

2m11.2576.2

Université de Montréal

**Tests de non corrélation de deux séries chronologiques
multivariées non stationnaires**

par

Lyne Cédras

Département de mathématiques et statistique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en statistique

Novembre 1997

©Lyne Cédras, MCMXCVII



QA
3
U54
1998
V.006

Université de Montréal

Tests de non corrélation de deux séries chronologiques
multiséries non stationnaires

Dr. [Name]
Département de mathématiques et statistiques
Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à l'Université de Montréal en vue de l'obtention du grade de
Maîtrise en mathématiques



1998

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

Tests de non corrélation de deux séries chronologiques multivariées non stationnaires

présenté par:

Lyne Cédras

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

Yannis Yatracos

(président-rapporteur)

Roch Roy

(directeur de recherche)

Jean-Marie Dufour

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

18 décembre 1997



Sommaire

Les chercheurs de différents domaines s'intéressent depuis longtemps à la relation existant entre deux séries chronologiques. Des statistiques de test permettant de déterminer si deux séries chronologiques multivariées stationnaires sont non corrélées ont été élaborées dans El Himdi (1993) en généralisant des résultats de Haugh (1976). Dans ce mémoire, nous étudierons à l'aide de simulations ces mêmes statistiques de test afin de vérifier si elles peuvent être utilisées pour détecter de façon satisfaisante l'existence d'un lien unissant deux séries chronologiques multivariées partiellement non stationnaires. Pour des séries non stationnaires mais cointégrées, il est préférable de les étudier sans les différencier pour les rendre stationnaires.

Remerciements

J'aimerais tout d'abord remercier mon directeur de recherche, M. Roch Roy, pour la confiance et l'aide indispensable qu'il m'a apportées tout au long de la rédaction de ce mémoire. Je le remercie également pour sa patience et sa continue disponibilité.

Il doit être souligné que ce travail a bénéficié d'un appui financier du Conseil de recherche en sciences naturelles et en génie du Canada (CRSNG) et du Fonds FCAR par le biais de subventions à mon directeur de recherche.

Je tiens à remercier particulièrement mes parents qui ont rendu possible la réalisation de ce mémoire par leur soutien et mes amis avec qui j'ai partagé des moments très précieux dont je garderai d'excellents souvenirs.

Table des matières

Sommaire	iii
Remerciements	iv
Liste des figures	vii
Liste des tableaux	x
Introduction	1
1 Tests de non corrélation de deux séries stationnaires	4
1.1 Cas univarié	5
1.1.1 Préliminaires	5
1.1.2 Définition et propriétés des corrélations croisées	7
1.1.3 Tests de non corrélation de deux séries univariées	10
1.2 Cas multivarié	11
1.2.1 Préliminaires	11
1.2.2 Définition et propriétés des corrélations croisées	14
1.2.3 Tests de non corrélation de deux séries multivariées	16
2 Tests de non corrélation de deux séries multivariées non stationnaires	18
2.1 Modèles ARMA multivariés partiellement non stationnaires	19
2.1.1 Modèles ARIMA multivariés	19

2.1.2	Cointégration	22
2.1.3	Modèle à correction d'erreur	24
2.2	Estimation	30
2.2.1	Moindres carrés conditionnels d'un processus $AR(p)$	30
2.2.2	Distribution asymptotique des estimateurs des moindres carrés d'un processus $AR(p)$	33
2.3	Tests de non corrélation de séries partiellement non stationnaires	35
3	Simulation	38
3.1	Algorithmes de simulation	38
3.1.1	Génération de séries ARMA multivariées	38
3.1.2	Estimation et statistiques de test	40
3.2	Description de la simulation	42
3.3	Résultats de simulation	47
4	Exemple	61
4.1	Description des données	61
4.2	Analyse des séries différenciées	64
4.2.1	Modélisation des séries	64
4.2.2	Tests de non corrélation	69
4.3	Analyse des séries non différenciées	74
4.3.1	Modélisation des séries	74
4.3.2	Tests de non corrélation	81
	Conclusion	83
	A Tableaux des niveaux empiriques	85
	B Code des fonctions S-Plus	94
	Bibliographie	100

Liste des figures

2.1	Maisons en construction (X_{1t}).	23
2.2	Vente de maisons (X_{2t}).	23
2.3	Série transformée: $Z_t = 0.523X_{1t} - 0.979X_{2t}$	23
3.1	Niveaux empiriques en pourcentage de: (a) $QH^*(k)$, $ k \leq 12$, (b) QH_M^* , $M = 1, \dots, 12$, correspondant aux niveaux nominaux 1%, 5% et 10% pour le modèle AR(1), $n = 50$	48
3.2	Niveaux empiriques en pourcentage de: (a) $QH^*(k)$, $ k \leq 12$, (b) QH_M^* , $M = 1, \dots, 12$, correspondant aux niveaux nominaux 1%, 5% et 10% respectivement pour le modèle AR(1), $n = 100$	49
3.3	Niveaux empiriques en pourcentage de: (a) $QH^*(k)$, $ k \leq 12$, (b) QH_M^* , $M = 1, \dots, 12$, correspondant aux niveaux nominaux 1%, 5% et 10% respectivement pour le modèle AR(1), $n = 200$	50
3.4	Niveaux empiriques en pourcentage de: (a) $QH^*(k)$, $ k \leq 12$, (b) QH_M^* , $M = 1, \dots, 12$, correspondant aux niveaux nominaux 1%, 5% et 10% respectivement pour le modèle AR(2), $n = 50$	51
3.5	Niveaux empiriques en pourcentage de: (a) $QH^*(k)$, $ k \leq 12$, (b) QH_M^* , $M = 1, \dots, 12$, correspondant aux niveaux nominaux 1%, 5% et 10% respectivement pour le modèle AR(2), $n = 100$	52
3.6	Niveaux empiriques en pourcentage de: (a) $QH^*(k)$, $ k \leq 12$, (b) QH_M^* , $M = 1, \dots, 12$, correspondant aux niveaux nominaux 1%, 5% et 10% respectivement pour le modèle AR(2), $n = 200$	53

3.7	Niveaux empiriques en pourcentage de: (a) $QH^*(k)$, $ k \leq 12$, (b) QH_M^* , $M = 1, \dots, 12$, correspondant aux niveaux nominaux 1%, 5% et 10% respectivement pour le modèle AR(4), $n = 50$	54
3.8	Niveaux empiriques en pourcentage de: (a) $QH^*(k)$, $ k \leq 12$, (b) QH_M^* , $M = 1, \dots, 12$, correspondant aux niveaux nominaux 1%, 5% et 10% respectivement pour le modèle AR(4), $n = 100$	55
3.9	Niveaux empiriques en pourcentage de: (a) $QH^*(k)$, $ k \leq 12$, (b) QH_M^* , $M = 1, \dots, 12$, correspondant aux niveaux nominaux 1%, 5% et 10% respectivement pour le modèle AR(4), $n = 200$	56
3.10	Niveaux empiriques en pourcentage de: (a) $QH^*(k)$, $ k \leq 12$, (b) QH_M^* , $M = 1, \dots, 12$, correspondant aux niveaux nominaux 1%, 5% et 10% respectivement pour le modèle ARMA(1,1), $n = 50$	57
3.11	Niveaux empiriques en pourcentage de: (a) $QH^*(k)$, $ k \leq 12$, (b) QH_M^* , $M = 1, \dots, 12$, correspondant aux niveaux nominaux 1%, 5% et 10% respectivement pour le modèle ARMA(1,1), $n = 100$	58
3.12	Niveaux empiriques en pourcentage de: (a) $QH^*(k)$, $ k \leq 12$, (b) QH_M^* , $M = 1, \dots, 12$, correspondant aux niveaux nominaux 1%, 5% et 10% respectivement pour le modèle ARMA(1,1), $n = 200$	59
4.1	Séries d'indicateurs économiques canadiens et américains.	63
4.2	Composantes de la série résiduelle correspondant à la série canadienne différenciée.	67
4.3	Autocorrélations et corrélations croisées résiduelles de la série canadienne différenciée.	68
4.4	Composantes de la série résiduelle correspondant à la série américaine différenciée.	70
4.5	Autocorrélations et corrélations croisées résiduelles de la série américaine différenciée.	71

4.6	Valeurs de la statistique $QH^*(k)$ à différents délais pour les séries canadienne et américaine différenciées.	73
4.7	Composantes de la série résiduelle correspondant à la série canadienne non différenciée.	76
4.8	Autocorrélations et corrélations croisées résiduelles de la série canadienne non différenciée.	77
4.9	Composantes de la série résiduelle correspondant à la série américaine non différenciée.	79
4.10	Autocorrélations et corrélations croisées résiduelles de la série américaine non différenciée.	80
4.11	Valeurs de la statistique $QH^*(k)$ à différents délais pour les séries canadienne et américaine non différenciées.	82

Liste des tableaux

3.1	Modèles utilisés pour la simulation.	43
3.2	Valeurs des paramètres des modèles utilisés pour la simulation. . .	44
3.3	Racines du déterminant des opérateurs autorégressifs et moyenne mobile.	44
4.1	Valeurs de la statistique QH_M^* et niveaux empiriques en fonction de M pour les séries canadienne et américaine différenciées. . . .	73
4.2	Valeurs de la statistique QH_M^* et niveaux empiriques en fonction de M pour les séries canadienne et américaine non différenciées. .	82
A.1	Niveaux empiriques en pourcentage de la statistique $QH^*(k)$ à des délais individuels, pour le modèle AR(1).	86
A.2	Niveaux empiriques en pourcentage de la statistique portemanteau QH_M^* , pour le modèle AR(1).	87
A.3	Niveaux empiriques en pourcentage de la statistique $QH^*(k)$ à des délais individuels, pour le modèle AR(2).	88
A.4	Niveaux empiriques en pourcentage de la statistique portemanteau QH_M^* , pour le modèle AR(2).	89
A.5	Niveaux empiriques en pourcentage de la statistique $QH^*(k)$ à des délais individuels, pour le modèle AR(4) saisonnier.	90
A.6	Niveaux empiriques en pourcentage de la statistique portemanteau QH_M^* , pour le modèle AR(4) saisonnier.	91

A.7 Niveaux empiriques en pourcentage de la statistique $QH^*(k)$ à des délais individuels, pour le modèle ARMA(1,1).	92
A.8 Niveaux empiriques en pourcentage de la statistique portemanteau QH_M^* , pour le modèle ARMA(1,1).	93

Introduction

Depuis plusieurs années, les chercheurs s'intéressent à la relation existant entre deux séries chronologiques. Ces recherches se concentrent surtout en économétrie, où nous voulons comprendre les mécanismes économiques associés à différentes variables, telles les taux d'intérêt à long et à court terme, les revenus et dépenses des familles. L'étude de liaisons entre deux séries chronologiques multivariées est souvent la première étape à l'identification des modèles régissant le système à l'étude. Par conséquent, il est important d'avoir des méthodes qui soient non seulement simples à appliquer, mais aussi faciles à interpréter afin de vérifier la non corrélation (ou l'indépendance dans le cas de séries gaussiennes) entre deux séries chronologiques multivariées qui ne sont pas nécessairement stationnaires. Dans ce mémoire, nous nous concentrons d'ailleurs sur les processus multivariés non stationnaires.

Il y a une vingtaine d'années, Haugh (1976) s'est penché sur le cas des séries univariées et a proposé une statistique permettant de tester la non corrélation entre deux séries, qui est intuitivement facile à comprendre et à interpréter. Cette dernière est basée sur les corrélations croisées résiduelles entre les deux séries. Depuis, d'autres statisticiens se sont intéressés aux relations existant entre deux séries chronologiques. El Himdi (1993) et El Himdi et Roy (1997) ont généralisé les résultats de Haugh au cas multivarié stationnaire afin d'étudier la dépendance ainsi que les liens de causalité entre deux séries multivariées. Pham et Roy (1997, projet en cours) traitent des séries chronologiques multivariées non stationnaires

(à racines unitaires) en montrant, entre autre, que les propriétés asymptotiques des corrélations croisées résiduelles sont les mêmes que dans le cas stationnaire. Ainsi, les statistiques de test étudiées dans El Himdi et Roy (1997) peuvent être utilisées dans ce cas.

La représentation adéquate de la structure non stationnaire dans la modélisation des séries chronologiques multivariées est importante pour assurer la spécification appropriée du modèle, pour obtenir des meilleures prévisions, pour augmenter la compréhension et pour éviter des difficultés associées à la surdifférenciation des séries multivariées non stationnaires, qui peuvent se produire lorsque les séries sont différenciées composante par composante. Pour vérifier si un système est en équilibre sur une longue période et avant d'estimer les paramètres d'un modèle ARMA multivarié non stationnaire, il est souvent d'intérêt de tester si les composantes de la série sont cointégrées, c'est-à-dire s'il existe une ou plusieurs combinaisons linéaires des composantes qui soient stationnaires.

Ce mémoire s'inscrit dans le cadre d'un projet de recherche en cours réalisé par Pham et Roy sur les tests de non corrélation de séries multivariées non stationnaires. Ces derniers ont montré que les statistiques de test développées pour le cas stationnaire continuent de suivre une distribution asymptotique khi-deux sous l'hypothèse nulle de non corrélation. L'objectif premier de ce travail est d'étudier par simulation les propriétés de ces statistiques pour des échantillons finis et en particulier de vérifier si la distribution asymptotique khi-deux fournit une approximation satisfaisante de la distribution exacte pour des séries courtes ou de longueur moyenne.

Pour mener à terme l'étude informatique, il est essentiel de bien comprendre les aspects théoriques. Pour cette raison, une synthèse des principaux concepts et résultats théoriques pertinents tant pour le cas stationnaire que le cas non

stationnaire est présentée dans les deux premiers chapitres.

Nous introduisons au premier chapitre quelques définitions importantes concernant les séries chronologiques univariées et multivariées. Nous voyons les principales propriétés des corrélations croisées et nous décrivons les statistiques de test de non corrélation entre deux séries univariées proposée par Haugh et leur généralisation au cas multivarié.

Au chapitre 2, nous traitons des séries multivariées non stationnaires. Nous introduisons les concepts de cointégration et de représentation à correction d'erreur, ainsi que les modèles ARMA partiellement non stationnaires (à racines unitaires). Par la suite, nous présentons l'estimation des paramètres, plus spécifiquement l'estimation par moindres carrés d'un modèle autorégressif. Pour conclure ce chapitre, nous rapportons les propriétés des corrélations croisées de processus multivariés non stationnaires discutées dans Pham et Roy (1997). Nous reprenons ainsi les statistiques de test de El Himdi et Roy (1997) que nous retrouvons également au chapitre 1.

Les algorithmes pour générer des séries ARMA multivariées, pour estimer les paramètres par moindres carrés et pour calculer les statistiques de test sont décrits au chapitre 3. Ces algorithmes ont été programmés en S-Plus et le code est fourni en annexe. Nous exposons également dans ce même chapitre les résultats de simulations en vérifiant si le niveau des tests vus précédemment est bien contrôlé aux niveaux nominaux usuels.

Finalement au chapitre 4, nous traitons un exemple dans lequel nous testons la non corrélation entre deux séries multivariées non stationnaires représentant des indicateurs économiques canadiens et américains.

Chapitre 1

Tests de non corrélation de deux séries stationnaires

Dans ce chapitre, nous exposons dans un premier temps les principales caractéristiques d'une série chronologique univariée. Nous définissons les corrélations croisées et leurs propriétés, puis nous établissons les statistiques de test de non corrélation entre deux séries chronologiques univariées qui sont basées sur les corrélations croisées résiduelles. Dans un deuxième temps, nous présentons les mêmes caractéristiques et propriétés pour des séries chronologiques multivariées. Finalement, nous généralisons les statistiques de test au cas multivarié.

1.1 Cas univarié

1.1.1 Préliminaires

Voici quelques définitions importantes concernant les séries chronologiques univariées.

Définition 1.1.1 *Le processus $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ est stationnaire au sens large si*

- (i) $\mathbb{E}[X_t^2] < \infty, t \in \mathbb{Z},$
- (ii) $\mathbb{E}[X_t] \equiv \mu, t \in \mathbb{Z},$
- (iii) $\text{Cov}(X_t, X_s) = R(s - t), t, s \in \mathbb{Z}.$

Posons

$$\text{Cov}(X_t, X_{t-k}) = \gamma(k), \quad t, k \in \mathbb{Z},$$

où $\gamma(k)$ est l'autocovariance de délai k du processus $\{X_t\}$. Définissons également la corrélation entre X_t et X_{t-k} par

$$\text{Corr}(X_t, X_{t-k}) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \rho(k), \quad t, k \in \mathbb{Z},$$

qui est appelé l'autocorrélation de délai k du processus $\{X_t\}$. Si $\mathbb{E}[X_t] = 0$ et $\rho(k) = 0, \forall k$, alors le processus $\{X_t\}$ est appelé bruit blanc.

À partir d'une série d'observations X_1, \dots, X_n , les fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation sont estimées par

$$c(k) = \frac{1}{n} \sum_{t=k+1}^n (X_t - \bar{X})(X_{t-k} - \bar{X}) \text{ et } r(k) = \frac{c(k)}{c(0)}, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Ce sont les autocovariances et autocorrélations échantionnales de délai k du processus $\{X_t\}$.

Définition 1.1.2 *Le processus $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ est linéaire s'il peut être écrit sous la forme*

$$X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

où μ et les ψ_j sont des paramètres réels tels que $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$, et $\{a_t\}$ est un bruit blanc.

Il est à noter qu'un processus linéaire est toujours stationnaire au sens large.

Définition 1.1.3 *Le processus $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$, tel que $\mathbb{E}[X_t] = 0$, est inversible s'il admet une représentation de la forme*

$$X_t = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j X_{t-j} + a_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

où les π_j sont réels tels que $\sum_{j=1}^{\infty} |\pi_j| < \infty$, et $\{a_t\}$ est un bruit blanc.

Définition 1.1.4 *Le processus $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$, tel que $\mathbb{E}[X_t^2] < \infty$ et $\mathbb{E}[X_t] = 0$, est un processus autorégressif-moyenne mobile d'ordre (p, q) , noté ARMA(p, q), s'il satisfait l'équation*

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (1.1)$$

où $\{a_t\}$ est un bruit blanc et les paramètres ϕ_i et θ_j sont réels, $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, q$.

Nous pouvons également écrire l'équation (1.1) sous la forme

$$\phi(B)X_t = \theta(B)a_t \quad (1.2)$$

avec $\phi(B) = (1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)$ et $\theta(B) = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q)$, où B est l'opérateur retard défini par $B^m X_t = X_{t-m}$, $m \geq 1$ et $B^0 = 1$, l'opérateur identité.

Notons qu'un processus ARMA(p, q) est

- stationnaire si les racines de $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p$ sont à l'extérieur du cercle unité;
- inversible si les racines de $\theta(z) = 1 - \theta_1 z - \dots - \theta_q z^q$ sont à l'extérieur du cercle unité.

Il existe deux cas particuliers très importants d'un processus ARMA(p, q). Lorsque $q = 0$, $\{X_t\}$ est appelé processus autorégressif, noté AR(p); et lorsque $p = 0$, il est dit processus moyenne mobile, noté MA(q).

1.1.2 Définition et propriétés des corrélations croisées

Soient $\{X_{it} : t \in \mathbb{Z}\}$, $i = 1, 2$, deux processus univariés stationnaires de moyennes μ_i , de fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation $\gamma_X^{(ii)}(k)$ et $\rho_X^{(ii)}(k)$, $k \geq 0$. Les deux processus sont conjointement stationnaires si la covariance croisée entre X_{1t} et $X_{2,t-k}$ est fonction de la différence k seulement, c'est-à-dire

$$\text{Cov}(X_{1t}, X_{2,t-k}) = \mathbb{E}[(X_{1t} - \mu_1)(X_{2,t-k} - \mu_2)] = \gamma_X^{(12)}(k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

La corrélation croisée est donnée par

$$\rho_X^{(12)}(k) = \gamma_X^{(12)}(k) \{ \gamma_X^{(11)}(0) \gamma_X^{(22)}(0) \}^{-1/2}.$$

Les covariances et corrélations croisées possèdent la propriété suivante:

$$\gamma_X^{(21)}(k) = \gamma_X^{(12)}(-k) \text{ et } \rho_X^{(21)}(k) = \rho_X^{(12)}(-k).$$

À partir de deux séries d'observations $X_{i1}, \dots, X_{in}, i = 1, 2$, de moyenne nulle, $\gamma_X^{(12)}(k)$ est estimée par

$$c_X^{(12)}(k) = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{t=k+1}^n X_{1t} X_{2,t-k}, & 0 \leq k \leq n-1, \\ \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n+k} X_{1t} X_{2,t-k}, & -n+1 \leq k \leq 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

Soit $c_X^{(ii)}(k)$, l'autocovariance échantionnale de délai k de la i -ième série, $i = 1, 2$, alors $\rho_X^{(12)}(k)$ est estimée par

$$r_X^{(12)}(k) = c_X^{(12)}(k) \{c_X^{(11)}(0)c_X^{(22)}(0)\}^{-1/2}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.4)$$

Soit $r_X^{(M)} = (r_X^{(12)}(-M), \dots, r_X^{(12)}(M))'$, le vecteur de corrélations croisées correspondant aux deux séries pour les délais $-M, -M+1, \dots, M$, alors

$$\sqrt{n} r_X^{(M)} \xrightarrow{L} N_{2M+1}(0, \Sigma_M)$$

si les deux séries sont non corrélées; où \xrightarrow{L} indique la convergence en loi, et

$$\Sigma_M = (\sigma_{ij})_{(2M+1) \times (2M+1)} \quad \text{avec} \quad \sigma_{ij} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \rho_X^{(11)}(\nu) \rho_X^{(22)}(\nu + j - i)$$

qui est la covariance asymptotique entre $r_X^{(12)}(i)$ et $r_X^{(12)}(j)$. Ce résultat qui est dû à Bartlett (1946) est démontré dans Brockwell et Davis (1991, pp. 400-402).

Si les deux séries sont des bruits blancs, c'est-à-dire que $X_{it} = a_{it}, i = 1, 2$ et que $r_a^{(M)} = (r_a^{(12)}(-M), \dots, r_a^{(12)}(M))'$ représente le vecteur de corrélations

croisées, où $r_a^{(12)}(k)$ et $c_a^{(12)}(k)$ représentent respectivement la corrélation et la covariance croisées échantionnales de délai k , définies par (1.4) et (1.3), des séries bruits blancs $\{a_{it}\}$, $i = 1, 2$. Dans ce cas, la matrice Σ_M se réduit à la matrice identité de dimension $2M + 1$. Ainsi la distribution asymptotique des corrélations croisées entre deux bruits blancs, sous l'hypothèse de non corrélation, est $N_{2M+1}(0, I)$.

En pratique, nous ne pouvons calculer les valeurs du bruit blanc $\{a_t\}$ apparaissant dans l'équation de définition (1.1), car les valeurs des paramètres autorégressifs, ϕ_i , et moyenne mobile, θ_j , sont inconnues. Cependant, après avoir identifié un modèle satisfaisant pour décrire la série à l'étude, les paramètres ϕ_i et θ_j peuvent être estimés par la méthode des moindres carrés ou par la méthode de vraisemblance maximale (voir Brockwell et Davis (1991, pp. 256-258) ou Wei(1990, pp. 137-149)). Par analogie avec (1.2), le modèle estimé peut s'écrire sous la forme

$$\hat{\phi}(B)X_t = \hat{\theta}(B)\hat{a}_t, \quad (1.5)$$

où $\hat{\phi}(B) = (1 - \hat{\phi}_1 B - \dots - \hat{\phi}_p B^p)$, $\hat{\theta}(B) = (1 - \hat{\theta}_1 B - \dots - \hat{\theta}_q B^q)$ et \hat{a}_t , la valeur estimée de a_t , est appelée le résidu associé à l'observation X_t , $t = 1, \dots, n$. Après avoir estimé un modèle pour chacune des deux séries, nous pouvons calculer $r_{\hat{a}}^{(M)} = (r_{\hat{a}}^{(12)}(-M), \dots, r_{\hat{a}}^{(12)}(M))'$, le vecteur des corrélations croisées des séries résiduelles $\{\hat{a}_{1t}\}$ et $\{\hat{a}_{2t}\}$.

Voici un théorème important, obtenu par Haugh (1976), concernant les corrélations croisées résiduelles.

Théorème 1.1.1 *Considérons n observations de deux processus ARMA conjoin-*

tement stationnaires, $\{X_{1t}\}$ et $\{X_{2t}\}$, c'est-à-dire

$$\phi_i(B)X_{it} = \theta_i(B) a_{it}, \quad i = 1, 2,$$

où $\{a_{it}\}$, $i = 1, 2$, sont les processus innovation correspondants. Si les deux séries sont non corrélées, alors $\sqrt{n}r_a^{(M)}$ et $\sqrt{n}r_a^{(M)}$ ont la même distribution asymptotique $N_{2M+1}(0, I)$.

1.1.3 Tests de non corrélation de deux séries univariées

Pour tester la non corrélation (ou l'indépendance dans le cas de séries gaussiennes) entre deux séries, il est donc naturel d'utiliser un test basé sur les corrélations croisées résiduelles. Tout d'abord remarquons que

$$\rho_X^{(12)}(k) = 0, \quad k \in \mathbb{Z} \iff \rho_a^{(12)}(k) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Pour démontrer cette équivalence, il suffit de représenter X_{1t} et X_{2t} sous les formes moyenne mobile et autorégressive, c'est-à-dire

$$X_{it} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{ij} a_{i,t-j}, \quad \forall t, \quad i = 1, 2, \quad (1.6)$$

$$X_{it} = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_{ij} X_{i,t-j} + a_{it}, \quad \forall t, \quad i = 1, 2. \quad (1.7)$$

Si $\rho_a^{(12)}(k) = 0, \forall k$, il découle de l'équation (1.6) que

$$\rho_X^{(12)}(k) = 0, \quad \forall k.$$

De même, selon l'équation (1.7), si $\rho_X^{(12)}(k) = 0, \forall k$, il s'ensuit que

$$\rho_a^{(12)}(k) = 0, \quad \forall k.$$

Par conséquent tester la non corrélation entre deux séries ARMA est équivalent à tester la non corrélation entre les bruits blancs correspondants. Haugh a ainsi proposé la statistique de test suivante:

$$\text{QH}_M = n \sum_{k=-M}^M (r_{\hat{a}}^{(12)}(k))^2$$

qui suit asymptotiquement une distribution khi-deux à $2M + 1$ degrés de liberté sous l'hypothèse $H_0 : \rho_{\hat{a}}^{(12)}(k) = 0, \forall k$. Nous rejetons donc H_0 , au niveau α , si $\text{QH}_M > \chi_{2M+1, 1-\alpha}^2$, où $\chi_{dl, p}^2$ désigne le quantile d'ordre p d'une loi khi-deux à dl degrés de liberté.

Notons que pour $|k|$ grand (par rapport à n), une meilleure approximation de la variance de $r_{\hat{a}}^{(12)}(k)$ est $n^{-1}(1 - |k|/n)$. La statistique de test devient alors

$$\text{QH}_M^* = n^2 \sum_{k=-M}^M (n - |k|)^{-1} (r_{\hat{a}}^{(12)}(k))^2,$$

qui suit aussi asymptotiquement une distribution χ_{2M+1}^2 sous H_0 . Haugh (1976) a vérifié par simulation que la distribution de QH_M^* est mieux approximée par la distribution χ_{2M+1}^2 lorsque M est grand par rapport à n (disons $M > n/10$).

1.2 Cas multivarié

1.2.1 Préliminaires

Avant d'introduire la prochaine définition, notons que la norme euclidienne d'une matrice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times m}$ est définie par $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij}^2}$.

Définition 1.2.1 Un processus multivarié $\{\mathbf{X}_t : t \in \mathbb{Z}\}$ est dit stationnaire au sens large s'il possède les propriétés suivantes:

- (i) $\mathbb{E}[\|\mathbf{X}_t\|^2] < \infty, t \in \mathbb{Z},$
- (ii) $\mathbb{E}[\mathbf{X}_t] = \boldsymbol{\mu}, t \in \mathbb{Z},$
- (iii) $\text{Cov}(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_s) = \mathbb{E}[(\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}_s - \boldsymbol{\mu})'] = \boldsymbol{\Gamma}(t - s), t, s \in \mathbb{Z}.$

Soit $\mathbf{X} = \{\mathbf{X}_t = (X_{1t}, \dots, X_{mt})' : t \in \mathbb{Z}\}$, un processus multivarié stationnaire de dimension m et de moyenne $\boldsymbol{\mu}$, où pour chaque $i = 1, \dots, m$, $\{X_{it} : t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus univarié. Généralisons quelques définitions vues antérieurement au cas multivarié.

