Université de Montréal

Comparaison de tests pour le problème de position et de dispersion à deux échantillons

par

Catherine Lussier

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M. Sc.)
en statistique

Octobre 1997

Université de Montréal

Faculté des arts et des sciences

Ce mémoire intitulé:

Comparaison de tests pour le problème de position et de dispersion à deux échantillons

présenté par

Catherine Lussier

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

Narayan C. Giri

(président-rapporteur)

Yves Lepage

(directeur de recherche)

Urs Maag

(membre du jury)

Mémoire accepté le: 29 janvier 1998

SOMMAIRE

Ce mémoire traite du problème de comparaison de deux populations pouvant différer simultanément dans leurs paramètres de position et de dispersion. Une revue de la littérature nous a permis de relever plusieurs tests statistiques construits pour ce problème. Ces tests font ensuite l'objet d'une étude expérimentale visant à comparer les niveaux expérimentaux ainsi que les puissances expérimentales à l'aide de simulations de type Monte Carlo. Les résultats sont présentés puis interprétés afin de déterminer le test le plus approprié pour tester les paramètres de position et de dispersion.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX

REMERCIEMENTS

En premier lieu, je tiens à remercier très sincèrement mon directeur de recherche, Yves Lepage, pour m'avoir témoigné sa confiance tout au long de la rédaction de ce mémoire. Pour sa rigueur intellectuelle à laquelle j'ai pu me référer, pour ses nombreux conseils judicieux qu'il m'a prodigués, mais surtout, pour m'avoir laissé chercher...

Je remercie chaleureusement Éric pour son support moral constant, pour m'avoir redonné confiance avec amour dans les moments difficiles et surtout, pour m'avoir si tendrement écoutée.

Je remercie également Monique pour m'avoir offert le cadre et le support moral nécessaire à cet accomplissement tant personnel qu'académique.

Finalement, je remercie mes amis pour avoir parsemé mon chemin de moments agréables et heureux. Un merci tout spécial à Marc Dorais pour son aide précieuse. Merci également à tous ceux qui ont, de près ou de loin, contribué à ma réussite.

INTRODUCTION

Un des problèmes d'intérêt de la statistique est la comparaison de deux populations pouvant différer dans un de leur paramètre. Lorsqu'il s'agit de comparer deux populations de loi normale ne différant que dans leur paramètre de position, le test de Student (1908) demeure le plus approprié. Or, il arrive que nous soyons intéressés à tester une différence simultanée dans les paramètres de position et de dispersion de deux populations. Il est clair que dans ce cas, l'utilisation du test de Student (1908) n'est pas adéquate. Cette situation nous amène donc à considérer le problème où les hypothèses alternatives sont plus générales qu'une simple différence entre les paramètres de position.

Le premier chapitre est consacré à la présentation de différents tests paramétriques et non paramétriques construits dans le but de tester des différences simultanées dans les paramètres de position et de dispersion. Nous décrivons de plus quelques tests non paramétriques construits pour tester des hypothèses plus générales consistant en des différences dans leurs paramètres de position, de dispersion et/ou autres. Dans le but de décrire complètement le test proposé par Podgor et Gastwirth (1994), nous suggérons une façon d'estimer un coefficient de corrélation entre deux statistiques linéaires de rangs bien précises. Aussi, en plus de considérer le test proposé par de Fueda et Ohori (1996), nous en étudions une seconde forme que ces derniers n'ont pas considéré dans leur étude. Nous présentons finalement les principaux résultats de quelques études comparatives parues dans la littérature concernant certains des tests décrits.

Au second chapitre, nous effectuons une étude expérimentale des tests décrits au premier chapitre. Une simulation de type Monte Carlo est utilisée afin de comparer les niveaux et puissances des différents tests. L'étude porte sur différentes distributions et tailles échantillonnales. Nous accompagnons ce chapitre d'une discussion des résultats expérimentaux obtenus.

Chapitre1: Comparaison de deux populations

1.1 Description du modèle

Un des problèmes d'intérêt de la statistique est la comparaison de deux populations lorsque l'alternative est plus générale qu'une simple différence entre les paramètres de position. Nous nous intéressons plus particulièrement au problème de deux populations pouvant différer simultanément dans leurs paramètres de position et de dispersion. Nous considérons aussi le cas où les populations peuvent de plus différer dans leurs paramètres d'asymétrie et d'aplatissement ou encore lorsque leurs distributions sont différentes.

Soit deux échantillons aléatoires indépendants provenant de deux populations dont les fonctions de distribution sont $F(x)$ et $G(x)$ respectivement et supposons que F et G sont continues. Le problème consiste à vérifier l'hypothèse que les deux échantillons proviennent de la même population, c'est-à-dire à tester l'hypothèse nulle H_0: $F(x) = G(x)$ contre des alternatives de la forme H: $F(x) \neq G(x)$. Dans le cas où les deux populations peuvent différer dans leurs paramètres de position et de dispersion, les hypothèses alternatives considérées sont de la forme H_1: $G(x) = F(ax+b)$ avec $a\neq1$ ou $b\neq0$ ($a>0$).

Soient $X_1,\ldots,X_m$ et $X_{m+1},\ldots,X_{m+n}$ les deux échantillons aléatoires indépendants provenant des deux populations dont les fonctions de distribution sont $F(x)$ et $G(x)$ respectivement et posons $N=m+n$. Dénotons, pour $i = 1,\ldots,N$, le rang de l'observation X_i parmi $X_1,\ldots,X_N$ par R_i.

Soit aussi $Z_1,\ldots,Z_N$ l'ordination croissante de $X_1,\ldots,X_N$ et définissons pour $i = 1,\ldots,N$, la fonction indicatrice

$$Z_{Ni} = \begin{cases} 1 & si \quad Z_i \in \{X_1, \ldots, X_m\}, \\ 0 & si \quad Z_i \in \{X_{m+1}, \ldots, X_N\}. \end{cases}$$

Désignons de plus par $\chi^2_{\nu;1-\alpha}$ le quantile d'ordre 1-α d'une loi khi-deux à ν degrés de liberté et par $z_{1-\alpha/2}$ le quantile d'ordre 1-α/2 d'une loi normale centrée et réduite.

1.2 Classe des statistiques de Lepage

Lepage (1971b, 1977) a introduit une classe de statistiques basées sur les rangs servant à mesurer la différence entre deux populations qui ne diffèrent que dans leurs paramètres de position et de dispersion. Il s'agit de confronter l'hypothèse H_0 à des alternatives de la forme H_1.

Définissons pour k=1,2 la statistique linéaire de rangs $S_{Nk}=\sum_{i=1}^{m} a_{Nk}(R_i)$ où $a_{Nk}(1),\ldots,a_{Nk}(N)$ sont les valeurs prises par la fonction de cotes $a_{Nk}(\cdot)$. Sous H_0 et pour k=1 et 2, la moyenne et la variance de cette statistique sont respectivement données par

$$\mu_{Nk} = E(S_{Nk}|H_0) = \frac{m}{N}\sum_{i=1}^{N} a_{Nk}(i) = m\bar{a}_{Nk}$$

et

$$\sigma^2_{Nk} = Var(S_{Nk}|H_0) = \frac{mn}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}\left(a_{Nk}(i) - \bar{a}_{Nk}\right)^2 .$$

Les statistiques de la classe proposée par Lepage (1971b,1977) sont de la forme

$$T = \sum_{k=1}^{2}\left(\frac{S_{Nk}-\mu_{Nk}}{\sigma_{Nk}}\right)^2 .$$

Sous H_0 la distribution exacte des statistiques de la forme T peut être trouvée à l'aide de la formule de récurrence décrite par Lepage (1971b,1977). Avant de présenter la distribution asymptotique de la statistique T sous H_0, nous devons d'abord introduire une condition concernant les fonctions de cotes.

Une fonction de cotes $a_N(\cdot)$ est dite engendrée par une fonction à valeurs réelles $\varphi(u)$, $0<u<1$, si

$$(i) \quad \int_0^1 \varphi^2(u)du \;<\; \infty \quad et \quad \int_0^1 (\varphi(u)-\overline{\varphi})^2 du \;>\; 0,$$

où $\overline{\varphi} \;=\; \int_0^1 \varphi(u)du$, et

$$(ii) \lim_{N\to\infty} \int_0^1 (a_N(1+[uN])-\varphi(u))^2 du \;=\; 0$$

où $[uN]$ désigne le plus grand entier n'excédant pas uN.

Selon Hájek et Šidák (1967), une fonction de cotes $a_N(\cdot)$ engendrée par la fonction $\varphi(u)$ peut être construite pour i=1,...,N par

$$a_N(i) = E\left[\varphi(U_N^{(i)})\right],\; a_N(i) = \varphi\left(\frac{i}{N+1}\right) \text{ ou encore } a_N(i) = N\int_{\frac{i-1}{N}}^{\frac{i}{N}} \varphi(u)du$$

où $U_N^{(1)} <...< U_N^{(N)}$ est un échantillon ordonné provenant d'une distribution uniforme sur l'intervalle [0,1]. Ces trois façons d'engendrer les fonctions de cotes $a_N(\cdot)$ sont asymptotiquement équivalentes lorsque $\min(m,n) \to \infty$.

Supposons que, pour k = 1 et 2, la fonction de cotes $a_{Nk}(\cdot)$ est engendrée par $\varphi_k(u)$, $0<u<1$, et $\int_0^1 (\varphi_1(u)-\overline{\varphi}_1)(\varphi_2(u)-\overline{\varphi}_2)du = 0$. Alors, Lepage (1971b,1977) a démontré que sous H_0 et lorsque $\min(m,n) \to \infty$, les statistiques de la forme T sont distribuées selon une loi khi-deux avec deux degrés de liberté. Ainsi, lorsque $\min(m,n) \to \infty$, la région critique du test basé sur T de niveau asymptotique α pour H_0 contre H_1 est de la forme $T \geq \chi^2_{2;1-\alpha}$.

Sous une suite d'hypothèses alternatives q_Δ convergeant vers l'hypothèse nulle où q_Δ est définie par

$$q_\Delta = \prod_{i=1}^{m}(e^{-\Delta_1\left(\frac{mn}{N}\right)^{-\frac{1}{2}}})f(e^{-\Delta_1\left(\frac{mn}{N}\right)^{-\frac{1}{2}}}x_i - \Delta_2\left(\frac{mn}{N}\right)^{-\frac{1}{2}})\prod_{i=m+1}^{N}f(x_i)$$

où $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2) \in R^2$ et f est une fonction de densité continue, Lepage (1971b,1977) a démontré en utilisant la notion de contiguïté de Le Cam (1960) et l'approche d'Hájek et Šidák (1967) que la statistique T suit asymptotiquement une loi khi-deux avec deux degrés de liberté et un paramètre de décentralité

$$\delta^2 = \sum_{k=1}^{2}\left[\left(\int_0^1 \varphi_k(u)(\Delta_2\varphi(u,f)+\Delta_1\varphi_1(u,f))du\right)^2 / \int_0^1(\varphi_k(u)-\overline{\varphi})^2du\right]$$

où $(\Delta_1,\Delta_2) \in R^2$, $\Delta_1 \neq 0$ et $\varphi(u,f) = -\dfrac{f'(F^{-1}(u))}{f(F^{-1}(u))}$

et $\varphi_1(u,f) = -1 - F^{-1}(u)\dfrac{f'(F^{-1}(u))}{f(F^{-1}(u))}$, $0<u<1$.

Notons que pour les hypothèses alternatives de la forme H_1, Δ_1 et Δ_2 sont respectivement égaux à $-\left(\dfrac{mn}{N}\right)^{-1/2}\ln(a)$ et $-\left(\dfrac{mn}{N}\right)^{-1/2} b$.

1.2.1 Cas particuliers

Combinaison des statistiques de Wilcoxon et d'Ansari-Bradley

Lepage (1971a) avait déjà développé un test non paramétrique pour tester H_0 contre H_1. En fait, ce test est un cas particulier de la classe de tests décrite par Lepage (1971b,1977). Plus précisément, la statistique du test correspond à une combinaison quadratique des statistiques linéaires de rangs de Wilcoxon (1945) et d'Ansari-Bradley (1960) standardisées.

La statistique de Lepage (1971a) est donnée par

$$T_{\mathrm{W,A\text{-}B}} = \sum_{k=1}^{2}\left(\frac{S_{Nk}-\mu_{Nk}}{\sigma_{Nk}}\right)^2$$

où $S_{N1} = \sum_{i=1}^{m} a_{N1}(R_i) = \sum_{i=1}^{m} R_i$ et $S_{N2} = \sum_{i=1}^{m} a_{N2}(R_i) = \frac{m}{2}(N+1) - \sum_{i=1}^{m}\left|R_i - \frac{1}{2}(N+1)\right|$ sont les statistiques linéaires de rangs de Wilcoxon (1945) et d'Ansari-Bradley (1960) respectivement. Les valeurs de $\mu_{N1}, \sigma_{N1}^2, \mu_{N2}$ et σ_{N2}^2 sont données par

$$\mu_{N1} = \frac{1}{2}m(N+1),\quad \sigma_{N1}^2 = \frac{1}{12}mn(N+1),$$

$$\mu_{N2} = \begin{cases} \dfrac{m(N+2)}{4} & si \quad N \quad est \quad pair, \\ \dfrac{m(N+1)^2}{4N} & si \quad N \quad est \quad impair, \end{cases}$$

et

$$\sigma^2_{N2} = \begin{cases} \dfrac{mn(N^2-4)}{48(N-1)} & si \quad N \quad est \quad pair, \\ \dfrac{mn(N+1)(N^2+3)}{48N^2} & si \quad N \quad est \quad impair. \end{cases}$$

La distribution exacte de la statistique $T_{W,A\text{-}B}$ sous H_0 peut être trouvée à l'aide de la formule de récurrence donnée par Lepage (1971a). De plus, une table des valeurs critiques exactes pour différents niveaux de signification a été produite par Lepage (1973).

Les fonctions génératrices des fonctions de cotes des statistiques de Wilcoxon (1945) et d'Ansari-Bradley (1960) étant respectivement données par $\varphi_1(u) = 2u - 1$ et $\varphi_2(u) = -1 + 2\,|\,2u - 1\,|$, $0<u<1$, nous trouvons $\overline{\varphi_1} = \overline{\varphi_2} = 0$ et $\int_0^1 (\varphi_1(u) - \overline{\varphi_1})(\varphi_2(u) - \overline{\varphi_2})du = 0$. Ainsi, il en résulte que sous H_0, la distribution asymptotique de la statistique $T_{W,A\text{-}B}$ est une loi khi-deux avec deux degrés de liberté lorsque $\min(m,n) \to \infty$. Notons que Lepage (1971a) avait déjà démontré ce résultat en utilisant l'approche de Chernoff et Savage (1958).

1.2.2 Statistique de Duran, Tsai et Lewis

Pour tester H_0 contre H_1, Duran, Tsai et Lewis (1976) ont proposé de combiner la statistique linéaire de rangs de Wilcoxon (1945) et celle de Mood (1954) plutôt que celle d'Ansari-Bradley (1960). Leur statistique est de la même forme que celles de la classe décrite par Lepage (1971b,1977) et elle est définie par

$$T_{\mathrm{W,M}} = \sum_{k=1}^{2}\left(\frac{S_{Nk}-\mu_{Nk}}{\sigma_{Nk}}\right)^2$$

où $S_{N1}=\sum_{i=1}^{m} a_{N1}(R_i)=\sum_{i=1}^{m} R_i$ et $S_{N2}=\sum_{i=1}^{m} a_{N2}(R_i)=\sum_{i=1}^{m}\left(R_i-\frac{1}{2}(N+1)\right)^2$ sont les statistiques linéaires de rangs de Wilcoxon (1945) et de Mood (1954) respectivement. Les valeurs de $\mu_{N1}, \sigma^2_{N1}, \mu_{N2}$ et σ^2_{N2} sont données par

$$\mu_{N1} = \frac{1}{2}m(N+1),\quad \sigma^2_{N1} = \frac{1}{12}mn(N+1),\ \mu_{N2} = \frac{m(N+1)(N-1)}{12}$$

et

$$\sigma^2_{N2} = \frac{mn(N+1)(N^2-4)}{180}.$$

Pour démontrer que la distribution asymptotique de $T_{\mathrm{W,M}}$ lorsque $\min(m,n)\to\infty$ est une loi khi-deux à deux degrés de liberté lorsque H_0 est vérifiée, Duran, Tsai et Lewis (1976) ont utilisé l'approche de Chernoff et Savage (1958). D'autre part, en utilisant Lepage (1971b, 1977), il suffit de noter que les fonctions génératrices des fonctions de cotes associées aux statistiques linéaires de rangs de Wilcoxon (1945) et de Mood (1954) sont respectivement données par $\varphi_1(u)=2u-1$ et $\varphi_2(u)=-1+2(2u-1)^2+\frac{1}{3}$, $0<u<1$, avec $\overline{\varphi_1}=\overline{\varphi_2}=0$ et $\int_0^1(\varphi_1(u)-\overline{\varphi}_1)(\varphi_2(u)-\overline{\varphi}_2)du=0$.

1.2.3 Cas optimaux

Lepage (1971b, 1977) a démontré que lorsque $F(x)$ est connue, il est possible de trouver un test de la forme T qui est asymptotiquement optimal pour vérifier l'hypothèse H_0 contre les alternatives de la forme H_1:$G(x)=F(ax+b)$ avec $a \neq 1$ ou $b \neq 0$ $(a>0)$.

Plus précisément, si f représente la fonction de densité correspondant à $F(x)$, le test basé sur la statistique de la forme T où $S_{N1} = S_{N1,f} = \sum_{i=1}^{m} a_{N1}(R_i, f)$ et $S_{N2} = S_{N2,f} = \sum_{i=1}^{m} a_{N2}(R_i, f)$ avec $a_{N1}(\cdot, f)$ et $a_{N2}(\cdot, f)$ respectivement engendrées par $\varphi(u,f)$ et $\varphi_1(u,f)$, $0<u<1$, est asymptotiquement optimal. Cette statistique est notée T_f. En fait, le test basé sur la combinaison standardisée des statistiques $S_{N1,f}$ et $S_{N2,f}$ est asymptotiquement maximin uniformément le plus puissant pour H_0 contre $q_{N,\Delta}$ où $\Delta=(\Delta_1,\Delta_2)$, $\Delta_1 \neq 0$ et $\Delta_2^2 \int_0^1 \varphi^2(u,f)du + \Delta_1^2 \int_0^1 \varphi_1^2(u,f)du$ est constant (Lepage (1971b,1977)).

Rappelons qu'il suffit de prendre $a_{N1}(i,f) = \varphi\left(\frac{i}{N+1}, f\right)$ et $a_{N2}(i,f) = \varphi_1\left(\frac{i}{N+1}, f\right)$, i=1,...,N, pour que $a_{N1}(\cdot, f)$ et $a_{N2}(\cdot, f)$ soient respectivement engendrées par $\varphi(\cdot, f)$ et $\varphi_1(\cdot, f)$ (voir Hájek et Šidák (1967)).

Puisque $\int_0^1 \varphi(u,f)\varphi_1(u,f)du = 0$, la région critique du test asymptotiquement optimal de niveau asymptotique α est donnée par $T_f \geq \chi^2_{2;1-\alpha}$.

Ainsi, lorsque $F(x)$ est une loi normale, le test asymptotiquement optimal pour vérifier l'hypothèse H_0 contre les alternatives de la forme H_1 correspond à une combinaison quadratique des statistiques linéaires de rangs de van der Waerden (1953) et de Klotz (1962) standardisées. En effet, comme $\varphi(u,f)=\Phi^{-1}(u)$ et $\varphi_1(u,f)=-1+(\Phi^{-1}(u))^2$, $0<u<1$, lorsque f est la fonction de densité correspondant à la fonction de répartition $\Phi(\cdot)$ d'une loi normale centrée et réduite, le test asymptotiquement optimal pour H_0 contre H_1 est basé sur la statistique $T_{\mathrm{vdW,K}}$ donnée par

$$T_{\mathrm{vdW,K}} = \left(\frac{S_{N1}-\mu_{N1}}{\sigma_{N1}}\right)^2 + \left(\frac{S_{N2}-\mu_{N2}}{\sigma_{N2}}\right)^2$$

où $S_{N1}=\sum_{i=1}^{m} a_{N1}(R_i) = \sum_{i=1}^{m} \Phi^{-1}(\frac{R_i}{N+1})$ et $S_{N2}=\sum_{i=1}^{m} a_{N2}(R_i) = \sum_{i=1}^{m}\left(\Phi^{-1}(\frac{R_i}{N+1})\right)^2$.

Les valeurs de $\mu_{N1}, \sigma^2_{N1}, \mu_{N2}$ et σ^2_{N2} sont données par

$$\mu_{N1} = 0, \sigma^2_{N1} = \frac{mn}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}\left(\Phi^{-1}\left(\frac{i}{N+1}\right)\right)^2, \mu_{N2} = \frac{m}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\Phi^{-1}\left(\frac{i}{N+1}\right)\right)^2$$

et

$$\sigma^2_{N2} = \frac{mn}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}\left(\Phi^{-1}\left(\frac{i}{N+1}\right)\right)^4 - \frac{n}{m(N-1)}(\mu_{N2})^2.$$

Si $F(x)$ est de loi logistique, le test asymptotiquement optimal pour tester H_0 contre H_1 est basé sur la statistique définie par

$$T_{\mathrm{W,Log}} = \left(\frac{S_{N1} - \mu_{N1}}{\sigma_{N1}}\right)^2 + \left(\frac{S_{N2} - \mu_{N2}}{\sigma_{N2}}\right)^2$$

où S_{N1} correspond à la statistique linéaire basée sur les rangs de Wilcoxon (1945) et $S_{N2} = \sum_{i=1}^{m} a_{N2}(R_i) = \sum_{i=1}^{m}\left(R_i - \frac{1}{2}(N+1)\right)\ln\left(\frac{R_i}{N+1-R_i}\right)$ avec μ_{N2} et σ_{N2}^2 respectivement données par

$$\mu_{N2} = \frac{m}{N}\sum_{i=1}^{N} a_{N2}(i) = \frac{m}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{2i}{N+1} - 1\right)\ln\left(\frac{i}{N+1-i}\right) = m\bar{a}_{N2}$$

et

$$\sigma_{N2}^2 = \frac{mn}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}\left(a_{N2}(i) - \bar{a}_{N2}\right)^2.$$

Aussi, lorsque $F(x)$ est une loi Cauchy, le test asymptotiquement optimal pour vérifier H_0 contre les alternatives de la forme H_1 est défini par la statistique

$$T_{\mathrm{Sin,Cos}} = \left(\frac{S_{N1} - \mu_{N1}}{\sigma_{N1}}\right)^2 + \left(\frac{S_{N2} - \mu_{N2}}{\sigma_{N2}}\right)^2$$

où $S_{N1} = \sum_{i=1}^{m} a_{N1}(R_i) = -\sum_{i=1}^{m}\sin\left(\frac{2\pi R_i}{N+1}\right)$ et $S_{N2} = \sum_{i=1}^{m} a_{N2}(R_i) = \sum_{i=1}^{m}\cos\left(\frac{2\pi R_i}{N+1}\right)$

puisque $\varphi(u,f) = -\sin(2\pi u)$ et $\varphi_1(u,f) = \cos(2\pi u)$, $0<u<1$. La forme de la statistique $T_{\mathrm{Sin,Cos}}$ correspond à la statistique de Mardia (1967) qui a été introduite pour un problème complètement différent.

Les valeurs de $\mu_{N1}, \sigma^2_{N1}, \mu_{N2}$ et σ^2_{N2} sont données par

$$\mu_{N1} = 0,\ \sigma^2_{N1} = \frac{mn(N+1)}{2N(N-1)},\ \mu_{N2} = -\frac{m}{N} \text{ et } \sigma^2_{N2} = \frac{mn(N^2-N-2)}{2N^2(N-1)}.$$

1.3 Classe des statistiques pondérées de Lepage

Lepage (1975) a développé une classe de tests basés sur des statistiques linéaires de rangs qui sont asymptotiquement les plus puissants pour H_0 contre q_Δ.

Posons $l = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \in$ R et considérons la fonction de cotes définie par $a(\cdot, f, l) = la(\cdot, f) + a_1(\cdot, f)$ engendrée par la fonction génératrice $\varphi(u, f, l) = l\varphi(u, f) + \varphi_1(u, f)$. Lepage (1975) a démontré que le test basé sur la statistique $S_\Delta = \sum_{i=1}^{m} a(R_i, f, l)$ est asymptotiquement le plus puissant pour H_0 contre q_Δ lorsque $\min(m,n) \to \infty$, pour $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2) \in R^2$ et $\Delta_1 \neq 0$.

Par la théorie d'Hájek et Šidák (1967, p.163), Lepage (1975) montre que sous H_0, la statistique $\frac{\Delta_1}{|\Delta_1|} S_\Delta$ est asymptotiquement distribuée selon une loi normale de moyenne 0 et de variance $\left(\frac{mn}{N}\right)\int_0^1 \varphi^2(u, f, l)du$. Ainsi, la statistique définie par

$$P = \frac{S_\Delta^2}{\left(\frac{mn}{N}\right)\int_0^1 \varphi^2(u, f, l)du}$$

est asymptotiquement distribuée selon une loi khi-deux à 1 degré de liberté lorsque H_0 est respectée et lorsque $\min(m,n) \to \infty$ et $\Delta_1 \neq 0$. Ainsi, la région critique du test asymptotiquement le plus puissant de niveau asymptotique α pour H_0 contre q_Δ est donnée par $P \geq \chi^2_{1;1-\alpha}$.

Notons que lorsque les hypothèses alternatives sont de la forme H_1:$G(x)=F(ax+b)$, alors la constante de pondération l est définie par $l = \frac{b}{\ln(a)}$.

1.3.1 Cas particuliers

Lorsque $F(x)$ est normale, le test asymptotiquement le plus puissant pour H_0 contre q_Δ est basé sur une combinaison pondérée des statistiques linéaires de rangs de van der Waerden (1953) et de Klotz (1962). La statistique est définie par

$$P_{vdW,K} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{m}\left(l\Phi^{-1}\left(\frac{R_i}{N+1}\right)+\left(-1+\left(\Phi^{-1}\left(\frac{R_i}{N+1}\right)\right)^2\right)\right)\right)^2}{\left(\frac{mn}{N}\right)(l^2+2)}, \quad \Delta_1 \neq 0.$$

Aussi, lorsque $F(x)$ est logistique, le test basé sur la statistique pondérée définie par

$$P_{W,Log} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{m}\left(l\left(2\frac{R_i}{N+1}-1\right)+\left(-1+\left(2\frac{R_i}{N+1}-1\right)\ln\left(\frac{R_i}{N+1-R_i}\right)\right)\right)\right)^2}{\left(\frac{mn}{N}\right)\frac{1}{3}\left(l^2+\frac{\pi^2}{3}+1\right)}$$

est asymptotiquement le plus puissant pour H_0 contre q_Δ. Notons que la statistique $\sum_{i=1}^{m}\left(2\frac{R_i}{N+1}-1\right)$ correspond à la statistique linéaire de rangs de Wilcoxon (1945).

Finalement, si $F(x)$ est Cauchy, alors le test défini par

$$P_{Sin,Cos}=\frac{\left(\sum_{i=1}^{m}\left(-l\sin\left(\frac{2\pi R_i}{N+1}\right)+\cos\left(\frac{2\pi R_i}{N+1}\right)\right)\right)^2}{\left(\frac{mn}{N}\right)\frac{1}{2}(l^2+1)}$$

est asymptotiquement le plus puissant pour H_0 contre q_Δ.

Pour tester H_0 contre des alternatives de la forme H_1, considérons aussi la combinaison pondérée des statistiques linéaires de rangs de Wilcoxon (1945) et d'Ansari-Bradley (1960) définie par

$$P_{W,AB}=\frac{\left(\sum_{i=1}^{m}\left(l\left(\frac{2R_i}{N+1}-1\right)+\left(-1+2\left|\frac{2R_i}{N+1}-1\right|\right)\right)\right)^2}{\left(\frac{mn}{N}\right)\frac{1}{3}(l^2+1)}.$$

La statistique $P_{W,AB}$ est asymptotiquement distribuée selon une loi khi-deux à 1 degré de liberté lorsque $\min(m,n)\to\infty$. Ainsi, la région critique de niveau asymptotique α associée à cette statistique est de la forme $P_{W,AB}\geq\chi^2_{1;1-\alpha}$.

1.3.2 Statistique pondérée de Smit, Swart et Stoker

Smit, Swart et Stoker (1987) ont proposé un test pour H_0 contre H_1 qui repose sur une combinaison pondérée des statistiques linéaires de rangs de Wilcoxon (1945) et de Mood (1954). La statistique de Smit, Swart et Stoker (1987) est définie par

$$P_N = (1-c_N)NS_{N1} + c_N S_{N2}$$

où $0 \leq c_N \leq 1$ est une constante de pondération et $S_{N1} = \sum_{i=1}^{m} a_{N1}(R_i) = \sum_{i=1}^{m} R_i$ et $S_{N2} = \sum_{i=1}^{m} a_{N2}(R_i) = \sum_{i=1}^{m} \left(R_i - \frac{1}{2}(N+1) \right)^2$ sont les statistiques linéaires de rangs de Wilcoxon (1945) et de Mood (1954) respectivement.

Sous H_0, la moyenne et la variance de P_N sont données par

$$E\left[P_N \middle| H_0\right] = \frac{1}{12} m(N+1)\left\{(6-5c_N)N - c_N\right\}$$

et

$$Var\left(P_N \middle| H_0\right) = \frac{1}{180} mn(N+1)\left\{c_N^2(N^2-4) + 15(1-c_N)^2 N^2\right\}.$$

Pour trouver la distribution asymptotique de P_N sous H_0, Smit, Swart et Stoker (1987) utilisent l'approche de Chernoff et Savage (1958) et montrent que sous H_0, la distribution asymptotique de $P_{W,M}^{*} = \dfrac{P_N - E\left[P_N \middle| H_0\right]}{\sqrt{Var(P_N | H_0)}}$ est une loi normale centrée et réduite lorsque $N \to \infty$, $\frac{m}{N} \to \lambda$ et $c_N \to c$. La région critique du test de niveau asymptotique α est de la forme $\left|P^{*}_{W,M}\right| \geq z_{1-\alpha/2}$.

