4 \left((n_k - k - d - 1)^2 + 2(n_k - k - d - 1) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(E(\varepsilon_1^4) - 3\sigma^4 \right) \text{tr}\left((I - N(N'N)^{-1}N') * (I - N(N'N)^{-1}N') \right) \right\} - \sigma^4 \\ &\leq \frac{2\sigma^4(n_k - k - d - 1) + \left(E(\varepsilon_1^4) - 3\sigma^4 \right) n_k}{(n_k - k - d - 1)^2} \end{aligned}$$

où la dernière inégalité vient du fait que, les éléments de la diagonale d'une matrice idempotente étant compris entre 0 et 1, il en est ainsi de ceux habitant la diagonale de la matrice $n_k \times n_k$ $(I - N(N'N)^{-1}N') * (I - N(N'N)^{-1}N')$ dont la trace

se retrouve par le fait même inférieure à n_k . Comme cette variance tend clairement vers 0 quand $k \rightarrow \infty$, l'inégalité de Tchebychev garantit que

$$P\left(\left|T_{2n_k} - E(T_{2n_k})\right| \geq \varepsilon\right) = P\left(\left|T_{2n_k} - \sigma^2\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\text{Var}(T_{2n_k})}{\varepsilon^2} \rightarrow 0 \quad (3.16)$$

pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui assure la convergence en probabilité de T_{2n_k} vers σ^2 .

Pour clore la démonstration, il ne reste plus qu'à se tourner vers T_{3n_k} dont l'étude s'expédie en quelques lignes si on se donne encore la peine de faire la traduction en forme matricielle. Soit $r = \{f(x_l) - s(x_l, \tilde{\theta}) - \eta_{1k}(x_l)\}_{l=1, \dots, n_k}$, un vecteur dont la norme euclidienne au carré est incidemment égale à $(n_k - k - d - 1)T_{1n_k}$. L'égalité (3.14) et la notation introduite lors de l'étude de T_{2n_k} cautionne l'écriture

$$T_{3n_k} = \frac{2}{n_k - k - d - 1} r'(I - N(N'N)^{-1}N')\varepsilon.$$

Vu sous cet angle, il est clair que T_{3n_k} est d'espérance nulle et de variance

$$\begin{aligned} \text{Var}(T_{3n_k}) &= \frac{4\sigma^2}{(n_k - k - d - 1)^2} r'(I - N(N'N)^{-1}N')r \\ &\leq \frac{4\sigma^2}{(n_k - k - d - 1)^2} \|r\|_{\mathcal{E}}^2 \|(I - N(N'N)^{-1}N')\|_s = \frac{4\sigma^2 T_{1n_k}}{n_k - k - d - 1} \end{aligned}$$

qui tend vers 0 quand $k \rightarrow \infty$ par (3.15). On justifie la dernière inégalité par les propriétés des normes euclidienne et spectrale de même que par le fait que la norme spectrale de la matrice symétrique et idempotente $(I - N(N'N)^{-1}N')$ est égale, selon (1.13), à sa plus grande valeur propre qui est 1. La convergence en probabilité

$$T_{3n_k} = o_p(1) \quad (3.17)$$

est assurée par un ultime recours à l'inégalité de Tchebychev.

A la lumière de (3.15), (3.16) et (3.17), $s^2 = T_{1n_k} + T_{2n_k} + T_{3n_k}$ converge en probabilité vers σ^2 quand $k \rightarrow \infty$.

CQFD

Toute la gymnastique des dernières pages avait en fait pour but d'établir le corollaire suivant qui s'avère cette fois d'un intérêt pratique réel.

Corollaire 3.7

Soit $x_0 \in [0,1]$ et, pour chaque k , soit $\hat{\theta}_{n_k}$ le vecteur de paramètres obtenu par moindres carrés et défini en (3.3). Supposons aussi que les vitesses de k et n_k vers l'infini sont telles que $k/n_k = o(1)$ et $n_k = O(k^{2(d+1)+1-\epsilon})$ pour un certain $0 < \epsilon < 1$. Alors sous les hypothèses (H1) à (H5),

$$\frac{\sqrt{n_k} (s(x_0, \hat{\theta}_{n_k}) - f(x_0))}{s \sqrt{n_k^{-1} \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}^2(x_0, x_i)}} \rightarrow N(0,1)$$

lorsque $k \rightarrow \infty$.

Ainsi, dans les situations, courantes en pratique, où un modèle comme (3.1) est présumé, mais où tout ce qu'on peut dire de la véritable fonction qui unit les Y_i aux x_i est qu'elle appartient à une certaine classe de fonctions continues, le spline des moindres carrés s'avère asymptotiquement normal et sans biais, permettant ainsi l'obtention d'un intervalle de confiance asymptotique de niveau $(1-\alpha)$ pour $f(x_0)$. En effet, on déduit du corollaire que pour x_0 dans $[0,1]$,

$$s(x_0, \hat{\theta}_{n_k}) \pm z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n_k}} \sqrt{n_k^{-1} \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}^2(x_0, x_i)},$$

où z_α est le quantile $1-\alpha$ de la loi normale centrée réduite, constitue un tel intervalle. Un exemple d'application sera présenté un peu plus loin.

Ce résultat tire en partie sa force du pouvoir d'approximation des splines qui assure que le biais de l'estimateur spline, $E(s(x, \hat{\theta}_{n_k})) - f(x)$, est négligeable sur $[0,1]$ si la croissance de n_k est adéquatement contrôlée, nous exemptant ainsi de nous lancer dans des suppositions hasardeuses concernant la forme fonctionnelle de la fonction inconnue.

Puisque nous abordons le biais, ouvrons une petite parenthèse sur l'erreur que nous croyons avoir détectée dans l'article de Zhou et al. (1998) dont nous avons parlé en début de chapitre. Sous les mêmes conditions que nous, ils prétendent dans leur théorème 2.1 que

$$E\left(s(x, \hat{\theta}_{n_k})\right) - f(x) = b(x) + o(k^{-(d+1)})$$

où, pour $x \in (\tau_r, \tau_{r+1}]$, $r = 0, \dots, k$,

$$b(x) = -\frac{f^{(d+1)}(x) \delta_{r+1}^{d+1}}{(d+1)!} B_{d+1}\left(\frac{x - \tau_r}{\delta_{r+1}}\right)$$

avec $B_{d+1}(\cdot)$ le $(d+1)$ -ième polynôme de Bernoulli. En combinant l'équation (3.6) et le théorème 2.7, nous déduisons plutôt qu'il existe un intervalle $(a,b) \subset [0,1]$ tel que la longueur des intervalles $[0,a]$ et $[b,1]$ est $o(1)$ quand $k \rightarrow \infty$ et tel que

$$E\left(s(x, \hat{\theta}_{n_k})\right) - f(x) = b^*(x) + z(x)$$

où le maximum de $z(x)$ est $o(k^{-(d+1)})$ sur (a,b) , mais $O(k^{-(d+1)})$ sur $[0,1] \setminus (a,b)$. Quant à la quantité $b^*(x)$, elle est obtenue en remplaçant $f^{(d+1)}(x)$ par $f^{(d+1)}(\tau_r)$

dans l'expression de $b(x)$, mais puisque $f(\cdot) \in C^{d+1}[0,1]$, $b^*(x) = b(x) + o(k^{-(d+1)})$ et la substitution est sans effet sur l'ordre de convergence.

Il semble donc que le biais donné par Zhou et al. ne soit pas tout à fait exact. Cependant, comme le maximum sur $[0,1]$ de $b(\cdot)$ ou $b^*(\cdot)$ est clairement $O(k^{-(d+1)})$, cette imprécision présumée n'a pas d'incidence sur les résultats de convergence. Nous avons tout de même cru qu'il valait la peine d'en faire mention.

Revenons maintenant à la discussion du corollaire 3.7 et soulignons que la vitesse de k vers l'infini y est un peu plus rapide que dans le théorème 3.5. L'introduction du ε du corollaire est nécessaire pour que l'estimateur spline soit asymptotiquement sans biais pour la fonction $f(\cdot)$. Si k tend vers l'infini à la vitesse du théorème, (3.11) n'est plus vrai parce que le rapport (3.12) devient alors $O(1)$ quand $k \rightarrow \infty$. Autrement dit,

$$\frac{\sqrt{n_k}(s(x_0, \hat{\theta}_{n_k}) - f(x_0))}{\sigma\sqrt{\Xi_k}} - B(x_0) \rightarrow N(0,1)$$

où $B(x_0) = (\sigma\sqrt{\Xi_k})^{-1}\sqrt{n_k}(s(x_0, \tilde{\theta}) - f(x_0))$ ne tend plus vers 0.

Cette discussion ouvre la porte à la fonction de risque intégrée (FRI) associée à un estimateur $\hat{f}(\cdot)$ de $f(\cdot)$. Cette fonction jauge la qualité d'un estimateur et permet des comparaisons entre estimateurs. Elle se définit par le biais au carré intégré additionné de la variance intégrée:

$$\begin{aligned} FRI &= \int_0^1 E\left(f(z) - \hat{f}(z)\right)^2 dF(z) \\ &= \int_0^1 \left(f(z) - E\left(\hat{f}(z)\right)\right)^2 dF(z) + \int_0^1 \text{Var}\left(\hat{f}(z)\right) dF(z). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Un estimateur est convergent si sa FRI tend vers 0 quand le nombre d'observations, n , tend vers l'infini. La vitesse de convergence optimale dans le cas où la forme fonctionnelle de $f(\cdot)$ est inconnue est de l'ordre de $n^{-2m/(2m+1)}$ si $f(\cdot)$ est élément de $C^m[0,1]$ (Stone (1982)).

Jugeons de notre estimateur en calculant sa FRI. Pour ce faire, les résultats du chapitre 2 seront précieux, particulièrement (2.18) qui assure que la distance maximale entre $f(z)$ et $s(z, \tilde{\theta})$ est $O(k^{-(d+1)})$ et (2.20) qui donne la limite de l'intégrale de l'erreur $f(z) - s(z, \tilde{\theta})$ au carré sous l'hypothèse que les noeuds possèdent une densité limite $p(\cdot)$. Si on est confortable avec ce genre d'hypothèse, alors par (3.6), le biais au carré intégré se présente, à un facteur $k^{2(d+1)}$ près, sous la forme

$$\begin{aligned} & k^{2(d+1)} \int_0^1 \left(f(z) - E\left(s(z, \hat{\theta}_{n_k}) \right) \right)^2 dF(z) \\ &= k^{2(d+1)} \int_0^1 \left(f(z) - s(z, \tilde{\theta}) - \eta_{1k}(z) \right)^2 dF(z) = k^{2(d+1)} \int_0^1 \left(f(z) - s(z, \tilde{\theta}) \right)^2 dF(z) + o(1) \\ &= \frac{|B_{2(d+1)}|}{(2(d+1))!} \int_0^1 \frac{(f^{(d+1)}(z))^2}{p(z)^{2(d+1)}} dF(z) + o(1). \end{aligned}$$

Soulignons que dans l'éventualité où on refuse de présumer de l'existence de $p(\cdot)$, le biais au carré intégré demeure d'ordre $O(k^{-2(d+1)})$ par (2.18). En fait, c'est principalement par commodité et pour obtenir une expression plus jolie pour le biais qu'on recourt à cette hypothèse.

Quant à la variance, notons d'abord que par les propriétés de la trace,

$$\int_0^1 N(z)' M^{-1} N(z) dF(z) = \int_0^1 \text{tr} \left(N(z)' M^{-1} N(z) \right) dF(z)$$

$$= \int_0^1 \text{tr}(M^{-1}N(z)N(z)')dF(z) = \text{tr}\left(M^{-1}\int_0^1 N(z)N(z)'dF(z)\right) = k + d + 1,$$

ce qui nous permet de déduire, en s'aidant (3.8), que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \text{Var}\left(s(z, \hat{\theta}_{n_k})\right)dF(z) &= \frac{\sigma^2}{n_k} \int_0^1 N(z)'M^{-1}N(z)dF(z) + \int_0^1 \eta_{2k}(z)dF(z) \\ &= \frac{\sigma^2(k+d+1)}{n_k} + o\left(\frac{k}{n_k}\right). \end{aligned}$$

En amalgamant ces résultats, on conclut que la FRI de notre estimateur peut s'exprimer sous la forme

$$FRI \approx \frac{1}{k^{2(d+1)}} \frac{|B_{2(d+1)}|}{(2(d+1))!} \int_0^1 \frac{(f^{(d+1)}(z))^2}{p(z)^{2(d+1)}} dF(z) + \frac{\sigma^2(k+d+1)}{n_k}. \quad (3.19)$$

Dans leur discussion des propriétés asymptotiques de l'estimateur spline des moindres carrés, Agarwal et Studden (1980) ont aussi regardé la FRI. Bien que leur définition s'écarte un peu de la nôtre (ils intègrent la fonction de risque par rapport à une densité différente de $dF(z)$), on obtient exactement la même expression qu'eux si on remplace leur densité d'intégration par $dF(z)$. Ils se sont aussi penchés sur la façon de choisir $p(\cdot)$ et k pour optimiser la FRI, mais nous attendrons au dernier chapitre avant d'en parler davantage.

L'examen de la FRI invite à réfléchir sur l'équilibre entre le biais et la variance. On voudra contrôler la croissance de n_k de façon à bien balancer ces deux composantes.

Quand $n_k = O(k^{2(d+1)+1})$, c'est-à-dire quand n_k tend vers l'infini à la vitesse maximale, la FRI converge vers 0 à la vitesse $O(n_k^{-2(d+1)/(2(d+1)+1)})$ qui s'avère optimale si $f(\cdot) \in C^{d+1}[0,1]$. Si la FRI est le critère choisi pour juger la performance

d'un estimateur, alors sous les hypothèses (H1) à (H4), l'estimateur spline des moindres carrés est asymptotiquement optimal. A ce sujet, rappelons qu'on a fait allusion aux effets de bords dans le chapitre d'introduction. Ce problème est le lot de certains estimateurs dont le biais converge vers 0 plus lentement aux extrémités de $[0,1]$ qu'au centre. Cet effet peut être suffisamment important pour avoir une incidence sur la FRI et l'empêcher d'atteindre la vitesse de convergence optimale. Les estimateurs du noyau, s'ils ne sont pas convenablement ajustés, présentent ce problème (Eubank (1988), p. 132). On devine par (3.19) que ce n'est pas le cas des splines qui s'adaptent tout naturellement à la particularité de l'estimation aux frontières.

Remarquons cependant qu'à la vitesse maximale $n_k = O(k^{2(d+1)+1})$, l'estimateur spline, bien qu'asymptotiquement normal, n'est pas asymptotiquement sans biais pour la fonction inconnue. En pratique, il est légitime de vouloir faire primer l'absence de biais sur l'optimalité telle que définie par la FRI. L'absence de biais asymptotique étant conditionnelle à l'assujettissement de n_k à la restriction $n_k = O(k^{2(d+1)+1-\varepsilon})$ pour un certain $0 < \varepsilon < 1$, elle se paye au prix d'une FRI qui ne converge plus vers 0 à la vitesse optimale, mais plutôt à la vitesse $O(n_k^{(-2(d+1)+\varepsilon)/(2(d+1)+1-\varepsilon)})$. On peut minimiser l'impact de notre désir d'absence de biais en choisissant ε petit.

Nous allons clore cette section par un exemple.

Exemple 1

Le théorème 3.5 et son corollaire traitent du comportement du spline des moindres carrés quand le nombre d'observations tend vers l'infini. En pratique, on est souvent confronté à des échantillons de taille modeste et

pour documenter un peu ce qui arrive dans ces situations, nous avons simulé $n = 100$ points à partir du modèle $Y_i = f(x_i) + \varepsilon_i$, $i = 1, \dots, 100$, où

$$f(x) = 4.26(e^{-3.25x} - 4e^{-6.5x} + 3e^{-9.75x}).$$

Cette fonction a été considérée par Eubank (1988) et par Wahba et Wold (1975). Les points x_i ont été placés uniformément sur $[0,1]$ et les erreurs ε_i générées selon une loi $N(0, \sigma^2)$ avec $\sigma^2 = 0.1$. Nous avons choisi de travailler avec un spline de degré 3 possédant 4 noeuds.

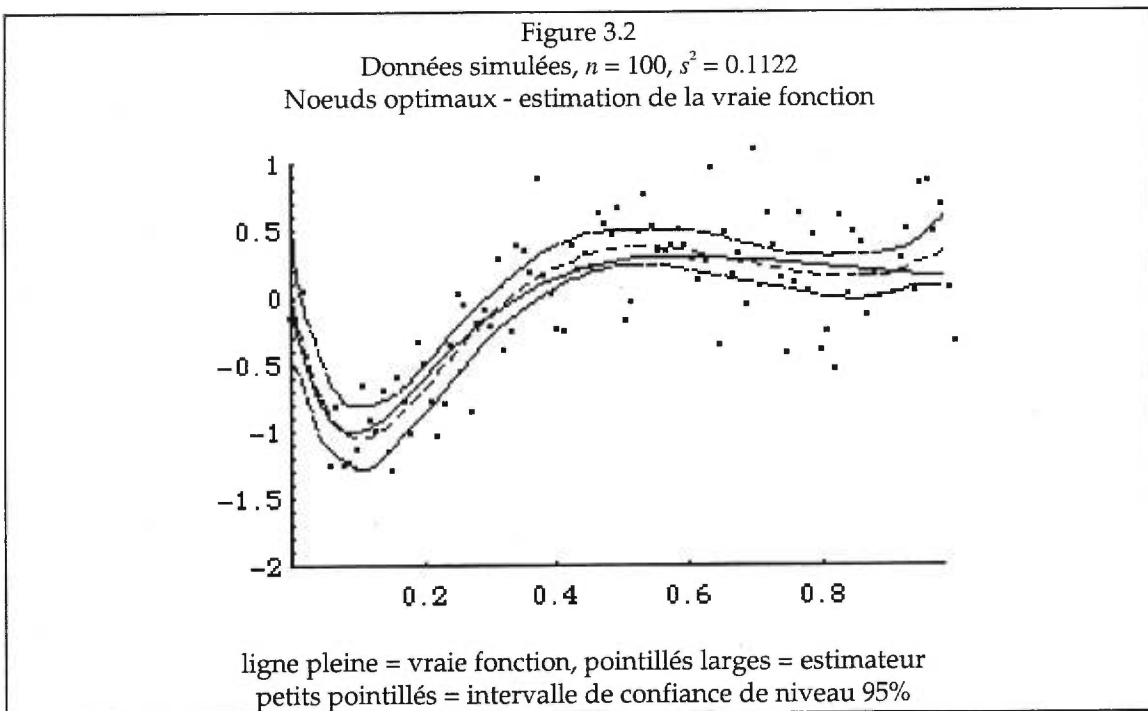
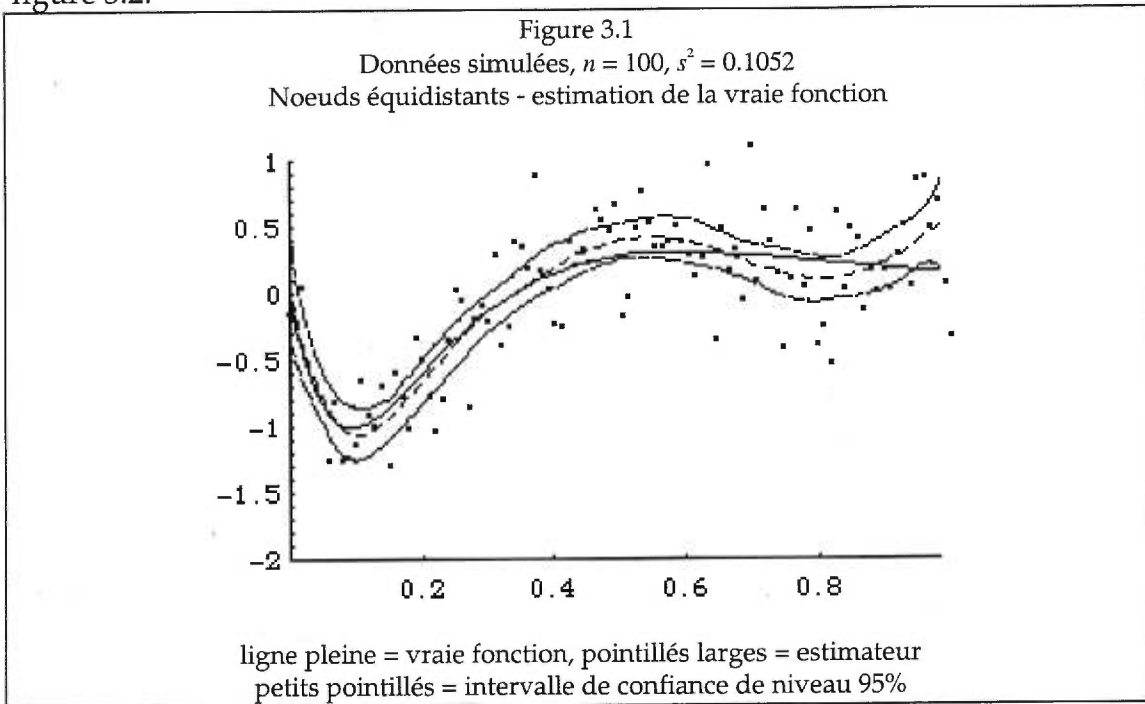
Les noeuds ont d'abord été choisis équidistants. Le spline des moindres carrés, qu'on obtient dès lors par les techniques bien connues de la régression linéaire (voir (3.3) et (3.4)), ainsi que la vraie fonction apparaissent à la figure 3.1. Pour chaque valeur de x dans $[0,1]$, on y retrouve également, illustré par des petits pointillés, l'intervalle de confiance de niveau 95% pour $f(x)$ déduit du corollaire 3.7.

Cet exemple étant bâti de toutes pièces, la fonction que l'on cherche à estimer est connue et ceci nous offre la possibilité d'apprécier l'effet d'utiliser des noeuds optimaux, c'est-à-dire des noeuds générés selon la fonction génératrice $p_{opt}(\cdot)$ qui minimise la FRI en (3.19). La manière de générer des noeuds à partir d'une fonction de densité a été décrite au début du chapitre 2. La fonction $p_{opt}(\cdot)$ est donnée en (5.1),

$$p_{opt}(t) = \frac{(f^{(d+1)}(t))^{2/(2(d+1)+1)}}{\int_0^1 (f^{(d+1)}(t))^{2/(2(d+1)+1)} dt},$$

et mène aux noeuds $\{0.084, 0.190, 0.346, 0.638\}$ (nous attendrons au chapitre 5 pour la commenter davantage). Par rapport aux noeuds équidistants, les

noeuds optimaux sont davantage concentrés dans la région où la fonction est oscillante. Le spline des moindres carrés avec noeuds optimaux est illustré à la figure 3.2.



Les noeuds optimaux semblent offrir un meilleur ajustement. Ceci n'est pas une surprise quand on pense que la fonction qui les génère est bâtie dans l'optique de minimiser la FRI et que la portion de la FRI qui dépend de la densité des noeuds est le biais au carré intégré. La performance des noeuds équidistants n'est tout de même pas si mauvaise, mais on peut présumer que pour certaines fonctions moins disciplinées, le gain à utiliser des noeuds optimaux est plus marqué. Ce phénomène a d'ailleurs été illustré par Jupp (1978).

L'examen de ces deux figures montre par ailleurs que la fonction $f(x)$ est couverte presque partout par les intervalles de confiance. Pour se prononcer davantage sur le véritable pourcentage de recouvrement (qu'on souhaite près de 95%), il faudrait toutefois se livrer à des simulations plus ambitieuses.

3.2 Contexte stochastique

L'étude de l'estimateur spline s'est confinée jusqu'à présent au cas un peu restreignant où l'expérimentateur a le loisir de choisir l'emplacement de ses observations. Un contexte plus proche de la réalité est celui où il observe plutôt des couples de variables aléatoires (X_i, Y_i) , $i = 1, \dots, n$. C'est le cadre de travail dont nous allons maintenant discuter.

Soit encore une fois l'espace complet de probabilité (Ω, \mathcal{f}, P) . On ne présume plus d'un modèle reliant les Y_i aux X_i comme dans le cas déterministe; on émet plutôt les hypothèses suivantes concernant la distribution conjointe des couples aléatoires et la distribution conditionnelle des Y_i .

(H'1): Les couples (X_i, Y_i) , $i = 1, \dots, n$, sont indépendants et identiquement distribués de loi conjointe $F(x, y)$ admettant une fonction de densité

continue $\lambda(x,y)$. Les X_i sont éléments de $[0,1]$ et leur fonction de densité marginale, notée $\lambda(x)$, est continue, positive et satisfait $0 < \lambda_{\min} \leq \lambda(x) \leq \lambda_{\max} < \infty \forall x \in [0,1]$.

(H'2): L'espérance conditionnelle $E(Y|X=x)$ existe et est élément de $C^{d+1}[0,1]$.

La variance conditionnelle $Var(Y|X=x)$ existe également et est Lipschitz d'ordre 1, c'est-à-dire que pour x_1 et $x_2 \in [0,1]$ quelconques, il existe une constante M telle que

$$|Var(Y|X = x_1) - Var(Y|X = x_2)| \leq M|x_1 - x_2|.$$

Pour une sous-suite $\{n_k\}_{k=1,\dots,\infty}$, l'hypothèse (H3) du cas déterministe indique que la distance entre $F_{n_k}(\cdot)$ et $F(\cdot)$ est bornée par r_k/k avec $r_k \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$. Dans le cas aléatoire, cette inégalité demeure vraie presque sûrement sous l'hypothèse (H'3) ci-dessous, mais la justification exige un peu de travail.

(H'3): Les vitesses de k et n_k vers l'infini sont telles que $r_k = k^{1+(1/4)}/\sqrt{n_k} = o(1)$ quand $k \rightarrow \infty$.

Voyons d'abord un lemme technique.

Lemme 3.8

La série $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\sqrt{n}}$ est convergente.

Démonstration

La démonstration passe par le test de l'intégrale; la série du lemme est convergente si $\int_1^{\infty} e^{-2\sqrt{x}} dx < \infty$. En examinant cette intégrale, on trouve

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} e^{-2\sqrt{x}} dx &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a e^{-2\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(-\frac{(2\sqrt{x}+1)^a}{2e^{2\sqrt{x}}} \Big|_1^a \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(-\frac{\sqrt{a}}{e^{2\sqrt{a}}} - \frac{1}{2e^2} + \frac{3}{2e^2} \right) = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(-\frac{\sqrt{a}}{e^{2\sqrt{a}}} \right) + \frac{3}{2e^2} \end{aligned}$$

car $e^{-2\sqrt{a}}$ tend vers 0 quand $a \rightarrow \infty$. Pour affirmer que l'intégrale est finie, il reste à montrer que la limite existe, mais par la règle de L'Hôpital,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{a}}{e^{2\sqrt{a}}} \right) = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{1/(2\sqrt{a})}{e^{2\sqrt{a}}(1/\sqrt{a})} \right) = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2e^{2\sqrt{a}}} \right) = 0.$$

CQFD

Ceci étant établi, définissons l'événement

$$E_{n_k}(\omega) = \left\{ \sup_{x \in [0,1]} |F_{n_k, \omega}(x) - F(x)| > \frac{r_k}{k} \right\}$$

où $F_{n_k, \omega}(\cdot)$ désigne la fonction de répartition empirique des $X_i, i=1, \dots, n_k$. Si on démontre que $P(\omega \in \Omega: E_{n_k}(\omega) \text{ infiniment souvent}) = 0$, alors on pourra affirmer qu'il existe un ensemble de mesure nulle \mathcal{N} tel que $\forall \omega \in \Omega/\mathcal{N}$, l'événement $E_{n_k}(\omega)$ ne se réalise qu'un nombre fini de fois; autrement dit, qu'il existe un $k_{0, \omega} > 0$, dépendant de ω , au-delà duquel $E_{n_k}(\omega)$ ne se réalise plus, c'est-à-dire tel que la distance maximale entre $F_{n_k, \omega}(\cdot)$ et $F(\cdot)$ est inférieure ou égale à r_k/k si $k > k_{0, \omega}$. Il s'avère en fait que c'est précisément le cas et pour le voir, on s'en remet à l'inégalité de Dvoretzky, Kiefer et Wolfowitz (Serfling (1980) p.59) et au lemme de Borel-Cantelli. Par l'inégalité en question et le choix de r_k , il existe une constante C telle que $P(E_{n_k}(\omega)) \leq C e^{-2\sqrt{k}}$. Puisque

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(E_{n_k}(\omega)) \leq C \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\sqrt{k}} < \infty$$

par le lemme précédent, Borel-Cantelli assure que la probabilité que $E_{n_k}(\omega)$ se réalise infiniment souvent est nulle. Ainsi, pour tout ω hors d'un ensemble de mesure nulle, il existe $k_{0,\omega} > 0$ tel que $\forall k > k_{0,\omega}$

$$\sup_{x \in (0,1)} |F_{n_k}(x) - F(x)| \leq \frac{r_k}{k} \quad (3.20)$$

où on omet l'indice ω pour alléger la notation.

Soulignons que cette inégalité constitue l'une des assises des résultats de proximité de M_{n_k} et M qu'on retrouve à la section 1.4. Ainsi, tant que ω se situe hors de l'ensemble de mesure nulle \mathcal{N} , il est légitime d'aller puiser des résultats dans cette section et c'est ce que nous ferons dans les démonstrations à venir.

Tout comme dans le cas déterministe, on souhaite étudier le comportement du spline de S_k^d qui résulte de la méthode des moindres carrés. Le fait de se situer dans le contexte aléatoire ne nous dispense pas d'imposer des conditions sur les noeuds. Ainsi, on se limite ici aussi au cas où on dispose, pour chaque k , d'un vecteur de noeuds $\tau^k = (\tau_{-d}, \dots, \tau_{k+d+1})'$ avec $\tau_{-d} = \dots = \tau_0 = 0$, $\tau_{k+1} = \dots = \tau_{k+d+1} = 1$ et τ_1, \dots, τ_k distincts. On suppose que les hypothèses (H4a) et (H4b) du contexte déterministe, que nous reproduisons ici pour plus de clarté, sont respectées.

