

Université de Montréal

**Affectation statique et dynamique
des usagers dans un réseau de
transport avec capacités rigides**

par

Younes Hamdouch

Département d'informatique et de recherche opérationnelle

Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Philosophiæ Doctor (Ph.D.)
en informatique et recherche opérationnelle

Avril, 2002

©Younes Hamdouch, 2002



QA

76

US4

2002

v. 027

C

C

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée :

“Affectation statique et dynamique
des usagers dans un réseau de
transport avec capacités rigides”

présentée par :
Younes Hamdouch

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Michael Florian	président du jury
Patrice Marcotte	directeur de recherche
Sang Nguyen	codirecteur de recherche
Michel Gendreau	membre du jury
Donald Hearn	examineur externe
Diane Riopel	représentant du doyen

Thèse acceptée le : 13 août 2002

Sommaire

Les modèles classiques d'affectation utilisent des courbes de délais pour représenter les temps de transport résultant des flots sur les arcs du réseau. Dans cette thèse, nous envisageons une approche entièrement nouvelle basée sur le concept de "stratégie de déplacement". Alors que cette approche a été utilisée avec succès dans le contexte du transport en commun, nous montrons qu'elle peut être adaptée aux réseaux avec des capacités rigides sur les arcs.

Dans la première partie de la thèse, nous proposons un modèle statique pour le transport en commun où les usagers utilisent des stratégies plutôt que des chemins pour se rendre de leur origine vers leur destination et où l'accès aux lignes d'autobus est soumis à des priorités. Ces priorités découlent du fait que les usagers se trouvant à l'intérieur d'un autobus dans un nœud de transfert conservent leur place. Les capacités explicites sur les lignes de transport jouent un rôle important dans la formulation du modèle. Si le flot souhaitant accéder à un arc excède sa capacité, l'on définit une probabilité d'accès à cet arc. Les unités de flot non prioritaires qui se voient refuser l'accès à une ligne d'autobus sont refoulées sur d'autres arcs, suivant une liste de préférences. Ces listes de préférences définissent des stratégies de comportement. Le chemin utilisé dépend alors des probabilités d'accès aux arcs, elles-mêmes fonctions des flots et capacités. On définit le coût d'une stratégie comme l'espérance du coût du chemin utilisé. À l'équilibre, les stratégies utilisées ont un coût identique, pour chaque couple origine-destination. Ces conditions d'équilibre constituent une extension du principe de Wardrop au modèle avec stratégies.

Dans la deuxième partie de la thèse, nous développons un nouveau modèle dynamique discret pour le trafic routier où les automobilistes adoptent des stratégies plutôt que des chemins (suivant l'approche classique). Cette notion de stratégie qui comprend différentes options de routes aux intersections importantes du réseau est plus réaliste qu'un simple chemin pour représenter le comportement des usagers dans un réseau dynamique. Le modèle proposé prédit la répartition de la demande temporelle de chaque paire origine-destination en tenant compte des priorités d'accès aux

arcs du réseau selon la discipline “premier-arrivé premier-parti”. À chaque période et en chacun des nœuds du réseau, un usager qui désire emprunter un arc saturé devra opter pour un autre arc ou bien attendre la prochaine période dans une file d’attente. Cette approximation de la situation réelle induit une synchronisation des déplacements stratégiques des usagers dans le réseau espace-temps résultant.

Dans les deux modèles statique et dynamique, le cœur du problème réside en la mise en point d’un algorithme de chargement permettant de déterminer les probabilités d’accès aux arcs correspondant à un flot stratégique donné. Bien que la difficulté de ce processus repose sur les priorités, nous avons réussi à concevoir un algorithme qui effectue une simulation déterministe du cheminement des usagers et qui tient compte des priorités pour l’accès aux arcs du réseau. Nous avons démontré que la fonction induite par le processus de chargement est semi-continue inférieurement, ce qui assure l’existence d’un équilibre stratégique. Ce résultat théorique, difficile à démontrer à cause de la complexité du processus de chargement et des situations de dégénérescence causées par la nullité simultanée de la capacité et du flot d’entrée, constitue une des contributions importantes de cette thèse.