Smit, Swart et Stoker (1987) suggèrent de prendre des poids associés aux statistiques de Wilcoxon (1945) et de Mood (1954) qui reflètent respectivement l'importance relative des différences de position et de dispersion qu'il y a entre les deux populations. Ainsi, ils proposent de prendre un poids c_N qui satisfait à l'équation suivante: $c_N^{-1} = c^{-1} + o(N^{-1/2})$ avec $c = \frac{a-1}{a+b-1}$ où a et b correspondent respectivement aux différences de dispersion et de position présentes entre les deux populations.

Notons que la combinaison pondérée des statistiques linéaires de rangs de Wilcoxon (1945) et de Mood (1954) peut aussi être construite en se basant sur la classe de statistiques décrite par Lepage (1975). En effet, la statistique proposée par Lepage (1975) est définie par

$$P_{W,M} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{m}\left(l\left(\frac{2R_i}{N+1}-1\right)+\left(-1+2\left(\frac{2R_i}{N+1}-1\right)^2+\frac{1}{3}\right)\right)\right)^2}{\left(\frac{mn}{N}\right)\frac{1}{3}\left(l^2+\frac{16}{15}\right)}$$

et est asymptotiquement distribuée selon une loi khi-deux à 1 degré de liberté lorsque $\min(m,n) \to \infty$. Ainsi, la région critique de niveau asymptotique associée à cette statistique est de la forme $P_{W,M} \geq \chi^2_{1;1-\alpha}$. Remarquons que les statistiques $P_{W,M}$ et celle de Smit, Swart et Stoker (1987) élevée au carré $\left(\left(P^*_{W,M}\right)^2\right)$ sont asymptotiquement équivalentes lorsque $\min(m,n) \to \infty$.

1.3.3 Statistique de Podgor et Gastwirth

Soient f et g deux fonctions de densité. Alors, pour chacune des densités f et g, il existe une fonction génératrice $\varphi(u,f)$ et $\varphi(u,g)$ qui détermine respectivement un test de rangs asymptotiquement le plus puissant pour vérifier si deux populations diffèrent dans leurs paramètres de position. De la même façon, pour chacune des densités f et g, il existe une fonction génératrice $\varphi_1(u,f)$ et $\varphi_1(u,g)$ qui détermine respectivement un test de rangs asymptotiquement le plus puissant pour vérifier si deux populations diffèrent dans leurs paramètres de dispersion (voir Hájek et Šidák (1967)).

Considérons l'ensemble des fonctions génératrices Γ tel que pour toutes fonctions $\varphi(\cdot) \in \Gamma$, nous avons $\int_0^1 \varphi(u)du = 0$ et $\int_0^1 \varphi^2(u)du = 1$.

Lorsque les échantillons proviennent de populations ayant comme fonctions de densité f et g respectivement, Gastwirth (1966) propose un test maximin basé sur les rangs pour vérifier si ceux-ci diffèrent dans leurs paramètres de position. Il s'agit en fait de tester l'hypothèse $\mathrm{H}_0^*: \mu_f = \mu_g$ contre des hypothèses alternatives de la forme $\mathrm{H}_1^*: \mu_f \neq \mu_g$ où μ_f et μ_g correspondent respectivement aux paramètres de position des deux populations de densités f et g.

Le test basé sur les rangs est construit à partir de la fonction génératrice $K(\cdot) \in \Gamma$ qui maximise la limite inférieure de l'efficacité relative au sens de

Pitman (voir Noether (1955)) de $K(\cdot)$ par rapport à chacun des tests asymptotiquement les plus puissants pour f et g, c'est-à-dire que $K(\cdot)$ est tel que

$$\sup_{\psi\in\Gamma}\inf\left\{\int_0^1 \psi(u)\varphi(u,f)du, \int_0^1 \psi(u)\varphi(u,g)du\right\}$$

est atteint lorsque $\psi(\cdot) = K(\cdot)$. Gastwirth (1966) montre que

$$K(u)=\varphi(u,f,g)=\left[2(1+\rho)\right]^{-1/2}(\varphi(u,f)+\varphi(u,g))$$

où $\rho = \int_0^1 \varphi(u,f)\varphi(u,g)du$.

Selon la méthode proposée par Gastwirth (1966), pour vérifier si deux populations de densités f et g diffèrent dans leurs paramètres de dispersion, c'est-à-dire pour tester l'hypothèse $\mathrm{H}_0^{**}:\sigma_f^2 = \sigma_g^2$ contre des alternatives de la forme $\mathrm{H}_1^{**}:\sigma_f^2 \neq \sigma_g^2$ où σ_f^2 et σ_g^2 correspondent respectivement aux paramètres de dispersion des deux populations de densités f et g, le test asymptotiquement maximin basé sur les rangs est construit à partir de la fonction génératrice

$$K_1(u)=\varphi_1(u,f,g)= \left[2(1+\rho_1)\right]^{-1/2}(\varphi_1(u,f)+\varphi_1(u,g))$$

où $\rho_1 = \int_0^1 \varphi_1(u,f)\varphi_1(u,g)du$.

Pour vérifier si deux populations de densités f et g diffèrent dans leurs paramètres de position et de dispersion, c'est-à-dire pour tester

$H_0^{***}: \mu_f = \mu_g; \sigma_f^2 = \sigma_g^2$ contre des alternatives de la forme $H_1^{***}: \mu_f \neq \mu_g$ et/ou $\sigma_f^2 \neq \sigma_g^2$, Podgor et Gastwirth (1994) proposent d'utiliser la statistique pondérée de Lepage (1975) où la fonction de cotes $a(\cdot, f, l^*)$ est remplacée par la fonction de cotes $a(\cdot, f, g, l^*) = l^* a_{N1}(\cdot, f, g) + a_{N2}(\cdot, f, g)$ engendrée par la fonction génératrice $\varphi(u,f,g,l^*) = l^*\varphi(u,f,g) + \varphi_1(u,f,g)$. Ainsi, la statistique proposée par Podgor et Gastwirth (1994) est définie par $P^* = \sum_{i=1}^{m} a(R_i, f, g, l^*)$ où pour i=1,...,N,

$$a(i,f,g,l^*) = l^*[2(1+\rho)]^{-1/2}\left(\varphi\left(\frac{i}{N+1}, f\right) + \varphi\left(\frac{i}{N+1}, g\right)\right)$$

$$+ \ [2(1+\rho_1)]^{-1/2}\left(\varphi_1\left(\frac{i}{N+1}, f\right) + \varphi_1\left(\frac{i}{N+1}, g\right)\right)$$

où $l^* \in$ R est une constante de pondération.

Selon l'approche d'Hájek et Šidák (1967), lorsque $\min(m,n) \to \infty$, la statistique P^* est asymptotiquement distribuée selon une loi normale de moyenne et de variance respectivement données par

$$E[P^* | H_0] = 0 \text{ et } Var[P^* | H_0] = \left(\frac{mn}{N}\right)\int_0^1 \varphi^2(u,f,g,l^*)du .$$

Ainsi, lorsque F est la fonction de distribution de la loi normale et G est la fonction de distribution de la loi logistique, Podgor et Gastwirth (1994) proposent d'utiliser la statistique définie par

$$P_{W-vdW,Log-K} =$$

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{m} l^*\left(\varphi_W\left(\frac{R_i}{N+1}\right)+\varphi_{vdW}\left(\frac{R_i}{N+1}\right)\right)+\left(\varphi_{Log}\left(\frac{R_i}{N+1}\right)+\varphi_K\left(\frac{R_i}{N+1}\right)\right)\right)^2}{\frac{mn}{N}2(l^{*2}(1+\rho)+(1+\rho_1))}$$

où pour i=1,...,N, $\varphi_W(u)=2\sqrt{3}\left(u-\frac{1}{2}\right)$ et $\varphi_{vdW}(u)=\Phi^{-1}(u)$ sont les fonctions génératrices des fonctions de cotes associées aux statistiques respectives de Wilcoxon (1945) et de van der Waerden (1953), $\varphi_{Log}(u)=\frac{9}{\pi^2+3}\left(-1+(2u-1)\ln\left(\frac{u}{1-u}\right)\right)$ et $\varphi_K(u)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-1+\left(\Phi^{-1}(u)\right)^2\right)$ est la fonction génératrice de la fonction de cotes associée à la statistique de Klotz (1962). La valeur de ρ est donnée par ρ=0,9772 (Gastwirth (1966)). Pour trouver la valeur de ρ_1, il nous faut déterminer la valeur de l'intégrale

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \int_0^1 \varphi_{Log}(u)\varphi_K(u)du \\ &= \frac{9}{\pi^2+3}\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1\left(-1+(2u-1)\ln\left(\frac{u}{1-u}\right)\right)\left(-1+\left(\Phi^{-1}(u)\right)^2\right)du \\ &= \frac{9}{\pi^2+3}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_0^1(2u-1)\ln\left(\frac{u}{1-u}\right)\left(\Phi^{-1}(u)\right)^2du-1\right).\end{aligned}$$

En posant $u=\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, nous obtenons

$$\rho_1=\frac{9}{\pi^2+3}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}(2\Phi(x)-1)\ln\left(\frac{\Phi(x)}{1-\Phi(x)}\right)x^2f(x)dx-1\right)$$

où $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ est la fonction de densité d'une loi normale centrée et réduite. Comme nous n'avons pas réussi à déterminer la valeur exacte de cette intégrale, nous avons utilisé la loi forte des grands nombres afin de l'estimer. En effet, nous avons

$$\rho_1=\frac{9}{\pi^2+3}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{E}(g(X))-1\right)$$

où $g(x)=\left(2\Phi(x)-1\right)\ln\left(\frac{\Phi(x)}{1-\Phi(x)}\right)x^2$ et $X \sim \mathrm{N}(0,1)$.

Par la loi forte des grands nombres, nous avons $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}g(X_i)\xrightarrow[N\to\infty]{}\mathrm{E}(g(X))$ avec probabilité 1 où pour i=1,...,N, les variables aléatoires X_i sont indépendantes et identiquement distribuées selon une loi normale centrée et réduite. Ainsi, pour estimer la valeur de E(G(X)), nous avons généré un grand nombre (N=5000000) de variables aléatoires provenant d'une loi N(0,1) et avons trouvé $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}g(X_i)\approx 2{,}67$. La valeur de ρ_1 est donc estimée par $\rho_1\approx 0{,}8258$.

1.4 Classe des statistiques de Fueda et Ohori

Considérons la statistique linéaire de rangs $S_N=\sum_{i=1}^{m}a_N(R_i)$ où la fonction de cotes $a_N(\cdot)$ est engendrée par la fonction $\varphi(u)$, $0<u<1$. Formons la base de fonctions $\varphi=\{1,\varphi(u),\ldots,\varphi^p(u)\}$ où p est un entier positif et transformons cette dernière en une base orthonormée $\psi = \{\psi_0(u),\ldots, \psi_p(u)\}$ à l'aide du procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt (Lipschutz (1973)).

Définissons le produit scalaire entre les fonctions φ_i et φ_j et la norme de la fonction φ_i par $<\varphi_i,\varphi_j> = \int_0^1 \varphi_i(u)\varphi_j(u)du$ et $\|\varphi_i\|^2 = <\varphi_i,\varphi_i>$ respectivement. Les éléments $\psi_j(u)$, j=0,...,p, de la base orthonormée ψ sont alors donnés pour $0<u<1$, par

$$\psi_0(u) = \varphi^0(u) \equiv 1,$$

$$\psi_1(u) = \frac{\varphi(u) - <\varphi,\psi_o>\psi_o(u)}{\|\varphi(u) - <\varphi,\psi_o>\psi_o(u)\|},$$

...

$$\psi_p(u) = \frac{\varphi^p(u) - \sum_{i=0}^{p-1} <\varphi^p,\psi_i>\psi_i(u)}{\left\|\varphi^p(u) - \sum_{i=0}^{p-1} <\varphi^p,\psi_i>\psi_i(u)\right\|}.$$

Considérons les statistiques linéaires de rangs données par $S^*_{Nj} = \sum_{i=1}^{m} b_{Nj}(R_i)$, j=1,...,p, où les fonctions de cotes $b_{Nj}(\cdot)$, sont engendrées par les fonctions orthonormées $\psi_j(u)$, $0<u<1$. Sous H_0, la moyenne et la variance de S^*_{Nj}, j=1,...,p, sont respectivement données par

$$E\left(S^*_{Nj}\middle|\mathrm{H}_0\right) = m\bar{b}_{Nj} \text{ et } Var\left(S^*_{Nj}\middle|\mathrm{H}_0\right) = \frac{mn}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}\left(b_{Nj}(i) - \bar{b}_{Nj}\right)^2$$

où $\bar{b}_{Nj} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} b_{Nj}(i)$. Aussi, sous H_0, la covariance entre les statistiques S^*_{Nj} et S^*_{Nk}, (j≠k), est définie par

$$Cov(S^*_{Nj}, S^*_{Nk}) = \frac{mn}{N(N-1)}\left(\sum_{i=1}^{N} b_{Nj}(i) b_{Nk}(i) - \bar{b}_{Nj}\bar{b}_{Nk}\right).$$

Pour tester H_0 contre H_1, Fueda et Ohori (1995) proposent la classe de statistiques de la forme

$$F = \sum_{j=1}^{p}\left(\frac{S^*_{Nj} - m\bar{b}_{Nj}}{\sqrt{\frac{mn}{N}}}\right)^2.$$

Comme sous H_0 les statistiques $\frac{S^*_{Nj} - m\bar{b}_{Nj}}{\sqrt{mn/N}}$, j=1,...,p, suivent asymptotiquement une loi normale centrée et réduite lorsque $\min(m,n) \to \infty$ et que la covariance entre S^*_{Nj} et S^*_{Nk} (j≠k) converge vers 0, la statistique de la forme F est asymptotiquement distribuée selon une loi khi-deux avec p degrés de liberté.

Parmi les statistiques de la forme F, Fueda et Ohori (1995) ont considéré la statistique donnée par

$$F_W = \sum_{i=1}^{4}\left(\frac{S^*_{Ni} - m\bar{b}_{Ni}}{\sqrt{\frac{mn}{N}}}\right)^2 \quad \text{avec } \varphi(u)=u \text{ et } b_{Nj}(i) = E\left[\psi_j(U_N^{(i)})\right]$$

où $U_N^{(1)} <\ldots< U_N^{(p)}$ est un échantillon ordonné provenant d'une distribution uniforme sur l'intervalle [0,1].

L'orthonormalisation de la base $\{1,u,u^2,u^3,u^4\}$ donne pour $0<u<1$,

$$\psi_0(u) = 1,$$

$$\psi_1(u) = 2\sqrt{3}u - \sqrt{3}/2,$$

$$\psi_2(u) = 6\sqrt{5}u^2 - 6\sqrt{5}u + \sqrt{5},$$

$$\psi_3(u) = 20\sqrt{7}u^3 - 30\sqrt{7}u^2 + 12\sqrt{7}u - \sqrt{7} \text{ et}$$

$$\psi_4(u) = 210u^4 - 420u^3 + 270u^2 - 60u + 3.$$

D'autre part, les fonctions de cotes $b_{Nj}(\cdot)$ sont obtenues pour j=1,...,4, par $E\left[\psi_j(U_N^{(i)})\right] = N\binom{N-1}{i-1}\int_0^1 \psi_j(u)u^{i-1}(1-u)^{N-i}du$ (voir Hájek et Šidák (1967), p.39). Suite aux calculs pour les différentes fonctions ψ_j, nous trouvons que les statistiques linéaires de rangs $S_{Nj}^* = \sum_{i=1}^{m} b_{Nj}(R_i)$, j=1,...,4, sont données par

$$S_{N1}^* = \sum_{i=1}^{m} b_{N1}(R_i) = \sum_{i=1}^{m}\left(2\sqrt{3}\frac{R_i}{N+1} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$S_{N2}^* = \sum_{i=1}^{m} b_{N2}(R_i) = \sum_{i=1}^{m}\left(6\sqrt{5}\frac{R_i(R_i+1)}{(N+2)(N+1)} - 6\sqrt{5}\frac{R_i}{(N+1)} + \sqrt{5}\right),$$

$$S_{N3}^* = \sum_{i=1}^{m} b_{N3}(R_i) = \sum_{i=1}^{m}\left(20\sqrt{7}\frac{R_i(R_i+1)(R_i+2)}{(N+3)(N+2)(N+1)} - 30\sqrt{7}\frac{R_i(R_i+1)}{(N+2)(N+1)} + 12\sqrt{7}\frac{R_i}{(N+1)} - \sqrt{7}\right)$$

et

$$S_{N4}^{*}=\sum_{i=1}^{m}b_{N4}(R_i)=\sum_{i=1}^{m}\left(210\frac{R_i(R_i+1)(R_i+2)(R_i+3)}{(N+4)(N+3)(N+2)(N+1)}\right.$$

$$-420\frac{R_i(R_i+1)(R_i+2)}{(N+3)(N+2)(N+1)}$$

$$\left.+270\frac{R_i(R_i+1)}{(N+2)(N+1)}-60\frac{R_i}{(N+1)}+3\right).$$

Aussi, nous trouvons que $\bar{b}_{N1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\bar{b}_{N2}=\bar{b}_{N3}=\bar{b}_{N4}=0$.

Comme p=4, la distribution asymptotique lorsque $\min(m,n)\to\infty$ de la statistique F_W sous H_0 est une loi khi-deux à quatre degrés de liberté. Ainsi, la région critique du test de niveau asymptotique α pour tester H_0 contre H_1 est de la forme $F_W \geq \chi^2_{4;1-\alpha}$.

Notons que les fonctions de cotes $b_{Nj}(\cdot)$ peuvent aussi être obtenues à partir des fonctions de cotes définies par $b_{Nj}(i)=\psi_j\left(\frac{i}{N+1}\right)$ auquel cas nous obtenons

$$S_{N1}^{**}=\sum_{i=1}^{m}b_{N1}(R_i)=\sum_{i=1}^{m}\left(2\sqrt{3}\left(\frac{R_i}{N+1}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$S_{N2}^{**}=\sum_{i=1}^{m}b_{N2}(R_i)=\sum_{i=1}^{m}\left(6\sqrt{5}\left(\frac{R_i}{N+1}\right)^2-6\sqrt{5}\left(\frac{R_i}{N+1}\right)+\sqrt{5}\right),$$

$$S_{N3}^{**}=\sum_{i=1}^{m}b_{N3}(R_i)=\sum_{i=1}^{m}\left(20\sqrt{7}\left(\frac{R_i}{N+1}\right)^3-30\sqrt{7}\left(\frac{R_i}{N+1}\right)^2\right.$$

$$\left.+12\sqrt{7}\left(\frac{R_i}{N+1}\right)-\sqrt{7}\right)$$

et

$$S_{N4}^{**} = \sum_{i=1}^{m} b_{N4}(R_i) = \sum_{i=1}^{m}\left(210\left(\frac{R_i}{N+1}\right)^4 - 420\left(\frac{R_i}{N+1}\right)^3 + 270\left(\frac{R_i}{N+1}\right)^2 - 60\left(\frac{R_i}{N+1}\right) + 3\right).$$

Aussi, nous trouvons que $\overline{b}_{N1}^{**} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{b}_{N2}^{**} = -\frac{\sqrt{5}}{N+1}$, $\overline{b}_{N3}^{**} = 0$ et $\overline{b}_{N4}^{**} = \frac{-3N^2 + N + 11}{(N+1)^3}$.

Une statistique asymptotiquement équivalente à F_W est donnée par

$$F_W^* = \sum_{i=1}^{4}\left(\frac{S_{Ni}^{**} - m\overline{b}_{Ni}^{**}}{\sqrt{\frac{mn}{N}}}\right)^2$$

et par conséquent, F_W^* est aussi asymptotiquement distribuée selon une loi khi-deux avec quatre degrés de liberté lorsque $\min(m,n) \to \infty$.

1.5 Statistiques généralisées de Student et de Wilcoxon

O'Brien (1988) note que peu importe les distributions F et G, la statistique servant à tester l'hypothèse de linéarité (β_{L1}=0) dans le modèle de régression $Z_{Ni} = \beta_{L0} + \beta_{L1} Z_i + \varepsilon_i$ par la méthode des moindres carrés correspond à la même statistique que celle de Student (1908) pour vérifier si celles-ci diffèrent dans leurs paramètres de position. Rappelons que Z_{Ni} correspond à la fonction indicatrice prenant la valeur 1 lorsque les observations proviennent de la population ayant comme distribution $F(x)$, c'est-à-dire lorsque i=1,...,m, et que $Z_1,...,Z_N$ correspond à l'ordination croissante de $X_1,...,X_N$. En tenant compte de cette considération, O'Brien (1988) propose intuitivement une généralisation du test de Student (1908) pour comparer deux populations de lois normales différant dans leurs paramètres de position et de dispersion en considérant le modèle de régression de la forme

$$Z_{Ni} = \beta_0 + \beta_1 Z_i + \beta_2 Z_i^2 + \varepsilon_i,\ i=1,...,N,$$

et suggère de tester l'hypothèse que les coefficients associés à Z_i et à Z_i^2 sont identiquement nuls, c'est-à-dire $H_{0\beta}$: $\beta_1 = \beta_2 = 0$.

Considérons la notation matricielle

$$\tilde{Y} = \begin{pmatrix} Z_{N1} \\ \vdots \\ Z_{NN} \end{pmatrix},\ \tilde{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix},\ \mathrm{X} = \begin{pmatrix} 1 & Z_1 & Z_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & Z_N & Z_N^2 \end{pmatrix},\ \tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{pmatrix} \text{ et } \Pi = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{N\times N}.$$

Le modèle régression devient donc $\tilde{Y} = \mathrm{X}\tilde{\beta} + \tilde{\varepsilon}$. Ainsi, pour vérifier l'hypothèse $H_{0\beta}$: $\beta_1=\beta_2=0$ contre des hypothèses alternatives de la forme $H_{1\beta}$:$\beta_1 \neq \beta_2$, la statistique à utiliser est définie par

$$G_t = \frac{N-3}{2}\frac{SSR}{SSE}$$

où $SSR = \tilde{\beta}'\mathrm{X}'\tilde{Y} - \frac{1}{N}\tilde{Y}'\Pi\tilde{Y}$ et $SSE = \tilde{Y}'\tilde{Y} - \tilde{\beta}'\mathrm{X}'\tilde{Y}$.

Sous H_0, la statistique G_t est distribuée selon une loi de Fisher à 2 et N-3 degrés de liberté lorsque les termes d'erreur ε_i sont indépendants et identiquement distribués selon une loi normale centrée et de variance constante. Ainsi, sous ces conditions, la région critique de niveau α associée à ce test est donnée par $G_t \geq F_{2,N-3;1-\alpha}$ où $F_{2,N-3;1-\alpha}$ correspond au quantile d'ordre $1-\alpha$ d'une loi Fisher à 2 et N-3 degrés de liberté.

Statistique généralisée basée sur les rangs

Pour vérifier si deux populations diffèrent dans leurs paramètres de position et de dispersion lorsque celles-ci sont de lois quelconques, O'Brien (1988) suggèrent de procéder de la même façon que précédemment, mais en remplaçant les observations par leurs rangs respectifs parmi les deux échantillons regroupés. Il s'agit en fait de tester l'hypothèse $H_{0\beta r}$: $\beta_{1r} = \beta_{2r} = 0$ dans le modèle de régression défini par

$$\tilde{Y} = X_r \tilde{\beta}_r + \tilde{\varepsilon}$$

où $X_r = \begin{pmatrix} 1 & R_1 & R_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & R_N & R_N^2 \end{pmatrix}$ et $\tilde{\beta}_r = \begin{pmatrix} \beta_{0r} \\ \beta_{1r} \\ \beta_{2r} \end{pmatrix}$.

Pour tester $H_{0\beta r}$: $\beta_{1r}=\beta_{2r}=0$, O'Brien (1988) propose d'utiliser la statistique définie par

$$G_r = \frac{N-3}{2}\frac{SSR_r}{SSE_r}$$

où $SSR_r = \tilde{\beta}_r{}'\mathrm{X}_r'\tilde{Y} - \frac{1}{N}\tilde{Y}'\Pi\tilde{Y}$ et $SSE_r = \tilde{Y}'\tilde{Y} - \tilde{\beta}_r{}'\mathrm{X}_r'\tilde{Y}$ et de rejeter l'hypothèse nulle au niveau approximatif α si $G_r \geq F_{2,N-3;1-\alpha}$.

Remarquons que Podgor et Gastwirth (1994) ont démontré que si nous remplaçons les rangs par des statistiques linéaires de rangs dans la méthode généralisée d'O'Brien (1988), alors les statistiques généralisées d'O'Brien (1988) calculées à partir de ces statistiques sont asymptotiquement équivalentes aux statistiques de la classe décrite par Lepage (1971b,1977) lorsque $\min(m,n) \rightarrow \infty$.

En effet, soient les statistiques linéaires de rangs $S_{Nk}=\sum_{i=1}^{m} a_{Nk}(i)$ pour k=1,2 où la fonction de cotes $a_{Nk}(\cdot)$ est engendrée par la fonction génératrice $\varphi_{Nk}(u)$, $0<u<1$ telle que $\int_0^1 \varphi_{Nk}^2(u)du < \infty$ et, sans perte de généralité, $\int_0^1 \varphi_{Nk}(u)du = 0$. Pour k=1 et 2, la variance de S_{Nk} sous H_0 est donnée par $Var(S_{Nk}|\mathrm{H}_0) = \frac{mn}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N} a_{Nk}^2(i)$ et posons $S_{Nk}^* = \frac{S_{Nk}}{\sqrt{Var(S_{Nk}|\mathrm{H}_0)}}$.

Podgor et Gastwirth (1994) considèrent la statistique quadratique définie par

$$Q = \left(S_{N1}^{*2} - 2\rho_N S_{N1}^* S_{N2}^* + S_{N2}^{*2}\right)\left(1-\rho_N^2\right)^{-1}$$

où ρ_N correspond au coefficient de corrélation entre les fonctions de cotes $a_{N1}(\cdot)$ et $a_{N2}(\cdot)$, c'est-à-dire

$$\rho_N = \frac{\sum_{i=1}^{N} a_{N1}(i) a_{N2}(i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} a_{N1}^2(i)} \sqrt{\sum_{i=1}^{N} a_{N2}^2(i)}}.$$

Considérons maintenant le modèle linéaire de régression défini par

$$Z_{Ni} = \beta_0 + \beta_1 a_{N1}(i) + \beta_2 a_{N2}(i) + \varepsilon_i, \text{ i=1,...,N,}$$

où les ε_i sont des termes d'erreur indépendants de moyenne 0 et de variance constante. Par la méthode des moindres carrés, les estimateurs des coefficients β_1 et β_2 sont donnés par

$$\hat{\beta}_1 = \left(\frac{S_{N1}}{\sum_{i=1}^{N} a_{N1}^2(i)} - \frac{\sum_{i=1}^{N} a_{N1}(i) a_{N2}(i)}{\sum_{i=1}^{N} a_{N1}^2(i) \sum_{i=1}^{N} a_{N2}^2(i)} S_{N2} \right) \left(1 - \rho_N^2\right)^{-1}$$

et

$$\hat{\beta}_2 = \left(\frac{S_{N2}}{\sum_{i=1}^{N} a_{N2}^2(i)} - \frac{\sum_{i=1}^{N} a_{N1}(i) a_{N2}(i)}{\sum_{i=1}^{N} a_{N1}^2(i) \sum_{i=1}^{N} a_{N2}^2(i)} S_{N1} \right) \left(1 - \rho_N^2\right)^{-1}$$

dont les variances respectives sous $H_{0\beta r}$ sont données par

$$Var(\hat{\beta}_1 | H_{0\beta r}) = \frac{mn}{N(N-1)} \left(\left(1 - \rho_N^2\right) \sum_{i=1}^{N} a_{N1}^2(i) \right)^{-1}$$

et

$$Var(\hat{\beta}_2 | H_{0\beta r}) = \frac{mn}{N(N-1)} \left(\left(1 - \rho_N^2\right) \sum_{i=1}^{N} a_{N2}^2(i) \right)^{-1}.$$

Podgor et Gastwirth (1994) utilisent l'approche de Chernoff et Savage (1958) pour démontrer que sous $H_{0\beta r}$ et lorsque $\min(m,n) \to \infty$, les coefficients $\hat{\beta}_1$ et $\hat{\beta}_2$ sont asymptotiquement conjointement distribués selon une loi binormale de moyenne (0,0) et de matrice de covariance Σ. Comme $Q = (\hat{\beta}_1 \quad \hat{\beta}_2)\Sigma^{-1}(\hat{\beta}_1 \quad \hat{\beta}_2)' = (S_{N1}^{*2} - 2\rho_N S_{N1}^{*} S_{N2}^{*} + S_{N2}^{*2})(1-\rho_N^2)^{-1}$, la statistique Q est asymptotiquement distribuée selon une loi khi-deux à deux degrés de liberté lorsque $H_{0\beta r}$ est respectée et $\min(m,n) \to \infty$.

Ainsi, lorsque $\min(m,n) \to \infty$, la statistique utilisée pour vérifier que les coefficients $\hat{\beta}_1$ et $\hat{\beta}_2$ sont identiquement nuls peut se réécrire sous la forme d'une combinaison quadratique de statistiques linéaires de rangs. Par conséquent, si les fonctions génératrices $\varphi_{N1}(u)$ et $\varphi_{N2}(u)$, $0<u<1$, sont orthogonales et que celles-ci correspondent respectivement à des statistiques linéaires de rangs pour mesurer la différence entre les paramètres de position et de dispersion des deux populations, alors $Q = S_{N1}^{*2} + S_{N2}^{*2}$ correspond aux statistiques de la classe de Lepage (1971b,1977).

1.6 Statistiques générales

Il apparaît important d'inclure dans notre étude des statistiques visant à confronter l'hypothèse que les deux échantillons proviennent de la même population à des alternatives plus générales qu'une différence entre les paramètres de position et/ou de dispersion. En effet, plusieurs statistiques ont été développées dans le but précis de tester H_0 contre des alternatives plus générales de la forme H: $F(x) \neq G(x)$. Nous avons retenu trois de ces statistiques, soit celle de Kolmogorov-Smirnov (1939), celle de Barnett et Eisen (1982) et celle de Boos (1986).

