Université de Montréal

Tests d'ajustement fondés sur des simulations

par

Abdeljelil Farhat

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en Statistique

avril 1998

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Tests d'ajustement fondés sur des simulations

présenté par

Abdeljelil Farhat

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Narayan Chandra GIRI

(président-rapporteur)

Serge Tardif

(directeur de recherche)

Jean-Marie Dufour

(co-directeur)

Jean-François ANGERS

(membre du jury)

Mémoire accepté le :

20 avril 1998

SOMMAIRE

Dans le domaine des tests de normalité, couramment utilisés au cours des quarante dernières années, et des tests d'ajustement ($Goodness - of - Fit\ Tests$) de façon générale, plusieurs problèmes de niveau sont causés par les procédures adoptées. Les facteurs de correction et les tables spécialisés nécessitent souvent des révisions, afin d'éviter les situations où les propriétés de puissance sont affectées. Dans ce mémoire, nous proposons, comme solution de rechange, les procédures des tests de Monte Carlo. En se basant sur la procédure de randomisation de Dufour (1995), la technique des tests de Monte Carlo est un instrument facile et fiable pour l'inférence statistique. Cette technique rend facile l'introduction de tests combinés qui ont souvent une performance sensiblement meilleure.

Des comparaisons expérimentales des tests usuels avec les tests de Monte Carlo sont effecutées pour étudier le comportement du niveau et de la puissance des tests de normalité, des tests d'ajustement et des tests d'égalité de deux distributions inconnues. Les tests de normalité sont également étudiés dans le contexte de modèle de régression linéaire, où les résidus de régression remplacent les perturbations aléatoires supposées de loi normale. Cette étude expérimentale montre clairement la meilleure performance des tests de Monte Carlo par rapport aux tests originaux basés sur des points critiques tabulés et justifie l'introduction de tests combinés.

MOTS CLÉS: Tests de Monte Carlo. Tests de normalité. Tests d'ajustement. Tests combinés.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont soutenu durant la période qu'a nécessitée la préparation de ce mémoire. En particulier, mon directeur, le professeur Serge Tardif et mon co-directeur, le professeur Jean-Marie Dufour méritent mes remerciements, non seulement pour m'avoir accepté comme étudiant et m'avoir guidé, mais aussi pour leur support et leur encouragement durant la rédaction de ce mémoire.

Table des matières

Liste des tableaux

INTRODUCTION

Les facilités actuelles des calculs nous encouragent à accorder plus d'attention aux tests de normalité dans un contexte de régression et aux tests d'ajustement dans le contexte d'observations indépendantes identiquement distribuées (i.i.d). On sait que, pour la plupart de ces tests, la distribution limite sous l'hypothèse nulle de la statistique du test est non standard et la distribution, dans le cas d'un échantillon fini, est inconnue. Il ressort que les méthodes usuelles sont limitées soit à des procédures asymptotiques dont la performance est peu fiable, soit requièrent la construction de tables spécialisées. Pour la plupart, ces tables ont été obtenues par simulation et leur utilisation engendre un problème de niveau pour les différents tests étudiés. Selon la nature des données observées, un même test peut avoir un niveau trop bas ou trop élevé, ce qui invalide les comparaisons de puissance. De plus, les tables ne peuvent couvrir toutes les tailles d'échantillon et tous les nombres possibles de régresseurs dans le cas des modèles de régression.

En s'intéressant à ces problèmes, l'objectif de ce mémoire est d'introduire une procédure basées sur la méthode des tests de Monte Carlo (MC) [voir Dwass (1957), Barnard (1963), Birnbaum (1974), Dufour (1995), Dufour et Kiviet (1997), Dufour *et al.* (1998) et Dufour et Kiviet (1998)] visant à résoudre les problèmes de contrôle de niveau pour des échantillons finis. Dans ce travail, nous considérons successivement des tests de normalité d'erreurs de régression, des tests d'ajustement à des lois connues autres que normale et des tests d'égalité de deux distributions inconnues. Pour les tests de normalité, le cas de n observations i.i.d sera considéré comme situation particulière associée à une matrice des variables explicatives ne contenant que le vecteur $(1, 1, ..., 1)'$. Sous des conditions générales, White et MacDonald (1980) ont montré que certaines statistiques fonction des résidus de régression possèdent la même distribution asymptotique que les variables aléatoires homologues définies à partir des perturbations aléatoires normales. Weisberg (1980) a mis l'accent sur les limites du résultat de White et MacDonald (1980) et recommande de l'utiliser avec prudence dans les applications pratiques. Il justifie que la taille de l'échantillon, la dimension et la nature de la matrice des variables explicatives peuvent avoir des effets négatifs sur la validité des tests basés sur des résidus de régression; voir les commentaires dans le cas de régression multiple dans [D'Agostino et Stephens (1986), section 9.6]. Jarque et Bera (1987) mentionnent des conclusions similaires quant au contrôle du niveau. Par contre, nous reprenons des statistiques utilisées par White et MacDonald (1980) et par Jarque et Bera (1987) et d'autres basées sur la fonction de répartition expérimentale et nous montrons, à travers différentes illustrations, que les tests de MC basés sur des résidus de régression contrôlent parfaitement le niveau indépendamment de tous les facteurs cités par Weisberg (1980) . De même, pour les tests d'ajustement à des lois connues et les tests d'égalité de deux distributions inconnues, nous montrons que toutes les statistiques considérées sont pivotales (ne sont fonction d'aucun paramètre de nuisance). Par conséquent, la procédure des tests de MC qui fournit des tests exacts, est applicable à tous les tests étudiés. Nous montrons, à travers différentes illustrations, que les tests de MC contrôlent parfaitement le niveau et ont une bonne puissance.

Dans le chapitre 1, nous présentons la procédure des tests de MC qui sera utilisée pour tous les tests étudiés dans ce mémoire. On y trouve aussi l'algorithme pour effectuer un test de MC et un programme en Fortran 77 (IMSL) qui utilise un sous-programme de calcul du niveau critique ($p - value$) d'un test de MC.

Dans le chapitre 2, nous exposons le modèle de régression linéaire utilisé pour les tests de normalité et nous présentons une étude de simulation portant sur sept statistiques de test connues dans la littérature pour vérifier la normalité: (i) Kolmogorov-Smirnov, (ii) Watson, (iii) Anderson-Darling, (iv) Cramér-von Mises; (v) Jarque-Bera; (vi) coefficient d'asymétrie expérimental et (vii) coefficient d'applatissement expérimental. Pour les quatre premières statistiques , nous faisons intervenir les corrections de [D'Agostino et Stephens (1986), pages 122-132], tandis que pour les trois dernières, nous étudions l'effet du changement de l'estimateur de la variance des perturbations associées au modèle de régression linéaire. L'étude révèle des distortions de niveau lorsqu'en présence de régresseurs, les tests sont basés sur des points critiques tabulés. Au contraire, les tests de MC contrôlent parfaitement le niveau.

Dans le chapitre 3, nous introduisons une statistique de test basée sur une combinaison d'un sous sensemble de statistiques de test fondées soit sur la fonction de répartition expérimentale, étudiées dans le chapitre 2, soit sur le coefficient de corrélation pour effectuer des tests d'ajustement de plusieurs lois connues autres que normale. Le domaine d'étude des tests d'ajustement est élargi aux lois suivantes: exponentielle, de la valeur extrême, Weibull, logistique et uniforme. Nous nous référons aussi aux corrections de Stephens pour les statistiques (i) Kolmogorov-Smirnov, (ii) Watson, (iii) Anderson-Darling, (iv) Cramér-von Mises [D'Agostino et Stephens (1986), pages 133-164].

Le chapitre 4 contient une extension des deux tests (i) Kolmogorov-Smirnov et (ii) Cramér-von Mises au cas de l'égalité de deux distributions de lois inconnues. Nous considérons aussi des tests basés sur l'estimateur par la méthode du noyau de la fonction de densité de probabilité, le test d'égalité des moyennes, le test de Student et le test combiné introduit au chapitre 3. Le test d'égalité des moyennes et le test de Student, recommandés par Efron et Tibshirani (1993) pour tester l'égalité de deux distributions de lois inconnues , sont introduits ici dans le but de montrer que leur utilisation peut facilement induire en erreur. Pour l'étude expérimentale, nous utilisons les lois: normale, exponentielle, gamma, bêta, logistique, lognormale et uniforme pour l'hypothèse d'égalité de deux distributions continues et les lois: uniforme, binomiale, géométrique, binomiale négative et Poisson pour l'hypothèse d'égalité de deux distributions discrètes. Dans ce chapitre, nous nous référons au résultat démontré par [Dufour (1995), section 2] indiquant qu'il n'est pas nécessaire d'avoir des statistiques indépendantes, pour l'application de la technique des tests de MC, et il suffit d'utiliser des statistiques interchangeables.

En résumé, le but de cette recherche est donc :
(i) de vérifier que la procédure des tests de MC basée sur un générateur de nombres aléatoires standard contrôle bien le niveau dans le cas d'échantillons finis;
(ii) d'examiner les propriétés des tests de normalité lorsqu'on les applique aux résidus issus d'un modèle de régression linéaire;
(iii) d'évaluer la performance du point de vue puissance des tests corrigés pour le niveau;
(iv) de montrer que la procédure des tests de MC permet l'introduction de statistiques de test combinées qui améliorent souvent la puissance.

Chapitre 1

TESTS DE MONTE CARLO

Ce chapitre est consacré à la présentation de la procédure des tests de MC qui sera utilisée pour tous les tests étudiés dans ce mémoire.

1.1. Procédure des tests de Monte Carlo

Soit T une statistique de test pivotale qui ne peut jamais prendre de valeurs négatives. Dénotons par T_0 la valeur observée de cette statistique et associons-lui la région critique donnée par l'expression: $\mathrm{G}(T_0) \leq \alpha$, où

$G(x) = P[T \;\geq\; x \mid H_0]$ est la fonction critique pour un test unilatéral à droite.

Règle générale, $G(x)$ est inconnue de sorte qu'elle sera estimée en générant sous l'hypothèse nulle N réalisations indépendantes ou, à la rigueur interchangeables, $T_1, T_2, ..., T_N$ de la statistique T; voir Dwass (1957) et Dufour (1995). Rappelons, d'abord, la définition du concept d'interchangeabilité:

Définition 1.1.1. *On dit qu'un vecteur aléatoire* $T = (T_1, ..., T_N)^{'}$ *est à composantes interchangeables si et seulement si sa loi conjointe demeure invariante par rapport à toutes les permutations de ses composantes.*

D'après cette définition, on peut déduire que des variables aléatoires interchangeables sont forcément équidistribuées. Pour l'application de la technique des tests de MC, on définit

$$\hat{G}_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I_{[0,\infty)}(T_i - x), \text{ où } I_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

la fonction critique estimée, pour un test unilatéral à droite, est alors donnée par la formule

$$\hat{p}_N(x) = \frac{N\hat{G}_N(x) + 1}{N + 1}. \tag{1.1.2}$$

Ainsi, la région critique de niveau α associée à un test de MC s'exprime

$$\hat{p}_N(T_0) \leq \alpha. \tag{1.1.3}$$

Dufour (1995) a montré que, peu importe $0 \leq \alpha \leq 1$:

$$P[\hat{p}_N(T_0) \leq \alpha | H_0] = \frac{I[\alpha(N+1)]}{N+1}, \tag{1.1.4}$$

où I[x] est la fonction partie entière et où N est un entier choisi de façon à ce que αN soit entier, pour un test unilatéral de niveau α.

Dans le cas d'une statistique de test discrète, il se peut qu'on rencontre des ex aequo parmi $T_0, T_1, ..., T_N$. On recommande la technique de randomisation suivante [voir Dufour (1995), section 2.2]: considérer $(N+1)$ réalisations indépendantes $U_0, U_1, ..., U_N$ d'une uniforme U(0,1), pour $j = 0, 1, ..., N$, associer T_j à U_j et enfin affirmer pour $i \neq j$:

$$(T_i, U_i) > (T_j, U_j) \Longleftrightarrow T_i > T_j \text{ ou } \{T_i = T_j \text{ et } U_i > U_j\}. \tag{1.1.5}$$

Comme dans le cas d'une statistique de test continue, on obtient la région critique randomisée qu'on dénote par

$$\tilde{p}_N(T_0) \leq \alpha, \tag{1.1.6}$$

où

$$\tilde{p}_N(x) = \frac{N\tilde{G}_N(x) + 1}{N + 1} \text{ pour un test unilatéral à droite} \tag{1.1.7}$$

et

$$\tilde{G}_N(x) = 1 - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I_{[0,\infty)}(x - T_i) + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I_{[0]}(T_i - x) I_{[0,\infty)}(U_i - U_0). \quad (1.1.8)$$

Dufour (1995) a montré que ces tests basés sur les méthodes randomisées sont des test exacts en ce sens que la région critique randomisée a le même niveau que la région critique $G(T_0) \leq \alpha$. Plus précisément, peu importe $0 \leq \alpha \leq 1$:

$$P[\hat{p}_N(T_0) \leq \alpha | H_0] \leq P[\tilde{p}_N(T_0) \leq \alpha | H_0] = \frac{I[\alpha(N+1)]}{N+1}. \quad (1.1.9)$$

Les procédures des tests de MC présentées dans cette section pourront être utilisées pour effectuer des tests d'ajustement, d'indépendance, pour détecter des données aberrantes, ..., etc. Il suffit de connaître sous l'hypothèse nulle la distribution des observations ou, dans le cas de modèle de régression, la distribution des résidus. Si la statistque de test est pivotale, on peut se permettre de ne connaître sous H_0 la loi des observations qu'à un paramètre de position et à un paramètre d'échelle près.

1.2. Algorithme des tests de Monte Carlo

Pour effectuer un test de MC d'une l'hypothèse nulle H_0, on applique les quatre étapes de l'algorithme suivant:

(1) à partir des données observées, on évalue la statistique de test, soit T_0;

(2) on simule N échantillons sous l'hypothèse nulle H_0 et , à partir de ceux-ci, on calcule N valeurs de la statistique de test que l'on dénote $T_1, ..., T_N$;

(3) on calcule le rang R de T_0 dans l'ensemble $\{T_0, T_1, ..., T_N\}$ en utilisant, s'il y a lieu, la méthode de randomisation suggérée par Dufour (1995);

(4) on calcule le niveau critique du test de MC dont la formule est donnée par

$$\left.\begin{array}{c}\hat{p}_N(T_0)\\ \text{ou}\\ \tilde{p}_N(T_0)\end{array}\right\} = 1 - \frac{R}{N+1} \tag{1.2.1}$$

et on prend la décision selon le niveau fixé.

Afin d'exécuter cet algorithme, on peut utiliser un programme en Fortran 77 (version Fortran 77, 4.0.2 Power Fortran, 4.0) avec l'extension de la programmathèque *International Mathematical and Statistical Libraries* (IMSL,1987) similaire au programme "PROGRAM MCT" reproduit dans l'annexe A.

Théoriquement, un test de MC ainsi obtenu est exact, au sens où on a (1.1.2) s'il n'y a pas d'ex aequo et où on a (1.1.9) s'il y en a, quel que soit le nombre N d'itérations considérées. On remarque ici que les tests de MC offrent une certaine similitude avec le bootstrap. Il y a une différence fondamentale cependant: dans les procédures de MC, le nombre des tirages est explicitement pris en compte de sorte que des tests randomisés exacts peuvent être facilement obtenus. Le fait que la procédure soit randomisée joue un rôle considérable dans la détermination du niveau du test. Dans les procédures de type bootstrap, on fait comme si le nombre de tirages était infini.

Afin de mesurer les niveaux et les puissances des tests étudiés, nous avons appliqué la procédure des tests de MC, présentée à la section 1.1, avec 10 000 itérations. Les tests de MC ont été effectués en simulant soit N=99 échantillons, soit N=99 permutations aléatoires en utilisant le générateur de nombres aléatoires de la programmathèque IMSL (1987). Ce générateur est fondé sur la méthode de la congruence multiplicative, pour plus de détails voir IMSL (1987, chapitre 18). Les tests ont été effectués au niveau 5%. Le taux de rejet sur les 10 000 itérations constitue le niveau expérimental du test si les données utilisées pour le calcul de T_0 ont été générées à partir de la loi stipulée par H_0 et constitue la puissance expérimentale autrement. Rappelons que la région de confiance à 95% du niveau expérimental, correspondant au niveau nominal de 5%, dans le cas de 10 000 itérations est [4,57% ; 5,43%] [voir Brian (1987), page 6].

Chapitre 2

TESTS DE NORMALITÉ

Le problème de vérifier la normalité d'un échantillon est fondamental à la recherche statistique théorique et appliquée. Les tests de normalité sont donc largement utilisés parce que l'hypothèse de normalité est une pratique courante dans l'analyse statistique. Dans le cas particulier des modèles de régression, on s'intéresse surtout à la normalité des erreurs. Beaucoup de tests ont été suggérés afin de vérifier l'hypothèse de normalité. Dans ce domaine, on se concentre sur les tests du type omnibus et multiplicateur de Lagrange (ML) [voir Mardia (1980)]. En particulier, on considère les statistiques de Kolmogorov-Smirnov (KS) [Kolmogorov (1933), Smirnov (1939)], Watson (W) [Watson (1961)], Anderson-Darling (AD) [Anderson et Darling (1954)], Cramér-von Mises (CVM) [Cramér (1928)] et Jarque-Bera (JB) [Jarque et Bera (1980, 1987)].

Dans la section 2, on expose le modèle de régression linéaire utilisé pour les tests de normalité basés sur des résidus. Dans la section 3, on définit les notations et on dérive les tests de normalité qui nous concernent. On démontre aussi que les statistiques de test sont pivotales. Dans la section 3, on discute aussi les résultats obtenus et on essaie de tirer quelques conclusions.

2.1. Modèle de régression linéaire

Pour les tests de normalité, on considère la situation des erreurs associées au modèle de régression linéaire suivant:

$$Y = X\beta + \varepsilon \tag{2.1.1}$$

où $Y = (Y_1, Y_2, ..., Y_n)'$ est un vecteur $n \times 1$ d'observations sur une variable dépendante, $X = [X_1, X_2, ..., X_p] = [x_1, x_2, ..., x_n]'$ est une matrice $n \times p$ fixe de rang p où $X_p = (1, 1, ..., 1)'$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_p)'$ est un vecteur $p \times 1$ de coefficients de régression inconnus et ε est un vecteur $n \times 1$ de perturbations aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) de loi $N(0, \sigma^2)$.

Dans le contexte du modèle (2.1.1), le vecteur des résidus associés aux moindres carrés ordinaires (m.c.o.) est

$$\hat{\varepsilon} \;=\; Y - X\hat{\beta} = (I_n - H)Y = (I_n - H)\varepsilon \tag{2.1.2}$$

où

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y \text{ et } H \;=\; X(X'X)^{-1}X' \tag{2.1.3}$$

est la matrice de projection usuelle. On montre que:

$$\hat{\varepsilon} \sim N\left[0_n, \sigma^2(I_n - H)\right]. \tag{2.1.4}$$

On remarque que le vecteur des résidus des m.c.o. n'est aucunement fonction du vecteur β. On rappelle que l'estimateur des m.c.o. coïncide ici avec l'estimateur du maximum de vraisemblance [Gouriéroux et Monfort (1989, pages 105-106)]. On remarque aussi que, d'après le théorème de Gauss-Markov, $\hat{\beta}$ est optimal parmi les estimateurs linéaires sans biais et

$$Cov(\hat{\beta}) = \sigma^2(X'X)^{-1}. \tag{2.1.5}$$

Théoriquement, les résidus $\hat{\varepsilon}_1, ..., \hat{\varepsilon}_n$ ne sont pas équidistribués [voir (2.1.4)]. Mais dans cette étude, nous allons explorer le résultat démontré par White et MacDonald (1980, sections 2 et 3) indiquant que les statistiques utilisant les résidus standardisés $\hat{\varepsilon}_1/\hat{S}, ..., \hat{\varepsilon}_n/\hat{S}$, où $\hat{S}^2 = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i^2$ sont approximativement équivalentes à leurs homologues fondées sur les perturbations normales, après les avoir centrées et réduites, $(\varepsilon_1 - \bar{\varepsilon})/S, ..., (\varepsilon_n - \bar{\varepsilon})/S$, où $\bar{\varepsilon} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i$ et $S^2 = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2$. En remarquant que le vecteur des résidus des m.c.o. n'est aucunement fonction du vecteur β, on peut voir facilement que les statistiques construites à partir des résidus standardisés $\hat{\varepsilon}_1/\hat{S}, ..., \hat{\varepsilon}_n/\hat{S}$ sont pivotales. Par conséquent, les tests de MC associés sont exacts et invariants quant aux paramètres de tendance centrale et de dispersion [Dufour (1995, section 2)].