Supposons sans perte de généralité que $\mathbb{E}[\mathbf{X}_t] = \mathbf{0}$. La matrice de covariance de délai k , $k \in \mathbb{Z}$, est donnée par

$$\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}}(k) = \mathbb{E}[(\mathbf{X}_t)(\mathbf{X}_{t-k})'] = (\gamma_{ij}(k))_{m \times m}$$

et la matrice de corrélation de délai k , $k \in \mathbb{Z}$, est donnée par

$$\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{X}}(k) = (\rho_{ij}(k))_{m \times m}, \quad \rho_{ij}(k) = \gamma_{ij}(k) \{\gamma_{ii}(0)\gamma_{jj}(0)\}^{-1/2}.$$

Si $\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{X}}(k) = \mathbf{0}, \forall k$, alors le processus \mathbf{X}_t est appelé bruit blanc multivarié.

Définition 1.2.2 Un processus $\{\mathbf{X}_t\}$ est linéaire s'il peut être écrit sous la forme

$$\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\mu} + \sum_{s=0}^{\infty} \boldsymbol{\Psi}_s \mathbf{a}_{t-s}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (1.8)$$

où $\boldsymbol{\Psi}_s$ sont des matrices de dimension $m \times m$ telles que $\sum_{s=0}^{\infty} \|\boldsymbol{\Psi}_s\|^2 < \infty$ et $\{\mathbf{a}_t\}$ est un bruit blanc multivarié.

Un processus linéaire multivarié est toujours stationnaire.

Définition 1.2.3 *Un processus $\{\mathbf{X}_t\}$, tel que $\mathbb{E}[\mathbf{X}_t] = \mathbf{0}$, est inversible s'il peut s'écrire sous la forme*

$$\mathbf{X}_t = \sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{\Pi}_s \mathbf{X}_{t-s} + \mathbf{a}_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (1.9)$$

où $\mathbf{\Pi}_s$ sont des matrices de dimension $m \times m$ telles que $\sum_{s=1}^{\infty} \|\mathbf{\Pi}_s\| < \infty$ et $\{\mathbf{a}_t\}$ est le processus innovation associé à $\{\mathbf{X}_t\}$.

Définition 1.2.4 *Un processus $\{\mathbf{X}_t\}$, tel que $\mathbb{E}[\mathbf{X}_t] = \mathbf{0}$, est ARMA(p, q) multivarié s'il admet une représentation de la forme*

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{X}_{t-1} + \dots + \mathbf{\Phi}_p \mathbf{X}_{t-p} + \mathbf{a}_t - \mathbf{\Theta}_1 \mathbf{a}_{t-1} - \dots - \mathbf{\Theta}_q \mathbf{a}_{t-q}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (1.10)$$

où $\mathbf{\Phi}_i, i = 1, \dots, p, \mathbf{\Theta}_j, j = 1, \dots, q$ sont des matrices de dimension $m \times m$ des coefficients AR et MA respectivement et $\{\mathbf{a}_t\}$ est un bruit blanc multivarié.

En définissant les opérateurs polynômes matriciels autorégressifs et moyenne mobile, $\mathbf{\Phi}(B) = (\mathbf{I} - \mathbf{\Phi}_1 B - \dots - \mathbf{\Phi}_p B^p)$ et $\mathbf{\Theta}(B) = (\mathbf{I} - \mathbf{\Theta}_1 B - \dots - \mathbf{\Theta}_q B^q)$, l'équation (1.10) peut s'écrire de la forme

$$\mathbf{\Phi}(B)\mathbf{X}_t = \mathbf{\Theta}(B)\mathbf{a}_t, \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (1.11)$$

Il est démontré dans Brockwell et Davis (1991, pp. 407-410) qu'un processus ARMA(p, q) est

- stationnaire si les racines du déterminant du polynôme matriciel autorégressif, $\det\{\mathbf{\Phi}(B)\}$, sont à l'extérieur du cercle unité;
- inversible si les racines du déterminant du polynôme matriciel moyenne mobile, $\det\{\mathbf{\Theta}(B)\}$, sont à l'extérieur du cercle unité.

1.2.2 Définition et propriétés des corrélations croisées

Si \mathbf{X}_t est partitionné en deux sous-processus, $\mathbf{X}_t = (\mathbf{X}_t^{(1)'}, \mathbf{X}_t^{(2)'})'$, où $\mathbf{X}_t^{(h)} = (X_{1t}^{(h)}, \dots, X_{m_h t}^{(h)})'$, $h = 1, 2$ et $m_1 + m_2 = m$, alors $\Gamma_{\mathbf{X}}(k)$ peut s'écrire sous la forme

$$\Gamma_{\mathbf{X}}(k) = \begin{bmatrix} \Gamma_{\mathbf{X}}^{(11)}(k) & \Gamma_{\mathbf{X}}^{(12)}(k) \\ \Gamma_{\mathbf{X}}^{(21)}(k) & \Gamma_{\mathbf{X}}^{(22)}(k) \end{bmatrix},$$

où $\Gamma_{\mathbf{X}}^{(hh)}(k)$ est la matrice de covariance de délai k du processus $\{\mathbf{X}_t^{(h)}\}$, $h = 1, 2$, $\Gamma_{\mathbf{X}}^{(12)}(k)$ est la matrice de covariance croisée de délai k entre $\{\mathbf{X}_t^{(1)}\}$ et $\{\mathbf{X}_t^{(2)}\}$. Notons que $\Gamma_{\mathbf{X}}^{(12)}(k) = \Gamma_{\mathbf{X}}^{(21)}(-k)'$. La matrice de corrélation, $\rho_{\mathbf{X}}(k)$, peut aussi être partitionnée de la même façon.

À partir d'une série de n observations $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$, où $\mathbb{E}[\mathbf{X}_t] = \mathbf{0}$, la matrice $\Gamma_{\mathbf{X}}(k)$ est estimée par

$$\mathbf{C}_{\mathbf{X}}(k) = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{t=k+1}^n \mathbf{X}_t \mathbf{X}'_{t-k}, & 0 \leq k \leq n-1, \\ \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n+k} \mathbf{X}_t \mathbf{X}'_{t-k}, & -n+1 \leq k \leq 0, \end{cases}$$

et $\rho_{\mathbf{X}}(k)$ est estimée par $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}(k) = (r_{ij}(k))_{m \times m}$, où $r_{ij}(k) = c_{ij}(k) \{c_{ii}(0)c_{jj}(0)\}^{-1/2}$, $k \in \mathbb{Z}$. $\mathbf{C}_{\mathbf{X}}(k)$ et $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}(k)$ sont aussi partitionnés de façon similaire à $\Gamma_{\mathbf{X}}(k)$.

Supposons que les séries $\{\mathbf{X}_t^{(h)}\}$, $h = 1, 2$, sont représentées par des modèles ARMA multivariés de la forme $\Phi^{(h)}(B)\mathbf{X}_t^{(h)} = \Theta^{(h)}(B)\mathbf{a}_t^{(h)}$, $t \in \mathbb{Z}$, où $\{\mathbf{a}_t^{(h)}\}$, $h = 1, 2$, sont les processus innovation correspondants aux deux séries. Soit vec , l'opérateur qui transforme une matrice en vecteur en plaçant les colonnes les unes en dessous des autres en partant de la gauche, et soit \otimes , le symbole désignant le produit matriciel de Kronecker. Définissons le vecteur de corrélations croisées associé au processus $\{\mathbf{a}_t\}$ par

$$\mathbf{r}_{\mathbf{a}}^{(M)} = (vec\mathbf{R}_{\mathbf{a}}^{(12)}(-M)', \dots, vec\mathbf{R}_{\mathbf{a}}^{(12)}(M)')'.$$

Le théorème suivant découle de Roy (1989).

Théorème 1.2.1 *Sous des conditions générales de régularité sur les quatre premiers moments proposés par Hannan (1976) (voir aussi El Himdi et Roy (1997)), si les processus $\{\mathbf{a}_t^{(1)}\}$ et $\{\mathbf{a}_t^{(2)}\}$ sont non corrélés, alors $\sqrt{n} \mathbf{r}_a^{(M)}$ suit asymptotiquement une distribution multinormale de dimension $(2M + 1)m_1m_2$ avec vecteur moyenne zéro et matrice de covariance $\mathbf{I}_{2M+1} \otimes (\boldsymbol{\Omega}_2 \otimes \boldsymbol{\Omega}_1)$. Les matrices $\boldsymbol{\Omega}_1$ et $\boldsymbol{\Omega}_2$ sont les matrices de corrélation des processus $\{\mathbf{a}_t^{(1)}\}$ et $\{\mathbf{a}_t^{(2)}\}$ respectivement.*

Comme pour le cas univarié, nous devons estimer les paramètres après avoir identifié un modèle satisfaisant pour décrire la série. Nous obtenons ainsi les résidus et posons $\mathbf{r}_{\hat{\mathbf{a}}}^{(M)} = (\text{vec} \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{a}}}^{(12)}(-M)', \dots, \text{vec} \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{a}}}^{(12)}(M)')'$, le vecteur des corrélations croisées résiduelles, où les paramètres ont été estimés par la méthode des moindres carrés ou une méthode asymptotiquement équivalente.

El Himdi et Roy (1997) présentent la généralisation suivante du théorème de Haugh au cas multivarié.

Théorème 1.2.2 *Soient $\{\mathbf{X}_t^{(1)}\}$ et $\{\mathbf{X}_t^{(2)}\}$, deux processus linéaires stationnaires et inversibles, admettant une représentation ARMA multivarié. Supposons que les processus innovation associés, $\{\mathbf{a}_t^{(1)}\}$ et $\{\mathbf{a}_t^{(2)}\}$, satisfont les conditions de régularité de Hannan (1976). Si les deux processus $\{\mathbf{X}_t^{(1)}\}$ et $\{\mathbf{X}_t^{(2)}\}$ sont non corrélés, alors $\sqrt{n} \mathbf{r}_{\hat{\mathbf{a}}}^{(M)}$ et $\sqrt{n} \mathbf{r}_a^{(M)}$ possèdent la même distribution asymptotique multinormale $N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{2M+1} \otimes (\boldsymbol{\Omega}_2 \otimes \boldsymbol{\Omega}_1))$, où $\boldsymbol{\Omega}_1$ et $\boldsymbol{\Omega}_2$ sont les matrices de corrélation des processus $\{\mathbf{a}_t^{(1)}\}$ et $\{\mathbf{a}_t^{(2)}\}$ respectivement.*

1.2.3 Tests de non corrélation de deux séries multivariées

Nous voulons tester la non corrélation (ou l'indépendance dans le cas de séries gaussiennes) entre $\{\mathbf{X}_t^{(1)}\}$ et $\{\mathbf{X}_t^{(2)}\}$, c'est-à-dire que l'hypothèse est

$$\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{X}}^{(12)}(k) = \mathbf{0}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Comme nous avons vu pour le cas univarié, il est facile de vérifier en utilisant (1.8) et (1.9) que cette hypothèse est équivalente à

$$H_0 : \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{a}}^{(12)}(k) = \mathbf{0}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

D'après le théorème 1.2.2, les vecteurs $\sqrt{n} \operatorname{vec} \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{a}}}^{(12)}(k)$, $k = -M, \dots, M$, sont asymptotiquement indépendants et identiquement distribués $N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Omega}_2 \otimes \boldsymbol{\Omega}_1)$, sous H_0 . Pour l'hypothèse alternative

$$H_{1k} : \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{a}}^{(12)}(k) \neq \mathbf{0}$$

nous pouvons donc définir un test basé sur la matrice de corrélation croisée de délai k . Notons d'abord que si un vecteur \mathbf{X} possède une distribution $N_m(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$, alors $\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X}$ suit une distribution χ_m^2 . Ainsi, sous H_0 , la statistique

$$\text{QH}(k) = n \operatorname{vec} \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{a}}}^{(12)}(k)' (\hat{\boldsymbol{\Omega}}_2 \otimes \hat{\boldsymbol{\Omega}}_1)^{-1} \operatorname{vec} \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{a}}}^{(12)}(k). \quad (1.12)$$

suit asymptotiquement une distribution $\chi_{m_1 m_2}^2$, si $\hat{\boldsymbol{\Omega}}_1$ et $\hat{\boldsymbol{\Omega}}_2$ sont des estimateurs convergents de $\boldsymbol{\Omega}_1$ et $\boldsymbol{\Omega}_2$ respectivement. Nous rejetons donc H_0 , au niveau α , si $\text{QH}(k) > \chi_{m_1 m_2, 1-\alpha}^2$. Si nous voulons considérer plusieurs délais à la fois, disons $|k| \leq M \leq n - 1$, l'hypothèse alternative devient

$$H_1^{(M)} : \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{a}}^{(12)}(k) \neq \mathbf{0} \text{ pour au moins un } k, |k| \leq M,$$

et H_0 est donc rejeté, au niveau α , si $\text{QH}(k) > \chi_{m_1 m_2, 1-\alpha_0}^2$ pour au moins un délai k , où le niveau de signification pour chaque test est $\alpha_0 = 1 - (1 - \alpha)^{\frac{1}{2M+1}}$. Ce résultat découle de l'indépendance asymptotique des $\text{QH}(k)$.

Puisque le vecteur $\mathbf{r}_{\hat{\mathbf{a}}}^{(M)}$ suit asymptotiquement une distribution $N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{2M+1} \otimes (\boldsymbol{\Omega}_2 \otimes \boldsymbol{\Omega}_1))$, une généralisation du test proposé par Haugh (1976) pour H_0 contre $H_1^{(M)}$ est obtenue avec la statistique suivante:

$$\text{QH}_M = n \mathbf{r}_{\hat{\mathbf{a}}}^{(M)'} (\mathbf{I}_{2M+1} \otimes \hat{\boldsymbol{\Omega}}_2 \otimes \hat{\boldsymbol{\Omega}}_1)^{-1} \mathbf{r}_{\hat{\mathbf{a}}}^{(M)} = \sum_{k=-M}^M \text{QH}(k). \quad (1.13)$$

Cette statistique suit asymptotiquement une loi khi-deux avec $(2M + 1)m_1m_2$ degrés de liberté. Nous rejetons ainsi H_0 , au niveau α , si $\text{QH}_M > \chi_{(2M+1)m_1m_2, 1-\alpha}^2$.

Comme dans le cas univarié, El Himdi et Roy (1997) ont illustré par simulation que les statistiques $\text{QH}^*(k)$ et QH_M^* sont mieux approximées par la distribution χ^2 pour des courtes séries, où

$$\text{QH}_M^* = \sum_{k=-M}^M \text{QH}^*(k),$$

avec

$$\text{QH}^*(k) = \frac{n}{n - |k|} \text{QH}(k).$$

Chapitre 2

Tests de non corrélation de deux séries multivariées non stationnaires

Dans ce chapitre, nous voulons établir un test afin de déterminer s'il y a présence de corrélation entre deux séries multivariées non stationnaires. Pour ce faire, nous devons identifier les modèles régissant les séries et par la suite estimer les paramètres. Nous obtenons ainsi les corrélations croisées résiduelles sur lesquelles sont basées les statistiques de test.

2.1 Modèles ARMA multivariés partiellement non stationnaires

2.1.1 Modèles ARIMA multivariés

Notons d'abord qu'un processus univarié $\text{ARIMA}(p, d, q)$ non stationnaire peut être réduit à un processus stationnaire en le différenciant d fois. En d'autres mots, si le processus univarié $\{Y_t\}$ est $\text{ARIMA}(p, d, q)$ avec $d \geq 1$ et entier, sa d^{e} différence $\{(1 - B)^d Y_t\}$ est $\text{ARMA}(p, q)$ stationnaire, alors que $\{(1 - B)^{d-1} Y_t\}$ est non stationnaire. Un processus $\text{ARIMA}(p, d, q)$ est aussi appelé processus intégré d'ordre d selon la définition suivante:

Définition 2.1.1 (Intégration) *Un processus $\{Y_t\}$ univarié, avec aucune composante déterministe, est dit intégré d'ordre d , dénoté $Y_t \sim I(d)$, si $\{(1 - B)^d Y_t\}$ est stationnaire, mais $\{(1 - B)^{d-1} Y_t\}$ ne l'est pas.*

Soit $\{\mathbf{X}_t = (X_{1t}, \dots, X_{mt})'\}$, un processus multivarié. Une généralisation naturelle du concept de processus ARIMA univarié consiste à supposer que chaque composante X_{it} de \mathbf{X}_t peut être rendue stationnaire en la différenciant un nombre suffisant de fois. Ainsi, tel que défini par l'équation (1.10), un processus $\text{ARMA}(p, q)$ multivarié est dit ARIMA (voir par exemple Reinsel (1993, p. 41)) s'il admet une représentation de la forme

$$\Phi_1(B)\mathbf{D}(B)\mathbf{X}_t = \Theta(B)\mathbf{a}_t,$$

où $\mathbf{D}(B) = \text{Diag}[(1 - B)^{d_1}, (1 - B)^{d_2}, \dots, (1 - B)^{d_m}]$, d_1, \dots, d_m sont des entiers non négatifs, et les racines de $\det\{\Phi_1(B)\}$ sont plus grandes que un, en module.

Ainsi, le processus $\{\mathbf{W}_t\}$, où $\mathbf{W}_t = \mathbf{D}(B)\mathbf{X}_t$ est un processus ARMA stationnaire. Comme l'ont observé plusieurs chercheurs dont Tsay et Tiao (1990), la différenciation de chaque composante de \mathbf{X}_t séparément peut mener à la surdifférenciation et à la non inversibilité de l'opérateur MA, ce qui peut engendrer des difficultés dans l'estimation des paramètres. Voici un exemple illustrant ce problème.

Exemple 2.1.1 Considérons le modèle ARMA bivarié suivant:

$$\begin{cases} X_{1t} = \beta X_{2,t-1} + a_{1t}, \\ (1 - B)X_{2t} = (1 - \theta B)a_{2t}, \end{cases}$$

où $\{a_{1t}\}$ et $\{a_{2t}\}$ sont des bruits blancs non corrélés, β et θ sont des paramètres réels. Le modèle peut aussi s'écrire sous la forme

$$\left(\mathbf{I} - \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} B \right) \begin{bmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{bmatrix} = \left(\mathbf{I} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \theta \end{bmatrix} B \right) \begin{bmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{bmatrix}.$$

Nous obtenons ainsi que

$$\Phi(B) = \begin{bmatrix} 1 & -\beta B \\ 0 & 1 - B \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Theta(B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \theta B \end{bmatrix},$$

et donc $\det\{\Phi(B)\} = 1 - B$ et $\det\{\Theta(B)\} = 1 - \theta B$. Nous avons vu à la section 1.2 qu'un processus ARMA multivarié est inversible si les racines de $\det\{\Theta(B)\}$ sont à l'extérieur du cercle unité, et donc, ce modèle est inversible si et seulement si $|\theta| < 1$. Dans ce modèle, bien qu'il est nécessaire de différencier X_{2t} , il n'est pas nécessaire de différencier X_{1t} . Cependant, quand nous analysons X_{1t} et X_{2t} séparément, X_{1t} est aussi non stationnaire, car X_{2t} l'est. Si nous différencions aussi X_{1t} , nous obtenons

$$(1 - B)X_{1t} = \beta(1 - B)X_{2,t-1} + (1 - B)a_{1t}.$$

Posons $W_{1t} = (1 - B)X_{1t}$ et $W_{2t} = (1 - B)X_{2t}$. Le modèle ARIMA bivarié devient alors

$$\begin{cases} W_{1t} = \beta W_{2,t-1} + (1 - B)a_{1t}, \\ W_{2t} = (1 - \theta B)a_{2t}. \end{cases}$$

Ce modèle peut aussi s'écrire comme

$$\left(\mathbf{I} - \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} B \right) \begin{bmatrix} W_{1t} \\ W_{2t} \end{bmatrix} = \left(\mathbf{I} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \theta \end{bmatrix} B \right) \begin{bmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{bmatrix}.$$

Les polynômes matriciels autorégressif et moyenne mobile sont alors

$$\Phi(B) = \begin{bmatrix} 1 & -\beta B \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Theta(B) = \begin{bmatrix} 1 - B & 0 \\ 0 & 1 - \theta B \end{bmatrix},$$

et donc $\det\{\Phi(B)\} = 1$, $\forall \beta$ et $\det\{\Theta(B)\} = (1 - B)(1 - \theta B)$. Le modèle est maintenant stationnaire, mais il est non inversible. Ce qui rend l'estimation de ces paramètres problématique.

Une alternative à l'utilisation des modèles ARIMA multivariés est d'analyser la non stationnarité d'un processus multivarié comme un tout, et non composante par composante.

À partir de maintenant nous nous intéresserons à une classe particulière de modèles ARMA non stationnaires qui sont dits partiellement non stationnaires.

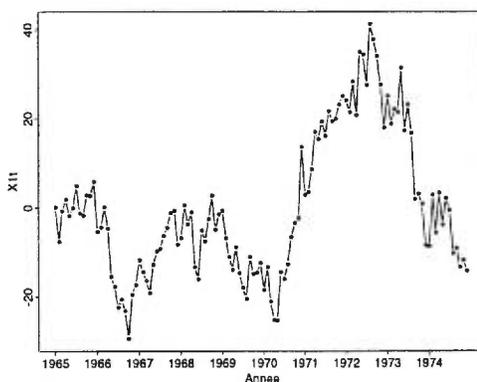
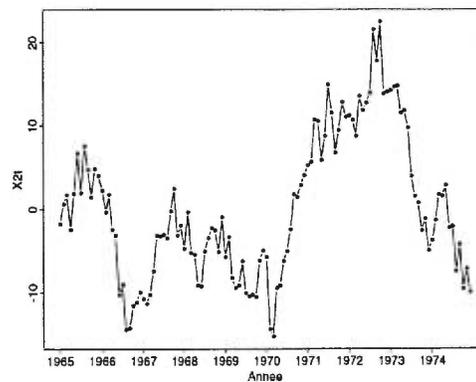
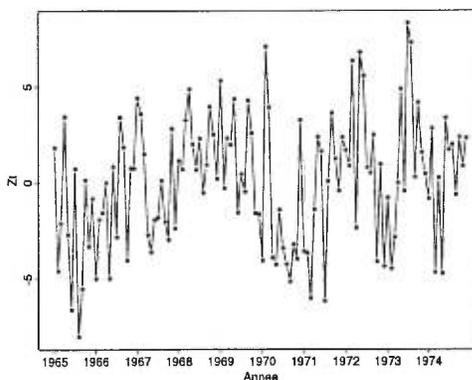
Définition 2.1.2 *Nous disons qu'un processus ARMA multivarié tel que défini par (1.11), c'est-à-dire $\Phi(B)\mathbf{X}_t = \Theta(B)\mathbf{a}_t$, est partiellement non stationnaire si le polynôme $\det\{\Phi(B)\}$ admet 1 comme racine de multiplicité $d \leq m$ et que toutes les autres racines sont plus grandes que 1, en module.*

Ce modèle nous procure la non stationnarité, tout en nous assurant que le processus ne va pas exploser. Notons immédiatement que $\det\{\Phi(1)\} = 0$ et donc, la matrice $\Phi(1) = \mathbf{I} - \sum_{j=1}^p \Phi_j$ n'est pas de plein rang. Posons que $\text{rang}\{\Phi(1)\} = r$, et supposons que $r = m - d$. Nous verrons ultérieurement que cette hypothèse implique que chaque composante de la première différence, $\mathbf{W}_t = \mathbf{X}_t - \mathbf{X}_{t-1}$, est stationnaire. Ainsi pour de tels processus, il peut être établi qu'il existe r vecteurs α linéairement indépendants tels que $\alpha' \mathbf{X}_t$ est stationnaire, et r est appelé le rang de cointégration de \mathbf{X}_t . Ce modèle est plus général que le modèle ARIMA, $\Phi_1(B)\mathbf{D}(B)\mathbf{X}_t = \Theta(B)\mathbf{a}_t$, et possède des propriétés intéressantes décrites dans Engle et Granger (1987).

2.1.2 Cointégration

Avant d'introduire la notion de cointégration, regardons l'exemple suivant, qui est traité dans Reinsel (1993, pp. 177-180).

Exemple 2.1.2 Soit $\mathbf{X}_t = (X_{1t}, X_{2t})'$, une série chronologique bivariée, où X_{1t} représente le nombre mensuel de maisons mises en chantier (en milliers) et X_{2t} représente la vente mensuelle de maisons (en milliers) sur la période de janvier 1965 à décembre 1974. Pour chaque série, les données ont été désaisonnalisées en soustrayant la moyenne mensuelle à chaque mois. Les graphes des séries X_{1t} et X_{2t} désaisonnalisées sont présentés aux figures 2.1 et 2.2 respectivement. Lorsque nous différencions ces séries une fois, elles deviennent stationnaires. Elles sont donc intégrées d'ordre un.

Fig. 2.1: Maisons en construction (X_{1t}).Fig. 2.2: Vente de maisons (X_{2t}).Fig. 2.3: Série transformée: $Z_t = 0.523X_{1t} - 0.979X_{2t}$.

Cependant, il existe une combinaison linéaire des deux séries qui est stationnaire. En effet, Reinsel (1993, p. 179) a trouvé que la série $Z_t = \alpha'X_t$ où $\alpha = (0.523, -0.979)'$ est stationnaire. Son graphe est à la figure 2.3. Bien que le nombre de mises en chantier et le nombre de maisons vendues mensuellement forment des séries non stationnaires, le nombre de mises en chantier moins deux fois le nombre de ventes constitue une série approximativement stationnaire.

Définition 2.1.3 (Cointégration) *Les composantes du processus $\{\mathbf{X}_t\}$ sont dites cointégrées d'ordre (d, b) , dénoté $\mathbf{X}_t \sim \text{CI}(d, b)$, si*

- (i) *toutes les composantes de \mathbf{X}_t sont $I(d)$,*
- (ii) *il existe au moins un vecteur $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, tel que $Z_t = \boldsymbol{\alpha}'\mathbf{X}_t \sim I(d - b)$, $b > 0$.*

Les vecteurs $\boldsymbol{\alpha}$ sont appelés les vecteurs de cointégration.

Dans l'exemple 2.1.3, chaque élément de la série chronologique bivariée \mathbf{X}_t est stationnaire après seulement une différenciation, mais une combinaison linéaire $\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{X}_t$ semble stationnaire. Ainsi la série \mathbf{X}_t est dite cointégrée d'ordre (1,1) avec vecteur de cointégration $\boldsymbol{\alpha} = (0.523, -0.979)'$.

Il est souvent d'intérêt de tester si des variables sont cointégrées ou non. Ceci peut être désiré pour des implications économiques, comme par exemple afin de vérifier si un système est en équilibre sur une longue période. Il peut être également utile de tester de telles hypothèses avant d'estimer les paramètres d'un modèle ARMA multivarié. Ces considérations ont conduit à l'introduction, dans la littérature économétrique, des modèles à correction d'erreur que nous décrivons dans la section suivante.

2.1.3 Modèle à correction d'erreur

La représentation d'un modèle sous la forme à correction d'erreur va de pair avec la cointégration, car l'idée générale d'une telle représentation est qu'une proportion du déséquilibre d'une période peut être corrigée à la période suivante. Cette représentation pour les modèles autorégressifs a été étudiée en détail par

Engle et Granger (1987), voir aussi Lütkepohl (1991, p. 354) et Reinsel (1993, p. 166). L'introduction d'une composante moyenne mobile dans la représentation à correction d'erreur est discutée dans Yap et Reinsel (1995).

Définition 2.1.4 (Représentation à correction d'erreur) *Un processus multivarié, $\{\mathbf{X}_t : t \in \mathbb{Z}\}$, possède une représentation à correction d'erreur s'il peut être exprimé comme*

$$\tilde{\Phi}(B)(1 - B)\mathbf{X}_t = \mathbf{C}\mathbf{X}_{t-1} + \Theta(B)\mathbf{a}_t, \quad (2.1)$$

où $\tilde{\Phi}(B)$ et $\Theta(B)$ sont des polynômes matriciels autorégressifs et moyenne mobile avec $\tilde{\Phi}(0) = \Theta(0) = \mathbf{I}$, tous les éléments de $\tilde{\Phi}(1)$ finis et $\Theta(1)$ non singulière. \mathbf{C} est une matrice de dimension $m \times m$ de rang $r < m$ et $\{\mathbf{a}_t\}$ est un bruit blanc multivarié.

Récrivons maintenant un modèle ARMA partiellement non stationnaire sous la forme à correction d'erreur en terme de premières différences.

Proposition 2.1.1 *Si $\{\mathbf{X}_t\}$ est ARMA(p, q) partiellement non stationnaire avec $\text{rang}\{\Phi(1)\} = r$, alors $\{\mathbf{X}_t\}$ admet la représentation à correction d'erreur*

$$\Phi^*(B)\mathbf{W}_t = \mathbf{C}\mathbf{X}_{t-1} + \Theta(B)\mathbf{a}_t, \quad (2.2)$$

où $\mathbf{C} = -\Phi(1)$ est de rang r et $\Phi^*(B) = \mathbf{I} - \sum_{j=1}^{p-1} \Phi_j^* B^j$ avec $\Phi_j^* = -\sum_{i=j+1}^p \Phi_i$.