1.6.1 Statistique de Kolmogorov-Smirnov

Définissons d'abord $F_m(x)$ et $G_n(x)$ les fonctions de distribution expérimentale de $F(x)$ et $G(x)$ respectivement. Ainsi, nous avons

$$F_m(x) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} u(x - X_i) \quad \text{et} \quad G_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=m+1}^{N} u(x - X_i)$$

où $u(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \geq 0, \\ 0 & si \quad x < 0. \end{cases}$

Pour tester H_0 contre H, Kolmogorov-Smirnov (1939) proposent d'utiliser la statistique définie par

$$KS = \left(\frac{mn}{N}\right)^{\frac{1}{2}} \sup_{-\infty < x < \infty} (\,|\, F_m(x) - G_n(x) \,|\,).$$

Sous H_0 et lorsque $\min(m,n) \to \infty$, la distribution asymptotique de KS est donnée par

$$P(KS < \lambda) = 1 - 2\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} e^{-2i^2\lambda^2}, \quad \lambda > 0$$

(voir Hájek et Šidák (1967)).

Pour décrire la région critique de niveau α associée à la statistique de Kolmogorov-Smirnov (1939), il est préférable d'utiliser des tables de distributions exactes puisque la convergence en loi de cette statistique est lente. Les tables d'Owen (1962) et de Massey (1962) donnent la distribution exacte de KS pour $m=n \leq 40$, et $m \neq n$, $m,n \leq 10$ ainsi que pour d'autres tailles sélectionnées. La région critique de niveau α associée à la KS est donnée par

$$KS \geq KS_{(m,n;1-\alpha)}$$

où $KS_{(m,n;1-\alpha)}$ correspond au $100(1-\alpha)^{\text{ième}}$ percentile de la distribution exacte de KS.

La puissance du test de Kolmogorov-Smirnov (1939) sera plus élevée pour détecter des différences entre deux populations lorsque celles-ci sont distribuées selon des lois ayant des ailes plus relevées que la loi normale comme par exemple la loi double exponentielle ou encore la loi Cauchy (voir Hájek (1969)).

1.6.2 Statistique de Barnett et Eisen

Pour vérifier si deux échantillons proviennent de la même population, Barnett et Eisen (1982) ont développé une statistique non paramétrique basée sur les quartiles des deux échantillons regroupés.

Supposons d'abord que N est un multiple de quatre et soit q_j, j=1,...,4, le nombre d'observations du premier échantillon se retrouvant dans le j^e quartile des deux échantillons regroupés et ordonnés. Nous pouvons donc réécrire $q_j = \sum_{i=(j-1)N/4+1}^{jN/4} Z_{Ni}$, j=1,...,4. Sous H_0, q_j est distribuée selon une loi hypergéométrique (Lehman (1975), p. 381), c'est-à-dire

$$P(q_j = k) = \frac{\binom{m}{k}\binom{n}{N/4-k}}{\binom{N}{N/4}}, \text{ j=1,...,4.}$$

Sous H_0, la moyenne et la variance de q_j, j=1,...,4, sont respectivement données par $E(q_j|H_0) = \frac{m}{4}$ et $Var(q_j|H_0) = \frac{3mn}{16(N-1)}$. De plus, la covariance entre q_i et q_j, i≠j, est donnée par $Cov(q_i, q_j) = -\frac{mn}{16(N-1)}$ lorsque l'hypothèse nulle est respectée.

Posons $d = q_1 + q_4$, $d_0 = q_4 - q_1$ et $d_1 = q_3 - q_2$. Sous H_0, les moyennes et les variances de ces variables sont données par $E(d|H_0) = \frac{m}{2}$, $E(d_0|H_0) =$ $E(d_1|H_0) = 0$, $Var(d|H_0) = \frac{mn}{4(N-1)}$ et $Var(d_0|H_0) = Var(d_1|H_0) = \frac{mn}{2(N-1)}$. De plus, d, d_0 et d_1 ne sont pas deux à deux corrélées sous H_0 et ce, pour tout m et n.

Pour tester H_0 contre H, Barnett et Eisen (1982) proposent d'utiliser la statistique définie par

$$BE = \left(\frac{d - E(d|H_0)}{\sqrt{Var(d|H_0)}}\right)^2 + \left(\frac{d_0 - E(d_0|H_0)}{\sqrt{Var(d_0|H_0)}}\right)^2 + \left(\frac{d_1 - E(d_1|H_0)}{\sqrt{Var(d_1|H_0)}}\right)^2$$

$$= \frac{4(N-1)(d - m/2)^2}{mn} + \frac{2(N-1)(d_0)^2}{mn} + \frac{2(N-1)(d_1)^2}{mn}.$$

Comme d, d_0 et d_1 sont non corrélées et qu'elles sont asymptotiquement distribuées selon des lois normales (voir Lehmann (1975), p.393) lorsque H_0 est respectée et que $\min(m,n) \rightarrow \infty$, alors, sous les mêmes conditions, la statistique BE est asymptotiquement distribuée selon une loi khi-deux à trois degrés de liberté.

Ainsi, la région critique de niveau asymptotique α associée à la statistique de Barnett et Eisen (1982) est donnée par $BE \geq \chi^2_{3;1-\alpha}$.

Lorsque N = 4k +1 où k est un entier positif, Barnett et Eisen (1982) suggèrent de simplement supprimer un Z_i, i=1,...,N, de façon aléatoire pour ensuite se ramener au cas où N = 4k. Si N = 4k + 2, ils proposent de diviser les quartiles de façon à ce que les quartiles des deux extrémités contiennent un Z_i de plus que les deux autres. Finalement, lorsque N = 4k +3, Barnett et Eisen (1982) suggèrent de supprimer un Z_i de façon aléatoire et de procéder ensuite de la même façon que dans le cas où N = 4k + 2. De tels ajustements n'affecteront pas la distribution asymptotique de la statistique *BE*, mais le fait de supprimer un Z_i lorsque N est impair peut affecter la puissance de cette dernière lorsque *m* et *n* sont petits.

1.6.3 Statistique de Boos

Boos (1986) propose une statistique non paramétrique pour comparer deux ou plusieurs populations pouvant différer dans leurs paramètres de position, de dispersion, d'asymétrie et d'aplatissement.

Afin de vérifier si deux populations diffèrent dans leurs paramètres de position et de dispersion, Boos (1986) considère les statistiques linéaires de rangs de Wilcoxon (1945) et de Mood (1954) standardisées respectivement définies par

$$B_{N1}=W=\sum_{i=1}^{m} a_{N1}(R_i) = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{12}{mn(N+1)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(R_i - \frac{N+1}{2}\right)$$

et

$$B_{N2}=M=\sum_{i=1}^{m} a_{N2}(R_i)=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{180}{mn(N+1)(N^2-4)}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left(R_i-\frac{N+1}{2}\right)^2-\frac{N^2-1}{12}\right].$$

Pour vérifier si deux populations diffèrent dans leurs paramètres d'asymétrie et d'aplatissement, Boos (1986) a développé deux statistiques non paramétriques respectivement données par

$$B_{N3}=SKEW=\sum_{i=1}^{m} a_{N3}(R_i)=$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{7}{mn(N+1)(N^2-4)(N^2-9)}\right)^{\frac{1}{2}}\left[20\left(R_i-\frac{N+1}{2}\right)^3-(3N^2-7)\left(R_i-\frac{N+1}{2}\right)\right]$$

et $B_{N4}=KURT=\sum_{i=1}^{m} a_{N4}(R_i)=$

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{mn(N+1)(N^2-4)(N^2-9)(N^2-16)}\right)^{\frac{1}{2}}\left[210\left(R_i-\frac{N+1}{2}\right)^4-\right.$$

$$\left.15(3N^2-13)\left(R_i-\frac{N+1}{2}\right)^2+\frac{9}{8}(N^2-9)(N^2-1)\right].$$

Selon l'approche de Chernoff et Savage (1958) , Boos (1986) affirme que sous H_0 et lorsque $\min(m,n)\to\infty$, les statistiques linéaires de rangs B_{Nj}, pour j=1,...,4, sont asymptotiquement distribuées selon des lois normales centrées et réduites.

Pour vérifier que deux populations diffèrent dans leurs paramètres de position, de dispersion, d'asymétrie ou d'aplatissement, Boos (1986) propose d'utiliser la statistique donnée par

$$B=\sum_{j=1}^{4} B_{Nj}^{2} = W^{2} + M^{2} + SKEW^{2} + KURT^{2}.$$

Sous H_0, et lorsque $\min(m,n) \to \infty$, Boos (1986) montre que la statistique B est asymptotiquement distribuée selon une loi khi-deux avec 4 degrés de liberté en utilisant le fait que la covariance entre B_{Nj} et B_{Nk} ($j \neq k$), est asymptotiquement égale à zéro sous H_0. Or, suite à des simulations, Boos (1986) note que cette convergence asymptotique est lente. En effet, lorsque les tailles échantillonnales m et n sont petites, la variance de la statistique B peut être beaucoup plus petite que la variance d'une distribution khi-deux à quatre degrés de liberté (c'est-à-dire 8) et ainsi mener à des niveaux critiques conservateur. Ainsi, lorsque m et n sont petits, Boos (1986) propose d'utiliser la statistique ajustée définie par

$$B^{*}=\left(\frac{B - \mathrm{E}\left(B \middle| \mathrm{H}_0\right)}{\sqrt{Var(B|\mathrm{H}_0)}} \right)\sqrt{8} + 4$$

où $\mathrm{E}\left(B\middle|\mathrm{H}_0\right)$=4 et $Var\left(B\middle|\mathrm{H}_0\right) = \sum_{p=1}^{4} \beta_2(p) + 2F_1 \sum_{p=1}^{4} \sum_{\substack{q=1 \\ p<q}}^{4} \rho_{22}(p,q) + F_2 - 16$ avec

$$\beta_2(p) = F_1 \sum_{j=1}^{N} a_{Np}^{4}(j) + \frac{3N(N-1)(m-1)(n-1)}{mn(N-2)(N-3)}, \quad F_1 = \frac{mn\left[N(N+1) - 6mn\right]}{N(N-1)(N-2)(N-3)},$$

$$\rho_{22}(p,q) = \sum_{j=1}^{N} a_{Np}(j) a_{Nq}(j), \; p \text{ et } q=1,\ldots,4,\; p \neq q \text{ et}$$

$$F_2 = \frac{12(N-1)}{N^{2}(N-2)(N-3)}\left[N(N^{2} - 3N + 6) - \frac{(N^{2} - N + 6)(N^{2} - 3mN + 3m^{2})}{mn} \right].$$

Remarquons que $\beta_2(p)$ correspond au coefficient d'aplatissement de la statistique B sous H_0.

Sous l'hypothèse nulle, l'espérance et la variance de la statistique B^* sont les mêmes que celles d'une loi khi-deux à quatre degrés de liberté. Des simulations ont de plus suggéré que les percentiles de la statistique B^* se rapprochent davantage à ceux d'une loi khi-deux à quatre degrés de liberté que ceux obtenus pour la statistique B.

Sous H_0 et lorsque $\min(m,n) \to \infty$, la région critique du test de niveau approximatif α pour tester H_0 contre H est de la forme $B^* \geq \chi^2_{4;1-\alpha}$.

Pour décrire la nature des différences présentes entre deux populations lorsque l'hypothèse nulle est rejetée, Boos (1986) suggère d'utiliser séparément les statistiques linéaires de rangs B_{Nj} pour j=1,...,4. Cette approche doit être effectuée avec précaution puisque par exemple, une différence entre les paramètres de position peut affecter la statistique de Mood (1954) utilisée pour tester si les paramètres de dispersion diffèrent. De telles différences affectent aussi les statistiques *SKEW* et *KURT*. Or, Boos (1986) fait remarquer qu'asymptotiquement, la statistique de Mood (1954) et la statistique *KURT* ne seront pas affectées par le fait d'avoir préalablement centré les observations.

Ainsi, lorsque les deux populations diffèrent dans leurs paramètres de position, Boos (1986) propose de centrer les observations avant d'utiliser la statistique de Mood (1954) et la statistique *KURT* et définit les statistiques

$$M^* = \hat{B}_{N2} \text{ et } KURT^* = \hat{B}_{N4}$$

où pour j=2 et 3, $\hat{B}_{Nj} = \sum_{i=1}^{m} a_{Nj}(\hat{R}_i)$ avec $\hat{R}_i$ le rang de $X_i - \hat{\mu}_1$ parmi $X_1 - \hat{\mu}_1, \ldots, X_m - \hat{\mu}_1$, $X_{m+1} - \hat{\mu}_2, \ldots, X_N - \hat{\mu}_2$ et où $\hat{\mu}_k$, est un estimateur du paramètre de position de l'échantillon k, k=1 et 2.

Pour vérifier si les deux populations diffèrent dans leurs paramètres d'aplatissement et d'asymétrie lorsque ces dernières diffèrent dans leurs paramètres de position et de dispersion, Boos (1986) propose d'utiliser les statistiques M^{**}, $SKEW^{**}$ et $KURT^{**}$ correspondant respectivement aux statistiques M, $SKEW$ et $KURT$ calculées à partir du rang des observations centrées et réduites, c'est-à-dire

$$M^{**} = \hat{\hat{B}}_{N2}, \; SKEW^{**} = \hat{\hat{B}}_{N3} \text{ et } KURT^{**} = \hat{\hat{B}}_{N4}$$

où pour j=2,3 et 4, $\hat{\hat{B}}_{Nj} = \sum_{i=1}^{m} a_{Nj}(\hat{\hat{R}}_i)$ avec $\hat{\hat{R}}_i$ le rang de $\dfrac{X_i - \hat{\mu}_1}{\hat{\sigma}_1}$ parmi $\dfrac{X_1 - \hat{\mu}_1}{\hat{\sigma}_1}, \ldots, \dfrac{X_m - \hat{\mu}_1}{\hat{\sigma}_1}$, $\dfrac{X_{m+1} - \hat{\mu}_2}{\hat{\sigma}_2}, \ldots, \dfrac{X_N - \hat{\mu}_2}{\hat{\sigma}_2}$ où $\hat{\mu}_k$ et $\hat{\sigma}_k^2$, sont des estimateurs des paramètres de position et de dispersion de l'échantillon k, pour k=1 et 2.

De plus, Boos (1986) montre en utilisant l'approche de Chernoff et Savage (1958) et des résultats de Randles (1982), que sous H_0, les statistiques M^*, M^{**}, $SKEW^{**}$, $KURT^*$ et $KURT^{**}$ sont asymptotiquement distribuées selon des lois normales centrées et réduites en autant que les deux populations sont symétriques. Ces considérations suggèrent l'utilisation des statistiques définies par

$$B^{**} = W^2 + M^{*2} + SKEW^2 + KURT^{*2}$$

et

$$B^{***}=W^2+M^{**2}+SKEW^{**2}+KURT^{**2}.$$

Selon Boos (1986), il est possible de vérifier que les statistiques B^{**} et B^{***} sont asymptotiquement distribuées selon des lois khi-deux avec quatre degrés de liberté lorsque $\min(m,n)\rightarrow\infty$.

1.7 Statistiques basées sur les rangs

Plusieurs auteurs ont développé des statistiques dans le but de mesurer la différence entre les paramètres de position de deux populations, c'est-à-dire dans le but de tester H_0 contre des alternatives de la forme H_{1M}:$G(x)=F(x+b)$ où $b\neq 0$. Notons entre autre les tests de Student (1908) et Welch (1937) qui nécessitent tous au moins la normalité de F et G. Dans le but de pouvoir utiliser ces tests dans toutes les conditions possibles, Conover et Iman (1981) ont développé une nouvelle approche consistant à remplacer les observations par leurs rangs respectifs parmi les observations regroupées et de calculer ensuite les statistiques voulues à partir de ces rangs plutôt que des observations.

1.7.1 Statistique de Student basée sur les rangs

Lorsque F et G sont des lois normales et que les variances de celles-ci sont égales, la statistique t de Student (1908) est la statistique du rapport de vraisemblance maximale pour H_0 contre H_{1M} et est définie par

$$t=\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}$$

où $\overline{X}_1 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$, $\overline{X}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=m+1}^{N} X_i$ et $S_p^2 = \frac{(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2}{N-2} =$

$$\frac{\sum_{i=1}^{m}(X_i - \overline{X}_1)^2 + \sum_{i=m+1}^{N}(X_i - \overline{X}_2)^2}{N-2}.$$

Sous H_0, la statistique t est distribuée selon une loi de Student à N-2 degrés de liberté lorsque F et G sont de lois normales. Ainsi, la région critique de niveau α associée au test de Student (1908) est donnée par $|\, t \,| \geq t_{N-2;1-\alpha/2}$.

Dans le but de tester H_0 contre des alternatives de la forme H, Conover et Iman (1981) proposent d'utiliser la statistique définie par

$$t_r = \frac{\frac{1}{m}W - \frac{1}{n}\left(\frac{N(N+1)}{2} - W\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)\frac{1}{(N-2)}\left(\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{1}{m}W^2 - \frac{1}{n}\left(\frac{N(N+1)}{2} - W\right)^2\right)}}$$

où $W = \sum_{i=1}^{m} R_i$ correspond à la statistique linéaire de rangs de Wilcoxon (1945).

Pour leur test basé sur les rangs, Conover et Iman (1981) proposent d'utiliser la valeur critique du test de Student (1908). Ainsi, nous rejetterons H_0 à un niveau approximatif α si $|\, t_r \,| \geq t_{N-2;1-\alpha/2}$.

1.7.2 Statistique de Welch basée sur les rangs

Dans le cas où les variances des deux populations ne sont pas égales, l'utilisation du test de Student s'avère inadéquate pour H_0 contre H_{IM}. Afin de traiter le cas où les deux populations peuvent différer dans leurs paramètres de dispersion, Welch (1937), a modifié la statistique de Student (1908) et proposé d'utiliser la statistique définie par

$$t_w = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{m} + \frac{S_2^2}{n}}}$$

qui, sous H_0, suit approximativement une loi de Student à v degrés de liberté où la valeur de v est donnée par

$$v = \frac{\left(\frac{S_1^2}{m} + \frac{S_2^2}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{m-1}\right)\left(\frac{S_1^2}{m}\right)^2 + \left(\frac{1}{n-1}\right)\left(\frac{S_2^2}{n}\right)^2}$$

(voir Welch (1936,1937)).

Lorsque ν n'est pas une valeur entière, le quantile $t_{\nu;1-\alpha/2}$ de la loi de Student est calculé à l'aide d'un développement asymptotique de Hill (1970). Ainsi, la région critique de niveau approximatif α associée au test de Welch (1937) est donnée par $|\, t_w \,| \geq t_{\nu;1-\alpha/2}$.

Pour tester H_0 contre des alternatives de la forme H, Conover et Iman (1981) proposent d'utiliser la statistique définie par

$$t_{W_r} = \frac{\frac{1}{m}W - \frac{1}{n}\left(\frac{N(N+1)}{2} - W\right)}{\sqrt{\frac{S_{1r}^2}{m} + \frac{S_{2r}^2}{n}}}$$

$$\text{où } S_{1r}^2 = \frac{1}{(m-1)}\left(\sum_{i=1}^{m} R_i^2 - \frac{1}{m}W^2\right) \text{et } S_{2r}^2 = \frac{1}{(n-1)}\left(\sum_{i=m+1}^{N} R_i^2 - \frac{1}{n}\left(\frac{N(N+1)}{2} - W\right)^2\right).$$

Conover et Iman (1981) proposent d'utiliser la même valeur critique que celle utilisée pour la statistique de Welch (1937) en calculant ν à partir des rangs, c'est-à-dire nous rejetterons H_0 au niveau approximatif α si $\left|t_{W_r}\right| \geq t_{\nu_r;1-\alpha/2}$

$$\text{où } \nu_r = \frac{\left(\frac{S_{1r}^2}{m} + \frac{S_{2r}^2}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{m-1}\right)\left(\frac{S_{1r}^2}{m}\right)^2 + \left(\frac{1}{n-1}\right)\left(\frac{S_{2r}^2}{n}\right)^2}.$$

1.8 Revue des comparaisons des tests

Afin de comparer les différents tests, il est possible de calculer l'efficacité relative asymptotique ou encore d'effectuer une étude comparative expérimentale. Le tableau 1.1 résume les comparaisons relevées dans la littérature. Décrivons d'abord les principaux résultats obtenus des différentes études ayant comparé certain des tests à l'aide de l'efficacité relative asymptotique.

Lorsque l'hypothèse alternative est de la forme H_1, Lepage (1971b,1977) a démontré que l'efficacité relative asymptotique des tests de la forme T de la section 1.2 par rapport aux tests optimaux de la forme T_f est définie par

$$e(T,T_f) = \frac{b^2\xi_1 + \ln^2(a)\xi_2}{b^2\int_0^1 \varphi^2(u,f)du + \ln^2(a)\int_0^1 \varphi_1^2(u,f)du}$$

Tableau 1.1

Études comparatives parues dans la littérature

Auteurs	$T_{W,AB}$ (Lepage(1971a))	$T_{W,M}$ (Duran, Tsai & Lewis (1976))	$T_{vdW,K}$ (Lepage(1971b,1977))	$T_{W,Log}$ (Lepage(1971b,1977))	$T_{Sin,Cos}$ (Lepage(1971b,1977))	$P_{vdW,K}$ (Lepage(1975))	$P_{W,Log}$ (Lepage(1975))	$P_{Sin,Cos}$ (Lepage(1975))	$P_{W,AB}$ (Lepage(1975))	$P^*_{W,M}$ (Smit, Swart & Stoker (1987))	$P_{W,M}$ (Lepage (1975))	$P_{W\text{-}vdW,Log\text{-}K}$ (Podgor & Gastwirth (1994))	F_W (Fueda & Ohori (1995))	F^*_W (Fueda & Ohori (1995))	G_t (O'Brien (1988))	G_r (O'Brien (1988))	KS (Kolmogorov-Smirnov (1939))	BE (Barnett & Eisen (1982))	B (Boos (1986))	B^* (Boos (1986))	B^{**} (Boos (1986))	B^{***} (Boos (1986))	t (Student (1908))	t_r (Conover & Iman (1981))	t_W (Welch (1936,1938))	t_{Wr} (Conover & Iman (1981))	W (Wilcoxon (1945))	M (Mood (1954))
Comparaisons par simulations																												
Barnett & Eisen (1982)																	X	X										
Boos (1986)																	X		X	X								
O'Brien (1988)															X	X	X						X		X		X	
Blair & Morel (1992)															X	X							X				X	
Podgor & Gastwirth (1994)			X			X						X			X	X							X				X	
Fueda & Ohori (1995)	X												X														X	
Comparaisons par ARE(X,Y)*																												
Lepage (1971b, 1977)	X		Y		Y																							
Duran, Tsai & Lewis (1975)	X	Y																										
Goria (1982)	Y	Y	X																									
Smit, Swart & Stoker (1987)	Y	Y							X																			

* Efficacité relative asymptotique du test X par rapport au test Y.

$$\text{où } \xi_1 = \frac{\left(\int_0^1 \varphi_1(u)\varphi(u,f)du\right)^2}{\int_0^1 \varphi_1^2(u)du} \text{ et } \xi_2 = \frac{\left(\int_0^1 \varphi_2(u)\varphi_1(u,f)du\right)^2}{\int_0^1 \varphi_2^2(u)du}.$$

Ainsi, lorsque $T=T_{W,A\text{-}B}$ et f correspond à la fonction de densité d'une loi normale et Cauchy, c'est-à-dire $T_f = T_{vdW,K}$ et $T_{Sin,Cos}$, Lepage (1971b,1977) trouve

$$\frac{6}{\pi^2} \leq e(T_{W.A-B}, T_{vdW,K}) = \frac{b^2\left(\frac{3}{\pi}\right) + \ln^2(a)\left(\frac{12}{\pi^2}\right)}{b^2 + 2\ln^2(a)} \leq \frac{3}{\pi}$$

et

$$\frac{6}{\pi^2} \leq e(T_{W.A-B}, T_{Sin,Cos}) = \frac{b^2\left(\frac{6}{\pi^2}\right) + \ln^2(a)\left(\frac{96}{\pi^4}\right)}{b^2 + \ln^2(a)} \leq \frac{96}{\pi^4}.$$

Duran, Tsai et Lewis (1976) trouvent que lorsque la distribution F est de loi normale, l'efficacité relative asymptotique de leur test par rapport au test de Lepage (1971a) est donnée par

$$e(T_{W,M}, T_{W,A-B}) = \frac{\pi + 5(1/\gamma)^2}{\pi + 4(1/\gamma)^2}$$

où $\gamma=b/(a\text{-}1)$. Sous l'hypothèse de normalité, l'efficacité relative asymptotique du test de Duran, Tsai et Lewis (1976) par rapport au test de Lepage (1971a) est supérieure ou égale à l'unité.

Pour différentes distributions (normale, double-exponentielle, logistique et double-quadratique) et pour $\gamma=1$, Goria (1982) compare certains des tests de

Lepage (1971a,1971b,1977), le test de Duran, Tsai et Lewis (1976) ainsi que des tests basés sur d'autres combinaisons de statistiques par rapport au test optimal de Lepage (1971b, 1977). Goria (1982) conclut évidemment qu'il est préférable d'utiliser les tests basés sur les statistiques optimales de la classe de Lepage (1971b,1977) et ce, pour chacune des distributions considérées.

Smit, Swart et Stoker (1987) comparent leur test aux tests de Lepage (1971a) et de Duran, Tsai et Lewis (1976) en calculant les efficacités relatives asymptotiques de ces derniers pour $F(x)$ de loi normale. Ils concluent que lorsque $|\gamma|$ n'est pas inclus dans l'intervalle (0,23;1,40), l'efficacité relative asymptotique de leur test par rapport au test de Duran, Tsai et Lewis (1976) est supérieure à 1. Aucune conclusion précise n'est donnée quant au résultat de l'efficacité relative asymptotique du test de Smit, Swart et Stoker (1987) par rapport au test de Lepage (1971a).

Décrivons maintenant les principaux résultats obtenus dans les différentes études expérimentales retenues dans la littérature.

Barnett et Eisen (1982) comparent leur test au test de Kolmogorov-Smirnov (1939) ainsi qu'à d'autres tests non pertinents pour notre étude. Ils effectuent 2000 répétitions pour des tailles échantillonnales égales de m=n=24 ainsi que des tailles inégales de m=24 et n=36. Ils considèrent les distributions normale, uniforme, exponentielle, ainsi que les distributions ayant comme fonction de densité $f_1(x)$ et $f_2(x)$ respectivement définies par

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x-\gamma_1)}{(\gamma_2-\gamma_1)^2} & si \quad x \in (\gamma_1,\gamma_2), \\ 0 & si \quad x \notin (\gamma_1,\gamma_2) \end{cases} \quad \text{et} \quad f_2(x) = \begin{cases} 2(1-x) & si \quad x \in (0,1), \\ 0 & si \quad x \notin (0,1). \end{cases}$$

Barnett et Eisen (1982) étudient plusieurs combinaisons de différences dans les paramètres de position, dispersion ainsi que des différences dans les distributions. De façon générale, leur test obtient des puissances très semblables à celles obtenues par le test de Kolmogorov-Smirnov (1939).

Boos (1986) effectue 5000 répétitions pour comparer les puissances expérimentales de ses tests ajusté (B^*) et non ajusté (B) au test de Kolmogorov-Smirnov (1939). Il considère les distributions normale, de Student ainsi que la fonction de distribution définie par $F(x) = e^{-e^{-x}}$ et ce, pour des tailles échantillonnales égales de 20. Pour chacune des distributions considérées, Boos (1986) étudie différentes alternatives comprenant des écarts pris séparément et simultanément de 0,5 entre les paramètres de position, et de 1,25 dans les paramètres de dispersion. Boos (1986) considère de plus des différences dans les distributions pour des paramètres de position et de dispersion égaux ainsi qu'inégaux. De façon générale, Boos (1986) obtient que les puissances de son test ajusté (B^*) sont toujours plus grandes que celles de son test non ajusté (B). Aussi, le test ajusté B^* de Boos (1986) obtient des puissances supérieures à celles du test de Kolmogorov-Smirnov (1939) sauf lorsque l'alternative consiste en une différence des paramètres de position.

Podgor et Gastwirth (1994) étudient le niveau critique ainsi que la puissance de leur test, de certains tests de Lepage (1971b, 1975, 1977) et les tests d'O'Brien (1988), Student (1908), Wilcoxon (1945), ainsi que d'autres tests que nous n'avons pas retenu pour notre étude. Ils considèrent les distributions normale, exponentielle, uniforme, bêta et Cauchy. Pour F et G de lois normales, Podgor et Gastwirth (1994) effectuent 15000 répétitions pour le calcul des niveaux et 5000 répétitions pour le calcul des puissances avec des tailles échantillonnales égales à m=n=25. Ils étudient les puissances expérimentales des tests pour des écarts de 1 entre les paramètres de position, de 1 et 2 entre les paramètres de dispersion ainsi que des écarts simultanés entre les paramètres de position (écart de 1) et de dispersion (écarts de 1 et 2). Pour les distributions exponentielles, Podgor et Gastwirth (1994) considèrent des tailles échantillonnales de $m=n=18$ et effectuent 1000 répétitions pour calculer le niveau et les puissances expérimentales des tests lorsque l'hypothèse alternative consiste en une différence du paramètre β de la loi exponentielle où β correspond au paramètre de position de la loi exponentielle. Ils calculent la puissance expérimentale pour β variant de 1,5 à 4 par pas de 0,5. Pour les distributions uniforme, bêta et Cauchy, 10000 répétitions ont été effectuées pour des tailles échantillonnales de $m=n=15$ et seuls les niveaux des tests ont été étudiés. Dans le cas où les distributions sont de lois normales, tous les tests considérés obtiennent des niveaux relativement près des valeurs nominales. Quant à la puissance, Podgor et Gastwirth (1994) notent que les tests de Student (1908) et de Wilcoxon (1945) subissent d'importantes pertes lorsque les paramètres de position et de dispersion varient de façon simultanée. O'Brien (1988) avait aussi noté cette perte de puissance pour les tests de Student (1908) et de Wilcoxon (1945). Pour les distributions exponentielles, Podgor et Gastwirth (1994) trouvent que les tests non paramétriques ayant été développés dans le but de comparer deux populations pouvant différer dans leurs paramètres de position et de dispersion obtiennent des niveaux plus près des valeurs nominales et de façon générale, obtiennent des puissances plus élevées que les tests généralisés d'O'Brien (1988) et que les tests de Student (1908) et de Wilcoxon (1945). Ces résultats confirment ceux qu'ont obtenus Blair et Morel (1992). Pour les distributions uniforme, bêta et Cauchy, Podgor et Gastwirth (1994) trouvent que les tests non paramétriques sont généralement conservateurs, c'est-à-dire qu'ils obtiennent des niveaux expérimentaux en deçà du niveau nominal. Le test généralisé de Student (O'Brien (1988)) obtient aussi un niveau expérimental conservateur lorsque les distributions sont normales. Ce fait fut aussi noté par Blair et Morel (1992). Finalement, lorsque les distributions sont de loi Cauchy, le test de Student (1908) ainsi que le test généralisé de Student (O'Brien (1988)) sont très conservateurs tandis que les tests non paramétriques étudiés obtiennent des niveaux relativement près du niveau nominal.