2.2. Statistiques de test

Dans le contexte du modèle de régression linéaire (2.1.1), on veut vérifier si

$$\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n \text{ sont régies par une loi } N(0, \sigma^2). \tag{2.2.1}$$

Si σ^2 était connu, il serait équivalent de vérifier si

$$\frac{\varepsilon_1}{\sigma}, ..., \frac{\varepsilon_n}{\sigma} \text{ sont régies par une loi } N(0, 1).$$

Mais, puisque les perturbations ε_i sont inobservables et σ^2 est inconnu, il est fréquent de remplacer les ε_i par les résidus $\hat{\varepsilon}_i$ et σ^2 par $\hat{S}^2 = (n-p)^{-1}\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i^2$, c'est à dire de vérifier, comme le recommandent White et MacDonald (1980), si

$$H_0 : \hat{\varepsilon}_1/\hat{S}, ..., \hat{\varepsilon}_n/\hat{S} \text{ sont régies par une loi } N(0, 1). \tag{2.2.2}$$

Il est à noter que les tests de normalité d'un échantillon aléatoire pourront être remplacés par leurs équivalents effectués sur des résidus d'un modèle de régression de type position-échelle (*location−scale*) dont la matrice de variables explicatives est constituée du seul vecteur $(1, 1, ..., 1)'$. Plus précisément, soit $X_1, X_2, ..., X_n$ un échantillon aléatoire associé à la variable aléatoire X dont la distribution est

$F(x, \mu, \sigma^2)$. Pour μ et σ^2 inconnus, on peut voir facilement que le problème de vérifier l'hypothèse nulle

$$H_0^{'} : F(x, \mu, \sigma^2) \text{ est la distribution d'une loi N}(\mu, \sigma^2), \qquad (2.2.3)$$

est équivalent à vérifier l'hypothèse H_0, où $\hat{\varepsilon}_i = X_i - \bar{X}, 1 \leq i \leq n$, et $\bar{X} = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Enfin, pour effectuer des tests de l'hypothèse nulle H_0, on considère les statistiques de test ci-dessous, où $\Phi(x)$ désigne la fonction de répartition (f.r.) de la loi normale standard, stipulée par H_0.

2.2.1. La statistique KS

Cette statistique a été introduite par Kolmogorov (1933) pour mesurer l'écart entre la fonction de répartition expérimentale (f.r.e.) et la fonction de répartition (f. r.) stipulée par l'hypothèse nulle. Dénotons par $\hat{\varepsilon}_{(1)}/\hat{S} \leq \hat{\varepsilon}_{(2)}/\hat{S} \leq ... \leq \hat{\varepsilon}_{(n)}/\hat{S}$ les statistiques d'ordre associées aux résidus de régression standardisés $\hat{\varepsilon}_1/\hat{S}$, $\hat{\varepsilon}_2/\hat{S}, ..., \hat{\varepsilon}_n/\hat{S}$. La statistique KS est définie comme étant

$$KS = sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \qquad (2.2.4)$$

où

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < \hat{\varepsilon}_{(1)}/\hat{S} \\ i/n, & \hat{\varepsilon}_{(i)}/\hat{S} \leq x < \hat{\varepsilon}_{(i+1)}/\hat{S}, \quad \text{i = 1, 2, ..., n-1.} \\ 1, & \hat{\varepsilon}_{(n)}/\hat{S} \leq x \end{cases}$$

Si l'on définit

$$Z_i = \Phi(\hat{\varepsilon}_{(i)}/\hat{S}), i = 1, ..., n,$$

si l'on dénote par $F_n^Z(z), 0 \leq z \leq 1$, la f.r.e. associée aux $Z_i, 1 \leq i \leq n$, si l'on introduit la différence expérimentale $D^Z(z) = \left\{F_n^Z(z) - z\right\}, 0 \leq z \leq 1$, et si l'on pose enfin $z = \Phi(x)$, alors:

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \sum_{i=1}^{n} I_{[0,\infty[}(x - \hat{\varepsilon}_{(i)}/\hat{S}) = \sum_{i=1}^{n} I_{[0,\infty[}\left(\Phi(x) - \Phi(\hat{\varepsilon}_{(i)}/\hat{S})\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} I_{[0,1]}(z - Z_i) = F_n^Z(z) \end{aligned}$$

de sorte que

$$D(x) = \{F_n(x) - \Phi(x)\} = \left\{F_n^Z(z) - z\right\} = D^Z(z).$$

Donc

$$KS = sup_x|D(x)| = sup_{0 \leq z \leq 1}|D^Z(z)|, \tag{2.2.5}$$

et il en ressort finalement que

$$KS = Max(D^{Z+}, D^{Z-}), \tag{2.2.6}$$

où $D^{Z+} = Max_{i=1,\dots,n}\left(\frac{i}{n} - Z_{(i)}\right)$ et $D^{Z-} = Max_{i=1,\dots,n}\left(Z_{(i)} - \frac{i-1}{n}\right)$. Mais les distributions exacte et limite de cette statistique ne sont pas standard. Par conséquent, le test de KS est effectué en utilisant des points critiques tabulés. Dans le cas d'ajustement à une loi normale de moyenne et variance inconnues (modèle position-échelle), on adopte les tables de Lilliefors (1967) qui fournissent les valeurs critiques obtenues par simulation que pour les tailles d'échantillon inférieures ou égales à 30. Pour les tailles dépassant 30, les points critiques sont déduits de la loi asymptotique. Le test de KS basé sur ces valeurs critiques soit tabulées soit approximatives présente souvent un problème de niveau. Afin de réduire les conséquenses de cet inconvénient qui est commun à plusieurs tests, Stephens [D'Agostino et Stephens (1986, chapitre 4)] a proposé des modifications des statistiques originales et a établi de nouvelles valeurs critiques. Pour la statistique KS, la modification est

$$KS_{St} = KS(\sqrt{n} - 0,01 + 0,85/\sqrt{n}). \tag{2.2.7}$$

2.2.2. La statistique CVM

On considère la famille des statistiques quadratiques de Cramér-von Mises

$$Q = n \int_{-\infty}^{\infty} \{F_n(x) - \Phi(x)\}^2 \psi(x) d\Phi(x),$$

où $\psi(x)$ est une fonction de pondération de $\{F_n(x) - \Phi(x)\}^2$. Le cas particulier où $\psi(x) = 1$ correspond à la statistique CVM [voir D'Agostino et Stephens (1986, pages 100-101)] et on a

$$CVM = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n} \left[Z_{(i)} - \frac{2i-1}{2n} \right]^2 . \tag{2.2.8}$$

On remarque que la statistique CVM est aussi une mesure d'écart entre les deux fonctions F_n(x) et $\Phi(x)$. Mais cette statistique considère n différences entre F_n(x) et $\Phi(x)$, tandis que la statistique KS considère uniquement la différence la plus grande. Dans le cas d'ajustement à une loi normale de moyenne et variance inconnues, la modification de Stephens est

$$CVM_{St} = CVM(1,0 + 0,5/\sqrt{n}). \tag{2.2.9}$$

2.2.3. La statistique AD

Elle est aussi un cas particulier de la famille des statistiques quadratiques de Cramér-von Mises. En posant $\psi(x) = 1/\left[\{\Phi(x)\}\{1 - \Phi(x)\}\right]$, on a

$$AD = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (2i - 1) \left[log(Z_{(i)}) + log(1 - Z_{(n+1-i)}) \right] . \tag{2.2.10}$$

La modification de Stephens pour cette statistique pour le cas d'ajustement à une loi normale de moyenne et variance inconnues est

$$AD_{St} = AD(1,0 + 0,75/n + 2,25/\sqrt{n}). \tag{2.2.11}$$

2.2.4. La statistique W

Elle est une modification de celle de CVM effectuée par Watson (1961). En posant $\bar{Z} = \sum_{i=1}^{n} Z_i/n$, on la définit par

$$\begin{aligned} W &= n\int_{-\infty}^{\infty}\{F_n(x) - \Phi(x) - \int_{-\infty}^{\infty}[F_n(x) - \Phi(x)]dF(x)\}^2 d\Phi(x) \\ &= CVM - n(\bar{Z} - 0,5)^2. \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

La modification de Stephens correspondante est

$$W_{St} = W(1,0 - 0,02/n)(1 + 0,35/n) \tag{2.2.13}$$

Les tests de W, de AD et de CVM sont effectués en utilisant des points critiques tabulés dans Pearson et Hartley (1972) et adaptés par Stephens [D'Agostino et Stephens (1986, pages 122-133)].

2.2.5. Statistique JB

Les tests de JB se rapportent à la famille des fonctions de densité de Pearson [Pearson (1965)] et sont dérivés en appliquant le principe ML. Il est à noter qu'on appelle ceux-ci tests de JB malgré le fait qu'ils ont initialement été proposés par d'autres auteurs (voir , par exemple, Bowman et Shenton (1975)). La raison en est que Jarque et Bera ont été les deux premiers à les avoir suggérés en recourant au principe ML. La distribution limite des statistiques de test est celle d'un khi-deux centré et chaque test a une puissance asymptotique locale maximale. Cependant, la distribution exacte n'est pas calculable de façon analytique. Par conséquent, les propriétés pour un échantillon de taille finie ont toujours été étudiées par simulation[voir, à titre d'exemple, Pierce et Gray (1982), White et MacDonald (1980), Anderson (1994)].

Par ailleurs, pour dériver le critère de JB comme test de ML, Jarque et Bera (1987, page 165) ont utilisé le fait que la loi normale appartient à la famille de

Pearson et ils ont montré que

$$JB = n\left[(\sqrt{b_1})^2/6 + (b_2-3)^2/24\right] \tag{2.2.14}$$

où

$$\sqrt{b_1} = \hat{\mu}_3/\hat{\mu}_2^{3/2}\ ,\ b_2 = \hat{\mu}_4/\hat{\mu}_2^2\ ,\ \hat{\mu}_j = \sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^j/n.$$

Ici, $\sqrt{b_1}$ et b_2 sont respectivement les coefficients d'asymétrie et d'applatissement expérimentaux. Afin d'explorer les propriétés de ces deux coefficients, D'Agostino et Stephens (1986, chapitre 6) ont considéré les statistiques $AS = \sqrt{b_1}$ et $AP = b_2$. Dans le cas du modèle (2.1.1), on considère aussi les tests des momemts basés sur $s^2 = \sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2/(n-p)$, l'estimateur sans biais usuel de σ^2, à savoir $JB_s = (n-p)JB/n, AS_s = (n-p)AS/n$ et $AP_s = (n-p)AP/n$.

2.3. Analyse de la performance des tests

Avant de présenter les résultats et les conclusions obtenues, rappelons que les onze statistiques décrites plus haut sont utilisées dans le contexte du modèle de régression (2.1.1). Le cas d'observsations i.i.d. est étudié dans le contexte du modèle position-échelle. Par conséquent, toutes ces statistiques sont pivotales et les tests de MC associés sont exacts.

Dans cette étude, nous avons considéré des échantillons de tailles 25, 50, 100 et 300, générés à partir des lois normale centrée réduite, bêta(2,3), Cauchy, gamma(2,1), lognormale et Student(5) qui seront notées respectivement N, B, C, Γ, Ln et t.

Les résultats obtenus sont présentés dans les tableaux A.1 à A.12 Ces résultats montrent que tous les tests basés sur des valeurs critiques ont un problème de niveau. Cette conclusion est très nette lorsque la taille de l'échantillon considéré est relativement faible (voir le tableau A.1 pour $n = 25$) ou lorsque les tests sont effectués sur des résidus de régression issus d'un modèle où la matrice X est formée d'un terme constant, d'un ensemble de k variables fantoches et d'un ensemble de variables indépendantes normales centrées réduites. Formellement, on peut écrire

$X = [\, X_{(1)}\ X_{(2)}\ X_p]$, où $X_{(1)} = \begin{bmatrix} I_k \\ O_{(n-k,k)} \end{bmatrix}$, la matrice O ne contenant que des zéros, $X_{(2)}$ est formée de $p-k-1$ variables explicatives indépendantes normales centrées réduites et $X_p = (1, 1, ..., 1)'$. Par contre, tous les niveaux expérimentaux des tests MC se maintiennent à un niveau acceptable (pour illustration, voir les tableaux A.5 à A.8).

Quant à la puissance expérimentale, on note que nos conclusions se basent uniquement sur les résultats relatifs aux tests de MC. Avant d'examiner les résultats correspondants aux résidus de régression, nous remarquons que tous les tests ont une forte puissance si la la taille de l'échantillon considéré est relativement élevée ($\geq$100). Dans le contexte du modèle de position-échelle, le test AD, le meilleur des tests basés sur la f.r.e., se compare favorablement aux tests des moments et il n'a aucun problème de biais. Malgré qu'il a une puissance biaisée sous la contre-hypothèse de la distribution bêta pour $n = 25$, le test JB a la meilleure puissance sous les contre-hypothèses des lois de Cauchy, lognormale et Student. Il est plus performant que le test AD dans le cas de la loi Γ et $n \leq 50$. Comme il était attendu, tous les tests de MC ont une très bonne puissance dans le cas d'échantillon de taille réduite et sous les contre-hypothèses des lois de Cauchy et lognormale. En comparant les puissances sous les contre-hypothèses B et t, on peut sélectionner AD et JB comme les deux meilleurs tests. Pour les échantillons de taille inférieure à 50, nous remarquons une faible puissance des sept tests étudiés si la contre-hypothèse est B. D'ailleurs, pour cette contre-hypothèse et pour $n = 25$, aucun test n'a pu avoir une puissance supérieure à 5,5%. Pour $n = 50$, seule la puissance du test AD est supérieure à 10% (voir les tableaux A.1 et A.2). On peut remarquer nettement l'effet positif de la procédure des test de MC sur la performance des tests des moments. En effet, la puissance du test JB a été sensiblement améliorée pour $n \leq 100$. Cette amélioration se justifie par le niveau sous-estimé du test original de JB.

Il est à noter que les modifications de Stephens, d'ailleurs toutes sous forme de transformation affine, n'ont pas contribué d'une manière appréciable ni à la correction du niveau ni à l'amélioration de la puissance (voir les tableaux A.1 et A.4). Le seul apport de ces modifications est l'utilisation d'un seul point critique pour toutes les tailles d'échantillon. Puisque les tests de MC sont invariants quant aux transformations affines, on n'a pas à calculer le niveau et la puissance expérimentaux des tests de MC correspondants.

Les résultats relatifs aux tests effectués sur des résidus de régression font apparaître que, parmi les onze tests étudiés, JB_s est le plus performant. D'ailleurs, la puissance de ce test est soit nettement supérieure aux puissances de tous les tests (cas de la contre-hypothèse B) soit légèrement inférieure à des puissances d'autres tests (pour illustration, voir les tableaux A.9 à A.12).

Chapitre 3

TESTS D'AJUSTEMENT À D'AUTRES LOIS CONNUES

Dans ce chapitre, on veut introduire une statistique de test basée sur une combinaison d'un sous sensemble de statistiques de test fondées soit sur la f.r.e. (KS, CVM, W et AD), étudiées dans le chapitre précédent, soit sur le coefficient de corrélation pour effectuer des tests d'ajustement de plusieurs lois connues. Pour les tests d'ajustement à des lois connues, nous nous référons aux travaux de D'Agostino et Stephens (1986, chapitre 4). Nous reprenons les mêmes lois et nous nous basons sur les valeurs critiques utilisées par ces auteurs. Nous tenons compte aussi des modifications suggérées par Stephens. Pour chaque distribution à plus d'un paramètre, ces auteurs présentent les différentes situations où certains paramètres sont connus et les autres sont inconnus. Dans cette étude, nous nous limitons aux cas des lois à paramètres de position et d'échelle inconnus.

Pour l'estimation des paramètres inconnus, Stephens s'est limité fréquemment aux estimateurs du maximum de vraisemblance (MV). Malgré les qualités reconnues de ces estimateurs, nous allons constater dans ce chapitre que l'utilisation des estimateurs basés sur les moments améliore, dans plusieurs situations, la puissance des tests étudiés. Ceci nous permettra d'introduire des tests combinés de MC qui s'avéreront, dans la majorité des cas, nettement plus performants que les tests originaux.

Dans la section 3.1, nous discutons la démarche suivie pour obtenir des statistiques pivotales et nous présentons les tests basés sur le coefficient de corrélation et les tests combinés de MC. Dans chacune des sections 3.2 à 3.5, nous présentons les caractéristiques d'une loi dont on envisage l'étude, nous précisons les valeurs critiques utilisées et leur provenance et nous comparons au moyen d'une simulation les tests originaux et les tests de MC.

3.1. Statistiques de test

On considère un échantillon aléatoire X_1, ..., X_n associé à la variable aléatoire X dont la f.r. est $F(x, \alpha, \beta)$, où $(\alpha, \beta) \in R \times R^+$ sont, respectivement, des paramètres de position et d'échelle inconnus. Le problème, dans ce chapitre, est de confronter les hypothèses

$$H_0 \quad : F(x, \alpha, \beta) = F_0\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) \text{ pour tout } x \in]-\infty, +\infty[\quad (3.1.1)$$

et

$$H_1 \quad : F(x, \alpha, \beta) \neq F_0\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) \text{ pour au moins une valeur de } x,$$

où F_0 est une f.r. connue. Si α et β étaient connus, il serait équivalent de vérifier si

$$H_0 \quad : \frac{X_1-\alpha}{\beta}, ..., \frac{X_n-\alpha}{\beta} \text{ sont régies par la f.r. } F_0(x)$$

mais, puisqu'ils sont inconnus, on remplace α par un estimateur $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(X_1, ..., X_n)$ équivariant par translation et par dispersion et β par un estimateur $\hat{\beta} = \hat{\beta}(X_1, ..., X_n)$ invariant par translation mais équivariant par dispersion, c'est-à-dire que l'on considèrera des statistiques qui seront fonctions des variables observables $\frac{X_1-\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}, ..., \frac{X_n-\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}$. Celles-ci ne sont pas en général mutuellement indépendantes et ne suivent pas la loi F_0, mais leur distribution ne dépendra pas des valeurs inconnues α et β.

3.1.1. Tests basés sur la f.r.e.

Nous reprenons, dans ce chapitre, les quatre statistiques de test basés sur la f.r.e., KS, CVM, W et AD, telles qu'elles ont été définies dans le chapitre 2. Nous tenons compte aussi de toutes les modifications suggérées par Stephens [D'Agostino et Stephens (1986, chapitre 4)].

Si l'on introduit la f.r.e. associée aux $W_i = (X_i \text{ -}\hat{\alpha})/\hat{\beta}, 1 \leq i \leq n$, plus précisément, si l'on définit

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < W_{(1)} \\ i/n, & W_{(i)} \leq x < W_{(i+1)}, \quad i = 1, 2, ..., n-1 \\ 1, & W_{(n)} \leq x \end{cases}$$

où $W_{(1)} < ... < W_{(n)}$ sont les statistiques d'ordre associées aux $W_i, 1 \leq i \leq n$, nous rappelons qu'on considèrera entre autres les quatre statistiques de test KS, CVM, W et AD basées sur la différence expérimentale

$$D(x) = \{F_n(x) - F_0(x)\}, x \in R,$$

en vue d'effectuer le test de H_0. Il est à noter que cette différence est pivotale en ce sens que sa loi ne dépend ni de α, ni de β. En effet, bien que la loi des $X_i, 1 \leq i \leq n$, dépende de α et de β, celle des $T_i = (X_i - \alpha)/\beta, 1 \leq i \leq n$, n'en est pas fonction. De plus, les propriétés d'invariance et d'équivariance des estimateurs font en sorte que

$$\hat{\alpha}(T_1, ..., T_n) = \frac{\hat{\alpha}(X_1, ..., X_n) - \alpha}{\beta} = \frac{\hat{\alpha} - \alpha}{\beta}$$

et

$$\hat{\beta}(T_1, ..., T_n) = \frac{\hat{\beta}(X_1, ..., X_n)}{\beta} = \frac{\hat{\beta}}{\beta},$$

d'où, pour $1 \leq i \leq n$,

$$\frac{T_i - \hat{\alpha}(T_1, ..., T_n)}{\hat{\beta}(T_1, ..., T_n)} = \frac{\frac{X_i - \alpha}{\beta} - \frac{\hat{\alpha} - \alpha}{\beta}}{\frac{\hat{\beta}}{\beta}} = \frac{X_i - \hat{\alpha}}{\hat{\beta}} = W_i.$$

Il en ressort que la loi de $W_i, 1 \leq i \leq n$, et à fortiori celle de $F_n(x)$, n'est aucunement fonction des paramètres α et β. Par conséquent, pour effectuer des simulations, on pourra supposer sans perdre de généralité que $\alpha = 0$ et $\beta = 1$. Par ailleurs, si l'on définit

$$Z_i = F_0(W_i), i = 1, ..., n,$$

si l'on dénote par $F_n^Z(z), 0 \leq z \leq 1$, la f.r.e. associée aux $Z_i, 1 \leq i \leq n$, si l'on introduit la différence expérimentale $D^Z(z) = \left\{F_n^Z(z) - z\right\}, 0 \leq z \leq 1$, et si l'on pose enfin $z = F_0(x)$, on a, comme on a vu à la sous-section 2.2.1:

$$F_n(x) = F_n^Z(z)$$

de sorte que

$$D(x) = \{F_n(x) - F_0(x)\} = \left\{F_n^Z(z) - z\right\} = D^Z(z).$$

On peut donc conclure qu'un paramètre de position ou d'échelle inconnu dans la distribution de X ne pourrait être considéré comme paramètre de nuisance pour les statistiques KS, CVM, W et AD. De plus, l'avantage d'une telle transformation réside dans le fait qu'alors que l'argument x parcourt la droite réelle, l'argument z, quant à lui, parcourt l'intervalle unitaire.

