

Université de Montréal

Rapport de recherche

**L'utilisation du bootstrap pour tester la stationnarité des taux de
change réels avec un modèle non linéaire**

L'évidence pour le Canada

Rédigé par :

Alexandre Briand

Dirigé par :

Mme Silvia Goncalves

Département de Sciences économiques

Faculté des Arts et Sciences

© Alexandre Briand, Avril 2006

Remerciements

Merci à Mme Silvia Goncalves pour vos précieux conseils et votre support.

Merci à mes parents pour votre générosité sans borne et votre soutien.

Merci à ma famille pour votre aide et vos encouragements.

Merci à Sophie, pour tout.

RÉSUMÉ

Cette étude a pour fin l'utilisation du bootstrap pour vérifier la stationnarité des taux de change réels et, du même coup, la validité empirique de la théorie de la parité des pouvoirs d'achat dans le cadre d'un modèle non linéaire de détermination du taux de change. Le taux de change réel \$CAN/\$US est testé pour la période de flottement récent, soit de 1972Q1 à 2003Q4.

L'emploi du bootstrap en bloc permet de bien saisir la structure dépendante des données. De plus, l'utilisation du modèle non linéaire ESTAR permet de tenir compte des coûts de transaction sur le marché des biens.

Les résultats, relativement concluants, permettent d'avancer vers la stationnarité des taux de change réels. Non seulement le modèle non linéaire ne peut être rejeté mais les paramètres estimés sont majoritairement significatifs et vont dans le sens prédit par la théorie. Sur ce point, le bootstrap aide à palier au problème de petit échantillon améliorant ainsi l'inférence. Une régression de long horizon conjointement à une autre procédure de bootstrap permet également de conclure en un retour à la moyenne des taux de change réels.

ABSTRACT

This study uses the bootstrap resampling method to test for real exchange rate stationarity and to investigate the empirical validity of the theory of purchasing power parity in a nonlinear framework. The \$CAN/\$US real exchange rate is tested for the recent floating period spanning from 1972Q1 to 2003Q4.

The use of the block bootstrap allows to adequately capture the dependent structure of the data. Furthermore, the usage of the nonlinear ESTAR model takes into account transaction costs on the goods market.

The relatively conclusive results consist of a step forward to the verification of real exchange rate stationarity. Not only the nonlinear model cannot be rejected but most estimated parameters are significant and go into line with the theory. About this, the bootstrap helps to come around the problem of small sample bias and thus improves inference. Also, a long-horizon regression along with a separate bootstrap method concludes in mean reversion for the Canada – U.S. real exchange rate.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ	iv
ABSTRACT	v
TABLE DES MATIÈRES	vi
LISTE DES TABLEAUX	vii
LISTE DES GRAPHIQUES	viii
1. Introduction	1
2. Informations pertinentes	3
2.1 Taux de change réels	3
2.2 Pays et période à l'étude	4
3. Résumé des études antérieures	6
3.1 Kilian et Taylor (2003)	6
3.2 Hopper (2003)	8
3.3 Mark (1995)	10
4. Analyse théorique	13
4.1 Hypothèse à vérifier	13
4.2 Justification théorique de l'hypothèse à vérifier	13
4.2.1 Bootstrap pour séries chronologiques	14
4.2.2 Non linéarité	14
4.3 Modèle utilisé et procédure de bootstrap employée	15
4.3.1 Modèle utilisé	15
4.3.2 Procédure de bootstrap employée	16
4.3.3 Données	17
5. Analyse empirique	19
5.1 Tests de racine unitaire	19
5.2 Calculs préliminaires	21
5.3 Estimation du modèle	23
5.4 Résultats du bootstrap	25
5.5 Régression de long horizon	28
5.5.1 Apport du bootstrap aux régressions de long horizon	29
6. Conclusion	32
BIBLIOGRAPHIE	vi

LISTE DES TABLEAUX

<i>Tableau 1 : Tableau-synthèse des faiblesses des études antérieures</i>	<i>12</i>
<i>Tableau 2 : Statistiques-t des tests de racine unitaire du TCR.....</i>	<i>20</i>
<i>Tableau 3 : Estimations des paramètres du modèle ESTAR (9).....</i>	<i>24</i>
<i>Tableau 4 : Statistiques-t de bootstrap appliquées au modèle ESTAR (9).....</i>	<i>27</i>
<i>Tableau 5 : Estimations des régressions de long horizon</i>	<i>29</i>

LISTE DES GRAPHIQUES

<i>Graphique 1 : Taux de change nominal et réel \$CAN/\$US (1972Q1-2003Q4).....</i>	<i>5</i>
<i>Graphique 2 : Autocorrélations partielles du logarithme du taux de change réel \$CAN/\$US.....</i>	<i>19</i>
<i>Graphique 3 : 1re différence du logarithme du taux de change réel \$CAN/\$US.....</i>	<i>20</i>
<i>Graphique 4 : Valeur réelle et valeur estimée du taux de change réel \$CAN/\$US.....</i>	<i>25</i>

1. Introduction

Près d'un siècle après l'énoncé de Cassel (1922), la théorie de la parité des pouvoirs d'achat (PPA) continue de laisser les macroéconomistes perplexes. La majorité des chercheurs n'arrive toujours pas aujourd'hui à réconcilier l'admirable simplicité théorique de la PPA avec ses constants échecs empiriques.

À la base du problème, se trouve le rejet constant de la notion élémentaire de la loi du prix unique (LPU), de laquelle la PPA n'est qu'une généralisation. Les divergences de prix dans l'exemple commode du « Big Mac Index » de la revue *The Economist* en fait d'ailleurs foi. Le rejet empirique de la PPA demeure donc une suite logique à la non vérification de la LPU. Les seuls cas où la PPA semble être adéquate demeurent certaines circonstances de PPA relative (différences dans les taux d'inflation), en particulier lors d'hyperinflation.

Les chercheurs se sont d'abord attardés à la présence de coûts de transaction comme solution possible. Cependant, d'autres questions ont surgi par la suite. Par exemple, Rogoff (1996) s'est interrogé sur le fait que les taux de change réels (notion contiguë à la PPA) ne soient même pas stationnaires autour d'une valeur moyenne. De plus, il s'est demandé pourquoi les chocs de court terme exhibaient tant de persistance.

Le problème majeur demeure le manque de données de basse fréquence du à l'expérience plutôt récente des pays industrialisés avec un régime de taux de change flottant (depuis 1973). Cet inconvénient biaise les tests usuels de racine unitaire, menant au non rejet de l'hypothèse de non stationnarité. Diverses solutions existent pour palier à ce problème : échantillon couvrant plus d'années, données en panel, tests de cointégration, méthodes de rééchantillonnage, etc. De plus, la majorité des modèles de détermination des taux de change réels et de PPA suggèrent une dynamique linéaire. En ignorant ainsi l'impact des coûts de transactions, les modèles

linéaires rendent l'estimation inexacte et biaisent les conclusions en faveur de la marche aléatoire.

La présente étude apporte un éclairage différent sur le sujet. D'abord, elle spécifie la dynamique d'ajustement du taux de change réel par un modèle non linéaire de type ESTAR (Exponential Smooth Transition Autoregressive) afin de tenir compte du dilemme entre les opportunités d'arbitrage sur le marché des biens et les coûts de transaction de ceux-ci. Ensuite, elle contourne le problème de biais de petit échantillon en faisant appel à la méthode de rééchantillonnage du bootstrap. Plus précisément, le bootstrap en bloc est employé afin de bien saisir la structure dépendante des données.

Le but de cette étude consiste donc à utiliser le bootstrap avec un modèle de détermination non linéaire du taux de change afin de vérifier empiriquement la stationnarité du taux de change réel \$CAN/\$US (et du même coup la validité de la PPA entre ces 2 pays).

Cette étude est menée pour le Canada et pour le taux de change réel du dollar canadien face au billet vert. Le taux de change réel est construit à partir des données de l'Indice des prix à la consommation (IPC) pour les deux pays. Les données trimestrielles s'échelonnent sur la période 1972Q1-2003Q4. Elle est novatrice dans le sens où, pour le Canada seulement, aucun travail appliquant conjointement le bootstrap et la non linéarité ne fut trouvé.

La rédaction qui suit est séparée en quatre grandes sections. En premier lieu, des informations pertinentes sur les sujets traités sont présentées. Par la suite, une revue des études antérieures est effectuée. Une analyse théorique est ensuite menée et, finalement, les résultats empiriques sont dévoilés. Une conclusion complète le tout à la section 6.

2. Informations pertinentes

2.1 Taux de change réels

La loi du prix unique (LPU) veut qu'un bien homogène ait le même prix dans 2 pays différents lorsque ce dernier est exprimé dans une monnaie commune. La parité des pouvoirs d'achat (PPA) n'est qu'une extension de la LPU à un panier de biens. Découlant de la PPA, le taux de change réel (TCR) représente une mesure du pouvoir d'achat d'une monnaie. Dans un fameux article, Rogoff (1996) émet une réserve importante (« puzzle ») quant à la validité empirique de la théorie de la PPA : si la PPA existe, comment se fait-il que le TCR n'exhibe pas de stationnarité en ne revenant pas à son équilibre de PPA de long terme.

Récemment, les chercheurs ont tenté en vain de conclure en la stationnarité des TCR au moyen de tests de racine unitaire et de cointégration. Le problème majeur demeure le manque de données à basse fréquence depuis le début du flottement récent en 1973. Ce problème de biais de petit échantillon cause un problème de puissance des tests (probabilité qu'un test rejette l'hypothèse nulle) et invalide l'inférence usuelle basée sur la théorie asymptotique.

Plusieurs solutions ont été proposées pour contourner ce problème.¹ D'abord, certains ont mené des tests de racine unitaire sur un plus long échantillon, remontant parfois jusqu'au XIX^e siècle.² Toutefois, tel échantillon comporte plusieurs régimes de change différents. Cela biaise les conclusions en faveur du rejet de la non stationnarité du au fait qu'il soit plus probable que le TCR soit stationnaire pendant une période dominée par un taux de change fixe. D'autres chercheurs ont

¹ L'utilisation de données à plus haute fréquence ne constitue pas une solution car mettre de l'emphase sur la volatilité de très court terme ne permet pas de capturer les tendances de long terme propres à l'idée de stationnarité.