La recherche d’un équilibre stratégique est effectuée par une méthode qui s’inspire de l’algorithme Frank-Wolfe, où une proportion du flot est affectée aux stratégies optimales associées aux paires origine-destination. Ces stratégies sont utilisées pour déterminer des directions de descente pour une fonction de mérite associée à la formulation variationnelle des deux modèles.

Nous avons testé nos algorithmes sur des réseaux de taille faible et moyenne. Ces expériences numériques indiquent que nos algorithmes sont stables et efficaces.

Le travail effectué dans cette thèse est original à plusieurs égards. Tout d’abord, l’approche stratégique pour représenter le transport des passagers tout en respectant les priorités d’accès aux arcs du réseau permet de modéliser d’une manière réaliste le comportement des usagers dans des réseaux avec capacités rigides. Deuxièmement, nous avons démontré l’existence d’une solution d’équilibre sur l’espace des flots réalisables affectés aux stratégies, ce qui constitue une propriété théorique essentielle pour la validité et la viabilité de nos modèles. Finalement, nous avons conçu et implanté des algorithmes efficaces de calcul d’un équilibre stratégique. Les résultats numériques effectués sur des réseaux de taille faible et moyenne nous ont permis d’illustrer le

comportement stratégique des usagers, surtout dans le cas dynamique où le concept de stratégie est utilisé pour la toute première fois pour modéliser le problème d'affectation de trafic.

Mots-clés : trafic, transport en commun, affectation d'équilibre, stratégie, hyperchemin, capacités, priorités.

Abstract

Traditional models of traffic assignment usually assume that flow is assigned to shortest paths with respect to current (flow dependent) travel delays. In this thesis, we advocate the use of strategies for modeling traffic assignment. While this concept has been previously applied with success in the realm of urban transit assignment, we show that it can apply as well to priority networks involving arcs with rigid capacities.

In Part 1 of the thesis, we propose a static model for the passenger assignment where the sole congestion effects are induced by the link capacities and where priorities among users are explicitly taken into account. These priorities result from the fact that users that stay on board at a transfer node simply keep their seat, and thus have a natural priority over other commuters that try to board the bus at this node. In this model, users of the transportation network select, at their origin node, a travel strategy. A strategy associates with each node of the network an ordered set of successor nodes. At each node, users select the first available outgoing arc in this ordered set, where the probability that an arc be available is proportional to its capacity and inversely proportional to the number of users longing for it. The path used depends on the access probabilities, which are themselves functions of flows and capacities. The cost of a strategy is defined as the weighted cost of the path being used. At equilibrium, expected costs corresponding to any two used strategies associated with a given origin-destination pair should be equal.

In Part 2, we develop a new model for the dynamic traffic assignment where the behavior of the users is represented by the concept of strategies. We believe that this concept allows a better representation of user behavior in dynamic networks. The model provides a discrete-time description of the variations of flows on congested networks where the first-in first-out (FIFO) discipline is satisfied and where the capacity of the arcs is an integral part of the model. For any period of time and at each node, vehicles can either transshipped on travel arcs or wait until the next period in a waiting queue. This approximation of real-situations induces a synchronization of the strategic travel's users in the resulting space-time network.

In both the static and dynamic case, we give a detailed derivation of the loading mechanism that allow us to generate, for a given strategic flow vector, the access probabilities and the expect costs of strategies. Overcoming the inherent difficulty associated with the priority aspect, we have succeeded in developing an efficient algorithm for simulating the flow assignment process that complies with the priority rules. The cost mapping induced by the loading process is shown to be lower semi-continuous as function of incoming flows. This property ensures the existence of at least one equilibrium solution. This theoretical result, which is more difficult because of the complexity of the loading mechanism and the degenerate situations where the entry flow and the residual capacity are both zero, constitutes a fundamental contribution of the thesis.

To obtain strategic equilibria, we adopt linear approximation method inspired from the Frank-Wolfe algorithm where we shift a proportion of the total travel demands to the best strategies associated with the origin-destination pairs. These strategies are used to minimize a gap function associated with the variational inequality formulation of our models.

We have tested our algorithms on nontrivial networks. The numerical tests provide insights on the convergence behavior of the algorithms that we implemented.