Preuve. $\{\mathbf{X}_t\}$ est ARMA(p, q), il a donc la forme $\Phi(B)\mathbf{X}_t = \Theta(B)\mathbf{a}_t$. Il est facile de vérifier que $\Phi(B)$ peut s'écrire de la façon suivante:

$$\Phi(B) = \Phi^*(B)(1 - B) + \Phi(1)B,$$

où $\Phi^*(B)$ est défini dans l'énoncé de la proposition 2.1.1. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned}\Phi^*(B)(1 - B)\mathbf{X}_t &= -\Phi(1)B\mathbf{X}_t + \Theta(B)\mathbf{a}_t \\ &= C\mathbf{X}_{t-1} + \Theta(B)\mathbf{a}_t\end{aligned}$$

qui est équivalent à (2.2). \square

La relation entre les Φ_j et C et les Φ_j^* est biunivoque puisque

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= I + C + \Phi_1^*, \\ \Phi_j &= \Phi_j^* - \Phi_{j-1}^*, \quad j = 2, \dots, p-1, \\ \Phi_p &= -\Phi_{p-1}^*.\end{aligned}$$

Nous montrons dans la proposition suivante, énoncée dans Pham et Roy (1997), que le processus $\{\mathbf{W}_t = (1 - B)\mathbf{X}_t\}$ est stationnaire et donc, dans (2.2), la non stationnarité de $\{\mathbf{X}_t\}$ est entièrement prise en compte par le terme $C\mathbf{X}_{t-1}$. Dans la suite, nous disons qu'un processus $\{\mathbf{X}_t\}$ est à accroissements stationnaires si le processus $\{(1 - B)\mathbf{X}_t\}$ est stationnaire. De plus nous aurons besoin du résultat matriciel suivant:

Lemme 2.1.1 *Soit A une matrice de dimension $m \times m$ et B une matrice inversible de dimension $m \times m$, alors*

$$\det\{I - Az\} = \det\{I - B^{-1}ABz\}.$$

Preuve. Le terme de droite peut être décomposé de la façon suivante:

$$\begin{aligned}I - B^{-1}ABz &= B^{-1}B - B^{-1}ABz \\ &= B^{-1}(I - Az)B.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\det\{\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B}z\} &= \det\{\mathbf{B}^{-1}\}\det\{\mathbf{I} - \mathbf{A}z\}\det\{\mathbf{B}\} \\ &= \det\{\mathbf{I} - \mathbf{A}z\},\end{aligned}$$

car $\det\{\mathbf{B}^{-1}\} = (\det\{\mathbf{B}\})^{-1}$. \square

Proposition 2.1.2 *Soit $\{\mathbf{X}_t\}$ un processus ARMA(p, q) partiellement non stationnaire selon la définition 2.1.2. De plus, supposons que le rang $\{\Phi(1)\} = r$ et posons $d = m - r$. Alors, $\{\mathbf{X}_t\}$ admet la représentation suivante:*

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{P}_1\mathbf{Z}_{1t} + \mathbf{P}_2\mathbf{Z}_{2t},$$

où \mathbf{P}_1 et \mathbf{P}_2 sont des matrices de dimensions $m \times d$ et $m \times r$ respectivement, $\{\mathbf{Z}_{1t}\}$ de dimension d est à accroissements stationnaires et $\{\mathbf{Z}_{2t}\}$ de dimension r est stationnaire.

Preuve. Posons \mathbf{P}_1 une matrice $m \times d$ de plein rang telle que $\Phi(1)\mathbf{P}_1 = \mathbf{0}$, et \mathbf{P}_2 une matrice $m \times r$, pour ainsi former une matrice inversible, $\mathbf{P} = [\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2]$. Définissons $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1} = [\mathbf{Q}_1', \mathbf{Q}_2']' = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix}$, où \mathbf{Q}_1 et \mathbf{Q}_2 sont des matrices de dimensions $d \times m$ et $r \times m$ respectivement. Par conséquent,

$$[\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1 + \mathbf{P}_2\mathbf{Q}_2 = \mathbf{I}_m$$

et

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} [\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2] = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1\mathbf{P}_1 & \mathbf{Q}_1\mathbf{P}_2 \\ \mathbf{Q}_2\mathbf{P}_1 & \mathbf{Q}_2\mathbf{P}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_m$$

si et seulement si $\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1 = \mathbf{I}_d$, $\mathbf{P}_2\mathbf{Q}_2 = \mathbf{I}_r$, $\mathbf{Q}_2\mathbf{P}_1 = \mathbf{0}_{r \times d}$ et $\mathbf{Q}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{0}_{d \times r}$. Nous obtenons donc

$$\begin{aligned}
\Phi(B) &= \Phi^*(B)(1 - B) + \Phi(1)B \\
&= \Phi^*(B)[1 - (\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1 + \mathbf{P}_2\mathbf{Q}_2)B] + \Phi(1)B \\
&= \Phi^*(B)[1 - (\mathbf{P}_2\mathbf{Q}_2 + \mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1)B + \mathbf{P}_2\mathbf{Q}_2\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1B^2] + \Phi(1)B \\
&= \Phi^*(B)(\mathbf{I} - \mathbf{P}_2\mathbf{Q}_2B)(\mathbf{I} - \mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1B) + \Phi(1)B \\
&= \Phi^*(B)(\mathbf{I} - \mathbf{P}_2\mathbf{Q}_2B)(\mathbf{I} - \mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1B) + \Phi(1)B(\mathbf{I} - \mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1B),
\end{aligned}$$

car $\Phi(1)B\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1B = \Phi(1)\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1B^2 = \mathbf{0}$, puisque $\Phi(1)\mathbf{P}_1 = \mathbf{0}$. Ainsi

$$\Phi(B) = [\Phi^*(B)(\mathbf{I} - \mathbf{P}_2\mathbf{Q}_2B) + \Phi(1)B](\mathbf{I} - \mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1B).$$

Dénotons le premier facteur de l'égalité précédente par $\Phi^{**}(B)$. Alors

$$\det\{\Phi(B)\} = \det\{\Phi^{**}(B)\}\det\{\mathbf{I} - \mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1B\}.$$

En utilisant le lemme 2.1.1, nous pouvons écrire

$$\det\{\mathbf{I} - \mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1B\} = \det\{\mathbf{I} - \mathbf{Q}\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1\mathbf{P}B\}.$$

Nous avons que

$$\mathbf{Q}\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} \mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1\mathbf{P} \\ \mathbf{Q}_2\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1\mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1\mathbf{P} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

où $\mathbf{Q}_1\mathbf{P} = \mathbf{Q}_1[\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2] = [\mathbf{Q}_1\mathbf{P}_1, \mathbf{Q}_1\mathbf{P}_2] = [\mathbf{I}_d, \mathbf{0}]$. Ainsi

$$\mathbf{Q}\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_d & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

ce qui entraîne que $\det\{\mathbf{I} - \mathbf{Q}\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1\mathbf{P}B\} = (1 - B)^d$, et donc que

$$\det\{\Phi(B)\} = \det\{\Phi^{**}(B)\}(1 - B)^d.$$

Nous savons que $\det\{\Phi(B)\}$ possède d racines unitaires et les autres plus grandes que un, en module, et que $(1 - B)^d$ admet d racines unitaires. Ceci implique que

les racines de $\det\{\Phi^{**}(B)\}$ sont toutes à l'extérieur du cercle unité. Nous avons vu que $\Phi(B) = \Phi^{**}(B)(I - P_1 Q_1 B)$, ainsi le processus ARMA, $\Phi(B)X_t = \Theta(B)a_t$, peut s'écrire comme $\Phi^{**}(B)(I - P_1 Q_1 B)X_t = \Theta(B)a_t$, qui est équivalent à

$$(I - P_1 Q_1 B)X_t = \Phi^{**}(B)^{-1} \Theta(B)a_t, \quad (2.3)$$

et donc, $(I - P_1 Q_1 B)X_t$ est stationnaire, car le membre de droite est un processus linéaire. En multipliant (2.3) par Q_1 , nous obtenons

$$Q_1 X_t - Q_1 X_{t-1} = Q_1 \Phi^{**}(B)^{-1} \Theta(B)a_t,$$

car $Q_1 P_1 = I$, et donc, $Q_1 X_t$ est à accroissement stationnaire, c'est-à-dire que $(1 - B)Q_1 X_t$ est stationnaire. Cette fois-ci en multipliant (2.3) par Q_2 , nous obtenons

$$Q_2 X_t = Q_2 \Phi^{**}(B)^{-1} \Theta(B)a_t,$$

car $Q_2 P_1 = 0$, et donc, $Q_2 X_t$ est stationnaire.

Nous avons que $X_t = (P_1 Q_1 + P_2 Q_2) X_t$, car $P_1 Q_1 + P_2 Q_2 = I$. Si $Z_{1t} = Q_1 X_t$ et $Z_{2t} = Q_2 X_t$, alors X_t devient

$$X_t = P_1 Z_{1t} + P_2 Z_{2t},$$

où $(1 - B)Z_{1t}$ et Z_{2t} sont stationnaires. \square

D'après la proposition précédente, nous pouvons énoncer le corollaire suivant:

Corollaire 2.1.1 *Si $\{X_t\}$ est partiellement non stationnaire, alors le processus $\{W_t = (1 - B)X_t\}$ est stationnaire.*

Ainsi, les composantes d'un processus partiellement non stationnaire sont soit cointégrées d'ordre (1,1), soit stationnaires.

2.2 Estimation

2.2.1 Moindres carrés conditionnels d'un processus AR(p)

Pour nous aider à comprendre l'estimation d'un modèle autorégressif, voyons comment formuler l'estimateur des moindres carrés en régression linéaire multivariée.

Posons $\mathbf{X}_t = (X_{1t}, \dots, X_{mt})'$, un vecteur aléatoire de variables dépendantes et $\mathbf{Y}_t = (Y_{1t}, \dots, Y_{pt})'$, un vecteur de variables indépendantes. Nous considérons un modèle linéaire multivarié de la forme

$$X_{it} = \mathbf{Y}_t' \boldsymbol{\beta}_i + \epsilon_{it}, \quad i = 1, \dots, m, \quad t = 1, \dots, n,$$

ou bien

$$\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\beta}' \mathbf{Y}_t + \boldsymbol{\epsilon}_t, \quad t = 1, \dots, n,$$

où $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_m)$, une matrice $p \times m$, $\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_m$ représentent les vecteurs colonnes de la matrice $\boldsymbol{\beta}$ et $\boldsymbol{\epsilon}_t = (\epsilon_{1t}, \dots, \epsilon_{mt})'$, $t = 1, \dots, n$, sont des erreurs indépendantes de loi multinormale $N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_\epsilon)$. Soient les n observations $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ et $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n$, nous définissons $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n)'$ et $\boldsymbol{\epsilon} = (\boldsymbol{\epsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\epsilon}_n)'$, des matrices $n \times m$, et $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n)'$, une matrice $n \times p$. Nous pouvons ainsi réécrire le modèle sous la forme

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}.$$

Il est connu que l'estimateur de vraisemblance maximale de $\boldsymbol{\beta}$ est identique à l'estimateur des moindres carrés. Ce dernier est obtenu en minimisant la somme des carrés des erreurs suivante

$$\sum_{t=1}^n \boldsymbol{\epsilon}_t' \boldsymbol{\Sigma}_\epsilon^{-1} \boldsymbol{\epsilon}_t.$$

L'estimateur est alors donné par

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{Y}'\mathbf{Y})^{-1}\mathbf{Y}'\mathbf{X}.$$

L'estimateur sans biais de la matrice de covariance des erreurs est

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\Sigma}} &= \frac{1}{n-p} (\mathbf{X} - \mathbf{Y}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\mathbf{X} - \mathbf{Y}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \\ &= \frac{1}{n-p} \sum_{t=1}^n \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_t \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_t',\end{aligned}\tag{2.4}$$

où $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_t = \mathbf{X}_t - \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{Y}_t$, $t = 1, \dots, n$, sont les vecteurs résiduels.

Revenons au modèle autorégressif. Soit $\mathbf{X}_t = (X_{1t}, \dots, X_{mt})'$ une série de dimension m , où $\mathbb{E}[\mathbf{X}_t] = \boldsymbol{\mu}$, s'écrivant sous la forme d'un modèle AR(p), c'est-à-dire

$$\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Phi}_1(\mathbf{X}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}) + \dots + \boldsymbol{\Phi}_p(\mathbf{X}_{t-p} - \boldsymbol{\mu}) + \mathbf{a}_t\tag{2.5}$$

$$= \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\Phi}_1\mathbf{X}_{t-1} + \dots + \boldsymbol{\Phi}_p\mathbf{X}_{t-p} + \mathbf{a}_t,\tag{2.6}$$

où $\boldsymbol{\delta} = (\mathbf{I} - \boldsymbol{\Phi}_1 - \dots - \boldsymbol{\Phi}_p)\boldsymbol{\mu}$ et \mathbf{a}_t , $t = 1, \dots, n$, sont des bruits blancs multivariés de vecteur moyenne zéro et de matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}_a$.

Les estimateurs des moindres carrés des paramètres $\boldsymbol{\delta}$, $\boldsymbol{\Phi}_1, \dots, \boldsymbol{\Phi}_p$ s'obtiennent en minimisant

$$\sum_{t=1}^n \mathbf{a}_t' \boldsymbol{\Sigma}_a^{-1} \mathbf{a}_t,$$

où $\mathbf{a}_t = \mathbf{X}_t - (\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\Phi}_1\mathbf{X}_{t-1} + \dots + \boldsymbol{\Phi}_p\mathbf{X}_{t-p})$. Afin de calculer \mathbf{a}_t , nous avons besoin des valeurs de $\mathbf{X}_{t-1}, \dots, \mathbf{X}_{t-p}$. Souvent en pratique, les p premières observations sont utilisées comme valeurs initiales; ce qui permet de calculer $\mathbf{a}_{p+1}, \dots, \mathbf{a}_n$. Nous parlons alors d'estimateurs des moindres carrés conditionnels qui sont obtenus en minimisant

$$\sum_{t=p+1}^n \mathbf{a}_t' \boldsymbol{\Sigma}_a^{-1} \mathbf{a}_t.$$

Pour calculer les estimateurs des moindres carrés conditionnels d'un modèle AR(p) de la forme (2.5), nous pouvons nous ramener au modèle de régression linéaire multivarié en posant $\widetilde{\mathbf{Y}}_t = [(\mathbf{X}_{t-1} - \boldsymbol{\mu})', \dots, (\mathbf{X}_{t-p} - \boldsymbol{\mu})']'$ et $\boldsymbol{\beta}'_* = (\boldsymbol{\Phi}_1, \dots, \boldsymbol{\Phi}_p)$, ainsi

$$\widetilde{\mathbf{X}}_t = \boldsymbol{\beta}'_* \widetilde{\mathbf{Y}}_t + \mathbf{a}_t,$$

où $\widetilde{\mathbf{X}}_t = \mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}$. En nous basant sur l'équation (2.6) nous pouvons également poser $\mathbf{Y}_t = [\mathbf{1}', \mathbf{X}'_{t-1}, \dots, \mathbf{X}'_{t-p}]'$ et $\boldsymbol{\beta}' = (\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\Phi}_1, \dots, \boldsymbol{\Phi}_p)$ pour obtenir

$$\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\beta}' \mathbf{Y}_t + \mathbf{a}_t.$$

Données $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p$, des valeurs initiales, nous définissons

$$\widetilde{\mathbf{X}} = [(\mathbf{X}_{p+1} - \overline{\mathbf{X}}_{(0)}), \dots, (\mathbf{X}_n - \overline{\mathbf{X}}_{(0)})']'$$

et $\mathbf{a} = [\mathbf{a}_{p+1}, \dots, \mathbf{a}_n]'$, des matrices $(n-p) \times m$, et la matrice $\widetilde{\mathbf{Y}}$: $(n-p) \times mp$, dont les lignes sont données par

$$\widetilde{\mathbf{Z}}'_{t,p} = [(\mathbf{X}_{t-1} - \overline{\mathbf{X}}_{(1)})', \dots, (\mathbf{X}_{t-p} - \overline{\mathbf{X}}_{(p)})']', \quad t = p+1, \dots, n,$$

avec

$$\overline{\mathbf{X}}_{(i)} = \frac{1}{n-p} \sum_{t=p+1}^n \mathbf{X}_{t-i}, \quad i = 1, \dots, p.$$

Nous obtenons ainsi

$$\widetilde{\mathbf{X}} = \widetilde{\mathbf{Y}} \boldsymbol{\beta}'_* + \mathbf{a}$$

qui a la forme générale d'un modèle linéaire multivarié avec $n-p$ vecteurs d'observations. Il en résulte que l'estimateur des moindres carrés conditionnels de $\boldsymbol{\beta}'_* = \boldsymbol{\Phi}'_{(p)} = (\boldsymbol{\Phi}_1, \dots, \boldsymbol{\Phi}_p)'$ est

$$\widehat{\boldsymbol{\Phi}}_{(p)} = (\widetilde{\mathbf{Y}}' \widetilde{\mathbf{Y}})^{-1} \widetilde{\mathbf{Y}}' \widetilde{\mathbf{X}}.$$

Ainsi l'estimateur peut s'écrire comme

$$\widehat{\boldsymbol{\Phi}}_{(p)} = \left[\sum_{t=p+1}^n \widetilde{\mathbf{Z}}_{t,p} \widetilde{\mathbf{Z}}'_{t,p} \right]^{-1} \sum_{t=p+1}^n \widetilde{\mathbf{Z}}_{t,p} (\mathbf{X}_t - \overline{\mathbf{X}}_{(0)})'.$$

Par analogie avec (2.4), un estimateur de $\Sigma_{\mathbf{a}}$ est donné par

$$\widehat{\Sigma}_{\mathbf{a}} = \frac{1}{n - p - (mp + 1)} \mathbf{S}_p$$

où $\mathbf{S}_p = \sum_{t=p+1}^n \hat{\mathbf{a}}_t \hat{\mathbf{a}}_t'$, avec

$$\hat{\mathbf{a}}_t = (\mathbf{X}_t - \bar{\mathbf{X}}_{(0)}) - \widehat{\Phi}'_{(p)} \tilde{\mathbf{Z}}_{t,p},$$

le vecteur résiduel, à l'instant t .

2.2.2 Distribution asymptotique des estimateurs des moindres carrés d'un processus AR(p)

Dans le cas stationnaire, la distribution asymptotique de $\widehat{\Phi}_{(p)}$ est connue depuis longtemps et nous retrouvons le théorème suivant dans Reinsel (1993, p. 84):

Théorème 2.2.1 *Si $\{\mathbf{X}_t\}$ est AR(p) stationnaire tel que défini par (2.5), alors*

$$(n - p)^{1/2} \text{vec}(\widehat{\Phi}_{(p)} - \Phi_{(p)}) \xrightarrow{L} \mathbf{N}(\mathbf{0}, \Sigma_{\mathbf{a}} \otimes \Gamma_{(p)}^{-1})$$

lorsque $n \rightarrow \infty$, où $\Phi_{(p)} = [\Phi_1, \dots, \Phi_p]$, $\Sigma_{\mathbf{a}}$ est la matrice de covariance du processus innovation et $\Gamma_{(p)}$ est une matrice $mp \times mp$ dont la $(i, j)^e$ matrice est égale à $\Gamma_{\mathbf{X}}(i - j)$, c'est-à-dire

$$\Gamma_{(p)} = \begin{bmatrix} \Gamma_{\mathbf{X}}(0) & \Gamma_{\mathbf{X}}(1) & \cdots & \Gamma_{\mathbf{X}}(p-1) \\ \Gamma_{\mathbf{X}}(-1) & \Gamma_{\mathbf{X}}(0) & \cdots & \Gamma_{\mathbf{X}}(p-2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Gamma_{\mathbf{X}}(-p+1) & \Gamma_{\mathbf{X}}(-p+2) & \cdots & \Gamma_{\mathbf{X}}(0) \end{bmatrix}.$$

Pour un processus partiellement stationnaire, nous pouvons estimer les paramètres Φ_j , $j = 1, \dots, p$ comme dans le cas stationnaire et les estimateurs obtenus sont convergents. Utilisant le fait qu'il existe une relation biunivoque entre ces paramètres et ceux de la représentation à correction d'erreur définie par (2.2), nous pouvons également estimer \mathbf{C} , Φ_j^* , $j = 1, \dots, p - 1$ avec ou sans la contrainte que $\text{rang}\{\mathbf{C}\} = r$, dont nous verrons les avantages plus loin. Il est connu que les estimateurs des moindres carrés $\hat{\mathbf{C}}$, $\hat{\Phi}_1^*, \dots, \hat{\Phi}_{p-1}^*$ pour le modèle à correction d'erreur sont convergents. Aussi, $n^{1/2}(\hat{\mathbf{C}}\mathbf{P}_2 - \mathbf{C}\mathbf{P}_2)$ et $n^{1/2}(\hat{\Phi}_j^* - \Phi_j^*)$, $j = 1, \dots, p - 1$, ont une distribution asymptotique conjointe multinormale, voir Reinsel (1993, p. 168) et Yap et Reinsel (1995). Par la relation biunivoque, estimer Φ_1, \dots, Φ_p est équivalent à estimer \mathbf{C} , $\Phi_1^*, \dots, \Phi_{p-1}^*$, et donc, $\hat{\Phi}_1, \dots, \hat{\Phi}_p$ sont aussi des estimateurs convergents.

L'estimation à vraisemblance maximale de rang réduit pour un processus ARMA partiellement non stationnaire est discutée dans Yap et Reinsel (1995). Cette méthode consiste à estimer les paramètres \mathbf{C} et Φ_j^* avec la contrainte que $\text{rang}\{\mathbf{C}\} = r < m$. L'estimation du modèle avec cette contrainte est équivalente à l'estimation du modèle ARMA avec d racines unitaires imposées dans le modèle. C'est une alternative à différencier chaque composante de la série dans des situations où les composantes individuelles sont non stationnaires. Cette approche est utile pour obtenir de meilleures prévisions à long terme et pour aider à comprendre la non stationnarité des séries multivariées.

Dans ce présent mémoire nous utiliserons l'estimation par les moindres carrés conditionnels étant donné que les estimateurs, selon cette méthode, des paramètres autorégressifs sont convergents et que leur évaluation numérique est relativement facile. Ceci implique que nous pouvons simplement ignorer le fait que le système est instable et procéder à l'estimation des paramètres comme pour le

cas stationnaire. L'estimation des paramètres moyenne mobile est beaucoup plus complexe numériquement et nécessite l'utilisation d'un algorithme itératif. C'est pourquoi nous nous concentrerons sur les modèles autorégressifs.

2.3 Tests de non corrélation de séries partiellement non stationnaires

L'hypothèse que nous voulons vérifier pour tester la non corrélation entre deux séries partiellement non stationnaires, $\{\mathbf{X}_t^{(1)}\}$ et $\{\mathbf{X}_t^{(2)}\}$, est

$$H_0 : \text{Cov}(\mathbf{X}_t^{(1)}, \mathbf{X}_s^{(2)}) = \mathbf{0}, \forall t, s.$$

Il est plus difficile d'établir l'équivalence entre cette hypothèse et l'hypothèse de non corrélation entre les processus innovation correspondants aux deux séries, comme pour le cas stationnaire. Pour ce faire, il faut exprimer les séries sous une forme différente. Il est décrit dans Reinsel (1993, p. 42) que si un processus $\{\mathbf{X}_t\}$ est ARMA(p, q), $\Phi(B)\mathbf{X}_t = \Theta(B)\mathbf{a}_t$, alors pour tout entier positif $P \in \mathbb{Z}$ fixé, mais arbitraire, nous pouvons écrire \mathbf{X}_t sous la forme

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{a}_t + \sum_{j=1}^{t+P} \Psi_j \mathbf{a}_{t-j} + f(\mathbf{X}_{-P-1}, \mathbf{X}_{-P-2}, \dots, \mathbf{X}_{-P-p}, \mathbf{a}_{-P-1}, \mathbf{a}_{-P-2}, \dots, \mathbf{a}_{-P-q}), \quad (2.7)$$

où la fonction f est linéaire et $t \geq -P$. De cette représentation, nous pouvons déduire le résultat suivant:

Proposition 2.3.1 *Soient $\{\mathbf{X}_t^{(1)}\}$ et $\{\mathbf{X}_t^{(2)}\}$ deux processus ARMA partiellement non stationnaires et inversibles. $\{\mathbf{X}_t^{(1)}\}$ et $\{\mathbf{X}_t^{(2)}\}$ sont non corrélés si et seulement si*

(i) $\exists P > 0$ tel que $\{\mathbf{X}_t^{(1)}, t < -P\}$ et $\{\mathbf{X}_t^{(2)}, t < -P\}$ sont non corrélés;

(ii) $\text{Cov}(\mathbf{a}_t^{(1)}, \mathbf{a}_s^{(2)}) = \mathbf{0}, \forall t, s.$

Preuve. Supposons que $\{\mathbf{X}_t^{(1)}\}$ et $\{\mathbf{X}_t^{(2)}\}$ sont non corrélés, alors

$$\text{Cov}(\mathbf{X}_t^{(1)}, \mathbf{X}_s^{(2)}) = \mathbf{0}, \forall t, s \Rightarrow \text{(i)}.$$

En utilisant la représentation

$$\mathbf{X}_t^{(h)} = \sum_{j=1}^{\infty} \Pi_j^{(h)} \mathbf{X}_{t-j}^{(h)} + \mathbf{a}_t^{(h)}, \quad h = 1, 2,$$

ou de façon équivalente

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_t^{(h)} &= \mathbf{X}_t^{(h)} - \sum_{j=1}^{\infty} \Pi_j^{(h)} \mathbf{X}_{t-j}^{(h)} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{\Pi}_j^{(h)} \mathbf{X}_{t-j}^{(h)}, \quad h = 1, 2, \end{aligned}$$

où

$$\widetilde{\Pi}_j^{(h)} = \begin{cases} \mathbf{I}, & j = 0, \\ -\Pi_j^{(h)}, & j > 0, \end{cases}$$

nous avons que

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\mathbf{a}_t^{(1)}, \mathbf{a}_s^{(2)}) &= \text{Cov} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{\Pi}_j^{(1)} \mathbf{X}_{t-j}^{(1)}, \sum_{l=0}^{\infty} \widetilde{\Pi}_l^{(2)} \mathbf{X}_{s-l}^{(2)} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \widetilde{\Pi}_j^{(1)} \widetilde{\Pi}_l^{(2)} \text{Cov}(\mathbf{X}_{t-j}^{(1)}, \mathbf{X}_{s-l}^{(2)}) = \mathbf{0}, \forall t, s. \end{aligned}$$

Maintenant si les conditions (i) et (ii) sont satisfaites, alors il découle directement de l'équation (2.7) que $\{\mathbf{X}_t^{(1)}\}$ et $\{\mathbf{X}_t^{(2)}\}$ sont non corrélés (ou indépendants dans le cas de processus gaussiens). \square

En pratique, nous allons nous contenter de tester

$$H'_0 : \rho_{\mathbf{a}}^{(12)}(k) = \mathbf{0}, \forall k.$$

Afin de calculer les statistiques de test de non corrélation de deux séries multivariées partiellement non stationnaires, nous devons connaître la distribution asymptotique des corrélations croisées résiduelles du modèle estimé par la méthode des moindres carrés. Pham et Roy (1997) ont démontré le théorème suivant:

Théorème 2.3.1 *Soient $\{\mathbf{X}_t^{(1)}\}$ et $\{\mathbf{X}_t^{(2)}\}$, deux processus ARMA multivariés, partiellement non stationnaires tels que définis en (2.1.2), inversibles et non corrélés. Supposons que les bruits blancs, $\{\mathbf{a}_t^{(1)}\}$ et $\{\mathbf{a}_t^{(2)}\}$, satisfont les conditions de régularité de Hannan (1976), alors $\sqrt{n}\mathbf{r}_a^{(M)}$ et $\sqrt{n}\mathbf{r}_a^{(M)}$, définis comme au chapitre 1, ont la même distribution asymptotique $N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{2M+1} \otimes (\Omega_2 \otimes \Omega_1))$, où Ω_1 et Ω_2 sont les matrices de corrélation des processus $\{\mathbf{a}_t^{(1)}\}$ et $\{\mathbf{a}_t^{(2)}\}$ respectivement.*

Le théorème 2.3.1 nous révèle que les corrélations croisées résiduelles du modèle estimé par les moindres carrés dans le cas non stationnaire ont la même distribution asymptotique que dans la cas stationnaire, voir le théorème 1.2.2. Les statistiques de test demeurent ainsi les mêmes, c'est-à-dire qu'à un délai k donné, nous rejetons H_0 au niveau α , si $QH(k) > \chi_{m_1 m_2, 1-\alpha}^2$. Si nous voulons un test global, nous rejetons H_0 , au niveau α , si $QH_M > \chi_{(2M+1)m_1 m_2, 1-\alpha}^2$, où $QH(k)$ et QH_M sont définis par (1.12) et (1.13) respectivement.