Finalement, Fueda et Ohori (1995) comparent la puissance de leur test et celles des tests de Wilcoxon (1945) et de Lepage (1971a) en effectuant 1000 répétitions avec des tailles échantillonnales égales à 50. Ils considèrent quatre alternatives comprenant des écarts dans les paramètres de position de 0,5 pour des distributions normales et logistiques, un écart dans les paramètres de dispersion de $\sqrt{2}$ pour des distributions normales, ainsi qu'une alternative plus générale consistant en un changement simultané des paramètres de position, de dispersion et de coefficient d'aplatissement (le premier échantillon provenant d'une loi normale de paramètre de position 0,5 et de dispersion 1 et le deuxième d'une loi de Student à 2 degrés de liberté). Comme un nombre restreint d'alternatives ont été considérées, peu de conclusions peuvent être tirées des résultats obtenus par Fueda et Ohori (1995) si ce n'est que leur test a obtenu une puissance supérieure à celle du test de Lepage (1971b) lorsque l'alternative consistait en une différence des paramètres de position, de dispersion et du coefficient d'aplatissement. De plus, bien que le test de Lepage (1971a) ait été développé pour mesurer la différence entre deux populations pouvant différer dans leurs paramètres de position et de dispersion seulement, Fueda et Ohori (1995) n'ont pas considéré ce genre d'alternative dans leur étude.

Chapitre 2: Étude comparative des tests

2.1 Description de la méthode

À la suite de la revue de la littérature des comparaisons des tests du chapitre précédent, il apparaît évident qu'une étude expérimentale est justifiée pour mieux dégager le comportement du niveau des tests et de comparer la puissance des tests décrits précédemment lorsque les deux populations diffèrent dans leurs paramètres de position et de dispersion. Cette comparaison expérimentale sera effectuée à l'aide de simulations selon la méthode de Monte Carlo.

Déterminons d'abord les distributions que nous considérerons lors de notre étude. Comme nous l'avons décrit, certains tests sont asymptotiquement optimaux pour différentes lois à savoir la loi normale, la loi Cauchy et la loi logistique. Il est donc important de considérer ces lois afin de valider l'exactitude du résultat. Les lois exponentielle, khi-deux et normale contaminée seront aussi considérées.

Pour assurer la tendance des observations à suivre une distribution donnée, nous avons choisi des tailles échantillonnales supérieures ou égales à 24 et comme des tailles échantillonnales inégales peuvent influencer le comportement des tests, nous avons considéré les tailles échantillonnales (m,n)=(24,24), (24,36), (36,24) et (36,36).

Le choix des constantes de pondération l relatives aux tests de la classe de Lepage (1975) a été effectué en considérant les valeurs théoriques arrondies de ces constantes à partir des hypothèses alternatives. Rappelons que pour des hypothèses alternatives de la forme H_1:$G(x)=F(ax+b)$, la constante de pondération l associée à la classe de statistiques pondérées décrite par Lepage (1975) est définie par $l = \dfrac{b}{\ln(a)}$. Notons que lorsque $b \neq 0$ et $a=1$, c'est-à-dire lorsque l'hypothèse alternative consiste en une différence dans les paramètres de position seulement, la constante l devrait tendre vers l'infini. Afin de choisir la valeur de l appropriée dans ce cas, nous avons effectué une simulation visant à calculer la puissance des tests de la classe de Lepage (1975) en considérant un éventail de constantes de pondération variant de 2 à 1000. Suite à cette simulation, nous avons noté que l'influence de l'augmentation de la valeur de la constante de pondération sur les puissances expérimentales était négligeable et que ces dernières semblaient assez stables lorsque $l \geq 5$. Ainsi, pour des hypothèses alternatives consistant en une différence des paramètres de position seulement, nous considérons une constante de pondération d'une valeur de 5. Notons que les mêmes valeurs de constantes ont été considérées pour les constantes de pondération l^* relatives à la statistique de Podgor et Gastwirth (1994).

En ce qui concerne la valeur de la constante de pondération du test de Smit, Swart et Stoker (1987), $0 \leq c = \dfrac{a-1}{a+b-1} \leq 1$, elle sera aussi déterminée à partir de l'hypothèse alternative considérée.

Afin de couvrir un grand nombre d'hypothèses alternatives, nous avons considéré des différences dans les paramètres de position et/ou de dispersion pour chacune des distributions. Le tableau 2.1.1 présente les hypothèses alternatives que nous étudierons pour F et G de mêmes lois pouvant différer dans leurs paramètres de position et de dispersion ainsi que la valeur des constantes de pondération l et c relatives aux tests de la classe de Lepage (1975) et au test de Smit, Swart et Stoker (1987).

Tableau 2.1.1

Hypothèses alternatives considérées et constantes de pondération associées pour chaque distribution étudiée.

Distribution $F(x)$	Différence dans les paramètres de	Hypothèses alternatives H_1: $G(x) = F(ax+b)$		Constantes de pondération	
		b	a	l	c
Normale,	Position	1	1	5	0
logistique,	Dispersion	0	2	0	1
exponentielle,	Dispersion	0	3	0	1
khi-deux et	Position et dispersion	1	2	1,4	0,5
normale contaminée	Position et dispersion *	1	3	0,9	0,7
Exponentielle	Position	0,5	1	5	0
Cauchy	Position	1	1	5	0
	Position	2	1	5	0
	Dispersion	0	2	0	1
	Dispersion	0	4	0	1
	Position et dispersion	1	3	0,9	0,7
	Position et dispersion	2	2	2,9	0,3
	Position et dispersion	2	4	1,4	0,6

* Sauf pour la distribution exponentielle.

Notons que pour des échantillons provenant de distributions Cauchy, nous avons considéré des différences entre les paramètres de position et de dispersion plus grandes que dans les autres distributions afin d'obtenir des puissances comparables à celles obtenues pour ces dernières.

Pour la distribution khi-deux, nous avons choisi trois degrés de liberté. Lorsque les observations proviennent d'une normale contaminée, nous avons considéré le cas où 80% proviennent d'une loi normale centrée et réduite et de 20% d'une loi normale de paramètre de position 5 et de paramètre de dispersion $\sqrt{2}$.

Nous présentons de plus les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement de chacune des distributions étudiées ainsi que la liste des tests que nous considérons dans notre étude expérimentale et les régions critiques qui y sont associées aux tableaux 2.1.2 et 2.1.3 respectivement.

Tableau 2.1.2

Coefficients d'asymétrie et d'aplatissement
pour les différentes distributions étudiées.

Distribution	Coefficient d'asymétrie	Coefficient d'aplatissement
Normale	0	0
Logistique	0	4,2
Cauchy	Non défini	Non défini
Exponentielle	2	9
Khi-deux à 3 d.l.	2,7	7
Normale contaminée	1,2	3,7

Afin de définir complètement la statistique de Boos (1986), nous devons définir des estimateurs des paramètres de position et de dispersion de chaque échantillon. Plusieurs choix peuvent être considérés, mais nous ne considérerons que les estimateurs définis par

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i\,,\ \ \hat{\mu}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=m+1}^{N} X_i\,,\ \hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(X_i - \hat{\mu}_1\right)^2$$

et

$$\hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=m+1}^{N}\left(X_i - \hat{\mu}_2\right)^2.$$

Tableau 2.1.3
Tests et régions critiques associées

Tests	Région critique
Test de Lepage basé sur la combinaison des statistiques de Wilcoxon et d'Ansari-Bradley	$T_{W,AB} \geq \chi^2_{2;1-\alpha}$
Test de Duran, Tsai et Lewis	$T_{W,M} \geq \chi^2_{2;1-\alpha}$
Test de Lepage asymptotiquement optimal pour la loi normale	$T_{vdW,K} \geq \chi^2_{2;1-\alpha}$
Test de Lepage asymptotiquement optimal pour la loi logistique	$T_{W,Log} \geq \chi^2_{2;1-\alpha}$
Test de Lepage asymptotiquement optimal pour la loi Cauchy	$T_{Sin,Cos} \geq \chi^2_{2;1-\alpha}$
Test pondéré de Lepage asymptotiquement optimal pour la loi normale (Pour différents l)	$P_{vdW,K} \geq \chi^2_{1;1-\alpha}$
Test pondéré de Lepage asymptotiquement optimal pour la loi logistique (Pour différents l)	$P_{W,Log} \geq \chi^2_{1;1-\alpha}$
Test pondéré de Lepage asymptotiquement optimal pour la loi Cauchy (Pour différents l)	$P_{Sin,Cos} \geq \chi^2_{1;1-\alpha}$
Test pondéré de Lepage basé sur la combinaison des statistiques de Wilcoxon et d'Ansari-Bradley (Pour différents l)	$P_{W,AB} \geq \chi^2_{1;1-\alpha}$
Test de Smit, Swart et Stoker (Pour différents c)	$\left\|P^*_{W,M}\right\| \geq N(0,1)$
Test pondéré de Lepage basé sur la combinaison des statistiques de Wilcoxon et de Mood (Pour différents l)	$P_{W,M} \geq \chi^2_{1;1-\alpha}$
Test de Podgor et Gastwirth (Pour différents l^*)	$P_{W\text{-}vdW,Log\text{-}K} \geq \chi^2_{1;1-\alpha}$
Test de Fueda et Ohori de la première forme	$F_W \geq \chi^2_{4;1-\alpha}$
Test de Fueda et Ohori de la deuxième forme	$F^*_W \geq \chi^2_{4;1-\alpha}$
Test de Student généralisé	$G_t \geq F_{2,N-3;1-\alpha}$
Test de Wilcoxon généralisé	$G_r \geq F_{2,N-3;1-\alpha}$
Test de Kolmogorov-Smirnov	$KS \geq KS_{(m,n;1-\alpha)}$
Test de Barnett et Eisen	$BE \geq \chi^2_{3;1-\alpha}$
Test de Boos	$B \geq \chi^2_{4;1-\alpha}$
Test de Boos ajusté	$B^* \geq \chi^2_{4;1-\alpha}$
Test de Boos construit à partir des observations centrées	$B^{**} \geq \chi^2_{4;1-\alpha}$
Test de Boos construit à partir des observations centrées et réduites	$B^{***} \geq \chi^2_{4;1-\alpha}$
Test de Student	$\|t\| \geq t_{N-2;1-\alpha/2}$
Test de Student basé sur les rangs	$\|t_r\| \geq t_{N-2;1-\alpha/2}$
Test de Welch	$\|t_W\| \geq t_{v;1-\alpha/2}$
Test de Welch basé sur les rangs	$\|t_{Wr}\| \geq t_{vr;1-\alpha/2}$
Test de Wilcoxon	$W \geq N(0,1)$
Test de Mood	$M \geq \chi^2_{1;1-\alpha}$

Suite à notre étude expérimentale de Monte Carlo, nous voudrons comparer le niveau expérimental ainsi que les puissances expérimentales obtenus pour chacun des tests considérés. Le niveau expérimental, noté $\hat{\alpha}$, correspond au nombre de fois que l'hypothèse nulle est rejetée sur le nombre de répétitions effectuées et ce, lorsque les distributions des deux populations sont les mêmes. Pour F et G de mêmes lois, le nombre de répétitions a été fixé à 10000 pour le calcul du niveau expérimental ainsi que pour le calcul des puissances expérimentales. Comme le niveau nominal correspond à une proportion d'erreur sur le nombre de répétitions, ce dernier suit une loi binomiale de paramètres N=10000 et $p = \alpha$. L'intervalle de confiance du niveau nominal est donc donné par

$$\alpha \in \hat{\alpha} \pm 1{,}96\sqrt{\frac{\hat{\alpha}(1-\hat{\alpha})}{10000}}$$

où $\hat{\alpha}$ correspond au niveau expérimental. Ainsi, pour que le niveau nominal 0,05 soit compris dans cet intervalle, le niveau expérimental $\hat{\alpha}$ devra être supérieur à 0,045 mais inférieur à 0,055. Nous dirons d'un test qu'il est adéquat si son niveau expérimental est compris dans l'intervalle (0,045;0,055), qu'il est conservateur si son niveau est inférieur à 0,045 et qu'il est libéral si son niveau est supérieur à 0,055.

En ce qui a trait au calcul des puissances, elles sont déterminées en calculant le nombre de fois où l'hypothèse nulle est rejetée sur le nombre de répétitions lorsque les deux échantillons sont différents dans un ou plusieurs paramètres.

Tous les calculs ont été effectués à l'aide du langage de programmation Splus (1996) sur le serveur ESI20 du réseau ESI de l'Université de Montréal.

2.2 Résultats

Les résultats des simulations pour le niveau expérimental et la puissance expérimentale pour deux échantillons de mêmes lois pouvant différer dans leurs paramètres de position et/ou de dispersion sont présentés aux tableaux 2.2.1 à 2.2.24. Mentionnons que la notation N(b,a), L(b,a), C(b,a), E(b,a), K(b,a) et NC(b,a) est utilisée pour désigner les lois normale, logistique, exponentielle, khi-deux et normale contaminée respectivement où b correspond au paramètre de position et a au paramètre de dispersion de chacune de ces lois.

Décrivons en premier lieu les principaux résultats concernant les niveaux expérimentaux obtenus.

Tout d'abord, nous remarquons que les tests de Student et de Welch basés sur les rangs (t_r et t_{Wr}) ainsi que les tests de Wilcoxon (W) et de Mood (M) offrent un excellent contrôle du niveau expérimental pour l'ensemble des cas considérés. Quant aux tests paramétriques de Student (t) et de Welch (t_W), ils offrent aussi un excellent contrôle du niveau expérimental exception faite du cas où les observations proviennent de lois Cauchy où ils sont alors très conservateurs.

Parmi les tests de classe de Lepage (1971b, 1977), le test basé sur la combinaison des statistiques de Wilcoxon et d'Ansari-Bradley ($T_{W,A\text{-}B}$) et le test asymptotiquement optimal pour la loi de Cauchy ($T_{Sin,Cos}$) offrent le meilleur contrôle du niveau expérimental. Ces derniers obtiennent en effet des niveaux expérimentaux adéquats dans presque tous les cas étudiés. Le test basé sur les statistiques linéaires de rangs de van der Waerden et de Klotz ($T_{vdW,K}$) est adéquat lorsque les observations proviennent de lois normales seulement sans quoi, il est quelque peu conservateur. Enfin, le test asymptotiquement optimal

TABLEAU 2.2.1

Niveau expérimental et puissances expérimentales pour deux échantillons de lois normales de tailles m=n=24.

Tests	l, c	Hypothèse alternative H_1: $G(x) = F(ax+b)$ où $F(x) \sim N(0,1)$	Différences dans les paramètres de: position seulement	dispersion seulement		position et dispersion	
		N(0,1)	N(1,1)	N(0,2)	N(0,3)	N(1,2)	N(1,3)
$T_{W,AB}$		0,0518	0,8329	0,5867	0,9278	0,8275	0,9588
$T_{W,M}$		0,0506	0,8321	0,6752	0,9694	0,8691	0,9793
$T_{vdW,K}$		0,0464	0,8364	0,7184	0,9819	0,8837	0,9866
$T_{W,Log}$		0,0489	0,8289	0,7224	0,9812	0,8838	0,9860
$T_{Sin,Cos}$		0,0526	0,5595	0,5781	0,9231	0,7259	0,9439
$P_{vdW,K}$	0	0,0443	0,0091	0,8798	0,9945	0,7330	0,9751
	0,9	0,0446	0,6342	0,6649	0,8946	0,9724	0,9947
	1,4	0,0437	0,8050	0,4623	0,7074	0,9588	0,9703
	5	0,0372	0,9096	0,0804	0,1098	0,7324	0,5559
$P_{W,Log}$	0	0,0510	0,0120	0,8854	0,9952	0,7599	0,9803
	0,9	0,0505	0,3913	0,7887	0,9625	0,9627	0,9985
	1,4	0,0513	0,6522	0,6718	0,8952	0,9715	0,9941
	5	0,0490	0,9092	0,1767	0,2737	0,8545	0,7845
$P_{Sin,Cos}$	0	0,0566	0,0262	0,7339	0,9722	0,6561	0,9500
	0,9	0,0590	0,4370	0,4726	0,7587	0,8550	0,9539
	1,4	0,0575	0,5794	0,3168	0,5539	0,8155	0,8938
	5	0,0556	0,6979	0,1080	0,1804	0,6130	0,5821
$P_{W,AB}$	0	0,0551	0,0241	0,7544	0,9745	0,6670	0,9520
	0,9	0,0525	0,6438	0,4932	0,7888	0,9270	0,9727
	1,4	0,0509	0,7965	0,3258	0,5717	0,9037	0,9263
	5	0,0487	0,9045	0,0885	0,1268	0,7187	0,5749
$P^*_{W,M}$	0	0,0490	0,9075	0,0603	0,0677	0,5403	0,3224
	0,5	0,0509	0,8925	0,1050	0,1659	0,7588	0,6467
	0,7	0,0509	0,8031	0,2648	0,4793	0,8874	0,8995
	1	0,0536	0,0137	0,7686	0,9813	0,6318	0,9521
$P_{W,M}$	0	0,0560	0,0181	0,8424	0,9907	0,7408	0,9740
	0,9	0,0531	0,6621	0,5762	0,8438	0,9564	0,9871
	1,4	0,0525	0,8091	0,3868	0,6434	0,9328	0,9526
	5	0,0480	0,9086	0,0933	0,1378	0,7362	0,5975
$P_{W\text{-}vdW,Log\text{-}K}$	0	0,0374	0,0081	0,8594	0,9924	0,7074	0,9715
	0,9	0,0438	0,7888	0,4720	0,7175	0,9579	0,9716
	1,4	0,0460	0,8740	0,2824	0,4543	0,9124	0,8972
	5	0,0419	0,9142	0,0699	0,0887	0,6818	0,4899
F_W		0,0176	0,6389	0,3896	0,8652	0,6376	0,9033
F^*_W		0,0371	0,6735	0,6193	0,9590	0,7930	0,9698
G_t		0,0433	0,8464	0,6553	0,9253	0,8360	0,9353
G_r		0,0536	0,8400	0,6893	0,9720	0,8755	0,9808
KS		0,0301	0,7771	0,1256	0,3413	0,5974	0,6362
BE		0,0560	0,7664	0,3874	0,7687	0,6810	0,8574
B		0,0376	0,6922	0,5167	0,9271	0,7225	0,9456
B*		0,0403	0,7024	0,5299	0,9320	0,7310	0,9489
B**		0,0442	0,7320	0,5675	0,9472	0,8287	0,9743
B***		0,0450	0,7386	0,5673	0,9478	0,8333	0,9747
t		0,0494	0,9232	0,0576	0,0564	0,5762	0,3311
t_r		0,0510	0,9121	0,0638	0,0704	0,5492	0,3302
t_W		0,0493	0,9228	0,0552	0,0520	0,5689	0,3178
t_{W_r}		0,0510	0,9121	0,0632	0,0684	0,5472	0,3236
W		0,0490	0,9075	0,0603	0,0677	0,5403	0,3224
M		0,0536	0,0137	0,7686	0,9813	0,6318	0,9521

TABLEAU 2.2.2

Niveau expérimental et puissances expérimentales pour deux échantillons de lois normales de tailles m=24 et n=36.

Tests	l, c	Hypothèse alternative H_1: $G(x) = F(ax+b)$ où $F(x) \sim N(0,1)$	Différences dans les paramètres de: position seulement	dispersion seulement		position et dispersion	
		N(0,1)	N(1,1)	N(0,2)	N(0,3)	N(1,2)	N(1,3)
$T_{W,AB}$		0,0499	0,9064	0,6804	0,9729	0,8997	0,9848
$T_{W,M}$		0,0491	0,9045	0,7619	0,9913	0,9307	0,9948
$T_{vdW,K}$		0,0427	0,9092	0,7748	0,9941	0,9288	0,9967
$T_{W,Log}$		0,0470	0,9026	0,7909	0,9944	0,9357	0,9969
$T_{Sin,Cos}$		0,0492	0,6377	0,6806	0,9749	0,8275	0,9830
$P_{vdW,K}$	0	0,0297	0,0019	0,9085	0,9981	0,6817	0,9798
	0,9	0,0337	0,4905	0,6786	0,9158	0,9843	0,9983
	1,4	0,0328	0,7842	0,4644	0,7208	0,9770	0,9847
	5	0,0364	0,9472	0,0583	0,0759	0,7879	0,5954
$P_{W,Log}$	0	0,0392	0,0031	0,9201	0,9985	0,7205	0,9845
	0,9	0,0409	0,1823	0,8220	0,9793	0,9745	0,9996
	1,4	0,0433	0,5252	0,6985	0,9209	0,9859	0,9984
	5	0,0447	0,9373	0,1656	0,2523	0,9087	0,8388
$P_{Sin,Cos}$	0	0,0547	0,0271	0,8107	0,9897	0,6364	0,9643
	0,9	0,0518	0,3383	0,5361	0,8170	0,9187	0,9827
	1,4	0,0505	0,5319	0,3698	0,6206	0,8973	0,9530
	5	0,0513	0,7333	0,1219	0,1955	0,7397	0,7192
$P_{W,AB}$	0	0,0529	0,2440	0,8275	0,9909	0,6600	0,9672
	0,9	0,0505	0,5909	0,5579	0,8586	0,9629	0,9916
	1,4	0,0483	0,8158	0,3687	0,6504	0,9543	0,9690
	5	0,0454	0,9441	0,0719	0,1066	0,8021	0,6582
$P^*_{W,M}$	0	0,0468	0,9538	0,0503	0,0477	0,6344	0,3654
	0,5	0,0459	0,9352	0,0931	0,1478	0,8377	0,7295
	0,7	0,0483	0,8378	0,2956	0,5355	0,9446	0,9499
	1	0,0503	0,0263	0,8511	0,9945	0,6347	0,9703
$P_{W,M}$	0	0,0522	0,0130	0,8956	0,9974	0,7113	0,9809
	0,9	0,0499	0,5929	0,6290	0,8959	0,9784	0,9965
	1,4	0,0476	0,8172	0,4224	0,6974	0,9680	0,9800
	5	0,0449	0,9446	0,0782	0,1121	0,8145	0,6712
$P_{W\text{-}vdW,Log\text{-}K}$	0	0,0267	0,0150	0,8908	0,9976	0,6561	0,9762
	0,9	0,0343	0,7607	0,4809	0,7387	0,9776	0,9868
	1,4	0,0376	0,8932	0,2757	0,4441	0,9511	0,9314
	5	0,0408	0,9522	0,0516	0,0623	0,7537	0,5435
F_W		0,0211	0,7796	0,469	0,9366	0,7323	0,9615
F^*_W		0,0360	0,7861	0,6426	0,9779	0,8342	0,9879
G_t		0,0454	0,9157	0,6714	0,9366	0,8694	0,9506
G_r		0,0514	0,9087	0,7704	0,9923	0,9340	0,9951
KS		0,0414	0,8761	0,1711	0,4931	0,7454	0,8020
BE		0,0448	0,8215	0,4426	0,8564	0,7501	0,9278
B		0,0423	0,8094	0,5668	0,9640	0,7894	0,9778
B*		0,0444	0,8161	0,5789	0,9662	0,7962	0,9794
B**		0,0443	0,8254	0,6160	0,9725	0,8952	0,9912
B***		0,0468	0,8311	0,6163	0,9737	0,9002	0,9914
t		0,0495	0,9604	0,0309	0,0244	0,6109	0,3177
t_r		0,0468	0,9538	0,0477	0,0503	0,6344	0,3654
t_W		0,0495	0,9596	0,0545	0,0524	0,7041	0,4442
t_{W_r}		0,0466	0,9527	0,0649	0,0743	0,6836	0,4419
W		0,0468	0,9538	0,0477	0,0503	0,6344	0,3654
M		0,0503	0,0263	0,8511	0,9945	0,6347	0,9703

TABLEAU 2.2.3

Niveau expérimental et puissances expérimentales pour deux échantillons de lois normales de tailles m=36 et n=24.

Tests	l, c	Hypothèse alternative H_1: $G(x) = F(ax+b)$ où $F(x) \sim N(0,1)$	Différences dans les paramètres de: position seulement	dispersion seulement		position et dispersion	
		N(0,1)	N(1,1)	N(0,2)	N(0,3)	N(1,2)	N(1,3)
$T_{W,AB}$		0,0489	0,9049	0,6814	0,9630	0,8980	0,9802
$T_{W,M}$		0,0490	0,9055	0,7764	0,9888	0,9330	0,9913
$T_{vdW,K}$		0,0465	0,9087	0,8513	0,9962	0,9586	0,9976
$T_{W,Log}$		0,0464	0,9021	0,8375	0,9955	0,9514	0,9965
$T_{Sin,Cos}$		0,0489	0,6407	0,6451	0,9508	0,7866	0,9631
$P_{vdW,K}$	0	0,0677	0,0464	0,9551	0,9995	0,9186	0,9975
	0,9	0,0622	0,8305	0,8199	0,9633	0,9921	0,9991
	1,4	0,0568	0,9150	0,6400	0,8590	0,9870	0,9924
	5	0,0427	0,9568	0,1315	0,1902	0,8426	0,7089
$P_{W,Log}$	0	0,0662	0,0545	0,9501	0,9995	0,9216	0,9979
	0,9	0,0645	0,6741	0,8921	0,9903	0,9905	0,9997
	1,4	0,0620	0,8330	0,8029	0,9569	0,9895	0,9987
	5	0,0513	0,9563	0,2473	0,3812	0,9126	0,8657
$P_{Sin,Cos}$	0	0,0549	0,0582	0,7983	0,9838	0,7989	0,9804
	0,9	0,0562	0,6087	0,5365	0,8283	0,8891	0,9668
	1,4	0,0555	0,7126	0,3624	0,6209	0,8458	0,9127
	5	0,0536	0,7807	0,0991	0,1656	0,5997	0,5621
$P_{W,AB}$	0	0,0548	0,0596	0,8292	0,9889	0,8193	0,9848
	0,9	0,0534	0,8051	0,5659	0,8420	0,9596	0,9840
	1,4	0,0504	0,8948	0,3903	0,6445	0,9435	0,9492
	5	0,0496	0,9501	0,1087	0,1638	0,7854	0,6509
$P^*_{W,M}$	0	0,0517	0,9504	0,0800	0,0941	0,6164	0,3870
	0,5	0,0507	0,9409	0,1347	0,2159	0,8277	0,7292
	0,7	0,0493	0,8995	0,3351	0,5740	0,9311	0,9348
	1	0,0502	0,0273	0,8412	0,9935	0,8076	0,9860
$P_{W,M}$	0	0,0580	0,0558	0,9038	0,9971	0,8849	0,9958
	0,9	0,0561	0,8206	0,6727	0,9078	0,9775	0,9937
	1,4	0,0527	0,9056	0,4722	0,7386	0,9625	0,9732
	5	0,0497	0,9522	0,1189	0,1811	0,8067	0,6825
$P_{W\text{-}vdW,Log\text{-}K}$	0	0,0565	0,0376	0,9422	0,9994	0,9046	0,9967
	0,9	0,0544	0,9085	0,6358	0,8584	0,9847	0,9917
	1,4	0,0499	0,9437	0,4112	0,6208	0,9623	0,9548
	5	0,0441	0,9578	0,0979	0,1365	0,7818	0,6095
F_W		0,0219	0,7773	0,6396	0,9744	0,8540	0,9820
F^*_W		0,0522	0,8100	0,8256	0,9932	0,9341	0,9961
G_t		0,0445	0,9150	0,8551	0,9902	0,9559	0,9928
G_r		0,0517	0,9099	0,7836	0,9898	0,9348	0,9916
KS		0,0373	0,8789	0,2096	0,5213	0,7216	0,7742
BE		0,0473	0,8176	0,3939	0,7693	0,7260	0,8696
B		0,0442	0,8058	0,7325	0,9860	0,8947	0,9904
B*		0,0469	0,8112	0,7409	0,9864	0,8994	0,9914
B**		0,0483	0,8254	0,7493	0,9888	0,9223	0,9955
B***		0,0471	0,8254	0,7478	0,9893	0,9222	0,9958
t		0,0512	0,9576	0,0849	0,0997	0,6883	0,4585
t_r		0,0517	0,9504	0,0800	0,0941	0,6164	0,3870
t_W		0,0510	0,9564	0,0520	0,0527	0,5886	0,3271
t_{W_r}		0,0516	0,9490	0,0599	0,0675	0,5639	0,3233
W		0,0517	0,9504	0,0800	0,0941	0,6164	0,3870
M		0,0502	0,0273	0,8412	0,9935	0,8076	0,9860

TABLEAU 2.2.4

Niveau expérimental et puissances expérimentales pour deux échantillons de lois normales de tailles m=n=36.