This work is original in many regards. First, the strategic approach used to represent user flows satisfying the FIFO rule provides a novel representation of the user behavior in networks involving arcs with rigid capacities. Second, we have shown the existence of at least one equilibrium solution in the set of feasible strategic flows vectors. This key result is essential for the validity and the viability of our models. Finally, we have designed and implemented efficient algorithms for determining a strategic equilibrium. The numerical results illustrate the strategic behavior of users, especially in the dynamic case where the strategic concept is used for the very first time in traffic assignment models.

Keywords : traffic, transit networks, equilibrium assignment, strategy, hyperpath, capacities, priorities.

Table des matières

Sommaire	i
Abstract	iv
Table des matières	vi
Table des figures	ix
Liste des tableaux	x
Dédicace	xii
Remerciements	xiii
Introduction	1
1 Revue de la littérature	4
1.1 Modèles statiques	4
1.1.1 Réseaux sans capacités	4
1.1.2 Réseaux avec capacités rigides	10
1.2 Modèles dynamiques	12
1.2.1 Modèles de simulation	13
1.2.2 Modèles analytiques	15
1.3 Conclusion	19
Partie 1. Modèle d'affectation statique avec priorités	20
2 Présentation du modèle	21
2.1 Un réseau de transport en commun	21
2.2 Formulation mathématique	31

2.2.1	Modélisation statique	31
2.2.2	Réseau avec capacités rigides	31
2.2.3	Stratégies	32
2.2.4	Flot et coût stratégiques	33
2.2.5	Élimination de stratégies	35
2.2.6	Conditions d'équilibre	36
3	Chargement du réseau	37
3.1	Mécanisme de chargement	37
3.1.1	Flot prioritaire	38
3.1.2	Chargement à file unique	40
3.1.3	Chargement généralisé	43
3.2	Algorithme de chargement	45
3.2.1	Ensemble de travail stratégique	45
3.2.2	Procédure PCAPLOAD	45
3.3	Existence d'un équilibre	49
3.3.1	Modèle sans priorités	49
3.3.2	Modèle avec priorités	58
4	Recherche d'un équilibre stratégique	64
4.1	Construction d'une stratégie optimale	64
4.1.1	Procédé de construction général	65
4.1.2	Application au modèle stratégique	65
4.1.3	Algorithme PCAPSHORT	69
4.2	Algorithmes de résolution	73
4.2.1	Fonction d'écart	74
4.2.2	Algorithme de linéarisation	78
4.2.3	Algorithmes de projection	84
4.3	Résultats numériques	87
4.3.1	Premier problème : le petit réseau	87
4.3.2	Second problème : le réseau de Sioux Falls	97
	Partie 2. Un modèle d'affectation d'équilibre dynamique	106

5	Chargement dynamique	107
5.1	Introduction	107
5.2	Présentation du modèle	108
5.2.1	Capacités et stratégies	109
5.2.2	Volume et coût stratégiques	112
5.3	Chargement dynamique	115
5.3.1	Mécanisme de chargement	115
5.3.2	Algorithme de chargement	119
6	Recherche d'un équilibre dynamique	125
6.1	Conditions d'équilibre dynamique	125
6.2	Recherche d'un équilibre dynamique	127
6.2.1	Construction d'une stratégie optimale	127
6.2.2	Exemple de construction d'une stratégie optimale	128
6.2.3	Algorithme DCAPSHORT	130
6.2.4	Algorithme de linéarisation	134
6.3	Résultats numériques	135
6.3.1	Petit réseau	135
6.3.2	Réseau de Sioux Falls	140
6.3.3	Conclusion	152
	Conclusion	154
	Bibliographie	156
A	Structures de données	i
A.1	Modèle statique	i
A.2	Modèle dynamique	v