Chapitre 3

Simulation

Dans ce chapitre nous voulons vérifier si la distribution khi-deux fournit une bonne approximation de la distribution exacte des statistiques de test sous l'hypothèse de non corrélation de deux séries multivariées partiellement non stationnaires. Pour ce faire, nous avons fait une simulation à l'aide du progiciel S-Plus.

3.1 Algorithmes de simulation

3.1.1 Génération de séries ARMA multivariées

Afin de générer une série chronologique multivariée, nous devons d'abord générer le processus innovation de loi multinormale ou autre. Il n'existe

malheureusement pas de fonctions disponibles dans S-Plus pour générer des observations de distributions multivariées. Ainsi, pour obtenir un bruit blanc, disons $\tilde{\mathbf{a}}_t = (\tilde{a}_{1t}, \dots, \tilde{a}_{mt})'$, $t = 1, \dots, n$, de loi $N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_m)$, nous devons générer mn observations indépendantes de loi $N(0,1)$. Nous formons ainsi les n vecteurs indépendants $\tilde{\mathbf{a}}_t$ en divisant les mn observations en n tranches de m observations. Afin de générer un bruit blanc de loi $N_m(\mathbf{0}, \Sigma_{\mathbf{a}})$, en utilisant la décomposition de Choleski de $\Sigma_{\mathbf{a}}$, c'est-à-dire $\Sigma_{\mathbf{a}} = \mathbf{A}\mathbf{A}'$, où \mathbf{A} est une matrice triangulaire supérieure, il suffit de poser

$$\mathbf{a}_t = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{a}}_t, \quad t = 1, \dots, n.$$

La série \mathbf{a}_t aura pour moyenne, $\mathbb{E}[\mathbf{a}_t] = \mathbf{A}\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{a}}_t] = \mathbf{0}$ et pour variance, $\text{Var}(\mathbf{a}_t) = \mathbf{A}\text{Var}(\tilde{\mathbf{a}}_t)\mathbf{A}' = \mathbf{A}\mathbf{A}' = \Sigma_{\mathbf{a}}$.

La deuxième étape consiste à générer une série d'un processus ARMA(p, q) tel que défini par l'équation (1.10). En supposant les coefficients AR et MA connus, en donnant p valeurs initiales, $\mathbf{X}_0, \dots, \mathbf{X}_{-p+1}$ et en générant un bruit blanc de longueur $n + q$ (pour avoir les valeurs initiales, $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_{-q+1}$), nous pouvons résoudre de proche en proche l'équation aux différences pour calculer $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= \Phi_1 \mathbf{X}_0 + \dots + \Phi_p \mathbf{X}_{-p+1} + \mathbf{a}_1 - \Theta_1 \mathbf{a}_0 - \dots - \Theta_q \mathbf{a}_{-q+1}, \\ &\vdots \\ \mathbf{X}_t &= \Phi_1 \mathbf{X}_{t-1} + \dots + \Phi_p \mathbf{X}_{t-p} + \mathbf{a}_t - \Theta_1 \mathbf{a}_{t-1} - \dots - \Theta_q \mathbf{a}_{t-q}, \\ &\vdots \\ \mathbf{X}_n &= \Phi_1 \mathbf{X}_{n-1} + \dots + \Phi_p \mathbf{X}_{n-p} + \mathbf{a}_n - \Theta_1 \mathbf{a}_{n-1} - \dots - \Theta_q \mathbf{a}_{n-q}, \end{aligned}$$

et ce, que la série soit stationnaire ou non. Dans ce mémoire nous nous intéressons aux séries partiellement non stationnaires. Pour les générer il suffit d'imposer que le déterminant du polynôme matriciel autorégressif, $\det\{\Phi(B)\}$, admette un comme racine et que les autres soient plus grandes que un en module.

Pour générer deux séries $\{\mathbf{X}_t^{(1)}\}$ et $\{\mathbf{X}_t^{(2)}\}$ de dimensions m_1 et m_2 respectivement, de longueur n , corrélées ou non, il est préférable de les simuler simultanément. Nous générons donc un bruit blanc de loi multinormale de dimension $m_1 + m_2$, de longueur $n + q$, de vecteur moyenne zéro et de matrice de covariance

$$\Sigma_{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \Sigma_{\mathbf{a}}^{(11)} & \Sigma_{\mathbf{a}}^{(12)} \\ \Sigma_{\mathbf{a}}^{(21)} & \Sigma_{\mathbf{a}}^{(22)} \end{bmatrix},$$

où $\Sigma_{\mathbf{a}}^{(21)} = (\Sigma_{\mathbf{a}}^{(12)})'$. De la même façon, nous posons

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} \Phi_i^{(11)} & \Phi_i^{(12)} \\ \Phi_i^{(21)} & \Phi_i^{(22)} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, p, \quad \text{et} \quad \Theta_j = \begin{bmatrix} \Theta_j^{(11)} & \Theta_j^{(12)} \\ \Theta_j^{(21)} & \Theta_j^{(22)} \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, q.$$

Lorsque $\Sigma_{\mathbf{a}}^{(12)} = \mathbf{0}$, $\Phi_i^{(12)} = \Phi_i^{(21)} = \mathbf{0}$, $i = 1, \dots, p$ et $\Theta_j^{(12)} = \Theta_j^{(21)} = \mathbf{0}$, $j = 1, \dots, q$, les deux séries $\{\mathbf{X}_t^{(1)}\}$ et $\{\mathbf{X}_t^{(2)}\}$ sont indépendantes.

3.1.2 Estimation et statistiques de test

Pour la partie estimation, nous nous concentrons sur les processus autorégressifs, car l'évaluation des estimateurs des moindres carrés des paramètres moyenne mobile d'un processus ARMA nécessite l'utilisation d'un algorithme itératif, qui n'est pas disponible dans le progiciel S-Plus.

Nous estimons d'abord les paramètres autorégressifs des séries $\{\mathbf{X}_t^{(1)}\}$ et $\{\mathbf{X}_t^{(2)}\}$ séparément par la méthode des moindres carrés conditionnels décrite à la section 2.2.1. Soient $\Phi_{(p_h)} = (\Phi_1, \dots, \Phi_{p_h})'$, $h = 1, 2$, alors l'estimateur des moindres carrés de $\Phi_{(p_h)}$ est donné par

$$\hat{\Phi}_{(p_h)} = \left[\sum_{t=p_h+1}^n \tilde{\mathbf{Z}}_{t,p_h}^{(h)} \tilde{\mathbf{Z}}_{t,p_h}^{(h)'} \right]^{-1} \sum_{t=p_h+1}^n \tilde{\mathbf{Z}}_{t,p_h}^{(h)} (\mathbf{X}_t^{(h)} - \bar{\mathbf{X}}_{(0)}^{(h)})', \quad h = 1, 2,$$

où

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{t,p_h}^{(h)} = [(\mathbf{X}_{t-1}^{(h)} - \bar{\mathbf{X}}_{(1)}^{(h)})', \dots, (\mathbf{X}_{t-p_h}^{(h)} - \bar{\mathbf{X}}_{(p_h)}^{(h)})']', \quad t = p_h + 1, \dots, n$$

et

$$\bar{\mathbf{X}}_{(0)}^{(h)} = \frac{1}{n - p_h} \sum_{t=p_h+1}^n \mathbf{X}_t, \quad h = 1, 2.$$

Les résidus sont obtenus par la formule

$$\hat{\mathbf{a}}_t^{(h)} = (\mathbf{X}_t^{(h)} - \bar{\mathbf{X}}_{(0)}^{(h)}) - \hat{\Phi}_{(p_h)}' \tilde{\mathbf{Z}}_{t,p_h}^{(h)}, \quad t = p_h + 1, \dots, n, \quad h = 1, 2.$$

Pour le calcul de la statistique de test à un délai k particulier, défini par l'équation

$$\text{QH}(k) = n \text{vec} \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{a}}}^{(12)}(k)' (\hat{\Omega}_2^{-1} \otimes \hat{\Omega}_1^{-1}) \text{vec} \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{a}}}^{(12)}(k),$$

nous utilisons les fonctions prédéfinies de S-Plus pour évaluer les matrices de corrélation croisée résiduelle, $\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{a}}}^{(12)}(k)$ et $\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{a}}}^{(21)}(k) = \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{a}}}^{(12)}(-k)'$. Nous estimons Ω_h , la matrice de corrélation de la série $\{\mathbf{a}_t^{(h)}\}$ par

$$\hat{\Omega}_h = \left[\frac{\sum_{t=p_h+1}^n \hat{\mathbf{a}}_{it}^{(h)} \hat{\mathbf{a}}_{jt}^{(h)}}{\sum_{t=p_h+1}^n (\hat{\mathbf{a}}_{it}^{(h)})^2 \sum_{t=p_h+1}^n (\hat{\mathbf{a}}_{jt}^{(h)})^2} \right]_{m \times m}, \quad h = 1, 2.$$

Nous calculons également la statistique modifiée

$$\text{QH}^*(k) = \frac{n}{n - |k|} \text{QH}(k),$$

à chaque délai $k = -M, \dots, M$, où M est un entier positif quelconque. Pour obtenir les statistiques globales, QH_M et QH_M^* , il suffit de faire la somme des statistiques $\text{QH}(k)$ et $\text{QH}^*(k)$ respectivement, pour $k = -M, \dots, M$.

3.2 Description de la simulation

Nous voulons comparer les distributions exactes des statistiques de test $QH(k)$, $QH^*(k)$, QH_M et QH_M^* avec leur distribution asymptotique khi-deux, sous l'hypothèse nulle de non corrélation. Dans la simulation, nous nous sommes limités à des séries bivariées $\{\mathbf{X}_t^{(1)}\}$ et $\{\mathbf{X}_t^{(2)}\}$, partiellement non stationnaires, inversibles et non corrélées. Quatre différents modèles, soient AR(1), AR(2), AR(4) saisonnier et ARMA(1,1), tels que décrits dans les tableaux 3.1 à 3.3 ont été utilisés pour générer les séries. Pour chaque modèle, nous avons généré des séries de longueurs $n = 50, 100$ et 200 . Pour les modèles autorégressifs, 2000 réalisations indépendantes ont été générées pour chaque longueur de série. Pour le modèle ARMA(1,1), seulement 1000 réalisations ont été effectuées dues au temps de calcul beaucoup plus long. Pour chaque modèle et chacune des valeurs de n , nous avons ensuite calculé les niveaux empiriques (fréquences de rejet de l'hypothèse nulle) à l'aide de chacune des statistiques de test pour trois différents niveaux de signification nominaux ($\alpha = 0.01, 0.15$ et 0.10).

Pour la simulation, grâce aux fonctions développées à l'aide du progiciel S-Plus et dont le code est fourni à l'annexe B, nous avons procédé de la façon suivante. Pour un modèle donné et pour une longueur de série donnée, les étapes suivantes ont été exécutées pour chaque réalisation.

1. Nous avons généré indépendamment $n + q$ bruits blancs \mathbf{a}_t de dimension 4 de loi $N(\mathbf{0}, \Sigma_a)$ grâce à la fonction $BB(\cdot)$.
2. Les valeurs de $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ ont été obtenues en résolvant l'équation aux différences de proche en proche, comme décrit à la sous-section 3.1.1, avec comme valeurs initiales, $\mathbf{X}_0 = \dots = \mathbf{X}_{-p+1} = \mathbf{0}$, avec la fonction $\text{simARMA}(\cdot)$.

MODÈLES	ÉQUATIONS
AR(1)	$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_t^{(1)} \\ \mathbf{X}_t^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi^{(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{t-1}^{(1)} \\ \mathbf{X}_{t-1}^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{a}_t^{(1)} \\ \mathbf{a}_t^{(2)} \end{bmatrix}$
AR(2)	$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_t^{(1)} \\ \mathbf{X}_t^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1^{(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_1^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{t-1}^{(1)} \\ \mathbf{X}_{t-1}^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{a}_t^{(1)} \\ \mathbf{a}_t^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi_2^{(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_2^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{t-2}^{(1)} \\ \mathbf{X}_{t-2}^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{a}_t^{(1)} \\ \mathbf{a}_t^{(2)} \end{bmatrix}$
AR(4)	$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_t^{(1)} \\ \mathbf{X}_t^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_4^{(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_4^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{t-4}^{(1)} \\ \mathbf{X}_{t-4}^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{a}_t^{(1)} \\ \mathbf{a}_t^{(2)} \end{bmatrix}$
ARMA(1,1)	$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_t^{(1)} \\ \mathbf{X}_t^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi^{(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{t-1}^{(1)} \\ \mathbf{X}_{t-1}^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Theta^{(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Theta^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_t^{(1)} \\ \mathbf{a}_t^{(2)} \end{bmatrix}$

Matrice de covariance des bruits blancs: $\Sigma_a = \begin{bmatrix} \Sigma_a^{(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma_a^{(2)} \end{bmatrix}$

Tableau 3.1: Modèles utilisés pour la simulation.

PARAMÈTRES		
$\Phi^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.0 \\ -1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$	$\Phi^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ -0.8 & 0.5 \end{bmatrix}$	$\Phi_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.5 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$
$\Phi_1^{(2)} = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.8 \\ -0.4 & 0.2 \end{bmatrix}$	$\Phi_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 \\ 0.6 & 0.3 \end{bmatrix}$	$\Phi_2^{(2)} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.3 \\ -0.8 & 0.5 \end{bmatrix}$
$\Phi_4^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.0 \\ -1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$	$\Phi_4^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ -0.8 & 0.5 \end{bmatrix}$	$\Theta^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 \\ -0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$
$\Theta^{(2)} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.3 \\ -0.7 & 0.6 \end{bmatrix}$	$\Sigma_a^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 \\ 0.5 & 1.0 \end{bmatrix}$	$\Sigma_a^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.75 \\ 0.75 & 1.00 \end{bmatrix}$

Tableau 3.2: Valeurs des paramètres des modèles utilisés pour la simulation.

OPÉRATEURS	RACINES
$1 - \Phi^{(1)}B$	$\{1.00, 2.50\}$
$1 - \Phi^{(2)}B$	$\{1.00, 2.00\}$
$1 - \Phi_1^{(1)}B - \Phi_2^{(1)}B^2$	$\{1.00, -1.35, 1.53 \pm 1.33i\}$
$1 - \Phi_1^{(2)}B - \Phi_2^{(2)}B^2$	$\{1.00, -0.74 \pm 0.78i, -86.51\}$
$1 - \Phi_4^{(1)}B^4$	$\{\pm 1.00, \pm 1.26\}$
$1 - \Phi_4^{(2)}B^4$	$\{\pm 1.00, \pm 1.19\}$
$1 - \Theta^{(1)}B$	$\{0.10 \pm 1.23i\}$
$1 - \Theta^{(2)}B$	$\{2.82, -3.94\}$

Tableau 3.3: Racines du déterminant des opérateurs autorégressifs et moyenne mobile.

3. Pour chaque sous-série bivariée $\mathbf{X}_t^{(h)}$, $h = 1, 2$, nous avons estimé individuellement le vrai modèle par la méthode des moindres carrés conditionnels décrite à la sous-section 2.2.1 à l'aide de la fonction `Phi.est(·)`. Pour le modèle ARMA(1,1), nous avons estimé un modèle autorégressif pour chaque sous-série. L'ordre p a été déterminé en minimisant le critère AIC d'Akaike pour $1 \leq p \leq P$, où P est fixé. Nous verrons après description de la procédure de simulation que le choix $P = 12$ est approprié. À partir des séries résiduelles $\hat{\mathbf{a}}_t^{(h)}$, $h = 1, 2$, obtenues avec la fonction `Residus(·)`, nous avons calculé les matrices de corrélation croisée, $\mathbf{R}_a^{(12)}(k)$, définies à la sous-section 1.2.2.
4. Les valeurs des statistiques $\text{QH}(k)$ et $\text{QH}^*(k)$ ont été obtenues pour $k = -12, \dots, 12$ et les valeurs de QH_M et QH_M^* pour $M = 1, \dots, 12$ avec la fonction `Test(·)`.
5. Pour chaque test, la valeur de la statistique a été comparée à la valeur critique de la distribution khi-deux correspondante, aux niveaux nominaux $\alpha = 0.01, 0.05$ et 0.10 .
6. Finalement, à partir de l'ensemble des réalisations, nous avons obtenu la fréquence de rejet de l'hypothèse nulle de non corrélation associée à chaque test.

Nous pouvons trouver la valeur P à utiliser, afin de minimiser le critère d'Akaike, en écrivant le modèle ARMA(1,1) sous la représentation autorégressive infinie. Étant donné que les polynômes moyenne mobile sont inversibles, nous pouvons écrire le modèle ARMA(1,1) de la façon suivante:

$$\Pi(B)\mathbf{X}_t = \mathbf{a}_t,$$

où $\Pi(B) = \mathbf{I} - \Pi_1 B - \Pi_2 B^2 - \dots$ et en inversant l'opérateur moyenne mobile,

nous pouvons écrire $\mathbf{\Pi}(B) = (\mathbf{I} - \mathbf{\Phi}B)(\mathbf{I} - \mathbf{\Theta}B)^{-1}$ qui est équivalent à

$$(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi}_1 B - \mathbf{\Pi}_2 B^2 - \dots)(\mathbf{I} - \mathbf{\Theta}B) = \mathbf{I} - \mathbf{\Phi}B.$$

En égalant les coefficients de chaque puissance de B dans les deux membres de l'équation, nous obtenons

$$\mathbf{\Pi}_k = \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{\Theta}^{k-1}, \quad k > 1,$$

où $\mathbf{\Pi}_1 = \mathbf{\Phi} - \mathbf{\Theta}$. Ainsi, pour le modèle

$$(\mathbf{I} - \mathbf{\Phi}^{(1)}B) \mathbf{X}_t^{(1)} = (\mathbf{I} - \mathbf{\Theta}^{(1)}B) \mathbf{a}_t^{(1)}, \quad (3.1)$$

avec les valeurs de $\mathbf{\Phi}^{(1)}$ et $\mathbf{\Theta}^{(1)}$ fournies dans le tableau 3.2, nous trouvons

$$\mathbf{\Pi}_{12}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.012 & -0.065 \\ -0.071 & -0.028 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Pi}_{22}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.003 & -0.008 \\ -0.009 & -0.005 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } \mathbf{\Pi}_{25}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.003 & 0.003 \\ 0.003 & -0.004 \end{bmatrix}.$$

De même, pour le modèle

$$(\mathbf{I} - \mathbf{\Phi}^{(2)}B) \mathbf{X}_t^{(2)} = (\mathbf{I} - \mathbf{\Theta}^{(2)}B) \mathbf{a}_t^{(2)}, \quad (3.2)$$

nous avons que

$$\mathbf{\Pi}_3^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.081 & -2.776 \times 10^{17} \\ 0.003 & -0.018 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Pi}_5^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.003 & 0.002 \\ 0.001 & -0.003 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } \mathbf{\Pi}_{12}^{(2)} = \begin{bmatrix} -3.37 \times 10^{-6} & 3.68 \times 10^{-6} \\ 1.78 \times 10^{-6} & -2.11 \times 10^{-6} \end{bmatrix}.$$

Dans la représentation $\text{AR}(\infty)$ du modèle 3.1, les composantes des coefficients matriciels $\mathbf{\Pi}_k^{(1)}$ sont toutes inférieures à 0.1, en valeur absolue, pour $k = 12$, inférieures à 0.01 pour $k = 22$ et inférieures à 0.005 pour $k = 25$. Avec le modèle 3.2, les composantes des coefficients matriciels $\mathbf{\Pi}_k^{(2)}$ sont toutes inférieures à 0.1

pour $k = 3$, inférieures à 0.01 pour $k = 5$ et inférieures à 0.5×10^{-5} pour $k = 12$. Ces résultats nous ont conduit à prendre $P = 12$ comme valeur maximale de p dans l'approximation du modèle ARMA(1,1) par un AR(p). La valeur $P = 22$ eut peut-être été préférable, mais le temps de calcul est déjà très long avec $P = 12$.

3.3 Résultats de simulation

Comme pour le cas stationnaire, voir El Himdi (1993) ou El Himdi et Roy (1997), nous avons remarqué que la distribution khi-deux approxime mieux la distribution exacte des statistiques modifiées pour de courtes et moyennes séries ($n = 50$ et 100) et pour des délais k et des valeurs de M relativement élevés. Pour cette raison, nous présentons uniquement les niveaux empiriques (en pourcentage) des statistiques modifiées, qui sont illustrés aux graphiques 3.1 à 3.12, avec les limites de signification à 5%. Les valeurs en pourcentage des niveaux empiriques sont également données sous forme de tableaux à l'annexe A. Les erreurs types des niveaux empiriques basés sur 2000 réalisations sont 0.22% pour le niveau nominal 1%, 0.49% pour 5% et 0.67% pour 10%. Avec 1000 réalisations, les erreurs types sont 0.31%, 0.69% et 0.95% pour les niveaux nominaux 1%, 5% et 10% respectivement.

Note: Dans les figures 3.1 à 3.12, les lignes pointillées représentent les limites de signification au niveau 5% des niveaux empiriques.

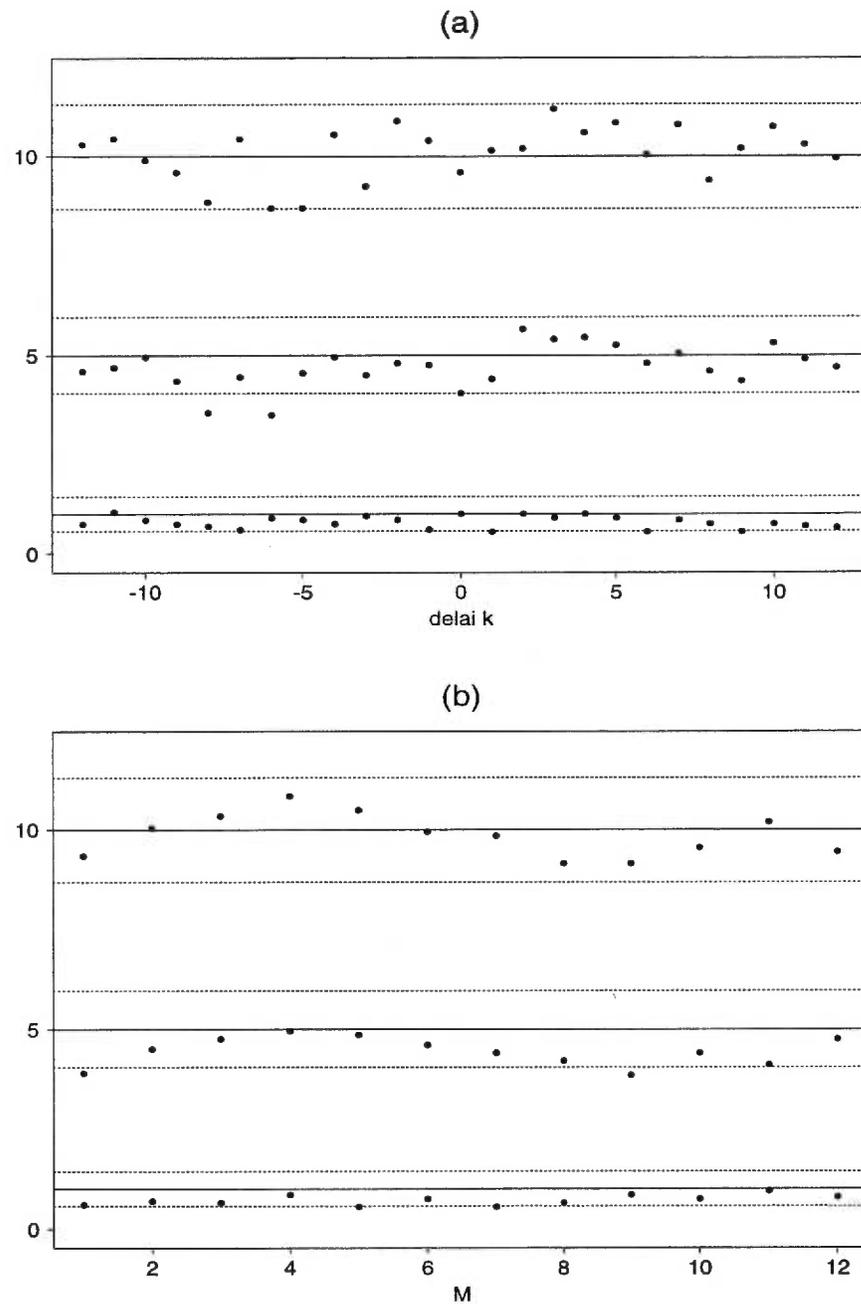


Fig. 3.1: Niveaux empiriques en pourcentage de: (a) $QH^*(k)$, $|k| \leq 12$, (b) QH_M^* , $M = 1, \dots, 12$, correspondant aux niveaux nominaux 1%, 5% et 10% pour le modèle AR(1), $n = 50$.

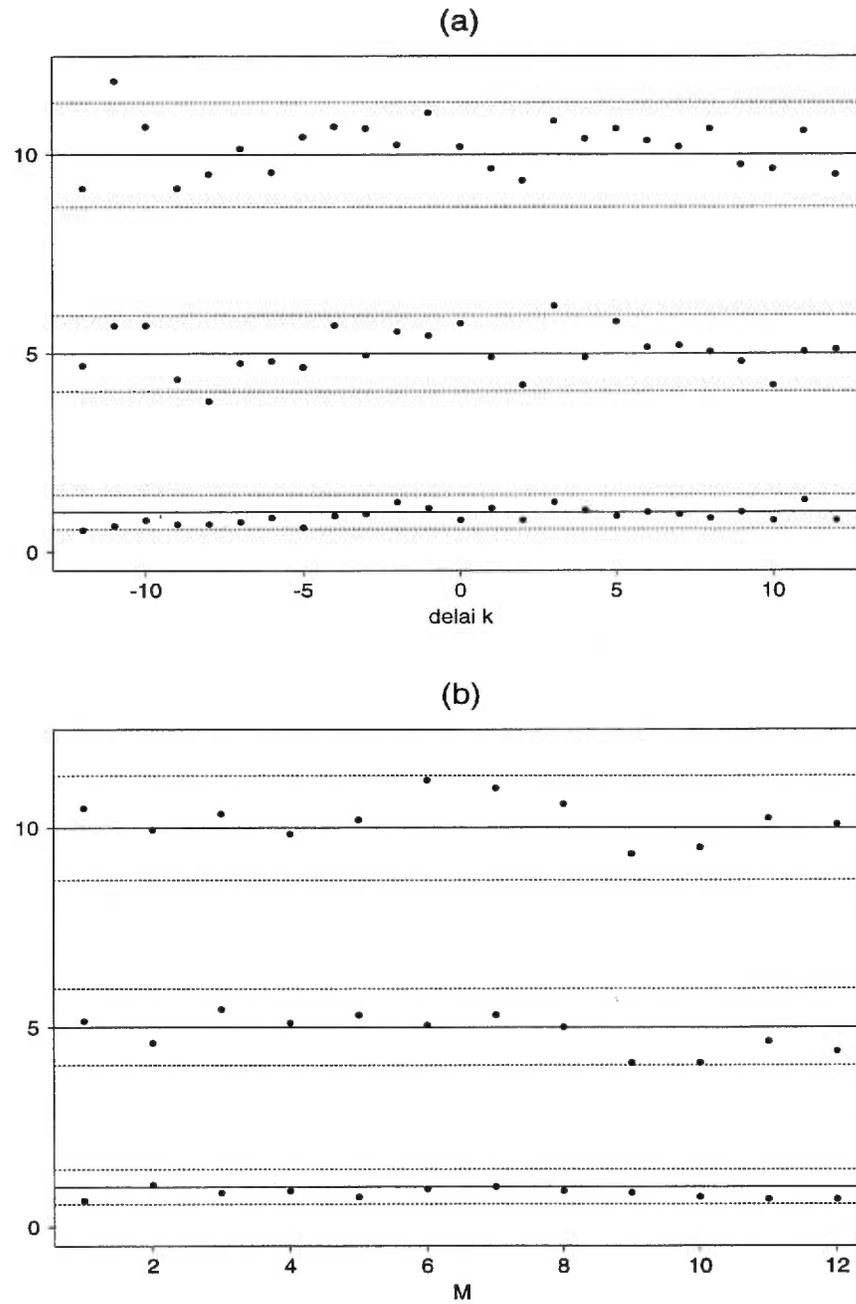


Fig. 3.2: Niveaux empiriques en pourcentage de: (a) $QH^*(k)$, $|k| \leq 12$, (b) QH_M^* , $M = 1, \dots, 12$, correspondant aux niveaux nominaux 1%, 5% et 10% respectivement pour le modèle AR(1), $n = 100$.