Tests	l, c	Hypothèse alternative H_1: $G(x) = F(ax+b)$ où $F(x) \sim N(0,1)$	Différences dans les paramètres de: position seulement	dispersion seulement		position et dispersion	
		N(0,1)	N(1,1)	N(0,2)	N(0,3)	N(1,2)	N(1,3)
$T_{W,AB}$		0,0477	0,9569	0,7890	0,9912	0,9577	0,9957
$T_{W,M}$		0,0468	0,9580	0,8699	0,9974	0,9745	0,9995
$T_{vdW,K}$		0,0466	0,9619	0,9175	0,9994	0,9852	0,9997
$T_{W,Log}$		0,0482	0,9562	0,9115	0,9993	0,9830	0,9997
$T_{Sin,Cos}$		0,0486	0,7463	0,7664	0,9880	0,8939	0,9913
$P_{vdW,K}$	0	0,0473	0,0081	0,9758	0,9998	0,8975	0,9978
	0,9	0,0449	0,7944	0,8531	0,9793	0,9977	0,9998
	1,4	0,0446	0,9264	0,6639	0,8827	0,9950	0,9976
	5	0,0392	0,9804	0,1089	0,1529	0,8998	0,7604
$P_{W,Log}$	0	0,0512	0,0114	0,9751	0,9999	0,9078	0,9985
	0,9	0,0496	0,5209	0,9287	0,9955	0,9966	1,0000
	1,4	0,0490	0,7985	0,8432	0,9760	0,9971	0,9997
	5	0,0468	0,9775	0,2457	0,3806	0,9570	0,9146
$P_{Sin,Cos}$	0	0,0511	0,0246	0,8802	0,9963	0,8178	0,9918
	0,9	0,0543	0,5653	0,6196	0,8933	0,9521	0,9916
	1,4	0,0526	0,7281	0,4332	0,7053	0,9294	0,9697
	5	0,0503	0,8420	0,1210	0,2016	0,7596	0,7227
$P_{W,AB}$	0	0,0505	0,0222	0,9012	0,9973	0,8391	0,9940
	0,9	0,0510	0,8074	0,6518	0,9114	0,9858	0,9972
	1,4	0,0469	0,9214	0,4501	0,7369	0,9796	0,9833
	5	0,0468	0,9781	0,0986	0,1511	0,8740	0,7437
$P^*_{W,M}$	0	0,0481	0,9797	0,0616	0,0668	0,7147	0,4473
	0,5	0,0485	0,9734	0,1318	0,2132	0,9062	0,8102
	0,7	0,0490	0,9354	0,3864	0,6516	0,9752	0,9759
	1	0,0498	0,0138	0,9203	0,9990	0,8308	0,9951
$P_{W,M}$	0	0,0508	0,0179	0,9512	0,9997	0,8888	0,9983
	0,9	0,0507	0,8168	0,7420	0,9488	0,9928	0,9990
	1,4	0,0479	0,9283	0,5315	0,8027	0,9864	0,9917
	5	0,0473	0,9785	0,1098	0,1666	0,8874	0,7671
$P_{W\text{-}vdW,Log\text{-}K}$	0	0,0397	0,0066	0,9694	0,9998	0,8821	0,9975
	0,9	0,0413	0,9147	0,6657	0,8839	0,9942	0,9978
	1,4	0,0423	0,9651	0,4243	0,6384	0,9851	0,9773
	5	0,0425	0,9811	0,0801	0,1061	0,8587	0,6751
F_W		0,0263	0,8883	0,7407	0,9934	0,9229	0,9973
F^*_W		0,0426	0,8968	0,8663	0,9980	0,9647	0,9995
G_t		0,0466	0,9649	0,8946	0,9951	0,9766	0,9961
G_r		0,0491	0,9593	0,8746	0,9978	0,9758	0,9995
KS		0,0354	0,9347	0,2376	0,6424	0,8315	0,8860
BE		0,0497	0,9135	0,5424	0,9145	0,8560	0,9638
B		0,0440	0,9028	0,8022	0,9965	0,9438	0,9986
B*		0,0462	0,9057	0,8090	0,9965	0,9459	0,9988
B**		0,0455	0,9151	0,8237	0,9973	0,9688	0,9995
B***		0,0472	0,9147	0,8250	0,9973	0,9695	0,9995
t		0,0505	0,9851	0,0537	0,0539	0,7497	0,4706
t_r		0,0496	0,9800	0,0627	0,0686	0,7186	0,4517
t_W		0,0503	0,9851	0,0532	0,0517	0,7451	0,4633
t_{W_r}		0,0496	0,9800	0,0626	0,0671	0,7180	0,4484
W		0,0481	0,9797	0,0616	0,0668	0,7147	0,4473
M		0,0498	0,0138	0,9203	0,9990	0,8308	0,9951

TABLEAU 2.2.5

Niveau expérimental et puissances expérimentales pour deux échantillons de lois logistiques de tailles m=n=24.

		Hypothèse alternative H_1: $G(x) = F(ax+b)$ où $F(x) \sim L(0,1)$					
			Différences dans les paramètres de:				
			position seulement	dispersion seulement		position et dispersion	
Tests	l, c	L(0,1)	L(1,1)	L(0,2)	L(0,3)	L(1,2)	L(1,3)
$T_{W,AB}$		0,0473	0,3811	0,5202	0,9008	0,6354	0,9157
$T_{W,M}$		0,0481	0,3777	0,5924	0,9470	0,6962	0,9527
$T_{vdW,K}$		0,0442	0,3629	0,6050	0,9536	0,7028	0,9613
$T_{W,Log}$		0,0485	0,3769	0,6161	0,9570	0,7149	0,9634
$T_{Sin,Cos}$		0,0473	0,2564	0,5159	0,8957	0,5978	0,9064
$P_{vdW,K}$	0	0,0417	0,0320	0,8018	0,9886	0,7543	0,9783
	0,9	0,0416	0,2917	0,5912	0,8559	0,8621	0,9609
	1,4	0,0389	0,3991	0,4142	0,6651	0,7934	0,8852
	5	0,0370	0,4783	0,0771	0,1024	0,4041	0,3185
$P_{W,Log}$	0	0,0476	0,0367	0,8173	0,9900	0,7771	0,9829
	0,9	0,0503	0,2006	0,7173	0,9433	0,8888	0,9845
	1,4	0,0500	0,3173	0,6077	0,8592	0,8739	0,9634
	5	0,0478	0,5164	0,1641	0,2546	0,5774	0,5633
$P_{Sin,Cos}$	0	0,0563	0,0454	0,6839	0,9578	0,6535	0,9487
	0,9	0,0579	0,2319	0,4375	0,7263	0,7249	0,8885
	1,4	0,0575	0,2998	0,2993	0,5297	0,6458	0,7757
	5	0,0536	0,3659	0,1061	0,1673	0,3779	0,3828
$P_{W,AB}$	0	0,0538	0,0418	0,6983	0,9627	0,6667	0,9523
	0,9	0,0539	0,3051	0,4586	0,7577	0,7759	0,9082
	1,4	0,0510	0,3950	0,3037	0,5510	0,7012	0,8055
	5	0,0471	0,4878	0,0833	0,1194	0,4019	0,3400
$P^*_{W,M}$	0	0,0477	0,4848	0,0593	0,0617	0,2481	0,1523
	0,5	0,0516	0,4645	0,0998	0,1557	0,4437	0,4073
	0,7	0,0534	0,3760	0,2375	0,4504	0,6506	0,7393
	1	0,0499	0,0365	0,6853	0,9673	0,6478	0,9556
$P_{W,M}$	0	0,0553	0,0421	0,7825	0,9837	0,7469	0,9771
	0,9	0,0548	0,3139	0,5292	0,8139	0,8291	0,9424
	1,4	0,0511	0,4082	0,3542	0,6084	0,7491	0,8475
	5	0,0478	0,4932	0,0880	0,1292	0,4205	0,3584
$P_{W\text{-}vdW,Log\text{-}K}$	0	0,0359	0,0252	0,7790	0,9850	0,7297	0,9753
	0,9	0,0388	0,3879	0,4241	0,6794	0,7984	0,8915
	1,4	0,0402	0,4652	0,2541	0,4278	0,6856	0,7297
	5	0,0422	0,4942	0,0649	0,0839	0,3616	0,2685
F_W		0,0158	0,1991	0,3106	0,7905	0,4175	0,8127
F^*_W		0,0367	0,2518	0,5197	0,9182	0,6120	0,9295
G_l		0,0395	0,3635	0,4563	0,7810	0,5698	0,7962
G_r		0,0519	0,3888	0,6048	0,9508	0,7083	0,9560
KS		0,0303	0,3498	0,1140	0,3032	0,3089	0,4218
BE		0,0583	0,3321	0,3598	0,7333	0,4780	0,7685
B		0,0388	0,2538	0,4253	0,8676	0,5223	0,8849
B*		0,0413	0,2619	0,4343	0,8736	0,5330	0,8899
B**		0,0435	0,2806	0,4767	0,8953	0,6005	0,9130
B***		0,0461	0,2942	0,4829	0,9001	0,6029	0,9138
t		0,0510	0,4693	0,0548	0,0545	0,2243	0,1356
t_r		0,0496	0,4955	0,0613	0,0651	0,2550	0,1563
t_W		0,0506	0,4684	0,0527	0,0498	0,2188	0,1279
t_{W_r}		0,0496	0,4954	0,0612	0,0629	0,2539	0,1543
W		0,0477	0,4848	0,0593	0,0617	0,2481	0,1523
M		0,0499	0,0365	0,6853	0,9673	0,6478	0,9556

TABLEAU 2.2.6

Niveau expérimental et puissances expérimentales pour deux échantillons de lois logistiques de tailles m=24 et n=36.

		Hypothèse alternative H_1: $G(x) = F(ax+b)$ où $F(x) \sim L(0,1)$					
			Différences dans les paramètres de:				
			position seulement	dispersion seulement		position et dispersion	
Tests	l, c	L(0,1)	L(1,1)	L(0,2)	L(0,3)	L(1,2)	L(1,3)
$T_{W,AB}$		0,0479	0,4454	0,6055	0,9563	0,7228	0,9652
$T_{W,M}$		0,0467	0,4441	0,6737	0,9783	0,7717	0,9841
$T_{vdW,K}$		0,0439	0,4329	0,6505	0,9779	0,7549	0,9838
$T_{W,Log}$		0,0461	0,4428	0,6796	0,9824	0,7805	0,9874
$T_{Sin,Cos}$		0,0479	0,3062	0,6171	0,9570	0,7038	0,9666
$P_{vdW,K}$	0	0,0287	0,0138	0,8224	0,9943	0,7527	0,9867
	0,9	0,0308	0,2290	0,6012	0,8799	0,8866	0,9792
	1,4	0,0309	0,3782	0,4036	0,6696	0,8301	0,9171
	5	0,0367	0,5347	0,0584	0,0726	0,4210	0,3274
$P_{W,Log}$	0	0,0370	0,0193	0,8497	0,9964	0,7879	0,9908
	0,9	0,0375	0,1420	0,7475	0,9623	0,9155	0,9943
	1,4	0,0401	0,2621	0,6315	0,8889	0,9069	0,9825
	5	0,0450	0,5557	0,1495	0,2377	0,6301	0,6146
$P_{Sin,Cos}$	0	0,0526	0,0395	0,7557	0,9837	0,6945	0,9722
	0,9	0,0560	0,2077	0,4944	0,7835	0,8048	0,9456
	1,4	0,0541	0,2917	0,3404	0,5840	0,7409	0,8606
	5	0,0509	0,4027	0,1164	0,1865	0,4804	0,4897
$P_{W,AB}$	0	0,0516	0,0379	0,7719	0,9855	0,7106	0,9751
	0,9	0,0509	0,2815	0,5131	0,8260	0,8389	0,9612
	1,4	0,0496	0,4064	0,3342	0,6106	0,7766	0,8812
	5	0,0477	0,5539	0,0743	0,0995	0,4499	0,3889
$P^*_{W,M}$	0	0,0493	0,5739	0,0457	0,0455	0,2799	0,1593
	0,5	0,0510	0,5324	0,0917	0,1367	0,5005	0,4641
	0,7	0,0513	0,4134	0,2601	0,4953	0,7294	0,8217
	1	0,0467	0,0367	0,7780	0,9893	0,7019	0,9796
$P_{W,M}$	0	0,0486	0,0334	0,8353	0,9947	0,7782	0,9885
	0,9	0,0520	0,2842	0,5736	0,8652	0,8815	0,9740
	1,4	0,0495	0,4145	0,3774	0,6492	0,8159	0,9061
	5	0,0482	0,5570	0,0779	0,1048	0,4670	0,4027
$P_{W\text{-}vdW,Log\text{-}K}$	0	0,0244	0,0121	0,8069	0,9932	0,7289	0,9852
	0,9	0,0317	0,3608	0,4221	0,6910	0,8388	0,9255
	1,4	0,0361	0,4804	0,2422	0,4137	0,7316	0,7757
	5	0,0427	0,5625	0,0532	0,0573	0,3870	0,2819
F_W		0,0209	0,2752	0,3835	0,8822	0,5074	0,9030
F^*_W		0,0355	0,3081	0,5442	0,9500	0,6567	0,9612
G_l		0,0399	0,4315	0,4227	0,7649	0,5595	0,7813
G_r		0,0494	0,4540	0,6833	0,9799	0,7801	0,9851
KS		0,0386	0,4571	0,1548	0,4308	0,4175	0,5819
BE		0,0450	0,3590	0,3986	0,8172	0,5334	0,8514
B		0,0428	0,3208	0,4743	0,9217	0,5894	0,9402
B*		0,0455	0,3293	0,4853	0,9255	0,5999	0,9434
B**		0,0479	0,3377	0,5256	0,9390	0,6766	0,9573
B***		0,0509	0,3526	0,5296	0,9419	0,6816	0,9584
t		0,0490	0,5443	0,0309	0,0249	0,2165	0,1000
t_r		0,0493	0,5739	0,0457	0,0455	0,2799	0,1593
t_W		0,0486	0,5420	0,0534	0,0518	0,2910	0,1686
t_{W_r}		0,0486	0,5734	0,0635	0,0719	0,3258	0,2089
W		0,0493	0,5739	0,0457	0,0455	0,2799	0,1593
M		0,0467	0,0367	0,7780	0,9893	0,7019	0,9796

TABLEAU 2.2.7

Niveau expérimental et puissances expérimentales pour deux échantillons de lois logistiques de tailles m=36 et n=24.

		Hypothèse alternative H1: G(x) = F(ax+b) où F(x) ~ L(0,1)					
			Différences dans les paramètres de:				
			position seulement	dispersion seulement		position et dispersion	
Tests	l, c	L(0,1)	L(1,1)	L(0,2)	L(0,3)	L(1,2)	L(1,3)
$T_{W,AB}$		0,0458	0,4544	0,6167	0,9468	0,7401	0,9554
$T_{W,M}$		0,0440	0,4531	0,7036	0,9761	0,8016	0,9808
$T_{vdW,K}$		0,0408	0,4358	0,7572	0,9871	0,8369	0,9901
$T_{W,Log}$		0,0427	0,4501	0,7501	0,9869	0,8343	0,9893
$T_{Sin,Cos}$		0,0465	0,2993	0,5847	0,9325	0,6666	0,9400
$P_{vdW,K}$	0	0,0514	0,0710	0,9149	0,9982	0,9041	0,9974
	0,9	0,0506	0,4325	0,7547	0,9439	0,9447	0,9893
	1,4	0,0470	0,5297	0,5785	0,8212	0,9029	0,9543
	5	0,0368	0,5776	0,1268	0,1770	0,5366	0,4624
$P_{W,Log}$	0	0,0518	0,0723	0,9127	0,9978	0,9068	0,9975
	0,9	0,0546	0,3213	0,8375	0,9834	0,9533	0,9973
	1,4	0,0557	0,4434	0,7435	0,9392	0,9417	0,9885
	5	0,0447	0,6137	0,2288	0,3639	0,6839	0,6785
$P_{Sin,Cos}$	0	0,0516	0,0582	0,7556	0,9762	0,7571	0,9740
	0,9	0,0556	0,3068	0,4985	0,8017	0,7767	0,9212
	1,4	0,0535	0,3749	0,3390	0,5948	0,6854	0,8145
	5	0,0509	0,4232	0,0977	0,1553	0,3797	0,3718
$P_{W,AB}$	0	0,0531	0,0614	0,7837	0,9826	0,7853	0,9806
	0,9	0,0518	0,4063	0,5358	0,8196	0,8450	0,9430
	1,4	0,0505	0,5005	0,3686	0,6168	0,7760	0,8561
	5	0,0462	0,5722	0,1057	0,1551	0,4786	0,4084
$P^*_{W,M}$	0	0,0456	0,5627	0,0760	0,0902	0,3050	0,1979
	0,5	0,0481	0,5509	0,1287	0,1999	0,5271	0,4880
	0,7	0,0506	0,4748	0,3035	0,5444	0,7364	0,8127
	1	0,0474	0,0424	0,7775	0,9868	0,7703	0,9844
$P_{W,M}$	0	0,0518	0,0603	0,8630	0,9935	0,8543	0,9937
	0,9	0,0526	0,4187	0,6214	0,8799	0,8979	0,9689
	1,4	0,0491	0,5147	0,4382	0,7003	0,8259	0,9047
	5	0,0459	0,5782	0,1151	0,1701	0,5024	0,4389
$P_{W\text{-}vdW,Log\text{-}K}$	0	0,0432	0,0578	0,8969	0,9974	0,8859	0,9964
	0,9	0,0448	0,5147	0,5742	0,8196	0,8987	0,9549
	1,4	0,0418	0,5803	0,3750	0,5893	0,8054	0,8519
	5	0,0398	0,5848	0,0962	0,1286	0,4619	0,3670
F_W		0,0210	0,2714	0,5195	0,9377	0,6452	0,9476
F^*_W		0,0417	0,3325	0,7197	0,9804	0,8055	0,9856
G_l		0,0370	0,4355	0,6921	0,9464	0,7966	0,9513
G_r		0,0458	0,4626	0,7116	0,9777	0,8089	0,9816
KS		0,0362	0,4525	0,1845	0,4709	0,4277	0,5826
BE		0,0468	0,3579	0,3599	0,7413	0,5053	0,7920
B		0,0402	0,3175	0,6079	0,9609	0,7219	0,9677
B*		0,0412	0,3253	0,6179	0,9629	0,7287	0,9695
B**		0,0445	0,3353	0,6371	0,9685	0,7517	0,9753
B***		0,0452	0,3491	0,6364	0,9688	0,7561	0,9753
l		0,0473	0,5386	0,0866	0,1023	0,3171	0,2134
l_r		0,0461	0,5627	0,0760	0,0902	0,3050	0,1979
l_W		0,0481	0,5339	0,0516	0,0498	0,2328	0,1334
l_{Wr}		0,0466	0,5637	0,0595	0,0637	0,2635	0,1557
W		0,0456	0,5627	0,0760	0,0902	0,3050	0,1979
M		0,0474	0,0424	0,7775	0,9868	0,7703	0,9844

TABLEAU 2.2.8

Niveau expérimental et puissances expérimentales pour deux échantillons de lois logistiques de tailles m=n=36.

		Hypothèse alternative H1: G(x) = F(ax+b) où F(x) ~ L(0,1)					
			Différences dans les paramètres de:				
			position seulement	dispersion seulement		position et dispersion	
Tests	l, c	L(0,1)	L(1,1)	L(0,2)	L(0,3)	L(1,2)	L(1,3)
$T_{W,AB}$		0,0453	0,5504	0,7308	0,9819	0,8387	0,9881
$T_{W,M}$		0,0452	0,5472	0,8013	0,9942	0,8848	0,9962
$T_{vdW,K}$		0,0415	0,5338	0,8254	0,9972	0,9003	0,9984
$T_{W,Log}$		0,0437	0,5458	0,8279	0,9974	0,9048	0,9982
$T_{Sin,Cos}$		0,0466	0,3732	0,7127	0,9798	0,7945	0,9848
$P_{vdW,K}$	0	0,0439	0,0309	0,9379	0,9992	0,9134	0,9980
	0,9	0,0431	0,3824	0,7858	0,9609	0,9667	0,9959
	1,4	0,0416	0,5258	0,5980	0,8474	0,9334	0,9769
	5	0,0349	0,6535	0,1036	0,1408	0,5769	0,4928
$P_{W,Log}$	0	0,0458	0,0356	0,9416	0,9993	0,9197	0,9986
	0,9	0,0496	0,2572	0,8774	0,9922	0,9747	0,9996
	1,4	0,0496	0,4028	0,7830	0,9592	0,9679	0,9957
	5	0,0439	0,6729	0,2205	0,3575	0,7530	0,7427
$P_{Sin,Cos}$	0	0,0486	0,0429	0,8392	0,9936	0,8197	0,9923
	0,9	0,0543	0,2984	0,5747	0,8639	0,8674	0,9706
	1,4	0,0521	0,3896	0,3977	0,6634	0,7952	0,9011
	5	0,0511	0,4929	0,1168	0,1873	0,4985	0,5041
$P_{W,AB}$	0	0,0499	0,0435	0,8560	0,9950	0,8393	0,9938
	0,9	0,0520	0,4038	0,6060	0,8888	0,9124	0,9809
	1,4	0,0500	0,5373	0,4131	0,6968	0,8565	0,9282
	5	0,0429	0,6635	0,0972	0,1402	0,5481	0,4816
$P^*_{W,M}$	0	0,0441	0,6686	0,0610	0,0656	0,3459	0,2093
	0,5	0,0458	0,6427	0,1228	0,2007	0,6076	0,5718
	0,7	0,0507	0,5334	0,3424	0,6087	0,8283	0,8946
	1	0,0464	0,0363	0,8698	0,9973	0,8426	0,9956
$P_{W,M}$	0	0,0491	0,0405	0,9120	0,9987	0,8946	0,9974
	0,9	0,0512	0,4113	0,6873	0,9270	0,9423	0,9904
	1,4	0,0492	0,5421	0,4820	0,7599	0,8920	0,9533
	5	0,0439	0,6668	0,1060	0,1540	0,5722	0,5074
$P_{W\text{-}vdW,Log\text{-}K}$	0	0,0372	0,0262	0,9259	0,9992	0,8995	0,9978
	0,9	0,0398	0,5109	0,6019	0,8523	0,9335	0,9772
	1,4	0,0387	0,6136	0,3724	0,5978	0,8588	0,8956
	5	0,0396	0,6741	0,0816	0,0988	0,5095	0,4024
F_W		0,0219	0,3719	0,6188	0,9771	0,7456	0,9842
F^*_W		0,0396	0,4075	0,7624	0,9912	0,8515	0,9945
G_l		0,0369	0,5306	0,7031	0,9477	0,8160	0,9504
G_r		0,0468	0,5568	0,8077	0,9942	0,8883	0,9967
KS		0,0349	0,5384	0,2060	0,5741	0,5171	0,7068
BE		0,0505	0,4678	0,4932	0,8898	0,6479	0,9172
B		0,0413	0,4134	0,6895	0,9847	0,7964	0,9908
B*		0,0427	0,4200	0,6957	0,9855	0,8015	0,9913
B**		0,0463	0,4312	0,7177	0,9874	0,8343	0,9926
B***		0,0471	0,4409	0,7242	0,9884	0,8363	0,9927
l		0,0461	0,6413	0,0542	0,0525	0,3168	0,1786
l_r		0,0450	0,6739	0,0623	0,0670	0,3500	0,2130
l_W		0,0458	0,6410	0,0522	0,0501	0,3123	0,1737
l_{Wr}		0,0450	0,6739	0,0620	0,0660	0,3496	0,2101
W		0,0441	0,6686	0,0610	0,0656	0,3459	0,2093
M		0,0464	0,0363	0,8698	0,9973	0,8426	0,9956

TABLEAU 2.2.9

Niveau et puissances des différents tests pour deux échantillons de lois Cauchy

Tailles m=n=24

		Hypothèse alternative H1: $G(x) = F(ax+b)$ où $F(x) \sim C(0,1)$							
			Différences dans les paramètres de:						
			position seulement		dispersion seulement			position et dispersion	
Tests	l, c	C(0,1)	C(1,1)	C(2,1)	C(0,2)	C(0,4)	C(1,3)	C(2,2)	C(2,4)
$T_{W,AB}$		0,0465	0,3428	0,8113	0,2624	0,7937	0,6380	0,6997	0,8592
$T_{W,M}$		0,0458	0,3387	0,8051	0,2497	0,7708	0,6184	0,6891	0,8462
$T_{vdW,K}$		0,0440	0,2719	0,6894	0,1900	0,6350	0,4955	0,5633	0,7210
$T_{W,Log}$		0,0438	0,3353	0,8001	0,2148	0,6939	0,5547	0,6621	0,7960
$T_{Sin,Cos}$		0,0469	0,4913	0,9512	0,2799	0,8189	0,6985	0,8436	0,9135
$P_{vdW,K}$	0	0,0406	0,0454	0,0545	0,3416	0,8056	0,6248	0,3046	0,7589
	0,9	0,0447	0,2327	0,4753	0,2432	0,6092	0,6546	0,6913	0,8579
	1,4	0,0437	0,3035	0,6201	0,1750	0,4378	0,5714	0,7275	0,8015
	2,9	0,0372	0,3488	0,7461	0,0800	0,1634	0,3488	0,6811	0,5838
	5	0,0376	0,3417	0,7602	0,0540	0,0814	0,2332	0,6210	0,4367
$P_{W,Log}$	0	0,0466	0,0543	0,0659	0,3911	0,8545	0,6817	0,3466	0,8093
	0,9	0,0507	0,2038	0,3917	0,3278	0,7697	0,7544	0,6944	0,9133
	1,4	0,0507	0,2891	0,5735	0,2744	0,6624	0,7245	0,7788	0,9064
	2,9	0,0494	0,4167	0,8046	0,1520	0,3450	0,5556	0,8207	0,8042
	5	0,0487	0,4441	0,8585	0,0965	0,1860	0,4065	0,7857	0,6637
$P_{Sin,Cos}$	0	0,0528	0,0696	0,0950	0,4180	0,9059	0,7318	0,3610	0,8426
	0,9	0,0566	0,3802	0,7407	0,2688	0,6420	0,7804	0,8783	0,9490
	1,4	0,0531	0,4849	0,8818	0,1913	0,4663	0,6933	0,9134	0,9111
	2,9	0,0528	0,5804	0,9576	0,1112	0,2320	0,4996	0,9040	0,7686
	5	0,0538	0,5996	0,9689	0,0937	0,1692	0,4040	0,8775	0,6744
$P_{W,AB}$	0	0,0522	0,0658	0,0961	0,4159	0,9032	0,7286	0,3676	0,8435
	0,9	0,0538	0,2782	0,5841	0,2607	0,6606	0,7306	0,7822	0,9207
	1,4	0,0528	0,3460	0,7217	0,1763	0,4605	0,6204	0,8054	0,8607
	2,9	0,0492	0,4080	0,8340	0,0887	0,1763	0,3853	0,7669	0,6491
	5	0,0478	0,4170	0,8560	0,0659	0,1048	0,2791	0,7190	0,5122
$P^*_{W,M}$	0	0,0484	0,4162	0,8620	0,0519	0,0607	0,1484	0,6103	0,3139
	0,3	0,0498	0,4174	0,8607	0,0569	0,0722	0,2062	0,6674	0,4154
	0,6	0,0518	0,3732	0,8056	0,0865	0,1887	0,3897	0,7519	0,6589
	0,7	0,0514	0,3272	0,7311	0,1216	0,3223	0,5085	0,7657	0,7834
	1	0,0500	0,0591	0,0818	0,3235	0,8385	0,6320	0,2791	0,7782
$P_{W,M}$	0	0,0519	0,0646	0,0837	0,4234	0,8988	0,7285	0,3703	0,8458
	0,9	0,0515	0,2834	0,5940	0,2657	0,6602	0,7312	0,7934	0,9180
	1,4	0,0508	0,3543	0,7355	0,1787	0,4615	0,6237	0,8152	0,8601
	2,9	0,0502	0,4147	0,8422	0,0892	0,1794	0,3895	0,7701	0,6537
	5	0,0484	0,4215	0,8589	0,0660	0,1062	0,2819	0,7209	0,5157
$P_{W\text{-}vdW,Log\text{-}K}$	0	0,0335	0,0391	0,0498	0,3266	0,8020	0,6157	0,2874	0,7536
	0,9	0,0433	0,3167	0,6562	0,1815	0,4604	0,6003	0,7626	0,8326
	1,4	0,0418	0,3740	0,7661	0,1263	0,2858	0,4827	0,7657	0,7400
	2,9	0,0432	0,3970	0,8210	0,0666	0,1134	0,2935	0,6971	0,5189
	5	0,0423	0,3907	0,8253	0,0535	0,0693	0,2122	0,6466	0,4166
F_W		0,0157	0,2792	0,8449	0,1158	0,5834	0,4492	0,6523	0,7504
F^*_W		0,0370	0,3776	0,8998	0,2203	0,7483	0,6173	0,7711	0,8678
G_l		0,0138	0,0964	0,3329	0,0207	0,0449	0,0552	0,1835	0,1045
G_r		0,0499	0,3494	0,8133	0,2593	0,7800	0,6304	0,6985	0,8547
KS		0,0287	0,4311	0,9163	0,0784	0,2618	0,2960	0,7179	0,5791
BE		0,0584	0,3811	0,8775	0,2212	0,6839	0,5541	0,7153	0,7976
B		0,0375	0,3666	0,8915	0,1848	0,6911	0,5575	0,7369	0,8299
B*		0,0403	0,3745	0,8949	0,1924	0,6999	0,5682	0,7441	0,8372
B**		0,0525	0,3655	0,8777	0,1534	0,4588	0,4108	0,6872	0,6486
B***		0,4905	0,6436	0,8938	0,5914	0,8508	0,7753	0,8369	0,9057
t		0,0204	0,0760	0,2083	0,0212	0,0210	0,0324	0,1142	0,0538
t_r		0,0498	0,4254	0,8662	0,0539	0,0627	0,1535	0,6175	0,3201
t_W		0,0194	0,0742	0,2042	0,0194	0,0187	0,0298	0,1117	0,0501
t_{Wr}		0,0498	0,4254	0,8662	0,0539	0,0621	0,1527	0,6168	0,3176
W		0,0484	0,4162	0,8620	0,0519	0,0607	0,1484	0,6103	0,3139
M		0,0500	0,0591	0,0818	0,3235	0,8385	0,6320	0,2791	0,7782