Table des figures

2.1	Réseau 1	22
2.2	Le graphe stratégique de s_1 dans le réseau 1	33
3.1	Illustration d'une file d'attente unique	40
3.2	Chargement au nœud j	42
3.3	Réseau 2	59
4.1	Réseau 3	67
4.2	La k -ième itération de l'algorithme PFW	79
4.3	La k -ième itération de l'algorithme de projection	85
4.4	L'algorithme de Konnov	86
4.5	Réseau 4	88
4.6	Réseau 5	98
5.1	Réseau 6	110
5.2	Expansion du réseau 6	111
5.3	Le graphe stratégique de s_1 dans le réseau 6	113
5.4	Chargement dynamique au nœud j_4	118
6.1	Construction de la stratégie optimale au nœud j_4	129
6.2	Petit réseau ($T = 65$)	135
6.3	Réseau de Sioux Falls ($T = 100$)	141
A.1	Représentation du réseau 4	ii
A.2	Représentation de la stratégie s_2 du réseau 4	iii
A.3	Représentation des paires $O-D$ et d'un domaine de travail du réseau 4	iv
A.4	Représentation du petit réseau dynamique	v

Liste des tableaux

2.1	Description des paramètres du réseau 1	22
2.2	Description des chemins du réseau 1	23
2.3	Échantillon de stratégies pour le réseau 1	26
3.1	Résultats du chargement au nœud j	43
4.1	Construction d'une stratégie optimale dans le réseau 3	69
4.2	PSTRATEQ1 appliqué au réseau 4	92
4.3	PSTRATEQ1 appliqué au réseau 4 (autre vecteur de flot initial) . .	92
4.4	PSTRATEQ2 appliqué au réseau 4	93
4.5	Algorithme de projection appliqué au réseau 4 ($\alpha = 0.01$)	93
4.6	Algorithme de Konnov appliqué au réseau 4 ($\alpha = 0.01$, $\lambda = 0.05$, $\theta =$ 0.001)	94
4.7	Algorithme de l'extragradient appliqué au réseau 4 ($\alpha = 0.01$)	94
4.8	Algorithme de projection appliqué au réseau 4 ($\alpha = 1$)	94
4.9	PSTRATEQ1 appliqué au réseau 4 ($d_{16} = 9$)	95
4.10	PSTRATEQ2 appliqué au réseau 4 ($d_{12} = 9$)	95
4.11	Algorithme de projection appliqué au réseau 4 ($\alpha = 0.01$ et $d_{12} = 9$) .	96
4.12	Algorithme de l'extragradient appliqué au réseau 4 ($\alpha = 0.1$ et $d_{12} = 9$)	96
4.13	Description des paires O-D du réseau 5	100
4.14	Description des lignes de transport du réseau 5	100
4.15	Une stratégie pour la paire O-D (1,24) du réseau 5	100
4.16	PSTRATEQ1 appliqué au réseau 5	101
4.17	PSTRATEQ2 appliqué au réseau 5	101
4.18	Coûts stratégiques minimaux (réseau 5)	101

4.19	PSTRATEQ1 appliqué au réseau 5 modifié	103
4.20	PSTRATEQ2 appliqué au réseau 5 modifié	103
4.21	Coûts stratégiques minimaux (réseau 5 modifié)	103
4.22	Seule stratégie utilisée pour la paire $O-D$ (7,24) du réseau 5	105
4.23	Pourcentages d'utilisation des chemins de capacité infinie	105
5.1	Résultats du chargement dynamique au nœud j_4	120
6.1	Données sur les arcs du petit réseau	136
6.2	Données sur les paires $O-D$ du petit réseau	136
6.3	DSTRATEQ appliqué au petit réseau ($\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.001$)	138
6.4	Coûts minimaux après 100 itérations (petit réseau)	138
6.5	DSTRATEQ appliqué au petit réseau modifié ($\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.001$)	139
6.6	Coûts minimaux après 100 itérations (petit réseau modifié)	139
6.7	Données sur les arcs du réseau A	142
6.8	Données sur les paires $O-D$ du réseau A	143
6.9	Nouvelles capacités du réseau B	143
6.10	Demandes de la paire (7, 20) (réseau C)	144
6.11	DSTRATEQ appliqué au réseau A ($\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.1$)	145
6.12	DSTRATEQ appliqué au réseau B ($\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.1$)	146
6.13	DSTRATEQ appliqué au réseau C ($\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.1$)	146
6.14	Coûts minimaux après 50 itérations (réseau A)	147
6.15	Coûts minimaux après 50 itérations (réseau B)	148
6.16	Coûts minimaux après 50 itérations (réseau C)	149
6.17	Seule stratégies utilisée pour la paire (7, 20, 0) (réseau A)	151
6.18	Stratégies utilisées pour la paire (7, 20, 4) du réseau A et la paire (7, 20, 0) du réseau B	151
6.19	Stratégies utilisées pour la paire (7, 20, 4) (réseau B)	153
6.20	Volumes, coûts et écart-types des stratégies pour les paires (7, 20, 0) et (7, 20, 4) (réseau B)	153
6.21	Stratégie utilisée pour la paire (7, 20, 0) (réseau C)	153