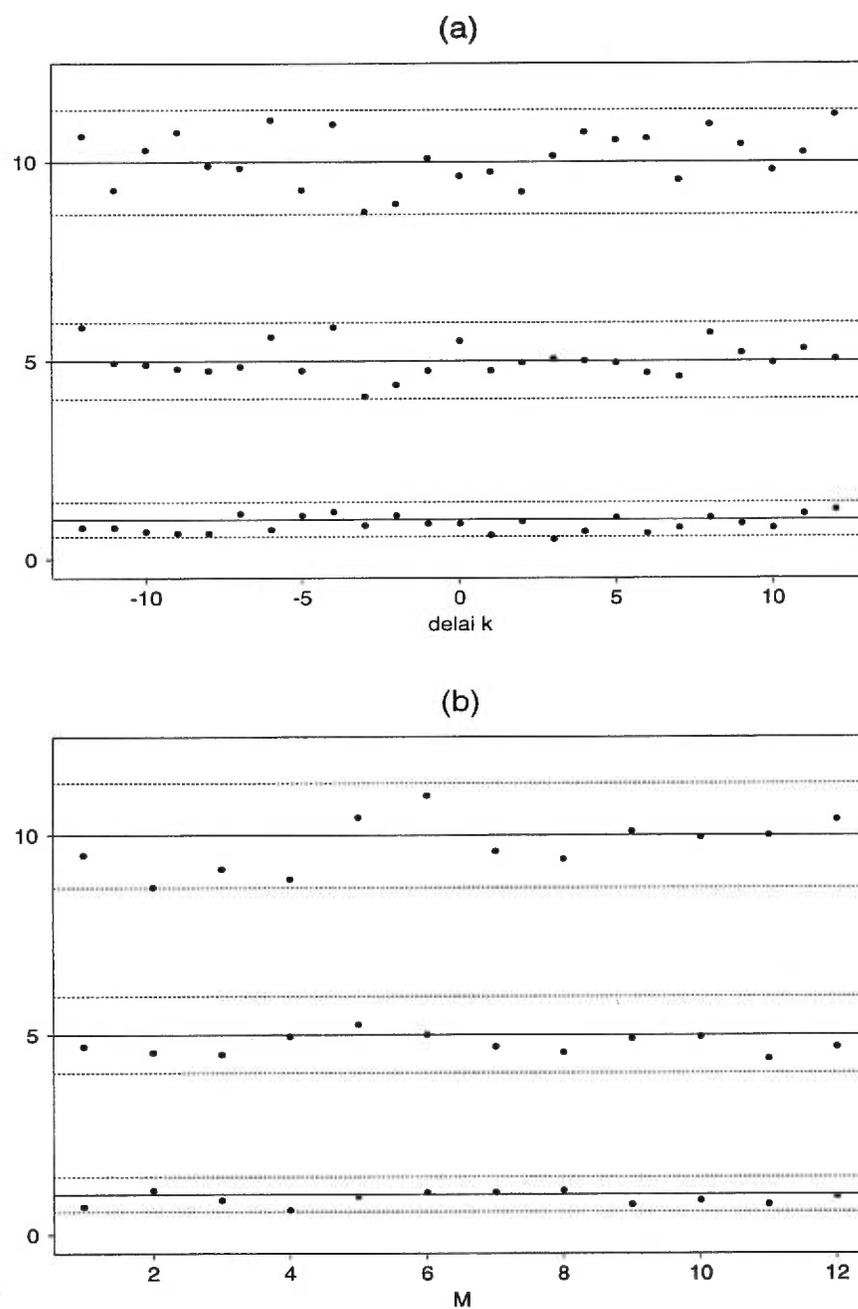


Fig. 3.3: Niveaux empiriques en pourcentage de: (a) $QH^*(k)$, $|k| \leq 12$, (b) QH_M^* , $M = 1, \dots, 12$, correspondant aux niveaux nominaux 1%, 5% et 10% respectivement pour le modèle AR(1), $n = 200$.

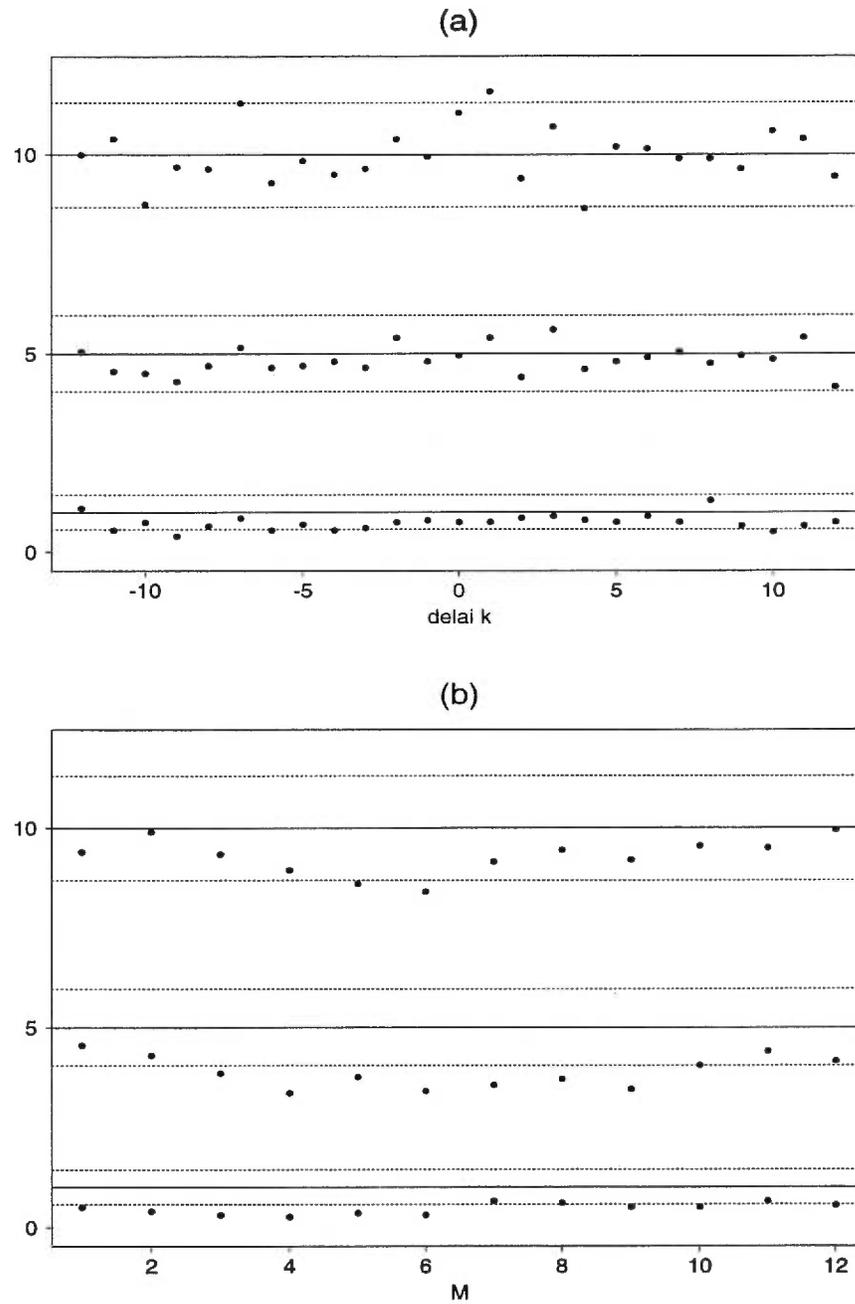


Fig. 3.4: Niveaux empiriques en pourcentage de: (a) $QH^*(k)$, $|k| \leq 12$, (b) QH_M^* , $M = 1, \dots, 12$, correspondant aux niveaux nominaux 1%, 5% et 10% respectivement pour le modèle AR(2), $n = 50$.

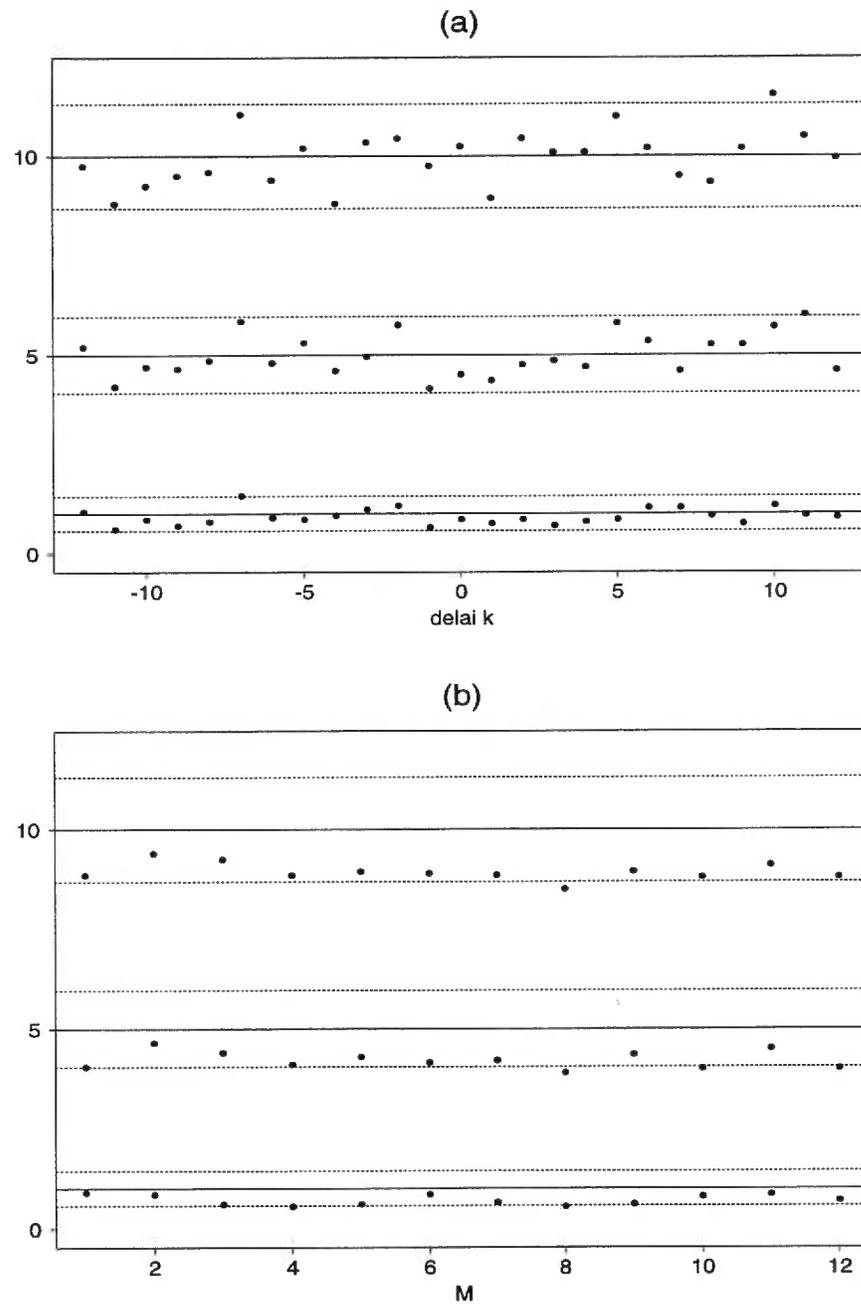


Fig. 3.5: Niveaux empiriques en pourcentage de: (a) $QH^*(k)$, $|k| \leq 12$, (b) QH_M^* , $M = 1, \dots, 12$, correspondant aux niveaux nominaux 1%, 5% et 10% respectivement pour le modèle AR(2), $n = 100$.

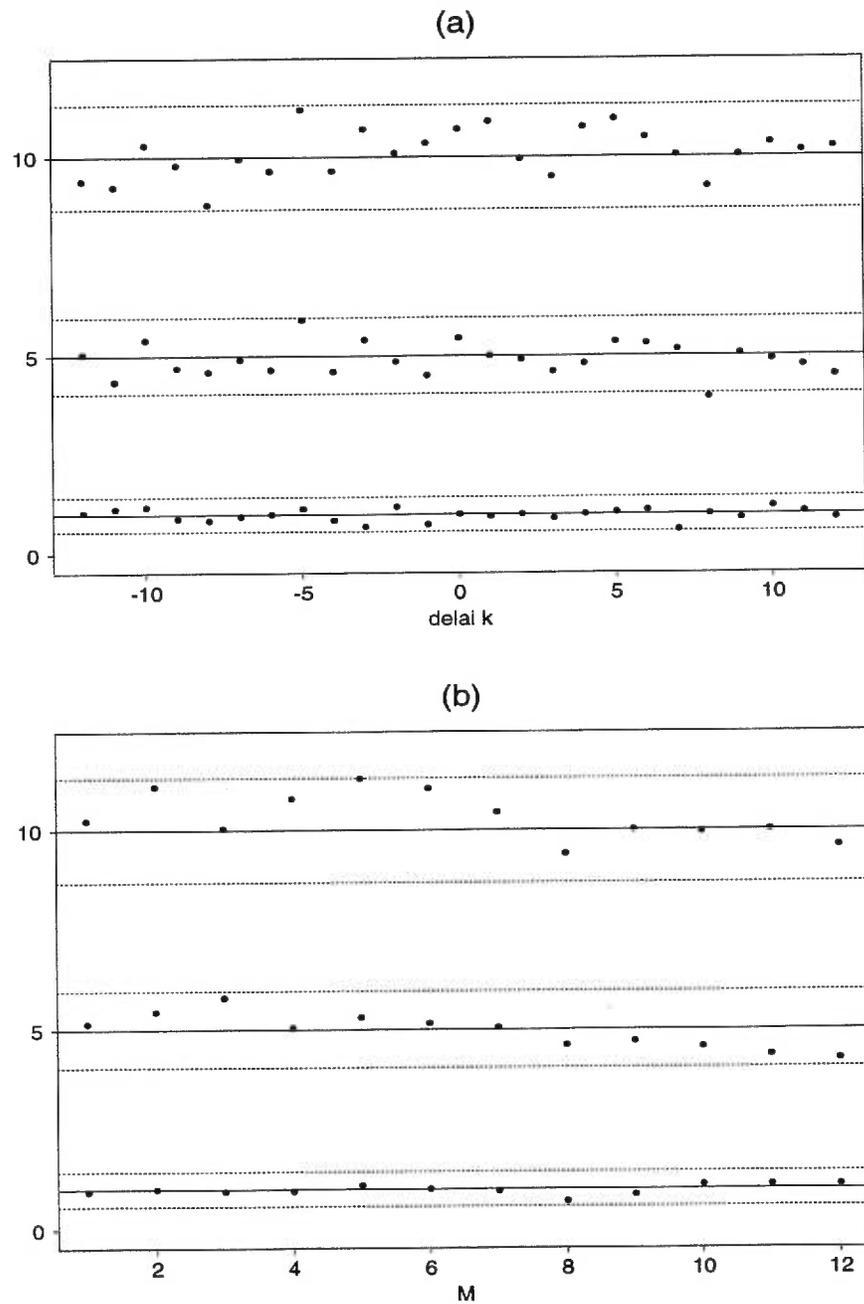


Fig. 3.6: Niveaux empiriques en pourcentage de: (a) $QH^*(k)$, $|k| \leq 12$, (b) QH_M^* , $M = 1, \dots, 12$, correspondant aux niveaux nominaux 1%, 5% et 10% respectivement pour le modèle AR(2), $n = 200$.

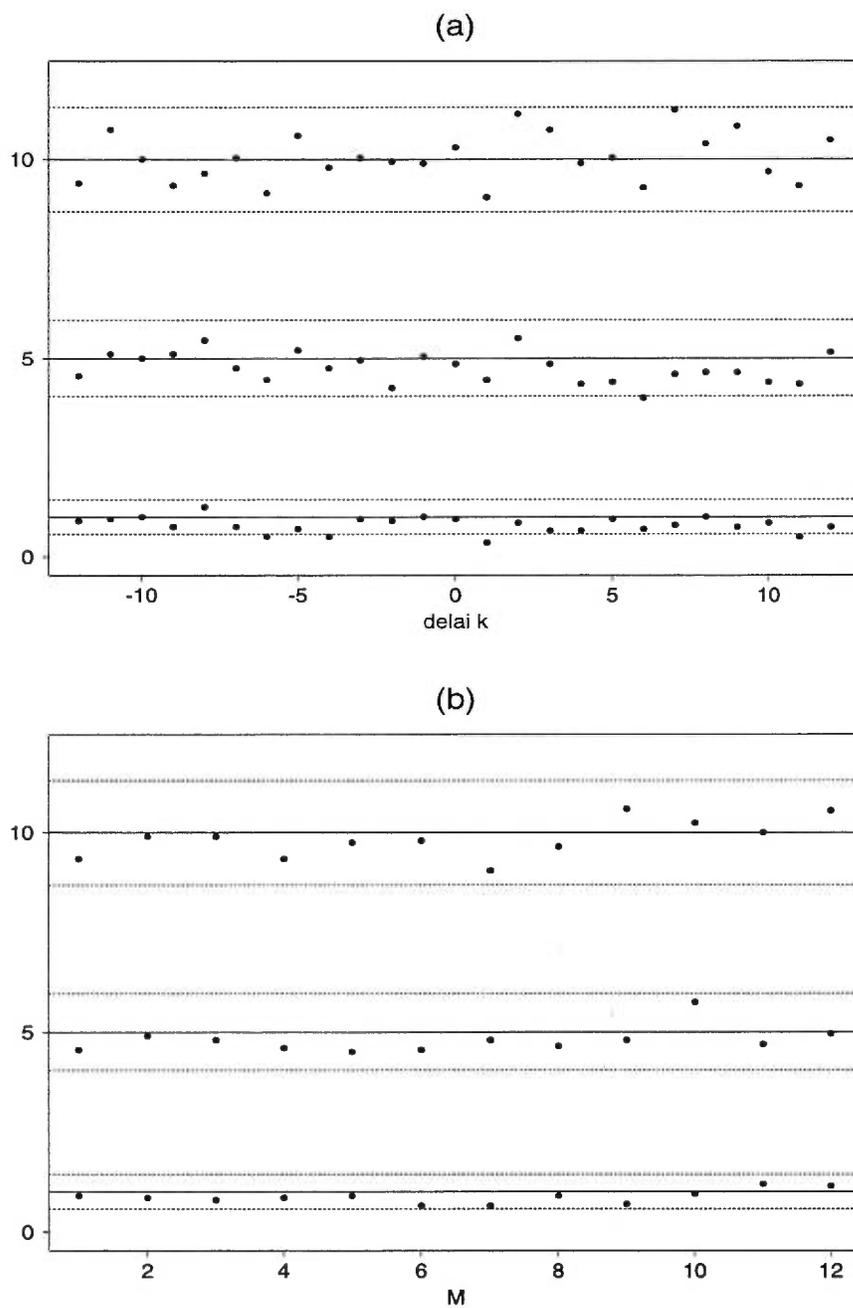


Fig. 3.7: Niveaux empiriques en pourcentage de: (a) $QH^*(k)$, $|k| \leq 12$, (b) QH_M^* , $M = 1, \dots, 12$, correspondant aux niveaux nominaux 1%, 5% et 10% respectivement pour le modèle $AR(4)$, $n = 50$.

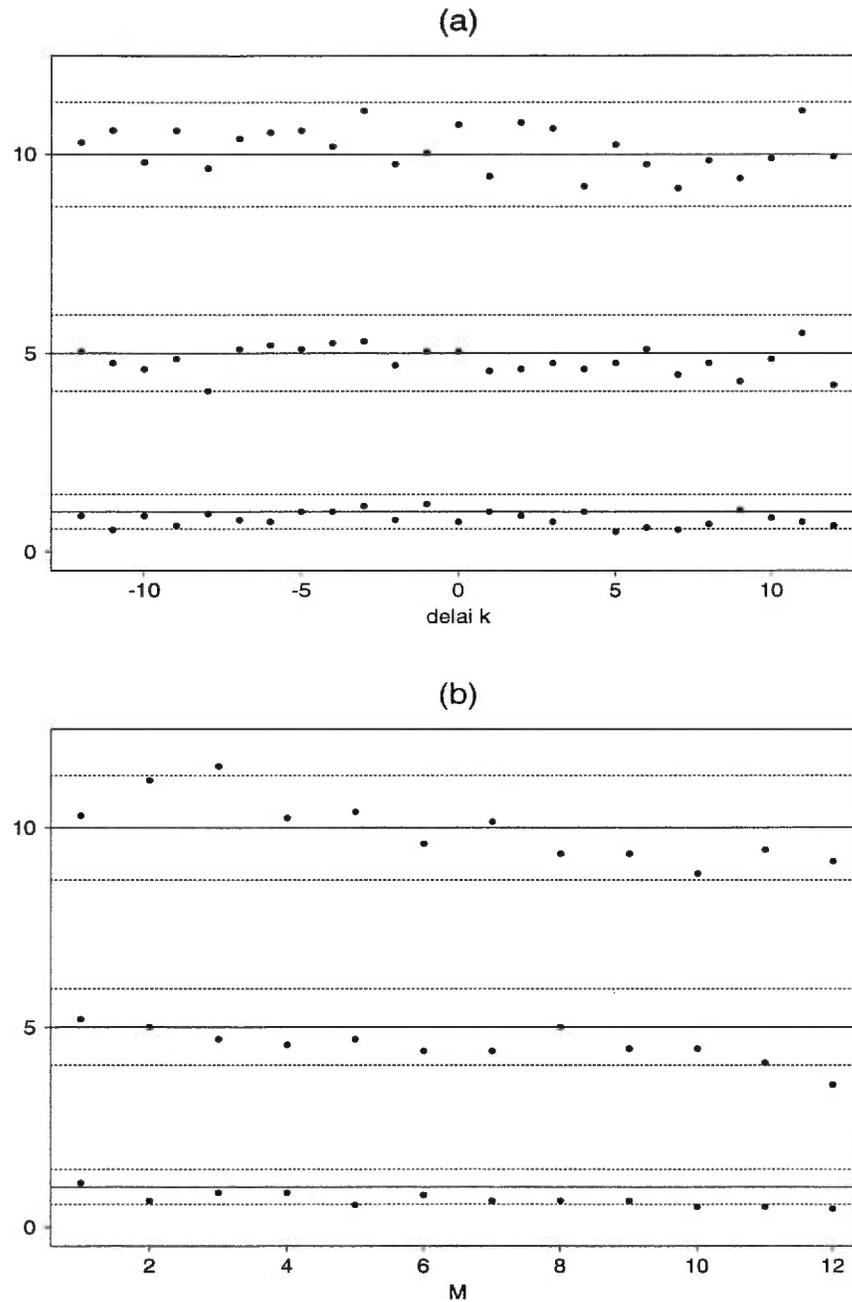


Fig. 3.8: Niveaux empiriques en pourcentage de: (a) $QH^*(k)$, $|k| \leq 12$, (b) QH_M^* , $M = 1, \dots, 12$, correspondant aux niveaux nominaux 1%, 5% et 10% respectivement pour le modèle AR(4), $n = 100$.

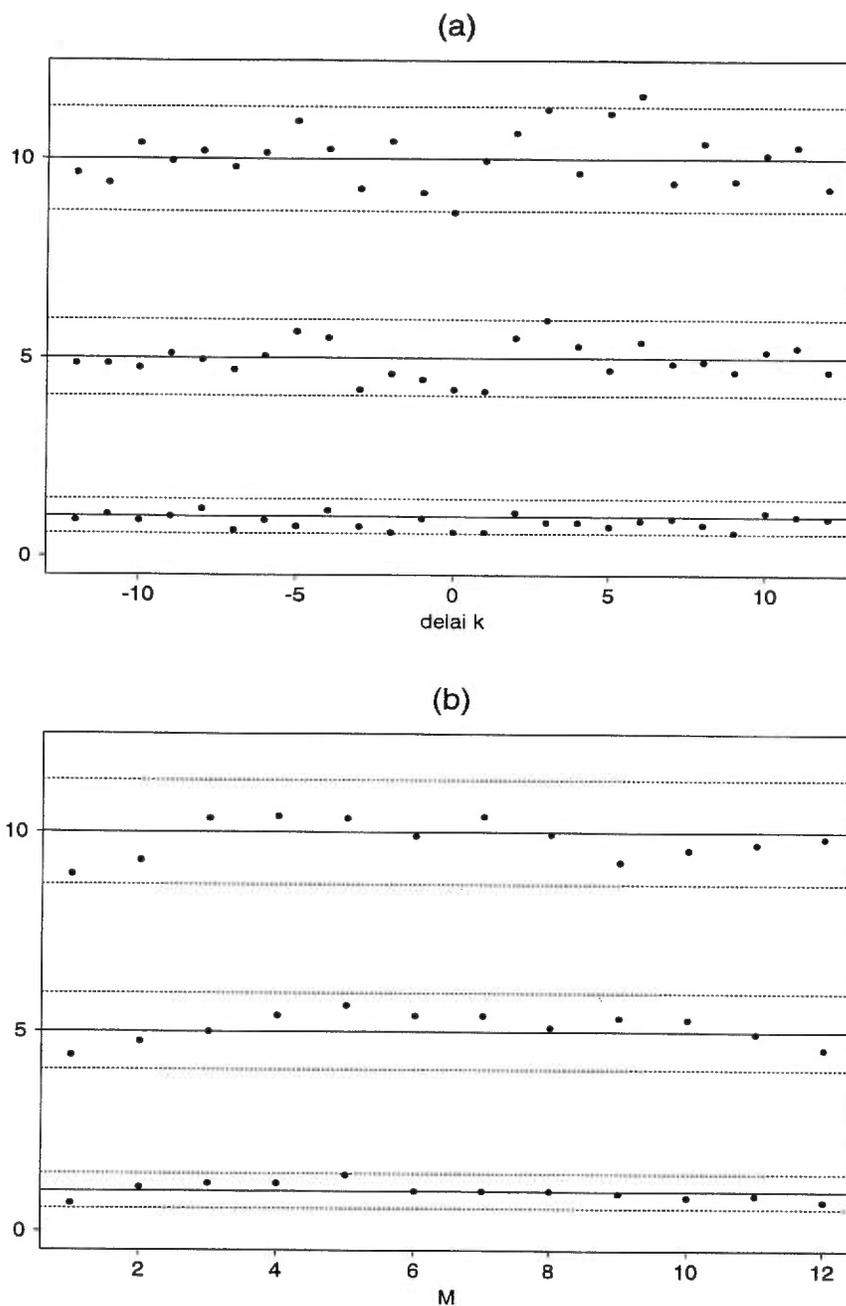


Fig. 3.9: Niveaux empiriques en pourcentage de: (a) $QH^*(k)$, $|k| \leq 12$, (b) QH_M^* , $M = 1, \dots, 12$, correspondant aux niveaux nominaux 1%, 5% et 10% respectivement pour le modèle AR(4), $n = 200$.