² Par exemple : Lothian et Taylor (1997), Edison (1987), Abuaf et Jorion (1990), Edison et Klovland (1987), Grilli et Kaminsky (1991), Taylor (2002)

quant à eux utilisé des données en panel.³ Cependant, tels modèles font l'hypothèse que les TCR sont conjointement caractérisés par une racine unitaire. L'hypothèse nulle peut donc être rejetée même si seulement un des TCR est stationnaire, ce qui fausse l'interprétation des résultats (Sarno et Taylor, 1998). Le bootstrap apporte une alternative en palliant aux problèmes d'inférence et, ce, sans perte de puissance.

2.2 Pays et période à l'étude

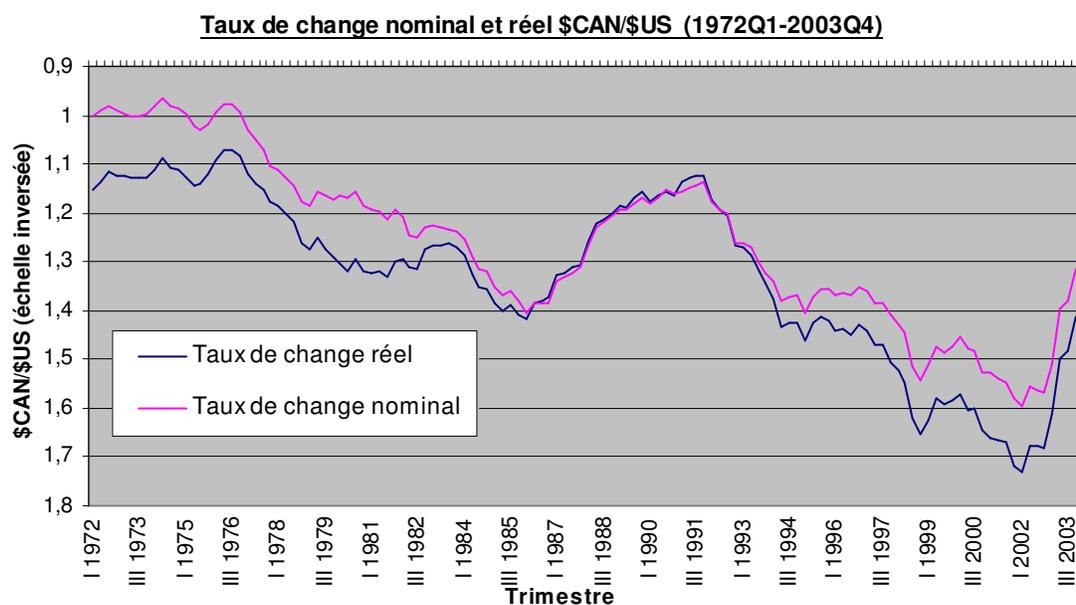
L'économie canadienne est si intégrée à celle des États-Unis qu'il faudrait s'attendre à ce que les faibles coûts de transaction entre ces pays puissent faciliter les opportunités d'arbitrage sur le marché des biens (favorisant ainsi la vérification de la PPA). Or, dans les études concluant en la stationnarité des TCR, le Canada fait souvent exception par le non rejet de l'hypothèse de racine unitaire du TCR \$CAN/\$US. L'intérêt ici est donc d'appliquer d'autres méthodes statistiques (bootstrap et modèle non linéaire) à l'étude du TCR pour tenter de résoudre cet énigme. La période à l'étude est de 1972Q1 à 2003Q4, soit la période de flottement récent du dollar canadien.⁴

Le graphique 1 montre l'évolution des taux de change nominal et réel \$CAN/\$US au cours de la période à l'étude. Il s'y dégage une forte tendance à la baisse (dépréciation) et, à l'œil, le comportement de la série ressemble à celui d'une racine unitaire, i.e. est intégrée d'ordre 1. Pour réconcilier le fait que cette série n'apparaisse pas stationnaire avec l'hypothèse de PPA entre le Canada et les États-Unis, certains auteurs ont employés la méthode du bootstrap alors que d'autres ont utilisé un modèle non linéaire de détermination du taux de change.

³ E.g. : Frankel et Rose (1996), Hakkio (1984), Mark et Sul (2001), Papell (1997), Oh (1996), Wu (1996)

⁴ Bien que le Canada ait annoncé officiellement le 31 mai 1970 le retour au taux de change flottant, débiter l'échantillon au 1^{er} trimestre de 1972 permet d'effectuer une meilleure comparaison avec les variables macroéconomiques des États-Unis et des autres pays industrialisés alors que prenaient fin les accords de Bretton Woods sur la fixité des taux de change. Pour un historique de l'évolution du dollar canadien, voir Powell (1999).

Graphique 1



Source : Statistique Canada, CANSIM, Tableaux 176-0064, 451-0009 et 326-0001

À ce propos, trois études sont ici présentées. La première utilise le bootstrap pour palier aux problèmes d'inférence des tests de racine unitaire. La seconde analyse la dynamique non linéaire du TCR Canada – Etats-Unis. La troisième étude demeure la seule à combiner le bootstrap avec la non linéarité des TCR pour le Canada.

3. Résumé des études antérieures

3.1 Kilian et Taylor (2003)

De connaissance, Kilian et Taylor (2003) demeurent les seuls à avoir tester la stationnarité du TCR \$CAN/\$US à l'aide du bootstrap *et* d'un modèle non linéaire. Ils expliquent pourquoi les chercheurs ont tant de difficulté à trouver un meilleur modèle prédictif que celui de la marche aléatoire pour les taux de change. Les raisons qu'ils donnent sont celles-ci : le fait que, près de l'équilibre de PPA de long terme, le modèle soit bien expliqué par une marche aléatoire et la faible puissance des tests usuels (démontré par simulation).

Kilian et Taylor utilisent des données trimestrielles de 1973Q1 à 1998Q4 pour le taux de change du dollar américain face à 7 devises dont le dollar canadien. Leur échantillon doit cependant être actualisé pour tenir compte des fluctuations récentes du dollar canadien. Le modèle qu'ils utilisent est un modèle ESTAR(2), i.e.

$$z_t - \mu_z = \left(\exp \left\{ \gamma \sum_{d=1}^{\bar{d}} (z_{t-d} - \mu_z)^2 \right\} \right) (\phi_1 (z_{t-1} - \mu_z) + \phi_2 (z_{t-2} - \mu_z)) + u_t \quad (1)$$

où z_t est le logarithme du TCR, μ_z est sa valeur d'équilibre de long terme définie par la PPA et $u_t \sim i.i.d.(0, \sigma^2)$.⁵

Le modèle (1) est estimé par moindres carrés non linéaires (MCN). Pour le Canada, le paramètre de transition estimé, $\hat{\gamma} = -0.7060$ est de bon signe et statistiquement significatif.⁶ Les auteurs concluent ainsi à la non linéarité de la dynamique d'ajustement du TCR \$CAN/\$US. Toutefois, ils ne font pas mention de

⁵ Une explication technique de tel modèle est fournie à la section 4.3.1.

⁶ La P-value est de 0.0000 et a été calculée par un bootstrap non paramétrique récursif avec erreurs i.i.d. sous l'hypothèse nulle de racine unitaire du modèle AR(2).

la technique de MCN utilisée. La technique la plus courante, l'algorithme de Gauss-Newton, peut parfois donner lieu à de la multicollinéarité rendant ses matrices singulières. Bates et Watts (1988) proposent l'utilisation du compromis de Levenberg-Marquardt pour palier à cela. De plus, la sélection des valeurs initiales dans l'algorithme d'optimisation reste cruciale à de bons résultats; Kilian et Taylor ne discutent pas du procédé utilisé pour les choisir.

Afin de vérifier l'efficacité prédictive de leur modèle ESTAR, ils utilisent des régressions à longs horizons, i.e.

$$e_{t+k} - e_t = a_k + b_k z_t + \varepsilon_{t+k} \quad , \quad k=1,4,8,12,16 \quad (2)$$

où e_t est le taux de change nominal et z_t est obtenu selon la dynamique non linéaire de l'équation (1).

Pour contourner le problème de biais de petit échantillon, ils utilisent une distribution de bootstrap de la statistique-t sous l'hypothèse nulle de non prévisibilité des taux de change, i.e. $H_0 : b_k = 0$. Leur bootstrap est construit de cette façon : estimer l'équation (2) par MCO, estimer le modèle (1) par MCN, générer un échantillon de bootstrap de façon récursive à partir des résidus et des coefficients estimés du modèle (1), estimer (2) par MCO à partir des 2000 répliques de bootstrap puis, finalement, obtenir la statistique-t correspondante et sa p-value. Le bootstrap récursif de Kilian et Taylor repose sur un rééchantillonnage i.i.d. des résidus. Or, dans la plupart des séries temporelles financières les erreurs sont dépendantes. D'ailleurs, en employant le test du multiplicateur de Lagrange (ML), ils ne peuvent rejeter la présence d'autocorrélation dans les erreurs pour le Canada. Une procédure de bootstrap appropriée devrait en tenir compte au lieu de rééchantillonner simplement de façon i.i.d. De plus, le bootstrap des auteurs n'est pas robuste à la présence d'hétéroscédasticité.

L'efficacité du bootstrap pour améliorer la puissance des tests sous la nulle mais aussi sous plusieurs hypothèses alternatives s'avère concluante. Sous

l'hypothèse nulle du modèle ESTAR, ils trouvent des p-value inférieurs au seuil de signification de 10% pour des horizons plus grands que 4 trimestres, leur permettant de rejeter le modèle de prévision de la marche aléatoire pour la plupart des pays. Le Canada fait toutefois exception alors que la marche aléatoire ne peut être rejetée même sur un horizon allant jusqu'à 4 ans.