3.1.2. Tests basés sur le coefficient de corrélation

Pour effectuer le test de H_0, donnée par (3.1.1), on considèrera également des statistiques basées sur le coefficient de corrélation entre le vecteur $W_{(.)} = (W_{(1)}, .., W_{(n)})'$ des statistiques d'ordre associées au vecteur $W = (W_1, .., W_n)'$, défini dans la section précédente, et un ensemble de cotes $c = (c_1, .., c_n)'$, où

$c_1 \leq ... \leq c_n$, et qui dépendent de F_0. Le coefficient de corrélation est évidemment défini comme étant

$$R(W_{(.)}, c) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(W_{(i)} - \bar{W})(c_i - \bar{c})}{\left[\sum_{i=1}^{n}(W_{(i)} - \bar{W})^2 \sum_{i=1}^{n}(c_i - \bar{c})^2\right]^{1/2}} \tag{3.1.2}$$

et, en ce qui concerne les cotes, nous nous concentrerons sur deux choix , à savoir,

$$m_i = E\left(F_0^{-1}(U_{(i)})\right), , i = 1, ..., n, \tag{3.1.3}$$

où $U_{(1)} < ... < U_{(n)}$ sont les statistiques d'ordre associées à un échantillon aléatoire de taille n et de la loi U(0,1), et

$$h_i = F_0^{-1}\left(E(U_{(i)})\right) = F_0^{-1}(\frac{i}{n+1}), , i = 1, ..., n, \tag{3.1.4}$$

puisqu'on sait que $U_{(i)}$ admet une loi bêta$(i, n-i+1)$. Le premier choix est qualifié de cotes exactes, tandis que le second est qualifié de cotes approximatives. Puisque la loi des $W_i, 1 \leq i \leq n$, ne dépend ni de α, ni de β, il est clair que toute statistique définie à partir du coefficient de corrélation (3.1.2) est pivotale.

3.1.3. Tests combinés de MC

Dans un contexte où on veut effectuer des tests d'une hypothèse nulle contre plusieurs contre-hypothèses, il arrive souvent que des tests présentent une puissance appréciable pour un premier sous-ensemble de contre-hypothèses mais une puissance plutôt médiocre pour un second sous-ensemble. Par contre, d'autres tests présentent le profil inverse. Dans de telles situations, une combinaison de tests peut fournir une procédure plus performante. Par ailleurs, les résultats de cette étude font apparaître qu'aucun des cinq tests présentés plus haut ne maintient une puissance relativement acceptable pour toutes les contre-hypothèses étudiées. Cette conclusion nous permet d'introduire des tests combinés basés sur un ensemble de statistiques sélectionnées. La combinaison que nous allons introduire est le maximum d'un certain nombre de statistiques de test sélectionnées après les avoir centrées et réduites. Pour centrer et réduire les statistiques de test sélectionnées, on constitue N échantillons sous l'hypothèse nulle et on évalue les paramètres de position et d'échelle de chaque statistique à partir de l'échantillon effectivement observé et des Néchantillons générés. Le choix de l'entier N dépend de la précision requise pour l'estimation des paramètres .

Formellement, dénotons par $ST = (ST_1, ..., ST_k)$ le vecteur des k statistiques sélectionnées. Soient $(ST_{1,0}, ..., ST_{k,0})$ la valeur observée du vecteur ST, et $(ST_{1,j}, ..., ST_{k,j})$, $1 \leq j \leq N$, N réalisations indépendantes de ST obtenues d'échantillons générés sous l'hypothèse nulle. On peut alors calculer

$$\overline{ST}_i = \frac{\sum_{j=0}^{N} ST_{i,j}}{N+1},\ S_i^2 = \frac{\sum_{j=0}^{N}(ST_{i,j} - \overline{ST}_i)^2}{N}\ ,\ i = 1, ..., k.$$

Nous allons considérer la statistique combinée suivante

$$CMC = Max_{1 \leq i \leq k} \left\{ \frac{ST_i - \overline{ST}_i}{S_i} \right\}. \tag{3.1.5}$$

Remarquons qu'une telle combinaison de statistiques pivotales est à son tour pivotale. Par conséquent, les tests de Monte Carlo associés sont exacts et invariants quant aux paramètres d'échelle et de position. On peut donc utiliser la méthode des tests de MC et, afin de réduire le temps de calcul dans nos expériences de simulation, nous retenons les mêmes ($N = 99$) échantillons générés sous l'hypothèse nulle pour la procédure MC et pour les estimations des paramètres de position et d'échelle des statistiques de test sélectionnées.

3.2. Tests d'ajustement d'une loi exponentielle

On considère, dans cette section, la loi exponentielle (Exp) de f.r.

$$F(x, \alpha, \beta) = 1 - exp\{-(x - \alpha)/\beta\},\ x > \alpha,\ -\infty < \alpha < +\infty \text{ et } \beta > 0. \tag{3.2.1}$$

Pour effectuer le test de l'hypothèse nulle H_0, on suit la procédure suivante [D'Agostino et Stephens(1986, page 141)]:

a) calculer les estimateurs $\hat{\beta} = n(\bar{X} - X_{(1)})/(n-1)$ et $\hat{\alpha} = X_{(1)} - \hat{\beta}/n$,

b) calculer $W_{(i)} = (X_{(i)}$ -$\hat{\alpha})/\hat{\beta}, 1 \leq i \leq n$,

c) calculer $Z_{(i)} = F_0(W_{(i)}) = 1 - exp(-W_{(i)}), 1 \leq i \leq n$,

d) trouver les statistiques KS, CVM, W et AD. Pour ces statistiques, nous utilisons les valeurs critiques tabulées par D'Agostino et Stephens(1986, Table 4.15) et les modifications de Stephens suivantes:

$$CVM_{St} = CVM(1,0 + 2,8/n - 3/n^2), \tag{3.2.2}$$

$$AD_{St} = AD(1,0 + 5,4/n - 11/n^2), \tag{3.2.3}$$

$$W_{St} = W(1,0 + 2,3/n - 3/n^2. \tag{3.2.4}$$

Les valeurs critiques correspondantes à ces modifications sont présentées par D'Agostino et Stephens(1986, Table 4.14).

e) trouver les deux statistiques basées sur le coefficient de corrélation suivantes

$$Z(W_{(.)}, m) = n\{1 - R^2(W_{(.)}, m)\} \tag{3.2.5}$$

où $m_i = E\left\{-log(1 - U_{(i)})\right\} = \sum_{j=1}^{i}(n-j+1)^{-1}, 1 \leq i \leq n$, [voir Savage (1956)], sont les cotes exactes,

$$Z(W_{(.)}, h) = n\{1 - R^2(W_{(.)}, h)\} \tag{3.2.6}$$

où $h_i = -log\left\{1 - E(U_{(i)})\right\} = -log\left\{1 - i/(n+1)\right\}, 1 \leq i \leq n$, sont les cotes approximatives. Ces deux tests ont été considérés par Stephens qui a évalué les valeurs critiques correspondantes [D'Agostino et Stephens (1986, pages 215-218, tables 5.6 et 5.7)].

Remarquons que les estimateurs $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ utilisés par Stephens sont des modifications des estimateurs basés sur les moments proposées par Cohen et Helm (1973) et rappelons que les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres α et β sont respectivement $X_{(1)}$ et $(\bar{X} - X_{(1)})$ et les estimateurs basés sur les moments sont $(\bar{X} - S)$ et S où

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i/n \text{ et } \mathrm{S} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2/(n-1) \right\}^{1/2}$$

[Johnson, Kotz et Balakrishnan(1994, v.1, pages 506-508)].

Pour évaluer les niveaux expérimentaux des tests étudiés, nous avons généré des échantillons provenant d'une loi $Exp(0,1)$ et pour évaluer leurs puissances expérimentales, nous avons généré des échantillons provenant de lois |N| (normale en valeur absolue), B, Γ, Ln, |t|(Student(5) en valeur absolue) et U (uniforme sur [0,1]).

Il est clair qu'une modification des estimateurs $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ influence nettement la puissance des tests basés sur la f.r.e. Les résultats de cette étude font apparaître que l'utilisation de l'estimateur basé sur les moments

$$\tilde{\beta} = S = \left\{ \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2/(n-1) \right\}^{1/2} \quad \text{et de } \tilde{\alpha} = X_{(1)} - \tilde{\beta}/n$$

améliore sensiblement la puissance des quatre tests KS, CVM, W et AD aux cas où H_1: $F(x, \alpha, \beta)$ est la distribution de lois |N|, B, Γ, |t| et U et a un effet négatif sur la puissance de KS, CVM et AD si H_1: $F(x, \alpha, \beta)$ est la distribution d'une Ln. Cette situation permet l'utilisation du test CMC présenté dans la section 3.2. Nous avons sélectionné les quatre ($k = 4$) statistiques de test $CVM, AD, CVMN$ et ADN, où $KSN, CVMN, WN$ et ADN sont les tests utilisant $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$. Il est facile de vérifier que $\hat{\alpha}$ et $\tilde{\alpha}$ sont des estimateurs équivariants par translation et par dispersion et que $\hat{\beta}$ et $\tilde{\beta}$ sont invariants par translation mais équivariants par dispersion. Par conséquent, toutes les statistiques utilisées dans la présente section sont pivotales.

En plus de la conclusion commune à toute cette étude, à savoir que les tests basés sur des valeurs critiques ont souvent un problème de niveau, et la conclusion selon laquelle les modifications de Stephens ne contribuent ni à la correction du niveau ni à l'amélioration de la puissance, il ressort des résultats présentés dans les tableaux B.1 à B.4 que: (i) l'utilisation des estimateurs basés sur les moments, améliore nettement la puissance des tests basés sur la f.r.e, (ii) les deux tests basés sur le coefficient de corrélation $Z(W_{(.)}, m)$ et $Z(W_{(.)}, h)$ ont une faible puissance par rapport à tous les tests étudiés, (iii) pour les tailles d'échantillon relativement faibles (inférieures à 50), le test CMC est le plus performant parmi tous les tests étudiés et (iv) pour les tailles d'échantillon relativement élevées (supérieures à 50), les deux tests $CVMN$ et ADN sont les plus performants.

3.3. Tests d'ajustement d'une loi de la valeur extrême et d'une loi Weibull

On considère ici la loi de la valeur extrême (EV) de f.r.

$$F(x, \alpha, \beta) = exp\left[-exp\left\{-\frac{x-\alpha}{\beta}\right\}\right], -\infty < x < +\infty, \tag{3.3.1}$$

où $-\infty < \alpha < +\infty$ et $\beta > 0$.

Pour tester l'hypothèse nulle H_0 dans le cas où les paramètres de cette loi sont inconnus, nous nous limitons aux tests fondés sur la f.r.e. Pour effectuer ces tests, on suit la procédure suivante [D'Agostino et Stephens (1986, pages 145-149)]:

a) calculer les estimateurs du maximum de vraisemblance $\hat{\beta}$ et $\hat{\alpha}$ donnés par les équations [Johnson, Kotz et Balakrishnan (1994, v.2, page 41)]:

$$\hat{\beta} = \sum_{i=1}^{n} X_i/n - \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i exp(-X_i/\hat{\beta})}{\sum_{i=1}^{n} exp(-X_i/\hat{\beta})}, \tag{3.3.2}$$

$$\hat{\alpha} = -\hat{\beta} log \left[\sum_{i=1}^{n} exp(-X_i/\hat{\beta})/n\right], \tag{3.3.3}$$

b) calculer $W_{(i)} = (X_{(i)} \text{-}\hat{\alpha})/\hat{\beta}, 1 \leq i \leq n,$

c) calculer $Z_{(i)} = F_0(W_{(i)}) = exp\left\{-exp\left(-W_{(i)}\right)\right\}, 1 \leq i \leq n,$

d) trouver les statistiques KS, CVM, W et AD.

Pour la statistique KS, nous utilisons les valeurs critiques calculées par Chandra, Singpurwalla et Stephens et reproduites par D'Agostino et Stephens (1986, Table 4.18). Pour les trois autres statistiques, Stephens suggère les modifications suivantes

$$CVM_{St} = CVM(1, 0 + 0, 2/\sqrt{n}), \tag{3.3.4}$$

$$AD_{St} = AD(1, 0 + 0, 2/\sqrt{n}), \tag{3.3.5}$$

$$W_{St} = W(1, 0 + 0, 2/\sqrt{n}), \tag{3.3.6}$$

et propose les mêmes valeurs critiques présentées par D'Agostino et Stephens (1986, Table 4.17) pour les statistiques originales et les statistiques modifiées.

e) trouver la statistique basée sur le coefficient de corrélation suivant

$$Z(W_{(.)}, h) = n\{1 - R^2(W_{(.)}, h)\} \tag{3.3.7}$$

où $h_i = -log\left\{-log\left[i/(n+1)\right]\right\}, 1 \leq i \leq n$ sont les cotes approximatives. Ce test a été considéré par Stephens qui a évalué les valeurs critiques correspondantes [D'Agostino et Stephens (1986, page 225, table 5.9)].

Remarquons que pour ces tests Stephens s'est limité aux estimateurs du maximum de vraisemblance, mais on peut aussi utiliser les estimateurs basés sur les moments. Rappelons que sous l'hypothèse H_0, on a

$$\begin{aligned} E(X) &= \alpha + \gamma\beta \simeq \alpha + 0,5772\beta, \ \gamma \text{ est la constante d'Euler, et} \\ V(X) &= \frac{1}{6}\pi^2\beta^2 \text{ [Johnson, Kotz et Balakrishnan (1994, v.2, page 12)].} \end{aligned}$$

D'où, on peut poser

$$\tilde{\beta} = \frac{\sqrt{6}}{\pi}S \text{ et } \tilde{\alpha} = \bar{X} - \gamma\tilde{\beta} \simeq \bar{X} - 0,5772\tilde{\beta}, \tag{3.3.8}$$

où

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i/n \text{ et S} = \left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2/(n-1)\right\}^{1/2}.$$

En se basant sur les procédures MC, nous considérons les tests KSN, $CVMN$, WN et ADN utilisant $\tilde{\beta}$ et $\tilde{\alpha}$. Nous considérons aussi le test CMC basé sur les quatre statistiques $CVM, AD, CVMN$ et ADN. Nous pouvons affirmer que toutes les statistiques utilisées dans cette section sont pivotales. En effet, l'estimateur $\tilde{\alpha}$ est obtenu par transformation affine de $\bar{X}$ quant à $\tilde{\beta}$ est le produit de S et d'une constante strictement positive. Il est évident donc que $\tilde{\alpha}$ est équivariant par translation et par dispersion et que $\tilde{\beta}$ est invariant par translation mais équivariant par dispersion. Afin de vérifier les mêmes conditions respectives pour les estimateurs $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$, supposons que $(\hat{\alpha}_X, \hat{\beta}_X)$ est une solution des deux équations

(3.3.2) et (3.3.3), on peut écrire alors:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i exp(-X_i/\hat{\beta}_X)}{\sum_{i=1}^{n} exp(-X_i/\hat{\beta}_X)} - \hat{\beta}_X = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \alpha) - \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \alpha) exp\left(-\frac{X_i-\alpha}{\hat{\beta}_X}\right)}{\sum_{i=1}^{n} exp\left(-\frac{X_i-\alpha}{\hat{\beta}_X}\right)} - \hat{\beta}_X = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i - \alpha}{\beta} - \frac{\sum_{i=1}^{n}(\frac{X_i-\alpha}{\beta}) exp\left\{-\left(\frac{X_i-\alpha}{\beta}\right)/\left(\frac{\hat{\beta}_X}{\beta}\right)\right\}}{\sum_{i=1}^{n} exp\left\{-(\frac{X_i-\alpha}{\beta})/(\frac{\hat{\beta}_X}{\beta})\right\}} - \frac{\hat{\beta}_X}{\beta} = 0$$

et

$$\hat{\beta}_X log\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} exp\left(-\frac{X_i}{\hat{\beta}_X}\right)\right] + \hat{\alpha}_X = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \hat{\beta}_X log\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} exp\left(-\frac{X_i - \alpha}{\hat{\beta}_X}\right)\right] + (\hat{\alpha}_X - \alpha) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\hat{\beta}_X}{\beta} log\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} exp\left\{-\left(\frac{X_i - \alpha}{\beta}\right)/\left(\frac{\hat{\beta}_X}{\beta}\right)\right\}\right] + \frac{\hat{\alpha}_X - \alpha}{\beta} = 0,$$

ce qui permet de conclure que $\left\{(\hat{\alpha}_X - \alpha)/\beta,\ \hat{\beta}_X/\beta\right\}$ est une solution des deux équations (3.3.2) et (3.3.3), une fois que la variable X est transformée en $Z = (X - \alpha)/\beta$. Par conséquent, nous pouvons affirmer que les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres α et β vérifient donc les conditions d'invariance et d'équivariance requises.

Les résultats relatifs aux tests d'ajustement d'une loi de la valeur extrême sont récapitulés dans les tableaux B.5 et B.6. Ces résultats confirment que les tests de MC contrôlent parfaitement le niveau. Par contre, pour les cas où la taille d'échantillon est relativement faible (inférieure à 25), on peut remarquer des situations où le niveau des tests basés sur des valeurs critiques tabulées est biaisé. Ils montrent aussi que l'utilisation des estimateurs $\tilde{\beta}$ et $\tilde{\alpha}$ affectent positivement la puissance des tests KSN et AD. Le test basé sur le coefficient de corrélation

$Z(W_{(.)}, h)$ a souvent la plus faible puissance. Donc, la comparaison des puissances des tests étudiés et la facilité de calcul de $\tilde{\beta}$ et $\tilde{\alpha}$ nous amène à recommander fortement le test ADN. Mais, si on tient à l'utilisation de $\hat{\beta}$ et $\hat{\alpha}$, les deux tests AD et CMC restent les meilleurs pour les cas où la taille d'échantillon est relativement faible (inférieure à 25). Pour des échantillons de taille relativement élevée, le test AD de MC est le plus performant.

Les mêmes tests et les mêmes conclusions peuvent être retenus pour la loi de Weibull $W(\theta, m)$ dont la f.r. est

$$F(x, \theta, m) = 1 - exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^m\right\}, x > 0, \tag{3.3.9}$$

où $m > 1$ et $\theta > 0$. La raison en est que

si $X \sim W(\theta, m)$, alors $Y = -logX \sim EV(\alpha, \beta)$, où $\alpha = -log\ \theta$ et $\beta = 1/m$.

3.4. Tests d'ajustement d'une loi logistique

Considérons la loi logistique (Log) de f.r.

$$F(x, \alpha, \beta) = \left[1 + exp\left\{-\frac{x-\alpha}{\beta}\right\}\right]^{-1}, -\infty < x < +\infty, \tag{3.4.1}$$

où $-\infty < \alpha < +\infty$ et $\beta > 0$.