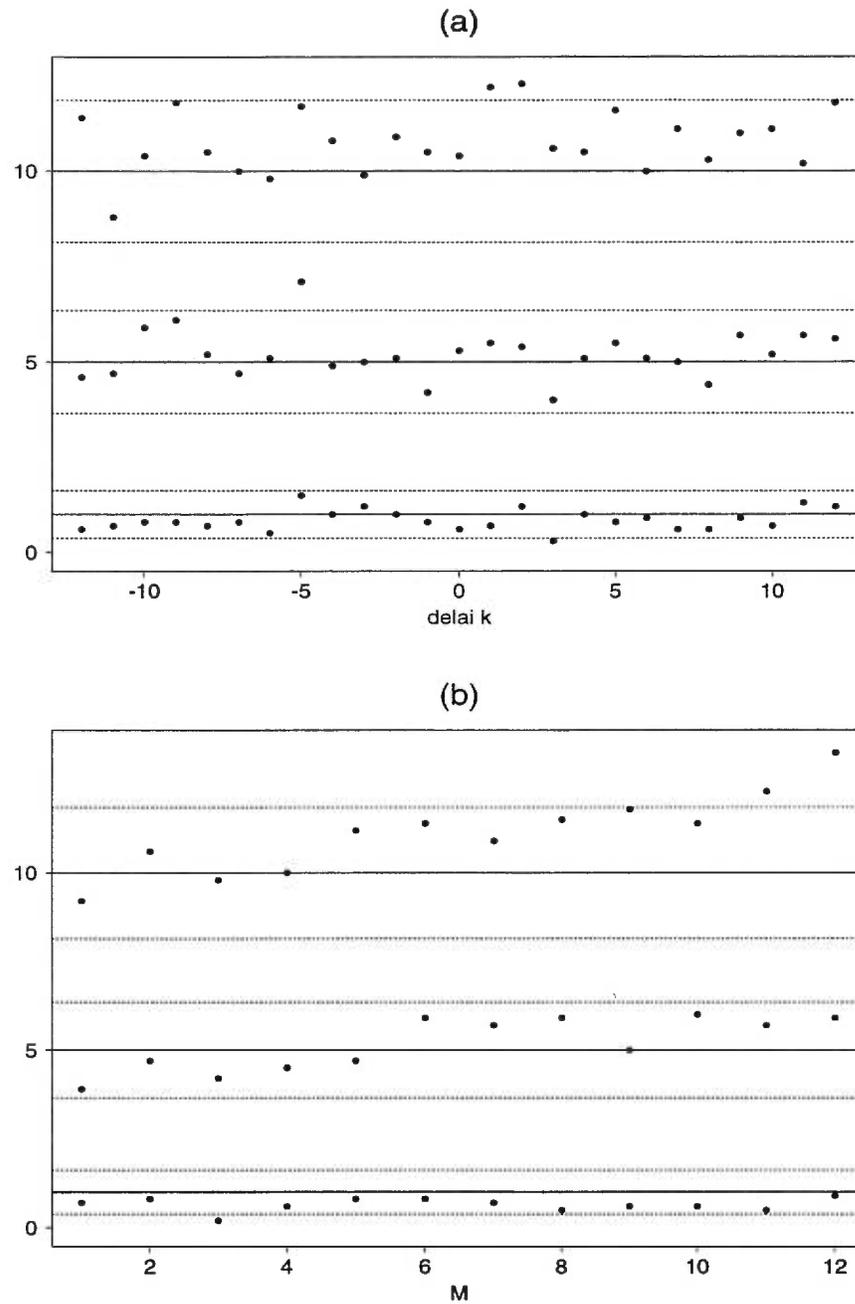


Fig. 3.10: Niveaux empiriques en pourcentage de: (a) $QH^*(k)$, $|k| \leq 12$, (b) QH_M^* , $M = 1, \dots, 12$, correspondant aux niveaux nominaux 1%, 5% et 10% respectivement pour le modèle ARMA(1,1), $n = 50$.

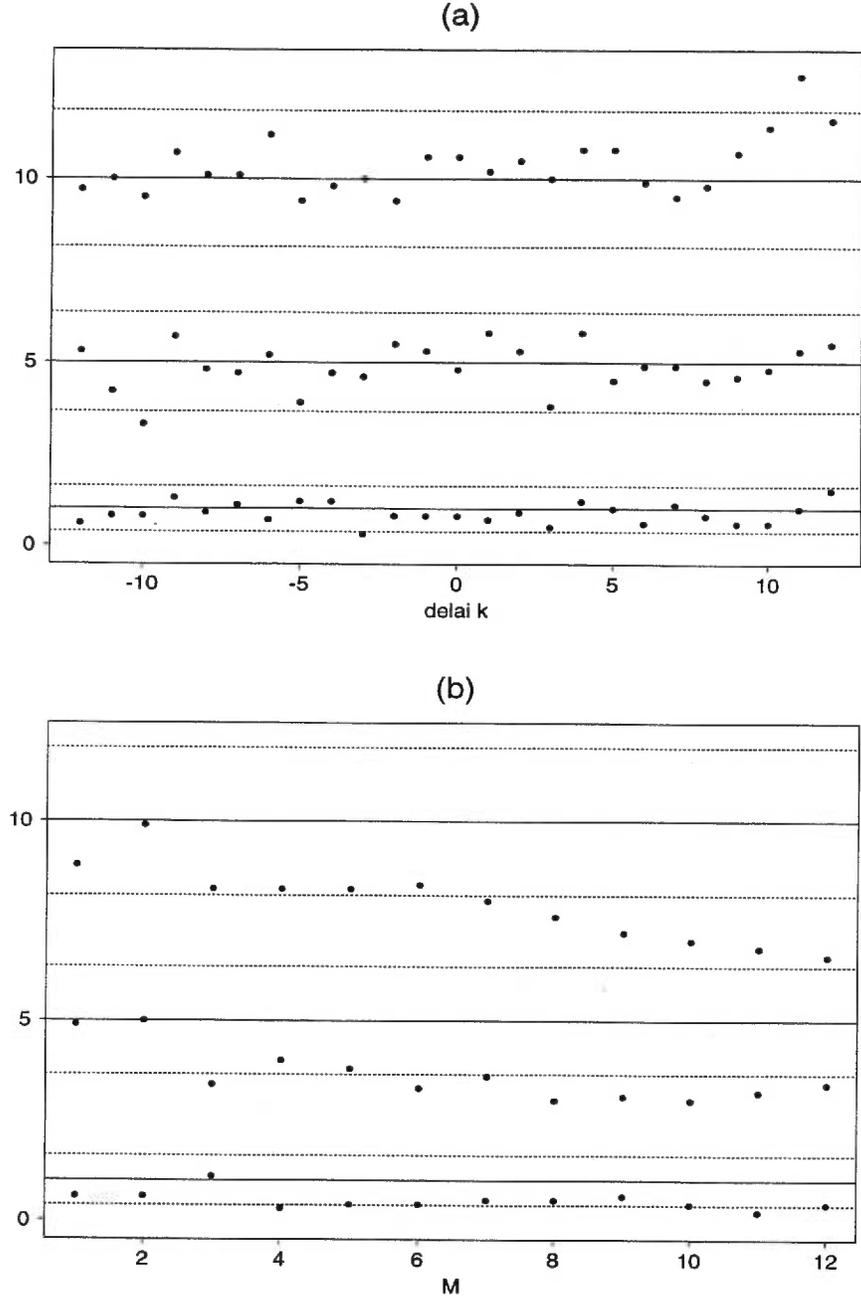


Fig. 3.11: Niveaux empiriques en pourcentage de: (a) $QH^*(k)$, $|k| \leq 12$, (b) QH_M^* , $M = 1, \dots, 12$, correspondant aux niveaux nominaux 1%, 5% et 10% respectivement pour le modèle ARMA(1,1), $n = 100$.

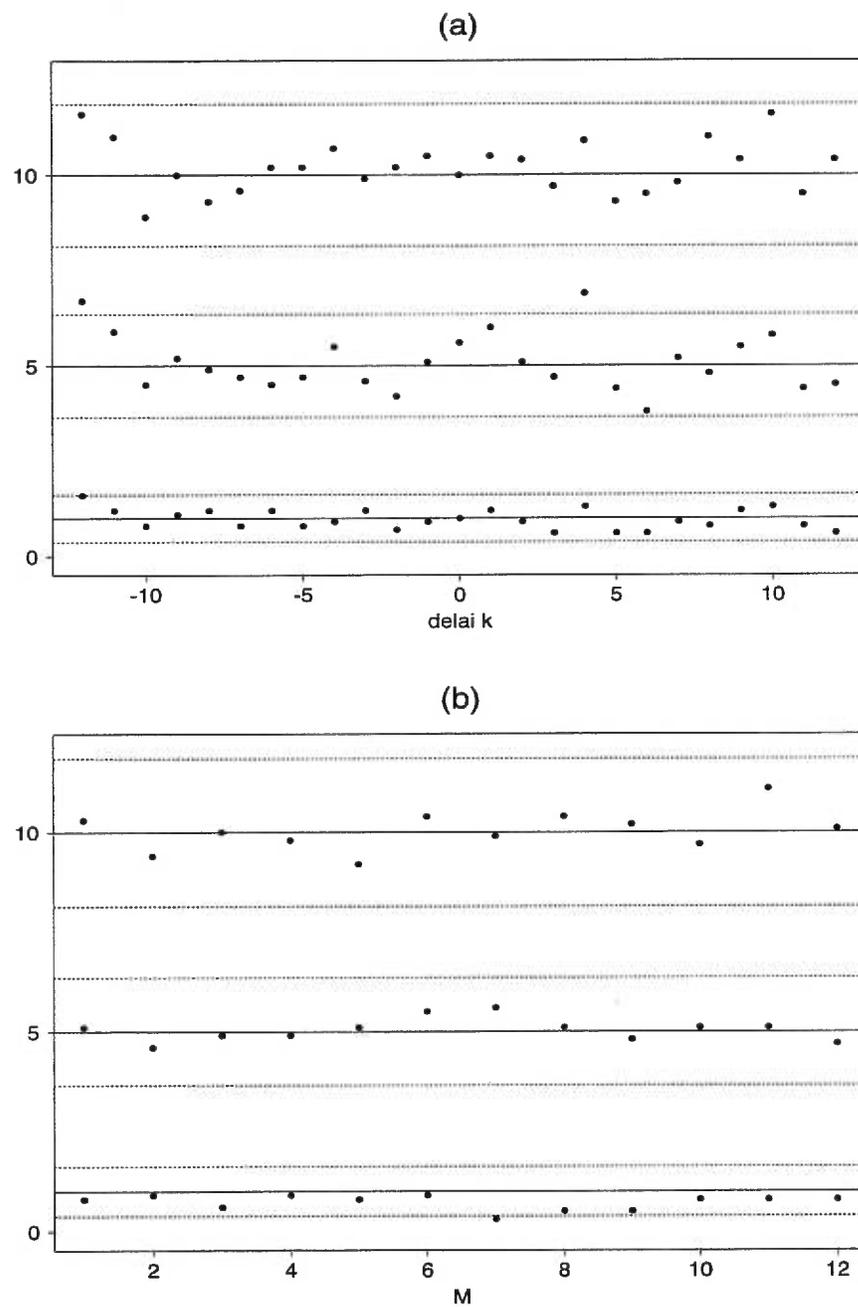


Fig. 3.12: Niveaux empiriques en pourcentage de: (a) $QH^*(k)$, $|k| \leq 12$, (b) QH_M^* , $M = 1, \dots, 12$, correspondant aux niveaux nominaux 1%, 5% et 10% respectivement pour le modèle ARMA(1,1), $n = 200$.

La distribution exacte de la statistique modifiée $QH^*(k)$ est bien approximée par la distribution khi-deux même pour des séries de longueur 50, et ceci pour les quatre modèles. Les niveaux empiriques sont en général près des différents niveaux nominaux. En effet, presque tous les niveaux empiriques se situent à l'intérieur des limites de signification à 5% du niveau nominal correspondant et lorsque n augmente, les niveaux empiriques se rapprochent des niveaux nominaux. Il n'y a que deux niveaux empiriques à plus de trois erreurs types du niveau nominal associé, ce qui est conforme à la théorie, et ils se retrouvent aux séries AR(1) et ARMA(1,1) de longueur 50.

Pour la statistique portemanteau QH_M^* , la majorité des niveaux empiriques se situent à l'intérieur des limites de signification à 5% du niveau nominal correspondant. Lorsque n augmente, les niveaux empiriques se rapprochent des niveaux nominaux pour le modèle AR(1) et ce phénomène est encore plus prononcé pour le modèle AR(2). En ce qui concerne les modèles saisonnier AR(4) et ARMA(1,1), il y a étrangement plus de niveaux empiriques à l'extérieur des limites de signification pour les séries de longueur 100 que pour celles de longueur 50. Les niveaux empiriques à plus de trois erreurs types du niveau nominal sont présents seulement pour les modèles AR(2) pour des séries de longueur 50 et ARMA(1,1) pour des séries de longueurs 50 et 100. Les résultats des modèles AR(1) et AR(4) saisonnier sont semblables. Les niveaux empiriques des séries de longueurs 50 et 100 du modèle AR(2) et des séries de longueur 100 du modèle ARMA(1,1) sont tous inférieurs au niveau nominal correspondant, à l'exception de deux valeurs. En général, la distribution exacte de la statistique QH_M^* est bien approximée par la distribution khi-deux, sauf peut-être pour les séries AR(2) de longueur 50 et ARMA(1,1) de longueur 100, où la distribution exacte est surestimée.

Chapitre 4

Exemple

Dans ce dernier chapitre, nous appliquons la théorie vue aux chapitres 1 et 2 à des données réelles. Nous considérons deux séries multivariées représentant des données trimestrielles d'indicateurs économiques, analysées originellement par Racette et Raynauld (1990) et par la suite par El Himdi (1993). Une des séries est canadienne de dimension quatre et l'autre est américaine de dimension trois.

4.1 Description des données

Les indicateurs économiques canadiens considérés sont la production intérieure brute en dollars constants de 1982 (PIB), l'indice implicite de prix de la production intérieure brute (PIBD), le taux d'intérêt nominal de court terme (TX.CA) et la base monétaire (M1). Pour les séries américaines, nous retrouvons le produit

national brut en dollars constants de 1982 (GNP), l'indice implicite des prix du produit national brut (GNPD) et le taux d'intérêt de court terme (TX.US). La période d'observation s'étend du premier trimestre de 1970 au dernier trimestre de 1989. Les séries sont donc de longueur 80, et les données sont fournies dans l'annexe A de El Himdi (1993). Les graphiques des sept séries considérées sont fournis à la figure 4.1. Les séries de taux d'intérêt se comportent de manière irrégulière, mais assez similaire. Les cinq autres séries exhibent une tendance croissante, et sont donc non stationnaires.

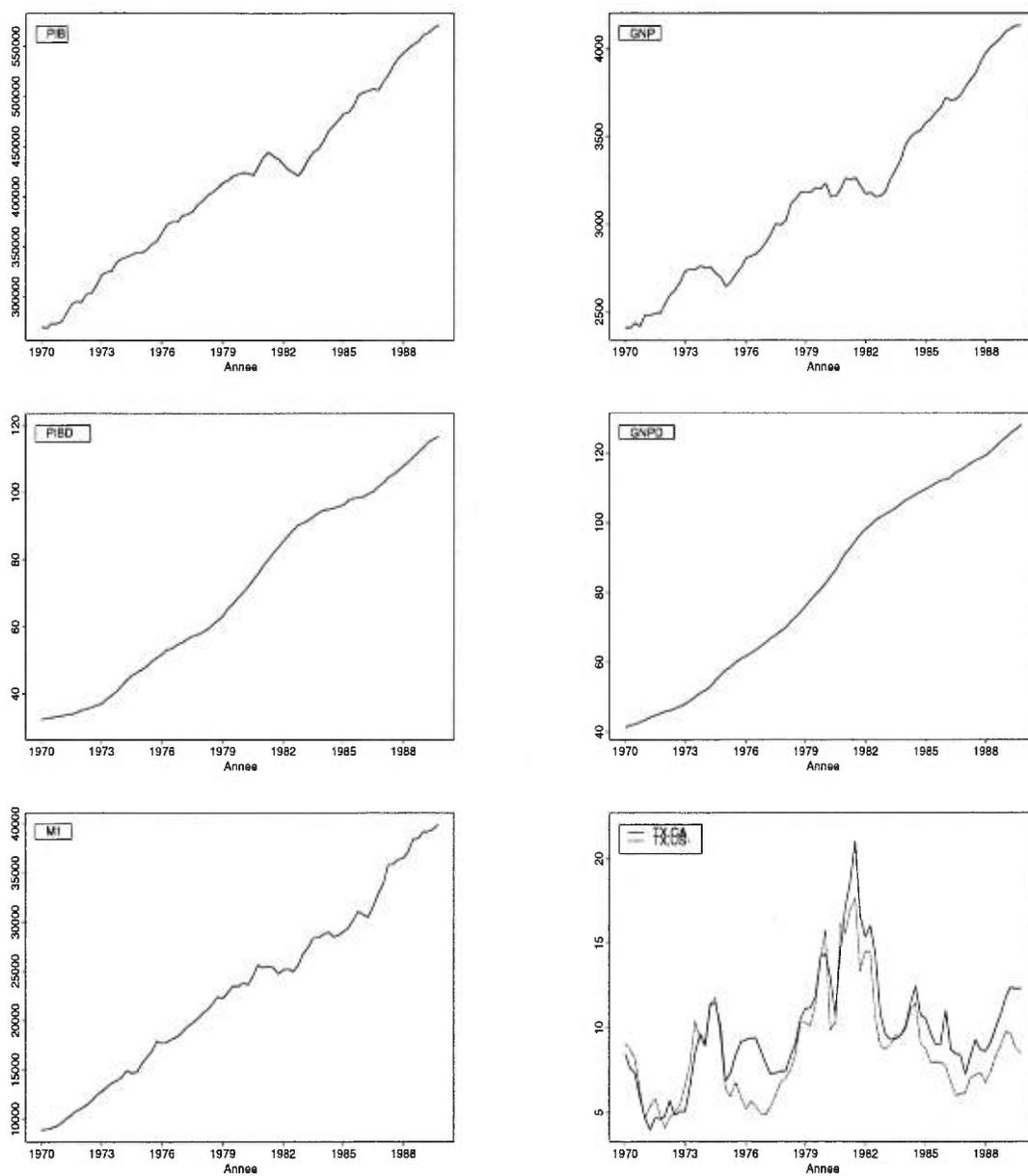


Fig. 4.1: Séries d'indicateurs économiques canadiens et américains.

4.2 Analyse des séries différenciées

4.2.1 Modélisation des séries

Dans un premier temps, les séries ont été transformées et différenciées, si nécessaire, afin de stabiliser la variance et de les rendre stationnaires. Nous utilisons les mêmes transformations que El Himdi (1993). Les séries canadienne et américaine, que nous considérons stationnaires, sont représentées par $\{\mathbf{W}_t^{(1)}\}$ et $\{\mathbf{W}_t^{(2)}\}$ respectivement, où

$$\mathbf{W}_t^{(1)} = \begin{bmatrix} W_{1t}^{(1)} \\ W_{2t}^{(1)} \\ W_{3t}^{(1)} \\ W_{4t}^{(1)} \end{bmatrix} \text{ avec } \begin{cases} W_{1t}^{(1)} = \frac{1}{1000}(1 - B)\text{PIB}_t, \\ W_{2t}^{(1)} = 10(1 - B)\text{PIBD}_t, \\ W_{3t}^{(1)} = \text{TX.CA}_t, \\ W_{4t}^{(1)} = 100(1 - B) \ln(\text{M1}_t), \end{cases}$$

et

$$\mathbf{W}_t^{(2)} = \begin{bmatrix} W_{1t}^{(2)} \\ W_{2t}^{(2)} \\ W_{3t}^{(2)} \end{bmatrix} \text{ avec } \begin{cases} W_{1t}^{(2)} = \frac{1}{10}(1 - B)\text{GNP}_t, \\ W_{2t}^{(2)} = 10(1 - B)\text{GNPD}_t, \\ W_{3t}^{(2)} = \text{TX.US}_t. \end{cases}$$

Les facteurs multiplicatifs ont été choisis pour que les variances des composantes des séries soient de même ordre de grandeur.

L'identification des modèles pour les séries $\{\mathbf{W}_t^{(1)}\}$ et $\{\mathbf{W}_t^{(2)}\}$ a été faite à l'aide de la procédure STEPAR du progiciel SCA. Pour chaque série, nous avons trouvé dans un premier temps un modèle $\text{AR}(p)$. L'ordre p étant obtenu en minimisant le critère AIC d'Akaike et en utilisant le test khi-deux pour vérifier l'égalité à zéro du dernier coefficient autorégressif. Pour la série canadienne $\{\mathbf{W}_t^{(1)}\}$, nous avons d'abord trouvé $p = 11$ et par la suite, nous avons retranché les coefficients non significatifs au niveau 5% pour aboutir à un modèle comportant uniquement

les valeurs retardées à $t - 1$, $t - 2$, $t - 11$, tel que défini par l'équation 4.1. Avec la série $\{\mathbf{W}_t^{(2)}\}$, nous avons trouvé $p = 3$ et tous les coefficients ont été retenus; le modèle est décrit par l'équation 4.2.

$$\mathbf{W}_t^{(1)} = \Theta_0^{(1)} + \Phi_1^{(1)} \mathbf{W}_{t-1}^{(1)} + \Phi_2^{(1)} \mathbf{W}_{t-2}^{(1)} + \Phi_{11}^{(1)} \mathbf{W}_{t-11}^{(1)} + \mathbf{a}_t^{(1)}, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{W}_t^{(2)} = \Theta_0^{(2)} + \Phi_1^{(2)} \mathbf{W}_{t-1}^{(2)} + \Phi_2^{(2)} \mathbf{W}_{t-2}^{(2)} + \Phi_3^{(2)} \mathbf{W}_{t-3}^{(2)} + \mathbf{a}_t^{(2)}, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (4.2)$$

Par la suite, nous avons estimé les paramètres par la méthode des moindres carrés à l'aide de la fonction S-Plus `Phi.est(.)`. Si cette fonction avait permis de calculer les écarts-types des paramètres, nous aurions pu fixer à zéro les paramètres estimés dont la valeur absolue est inférieure à une fois son écart-type. Nous avons calculé les racines du déterminant des polynômes matriciels autorégressifs et les quatre plus petites valeurs, en module, obtenues pour le modèle AR(11) sont 1.0396, 1.0494, 1.0911 et 1.0924. Pour le modèle AR(3), la plus petite valeur est 1.1904. Les racines sont toutes à l'extérieur du cercle unité. La stationnarité des deux modèles est donc vérifiée. Les paramètres estimés pour la série canadienne et sa matrice de covariance résiduelle sont

$$\widehat{\Theta}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.573 \\ 1.879 \\ -1.746 \\ 5.896 \end{bmatrix}, \quad \widehat{\Phi}_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.230 & 0.216 & -0.495 & 0.336 \\ 0.016 & 0.250 & 0.384 & -0.012 \\ 0.139 & 0.109 & 0.850 & 0.213 \\ 0.042 & 0.132 & -0.875 & -0.223 \end{bmatrix},$$

$$\widehat{\Phi}_2^{(1)} = \begin{bmatrix} -0.036 & 0.044 & -0.207 & 0.465 \\ -0.044 & 0.156 & 0.316 & 0.476 \\ 0.072 & 0.092 & -0.066 & -0.088 \\ -0.108 & -0.069 & 0.508 & -0.076 \end{bmatrix},$$

$$\widehat{\Phi}_{11}^{(1)} = \begin{bmatrix} -0.238 & -0.008 & 0.436 & 0.423 \\ 0.133 & -0.233 & -0.092 & -0.152 \\ -0.026 & 0.006 & 0.051 & 0.114 \\ 0.058 & -0.071 & 0.012 & 0.081 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\Sigma}_a^{(1)} = \begin{bmatrix} 8.064 & -4.593 & 0.131 & 0.099 \\ -4.593 & 13.945 & 0.706 & 0.960 \\ 0.131 & 0.706 & 1.290 & 0.011 \\ 0.099 & 0.960 & 0.011 & 1.655 \end{bmatrix}.$$

Les graphiques des composantes de la série résiduelle canadienne sont données à la figure 4.2. Chaque composante semble se comporter comme un bruit blanc de moyenne zéro et de variance constante. Les corrélations résiduelles sont fournies à la figure 4.3 et nous remarquons qu'il y a seulement six corrélations légèrement à l'extérieur des limites de signification à 5%. Une petite note doit être faite au sujet des graphiques des corrélations croisées fournis par la fonction "acf" du progiciel S-Plus. En effet, les noms des séries dans les titres des graphiques aux délais négatifs sont intervertis alors qu'il ne devraient pas l'être.

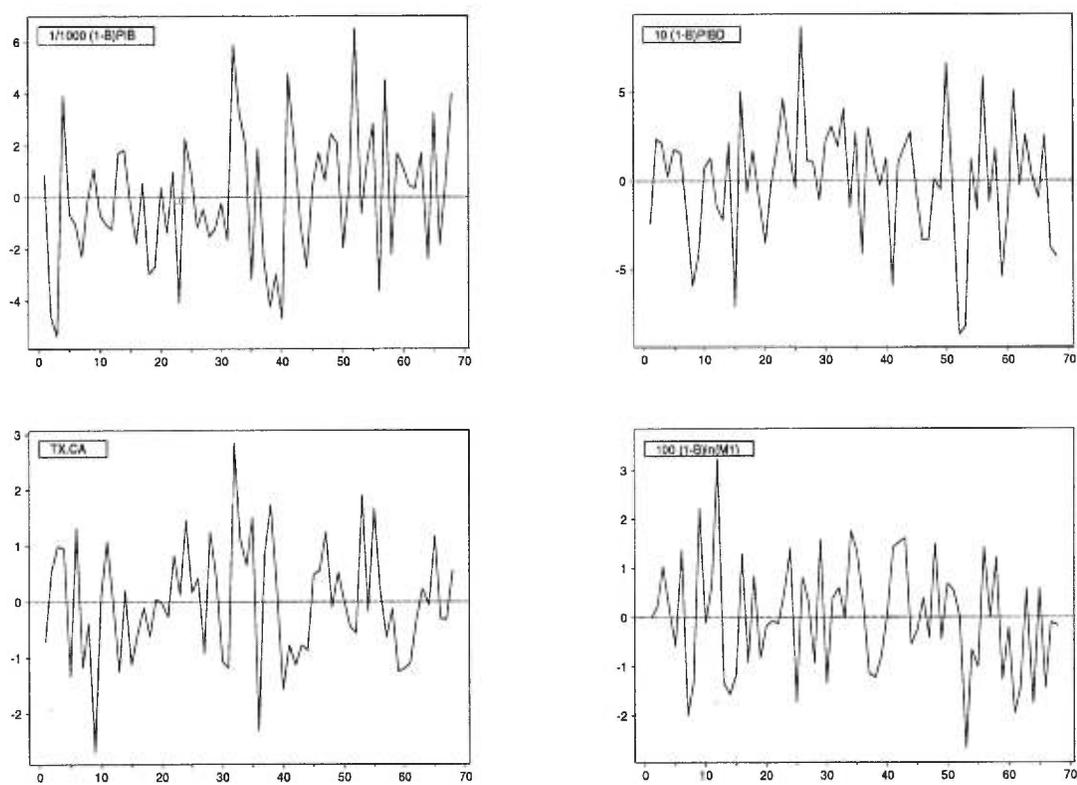


Fig. 4.2: Composantes de la série résiduelle correspondant à la série canadienne différenciée.

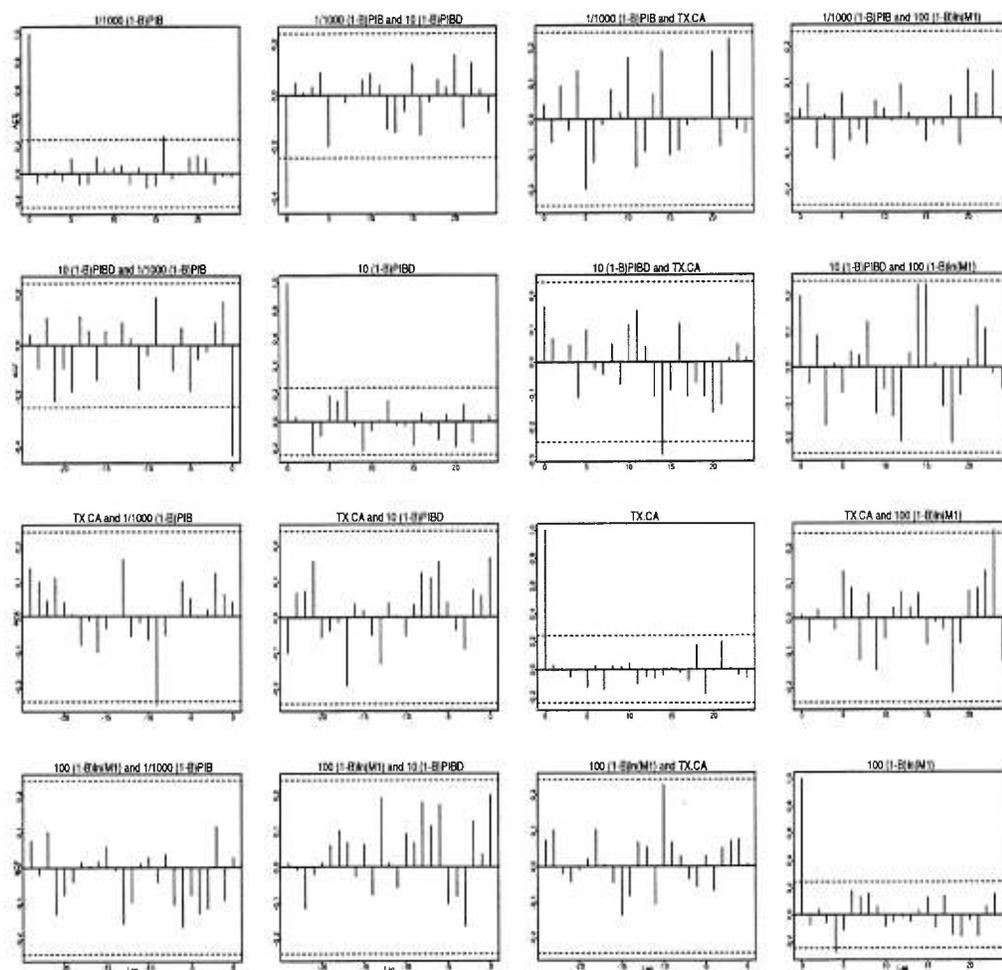


Fig. 4.3: Autocorrélations et corrélations croisées résiduelles de la série canadienne différenciée.