Leur conclusion générale veut que, sur de longs horizons (plus d'un an), le modèle de PPA ne soit pas rejeté pour 5 des 7 pays (sauf pour le Canada et l'Italie). L'exception canadienne est peut-être due à une mauvaise spécification du modèle ou encore, en raison de la grande volatilité des échanges entre le Canada et les États-Unis, à la présence d'hétéroscédasticité et d'autocorrélation devant être incorporées dans le bootstrap. Le modèle non linéaire ESTAR s'avère quant à lui validé pour la plupart des monnaies.

3.2 Hopper (2003)

Hopper (2003) cherche à élargir les conclusions de l'ouvrage précurseur de Michael, Nobay et Peel (1997) sur la validité empirique des modèles non linéaires ESTAR appliqués aux TCR et à la PPA. Au lieu d'utiliser les prix de gros pour les TCR du dollar américain et du franc français face à la livre sterling comme le font MNP, Hopper emploie les niveaux de prix nationaux (mesurés par l'IPC) afin de vérifier la théorie de la PPA pour 16 pays (dont le Canada) à l'aide d'un modèle ESTAR. L'auteur utilise des données annuelles allant de 1870 à 1998. Ce long échantillon comporte cependant plusieurs régimes de changes. Or, la présence de périodes de taux de change fixe peut amener à ne pas rejeter la non stationnarité des TCR puisque que les taux de change fluctuent peu pendant ces périodes. De plus, l'échantillon requiert d'être actualisé.

Dans un premier temps, Hopper effectue des tests de racine unitaire pour chacun des 16 TCR sur l'échantillon 1870-1998. Les statistiques de Dickey-Fuller augmentés (ADF) avec et sans tendance indiquent que la plupart des coefficients des TCR de la zone euro sont significatifs à au plus 10% alors que, pour le dollar

canadien, l'hypothèse de racine unitaire ne peut être rejetée. Toutefois, ces tests restent sujets à un problème de faible puissance avec un échantillon de 128 données.

En plus du problème de biais de petit échantillon évoqué avant, Hopper explique que la faible puissance des tests de racine unitaire peut aussi venir du fait que si le processus générateur des données (PGD) est non linéaire, l'utilisation d'un modèle linéaire favorisera indûment l'incapacité de rejeter l'hypothèse de racine unitaire. L'emploi de l'ESTAR s'avère alors requis.

Le modèle de Hopper est le suivant :

$$q_t = [\phi_1 + \phi_2 \Gamma(\gamma, \mu)]' x_t + \varepsilon_t \quad (3)$$

où q_t est le TCR, $x_t = (1, q_{t-1}, \dots, q_{t-p})'$, $\phi_i = (\phi_{i0}, \phi_{i1}, \dots, \phi_{ip})'$, $i = 1, 2$ avec $\Gamma(0) = 0$, $\Gamma(\pm\infty) = 1$ où $\Gamma(\gamma, \mu) = 1 - \exp\{-\gamma(q_{t-d} - \mu)^2\}$.⁷

Le modèle (3) est estimé par MCN; cependant, l'algorithme employé n'est pas mentionné tout comme les valeurs initiales de l'optimisation. Le modèle ESTAR de Hopper semble bien adéquat puisque la majorité (dix) des 16 TCR étudiés révèlent une dynamique non linéaire de retour à la moyenne selon (3). Le Canada fait encore exception car l'hypothèse nulle d'absence de non linéarité, i.e. $H_0 : \Gamma(0) = 0$, ne peut être rejetée. Ceci se fait en testant si le paramètre de transition γ est différent de 0. Les niveaux de signification minimale des paramètres sont calculés par simulation de Monte Carlo.

Comme le mentionne Hopper, tel modèle ESTAR « devient le pendant non linéaire du test linéaire de PPA ». Son modèle demeure donc très approprié dans le sens où, en tenant compte des coûts de transaction, il apporte plus de preuve en faveur de la PPA de long terme avec un long échantillon.

⁷ q_{t-d} est le paramètre de délai alors que μ est la moyenne de q_t

3.3 Mark (1995)

Mark (1995) étudie la difficulté qu'ont les macroéconomistes à effectuer de façon précise des prévisions ponctuelles des taux de change. La complication vient du peu de données durant la période de flottement récent, ce qui rend difficile l'obtention de meilleures prévisions que celles induites par une marche aléatoire. Toutefois, grâce à une procédure de bootstrap, l'auteur conclut à la prévisibilité sur de longs horizons du taux de change au comptant.

Il utilise le taux de change nominal de 4 devises, dont le huard, face au dollar américain sur une période allant de 1973Q2 à 1991Q4. L'équation estimée consiste à

$$e_{t+k} - e_t = \alpha_k + \beta_k z_t + v_{t+k,t} \quad , \quad k = 1, 4, 8, 12, 16 \quad (4)$$

où e_t est le logarithme du taux de change nominal, v_t est le terme d'erreur et z_t est la déviation du taux de change nominal de sa valeur fondamentale au temps t , i.e. $z_t \equiv f_t - e_t$. Cette dernière est définie par un modèle monétaire renfermant la demande de monnaie et le revenu réel pour le pays domestique et pour le pays étranger (i.e. les Etats-Unis).

Le problème avec ce modèle monétaire réside dans ses hypothèses plutôt fortes que la parité non couverte des taux d'intérêts (PNCTI) tienne et, surtout, que la PPA tienne. Ceci implique une totale flexibilité des prix en tout temps, ce qui demeure peu réaliste. En second lieu, l'auteur justifie l'utilisation de l'indice de masse monétaire M3 pour le Canada au lieu de M1 en disant que « la déviation du taux de change nominal de la valeur fondamentale construite avec M1 présente une forte tendance et semble non stationnaire ». Or, construire un modèle voulant vérifier la prévisibilité (ou la stationnarité) des taux de change en retirant des variables fondamentales semblant non stationnaires pourrait biaiser l'estimation en faveur du rejet de l'hypothèse de racine unitaire.

Mark trouve une spécification AR(4) pour le régresseur z_t canadien et génère un bootstrap paramétrique et un bootstrap non paramétrique avec sensiblement la même procédure. Il construit chaque bootstrap de façon récursive à partir des résidus i.i.d. et des coefficients précédemment estimés par MCO. Dans ce cas-ci, le bootstrap i.i.d. s'avère approprié puisque l'auteur ne trouve aucune évidence d'autocorrélation dans les erreurs.⁸ Puis, il utilise les nouvelles distributions obtenues pour calculer les statistiques de Diebold-Mariano (servant à comparer l'efficacité prédictive du modèle (4) par rapport à celui de la marche aléatoire) et les statistiques-t permettant de tester la non prévisibilité avec $H_0 : \beta_k = 0$.

Les résultats de Mark illustrent la supériorité prédictive du modèle (4) face à la marche aléatoire. En général, plus l'horizon est loin (k est grand), moins la marche aléatoire est efficace relative au modèle suggéré. Cependant, pour le Canada, le modèle (4) domine la marche aléatoire que pour $k = 1$. En bref, plus l'horizon est grand, plus le bruit affectant les changements de court terme s'amenuise. Outre cela, de moins grands niveaux de signification minimale prouvent l'efficacité du bootstrap employé à résoudre le problème de biais de petit échantillon.

De ces trois études, seulement celle de Kilian et Taylor (2003) allient le bootstrap avec la non linéarité pour le Canada. Les conclusions qui en découlent sont sujettes à certaines faiblesses et, parfois, à des hypothèses douteuses dans la construction et l'application des modèles. Le tableau 1 ci-dessous en fait le résumé.

La section suivante décrit le modèle utilisé dans la présente analyse. Ce dernier essaie de tenir compte des points plus faibles des études antérieures et de les incorporer dans un modèle applicable au Canada et combinant à la fois non linéarité et distribution de bootstrap.

⁸ De plus, l'auteur ne trouve pas d'évidence d'hétéroscédasticité.

Tableau 1

Tableau-synthèse des faiblesses des études antérieures

	Kilian et Taylor (2003)	Hopper (2003)	Mark (1995)
Échantillon	Actualisation requise	- Actualisation requise - Comporte plusieurs régimes de change	
Modèle			- Hypothèses fortes de PNCTI et de PPA - Prémisse biaisée de l'indice M3
Technique d'estimation	Valeurs initiales et algorithme employé non mentionnés	Valeurs initiales et algorithme employé non mentionnés	
Bootstrap	- Ne tient pas compte de l'autocorrélation - N'est pas robuste à l'hétéroscédasticité		

Source : Auteur

4. Analyse théorique

4.1 Hypothèse à vérifier

Le problème de puissance (probabilité de rejeter l'hypothèse nulle) des tests de racine unitaire sur un petit échantillon demeure une complication bien documentée dans la littérature.⁹ En effet, maintes simulations de Monte Carlo ont pu différencier entre la distribution des tests de racine unitaire à échantillon fini et celle plus usuelle de Dickey et Fuller (1979). Pour palier à ce problème, la méthode de rééchantillonnage du bootstrap reste une alternative courante et plusieurs auteurs ont prouvé sa validité asymptotique.¹⁰

Dans ce contexte, l'application du bootstrap au peu de données sur le TCR depuis le flottement récent paraît approprié. La présente étude cherche donc à savoir si le bootstrap peut conduire à une meilleure inférence statistique et au rejet de la non stationnarité du TCR Canada – États-Unis. Plus spécifiquement, l'aspect novateur est ici l'utilisation conjointe du bootstrap en blocs et d'un modèle de détermination du TCR non linéaire de type ESTAR.