(H'4a): les noeuds des vecteurs τ^k deviennent localement uniformes lorsque $k \rightarrow \infty$, c'est-à-dire que $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_{i+1}/\delta_i = 1 \forall i = 1, \dots, k$ avec $\delta_i = \tau_i - \tau_{i-1}$,

(H'4b): si δ_{\min} et δ_{\max} désignent respectivement le minimum et le maximum des δ_i , alors il existe deux constantes positives C_1 et C_2 , indépendantes de k , telles que

$$\frac{C_1}{k} < \delta_{\min} \leq \delta_{\max} < \frac{C_2}{k}.$$

Dans ce cadre stochastique, l'estimateur des moindres carrés, c'est-à-dire le spline de noeuds τ^k dont le vecteur de coefficients $\bar{\theta}_{n_k}$ minimise $\bar{Q}_{n_k}(\theta) = n_k^{-1} \sum_{i=1}^{n_k} (Y_i - s(X_i, \theta))^2$, s'écrit comme (3.4) mais avec les x_i déterministes substitués par les X_i aléatoires. Il revêt donc la forme

$$s(x, \bar{\theta}_{n_k}) = N(x)' \bar{\theta}_{n_k} = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}(x, X_i) Y_i \quad (3.21)$$

où $K_{n_k}(x, y) = N'(x) M_{n_k}^{-1} N(y)$ avec cette fois-ci

$$M_{n_k} = \int_0^1 N(x) N(x)' dF_{n_k}(x) = \left\{ \frac{1}{n_k} \sum_{r=1}^{n_k} N_i(X_r, \tau^k) N_j(X_r, \tau^k) \right\}_{i,j=1,\dots,k+d+1}. \quad (3.22)$$

Dans le contexte déterministe, le spline de $S_k^d(\tau^k)$ obtenu de la méthode des moindres carrés s'avérait un bon estimateur de la fonction $f(\cdot)$ faisant le pont entre les x_i et les Y_i . Dans le présent contexte, l'espérance conditionnelle $E(Y|X=x)$ joue un peu le rôle de $f(x)$ et il ne faudra pas s'étonner si le spline des moindres carrés (3.21) estime cette espérance. On la notera d'ailleurs $f_Y(x) \equiv E(Y|X=x)$ pour mettre en lumière son lien de parenté avec $f(x)$ et du même coup alléger la notation.

Précisément, nous nous proposons de démontrer que $s(x, \bar{\theta}_{n_k})$ possède une distribution asymptotiquement normale de moyenne $s(x, \bar{\theta})$ où $\bar{\theta}$ est le vecteur qui minimise $\bar{Q}(\theta) = \int_0^1 (f_Y(x) - s(x, \theta))^2 dF(x)$. Le spline $s(x, \bar{\theta})$ est donc la meilleure approximation de $f_Y(x)$ en norme $L_2[0,1]$ parmi tous les splines de S_k^d avec noeuds τ^k . La qualité de cette meilleure approximation fera le reste en ce sens que la proximité de $s(x, \bar{\theta})$ et $f_Y(x)$ sera garante de celle de $s(x, \bar{\theta}_{n_k})$ et $f_Y(x)$ si la croissance de n_k est convenablement contrôlée.

Le seul résultat que nous devons établir avant d'attaquer le théorème de normalité est en quelque sorte le pendant stochastique du lemme 3.3.

Lemme 3.9

Soit $s(x, \bar{\theta})$ la meilleure approximation de $f_Y(x)$ en norme $L_2[0,1]$ parmi tous les splines de $S_k^d(\tau^k)$. Si on désigne par $w_j(\bar{\theta})$ le j -ième élément du vecteur $n_k^{-1} \sum_{i=1}^{n_k} N(X_i)(Y_i - s(X_i, \bar{\theta}))$, alors sous les hypothèses (H'1) à (H'4), quand $k \rightarrow \infty$,

$$\max_{1 \leq j \leq k+d+1} |w_j(\bar{\theta})| = o_p \left(\frac{k^{1/4}}{\sqrt{n_k}} \right).$$

Démonstration

Les $w_j(\bar{\theta})$ s'expriment comme des sommes de variables aléatoires i.i.d. dont l'espérance est nulle. L'astuce qui permet de le montrer consiste à écrire la densité conjointe des (X_i, Y_i) sous la forme $\lambda(x, y) = \lambda(y | x) \lambda(x)$. On aura d'ailleurs l'occasion de revoir cette écriture à plusieurs reprises dans la suite de notre travail. Ainsi, $\forall j = 1, \dots, k+d+1$,

$$\begin{aligned} E(w_j(\bar{\theta})) &= E \left(\frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} N_j(X_i, \tau^k)(Y_i - s(X_i, \bar{\theta})) \right) = E(N_j(X_1, \tau^k)(Y_1 - s(X_1, \bar{\theta}))) \\ &= \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} N_j(x, \tau^k)(z - s(x, \bar{\theta})) \lambda(x, z) dx dz \\ &= \int_0^1 N_j(x, \tau^k) \left(\int_{-\infty}^{\infty} (z - s(x, \bar{\theta})) \lambda(z|x) dz \right) \lambda(x) dx \\ &= \int_0^1 N_j(x, \tau^k) (f_Y(x) - s(x, \bar{\theta})) \lambda(x) dx = 0, \end{aligned} \tag{3.23}$$

la nullité de la dernière intégrale étant due au fait que

$$\frac{\partial \bar{Q}(\bar{\theta})}{\partial \theta} = -2 \int_0^1 N(x) (f_Y(x) - s(x, \bar{\theta})) \lambda(x) dx = 0$$

parce que $\bar{\theta}$ minimise $\bar{Q}(\theta)$.

Quant à la variance des $w_j(\bar{\theta})$, on déduit aisément que

$$\begin{aligned} \text{Var}(w_j(\bar{\theta})) &= \frac{1}{n_k} E(N_j(X_1, \tau^k) (Y_1 - s(X_1, \bar{\theta})))^2 \\ &= \frac{1}{n_k} \int_0^1 N_j^2(x, \tau^k) \left(\int_{-\infty}^{\infty} (z - s(x, \bar{\theta}))^2 \lambda(z|x) dz \right) \lambda(x) dx \end{aligned}$$

où, si on développe le carré,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (z - s(x, \bar{\theta}))^2 \lambda(z|x) dz &= \int_{-\infty}^{\infty} (z^2 - 2zs(x, \bar{\theta}) + s(x, \bar{\theta})^2) \lambda(z|x) dz \\ &= E(Y^2 | X = x) - 2f_Y(x)s(x, \bar{\theta}) + s(x, \bar{\theta})^2 \\ &= \text{Var}(Y | X = x) + (f_Y(x) - s(x, \bar{\theta}))^2. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Or, comme on a fait l'hypothèse (H'2) que $f_Y(x)$ est élément de $C^{d+1}[0,1]$, on tombe précisément sous les conditions du théorème principal 2.7 et on peut prétendre, par (2.18), à l'existence d'une constante C majorant le maximum de $k^{d+1} |f_Y(x) - s(x, \bar{\theta})|$ sur $[0,1]$. Ainsi, puisque par ailleurs $N_j(x, \tau^k)$ est inférieur à 1 et non nul seulement sur $I_j = (\tau_{j-d-1}, \tau_j)$,

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq j \leq k+d+1} \text{Var}(w_j(\bar{\theta})) &= \frac{1}{n_k} \max_{1 \leq j \leq k+d+1} \int_{I_j} N_j^2(x, \tau^k) (\text{Var}(Y | X = x) + (f_Y(x) - s(x, \bar{\theta}))^2) \lambda(x) dx \\ &\leq \frac{\lambda_{\max}}{n_k} \left(\max_{x \in [0,1]} \text{Var}(Y | X = x) + \frac{C}{k^{d+1}} \right) \max_{1 \leq j \leq k+d+1} \int_{I_j} dx \leq \frac{B_1}{kn_k} \end{aligned}$$

pour une certaine constante B_1 car la longueur de tout intervalle I_j est inférieure ou égale à $(d+1)\delta_{\max} = O(1/k)$ sous (H'4).

Remarquons maintenant l'équivalence des événements

$$\left\{ \max_{1 \leq j \leq k+d+1} |w_j(\bar{\theta})| \geq \varepsilon \right\} = \bigcup_{j=1}^{k+d+1} \left\{ |w_j(\bar{\theta})| \geq \varepsilon \right\}$$

$\forall \varepsilon > 0$. Ainsi, par l'inégalité de Tchebychev,

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\sqrt{n_k}}{k^{1/4}} \max_{1 \leq j \leq k+d+1} |w_j(\bar{\theta})| \geq \varepsilon\right) &= P\left(\bigcup_{j=1}^{k+d+1} \left\{ \frac{\sqrt{n_k}}{k^{1/4}} |w_j(\bar{\theta})| \geq \varepsilon \right\}\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{k+d+1} P\left(\frac{\sqrt{n_k}}{k^{1/4}} |w_j(\bar{\theta})| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{n_k}{\sqrt{k}} \sum_{j=1}^{k+d+1} \frac{\text{Var}(w_j(\bar{\theta}))}{\varepsilon^2} = O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$\forall \varepsilon > 0$ car la somme des variances est bornée par $(k+d+1)B_1/kn_k = O(1/n_k)$ quand $k \rightarrow \infty$. On conclut de ceci que le maximum des $|w_j(\bar{\theta})|$ est $o_p(k^{1/4}/\sqrt{n_k})$.

CQFD

Théorème 3.10 (normalité du spline des moindres carrés)

Soit $x_0 \in [0,1]$ et, pour chaque k , soit $\bar{\theta}_{n_k}$ le vecteur de coefficients des moindres carrés. Supposons aussi que k et n_k tendent vers l'infini de manière à ce que $k^4/n_k = O(1)$ (l'hypothèse (H'3) est alors automatiquement respectée). Si on pose $v_Y(x) = \text{Var}(Y|X=x)$, alors sous (H'1) à (H'4), lorsque $k \rightarrow \infty$,

$$\frac{\sqrt{n_k} \left(s(x_0, \bar{\theta}_{n_k}) - s(x_0, \bar{\theta}) \right)}{\sqrt{v_Y(x_0) \Xi_k}} \rightarrow N(0,1)$$

où $\Xi_k = \int_0^1 K^2(x_0, x) \lambda(x) dx$ est la même quantité qu'au théorème 3.5 et où $s(x, \bar{\theta})$ est la meilleure approximation de $f_Y(x)$ parmi les splines de $S_k^d(\tau^k)$.

Démonstration

Remarquons d'abord que la propriété 3.1 reste vraie dans le contexte aléatoire, c'est-à-dire que le fait de s'inscrire dans ce contexte n'empêche pas le noyau empirique de reproduire les splines de $S_k^d(\tau^k)$. Pour cette raison,

$$\begin{aligned} s(x_0, \bar{\theta}_{n_k}) &= \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}(x_0, X_i) s(X_i, \bar{\theta}) + \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}(x_0, X_i) (Y_i - s(X_i, \bar{\theta})) \\ &= s(x_0, \bar{\theta}) + \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}(x_0, X_i) (Y_i - s(X_i, \bar{\theta})). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Le fardeau de la preuve repose donc sur cette dernière somme dont il faudra montrer la normalité asymptotique. La présence aléatoire s'y manifeste doublement; d'une part à travers la matrice M_{n_k} du noyau empirique, et d'autre part à travers les couples (X_i, Y_i) . Cela complique l'obtention de son espérance et de sa variance et, par conséquent, rend plus ardue l'étude de son comportement asymptotique. Pour contourner cette difficulté, on exploite la proximité du noyau $K(x_0, x) = N(x_0)' M^{-1} N(x)$ et de sa version empirique, proximité qui relève de celle de M^{-1} et $M_{n_k}^{-1}$, en scindant la somme qui nous intéresse en deux autres sommes, S_{1n_k} et S_{2n_k} , qui seront étudiées tour à tour. Précisément, on pose

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}(x_0, X_i) (Y_i - s(X_i, \bar{\theta})) \\ &= \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} K(x_0, X_i) (Y_i - s(X_i, \bar{\theta})) + \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} (K_{n_k}(x_0, X_i) - K(x_0, X_i)) (Y_i - s(X_i, \bar{\theta})) \\ &= S_{1n_k} + S_{2n_k}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Commençons par l'étude de S_{1n_k} . Puisqu'on peut écrire $S_{1n_k} = \sum_{i=1}^{n_k} Y_{ki}$ avec $Y_{ki} = n_k^{-1} K(x_0, X_i) (Y_i - s(X_i, \bar{\theta}))$, des variables aléatoires indépendantes et de

même distribution, la somme S_{1,n_k} peut se traiter via la version standard du théorème limite central, en ce sens que contrairement au cas déterministe où on était confronté à des sommes de variables non identiquement distribuées, on peut se passer ici de vérifier la condition de Lindeberg.

On démontre d'abord que l'espérance des Y_{ki} est nulle. En écrivant le noyau sous sa forme expansée, on met en évidence que Y_{ki} dépend du vecteur $N(X_i)(Y_i - s(X_i, \bar{\theta}))$ dont les éléments sont d'espérance nulle tel que démontré en (3.23) du lemme 3.9. Ainsi, pour $i = 1, \dots, n_k$,

$$\mu_k = E(Y_{ki}) = \frac{1}{n_k} N(x_0)' M^{-1} E(N(X_i)(Y_i - s(X_i, \bar{\theta}))) = 0.$$

Quant à la variance, elle se présente de la façon suivante,

$$\begin{aligned} \sigma_k^2 &= \text{Var}(Y_{ki}) = \frac{1}{n_k^2} E\left(K(x_0, X_i)(Y_i - s(X_i, \bar{\theta}))\right)^2 \\ &= \frac{1}{n_k^2} \int_0^1 K^2(x_0, x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} (z - s(x, \bar{\theta}))^2 \lambda(z|x) dz \right) \lambda(x) dx, \end{aligned}$$

et on s'évite du travail inutile en retournant encore une fois dans la démonstration du lemme 3.9. On y indique en (3.24) que l'intégrale entre parenthèses est égale à $v_Y(x) + (f_Y(x) - s(x, \bar{\theta}))^2$ où le maximum de $k^{d+1} |f_Y(x) - s(x, \bar{\theta})|$ peut être majoré par une constante C . Ainsi, indépendamment de x_0 ,

$$\left| n_k^2 \sigma_k^2 - \int_0^1 K^2(x_0, x) v_Y(x) \lambda(x) dx \right| \leq \frac{C^2}{k^{2(d+1)}} \Xi_k = O\left(\frac{k}{k^{2(d+1)}}\right)$$

puisqu'on a insisté en (3.9) sur le fait que le rapport Ξ_k/k pouvait être borné indépendamment de k . Pour préciser davantage l'expression de la variance, on retourne à la propriété 2.2 du chapitre précédent qui affirme que pour $0 < \gamma < 1$ et une constante C_d indépendante de k , $|K(x_0, x)| \leq C_d \delta_{\min}^{-1} \gamma^{n(x_0, x)}$ où $n(x_0, x)$

compte le nombre de noeuds entre x_0 et x . Ainsi, le poids du noyau se concentre surtout autour de x_0 et cela fait pressentir que $\int_0^1 K^2(x_0, x) v_Y(x) \lambda(x) dx$ ne devrait pas être trop éloigné de $v_Y(x_0) \Xi_k$. Cette intuition s'avère juste sous l'hypothèse que la variance conditionnelle est Lipschitz d'ordre 1 car

$$\begin{aligned} & \max_{x_0 \in [0,1]} \left| \int_0^1 K^2(x_0, x) v_Y(x) \lambda(x) dx - v_Y(x_0) \Xi_k \right| \\ & \leq \max_{x_0 \in [0,1]} \int_0^1 K^2(x_0, x) |v_Y(x) - v_Y(x_0)| \lambda(x) dx \leq M \max_{x_0 \in [0,1]} \int_0^1 K^2(x_0, x) |x - x_0| \lambda(x) dx \\ & \leq M \left(\frac{C_d}{\delta_{\min}} \right)^2 \delta_{\max} \max_{x_0 \in [0,1]} \int_0^1 \gamma^{2n(x_0, x)} (n(x_0, x) + 1) \lambda(x) dx \end{aligned}$$

du fait que la distance entre x et x_0 est inférieure à $(n(x_0, x) + 1) \delta_{\max}$. Puisque γ^2 est coincé entre 0 et 1, le lemme 2.3 permet de majorer l'intégrale par $B \lambda_{\max} \delta_{\max}$ pour une certaine constante B . Le rapport $\delta_{\max} / \delta_{\min}$ demeurant borné sous l'hypothèse (H'4), la distance entre $\int_0^1 K^2(x_0, x) v_Y(x) \lambda(x) dx$ et $v_Y(x_0) \Xi_k$ est $O(1)$ quand $k \rightarrow \infty$, et donc $o(k)$.

On résume les derniers développements en écrivant $n_k^2 \sigma_k^2 = v_Y(x_0) \Xi_k + v_k(x_0)$ où $v_k = \max_{x_0 \in [0,1]} |v_k(x_0)| = o(k)$ lorsque $k \rightarrow \infty$. Dans ce contexte, le théorème limite central est un gage de la convergence

$$\frac{\sum_{i=1}^{n_k} Y_{ki} - n_k \mu_k}{\sqrt{n_k} \sigma_k} = \frac{\sqrt{n_k} S_{1n_k}}{\sqrt{v_Y(x_0) \Xi_k + v_k(x_0)}} \rightarrow N(0,1)$$

et parce que le ratio $v_Y(x_0) \Xi_k / (v_Y(x_0) \Xi_k + v_k(x_0))$ tend vers 1 indépendamment de x_0 , Slutsky assure en fait que

$$\frac{\sqrt{n_k} S_{1n_k}}{\sqrt{v_Y(x_0) \Xi_k}} \rightarrow N(0,1).$$

Allons maintenant fureter du côté de S_{2n_k} le temps de montrer qu'il s'agit d'une quantité $o_p(k^2\sqrt{k}/n_k)$. C'est une conclusion à laquelle on aboutit assez facilement si on songe à exploiter le lemme 3.9 qui stipule que, parce que $\bar{\theta}$ minimise $\bar{Q}(\theta)$, l'élément maximum de $n_k^{-1} \sum_{i=1}^{n_k} N(X_i)(Y_i - s(X_i, \bar{\theta})) = \{w_j(\bar{\theta})\}_{j=1, \dots, k+d+1}$ est d'ordre $o_p(k^{1/4}/\sqrt{n_k})$.

Désignant le vecteur unitaire de longueur p par $\mathbf{1}_p$,

$$\begin{aligned} |S_{2n_k}| &= \left| N(x_0)' (M_{n_k}^{-1} - M^{-1}) \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} N(X_i)(Y_i - s(X_i, \bar{\theta})) \right| \\ &\leq \left(\max_{1 \leq j \leq k+d+1} |w_j(\bar{\theta})| \right) N(x_0)' |M_{n_k}^{-1} - M^{-1}| \mathbf{1}_{k+d+1} \\ &\leq \left(\max_{1 \leq j \leq k+d+1} |w_j(\bar{\theta})| \right) \|M_{n_k}^{-1} - M^{-1}\|_{\max} N(x_0)' \mathbf{1}_{k+d+1} \end{aligned}$$

par définition de la norme maximale. Celle de $M_{n_k}^{-1} - M^{-1}$ fait l'objet du corollaire 1.5 et, dans un contexte aléatoire où la convergence (3.20) est respectée, $\|M_{n_k}^{-1} - M^{-1}\|_{\max} = O(r_k k)$ quand $k \rightarrow \infty$ pour tout ω hors de l'ensemble de mesure nulle \mathcal{N} . Etant donné que $N(x_0)' \mathbf{1}_{k+d+1} = 1$ quelque soit x_0 et que $r_k = k^{1+(1/4)}/\sqrt{n_k}$, on déduit que $S_{2n_k} = o_p(k^2\sqrt{k}/n_k)$, indépendamment de x_0 .

Ayant complété l'étude de S_{1n_k} et S_{2n_k} , on peut revenir à notre point de départ (3.26) et conclure que

$$\frac{\sqrt{n_k} \left(n_k^{-1} \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}(x_0, X_i)(Y_i - s(X_i, \bar{\theta})) \right)}{\sqrt{v_Y(x_0)\Xi_k}} = \frac{\sqrt{n_k} (S_{1n_k} + S_{2n_k})}{\sqrt{v_Y(x_0)\Xi_k}} \rightarrow N(0,1)$$

quand $k \rightarrow \infty$ puisque

$$\frac{\sqrt{n_k} |S_{2n_k}|}{\sqrt{v_Y(x_0)\Xi_k}} = O\left(\sqrt{\frac{n_k}{k}}\right) o_p\left(\frac{\sqrt{k}k^2}{n_k}\right) = o_p\left(\frac{k^2}{\sqrt{n_k}}\right) = o_p(1)$$

du fait que $k^4/n_k = O(1)$ par hypothèse. A la lumière de (3.25), cela se traduit par la convergence

$$\frac{\sqrt{n_k} (s(x_0, \bar{\theta}_{n_k}) - s(x_0, \bar{\theta}))}{\sqrt{v_Y(x_0) \Xi_k}} \rightarrow N(0,1).$$

CQFD

Comme dans le cas déterministe, ce théorème est d'une portée limitée sur le plan pratique parce qu'on y rencontre des quantités inconnues et qu'il s'avère bien plus pertinent d'estimer l'espérance conditionnelle $f_Y(x)$ que sa meilleure approximation $s(x, \bar{\theta})$.

Cette dernière objection est cependant un faux problème si on accepte encore une fois de jouer avec la vitesse de n_k vers l'infini. Sous l'hypothèse que $f_Y(x) \in C^{d+1}[0,1]$, le maximum de $|f_Y(x) - s(x, \bar{\theta})|$ est d'ordre $O(k^{-(d+1)})$ sur $[0,1]$ par (2.18) et en argumentant comme dans le cas déterministe, on peut démontrer que cet ordre de convergence assure que la distribution de $s(x_0, \bar{\theta}_{n_k}) - f_Y(x_0)$ est asymptotiquement identique à celle de $s(x_0, \bar{\theta}_{n_k}) - s(x_0, \bar{\theta})$ si $n_k = O(k^{2(d+1)+1-\varepsilon})$ pour un certain $0 < \varepsilon < 1$. Cette condition n'entre pas en contradiction avec celle du théorème de normalité 3.10 car s'il existe, par exemple, une constante C telle que $n_k = Ck^{2(d+1)+1-\varepsilon}$, alors on a simultanément $n_k = O(k^{2(d+1)+1-\varepsilon})$ et $k^4/n_k = o(1)$, donc $O(1)$.

Quant aux quantités inconnues de la variance, on leur substitue ici aussi des estimateurs convergents. Le choix $n_k^{-1} \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}^2(x_0, X_i)$ pour remplacer Ξ_k est légitime. Pour le voir, remarquons qu'en écrivant le noyau empirique sous sa forme expansée, on obtient $n_k^{-1} \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}^2(x_0, X_i) = N(x_0)' M_{n_k}^{-1} N(x_0)$ de sorte que pour les mêmes raisons que celles évoquées en (3.7),

$$\max_{x_0 \in [0,1]} \left| \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}^2(x_0, X_i) - \Xi_k \right| \leq \|M_{n_k}^{-1} - M^{-1}\|_s = o(k)$$

pour tout ω hors de l'ensemble de mesure nulle \mathcal{N} . Comme Ξ_k/k est borné indépendamment de k , le ratio de Ξ_k sur sa version empirique tend vers 1 presque sûrement, ce qui nous permet de procéder impunément à la substitution.

Il ne reste plus qu'à dénicher un estimateur pour la variance conditionnelle $v_Y(x_0)$ et celui que nous proposons est convergent si on est prêt à ajouter l'hypothèse supplémentaire:

(H'5): L'espérance conditionnelle $E((Y - f_Y(X))^4 | X=x)$ est bornée sur $[0,1]$.

Lemme 3.11

Supposons que k et n_k tendent vers l'infini en satisfaisant $k^4/n_k = O(1)$ et $n_k = O(k^{2(d+1)+1-\varepsilon})$ pour un certain $0 < \varepsilon < 1$. Alors sous les hypothèses (H'1) à (H'5), l'estimateur

$$\hat{v}_Y(x_0) = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}(x_0, X_i) (Y_i - s(X_i, \bar{\theta}_{n_k}))^2$$

tend en probabilité vers $v_Y(x_0)$ lorsque $k \rightarrow \infty$.

Démonstration

Nous démontrons dans un premier temps que

$$\tilde{v}_Y(x_0) = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}(x_0, X_i) (Y_i - f_Y(X_i))^2$$

tend en probabilité vers $v_Y(x_0)$. La proximité des $f_Y(X_i)$ et $s(X_i, \bar{\theta}_{n_k})$ permettra ensuite le passage à $\hat{v}_Y(x_0)$.

Pour parer au problème de la présence de la matrice stochastique $M_{n_k}^{-1}$ dans le noyau empirique, on écrit d'abord

$$\begin{aligned}\bar{v}_Y(x_0) &= \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} K(x_0, X_i) (Y_i - f_Y(X_i))^2 + \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} (K_{n_k}(x_0, X_i) - K(x_0, X_i)) (Y_i - f_Y(X_i))^2 \\ &= T_{1n_k} + T_{2n_k}\end{aligned}$$

et on montre qu'en probabilité, $T_{1n_k} \rightarrow v_Y(x_0)$ et $T_{2n_k} \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$.

En recourant à l'inégalité de Tchebychev, la première affirmation est assez immédiate parce que la somme T_{1n_k} est composée de variables aléatoires i.i.d. dont l'espérance et la variance s'obtiennent aisément en écrivant encore une fois la densité conjointe sous la forme $\lambda(x, y) = \lambda(y|x) \lambda(x)$. Ainsi,

$$E(T_{1n_k}) = E(K(x_0, X_1)(Y_1 - f_Y(X_1))^2) = \int_0^1 K(x_0, x) v_Y(x) \lambda(x) dx$$

et cette intégrale se traite avec les arguments ayant servi à préciser la variance de S_{1n_k} dans la démonstration de la normalité asymptotique. Essentiellement, il s'agit de combiner trois résultats: le fait que $\int_0^1 K(x_0, x) \lambda(x) dx = 1$, l'hypothèse (H'2) qui assure que $v_Y(x)$ est Lipschitz d'ordre 1 et la propriété 2.2. Un amalgame de ceci montre qu'il existe une constante M_1 telle que

$$\begin{aligned}\left| E(T_{1n_k}) - v_Y(x_0) \right| &= \left| \int_0^1 K(x_0, x) (v_Y(x) - v_Y(x_0)) \lambda(x) dx \right| \\ &\leq M_1 \int_0^1 |K(x_0, x)| |x - x_0| \lambda(x) dx \leq M_1 \frac{C_d \delta_{\max}}{\delta_{\min}} \int_0^1 \gamma^{n(x_0, x)} (n(x_0, x) + 1) \lambda(x) dx.\end{aligned}$$

Par le lemme 2.3, cette dernière intégrale peut être majorée par un terme $O(\delta_{\max})$ de sorte que $E(T_{1n_k}) = v_Y(x_0) + u_k(x_0)$ où $u_k(x_0) = O(\delta_{\max}) = o(1)$ sous (H'4).

L'obtention de la variance ne pose pas un défi plus grand:

$$\begin{aligned} \text{Var}(T_{1n_k}) &= \frac{1}{n_k} \text{Var}(K(x_0, X_1)(Y_1 - f_Y(X_1))^2) \\ &= \frac{1}{n_k} \left\{ \int_0^1 K^2(x_0, x) E((Y - f_Y(X))^4 | X = x) \lambda(x) dx - (v_Y(x_0) + u_k(x_0))^2 \right\} \end{aligned}$$

où, sous l'hypothèse (H'5), l'intégrale à l'intérieur des crochets est majorée par le maximum de l'espérance conditionnelle multiplié par $\Xi_k = O(k)$ quand $k \rightarrow \infty$. La variance est donc $O(k/n_k)$ et par Tchebychev,

$$\begin{aligned} P(|T_{1n_k} - E(T_{1n_k})| \geq \varepsilon) &= P(|T_{1n_k} - v_Y(x_0) - u_k(x_0)| \geq \varepsilon) \\ &\leq \frac{\text{Var}(T_{1n_k})}{\varepsilon^2} = O\left(\frac{k}{n_k}\right) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$\forall \varepsilon > 0$, ce qui revient à confirmer notre assertion du début, à savoir que $T_{1n_k} = v_Y(x_0) + o_p(1)$ quand $k \rightarrow \infty$.