Pour la série américaine, les estimateurs sont

$$\begin{aligned} \widehat{\Theta}_0^{(2)} &= \begin{bmatrix} 4.084 \\ 2.339 \\ -0.953 \end{bmatrix}, \quad \widehat{\Phi}_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.163 & 0.078 & -0.157 \\ -0.150 & 0.437 & 0.794 \\ 0.052 & 0.103 & 0.863 \end{bmatrix}, \\ \widehat{\Phi}_2^{(2)} &= \begin{bmatrix} 0.244 & -0.020 & -0.866 \\ -0.041 & 0.230 & -0.863 \\ 0.172 & 0.165 & -0.594 \end{bmatrix}, \quad \widehat{\Phi}_3^{(2)} = \begin{bmatrix} -0.070 & 0.040 & 0.595 \\ 0.112 & 0.053 & 0.174 \\ 0.038 & -0.053 & 0.503 \end{bmatrix}, \\ \widehat{\Sigma}_a^{(2)} &= \begin{bmatrix} 7.558 & -1.046 & 0.635 \\ -1.046 & 8.350 & 0.560 \\ 0.635 & 0.560 & 1.597 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Les graphiques de la série résiduelle américaine et de ses corrélations sont données aux figures 4.4 et 4.5. À nouveau, les composantes de la série résiduelle semblent se comporter comme des bruits blancs et il n'y a que sept corrélations se situant à l'extérieur des limites de signification à 5%.

4.2.2 Tests de non corrélation

Les valeurs de la statistique $QH^*(k)$ pour $|k| = 0, 1, \dots, 12$ calculées à partir des séries résiduelles des deux modèles estimés sont représentées à la figure 4.6. La ligne pointillée horizontale représente la valeur critique au niveau de signification $\alpha = 0.05$ pour tester l'hypothèse nulle H_0 de non corrélation entre les deux séries $\{\mathbf{W}_t^{(1)}\}$ et $\{\mathbf{W}_t^{(2)}\}$ contre l'alternative $H_{1k} : \rho_a^{(12)}(k) \neq \mathbf{0}$. Cette valeur critique indépendante du délai k est égale à $\chi_{12,0.95}^2 = 21.026$ et d'après la

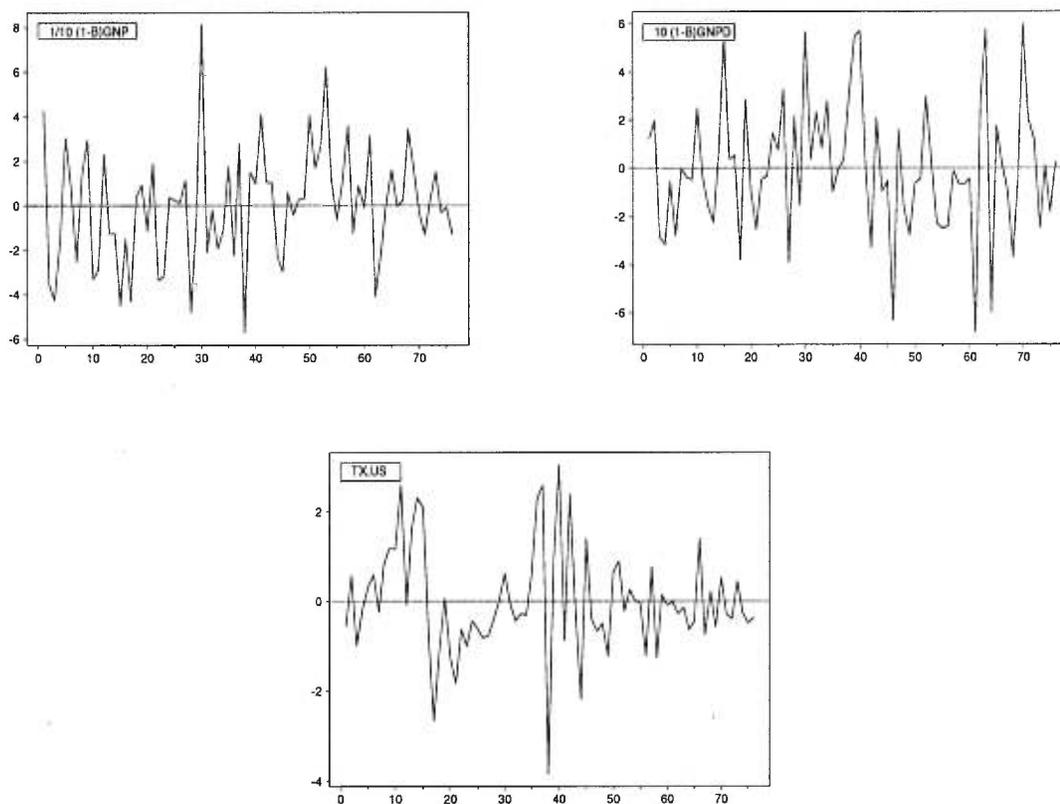


Fig. 4.4: Composantes de la série résiduelle correspondant à la série américaine différenciée.

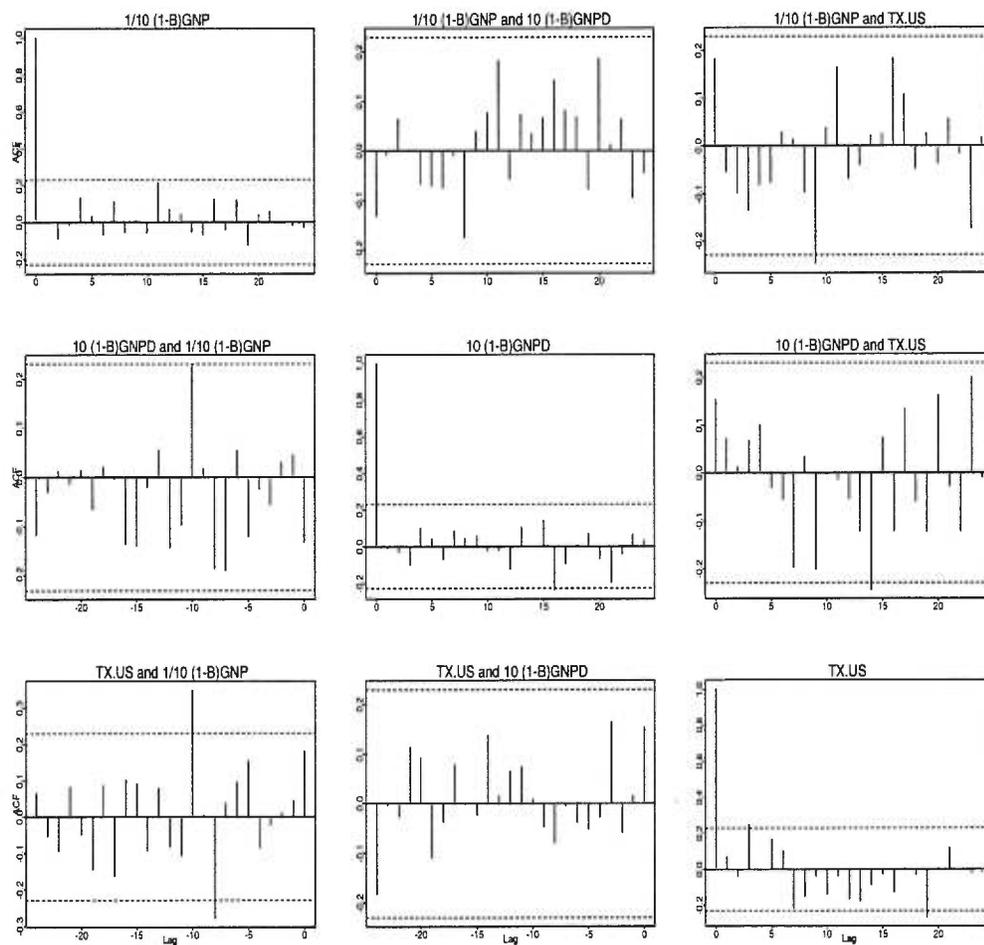


Fig. 4.5: Autocorrélations et corrélations croisées résiduelles de la série américaine différenciée.

figure 4.6 nous voyons que $\rho_{\alpha}^{(12)}(k)$ est significativement différent de zéro pour les délais $k = 0$ et 2 , et l'hypothèse de non corrélation sera probablement rejetée avec un test global. En effet, la valeur critique au niveau de signification $\alpha = 0.05$ pour le test simultané de H_0 contre H_{1k} , $|k| \leq M$ vu à la section 1.2.3 est $\chi_{12,1-\alpha_0}^2$ où $\alpha_0 = 1 - (1 - \alpha)^{\frac{1}{2M+1}}$. La valeur critique pour $M = 3$ est 27.171, l'hypothèse H_0 est donc rejetée, car $QH^*(0) = 27.693$. Pour $M = 4$ la valeur critique est 27.920.

Les résultats du test global basé sur la statistique portemanteau QH_M^* ainsi que les niveaux empiriques de signification α_M correspondants sont donnés au tableau 4.1 pour $M = 1, \dots, 12$. Au niveau de signification $\alpha = 0.05$, l'hypothèse de non corrélation est rejetée pour des valeurs de M inférieures ou égales à 4. Ainsi les tests simultanés de H_0 vs H_{1k} , $|k| \leq 3$ et le test global nous mènent à la même conclusion au niveau de signification 5%.

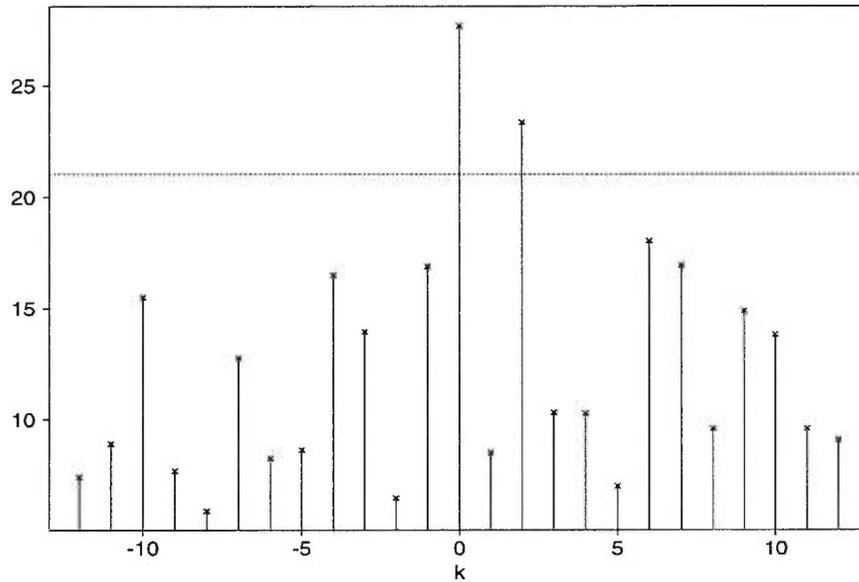


Fig. 4.6: Valeurs de la statistique $QH^*(k)$ à différents délais pour les séries canadienne et américaine différenciées.

M	QH_M^*	α_M	M	QH_M^*	α_M
1	53.102	0.033	7	205.695	0.092
2	82.937	0.027	8	221.193	0.195
3	107.237	0.045	9	243.784	0.225
4	134.018	0.046	10	273.121	0.172
5	149.671	0.139	11	291.645	0.248
6	175.969	0.131	12	308.160	0.360

Tableau 4.1: Valeurs de la statistique QH_M^* et niveaux empiriques en fonction de M pour les séries canadienne et américaine différenciées.

4.3 Analyse des séries non différenciées

4.3.1 Modélisation des séries

Étant donné que les composantes des séries canadienne et américaine, à part les taux d'intérêt, sont non stationnaires car elles exhibent toutes une tendance croissante, nous avons tenté d'ajuster des modèles autorégressifs aux deux séries multivariées sans les différencier. Les séries canadienne et américaine $\{\mathbf{X}_t^{(1)}\}$ et $\{\mathbf{X}_t^{(2)}\}$, en conservant les mêmes facteurs multiplicatifs, sont maintenant représentées par

$$\mathbf{X}_t^{(1)} = \begin{bmatrix} X_{1t}^{(1)} = \frac{1}{1000} \text{PIB}_t, \\ X_{2t}^{(1)} = 10 \text{PIBD}_t, \\ X_{3t}^{(1)} = \text{TX.CA}_t, \\ X_{4t}^{(1)} = 100 \ln(M1_t), \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{X}_t^{(2)} = \begin{bmatrix} X_{1t}^{(2)} = \frac{1}{10} \text{GNP}_t, \\ X_{2t}^{(2)} = 10 \text{GNPD}_t, \\ X_{3t}^{(2)} = \text{TX.US}_t. \end{bmatrix}$$

Nous avons procédé de la même façon qu'à la section précédente pour déterminer l'ordre autorégressif pour chaque série. Nous avons ainsi représenté chaque série par un modèle AR(3). Le modèle estimé par la méthode des moindres carrés et la matrice de covariance résiduelle de la série canadienne sont donnés par

$$\begin{bmatrix} X_{1t}^{(1)} \\ X_{2t}^{(1)} \\ X_{3t}^{(1)} \\ X_{4t}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -92.389 \\ -26.385 \\ -7.542 \\ 12.481 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.007 & 0.163 & -0.449 & 0.386 \\ 0.111 & 1.238 & 0.188 & 0.163 \\ 0.123 & 0.094 & 0.833 & 0.179 \\ 0.047 & 0.159 & -0.924 & 0.738 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1,t-1}^{(1)} \\ X_{2,t-1}^{(1)} \\ X_{3,t-1}^{(1)} \\ X_{4,t-1}^{(1)} \end{bmatrix} + \\
\begin{bmatrix} -0.228 & -0.158 & 0.086 & 0.044 \\ -0.027 & -0.096 & 0.258 & 0.568 \\ -0.041 & -0.023 & -0.109 & -0.222 \\ -0.105 & -0.172 & 0.356 & 0.183 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1,t-2}^{(1)} \\ X_{2,t-2}^{(1)} \\ X_{3,t-2}^{(1)} \\ X_{4,t-2}^{(1)} \end{bmatrix} + \\
\begin{bmatrix} 0.117 & 0.013 & -0.641 & -0.297 \\ 0.015 & -0.173 & 0.411 & -0.732 \\ -0.082 & -0.073 & 0.097 & 0.054 \\ 0.058 & 0.012 & 0.092 & 0.070 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1,t-3}^{(1)} \\ X_{2,t-3}^{(1)} \\ X_{3,t-3}^{(1)} \\ X_{4,t-3}^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{1t}^{(1)} \\ a_{2t}^{(1)} \\ a_{3t}^{(1)} \\ a_{4t}^{(1)} \end{bmatrix}, \\
\hat{\Sigma}_a^{(1)} = \begin{bmatrix} 8.361 & -4.279 & 0.533 & -0.086 \\ -4.279 & 12.286 & 0.218 & 1.457 \\ 0.533 & 0.218 & 1.193 & -0.072 \\ -0.086 & 1.457 & -0.072 & 1.715 \end{bmatrix}.$$

Les composantes de la série résiduelle canadienne et ses corrélations sont représentées aux figures 4.7 et 4.8. Nous constatons que les composantes de la série résiduelle semblent se comporter comme des bruits blancs et seulement onze corrélations se retrouvent à l'extérieur des limites de signification à 5%.

Les trois plus petites racines, en module, du déterminant du polynôme matriciel autorégressif sont 1.0002, 1.0504 et 1.0532. Nous voyons ainsi qu'il y a une racine unitaire et que les autres sont à l'extérieur du cercle unité. La série canadienne est donc partiellement non stationnaire.

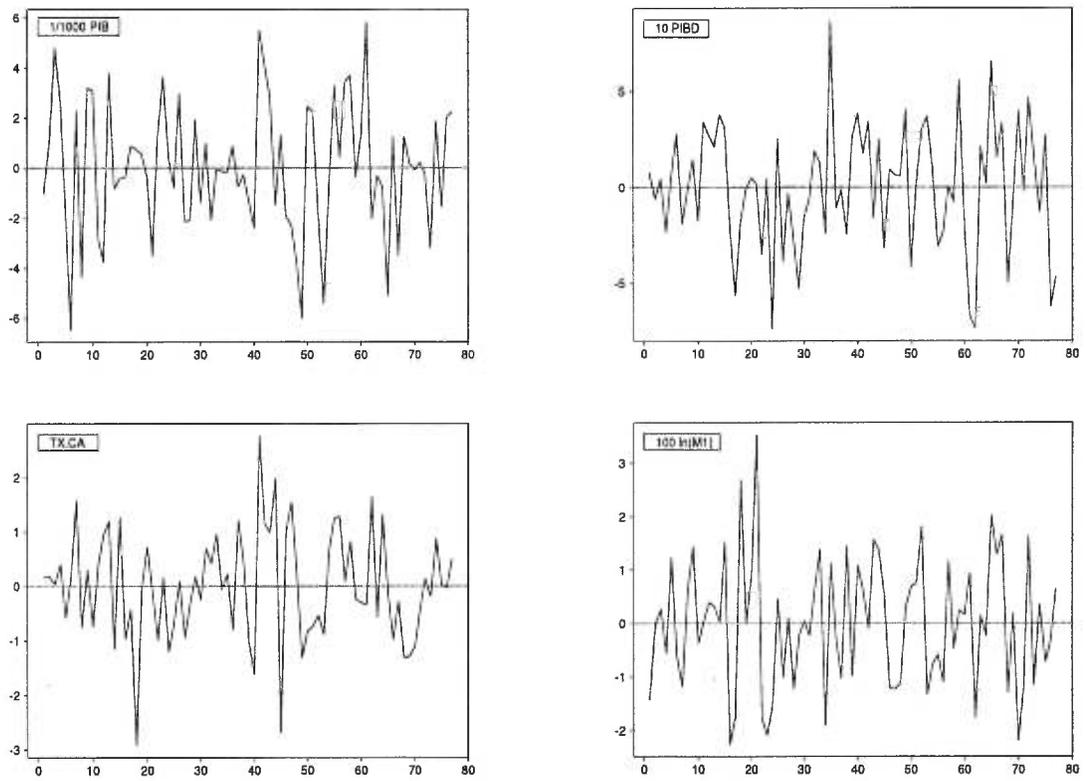


Fig. 4.7: Composantes de la série résiduelle correspondant à la série canadienne non différenciée.

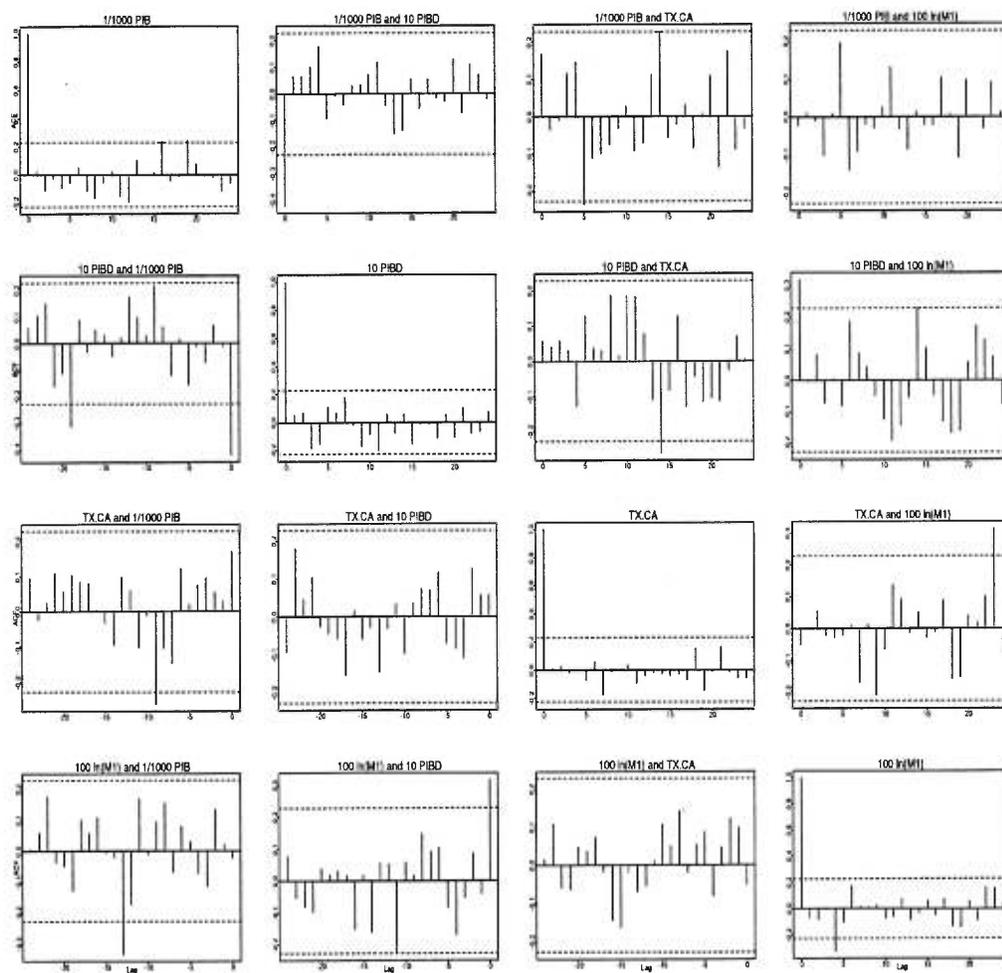


Fig. 4.8: Autocorrélations et corrélations croisées résiduelles de la série canadienne non différenciée.

Pour la série américaine, le modèle et la matrice de covariance résiduelle sont

$$\begin{bmatrix} X_{1t}^{(2)} \\ X_{2t}^{(2)} \\ X_{3t}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24.109 \\ -18.248 \\ -3.546 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.866 & 0.167 & -0.036 \\ 0.036 & 1.403 & 0.756 \\ 0.126 & 0.077 & 0.805 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1,t-1}^{(2)} \\ X_{2,t-1}^{(2)} \\ X_{3,t-1}^{(2)} \end{bmatrix} + \\ \begin{bmatrix} 0.198 & -0.072 & -0.968 \\ 0.058 & -0.229 & -0.868 \\ 0.096 & 0.043 & -0.553 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1,t-2}^{(2)} \\ X_{2,t-2}^{(2)} \\ X_{3,t-2}^{(2)} \end{bmatrix} + \\ \begin{bmatrix} -0.172 & -0.073 & 0.038 \\ -0.007 & -0.190 & 0.591 \\ -0.192 & -0.126 & 0.618 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1,t-3}^{(2)} \\ X_{2,t-3}^{(2)} \\ X_{3,t-3}^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{1t}^{(2)} \\ a_{2t}^{(2)} \\ a_{3t}^{(2)} \end{bmatrix}, \\ \hat{\Sigma}_a^{(2)} = \begin{bmatrix} 5.949 & 0.057 & 1.007 \\ 0.057 & 7.531 & 0.281 \\ 1.007 & 0.281 & 1.507 \end{bmatrix}.$$

Les composantes de la série résiduelle américaine et ses corrélations sont données aux figures 4.9 et 4.10. Les composantes de la série résiduelle semblent se comporter comme des bruits blancs, sauf peut-être pour le taux d'intérêt (TX.US) et il y a seulement six corrélations situées à l'extérieur des limites de signification à 5%.

Les deux plus petites racines du déterminant du polynôme autorégressif sont 0.9974 et 1.0474, en module. Il y a donc une racine unitaire et les autres sont toutes à l'extérieur du cercle unité. La série américaine est donc partiellement non stationnaire.

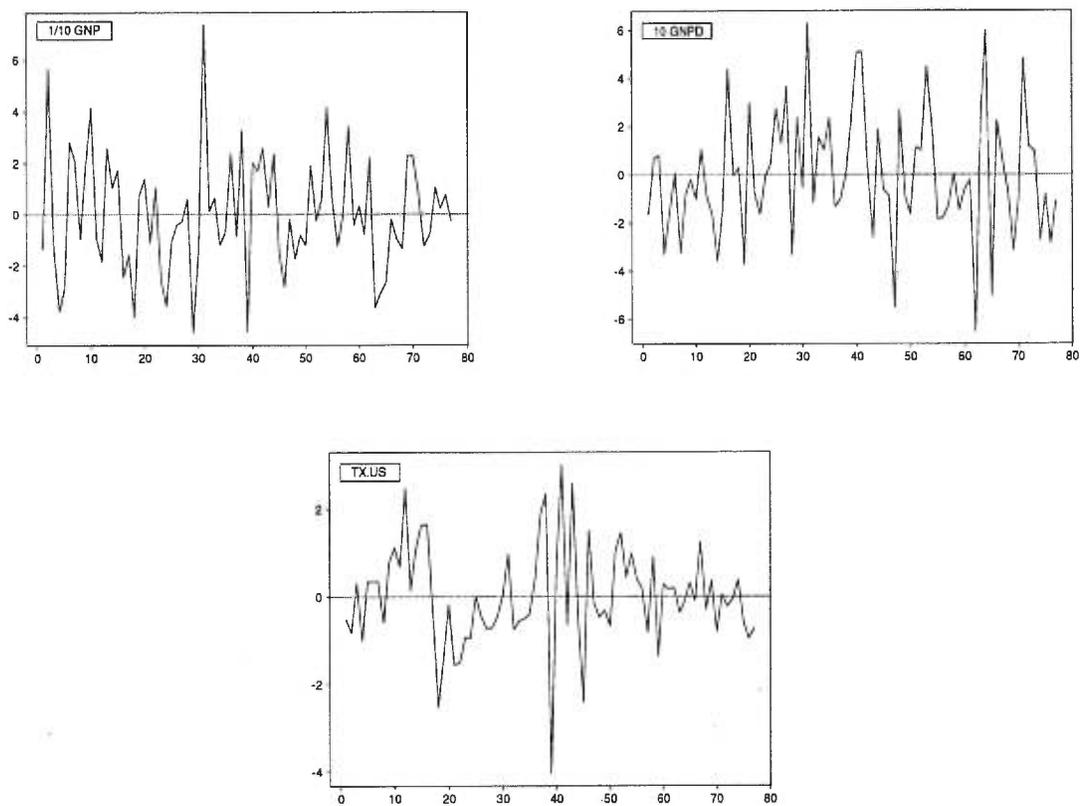


Fig. 4.9: Composantes de la série résiduelle correspondant à la série américaine non différenciée.

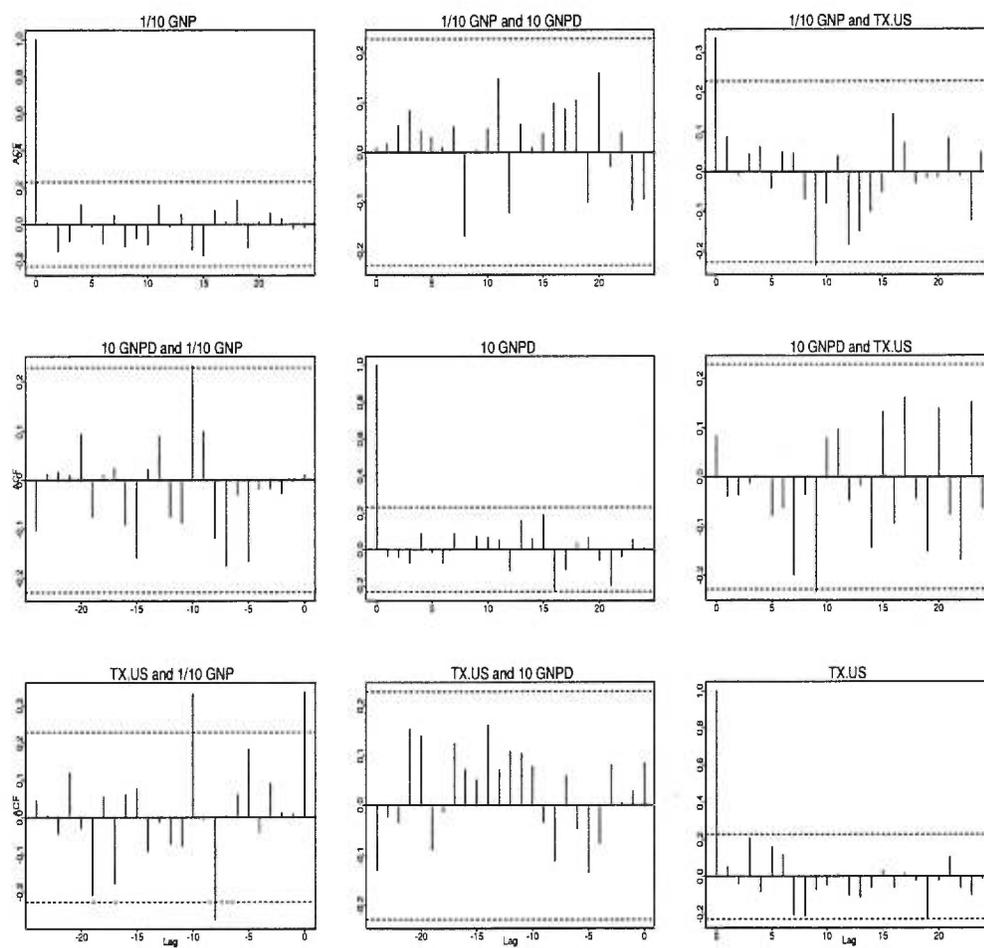


Fig. 4.10: Autocorrélations et corrélations croisées résiduelles de la série américaine non différenciée.