En reprenant la procédure utilisée pour les tests d'ajustement de cette loi, Stephens suggère les estimateurs du maximum de vraisemblance $\hat{\beta}$ et $\hat{\alpha}$ solutions des équations

$$\sum_{i=1}^{n}\left[1 + exp\left\{\frac{X_i - \hat{\alpha}}{\hat{\beta}}\right\}\right] = \frac{n}{2} \tag{3.4.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \hat{\alpha}}{\hat{\beta}}\right)\frac{1 - exp\left\{(X_i - \hat{\alpha})/\hat{\beta}\right\}}{1 + exp\left\{(X_i - \hat{\alpha})/\hat{\beta}\right\}} = -n \tag{3.4.3}$$

et propose les modifications suivantes

$$CVM_{St} = [nCVM + 0,08/(n-1)], \quad (3.4.4)$$

$$AD_{St} = AD(1,0 + 0,25/n). \quad (3.4.5)$$

En examinant les équations (3.4.2) et (3.4.3), on peut voir aisément que les estimaturs du maximum de vraisemblance des paramètres α et β vérifient les conditions d'invariance et d'équivariance requises pour affirmer que les statistiques basées sur la f.r.e. sont toutes pivotales. Pour les statistiques KS, CVM et AD, originales et modifiées, nous utilisons les valeurs critiques calculées par Stephens et présentées par D'Agostino et Stephens (1986, Tables 4.22 et 2.23). Pour la statistique W, nous n'avons pas pu trouver une source de valeurs critiques.

Afin de résoudre le système d'équations (3.4.2) et (3.4.3), on doit avoir recours à une procédure itérative. En guise de valeurs initiales, Stephens propose $(\alpha_0, \beta_0) = (\bar{X}, S)$ [D'Agostino et Stephens (1986, Table 4.17)] tandis que Johnson, Kotz et Balakrishnan (1994) proposent $(\alpha_0, \beta_0) = (\bar{X}, \frac{\sqrt{3}}{\pi}S)$ [Johnson, Kotz et Balakrishnan(1994, v.2, page 128)]. Mais, il s'avère que la procédure itérative converge dans un nombre limité de cas vers la solution. D'ailleurs, si la taille d'échantillon est relativement élevée (supérieure à 25), la convergence vers la solution devient rare. Donc, la suggestion de Stephens consistant à recourir aux estimateurs du maximum de vraisemblance, tout en étant raisonnable, reste difficilement applicable si l'on désire comparer la perfomance de tests. Ceci nous amène à proposer les estimateurs facilement calculables basés sur les moments, à savoir

$$\tilde{\alpha} = \bar{X} \text{ et } \tilde{\beta} = \frac{\sqrt{3}}{\pi}S. \quad (3.4.6)$$

Rappelons que sous l'hypothèse H_0, on a $E(X) = \alpha$ et $V(X) = \pi^2\beta^2/3$ [Johnson, Kotz et Balakrishnan(1994, v.2, page 117)]. Nous considérons alors les tests

$KSN, CVMN, WN$ et ADN utilisant $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$. Il est clair que ces dernières statistiques sont pivotales. Nous considérons aussi le test basé sur le coefficient de corrélation $Z(W_{(i)}, h)$, où $h_i = log\{i/(n+1-i)\}$. Les valeurs critiques pour ce test sont fournises par D'Agostino et Stephens (1986, Table 5.11).

Dans notre étude expérimentale relative aux tests d'ajustement d'une loi logistique, nous avons réussi à obtenir des résultats décrivant le niveau et la puissance expérimentaux des tests originaux après 10 000 itérations, uniquement pour le cas où $n = 10$. Pour d'autres valeurs de n supérieure à 10, il était impossible d'obtenir des résultats mêmes pour 1000 itérations. Ces résultats sont présentés avec d'autres tests de MC basés sur les estimateurs $\tilde{\beta}$ et $\tilde{\alpha}$ pour $n = 10$, 25 et 50 dans le tableau B.7. Il ressort de ces résultats qu'aucun des tests étudiés n'arrivent à distinguer une loi logistique d'une loi normale. D'ailleurs, le test $Z(W_{(.)}, h)$ a une puissance biaisée sous les contre-hypothèses de la normale et de la loi Γ. Pour le reste des contre-hypothèses, tous les tests ont une puissance presque identique. Mais, l'utilisation du test ADN reste préférable.

3.5. Tests d'ajustement d'une loi unifome

Considérons, dans cette dernière section, la loi uniforme (U) de f.r.

$$F(x, \alpha, \beta) = \begin{cases} 0 & x < \alpha \\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & \alpha \leq x \leq \beta \\ 1 & x > \beta. \end{cases} \tag{3.5.1}$$

Pour les tests d'ajustement de cette loi, Stephens suggère de considérer les (n-2) transformations des statistiques d'ordre $X_{(1)}$, ..., $X_{(n)}$ $U_{(i)} = \frac{X_{(i+1)}-X_{(1)}}{X_{(n)}-X_{(1)}}, 1 \leq i \leq n-2$, en vue d'effectuer le test de l'hypothèse nulle H_0': les $U_{(i)}, 1 \leq i \leq n-2$ sont des statistiques d'ordre d'une loi $U(0,1)$ [D'Agostino et Stephens (1986, page 360)]. Le seul test qu'il a considéré pour l'hypothèse nulle H_0 est celui basé sur le coefficient de corrélation. Il est à noter que, pour le cas de la loi uniforme, l'ensemble de cotes exactes est identique à celui des cotes approximatives. Nous considérons donc la statistique $Z(W_{(.)}, m)$, où m est l'ensemble de cotes exactes $m_i = i/(n+1), 1 \leq i \leq n$ et les points critiques calculés par Stephens [D'Agostino et Stephens (1986, pages 199-200, table 5.1)]. Nous considérons aussi le test combiné de MC, CMC, constitué des statistiques sélectionnées AD et $Z(W_{(.)}, m)$. Afin de montrer avec quelle facilité on peut effectuer les tests de MC, nous proposons d'utiliser les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres α et β et nous reprenons les mêmes étapes:

a) trouver les estimateurs $\hat{\alpha} = X_{(1)}$ et $\hat{\beta} = X_{(n)}$

b) calculer $W_{(i)} = (X_{(i)} \text{-} \hat{\alpha})/(\hat{\beta} - \hat{\alpha}), 1 \leq i \leq n,$

c) noter que $Z_{(i)} = F_0(W_{(i)}) = W_{(i)}, \;\; i = 1, ..., n,$

d) trouver les statistiques $KS, CVM, W, AD, Z(W_{(.)}, m)$ et $CMC.$

Il est à noter que les paramètres de position et d'échelle utilisés sont respectivement α et $(\beta - \alpha)$. L'estimateur $\hat{\alpha}$ du paramètre de position est équivariant par translation et par dispersion et l'estimateur $(\hat{\beta} - \hat{\alpha})$ du paramètre d'échelle est invariant par translation mais équivariant par dispersion. Par conséquent, les statistiques, utilisées pour effectuer des tests d'ajustement d'une loi uniforme, sont toutes pivotales.

Les résultats relatifs aux tests d'ajustement d'une loi $U(\alpha, \beta)$ sont présentés dans le tableau B.8. Ces résultats font apparaître que le test basé sur le coefficient de corrélation se compare favorablement aux tests basés sur la la f.r.e. Ils montrent nettement la meilleure performance des deux tests CMC et $Z(W_{(.)}, m)$ dans les cas d'échantillons de taille relativement faible (inférieure à 50). D'ailleurs, les deux tests W et AD ont une puissance biaisée sous les contres hypothèses de la loi normale et de la loi B. Par contre pour des échantillons de taille élevée (supérieure à 50), le test W devient le meilleur.

Chapitre 4

TESTS D'ÉGALITÉ DE DEUX LOIS INCONNUES

Dans ce quatrième chapitre, nous étudions un certain nombre de tests d'égalité de deux distributions inconnues. Nous supposons que les deux distributions inconnues sont de même nature: les deux sont continues ou les deux sont discrètes. Nous considérons les versions pour deux échantillons des deux tests d'ajustement KS et CVM fondés sur la f.r.e. [Conover (1971), chapitre 6)]; trois tests basés sur l'estimateur par la méthode du noyau de la fonction de densité de probabilité (f.d.p.) Allen (1997); le test de l'égalité des moyennes et le test de Student [Efron et Tibshirani (1993)]; un test CMC tel que présenté au chapitre 3. Les tests basés sur l'estimateur par la méthode du noyau de la fonction de densité de probabilité (f.d.p.) ont été construits pour le cas où les distributions sont continues. Dans ce chapitre, nous montrerons qu'on peut facilement étendre l'utilisation de ces tests au cas où les distributions sont discrètes en considérant le même estimateur par la méthode du noyau pour la fonction de masse. Afin de comparer la performance des tests de MC avec des tests de permutation et des tests basés sur le bootstrap, nous nous référons aux travaux de Efron et Tibshirani (1993) et Allen (1997).

Dans la section 4.1, nous présentons les statistiques de test étudiées et nous précisons les valeurs critiques utilisées et leur provenance. Les sous-sections 4.2.1 et 4.2.2 contiennent pour les cas de distributions continues et de distributions discrètes, respectivement, les listes des lois dont nous aurons besoin pour le développement de ce chapitre et des études par simulation de la performance des tests dans les quatre situations suivantes: (i) les distributions ont la même moyenne et la même variance, (ii) les distributions ont la même moyenne et des variances différentes, (iii) les distributions ont la même variance et des moyennes différentes et (iv) les distributions ont des moyennes et des variances différentes.

4.1. Statistiques de test

On considère un échantillon aléatoire X_1, ..., X_n associé à la variable aléatoire X dont la la fonction de répartition est $F(x)$ et un échantillon aléatoire Y_1, ..., Y_m associé à la variable aléatoire Y dont la fonction de répartition est $G(x)$. Le problème est de tester l'hypothèse

$H_0 : F(x) = G(x)$ pour tout $x \in]-\infty, +\infty[$
contre l'hypothèse
$H_1 : F(x) \neq G(x)$ pour au moins une valeur de x.

Pour ce faire, nous considérons les trois groupes de statistiques de test ci-dessous. Toutes les statistiques de test seront utilisées dans le cas où les deux fonctions $F(x)$ et $G(x)$ seront supposées soit toutes deux continues, soit toutes deux discrètes. Dans le cas où les deux fonctions $F(x)$ et $G(x)$ seront supposées discrètes, les statistiques de test appartenant au groupe de tests basés sur un estimateur de la f.d.p. qui seront définis à la sous-section 4.1.2 seront utilisées en considérant l'estimateur de la fonction de masse. Avant de dériver les statistiques de test considérées, nous présentons la procédure d'application de la technique des tests de MC aux tests d'égalité de deux distributions inconnues. Pour ce faire, nous rappelons qu'il n'est pas nécessaire d'avoir N réalisations indépendantes de la statistique T. Mais, il suffit d'utiliser N réalisations interchangeables identiquement distribuées sous l'hypothèse nulle. Puisque sous H_0, la distribution du vecteur $(X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_m)$ est invariante par rapport à toutes les permutations de ses composantes, on peut générer N réalisations $T_1, ..., T_N$ interchangeables identiquement distribuées sous l'hypothèse nulle H_0 de la statistique T à partir de Npermutations aléatoires de $(X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_m)$. S'il y a présence d'ex aequo parmi $T_0, T_1, ..., T_N$, on recourt à la procédure de randomisation de Dufour (1995, section 2.2) présentée dans le chapitre 1.

4.1.1. Statistiques de test basées sur les f.r.e.

En utilisant les f.r.e. usuelles $F_n(x)$ et $G_m(x)$, on considère:

a) La statistique KS: cette statistique de test est la version pour deux échantillons de la statistique KS de Kolmogorov (1933) déjà présentée au chapitre 2. Smirnov (1939) a été le premier à l'avoir introduite pour mesurer l'écart entre les f.r.e. associées aux deux échantillons. Il l'a définie comme étant

$$KS = sup_x |F_n(x) - G_m(x)| \tag{4.1.1}$$

où $F_n(x)$ et $G_m(x)$ sont les f.r.e. associées aux deux échantillons. X_1, ..., X_n et Y_1, ..., Y_m respectivement. On peut démontrer que le test KS est libre $(distribution-free)$ [voir Conover (1971, page 313)]. Mais les distributions exacte et limite de cette statistique ne sont pas standard. D'ailleurs, pour le cas de deux échantillons de même taille, on utilise les valeurs critiques calculées par Birnbaum et Hall (1960) et reproduites par Conover (1971, table 16) et pour le cas de deux échantillons de tailles différentes, on utilise les valeurs critiques calculées par Massey (1952) et reproduites par Conover (1971, table 17).

b) La statistique CVM: de même, cette statistique de test est la version pour deux échantillons de la statistique CVM déjà présentée au chapitre 2. On la définit comme étant

$$CVM = \frac{mn}{(m+n)^2}\left\{\sum_{i=1}^{n}[F_n(X_i) - G_m(X_i)]^2 + \sum_{j=1}^{m}[F_n(Y_j) - G_m(Y_j)]^2\right\} \quad (4.1.2)$$

où $F_n(x)$ et $G_m(x)$ sont les f.r.e. associées aux deux échantillons. X_1, ..., X_n et Y_1, ..., Y_m respectivement.

Le test CVM pour deux échantillons est aussi libre mais les distributions exacte et limite de cette statistique ne sont pas standard. D'ailleurs, Anderson (1962) et Burr(1963 et 1964) ont calculé les point critiques pour des échantillons de tailles faibles ($n+m \leq 17$). Pour des échantillons de tailles élevées, ceux-ci sont calculés à l'aide de la loi asymptotique [Conover (1971), pages 314-316]. Conover (1971) a effectué une excellente étude de synthèse des tests KS et CVM pour deux échantillons. Il a mis l'accent sur le fait que les deux statistiques KS et CVM ne dépendent que du rang des X_i et des Y_i dans l'échantillon regroupé. Puisque le vecteur des rangs est uniformément réparti sur le groupe $(m+n)$ premiers entiers sous l'hypothèse H_0, on peut conclure que ces deux statistiques sont pivotales.

4.1.2. Statistiques de test basées sur un estimateur de la f.d.p.

Soit $f(x)$ la f.d.p. inconnue associée à la variable X de moyenne μ et de variance σ^2. Il est bien connu que les estimateurs de meilleures qualités de f sont construits en utilisant la méthode du noyau. Par conséquent, en se basant sur cette méthode et dans le but de comparer la performance des test de MC avec des tests effectués par d'autres auteurs, nous reprenons l'estimateur adopté par [Allen (1997), page 146], soit

$$\hat{f}_n(x) = \frac{C_X}{n}\sum_{i=1}^{n} K(C_X(x - X_i)) \quad (4.1.3)$$

où

$$K(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \quad \text{et } C_X = n^{1/5}/(2S_X),$$

S_X est l'estimateur usuel de l'écart type σ calculé à partir de l'échantillon X_1, ..., X_n. Soit $g(x)$ la f.d.p. inconnue associée à la variable Y. En se basant sur l'estimateur $\hat{f}_n$ de f et sur l'estimateur $\hat{g}_m$ de g construit d'une manière identique à $\hat{f}_n$, on considère les trois statistiques de test suivantes qui mesurent l'écart entre les f.d.p.:

a) La statistique $\hat{L}_1$: cette statistique est basée sur la distance $L_1 = \int |f - g|$ qu'on estime par $\hat{L}_1 = \int |\hat{f}_n - \hat{g}_m|$. Plus précisément,

$$\hat{L}_1 = \sum_{i=1}^{n} |\hat{f}_n(X_i) - \hat{g}_m(X_i)| + \sum_{j=1}^{m} |\hat{f}_n(Y_j) - \hat{g}_m(Y_j)| \text{ Allen (1997);} \qquad (4.1.4)$$

b) La statistique $\hat{L}_2$: on définit cette statistique à partir de la distance $L_2 = (\int (f-g)^2)^{1/2}$ et on obtient

$$\hat{L}_2 = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(\hat{f}_n(X_i) - \hat{g}_m(X_i) \right)^2 + \sum_{j=1}^{m} \left(\hat{f}_n(Y_j) - \hat{g}_m(Y_j)| \right)^2 \right\}^{1/2} \qquad (4.1.5)$$

Allen (1997);

c) La statistique $\hat{L}_\infty$: nous suggérons d'utiliser aussi la distance populaire $L_\infty = Sup|f - g|$ qu'on estime par $\hat{L}_\infty = Sup|\hat{f}_n - \hat{g}_m|$. Plus précisément,

$$\hat{L}_\infty = Max_{\{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}} \left\{ |\hat{f}_n(X_i) - \hat{g}_m(X_i)|; |\hat{f}_n(Y_j) - \hat{g}_m(Y_j)| \right\}. \qquad (4.1.6)$$

Pour effectuer les deux tests $\hat{L}_1$ et $\hat{L}_2$, Allen (1997) a utilisé des tests de permutation et des tests basés sur le bootstrap. Cet auteur a conclu qu'il n'y a pas une grande différence entre les deux types de tests, mais il a préféré la présentation des résultats des tests de permutation. Ceci nous permet de rappeler que Romano (1989) a fourni des arguments en faveur des tests de permutation: selon ce dernier, même si la différence entre les fluctuations critiques des tests de permutation et de bootstrap évaluée aux données observées converge en probabilité vers zéro, les tests de permutation sont préférables dans le cas des échantillons finis.

4.1.3. Statistiques de test basées sur l'égalité des moyennes

Malgré que les deux statistiques suivantes

$$\hat{\theta} = \bar{X} - \bar{Y} \text{ et } \hat{t} = \frac{(\bar{X} - \bar{Y})/\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^{m}(Y_j - \bar{Y})^2\right]/(n+m-2)}} \tag{4.1.7}$$

ont été conçues pour effectuer des tests d'égalité des moyennes, Efron et Tibshirani (1993, chapitre 15) les recommandent pour les tests d'égalité de deux distributions en utilisant des tests de permutation ou des tests basés sur le bootstrap. Il est à noter que Dwass (1957) fut le premier à suggérer d'effectuer un test de permutation fondé sur $\hat{\theta}$ en utilisant une procédure de test de MC exacte. Dans son étude, Allen (1997) a comparé les statistiques $\hat{\theta}, \hat{t}, KS, \hat{L}_1$ et $\hat{L}_2$. Nous considérons les statistiques $\hat{\theta}$ et $\hat{t}$, non seulement pour rendre plus fructueuses les comparaisons, mais également pour illustrer le fait que leur utilisation, en vue d'effectuer des tests d'égalité de deux distributions, peut facilement induire en erreur.

4.1.4. Test combiné de MC

Nous considérons aussi un test combiné CMC de MC défini par (3.1.5) dans le chapitre 3. Les statistiques sélectionnées sont KS et $\hat{L}_\infty$. Le choix de ces deux statistiques est fondé sur le fait que dans le cas de deux échantillons ayant la même moyenne (c'est alors dans ce cas que le danger est le plus grand de commettre l'erreur de deuxième espèce), le test KS est le meilleur parmi les tests basés sur les f.r.e., tandis que le test $\hat{L}_\infty$ est le meilleur parmi les trois tests basés sur un estimateur de la f.d.p. Mais, aucun de ces deux tests ne maintient la meilleure puissance pour toutes les contre-hypothèses étudiées.

4.2. Performance des tests d'égalité de deux distributions inconnues

Afin de s'assurer que l'étude expérimentale soit fiable, nous considérons des lois appartenant à différentes familles de distributions et nous étudions les effets de l'égalité des moyennes et de l'égalité des variances sur la performance des tests. Dans le but de confirmer les qualités des tests de MC et la performance du test CMC retenu, nous reprenons aussi deux des exemples de Allen (1997).

Nous commençons par rappeler que les statistiques basées sur la f.r.e. sont pivotales. Par contre, il est clair que les distributions de $\hat{\theta}$ et $\hat{t}$ ainsi que les distributions des statistiques basées sur un estimateur de la f.d.p. sont, même sous H_0, fonction de la distribution commune aux deux échantillons mais qui est inconnue. Pour résoudre ce problème, nous allons conditionner sur les statistiques d'ordre de l'échantillon obtenu en regroupant les observations X_1, ..., X_n et Y_1, ..., Y_m et en exploitant l'interchangeabilité des observations sous l'hypothèse nulle pour effectuer un test de permutation. La loi de permutation de la statistique envisagée est alors libre. Il s'ensuit que, sous l'hypothèse nulle, les distributions conditionnelles (étant donné les statistiques d'ordre) de toutes les statistiques étudiées et, en particulier, de $\hat{L}_1, \hat{L}_2$ et $\hat{L}_\infty$, ne sont pas fonction de la loi régissant les observations. Dans une telle situation, on dit que les statistiques sont conditionnellement pivotales car, en fait, un test de permutation est un test conditionnel (étant donné les statistiques d'ordre). Enfin, si le nombre de permutations possibles est astronomiquement élevé, on recourt aux tests de MC basés sur un nombre restreint de permutations aléatoires. En d'autres termes, nous allons effectuer des tests de permutations basés sur un nombre restreint de permutations tirées au hasard et rendus exacts par les résultats usuels sur les tests de MC. Afin de mieux identifier ces tests, nous les appellerons "tests permutationnels de MC". Les tests usuels basés sur des valeurs critiques (obtenues souvent d'une approximation de la distribution de la statistique) seront toujours appelés "tests originaux".