L'étude de T_{2n_k} commence quant à elle par l'écriture

$$T_{2n_k} = N(x_0)'(M_{n_k}^{-1} - M^{-1}) \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} N(X_i)(Y_i - f_Y(X_i))^2$$

et la première étape pour montrer que T_{2n_k} tend vers 0 en probabilité consiste à étudier le vecteur $n_k^{-1} \sum_{i=1}^{n_k} N(X_i)(Y_i - f_Y(X_i))^2$ dont la j -ième composante, $v_j = n_k^{-1} \sum_{i=1}^{n_k} N_j(X_i, \tau^k)(Y_i - f_Y(X_i))^2$, est une somme de variables i.i.d. avec espérance

$$\begin{aligned} |E(v_j)| &= \left| E(N_j(X_1, \tau^k)(Y_1 - f_Y(X_1))^2) \right| = \left| \int_0^1 N_j(x, \tau^k) v_Y(x) \lambda(x) dx \right| \\ &\leq \max_{x \in [0,1]} v_Y(x) \int_{I_j} N_j(x, \tau^k) \lambda(x) dx \end{aligned}$$

où $I_j = (\tau_{j-d-1}, \tau_j)$. Les B-splines étant inférieurs à 1 et la longueur de l'intervalle I_j à $(d+1)\delta_{\max} = O(k^{-1})$ sous (H'4), le maximum sur j des $|E(v_j)|$ est d'ordre $O(k^{-1})$ quand $k \rightarrow \infty$. Si on se tourne vers la variance, on trouve

$$\begin{aligned} \text{Var}(v_j) &= \frac{1}{n_k} \text{Var}(N_j(X_1, \tau^k)(Y_1 - f_Y(X_1))^2) \\ &= \frac{1}{n_k} \left\{ \int_0^1 N_j^2(x, \tau^k) E((Y - f_Y(X))^4 | X = x) \lambda(x) dx - E(v_j)^2 \right\} \end{aligned}$$

où, en récupérant le raisonnement qui a servi à majorer l'espérance,

$$\begin{aligned} &\max_{1 \leq j \leq k+d+1} \int_0^1 N_j^2(x, \tau^k) E((Y - f_Y(X))^4 | X = x) \lambda(x) dx \\ &\leq \max_{x \in [0,1]} E((Y - f_Y(X))^4 | X = x) \max_{1 \leq j \leq k+d+1} \int_{I_j} N_j^2(x, \tau^k) \lambda(x) dx = O(k^{-1}). \end{aligned}$$

Comme on assume la finitude du quatrième moment conditionnel, le maximum des $\text{Var}(v_j)$ est borné par C_1/kn_k pour une certaine constante C_1 . En récupérant le raisonnement de la démonstration du lemme 3.9 et en appliquant l'inégalité de Tchebychev, on déduit que

$$\begin{aligned} P\left(k \max_{1 \leq j \leq k+d+1} |v_j - E(v_j)| \geq \varepsilon\right) &\leq \sum_{j=1}^{k+d+1} P\left(k |v_j - E(v_j)| \geq \varepsilon\right) \\ &\leq k^2 \sum_{j=1}^{k+d+1} \frac{\text{Var}(v_j)}{\varepsilon^2} = O\left(\frac{k^2}{n_k}\right) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

pour tout $\varepsilon > 0$. En d'autres termes, le maximum des $|v_j - E(v_j)|$ est $o_p(k^{-1})$ et comme le maximum des espérances des v_j est $O(k^{-1})$,

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq j \leq k+d+1} |v_j| &= \max_{1 \leq j \leq k+d+1} |v_j - E(v_j) + E(v_j)| \\ &\leq \max_{1 \leq j \leq k+d+1} |v_j - E(v_j)| + \max_{1 \leq j \leq k+d+1} |E(v_j)| = O_p(k^{-1}) \end{aligned}$$

quand $k \rightarrow \infty$.

Faisons une petite parenthèse pour remarquer que si on repasse à travers ce dernier développement en remplaçant les $N_j(X_i, \tau^k)$ par $N_j(X_i, \tau^k)^2$, c'est-à-dire en considérant les éléments $u_j = n_k^{-1} \sum_{i=1}^{n_k} N_j(X_i, \tau^k)^2 (Y_i - f_Y(X_i))^2$, $j = 1, \dots, k+d+1$, on conclut immédiatement qu'ils satisfont aussi

$$\max_{1 \leq j \leq k+d+1} |u_j| = O_p(k^{-1}).$$

Maintenant que cette étape est franchie, revenons à T_{2n_k} . En recourant aux propriétés de la norme maximale, écrivons

$$\begin{aligned} |T_{2n_k}| &\leq \left(\max_{1 \leq j \leq k+d+1} |v_j| \right) N(x_0)' |M_{n_k}^{-1} - M^{-1}| \mathbf{1}_{k+d+1} \\ &\leq \left(\max_{1 \leq j \leq k+d+1} |v_j| \right) \|M_{n_k}^{-1} - M^{-1}\|_{\max} N(x_0)' \mathbf{1}_{k+d+1} \end{aligned}$$

et dans la même veine de ce qu'on a fait pour S_{2n_k} du théorème de normalité, précisons qu'une somme de B-splines est égale à 1 et que la norme maximale de $M_{n_k}^{-1} - M^{-1}$ est $O(r_k)$ presque sûrement avec $r_k = k^{1+(1/4)} / \sqrt{n_k}$. On conclut ainsi que $T_{2n_k} = O_p(r_k) = o_p(1)$ comme nous l'avions annoncé.

Si on récapitule, l'estimateur $\tilde{v}_Y(x_0) = T_{1n_k} + T_{2n_k}$ converge en probabilité vers $v_Y(x_0)$ quand $k \rightarrow \infty$. L'estimateur $\hat{v}_Y(x_0)$ que nous proposons remplace les quantités inconnues $f_Y(X_i)$ de $\tilde{v}_Y(x_0)$ par $s(X_i, \bar{\theta}_{n_k})$ et cette substitution est cautionnée du fait que

$$D_{\max} \equiv \max_{x \in [0,1]} |f_Y(x) - s(x, \bar{\theta}_{n_k})| = o_p \left(\frac{k^{1+(1/4)}}{\sqrt{n_k}} \right).$$

Pour voir que cette égalité est vérifiée, retournons à l'équation (3.25) et au lemme 3.9 le temps d'écrire

$$\begin{aligned} \max_{x \in [0,1]} |s(x, \bar{\theta}_{n_k}) - s(x, \bar{\theta})| &= \max_{x \in [0,1]} \left| \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}(x, X_i) (Y_i - s(X_i, \bar{\theta})) \right| \\ &\leq \left(\max_{1 \leq j \leq k+d+1} |w_j(\bar{\theta})| \right) \|M_{n_k}^{-1}\|_{\max} \max_{x \in [0,1]} N(x)' \mathbf{1}_{k+d+1} = o_p \left(\frac{k^{1+(1/4)}}{\sqrt{n_k}} \right) \end{aligned}$$

puisque la norme maximale de $M_{n_k}^{-1}$ est $O(k)$ presque sûrement. En combinant ceci au fait que la distance maximale entre $f_Y(x)$ et sa meilleure approximation $s(x, \bar{\theta})$ est $O(k^{-(d+1)})$, et donc $o(k^{1+(1/4)} / \sqrt{n_k})$ puisque $n_k = O(k^{2(d+1)+1-\epsilon})$, on obtient bien le résultat annoncé sur l'ordre de D_{\max} . Cet ordre est la pièce de puzzle qui manquait pour démontrer l'équivalence de $\tilde{v}_Y(x_0)$ et $\hat{v}_Y(x_0)$. En effet, on peut écrire

$$\begin{aligned} \hat{v}_Y(x_0) &= \tilde{v}_Y(x_0) + \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}(x_0, X_i) (f_Y(X_i) - s(X_i, \bar{\theta}_{n_k}))^2 \\ &\quad + \frac{2}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}(x_0, X_i) (Y_i - f_Y(X_i)) (f_Y(X_i) - s(X_i, \bar{\theta}_{n_k})) = \tilde{v}_Y(x_0) + T_{3n_k} + T_{4n_k} \end{aligned}$$

où, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \max_{x_0 \in [0,1]} |T_{3n_k}| &\leq \max_{x_0 \in [0,1]} \sqrt{\frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}^2(x_0, X_i) \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} (f_Y(X_i) - s(X_i, \bar{\theta}_{n_k}))^4} \\ &\leq D_{\max}^2 \max_{x_0 \in [0,1]} \sqrt{\frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}^2(x_0, X_i)} = o_p \left(\frac{k^3}{n_k} \right) = o_p(1) \end{aligned}$$

puisque $n_k^{-1} \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}^2(x_0, X_i)$ est une quantité $O(k)$ et que $k^4/n_k = O(1)$ par hypothèse. Quant à T_{4n_k} , par la parenthèse que nous avons faite précédemment concernant les éléments $u_j = n_k^{-1} \sum_{i=1}^{n_k} N_j(X_i, \tau^k)^2 (Y_i - f_Y(X_i))^2$, $j = 1, \dots, k+d+1$,

$$\max_{x \in [0,1]} |T_{4n_k}| \leq 2 \max_{x_0 \in [0,1]} N(x_0)' \|M_{n_k}^{-1}\| \sqrt{\frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} N(X_i)^2 (Y_i - f_Y(X_i))^2 \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} (f_Y(X_i) - s(X_i, \bar{\theta}_{n_k}))^2}$$

$$\leq 2D_{\max} \left(\sqrt{\max_{1 \leq j \leq k+d+1} |u_j|} \right) \|M_{n_k}^{-1}\| \max_{x_0 \in [0,1]} N(x_0)' \mathbf{1}_{k+d+1} = o_p \left(\frac{k^{1+(3/4)}}{\sqrt{n_k}} \right) = o_p(1).$$

Ainsi, tel qu'on le prétendait, on a bien $\hat{v}_Y(x_0) = \tilde{v}_Y(x_0) + o_p(1) = v_Y(x_0) + o_p(1)$ quand $k \rightarrow \infty$.

CQFD

On vient donc de démontrer le corollaire suivant.

Corollaire 3.12

Soit $x_0 \in [0,1]$ et, pour chaque k , soit $\bar{\theta}_{n_k}$ le vecteur de paramètres obtenu par moindres carrés. Supposons aussi que $k^4/n_k = O(1)$ et, pour un certain $0 < \varepsilon < 1$, $n_k = O(k^{2(d+1)+1-\varepsilon})$. Alors sous les hypothèses (H'1) à (H'5),

$$\frac{\sqrt{n_k} (s(x_0, \bar{\theta}_{n_k}) - f_Y(x_0))}{\sqrt{\hat{v}_Y(x_0) n_k^{-1} \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}^2(x_0, X_i)}} \rightarrow N(0,1)$$

lorsque $k \rightarrow \infty$ et

$$s(x_0, \bar{\theta}_{n_k}) \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{v}_Y(x_0)}{n_k} \sqrt{n_k^{-1} \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}^2(x_0, X_i)}}$$

constitue un intervalle de confiance asymptotique de niveau $(1-\alpha)$ pour $f_Y(x_0)$.

Tout comme dans le cas déterministe, le spline des moindres carrés s'avère un outil précieux pour estimer le lien qui unit les Y_i aux X_i et ceci est d'autant plus remarquable que le contexte aléatoire dans lequel s'inscrit cet estimateur a été élaboré avec le souci de s'en tenir aux hypothèses les moins contraignantes possibles. Avant de passer à l'exemple qui mettra fin à ce chapitre, faisons deux remarques.

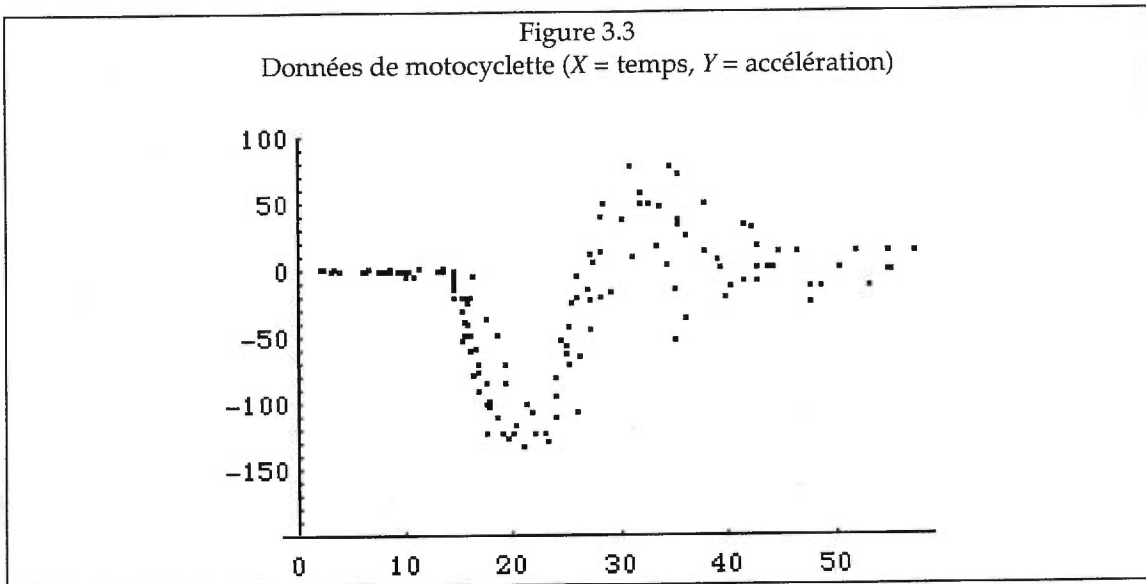
Revenons d'abord un instant sur l'estimateur de la variance conditionnelle du lemme 3.11. Pour assurer la convergence de $\hat{\nu}_Y(x_0)$ vers $\nu_Y(x_0)$, il suffit que les hypothèses (H'1) à (H'5) soient satisfaites et que n_k grandisse à une vitesse appropriée. Ceci laisse ouvert le problème du choix des noeuds; on peut en effet s'interroger: les noeuds ayant servi à l'estimation de $f_Y(x_0)$ doivent-ils être réutilisés pour estimer $\nu_Y(x_0)$? La forme de l'estimateur laisse beaucoup de latitude et nous avons l'option de choisir ou non les mêmes noeuds dans les deux cas.

Comme seconde remarque, soulignons qu'à la lumière des corollaires 3.7 et 3.12, l'estimateur spline des moindres carrés est sans biais sous des conditions de régularité pourvu que $n_k = O(k^{2(d+1)+1-\varepsilon})$ pour un certain $0 < \varepsilon < 1$. La vitesse de croissance requise pour n_k est donc la même dans les deux cas, déterministe et aléatoire. Ceci signifie que quelque soit le contexte dans lequel on travaille, il existe une même et unique règle pour nous guider dans le choix du nombre de noeuds et du nombre de points: $n_k = O(k^{2(d+1)+1-\varepsilon})$. Ce précepte demeure cependant de nature asymptotique. Si $d = 3$ par exemple, il suggère que le nombre de noeuds soit de l'ordre de $O(n_k^{1/9-\varepsilon})$, c'est-à-dire par exemple que $k = Cn_k^{1/9-\varepsilon}$ pour une certaine constante de proportionnalité C . Bien que celle-ci soit inconnue, cette écriture illustre surtout que k doit être modeste et maintenu bien en deçà du nombre de points.

Exemple 2

Pour illustrer le comportement de l'estimateur des moindres carrés dans un contexte aléatoire avec taille d'échantillon finie, on a appliqué le corollaire 3.12 à un jeu de données réelles (Härdle (1990), p. 57) documentant l'efficacité d'un casque de protection lors d'un impact à motocyclette et reliant

l'accélération du mouvement de la tête (en g) au temps après un impact (en millisecondes). La figure 3.3 illustre ce jeu de données de taille $n = 133$.

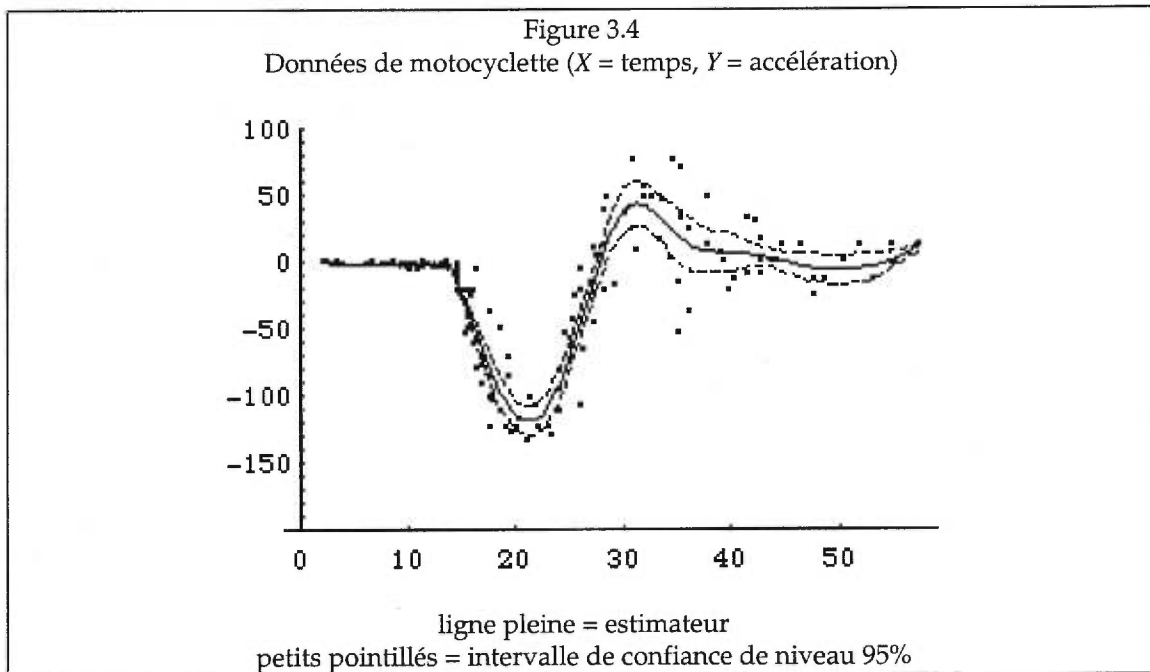


Pour toutes sortes de raisons hors du contrôle des expérimentateurs, les temps X_i ne sont pas uniformes et il peut y avoir plusieurs lectures d'accélération pour un même temps. Il est donc naturel de s'inscrire dans le contexte aléatoire, d'autant plus que celui-ci ne présume pas de l'homogénéité de la variance conditionnelle de Y , une hypothèse indéfendable à la vue du graphique des points.

L'estimateur est donné en (3.21). Nous avons opté pour un spline de degré 3 en choisissant les noeuds qui offriraient visuellement le meilleur ajustement. S'inspirant des recommandations d'Eubank (1988) p. 357, nous avons arrêté notre choix sur les 8 noeuds $\{13.5, 14.5, 15.5, 23.5, 30.0, 35.5, 41.0, 46.5\}$. Le fait de concentrer des noeuds autour de 14 permet de bien ajuster la cassure marquée qu'on observe dans cette région. L'estimateur spline et

l'intervalle de confiance asymptotique de niveau 95% pour $f_Y(x)$ sont illustrés à la figure 3.4.

Soulignons encore que rien ne nous oblige à réutiliser les noeuds du spline des moindres carrés pour l'estimation de la variance conditionnelle $v_Y(x)$. En fait, tout comme l'estimateur ajuste les points (X_i, Y_i) , on peut voir l'estimateur $\hat{v}_Y(x)$ du lemme 3.11 comme résultant d'une tentative d'ajuster par un spline le nuage des résidus $(X_i, (Y_i - s(X_i, \bar{\theta}_{n_k}))^2)$ et il s'avère qu'à cette fin, les noeuds $\{13.5, 14, 14.5, 15, 15.5, 23.5, 30.0, 35.5, 41.0, 49.5\}$ y parviennent beaucoup mieux que les noeuds utilisés pour le spline des moindres carrés. Ce sont donc eux qui ont été choisis pour l'estimation de $v_Y(x)$ nécessaire à l'obtention d'un intervalle de confiance.



Chapitre 4

Extensions

Le présent chapitre table sur les résultats du précédent pour explorer de nouvelles avenues. On verra par exemple qu'il suffit de dériver l fois l'estimateur spline d'une fonction pour obtenir un estimateur de la l -ième dérivée de cette fonction. Un exemple où ces dérivées sont cliniquement interprétables est celui des courbes de croissance dont les dérivées première et seconde représentent respectivement la vitesse et l'accélération de la croissance. Il est alors pertinent d'en obtenir des estimateurs afin de raffiner la description du phénomène à l'étude. Dans un autre ordre d'idée, on peut, à l'instar de Stute (1986), remplacer les Y_i de l'estimateur spline (3.4) ou (3.21) par les fonctions indicatrices $1_{(Y_i \leq y)}$ pour un certain $y \in \mathbb{R}$. On verra que ce petit exercice mène tout droit à un estimateur de la fonction de répartition conditionnelle des Y_i qui se révélera asymptotiquement de loi normale. Plusieurs quantités (le quantile d'ordre α par exemple) peuvent s'exprimer comme des fonctionnelles de la fonction de répartition conditionnelle (Serfling (1980)) et dans ces situations, l'obtention d'un estimateur prend tout son sens.

4.1 Dérivées de l'estimateur spline

Dans le chapitre 1, on a montré que les dérivées d'un spline de degré d peuvent s'exprimer comme une combinaison linéaire de B-splines de degré inférieur. On exploitera ici cette particularité des splines pour montrer la normalité asymptotique des dérivées de l'estimateur spline des moindres carrés.

Il ne s'agit pas d'un exercice difficile. Toute l'astuce consiste à écrire les dérivées du spline des moindres carrés sous une forme faisant intervenir les dérivées du noyau empirique. Puisque notre noyau dérivé reste un noyau, il suffira de mimer les développements du chapitre 3 pour arriver à nos fins. Les démonstrations de cette section auront donc des airs de parenté avec celles du précédent chapitre et, les détails y étant exhaustivement exposés, on se permettra ici d'être plus bref.

4.1.1 Contexte déterministe

Le contexte déterministe où l'on observe des points (x_i, Y_i) régis par le modèle $Y_i = f(x_i) + \varepsilon_i$, $i = 1, \dots, n$, a été illustré en détail au début de la section 3.1. Nous allons ici nous le réapproprier dans son intégralité et supposer vraies les hypothèses (H1) à (H4) qui s'y rattachent.

Pour $l = 1, \dots, d-1$, introduisons d'abord la notation $s^{(l)}(x_0, \theta)$ et $D^l N(x_0)$ pour désigner respectivement la dérivée $\partial^l s(x, \theta) / \partial x^l$ et le vecteur de dérivées $\partial^l N(x) / \partial x^l$ évalués en x_0 . Ainsi, la l -ième dérivée de l'estimateur spline des moindres carrés donné en (3.4) s'exprime sous la forme

$$s^{(l)}(x, \hat{\theta}_{n_k}) = (D^l N(x))' \hat{\theta}_{n_k} = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}^{(l)}(x, x_i) Y_i \quad (4.1)$$

où $K_{n_k}^{(l)}(x, y) \equiv \partial^l K_{n_k}(x, y) / \partial x^l = (D^l N(x))' M_{n_k}^{-1} N(y)$ est la l -ième dérivée du noyau $K_{n_k}(x, y)$ présenté au chapitre précédent. On souligne incidemment que ce noyau est la version empirique du noyau dérivé $K^{(l)}(x, y) = (D^l N(x))' M^{-1} N(y)$ qu'on a rencontré, entre autres, à la proposition 2.2 sous une notation différente. Pour étudier (4.1), il suffit donc de marcher dans les traces de la section 3.1, mais en substituant au noyau $K_{n_k}(x, y)$ sa l -ième dérivée. On montre ainsi les deux propriétés suivantes qui font écho à celles de la section 3.1.

Propriété 4.1

Soient $x_0 \in [0,1]$ et $s(\cdot)$ un spline de $S_k^d(\tau^k)$. Alors pour $l = 1, \dots, d-1$,

$$\int_0^1 K_{n_k}^{(l)}(x_0, x) s(x) dF_{n_k}(x) = \frac{\partial^l s(x_0)}{\partial x^l}.$$

Démonstration

Le spline $s(x)$ peut s'écrire sous la forme $N(x)' \theta$ pour un vecteur de coefficients θ de dimension $k+d+1$. Par conséquent, $\partial^l s(x) / \partial x^l = (D^l N(x))' \theta$ et

$$\int_0^1 K_{n_k}^{(l)}(x_0, x) s(x) dF_{n_k}(x) = (D^l N(x_0))' M_{n_k}^{-1} \int_0^1 N(x) N(x)' \theta dF_{n_k}(x) = (D^l N(x_0))' \theta.$$

CQFD

Propriété 4.2

Soient x_0 et x éléments de $[0,1]$. Si $n(x_0, x)$ compte le nombre de noeuds entre x_0 et x , alors sous (H3) et (H4), il existe $0 < \gamma < 1$, ainsi que deux quantités \bar{C}_k et c_k , respectivement $O(1)$ et $o(1)$ quand $k \rightarrow \infty$, telles que

$$\left| K_{n_k}^{(l)}(x_0, x) \right| \leq \frac{\bar{C}_k}{\delta_{\min}^{l+1}} (\gamma + c_k)^{n(x_0, x)}$$

pour $l = 1, \dots, d-1$.

Démonstration

Ce résultat se démontre exactement comme la propriété 3.2. Il faut seulement se rappeler que, tel que discuté dans le chapitre 1, il existe une constante B_ν , indépendante de k , satisfaisant

$$\max_{x \in [0,1]} \left| \frac{\partial^l N_i(x, \tau^k)}{\partial x^l} \right| \leq \frac{B_i}{\delta_{\min}^l}$$

pour $i = 1, \dots, k+d+1$.

CQFD

Théorème 4.3 (normalité des dérivées du spline des moindres carrés)

Soit $x_0 \in [0,1]$ et, pour chaque k , soit $\hat{\theta}_{n_k}$ l'estimateur des moindres carrés donné en (3.3). Si on pose

$$\Sigma_k^l = \int_0^1 (K^{(l)}(x_0, x))^2 dF(x) = (D^l N(x_0))' M^{-1} (D^l N(x_0))$$

pour un certain $l \in \{1, \dots, d-1\}$, alors sous les hypothèses (H1) à (H4) de la section 3.1, et si k et n_k tendent vers l'infini de manière à satisfaire $k/n_k = o(1)$ et $n_k = O(k^{2(d+1)+1})$,

$$\frac{\sqrt{n_k} (s^{(l)}(x_0, \hat{\theta}_{n_k}) - s^{(l)}(x_0, \tilde{\theta}))}{\sigma \sqrt{\Sigma_k^l}} \rightarrow N(0,1)$$

lorsque $k \rightarrow \infty$ où $s(x, \tilde{\theta})$ est la meilleure approximation de $f(x)$ en norme $L_2[0,1]$ parmi les splines de $S_k^d(\tau^k)$.

Démonstration

Posons $s^{(l)}(x_0, \hat{\theta}_{n_k}) = \sum_{i=1}^{n_k} X_{ki}$ où $X_{ki} = n_k^{-1} K_{n_k}^{(l)}(x_0, x_i) Y_i$. L'espérance de cette somme est voisine de $s^{(l)}(x_0, \tilde{\theta})$; en effet, si on note $\mu_{ki} = E(X_{ki})$ et $r(x, \tilde{\theta}) = f(x) - s(x, \tilde{\theta})$, alors en appliquant la propriété 4.1 à $s(x, \tilde{\theta})$, on trouve

$$\max_{x_0 \in [0,1]} \left| \sum_{i=1}^{n_k} \mu_{ki} - s^{(l)}(x_0, \tilde{\theta}) \right| = \max_{x_0 \in [0,1]} \left| \int_0^1 K_{n_k}^{(l)}(x_0, x) r(x, \tilde{\theta}) dF_{n_k}(x) \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \max_{x_0 \in [0,1]} \left| (D^l N(x_0))' M_{n_k}^{-1} \int_0^1 N(x) r(x, \tilde{\theta}) dF_{n_k}(x) \right| \\
&\leq w_k \|M_{n_k}^{-1}\|_{\max} \max_{x_0 \in [0,1]} |(D^l N(x_0))'| \mathbf{1}_{k+d+1} = o\left(\frac{1}{k^{d+1-l}}\right)
\end{aligned}$$

quand $k \rightarrow \infty$. On justifie l'ordre de ce dernier terme en se souvenant que la norme maximale de $M_{n_k}^{-1}$ est $O(k)$ et en retournant au Lemme 3.3 qui stipule que l'élément maximum du vecteur $\int_0^1 N(x) r(x, \tilde{\theta}) dF_{n_k}(x)$ est borné par $w_k = o(k^{-(d+2)})$. En outre, la section 1.2 sur les dérivées des B-splines nous informe que pour $l = 1, \dots, d-1$,

$$\max_{x \in [0,1]} |(D^l N(x))'| \mathbf{1}_{k+d+1} = \max_{x \in [0,1]} \sum_{j=1}^{k+d+1} \left| \frac{\partial^l N_j(x, \tau^k)}{\partial x^l} \right| = O(k^l) \quad (4.2)$$

car la somme ne contient que $d+1$ éléments non nuls qui sont tous bornés par B_l / δ_{\min}^l où B_l est une constante et où $\delta_{\min}^{-1} = O(k)$ sous (H4). Autrement dit,

$$E\left(s^{(l)}(x_0, \hat{\theta}_{n_k})\right) = \sum_{i=1}^{n_k} \mu_{ki} = s^{(l)}(x_0, \tilde{\theta}) + v_{1k}(x_0) \quad (4.3)$$

où $v_{1k} = \max_{x_0 \in [0,1]} |v_{1k}(x_0)| = o(k^{-(d+1-l)})$ quand $k \rightarrow \infty$.

Avant d'aborder la variance de la somme des X_{ki} , remarquons qu'en écrivant les noyaux sous leur forme expansée et en usant des propriétés des normes spectrale et euclidienne, on obtient

$$\begin{aligned}
&\max_{x_0 \in [0,1]} \left| \int_0^1 (K_{n_k}^{(l)}(x_0, x))^2 dF_{n_k}(x) - \Sigma_k^l \right| = \max_{x_0 \in [0,1]} \left| (D^l N(x_0))' (M_{n_k}^{-1} - M^{-1}) (D^l N(x_0)) \right| \\
&\leq \|M_{n_k}^{-1} - M^{-1}\|_s \max_{x_0 \in [0,1]} \|D^l N(x_0)\|_E^2 = o(k^{2l+1}) \quad (4.4)
\end{aligned}$$

par le corollaire 1.5 et le lemme 1.1 qui indique que la norme euclidienne au carré du vecteur des l -ièmes dérivées de la base des B-splines est $O(\delta_{\min}^{-2l})$, c'est-

à-dire $O(k^{2l})$. Ainsi, si on note $\sigma_{ki}^2 = \text{Var}(X_{ki}) = \sigma^2 n_k^{-2} (K_{n_k}^{(l)}(x_0, x_i))^2$, il devient clair que

$$\text{Var}(s^{(l)}(x_0, \hat{\theta}_{n_k})) = \sum_{i=1}^{n_k} \sigma_{ki}^2 = \frac{\sigma^2}{n_k} \int_0^1 (K_{n_k}^{(l)}(x_0, x))^2 dF_{n_k}(x) = \frac{\sigma^2}{n_k} \Sigma_k^l + v_{2k}(x_0) \quad (4.5)$$

où $v_{2k} = \max_{x_0 \in [0,1]} |v_{2k}(x_0)| = o(k^{2l+1}/n_k)$ quand $k \rightarrow \infty$.