4.2 Justification théorique de l'hypothèse à vérifier

Car les tests usuels de racine unitaire proviennent de la théorie asymptotique, leur comportement dans des échantillons finis peut causer des problèmes d'inférence. En effet, un trop petit échantillon amenuise la puissance des tests et fait diverger leur niveau de signification du niveau nominal désiré. Dans ce cas également, il peut devenir difficile de rejeter l'hypothèse nulle de racine unitaire à cause du biais vers 0 des coefficients d'un processus autorégressif. Par exemple, pour un AR(1), Mark (1995) montre la proportionalité inverse entre la grandeur de l'échantillon (T) et le biais d'estimation du coefficient $\hat{\gamma}$, i.e. $E[\hat{\gamma} - \gamma] \approx \left| \frac{1 + 3\gamma}{T} \right|$.¹¹ Tout ce problème peut

⁹ Voir, par exemple, Lyhagen et Nordberg (2004), Harris (1992) et Schwert (1989)

¹⁰ E.g. : Park (2003), Ferretti et Romo (1996) et Nankervis et Savin (1996).

¹¹ Mark (1995) montre que cette situation s'applique aussi aux processus AR(p) où $p > 1$.

être résolu en ayant une distribution empirique de la statistique de test (par le bootstrap) au lieu d'une distribution venant de la théorie asymptotique.

4.2.1 Bootstrap pour séries chronologiques

L'idée derrière le bootstrap usuel, consistant à rééchantillonner aléatoirement des données i.i.d., n'est pas applicable dans le contexte de séries chronologiques où les données sont autocorrélées. Dans ce cas, il demeure possible d'employer un bootstrap paramétrique pour recréer récursivement les séries temporelles à partir des résidus précédemment rééchantillonnés de façon i.i.d. Cette méthode n'est cependant pas robuste à l'hétéroscédasticité et ne tient pas compte de la structure dépendante des données, i.e. lorsque les résidus ne sont pas i.i.d.

Une procédure alternative, appelée bootstrap en bloc (BB), permet de palier aux deux problèmes précédents.¹² Elle consiste à rééchantillonner aléatoirement des blocs de données.

4.2.2 Non linéarité

Le rejet empirique de la PPA (et de la stationnarité des TCR) s'explique aussi par la trop forte hypothèse d'absence de coûts de transaction facilitant l'arbitrage sur le marché des biens. Tels coûts sont pris en compte dans des modèles AR(p) non linéaires comme des modèles TAR (Threshold Autoregressive). Le modèle TAR modélise le TCR comme suit. Il peut être à l'intérieur d'une « bande d'inaction » où les coûts de transactions sont si élevés qu'il n'y a pas de possibilité d'arbitrage; dans tel cas, le TCR se comporte aléatoirement comme une racine unitaire. Le TCR peut également être à l'extérieur de cette bande là où les bénéfices associés à l'arbitrage sur le marché des biens sont supérieurs aux coûts de transaction; dans cette situation, la PPA tend à se vérifier et le TCR exhibe un retour à la moyenne. Ces 2 cas sont délimités par un seuil (« threshold »).

¹² D'autres type de bootstrap restent souvent utilisés : le « wild bootstrap » est robuste à la présence d'hétéroscédasticité mais ne laisse pas place à de la dépendance dans les erreurs alors que le « sieve bootstrap » tient compte de la dépendance des données mais n'est pas robuste à l'hétéroscédasticité.

Le TAR représente l'ajustement discret que pour un seul bien. La généralisation vers un panier de biens comme avec la PPA requiert un modèle tenant compte de coûts de transaction différents et d'un seuil distinct pour chaque bien. Les modèles de type STAR (Smooth Transition Autoregressive) permettent qu'au fur et à mesure où le TCR s'éloigne de son niveau de long terme, de plus en plus de seuils soient franchis afin de rendre plus attrayantes les opportunités d'arbitrage (Taylor et Taylor, 2002). Plus particulièrement, le modèle ESTAR (Exponential STAR) permet que la dynamique d'ajustement non linéaire du TCR soit symétrique autour de son équilibre de long terme.¹³

4.3 Modèle utilisé et procédure de bootstrap employée

4.3.1 Modèle utilisé

Le modèle ici retenu s'apparente à celui de Kilian et Taylor (2003). Il s'agit du modèle ESTAR(p) suivant :

$$z_t - \mu_z = \left[\exp \left\{ \gamma \sum_{d=1}^{\bar{d}} (z_{t-d} - \mu_z)^2 \right\} \right] \left(\phi_1 (z_{t-1} - \mu_z) + \dots + \phi_p (z_{t-p} - \mu_z) \right) + u_t \quad (5)$$

où z_t est le TCR et \bar{d} est le paramètre de délai.

L'expression $\Phi = [\exp\{\cdot\}]$ est la fonction de transition avec $\Phi(0)=1$, $\Phi(\infty)=0$ et $\gamma < 0$. Cette expression fait la transition entre l'intérieur et l'extérieur de la bande d'inaction selon la valeur du paramètre de transition γ qui devrait être négatif.

¹³ Une autre variante des types STAR est le modèle LSTAR (Logistic Smooth Transition Autoregressive) qui permet une asymétrie d'ajustement par rapport à l'équilibre de long terme. Dans leur étude sur le sujet, Taylor, Peel et Sarno (2001) rejettent cependant cette asymétrie, justifiant l'utilisation du modèle ESTAR dans la présente analyse.

D'abord, lorsque les déviations du TCR de son équilibre de long terme s'accroissent, $\Phi = \exp\{\cdot\} \rightarrow 0$ implique que le processus AR(p) retourne à sa moyenne pourvu que $\gamma < 0$, i.e. à la limite, $z_t = \mu_z$. Cela signifie que le processus se trouve hors de la « zone d'inaction » puisque, pour des coûts de transaction donnés, les plus grandes disparités entre le prix des biens et leur prix d'équilibre rendent les opportunités d'arbitrage plus importantes, facilitant ainsi un réajustement graduel du TCR vers son équilibre de PPA de long terme. Il y a donc retour à la moyenne du TCR.

Cependant, si les \bar{d} dernières valeurs du TCR égalent son niveau d'équilibre de long terme, le TCR (z_t) se trouve près de son équilibre de PPA de long terme. Dans tel cas, le modèle devient le processus AR(p) suivant

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \dots + \phi_p z_{t-p} + u_t \quad (6)$$

pour lequel les racines peuvent se trouver à l'extérieur du cercle unité ou bien sur ce dernier. Ceci se produit car le faible écart entre le prix des biens et leur prix d'équilibre rend les opportunités d'arbitrage moins importantes que des coûts de transaction donnés. Alors, la série se comporte comme une marche aléatoire et il y devient très difficile de rejeter l'hypothèse de racine unitaire.

4.3.2 Procédure de bootstrap employée

Le bootstrap utilisé est le bootstrap en blocs chevauchés tel qu'initialement proposé par Kunsch (1989). Il permet de répliquer la structure dépendante des données et de passer outre l'hypothèse forte d'erreurs i.i.d. De plus, la longueur de chaque bloc reste fixe.¹⁴ La procédure se décrit comme suit :

¹⁴ Politis et Romano (1994) proposent un « bootstrap stationnaire » où la longueur de chaque bloc est choisie de façon aléatoire et où les blocs ne se chevauchent pas. Cependant, les simulations de Monte Carlo de Lahiri (1999) démontrent la supériorité empirique du bootstrap avec blocs chevauchés de longueur fixe.

- 1) Construire $b = T - k + 1$ blocs de longueur k à partir des données du TCR.
- 2) Créer un nouvel échantillon en tirant avec remplacement parmi les b blocs précédemment construits au moyen d'une loi uniforme de grandeur b .
- 3) Pour chaque nouvel échantillon, calculer les coefficients à l'aide de MCN puis, calculer les écarts-types et les statistiques t correspondants.
- 4) Répéter les étapes 2 et 3 B fois (B étant le nombre de réplifications de bootstrap).

Ces B réplifications créeront ainsi une distribution de bootstrap de laquelle il sera possible d'inférer des valeurs critiques aux seuils de signification désirés pour obtenir des conclusions appropriées aux tests d'hypothèses.

4.3.3 Données

Toutes les données utilisées sont trimestrielles et proviennent de la base de données CANSIM de Statistiques Canada.¹⁵ Dans cette étude, l'expression TCR (z_t) réfère en fait au *logarithme* du taux de change réel du huard face au dollar américain. Cette série a été construite selon l'équation suivante :

$$z_t = e_t + p_t^* - p_t \quad (7)$$

La combinaison du modèle non linéaire ESTAR et du bootstrap en bloc reste donc intimement liée à l'hypothèse de stationnarité des TCR (et au non rejet de la PPA) en présence de coûts de transactions et d'un échantillon réduit.

¹⁵ Tableaux # 176-0064, 326-0001, 451-0009 pour le taux de change nominal (e_t), l'indice des prix à la consommation (IPC) canadien (p_t) et l'IPC américain (p_t^*) respectivement.

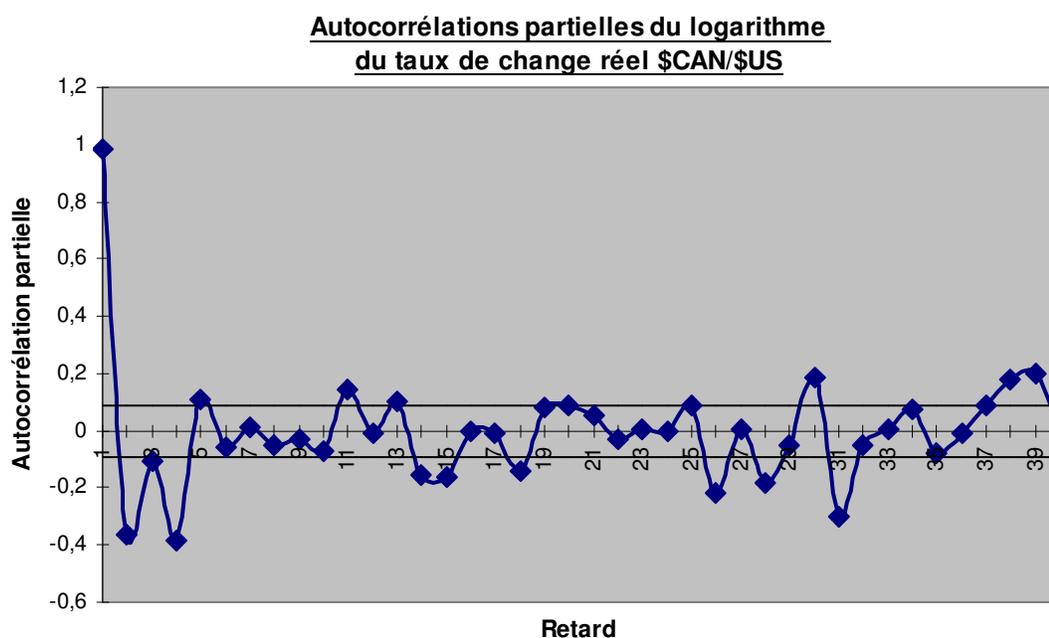
Dans la prochaine partie, le modèle général décrit dans cette section est raffiné par des tests préliminaires pour être ensuite testé empiriquement.