Dans notre étude expérimentale, nous avons utilisé $N = 99$ permutations pour effectuer les tests permutationnels de MC et 10 000 itérations pour évaluer le niveau et la puissance expérimentaux. Tous les tests ont été effectués au niveau 5%. Rappelons que le taux de rejet sur les 10 000 itérations constitue le niveau expérimental du test si les données utilisées pour le calcul de T_0 ont été générées à partir de la loi commune associée à H_0 et constitue la puissance expérimentale autrement.

Nous insistons sur la différence entre tests permutationnels de MC et tests de permutations (englobant les tests de permutations randomisés). Cette différence vient du fait que les tests de permutations usuels sont soit fondés sur la distribution obtenue à partir de la liste de toutes les permutations possibles soit sur une approximation de cette distribution, tandis que les tests permutationnels de MC sont des tests explicitement randomisés qui peuvent être basés sur un nombre très restreint de permutations. D'ailleurs, pour effectuer les tests de permutations, Allen (1997) s'est basé sur 499 échantillons. Par contre, comme nous l'avons déjà annoncé, les tests permutationnels de MC dans cette étude n'utilisent que 99 permutations.

4.2.1. Tests d'égalité de deux distributions continues

Pour les distributions continues, nous avons repris les mêmes lois qui ont été considérées dans le chapitre 2 pour les tests d'ajustement, à savoir, les lois N(0; 1), Exp(0; 1), Γ(2; 1), B(2; 3), Log(-1; 1), Ln(4; 1,5) et U(0; 1). Nous avons pris soin dans ce choix d'avoir à la fois des paramètres simples et des moyennes μ ainsi que des variances σ^2 sensiblement différentes. D'ailleurs, les moyennes et les variances de ces lois sont

Loi	N	Exp	Γ	B	Log	Ln	U
μ	0	1	2	0,4	-1	168,17	0,5
σ^2	1	2,25	2	0,04	$0,55133^{-2}$	240055	1/12

Pour les cas des distributions de moyenne ou de variance égales, nous considérons le même ensemble de lois et nous centrons par rapport à la valeur de μ pour obtenir toutes les moyennes égales à zéro et nous réduisons par σ pour avoir toutes les variances égales à un.

À partir des résultats de l'étude expérimentale, nous pouvons énoncer les conclusions suivantes.

(i) Les tests permutationnels de MC contrôlent parfaitement le niveau et sont facilement applicables (conclusion commune à tous les tests étudiés dans ce mémoire). En plus des résultats des tableaux C.1 à C.7, une comparaison des résultats des tests permutationnels de MC que nous obtenons [voir 4.1] et des résultats des tests de permutation et des tests bootstrap obtenus par Allen (1997) [voir 4.2] confirme cette conclusion.

TAB. 4.1. *Niveau et puissance expérimentaux (exprimés en pourcentage) des tests d'égalité de deux distributions: cas de $m = 22$, $n = 22$ et $\alpha = 5\%$; notre simulation.*

	$F \sim N(0,1)$									
	Tests originaux		Tests permutationnels de MC							
G	KS	CVM	KS	CVM	$\hat{t}$	$\hat{\theta}$	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_2$	$\hat{L}_\infty$	CMC
N(0; 1)	6,2	4,9	5,0	5,0	4,6	4,6	5,3	5,3	5,1	5,0
N(0,1; 1)	7,3	6,3	5,8	6,0	6,2	6,2	5,5	5,4	5,2	5,4
N(0,2; 1)	10,3	9,6	8,4	9,2	9,6	9,6	7,1	7,1	6,6	7,4
N(0,3; 1)	15,8	15,0	13,0	14,5	16,0	16,0	9,6	9,4	8,7	10,9
N(0,5; 1)	33,3	34,4	28,3	33,0	36,1	36,1	19,6	18,9	17,4	23,8
N(0,7; 1)	54,9	57,9	49,1	56,5	60,8	60,8	34,7	33,8	30,9	41,4
N(0; $1,2^2$)	7,0	5,9	5,7	5,7	5,2	5,2	9,8	9,8	9,8	8,4
N(0; $1,4^2$)	9,1	7,2	7,5	7,1	5,4	5,4	22,5	23,2	23,1	18,4
N(0; $1,6^2$)	11,8	9,1	9,7	9,0	5,1	5,1	40,6	41,4	41,6	34,3
N(0; $1,8^2$)	15,5	11,9	13,4	11,9	5,1	5,1	59,4	60,1	60,2	52,0
N(0; $2,0^2$)	20,0	15,7	17,1	15,3	5,1	5,1	74,7	75,4	74,9	66,9

(ii) L'utilisation de $\hat{t}$ et $\hat{\theta}$ pour effectuer des tests d'égalité de deux distributions est erronée. D'ailleurs, iI est évident que deux distributions ne peuvent être égales si elles n'ont pas la même moyenne. Par contre, la réciproque n'est pas toujours vraie. Par conséquent, si les tests basés sur $\hat{t}$ et $\hat{\theta}$ acceptent l'hypothèse H_0, cela ne veut pas nécessairement dire que $F = G$: tout ce qu'on peut dire suite à cette décision est que les deux distributions F et G ont la même moyenne (en guise illustration, voir les résultats dans les tableaux 4.1, C.1 et C.5). Par ailleurs, il est connu que les deux tests de permutation basés sur $\hat{\theta}$ et $\hat{t}$ sont équivalents [voir, à titre d'exemple, Lehmann (1986), chapitre 5]. Il faut donc s'attendre à ce que la puissance des deux tests permutationnels de MC basés sur $\hat{\theta}$ et $\hat{t}$ soit la même et, effectivement, tous les résultats des tests permutationnels de MC (tableaux C.1 à C.7) et les tests de permutation effectués par Allen (1997) confirment l'équivalence entre les tests basés sur $\hat{t}$ et sur $\hat{\theta}$. D'ailleurs, pour $n = m = 22$, la puissance des deux tests permutationnels de MC est partout la même. Par contre, on peut remarquer des fluctuations de puissance des tests basés sur le bootstrap effectués par Allen (1997) même pour des tailles élevées ($n = m = 39$). Il serait donc plus raisonnable d'effectuer le test permutationnel de MC associé à $\hat{\theta}$, si l'on tient absolument à utiliser ce type de test.

(iii) Le comportement des tests basés sur $\hat{L}_1$ et $\hat{L}_2$ est presque partout identique et diffère légèrement de celui du test basé sur $\hat{L}_\infty$. De même, la puissance du test KS est peu différente de celle du test CVM. En général, si l'on compare la puissance des deux groupes (tests basés sur un estimateur de la f.d.p. et tests basés sur les f.r.e), on remarque une grande différence et on ne peut conclure qu'un test appartenant à l'un des groupes est plus performant que tous les tests de l'autre groupe.

(iv) Les tests basés sur les f.r.e. sont plus puissants que ceux basés sur un estimateur de la f.d.p. dans le cas de deux distributions ayant la même variance et des moyennes différentes (voir tableaux 4.1 et C.3). Par contre, si les deux distributions ont une même moyenne et des variances différentes, les tests basés sur un estimateur de la de la f.d.p. auront la meilleure puissance (voir tableaux 4.1 et C.5).

(v) Le test permutationnel CMC de MC est le plus performant en ce sens que sa puissance est soit la meilleure soit légèrement inférieure à celle des tests appartenant à l'un des groupes cités. Ce résultat est dû à l'élaboration de la statistique

TAB. 4.2. *Niveau et puissance expérimentaux (exprimés en pourcentage) des tests d'égalité de deux distributions: cas de $m = 22$, $n = 22$ et $\alpha = 5\%$; résultats obtenus par Allen (1997).*

	$F \sim N(0,1)$								
	Test original	Tests de permutation				Tests bootstrap			
G	KS	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_2$	$\hat{t}$	$\hat{\theta}$	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_2$	$\hat{t}$	$\hat{\theta}$
N(0; 1)	5,7	5,7	5,5	5,9	5,9	5,0	4,4	5,8	5,8
N(0,1; 1)	6,0	5,9	5,7	6,5	6,5	5,0	4,2	6,3	6,5
N(0,2; 1)	8,5	7,6	7,5	10,2	10,2	6,4	5,5	10,3	10,4
N(0,3; 1)	12,5	11,0	11,0	15,0	15,0	9,8	8,2	15,4	15,7
N(0,5; 1)	29,0	24,7	23,7	36,3	36,3	23,2	20,2	35,8	36,4
N(0,7; 1)	49,0	43,2	41,4	60,0	60,0	40,8	36,2	59,8	60,3
N(0; $1,2^2$)	6,6	11,3	10,6	5,9	5,9	9,8	7,8	5,6	5,7
N(0; $1,4^2$)	7,4	22,9	22,4	5,2	5,2	21,3	18,2	5,6	5,6
N(0; $1,6^2$)	11,1	41,5	40,6	5,9	5,9	38,8	34,8	5,8	5,8
N(0; $1,8^2$)	13,1	58,4	57,6	4,7	4,7	57,4	51,6	4,7	4,6
N(0; $2,0^2$)	18,7	74,6	73,5	5,2	5,2	72,6	68,4	5,4	5,9

Source: Allen (1997), tables 1-2.

du test qui combine une statistique basée sur un estimateur de la f.d.p. et une autre basée sur les f.r.e. .

4.2.2. Tests d'égalité de deux distributions discrètes

Afin d'analyser la performance des huit tests étudiés dans le cas de deux distributions discrètes, nous considérons cinq lois discrètes usuelles, à savoir, les lois: uniforme discrète (UD), binomiale (Bin), géométrique (Geo), binomiale négative (BinN) et de Poisson (Poi). Puisqu'il est impossible de trouver un ensemble de paramètres pour les cinq lois en vue d'obtenir simultanément la même moyenne et la même variance, nous nous sommes limités à un choix de paramètres arbitrairement simples qui répond aux trois situations suivantes:

(a) les distributions ont la même moyenne $\mu = 10$ et des variances différentes où les lois sont UD(19), Bin(20; 0,5), Geo(0,1), BinN(8; 0,2) et Poi(10) et leurs variances sont

Loi	UD	Bin	Geo	BinN	Poi
σ^2	30	5	90	2,5	10

(b) les distributions ont la même variance $\sigma^2 = 8,25$ et des moyennes différentes où les lois sont UD(10), Bin(33; 0,5), Geo(($\sqrt{34}$ -1)/16,5), BinN(3, ($\sqrt{108}$ -3)/16,5) et Poi(8,25) et leurs moyennes sont

Loi	UD	Bin	Geo	BinN	Poi
μ	5,5	16,5	3,42	2,23	8,25

(c) les distributions ont des moyennes et des variances différentes où les lois sont UD(10), Bin(10; 0,1), Geo(0,3), BinN(10; 0,2) et Poi(5) et leurs moyennes et leurs variances sont

Loi	UD	Bin	Geo	BinN	Poi
μ	5,5	1	3,33	50	5
σ^2	8,25	0,9	7,78	200	5

Les résultats des expériences de simulation pour les trois situations sont présentés successivement dans les tableaux C.9 à C.11. Nous retrouvons, d'après ces résultats, toutes les qualités des tests permutationnels de MC et, en particulier, celles du test CMC décrites par les conclusions citées dans la sous-section précédente. De plus, nous retrouvons le résultat énoncé par Noether et cité dans

Conover (1971, page 309) selon le quel le test KS utilisé pour des distributions discrètes est conservateur. Par contre, le test CVM est souvent très tolérant malgré que Conover (1971, page 314) indique qu'il devait être conservateur dans le cas de distributions discrètes.

Annexe A

```
      PROGRAM MCT
c     programme pour effectuer un test de MC
c     l'hypothese nulle est la normalite des n observations
c
c     declaration des parametres et des variables
      INTEGER n,N,I,ISEED,UMACH,NOUT
      PARAMETER (n= , N=1000)
      DOUBLE PRECISION X(n),ST(N),S,DRNNOR,pvalue
      EXTERNAL DRNNOR,UMACH
c     lecture des donnees
      data (X(I),I=1,n) /...../
c     calcul de la statistique ST(1)
      ST(1) = F(X(1), ..., X(n))
c     calcul des (N-1) statistiques simulees
      call UMACH(2,nout)
      DO 10 k=2,N
      call rnset(ISEED)
      call DRNNOR(N,X)
      call rnget(ISEED)
      ST(k) = F(X(1), ..., X(n))
10    CONTINUE
```

```
c     calcul du niveau critique du test de MC
      S = 1.
      call rnset(ISEED)
      call MCRANG(ST,S,N,ISEED)
      call rnget(ISEED)
      pvalue=1.-.001*S
      WRITE(NOUT,100) ST(1),pvalue
100   FORMAT('statistique de test = ',F10.5,/,'niveau critique du test de MC =', F8.3)
      STOP
      END
```

Le programme utilisé doit faire appel au sous-programme MCRANG suivant

```
      SUBROUTINE MCRANG(ST,S,N,ISEED)
      double precision DRNUN,ST(1000),U(1000),S
      INTEGER N,ISEED
      EXTERNAL DRNUN
        S=1.
        CALL DRNUN(N,U)
        DO 11 J=2,N
        IF(S(J) .LT. S(1)) THEN
        S=S+1.
        ELSEIF (S(J) .EQ. S(1)) THEN
        IF(U(J) .LT. U(1)) THEN
        S=S+1.
        ENDIF
        ENDIF
11      CONTINUE
        RETURN
        END
```

TAB. A.1. *Niveau et puissance expérimentaux (exprimés en pourcentage) des tests de normalité: cas de n = 25 observations i.i.d. et $\alpha = 5\%$*

	Tests originaux						Tests de MC					
	N	B	C	Γ	Ln	t	N	B	C	Γ	Ln	t
KS	5,4	5,0	92,8	39,3	98,9	18,7	5,3	5,0	92,2	37,5	98,8	18,1
CVM	7,1	6,4	95,5	54,8	99,7	26,1	5,3	4,7	94,5	49,0	99,4	22,3
W	6,7	5,8	95,4	50,6	99,5	25,2	5,2	4,5	94,7	45,8	99,3	22,1
AD	6,5	6,6	95,1	59,5	99,8	26,4	5,1	5,3	94,5	54,9	99,7	23,4
JB	2,9	0,8	89,6	38,6	95,5	21,3	5,1	2,5	91,5	49,0	97,4	26,6
AS	3,2	1,9	79,6	51,0	98,4	19,9	5,2	3,4	81,3	56,9	98,7	23,1
AP	1,6	0,2	87,8	21,4	82,8	17,9	5,0	5,3	91,7	30,3	87,7	25,5
KS_{St}	5,3	4,9	92,7	38,8	98,9	18,5	-	-	-	-	-	-
CVM_{St}	6,5	6,0	95,3	53,7	99,6	25,1	-	-	-	-	-	-
W_{St}	7,2	6,3	95,6	51,8	99,6	26,0	-	-	-	-	-	-
AD_{St}	5,9	6,2	94,9	58,1	99,8	25,1	-	-	-	-	-	-

TAB. A.2. *Niveau et puissance expérimentaux (exprimés en pourcentage) des tests de normalité: cas de n = 50 observations i.i.d. et $\alpha = 5\%$*

	Tests originaux						Tests de MC					
	N	B	C	Γ	Ln	t	N	B	C	Γ	Ln	t
KS	4,7	8,5	99,5	67,8	100	25,0	5,0	8,9	99,4	67,3	100	25,4
CVM	6,3	11,5	99,9	84,3	100	35,7	5,2	9,9	99,8	81,3	100	32,6
W	5,9	10,2	99,9	79,1	100	34,9	5,4	9,2	99,8	76,2	100	33,0
AD	6,2	13,7	99,8	89,5	100	38,0	5,2	12,4	99,8	87,5	100	35,4
JB	3,5	0,9	99,6	76,0	100	39,4	4,7	2,9	99,6	80,0	100	42,1
AS	4,0	3,6	90,3	87,4	100	29,7	5,0	5,1	90,7	88,2	100	30,9
AP	2,3	0,1	99,5	41,7	98,7	36,7	5,1	8,6	99,6	47,8	99,2	42,2
KS_{St}	5,0	8,9	99,5	68,7	100	25,5	-	-	-	-	-	-
CVM_{St}	5,9	10,8	99,8	83,7	100	34,8	-	-	-	-	-	-
W_{St}	6,2	10,5	99,9	79,5	100	35,4	-	-	-	-	-	-
AD_{St}	5,7	12,8	99,8	89,0	100	37,1	-	-	-	-	-	-

TAB. A.3. *Niveau et puissance expérimentaux (exprimés en pourcentage) des tests de normalité: cas de $n = 100$ observations i.i.d. et $\alpha = 5\%$*

	Tests originaux						Tests de MC					
	N	B	C	Γ	Ln	t	N	B	C	Γ	Ln	t
KS	5,4	19,8	100	95,6	100	38,1	5,3	18,3	100	94,5	100	36,9
CVM	5,2	25,9	100	99,2	100	50,3	4,9	24,8	100	98,9	100	48,3
W	5,0	24,5	100	98,3	100	50,9	4,8	23,0	100	97,5	100	49,3
AD	5,0	33,6	100	99,8	100	54,8	4,6	31,4	100	99,7	100	52,9
JB	3,9	5,0	100	99,1	100	63,1	4,7	12,5	100	98,7	100	63,8
AS	4,2	10,1	95,4	99,7	100	38,9	4,8	11,0	95,5	99,6	100	38,9
AP	3,0	7,6	100	66,5	100	62,8	4,8	21,0	100	69,5	100	65,9
KS_{St}	5,3	19,4	100	95,5	100	37,7	-	-	-	-	-	-
CVM_{St}	5,1	25,8	100	99,2	100	50,1	-	-	-	-	-	-
W_{St}	5,1	24,7	100	98,3	100	51,2	-	-	-	-	-	-
AD_{St}	4,9	33,2	100	99,8	100	54,4	-	-	-	-	-	-

TAB. A.4. *Niveau et puissance expérimentaux (exprimés en pourcentage) des tests de normalité: cas de $n = 300$ observations i.i.d. et $\alpha = 5\%$*

	Tests originaux						Tests de MC					
	N	B	C	Γ	Ln	t	N	B	C	Γ	Ln	t
KS	5,6	69,6	100	100	100	75,3	5,2	65,0	100	100	100	72,3
CVM	4,9	84,1	100	100	100	86,3	5,0	82,5	100	100	100	85,4
W	4,9	81,1	100	100	100	87,4	5,0	79,5	100	100	100	86,5
AD	5,1	93,7	100	100	100	89,9	5,2	92,7	100	100	100	89,1
JB	4,7	96,4	100	100	100	95,0	5,1	92,0	100	100	100	94,9
AS	5,0	53,7	98,5	100	100	51,9	5,1	51,9	98,5	100	100	51,6
AP	4,3	74,3	100	96,6	100	95,8	5,3	75,1	100	96,7	100	95,9
KS_{St}	5,2	68,2	100	100	100	74,5	-	-	-	-	-	-
CVM_{St}	4,9	84,2	100	100	100	86,4	-	-	-	-	-	-
W_{St}	4,9	81,1	100	100	100	87,5	-	-	-	-	-	-
AD_{St}	5,1	93,8	100	100	100	90,0	-	-	-	-	-	-

TAB. A.5. *Niveau expérimental (exprimé en pourcentage) des tests de normalité: cas de $n = 25$ résidus de régression, $p = 5$ et $\alpha = 5\%$*

	Tests originaux			Tests de MC		
k	0	2	4	0	2	4
KS	4,9	10,4	29,5	4,8	4,6	5,2
CVM	6,5	11,8	28,9	4,8	4,9	5,5
W	6,1	11,6	29,2	4,9	4,9	5,5
AD	5,9	10,0	21,8	4,8	5,0	5,5
JB	2,4	4,4	7,0	4,9	4,8	4,8
AS	3,0	4,3	6,3	5,0	5,1	5,0
AP	1,3	2,9	5,1	5,1	4,9	5,0
JB_s	0,1	0,2	0,5	4,7	4,8	5,2
AS_s	0,2	0,4	0,7	5,0	5,1	5,0
AP_s	0,0	0,1	0,2	5,2	4,8	5,2
KS_{St}	4,8	10,3	29,2	-	-	-
CVM_{St}	6,0	11,2	27,7	-	-	-
W_{St}	6,5	12,4	30,5	-	-	-
AD_{St}	5,4	9,2	20,3	-	-	-

TAB. A.6. *Niveau expérimental (exprimé en pourcentage) des tests de normalité: cas $n = 50$ résidus de régression, $p = 7$ et $\alpha = 5\%$*