TABLEAU 2.2.10

Niveau et puissances des différents tests pour deux échantillons de lois Cauchy

Tailles m=24 et n=36

		Hypothèse alternative H1: $G(x) = F(ax+b)$ où $F(x) \sim C(0,1)$							
			Différences dans les paramètres de:						
			position seulement		dispersion seulement			Position et dispersion	
Tests	l, c	C(0,1)	C(1,1)	C(2,1)	C(0,2)	C(0,4)	C(1,3)	C(2,2)	C(2,4)
$T_{W,AB}$		0,0485	0,4050	0,8871	0,3065	0,8678	0,7104	0,7372	0,8968
$T_{W,M}$		0,0476	0,3964	0,8787	0,2823	0,8295	0,6802	0,7394	0,8861
$T_{vdW,K}$		0,0448	0,3152	0,7706	0,1921	0,6612	0,5173	0,6049	0,7501
$T_{W,Log}$		0,0466	0,3929	0,8751	0,2278	0,7356	0,5999	0,7232	0,8319
$T_{Sin,Cos}$		0,0507	0,5809	0,9788	0,3315	0,8872	0,7868	0,9122	0,9590
$P_{vdW,K}$	0	0,0297	0,0257	0,0247	0,3230	0,8062	0,6052	0,2292	0,7411
	0,9	0,0320	0,1973	0,4021	0,2299	0,6073	0,6663	0,6747	0,8661
	1,4	0,0327	0,2848	0,5977	0,1593	0,4176	0,5871	0,7307	0,8222
	2,9	0,0358	0,3714	0,7766	0,0728	0,1321	0,3617	0,7244	0,6177
	5	0,0376	0,3820	0,8068	0,0466	0,0607	0,2426	0,6752	0,4703
$P_{W,Log}$	0	0,0382	0,0353	0,0371	0,3906	0,8683	0,6811	0,2720	0,8016
	0,9	0,0407	0,1600	0,2892	0,3256	0,7812	0,7713	0,6668	0,9230
	1,4	0,0422	0,2587	0,5001	0,2718	0,6719	0,7486	0,7692	0,9226
	2,9	0,0441	0,4297	0,8074	0,1440	0,3346	0,5929	0,8485	0,8430
	5	0,0453	0,4834	0,8839	0,0870	0,1659	0,4445	0,8323	0,7182
$P_{Sin,Cos}$	0	0,0510	0,0640	0,1154	0,4636	0,9415	0,7688	0,2837	0,8464
	0,9	0,0522	0,3555	0,6363	0,2925	0,6934	0,8522	0,8845	0,9775
	1,4	0,0539	0,4911	0,8395	0,2070	0,5063	0,7794	0,9360	0,9578
	2,9	0,0537	0,6231	0,9595	0,1171	0,2480	0,5983	0,9511	0,8610
	5	0,0525	0,6552	0,9766	0,0921	0,1763	0,5005	0,9414	0,7871
$P_{W,AB}$	0	0,0505	0,0614	0,1098	0,4691	0,9415	0,7680	0,2898	0,8483
	0,9	0,0500	0,2472	0,4652	0,2879	0,7285	0,7918	0,7672	0,9432
	1,4	0,0497	0,3392	0,6789	0,1913	0,5139	0,6880	0,8204	0,9097
	2,9	0,0475	0,4392	0,8563	0,0823	0,1734	0,4338	0,8130	0,7222
	5	0,0477	0,4697	0,8943	0,0583	0,0906	0,3171	0,7821	0,5815
$P^*_{W,M}$	0	0,0495	0,4929	0,9236	0,0476	0,0452	0,1634	0,7011	0,3550
	0,3	0,0484	0,4817	0,9093	0,0475	0,0561	0,2352	0,7516	0,4694
	0,6	0,0501	0,4178	0,8376	0,0821	0,1863	0,4447	0,8091	0,7314
	0,7	0,0509	0,3546	0,7417	0,1308	0,3470	0,5812	0,8115	0,8427
	1	0,0481	0,0614	0,1112	0,3760	0,8923	0,6881	0,2430	0,8053
$P_{W,M}$	0	0,0496	0,0527	0,0797	0,4520	0,9273	0,7531	0,3015	0,8507
	0,9	0,0500	0,2648	0,5177	0,2821	0,7005	0,7812	0,7876	0,9408
	1,4	0,0488	0,3574	0,7135	0,1846	0,4864	0,6816	0,8313	0,9027
	2,9	0,0466	0,4523	0,8697	0,0818	0,1667	0,4348	0,8196	0,7168
	5	0,0469	0,4787	0,8999	0,0576	0,0879	0,3186	0,7878	0,5790
$P_{W\text{-}vdW,Log\text{-}K}$	0	0,0263	0,0228	0,0229	0,3110	0,8113	0,6010	0,2174	0,7406
	0,9	0,0336	0,3042	0,6282	0,1711	0,4494	0,6270	0,7716	0,8552
	1,4	0,0372	0,3869	0,7720	0,1136	0,2657	0,5116	0,7959	0,7749
	2,9	0,0412	0,4392	0,8625	0,0578	0,0898	0,3119	0,7559	0,5663
	5	0,0433	0,4440	0,8743	0,0455	0,0519	0,2337	0,7162	0,4585
F_W		0,0220	0,3808	0,9275	0,1520	0,6987	0,5594	0,7663	0,8539
F^*_W		0,0355	0,4624	0,9526	0,2384	0,8091	0,6875	0,8432	0,9190
G_l		0,0169	0,0976	0,3385	0,0100	0,0128	0,0245	0,1393	0,0524
G_r		0,0500	0,4060	0,8838	0,2906	0,8352	0,6891	0,7468	0,8900
KS		0,0396	0,5510	0,9677	0,1023	0,3648	0,4110	0,8396	0,7295
BE		0,0470	0,4217	0,9154	0,2268	0,7334	0,6101	0,7727	0,8533
B		0,0401	0,4548	0,9484	0,2153	0,7747	0,6469	0,8207	0,9013
B*		0,0425	0,4623	0,9509	0,2217	0,7817	0,6568	0,8264	0,9049
B**		0,1220	0,5432	0,9527	0,1520	0,4309	0,4502	0,8229	0,7187
B***		0,5503	0,7106	0,9435	0,6724	0,9115	0,8497	0,8961	0,9560
t		0,0224	0,0748	0,2059	0,0153	0,0101	0,0198	0,0950	0,0291
t_r		0,0495	0,4929	0,9236	0,0476	0,0452	0,1634	0,7011	0,3550
t_W		0,0201	0,0715	0,2070	0,0217	0,0218	0,0299	0,1143	0,0534
t_{Wr}		0,0499	0,4939	0,9203	0,0574	0,0672	0,1994	0,7294	0,4105
W		0,0495	0,4929	0,9236	0,0476	0,0452	0,1634	0,7011	0,3550
M		0,0481	0,0614	0,1112	0,3760	0,8923	0,6881	0,2430	0,8053

TABLEAU 2.2.11

Niveau et puissances des différents tests pour deux échantillons de lois Cauchy

Tailles m=36 et n=24

Tests	*l, c*	Hypothèse alternative H1: G(x) = F(ax+b) où F(x) ~ C(0,1)							
			Différences dans les paramètres de:						
			Position seulement		Dispersion seulement			Position et Dispersion	
		C(0,1)	C(1,1)	C(2,1)	C(0,2)	C(0,4)	C(1,3)	C(2,2)	C(2,4)
$T_{W,AB}$		0,0492	0,4055	0,8881	0,3285	0,8826	0,7510	0,8204	0,9365
$T_{W,M}$		0,0486	0,4013	0,8842	0,3231	0,8773	0,7434	0,8071	0,9283
$T_{vdW,K}$		0,0445	0,3151	0,7749	0,2614	0,7678	0,6175	0,6842	0,8435
$T_{W,Log}$		0,0471	0,3959	0,8790	0,2829	0,8129	0,6780	0,7766	0,8922
$T_{Sin,Cos}$		0,0486	0,5757	0,9788	0,3337	0,8919	0,7876	0,9105	0,9573
$P_{vdW,K}$	0	0,0663	0,0843	0,1284	0,4833	0,9212	0,7884	0,4994	0,8984
	0,9	0,0634	0,3204	0,6502	0,3493	0,7626	0,7878	0,8296	0,9420
	1,4	0,0591	0,3926	0,7677	0,2549	0,5915	0,7040	0,8472	0,9025
	2,9	0,0426	0,4334	0,8509	0,1201	0,2496	0,4576	0,8000	0,7164
	5	0,0382	0,4203	0,8554	0,0792	0,1279	0,3192	0,7327	0,5565
$P_{W,Log}$	0	0,0674	0,0898	0,1434	0,5146	0,9430	0,8191	0,5293	0,9205
	0,9	0,0649	0,2851	0,5800	0,4361	0,8765	0,8671	0,8378	0,9711
	1,4	0,0625	0,3788	0,7455	0,3679	0,7893	0,8371	0,8885	0,9657
	2,9	0,0557	0,5071	0,9073	0,2003	0,4648	0,6664	0,9076	0,8922
	5	0,0487	0,5308	0,9335	0,1262	0,2575	0,5013	0,8737	0,7644
$P_{Sin,Cos}$	0	0,0567	0,0914	0,1701	0,4943	0,9556	0,8399	0,5467	0,9355
	0,9	0,0536	0,4889	0,9061	0,3121	0,7254	0,8448	0,9521	0,9753
	1,4	0,0510	0,5987	0,9683	0,2158	0,5314	0,7538	0,9608	0,9397
	2,9	0,0507	0,6813	0,9899	0,1170	0,2491	0,5328	0,9380	0,7942
	5	0,0509	0,6920	0,9913	0,0913	0,1662	0,4230	0,9100	0,6856
$P_{W,AB}$	0	0,0569	0,0944	0,1807	0,5044	0,9577	0,8421	0,5604	0,9376
	0,9	0,0543	0,3810	0,7845	0,3093	0,7441	0,8148	0,9001	0,9645
	1,4	0,0520	0,4523	0,8760	0,2113	0,5373	0,7053	0,9056	0,9212
	2,9	0,0477	0,4993	0,9259	0,1081	0,2196	0,4564	0,8596	0,7322
	5	0,0468	0,5016	0,9314	0,0806	0,1327	0,3436	0,8082	0,6019
$P^*_{W,M}$	0	0,0494	0,4904	0,9238	0,0647	0,0832	0,1867	0,6912	0,3754
	0,3	0,0497	0,4875	0,9261	0,0697	0,0965	0,2595	0,7516	0,4893
	0,6	0,0490	0,4563	0,9021	0,1082	0,2416	0,4668	0,8486	0,7492
	0,7	0,0503	0,4076	0,8589	0,1489	0,4049	0,6006	0,8692	0,8619
	1	0,0502	0,0673	0,1062	0,3928	0,9190	0,7568	0,4318	0,8884
$P_{W,M}$	0	0,0578	0,0871	0,1541	0,5128	0,9575	0,8415	0,5452	0,9375
	0,9	0,0546	0,3715	0,7695	0,3278	0,7591	0,8240	0,8952	0,9653
	1,4	0,0509	0,4487	0,8673	0,2222	0,5593	0,7190	0,9055	0,9266
	2,9	0,0473	0,5010	0,9227	0,1116	0,2336	0,4696	0,8606	0,7427
	5	0,0468	0,5013	0,9314	0,0831	0,1378	0,3507	0,8094	0,6091
$P_{W\text{-}vdW,Log\text{-}K}$	0	0,0542	0,0728	0,1156	0,4605	0,9169	0,7771	0,4787	0,8942
	0,9	0,0550	0,4102	0,8018	0,2573	0,6062	0,7282	0,8726	0,9206
	1,4	0,0492	0,4639	0,8749	0,1741	0,4054	0,6042	0,8696	0,8484
	2,9	0,0421	0,4791	0,9030	0,0907	0,1611	0,3792	0,8012	0,6339
	5	0,0423	0,4678	0,9003	0,0706	0,1028	0,2851	0,7450	0,5100
F_W		0,0193	0,3750	0,9315	0,1846	0,7515	0,6044	0,7888	0,8799
F^*_W		0,0464	0,4605	0,9546	0,3075	0,8638	0,7460	0,8706	0,9406
G_l		0,0168	0,0969	0,3347	0,0454	0,1188	0,1143	0,2276	0,1958
G_r		0,0516	0,4090	0,8883	0,3318	0,8820	0,7495	0,8120	0,9317
KS		0,0365	0,5467	0,9684	0,1191	0,4007	0,4137	0,8325	0,7219
BE		0,0453	0,4144	0,9188	0,2218	0,7289	0,6076	0,7770	0,8520
B		0,0390	0,4530	0,9508	0,2466	0,8116	0,6783	0,8401	0,9162
B*		0,0418	0,4608	0,9529	0,2541	0,8183	0,6865	0,8463	0,9194
B**		0,1264	0,5352	0,9554	0,3375	0,7316	0,6672	0,8516	0,8642
B***		0,5530	0,7176	0,9417	0,6808	0,9227	0,8584	0,8954	0,9575
t		0,0249	0,0772	0,2060	0,0356	0,0491	0,0587	0,1390	0,0936
t_r		0,0494	0,4904	0,9238	0,0647	0,0832	0,1867	0,6912	0,3754
t_W		0,0208	0,0755	0,2079	0,0204	0,0192	0,0311	0,1102	0,0540
t_{W_r}		0,0506	0,4885	0,9195	0,0538	0,0615	0,1598	0,6595	0,3216
W		0,0494	0,4904	0,9238	0,0647	0,0832	0,1867	0,6912	0,3754
M		0,0502	0,0673	0,1062	0,3928	0,9190	0,7568	0,4318	0,8884

TABLEAU 2.2.12

Niveau et puissances des différents tests pour deux échantillons de lois Cauchy

Tailles m=n=36

Tests	*l, c*	Hypothèse alternative H1: G(x) = F(ax+b) où F(x) ~ C(0,1)							
			Différences dans les paramètres de:						
			position seulement		dispersion seulement			Position et dispersion	
		C(0,1)	C(1,1)	C(2,1)	C(0,2)	C(0,4)	C(1,3)	C(2,2)	C(2,4)
$T_{W,AB}$		0,0496	0,4900	0,9419	0,3941	0,9422	0,8377	0,8710	0,9709
$T_{W,M}$		0,0477	0,4832	0,9397	0,3760	0,9278	0,8121	0,8625	0,9646
$T_{vdW,K}$		0,0457	0,3824	0,8552	0,2805	0,8135	0,6740	0,7416	0,8801
$T_{W,Log}$		0,0480	0,4818	0,9371	0,3186	0,8645	0,7434	0,8447	0,9305
$T_{Sin,Cos}$		0,0480	0,6911	0,9943	0,4067	0,9515	0,8797	0,9636	0,9887
$P_{vdW,K}$	0	0,0469	0,0511	0,0604	0,4706	0,9276	0,7802	0,4195	0,8914
	0,9	0,0447	0,2909	0,5874	0,3370	0,7751	0,8087	0,8262	0,9548
	1,4	0,0433	0,3858	0,7561	0,2446	0,5967	0,7350	0,8654	0,9272
	2,9	0,0416	0,4720	0,8813	0,1076	0,2262	0,4964	0,8421	0,7632
	5	0,0401	0,4777	0,9021	0,0672	0,1042	0,3486	0,7936	0,6058
$P_{W,Log}$	0	0,0518	0,0583	0,0700	0,5188	0,9548	0,8302	0,4582	0,9216
	0,9	0,0497	0,2461	0,4816	0,4451	0,8939	0,8902	0,8222	0,9806
	1,4	0,0481	0,3563	0,6958	0,3713	0,8105	0,8677	0,8952	0,9790
	2,9	0,0490	0,5380	0,9168	0,1955	0,4703	0,7205	0,9347	0,9288
	5	0,0480	0,5851	0,9550	0,1166	0,2470	0,5548	0,9190	0,8292
$P_{Sin,Cos}$	0	0,0552	0,0734	0,1010	0,5602	0,9803	0,8773	0,4748	0,9430
	0,9	0,0520	0,4930	0,8676	0,3543	0,7870	0,9188	0,9666	0,9935
	1,4	0,0503	0,6326	0,9662	0,2385	0,5880	0,8480	0,9826	0,9789
	2,9	0,0504	0,7508	0,9948	0,1246	0,2831	0,6567	0,9803	0,8957
	5	0,0506	0,7745	0,9975	0,0939	0,1869	0,5432	0,9712	0,8137
$P_{W,AB}$	0	0,0551	0,0772	0,1056	0,5681	0,9802	0,8783	0,4853	0,9466
	0,9	0,0514	0,3609	0,7161	0,3491	0,8178	0,8824	0,9105	0,9854
	1,4	0,0499	0,4630	0,8603	0,2318	0,6079	0,7919	0,9301	0,9637
	2,9	0,0476	0,5570	0,9463	0,1066	0,2333	0,5341	0,9111	0,8227
	5	0,0470	0,5760	0,9602	0,0743	0,1207	0,4018	0,8789	0,6882
$P^*_{W,M}$	0	0,0459	0,5814	0,9669	0,0561	0,0629	0,2054	0,7894	0,4241
	0,3	0,0474	0,5775	0,9648	0,0607	0,0786	0,3034	0,8415	0,5656
	0,6	0,0490	0,5202	0,9334	0,1080	0,2568	0,5520	0,9050	0,8367
	0,7	0,0497	0,4566	0,8798	0,1641	0,4548	0,6915	0,9153	0,9240
	1	0,0538	0,0654	0,0879	0,4648	0,9596	0,8182	0,3946	0,9140
$P_{W,M}$	0	0,0545	0,0680	0,0901	0,5589	0,9772	0,8721	0,4783	0,9435
	0,9	0,0498	0,3679	0,7228	0,3525	0,8105	0,8794	0,9104	0,9846
	1,4	0,0500	0,4682	0,8662	0,2386	0,6079	0,7907	0,9312	0,9622
	2,9	0,0471	0,5624	0,9488	0,1080	0,2358	0,5393	0,9125	0,8224
	5	0,0474	0,5799	0,9609	0,0762	0,1212	0,4041	0,8805	0,6901
$P_{W\text{-}vdW,Log\text{-}K}$	0	0,0396	0,0427	0,0544	0,4570	0,9283	0,7768	0,4010	0,8897
	0,9	0,0419	0,4090	0,7897	0,2517	0,6198	0,7663	0,8921	0,9453
	1,4	0,0431	0,4929	0,8909	0,1614	0,3963	0,6474	0,9021	0,8894
	2,9	0,0440	0,5439	0,9393	0,0820	0,1381	0,4214	0,8588	0,6972
	5	0,0429	0,5429	0,9436	0,0599	0,0809	0,3174	0,8211	0,5741
F_W		0,0227	0,5029	0,9772	0,2351	0,8565	0,7288	0,8924	0,9485
F^*_W		0,0396	0,5775	0,9848	0,3382	0,9191	0,8195	0,9328	0,9752
G_l		0,0136	0,0983	0,3447	0,0199	0,0488	0,0609	0,1924	0,1179
G_r		0,0505	0,4917	0,9410	0,3840	0,9311	0,8174	0,8662	0,9661
KS		0,0360	0,6446	0,9894	0,1274	0,4787	0,5099	0,9085	0,8259
BE		0,0513	0,5475	0,9749	0,2958	0,8563	0,7396	0,8816	0,9370
B		0,0407	0,5673	0,9840	0,2974	0,8922	0,7852	0,9188	0,9662
B*		0,0421	0,5745	0,9848	0,3027	0,8962	0,7898	0,9219	0,9669
B**		0,0569	0,5575	0,9825	0,2119	0,5914	0,5685	0,8731	0,7875
B***		0,5940	0,7740	0,9786	0,7427	0,9624	0,9156	0,9460	0,9848
t		0,0204	0,0751	0,2082	0,0223	0,0209	0,0337	0,1143	0,0565
t_r		0,0468	0,5866	0,9678	0,0571	0,0645	0,2090	0,7929	0,4288
t_W		0,0195	0,0737	0,2052	0,0215	0,0194	0,0324	0,1119	0,0530
t_{W_r}		0,0468	0,5866	0,9678	0,0571	0,0640	0,2087	0,7927	0,4266
W		0,0459	0,5814	0,9669	0,0561	0,0629	0,2054	0,7894	0,4241
M		0,0538	0,0654	0,0879	0,4648	0,9596	0,8182	0,3946	0,9140

TABLEAU 2.2.13

Niveau expérimental et puissances expérimentales pour deux échantillons de lois exponentielles de tailles m=n=24.

Tests	l, c	Hypothèse alternative H_1: $G(x) = F(ax+b)$ où $F(x) \sim E(0,1)$					
			Différences dans les paramètres de:				
			position seulement		dispersion seulement		position et dispersion
		E(0,1)	E(0,5,1)	E(1,1)	E(0,2)	E(0,3)	E(1,2)
$T_{W,AB}$		0,0495	0,7975	0,9973	0,8646	0,9891	1,0000
$T_{W,M}$		0,0476	0,8288	0,9981	0,9195	0,9959	1,0000
$T_{vdW,K}$		0,0460	0,8338	0,9983	0,9285	0,9966	1,0000
$T_{W,Log}$		0,0471	0,8091	0,9975	0,9252	0,9971	1,0000
$T_{Sin,Cos}$		0,0506	0,5220	0,9586	0,8264	0,9838	1,0000
$P_{vdW,K}$	0	0,0411	0,0057	0,0027	0,9364	0,9881	0,0000
	1,4	0,0380	0,1949	0,6046	0,2114	0,2936	0,9735
	5	0,0352	0,5319	0,9346	0,0455	0,0475	0,9999
$P_{W,Log}$	0	0,0498	0,0395	0,0222	0,9533	0,9930	0,0012
	1,4	0,0468	0,0631	0,3253	0,4840	0,6175	0,8938
	5	0,0457	0,4528	0,9053	0,0622	0,0750	0,9998
$P_{Sin,Cos}$	0	0,0565	0,3244	0,3850	0,9163	0,9923	0,0671
	1,4	0,0532	0,0661	0,4102	0,2933	0,3349	0,9765
	5	0,0531	0,2286	0,8083	0,1026	0,1704	0,9999
$P_{W,AB}$	0	0,0551	0,2716	0,3349	0,9138	0,9916	0,0651
	1,4	0,0494	0,1767	0,5464	0,1616	0,2491	0,9725
	5	0,0462	0,5164	0,9351	0,0903	0,1123	0,9999
$P^*_{W,M}$	0	0,0482	0,6629	0,9829	0,2203	0,3025	1,0000
	0,5	0,0496	0,4501	0,9093	0,0838	0,0998	0,9998
	1	0,0528	0,4058	0,3631	0,9165	0,9896	0,0537
$P_{W,M}$	0	0,0553	0,2361	0,1969	0,9539	0,9944	0,0191
	1,4	0,0499	0,1823	0,6026	0,2010	0,2853	0,9832
	5	0,0468	0,5162	0,9391	0,0886	0,1124	0,9999
$P_{W\text{-}vdW,Log\text{-}K}$	0	0,0361	0,0106	0,0062	0,9314	0,9880	0,0001
	1,4	0,0387	0,3271	0,7998	0,0925	0,1121	0,9963
	5	0,0424	0,5840	0,9574	0,0872	0,1064	1,0000
F_W		0,0158	0,6330	0,9889	0,7822	0,9784	1,0000
F^*_W		0,0383	0,5939	0,9852	0,9253	0,9966	1,0000
G_t		0,0342	0,6379	0,9912	0,6084	0,8270	1,0000
G_r		0,0519	0,8364	0,9982	0,9246	0,9968	1,0000
KS		0,0283	0,6708	0,9958	0,5715	0,8557	1,0000
BE		0,0592	0,7111	0,9943	0,7565	0,9620	1,0000
B		0,0384	0,7301	0,9939	0,8773	0,9921	1,0000
B*		0,0404	0,7434	0,9945	0,8861	0,9925	1,0000
B**		0,2192	0,6094	0,9844	0,8596	0,9928	1,0000
B***		0,2436	0,6168	0,9902	0,8773	0,9949	1,0000
t		0,0475	0,4298	0,9124	0,0613	0,0758	0,9999
t_r		0,0503	0,6720	0,9839	0,2267	0,3095	1,0000
t_W		0,0454	0,4281	0,9111	0,0601	0,0734	0,9999
t_{Wr}		0,0503	0,6714	0,9836	0,2230	0,3032	1,0000
W		0,0482	0,6629	0,9829	0,2203	0,3025	1,0000
M		0,0528	0,4058	0,3631	0,9165	0,9896	0,0537

TABLEAU 2.2.14

Niveau expérimental et puissances expérimentales pour deux échantillons de lois exponentielles de tailles m=24 et n=36.

Tests	l, c	Hypothèse alternative H_1: $G(x) = F(ax+b)$ où $F(x) \sim E(0,1)$					
			Différences dans les paramètres de:				
			position seulement		dispersion seulement		position et dispersion
		E(0,1)	E(0,5,1)	E(1,1)	E(0,2)	E(0,3)	E(1,2)
$T_{W,AB}$		0,0497	0,8571	0,9986	0,9349	0,997	1,0000
$T_{W,M}$		0,0497	0,8936	0,9991	0,9675	0,9992	1,0000
$T_{vdW,K}$		0,0452	0,9309	0,9996	0,9578	0,9990	1,0000
$T_{W,Log}$		0,0479	0,9015	0,9992	0,9623	0,9991	1,0000
$T_{Sin,Cos}$		0,0504	0,5782	0,9700	0,9150	0,9967	1,0000
$P_{vdW,K}$	0	0,0299	0,0761	0,0611	0,9364	0,9881	0,0082
	1,4	0,0327	0,1352	0,5090	0,1679	0,2304	0,9517
	5	0,0377	0,5966	0,9564	0,0360	0,0363	1,0000
$P_{W,Log}$	0	0,0380	0,1897	0,1953	0,9601	0,9929	0,0424
	1,4	0,0395	0,0203	0,1238	0,4595	0,5895	0,6829
	5	0,0457	0,4486	0,9098	0,0467	0,0528	0,9999
$P_{Sin,Cos}$	0	0,0527	0,4918	0,8332	0,9537	0,9947	0,7977
	1,4	0,0515	0,0382	0,1640	0,2853	0,2994	0,8551
	5	0,0504	0,1572	0,6969	0,1221	0,2322	0,9978
$P_{W,AB}$	0	0,0512	0,4548	0,7706	0,9521	0,9959	0,8222
	1,4	0,0493	0,1575	0,4842	0,1606	0,2618	0,9462
	5	0,0455	0,5839	0,9570	0,0831	0,1030	1,0000
$P^*_{W,M}$	0	0,0498	0,7392	0,9925	0,2322	0,3220	1,0000
	0,5	0,0477	0,4974	0,9315	0,0743	0,0915	1,0000
	1	0,0509	0,6153	0,8224	0,9518	0,9923	0,6310
$P_{W,M}$	0	0,0503	0,4771	0,6713	0,9693	0,9961	0,4334
	1,4	0,0486	0,1390	0,5111	0,1849	0,2599	0,9647
	5	0,0454	0,5705	0,9559	0,0829	0,1044	1,0000
$P_{W\text{-}vdW,Log\text{-}K}$	0	0,0251	0,0968	0,0884	0,9334	0,9882	0,0139
	1,4	0,0382	0,2968	0,7728	0,0615	0,0717	0,9952
	5	0,0412	0,6468	0,9755	0,0818	0,0997	1,0000
F_W		0,0236	0,8950	0,9993	0,8656	0,9943	1,0000
F^*_W		0,0390	0,8326	0,9986	0,9419	0,9986	1,0000
G_t		0,0355	0,7327	0,9970	0,5668	0,7864	1,0000
G_r		0,0526	0,8979	0,9993	0,9694	0,9992	1,0000
KS		0,0376	0,7894	0,9985	0,7715	0,9709	1,0000
BE		0,0482	0,7077	0,9948	0,8735	0,9938	1,0000
B		0,0440	0,9362	0,9995	0,9138	0,9970	1,0000
B*		0,0465	0,9397	0,9996	0,9208	0,9974	1,0000
B**		0,2518	0,8162	0,9991	0,8991	0,9981	1,0000
B***		0,2874	0,7313	0,9982	0,9220	0,9992	1,0000
t		0,0475	0,4953	0,9496	0,0393	0,0398	0,9999
t_r		0,0498	0,7392	0,9925	0,2322	0,3220	1,0000
t_W		0,0500	0,4995	0,9346	0,0550	0,0630	0,9999
t_{Wr}		0,0491	0,7037	0,9877	0,2896	0,3997	1,0000
W		0,0498	0,7392	0,9925	0,2322	0,3220	1,0000
M		0,0509	0,6153	0,8224	0,9518	0,9923	0,6310

TABLEAU 2.2.15

Niveau expérimental et puissances expérimentales pour deux échantillons de lois exponentielles de tailles m=36 et n=24.

		Hypothèse alternative H_1: $G(x) = F(ax+b)$ où $F(x) \sim E(0,1)$					
			Différences dans les paramètres de:				
			position seulement		dispersion seulement		position et dispersion
Tests	*l, c*	E(0,1)	E(0,5,1)	E(1,1)	E(0,2)	E(0,3)	E(1,2)
$T_{W,AB}$		0,0468	0,8801	0,9997	0,9154	0,9941	1,0000
$T_{W,M}$		0,0483	0,8978	0,9997	0,9618	0,9984	1,0000
$T_{vdW,K}$		0,0435	0,8867	0,9997	0,9809	0,9993	1,0000
$T_{W,Log}$		0,0458	0,8737	0,9995	0,9746	0,9990	1,0000
$T_{Sin,Cos}$		0,0496	0,6350	0,9896	0,8730	0,9895	1,0000
$P_{vdW,K}$	0	0,0612	0,0022	0,0004	0,9923	0,9995	0,0000
	1,4	0,0527	0,2962	0,7785	0,3572	0,4880	0,9970
	5	0,0382	0,6236	0,9765	0,0649	0,0688	1,0000
$P_{W,Log}$	0	0,0613	0,0276	0,0078	0,9933	0,9995	0,0000
	1,4	0,0611	0,1285	0,5704	0,6710	0,7995	0,9882
	5	0,0491	0,5595	0,9701	0,0866	0,1054	1,0000
$P_{Sin,Cos}$	0	0,0568	0,3206	0,2103	0,9503	0,9977	0,0357
	1,4	0,0548	0,1094	0,7059	0,4004	0,4635	0,9996
	5	0,0545	0,3374	0,9462	0,0871	0,1209	1,0000
$P_{W,AB}$	0	0,0547	0,2786	0,1994	0,9584	0,9979	0,0544
	1,4	0,0501	0,2403	0,7368	0,1944	0,3032	0,9984
	5	0,0471	0,6083	0,9804	0,1117	0,1359	1,0000
$P^*_{W,M}$	0	0,0476	0,7577	0,9975	0,2768	0,3641	1,0000
	0,5	0,0477	0,5425	0,9695	0,0946	0,1174	1,0000
	1	0,0502	0,3790	0,1946	0,9685	0,9988	0,0035
$P_{W,M}$	0	0,0548	0,2092	0,0917	0,9863	0,9996	0,0120
	1,4	0,0512	0,2557	0,7884	0,2671	0,3845	0,9990
	5	0,0466	0,6133	0,9829	0,1050	0,1307	1,0000
$P_{W\text{-}vdW,Log\text{-}K}$	0	0,0510	0,0062	0,0011	0,9898	0,9994	0,0000
	1,4	0,0462	0,4305	0,9111	0,1567	0,2090	0,9998
	5	0,0415	0,6765	0,9896	0,1122	0,1341	1,0000
F_W		0,0206	0,7242	0,9986	0,9631	0,9986	1,0000
F^*_W		0,0472	0,7070	0,9981	0,9923	0,9998	1,0000
G_l		0,0349	0,7103	0,9981	0,7577	0,9298	1,0000
G_r		0,0507	0,9031	0,9997	0,9639	0,9984	1,0000
KS		0,0369	0,8462	0,9999	0,7234	0,9391	1,0000
BE		0,0439	0,8322	0,9999	0,7316	0,9519	1,0000
B		0,0425	0,7865	0,9991	0,9804	0,9992	1,0000
B*		0,0451	0,7965	0,9992	0,9810	0,9992	1,0000
B**		0,2446	0,6615	0,9966	0,9780	0,9998	1,0000
B***		0,2817	0,7006	0,9993	0,9726	0,9998	1,0000
t		0,0470	0,4762	0,9509	0,0949	0,1180	1,0000
t_r		0,0476	0,7577	0,9975	0,2768	0,3641	1,0000
t_W		0,0481	0,4722	0,9641	0,0677	0,0755	1,0000
t_{Wr}		0,0494	0,7920	0,9990	0,2260	0,2969	1,0000
W		0,0476	0,7577	0,9975	0,2768	0,3641	1,0000
M		0,0502	0,3790	0,1946	0,9685	0,9988	0,0035

TABLEAU 2.2.16

Niveau expérimental et puissances expérimentales pour deux échantillons de lois exponentielles de tailles m=n=36.