5. Analyse empirique

5.1 Tests de racine unitaire

Tout d'abord, l'analyse de visu de l'autocorrélogramme partiel du TCR, illustré par le graphique 2, révèle une structure AR(4). Les deux lignes horizontales équivalent à $\pm n^{-1/2}$. Cette spécification semble adéquate puisque la série devient réduite à un bruit blanc.¹⁶

Graphique 2



Source : calculs de l'auteur

Sachant cela, des tests de racine unitaire avec 4 retards ont été effectués. Il s'agit de tester si toutes les racines du polynôme autorégressif AR(4) se trouvent à l'extérieur du cercle unité sauf peut-être une qui serait égale à 1. Le tableau 2 présente les statistiques-t de Dickey-Fuller (DF) pour un tel test effectué sur les

¹⁶ La p-value du test porte-manteau de Box-Ljung est de 0,000.

données du TCR à la fois en niveaux et en premières différences.¹⁷ Il révèle que, pour les données en niveaux, l'hypothèse de racine unitaire ne peut être rejetée dans aucun cas. La somme des coefficients estimés pour les 4 tests demeure approximativement 1. Les premières différences s'avèrent quant à elles stationnaires, ce qui corrobore l'hypothèse que la série du TCR est intégrée d'ordre 1. Pour ces dernières, la somme des coefficients autorégressifs reste toujours inférieure à 1.

Tableau 2

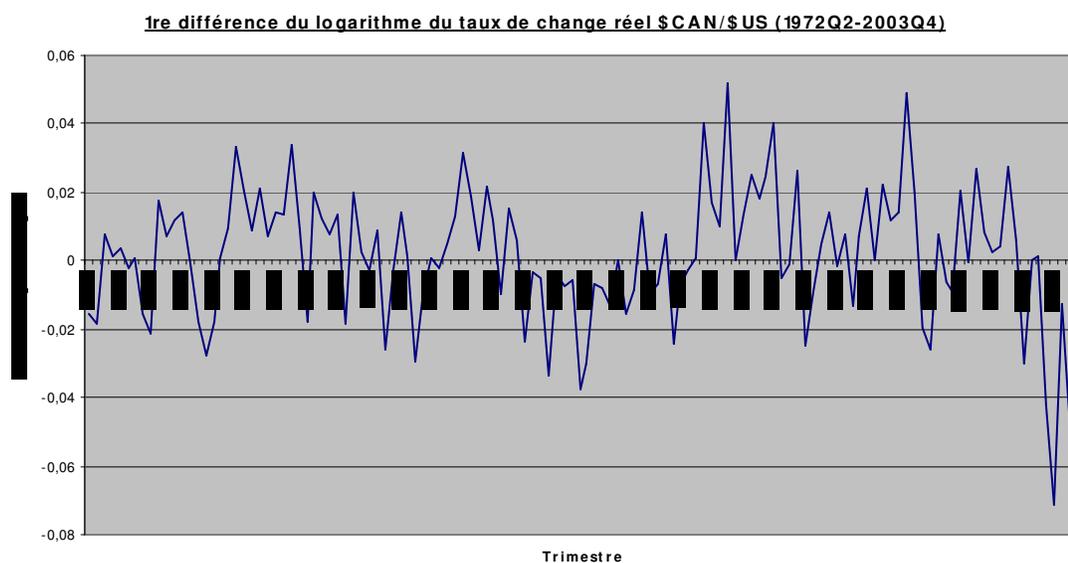
Statistiques-t des tests de racine unitaire du TCR

	Niveaux	1ères différences
SCST	-0.8600	-6.8942*
ACST	-2.2971	-6.8733*
SCAT	-1.9137	-6.8645*
ACAT	-2.6318	-6.8950*

* Significatif à 1%

Source : calculs de l'auteur

Graphique 3



Source : calculs de l'auteur

¹⁷ Les abréviations ST, AT, SC et AC signifient respectivement « sans tendance », « avec tendance », « sans constante » et « avec constante ».

Les résultats en niveaux corroborent l'illustration que fait le graphique 1 de l'évolution du taux de change réel qui, de visu, apparaît non stationnaire. En contrepartie, l'évolution des premières différences du TCR (graphique 3) indique clairement que la série du TCR \$CAN/\$US est intégrée d'ordre 1.

Le fait que le TCR ne soit pas stationnaire va dans le sens des prémisses initiales. D'abord, le petit échantillon pourrait biaiser les conclusions en rendant l'inférence problématique, d'où le besoin d'avoir une distribution empirique (par le bootstrap) au lieu d'une distribution fondée sur la théorie asymptotique. De plus, il demeure fort probable que le modèle linéaire inhérent aux tests usuels de racine unitaire ne soit pas adéquat en présence de coûts de transactions. Une mauvaise spécification du modèle pourrait fausser le résultat des tests, d'où le besoin d'avoir un modèle non linéaire tel l'ESTAR. Cette mauvaise spécification limite l'analyse à la bande d'inaction alors que, au-delà de cette bande, le TCR pourrait dévoiler un retour vers sa moyenne de PPA de long terme.

5.2 Calculs préliminaires

D'abord, avoir de « bonnes » valeurs initiales pour l'algorithme d'optimisation de MCN demeure crucial afin d'obtenir des estimations des paramètres les plus justes possible. Pour faire cela, la méthode retenue est celle de Franses et Van Dijk (2000) car elle est applicable dans le contexte des modèles STAR et reste facilement calculable. Celle-ci consiste à estimer les paramètres ϕ_1, \dots, ϕ_p (le graphique 2 illustre ici que $p = 4$) par MCO étant donnés les paramètres de délai (\bar{d}) et de transition (γ), i.e.

$$\hat{\phi}(\gamma, \bar{d}) = \left(\sum_{t=1}^n x_t(\gamma, \bar{d}) x_t(\gamma, \bar{d})' \right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^n x_t(\gamma, \bar{d}) y_t \right) \quad (8)$$

où $y_t = (z_t - \mu_z)$, $x_t(\gamma, \bar{d}) = [(z_{t-1} - \mu_z), \dots, (z_{t-4} - \mu_z)]' \Phi$ et $\Phi = [\exp\{\cdot\}]$

est la fonction de transition. Car γ et \bar{d} ne sont pas connus a priori, une recherche

par grille (« grid search ») sur ces deux paramètres est effectuée pour choisir les coefficients estimés qui donnent les meilleurs résultats en terme de variance des résidus. Celle-ci s'avère minimisée dans le cas où $\gamma = -1$ avec $\bar{d} = 1$. Ceci donne les valeurs initiales suivantes pour ϕ_1, \dots, ϕ_4 : 1.34, -0.31, 0.36, -0.37. La valeur négative de γ associée à ces valeurs initiales reste fidèle aux attentes préalables.

L'étape suivante consiste à déceler le paramètre de délai (\bar{d}) le plus adéquat. Pour $\bar{d} = 1, \dots, 8$, l'équation (5) a été estimée par MCN avec $p = 4$ et à l'aide des valeurs initiales précédemment trouvées. Encore là, une recherche par grille a été menée pour $\bar{d} = 1, \dots, 8$ avec, comme critères de choix, la variance des résidus, la p-value du paramètre de transition γ et le R^2 . Le paramètre de délai qui semble le plus approprié est $\bar{d} = 5$, comme pour Kilian et Taylor. Pour cette valeur, la p-value de l'estimation de γ par MCN (0.0000) indique que, pour $\bar{d} = 5$, la non linéarité du modèle ne peut être rejetée, supportant ainsi le modèle ESTAR.

À l'instar de Kilian et Taylor (2003), un test d'autocorrélation des erreurs est mené en suivant la procédure construite par Eitrheim et Terasvirta (1996). Le test créé par ces deux derniers auteurs a le mérite d'être spécialement conçu pour des modèles non linéaires de type STAR avec une variante particulière pour l'ESTAR. Il s'agit d'un test F du multiplicateur de Lagrange (F_{LM}). De plus, Eitrheim et Terasvirta montrent par simulation que, dans de petits échantillons, ce test a un bon comportement général et que la statistique F demeure supérieure à la statistique χ^2 . Pour la corrélation sérielle de 4 retards dans les erreurs, les calculs effectués ici révèlent une statistique de test égale à 0,7135; l'hypothèse de non autocorrélation conjointe d'ordre 4 ne peut donc pas être rejetée.¹⁸ Ceci souligne le besoin d'utiliser le bootstrap en bloc pour tenir compte de la structure dépendante des termes d'erreur.

¹⁸ L'ordre ($p = 4$) a été déterminé par l'analyse de visu de l'autocorrélogramme.

5.3 Estimation du modèle

Suite aux calculs préalables, le modèle à estimer ici devient donc

$$z_t - \mu_z = \left[\exp \left\{ \gamma \sum_{d=1}^5 (z_{t-d} - \mu_z)^2 \right\} \right] (\phi_1 (z_{t-1} - \mu_z) + \dots + \phi_4 (z_{t-4} - \mu_z)) + u_t \quad (9)$$

où les u_t sont autocorrélés d'ordre 4.