	Tests originaux				Tests de MC			
k	0	2	4	6	0	2	4	6
KS	5,3	7,7	15,3	29,9	5,3	4,9	5,0	5,2
CVM	7,2	10,2	18,6	34,3	5,0	5,1	5,0	5,3
W	7,1	10,2	18,7	35,4	5,1	5,1	5,0	5,4
AD	6,7	9,1	15,3	27,6	5,0	5,0	4,9	5,2
JB	3,3	4,9	6,1	8,8	4,6	4,9	4,9	5,3
AS	3,5	5,0	5,4	6,8	4,7	4,9	4,9	5,2
AP	2,3	3,5	5,1	7,3	5,2	5,1	4,9	5,4
JB_s	0,3	0,6	0,8	1,2	4,8	5,0	5,3	5,2
AS_s	0,7	1,0	1,3	1,6	4,7	4,9	4,9	5,2
AP_s	3,3	1,8	1,3	0,9	5,2	5,3	5,1	5,5
KS_{St}	5,7	8,0	15,8	30,5	-	-	-	-
CVM_{St}	6,6	9,7	17,7	33,0	-	-	-	-
W_{St}	7,3	10,5	19,2	36,0	-	-	-	-
AD_{St}	6,2	8,5	14,4	26,3	-	-	-	-

TAB. A.7. *Niveau expérimental (exprimé en pourcentage) des tests de normalité: cas de $n = 100$ résidus de régression, $p = 11$ et $\alpha = 5\%$*

	Tests originaux						Tests de MC					
k	0	2	4	6	8	10	0	2	4	6	8	10
KS	5,9	7,9	13,4	21,2	32,6	47,4	4,9	4,5	5,1	5,0	5,1	4,7
CVM	7,6	9,7	14,9	22,6	33,7	49,0	5,0	4,8	5,2	4,8	5,0	5,1
W	7,8	10,3	15,8	24,1	36,1	52,4	5,0	4,8	5,3	5,0	5,0	5,2
AD	7,9	9,6	13,5	19,4	28,1	40,0	5,1	4,9	4,9	4,8	5,2	5,1
JB	4,8	5,3	5,9	7,2	8,8	10,1	5,3	5,2	4,9	5,0	5,3	4,9
AS	4,6	5,3	5,3	5,8	6,5	6,8	5,1	5,3	5,1	4,7	5,2	4,9
AP	3,5	4,0	4,6	6,1	7,8	9,2	5,5	5,0	4,9	5,0	5,1	5,0
JB_s	2,2	1,9	1,4	1,3	1,5	1,6	5,3	5,2	5,4	4,8	5,2	4,8
AS_s	1,5	1,6	1,7	1,9	2,2	2,4	5,1	5,3	5,1	4,7	5,2	4,9
AP_s	14,8	11,6	8,8	6,3	5,0	3,6	5,6	5,2	5,4	5,2	5,1	4,9
KS_{St}	5,8	7,7	13,2	20,9	32,3	47,0	-	-	-	-	-	-
CVM_{St}	7,6	9,6	14,8	22,4	33,6	48,8	-	-	-	-	-	-
W_{St}	7,9	10,4	16,1	24,4	36,5	52,9	-	-	-	-	-	-
AD_{St}	7,7	9,5	13,2	19,0	27,9	39,5	-	-	-	-	-	-

TAB. A.8. *Niveau expérimental (exprimé en pourcentage) des tests de normalité: cas de n = 300 résidus de régression, p = 17 et $\alpha = 5\%$*

	Tests originaux								
k	0	2	4	6	8	10	12	14	16
KS	6,8	7,5	9,2	12,5	15,7	21,1	27,1	34,9	43,6
CVM	7,1	8,0	10,0	12,5	15,6	20,8	26,6	34,0	42,0
W	7,4	8,6	10,8	13,6	17,0	22,9	29,0	37,0	46,1
AD	7,2	8,1	9,6	11,7	13,5	17,6	21,7	27,8	34,1
JB	4,7	5,0	5,7	5,9	6,0	7,4	7,8	9,0	9,5
AS	5,1	4,9	5,0	5,0	5,0	5,3	5,7	6,2	6,3
AP	4,2	4,0	5,0	5,7	5,4	6,4	7,0	8,6	8,9
JB_s	7,6	7,0	6,0	5,5	5,1	4,6	4,1	3,8	3,6
AS_s	2,9	2,8	2,9	2,8	2,8	3,2	3,2	3,6	3,8
AP_s	17,5	16,1	14,0	12,5	10,6	9,5	8,8	7,2	6,4
KS_{St}	6,4	7,0	8,8	11,9	14,9	20,3	26,0	33,6	42,1
CVM_{St}	7,1	8,0	10,1	12,6	15,6	20,9	26,7	34,2	42,2
W_{St}	7,5	8,6	10,8	13,7	17,1	23,0	29,1	37,1	46,2
AD_{St}	7,3	8,2	9,7	11,8	13,6	17,8	21,8	28,0	34,3

TAB. A.9. *Puissance expérimentale (exprimées en pourcentage) des tests de MC de normalité: cas de $n = 25$ résidus de régression, $p = 5$ et $\alpha = 5\%$*

	k = 0					k = 2				
	B	C	Γ	Ln	t	B	C	Γ	Ln	t
KS	4,4	74,0	22,1	79,8	12,3	3,5	80,2	23,6	84,5	14,6
CVM	4,2	81,2	28,4	87,6	15,1	2,8	86,0	28,7	90,6	18,5
W	4,3	81,0	26,4	86,2	14,6	2,5	85,8	25,7	89,2	18,2
AD	4,5	82,5	32,1	89,5	16,1	3,0	87,0	33,6	92,5	20,0
JB	2,6	82,8	33,5	89,1	20,5	2,1	84,8	35,2	90,4	21,7
AS	3,2	74,4	37,7	91,4	18,2	3,0	76,0	43,0	94,0	19,3
AP	4,1	82,8	22,4	78,1	18,7	1,9	85,7	25,2	81,1	22,2
JB_s	9,8	69,2	21,9	80,7	9,2	10,0	76,0	33,1	91,2	13,7
AS_s	3,2	74,4	37,7	91,4	18,2	3,0	76,0	43,0	94,0	19,3
AP_s	10,6	54,3	6,7	44,7	4,3	11,9	63,9	9,8	55,3	6,9

	k = 4				
	B	C	Γ	Ln	t
KS	3,8	86,0	28,7	91,4	14,7
CVM	2,3	91,5	28,0	94,5	21,1
W	2,1	91,4	24,2	93,3	20,8
AD	2,4	91,8	34,0	96,5	22,7
JB	1,7	87,3	37,6	92,5	24,1
AS	3,0	77,2	47,7	96,9	20,7
AP	1,1	88,1	27,8	84,3	24,8
JB_s	8,7	81,8	44,4	97,6	17,9
AS_s	3,0	77,2	47,7	96,9	20,7
AP_s	13,7	72,8	14,8	66,5	9,4

TAB. A.10. *Puissance expérimentale (exprimée en pourcentage) des tests de MC de normalité: cas de $n = 50$ résidus de régression, $p = 7$ et $\alpha = 5\%$*

	k = 0					k = 2				
	B	C	Γ	Ln	t	B	C	Γ	Ln	t
KS	9,4	100	81,1	100	33,1	7,3	100	80,1	100	33,3
CVM	9,7	100	91,7	100	44,2	7,2	100	90,6	100	45,4
W	8,5	100	87,4	100	44,9	5,6	100	86,2	100	45,8
AD	12,4	100	95,1	100	48,6	9,8	100	94,6	100	50,1
JB	6,7	100	94,3	100	56,0	4,7	100	94,0	100	56,4
AS	8,7	94,2	97,5	100	35,4	9,0	94,7	97,8	100	35,8
AP	11,7	100	60,8	100	57,1	7,3	100	62,7	100	59,3
JB_s	42,7	100	94,2	100	32,5	44,8	99,9	96,0	100	35,7
AS_s	8,7	94,2	97,5	100	35,4	9,0	94,7	97,8	100	35,8
AP_s	33,9	99,9	27,5	99,5	25,0	35,4	99,9	30,3	99,6	28,1
	k = 4					k = 6				
	B	C	Γ	Ln	t	B	C	Γ	Ln	t
KS	6,7	100	79,5	100	33,2	6,5	100	81,0	100	30,9
CVM	4,8	100	89,6	100	48,0	3,7	100	88,3	100	49,0
W	3,6	100	84,1	100	48,0	2,7	100	82,3	100	49,5
AD	7,4	100	94,8	100	52,7	5,7	100	94,0	100	54,2
JB	3,0	100	94,0	100	58,4	2,1	100	93,3	100	59,7
AS	9,3	94,6	98,4	100	37,5	9,0	94,7	98,5	100	36,9
AP	4,0	100	64,2	100	61,1	1,4	100	65,8	100	62,2
JB_s	46,4	100	97,4	100	39,8	49,1	100	98,3	100	43,1
AS_s	9,3	94,6	98,4	100	37,5	9,0	94,7	98,5	100	36,9
AP_s	37,5	99,9	34,8	99,7	32,0	39,6	100	40,4	99,9	35,6

TAB. A.11. *Puissance expérimentale (exprimée en pourcentage) des tests de MC de normalité: cas de $n = 100$ résidus de régression, $p = 11$ et $\alpha = 5\%$*

	k = 0					k = 2				
	B	C	Γ	Ln	t	B	C	Γ	Ln	t
KS	9,4	100	81,1	100	33,1	7,3	100	80,1	100	33,3
CVM	9,7	100	91,7	100	44,2	7,2	100	90,6	100	45,4
W	8,5	100	87,4	100	44,9	5,6	100	86,2	100	45,8
AD	12,4	100	95,1	100	48,6	9,8	100	94,6	100	50,1
JB	6,7	100	94,3	100	56,0	4,7	100	94,0	100	56,4
AS	8,7	94,2	97,5	100	35,4	9,0	94,7	97,8	100	35,8
AP	11,7	100	60,8	100	57,1	7,3	100	62,7	100	59,3
JB_s	42,7	100	94,2	100	32,5	44,8	99,9	96,0	100	35,7
AS_s	8,7	94,2	97,5	100	35,4	9,0	94,7	97,8	100	35,8
AP_s	33,9	99,9	27,5	99,5	25,0	35,4	99,9	30,3	99,6	28,1
	k = 4					k = 6				
	B	C	Γ	Ln	t	B	C	Γ	Ln	t
KS	6,7	100	79,5	100	33,2	6,5	100	81,0	100	30,9
CVM	4,8	100	89,6	100	48,0	3,7	100	88,3	100	49,0
W	3,6	100	84,1	100	48,0	2,7	100	82,3	100	49,5
AD	7,4	100	94,8	100	52,7	5,7	100	94,0	100	54,2
JB	3,0	100	94,0	100	58,4	2,1	100	93,3	100	59,7
AS	9,3	94,6	98,4	100	37,5	9,0	94,7	98,5	100	36,9
AP	4,0	100	64,2	100	61,1	1,4	100	65,8	100	62,2
JB_s	46,4	100	97,4	100	39,8	49,1	100	98,3	100	43,1
AS_s	9,3	94,6	98,4	100	37,5	9,0	94,7	98,5	100	36,9
AP_s	37,5	99,9	34,8	99,7	32,0	39,6	100	40,4	99,9	35,6

TAB. A.12. *Suite du tableau A.11*

	k = 8					k = 10				
	B	C	Γ	Ln	t	B	C	Γ	Ln	t
KS	7,0	100	81,4	100	29,1	7,3	100	83,1	100	28,3
CVM	2,6	100	86,9	100	50,1	1,7	100	85,1	100	52,2
W	1,7	100	79,0	100	50,4	1,0	100	76,1	100	52,1
AD	4,0	100	93,9	100	55,0	2,9	100	93,5	100	56,9
JB	1,4	100	93,6	100	60,1	1,0	100	93,8	100	62,7
AS	9,1	95,0	99,0	100	37,3	9,1	94,3	99,0	100	38,9
AP	0,3	100	66,7	100	62,6	0,1	100	67,5	100	64,6
JB_s	49,5	100	99,2	100	46,1	49,5	100	99,4	100	50,6
AS_s	9,1	95,0	99,0	100	37,3	9,1	94,3	99,0	100	38,9
AP_s	41,8	100	43,8	99,9	39,2	42,5	100	48,2	99,9	44,8

Annexe B

TAB. B.1. *Niveau et puissance expérimentaux (exprimés en pourcentage) des tests d'ajustement d'une loi exponentielle: cas de n = 10 observations et $\alpha = 5\%$*

	Tests originaux							Tests de MC						
	Exp	N	B	Γ	U	Ln	t	Exp	N N	B	Γ	U	Ln	t
KS	4,5	8,6	43,2	9,4	23,1	29,8	6,5	5,0	9,2	43,4	10,0	23,7	30,0	6,7
CVM	5,0	10,3	55,7	11,0	31,4	33,6	7,3	4,9	10,0	53,4	10,8	30,1	32,8	7,0
W	5,2	9,4	51,3	10,3	29,1	29,4	6,8	5,0	8,9	48,5	9,7	26,8	28,0	6,2
AD	5,2	9,2	54,0	9,9	30,4	36,7	6,9	4,9	8,6	51,3	9,5	28,5	35,3	6,4
$Z(W_{(.)}, m)$	5,1	8,9	53,0	7,6	42,3	20,2	6,6	5,0	9,0	51,7	7,5	40,9	19,9	6,6
$Z(W_{(.)}, h)$	4,9	4,4	37,9	4,7	27,4	27,3	5,3	5,1	4,7	37,3	4,6	26,9	27,0	5,7
CVM_{St}	4,9	10,0	55,1	10,7	30,8	33,3	7,1	-	-	-	-	-	-	-
W_{St}	5,0	9,0	50,3	9,9	28,3	28,9	6,5	-	-	-	-	-	-	-
AD_{St}	5,1	9,0	53,7	9,8	30,1	36,6	6,8	-	-	-	-	-	-	-
KSN	-	-	-	-	-	-	-	5,0	13,9	61,8	13,8	37,5	21,6	8,8
CVMN	-	-	-	-	-	-	-	4,8	14,5	65,2	14,7	40,5	20,8	8,8
WN	-	-	-	-	-	-	-	4,8	11,2	57,2	11,4	34,3	27,4	7,7
ADN	-	-	-	-	-	-	-	4,8	14,8	67,1	14,9	43,0	19,9	8,8
CMC	-	-	-	-	-	-	-	4,9	11,4	60,3	12,1	35,3	30,4	7,6

TAB. B.2. *Niveau et puissance expérimentaux (exprimés en pourcentage) des tests d'ajustement d'une loi exponentielle: cas de $n = 25$ observations et $\alpha = 5\%$*

	Tests originaux							Tests de MC						
	Exp	N	B	Γ	U	Ln	t	Exp	N	B	Γ	U	Ln	t
KS	4,8	19,0	93,4	25,6	60,9	66,0	10,4	5,1	18,7	92,6	24,9	58,8	65,0	10,2
CVM	5,3	24,0	97,9	30,9	76,6	71,6	12,3	5,1	22,3	97,3	29,4	73,7	70,0	11,5
W	5,2	19,6	96,2	26,2	69,8	58,7	11,2	4,9	18,4	95,6	24,7	67,7	57,3	10,4
AD	5,3	21,6	97,8	29,0	76,8	73,0	11,0	5,0	20,6	97,2	27,4	74,0	71,9	10,2
$Z(W_{(.)}, m)$	6,0	13,7	96,3	8,9	91,0	51,4	9,7	5,0	11,2	93,9	7,1	86,1	48,4	8,0
$Z(W_{(.)}, h)$	6,0	3,9	85,3	3,5	69,1	57,3	7,6	5,2	3,3	77,7	2,9	61,1	53,6	6,5
CVM_{St}	5,2	23,6	97,9	30,6	76,2	71,3	12,1	-	-	-	-	-	-	-
W_{St}	5,2	19,6	96,2	26,1	69,7	58,6	11,1	-	-	-	-	-	-	-
AD_{St}	5,2	21,4	97,7	28,6	76,5	72,8	10,9	-	-	-	-	-	-	-
KSN	-	-	-	-	-	-	-	5,1	28,9	98,4	32,3	82,7	63,1	13,9
CVMN	-	-	-	-	-	-	-	5,0	31,5	99,1	34,9	86,0	63,9	14,8
WN	-	-	-	-	-	-	-	5,0	24,9	98,0	27,1	80,3	65,0	12,5
ADN	-	-	-	-	-	-	-	5,0	31,9	99,3	34,7	88,6	64,9	14,7
CMC	-	-	-	-	-	-	-	5,0	26,8	98,7	31,2	83,5	69,9	12,6

Tab. B.3. *Niveau et puissance expérimentaux (exprimés en pourcentage) des tests d'ajustement d'une loi exponentielle: cas de $n = 50$ observations et $\alpha = 5\%$*

	Tests originaux							Tests de MC						
	Exp	N	B	Γ	U	Ln	t	Exp	N	B	Γ	U	Ln	t
KS	5,2	36,2	100	55,0	91,9	90,9	15,9	5,4	35,8	100	54,4	90,9	90,6	15,9
CVM	5,7	46,3	100	64,9	98,4	94,1	19,2	5,4	43,9	100	62,5	97,8	93,4	17,9
W	5,6	36,0	100	56,0	96,3	86,5	17,1	5,2	34,2	100	54,2	95,3	85,3	16,1
AD	5,6	43,0	100	63,9	98,7	94,2	17,4	5,3	41,4	100	62,4	98,2	93,8	16,7
$Z(W_{(.)}, m)$	4,9	17,6	100	8,3	99,9	75,2	9,8	5,0	16,9	100	8,4	99,7	73,8	9,9
$Z(W_{(.)}, h)$	4,9	3,8	99,7	2,4	96,9	77,9	8,5	4,9	4,2	98,8	2,7	93,8	76,0	8,2
CVM_{St}	5,5	46,0	100	64,6	98,3	94,0	18,9	-	-	-	-	-	-	-
W_{St}	5,5	35,9	100	56,0	96,3	86,4	17,0	-	-	-	-	-	-	-
AD_{St}	5,6	43,0	100	63,9	98,7	94,2	17,4	-	-	-	-	-	-	-
KSN	-	-	-	-	-	-	-	5,3	54,2	100	61,6	99,3	91,9	19,9
CVMN	-	-	-	-	-	-	-	5,4	58,1	100	65,8	99,6	92,3	21,0
WN	-	-	-	-	-	-	-	5,3	47,9	100	54,4	99,1	91,7	17,9
ADN	-	-	-	-	-	-	-	5,4	58,8	100	65,8	99,8	92,8	20,6
CMC	-	-	-	-	-	-	-	5,4	51,8	100	64,1	99,5	93,9	18,9

TAB. B.4. *Niveau et puissance expérimentaux (exprimés en pourcentage) des tests d'ajustement d'une loi exponentielle: cas de n = 100 observations et* $\alpha = 5\%$

	Tests originaux							Tests de MC						
	Exp	N	B	Γ	U	Ln	t	Exp	N	B	Γ	U	Ln	t
KS	4,8	68,0	100	90,5	100	99,5	26,8	5,2	66,4	100	89,1	99,9	99,4	26,7
CVM	5,2	79,1	100	94,8	100	99,8	33,1	5,0	76,8	100	93,9	100	99,8	31,9
W	5,0	66,0	100	90,8	100	99,0	29,4	4,8	63,7	100	89,7	100	98,7	28,4
AD	4,9	77,0	100	95,3	100	99,8	31,1	5,2	75,1	100	94,5	100	99,8	30,4
$Z(W_{(.)}, m)$	5,2	33,3	100	11,2	100	93,8	12,9	5,2	31,5	100	10,7	100	93,1	12,8
$Z(W_{(.)}, h)$	5,2	7,3	100	2,8	100	93,8	11,6	5,1	8,5	100	3,1	100	93,0	11,5
CVM_{St}	5,1	78,8	100	94,7	100	99,8	32,8	-	-	-	-	-	-	-
W_{St}	5,0	65,8	100	90,7	100	98,9	29,2	-	-	-	-	-	-	-
AD_{St}	4,9	76,8	100	95,2	100	99,8	30,9	-	-	-	-	-	-	-
KSN	-	-	-	-	-	-	-	5,2	85,5	100	92,1	100	99,7	29,8
CVMN	-	-	-	-	-	-	-	5,1	88,6	100	93,5	100	99,7	30,9
WN	-	-	-	-	-	-	-	5,1	80,9	100	88,8	100	99,6	28,7
ADN	-	-	-	-	-	-	-	5,2	89,1	100	93,8	100	99,7	30,5
CMC	-	-	-	-	-	-	-	5,2	85,1	100	94,3	100	99,8	31,8