4.3.2 Tests de non corrélation

Les valeurs de la statistique $QH^*(k)$ pour $|k| = 0, 1, \dots, 12$ sont représentées à la figure 4.11. La ligne pointillée représente à nouveau la valeur critique (21.026) au niveau de signification $\alpha = 0.05$ pour tester l'hypothèse nulle H_0 . D'après la figure 4.11, $\rho_a^{(12)}(0)$ est significativement différent de zéro. Les valeurs de la statistique portemanteau QH_M^* et les niveaux empiriques de signification α_M sont donnés au tableau 4.2 pour $M = 1, \dots, 12$. L'hypothèse de non corrélation est rejetée pour les valeurs de M inférieures ou égales à 4 au niveau de signification 5%.

Dans cet exemple, que nous stationnarisons ou non les séries, nous arrivons à la même conclusion avec le test global au niveau de signification 5%. Avec le test à des délais individuels, nous rejetons l'hypothèse de non corrélation aux délais 0 et 2 pour les séries stationnaires et seulement au délai 0 pour les séries partiellement non stationnaires. Cependant, la modélisation des séries non différenciées est plus simple et permet d'éviter le problème de l'estimation de composantes moyenne mobile non inversibles lors de l'ajustement de modèles mixtes ARMA.

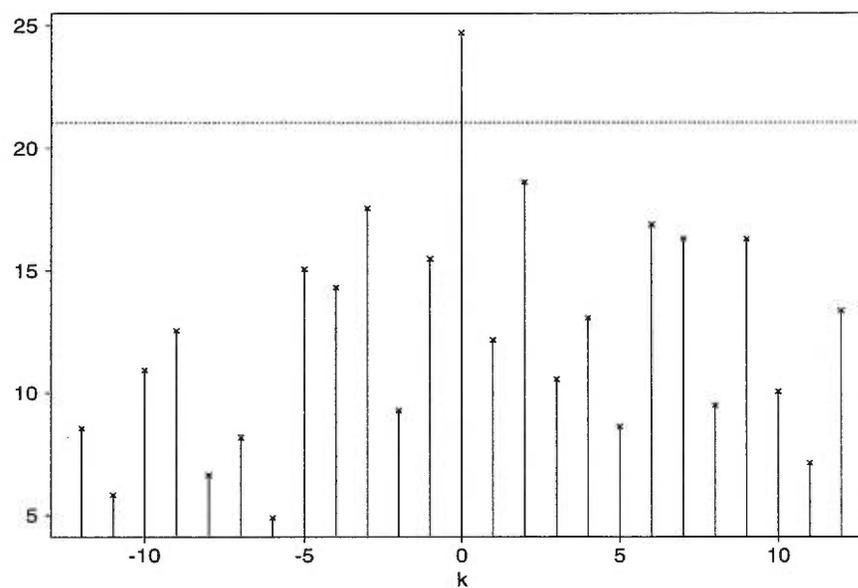


Fig. 4.11: Valeurs de la statistique $QH^*(k)$ à différents délais pour les séries canadienne et américaine non différenciées.

M	QH_M^*	α_M	M	QH_M^*	α_M
1	52.338	0.038	7	205.621	0.092
2	80.237	0.042	8	221.767	0.187
3	108.338	0.038	9	250.599	0.145
4	135.703	0.037	10	271.592	0.189
5	159.384	0.052	11	284.563	0.349
6	181.151	0.082	12	306.455	0.386

Tableau 4.2: Valeurs de la statistique QH_M^* et niveaux empiriques en fonction de M pour les séries canadienne et américaine non différenciées.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié les propriétés de tests de non corrélation (ou d'indépendance dans le cas de séries gaussiennes) de deux séries chronologiques multivariées partiellement non stationnaires, c'est-à-dire dont le déterminant du polynôme autorégressif admet une racine unitaire de multiplicité $d \leq m$, m étant la dimension, et que les autres racines se trouvent à l'extérieur du cercle unité. L'utilisation des modèles ARMA partiellement non stationnaires permettent d'éviter la différenciation composante par composante qui peut mener à la surdifférenciation et à la non inversibilité de l'opérateur MA, ce qui peut engendrer des difficultés lors de l'estimation des paramètres.

Nous avons vu que les corrélations croisées résiduelles possèdent une distribution asymptotique multinormale. Grâce à cette propriété, nous avons utilisé la statistique QH et sa modification QH* étudiées dans El Himdi et Roy (1997) pour tester la non corrélation entre deux séries. Dans l'étude empirique, nous avons simulé des séries bivariées de différentes longueurs régies par différents modèles qui ont été estimées par la méthode des moindres carrés. Par ces simulations, nous avons observé que l'approximation de la distribution exacte de la statistique modifiée QH* par la distribution khi-deux est bonne pour les modèles AR(1) et AR(4) saisonnier, même pour des séries de longueur 50, pour des séries

de longueur 100 pour le modèle AR(2) et pour des séries de longueur 200 pour le modèle ARMA(1,1).

De futurs travaux pourraient étudier les propriétés de tests de non corrélation dans le cas d'erreurs de spécification en ne mentionnant pas, lors de l'estimation, les modèles qui ont servi à produire les données, afin de se rapprocher de la réalité. Il serait intéressant de voir ce qui se passe lorsque les séries sont de dimension supérieure à deux et qu'elles sont non gaussiennes. Au lieu de considérer l'estimation par moindres carrés, une alternative serait d'utiliser l'estimation à vraisemblance maximale, discutée dans Yap et Reinsel (1995), de la représentation à correction d'erreur d'un ARMA partiellement non stationnaire introduite dans la section 2.1.3. Une approche semi-paramétrique pourrait être utilisée pour traiter des séries ARMA partiellement non stationnaires en approximant le vrai modèle ARMA par un modèle AR(p), où l'ordre p serait choisi à partir des données. Il serait également intéressant d'étudier la non corrélation en se servant des séries originales plutôt que des séries résiduelles en adaptant au cas non stationnaire les méthodes non paramétriques étudiées dans El Himdi (1993). Une telle approche nous mettrait à l'abri d'éventuelles erreurs de spécification de modèles.

Annexe A

Tableaux des niveaux empiriques

Les valeurs en pourcentage des niveaux empiriques des tests étudiés au chapitre 3 se retrouvent dans les pages suivantes sous forme de tableaux.

k	niveaux de signification α								
	1%			5%			10%		
	n			n			n		
	50	100	200	50	100	200	50	100	200
-12	0.8	0.6	0.8	4.6	4.7	5.9	10.3	9.2	10.7
-10	0.9	0.8	0.7	5.0	5.7	4.9	9.9	10.7	10.3
-8	0.7	0.7	0.7	3.6	3.8	4.8	8.9	9.5	9.9
-6	0.9	0.9	0.8	3.5	4.8	5.6	8.7	9.6	11.1
-4	0.8	0.9	1.2	5.0	5.7	5.9	10.6	10.7	11.0
-2	0.9	1.3	1.1	4.8	5.6	4.4	10.9	10.3	9.0
-1	0.6	1.1	0.9	4.8	5.5	4.8	10.4	11.1	10.1
0	1.0	0.8	0.9	4.1	5.8	5.5	9.6	10.2	9.7
1	0.6	1.1	0.6	4.4	4.9	4.8	10.2	9.7	9.8
2	1.0	0.8	1.0	5.7	4.2	5.0	10.2	9.4	9.3
4	1.0	1.1	0.7	5.5	4.9	5.0	10.6	10.4	10.8
6	0.6	1.0	0.7	4.8	5.2	4.7	10.1	10.4	10.6
8	0.8	0.9	1.1	4.6	5.1	5.7	9.4	10.7	11.0
10	0.8	0.8	0.8	5.3	4.2	5.0	10.8	9.7	9.8
12	0.7	0.8	1.3	4.7	5.1	5.1	10.0	9.5	11.2

Tableau A.1: Niveaux empiriques en pourcentage de la statistique $QH^*(k)$ à des délais individuels, pour le modèle AR(1).

M	niveaux de signification α								
	1%			5%			10%		
	n			n			n		
	50	100	200	50	100	200	50	100	200
1	0.6	0.7	0.7	3.9	5.2	4.7	9.4	10.5	9.5
2	0.7	1.1	1.1	4.5	4.6	4.6	10.1	10.0	8.7
3	0.7	0.9	0.9	4.8	5.5	4.5	10.4	10.4	9.2
4	0.9	0.9	0.6	5.0	5.1	5.0	10.9	9.9	8.9
5	0.6	0.8	1.0	4.9	5.3	5.3	10.5	10.2	10.5
6	0.8	1.0	1.1	4.6	5.1	5.0	10.0	11.2	11.0
7	0.6	1.0	1.1	4.4	5.3	4.7	9.9	11.0	9.6
8	0.7	0.9	1.1	4.2	5.0	4.6	9.2	10.6	9.4
9	0.9	0.9	0.8	3.9	4.1	4.9	9.2	9.4	10.1
10	0.8	0.8	0.9	4.4	4.1	5.0	9.6	9.5	10.0
11	1.0	0.7	0.8	4.1	4.7	4.4	10.2	10.3	10.0
12	0.8	0.7	1.0	4.8	4.4	4.7	9.5	10.1	10.4

Tableau A.2: Niveaux empiriques en pourcentage de la statistique portemanteau QH_M^* , pour le modèle AR(1).

k	niveaux de signification α								
	1%			5%			10%		
	n			n			n		
	50	100	200	50	100	200	50	100	200
-12	1.1	1.1	1.1	5.1	5.2	5.1	10.0	9.8	9.4
-10	0.8	0.9	1.2	4.5	4.7	5.4	8.8	9.3	10.3
-8	0.7	0.8	0.9	4.7	4.9	4.6	9.7	9.6	8.8
-6	0.6	0.9	1.0	4.7	4.8	4.7	9.3	9.4	9.7
-4	0.6	1.0	0.9	4.8	4.6	4.6	9.5	8.8	9.7
-2	0.8	1.2	1.2	5.4	5.8	4.9	10.4	10.5	10.1
-1	0.8	0.7	0.8	4.8	4.2	4.5	10.0	9.8	10.4
0	0.8	0.9	1.0	5.0	4.5	5.5	11.1	10.3	10.7
1	0.8	0.8	1.0	5.4	4.4	5.0	11.6	9.0	10.9
2	0.9	0.9	1.0	4.4	4.8	4.9	9.4	10.5	10.0
4	0.8	0.8	1.0	4.6	4.7	4.8	8.7	10.1	10.8
6	0.9	1.2	1.1	4.9	5.4	5.3	10.2	10.2	10.5
8	1.3	1.0	1.0	4.8	5.3	4.0	9.9	9.4	9.3
10	0.5	1.2	1.2	4.9	5.7	4.9	10.6	11.6	10.4
12	0.8	0.9	0.9	4.2	4.6	4.5	9.5	10.0	10.3

Tableau A.3: Niveaux empiriques en pourcentage de la statistique $QH^*(k)$ à des délais individuels, pour le modèle AR(2).

M	niveaux de signification α								
	1%			5%			10%		
	n			n			n		
	50	100	200	50	100	200	50	100	200
1	0.5	0.9	1.0	4.6	4.1	5.2	9.4	8.9	10.3
2	0.4	0.9	1.0	4.3	4.7	5.5	9.9	9.4	11.1
3	0.3	0.6	1.0	3.9	4.4	5.8	9.4	9.3	10.1
4	0.3	0.6	1.0	3.4	4.1	5.1	9.0	8.9	10.8
5	0.4	0.6	1.1	3.8	4.3	5.3	8.6	9.0	11.3
6	0.3	0.9	1.0	3.4	4.2	5.2	8.4	8.9	11.1
7	0.7	0.7	1.0	3.6	4.2	5.1	9.2	8.9	10.5
8	0.6	0.6	0.7	3.7	3.9	4.6	9.5	8.5	9.4
9	0.5	0.6	0.9	3.5	4.4	4.7	9.2	9.0	10.0
10	0.5	0.8	1.1	4.1	4.0	4.6	9.6	8.8	10.0
11	0.7	0.9	1.1	4.4	4.5	4.4	9.5	9.1	10.0
12	0.6	0.7	1.1	4.2	4.0	4.3	10.0	8.8	9.6

Tableau A.4: Niveaux empiriques en pourcentage de la statistique portemanteau QH_M^* , pour le modèle AR(2).

k	niveaux de signification α								
	1%			5%			10%		
	n			n			n		
	50	100	200	50	100	200	50	100	200
-12	0.9	0.9	0.9	4.6	5.1	4.9	9.4	10.3	9.7
-10	1.0	0.9	0.9	5.0	4.6	4.8	10.0	9.8	10.4
-8	1.3	1.0	1.2	5.5	4.1	5.0	9.7	9.7	10.2
-6	0.5	0.8	0.9	4.5	5.2	5.1	9.2	10.6	10.2
-4	0.5	1.0	1.2	4.8	5.3	5.5	9.8	10.2	10.3
-2	0.9	0.8	0.6	4.3	4.7	4.6	10.0	9.8	10.5
-1	1.0	1.2	1.0	5.1	5.1	4.5	9.9	10.1	9.2
0	1.0	0.8	0.6	4.9	5.1	4.2	10.3	10.8	8.7
1	0.4	1.0	0.6	4.5	4.6	4.2	9.1	9.5	10.0
2	0.9	0.9	1.1	5.5	4.6	5.5	11.2	10.8	10.7
4	0.7	1.0	0.9	4.4	4.6	5.3	9.9	9.2	9.7
6	0.7	0.6	0.9	4.0	5.1	5.4	9.3	9.8	11.6
8	1.0	0.7	0.8	4.7	4.8	4.9	10.4	9.9	10.4
10	0.9	0.9	1.1	4.4	4.9	5.2	9.7	9.9	10.1
12	0.8	0.7	1.0	5.2	4.2	4.7	10.5	10.0	9.3

Tableau A.5: Niveaux empiriques en pourcentage de la statistique $QH^*(k)$ à des délais individuels, pour le modèle AR(4) saisonnier.

M	niveaux de signification α								
	1%			5%			10%		
	n			n			n		
	50	100	200	50	100	200	50	100	200
1	0.9	1.1	0.7	4.6	5.2	4.4	9.6	10.3	9.0
2	0.9	0.7	1.1	4.9	5.0	4.8	9.9	11.2	9.3
3	0.8	0.9	1.2	4.8	4.7	5.0	9.9	11.6	10.4
4	0.9	0.9	1.2	4.6	4.6	5.4	9.4	10.3	10.4
5	0.9	0.6	1.4	4.5	4.7	5.7	9.8	10.4	10.4
6	0.7	0.8	1.0	4.6	4.4	5.4	9.8	9.6	9.9
7	0.7	0.7	1.0	4.8	4.4	5.4	9.1	10.2	10.4
8	0.9	0.7	1.0	4.7	5.0	5.1	9.7	9.4	10.0
9	0.7	0.7	1.0	4.8	4.5	5.4	10.6	9.4	9.3
10	1.0	0.5	0.9	5.8	4.5	5.3	10.3	8.9	9.6
11	1.2	0.5	0.9	4.7	4.1	5.0	10.0	9.5	9.7
12	1.2	0.5	0.8	5.0	3.6	4.6	10.6	9.2	9.9

Tableau A.6: Niveaux empiriques en pourcentage de la statistique portemanteau QH_M^* , pour le modèle AR(4) saisonnier.

k	niveaux de signification α								
	1%			5%			10%		
	n			n			n		
	50	100	200	50	100	200	50	100	200
-12	0.6	0.6	1.6	4.6	5.3	6.7	11.4	9.7	11.6
-10	0.8	0.8	0.8	5.9	3.3	4.5	10.4	9.5	8.9
-8	0.7	0.9	1.2	5.2	4.8	4.9	10.5	10.1	9.3
-6	0.5	0.7	1.2	5.1	5.2	4.5	9.8	11.2	10.2
-4	1.0	1.2	0.9	4.9	4.7	5.5	10.8	9.8	10.7
-2	1.0	0.8	0.7	5.1	5.5	4.2	10.9	9.4	10.2
-1	0.8	0.8	0.9	4.2	5.3	5.1	10.5	10.6	10.5
0	0.6	0.8	1.0	5.3	4.8	5.6	10.4	10.6	10.0
1	0.7	0.7	1.2	5.5	5.8	6.0	12.2	10.2	10.5
2	1.2	0.9	0.9	5.4	5.3	5.1	12.3	10.5	10.4
4	1.0	1.2	1.3	5.1	5.8	6.9	10.5	10.8	10.9
6	0.9	0.6	0.6	5.1	4.9	3.8	10.0	9.9	9.5
8	0.6	0.8	0.8	4.4	4.5	4.8	10.3	9.8	11.0
10	0.7	0.6	1.3	5.2	4.8	5.8	11.1	11.4	11.6
12	1.2	1.5	0.6	5.6	5.5	4.5	11.8	11.6	10.4

Tableau A.7: Niveaux empiriques en pourcentage de la statistique $QH^*(k)$ à des délais individuels, pour le modèle ARMA(1,1).

M	niveaux de signification α								
	1%			5%			10%		
	n			n			n		
	50	100	200	50	100	200	50	100	200
1	0.7	0.6	0.8	3.9	4.9	5.1	9.2	8.9	10.3
2	0.8	0.6	0.9	4.7	5.0	4.6	10.6	9.9	9.4
3	0.2	1.1	0.6	4.2	3.4	4.9	9.8	8.3	10.0
4	0.6	0.3	0.9	4.5	4.0	4.9	10.0	8.3	9.8
5	0.8	0.4	0.8	4.7	3.8	5.1	11.2	8.3	9.2
6	0.8	0.4	0.9	5.9	3.3	5.5	11.4	8.4	10.4
7	0.7	0.5	0.3	5.7	3.6	5.6	10.9	8.0	9.9
8	0.5	0.5	0.5	5.9	3.0	5.1	11.5	7.6	10.4
9	0.6	0.6	0.5	5.0	3.1	4.8	11.8	7.2	10.2
10	0.6	0.4	0.8	6.0	3.0	5.1	11.4	7.0	9.7
11	0.5	0.2	0.8	5.7	3.2	5.1	12.3	6.8	11.1
12	0.9	0.4	0.8	5.9	3.4	4.7	13.4	6.6	10.1

Tableau A.8: Niveaux empiriques en pourcentage de la statistique portemanteau QH_M^* , pour le modèle ARMA(1,1).

Annexe B

Code des fonctions S-Plus

BB

```
function(var,m,n,q)
{
# Genere des bruits blancs multivaries, ou "var" est la matrice
# de covariance des bruits blancs, "m" est la dimension, "n" est
# le nombre d'observations et "q" est l'ordre de la composante
# moyenne mobile de la serie ARMA.
      tempo <- matrix(rnorm((n+q)*m),nrow=m,ncol=(n+q))
      t(chol(var))%*%tempo
}
```

simARMA

```

function(var1,var2,cov,Phi11,Phi22,Phi12,Phi21,Theta11,
         Theta22,initial1,initial2,theta0,q,n)
{
# Simule deux series ARMA multivariees independantes ou non,
# stationnaires ou non, ou "var1" et "var2" sont les matrices
# de covariance des bruits blancs des deux series, "cov" est
# la matrice de covariance croisee des bruits blancs, "Phi11",
# "Phi22", "Phi12" et "Phi21" rassemblent les parametres
# autoregressifs des deux series, "Theta11" et "Theta22"
# les parametres moyenne mobiles, "initial1" et "initial2"
# sont les valeurs initiales des deux series et "theta0" est
# le vecteur constant.
  m1 <- length(var1[,1])
  m2 <- length(var2[,1])
  m <- m1+m2
  p <- length(Phi11[1,])/m1
  X <- matrix(0,nrow=m,ncol=n)
  if(p == 1)
    Y <- matrix(c(initial1,initial2),m,1)
  if(p != 1)
    Y <- rbind(initial1,initial2)
  bruits <- BB(rbind(cbind(var1,cov),cbind(t(cov),var2)),m,n,q)
  Phi <- matrix(0,nrow=m,ncol=p*m)
  for(i in 1:p){
    Phi[1:m1,(m*(i-1)+1):(m*(i-1)+m1)] <-
      Phi11[, (m1*(i-1) + 1):(m1*i)]
    Phi[1:m1,(m*(i-1)+m1+1):(m*i)] <-

```

```

        Phi12[, (m2*(i-1) + 1):(m2*i)]
Phi[(m1+1):m, (m*(i-1)+1):(m*(i-1)+m1)] <-
        Phi21[, (m1*(i-1)+1):(m1*i)]
Phi[(m1+1):m, (m*(i-1)+m1+1):(m*i)] <-
        Phi22[, (m2*(i-1) + 1):(m2*i)]
}
if(q > 0){
  Theta <- matrix(0,nrow=m,ncol=q*m)
  for(i in 1:q){
    Theta[1:m1, (m*(i-1)+1):(m*(i-1)+m1)] <-
      Theta11[, (m1*(i-1)+1):(m1*i)]
    Theta[(m1+1):m, (m*(i-1)+m1+1):(m*i)] <-
      Theta22[, (m2*(i-1)+1):(m2*i)]
  }
  for(i in 1:n){
    X[,i] <- Phi%%as.vector(Y) + theta0 + bruits[,q+i] -
      Theta%%as.vector(bruits[,c((q+i-1):i)])
    Y <- cbind(X[,i],Y[,-p])
  }
}
if(q == 0){
  for(i in 1:n){
    X[,i] <- Phi%%as.vector(Y) + theta0 + bruits[,i]
    Y <- cbind(X[,i],Y[,-p])
  }
}
return(X)
}

```

Phi.est

```

function(data,p,m,n)
{
# Estime les parametres d'un modele autoregressif multivarie,
# ou "data" sont les donnees de la serie et "p" est l'ordre
# autoregressif. Quelques modifications doivent etre apportees
# lorsque l'on estime un modele saisonnier.
  E <- matrix(0,nrow = m*p,ncol = m*p)
  G <- matrix(0,nrow = m*p,ncol = m)
  for(i in (p+1):n){
    Z <- matrix(0,nrow = m,ncol = p)
    for(j in 1:p)
      Z[,j] <- data[,i-j] - apply(data[, (p+1-j):(n-j)],1,mean)
    Z <- as.vector(Z)
    E <- E + Z%*%t(Z)
    G <- G + Z%*%t(data[,i] - apply(data[, (p+1):n],1,mean))
  }
  solve(E)%*%G
}

```

Residus

```

function(data,Phi.hat,p,m,n)
{
# Calcul les residus d'une serie multivariee estimee par un
# modele autoregressif, ou "Phi.hat" sont les parametres
# estimes. Quelques modifications doivent etre apportees
# lorsque l'on calcul les residus d'un modele saisonnier.

```

```

a.hat <- matrix(0,nrow = m,ncol = (n-p))
for(i in (p+1):n){
  Z <- matrix(0,nrow = m,ncol = p)
  for(j in 1:p)
    Z[,j] <- data[,i-j] - apply(data[, (p+1-j):(n-j)],1,mean)
  Z_as.vector(Z)
  a.hat[,i-p] <- data[,i] - apply(data[, (p+1):n],1,mean) -
    t(Phi.hat)%*%Z
}
return(a.hat)
}

```

Test

```

function(residus1, residus2, m1, m2, nr, K)
{
  # Calcul les statistiques de test QH(k), QH*(k) ainsi que
  # les statistiques portemanteaux, ou "residus1" et "residus2"
  # sont les residus des deux series, "m1" et "m2" sont les
  # dimensions des series, "nr" est le nombre de residus
  # de la plus petite serie et "K" est le nombre de delais.
  {
    res <- rbind(residus1, residus2)
    Gamma12 <- acf(t(res),lag.max = K,plot = F)$acf
      [, ,(m1 + 1):(m1 + m2)][,1:m1,]
    Gamma21 <- acf(t(res),lag.max = K,plot = F)$acf
      [, ,1:m1][, (m1 + 1):(m1 + m2),]
    Omega1 <- acf(t(res),plot = F)$acf[, ,1:m1][,1:m1,][1,,]
    Omega2 <- acf(t(res),plot = F)$acf[, ,(m1+1):(m1+m2)]
  }
}

```

```

                                [, (m1+1):(m1+m2), ] [1, ,]
var.inverse <- solve(kronecker(Omega2, Omega1))
QH <- c(0)
QH.mod <- c(0)
for(i in 1:K) {
  QH[i] <- nr * t(as.vector(t(Gamma21[(K + 2 - i), ,]))) %*%
    var.inverse %*% as.vector(t(Gamma21[(K + 2 - i), ,]))
  QH.mod[i] <- nr/(nr - K - 1 + i) * QH[i]
}
for(i in (K + 1):(2 * K + 1)) {
  QH[i] <- nr * t(as.vector(Gamma12[(i - K), ,])) %*%
    var.inverse %*% as.vector(Gamma12[(i - K), ,]))
  QH.mod[i] <- nr/(nr - i + K + 1) * QH[i]
}

stat <- c(0)
stat.mod_c(0)
for(i in 1:K){
  stat[i] <- sum(QH[(K - i + 1):(K + i + 1)])
  stat.mod[i]_sum(QH.mod[(K - i + 1):(K + i + 1)])
}
return(QH, QH.mod, stat, stat.mod)
}

```

Bibliographie

- [1] Bartlett, M.S. (1946). On the theoretical specification and sampling properties of autocorrelated time series, *Journal of the Royal Statistical Society Supp.*, **8**, 27-41.
- [2] Brockwell, P.J. et Davis, R.A. (1991). *Time Series: Theory and Methods*, 2e édition, Springer-Verlag, New York.
- [3] El Himdi, K. (1993). *Tests d'indépendance de deux séries chronologiques multivariées*, Thèse non publiée, Département d'informatique et de recherche opérationnelle, Université de Montréal.
- [4] El Himdi, K. et Roy, R. (1997). Tests for noncorrelation of two multivariate ARMA time series, *La Revue Canadienne de Statistique*, **25**, 233-256.
- [5] Engle, R.F. et Granger, C.W.J. (1987). Co-integration and error correction: representation, estimation, and testing, *Econometrica*, **55**, 251-276.
- [6] Hannan, E.J. (1976). The asymptotic distribution of serial covariances, *Annals of Statistics*, **4**, 396-399.
- [7] Haugh, L.D. (1976). Checking the independence of two covariance-stationary time series: a univariate residual cross-correlation approach, *Journal of the American Statistical Association*, **71**, 378-385.

- [8] Lütkepohl, H. (1991). *Introduction to Multiple Time Series Analysis*, Springer-Verlag, Berlin.
- [9] Pham, D.T. et Roy, R. (1997). Tests for Non-Correlation of Two Partially Non Stationary Multivariate ARMA Time Series, Manuscrit, Département de mathématiques et de statistique, Université de Montréal.
- [10] Racette, D. et Raynauld, J. (1990). Un modèle BVAR de prévision de la dépense nominale et d'analyse de la politique monétaire canadienne, *Séminaire sur les questions monétaires*, Banque du Canada, mai 1990.
- [11] Reinsel, G.C. (1993). *Elements of Multivariate Time Series Analysis*, Springer-Verlag, New York.
- [12] Roy, R. (1989). Asymptotic covariance structure of serial correlation in multivariate time series, *Biometrika*, **76**, 824-827.
- [13] Tsay, R.S. et Tiao, G.C. (1990). Asymptotic properties of multivariate non-stationary processes with applications to autoregressions, *Annals of Statistics*, **18**, 220-250.
- [14] Wei, W.W.S. (1990). *Time Series Analysis, Univariate and Multivariate Methods*, Addison-Wesley.
- [15] Yap, S.F. et Reinsel, G.C. (1995). Estimation and Testing for Unit Roots in a Partially Nonstationary Vector Autoregressive Moving Average Model, *Journal of the American Statistical Association*, **90**, 253-267.