Cette équation est estimée par moindres carrés non linéaires (MCN). Comme pour les MCO, les MCN cherchent à minimiser la somme des carrés des résidus, i.e.

$$SSR(\beta) = \sum_{t=1}^n (y_t - x_t(\beta))^2 \quad (10)$$

où $x_t(\beta)$ est maintenant une fonction non linéaire.

Le logiciel utilisé (MatLab) rapporte de la singularité dans les matrices propres au calcul de l'algorithme de Gauss-Newton. Bates et Watts (1988) parlent d'un problème commun et proposent plutôt le compromis de Levenberg-Marquardt. Cet algorithme est donc celui utilisé ici et il se base sur les valeurs initiales trouvées précédemment.

Le tableau 3 présente les coefficients estimés des variables du modèle (9). Parmi ceux-ci, deux seuls sont statistiquement différents de zéro aux seuils de signification conventionnels. Le fait que $\hat{\gamma}$ ne soit pas 0 permet de rejeter l'hypothèse nulle de linéarité du modèle et, donc, sert de validation au modèle non linéaire ESTAR (9). De plus, le modèle reste bien défini dans le sens où, comme prévu, $\hat{\gamma} < 0$. Ceci confirme la dynamique de retour à la moyenne qui s'opère à l'extérieur de la bande d'inaction. En effet, le modèle implique que plus le TCR s'éloigne de son équilibre de long terme, plus $\Phi = [\exp\{\cdot\}] \rightarrow 0$ et donc, plus le TCR revient vers cet équilibre jusqu'à ce que, à la limite, $z_t = \mu_z$. Dans tel cas de

retour vers la moyenne, il est prétendu que les racines des 4 variables retardées se situent à l'extérieur du cercle unité. De plus, ces résultats sont meilleurs que ceux de Hopper (2003) dans le sens où la statistique-t du coefficient estimé de son paramètre de transition n'est que de -2.11, ce qui correspond à un degré de signification moindre par rapport à la présente étude.

Tableau 3

Estimations des paramètres du modèle ESTAR (9)

	Variable				
	$\sum_{d=1}^5 (z_{t-d} - \mu_z)^2$	$(z_{t-1} - \mu_z)$	$(z_{t-2} - \mu_z)$	$(z_{t-3} - \mu_z)$	$(z_{t-4} - \mu_z)$
Coefficient	-1.0276	1.0708	-0.5333	0.0737	-0.5336
[Statistique-t]	[-10.9288]	[1.7519]	[-0.5255]	[0.0706]	[-0.8223]
(p-value)	(0.0000)	(0.0798)	(0.5992)	(0.9437)	(0.4109)
$R^2 = 0.0452$, $n = 123$					

Source : calculs de l'auteur

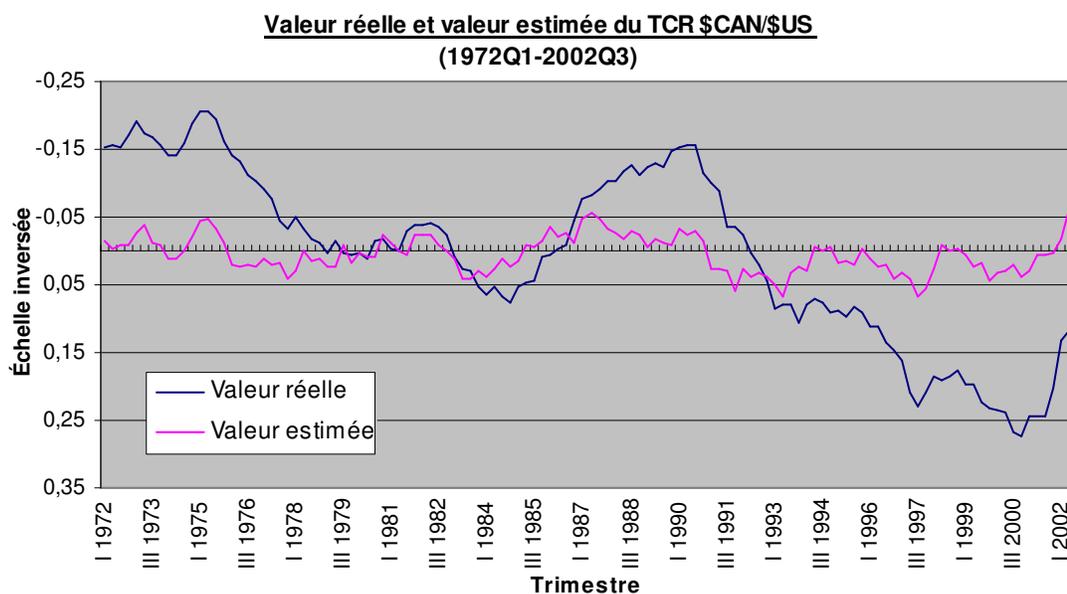
Des coefficients des variables retardées du TCR, seul $\hat{\phi}_1$ est statistiquement différent de 0. Même s'il n'est pas fortement significatif, le fait qu'il soit approximativement égal à 1 évoque la présence de racine unitaire dans la partie autorégressive du modèle. Sans être significatifs, les autres coefficients se situent entre 0 et 1 et, donc, ont leur racine à l'extérieur du cercle unité. À cet égard, un test de racine unitaire n'a pu rejeter l'hypothèse nulle (la statistique-t égalant -0.2718) selon laquelle la somme des coefficients autorégressifs est égale à 1, i.e. $\sum_{i=1}^4 \hat{\phi}_i = 1$.

Un test conjoint de racine unitaire a ensuite été mené. Puisque le modèle (9) devient un AR(4) linéaire si le paramètre de transition n'est pas différent de 0, il s'agit de tester la signification statistique du paramètre $\sum_{d=1}^5 (z_{t-d} - \mu_z)^2$ conjointement

à la présence de racine unitaire, i.e. $H_0 : \hat{\gamma} = 0$ et $\sum_{i=1}^4 \hat{\phi}_i = 1$ vs $H_1 : \hat{\gamma} \neq 0$ ou $\sum_{i=1}^4 \hat{\phi}_i \neq 1$. La p-value de la statistique-test F de Fisher (égale à 0.0003) implique le rejet de l'hypothèse conjointe de racine unitaire dans ce modèle. Ceci évoque un premier pas vers la stationnarité des TCR telles que définis par cette modélisation.

Le graphique 4 illustre la différence entre les valeurs réelles du TCR \$CAN/\$US et ses valeurs estimées par le modèle ESTAR. Cette modélisation apparaît appropriée puisque les fluctuations des 2 séries sont relativement similaires. De plus, le processus suivant le modèle ESTAR apparaît stationnaire.

Graphique 4



Source : calculs de l'auteur

5.4 Résultats du bootstrap

Les résultats mitigés de la section précédente (seul le paramètre AR(1) étant significatif) appuient le recours au bootstrap en présence de petits échantillons.

Tout d'abord, dans le bootstrap utilisé ici, la longueur des blocs (k) n'est pas aléatoire. Le choix de k reste donc crucial à l'efficacité du bootstrap en bloc (BB) pour bien saisir la structure dépendante des données. Dans cette étude, $k = 8$ a été choisie. Pour ce faire, des calculs de BB ont été effectués pour $k = 5, \dots, 16$ puisqu'une longueur de bloc appropriée devrait être plus grande que le paramètre de retard p de la structure AR(p). Pour chaque k , la moyenne de la variance des résidus de chaque rééchantillon de bootstrap a été calculée. De plus, pour chaque k , les p -value des statistiques- t et de la statistique- F ont été calculées. La longueur $k = 8$ s'est avérée être celle qui minimisait ces deux critères.

L'apport du bootstrap à l'inférence du modèle (9) s'avère assez probant. Le tableau 4 ci-dessous présente les coefficients estimés de chaque variable du modèle ESTAR (9), leur statistique- t et leur p -value calculées par MCN ainsi que leur p -value correspondante de la distribution empirique de bootstrap. Les résultats révèlent d'abord que le bootstrap confirme le non rejet de la dynamique non linéaire du TCR puisque le paramètre de transition γ demeure fortement différent de 0. En effet, la p -value calculée initialement de même que le p -value de bootstrap égalent 0.0000. Ce niveau de signification minimale est aussi celui de Kilian et Taylor (2003).

Quant aux paramètres autorégressifs, il s'avère que le bootstrap améliore l'inférence car les seuils de signification minimale diminuent de manière significative. En effet, maintenant seule la variable $(z_{t-3} - \mu_z)$ n'est pas significative à au plus 10%. Le modèle ESTAR (9), qui semblait déjà justifié lors des estimations précédentes, devient ici renforcé par le bootstrap et corrobore l'idée d'une dynamique autorégressive non linéaire du TCR \$CAN/\$US.

Un examen de l'apport du bootstrap aux tests de racine unitaire précédents a ensuite été effectué. Dans un premier temps, la p -value de bootstrap de la statistique

Tableau 4

Statistiques-t de bootstrap appliquées au modèle ESTAR (9)

Variable	Coefficient (écart-type)	$ t_{stat} $	p-value	p-value de bootstrap
$\sum_{d=1}^5 (z_{t-d} - \mu_z)^2$	-1.0276 (0.0940)	-10.9288	0.0000	0.0000
$(z_{t-1} - \mu_z)$	1.0708 (0.6112)	1.7519	0.0798	0.0234
$(z_{t-2} - \mu_z)$	-0.5333 (1.0148)	-0.5255	0.5992	0.0467
$(z_{t-3} - \mu_z)$	0.0737 (1.0439)	0.0706	0.9437	0.4574
$(z_{t-4} - \mu_z)$	-0.5336 (0.6489)	-0.8223	0.4109	0.0801

Source : calculs de l'auteur

F du test conjoint de racine unité (0.0017), i.e. $\hat{\gamma} = 0$ et $\sum_{i=1}^4 \hat{\phi}_i = 1$ vs $\hat{\gamma} \neq 0$ ou $\sum_{i=1}^4 \hat{\phi}_i \neq 1$, n'est pas « meilleure » que la précédente (0.0003). Ceci s'avère un peu décevant même si ces 2 niveaux de signification restent excellents et sensiblement les mêmes. En second lieu, au test de racine unitaire visant à vérifier $H_0 : \sum_{i=1}^4 \hat{\phi}_i = 1$ vs $H_1 : \sum_{i=1}^4 \hat{\phi}_i < 1$, le bootstrap a révélé une p-value de 0.0200. Comparativement à la situation initiale où $H_0 : \sum_{i=1}^4 \hat{\phi}_i = 1$ n'avait pu être rejetée (p-value égale à 0.7858), l'apport du bootstrap s'avère ici indéniable. Ces résultats laissent entrevoir que le

bootstrap permet d'avancer davantage vers la stationnarité du TCR et vers la validation de la PPA, du moins dans le cas présent du taux de change \$CAN/\$US.