À mes parents.

À ma femme.

À ma belle famille.

À toute ma famille.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer mes remerciements à mes directeurs de recherche le professeur Patrice Marcotte et le professeur Sang Nguyen de m'avoir donné la chance d'accomplir cette thèse sous leur direction. Je suis également reconnaissant envers eux pour leurs soutien continu durant les années d'études et les liens de confiance qui se sont formés durant ces années. Leur grande expérience dans le domaine du transport m'a été un atout précieux.

Je remercie aussi les amis, collègues, professeurs et chercheurs que j'ai connus au cours des années au Centre de recherche sur les transports et au Département d'informatique et de recherche opérationnelle qui, par leurs commentaires judicieux ou leur support moral, m'ont aidé à faire de cette thèse ce qu'elle est.

C'est avec un grand plaisir que j'exprime toute ma gratitude à mes parents, Abdenbi et Amina, à mon frère Réda et à ma sœur Imane qui m'ont encouragé tout au long de mes études et auxquels je dois chaque réussite.

Je remercie ma femme Soraya pour sa présence, sa compréhension et son soutien permanents qui m'ont permis de mener à bien mes travaux.

Enfin que tous celles et ceux qui m'ont apporté leur appui trouve ici l'expression de ma gratitude.

Introduction

Depuis plusieurs années, la recherche opérationnelle a été utilisée pour résoudre des problèmes de planification complexes. Un des champs d'application privilégiés des modèles et des techniques de la recherche opérationnelle est celui des transports, particulièrement le trafic routier et le transport en commun. Il est, en effet, souvent essentiel pour la planification à court et à moyen terme d'un système de transport de pouvoir déterminer comment celui-ci se comportera sous certaines conditions. Les modèles d'affectation de trafic, fondés sur le concept d'équilibre, permettent de satisfaire en partie ce besoin.

Un modèle d'affectation de trafic tente de prédire la répartition du flot dans un réseau de transport. Ce modèle joue le rôle d'un simulateur. Il permet de mesurer les conséquences d'une modification future du réseau sur le transport des individus. En général, on souhaite diminuer le temps de transport moyen des individus à l'aide de mesures opérationnelles n'altérant pas la structure physique du réseau (poste de péage par exemple).

Dans le modèle d'affectation classique, on distribue le flot sur des chemins. Un chemin désigne un itinéraire reliant une origine et une destination. Le comportement macroscopique des usagers en fonction des coûts des itinéraires peut se modéliser selon deux principes différents (Wardrop [61]). Le premier principe stipule qu'un usager choisit son chemin de façon à minimiser son coût de transport personnel (comportement "égoïste") et que tous les usagers voyagent sur des chemins de longueur minimale. Le second cherche à minimiser le coût moyen de transport (comportement "coopératif"). Le présent travail porte sur le problème d'équilibre caractérisé par le premier principe de Wardrop.