Soulignons que le ratio Σ_k^l/k^{2l+1} est borné inférieurement et supérieurement par des constantes. Pour le voir, rappelons les constantes C_1' et C_2' qui satisfont $C_1'k \leq a'M^{-1}a/a'a \leq C_2'k \forall a \in \mathbb{R}^{k+d+1}$. Si on conjugue cette inégalité avec le lemme 1.1, on déduit que

$$C_1'k \frac{C_{1,d,l}}{\delta_{\max}^{2l}} \leq \frac{(D^l N(x_0))' M^{-1} (D^l N(x_0))}{(D^l N(x_0))' (D^l N(x_0))} \|D^l N(x_0)\|_E^2 \leq C_2'k \frac{C_{2,d,l}}{\delta_{\min}^{2l}}$$

où $C_{1,d,l}$ et $C_{2,d,l}$ ne dépendent ni de x_0 , ni de k , ce qu'on peut présenter autrement en disant que pour deux constantes C_1'' et C_2'' ,

$$C_1'' \leq \frac{\Sigma_k^l}{k^{2l+1}} \leq C_2'' \quad (4.6)$$

L'ultime étape de la preuve passe par la création des variables aléatoires

$$V_{ki} = \frac{X_{ki} - \mu_{ki}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n_k} \sigma_{ki}^2}} \equiv \frac{K_{n_k}^{(l)}(x_0, x_i) \varepsilon_i}{\sigma \sqrt{\sum_{i=1}^{n_k} (K_{n_k}^{(l)}(x_0, x_i))^2}},$$

$i = 1, \dots, n_k$, qui sont indépendantes, de moyennes nulles et de variances

$$s_{ki}^2 = \text{Var}(V_{ki}) = \frac{(K_{n_k}^{(l)}(x_0, x_i))^2}{\sum_{i=1}^{n_k} (K_{n_k}^{(l)}(x_0, x_i))^2} = \frac{\sigma_{ki}^2}{\sum_{i=1}^{n_k} \sigma_{ki}^2}$$

dont la somme donne 1. Le maximum de ces variances tend en outre vers 0 car par la propriété 4.2 et par (H4) qui indique que $\delta_{\min}^{-1} = O(k)$,

$$\max_{1 \leq i \leq n_k} \sigma_{ki}^2 \leq \frac{\sigma^2}{n_k^2} \left(\frac{\bar{C}_k}{\delta_{\min}^{l+1}} \right)^2 \max_{1 \leq i \leq n_k} (\gamma + c_k)^{2n(x_0, x_i)} = O\left(\frac{k^{2(l+1)}}{n_k^2}\right)$$

et cette inégalité, une fois combinée à (4.5) et (4.6), entraîne

$$s_{k,\max}^2 \equiv \max_{1 \leq i \leq n_k} s_{ki}^2 = O\left(\frac{k}{n_k}\right) \rightarrow 0.$$

Cette convergence est importante car elle assure, d'une part, que les variances s_{ki}^2 sont finies et, d'autre part, que $\sum_{i=1}^{n_k} E(V_{ki}^2 \times 1_{|V_{ki}| \geq \varepsilon}) \rightarrow 0$ pour chaque $\varepsilon > 0$, ce qu'on montre en écrivant $V_{ki}^2 = s_{ki}^2 \varepsilon_i^2 / \sigma^2$ et en reprenant étape par étape la démarche illustrée en (3.10) de la preuve de la normalité asymptotique du spline des moindres carrés. Tout est donc en place pour qu'entre en jeu le lemme de Lindeberg-Feller (lemme 3.4) qui garantit que les V_{ki} ont les qualités requises pour que leur somme converge vers la loi $N(0,1)$. Ainsi, par Slutsky,

$$\frac{\sqrt{n_k} (s^{(l)}(x_0, \hat{\theta}_{n_k}) - s^{(l)}(x_0, \tilde{\theta}) - v_{1k}(x_0))}{\sqrt{\sigma^2 \Sigma_k^l}} = \frac{\sqrt{\sigma^2 \Sigma_k^l / n_k + v_{2k}(x_0)}}{\sqrt{\sigma^2 \Sigma_k^l / n_k}} \sum_{i=1}^{n_k} V_{ki} \rightarrow N(0,1)$$

car le quotient devant la somme tend vers 1 par (4.5). Pour clore la démonstration, il suffit de souligner que par (4.3),

$$\max_{x_0 \in [0,1]} \frac{\sqrt{n_k} v_{1k}(x_0)}{\sqrt{\sigma^2 \Sigma_k^l}} = o\left(\frac{\sqrt{n_k}}{\sqrt{k^{2l+1}}} \frac{1}{k^{d+1-l}}\right) = o\left(\frac{\sqrt{n_k}}{\sqrt{k}} \frac{1}{k^{d+1}}\right),$$

une quantité $o(1)$ quand $k \rightarrow \infty$ si $n_k = O(k^{2(d+1)+1})$.

CQFD

Les commentaires que nous avons faits suite au théorème 3.5 trouvent écho ici. Il y a lieu en effet de discuter de la pertinence de ce résultat sur le plan pratique et le corollaire suivant, qui nécessite toutefois l'ajout de l'hypothèse (H5) et un petit ajustement au niveau de la croissance de n_k , illustre la

manière de métamorphoser le théorème pour le rendre plus attrayant aux yeux d'un expérimentateur.

Corollaire 4.4

Soit $x_0 \in [0,1]$ et, pour chaque k , soit également $\hat{\theta}_{n_k}$ le vecteur de paramètres obtenu par moindres carrés. Si on suppose que les vitesses de k et n_k vers l'infini sont régies par $k/n_k = o(1)$ et $n_k = O(k^{2(d+1)+1-\varepsilon})$ pour un certain $0 < \varepsilon < 1$, alors sous les hypothèses (H1) à (H4) additionnées de (H5), et pour $l \in \{1, \dots, d-1\}$,

$$\frac{\sqrt{n_k} \left(s^{(l)}(x_0, \hat{\theta}_{n_k}) - f^{(l)}(x_0) \right)}{s \sqrt{n_k^{-1} \sum_{i=1}^{n_k} (K_{n_k}^{(l)}(x_0, x_i))^2}} \rightarrow N(0,1)$$

lorsque $k \rightarrow \infty$, où s^2 est l'estimateur du lemme 3.6 et où on devine que $f^{(l)}(x_0)$ désigne la l -ième dérivée de $f(x)$ évaluée en x_0 .

Un intervalle de confiance asymptotique de niveau $(1-\alpha)$ pour $f^{(l)}(x_0)$ est donc donné par

$$s^{(l)}(x_0, \hat{\theta}_{n_k}) \pm z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n_k}} \sqrt{n_k^{-1} \sum_{i=1}^{n_k} (K_{n_k}^{(l)}(x_0, x_i))^2}.$$

Démonstration

Examinons la statistique du corollaire en l'écrivant sous la forme

$$\frac{\sigma \sqrt{\Sigma_k^l}}{s \sqrt{n_k^{-1} \sum_{i=1}^{n_k} (K_{n_k}^{(l)}(x_0, x_i))^2}} \left\{ \frac{\sqrt{n_k} \left(s^{(l)}(x_0, \hat{\theta}_{n_k}) - s^{(l)}(x_0, \bar{\theta}) + s^{(l)}(x_0, \bar{\theta}) - f^{(l)}(x_0) \right)}{\sigma \sqrt{\Sigma_k^l}} \right\}.$$

Au chapitre 2, et plus précisément en (2.19), on a établi que pour $l = 1, \dots, d-1$, la distance du supremum entre la l -ième dérivée de la meilleure approximation et la l -ième dérivée de $f(x)$ est $O(k^{-(d+1-l)})$. Ainsi,

$$\max_{x \in [0,1]} \frac{\sqrt{n_k} |s^{(l)}(x, \tilde{\theta}) - f^{(l)}(x)|}{\sigma \sqrt{\Sigma_k^l}} = O\left(\frac{\sqrt{n_k}}{\sqrt{k^{2l+1}}} \frac{1}{k^{d+1-l}}\right) = O\left(\frac{\sqrt{n_k}}{\sqrt{k}} \frac{1}{k^{d+1}}\right),$$

une quantité $O(1/\sqrt{k^\epsilon})$, et donc $o(1)$, quand $k \rightarrow \infty$ si $n_k = O(k^{2(d+1)+1-\epsilon})$.

Le corollaire laisse aussi supposer qu'on peut remplacer les quantités inconnues σ^2 et Σ_k^l par s^2 et $n_k^{-1} \sum_{i=1}^{n_k} (K_{n_k}^{(l)}(x_0, x_i))^2$ respectivement. Ces substitutions sont effectivement justifiées car le terme devant les accolades tend vers 1 en probabilité en combinant le lemme 3.6 et (4.5). La convergence en loi du corollaire est donc assurée par le théorème de Slutsky.

CQFD

Suite au corollaire 3.7, on a calculé la fonction de risque intégrée de l'estimateur spline et cet exercice peut être reproduit pour les dérivées. On se souvient que la FRI d'un estimateur est obtenue de la combinaison de son biais au carré et de sa variance (voir (3.18)). La l -ième dérivée de l'estimateur spline $s(z, \hat{\theta}_{n_k})$ ayant été choisie pour estimer celle de $f(z)$, son biais au carré intégré est donné, à un facteur $k^{2(d+1-l)}$ près, par

$$\begin{aligned} & k^{2(d+1-l)} \int_0^1 \left(f^{(l)}(z) - E\left(s^{(l)}(z, \hat{\theta}_{n_k}) \right) \right)^2 dF(z) \\ &= k^{2(d+1-l)} \int_0^1 \left(f^{(l)}(z) - s^{(l)}(z, \tilde{\theta}) - v_{1k}(z) \right)^2 dF(z) \\ &= k^{2(d+1-l)} \int_0^1 \left(f^{(l)}(z) - s^{(l)}(z, \tilde{\theta}) \right)^2 dF(z) + o(1) \end{aligned}$$

$$= \frac{|B_{2(d+1-l)}|}{(2(d+1-l))!} \int_0^1 \frac{(f^{(d+1)}(z))^2}{p(z)^{2(d+1-l)}} dF(z) + o(1)$$

quand $k \rightarrow \infty$. Cette chaîne d'égalités est le fruit de l'utilisation de (4.3) et de (2.19). La dernière égalité repose quant à elle sur (2.20) et sur l'hypothèse de l'existence d'une densité limite $p(\cdot)$ vers laquelle tendent les noeuds. Soulignons encore une fois que par (2.19), cette hypothèse est avant tout une question de commodité et n'est pas indispensable pour que le biais soit d'ordre $O(k^{-2(d+1-l)})$.

Pour la variance, on remarque qu'en faisant intervenir les propriétés de la trace, (4.5) permet d'écrire

$$\begin{aligned} \int_0^1 \text{Var}(s(z, \hat{\theta}_{n_k})) dF(z) &= \frac{\sigma^2}{n_k} \int_0^1 (D^l N(z)) M^{-1} (D^l N(z))' dF(z) + \int_0^1 v_{2k}(z) dF(z) \\ &= \frac{\sigma^2}{n_k} \text{tr}(M^{-1} M^l) + o\left(\frac{k^{2l+1}}{n_k}\right) \end{aligned}$$

où $M^l = \int_0^1 (D^l N(z))(D^l N(z))' dF(z)$ selon la notation introduite juste avant le lemme 1.1. On devine que cette variance intégrée est d'ordre $O(k^{2l+1}/n_k)$ quand $k \rightarrow \infty$ car $(D^l N(z)) M^{-1} (D^l N(z))' = O(k^{2l+1})$, indépendamment de z .

Ainsi, si on résume, la FRI de l'estimateur de la l -ième dérivée de $f(z)$ s'exprime sous la forme

$$FRI \approx \frac{1}{k^{2(d+1-l)}} \frac{|B_{2(d+1-l)}|}{(2(d+1-l))!} \int_0^1 \frac{(f^{(d+1)}(z))^2}{p(z)^{2(d+1-l)}} dF(z) + \frac{\sigma^2}{n_k} \text{tr}(M^{-1} M^l). \quad (4.7)$$

A la page 155 de son bouquin, Eubank (1988) discute du problème de l'estimation de la l -ième dérivée d'une fonction $f(\cdot)$ de $C^m[0,1]$. Il mentionne qu'un estimateur est asymptotiquement optimal si la vitesse de convergence

vers 0 de sa FRI est de l'ordre de $n^{-2(m-l)/(2m+1)}$ où n est le nombre d'observations. Il est facile de voir que cette vitesse optimale, $O(n_k^{-2(d+1-l)/(2(d+1)+1)})$ dans notre cas, est atteinte par notre estimateur si n_k croît vers l'infini à la vitesse maximale $n_k = O(k^{2(d+1)+1})$, celle-la même qui apparaît au théorème 4.3.

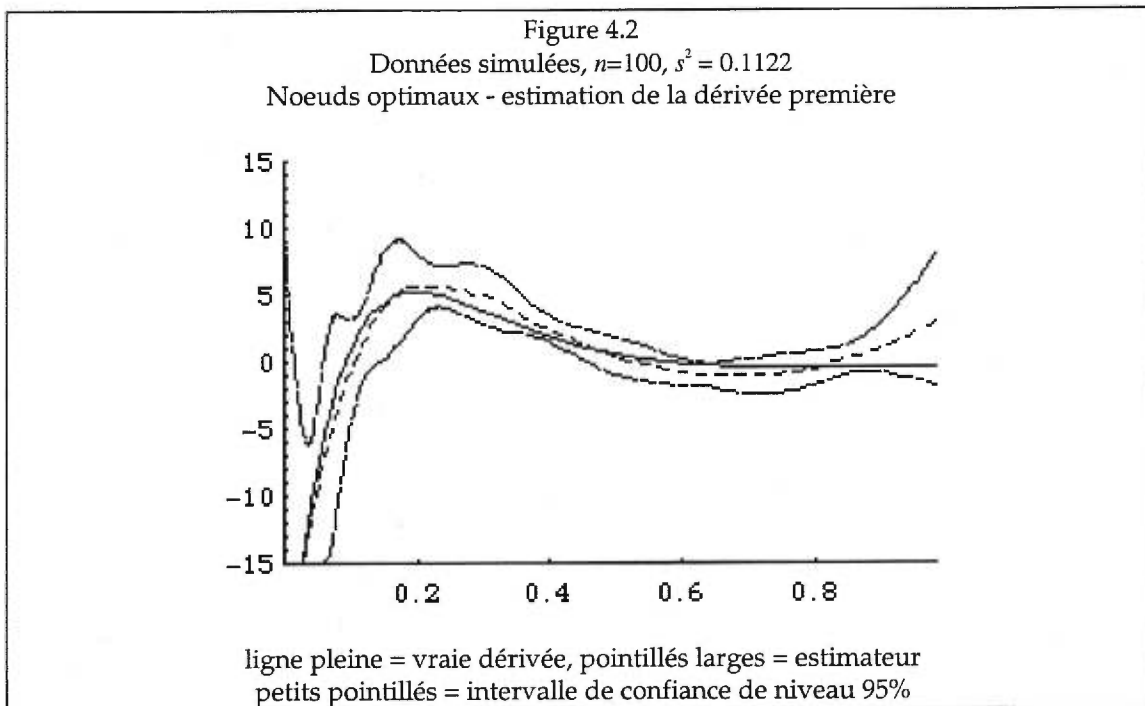
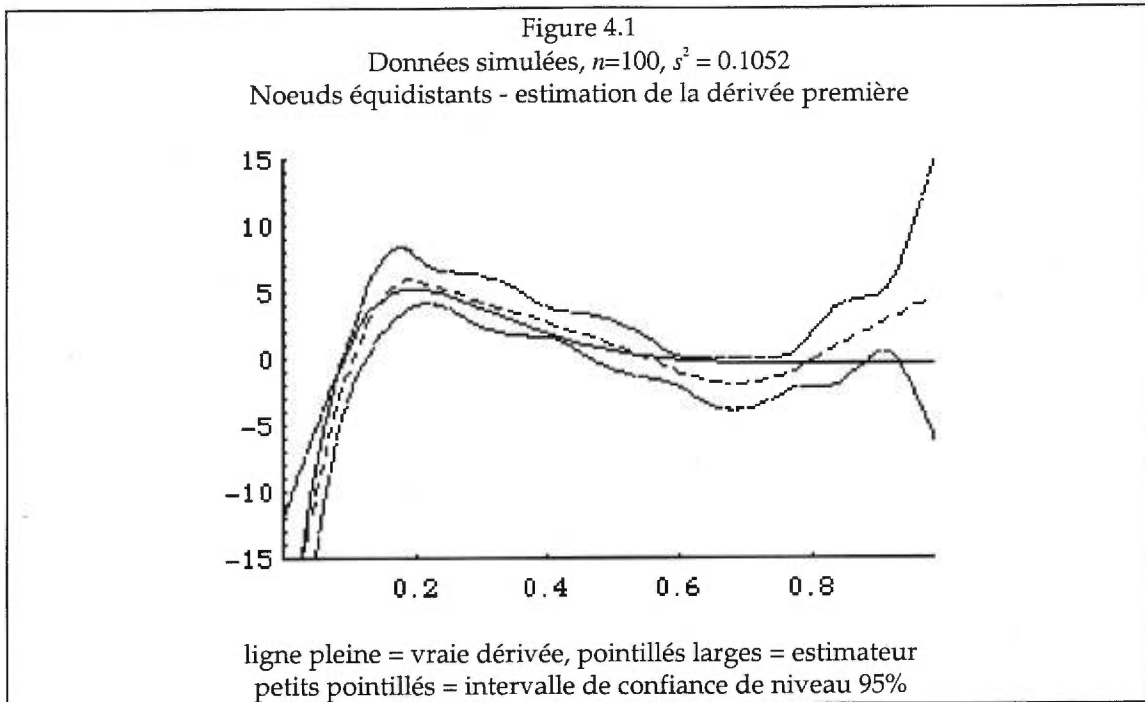
Encore une fois, si l'absence de biais est notre véritable souci, il faut sacrifier la vitesse optimale de la FRI et restreindre la croissance de n_k de manière à satisfaire $n_k = O(k^{2(d+1)+1-\varepsilon})$ pour un certain $0 < \varepsilon < 1$.

Avant de passer au contexte stochastique, illustrons le corollaire 4.4 en poursuivant l'exemple 1 de la section 3.1.

Suite de l'exemple 1

Au chapitre 3, nous avons illustré le théorème de normalité du spline des moindres carrés dans le contexte déterministe à l'aide de données simulées. En dérivant (une fois) les estimateurs qu'on avait alors obtenus et en calculant, selon la formule du corollaire 4.4, des intervalles de confiance asymptotiques de niveau 95% pour la dérivée première de $f(\cdot)$, on obtient les figures 4.1 et 4.2.

En raison de l'ordre des variances apparaissant au dénominateur des statistiques des théorèmes 3.5 et 4.3, on déduit que les dérivées de l'estimateur $s(\cdot, \hat{\theta}_{n_k})$ convergent plus lentement vers les dérivées de $f(\cdot)$ que $s(\cdot, \hat{\theta}_{n_k})$ lui-même vers $f(\cdot)$. Plus précisément, $s'(x, \hat{\theta}_{n_k}) - f'(x) = O_p(\sqrt{k^3/n_k})$ alors que $s(x, \hat{\theta}_{n_k}) - f(x) = O_p(\sqrt{k/n_k})$. Dans notre exemple, il n'en demeure pas moins que la vraie dérivée se situe presque toujours à l'intérieur de l'intervalle de confiance, surtout si on utilise les noeuds optimaux.



Notons enfin que les noeuds optimaux sont optimaux pour estimer $f(\cdot)$ et non pour estimer les dérivées de $f(\cdot)$. Une idée serait de minimiser la FRI de l'estimateur des dérivées (4.7) par rapport à la densité des noeuds afin de

déterminer celle qui est optimale pour l'estimation des dérivées de $f(\cdot)$. Nous rediscuterons de cette approche au chapitre 5.

4.1.2 Contexte stochastique

Supposons maintenant qu'on observe des couples aléatoires (X_i, Y_i) , $i = 1, \dots, n$. On bascule alors dans le contexte stochastique. Celui-ci est décrit au début de la section 3.2 et les hypothèses (H'1) à (H'4) qui lui sont afférentes constituent le cadre de travail de cette section. On s'intéresse à la l -ième dérivée de l'estimateur spline (3.21) et en se réappropriant la notation introduite au début de la section 4.1.1, elle s'exprime sous la forme

$$s^{(l)}(x, \bar{\theta}_{n_k}) = (D^l N(x))' \bar{\theta}_{n_k} = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}^{(l)}(x, X_i) Y_i, \quad (4.8)$$

$l = 1, \dots, d-1$, où $K_{n_k}^{(l)}(x, y) = (D^l N(x))' M_{n_k}^{-1} N(y)$. Insistons sur le fait que la matrice M_{n_k} est aléatoire dans ce contexte. A la lumière des résultats établis dans la section précédente, on flairer que cet estimateur sera lié à $s^{(l)}(x, \bar{\theta})$, la l -ième dérivée de la meilleure approximation de l'espérance conditionnelle $f_Y(x)$. Cette intuition est confirmée par le théorème suivant.

Théorème 4.5 (normalité des dérivées du spline des moindres carrés)

Soit $x_0 \in [0, 1]$ et, pour chaque k , soit $\bar{\theta}_{n_k}$ le vecteur de coefficients des moindres carrés. Supposons aussi que k et n_k sont assujettis à $k^4/n_k = O(1)$. Si $v_Y(x) = \text{Var}(Y | X=x)$ et $\Sigma_k^l = \int_0^1 (K^{(l)}(x_0, x))^2 \lambda(x) dx$ pour $l \in \{1, \dots, d-1\}$, alors sous les hypothèses (H'1) à (H'4) de la section 3.2, quand $k \rightarrow \infty$,

$$\frac{\sqrt{n_k} (s^{(l)}(x_0, \bar{\theta}_{n_k}) - s^{(l)}(x_0, \bar{\theta}))}{\sqrt{v_Y(x_0) \Sigma_k^l}} \rightarrow N(0, 1)$$

où $s(x, \bar{\theta})$ est la meilleure approximation de $f_Y(x)$ en norme $L_2[0,1]$ parmi les splines de $S_k^d(\tau^k)$.

Démonstration

Puisque la meilleure approximation $s(x, \bar{\theta})$ est élément de $S_k^d(\tau^k)$, elle est reproduite par le noyau dérivé en raison de la propriété 4.1 qui n'est pas moins vraie parce qu'on se situe dans le contexte stochastique et que M_{n_k} est aléatoire. On peut donc écrire

$$s^{(l)}(x_0, \bar{\theta}_{n_k}) - s^{(l)}(x_0, \bar{\theta}) = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}^{(l)}(x_0, X_i) (Y_i - s(X_i, \bar{\theta})).$$

Cette somme, sur laquelle focalise le reste de la démonstration, est scindée en deux pour tenir compte de la présence aléatoire introduite par la matrice M_{n_k} .

Précisément,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}^{(l)}(x_0, X_i) (Y_i - s(X_i, \bar{\theta})) \\ &= \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} K^{(l)}(x_0, X_i) (Y_i - s(X_i, \bar{\theta})) + \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} (K_{n_k}^{(l)}(x_0, X_i) - K^{(l)}(x_0, X_i)) (Y_i - s(X_i, \bar{\theta})) \\ &= S_{1n_k} + S_{2n_k}. \end{aligned}$$

La somme S_{1n_k} sera étudiée à la lumière du théorème limite central alors que, de la proximité du noyau $K^{(l)}(x, y)$ et de sa version empirique $K_{n_k}^{(l)}(x, y)$, on déduira que S_{2n_k} est une quantité négligeable.

On s'attaque dans un premier temps à S_{1n_k} en notant $S_{1n_k} = \sum_{i=1}^{n_k} Y_{ki}$ où les $Y_{ki} = n_k^{-1} K^{(l)}(x_0, X_i) (Y_i - s(X_i, \bar{\theta}))$ sont des variables aléatoires i.i.d.. Comme Y_{ki} peut s'exprimer comme combinaison linéaire des éléments du vecteur $N(X_i) (Y_i - s(X_i, \bar{\theta}))$ qui sont d'espérance nulle par (3.23), $\mu_k = E(Y_{ki}) = 0$.

Quant à la variance, par (3.24),

$$\begin{aligned} n_k^2 \sigma_k^2 &= n_k^2 \text{Var}(Y_{ki}) = \int_0^1 (K^{(l)}(x_0, x))^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} (z - s(x, \bar{\theta}))^2 \lambda(z|x) dz \right) \lambda(x) dx \\ &= \int_0^1 (K^{(l)}(x_0, x))^2 v_Y(x) \lambda(x) dx + \int_0^1 (K^{(l)}(x_0, x))^2 (f_Y(x) - s(x, \bar{\theta}))^2 \lambda(x) dx. \end{aligned}$$

Pour développer davantage la première intégrale, on fait appel à la propriété 2.2 qui borne le noyau dérivé par $C_d \delta_{\min}^{-(l+1)} \gamma^{n(x_0, x)}$ où $0 < \gamma < 1$ et où C_d est indépendante de k . Conjugée à (H'4) et au fait que la variance conditionnelle est Lipschitz d'ordre 1 par hypothèse, elle permet d'écrire, pour une constante M ,

$$\begin{aligned} & \max_{x_0 \in [0,1]} \left| \int_0^1 (K^{(l)}(x_0, x))^2 v_Y(x) \lambda(x) dx - v_Y(x_0) \Sigma_k^l \right| \\ & \leq \max_{x_0 \in [0,1]} \int_0^1 (K^{(l)}(x_0, x))^2 |v_Y(x) - v_Y(x_0)| \lambda(x) dx \\ & \leq M \left(\frac{C_d}{\delta_{\min}^{l+1}} \right)^2 \delta_{\max} \max_{x_0 \in [0,1]} \int_0^1 \gamma^{2n(x_0, x)} (n(x_0, x) + 1) \lambda(x) dx = o(k^{2l+1}) \end{aligned}$$

par le lemme 2.3 entre autres. Quant à la deuxième intégrale de $n_k^2 \sigma_k^2$, on devine de (2.18) et (4.6) qu'elle est d'ordre $O(k^{2l+1}/k^{2(d+1)}) = o(k^{2l+1})$ quand $k \rightarrow \infty$ car elle est majorée par le maximum de $(f_Y(x) - s(x, \bar{\theta}))^2$ sur $[0,1]$ multiplié par Σ_k^l .

En résumé, on peut écrire $n_k^2 \sigma_k^2 = v_Y(x_0) \Sigma_k^l + v_k(x_0)$ où $v_k = \max_{x_0 \in [0,1]} |v_k(x_0)| = o(k^{2l+1})$ quand $k \rightarrow \infty$.

Armé de ces considérations, on peut appliquer le théorème limite central à S_{1n_k} pour obtenir

$$\frac{\sum_{i=1}^{n_k} Y_{ki} - n_k \mu_k}{\sqrt{n_k} \sigma_k} = \frac{\sqrt{n_k} S_{1n_k}}{\sqrt{v_Y(x_0) \Sigma_k^l + v_k(x_0)}} \rightarrow N(0,1)$$

quand $k \rightarrow \infty$. Comme le ratio $v_Y(x_0) \Sigma_k^l / (v_Y(x_0) \Sigma_k^l + v_k(x_0))$ tend vers 1 indépendamment de x_0 , Slutsky assure en fait que

$$\frac{\sqrt{n_k} S_{1n_k}}{\sqrt{v_Y(x_0) \Sigma_k^l}} \rightarrow N(0,1),$$

ce qui clôt l'étude de S_{1n_k} .

On démontre que S_{2n_k} est une quantité négligeable en retournant au lemme 3.9 qui stipule que l'élément maximum de $n_k^{-1} \sum_{i=1}^{n_k} N(X_i)(Y_i - s(X_i, \bar{\theta})) = \{w_j(\bar{\theta})\}_{j=1, \dots, k+d+1}$ est d'ordre $o_p(k^{1/4}/\sqrt{n_k})$. Ainsi, par (4.2),

$$\begin{aligned} |S_{2n_k}| &= \left| (D^l N(x_0))' (M_{n_k}^{-1} - M^{-1}) \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} N(X_i)(Y_i - s(X_i, \bar{\theta})) \right| \\ &\leq \left(\max_{1 \leq j \leq k+d+1} |w_j(\bar{\theta})| \right) \|M_{n_k}^{-1} - M^{-1}\|_{\max} |(D^l N(x_0))'| \mathbf{1}_{k+d+1} = o_p \left(k^{2+l} \frac{\sqrt{k}}{n_k} \right), \end{aligned}$$

indépendamment de x_0 , car dans le contexte stochastique, la norme maximale de $M_{n_k}^{-1} - M^{-1}$ est d'ordre $O(r_k k)$, avec $r_k = k^{1+(1/4)}/\sqrt{n_k}$, $\forall \omega$ hors de l'ensemble de mesure nulle \mathcal{N} .

Réunissant ce que l'on sait de S_{1n_k} et S_{2n_k} , on conclut que

$$\frac{\sqrt{n_k} (S_{1n_k} + S_{2n_k})}{\sqrt{v_Y(x_0) \Sigma_k^l}} = \frac{\sqrt{n_k} (s^{(l)}(x_0, \bar{\theta}_{n_k}) - s^{(l)}(x_0, \bar{\theta}))}{\sqrt{v_Y(x_0) \Sigma_k^l}} \rightarrow N(0,1)$$

puisque

$$\frac{\sqrt{n_k} |S_{2n_k}|}{\sqrt{v_Y(x_0) \Sigma_k^l}} = O \left(\sqrt{\frac{n_k}{k^{2l+1}}} \right) o_p \left(k^{2+l} \frac{\sqrt{k}}{n_k} \right) = o_p \left(\frac{k^2}{\sqrt{n_k}} \right) = o_p(1)$$

du fait que $k^4/n_k = O(1)$ par hypothèse.