5.5 Régression de long horizon

À l'instar de Kilian et Taylor (2003) et de Mark (1995), un modèle de régression de long horizon est construit, i.e.

$$e_{t+L} - e_t = \alpha_L + \beta_L (z_t - \mu_z) + u_{t+L} \quad , \quad L=1,4,8,12,16 \quad (11)$$

où e est le taux de change nominal \$CAN/\$US et $(z_t - \mu_z)$, la variable dépendante de l'équation (9), est la valeur fondamentale du taux de change en terme de PPA non linéaire. L mesure l'horizon en trimestres. Tel modèle de long horizon permet de vérifier la prévisibilité du taux de change en terme de sa déviation à travers le temps par rapport à sa valeur fondamentale. L'intérêt ici est d'examiner si la dynamique non linéaire des TCR (et de la PPA) comme valeur fondamentale sert bien le modèle pour fins de prévisions.

Les paramètres du modèle (11) sont estimés par MCO pour chaque L . Il s'agit de tester, pour chaque L , l'hypothèse nulle de non prévisibilité du taux de change, i.e. $H_0 : \beta_L = 0$, contre l'hypothèse alternative de prévisibilité $H_1 : \beta_L < 0$. Ainsi, si la nulle ne peut être rejetée, le taux de change affiche une racine unitaire et devient non prévisible. D'un autre côté, le rejet de H_0 implique que le taux de change exhibe un retour à la moyenne selon la dynamique non linéaire définie par le modèle ESTAR (9). Les résultats, présentés au tableau 5, restent très concluants. En effet, pour 4 des 5 horizons considérés, le modèle (9) ne peut être rejetée comme valeur fondamentale à moins de 5%. De plus, pour $L = 4,8$, le modèle semble particulièrement bien expliqué puisque les R^2 sont relativement élevés.

En comparaison à l'étude de Mark (1995) sur le sujet, les coefficients estimés ici sont beaucoup plus élevés : ses valeurs pour $L = 1,4,8,12,16$ sont respectivement 0.040, 0.155, 0.349, 0.438 et 0.450. Ceci dénote encore une fois

l'efficacité du modèle non seulement à agir comme valeur fondamentale appropriée mais aussi à bien capturer le *degré* de retour à la moyenne du taux de change. Tout comme Mark (1995), la plus basse p-value de la variable indépendante est ici atteinte à un horizon d'un trimestre et les p-values augmentent avec l'horizon.

Tableau 5

Estimations des régressions de long horizon

Variable ($z_t - \mu_z$)	Horizon L				
	1	4	8	12	16
Coefficient	0.1930	1.2655	1.6625	1.5551	1.2295
[Statistique-t]	[-15.3834]	[3.0937]	[3.8624]	[2.1257]	[0.6978]
P-value	0.0000	0.0010	0.0001	0.0168	0.2427
P-value de bootstrap	0.0050	0.0085	0.0080	0.0055	0.0020
R²	0.1014	0.6502	0.4539	0.2455	0.1175

Source : calculs de l'auteur

5.5.1 Apport du bootstrap aux régressions de long horizon

Parce que l'inférence des régressions de long horizon est elle aussi affectée par un biais de petit échantillon, l'utilisation d'une distribution empirique de bootstrap au lieu de la théorie asymptotique s'avère nécessaire ici aussi.

La procédure de bootstrap dans ce cas-ci diffère cependant de celle utilisée précédemment. Au lieu du BB, l'hypothèse raisonnable de résidus i.i.d. permet ici de construire un bootstrap récursif non paramétrique. Basé sur celui de Kilian et Taylor (2003), il est construit récursivement sous l'hypothèse nulle de racine unitaire. La procédure se détaille comme suit : pour chaque $L = 1, 4, 8, 12, 16$,

- 1) Estimer par MCO l'équation suivante : $e_t = e_{t-L} + \mu_e + v_t$

- 2) Tirer avec remplacement un résidu de la régression de l'étape 1 et un résidu de la régression par MCN de l'équation (9) (section 5.3) au moyen d'une loi uniforme de la longueur de l'échantillon original, i.e. $n = 123$.
- 3) À partir des résidus et des coefficients estimés trouvés à l'étape 1 et avec les résidus et les coefficients estimés de l'équation (9), construire récursivement deux nouveaux échantillons de longueur $n = 623$ pour l'équation (9), i.e. un pour e_t (e_t^*) et un pour z_t (z_t^*). Les valeurs initiales en $t-1, \dots, t-p$ sont égalisées à 0. Les 500 premières données sont supprimées.
- 4) À l'aide des deux échantillons calculés à l'étape 3, estimer par MCO la régression de long horizon $e_{t+L}^* - e_t^* = \alpha_L + \beta_L z_t^* + u_{t+L}^*$ pour ainsi trouver la statistique-t propre à z_t^* , i.e. $t(z_t^*)^*$
- 5) Répéter les étapes 2 à 4 B fois (B étant le nombre de répliques de bootstrap)
- 6) Calculer la p-value de bootstrap à l'aide des $t_b(z_t^*)^*$ ($b = 1, \dots, B$) et avec la statistique-t de la régression de long horizon initiale présentée au tableau 5.

Le tableau 5 contient également les p-values de bootstrap telles que calculées par la procédure précédente. Aux horizons plus courts (1, 4 et 8), il est désappointant de voir que le bootstrap ne semble pas améliorer l'inférence en terme des p-value calculées. En effet, même si tels seuils de signification minimale restent hautement acceptables, ils sont de beaucoup supérieurs aux p-values initiales (allant même jusqu'à 80 fois supérieurs).

Toutefois, ce qui prime est de constater l'apport du bootstrap lorsque l'horizon est plus lointain alors que la p-value de bootstrap est beaucoup moindre que la p-value initiale. Pour $L = 16$, le plus grand seuil initial de signification minimale est fortement diminué avec le bootstrap rendant le coefficient pour $L = 16$ significatif. L'efficacité du bootstrap pour ces horizons plus lointains n'est pas surprenant. En effet, plus l'horizon est long, plus il y a perte de données effectives pour le processus autorégressif et, donc, plus le biais de petit échantillon dans le test de racine unitaire est susceptible d'être important. L'apport du bootstrap dans telle situation s'avère donc capital.

Il apparaît donc que le modèle ESTAR (9) demeure très pertinent pour bien saisir la dynamique non linéaire du TCR \$CAN/\$US. En fait, il permet de tenir compte des coûts de transaction en permettant un retour vers la moyenne lorsque ceux-ci sont moindres que les opportunités d'arbitrage. En ce sens, il donne en quelque sorte raison à la théorie de la PPA à la stationarité du TCR entre le Canada et les Etats-Unis. L'utilisation du bootstrap en bloc s'avère elle aussi concluante. En saisissant la structure dépendante des données, il laisse place à de meilleures inférences, lesquelles permettent d'obtenir une plus grande signification statistique des variables pour ainsi de rejeter l'hypothèse de racine unitaire du TCR. Tels avantages se prêtent aussi aux régressions de long horizon, leur permettant de faire des prédictions plus justes avec une inférence plus adéquate.

6. Conclusion

Le but de cette étude était de tester, à l'aide du bootstrap, la stationnarité du taux de change réel Canada – Etats-Unis. Du même coup, l'objectif était de tenter de trouver une piste de solution au célèbre puzzle de la PPA émis par Rogoff (1996).

Dans un premier temps, un modèle non linéaire de détermination du taux de change réel (TCR) de type ESTAR a été avancé. Celui-ci est composé d'une structure autorégressive AR(4), déterminée suite à l'inspection de l'autocorrélogramme partiel, de même que d'une fonction de transition exponentielle. Telle fonction fait la transition entre un régime d'inaction (où les coûts de transactions sont trop élevés pour qu'il n'y ait arbitrage sur le marché des biens) caractérisé par la présence d'une racine unitaire et un régime de retour à la moyenne (où les opportunités d'arbitrage ramènent la dynamique vers l'équilibre de PPA de long terme) caractérisé par de la stationnarité.

Les estimations de ce modèle faites par moindres carrés non linéaires (MCN) révèlent la signification statistique de la fonction de transition et du premier paramètre autorégressif seulement. De plus, un test F a permis de rejeter l'hypothèse conjointe de racine unitaire pour ce modèle et d'avancer vers la stationnarité du TCR \$CAN/\$US. Préalablement à l'estimation, des tests ont été effectués pour sélectionner les bonnes valeurs initiales propres à l'algorithme d'optimisation employé (celui de Levenberg-Marquardt) et pour choisir les bons paramètres inhérents à la fonction de transition.

En second lieu, pour palier au problème de biais de petit échantillon, la méthode de rééchantillonnage du bootstrap en bloc a été utilisée. Le bootstrap en blocs fixes (BB) permet de tenir compte à la fois de l'hétéroscédasticité et de la structure dépendante des données. Avant de procéder avec le BB, des tests d'autocorrélation sérielle dans les erreurs ont été menés et ceux-ci n'ont pu rejeter l'hypothèse nulle d'absence d'autocorrélation dans les erreurs pour 1 à 4 retards. De plus, une analyse sur les propriétés du BB avec différentes longueurs de bloc (k) a été

effectuée dans le but de sélectionner la longueur de bloc appropriée, dans ce cas-ci, de longueur $k = 8$.