		Hypothèse alternative H_1: $G(x) = F(ax+b)$ où $F(x) \sim E(0,1)$					
			Différences dans les paramètres de:				
			position seulement		dispersion seulement		position et dispersion
Tests	*l, c*	E(0,1)	E(0,5,1)	E(1,1)	E(0,2)	E(0,3)	E(1,2)
$T_{W,AB}$		0,0496	0,9354	0,9999	0,9687	0,9993	1,0000
$T_{W,M}$		0,0477	0,9554	0,9999	0,9894	0,9998	1,0000
$T_{vdW,K}$		0,0431	0,9705	0,9999	0,9953	0,9999	1,0000
$T_{W,Log}$		0,0469	0,9512	0,9999	0,9933	0,9998	1,0000
$T_{Sin,Cos}$		0,0487	0,7099	0,9951	0,9521	0,9985	1,0000
$P_{vdW,K}$	0	0,0423	0,0497	0,0200	0,9914	0,9992	0,0006
	1,4	0,0405	0,2416	0,7368	0,3143	0,4441	0,9961
	5	0,0371	0,7054	0,9891	0,0535	0,0540	1,0000
$P_{W,Log}$	0	0,0472	0,1455	0,0818	0,9939	0,9996	0,0032
	1,4	0,0493	0,0580	0,3956	0,6624	0,7910	0,9636
	5	0,0464	0,5822	0,9772	0,0652	0,0775	1,0000
$P_{Sin,Cos}$	0	0,0550	0,5232	0,6621	0,9811	0,9994	0,1282
	1,4	0,0537	0,0592	0,4998	0,4037	0,4330	0,9977
	5	0,0522	0,2743	0,9135	0,0959	0,1717	1,0000
$P_{W,AB}$	0	0,0546	0,4752	0,6209	0,9820	0,9993	0,1480
	1,4	0,0491	0,2270	0,7020	0,2100	0,3351	0,9968
	5	0,0452	0,6893	0,9910	0,1080	0,1297	1,0000
$P^*_{W,M}$	0	0,0466	0,8371	0,9995	0,2937	0,3942	1,0000
	0,5	0,0470	0,6123	0,9826	0,0878	0,1076	1,0000
	1	0,0487	0,6083	0,5807	0,9887	0,9993	0,0865
$P_{W,M}$	0	0,0528	0,4555	0,4161	0,9938	0,9997	0,0395
	1,4	0,0504	0,2239	0,7468	0,2648	0,3782	0,9985
	5	0,0460	0,6828	0,9916	0,1015	0,1273	1,0000
$P_{W\text{-}vdW,Log\text{-}K}$	0	0,0353	0,0691	0,0327	0,9904	0,9993	0,0009
	1,4	0,0409	0,4184	0,9125	0,1200	0,1560	0,9999
	5	0,0417	0,7561	0,9955	0,1116	0,1315	1,0000
F_W		0,0273	0,9475	1,0000	0,9885	0,9999	1,0000
F^*_W		0,0444	0,8970	1,0000	0,9978	1,0000	1,0000
G_l		0,0357	0,8155	0,9996	0,7481	0,9063	1,0000
G_r		0,0499	0,9575	0,9999	0,9900	0,9998	1,0000
KS		0,0359	0,9080	0,9999	0,8655	0,9891	1,0000
BE		0,0524	0,8678	0,9999	0,8863	0,9954	1,0000
B		0,0475	0,9693	1,0000	0,9945	0,9999	1,0000
B*		0,0494	0,9706	1,0000	0,9946	1,0000	1,0000
B**		0,2681	0,8702	0,9999	0,9924	0,9999	1,0000
B***		0,3176	0,8308	1,0000	0,9925	1,0000	1,0000
t		0,0459	0,5683	0,9782	0,0596	0,0685	1,0000
t_r		0,0482	0,8399	0,9995	0,2972	0,3983	1,0000
t_W		0,0452	0,5678	0,9775	0,0582	0,0659	1,0000
t_{Wr}		0,0482	0,8399	0,9995	0,2960	0,3944	1,0000
W		0,0466	0,8371	0,9995	0,2937	0,3942	1,0000
M		0,0487	0,6083	0,5807	0,9887	0,9993	0,0865

TABLEAU 2.2.17

Niveau expérimental et puissances expérimentales pour deux échantillons de lois khi-deux à 3 d.l. de tailles m=n=24.

		Hypothèse alternative H_1: $G(x) = F(ax+b)$ où $F(x) \sim K(0,1)$					
			Différences dans les paramètres de:				
			position seulement	dispersion seulement		position et dispersion	
Tests	*l, c*	K(0,1)	K(1,1)	K(0,2)	K(0,3)	K(1,2)	K(1,3)
$T_{W,AB}$		0,0457	0,9893	0,7882	0,9773	0,4897	0,8708
$T_{W,M}$		0,0451	0,9916	0,8665	0,9912	0,5239	0,9386
$T_{vdW,K}$		0,0432	0,9924	0,8829	0,9920	0,5462	0,9599
$T_{W,Log}$		0,0464	0,9891	0,8813	0,9920	0,5548	0,9596
$T_{Sin,Cos}$		0,0454	0,8858	0,7481	0,9725	0,3887	0,8767
$P_{vdW,K}$	0	0,0435	0,0007	0,9275	0,9918	0,3914	0,9860
	0,9	0,0431	0,3040	0,4852	0,6645	0,7519	0,9351
	1,4	0,0408	0,5950	0,2475	0,3621	0,7581	0,8165
	5	0,0362	0,9235	0,0341	0,0351	0,5595	0,2229
$P_{W,Log}$	0	0,0517	0,0108	0,9430	0,9954	0,4034	0,9860
	0,9	0,0498	0,0808	0,7086	0,8662	0,7051	0,9790
	1,4	0,0479	0,3149	0,5197	0,6868	0,7653	0,9448
	5	0,0464	0,8929	0,0683	0,0795	0,6781	0,4631
$P_{Sin,Cos}$	0	0,0541	0,2638	0,8672	0,9904	0,2672	0,9243
	0,9	0,0510	0,1475	0,4884	0,6298	0,5465	0,8836
	1,4	0,0506	0,3599	0,2959	0,3734	0,5448	0,7770
	5	0,0513	0,7332	0,0926	0,1418	0,4394	0,3879
$P_{W,AB}$	0	0,0491	0,2180	0,8706	0,9901	0,2814	0,9330
	0,9	0,0504	0,2564	0,3713	0,5823	0,6452	0,8581
	1,4	0,0464	0,5531	0,1760	0,2924	0,6561	0,7138
	5	0,0457	0,9245	0,0673	0,0806	0,5453	0,2450
$P^*_{W,M}$	0	0,0465	0,9708	0,1563	0,2176	0,4390	0,1091
	0,5	0,0477	0,8957	0,0656	0,0786	0,5665	0,3096
	0,7	0,0480	0,6365	0,1259	0,1994	0,6411	0,6481
	1	0,0498	0,2726	0,8818	0,9919	0,2508	0,9489
$P_{W,M}$	0	0,0531	0,1291	0,9342	0,9959	0,3499	0,9722
	0,9	0,0491	0,3000	0,4439	0,6343	0,7068	0,9112
	1,4	0,0473	0,5892	0,2247	0,3378	0,7067	0,7815
	5	0,0463	0,9270	0,0656	0,0807	0,5632	0,2682
$P_{W\text{-}vdW,Log\text{-}K}$	0	0,0366	0,0027	0,9184	0,9913	0,3546	0,9822
	0,9	0,0399	0,5661	0,2714	0,3851	0,7527	0,8318
	1,4	0,0401	0,7828	0,1112	0,1497	0,7202	0,6351
	5	0,0410	0,9491	0,0591	0,0696	0,5342	0,1906
F_W		0,0154	0,9649	0,6673	0,9581	0,2966	0,8305
F^*_W		0,0364	0,9528	0,8500	0,9919	0,4512	0,9416
G_t		0,0379	0,9820	0,6184	0,8462	0,4083	0,4624
G_r		0,0481	0,9921	0,8733	0,9916	0,5389	0,9427
KS		0,0285	0,9738	0,3804	0,7357	0,3641	0,3507
BE		0,0573	0,9749	0,6214	0,9251	0,3949	0,6916
B		0,0379	0,9772	0,7838	0,9844	0,3832	0,9057
B*		0,0404	0,9791	0,7942	0,9859	0,3947	0,9099
B**		0,1438	0,9481	0,7822	0,9869	0,7919	0,9555
B***		0,1511	0,9566	0,7951	0,9887	0,8040	0,9492
t		0,0501	0,9136	0,0590	0,0661	0,5944	0,2880
t_r		0,0496	0,9733	0,1612	0,2236	0,4474	0,1129
t_W		0,0488	0,9125	0,0576	0,0630	0,5855	0,2753
t_{W_r}		0,0496	0,9727	0,1589	0,2186	0,4468	0,1104
W		0,0465	0,9708	0,1563	0,2176	0,4390	0,1091
M		0,0498	0,2726	0,8818	0,9919	0,2508	0,9489

TABLEAU 2.2.18

Niveau expérimental et puissances expérimentales pour deux échantillons de lois khi-deux à 3 d.l. de tailles m=24 et n=36.

		Hypothèse alternative H_1: $G(x) = F(ax+b)$ où $F(x) \sim N(0,1)$					
			Différences dans les paramètres de:				
			position seulement	dispersion seulement		position et dispersion	
Tests	*l, c*	K(0,1)	K(1,1)	K(0,2)	K(0,3)	K(1,2)	K(1,3)
$T_{W,AB}$		0,0474	0,9949	0,8769	0,9951	0,5588	0,9325
$T_{W,M}$		0,0477	0,9964	0,9304	0,9984	0,5922	0,9737
$T_{vdW,K}$		0,0470	0,9984	0,9264	0,9975	0,5974	0,9791
$T_{W,Log}$		0,0478	0,9964	0,9350	0,9979	0,6248	0,9830
$T_{Sin,Cos}$		0,0468	0,9178	0,8518	0,9934	0,4623	0,9472
$P_{vdW,K}$	0	0,0269	0,0398	0,9342	0,9934	0,3265	0,9926
	0,9	0,0304	0,1249	0,4538	0,6340	0,7595	0,9525
	1,4	0,0335	0,4946	0,2055	0,2994	0,7837	0,8405
	5	0,0391	0,9480	0,0248	0,0226	0,6139	0,2079
$P_{W,Log}$	0	0,0356	0,1320	0,9538	0,9958	0,3502	0,9928
	0,9	0,0364	0,0017	0,7076	0,8640	0,7048	0,9900
	1,4	0,0386	0,1274	0,5031	0,6614	0,7815	0,9639
	5	0,0469	0,8969	0,0508	0,0545	0,7365	0,4875
$P_{Sin,Cos}$	0	0,0498	0,6399	0,9228	0,9964	0,2381	0,9546
	0,9	0,0497	0,0308	0,5060	0,6151	0,5917	0,9357
	1,4	0,0472	0,1551	0,2951	0,3491	0,6123	0,8459
	5	0,0498	0,6314	0,0990	0,1760	0,5381	0,4681
$P_{W,AB}$	0	0,0496	0,5774	0,9244	0,9967	0,2588	0,9615
	0,9	0,0462	0,1415	0,4104	0,6330	0,6842	0,9142
	1,4	0,0461	0,5079	0,1824	0,3059	0,7121	0,7875
	5	0,0478	0,9492	0,0581	0,0697	0,6213	0,2602
$P^*_{W,M}$	0	0,0511	0,9854	0,1590	0,2280	0,5172	0,0995
	0,5	0,0507	0,9196	0,0521	0,0618	0,6450	0,3327
	0,7	0,0500	0,6071	0,1214	0,1795	0,7094	0,7254
	1	0,0492	0,6712	0,9334	0,9956	0,2425	0,9767
$P_{W,M}$	0	0,0485	0,5098	0,9559	0,9979	0,3126	0,9850
	0,9	0,0477	0,1468	0,4635	0,6480	0,7386	0,9495
	1,4	0,0481	0,5094	0,2113	0,3211	0,7555	0,8348
	5	0,0490	0,9469	0,0563	0,0696	0,6361	0,2796
$P_{W\text{-}vdW,Log\text{-}K}$	0	0,0232	0,0579	0,9287	0,9927	0,2916	0,9902
	0,9	0,0335	0,4453	0,2327	0,3307	0,7843	0,8614
	1,4	0,0380	0,7588	0,0850	0,1036	0,7670	0,6643
	5	0,0437	0,9660	0,0513	0,0606	0,5995	0,1785
F_W		0,0211	0,9964	0,7576	0,9866	0,3606	0,9105
F^*_W		0,0349	0,9925	0,8764	0,9962	0,4821	0,9670
G_t		0,0434	0,9939	0,5872	0,8164	0,4345	0,3631
G_r		0,0511	0,9965	0,9346	0,9985	0,6038	0,9752
KS		0,0374	0,9904	0,5630	0,9106	0,4829	0,4938
BE		0,0442	0,9797	0,7398	0,9776	0,4257	0,7873
B		0,0415	0,9977	0,8312	0,9938	0,4296	0,9501
B*		0,0432	0,9978	0,8406	0,9946	0,4406	0,9538
B**		0,1622	0,9933	0,8275	0,9943	0,8392	0,9765
B***		0,1754	0,9856	0,8434	0,9951	0,8441	0,9722
t		0,0524	0,9517	0,0348	0,0347	0,6469	0,2738
t_r		0,0511	0,9854	0,1590	0,2280	0,5172	0,0995
t_W		0,0533	0,9376	0,0524	0,0575	0,7341	0,4233
t_{W_r}		0,0524	0,9787	0,2044	0,2968	0,5482	0,1343
W		0,0511	0,9854	0,1590	0,2280	0,5172	0,0995
M		0,0492	0,6712	0,9334	0,9956	0,2425	0,9767

TABLEAU 2.2.19

Niveau expérimental et puissances expérimentales pour deux échantillons de lois khi-deux à 3 d.l. de tailles m=36 et n=24.

Tests	l, c	Hypothèse alternative H_1: $G(x) = F(ax+b)$ où $F(x) \sim K(0,1)$					
			Différences dans les paramètres de:				
			position seulement	dispersion seulement		position et dispersion	
		K(0,1)	K(1,1)	K(0,2)	K(0,3)	K(1,2)	K(1,3)
$T_{W,AB}$		0,0506	0,9990	0,8596	0,9904	0,5991	0,9292
$T_{W,M}$		0,0499	0,9991	0,9261	0,9975	0,6438	0,9735
$T_{vdW,K}$		0,0473	0,9991	0,9568	0,9991	0,7015	0,9912
$T_{W,Log}$		0,0488	0,9984	0,9503	0,9988	0,6904	0,9899
$T_{Sin,Cos}$		0,0488	0,9569	0,8054	0,9832	0,4471	0,9169
$P_{vdW,K}$	0	0,0675	0,0001	0,9877	0,9998	0,6212	0,9982
	0,9	0,0607	0,5391	0,6778	0,8411	0,8806	0,9804
	1,4	0,0541	0,7673	0,4095	0,5641	0,8714	0,9178
	5	0,0386	0,9686	0,0532	0,0574	0,6818	0,3353
$P_{W,Log}$	0	0,0663	0,0034	0,9882	0,9996	0,6044	0,9977
	0,9	0,0649	0,2737	0,8609	0,9570	0,8418	0,9959
	1,4	0,0592	0,5523	0,6951	0,8441	0,8725	0,9820
	5	0,0493	0,9586	0,0976	0,1230	0,7785	0,5868
$P_{Sin,Cos}$	0	0,0556	0,1491	0,9133	0,9955	0,3622	0,9570
	0,9	0,0519	0,3630	0,6100	0,7817	0,6207	0,9263
	1,4	0,0516	0,6160	0,3832	0,5020	0,6054	0,8348
	5	0,0487	0,8945	0,0817	0,1069	0,4676	0,4033
$P_{W,AB}$	0	0,0567	0,1317	0,9297	0,9965	0,3950	0,9690
	0,9	0,0516	0,4549	0,4390	0,6691	0,7491	0,9043
	1,4	0,0470	0,7254	0,2174	0,3566	0,7524	0,7770
	5	0,0463	0,9716	0,0851	0,1040	0,6259	0,3030
$P^*_{W,M}$	0	0,0501	0,9918	0,1993	0,2710	0,5185	0,1416
	0,5	0,0480	0,9578	0,0786	0,0953	0,6520	0,3824
	0,7	0,0465	0,7934	0,1681	0,2698	0,7349	0,7319
	1	0,0501	0,1515	0,9425	0,9986	0,3645	0,9788
$P_{W,M}$	0	0,0586	0,0603	0,9727	0,9995	0,4845	0,9902
	0,9	0,0512	0,5171	0,5551	0,7557	0,8077	0,9529
	1,4	0,0480	0,7644	0,2966	0,4408	0,8007	0,8522
	5	0,0458	0,9735	0,0802	0,1009	0,6464	0,3380
$P_{W\text{-}vdW,Log\text{-}K}$	0	0,0552	0,0004	0,9828	0,9996	0,5740	0,9977
	0,9	0,0492	0,7521	0,4278	0,5803	0,8633	0,9237
	1,4	0,0460	0,8990	0,1905	0,2676	0,8309	0,7743
	5	0,0427	0,9818	0,0804	0,0944	0,6358	0,2652
F_W		0,0203	0,9889	0,9056	0,9974	0,4799	0,9583
F^*_W		0,0461	0,9869	0,9716	0,9995	0,6432	0,9899
G_l		0,0417	0,9950	0,7833	0,9419	0,5931	0,7415
G_r		0,0542	0,9991	0,9287	0,9976	0,6527	0,9747
KS		0,0387	0,9975	0,5309	0,8651	0,4784	0,5172
BE		0,0468	0,9961	0,6108	0,9148	0,4294	0,7018
B		0,0424	0,9923	0,9468	0,9988	0,5563	0,9784
B*		0,0448	0,9933	0,9502	0,9989	0,5658	0,9793
B**		0,1556	0,9812	0,9414	0,9988	0,8866	0,9936
B***		0,1694	0,9907	0,9359	0,9989	0,9045	0,9927
l		0,0499	0,9531	0,0890	0,1081	0,7207	0,4411
l_r		0,0501	0,9918	0,1993	0,2710	0,5185	0,1416
l_W		0,0520	0,9649	0,0626	0,0655	0,6151	0,2811
l_{Wr}		0,0509	0,9946	0,1609	0,2153	0,4860	0,1078
W		0,0501	0,9918	0,1993	0,2710	0,5185	0,1416
M		0,0501	0,1515	0,9425	0,9986	0,3645	0,9788

TABLEAU 2.2.20

Niveau expérimental et puissances expérimentales pour deux échantillons de lois khi-deux à 3 d.l. de tailles m=n=36.

Tests	l, c	Hypothèse alternative H_1: $G(x) = F(ax+b)$ où $F(x) \sim N(0,1)$					
			Différences dans les paramètres de:				
			position seulement	dispersion seulement		position et dispersion	
		K(0,1)	K(1,1)	K(0,2)	K(0,3)	K(1,2)	K(1,3)
$T_{W,AB}$		0,0490	0,9997	0,9368	0,9990	0,6986	0,9730
$T_{W,M}$		0,0495	0,9998	0,9712	0,9997	0,7375	0,9924
$T_{vdW,K}$		0,0471	0,9998	0,9820	0,9999	0,7763	0,9971
$T_{W,Log}$		0,0478	0,9998	0,9790	0,9998	0,7770	0,9971
$T_{Sin,Cos}$		0,0479	0,9776	0,9076	0,9978	0,5502	0,9749
$P_{vdW,K}$	0	0,0440	0,0121	0,9883	0,9994	0,5708	0,9990
	0,9	0,0427	0,3840	0,6642	0,8356	0,9010	0,9911
	1,4	0,0410	0,7212	0,3687	0,5254	0,9048	0,9437
	5	0,0402	0,9836	0,0384	0,0372	0,7510	0,3361
$P_{W,Log}$	0	0,0493	0,0539	0,9914	0,9997	0,5640	0,9988
	0,9	0,0460	0,0853	0,8657	0,9607	0,8639	0,9981
	1,4	0,0471	0,3874	0,6886	0,8371	0,9029	0,9926
	5	0,0481	0,9665	0,0747	0,0874	0,8413	0,6311
$P_{Sin,Cos}$	0	0,0549	0,4984	0,9625	0,9996	0,3497	0,9814
	0,9	0,0482	0,1613	0,6426	0,7813	0,6920	0,9705
	1,4	0,0484	0,4341	0,3975	0,4844	0,6975	0,9054
	5	0,0516	0,8617	0,0887	0,1397	0,5887	0,5150
$P_{W,AB}$	0	0,0532	0,4452	0,9674	0,9998	0,3870	0,9864
	0,9	0,0477	0,3330	0,4966	0,7335	0,8042	0,9569
	1,4	0,0490	0,7063	0,2299	0,3880	0,8176	0,8569
	5	0,0484	0,9847	0,0784	0,0922	0,7201	0,3342
$P^*_{W,M}$	0	0,0512	0,9972	0,2088	0,2959	0,6088	0,1336
	0,5	0,0514	0,9749	0,0699	0,0815	0,7500	0,4378
	0,7	0,0509	0,7998	0,1668	0,2654	0,8181	0,8202
	1	0,0512	0,4643	0,9768	0,9997	0,3739	0,9935
$P_{W,M}$	0	0,0538	0,3109	0,9873	0,9999	0,4643	0,9962
	0,9	0,0480	0,3796	0,5883	0,7812	0,8526	0,9808
	1,4	0,0501	0,7315	0,2971	0,4464	0,8560	0,9079
	5	0,0491	0,9844	0,0755	0,0909	0,7396	0,3687
$P_{W\text{-}vdW,Log\text{-}K}$	0	0,0372	0,0202	0,9866	0,9994	0,5275	0,9986
	0,9	0,0405	0,6902	0,3961	0,5451	0,9010	0,9503
	1,4	0,0421	0,9020	0,1542	0,2105	0,8788	0,8175
	5	0,0451	0,9914	0,0753	0,0896	0,7204	0,2691
F_W		0,0237	0,9994	0,9578	0,9995	0,5751	0,9890
F^*_W		0,0427	0,9987	0,9858	1,0000	0,6941	0,9967
G_l		0,0415	0,9989	0,7807	0,9305	0,6417	0,6774
G_r		0,0519	0,9998	0,9723	0,9998	0,7442	0,9931
KS		0,0350	0,9987	0,6792	0,9564	0,5688	0,6338
BE		0,0523	0,9975	0,7894	0,9839	0,5485	0,8537
B		0,0436	0,9997	0,9763	0,9996	0,6323	0,9933
B*		0,0454	0,9998	0,9774	0,9996	0,6401	0,9935
B**		0,1700	0,9990	0,9716	0,9998	0,9321	0,9983
B***		0,1909	0,9987	0,9723	0,9998	0,9435	0,9980
l		0,0512	0,9803	0,0594	0,0664	0,7843	0,4511
l_r		0,0530	0,9972	0,2129	0,2998	0,6123	0,1358
l_W		0,0510	0,9797	0,0582	0,0630	0,7811	0,4390
l_{Wr}		0,0530	0,9972	0,2109	0,2965	0,6123	0,1347
W		0,0512	0,9972	0,2088	0,2959	0,6088	0,1336
M		0,0512	0,4643	0,9768	0,9997	0,3739	0,9935

TABLEAU 2.2.21

Niveau expérimental et puissances expérimentales pour deux échantillons de lois normales contaminées de tailles m=n=24.

Tests	l, c	NC(0,1)	position seulement NC(1,1)	dispersion seulement NC(0,2)	dispersion seulement NC(0,3)	position et dispersion NC(1,2)	position et dispersion NC(1,3)
		Hypothèse alternative H_1: $G(x) = F(ax+b)$ où $F(x) \sim NC(0,1)$	Différences dans les paramètres de:				
$T_{W,AB}$		0,0430	0,9968	0,8677	0,9871	0,4564	0,8662
$T_{W,M}$		0,0444	0,9976	0,9206	0,9952	0,4614	0,9341
$T_{vdW,K}$		0,0420	0,9966	0,9250	0,9961	0,4603	0,9513
$T_{W,Log}$		0,0439	0,9960	0,9248	0,9961	0,4554	0,9542
T_{SinCos}		0,0462	0,9624	0,8309	0,9827	0,2602	0,8803
$P_{vdW,K}$	0	0,0428	0,0038	0,9384	0,9888	0,1264	0,9860
	0,9	0,0402	0,3142	0,4522	0,5967	0,5763	0,9134
	1,4	0,0372	0,6166	0,2135	0,2960	0,6545	0,7700
	5	0,0322	0,9364	0,0406	0,0436	0,6088	0,1783
$P_{W,Log}$	0	0,0473	0,0182	0,9549	0,9930	0,1432	0,9867
	0,9	0,0463	0,0804	0,7012	0,8352	0,4708	0,9707
	1,4	0,0468	0,3278	0,4929	0,6199	0,5896	0,9277
	5	0,0435	0,9136	0,0606	0,0739	0,6543	0,4034
P_{SinCos}	0	0,0502	0,3812	0,9140	0,9924	0,1262	0,9243
	0,9	0,0533	0,1664	0,4986	0,5914	0,3730	0,8808
	1,4	0,0527	0,4218	0,2936	0,3342	0,4008	0,7678
	5	0,0518	0,8118	0,1064	0,1693	0,3681	0,3639
$P_{W,AB}$	0	0,0469	0,3264	0,9134	0,9922	0,1240	0,9320
	0,9	0,0483	0,2360	0,3597	0,5493	0,5359	0,8287
	1,4	0,0464	0,5572	0,1609	0,2510	0,5921	0,6624
	5	0,0433	0,9370	0,0883	0,1100	0,5811	0,1977
$P^*_{W,M}$	0	0,0440	0,9824	0,2138	0,2926	0,5202	0,0872
	0,5	0,0463	0,9162	0,0787	0,0957	0,5790	0,2539
	0,7	0,0475	0,6660	0,1125	0,1620	0,5712	0,5872
	1	0,0471	0,3542	0,9181	0,9892	0,0865	0,9524
$P_{W,M}$	0	0,0512	0,1874	0,9552	0,9956	0,1408	0,9736
	0,9	0,0489	0,3122	0,4300	0,5858	0,5678	0,8908
	1,4	0,0481	0,6124	0,2033	0,2837	0,6224	0,7377
	5	0,0423	0,9406	0,0847	0,1091	0,5914	0,2199
$P_{W\text{-}vdW,Log\text{-}K}$	0	0,0361	0,0066	0,9330	0,9881	0,1105	0,9822
	0,9	0,0375	0,5912	0,2352	0,3194	0,6358	0,7928
	1,4	0,0375	0,8084	0,0901	0,1135	0,6646	0,5722
	5	0,0370	0,9578	0,0824	0,1014	0,5887	0,1524
F_W		0,0143	0,9918	0,7775	0,9782	0,2411	0,8423
F^*_W		0,0352	0,9892	0,9218	0,9964	0,3278	0,9514
G_t		0,0329	0,9916	0,5941	0,8211	0,4304	0,3513
G_r		0,0473	0,9980	0,9256	0,9955	0,4764	0,9377
KS		0,0280	0,9942	0,5603	0,8539	0,3679	0,3475
BE		0,0521	0,9950	0,7505	0,9630	0,3793	0,6844
B		0,0347	0,9954	0,8787	0,9929	0,3069	0,9211
B*		0,0372	0,9954	0,8873	0,9937	0,3167	0,9253
B**		0,2085	0,9850	0,8509	0,9922	0,8163	0,9592
B***		0,2332	0,9906	0,8690	0,9930	0,8346	0,9495
l		0,0437	0,9112	0,0587	0,0687	0,6061	0,2889
l_r		0,0468	0,9832	0,2199	0,2996	0,5287	0,0912
l_W		0,0422	0,9104	0,0573	0,0660	0,5989	0,2728
l_{Wr}		0,0468	0,9828	0,2170	0,2934	0,5287	0,0888
W		0,0440	0,9824	0,2138	0,2926	0,5202	0,0872
M		0,0471	0,3542	0,9181	0,9892	0,0865	0,9524

TABLEAU 2.2.22

Niveau expérimental et puissances expérimentales pour deux échantillons de lois normales contaminées de tailles m=24 et n=36.