CQFD

Encore ici, on peut requinquer ce résultat pour le rendre utilisable en pratique. Comme prix à payer, on doit ajouter l'hypothèse (H'5) de la section 3.2 et contrôler davantage la croissance de n_k .

Corollaire 4.6

Soit $x_0 \in [0,1]$ et, pour chaque k , soit $\bar{\theta}_{n_k}$ les coefficients des moindres carrés. Supposons aussi que $k^4/n_k = O(1)$ et que $n_k = O(k^{2(d+1)+1-\varepsilon})$ pour un certain $0 < \varepsilon < 1$. Alors sous les hypothèses (H'1) à (H'4), auxquelles on ajoute (H'5),

$$\frac{\sqrt{n_k} (s^{(l)}(x_0, \bar{\theta}_{n_k}) - f_Y^{(l)}(x_0))}{\sqrt{\hat{v}_Y(x_0) n_k^{-1} \sum_{i=1}^{n_k} (K_{n_k}^{(l)}(x_0, X_i))^2}} \rightarrow N(0,1)$$

lorsque $k \rightarrow \infty$, pour $l \in \{1, \dots, d-1\}$, où $\hat{v}_Y(x_0)$ est l'estimateur du lemme 3.11.

Par conséquent,

$$s^{(l)}(x_0, \bar{\theta}_{n_k}) \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{v}_Y(x_0)}{n_k} \sqrt{n_k^{-1} \sum_{i=1}^{n_k} (K_{n_k}^{(l)}(x_0, X_i))^2}}$$

donne un intervalle de confiance asymptotique de niveau $(1-\alpha)$ pour $f^{(l)}(x_0)$.

Démonstration

Puisque $s(x, \bar{\theta})$ est la meilleure approximation de $f_Y(x)$, l'équation (2.19) garantit que

$$\max_{x \in [0,1]} \frac{\sqrt{n_k} |s^{(l)}(x, \bar{\theta}) - f_Y^{(l)}(x)|}{\sqrt{v_Y(x) \Sigma_k^l}} = O\left(\sqrt{\frac{n_k}{k^{2l+1}}} \frac{1}{k^{d+1-l}}\right) = o(1)$$

quand $n_k = O(k^{2(d+1)+1-\varepsilon})$.

Le ratio $v_Y(x_0)/\hat{v}_Y(x_0)$ converge vers 1 en probabilité lorsque $k \rightarrow \infty$ par le lemme 3.11. Le ratio $\Sigma_k^l/n_k^{-1} \sum_{i=1}^{n_k} (K_{n_k}^{(l)}(x_0, X_i))^2$ tend également vers 1. Cela se défend par (4.6) et par l'inégalité

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} (K_{n_k}^{(l)}(x_0, X_i))^2 - \Sigma_k^l \right| &= \left| (D^l N(x_0))' (M_{n_k}^{-1} - M^{-1}) (D^l N(x_0)) \right| \\ &\leq \|M_{n_k}^{-1} - M^{-1}\|_s \|D^l N(x_0)\|_E^2 = o(k^{2l+1}), \end{aligned}$$

elle-même vérifiée $\forall \omega$ hors de l'ensemble de mesure nulle et justifiée par le corollaire 1.5 et le lemme 1.1.

La convergence en loi annoncée résulte de l'application du théorème de Slutsky à la statistique du corollaire écrite sous la forme

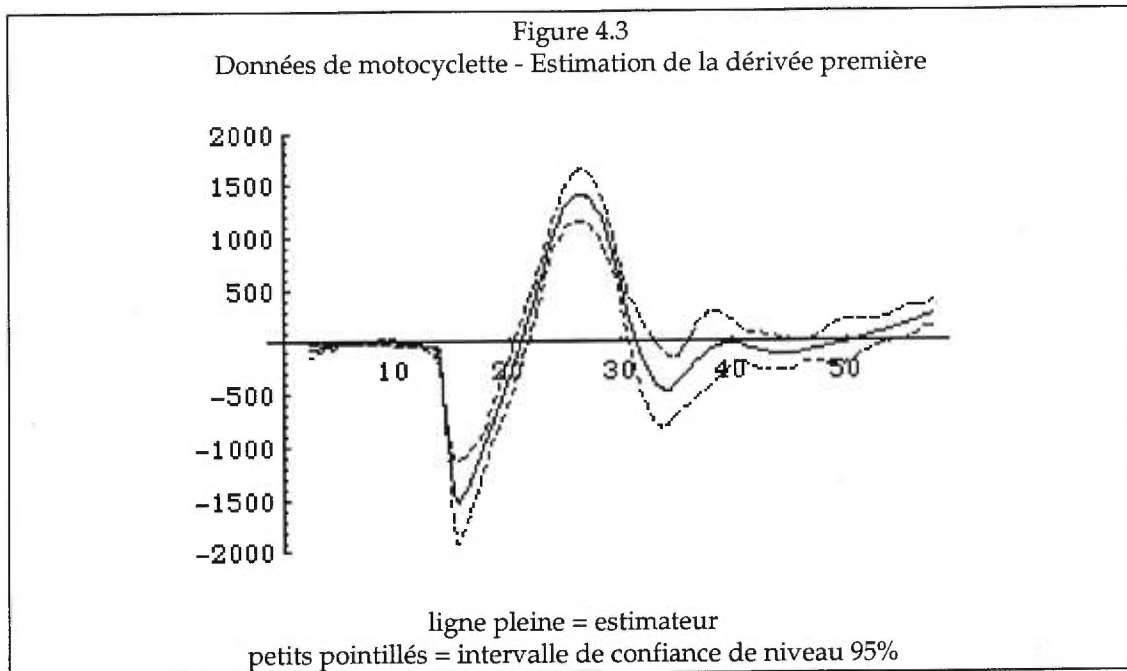
$$\frac{\sqrt{v_Y(x_0) \Sigma_k^l}}{\sqrt{\hat{v}_Y(x_0) n_k^{-1} \sum_{i=1}^{n_k} (K_{n_k}^{(l)}(x_0, X_i))^2}} \left\{ \frac{\sqrt{n_k} (s^{(l)}(x_0, \bar{\theta}_{n_k}) - s^{(l)}(x_0, \bar{\theta}) + s^{(l)}(x_0, \bar{\theta}) - f_Y^{(l)}(x_0))}{\sqrt{v_Y(x_0) \Sigma_k^l}} \right\}.$$

CQFD

Suite de l'exemple 2

Retournons aux données de motocyclette que nous avons présentées à la fin de la section 3.2. Si on dérive l'estimateur qu'on avait trouvé et qu'on utilise le corollaire 4.6 pour obtenir un intervalle de confiance asymptotique de niveau 95%, on tombe sur la figure 4.3.

Dans ce cas-ci, la dérivée est difficilement interprétable, nous l'avons présentée à titre d'illustration seulement. Il existe cependant des phénomènes, la croissance en fonction du temps en est un, où les dérivées sont beaucoup plus pertinentes.



4.2 Fonction de répartition conditionnelle

L'estimateur spline des moindres carrés (3.4) ou (3.21) se présente comme une somme pondérée des variables aléatoires Y_i . Pour $y \in \mathbb{R}$, les fonctions indicatrices $1_{(Y_i \leq y)}$, $i = 1, \dots, n$, sont des variables aléatoires au même titre que les Y_i et en s'inspirant du travail déjà fait, on démontre que de la substitution des Y_i par ces fonctions indicatrices résulte un estimateur de la fonction de répartition conditionnelle qui converge en loi vers une normale.

4.2.1 Contexte déterministe

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. Le contexte déterministe se distingue du contexte aléatoire, qu'on verra à la prochaine section, du fait qu'on observe Y à des valeurs fixées de X . La distribution de Y est liée au x considéré et pour illustrer cette dépendance, on note la fonction de répartition

de Y par $m_x(y) \equiv P_x(Y \leq y)$, $y \in \mathbb{R}$. Puisque notre intérêt s'écartera dorénavant de la fonction inconnue sous-tendant les points (x_i, Y_i) , $i = 1, \dots, n$, certaines hypothèses de la section 3.1 deviennent obsolètes. En fait, l'essentiel de ce qui est requis ici se résume aux hypothèses suivantes.

(A1): La fonction $m_x(y)$ est Lipschitz d'ordre 1 en x , c'est-à-dire que pour $x_1, x_2 \in [0, 1]$ quelconques, $|m_{x_1}(y) - m_{x_2}(y)| \leq M_y |x_1 - x_2|$ où M_y est une constante qui dépend de y . En outre, si $m_x^{(j)}(y)$ désigne la j -ième dérivée de $m_x(y)$ par rapport à x , alors $m_x(y)$ est $(d+1)$ fois continûment dérivable comme fonction de x sur $[0, 1]$ et

$$\max_{x \in [0, 1]} |m_x^{(d+1)}(y)| < C_1$$

pour une certaine constante C_1 .

(A2): Les x_i sont déterministes et compris dans $[0, 1]$. La suite des fonctions de répartition empirique de $\{x_i\}_{i=1, \dots, n}$, $F_n(\cdot)$, converge vers une fonction de répartition continue $F(\cdot)$ quand $n \rightarrow \infty$. Plus précisément, il existe une sous-suite $\{n_k\}_{k=1, \dots, \infty}$ telle que

$$\max_{x \in [0, 1]} |F_{n_k}(x) - F(x)| \leq \frac{r_k}{k}$$

où $\{r_k\}_{k=1, \dots, \infty}$ est une suite de constantes qui tend vers 0 quand $k \rightarrow \infty$.

De plus, $F(\cdot)$ est dérivable sur $[0, 1]$ et sa dérivée, $\lambda(\cdot)$, est continue, positive et satisfait $0 < \lambda_{\min} \leq \lambda(x) \leq \lambda_{\max} < \infty \forall x \in [0, 1]$.

Tel qu'annoncé, notre candidat à l'estimation de $m_x(y)$ est l'estimateur (3.4), mais avec les Y_i remplacés par les fonctions indicatrices $1_{(Y_i \leq y)}$, c'est-à-dire

$$\hat{m}_{n_k, x}(y) = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}(x, x_i) 1_{(Y_i \leq y)}. \quad (4.9)$$

Cet estimateur fait intervenir des B-splines de noeuds τ^k qui doivent satisfaire

(A3a): les noeuds des vecteurs τ^k deviennent localement uniformes lorsque $k \rightarrow \infty$, c'est-à-dire que $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_{i+1}/\delta_i = 1 \forall i = 1, \dots, k$ avec $\delta_i = \tau_i - \tau_{i-1}$,

(A3b): si δ_{\min} et δ_{\max} désignent respectivement le minimum et le maximum des δ_i , alors il existe deux constantes positives C_1 et C_2 , indépendantes de k , telles que

$$\frac{C_1}{k} < \delta_{\min} \leq \delta_{\max} < \frac{C_2}{k}.$$

Soulignons que les estimateurs de fonctions de répartition se présentent souvent sous la forme d'un rapport $\sum_i w_i \Psi(Y_i) / \sum_i w_i$ pour une certaine fonction $\Psi(\cdot)$ et des poids w_i . L'estimateur par noyau de Stute (1986) est de ce type; un autre exemple se trouve dans l'article de Yu et Jones (1998) qui traite de l'estimation par régression linéaire locale. L'absence de dénominateur en (4.9) est légitimée par la propriété 3.1 qui indique que les poids somment à 1. Cette particularité de l'estimateur spline est en fait un atout car elle simplifie grandement sa manipulation et son étude.

Nous démontrons dans les prochaines pages que la distribution de $\hat{m}_{n_k, x}(y)$ est asymptotiquement normale. Comme l'estimateur s'écrit comme une somme pondérée de variables aléatoires indépendantes et bornées, la preuve de sa normalité asymptotique transite par un corollaire du théorème de Liapounov que nous énonçons à l'instant.

Lemme 4.7

Soit $\{Y_{ki}\}_{i=1, \dots, n_k}$ une suite de variables aléatoires doublement indexées dont les variances s_{ki}^2 satisfont $\sum_{i=1}^{n_k} s_{ki}^2 = 1 \forall k \geq 1$. Si les Y_{ki} , $i = 1, \dots, n_k$, sont

indépendantes pour k fixe et si $|Y_{ki}| \leq M_{ki} \forall k$ et $\forall i$ avec $\max_{1 \leq i \leq n_k} M_{ki} \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$, alors

$$\sum_{i=1}^{n_k} (Y_{ki} - E(Y_{ki})) \rightarrow N(0,1).$$

Démonstration

Chung (1974), p. 201.

Théorème 4.8

Soient $y \in \mathbb{R}$, $x_0 \in [0,1]$ et $\hat{m}_{n_k, x_0}(y)$ l'estimateur (4.9). Si k et n_k croissent vers l'infini tout en satisfaisant $k/n_k = o(1)$ et $n_k = O(k^{2(d+1)+1-\varepsilon})$ pour un certain $0 < \varepsilon < 1$, alors sous (A1) à (A3),

$$\frac{\sqrt{n_k} (\hat{m}_{n_k, x_0}(y) - m_{x_0}(y))}{\sqrt{v_{x_0}(y) \Xi_k}} \rightarrow N(0,1)$$

quand $k \rightarrow \infty$ où $\Xi_k = \int_0^1 K^2(x_0, x) dF(x)$ et $v_x(y) = m_x(y)(1 - m_x(y))$.

Démonstration

Suivant le chemin balisé par les autres démonstrations de normalité asymptotique, introduisons les variables aléatoires $Z_{ki} = n_k^{-1} K_{n_k}(x_0, x_i) 1_{(Y_i \leq y)}$, $i = 1, \dots, n_k$, dont la somme coïncide avec $\hat{m}_{n_k, x_0}(y)$. Elles sont d'espérances $\mu_{ki} = n_k^{-1} K_{n_k}(x_0, x_i) m_{x_i}(y)$ et de variances $\sigma_{ki}^2 = n_k^{-2} K_{n_k}^2(x_0, x_i) v_{x_i}(y)$.

Démontrons d'abord la proximité de l'espérance de $\hat{m}_{n_k, x_0}(y)$ et de $m_{x_0}(y)$. Le fait que $m_x(y)$ soit $(d+1)$ fois continûment dérivable en x valide le développement de Taylor

$$m_x(y) - m_{x_0}(y) = \sum_{j=1}^d \frac{m_{x_0}^{(j)}(y)}{j!} (x - x_0)^j + \frac{m_{x_0}^{(d+1)}(y)}{(d+1)!} (x - x_0)^{d+1}$$

où ξ_0 est un point dépendant de y et coincé entre x et x_0 . En s'aidant de la propriété 3.1, on écrit

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i=1}^{n_k} \mu_{ki} - m_{x_0}(y) \right| &= \left| \int_0^1 K_{n_k}(x_0, x) m_x(y) dF_{n_k}(x) - m_{x_0}(y) \right| \\
&= \left| \int_0^1 K_{n_k}(x_0, x) (m_x(y) - m_{x_0}(y)) dF_{n_k}(x) \right| \\
&= \frac{1}{(d+1)!} \left| \int_0^1 K_{n_k}(x_0, x) (m_{\xi_0}^{(d+1)}(y) (x - x_0)^{d+1}) dF_{n_k}(x) \right| \\
&\leq \frac{C_1}{(d+1)!} \frac{\bar{C}_k}{\delta_{\min}} \delta_{\max}^{d+1} \int_0^1 (\gamma + c_k)^{n(x_0, x)} (n(x_0, x) + 1)^{d+1} dF_{n_k}(x) \tag{4.10}
\end{aligned}$$

où $\gamma \in (0, 1)$, $\bar{C}_k = O(1)$ et $c_k = o(1)$ quand $k \rightarrow \infty$. L'avant-dernière ligne se justifie en se souvenant que $\int_0^1 K_{n_k}(x_0, x) (x - x_0)^j dF_{n_k}(x) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, d$ par la reproductibilité des polynômes, alors que la dernière est une conséquence de la propriété 3.2 et du fait que $|x - x_0| \leq (n(x_0, x) + 1) \delta_{\max}$.

Soulignons maintenant que comme la distance maximale entre $F_{n_k}(\cdot)$ et $F(\cdot)$ est $o(k^{-1})$ par (A2),

$$\begin{aligned}
\max_{0 \leq j \leq k} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} dF_{n_k}(x) &= \max_{0 \leq j \leq k} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \lambda(x) dx + \max_{0 \leq j \leq k} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} d(F_{n_k} - F)(x) \\
&\leq \lambda_{\max} \delta_{\max} + 2 \max_{x \in [0, 1]} |(F_{n_k} - F)(x)| = O(\delta_{\max}).
\end{aligned}$$

Etant donné que $\gamma + c_k$ se situe entre 0 et 1 si k est assez grand, on s'aide du lemme 2.3 pour déduire que le maximum sur les x_0 de $[0, 1]$ de l'intégrale apparaissant dans (4.10) est $O(\delta_{\max})$ quand $k \rightarrow \infty$. Il en découle que

$$\sqrt{\frac{n_k}{k}} \max_{x_0 \in [0, 1]} \left| \sum_{i=1}^{n_k} \mu_{ki} - m_{x_0}(y) \right| = \sqrt{\frac{n_k}{k}} O(\delta_{\max}^{d+1}) = O\left(\frac{\sqrt{n_k}}{\sqrt{k}} \frac{1}{k^{d+1}} \right) = o(1) \tag{4.11}$$

car $n_k = O(k^{2(d+1)+1-\epsilon})$ par hypothèse.

Tournons-nous maintenant vers la somme des variances en écrivant

$$\begin{aligned} n_k \sum_{i=1}^{n_k} \sigma_{ki}^2 &= \int_0^1 K_{n_k}^2(x_0, x) v_x(y) dF_{n_k}(x) \\ &= v_{x_0}(y) \int_0^1 K_{n_k}^2(x_0, x) dF_{n_k}(x) + v_{1k}(x_0) = v_{x_0}(y) \Xi_k + v_{2k}(x_0) \end{aligned} \quad (4.12)$$

où $v_{1k} = \max_{x_0 \in [0,1]} |v_{1k}(x_0)|$ et $v_{2k} = \max_{x_0 \in [0,1]} |v_{2k}(x_0)|$ sont $o(k)$ quand $k \rightarrow \infty$. La seconde égalité résulte du fait que

$$\max_{x_0 \in [0,1]} \left| \int_0^1 K_{n_k}^2(x_0, x) v_x(y) dF_{n_k}(x) - v_{x_0}(y) \int_0^1 K_{n_k}^2(x_0, x) dF_{n_k}(x) \right| = o(k)$$

lorsque $k \rightarrow \infty$, un résultat que nous démontrons à l'instant, alors que la troisième est une conséquence de (3.7). Par définition, $m_x(y)$ est une probabilité, donc comprise entre 0 et 1. Le fait qu'on la suppose en outre Lipschitz d'ordre 1 en x assure que

$$\begin{aligned} |v_x(y) - v_{x_0}(y)| &= \left| (m_x(y) - m_{x_0}(y)) (1 - m_x(y) - m_{x_0}(y)) \right| \\ &\leq |m_x(y) - m_{x_0}(y)| \leq M_y (n(x_0, x) + 1) \delta_{\max}. \end{aligned}$$

Par la propriété 3.2,

$$\begin{aligned} &\max_{x_0 \in [0,1]} \left| \int_0^1 K_{n_k}^2(x_0, x) (v_x(y) - v_{x_0}(y)) dF_{n_k}(x) \right| \\ &\leq \left(\frac{\bar{C}_k}{\delta_{\min}} \right)^2 M_y \delta_{\max} \max_{x_0 \in [0,1]} \int_0^1 (\gamma + c_k)^{2n(x_0, x)} (n(x_0, x) + 1) dF_{n_k}(x) \end{aligned}$$

et tel qu'annoncé, cette quantité est $O(1)$, c'est-à-dire $o(k)$, quand $k \rightarrow \infty$ par les arguments qui ont servi à majorer (4.10).

Rappelons à ce stade-ci que le rapport Ξ_k/k est borné, supérieurement et inférieurement, par des constantes indépendantes de k . L'égalité (4.12) a donc pour conséquence que les ratios

$$\frac{n_k \sum_{i=1}^{n_k} \sigma_{ki}^2}{v_{x_0}(y)\Xi_k} \text{ et } \frac{\Xi_k}{\int_0^1 K_{n_k}^2(x_0, x) dF_{n_k}(x)} \quad (4.13)$$

tendent tous deux vers 1 quand $k \rightarrow \infty$.

Avec ces convergences, nous avons en main tous les éléments nécessaires à la démonstration de la normalité asymptotique de la somme des variables aléatoires Z_{ki} , et conséquemment de l'estimateur de $m_{x_0}(y)$. En fait, nous prétendons que les variables aléatoires

$$W_{ki} = \frac{Z_{ki}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n_k} \sigma_{ki}^2}} = q_{ki} 1_{(Y_i \leq y)},$$

avec $q_{ki} = n_k^{-1} K_{n_k}(x_0, x_i) / \sqrt{\sum_{i=1}^{n_k} \sigma_{ki}^2}$, respectent les conditions du lemme 4.7. Dû à leur affiliation aux $1_{(Y_i \leq y)}$, les W_{ki} , $i = 1, \dots, n_k$, sont indépendantes pour k fixe et par construction, leurs variances somment à 1. Pour s'assurer qu'elles sont bornées par des constantes dont le maximum tend vers zéro, remarquons que par (4.12) et parce que $1_{(Y_i \leq y)} \leq 1 \forall i$,

$$\max_{1 \leq i \leq n_k} |W_{ki}| = \max_{1 \leq i \leq n_k} |q_{ki}| = \frac{\max_{1 \leq i \leq n_k} |n_k^{-1} K_{n_k}(x_0, x_i)|}{\sqrt{n_k^{-1} (v_{x_0}(y)\Xi_k + v_{2k}(x_0))}}.$$

Le numérateur est $O(k/n_k)$ par la propriété 3.2 et comme le rapport Ξ_k/k est borné, on déduit que ce maximum est $O(\sqrt{k/n_k}) \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$ par hypothèse. Les conditions du lemme 4.7 étant satisfaites, on peut affirmer que

$$\sum_{i=1}^{n_k} (W_{ki} - E(W_{ki})) \equiv \frac{(\hat{m}_{n_k, x_0}(y) - \sum_{i=1}^{n_k} \mu_{ki})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n_k} \sigma_{ki}^2}} \rightarrow N(0,1)$$

et aussi, par (4.13) et par le théorème de Slutsky, que

$$\frac{\sqrt{n_k}(\hat{m}_{n_k, x_0}(y) - \sum_{i=1}^{n_k} \mu_{ki})}{\sqrt{v_{x_0}(y)\Xi_k}} \rightarrow N(0,1).$$

La conclusion du théorème découle du fait qu'on peut écrire

$$\frac{\sqrt{n_k}(\hat{m}_{n_k, x_0}(y) - m_{x_0}(y))}{\sqrt{v_{x_0}(y)\Xi_k}} = \frac{\sqrt{n_k}(\hat{m}_{n_k, x_0}(y) - \sum_{i=1}^{n_k} \mu_{ki})}{\sqrt{v_{x_0}(y)\Xi_k}} + \frac{\sqrt{n_k}(\sum_{i=1}^{n_k} \mu_{ki} - m_{x_0}(y))}{\sqrt{v_{x_0}(y)\Xi_k}}$$

où le terme à droite de la somme est $o(1)$ par (4.11).

CQFD

Tel quel, le théorème 4.8 est d'un intérêt pratique limité car le terme de variance n'est pas connu. Cette petite difficulté est aplanie par le corollaire suivant.

Corollaire 4.9

Soit $\hat{v}_{n_k, x_0}(y) = \hat{m}_{n_k, x_0}(y)(1 - \hat{m}_{n_k, x_0}(y))$. Sous les conditions du théorème 4.8, lorsque $k \rightarrow \infty$,

$$\frac{\sqrt{n_k}(\hat{m}_{n_k, x_0}(y) - m_{x_0}(y))}{\sqrt{\hat{v}_{n_k, x_0}(y)n_k^{-1} \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}^2(x_0, x_i)}} \rightarrow N(0,1).$$

Démonstration

Il découle du théorème que $\hat{m}_{n_k, x_0}(y) - m_{x_0}(y) = O_p(\sqrt{k/n_k}) = o_p(1)$ quand $k \rightarrow \infty$ et puisque $v_{x_0}(y) = m_{x_0}(y)(1 - m_{x_0}(y))$, le rapport $v_{x_0}(y)/\hat{v}_{n_k, x_0}(y)$ tend vers

1 en probabilité. La substitution de Ξ_k par sa version empirique a quant à elle déjà été justifiée à la fin de la section 3.1.

CQFD

Dans l'énoncé du théorème 4.8, nous avons pris un petit raccourci en supposant d'emblée que la croissance de n_k se modulait à la vitesse $O(k^{2(d+1)+1-\varepsilon})$ pour un certain $0 < \varepsilon < 1$. Cette vitesse a en effet été choisie pour assurer que l'estimateur de $m_{x_0}(y)$ possède, sous certaines conditions de régularité, une distribution asymptotiquement normale de moyenne $m_{x_0}(y)$. Si n_k tend vers l'infini à la vitesse maximale $O(k^{2(d+1)+1})$ toutefois, le scénario est différent car (4.11) ne tient plus. Cette réflexion nous invite encore une fois à parler de la fonction de risque intégrée et on le fait en supposant vraies les hypothèses (A1) à (A3).

Pour $y \in \mathbb{R}$, désignons par

$$s(x, \tilde{\theta}_y) = N(x)' \tilde{\theta}_y = \int_0^1 K(x, z) m_z(y) dF(z)$$

la meilleure approximation de $m_x(y)$ en norme $L_2[0,1]$ parmi tous les splines de $S_k^d(\tau^k)$.

Puisque $m_x(y)$ est, comme fonction de x , élément de $C^{d+1}[0,1]$ par (A1), on récupère le raisonnement qui sous-tend (3.6) (essentiellement la reproductibilité du noyau empirique et le lemme 3.3 qui borne les éléments du vecteur $\int_0^1 N(z)(m_z(y) - s(z, \tilde{\theta}_y)) dF(z)$) pour écrire

$$E(\hat{m}_{n_k, x_0}(y)) = \int_0^1 K_{n_k}(x_0, x) m_x(y) dF_{n_k}(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 K_{n_k}(x_0, x) s(x, \tilde{\theta}_y) dF_{n_k}(x) + \int_0^1 K_{n_k}(x_0, x) (m_x(y) - s(x, \tilde{\theta}_y)) dF_{n_k}(x) \\
&= s(x_0, \tilde{\theta}_y) + \eta_k(x_0)
\end{aligned}$$

avec $\max_{x_0 \in [0,1]} |\eta_k(x_0)| = o(k^{-(d+1)})$ quand $k \rightarrow \infty$.

Avec cette égalité en poche, la FRI de $\hat{m}_{n_k, z}(y)$ s'obtient en suivant les traces qui mènent à (3.19). Si on émet l'hypothèse que les noeuds possèdent une densité limite $p(\cdot)$, alors le biais intégré s'exprime sous la forme

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (m_z(y) - E(\hat{m}_{n_k, z}(y)))^2 dF(z) &= \int_0^1 (m_z(y) - s(z, \tilde{\theta}_y) - \eta_k(z))^2 dF(z) \\
&= \frac{1}{k^{2(d+1)}} \frac{|B_{2(d+1)}|}{(2(d+1))!} \int_0^1 \frac{(m_z^{(d+1)}(y))^2}{p(z)^{2(d+1)}} dF(z) + o\left(\frac{1}{k^{2(d+1)}}\right).
\end{aligned}$$

Quant à la variance, par (4.12),

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \text{Var}(\hat{m}_{n_k, z}(y)) dF(z) &= \frac{1}{n_k} \int_0^1 v_z(y) N(z)' M^{-1} N(z) dF(z) + \frac{1}{n_k} \int_0^1 v_{2k}(z) dF(z) \\
&= \frac{1}{n_k} \int_0^1 v_z(y) N(z)' M^{-1} N(z) dF(z) + o\left(\frac{k}{n_k}\right),
\end{aligned}$$

un terme d'ordre $O(k/n_k)$ quand $k \rightarrow \infty$. On conclut en bout de ligne que

$$FRI \approx \frac{1}{k^{2(d+1)}} \frac{|B_{2(d+1)}|}{(2(d+1))!} \int_0^1 \frac{(m_z^{(d+1)}(y))^2}{p(z)^{2(d+1)}} dF(z) + \frac{1}{n_k} \int_0^1 v_z(y) N(z)' M^{-1} N(z) dF(z).$$

Si la FRI est le critère pour juger l'estimateur $\hat{m}_{n_k, z}(y)$, alors on peut affirmer qu'il est asymptotiquement optimal car sa FRI converge vers 0 à la vitesse optimale $O(n_k^{-2(d+1)/(2(d+1)+1)})$ si n_k croît à la vitesse maximale. Soulignons en terminant que si la variance conditionnelle $v_z(y)$ est constante comme fonction de z , alors le second terme de la FRI est proportionnel à $(k+d+1)/n_k$ et

on retombe exactement sur l'expression donnée en (3.19), à ceci près que la dérivée $f^{(d+1)}(z)$ est remplacée par $m_z^{(d+1)}(y)$.

4.2.2 Contexte stochastique

La fonction de répartition conditionnelle s'étudie ici dans le contexte plus proche de la réalité où on observe des couples aléatoires (X_i, Y_i) , $i = 1, \dots, n$. On la note alors $m(y|x) \equiv P(Y \leq y | X=x) = E(1_{(Y \leq y)} | X = x)$ pour $y \in \mathbb{R}$ et $x \in [0,1]$. On assume les hypothèses suivantes.