Les distributions empiriques de la statistique-t calculées avec le BB ont permis de mieux valider le modèle ESTAR et de rejeter plus fortement l'hypothèse de racine unitaire. L'utilisation du bootstrap a donc permis de s'approcher de l'objectif désiré, i.e. conclure en la stationnarité du TCR Canada – Etats-Unis. Le problème initial de biais de petit échantillon semble aussi avoir été résorbé puisqu'il a été montré que les p-values des statistiques de test provenant de la distribution de bootstrap étaient clairement moindres que celles calculées initialement, lesquelles étaient fondées sur la théorie asymptotique.

Par la suite, des régressions de long horizon ont été réalisées par MCO pour les horizons $L = 1, 4, 8, 12, 16$. Cela permet de voir si le taux de change nominal peut être prévisible au fil du temps à partir de sa déviation par rapport à sa valeur fondamentale venant du modèle ESTAR. Encore là, les résultats s'avèrent concluants puisque, pour les horizons de court terme de 1 à 12 trimestres, les valeurs fondamentales issues du modèle ESTAR sont statistiquement différentes de 0. Il a aussi été constaté que les coefficients estimés, étant plus élevés que ceux des études antérieures considérées ici, dénotent un degré supérieur de retour à la moyenne. Le modèle non linéaire semble donc ici aussi très approprié. Dans le but d'avoir une inférence plus juste pour ces régressions, une autre procédure de bootstrap a été construite. Pour les horizons plus courts, les seuils de signification minimale lui étant associés n'ont cependant pas diminué même s'ils demeurent à un niveau plus qu'acceptable. L'apport du bootstrap a surtout été notoire avec des horizons plus lointains puisqu'il palliait au moins grand nombre de données effectives.

Ce qui ressort des tests effectués demeure avant tout l'efficacité du bootstrap en bloc à palier aux problèmes d'inférence venant de petits échantillons. Le bootstrap a effectivement permis d'effectuer de plus justes inférences et de bien valider le modèle ESTAR proposé par l'estimation de ses paramètres.

La pertinence de tel modèle non linéaire ressort également. Même si les économies du Canada et des Etats-Unis demeurent très bien intégrées, il existe tout de même des coûts de transaction assez importants pour décourager l'arbitrage sur le marché des biens. Le modèle ESTAR en prend considération et est validé de nombreuses façons : test de linéarité par la statistique-t du coefficient de sa fonction de transition, estimation concluante avec la distribution de bootstrap et forte signification statistique de la valeur fondamentale du taux de change *nominal* telle que définie par ce modèle.

Même si les résultats de la présente étude s'avèrent assez concluants, plusieurs autres pas restent à franchir avant de réellement pouvoir solutionner le fameux puzzle de Rogoff (1996). À cet effet, il serait important de vérifier la robustesse de ces résultats en effectuant des calculs similaires avec les données d'autres pays industrialisés ayant connu le récent flottement.

Il serait aussi intéressant de vérifier si d'autres modèles non linéaires tels que le LSTAR (Logistic Smooth Transition Autoregressive) ou le SETAR (Self-Exciting Threshold Autoregressive) peuvent encore mieux saisir la dynamique d'ajustement des TCR que ne l'a fait le modèle de type ESTAR. Il existe également divers moyens de tester la linéarité des données comme, par exemple, des tests basés sur le multiplicateur de Lagrange et construits pour des modèles non linéaires. Dans la même veine, plusieurs autres types de bootstrap s'appliquant aux séries chronologiques pourraient être testés : par exemple, le bootstrap stationnaire de Politis et Romano (1994) qui laisse la longueur des blocs être déterminée aléatoirement.

Finalement, la robustesse de cette étude pourrait être augmentée en effectuant des tests comparatifs, comme celui de Diebold-Mariano, afin de vérifier si le modèle non linéaire proposé peut offrir de meilleures prévisions que le modèle de la marche aléatoire pour les taux de change réels. Plusieurs auteurs ont déjà accompli cela mais pas en combinant le bootstrap et la non linéarité.

Suite à telles améliorations, les macroéconomistes auront une meilleure idée du sort réservé à la stationnarité des taux de change réels et à la PPA. Cependant, peut-être que d'autres puzzles se dessineront et que la validité empirique de la PPA ne rende jamais grâce à la belle simplicité théorique de la parité des pouvoirs d'achat.

BIBLIOGRAPHIE

- Abuaf, N. et P. Jorion (1990), "Purchasing Power Parity in the Long Run", *The Journal of Finance*, 45(1), 157-174.
- Bates, D. M. et D. G. Watts (1988), *Nonlinear Regression Analysis and its Applications*, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, New York.
- Cassel, G. (1922), *Money and Foreign Exchange After 1914*, MacMillan, New York
- Edison, H. J. (1987), "Purchasing Power Parity in the Long Run: A Test of the Dollar/Pound Exchange Rate (1890-1978)", *Journal of Money, Credit and Banking*, 19(3), 376-287.
- Edison, H. J. et J. T. Klovland (1987), "A Quantitative Reassessment of the Purchasing Power Parity Hypothesis: Evidence from Norway and the United Kingdom", *Journal of Applied Econometrics*, 2(4), 309-333.
- Eitrheim, O. et T. Teräsvirta (1996), "Testing the Adequacy of Smooth Transition Autoregressive Models", *Journal of Econometrics*, 74, 59-75.
- Ferretti, N. et J. Romo (1996), "Unit Root Bootstrap Tests for AR(1) Models", *Biometrika*, 83(4), 849-860.
- Frankel, J. A. et A. K. Rose (1996), "A Panel Project on Purchasing Power Parity: Mean Reversion within and between Countries", *Journal of International Economics*, 40, 209-224.
- Franses, P. H. et D. Van Dijk (2000), *Non-linear Time Series Models in Empirical Finance*, Cambridge University Press, Cambridge.

- Grilli, V. et G. Kaminsky (1991), “Nominal Exchange Rate Regimes and the Real Exchange Rate: Evidence from the United States and Great Britain, 1885-1986”, *Journal of Monetary Economics*, 27, 191-212.
- Hakkio, C. S. (1984), “A Re-Examination of Purchasing Power Parity”, *Journal of International Economics*, 17, 265-277.
- Harris, R. I. D. (1992), “Small Sample Testing for Unit Roots”, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 54(4), 615-625.
- Hopper, T. (2003), “Nonlinear Mean Reversion in Long Horizon Real Exchange Rates”, *Federal Reserve Bank of Dallas*, November 2003, 1-27.
- Kilian, L. et M. P. Taylor (2003), “Why is it so difficult to beat the random walk forecast of exchange rates?”, *Journal of International Economics*, 60, 85-107.
- Künsch, H. R. (1989), “The Jackknife and the Bootstrap for General Stationary Observation”, *The Annals of Statistics*, 17 (3), 1217-1241.
- Lahiri, S. N. (1999), “Theoretical Comparisons of Block Bootstrap Methods”, *The Annals of Statistics*, 27(1), 286-404.
- Lothian, J. R. et M. P. Taylor (1997), “Real Exchange Rate Behaviour”, *Journal of International Money and Finance*, 16 (6), 945-954.
- Lyhagen, J. et A. Nordberg (2004), “Unit Root in Finite Samples: Remedies for Size Distortions”, Master Thesis, Uppsala University
- Mark, N. C. (1995), “Exchange Rates and Fundamentals: Evidence on Long-Horizon Predictability”, *The American Economic Review*, March 1995, 201-218.

- Mark, N. C. et D. Sul (2001), “Nominal Exchange Rates and Monetary Fundamentals: Evidence from a small Post-Bretton Woods Panel”, *Journal of International Economics*, 53, 29-52.
- Michael, P. et A. R. Nobay et D. A. Peel (1997), “Transactions Costs and Nonlinear Adjustment in Real Exchange Rates: An Empirical Investigation”, *Journal of Political Economy*, 105(4), 862-879.
- Nankervis, J. C. et N. E. Savin (1996), « The Level and Power of the Bootstrap t Test in the AR(1) Model With Trend”, *Journal of Business and Economic Statistics*, 14 (2), 161-168.
- Oh, K. (1996), “Purchasing Power Parity and Unit Root Tests Using Panel Data”, *Journal of International Money and Finance*, 15(3), 405-418.
- Papell, D. H. (1997), “Searching for Stationarity: Purchasing Power Parity under the Current Float”, *Journal of International Economics*, 43, 313-332.
- Park, J. Y. (2003), “Bootstrap Unit Root Test”, *Econometrica*, 71, 1845-1895.
- Politis, D. N. et J. P. Romano (1994), “The Stationary Bootstrap”, *Journal of the American Statistical Association*, 89 (428), 1303-1313.
- Powell, J. (1999) *Le dollar canadien: une perspective historique*, Banque du Canada, Ottawa
- Rogoff (1996), “The Purchasing Power Parity Puzzle”, *Journal of Economic Literature*, 34(2), 647-668.

- Sarno, L. et M. P. Taylor (1998), “Real Exchange Rates under the Recent Float: Unequivocal Evidence of Mean Reversion”, *Economics Letters*, 60, 131-137.
- Schwert, G. W. (1989), “Tests for Unit Roots: A Monte Carlo Investigation”, *Journal of Business and Economic Statistics*, 7(2), 147-159.
- Taylor, A. M. (2002), “A Century of Purchasing-Power Parity”, *The Review of Economics and Statistics*, February 2002, 84(1), 139-150.
- Taylor, A. M. et M. P. Taylor (2004), “The Purchasing Power Parity Debate”, *Journal of Economic Perspectives*, 18(4), Fall 2004, 135-158.
- Wu, Y. (1996), “Are Real Exchange Rates Nonstationary? Evidence from a Panel-Data Test”, *Journal of Money, Credit and Banking*, 28 (1), 54-63.