Une question fondamentale dans un modèle d'affectation de trafic est celle du

traitement de la congestion du système de transport. Il est clair qu'aux heures de pointe, la congestion devient assez importante sur certaines intersections du réseau. Dans ce cas, un usager arrivant à l'entrée d'une route très congestionnée a tendance à emprunter une autre route. La congestion étant un phénomène imprévisible, ce dernier ne connaît pas avec certitude le chemin qu'il utilisera. L'affectation des usagers sur des chemins constitue alors une représentation simplifiée du problème d'équilibre dans un réseau congestionné. Dans un réseau de transport en commun, il est également irréaliste de supposer que le trajet des usagers est déterministe. En effet, le trajet d'un usager qui se présente à un arrêt est stochastique ; il dépend de la probabilité d'accéder au premier autobus se présentant à l'arrêt. Dans ce cas, le comportement de cet usager est représenté à l'aide d'une stratégie qui spécifie un choix de lignes attrayantes aux arrêts d'autobus. La notion de stratégie a été introduite pour la première fois par Spiess [51] dans le contexte de transport en commun. Gendreau [24], Nguyen et Pallottino [42] et Spiess et Florian [52] ont utilisé la même notion dans un contexte semblable. Marcotte et Nguyen [37] ont développé un modèle d'équilibre dans un réseau avec capacités rigides, basé sur une nouvelle définition de stratégie. Dans ce modèle, une stratégie dicte les préférences d'un certain groupe d'usagers à chaque nœud du réseau. Les préférences à un nœud sont représentées par une liste ordonnée de nœuds successeurs.

Dans la première partie de cette thèse, nous proposons un modèle d'affectation statique dans un réseau de transport en commun muni de capacités fixes sur le flot des arcs, dans lequel les usagers utilisent des stratégies pour atteindre leur destination. Ce modèle constitue une extension du modèle de Marcotte et Nguyen au cas où des priorités sont présentes. Ces priorités découlent du fait que les usagers se trouvant déjà à bord d'un autobus d'une ligne donnée ont priorité sur les usagers effectuant des correspondances.

Bien que les modèles statiques, comme celui de Marcotte et Nguyen [37], puissent représenter le problème d'affectation de trafic, ces modèles ne tiennent pas compte des aspects temporels du déplacement des usagers dans le réseau de transport. Pourtant, la planification du système de transport doit tenir compte des variations temporelles de la demande et des flots de véhicules. De nouveaux modèles dynamiques ont été

proposés ces dernières années, basés sur des concepts et descriptions différents du flot dynamique. Ainsi, nous trouvons des modèles en temps discret ou continu avec différentes conditions d'équilibre, différentes définitions de temps de parcours d'un chemin, différentes modélisations de la propagation du flot, etc.

Dans la seconde partie de cette thèse, nous développons un nouveau modèle d'affectation dynamique en temps discret où les usagers adoptent des stratégies pour atteindre leur destination. Dans ce modèle, à chaque période et en chacun des nœuds du réseau, les usagers peuvent ou bien emprunter un arc de transport et continuer leur voyage ou bien attendre la prochaine période dans une file d'attente. Nous appliquons la notion de stratégie sur le réseau espace-temps résultant. Notre but principal est de mettre en œuvre un modèle stratégique d'affectation dynamique, qui tient compte des priorités selon la condition "premier-arrivé premier-parti (PAPP)".

Dans le premier chapitre, nous parcourons la littérature traitant des problèmes d'équilibre statiques et dynamiques dans un réseau de transport. Les trois prochains chapitres portent sur le modèle d'affectation statique avec priorités. Au second chapitre, nous présentons le modèle d'équilibre stratégique qui tient compte des priorités. Le troisième chapitre décrit le processus de chargement du flot dans le réseau, qui détermine les probabilités d'accès aux arcs associées aux stratégies. Le quatrième chapitre traite de la recherche d'un équilibre stratégique. Dans les deux chapitres suivants, nous étudions un nouveau modèle d'affectation dynamique en temps discret. Dans le cinquième chapitre, nous présentons le modèle et décrivons le processus de chargement dynamique du réseau, qui effectue le chargement des volumes stratégiques en respectant la condition PAPP. Enfin, le sixième chapitre est consacré à la recherche d'un équilibre dynamique.

Nous concluons la thèse en mentionnant les avenues de recherche qui peuvent découler du travail accompli dans cette thèse. Nous fournissons aussi à l'annexe A les structures de données utilisées pour représenter les composantes principales de nos modèles.

Chapitre 1

Revue de la littérature

Dans ce chapitre, nous décrivons brièvement la littérature traitant des problèmes d'équilibre statiques et dynamiques dans un réseau de transport. La première section est consacrée aux modèles statiques d'affectation d'équilibre. Notre but étant de développer des modèles fondés sur le concept de stratégie, nous nous intéressons en particulier aux travaux utilisant ce concept. Dans la seconde section, nous passons en revue les modèles d'affectation dynamique.