(A'1): La fonction $m(y|x)$ est Lipschitz d'ordre 1 en x , c'est-à-dire que pour $x_1, x_2 \in [0,1]$ quelconques, $|m(y|x_1) - m(y|x_2)| \leq M_y |x_1 - x_2|$ où M_y ne dépend que de y . De plus, $m(y|x) = E(1_{(Y \leq y)} | X = x)$ est $(d+1)$ fois continûment dérivable en x sur $[0,1]$ et

$$\sup_{x \in [0,1]} |m^{(d+1)}(y|x)| < C_1$$

pour une certaine constante C_1 où $m^{(j)}(y|x)$ désigne la j -ième dérivée de $m(y|x)$ par rapport à x .

(A'2): Les couples (X_i, Y_i) , $i = 1, \dots, n$, sont indépendants et identiquement distribués de loi conjointe $F(x,y)$ admettant une fonction de densité continue $\lambda(x,y)$. Les X_i sont éléments de $[0,1]$ et leur fonction de densité marginale, notée $\lambda(x)$, est continue, positive et satisfait $0 < \lambda_{\min} \leq \lambda(x) \leq \lambda_{\max} < \infty \forall x \in [0,1]$.

Pour composer avec la présence des couples aléatoires (X_i, Y_i) , il faut ici introduire un nouvel outil: l'inégalité de Kiefer qui est le pendant multivarié de celle de Dvoretzky, Kiefer et Wolfowitz (Serfling (1980), p.59, 61) que nous avons utilisée dans la section 3.2. Si $F_n(x,y)$ désigne la fonction de répartition

empirique conjointe des couples (X_i, Y_i) , alors cette inégalité assure que pour chaque $\eta > 0$, il existe une constante finie et positive C_η , indépendante de $F(\cdot, \cdot)$, telle que

$$P\left(\sup_{x \in [0,1], y \in \mathbb{R}} |F_n(x, y) - F(x, y)| > a\right) \leq C_\eta e^{-(2-\eta)na^2}$$

pour $a > 0$ et pour tout $n = 1, 2, \dots$. Considérant encore une fois les suites $\{n_k\}_{k=1, \dots, \infty}$ et $\{r_k\}_{k=1, \dots, \infty}$ où $r_k = k^{1+(1/4)}/\sqrt{n_k}$, on obtient, pour $\eta > 0$ fixé et $\forall v > 0$,

$$P\left(\sup_{x \in [0,1], y \in \mathbb{R}} |F_{n_k}(x, y) - F(x, y)| > \frac{vr_k}{k}\right) \leq C_\eta e^{-(2-\eta)v^2\sqrt{k}} \rightarrow 0 \quad (4.14)$$

lorsque $k \rightarrow \infty$, ce qui signifie que la distance maximale entre $F_{n_k}(x, y)$ et $F(x, y)$ est $o_p(r_k/k)$.

Pour pouvoir nous prononcer cette fois sur la fonction de répartition marginale des X_i , nous émettons aussi l'hypothèse

(A'3): Les vitesses de k et n_k vers l'infini sont telles que $r_k = k^{1+(1/4)}/\sqrt{n_k} = o(1)$ quand $k \rightarrow \infty$.

On se souviendra qu'elle est un gage de la convergence presque sûre (3.20) qui assure que pour tout ω hors d'un ensemble de mesure nulle \mathcal{N} , il existe $k_{0,\omega} > 0$ tel que $\forall k > k_{0,\omega}$

$$\sup_{x \in [0,1]} |F_{n_k}(x) - F(x)| \leq \frac{r_k}{k}.$$

C'est cette convergence qui permet, tant que ω est hors de \mathcal{N} , le recours aux résultats de la section 1.4 sur la proximité des matrices M_{n_k} et M .

Tout comme dans le cas déterministe, il ne reste plus qu'à assujettir les noeuds aux contraintes de régularité habituelles.

(A'4a): les noeuds des vecteurs τ^k deviennent localement uniformes lorsque $k \rightarrow \infty$, c'est-à-dire que $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_{i+1}/\delta_i = 1 \forall i = 1, \dots, k$ avec $\delta_i = \tau_i - \tau_{i-1}$,

(A'4b): si δ_{\min} et δ_{\max} désignent respectivement le minimum et le maximum des δ_i , alors il existe deux constantes positives C_1 et C_2 , indépendantes de k , telles que

$$\frac{C_1}{k} < \delta_{\min} \leq \delta_{\max} < \frac{C_2}{k}.$$

L'estimateur de $m(y|x)$ que l'on considère emprunte la forme de celui de la section précédente, à ceci près que les x_i déterministes sont remplacés par les X_i aléatoires, ce qui donne

$$\hat{m}_{n_k}(y|x) = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}(x, X_i) \mathbf{1}_{(Y_i \leq y)} \quad (4.15)$$

où $K_{n_k}(x, y) = N(x)' M_{n_k}^{-1} N(y)$ et où M_{n_k} est dorénavant aléatoire.

Nous avons, à quelques reprises, utilisé la proximité du noyau et de sa version empirique, notamment dans les corollaires 3.7 et 3.12. Pour étudier (4.15), nous devons préciser davantage les conséquences de cette proximité.

Lemme 4.10

Soient x_0 et x éléments de $[0,1]$. Si $n(x_0, x)$ compte le nombre de noeuds entre x_0 et x , alors sous (A'2) à (A'4), il existe $0 < \gamma < 1$ et deux quantités $O(1)$, \bar{C}_{1k} et $\bar{C}_{2k} > 0$, tels que

$$(i) \quad \left| K_{n_k}(x_0, x) - K(x_0, x) \right| \leq r_k \frac{\bar{C}_{1k}}{\delta_{\min}} (n(x_0, x) + \bar{C}_{2k}) (\gamma + |c_k|)^{n(x_0, x)}$$

$$(ii) \quad \left| \frac{\partial}{\partial x} (K_{n_k}(x_0, x) - K(x_0, x)) \right| = r_k \frac{2\bar{C}_{1k}}{\delta_{\min}^2} (n(x_0, x) + \bar{C}_{2k}) (\gamma + |c_k|)^{n(x_0, x)}$$

où $r_k = k^{1+(1/4)}/\sqrt{n_k}$ et $c_k = o(1)$ quand $k \rightarrow \infty$. Ces résultats tiennent $\forall \omega$ hors de l'ensemble de mesure nulle \mathcal{N} .

Démonstration

La démonstration suit les traces de celle de la propriété 3.2. Désignons par $\alpha, \beta \in \{0, \dots, k\}$ les indices tels que $\tau_\alpha \leq x_0 < \tau_{\alpha+1}$ et $\tau_\beta \leq x < \tau_{\beta+1}$. Selon cette notation, $n(x_0, x) = |\alpha - \beta|$. Par les propriétés locales des B-splines et du fait qu'ils soient compris entre 0 et 1, on peut écrire, en s'aidant du théorème 1.4,

$$\begin{aligned} |K_{n_k}(x_0, x) - K(x_0, x)| &\leq \sum_{i=\alpha+1}^{\alpha+d+1} \sum_{j=\beta+1}^{\beta+d+1} N_i(x_0, \tau^k) |(M_{n_k}^{-1} - M^{-1})_{ij}| N_j(x, \tau^k) \\ &\leq \sum_{i=\alpha+1}^{\alpha+d+1} \sum_{j=\beta+1}^{\beta+d+1} |(M_{n_k}^{-1} - M^{-1})_{ij}| \leq r_k \frac{C_{1k}}{\delta_{\min}} \sum_{i=\alpha+1}^{\alpha+d+1} \sum_{j=\beta+1}^{\beta+d+1} (|i-j| + C_{2k}) (\gamma + |c_k|)^{|i-j|} \end{aligned} \quad (4.16)$$

où C_{1k} et $C_{2k} > 0$ sont $O(1) \forall \omega$ hors de l'ensemble de mesure nulle \mathcal{N} .

Afin de gérer cette double somme, supposons pour l'instant que $\alpha \leq \beta$. Si, d'une part, $\alpha+d+1 < \beta+1$, alors pour les i et j apparaissant dans la double somme, $|i-j| = j-i$ et $0 < \beta - \alpha - d \leq j-i \leq \beta - \alpha + d$. Ainsi, parce que $\gamma + |c_k|$ tombe entre 0 et 1 si k est assez grand et que la double somme contient au plus $(d+1)^2$ éléments,

$$\begin{aligned} &\sum_{i=\alpha+1}^{\alpha+d+1} \sum_{j=\beta+1}^{\beta+d+1} (|i-j| + C_{2k}) (\gamma + |c_k|)^{|i-j|} \\ &\leq (d+1)^2 (\beta - \alpha + d + C_{2k}) (\gamma + |c_k|)^{\beta - \alpha - d} \\ &= (d+1)^2 \frac{(\beta - \alpha + d + C_{2k})}{(\gamma + |c_k|)^d} (\gamma + |c_k|)^{\beta - \alpha} = B_{1k} (\beta - \alpha + \bar{C}_{2k}) (\gamma + |c_k|)^{\beta - \alpha} \end{aligned}$$

où B_{1k} et \bar{C}_{2k} sont $O(1)$. On retrouve précisément cette expression si, d'autre part, $\beta+1 \leq \alpha+d+1$ car les i et j impliqués dans la double somme satisfont alors $0 \leq |i-j| \leq \beta-\alpha+d$ d'où

$$\begin{aligned} \sum_{i=\alpha+1}^{\alpha+d+1} \sum_{j=\beta+1}^{\beta+d+1} (|i-j| + C_{2k}) (\gamma + |c_k|)^{|i-j|} &\leq (d+1)^2 (\beta - \alpha + d + C_{2k}) \\ &= (d+1)^2 (\beta - \alpha + d + C_{2k}) \frac{(\gamma + |c_k|)^{\beta-\alpha}}{(\gamma + |c_k|)^{\beta-\alpha}} \\ &\leq (d+1)^2 \frac{(\beta - \alpha + d + C_{2k})}{(\gamma + |c_k|)^d} (\gamma + |c_k|)^{\beta-\alpha} = B_{1k} (\beta - \alpha + \bar{C}_{2k}) (\gamma + |c_k|)^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

Puisqu'on aurait très bien pu faire l'exercice avec $\alpha \geq \beta$ et que cela aurait mené au même résultat par symétrie, on peut prétendre que la double somme de (4.16) est bornée par $B_{1k} (|\alpha - \beta| + \bar{C}_{2k}) (\gamma + |c_k|)^{|\alpha-\beta|}$ d'où,

$$\begin{aligned} |K_{n_k}(x_0, x) - K(x_0, x)| &\leq r_k \frac{C_{1k}}{\delta_{\min}} B_{1k} (|\alpha - \beta| + \bar{C}_{2k}) (\gamma + |c_k|)^{|\alpha-\beta|} \\ &= r_k \frac{\bar{C}_{1k}}{\delta_{\min}} (n(x_0, x) + \bar{C}_{2k}) (\gamma + |c_k|)^{n(x_0, x)} \end{aligned}$$

avec $\bar{C}_{1k} = O(1)$.

On démontre (ii) de façon similaire. La seule distinction réside dans la dérivée. Celle-ci n'affecte que le vecteur de B-splines $N(x)$ et on a vu en (1.6) que la dérivée du B-spline $N_j(x, \tau^k)$ est majorée par $2/\delta_{\min} \forall j = 1, \dots, k+d+1$ et $\forall x \in [0, 1]$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial x} (K_{n_k}(x_0, x) - K(x_0, x)) \right| &\leq \sum_{i=\alpha+1}^{\alpha+d+1} \sum_{j=\beta+1}^{\beta+d+1} N_i(x_0, \tau^k) |(M_{n_k}^{-1} - M^{-1})_{ij}| \left| \frac{\partial N_j(x, \tau^k)}{\partial x} \right| \\ &\leq \frac{2}{\delta_{\min}} \sum_{i=\alpha+1}^{\alpha+d+1} \sum_{j=\beta+1}^{\beta+d+1} |(M_{n_k}^{-1} - M^{-1})_{ij}| \leq r_k \frac{2\bar{C}_{1k}}{\delta_{\min}^2} (n(x_0, x) + \bar{C}_{2k}) (\gamma + |c_k|)^{n(x_0, x)}. \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

Théorème 4.11

Pour $y \in \mathbb{R}$ et $x, x_0 \in [0,1]$, soit $v(y|x) = E((1_{(Y \leq y)} - m(y|x_0))^2 | X = x)$. Soit aussi $\hat{m}_{n_k}(y|x_0)$ l'estimateur (4.15). Si on contraint k et n_k aux restrictions $k^4/n_k = O(1)$ (ce qui assure incidemment que (A'3) est vraie) et $n_k = O(k^{2(d+1)+1-\varepsilon})$ pour un certain $0 < \varepsilon < 1$, alors sous (A'1) à (A'4),

$$\frac{\sqrt{n_k}(\hat{m}_{n_k}(y|x_0) - m(y|x_0))}{\sqrt{v(y|x_0)\Xi_k}} \rightarrow N(0,1)$$

lorsque $k \rightarrow \infty$ où $\Xi_k = \int_0^1 K^2(x_0, x)\lambda(x)dx$.

Démonstration

Etant donné que $n_k^{-1} \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}(x_0, X_i) = 1$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \hat{m}_{n_k}(y|x_0) - m(y|x_0) &= \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}(x_0, X_i) (1_{(Y_i \leq y)} - m(y|x_0)) \\ &= \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} K(x_0, X_i) (1_{(Y_i \leq y)} - m(y|x_0)) + \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} (K_{n_k}(x_0, X_i) - K(x_0, X_i)) (1_{(Y_i \leq y)} - m(y|x_0)) \\ &= S_{1n_k} + S_{2n_k}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

La somme S_{1n_k} se traite via le lemme 4.7. En remarquant que les variables aléatoires qui composent S_{1n_k} sont i.i.d. et en écrivant $\lambda(x,y) = \lambda(y|x)\lambda(x)$, on démontre que

$$\begin{aligned} E(S_{1n_k}) &= E\left(K(x_0, X_1)(1_{(Y_1 \leq y)} - m(y|x_0))\right) \\ &= \int_0^1 K(x_0, x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} (1_{(z \leq y)} - m(y|x_0)) \lambda(z|x) dz \right) \lambda(x) dx \\ &= \int_0^1 K(x_0, x) (m(y|x) - m(y|x_0)) \lambda(x) dx. \end{aligned}$$

On a fait face à une quantité similaire en (4.10) et on récupère ici le raisonnement dont on avait alors usé. Essentiellement, il s'agit de développer en série de Taylor la différence $m(y|x) - m(y|x_0)$, ce qui est permis parce que $m(y|x)$ est $(d+1)$ fois continûment dérivable, d'utiliser la reproductibilité du noyau $K(x_0, x)$ et de le borner par $C_d \gamma^{n(x_0, x)} / \delta_{\min}$ où $\gamma \in (0, 1)$ et où C_d est une constante qui ne dépend que du degré. En s'adonnant à cet exercice, on trouve un point ξ_0 , dépendant de y et situé entre x et x_0 , tel que

$$\begin{aligned} |E(S_{1n_k})| &= \frac{1}{(d+1)!} \left| \int_0^1 K(x_0, x) (m^{(d+1)}(y|\xi_0)(x-x_0)^{d+1}) \lambda(x) dx \right| \\ &\leq \frac{C_1}{(d+1)!} \frac{C_d}{\delta_{\min}} \delta_{\max}^{d+1} \int_0^1 \gamma^{n(x_0, x)} (n(x_0, x) + 1)^{d+1} \lambda(x) dx. \end{aligned}$$

Par le lemme 2.3, le maximum sur $[0, 1]$ de l'intégrale est borné par $B \lambda_{\max} \delta_{\max}$ pour une constante B . Par (A'4) et parce qu'on suppose que $n_k = O(k^{2(d+1)+1-\varepsilon})$ pour un certain $0 < \varepsilon < 1$, on conclut que

$$\max_{x_0 \in [0, 1]} \sqrt{\frac{n_k}{k}} |E(S_{1n_k})| = \sqrt{\frac{n_k}{k}} O(\delta_{\max}^{d+1}) = o(1) \quad (4.18)$$

quand $k \rightarrow \infty$.

Quant à la variance,

$$\begin{aligned} \text{Var}(S_{1n_k}) &= \frac{1}{n_k} \text{Var}\left(K(x_0, X_1) (1_{(Y_1 \leq y)} - m(y|x_0))\right) \\ &= \frac{1}{n_k} \int_0^1 K^2(x_0, x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} (1_{(z \leq y)} - m(y|x_0))^2 \lambda(z|x) dz \right) \lambda(x) dx - \frac{1}{n_k} (E(S_{1n_k}))^2 \\ &= \frac{1}{n_k} \int_0^1 K^2(x_0, x) v(y|x) \lambda(x) dx + o\left(\frac{k}{n_k^2}\right). \end{aligned}$$

En développant le carré, $v(y|x) = m(y|x) - 2 m(y|x_0) m(y|x) + m(y|x_0)^2$ et parce que $m(y|x)$ est une probabilité supposée Lipschitz d'ordre 1 en x ,

$$\begin{aligned} |v(y|x) - v(y|x_0)| &= |(m(y|x) - m(y|x_0))(1 - 2m(y|x_0))| \\ &\leq |(m(y|x) - m(y|x_0))| \leq M_y (n(x_0, x) + 1) \delta_{\max}. \end{aligned}$$

Ainsi, quand $k \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \max_{x_0 \in [0,1]} \left| \int_0^1 K^2(x_0, x) v(y|x) \lambda(x) dx - v(y|x_0) \Xi_k \right| \\ \leq \left(\frac{C_d}{\delta_{\min}} \right)^2 M_y \delta_{\max} \max_{x_0 \in [0,1]} \int_0^1 \gamma^{2n(x_0, x)} (n(x_0, x) + 1) \lambda(x) dx = O(1) \end{aligned}$$

par la propriété 3.2 et le lemme 2.3. Etant donné qu'une quantité $O(1)$ est aussi $o(k)$, on conclut que pour $v_k = \max_{x_0 \in [0,1]} |v_k(x_0)| = o(k)$,

$$n_k \text{Var}(S_{1n_k}) = v(y|x_0) \Xi_k + v_k(x_0). \quad (4.19)$$

Nous pouvons maintenant établir la normalité asymptotique de S_{1n_k} en montrant que les variables aléatoires

$$W_{ki} = \frac{n_k^{-1} K(x_0, X_i) (1_{(Y_i \leq y)} - m(y|x_0))}{\sqrt{\text{Var}(S_{1n_k})}}$$

$i = 1, \dots, n_k$, satisfont les conditions du lemme 4.7. Elles sont indépendantes pour k fixe et de variances sommant à 1. Elles sont en outre bornées par des quantités qui tendent vers 0 à mesure que k augmente comme en témoigne la convergence suivante,

$$\max_{1 \leq i \leq n_k} |W_{ki}| \leq \frac{\max_{1 \leq i \leq n_k} n_k^{-1} |K(x_0, X_i)|}{\sqrt{n_k^{-1} (v(y|x_0) \Xi_k + v_k(x_0))}} = O\left(\sqrt{\frac{k}{n_k}}\right) \rightarrow 0,$$

qu'on déduit du fait que le numérateur est $O(k/n_k)$ et que Ξ_k/k est coïncé entre deux constantes. Par Liapounov, on a donc

$$\sum_{i=1}^{n_k} (W_{ki} - E(W_{ki})) = \frac{S_{1n_k} - E(S_{1n_k})}{\sqrt{\text{Var}(S_{1n_k})}} \rightarrow N(0,1),$$

une convergence pouvant être raffinée sous la forme

$$\frac{\sqrt{n_k} S_{1n_k}}{\sqrt{v(y|x_0)\Xi_k}} \rightarrow N(0,1)$$

en combinant au théorème de Slutsky les équations (4.18) et (4.19).

Entamons maintenant l'étude de la seconde somme S_{2n_k} en précisant que pour alléger la notation, les B_{1k}, \dots, B_{3k} et b_{1k}, \dots, b_{4k} qui y apparaissent représentent des quantités $O(1)$ et $o_p(1)$ respectivement. Décomposons d'abord S_{2n_k} de la manière suivante,

$$\begin{aligned} S_{2n_k} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 (K_{n_k}(x_0, x) - K(x_0, x)) (1_{(z \leq y)} - m(y|x_0)) dF_{n_k}(x, z) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 (K_{n_k}(x_0, x) - K(x_0, x)) (1_{(z \leq y)} - m(y|x_0)) \lambda(x, z) dx dz \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 (K_{n_k}(x_0, x) - K(x_0, x)) (1_{(z \leq y)} - m(y|x_0)) d(F_{n_k}(x, z) - F(x, z)) \\ &= \int_0^1 (K_{n_k}(x_0, x) - K(x_0, x)) \left(\int_{-\infty}^{\infty} (1_{(z \leq y)} - m(y|x_0)) \lambda(z|x) dz \right) \lambda(x) dx \\ &\quad + (1 - m(y|x_0)) \int_0^1 (K_{n_k}(x_0, x) - K(x_0, x)) \int_{-\infty}^y d(F_{n_k}(x, z) - F(x, z)) \\ &\quad - m(y|x_0) \int_0^1 (K_{n_k}(x_0, x) - K(x_0, x)) \int_y^{\infty} d(F_{n_k}(x, z) - F(x, z)) \\ &= I_{1k} + (1 - m(y|x_0)) I_{2k} - m(y|x_0) I_{3k}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

On se donne pour mission de démontrer que $S_{2n_k} = o_p(\sqrt{k/n_k})$. On commence par la convergence presque sûre de $\sqrt{n_k/k}|I_{1k}|$ vers 0, et puisque la probabilité $m(y|x_0)$ oscille entre 0 et 1, on complète la démonstration en s'assurant que les intégrales I_{2k} et I_{3k} sont toutes deux d'ordre $o_p(\sqrt{k/n_k})$.

La convergence presque sûre de $\sqrt{n_k/k}|I_{1k}|$ quand $k \rightarrow \infty$ repose principalement sur le lemme 4.10 et sur le fait que $m(y|x)$ est Lipschitz d'ordre 1. En effet, une combinaison de ces deux éléments permet d'écrire, $\forall \omega$ hors de n ,

$$\begin{aligned} |I_{1k}| &= \left| \int_0^1 (K_{n_k}(x_0, x) - K(x_0, x))(m(y|x) - m(y|x_0))\lambda(x)dx \right| \\ &\leq r_k \frac{\bar{C}_{1k}}{\delta_{\min}} M_y \delta_{\max} \int_0^1 (\gamma + |c_k|)^{n(x_0, x)} (n(x_0, x) + \bar{C}_{2k})(n(x_0, x) + 1)\lambda(x)dx \\ &\leq r_k B_{1k} \int_0^1 (\gamma + |c_k|)^{n(x_0, x)} (n(x_0, x) + B_{2k})^2 \lambda(x)dx \leq B_{3k} \frac{r_k}{k} \end{aligned}$$

parce que le maximum sur $[0,1]$ de l'intégrale est $O(\delta_{\max})$ par le lemme 2.3. Comme on a posé $r_k = k^{1+(1/4)}/\sqrt{n_k}$, on a bien, lorsque $k \rightarrow \infty$,

$$\sqrt{\frac{n_k}{k}}|I_{1k}| \leq B_{3k} \sqrt{\frac{n_k}{k}} \frac{r_k}{k} = B_{3k} \frac{k^{1/4}}{\sqrt{k}} = o(1)$$

presque sûrement et cette convergence tient uniformément pour tout x_0 dans $[0,1]$.

Pour ce qui est de I_{2k} , remarquons que $\int_{-\infty}^y d(F_{n_k}(x, z) - F(x, z))$ est une fonction de x . En définissant $H_{1n_k}(x) = \int_0^x \int_{-\infty}^y d(F_{n_k}(u, z) - F(u, z)) = F_{n_k}(x, y) - F(x, y)$ et en recourant au théorème d'intégration par parties de l'annexe A,

$$I_{2k} = (K_{n_k}(x_0, x) - K(x_0, x))H_{1n_k}(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x} (K_{n_k}(x_0, x) - K(x_0, x)) \right) H_{1n_k}(x) dx$$

$$= (K_{n_k}(x_0, 1) - K(x_0, 1))H_{1n_k}(1) - \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x} (K_{n_k}(x_0, x) - K(x_0, x)) \right) H_{1n_k}(x) dx$$

car $H_{1n_k}(0)=0$. Pour majorer cette expression, on fait appel, d'une part, au lemme 4.10 duquel on déduit entre autres que la distance maximale séparant $K_{n_k}(x_0, 1)$ et $K(x_0, 1)$ est $O(r_k k)$ presque sûrement et, d'autre part, à (4.14) qui assure que le maximum sur $[0, 1]$ de $H_{1n_k}(x)$ est d'ordre $o_p(r_k/k)$. Précisément donc,

$$\begin{aligned} |I_{2k}| &\leq |K_{n_k}(x_0, 1) - K(x_0, 1)| |H_{1n_k}(1)| \\ &\quad + \max_{x \in [0, 1]} |H_{1n_k}(x)| \frac{r_k 2\bar{C}_{1k}}{\delta_{\min}^2} \int_0^1 (n(x_0, x) + \bar{C}_{2k}) (\gamma + |c_k|)^{n(x_0, x)} dx \\ &= b_{1k} r_k^2 + b_{2k} \frac{r_k^2}{k} \frac{\delta_{\max}}{\delta_{\min}^2} = b_{3k} r_k^2 \end{aligned}$$

puisque l'intégrale est $O(\delta_{\max})$. Etant donné le choix de r_k et la croissance de k vers l'infini qui est freinée par la restriction $k^4/n_k = O(1)$, $\sqrt{n_k/k} |I_{2k}| = o_p(k^2/\sqrt{n_k})$, c'est-à-dire $o_p(1)$, uniformément pour x_0 dans $[0, 1]$.

Comme on s'en doute, un traitement similaire peut être réservé à I_{3k} . Posant cette fois

$$\begin{aligned} H_{2n_k}(x) &= \int_0^x \int_y^\infty d(F_{n_k}(u, z) - F(u, z)) \\ &= \int_0^x \int_{-\infty}^\infty d(F_{n_k}(u, z) - F(u, z)) - \int_0^x \int_{-\infty}^y d(F_{n_k}(u, z) - F(u, z)) \\ &= F_{n_k}(x) - F(x) - (F_{n_k}(x, y) - F(x, y)), \end{aligned}$$

une fonction qui est également nulle lorsqu'évaluée en 0 et $o_p(r_k/k)$ sur $[0, 1]$, une répétition de l'argumentation précédente donne

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{n_k}{k}}|I_{3k}| &= \sqrt{\frac{n_k}{k}} \left| \left(K_{n_k}(x_0, 1) - K(x_0, 1) \right) H_{2n_k}(1) - \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(K_{n_k}(x_0, x) - K(x_0, x) \right) \right) H_{2n_k}(x) dx \right| \\ &= \sqrt{\frac{n_k}{k}} b_{4k} r_k^2 = o_p(1)\end{aligned}$$

uniformément sur $[0, 1]$.

Tel qu'annoncé donc, la somme S_{2n_k} qui résulte de I_{1k} , I_{2k} et I_{3k} est bien $o_p(\sqrt{k/n_k})$ quand $k \rightarrow \infty$.

Si on récapitule, la statistique qui fait l'objet du théorème s'exprime sous la forme

$$\frac{\sqrt{n_k} (\hat{m}_{n_k}(y|x_0) - m(y|x_0))}{\sqrt{v(y|x_0)\Xi_k}} = \frac{\sqrt{n_k} S_{1n_k}}{\sqrt{v(y|x_0)\Xi_k}} + \frac{\sqrt{n_k} S_{2n_k}}{\sqrt{v(y|x_0)\Xi_k}}$$

et le théorème de Slutsky est garant du résultat puisque le premier terme de la somme converge en loi vers une normale $N(0, 1)$ quand $k \rightarrow \infty$ alors que le second est $o_p(1)$ du fait que $S_{2n_k} = o_p(\sqrt{k/n_k})$ et que Ξ_k/k peut être borné indépendamment de k .

CQFD

Comme dans le cas déterministe, on énonce un corollaire qui rend le théorème utilisable en pratique.

Corollaire 4.12

Soit $\hat{v}_{n_k}(y|x_0) = \hat{m}_{n_k}(y|x_0)(1 - \hat{m}_{n_k}(y|x_0))$. Sous les conditions du théorème 4.11, lorsque $k \rightarrow \infty$,

$$\frac{\sqrt{n_k} (\hat{m}_{n_k}(y|x_0) - m(y|x_0))}{\sqrt{\hat{v}_{n_k}(y|x_0) n_k^{-1} \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}^2(x_0, X_i)}} \rightarrow N(0, 1)$$

Démonstration

Les quantités apparaissant au dénominateur sont légitimées du fait que $v(y|x_0)/\hat{v}_{n_k}(y|x_0)$ tend vers 1 en probabilité pour les mêmes raisons que dans le cas déterministe et aussi parce que le ratio de Ξ_k sur sa version empirique converge vers 1 presque sûrement tel que démontré à la fin de la section 3.2.

CQFD

Chapitre 5

Conclusion

Nous avons mentionné au chapitre 1 que malgré leurs qualités en tant qu'objets d'approximation, les propriétés statistiques des splines n'ont curieusement pas été explorées de façon très poussée, laissant ainsi plusieurs questions sans réponse. Ce travail a été entrepris avec le souci de combler partiellement ces lacunes en exhibant le comportement asymptotique des splines lorsqu'utilisés dans des contextes statistiques. Dans cette optique, nous avons entre autres fait la preuve que les estimateurs splines étaient asymptotiquement de loi normale et qu'ils avaient sur les estimateurs du noyau l'avantage de ne pas présenter d'effets de bords, c'est-à-dire de ne requérir aucun ajustement aux frontières du domaine d'intérêt. Nous avons également souligné la simplicité de leur forme et le fait qu'une fois les noeuds choisis, leur utilisation transite par les méthodes classiques de régression paramétrique.

Notre travail ne clôt évidemment pas la question de l'emploi des splines en statistique. Nous espérons cependant qu'il pourra servir de point de départ à l'exploration de nouvelles voies et possibilités en estimation non paramétrique. Dans ce dernier chapitre, nous allons illustrer ce qu'il est possible de faire en tablant sur les résultats déjà engrangés et présenter du même coup quelques pistes pour des recherches futures.