TAB. B.5. *Niveau et puissance expérimentaux (exprimés en pourcentage) des tests d'ajustement d'une loi de la valeur extrême: cas de $n = 10$; 15 observations et $\alpha = 5\%$*

	$n = 10$													
	Tests originaux							Tests de MC						
	EV	N	Γ	C	Log	Ln	t	EV	N	Γ	C	Log	Ln	t
KS	4,9	10,0	6,9	57,6	12,9	51,0	15,2	4,5	9,7	6,3	56,3	12,1	49,0	14,1
CVM	4,1	10,1	5,7	59,5	13,4	55,1	16,6	4,7	11,3	6,6	60,0	14,3	55,7	17,3
W	4,2	10,4	5,6	58,7	13,7	50,3	16,8	4,8	11,4	6,4	59,2	14,2	50,9	17,3
AD	3,9	8,9	6,5	58,8	12,1	61,1	15,5	4,7	10,2	7,6	59,7	13,3	62,3	16,6
$Z(W_{(.)}, h)$	5,0	8,7	6,3	61,0	12,5	49,7	16,4	4,7	8,3	6,1	59,9	12,4	48,9	15,6
CVM_{St}	5,3	12,3	7,5	61,5	15,6	58,4	18,7	-	-	-	-	-	-	-
W_{St}	5,5	12,6	7,3	60,9	15,9	54,2	18,8	-	-	-	-	-	-	-
AD_{St}	5,3	10,9	8,3	61,3	14,5	64,8	17,9	-	-	-	-	-	-	-
KSN	-	-	-	-	-	-	-	4,5	11,9	5,1	57,6	14,1	45,6	16,5
CVMN	-	-	-	-	-	-	-	4,6	11,3	6,4	59,8	13,7	51,7	15,9
WN	-	-	-	-	-	-	-	4,7	8,7	7,1	56,9	9,6	54,2	11,9
ADN	-	-	-	-	-	-	-	4,5	16,2	4,2	60,0	20,0	44,1	22,4
CMC	-	-	-	-	-	-	-	4,5	12,7	6,3	60,5	16,0	56,5	18,9
	$n = 15$													
	EV	N	Γ	C	Log	Ln	t	EV	N	Γ	C	Log	Ln	t
KS	6,0	13,8	7,7	75,3	18,5	71,1	21,7	5,4	12,5	7,0	73,9	17,0	68,5	20,0
CVM	5,0	14,6	7,1	77,6	20,8	76,7	25,2	5,5	15,4	7,8	77,7	21,2	76,7	25,3
W	5,1	14,5	7,2	77,2	21,0	72,3	25,3	5,6	15,4	7,5	77,2	21,0	71,7	25,3
AD	4,8	14,2	8,0	77,4	20,8	82,5	25,0	5,3	15,3	8,8	77,8	21,6	82,5	25,6
$Z(W_{(.)}, h)$	5,5	9,9	6,6	77,2	15,5	68,6	20,4	5,2	9,5	6,5	75,8	14,6	67,0	19,3
CVM_{St}	6,1	16,8	8,7	79,0	23,1	78,7	27,1	-	-	-	-	-	-	-
W_{St}	6,0	16,8	8,6	78,5	23,1	74,6	27,4	-	-	-	-	-	-	-
AD_{St}	5,9	16,5	9,6	79,0	23,1	84,3	27,2	-	-	-	-	-	-	-
KSN	-	-	-	-	-	-	-	5,3	14,2	5,3	73,8	17,1	69,7	19,7
CVMN	-	-	-	-	-	-	-	5,2	14,0	6,2	75,8	17,2	73,4	20,3
WN	-	-	-	-	-	-	-	5,5	10,1	6,8	73,7	11,7	74,7	14,1
ADN	-	-	-	-	-	-	-	5,3	21,5	4,7	76,6	26,8	69,0	28,8
CMC	-	-	-	-	-	-	-	5,4	17,2	7,2	78,1	22,7	78,5	25,8

TAB. B.6. *Niveau et puissance expérimentaux (exprimés en pourcentage) des tests d'ajustement d'une loi de la valeur extrême: cas de n = 25; 50 observations et* $\alpha = 5\%$

	$n = 25$													
	Tests originaux							Tests de MC						
	EV	N	Γ	C	Log	Ln	t	EV	N	Γ	C	Log	Ln	t
KS	5,4	20,3	9,6	91,1	30,2	90,3	34,7	4,9	18,6	8,6	90,4	28,3	88,9	32,7
CVM	4,7	25,0	9,4	93,0	35,8	94,4	41,3	5,0	24,9	9,7	93,1	35,8	94,2	40,7
W	4,9	24,3	9,1	92,9	35,6	91,8	41,4	5,0	23,8	8,9	92,8	35,3	91,3	40,6
AD	4,7	26,4	11,0	93,2	37,3	96,9	42,5	5,1	26,8	11,3	93,3	37,5	96,8	42,3
$Z(W_{(.)}, h)$	4,8	12,3	7,9	90,8	21,3	86,7	27,6	4,8	11,9	7,5	89,8	19,9	84,6	26,3
CVM_{St}	5,5	26,9	10,7	93,4	37,6	95,0	43,0	-	-	-	-	-	-	-
W_{St}	5,7	26,2	10,3	93,3	37,4	92,7	42,9	-	-	-	-	-	-	-
AD_{St}	5,5	28,6	12,5	93,6	39,4	97,3	44,4	-	-	-	-	-	-	-
KSN	-	-	-	-	-	-	-	5,1	20,4	7,1	90,1	24,5	91,9	28,6
CVMN	-	-	-	-	-	-	-	5,1	21,4	7,8	91,5	25,2	92,4	29,6
WN	-	-	-	-	-	-	-	4,9	14,8	8,1	90,3	16,8	92,6	20,2
ADN	-	-	-	-	-	-	-	5,1	33,3	6,3	91,9	38,8	91,8	42,0
CMC	-	-	-	-	-	-	-	5,1	27,7	9,3	93,6	36,5	95,4	40,9
	$n = 50$													
	EV	N	Γ	C	Log	Ln	t	EV	N	Γ	C	Log	Ln	t
KS	5,6	39,2	14,5	99,6	54,4	99,6	61,6	4,8	36,0	13,1	99,5	51,3	99,5	58,8
CVM	4,7	49,2	16,6	99,7	64,2	99,9	70,8	4,9	48,4	16,2	99,7	63,7	99,9	70,0
W	5,0	46,9	15,6	99,7	63,3	99,8	70,1	5,0	45,9	15,0	99,7	62,4	99,7	69,4
AD	4,8	54,9	20,4	99,7	68,1	100	73,5	5,0	54,0	20,5	99,7	67,7	100	73,1
$Z(W_{(.)}, h)$	4,8	23,4	8,5	99,0	34,1	98,7	44,6	4,5	21,8	7,9	98,8	32,1	98,2	42,3
CVM_{St}	5,3	51,3	17,7	99,7	65,5	99,9	71,7	-	-	-	-	-	-	-
W_{St}	5,7	48,7	16,7	99,7	64,7	99,8	71,4	-	-	-	-	-	-	-
AD_{St}	5,4	56,8	22,0	99,7	69,5	100	74,8	-	-	-	-	-	-	-
KSN	-	-	-	-	-	-	-	5,0	37,0	9,6	99,2	42,1	99,9	47,4
CVMN	-	-	-	-	-	-	-	4,9	41,9	10,5	99,4	45,4	99,8	50,8
WN	-	-	-	-	-	-	-	4,8	30,2	10,6	99,3	30,3	99,8	36,3
ADN	-	-	-	-	-	-	-	4,9	59,6	10,2	99,5	62,2	99,9	65,4
CMC	-	-	-	-	-	-	-	4,8	54,8	15,6	99,7	64,5	99,9	70,3

TAB. B.7. *Niveau et puissance expérimentaux (exprimés en pourcentage) des tests d'ajustement d'une loi logistique,* $\alpha = 5\%$

	Tests originaux basés sur les estimateurs du MV$\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$							Tests de MC basés sur les estimateurs $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$.						
	$n = 10$													
	Log	N	Γ	C	EV	Ln	t	Log	N	Γ	C	EV	Ln	t
KS	5,4	4,8	5,5	10,9	7,3	68,4	16,7	4,8	3,8	4,3	50,0	9,0	63,8	6,4
CVM	5,9	5,1	5,6	13,3	8,3	71,9	20,0	4,9	3,7	4,6	53,1	9,4	72,9	7,0
W	-	-	-	-	-	-	-	4,8	4,2	5,4	52,5	9,1	71,4	6,6
AD	5,8	4,5	3,5	16,3	10,0	76,8	24,5	4,8	3,7	4,9	52,4	9,8	74,6	6,8
$Z(W_{(.)}, h)$	4,9	2,0	1,7	56,0	9,8	72,0	8,2	4,8	2,2	1,7	55,1	9,6	70,6	8,2
CVM_{St}	6,0	5,4	5,9	14,5	8,8	72,7	21,3	-	-	-	-	-	-	-
AD_{St}	6,5	5,3	4,6	18,1	10,9	78,1	26,1	-	-	-	-	-	-	-
	Tests de MC basés sur les estimateurs $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$													
	$n = 25$							$n = 50$						
	Log	N	Γ	C	EV	Ln	t	Log	N	Γ	C	EV	Ln	t
KS	4,9	4,1	8,4	84,1	19,1	97,5	8,0	5,1	4,5	16,0	97,8	36,0	100	9,5
CVM	5,0	3,7	9,9	87,0	23,1	99,2	8,9	5,0	5,1	22,2	98,7	44,1	100	10,8
W	5,1	4,7	12,0	87,3	20,1	98,8	8,3	5,2	6,3	26,3	98,8	36,4	100	10,3
AD	5,2	4,2	11,5	86,6	23,9	99,5	9,1	5,3	5,6	28,4	98,6	46,8	100	11,3
$Z(W_{(.)}, h)$	5,0	0,7	0,7	86,9	17,7	98,7	11,3	5,0	0,3	1,0	98,1	31,7	100	15,5

TAB. B.8. *Niveau et puissance expérimentaux (exprimés en pourcentage) des tests d'ajustement d'une loi uniforme, $\alpha = 5\%$*

	Tests de MC basés sur les estimateurs du MV $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$													
	$n = 10$							$n = 15$						
	U	N	B	Γ	Exp	Ln	t	U	N	B	Γ	Exp	Ln	t
KS	5,0	6,7	5,2	27,2	47,2	82,1	14,3	4,9	10,5	8,0	46,7	71,2	96,3	26,0
CVM	4,9	6,7	5,6	29,4	51,3	84,6	14,2	4,8	10,1	8,3	50,5	75,9	97,1	24,1
W	4,7	3,1	2,9	16,8	33,1	73,7	8,4	5,0	7,5	4,1	32,5	56,0	92,4	23,5
AD	5,0	3,8	4,0	21,2	45,0	83,2	8,5	5,3	5,2	4,7	41,1	71,5	96,9	14,8
$Z(W_{(.)}, m)$	5,0	10,8	7,3	29,7	46,5	80,2	21,7	4,9	17,6	10,4	47,9	68,9	95,1	38,3
CMC	5,1	9,6	6,8	29,8	49,5	83,3	20,0	4,7	15,9	9,9	50,2	73,8	96,6	35,1
	$n = 25$							$n = 50$						
	U	N	B	Γ	Exp	Ln	t	U	N	B	Γ	Exp	Ln	t
KS	5,3	22,5	14,9	77,2	94,3	99,9	48,7	5,0	60,6	40,5	98,4	100	100	88,4
CVM	5,4	19,8	15,0	79,9	95,9	100	45,5	5,2	59,0	40,0	98,7	100	100	89,1
W	5,1	30,4	11,0	65,5	86,1	99,5	61,8	4,9	85,9	46,2	96,7	99,6	100	98,1
AD	5,5	11,7	9,4	73,8	95,0	99,9	33,5	5,0	54,3	32,7	98,0	100	100	86,8
$Z(W_{(.)}, m)$	5,2	34,5	17,5	75,4	92,0	99,8	65,3	5,0	71,7	36,8	97,3	99,8	100	94,9
CMC	5,3	30,9	17,4	79,2	95,2	99,9	61,6	5,1	68,9	41,7	98,5	100	100	93,7

Annexe C

TAB. C.1. *Niveau et puissance expérimentaux (exprimés en pourcentage) des tests d'égalité de deux distributions continues ayant la même moyenne et la même variance: cas de $m = 22$, $n = 22$ et $\alpha = 5\%$*

	$F \sim N(0,1)$									
	Tests originaux		Tests permutationnels de MC							
G	KS	CVM	KS	CVM	$\hat{t}$	$\hat{\theta}$	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_2$	$\hat{L}_\infty$	CMC
N	5,9	4,9	4,6	4,6	4,8	4,8	4,7	4,8	4,9	4,8
Exp	16,3	12,8	13,5	12,5	5,3	5,3	17,1	16,6	15,4	16,1
Γ	10,8	8,7	8,9	8,4	5,0	5,0	10,8	10,9	10,4	10,4
B	6,5	5,0	5,1	4,8	4,7	4,7	5,4	5,4	5,5	5,3
Log	6,6	5,2	5,2	5,3	5,0	5,0	5,1	5,1	5,1	5,4
Ln	78,1	69,8	72,0	65,5	6,2	6,2	68,9	68,1	66,0	78,0
U	8,3	5,9	6,9	6,0	5,2	5,2	6,7	6,9	7,4	7,4
	$F \sim Exp$									
	Tests originaux		Tests permutationnels de MC							
G	KS	CVM	KS	CVM	$\hat{t}$	$\hat{\theta}$	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_2$	$\hat{L}_\infty$	CMC
Exp	5,9	4,8	4,8	4,9	5,4	5,4	5,2	5,1	5,1	5,0
Γ	7,4	6,1	6,2	5,9	5,0	5,0	6,3	6,3	6,4	6,6
B	13,5	10,2	11,4	10,0	5,3	5,3	15,8	15,7	16,0	15,7
Log	16,5	13,3	13,8	12,7	5,6	5,6	14,8	14,5	13,6	14,6
Ln	89,5	76,9	85,8	72,5	5,2	5,2	55,6	55,3	55,1	85,7
U	19,6	14,0	16,8	13,7	5,7	5,7	22,8	22,9	24,3	24,0

TAB. C.2. *Suite du tableau C.1.*

	$F \sim \Gamma$									
	Tests originaux		Tests permutationnels de MC							
G	KS	CVM	KS	CVM	$\hat{t}$	$\hat{\theta}$	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_2$	$\hat{L}_\infty$	CMC
Γ	6,2	5,2	4,9	5,0	5,1	5,1	4,9	4,9	4,9	4,8
B	9,2	7,0	7,4	6,7	5,2	5,2	9,7	9,6	9,6	8.8
Log	11,1	8,8	8,9	8,6	5,2	5,2	9,4	9,3	8,8	9.1
Ln	84,8	72,3	80,1	67,3	5,4	5,4	60,9	60,6	60,3	82.6
U	12,1	8,8	10,0	8,5	4,8	4,8	14,6	14,9	15,1	14.0
	$F \sim B$									
	Tests originaux		Tests permutationnels de MC							
G	KS	CVM	KS	CVM	$\hat{t}$	$\hat{\theta}$	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_2$	$\hat{L}_\infty$	CMC
B	6,2	5,1	5,1	5,3	5,4	5,4	5,1	5,2	5,0	5.1
Log	8,2	6,2	6,5	6,0	5,0	5,0	7,5	7,5	7,4	7.3
Ln	83,9	75,5	77,8	71,0	5,7	5,7	70,7	69,9	68,5	83.1
U	7,1	5,9	5,6	5,8	5,3	5,3	5,9	5,9	6,1	5.7
	$F \sim Log$									
	Tests originaux		Tests permutationnels de MC							
G	KS	CVM	KS	CVM	$\hat{t}$	$\hat{\theta}$	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_2$	$\hat{L}_\infty$	CMC
Log	5,8	5,0	4,6	5,0	4,9	4,9	4,6	4,7	4,7	4.5
Ln	73,6	64,8	66,7	60,1	5,8	5,8	65,0	63,9	61,5	73.3
U	10,1	7,3	8,2	7,3	5,2	5,2	8,9	9,2	9,4	9.5
	$F \sim Ln$									
	Tests originaux		Tests permutationnels de MC							
G	KS	CVM	KS	CVM	$\hat{t}$	$\hat{\theta}$	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_2$	$\hat{L}_\infty$	CMC
Ln	6,6	5,2	5,3	5,2	4,9	4,9	5,3	5,2	5,1	5.2
U	88,0	82,6	82,2	77,4	5,6	5,6	76,2	75,2	72,9	87.0

TAB. C.3. *Niveau et puissance expérimentaux (exprimés en pourcentage) des tests d'égalité de deux distributions continues ayant la même variance et des moyennes différentes: cas de $m = 22$, $n = 22$ et $\alpha = 5\%$*

	$F \sim N(0,1)$									
	Tests originaux		Tests permutationnels de MC							
G	KS	CVM	KS	CVM	$\hat{t}$	$\hat{\theta}$	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_2$	$\hat{L}_\infty$	CMC
N	5,9	4,9	4,6	4,6	4,8	4,8	4,7	4,8	4,9	4,8
Exp	92,1	89,9	89,8	88,9	92,3	92,3	38,4	38,6	47,4	83,4
Γ	99,3	99,6	98,8	99,5	99,8	99,8	77,3	77,7	82,1	97,3
B	100	100	100	100	100	100	99,1	99,2	99,4	100
Log	41,5	42,9	36,4	41,1	42,3	42,3	23,5	22,9	21,5	30,3
Ln	92,0	80,4	88,8	76,3	22,6	22,6	68,5	67,8	67,5	89,8
U	99,7	99,9	99,6	99,9	100	100	95,4	95,6	96,2	99,0
	$F \sim Exp$									
	Tests originaux		Tests permutationnels de MC							
G	KS	CVM	KS	CVM	$\hat{t}$	$\hat{\theta}$	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_2$	$\hat{L}_\infty$	CMC
Exp	5,9	4,8	4,8	4,9	5,4	5,4	5,2	5,1	5,1	5,0
Γ	41,3	44,0	36,7	42,3	29,5	29,5	17,2	17,0	15,4	30,0
B	93,3	95,4	90,8	94,5	86,9	86,9	79,4	78,8	75,9	87,6
Log	100	100	100	100	99,9	99,9	84,1	85,5	93,0	99,9
Ln	95,6	96,8	93,5	96,2	77,0	77,0	61,2	60,1	56,2	90,0
U	74,2	75,3	69,2	73,9	65,2	65,2	62,4	61,7	58,2	65,9

TAB. C.4. *Suite du tableau C.3.*

	$F \sim \Gamma$									
	Tests originaux		Tests permutationnels de MC							
G	KS	CVM	KS	CVM	$\hat{t}$	$\hat{\theta}$	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_2$	$\hat{L}_\infty$	CMC
Γ	6,2	5,2	4,9	5,0	5,1	5,1	4,9	4,9	4,9	4,8
B	53,0	55,1	47,6	53,5	48,1	48,1	39,8	39,1	36,1	42,9
Log	100	100	100	100	100	100	98,5	98,8	99,7	100
Ln	100	100	100	100	92,8	92,8	82,3	81,5	80,1	99,9
U	29,4	25,7	24,9	24,6	19,3	19,3	28,4	28,1	25,1	25,3
	$F \sim B$									
	Tests originaux		Tests permutationnels de MC							
G	KS	CVM	KS	CVM	$\hat{t}$	$\hat{\theta}$	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_2$	$\hat{L}_\infty$	CMC
B	6,2	5,1	5,1	5,3	5,4	5,4	5,1	5,2	5,0	5,1
Log	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
Ln	100	100	100	100	97,7	97,7	95,2	95,2	96,3	100
U	11,0	10,7	9,1	10,3	12,8	12,8	7,1	7,2	7,2	8,2
	$F \sim Log$									
	Tests originaux		Tests permutationnels de MC							
G	KS	CVM	KS	CVM	$\hat{t}$	$\hat{\theta}$	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_2$	$\hat{L}_\infty$	CMC
Log	5,8	5,0	4,6	5,0	4,9	4,9	4,6	4,7	4,7	4,8
Ln	99,9	99,8	99,9	99,5	93,9	93,9	76,8	76,1	80,6	100
U	100	100	100	100	100	100	99,8	99,9	100	100
	$F \sim Ln$									
	Tests originaux		Tests permutationnels de MC							
G	KS	CVM	KS	CVM	$\hat{t}$	$\hat{\theta}$	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_2$	$\hat{L}_\infty$	CMC
Ln	6,6	5,2	5,3	5,2	4,9	4,9	5,3	5,2	5,1	5,4
U	100	100	100	100	96,6	96,6	91,9	91,8	93,0	100