1.1 Modèles statiques

Les modèles statiques d'affectation tentent de prédire la répartition du flot dans un réseau de transport en ignorant les aspects temporels du déplacement des usagers. Nous divisons les modèles proposés en deux classes, suivant qu'ils tiennent compte ou non de la capacité des véhicules.

1.1.1 Réseaux sans capacités

La plupart des modèles statiques proposés en littérature ne tiennent pas compte des capacités explicites sur les flots d'arcs. D'abord, nous commençons par un survol rapide des modèles d'équilibre de trafic classique. Ensuite, nous présentons les travaux accomplis sur les réseaux de transport en commun.

Modèles d'équilibre de trafic

Le problème d'équilibre de trafic classique consiste à déterminer les choix des chemins des usagers ayant à se déplacer dans un réseau de transport. Ainsi, selon Wardrop, un équilibre de trafic est atteint lorsque les temps de transport sur les chemins utilisés sont tous égaux, et inférieurs aux temps de transport des chemins non utilisés.

La première formulation du problème d'équilibre de trafic avec demande fixe sous forme d'un problème d'optimisation (Beckmann [4]) a permis d'une part d'obtenir des conditions d'existence et d'unicité de solutions d'équilibre en terme de flots sur les arcs, et d'autre part de développer les premières méthodes de résolution du problème d'équilibre. Sheffi [49] discute de nombreuses extensions et variantes de cette formulation impliquant une demande élastique, plusieurs classes d'usagers, des interactions symétriques et asymétriques entre les arcs et le caractère stochastique du choix d'itinéraire.

Par la suite, il a été observé que le problème d'équilibre de trafic correspond au premier principe de Wardrop où tous les usagers voyagent sur des chemins les plus courts. Cette constatation a conduit à une formulation du problème d'affectation de trafic sous forme d'un problème d'inégalité variationnelle comme (Smith [50], Dafermos [11]). Un vecteur de flots sur les chemins x constitue un équilibre de trafic s'il satisfait l'inégalité variationnelle suivante :

$$\begin{aligned} x &\in X \\ \langle F(x), x - y \rangle &\leq 0 \quad \forall y \in X, \end{aligned}$$

où $F(x)$ désigne le vecteur des coûts des chemins du réseau et X est l'ensemble des vecteurs de flots réalisables.

Un survol récent du problème d'équilibre de trafic formulé comme une inégalité variationnelle, de ses applications et des méthodes de calcul est donné par Patriksson [45] et Hearn et Florian [29].

Modèles d'équilibre de transport en commun

Le problème d'équilibre de transport en commun consiste à déterminer, à partir d'un ensemble de demandes de transport et des paramètres de service du système de transport en commun, les itinéraires utilisés par les usagers pour se rendre de leur origine à leur destination et la charge qui en résultera sur les différentes portions des lignes de transport.

Les auteurs des premières études ont cherché à appliquer les modèles classiques développés pour les réseaux de trafic. Dans son algorithme d'affectation des passagers dans les réseaux de transport en commun, Dial [15] a estimé le temps d'attente moyen à un arrêt simple par la moitié de l'intervalle inter-autobus moyen de la ligne qui la dessert. Pour les sections de lignes communes, Dial considère que le temps de parcours est constant et estime le temps d'attente aux arrêts appartenant à ces sections par la moitié de l'inverse de la fréquence combinée des lignes qui les desservent.

Contrairement à Dial qui utilise une représentation arcs-sommets pour le réseau de transport en commun, Le Clercq [34] a recours à une représentation lignes-sommets qui lui permet de résoudre le problème de lignes communes avec élégance. Les usagers qui utilisent des sections de lignes communes sont répartis entre ces lignes proportionnellement aux fréquences respectifs. Bien qu'à première vue, cette approche semble assez différente de celle de Dial, les résultats qu'elles produisent sont équivalents.