5.1 Noeuds optimaux

Dans cette thèse, il a été très peu question du choix des noeuds, bien qu'il s'agisse d'une question importante. Il existe des règles *ad hoc* décrites dans Eubank (1988) qui peuvent servir de guide. Certains auteurs (Agarwal et

Studden (1980), Jupp (1978)) ont élaboré des algorithmes pour choisir les noeuds de façon automatique, mais en pratique, ceux-ci ne se révèlent pas d'implantation facile. Le but de cette thèse n'était pas de proposer un tel algorithme, mais on peut penser utiliser les résultats qui y figurent pour le faire.

En effet, comme première utilité des théorèmes de normalité des chapitres 3 et 4, on pense d'emblée à l'obtention d'intervalles de confiance et, par ricochet, de tests d'hypothèses portant sur les fonctions estimées. Il est cependant possible d'en faire d'autres usages. Ces théorèmes nous amènent en effet à parler de biais et de variance, deux quantités qui se marient pour former des indices de qualité d'estimation comme la fonction de risque (FR) ou la fonction de risque intégrée (FRI). Pour un estimateur $\hat{f}(\cdot)$ d'une fonction $f(\cdot)$,

$$FR(z) = \left(\text{Biais}(\hat{f}(z)) \right)^2 + \text{Variance}(\hat{f}(z)) \text{ et } FRI = \int_0^1 (FR(z)) dF(z).$$

L'examen des propriétés asymptotiques d'un estimateur peut passer par ces indices qui servent aussi de base de comparaison dans le cas où plusieurs estimateurs sont disponibles.

Dans le cas de l'estimateur spline de la régression, ces critères de qualité dépendent des noeuds et choisir ceux-ci de manière à les optimiser est l'astucieuse idée qu'ont eue Agarwal et Studden (1980). Nous proposons ici une façon de l'exploiter davantage.

Retournons donc fureter à la fin de la section 3.1, et plus précisément dans le voisinage de (3.19), où la FRI de l'estimateur spline est présentée. Par souci de clarté, rappelons qu'elle s'exprime sous la forme

$$FRI \approx \frac{1}{k^{2(d+1)}} \frac{|B_{2(d+1)}|}{(2(d+1))!} \int_0^1 \frac{(f^{(d+1)}(z))^2}{p(z)^{2(d+1)}} dF(z) + \frac{\sigma^2(k+d+1)}{n_k}$$

et qu'elle converge vers 0 à la vitesse optimale $O(n_k^{-2(d+1)/(2(d+1)+1)})$ si n_k tend vers l'infini à la vitesse maximale $O(k^{2(d+1)+1})$. En définissant la FRI d'une façon légèrement différente de la nôtre, Agarwal et Studden arrivent à un résultat comparable. Ils n'abordent pas le problème de la distribution asymptotique de l'estimateur comme nous l'avons fait, mais par un calcul variationnel, ils obtiennent l'expression de la densité optimale $p(\cdot)$ pour générer les noeuds ainsi que le nombre optimal de noeuds, choisis tous deux pour minimiser la FRI. Leur optimisation n'est cependant pas immédiatement applicable à notre cas car dans leur définition de la FRI, la fonction de risque est intégrée par rapport à une densité différente de $dF(z)$, ce qui se traduit par un terme de variance où intervient $p(\cdot)$. Dans l'expression de notre FRI (et dans celle d'Agarwal et Studden si on substitue $dF(z)$ à leur densité d'intégration), $p(\cdot)$ n'apparaît que dans le terme de biais qui est minimisé si

$$p(z) = p_{opt}(z) = \frac{(f^{(d+1)}(z))^{2/(2(d+1)+1)}}{\int_0^1 (f^{(d+1)}(z))^{2/(2(d+1)+1)} dF(z)} \quad (5.1)$$

(Barrow et Smith (1978)). En minimisant par rapport à k la FRI où $p(\cdot)$ est remplacée par $p_{opt}(\cdot)$, il est facile de déduire que le nombre optimal de noeuds est donné par

$$k_{opt} = \left(\frac{2(d+1)}{\sigma^2} \frac{|B_{2(d+1)}|}{(2(d+1))!} \right)^{1/(2(d+1)+1)} \left(\int_0^1 (f^{(d+1)}(z))^{2/(2(d+1)+1)} dF(z) \right) n_k^{1/(2(d+1)+1)}. \quad (5.2)$$

Un peu à la manière d'Agarwal et Studden (1980), ces développements pourraient donner naissance à un algorithme qui estimerait la $(d+1)$ -ième dérivée de $f(\cdot)$, l'insérerait dans (5.1) et utiliserait la fonction ainsi créée pour

généraliser les noeuds. Une recherche future pourrait documenter l'efficacité de cette approche.

On peut pousser cette idée plus loin en répétant l'exercice, mais cette fois avec le dessein de déterminer la densité limite optimale et le nombre optimal de noeuds pour l'estimation des dérivées de la fonction de régression et/ou de la fonction de répartition conditionnelle (chapitre 4). Il faut pour cela obtenir la FRI des estimateurs de ces fonctions et y appliquer un calcul variationnel.

A titre d'exemple, la FRI de l'estimateur de la l -ième dérivée de la fonction de régression a été vue en (4.7) et est donnée par

$$FRI \approx \frac{1}{k^{2(d+1-l)}} \frac{|B_{2(d+1-l)}|}{(2(d+1-l))!} \int_0^1 \frac{(f^{(d+1)}(z))^2}{p(z)^{2(d+1-l)}} dF(z) + \frac{\sigma^2}{n_k} \text{tr}(M^{-1}M^l),$$

$l = 1, \dots, d-1$, où $M^l = \int_0^1 (D^l N(x))(D^l N(x))' dF(x)$. Le calcul variationnel visant à déterminer la densité optimale $p(\cdot)$ pour générer les noeuds ne promet pas d'être aussi immédiat que pour l'estimateur spline parce que le terme de variance de la FRI n'est plus aussi simple et dépend de la trace de $M^{-1}M^l$. Il est cependant légitime de penser qu'avec un peu de travail, la manière avec laquelle $p(\cdot)$ y intervient peut être précisée et la FRI optimisée en conséquence. Ceci dit, la section 4.1.1 nous a tout de même appris que ce terme de variance est d'ordre $O(k^{2l+1}/n_k)$, la minimisation de la FRI par rapport à k indique donc quant à elle que le nombre de noeuds optimal est, tout comme (5.2), $O(n_k^{1/(2(d+1)+1)})$.

Nous ne poursuivrons pas plus loin cette discussion, mais nous ne quitterons pas cette section sans laisser entrevoir une des possibilités qu'elle ouvre. Une fois déterminées les quantités optimales qui minimisent la FRI,

une approche itérative comme celle proposée par Agarwal et Studden peut en effet être envisagée dans le but de mettre sur pieds une procédure qui laisse aux données le soin de choisir le nombre de noeuds et leur emplacement. Les détails de cet algorithme et de son implantation pour le cas de la régression se trouvent dans Agarwal et Sudden (1980).

5.2 Estimation de la fonction de répartition conjointe

Dans le contexte stochastique où l'on doit composer avec le couple de variables aléatoires (X,Y) , l'examen de la courbe de régression nous informe du lien entre X et Y , mais une compréhension encore plus fine du comportement bivarié de (X,Y) est possible si on peut, par dessus le marché, disposer d'un estimateur de la fonction de répartition conjointe $F(x,y)$, laquelle résulte du produit de $F(y|x)$ (qu'on a noté $m(y|x)$ au chapitre 4) et de la fonction de répartition marginale $F(x)$.

Un estimateur du premier terme, $\hat{m}_{n_k}(y|x)$, a été présenté en (4.15). Pour $F(x)$, faisons un détour par Huang et Studden (1993b) qui proposent d'estimer la densité marginale $\lambda(x) = F'(x)$ par

$$\hat{\lambda}_{n_k}(x) = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} N(x)' \tilde{M}^{-1} N(X_i)$$

où $\tilde{M} = \int_0^1 N(x)' N(x) dx$ se distingue de la matrice habituelle M par la densité d'intégration qui est uniforme. Un estimateur naturel de $F(x)$ s'obtient donc en intégrant $\hat{\lambda}_{n_k}(\cdot)$ sur $[0,x]$ et sa combinaison avec $\hat{m}_{n_k}(y|x)$ donne un estimateur de la fonction de répartition conjointe.

A la lumière du travail déjà accompli pour démontrer que $\hat{m}_{n_k}(y|x)$ est asymptotiquement normal et sans biais, il n'est pas utopique de penser qu'il

en sera de même de l'estimateur de $F(x)$ sous des conditions de régularité et moyennant un contrôle de la croissance du nombre de points et de noeuds vers l'infini. En fait, puisque la forme de l'estimateur

$$\hat{F}_{n_k}(x) = \int_0^x \hat{\lambda}_{n_k}(z) dz = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} \left(\int_0^x N(z)' dz \right) \tilde{M}^{-1} N(X_i)$$

rappelle celle de $\hat{m}_{n_k}(y|x)$ et qu'on peut espérer caractériser le vecteur $\int_0^x N(z)' dz$ sans problème en recourant aux propriétés des B-splines, l'étude de $\hat{F}_{n_k}(x)$ devrait suivre la même tangente que celle de $\hat{m}_{n_k}(y|x)$.

Cette discussion suggère qu'en misant sur le travail de la section 4.2.2, l'obtention d'un estimateur asymptotiquement normal et sans biais pour la fonction de répartition conjointe $F(x,y)$ ne devrait pas représenter un défi très grand et exiger des notions autres que celles déjà introduites.

5.3 Fonctionnelles de la fonction de répartition conditionnelle

Sans quitter le contexte stochastique, observons que la fonction de répartition conditionnelle $m(y|x)$ qu'on a rencontrée et estimée au chapitre 4 n'est pas toujours pertinente en soi, c'est-à-dire qu'il y a des situations où on s'intéresse davantage à une fonctionnelle de $m(y|x)$ qu'à $m(y|x)$ elle-même. On peut citer l'exemple de la fonctionnelle $\mu(F) = \int_0^1 y dF(y)$ qui, appliquée à $m(y|x)$ mène à l'espérance conditionnelle $E(Y|X=x) = f_Y(x)$, alors qu'utilisée en conjonction avec $\hat{m}_{n_k}(y|x)$ donne plutôt l'estimateur $s(x, \bar{\theta}_{n_k})$ de $f_Y(x)$ vu à la section 3.2:

$$\begin{aligned} \mu(\hat{m}_{n_k}(y|x)) &= \int_0^1 y d\hat{m}_{n_k}(y|x) = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} \int_0^1 y d(K_{n_k}(x, X_i) 1_{(Y_i \leq y)}) \\ &= \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}(x, X_i) \int_0^1 y 1_{(Y_i = y)} dy = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} K_{n_k}(x, X_i) Y_i = s(x, \bar{\theta}_{n_k}). \end{aligned}$$

Bien que le comportement asymptotique de $s(x, \bar{\theta}_{n_k})$ ait été étudié indépendamment de $\hat{m}_{n_k}(y|x)$, l'égalité ci-haut suggère qu'on aurait également pu l'examiner via la fonctionnelle $\mu(F)$ et les propriétés de $\hat{m}_{n_k}(y|x)$.

Cet exemple laisse supposer qu'il est possible d'étudier des quantités comme la médiane, le quantile d'ordre α ou un estimateur robuste du centre de la distribution en passant par une écriture qui fait intervenir des fonctionnelles et en exploitant les propriétés asymptotiques de $\hat{m}_{n_k}(y|x)$. Précisément, notons $T(m(y|x))$ la fonctionnelle qui nous intéresse et assumons que son estimateur, $T(\hat{m}_{n_k}(y|x))$, admette un développement à la manière de Fernholtz (1983), c'est-à-dire que

$$T(\hat{m}_{n_k}(y|x)) = T(m(y|x)) + T'(\hat{m}_{n_k}(y|x) - m(y|x)) + r(x)$$

pour un certain reste $r(x)$. Dans bien des cas (voir Serfling (1980)), la dérivée $T'(\cdot)$ est une fonctionnelle linéaire permettant l'écriture

$$T'(\hat{m}_{n_k}(y|x) - m(y|x)) = \sum_{i=1}^{n_k} K(x, X_i) \varphi(Y_i, x)$$

pour certaines fonctions $\varphi(\cdot, \cdot)$; c'est le cas par exemple du quantile d'ordre α pour lequel

$$\varphi(Y, x) = \frac{\alpha - 1_{(Y \leq m^{-1}(\alpha|x))}}{\lambda(m^{-1}(\alpha|x)|x)}$$

(Ducharme et al. (1995)). Si les fonctions $\varphi(\cdot, \cdot)$ se comportent bien, comme dans ce dernier exemple, et si $\sqrt{n_k}r(x)$ est négligeable, alors le théorème limite central assurera la normalité asymptotique de $\sqrt{n_k}(T(\hat{m}_{n_k}(y|x)) - T(m(y|x)))$. La convergence vers 0 du reste $\sqrt{n_k}r(x)$ repose cependant sur un principe d'invariance, c'est-à-dire sur la convergence globale de $\sqrt{n_k}(\hat{m}_{n_k}(y|x) - m(y|x))$ vers un

processus stochastique limite. La normalité asymptotique qui a été engrangée au chapitre 4 constitue le premier pas pour démontrer ce type de convergence, mais il doit être suivi de l'équicontinuité (Pollard (1984)) qui n'est pas abordée dans ce travail.

5.4 Conclusion

Ce travail a été entrepris avec le dessein de légitimer, baliser et promouvoir le recours aux splines dans des contextes de régression non paramétrique. Ainsi avons-nous démontré que dans le contexte déterministe où l'expérimentateur exerce un certain contrôle sur ses observations, de même que dans le contexte stochastique où il observe plutôt des couples de variables aléatoires, l'estimateur spline obtenu par la méthode des moindres carrés est asymptotiquement normal et sans biais pour la fonction inconnue qui soutend les observations. Ces résultats reposent sur des conditions de régularité que nous avons tenté de garder aussi peu restrictives que possible. Dans la même veine, nous avons aussi fait la preuve qu'il suffit de dériver l'estimateur spline pour obtenir des estimateurs tout à fait convenables des dérivées de la fonction inconnue. Nous avons enfin abordé le problème de l'estimation de la fonction de répartition conditionnelle et proposé l'emploi des splines pour construire un estimateur doté, encore une fois, de remarquables propriétés asymptotiques.

Jusqu'à présent, les splines de régression faisaient un peu figure de parent pauvre parmi les méthodes de régression non paramétrique parce que leur théorie lacunaire ne mettait pas en valeur leurs attraits et rendait hasardeuse leur utilisation comme outils d'inférence statistique. Avant Huang et Studden (1993b) par exemple, on ne savait pas comment estimer des densités

autrement que par histospline (un lissage de la fonction de répartition empirique). Il reste encore plusieurs questions en suspens, mais nous espérons avoir suffisamment déblayé le terrain pour accroître la présence des splines de régression dans les développements théoriques et favoriser leur utilisation dans les problèmes pratiques.

Bibliographie

- Agarwal, G.G. et Studden, W.J. (1980): Asymptotic Integrated Mean Square Error using Least-Squares and Bias Minimizing Splines. *Ann. Statist.* **8**, p.1307-1325.
- Barrow, D.L. et Smith, P.W. (1978): Asymptotic Properties of Best $L_2[0,1]$ Approximation by Splines with Variable Knots. *Quart. Appl. Math.* **36**, p.293-304.
- Barrow, D.L. et Smith, P.W. (1979): Efficient L_2 Approximation by Splines. *Numer. Math.* **33**, p.101-114.
- Chung, K.L. (1974): *A Course in Probability Theory*. 2e édition. Academic Press. New-York.
- Cox, D.D. (1984): Gaussian Approximation of Smoothing Splines. Tech. Rep. **743**, Dept. of Statist., Univ. of Wisconsin-Madison.
- DeBoor, C. (1973): The Quasi-Interpolant as a Tool in Elementary Polynomial Spline Theory. In *Approximation Theory* (G.G. Lorentz, éd.). Academic Press, New-York.
- DeBoor, C. (1976): A Bound on the L_∞ -Norm and L_2 -Approximation by Splines in Terms of a Global Mesh Ratio. *Math. Comput.* **30**, p.765-771.
- DeBoor, C. (1978): *A Practical Guide to Splines*. Springer-Verlag. New-York.
- Donoho, D.L. et Johnstone, I.M. (1994): Ideal Spatial Adaptation by Wavelet Shrinkage. *Biometrika* **81**, p.425-455.
- Ducharme, G.R., Gannoun, A., Guertin, M.C. et Jéquier, J.C. (1995): Reference Values Obtained by Kernel-Based Estimation of Quantile Regressions. *Biometrics* **51**, p.1105-1116.
- Eubank, R.L. (1984): Approximate Regression Models and Splines. *Commun. Statist. A* **13**, p.433-484.

Eubank, R.L. (1988): *Spline Smoothing and Nonparametric Regression*. Marcel Dekker. New-York.

Fan, J. et Gijbels, I. (1996): *Local Polynomial Modeling and its Applications*. Chapman & Hall. London.

Fernholz, L.T. (1983): *von Mises Calculus for Statistical Functional*. Lecture Notes in Statistics #19. Springer-Verlag. New-York.

Gasser, T. et Müller, H.G. (1979): Kernel Estimation of Regression Functions. In *Smoothing Techniques for Curve Estimation*. (Th. Gasser and M. Rosenblatt, eds.) Springer-Verlag. New-York.

Ghizzetti, A. et Ossicini, A. (1970): *Quadrature Formulae*. Academic Press. New-York.

Graybill, F.A. (1969): *Introduction to Matrices with Applications in Statistics*. Wadsworth Publishing Company, Inc. Belmont, California.

Härdle, W. (1990): *Applied Nonparametric Regression*. Cambridge University Press. Cambridge.

Huang, S.Y. et Studden, W.J. (1993a): An Equivalent Kernel Method for Least Squares Spline Regression. *Statistics and Decisions* Supplement Issue 3, p.179-201.

Huang, S.Y. et Studden, W.J. (1993b): Density Estimation Using Spline Projection Kernels. *Commun. Statist. - Theory Meth.* **22**, p.3263-3285.

Isaacson, E. et Keller, H.B. (1966): *Analysis of Numerical Methods*. Wiley. New-York.

Jupp, D.L.B. (1978): Approximation to Data by Splines with Free Knots. *SIAM J. Numer. Anal.* **15**, p.204-217.

Kiefer, J. et Studden, W.J. (1976): Optimal Design for Large Degree Polynomial Regression. *Ann. Statist.* **4**, p.1113-1123.

Lancaster, P. et Tismenetsky, M. (1985): *The Theory of Matrices: with Applications*. 2e édition. Academic Press. Orlando.

- McShane, E.J. (1983): *Unified Integration*. Academic Press. Orlando.
- Pollard, D. (1984): *Convergence of Stochastic Processes*. Springer-Verlag. New-York.
- Ramsay, J.O. (1988): Monotone Regression Splines in Action. *Statistical Science* **4**, p.425-461.
- Scammon, R.E. (1927): The First Seriatim Study of Human Growth. *American Journal of Physical Anthropology* **10**, p.329-336.
- Schoenberg, I.J. (1969): Monosplines and Quadrature Formulae. In *Theory and Applications of Spline Functions* (T.N.E. Greville, éd.). Academic Press. New-York.
- Schumaker, L.L. (1969): Approximation by Splines. In *Theory and Applications of Spline Functions* (T.N.E. Greville, éd.). Academic Press. New-York.
- Serfling, R.J. (1980): *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*. Wiley. New-York.
- Silverman, B.W. (1984): Spline Smoothing: the Equivalent Variable Kernel Method. *Ann. Statist.* **12**, p.898-916.
- Stone, C.J. (1982): Optimal Global Rates of Convergence for Nonparametric Estimators. *Ann. Statist.* **10**, p.1040-1053.
- Stute, W. (1986): Conditional Empirical Processes. *Ann. Statist.* **14**, p.638-647.
- Wahba, G. et Wold, S. (1975): A Completely Automatic French Curve: Fitting Spline Functions by Cross Validation. *Commun. Statist.* **4**, p.1-17.
- Wiens, D.P. (1992): On Moments of Quadratic Forms in Non-Spherically Distributed Variables. *Statistics* **23**, p.265-270.
- White, H. (1981): Consequences and Detection of Misspecified Nonlinear Regression Models. *JASA* **76**, p.419-433.

Yu, K. et Jones, M.C. (1998): Local Linear Quantile Regression. *JASA* **93**, p.228-237.

Zhou, S., Shen, X. et Wolfe, D.A. (1998): Local Asymptotics for Regression Splines and Confidence Regions. *Ann. Statist.* **26**, p.1760-1782.

Annexe A

Cette annexe contient les preuves des résultats énoncés à la section 1.4 portant sur les matrices $M = \int_0^1 N(x)N(x)'dF(x)$ et $M_n = \int_0^1 N(x)N(x)'dF_n(x)$ où $N(x)$ est le vecteur contenant la base des B-splines de degré d et de noeuds τ . Elles reposent sur les hypothèses suivantes.

Condition 1

Il existe deux constantes indépendantes de k , C_1 et C_2 , telles que

$$\frac{C_1}{k} < \delta_{\min} \leq \delta_{\max} < \frac{C_2}{k} \quad (\text{A.1})$$

où δ_{\min} et δ_{\max} désignent respectivement le minimum et le maximum des $\delta_i = \tau_i - \tau_{i-1}$, $i = 1, \dots, k+1$.

Condition 2

Il existe une sous-suite $\{n_k\}_{k=1, \dots, \infty}$ telle que

$$\sup_{x \in [0,1]} |F_{n_k}(x) - F(x)| \leq \frac{r_k}{k} \quad (\text{A.2})$$

où $\{r_k\}_{k=1, \dots, \infty}$ est une suite positive qui tend vers zéro. La fonction de répartition $F(\cdot)$ est dérivable sur $[0,1]$ et sa dérivée, $\lambda(\cdot)$, est positive et satisfait $0 < \lambda_{\min} \leq \lambda(x) \leq \lambda_{\max} < \infty \forall x \in [0,1]$.

Pour montrer le premier résultat, nous avons besoin d'un théorème d'intégration par parties qui ratisse suffisamment large pour permettre aux fonctions sous l'intégrale d'être discontinues. Nous l'énonçons ici par souci de précision.

Théorème général d'intégration par parties

Soit $B = (a,b)$ un intervalle (pas forcément borné) de \mathbb{R} . Soient aussi $f(\cdot)$ et $g(\cdot)$, deux fonctions intégrables sur B , et désignons par $F(\cdot)$ et $G(\cdot)$ leur intégrale indéfinie respective. Alors

$$\int_a^b f(x)G(x)dx = F(x)G(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g(x)dx.$$

Démonstration

McShane (1983), théorème 9.4, p. 126.

Théorème A.1

Les éléments de M sont positifs ou nuls et de la forme

$$m_{ij} = \int_0^1 N_i(x)N_j(x)dF(x) \leq \begin{cases} \lambda_{\max} \delta_{\max} & \text{si } |i-j| \leq d+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\forall i, j = 1, \dots, k+d+1$ où on écrit $N_i(x) \equiv N_i(x, \tau)$ pour alléger la notation. En outre, $M_{n_k} = M + E_{n_k}$ où l'élément (i, j) de E_{n_k} satisfait

$$|e_{n_k, ij}| \leq \begin{cases} C \sup_{x \in [0,1]} |F_{n_k}(x) - F(x)| & \text{si } |i-j| \leq d+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour une constante C qui ne dépend pas de k . Autrement dit, $|e_{n_k, ij}| = O(r_k/k)$ quand $k \rightarrow \infty$.

Démonstration

Le résultat repose sur les propriétés des B-splines que nous avons déjà énumérées au chapitre 1. Pour tout $i, j = 1, \dots, k+d+1$, on peut écrire

$$m_{ij} = \int_I N_i(x)N_j(x)\lambda(x)dx$$

où, parce que $N_i(x) = 0$ si $x \notin (\tau_{i-d-1}, \tau_i)$, $I = (\tau_{i-d-1}, \tau_i) \cap (\tau_{j-d-1}, \tau_j)$. L'intégrale est nulle si I est un ensemble vide, c'est-à-dire si $|i-j| > d+1$. Le cas échéant, on recourt au fait que les B-splines sont toujours positifs et inférieurs à 1, de même qu'à l'égalité $\int_0^1 N_i(x)dx = (\tau_i - \tau_{i-d-1})/(d+1)$, pour obtenir

$$m_{ij} \leq \int_I N_i(x)\lambda(x)dx \leq \lambda_{\max} \frac{\tau_i - \tau_{i-d-1}}{d+1} \leq \lambda_{\max} \delta_{\max} \quad (\text{A.3})$$

où la dernière inégalité se justifie en observant que $(\tau_i - \tau_{i-d-1}) \leq (d+1)\delta_{\max} \forall i$.

Etant donné le support des B-splines, l'élément

$$e_{n_k,ij} = \int_I N_i(x)N_j(x)d(F_{n_k} - F)(x)$$

est également nul si $|i-j| > d+1$. Si tel n'est pas le cas, on utilise le théorème d'intégration par parties qui précède et on trouve

$$e_{n_k,ij} = N_i(x)N_j(x)(F_{n_k} - F)(x) \Big|_I - \int_I \left(N_i(x) \frac{\partial N_j(x)}{\partial x} + \frac{\partial N_i(x)}{\partial x} N_j(x) \right) (F_{n_k} - F)(x) dx.$$

Le premier terme est nul puisque les B-splines $N_i(x)$ sont nuls lorsqu'évalués en τ_{i-d-1} et τ_i et que les extrémités de I coïncident précisément avec ces noeuds.

Par ailleurs, par (1.6),

$$\max_{x \in [0,1]} \left| \frac{\partial N_j(x)}{\partial x} \right| \leq \frac{2}{\delta_{\min}} \quad (\text{A.4})$$

$\forall j = 1, \dots, k+d+1$ et on conclut que

$$\begin{aligned}
|e_{n_k, ij}| &= \left| \int_I \left(N_i(x) \frac{\partial N_j(x)}{\partial x} + \frac{\partial N_i(x)}{\partial x} N_j(x) \right) (F_{n_k} - F)(x) dx \right| \\
&\leq \sup_{x \in [0,1]} |F_{n_k}(x) - F(x)| \int_I \left(\left| \frac{\partial N_j(x)}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial N_i(x)}{\partial x} \right| \right) dx \\
&\leq \sup_{x \in [0,1]} |F_{n_k}(x) - F(x)| \frac{4}{\delta_{\min}} \int_I dx \leq \sup_{x \in [0,1]} |F_{n_k}(x) - F(x)| \frac{4(d+1)\delta_{\max}}{\delta_{\min}}
\end{aligned}$$

parce que l'intervalle I est de longueur inférieure ou égale à $(d+1)\delta_{\max}$. Le résultat découle du fait que le ratio $\delta_{\max}/\delta_{\min}$ peut être majoré indépendamment de k sous (A.1).

CQFD

Les normes spectrale et maximale de M et M_{n_k} s'obtiennent directement de ce théorème. On rappelle que pour une matrice carrée $A = \{a_{ij}\}_{i, j = 1, \dots, p}$, la première se définit par

$$\|A\|_s \equiv \max_{x \in S_p} \|Ax\|_E$$

où $\|\cdot\|_E$ représente la norme euclidienne et $S_p = \{x \in \mathbb{R}^p : \|x\|_E = 1\}$. Quant à la seconde, elle est donnée par

$$\|A\|_{\max} \equiv \max_{1 \leq i \leq p} \sum_{j=1}^p |a_{ij}|.$$

Corollaire A.2

- (i) $\|M\|_s \leq \|M\|_{\max} \leq (2(d+1)+1)\lambda_{\max} \delta_{\max}$
- (ii) $\|E_{n_k}\|_s \leq \|E_{n_k}\|_{\max} \leq (2(d+1)+1)C \sup_{x \in [0,1]} |F_{n_k}(x) - F(x)| = O(r_k/k)$.

Démonstration

Le fait que la norme spectrale soit inférieure à la norme maximale est une conséquence de la symétrie de M et E_{n_k} ainsi que de l'inégalité (1.15) du chapitre 1. Les deux matrices ont, de surcroît, la particularité d'être composées de $2(d+1)+1$ diagonales non nulles. Ainsi, comme les éléments de M sont positifs et bornés par $\lambda_{\max} \delta_{\max}$ quand $k \rightarrow \infty$,

$$\|M\|_s \leq \|M\|_{\max} = \max_{1 \leq i \leq k+d+1} \sum_{j=1}^{k+d+1} m_{ij} \leq (2(d+1)+1) \lambda_{\max} \delta_{\max}.$$

Les $|e_{n_k, ij}|$ étant quant à eux majorés, à une constante près, par la distance maximale entre $F_{n_k}(\cdot)$ et $F(\cdot)$, distance bornée par r_k/k sous (A.2), des arguments identiques démontrent (ii).

CQFD

Ayant fait le tour des principales caractéristiques de M , attaquons-nous maintenant à son inverse M^{-1} .

Théorème A.3

Définissons $G = DMD$ où D est la matrice diagonale composée des éléments $D_{ii} = ((d+1)/\pi_i)^{\frac{1}{2}}$ avec $\pi_i = \tau_i - \tau_{i-d-1}$, $i = 1, \dots, k+d+1$. Alors il existe C et γ , des constantes ne dépendant que de d et $\lambda(\cdot)$, telles que si $G^{-1} = \{\alpha^{ij}\}_{i,j=1, \dots, k+d+1}$,

$$|\alpha^{ij}| \leq C\gamma^{|i-j|}$$

avec $0 < \gamma < 1$. Comme conséquence immédiate, si $M^{-1} = \{m^{ij}\}_{i,j=1, \dots, k+d+1}$,

$$|m^{ij}| = \left| \frac{d+1}{\sqrt{\pi_i \pi_j}} \alpha^{ij} \right| \leq \frac{d+1}{\pi_{\min}} C\gamma^{|i-j|} \leq \frac{C}{\delta_{\min}} \gamma^{|i-j|}$$

où $\pi_{\min} = \min_{1 \leq i \leq k+d+1} \pi_i$.