TAB. C.5. *Niveau et puissance expérimentaux (exprimés en pourcentage) des tests d'égalité de deux distributions continues ayant la même moyenne et des variances différentes: cas de $m = 22$, $n = 22$ et $\alpha = 5\%$*

	$F \sim N(0,1)$									
	Tests originaux		Tests permutationnels de MC							
G	KS	CVM	KS	CVM	$\hat{t}$	$\hat{\theta}$	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_2$	$\hat{L}_\infty$	CMC
N	5,9	4,9	4,6	4,6	4,8	4,8	4,7	4,8	4,9	4,8
Exp	22,5	18,7	19,0	18,2	6,0	6,0	17,9	18,2	19,0	20,7
Γ	14,7	12,2	12,3	11,6	5,4	5,4	18,4	18,9	18,9	17,1
B	81,4	82,0	75,7	77,0	5,8	5,8	100	100	100	100
Log	12,2	9,5	10,1	9,5	5,0	5,0	50,8	51,6	51,4	42,8
Ln	100	100	100	100	24,7	24,7	100	100	100	100
U	56,7	51,9	51,1	48,2	5,1	5,1	99,7	99,7	99,7	99,1
	$F \sim Exp$									
	Tests originaux		Tests permutationnels de MC							
G	KS	CVM	KS	CVM	$\hat{t}$	$\hat{\theta}$	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_2$	$\hat{L}_\infty$	CMC
Exp	5,9	4,8	4,8	4,9	5,4	5,4	5,2	5,1	5,1	5,0
Γ	7,4	6,2	6,2	6,0	5,0	5,0	5,7	5,6	5,8	6,2
B	98,3	98,0	96,3	96,1	8,9	8,9	100	100	100	100
Log	16,3	12,8	13,9	12,4	5,5	5,5	25,1	24,8	23,6	22,1
Ln	100	100	100	100	25,5	25,5	100	100	100	100
U	93,3	91,7	90,2	88,2	8,3	8,3	100	100	100	100

TAB. C.6. *Suite du tableau C.5.*

	$F \sim \Gamma$									
	Tests originaux		Tests permutationnels de MC							
G	KS	CVM	KS	CVM	$\hat{t}$	$\hat{\theta}$	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_2$	$\hat{L}_\infty$	CMC
Γ	6,2	5,2	4,9	5,0	5,1	5,1	4,9	4,9	4,9	4,8
B	96,2	96,6	93,3	93,4	7,1	7,1	100	100	100	100
Log	10,9	8,5	8,9	8,2	5,1	5,1	21,0	21,0	20,7	17,4
Ln	100	100	100	100	23,7	23,7	100	100	100	100
U	87,6	85,3	83,1	81,3	6,7	6,7	100	100	100	100
	$F \sim B$									
	Tests originaux		Tests permutationnels de MC							
G	KS	CVM	KS	CVM	$\hat{t}$	$\hat{\theta}$	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_2$	$\hat{L}_\infty$	CMC
B	6,2	5,1	5,1	5,3	5,4	5,4	5,1	5,2	5,0	5,1
Log	96,2	96,8	92,4	93,5	5,9	5,9	100	100	100	100
Ln	100	100	100	100	24,5	24,5	100	100	100	100
U	15,5	11,9	13,1	11,5	5,5	5,5	33,5	36,3	42,3	35,5
	$F \sim Log$									
	Tests originaux		Tests permutationnels de MC							
G	KS	CVM	KS	CVM	$\hat{t}$	$\hat{\theta}$	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_2$	$\hat{L}_\infty$	CMC
Log	5,8	5,0	4,6	5,0	4,9	4,9	4,6	4,7	4,7	4,8
Ln	100	100	100	100	24,5	24,5	100	100	100	100
U	88,7	86,3	82,8	81,3	5,7	5,7	100	100	100	100
	$F \sim Ln$									
	Tests originaux		Tests permutationnels de MC							
G	KS	CVM	KS	CVM	$\hat{t}$	$\hat{\theta}$	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_2$	$\hat{L}_\infty$	CMC
Ln	6,6	5,2	5,3	5,2	4,9	4,9	5,3	5,2	5,1	5,4
U	100	100	100	100	24,3	24,3	100	100	100	100

TAB. C.7. *Niveau et puissance expérimentaux (exprimés en pourcentage) des tests d'égalité de deux distributions continues ayant des moyennes différentes et des variances différentes: cas de m = 22, n = 22 et $\alpha = 5\%$*

	$F \sim N(0,1)$									
	Tests originaux		Tests permutationnels de MC							
G	KS	CVM	KS	CVM	$\hat{t}$	$\hat{\theta}$	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_2$	$\hat{L}_\infty$	CMC
N	5,9	4,9	4,6	4,6	4,8	4,8	4,7	4,8	4,9	4,8
Exp	96,4	97,6	95,0	96,9	99,3	99,3	48,1	47,3	53,2	89,9
Γ	99,9	100	99,8	100	100	100	91,0	91,1	93,2	99,6
B	94,5	92,6	92,2	90,1	42,7	42,7	100	100	100	100
Log	68,4	69,6	63,8	67,9	59,5	59,5	76,4	76,1	74,1	74,1
Ln	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
U	91,2	86,9	88,9	84,8	58,4	58,4	99,8	99,8	99,8	99,6
	$F \sim Exp$									
	Tests originaux		Tests permutationnels de MC							
G	KS	CVM	KS	CVM	$\hat{t}$	$\hat{\theta}$	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_2$	$\hat{L}_\infty$	CMC
Exp	5,9	4,8	4,8	4,9	5,4	5,4	5,2	5,1	5,1	5,0
Γ	34,8	36,7	30,6	35,1	22,7	22,7	13,8	13,5	12,8	25,2
B	98,7	97,1	97,6	96,2	99,5	99,5	100	100	99,9	99,9
Log	100	100	99,9	100	99,8	99,8	87,0	88,1	94,5	99,9
Ln	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
U	92,7	85,8	90,0	84,1	96,3	96,3	99,4	99,2	98,5	97,4

TAB. C.8. *Suite du tableau C.7.*

	$F \sim \Gamma$									
	Tests originaux		Tests permutationnels de MC							
G	KS	CVM	KS	CVM	$\hat{t}$	$\hat{\theta}$	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_2$	$\hat{L}_\infty$	CMC
Γ	6,2	5,2	4,9	5,0	5,1	5,1	4,9	4,9	4,9	4,8
B	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
Log	100	100	100	100	100	100	98,4	98,7	99,5	100
Ln	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
U	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
	$F \sim B$									
	Tests originaux		Tests permutationnels de MC							
G	KS	CVM	KS	CVM	$\hat{t}$	$\hat{\theta}$	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_2$	$\hat{L}_\infty$	CMC
B	6,2	5,1	5,1	5,3	5,4	5,4	5,1	5,2	5,0	5,1
Log	100	100	100	99,9	92,1	92,1	100	100	100	100
Ln	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
U	33,4	28,7	28,6	27,9	25,8	25,8	46,1	47,9	48,4	43,2
	$F \sim Log$									
	Tests originaux		Tests permutationnels de MC							
G	KS	CVM	KS	CVM	$\hat{t}$	$\hat{\theta}$	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_2$	$\hat{L}_\infty$	CMC
Log	5,8	5,0	4,6	5,0	4,9	4,9	4,6	4,7	4,7	4,5
Ln	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
U	100	99,9	99,9	99,8	95,0	95,0	100	100	100	100
	$F \sim Ln$									
	Tests originaux		Tests permutationnels de MC							
G	KS	CVM	KS	CVM	$\hat{t}$	$\hat{\theta}$	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_2$	$\hat{L}_\infty$	CMC
Ln	6,6	5,2	5,3	5,2	4,9	4,9	5,3	5,2	5,1	5,2
U	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

TAB. C.9. *Niveau et puissance expérimentaux (exprimés en pourcentage) des tests d'égalité de deux distributions discrètes ayant la même moyenne et des variances différentes: cas de m = 22, n = 22 et $\alpha = 5\%$*

	$F \sim UD$									
	Tests originaux		Tests permutationnels de MC							
G	KS	CVM	KS	CVM	$\hat{t}$	$\hat{\theta}$	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_2$	$\hat{L}_\infty$	CMC
UD	3,4	5,0	4,7	4,6	4,7	4,8	4,6	4,7	4,8	4,7
Bin	38,3	49,8	52,0	44,9	5,3	5,2	97,1	97,2	96,9	95,2
Geo	14,5	19,3	16,5	18,1	6,6	6,6	22,4	23,6	26,1	23,9
BinN	70,1	79,8	82,9	71,7	5,8	5,8	99,9	99,9	99,9	99,7
Poi	18,5	22,7	25,8	20,6	5,1	5,2	69,7	71,7	72,3	66,1
	$F \sim Bin$									
	Tests originaux		Tests permutationnels de MC							
G	KS	CVM	KS	CVM	$\hat{t}$	$\hat{\theta}$	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_2$	$\hat{L}_\infty$	CMC
Bin	1,8	5,5	4,3	4,5	4,5	4,5	4,4	4,5	4,6	4,4
Geo	75,0	86,8	81,9	82,5	8,1	8,2	99,7	99,7	99,7	99,4
BinN	4,4	10,5	10,4	7,6	5,1	5,1	27,8	28,0	26,1	22,4
Poi	4,3	9,0	8,2	8,0	5,1	5,1	22,1	22,3	22,0	18,5
	$F \sim Geo$									
	Tests originaux		Tests permutationnels de MC							
G	KS	CVM	KS	CVM	$\hat{t}$	$\hat{\theta}$	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_2$	$\hat{L}_\infty$	CMC
Geo	3,9	5,3	5,0	5,2	5,0	5,0	5,0	5,1	5,2	5,2
BinN	94,6	96,0	97,3	92,3	8,0	8,1	100	100	100	100
Poi	53,5	62,0	61,7	58,0	7,5	7,4	93,2	93,9	93,9	92,5
	$F \sim BinN$									
	Tests originaux		Tests permutationnels de MC							
G	KS	CVM	KS	CVM	$\hat{t}$	$\hat{\theta}$	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_2$	$\hat{L}_\infty$	CMC
BinN	1,8	9,7	5,0	5,0	5,4	5,3	4,7	4,7	4,8	4,9
Poi	11,3	27,6	24,0	21,5	5,3	5,1	63,0	64,1	65,0	59,0

TAB. C.10. *Niveau et puissance expérimentaux (exprimés en pourcentage) des tests d'égalité de deux distributions discrètes ayant la même variance et des moyennes différentes: cas de $m = 22$, $n = 22$ et $\alpha = 5\%$*

	$F \sim UD$									
	Tests originaux		Tests permutationnels de MC							
G	KS	CVM	KS	CVM	$\hat{t}$	$\hat{\theta}$	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_2$	$\hat{L}_\infty$	CMC
UD	2,5	5,5	4,7	4,7	4,9	4,8	4,6	4,7	4,6	4,4
Bin	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
Geo	61,0	81,7	67,8	76,7	63,8	63,7	59,8	59,3	57,1	64,2
BinN	11,4	16,0	20,2	13,2	5,2	5,2	35,9	37,5	39,1	35,8
Poi	56,8	76,2	66,7	73,2	87,2	87,1	47,2	47,3	48,3	59,6

	$F \sim Bin$									
	Tests originaux		Tests permutationnels de MC							
G	KS	CVM	KS	CVM	$\hat{t}$	$\hat{\theta}$	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_2$	$\hat{L}_\infty$	CMC
Bin	2,8	5,8	4,9	5,2	5,3	5,3	5,0	5,0	5,1	5,1
Geo	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
BinN	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
Poi	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

	$F \sim Geo$									
	Tests originaux		Tests permutationnels de MC							
G	KS	CVM	KS	CVM	$\hat{t}$	$\hat{\theta}$	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_2$	$\hat{L}_\infty$	CMC
Geo	2,3	12,0	5,5	5,2	5,4	5,5	5,5	5,5	5,3	5,5
BinN	92,7	94,9	95,8	92,5	72,6	72,7	70,3	72,1	76,4	94,7
Poi	99,9	100	99,9	99,9	99,7	99,7	99,4	99,4	99,3	99,8

	$F \sim BinN$									
	Tests originaux		Tests permutationnels de MC							
G	KS	CVM	KS	CVM	$\hat{t}$	$\hat{\theta}$	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_2$	$\hat{L}_\infty$	CMC
BinN	1,8	8,0	4,9	5,0	4,9	4,9	5,0	4,9	4,8	4,7
Poi	86,9	94,4	90,9	92,5	94,1	94,2	85,4	85,4	83,7	89,5

TAB. C.11. *Niveau et puissance expérimentaux (exprimés en pourcentage) des tests d'égalité de deux distributions discrètes ayant des moyennes différentes et des variances différentes: cas de m = 22, n = 22 et $\alpha = 5\%$*

	$F \sim UD$									
	Tests originaux		Tests permutationnels de MC							
G	KS	CVM	KS	CVM	$\hat{t}$	$\hat{\theta}$	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_2$	$\hat{L}_\infty$	CMC
UD	2,5	5,5	4,7	4,7	4,9	4,8	4,6	4,7	4,6	4,4
Bin	100	100	100	100	100	100	99,9	99,8	99,9	100
Geo	64,8	84,0	70,9	79,4	68,2	68,3	63,8	63,4	61,0	67,7
BinN	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
Poi	10,5	15,9	16,7	13,8	10,3	10,2	25,9	26,7	26,5	24.2
	$F \sim Bin$									
	Tests originaux		Tests permutationnels de MC							
G	KS	CVM	KS	CVM	$\hat{t}$	$\hat{\theta}$	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_2$	$\hat{L}_\infty$	CMC
Bin	1,0	22,2	4,5	4,8	4,9	4,9	5,0	5,1	4,9	4,7
Geo	84,5	95,3	94,7	84,1	99,5	99,5	65,2	66,3	70,6	93,4
BinN	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
Poi	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
	$F \sim Geo$									
	Tests originaux		Tests permutationnels de MC							
G	KS	CVM	KS	CVM	$\hat{t}$	$\hat{\theta}$	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_2$	$\hat{L}_\infty$	CMC
Geo	2,3	13,1	4,9	5,1	4,9	4,9	5,4	5,5	5,3	5,4
BinN	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
Poi	69,4	79,8	77,5	75,0	57,1	57,1	55,7	56,4	56,6	74,1
	$F \sim BinN$									
	Tests originaux		Tests permutationnels de MC							
G	KS	CVM	KS	CVM	$\hat{t}$	$\hat{\theta}$	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_2$	$\hat{L}_\infty$	CMC
BinN	1,7	7,8	4,9	5,0	5,1	5,1	4,8	4,9	4,9	4,9
Poi	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

BIBLIOGRAPHIE

ALLEN, D. L. (1997): "Hypothesis Testing Using an L_1-Distance Bootstrap," *The American Statistician*, 51-2, 145–150.

ANDERSON, G. (1994): "Simple tests of distributional form," *Journal of Econometrics*, 62, 265–276.

ANDERSON, T., AND D. DARLING (1954): "A test ofgoodness-of-fit," *Journal of the American Statistical Association*, 49, 765–769.

ANDERSON, T. W. (1962): "On the distribution of the two-sample Cramér-von Mises criterion," *Annals of Mathematical Statistics*, 33, 1148–1159.

BARNARD, G. A. (1963): "Comment," *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 25, 294.

BIRNBAUM, Z. W. (1974): "Computers and Unconventional Test-Statistics," in *Reliability and Biometry*, pp. 441–445, Philadelphia(SIAM).

BIRNBAUM, Z. W., AND R. A. HALL (1960): "Small Sample Distributions for multi-sample statistics of the Smirnov type," *Annals of Mathematical Statistics*, 31, 710–720.

BOWMAN, K., AND B. SHENTON (1975): "Omnibus test contours for departures from normality based on $\sqrt{b_1}$ and b_2," *Biometrika*, 52, 591–611.

BRIAN, D. R. (1987): *Stochastic Simulation.* John Wiley, New York.

BURR, E. J. (1963): "Distribution of the two-sample Cramér-von Mises criterion for small equal samples," *Annals of Mathematical Statistics*, 34, 95–101.

——— (1964): "Small samples distributions of the two-sample Cramér-von Mises' W^2 and Watson's U^2," *Annals of Mathematical Statistics*, 35, 1091–1098.

COHEN, A. C., AND F. R. HELM (1973): "Estimator in the exponential distribution," *Technometrics*, 15, 415–418.

CONOVER, W. J. (1971): *Practical Nonparametric Statistics.* John Wiley, New York.

Cramér, H. (1928): "On the composition of elementary errors," *Second paper: Statistical applications. Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 11, 141–180.

D'Agostino, R. B., and M. I. A. Stephens (eds.) (1986): *Goodness-of-Fit Techniques*. pMD, New York.

Dufour, J.-M. (1995): "Monte Carlo Tests with Nuisance Parameters: A General Approach to Finite-Sample Inference and Nonstandard Asymptotics in Econometrics," Discussion paper, CRDEUM.

Dufour, J.-M., A. Farhat, L. Gardiol, and L. Khalaf (1998): "Simulation-Based Finite Sample Normality Tests in Linear Regressions," *The Econometrics Journal*, Forthcoming.

Dufour, J.-M., and J. F. Kiviet (1998): "Exact Inference Methods for First-Order Autoregressive Distributed Lag Models," *Econometrica*, 66, 79–104.

Dwass, M. (1957): "Modified Randomization Tests for Nonparametric Hypotheses," *Annals of Mathematical Statistics*, 28, 181–187.

Efron, B., and R. J. Tibshirani (1993): *An Introduction to the Bootstrap*, vol. 57 of *Monographs on Statistics and Applied Probability*. Chapman & Hall, New York.

Gouriéroux, C., and A. Monfort (1989): *Statistique et modèles économétriques, Volumes 1 et 2*. Economica, Paris.

IMSL (1987): *International Mathematical and Statistical Libraries, IMSL STAT/LIBRARY* Softcover edition edn.

Jarque, C., and A. K. Bera (1980): "Efficiency tests fornormality, heteroscedasticity and serial independence of regression residuals," *Economics Letters*, 6, 255–259.

——— (1987): "A Test for Normality of Observations and Regression Residuals," *International Statistic Review*, 55, 163–172.

Johnson, N. L., S. Kotz, and Balakrishnan (1994): *Continuous Univariate Distributions*. John Wiley, New York.

Kiviet, J., and J.-M. Dufour (1997): "Exact Tests in Single Equation Autoregressive Distributed Lag Models," *Journal of Econometrics*, 80, 325–353.

Kolmogorov, A. N. (1933): "Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione," *Giorna. Ist. Ital. Attuari.*, 4, 83–91.

Lehmann, E. L. (1986): *Testing Statistical Hypotheses, 2nd edition*. John Wiley, New York.

LILLIEFORS, H. (1967): "On the Kolmogorov-Smirnov testfor normality with mean and variance unknown," *Journal of the American Statistical Association*, 62, 399–402.

MARDIA, K. (1980): "Tests of univariate and Multivariate normality," in *Handbook of statistics*, vol. 1, pp. 279–320. P.R. Krishnaiah.

MASSEY, F. J. (1952): "Distribution table for the deviation between two sample cumulatives," *Annals of Mathematical Statistics*, 23, 435–441.

PEARSON, E. S. (1965): "Tables of percentage points of $\sqrt{b_1}$ and b_2 in normal samples; a rounding off," *Biometrika*, 52, 282–285.

PEARSON, E. S., AND H. O. HARTLEY (1972): *Biometrika Tables for Statisticians.* Cambridge University Press, New York.

PIERCE, D., AND R. GRAY (1982): "Testing normality oferrors in regression models," *Biometrika*, 69, 233–236.

ROMANO, J. P. (1989): "Bootstrap and Randomization Tests of some Nonparametric Hypotheses," *The Annals of Statistics*, 17, 141–159.

SAVAGE, I. R. (1956): "Contributions to the theory of rank order statistics: Two-sample case," *Annals of Mathematical Statistics*, 27, 590–615.

SMIRNOV, N. V. (1939): "Sur les écarts de la courbe de distribution empirique (Russian/French summary)," *Rec. Math.*, 6, 3–26.

WATSON, G. S. (1961): "Goodness-of-fit Tests on a Circle," *Biometrika*, 48, 109–114.

WEISBERG, S. (1980): "Comment on: Some large sample tests for non-normality in the linear regression model, by H. White and G.M. MacDonald," *Journal of the American Statistical Association*, 75, 28–31.

WHITE, H., AND G. MACDONALD (1980): "Some large sample tests for non-normality in the linear regression model," *Journal of the American Statistical Association*, 75, 16–28.