Tests	l, c	NC(0,1)	position seulement NC(1,1)	dispersion seulement NC(0,2)	dispersion seulement NC(0,3)	position et dispersion NC(1,2)	position et dispersion NC(1,3)
		Hypothèse alternative H_1: $G(x) = F(ax+b)$ où $F(x) \sim NC(0,1)$	Différences dans les paramètres de:				
$T_{W,AB}$		0,0467	0,9995	0,7529	0,9756	0,4754	0,6606
$T_{W,M}$		0,0467	0,9975	0,8278	0,9903	0,4942	0,7474
$T_{vdW,K}$		0,0421	0,9935	0,8807	0,9957	0,5079	0,8173
$T_{W,Log}$		0,0446	0,9930	0,8735	0,9946	0,5257	0,8109
T_{SinCos}		0,0462	0,9893	0,6958	0,9614	0,4810	0,6823
$P_{vdW,K}$	0	0,0423	0,0034	0,9216	0,9830	0,2362	0,9208
	0,9	0,0431	0,3121	0,4442	0,5303	0,6725	0,8506
	1,4	0,0415	0,6204	0,2068	0,2303	0,7206	0,7127
	5	0,0361	0,9289	0,0370	0,0529	0,5929	0,2050
$P_{W,Log}$	0	0,0497	0,0202	0,9246	0,9854	0,2354	0,9159
	0,9	0,0505	0,0712	0,6479	0,7675	0,5818	0,9147
	1,4	0,0500	0,3234	0,4446	0,5291	0,6752	0,8616
	5	0,0478	0,8946	0,0556	0,0684	0,6924	0,4048
P_{SinCos}	0	0,0575	0,4779	0,7883	0,9713	0,1193	0,7337
	0,9	0,0533	0,2315	0,2874	0,4060	0,4927	0,7656
	1,4	0,0538	0,4628	0,1458	0,1923	0,5690	0,6750
	5	0,0557	0,8455	0,1016	0,1961	0,6042	0,3801
$P_{W,AB}$	0	0,0529	0,4180	0,8130	0,9744	0,1323	0,7685
	0,9	0,0523	0,2246	0,2831	0,4118	0,5143	0,7067
	1,4	0,0486	0,5015	0,1229	0,1670	0,5748	0,5751
	5	0,0462	0,9099	0,0899	0,1449	0,5708	0,2177
$P^*_{W,M}$	0	0,0472	0,9746	0,2029	0,3415	0,5254	0,1103
	0,5	0,0487	0,8881	0,0790	0,1211	0,5850	0,2654
	0,7	0,0486	0,6134	0,0907	0,1120	0,5871	0,5156
	1	0,0510	0,4074	0,8212	0,9696	0,1126	0,7844
$P_{W,M}$	0	0,0563	0,2416	0,8849	0,9835	0,1734	0,8566
	0,9	0,0522	0,2821	0,3506	0,4627	0,5845	0,7795
	1,4	0,0490	0,5636	0,1556	0,2000	0,6349	0,6466
	5	0,0471	0,9222	0,0839	0,1394	0,5918	0,2374
$P_{W\text{-}vdW,Log\text{-}K}$	0	0,0360	0,0063	0,9062	0,9806	0,2008	0,8991
	0,9	0,0407	0,5856	0,2142	0,2445	0,7083	0,7256
	1,4	0,0408	0,7970	0,0795	0,0765	0,7067	0,5462
	5	0,0424	0,9500	0,0716	0,1276	0,5830	0,1797
F_W		0,0150	0,9934	0,5886	0,9387	0,3708	0,5746
F^*_W		0,0350	0,9963	0,7885	0,9851	0,5541	0,7983
G_t		0,0448	0,9795	0,8501	0,9831	0,4008	0,5149
G_r		0,0512	0,9976	0,8353	0,9909	0,5064	0,7583
KS		0,0300	0,9929	0,3325	0,7179	0,5080	0,2285
BE		0,0565	0,9952	0,5391	0,8844	0,4615	0,4631
B		0,0365	0,9965	0,7078	0,9699	0,4832	0,7146
B*		0,0393	0,9967	0,7177	0,9717	0,4952	0,7261
B**		0,1378	0,9550	0,7244	0,9708	0,7912	0,8785
B***		0,1406	0,9565	0,7538	0,9796	0,7725	0,8541
l		0,0508	0,9220	0,0585	0,0653	0,5837	0,2917
l_r		0,0491	0,9761	0,2079	0,3489	0,5330	0,1132
l_W		0,0501	0,9211	0,0576	0,0617	0,5757	0,2762
l_{Wr}		0,0491	0,9757	0,2065	0,3431	0,5330	0,1122
W		0,0472	0,9746	0,2029	0,3415	0,5254	0,1103
M		0,0510	0,4074	0,8212	0,9696	0,1126	0,7844

TABLEAU 2.2.23

Niveau expérimental et puissances expérimentales pour deux échantillons de lois normales contaminées de tailles m=36 et n=24.

Tests	l, c	Hypothèse alternative H_1: $G(x) = F(ax+b)$ où $F(x) \sim NC(0,1)$	Différences dans les paramètres de: position seulement	dispersion seulement		position et dispersion	
		NC(0,1)	NC(1,1)	NC(0,2)	NC(0,3)	NC(1,2)	NC(1,3)
$T_{W,AB}$		0,0491	0,9999	0,8325	0,9869	0,5814	0,7702
$T_{W,M}$		0,0488	0,9997	0,8985	0,9967	0,6040	0,8462
$T_{vdW,K}$		0,0445	0,9982	0,9568	0,9996	0,6604	0,9259
$T_{W,Log}$		0,0466	0,9988	0,9447	0,9992	0,6563	0,9155
$T_{Sin,Cos}$		0,0488	0,9980	0,7549	0,9729	0,5639	0,7672
$P_{vdW,K}$	0	0,0697	0,0013	0,9810	0,9982	0,4551	0,9778
	0,9	0,0651	0,5814	0,6563	0,7539	0,8379	0,9411
	1,4	0,0592	0,8048	0,3739	0,4301	0,8543	0,8554
	5	0,0402	0,9737	0,0543	0,0724	0,7194	0,3098
$P_{W,Log}$	0	0,0684	0,0077	0,9774	0,9985	0,4178	0,9717
	0,9	0,0682	0,2815	0,8160	0,9133	0,7577	0,9692
	1,4	0,0674	0,5781	0,6240	0,7315	0,8208	0,9393
	5	0,0509	0,9617	0,0737	0,0863	0,7936	0,5215
$P_{Sin,Cos}$	0	0,0560	0,2738	0,8625	0,9908	0,1890	0,8094
	0,9	0,0536	0,4867	0,3736	0,5562	0,6170	0,8422
	1,4	0,0534	0,7433	0,1814	0,2713	0,6785	0,7539
	5	0,0525	0,9585	0,0742	0,1286	0,6871	0,4156
$P_{W,AB}$	0	0,0562	0,2238	0,8890	0,9937	0,2327	0,8554
	0,9	0,0531	0,4548	0,3435	0,4974	0,6598	0,7914
	1,4	0,0506	0,7104	0,1541	0,2095	0,7048	0,6619
	5	0,0475	0,9669	0,1095	0,1687	0,6768	0,2749
$P^*_{W,M}$	0	0,0501	0,9938	0,2554	0,4113	0,6106	0,1452
	0,5	0,0479	0,9536	0,0960	0,1367	0,6869	0,3311
	0,7	0,0489	0,7878	0,1156	0,1515	0,6953	0,6068
	1	0,0498	0,2322	0,9005	0,9941	0,1917	0,8662
$P_{W,M}$	0	0,0601	0,1223	0,9453	0,9980	0,2793	0,9175
	0,9	0,0563	0,5054	0,4508	0,5960	0,7136	0,8633
	1,4	0,0521	0,7526	0,2137	0,2792	0,7504	0,7350
	5	0,0471	0,9720	0,1017	0,1565	0,6931	0,3022
$P_{W\text{-}vdW,Log\text{-}K}$	0	0,0553	0,0020	0,9750	0,9980	0,3994	0,9703
	0,9	0,0546	0,7825	0,3721	0,4342	0,8411	0,8586
	1,4	0,0491	0,9097	0,1516	0,1552	0,8274	0,6911
	5	0,0438	0,9850	0,0947	0,1515	0,6951	0,2509
F_W		0,0191	0,9989	0,8361	0,9921	0,5308	0,8164
F^*_W		0,0455	0,9997	0,9387	0,9990	0,7042	0,9317
G_t		0,0477	0,9919	0,9533	0,9978	0,6097	0,8217
G_r		0,0510	0,9997	0,9011	0,9969	0,6124	0,8530
KS		0,0410	0,9994	0,4635	0,8358	0,6330	0,3494
BE		0,0488	0,9994	0,5715	0,8981	0,4896	0,4727
B		0,0369	0,9994	0,8928	0,9970	0,6165	0,8826
B*		0,0393	0,9995	0,8970	0,9971	0,6248	0,8867
B**		0,1355	0,9874	0,8771	0,9958	0,8807	0,9628
B***		0,1399	0,9875	0,8930	0,9968	0,8727	0,9570
t		0,0511	0,9617	0,0890	0,1088	0,7106	0,4406
t_r		0,0501	0,9938	0,2554	0,4113	0,6106	0,1452
t_W		0,0521	0,9687	0,0585	0,0612	0,6107	0,2796
t_{Wr}		0,0528	0,9965	0,2120	0,3470	0,5891	0,1173
W		0,0501	0,9938	0,2554	0,4113	0,6106	0,1452
M		0,0498	0,2322	0,9005	0,9941	0,1917	0,8662

TABLEAU 2.2.24

Niveau expérimental et puissances expérimentales pour deux échantillons de lois normales contaminées de tailles m=n=36.

Tests	l, c	Hypothèse alternative H_1: $G(x) = F(ax+b)$ où $F(x) \sim NC(0,1)$	Différences dans les paramètres de: position seulement	dispersion seulement		position et dispersion	
		NC(0,1)	NC(1,1)	NC(0,2)	NC(0,3)	NC(1,2)	NC(1,3)
$T_{W,AB}$		0,0490	1,0000	0,9211	0,9992	0,6571	0,8482
$T_{W,M}$		0,0472	1,0000	0,9631	0,9997	0,6786	0,9162
$T_{vdW,K}$		0,0452	0,9999	0,9868	0,9998	0,7267	0,9671
$T_{W,Log}$		0,0454	0,9999	0,9834	0,9998	0,7292	0,9606
$T_{Sin,Cos}$		0,0504	0,9991	0,8757	0,9971	0,6677	0,8586
$P_{vdW,K}$	0	0,0474	0,0111	0,9899	0,9990	0,3627	0,9888
	0,9	0,0472	0,3969	0,6283	0,7200	0,8503	0,9618
	1,4	0,0481	0,7650	0,3171	0,3510	0,8797	0,8841
	5	0,0409	0,9865	0,0441	0,0688	0,7837	0,3074
$P_{W,Log}$	0	0,0505	0,0616	0,9884	0,9996	0,3303	0,9857
	0,9	0,0521	0,0774	0,8223	0,9039	0,7457	0,9831
	1,4	0,0529	0,3861	0,6008	0,6934	0,8342	0,9616
	5	0,0508	0,9699	0,0600	0,0761	0,8503	0,5600
$P_{Sin,Cos}$	0	0,0505	0,7286	0,9199	0,9972	0,1366	0,8692
	0,9	0,0571	0,2408	0,3800	0,5157	0,6315	0,9038
	1,4	0,0565	0,5540	0,1758	0,2331	0,7161	0,8328
	5	0,0543	0,9327	0,1207	0,2371	0,7653	0,5071
$P_{W,AB}$	0	0,0509	0,6834	0,9359	0,9976	0,1682	0,9043
	0,9	0,0541	0,2688	0,3678	0,5257	0,6605	0,8593
	1,4	0,0520	0,6244	0,1519	0,2067	0,7351	0,7357
	5	0,0493	0,9786	0,1173	0,1945	0,7469	0,2976
$P^*_{W,M}$	0	0,0487	0,9976	0,2856	0,4810	0,7016	0,1343
	0,5	0,0502	0,9706	0,0981	0,1540	0,7601	0,3706
	0,7	0,0516	0,7683	0,1108	0,1341	0,7646	0,6842
	1	0,0502	0,6363	0,9523	0,9973	0,1561	0,9313
$P_{W,M}$	0	0,0530	0,4758	0,9714	0,9992	0,2136	0,9546
	0,9	0,0525	0,3361	0,4523	0,5894	0,7345	0,9107
	1,4	0,0521	0,6965	0,1983	0,2503	0,7872	0,7982
	5	0,0495	0,9816	0,1095	0,1857	0,7674	0,3251
$P_{W\text{-}vdW,Log\text{-}K}$	0	0,0397	0,0190	0,9854	0,9989	0,3058	0,9844
	0,9	0,0453	0,7225	0,3199	0,3579	0,8646	0,8902
	1,4	0,0456	0,9150	0,1071	0,1032	0,8661	0,7232
	5	0,0445	0,9921	0,0994	0,1799	0,7676	0,2517
F_W		0,0246	1,0000	0,9163	0,9991	0,6664	0,9026
F^*_W		0,0440	1,0000	0,9674	0,9998	0,7870	0,9642
G_t		0,0478	0,9987	0,9823	1,0000	0,6520	0,8434
G_r		0,0493	1,0000	0,9648	0,9997	0,6860	0,9189
KS		0,0368	1,0000	0,5773	0,9416	0,7257	0,4123
BE		0,0502	1,0000	0,7239	0,9781	0,6286	0,6175
B		0,0426	1,0000	0,9435	0,9997	0,7310	0,9384
B*		0,0448	1,0000	0,9464	0,9997	0,7369	0,9413
B**		0,1441	0,9993	0,9328	0,9993	0,9267	0,9840
B***		0,1438	0,9989	0,9457	0,9996	0,9175	0,9787
t		0,0510	0,9843	0,0567	0,0607	0,7797	0,4539
t_r		0,0503	0,9976	0,2889	0,4858	0,7047	0,1370
t_W		0,0505	0,9840	0,0555	0,0583	0,7766	0,4430
t_{Wr}		0,0503	0,9976	0,2882	0,4818	0,7047	0,1361
W		0,0487	0,9976	0,2856	0,4810	0,7016	0,1343
M		0,0502	0,6363	0,9523	0,9973	0,1561	0,9313

pour la loi logistique ($T_{W,Log}$) est satisfaisant sauf pour de grands échantillons de loi logistique où il a tendance à être conservateur. Quant au test de Duran, Tsai et Lewis ($T_{W,M}$), il est adéquat dans presque tous les cas considérés. Nous remarquons que tous les tests de Lepage (1971b,1977) ainsi que le test de Duran, Tsai et Lewis sont peu affectés par le fait de prendre des échantillons de tailles inégales en ce sens que leurs niveaux sont très semblables pour toutes les combinaisons de tailles considérées.

En ce qui a trait aux tests de la classe de statistiques pondérées de Lepage (1975) $P_{Sin,Cos}$, $P_{W,M}$ et $P_{W,AB}$ ils contrôlent assez bien le niveau. La plupart des tests ont toutefois tendance à être libéraux lorsque la taille du premier échantillon est supérieure à la taille du second. Dans les autres cas, le test asymptotiquement maximin pour la loi normale ($P_{vdW,K}$), est quelque peu conservateur. Le test asymptotiquement maximin pour la loi logistique ($P_{W,Log}$) est quant à lui conservateur lorsque la taille du premier échantillon est inférieure à celle du deuxième. Par ailleurs, le test de Smit, Swart et Stoker ($P^*_{W,M}$), offre un très bon contrôle du niveau expérimental et ce, pour tous les cas étudiés. Le test de Podgor et Gastwirth ($P_{W\text{-}vdW,Log\text{-}K}$) est pour sa part conservateur sauf dans quelques cas où il est libéral.

Les tests de Fueda et Ohori sont généralement conservateurs. Ce constat tient dans tous les cas considérés pour le test de la forme F_W tandis que pour la forme F^*_W, le niveau est adéquat seulement dans les cas où le premier échantillon est de taille supérieure au second.

D'autre part, le test généralisé de Student (G_t) est conservateur dans presque tous les cas étudiés tandis que le test généralisé de Wilcoxon (G_r) offre un excellent contrôle du niveau expérimental. Le test de Banett et Eisen offre lui aussi un très bon contrôle du niveau expérimental. De plus, nous remarquons que le test de Kolmogorv-Smirnov (KS) est très conservateur. Par ailleurs, aucun des tests de Boos (1986), n'offre un contrôle du niveau expérimental satisfaisant. En effet, les tests non ajusté et ajusté (B et B*) présentent des niveaux expérimentaux plutôt conservateurs alors que les tests construits à partir des observations centrées (B**) ou encore à partir des observations centrées et réduites (B***) montrent des niveaux satisfaisants seulement lorsque les distributions sont normale ou logistique et des résultats très libéraux lorsque les observations proviennent de lois Cauchy, exponentielle, khi-deux et normale contaminée.

Il est à noter que la loi de la plupart des statistiques non paramétriques est discrète. Or, puisque nous utilisons dans la plupart des cas une loi continue comme approximation de la loi discrète, il se trouve que certaines de ces statistiques contrôlent mal le niveau expérimental. Pour la statistique de Kolmogorov-Smirnov, le logiciel Splus permet d'utiliser la loi exacte pour établir le niveau critique observé en prenant la plus grande valeur inférieure au niveau nominal 5% et par conséquent, le niveau expérimental du test basé sur la statistique de Kolmogorov-Smirnov sera conservateur.

L'analyse des niveaux expérimentaux nous amènent, à partir des cas étudiés, à exclure les tests de Boos (B,B*,B** et B***), le test de Kolmogorov-Smirnov (KS), le test généralisé de Student (G_t), les tests de Fueda et Ohori (F_W et F_W^*) ainsi que le test de Podgor et Gastwirth ($P_{\text{w-vdW,Log-K}}$).

En ce qui a trait à la puissance expérimentale des tests obtenue nous constatons qu'elles augmentent lorsque les tailles échantillonnales augmentent et ce, pour toutes les hypothèses alternatives et distributions considérées.

Les tests construits pour tester uniquement les paramètres de position (t, t_r, t_W, t_{W_r}, et W), présentent des puissances expérimentales équivalentes avec une légère suprématie pour les tests basés sur les rangs. Lorsqu'il y a seulement une différence dans les paramètres de position, les puissances sont comparables aux tests avec les puissances les plus élevées parmi les tests quadratiques de la classe de Lepage (1971b,1977) et de Duran, Tsai et Lewis et les tests pondérés de Lepage (1975) et de Smit, Swart et Stoker lorsque les constantes de pondération l et c sont choisies à partir des hypothèses alternatives. Dans le cas où les échantillons diffèrent dans leur paramètre de dispersion seulement, ces tests sont inacceptables tandis que dans le cas où les deux échantillons diffèrent simultanément dans leurs paramètres de position et de dispersion, leurs puissances expérimentales sont moindres à celles obtenues par les tests quadratiques et pondérés lorsque les constantes de pondération l et c sont déterminées à partir des hypothèses alternatives. Pour le test non paramétrique de Mood (M) construit pour tester les paramètres de dispersion, sa puissance expérimentale est inacceptable lorsque les deux échantillons diffèrent uniquement dans leur paramètre de position, mais obtient des puissances expérimentales assez élevées lorsque les échantillons diffèrent dans leur paramètre de dispersion ou encore dans leurs paramètres de position et de dispersion sans toutefois dépasser les meilleures puissances parmi les tests quadratiques et pondérés construits à partir des hypothèses alternatives considérées. Notons que le test de Mood (M) présente des puissances expérimentales élevées lorsque la différence entre les paramètres de position et de dispersion est grande.

Pour les tests construits dans le but de tester des différences dans les paramètres de position et de dispersion, nous remarquons que les tests pondérés de la classe de Lepage (1975) construits à partir des hypothèses alternatives obtiennent généralement des puissances expérimentales supérieures aux tests correspondants de la classe de tests quadratiques de Lepage (1971b,1977).

Aussi, tel que démontré par Podgor et Gastwirth (1994), nous remarquons que le test généralisé de Wilcoxon (G_r) et le test de Duran, Tsai et Lewis ($T_{W,M}$) sont à peu près équivalents puisque leurs puissances sont très semblables dans tous les cas considérés.

D'autre part, nous constatons que les tests asymptotiquement optimaux de la classe de Lepage (1971b,1977) obtiennent les meilleures puissances expérimentales lorsque la distribution correspond à celle pour laquelle ils ont été développés. Aussi, soulignons que les tests pondérés pour les lois normale et logistique ($P_{vdW,K}$ et $P_{W,Log}$) construits à partir des hypothèses alternatives considérées obtiennent des résultats semblables et les puissances expérimentales les plus élevées pour toutes les distributions sauf pour la loi Cauchy où le test $P_{Sin,Cos}$ est expérimentalement le plus puissant. Parmi les tests quadratiques, les tests $T_{vdW,K}$ et $T_{W,Log}$ asymptotiquement optimaux pour les lois normale et logistique présentent aussi des puissances expérimentales très semblables et les plus élevées pour toutes les distributions étudiées sauf la distribution Cauchy où le test $T_{Sin,Cos}$ présente les meilleures puissances expérimentales.

2.3 Conclusion

Les résultats que nous avons obtenus suggèrent que les tests pondérés construits à partir des hypothèses alternatives obtiennent des puissances expérimentales plus élevées que les tests quadratiques ainsi que tous les autres tests que nous avons considérés pour notre étude. Ce fait n'est pas surprenant puisque nous utilisons l'information de l'hypothèse alternative pour construire ces tests ce qui a pour effet d'augmenter la puissance. Or en pratique, nous ne connaissons que très rarement les distributions et les paramètres de position et de dispersion dont proviennent les observations et comme les résultats de l'étude expérimentale le suggèrent, le fait de prendre des constantes de pondération loin des valeurs théoriques compromet de façon importante la puissance des tests pondérés. Ainsi, il est plus approprié d'utiliser des tests qui ne nécessitent pas la connaissance a priori des paramètres de position et/ou de dispersion. De plus, comme les niveaux expérimentaux des tests pondérés étaient quelque peu supérieurs aux niveaux expérimentaux des tests quadratiques, il est raisonnable de penser qu'à niveaux égaux, ces deux classes de tests obtiendraient des puissances expérimentales semblables. Ces considérations nous amènent donc à préférer l'utilisation des tests quadratiques aux tests pondérés. Plus précisément, nous préconisons l'utilisation des tests asymptotiquement optimaux pour les lois normales ou logistique de Lepage ($T_{\mathrm{vdW,K}}$ ou $T_{\mathrm{W,Log}}$) qui offrent de façon générale, les meilleures performances pour tester la différence dans les paramètres de position et/ou de dispersion sauf lorsque les distributions sont de lois Cauchy où le test asymptotiquement optimal pour la loi Cauchy ($T_{\mathrm{Sin,Cos}}$) est à considérer.

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons fait l'étude de différents tests construits dans le but de comparer des populations pouvant différer simultanément dans leurs paramètres de position et de dispersion. Ces tests ont ensuite fait l'objet d'une étude expérimentale afin de comparer leur niveau expérimental ainsi que leurs puissances expérimentales.

De façon générale, il ressort de cette étude que les tests pondérés asymptotiquement optimaux de Lepage (1975) obtiennent de façon générale les meilleures puissances expérimentales lorsque ces derniers sont construits à partir des hypothèses alternatives. Or, comme il n'arrive que très peu souvent en pratique que nous connaissions d'avance les paramètres de position et de dispersion, nous préconisons l'utilisation des tests de combinaisons quadratiques asymptotiquement optimaux pour les lois normales ou logistique de Lepage (1971b,1977) sauf lorsque les observations sont de loi Cauchy où le test asymptotiquement optimal pour cette loi Cauchy est plus approprié.

Il est clair que le nombre restreint d'hypothèses alternatives et de tailles échantillonnales que nous avons considérées dans ce présent mémoire ne couvrent pas tous les cas pouvant être rencontrés en pratique. Ainsi, il serait intéressant de pousser un peu plus loin l'étude en considérant d'autres hypothèses alternatives, distributions et tailles échantillonnales. De plus, dans cette présente étude, nous nous sommes restreints au cas où les deux populations étaient de mêmes lois, mais il serait intéressant d'étudier le comportement des tests lorsque ces dernières diffèrent.

RÉFÉRENCES

Ansari, A.R. & Bradley, R.A. (1960). Rank-Sum Tests for Dispersions. *Annals of Mathematical Statistics*, **31**, 1174-1189.

Barnett, A. & Eisen, E. (1982) A Quartile Test for Differences in Distribution. *Journal of the American Statistical Association*, **77**, 47-51.

Blair, R.C. & Morel, J.G. (1992). On the Use of Generalized t and Generalized Rank-Sum Statistics in Medical Research. *Statistics in Medicine*, **11**, 491-501.

Boos, D.D. (1986). Comparing *K* Populations With Linear Rank Statistics. *Journal of the American Statistical Association*, **81**, 1018-1025.

Capon, J. (1961). Asymptotic Efficiency of Certain Locally Most Powerful Rank Tests. *Annals of Mathematical Statistics*, **32**, 88-100.

Chernoff, H. & Savage, I.R. (1958). Asymptotic Normality and Efficiency of Certain Nonparametric Test Statistics. *Annals of Mathematical Statistics*, **29**, 972-994.

Conover, W.J. & Iman, R.L. (1981). Rank Transformations as a Bridge Between Parametric and Nonparametric Statistics. *The American Statistician*, **35**, 124-129.

Duran, B.S., Tsai, W.S. & Lewis, T.S. (1976). A Class of Location-Scale Nonparametric Tests. *Biometrika*, **63**, 173-176

Fueda, K. & Ohori, K. (1995). Versatile Two-Sample Rank Tests Based on Wilcoxon Test. *Bulletin of Informatics and Cybernetics*, **27(1)**, 159-164.

Gastwirth, J.L. (1966) On Robust Procedures. *Journal of the American Statistical Association*, **61**, 929-948.

Goria, M.N. (1982). A Survey of Two-Sample Location-Scale Problem, Asymptotic Relative Efficiencies of Some Rank Tests. *Statistica Neerlandica*, **36**, 3-13.

Hájek, J. (1969). *Nonparametric Statistics*. San Francisco: Holden-Day.

Hájek, J. et Šidák, Z. (1967). *Theory of Rank Tests.* New York: Academic Press.

Hill, G.W. (1970). Algorithm 395. Student's t-Distribution. *Communication of the Association for Computing Machinery*, **13**, 617-619.

Klotz J. (1962). Nonparametric Tests for Scale. *Annals of Mathematical Statistics*, **33**, 498-512.

Lehmann, E.H. (1975). *Nonparametrics: Statistical Methods Based on Ranks*, San Francisco, Calif.: Holden-Day.

Lepage, Y. (1971a). A Combination of Wilcoxon's and Ansari-Bradley's Statistics. *Biometrika*, **58**, 213-217.

Lepage, Y. (1971b). Une classe de Tests Non Paramétriques Pour les Paramètres de Location et de Dispersion. Thèse de Ph.D., Université de Montréal, Québec, Canada.

Lepage, Y. (1973). A Table for a Combined Wilcoxon Ansari-Bradley Statistic. *Biometrika*, **60**, 113-116.

Lepage, Y. (1975). Asymptotically Optimum Rank Tests for Contiguous Location and Scale Alternatives. *Communications in Statistics*, **4**, 671-687.

Lepage, Y. (1977). A Class of Nonparametric Tests for Location and Dispersion Parameters. *Communications in Statistics-Theory and Method*, **A6(7)**, 649-659.

Lipschutz, S. (1973). *Algèbre Linéaire, Cours et Problèmes*. New York: McGraw-Hill.

Mardia, K.V. (1967). A Nonparametric Test for the Bivariate Two-Sample Location Problem. *Journal of the Royal Statistical Society B*, **29**, 320-342.

Massey, F.J. jr. (1952). Distribution Table for the Deviation Between Two Sample Cumulatives. *Annals of Mathematical Statistics*, **23**, 435-441.

Mood, A.M. (1954). On the Asymptotic Efficiency of Certain Nonparametric Two-Sample Tests. *Annals of Mathematical Statistics*, **25**, 514-522.

Noether, G. E. (1955). On a Theory of Pitman, *Annals of Mathematical Statistics*, **26**, 64-68.

O'Brien, P.C. (1988). Comparing Two Samples: Extensions of the *t*, Rank-Sum, and Log-Rank Tests. *Journal of the American Statistical Association*, **83**, 52-61.

Owen, B. (1962). *Handbook of Statistical Tables*. Addison-Wesley, Reading, Mass.

Podgor, M.J. & Gastwirth, J.L. (1994). On Nonparametric and Generalized Tests for the Two-Sample Problem With Location and Scale Change Alternatives. *Statistics in Medicine*, **13**, 747-758.

Randles, R.H. (1982). On the Asymptotic Normality of Statistics With Estimated Parameters. *The Annals of Statistics*, **10**, 462-474.

Smirnov, N.V. (1939). Estimate of Deviation Between Empirical Distribution Functions in Two Independent Samples. *Bulletin of Moscow University*, **2**, 3-16.

Smit, C.F., Swart, N.G.N. & Stoker, D.J. (1987). Weighted Combinations of Rank Tests for Location-Scale Alternatives. *Communications in Statistics-Theory and Method*, **16(12)**, 3535-3553.

Splus (1988,1996). MathSoft inc. division StatSci: Seattle, Washignton.

Student (1908). The Probable Error of a Mean. *Biometrika*, **6**, 1-25.

Terry M.E. (1952). Some Rank Order Tests Which are Most Powerful Against Specific Parametric Alternatives. *Annals of Mathematical Statistics*, **23**, 346-366.

Waerden, B.L. van der (1953). Ein Never Test für das Problem der zwei Stichproben. *Math. Annalen*, **126**, 93-107.

Welch, B.L. (1936). The Specification of Rules for Rejecting Two Variable a Product With Particular Reference to an Electric Lamp Problem. *Journal of the Royal Statistical Society B*, **3**, 29-48.

Welch, B.L. (1937). The Significance of the Difference Between Two Means When the Population Variances are Unequal. *Biometrika*, **29**, 350-362.

Wilcoxon, F. (1945). Individual Comparisons by Ranking Methods. *Biometrics*, **1**, 80-83.