Démonstration

La démonstration est une adaptation du lemme 1 de DeBoor (1976) au cas où on intègre par rapport à une densité $\lambda(\cdot)$ différente de 1.

Si on adopte la notation $\overset{2}{N}_j(x) \equiv D_{jj} N_j(x, \tau)$, la matrice G du théorème peut s'écrire sous la forme

$$G = \left\{ \int_0^1 \overset{2}{N}_i(x) \overset{2}{N}_j(x) \lambda(x) dx \right\}_{i,j=1,\dots,k+d+1}$$

et si $f_i(x) = \sum_{j=1}^{k+d+1} \alpha^{ij} \overset{2}{N}_j(x)$, alors

$$\int_0^1 f_i(x) \overset{2}{N}_j(x) \lambda(x) dx = \delta_{ij}$$

$\forall j = 1, \dots, k+d+1$ où δ_{ij} est le delta de Kronecker. Cette égalité indique que $\int_0^1 (f_i(x))^2 \lambda(x) dx = \alpha^{ii}$ et le fait que G soit inversible exclut la possibilité que $f_i(\cdot)$ soit identiquement nulle (car aucune ligne ou colonne de G^{-1} n'est entièrement composée de zéros), ce qui assure que $\alpha^{ii} > 0 \forall i = 1, \dots, k+d+1$.

Par ailleurs, DeBoor souligne l'existence de D_d , une constante ne dépendant que du degré, et non de k ou des noeuds, telle que

$$D_d^{-2} \sum_{j=1}^{k+d+1} a_j^2 \leq \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{k+d+1} a_j \overset{2}{N}_j(x) \right)^2 dx \leq \sum_{j=1}^{k+d+1} a_j^2$$

pour tout vecteur $a = \{a_j\}_{j=1,\dots,k+d+1}$ dans \mathbb{R}^{k+d+1} . Les hypothèses émises sur la densité $\lambda(\cdot)$ permettent d'en déduire que

$$D_d^{-2} \lambda_{\min} \sum_{j=1}^{k+d+1} a_j^2 \leq \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{k+d+1} a_j \overset{2}{N}_j(x) \right)^2 \lambda(x) dx \leq \lambda_{\max} \sum_{j=1}^{k+d+1} a_j^2 \quad (\text{A.5})$$

et en utilisant ceci en conjonction avec le fait que l'intégrale de $f_i(x)$ au carré donne α^{ii} , on conclut que $\forall i = 1, \dots, k+d+1$,

$$(\alpha^{ii})^2 \leq \sum_{j=1}^{k+d+1} (\alpha^{ij})^2 \leq \frac{D_d^2}{\lambda_{\min}} \int_0^1 (f_i(x))^2 \lambda(x) dx = \frac{D_d^2}{\lambda_{\min}} \alpha^{ii} \quad (\text{A.6})$$

d'où $\alpha^{ii} \leq D_d^2 / \lambda_{\min}$.

A l'instar de DeBoor, posons maintenant, pour $m > i$,

$$f_{i,m}(x) = \sum_{j=m}^{k+d+1} \alpha^{ij} \overset{2}{N}_j(x).$$

Puisque $f_i(\cdot)$ est orthogonale à $\overset{2}{N}_j(\cdot)$ pour $i \neq j$ et que $m > i$, la fonction $f_{i,m}(\cdot)$ est orthogonale à $f_i(\cdot)$ dans le contexte où l'intégration s'effectue par rapport à la densité $\lambda(\cdot)$. En outre, parce que $f_i(\cdot)$ et $f_{i,m-d}(\cdot)$ coïncident sur le support de $f_{i,m}(\cdot)$, elle est également orthogonale à $f_{i,m-d}(\cdot)$. Pour le voir, remarquons que, les $\overset{2}{N}_j(\cdot)$ étant nuls hors de (τ_{j-d-1}, τ_j) , le support de $f_{i,m}(\cdot)$ correspond à $(\tau_{m-d-1}, 1]$, un intervalle sur lequel $\overset{2}{N}_1(x) = \dots = \overset{2}{N}_{m-d-1}(x) \equiv 0$, c'est-à-dire où $f_i(x) = f_{i,m-d}(x)$. Ainsi, par l'orthogonalité,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\sum_{j=m-d}^{m-1} \alpha^{ij} \overset{2}{N}_j(x) \right)^2 \lambda(x) dx &= \int_0^1 (f_{i,m-d}(x) - f_{i,m}(x))^2 \lambda(x) dx \\ &= \int_0^1 (f_{i,m-d}(x))^2 \lambda(x) dx + \int_0^1 (f_{i,m}(x))^2 \lambda(x) dx \end{aligned}$$

d'où découle

$$\int_0^1 \left(\sum_{j=m-d}^{k+d+1} \alpha^{ij} \overset{2}{N}_j(x) \right)^2 \lambda(x) dx \leq \int_0^1 \left(\sum_{j=m-d}^{m-1} \alpha^{ij} \overset{2}{N}_j(x) \right)^2 \lambda(x) dx$$

avec $\alpha^{ij} = 0$ si $j < i$. En utilisant (A.5), cette inégalité se traduit par le fait que pour $m > i$ quelconque,

$$\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}} D_d^{-2} \sum_{j=m-d}^{k+d+1} (\alpha^{ij})^2 \leq \sum_{j=m-d}^{m-1} (\alpha^{ij})^2$$

et pour faciliter la transition avec la suite de la démonstration, on morcelle la somme de gauche afin de réécrire cette inégalité sous la forme

$$\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}} D_d^{-2} \left\{ \sum_{j=m-d}^{m-1} (\alpha^{ij})^2 + \sum_{j=m}^{m+d-1} (\alpha^{ij})^2 + \dots \right\} \leq \sum_{j=m-d}^{m-1} (\alpha^{ij})^2$$

où $\alpha^{ij} = 0$ si $j > k+d+1$.

Soit maintenant un certain $m_0 > i$. Si on pose $a_m = \sum_{j=m_0+d(m-1)}^{m_0+dm-1} (\alpha^{ij})^2$, $m = 0, 1, \dots$, l'inégalité précédente implique que

$$\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}} D_d^{-2} \sum_{j \geq 0} a_j \leq a_0$$

et puisqu'on a également $i < m_0 + d < m_0 + 2d < \dots$, on peut répéter ce raisonnement et affirmer que de façon plus générale,

$$\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}} D_d^{-2} \sum_{j \geq m} a_j \leq a_m$$

pour tout $m = 0, 1, \dots$. Or, puisque $(\lambda_{\min}/\lambda_{\max}) D_d^{-2}$ est compris entre 0 et 1 et ne dépend que du degré et de $\lambda(\cdot)$, on se retrouve précisément dans le contexte du lemme 2 de DeBoor, duquel on déduit que

$$\max_{m_0+d(m-1) \leq j \leq m_0+dm-1} (\alpha^{ij})^2 \leq a_m \leq a_0 \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} D_d^2 \tilde{\gamma}^m$$

où $0 < \tilde{\gamma} = 1 - (\lambda_{\min}/\lambda_{\max}) D_d^{-2} < 1$ et puisque, par (A.6),

$$a_0 = \sum_{j=m_0-d}^{m_0-1} (\alpha^{ij})^2 \leq \sum_{j=1}^{k+d+1} (\alpha^{ij})^2 \leq \frac{D_d^2}{\lambda_{\min}} \alpha^{ii} \leq \frac{D_d^4}{\lambda_{\min}^2},$$

on conclut en bout de ligne que

$$\max_{m_0+d(m-1) \leq j \leq m_0+dm-1} |\alpha^{ij}| \leq \frac{\sqrt{\lambda_{\max}}}{\sqrt{\lambda_{\min}^3}} D_d^3 \tilde{\gamma}^{\frac{m}{2}}.$$

Pour aboutir à l'énoncé exact du théorème, soulignons d'abord que l'écart entre i et j est proportionnel à m . Précisément, étant donné que $i > 0$ et $j \leq m_0 + dm - 1$, on a $j - i < m_0 + dm$ et comme $\tilde{\gamma}$ est inférieur à 1, il en découle que $\tilde{\gamma}^{\frac{m}{2}} < \tilde{\gamma}^{\frac{-m_0}{2d}} \tilde{\gamma}^{\frac{j-i}{2d}} \leq \tilde{\gamma}^{\frac{j-i}{2d}} = \gamma^{j-i}$ avec $0 < \gamma = \tilde{\gamma}^{\frac{1}{2d}} < 1$. En outre, puisque $m_0 > i$ est quelconque et que le terme devant $\tilde{\gamma}^{\frac{m}{2}}$ ne dépend que de d et $\lambda(\cdot)$, on observe bien la décroissance exponentielle de α^{ij} annoncée par le théorème dans le cas où $j > i$. La symétrie de G assure que cela demeure vrai pour $j < i$.

CQFD

En utilisant la convergence de $F_{n_k}(\cdot)$ vers $F(\cdot)$ comme pierre angulaire et en adaptant la preuve du théorème A.3, on peut montrer que les éléments de $M_{n_k}^{-1}$ ont un comportement similaire à ceux de M^{-1} .

Théorème A.4

Définissons $G_{n_k} = DM_{n_k}D$ où D est la matrice diagonale du théorème A.3 et notons $G_{n_k}^{-1} = \{\alpha_{n_k}^{ij}\}_{i,j=1,\dots,k+d+1}$. Alors

$$|\alpha_{n_k}^{ij}| \leq C_k (\gamma + c_k)^{|i-j|}$$

où $\gamma \in (0,1)$ est la constante du théorème A.3 et où les quantités C_k et c_k sont respectivement $O(1)$ et $o(1)$ quand $k \rightarrow \infty$. Si $M_{n_k}^{-1} = \{m_{n_k}^{ij}\}_{i,j=1,\dots,k+d+1}$, alors comme conséquence immédiate,

$$|m_{n_k}^{ij}| = \left| \frac{d+1}{\sqrt{\pi_i \pi_j}} \alpha_{n_k}^{ij} \right| \leq \frac{d+1}{\pi_{\min}} C_k (\gamma + c_k)^{|i-j|} \leq \frac{C_k}{\delta_{\min}} (\gamma + c_k)^{|i-j|}.$$

Démonstration

Récupérant la notation $\overset{2}{N}_j(x) \equiv D_{jj} N_j(x, \tau)$, notons que

$$G_{n_k} = \left\{ \int_0^1 \overset{2}{N}_i(x) \overset{2}{N}_j(x) dF_{n_k}(x) \right\}_{i,j=1,\dots,k+d+1}$$

constitue la version empirique de la matrice G du théorème précédent dont la preuve reposait sur l'inégalité

$$D_d^{-2} \lambda_{\min} a' a \leq a' G a \leq \lambda_{\max} a' a, \quad (\text{A.7})$$

valide $\forall a \in \mathbb{R}^{k+d+1}$, avec D_d une constante ne dépendant que du degré. La présente démonstration sera axée sur une inégalité semblable pour G_{n_k} .

Commençons par écrire $H_{n_k} = G_{n_k} - G \equiv D E_{n_k} D$ où E_{n_k} est la matrice illustrée au théorème A.1. Par les propriétés de la norme spectrale, la symétrie de H_{n_k} fait en sorte que $\|H_{n_k}\|_s$ se confond avec le maximum des $|\gamma_i|$, où $\gamma_1, \dots, \gamma_{k+d+1}$ désignent les valeurs propres de H_{n_k} , si bien que

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^{k+d+1}} \left| \frac{a' H_{n_k} a}{a' a} \right| = \max_{1 \leq i \leq k+d+1} |\gamma_i| = \|H_{n_k}\|_s \leq \|D\|_s^2 \|E_{n_k}\|_s.$$

Par le corollaire A.2, $\|E_{n_k}\|_s$ est d'ordre $O(r_k/k) = o(k^{-1})$ lorsque $k \rightarrow \infty$. En outre, $\|D\|_s = O(\sqrt{k})$ car la norme spectrale d'une matrice diagonale est, par définition, bornée par la plus grande composante en valeur absolue et que $(d+1)/\pi_{\min} \leq 1/\delta_{\min} = O(k)$ par (A.1). Conséquemment, la norme de H_{n_k} , et donc tout scalaire $a' H_{n_k} a / a' a$ avec $a \in \mathbb{R}^{k+d+1}$, est $o(1)$. A la lumière de (A.7), il ne reste plus qu'à conclure à l'existence de $c_{1k} > 0$, une quantité $o(1)$, telle que $\forall a \in \mathbb{R}^{k+d+1}$,

$$D_d^{-2} \lambda_{\min} - c_{1k} \leq \frac{a' G_{n_k} a}{a' a} = \frac{a' G a}{a' a} + \frac{a' H_{n_k} a}{a' a} \leq \lambda_{\max} + c_{1k},$$

une inégalité qu'on peut réécrire sous la forme

$$\left(D_d^{-2}\lambda_{\min} - c_{1k}\right) \sum_{j=1}^{k+d+1} a_j^2 \leq \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{k+d+1} a_j \dot{N}_j(x) \right)^2 dF_{n_k}(x) \leq (\lambda_{\max} + c_{1k}) \sum_{j=1}^{k+d+1} a_j^2. \quad (\text{A.8})$$

A partir d'ici, nous mimerons la démonstration du théorème A.3, en ne conservant toutefois que les lignes directrices pour éviter les redondances.

Posant $f_i(x) = \sum_{j=1}^{k+d+1} \alpha_{n_k}^{ij} \dot{N}_j(x)$, on observe que $\int_0^1 f_i(x) \dot{N}_j(x) dF_{n_k}(x) = \delta_{ij}$ $\forall j = 1, \dots, k+d+1$ avec δ_{ij} le delta de Kronecker. De ceci découle $\int_0^1 (f_i(x))^2 dF_{n_k}(x) = \alpha_{n_k}^{ii}$ avec $\alpha_{n_k}^{ii} > 0 \forall i = 1, \dots, k+d+1$ et en utilisant (A.8), on conclut que $\forall i = 1, \dots, k+d+1$,

$$(\alpha_{n_k}^{ii})^2 \leq \sum_{j=1}^{k+d+1} (\alpha_{n_k}^{ij})^2 \leq \frac{\int_0^1 (f_i(x))^2 dF_{n_k}(x)}{(D_d^{-2}\lambda_{\min} - c_{1k})} = \frac{\alpha_{n_k}^{ii}}{(D_d^{-2}\lambda_{\min} - c_{1k})}$$

d'où $\alpha_{n_k}^{ii} \leq 1/(D_d^{-2}\lambda_{\min} - c_{1k})$.

Pour $m > i$, introduisons maintenant

$$f_{i,m}(x) = \sum_{j=m}^{k+d+1} \alpha_{n_k}^{ij} \dot{N}_j(x),$$

une fonction qui est à la fois orthogonale à $f_i(\cdot)$ et à $f_{i,m-d}(\cdot)$ dans la mesure où on considère l'intégration par rapport à $dF_{n_k}(\cdot)$. En tirant profit de cette orthogonalité pour intégrer $(f_{i,m-d}(x) - f_{i,m}(x))^2$, on obtient l'inégalité

$$\int_0^1 \left(\sum_{j=m-d}^{k+d+1} \alpha_{n_k}^{ij} \dot{N}_j(x) \right)^2 dF_{n_k}(x) \leq \int_0^1 \left(\sum_{j=m-d}^{m-1} \alpha_{n_k}^{ij} \dot{N}_j(x) \right)^2 dF_{n_k}(x)$$

qui, une fois combinée à (A.8), assure que

$$\left(\frac{D_d^{-2}\lambda_{\min} - c_{1k}}{\lambda_{\max} + c_{1k}} \right) \sum_{j=m-d}^{k+d+1} (\alpha_{n_k}^{ij})^2 \leq \sum_{j=m-d}^{m-1} (\alpha_{n_k}^{ij})^2$$

pour $m > i$. Le quotient entre parenthèses est inférieur à 1 si k est grand; confronté à une inégalité similaire dans la démonstration du théorème A.3, on avait usé de quelques acrobaties algébriques qui, reproduites ici, indiquent que pour $m_0 > i$ quelconque et $\forall m = 0, 1, \dots$,

$$\max_{m_0+d(m-1) \leq j \leq m_0+dm-1} |\alpha_{n_k}^{ij}| \leq \sqrt{\frac{(\lambda_{\max} + c_{1k})}{(D_d^{-2} \lambda_{\min} - c_{1k})^3}} \tilde{\gamma}_k^{\frac{m}{2}}$$

avec

$$\tilde{\gamma}_k = 1 - \frac{(D_d^{-2} \lambda_{\min} - c_{1k})}{(\lambda_{\max} + c_{1k})}.$$

Lorsque $k \rightarrow \infty$, la racine devant $\tilde{\gamma}_k^{\frac{m}{2}}$ est $O(1)$ et $\tilde{\gamma}_k$ tombe entre 0 et 1. On se retrouve donc dans le contexte décrit dans la dernière partie de la démonstration du théorème A.3 dont on s'inspire pour écrire $\tilde{\gamma}_k^{\frac{m}{2}} \leq \tilde{\gamma}_k^{\frac{j-i}{2d}} = (\gamma + c_k)^{j-i}$ où $\gamma = (1 - (D_d^{-2} \lambda_{\min} / \lambda_{\max}))^{\frac{1}{2d}} \in (0, 1)$ est la constante qu'on y retrouve et où c_k est $o(1)$. On clôt la présente démonstration en suivant les traces des dernières lignes de celle du théorème A.3.

CQFD

La proximité de M_{n_k} et M a été établie au théorème A.1. On boucle la boucle en montrant que les inverses sont également proches. Comme les éléments de $M_{n_k}^{-1}$ et M^{-1} décroissent de façon exponentielle à mesure qu'ils s'éloignent de la diagonale, il est raisonnable de penser que les éléments de $M_{n_k}^{-1} - M^{-1}$ tendent vers 0 de la même façon. Le théorème A.6 à venir indique que cette intuition s'avère juste, mais pour le démontrer, on doit préalablement introduire un petit lemme technique.

Lemme A.5

Soit $\gamma \in (0,1)$. Alors $\forall i, j \in \{1, \dots, p\}$,

$$S = \sum_{l=1}^p \gamma^{|i-l|+|l-j|} \leq (|i-j| + C) \gamma^{|i-j|}$$

où C est une constante positive qui ne dépend que de γ .

Démonstration

Dans un premier temps, supposons que $i \leq j$. Le fait que γ^2 soit élément de $(0,1)$ et la théorie des séries géométriques permettent la succession d'égalités suivante,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{l=1}^i \gamma^{i+j-2l} + \sum_{l=i+1}^j \gamma^{j-i} + \sum_{l=j+1}^p \gamma^{2l-i-j} \\ &= \gamma^{j-i} \left\{ \sum_{l=1}^i (\gamma^2)^{i-l} + (j-i) + \sum_{l=j+1}^p (\gamma^2)^{l-j} \right\} = \gamma^{j-i} \left\{ \sum_{l=0}^{i-1} (\gamma^2)^l + (j-i) + \sum_{l=1}^{p-j} (\gamma^2)^l \right\} \\ &= \gamma^{j-i} \left\{ \frac{1-\gamma^{2i}}{1-\gamma^2} + (j-i) + \frac{\gamma^2 - \gamma^{2(p-j+1)}}{1-\gamma^2} \right\}. \end{aligned}$$

Il suffit donc de choisir $C \geq (1+\gamma^2)/(1-\gamma^2) > 0$ pour tomber sur le résultat désiré. Par symétrie, cette chaîne d'égalités peut aussi être obtenue dans le cas où $i \geq j$, ce qui confirme l'énoncé du lemme.

CQFD

Théorème A.6

Désignons par $(M_{n_k}^{-1} - M^{-1})_{ij}$ l'élément (i, j) de $M_{n_k}^{-1} - M^{-1}$, $i, j = 1, \dots, k+d+1$. Alors

$$\left| (M_{n_k}^{-1} - M^{-1})_{ij} \right| \leq r_k \frac{C_{1k}}{\delta_{\min}} (|i-j| + C_{2k}) (\gamma + |c_k|)^{|i-j|}$$

où C_{1k} et $C_{2k} > 0$ sont $O(1)$ lorsque $k \rightarrow \infty$. Les quantités γ et c_k sont celles du théorème A.4.

Démonstration

Pour alléger la notation, notons d'emblée que les B_{1k} , B_{2k} , B_{3k} et B_{4k} qui apparaissent dans la démonstration jouent le rôle de quantités $O(1)$.

Commençons par souligner que $M_{n_k}^{-1} - M^{-1} = -M_{n_k}^{-1} E_{n_k} M^{-1}$ où E_{n_k} est décrite au théorème A.1. Récupérant les résultats et la notation des théorèmes A.1, A.3 et A.4, on conclut que pour $i, j \in \{1, \dots, k+d+1\}$ quelconques,

$$\begin{aligned} \left| (M_{n_k}^{-1} - M^{-1})_{ij} \right| &\leq \sum_{l=1}^{k+d+1} \sum_{\substack{p=1 \\ |l-p| \leq d+1}}^{k+d+1} \left| m_{n_k}^{il} \right| \left| e_{n_k, lp} \right| \left| m^{pj} \right| \\ &\leq \frac{r_k}{k} \frac{B_{1k}}{\delta_{\min}^2} \sum_{l=1}^{k+d+1} \gamma^{|i-l|} \sum_{\substack{p=1 \\ |l-p| \leq d+1}}^{k+d+1} (\gamma + c_k)^{|p-j|} \end{aligned}$$

où $\gamma \in (0, 1)$ et où c_k est $o(1)$ quand $k \rightarrow \infty$. La somme de droite, qui contient au plus $2(d+1)+1$ éléments, s'avère quelque peu encombrante, mais on s'en débarrasse en observant que

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p=1 \\ |l-p| \leq d+1}}^{k+d+1} (\gamma + c_k)^{|p-j|} &= (\gamma + c_k)^{|l-j|} \sum_{\substack{p=1 \\ |l-p| \leq d+1}}^{k+d+1} (\gamma + c_k)^{|p-j| - |l-j|} \\ &\leq (\gamma + c_k)^{|l-j|} (2(d+1)+1) (\gamma + c_k)^{-(d+1)} \leq B_{2k} (\gamma + c_k)^{|l-j|} \end{aligned}$$

puisque $(\gamma + c_k) \in (0, 1)$ si k est assez grand et que $-(d+1) \leq |p-j| - |l-j| \leq (d+1)$ pour tout $j = 1, \dots, k+d+1$ et pour les valeurs de p impliquées dans la somme. Ainsi, par le lemme A.5,

$$\begin{aligned}
|(M_{n_k}^{-1} - M^{-1})_{ij}| &\leq \frac{r_k}{k} \frac{B_{1k} B_{2k}}{\delta_{\min}^2} \sum_{l=1}^{k+d+1} (\gamma + |c_k|)^{|i-l|+|l-j|} \\
&\leq r_k \frac{B_{3k}}{\delta_{\min}} (|i-j| + B_{4k}) (\gamma + |c_k|)^{|i-j|}
\end{aligned}$$

car sous (A.1), $1/\delta_{\min} = O(k)$.

CQFD

Corollaire A.7

(i) Il existe C'_1 et C'_2 , deux constantes indépendantes de k , telles que pour tout $a \in \mathbb{R}^{k+d+1}$,

$$C'_1 k \leq \frac{a' M^{-1} a}{a' a} \leq C'_2 k.$$

Par ailleurs, lorsque $k \rightarrow \infty$,

(ii) $\|M^{-1}\|_s \leq \|M^{-1}\|_{\max} = O(k)$

(iii) $\|M_{n_k}^{-1}\|_s \leq \|M_{n_k}^{-1}\|_{\max} = O(k)$

(iv) $\|M_{n_k}^{-1} - M^{-1}\|_s \leq \|M_{n_k}^{-1} - M^{-1}\|_{\max} = O(r_k k)$.

Démonstration

L'inégalité (i) se déduit de (A.5) qu'on réécrit sous la forme $D_d^{-2} \lambda_{\min} a' a \leq a' G a \leq \lambda_{\max} a' a \forall a \in \mathbb{R}^{k+d+1}$ avec $G = D M D$. Par définition de la matrice diagonale D , il est facile de conclure que

$$D_d^{-2} \lambda_{\min} \frac{\pi_{\min}}{d+1} \leq \frac{a' M a}{a' a} = \frac{a' D^{-1} G D^{-1} a}{a' D^{-1} D^{-1} a} = \frac{a' D^{-1} D^{-1} a}{a' a} \leq \lambda_{\max} \frac{\pi_{\max}}{d+1}$$

où $\pi_{\max} \leq (d+1)\delta_{\max}$ est le maximum des π_i alors que $\pi_{\min} \geq (d+1)\delta_{\min}$ en est le minimum. Ainsi,

$$D_d^{-2} \lambda_{\min} \delta_{\min} \leq \gamma_1 \leq \frac{a'Ma}{a'a} \leq \gamma_2 \leq \lambda_{\max} \delta_{\max}$$

où γ_1 et γ_2 désignent respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de la matrice définie positive M . On peut donc conclure que

$$\frac{1}{\lambda_{\max} \delta_{\max}} \leq \frac{1}{\gamma_2} \leq \frac{a'M^{-1}a}{a'a} \leq \frac{1}{\gamma_1} \leq \frac{1}{D_d^{-2} \lambda_{\min} \delta_{\min}}.$$

Le résultat (i) découle de (A.1).

Passons à (ii) - (iv). Le fait que la norme maximale majore la norme spectrale dans les trois cas relève encore une fois de la symétrie de M^{-1} et $M_{n_k}^{-1}$.

Pour démontrer (ii), retournons au théorème A.3 et écrivons

$$\|M^{-1}\|_{\max} \equiv \max_{1 \leq i \leq k+d+1} \sum_{j=1}^{k+d+1} |m^{ij}| \leq \frac{C}{\delta_{\min}} \max_{1 \leq i \leq k+d+1} \sum_{j=1}^{k+d+1} \gamma^{|i-j|}$$

où, par les propriétés des séries géométriques,

$$\sum_{j=1}^{k+d+1} \gamma^{|i-j|} = \sum_{j=0}^{i-1} \gamma^j + \sum_{j=1}^{k+d+1-i} \gamma^j = \frac{1-\gamma^i}{1-\gamma} + \frac{\gamma - \gamma^{k+d+2-i}}{1-\gamma} \leq \frac{1+\gamma}{1-\gamma}$$

$\forall i = 1, \dots, k+d+1$. Le résultat s'obtient en notant que $1/\delta_{\min} = O(k)$ sous (A.1). On montre (iii) de la même façon, mais en utilisant le théorème A.4. Le recours aux séries géométriques est justifié du fait que $\gamma + c_k$ est compris entre 0 et 1 pour k grand. Quant à (iv), par le théorème A.6,

$$\begin{aligned} \|M_{n_k}^{-1} - M^{-1}\|_{\max} &= \max_{1 \leq i \leq k+d+1} \sum_{j=1}^{k+d+1} |(M_{n_k}^{-1} - M^{-1})_{ij}| \\ &\leq r_k \frac{C_{1k}}{\delta_{\min}} \max_{1 \leq i \leq k+d+1} \sum_{j=1}^{k+d+1} (|i-j| + C_{2k})(\gamma + |c_k|)^{|i-j|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= r_k \frac{C_{1k}}{\delta_{\min}^{-1}} \max_{1 \leq i \leq k+d+1} \left\{ \sum_{j=0}^{i-1} (j + C_{2k})(\gamma + |c_k|)^j + \sum_{j=1}^{k+d+1-i} (j + C_{2k})(\gamma + |c_k|)^j \right\} \\
&\leq r_k \frac{C_{1k}}{\delta_{\min}^{-1}} 2 \sum_{j=0}^{k+d} (j + C_{2k})(\gamma + |c_k|)^j = O(r_k k)
\end{aligned}$$

parce que $\delta_{\min}^{-1} = O(k)$ sous (A.1) et que la série $\sum_{m=1}^{\infty} (m + v_1)^{v_2} \gamma^m$ où $0 < \gamma < 1$ et $0 \leq v_1, v_2 < \infty$ est convergente par le critère d'Alembert. En effet, si on pose $a_m = (m + v_1)^{v_2} \gamma^m$, $m = 1, 2, \dots$, alors $\sum_{m=1}^{\infty} a_m < \infty$ car $a_m > 0 \forall m$ et

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_{m+1}}{a_m} = \gamma \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{m+1+v_1}{m+v_1} \right)^{v_2} = \gamma < 1.$$

CQFD

Remerciements

Mon premier merci va tout naturellement à mon directeur de recherche, Gilles Ducharme. Par je ne sais quel don de clairvoyance, il a toujours su trouver les mots pour me rassurer et m'encourager, surtout dans ces périodes sombres où la tentation de tout balancer est dangereusement forte... Je le remercie d'avoir passé bien des dimanches à lire et relire mes textes avec une attention implacable, et bien des lundis à m'écrire des pages de commentaires toujours pertinents et éclairants. Malgré les 5000 km de distance, j'ai toujours senti son soutien et sa confiance et je ne peux que me féliciter d'avoir eu un jour l'idée heureuse de le choisir comme directeur.

Je tiens aussi à dire un gros merci à mes ami(e)s pour leur présence et leur soutien, particulièrement lors de ma réclusion du sprint final. Marc, pour son infaillible amitié, pour n'avoir presque jamais rouspété devant les montagnes russes de mes humeurs et pour m'avoir patiemment supportée dans mes mauvais jours où je butais sur un théorème récalcitrant; Isa et Caro, pour les dîners de filles, les invitations à souper trop souvent refusées et les féroces parties de squash; Pierrot, pour le champagne, le ménage et les surprises; et enfin Matthieu, pour les petites jasettes téléphoniques et pour la découverte capitale des macros de Word.

Je remercie en terminant les fonds FCAR et CRSNG des bourses qu'ils m'ont octroyées et qui m'ont soutenue financièrement à un moment ou à un autre pendant la rédaction de ma thèse.