Chriqui et Robillard [10] ont défini de manière générale le problème du sous-ensemble optimal de lignes pour les portions de lignes communes. Par la suite, ils ont développé un algorithme de résolution du problème dans le cas où les intervalles inter-autobus sont distribués selon des lois exponentielles. Leur algorithme permet aussi d'obtenir une solution acceptable lorsque les intervalles inter-autobus suivent des distributions autres qu'exponentielles.

Dans sa thèse de doctorat, Hasselström [26] propose une approche heuristique pour déterminer les temps d'attente et les répartitions des usagers entre lignes aux arrêts multiples. Cette approximation heuristique est basée sur une idée de réduction de fréquence pour les lignes moins attrayantes. Selon Hasselström, cette approximation a donné d'excellents résultats en pratique.

Dans les travaux qui ont suivi, les auteurs ont réalisé que le problème de transport

en commun possède ses propres caractéristiques. En effet, bien qu'un usager qui se présente à un arrêt multiple puisse choisir d'y attendre un autobus d'une ligne donnée, d'autres choix s'offrent à lui. Il peut, entre autres, élargir son choix à un sous-ensemble de lignes et prendre la première place disponible sur l'une de celles-ci.

Spiess [51] a été le premier à mettre en lumière la différence qui existe entre un chemin élémentaire et une *stratégie* du point de vue de l'utilisateur d'un réseau de transport en commun. À chaque arrêt, un usager a le choix entre plusieurs lignes et itinéraires pour atteindre sa destination. Le comportement des usagers est caractérisé, à chaque nœud atteignable du réseau, par un ensemble de *lignes attrayantes*. L'utilisateur monte toujours à bord du premier autobus se présentant à l'arrêt. Spiess développe un modèle d'arrêt général, où les arrêts peuvent être desservis par plusieurs lignes dont les trajets peuvent diverger puis, il détaille le cas particulier où les intervalles des autobus des différentes lignes sont distribués selon des lois exponentielles.

Indépendamment, Gendreau [24] développe un modèle d'équilibre dans un réseau de transport en commun en utilisant la notion de stratégie. Gendreau définit un sous-modèle d'arrêt multiple qui permet de calculer de manière approchée la répartition des usagers entre les lignes attrayantes ainsi que leur temps d'attente. L'auteur effectue une série de simulations qui fournissent des résultats satisfaisants pour les arrêts assez achalandés.

En se basant sur les deux modèles précédents, Nguyen et Pallottino [42] formulent le problème d'affectation d'équilibre dans un cadre formel en introduisant le concept d'*hyperchemin*. À cause de l'importance de ce concept, nous le présentons avec plus de détails. Un hyperchemin k joignant une origine q à une destination r est défini par un sous-graphe acyclique $H^k = (N^k, E^k)$, où $E^k = \cup_{i \in N^k} \{(i, j) : j \in E_{ik}^+\}$ et chaque nœud $i \in N^k$ est relié à la destination r . Pour chaque nœud $i \in N^k$, E_{ik}^+ identifie le sous-ensemble de lignes attrayantes associé à l'hyperchemin k . On définit, pour chaque hyperchemin h et pour chaque nœud i , la probabilité π_{ij}^k d'accéder au nœud j ($j \in E_{ik}^+$) à partir du nœud i . Si l'on dénote par P^k l'ensemble de tous les chemins joignant l'origine q et la destination r , la probabilité qu'un usager utilise un chemin

p de l'hyperchemin k est donnée comme suit :

$$\kappa_p^k = \prod_{(i,j) \in p} \pi_{ij}^k. \quad (1.1)$$

En plus des coûts aux arcs c_{ij} , on peut associer un coût au nœud i (w_i^k). Le *coût d'un chemin* est simplement la somme des coûts des arcs et des sommets formant ce chemin :

$$c^k = \sum_{(i,j) \in p} c_{ij} + \sum_{i \in p} w_i^k. \quad (1.2)$$

Le *coût de l'hyperchemin k* est défini comme la somme pondérée des coûts de tous les chemins élémentaires que contient cet hyperchemin :

$$C^k = \sum_{p \in P^k} \kappa_p^k \left(\sum_{(i,j) \in p} c_{ij} + \sum_{i \in p} w_i^k \right). \quad (1.3)$$

ou d'une façon alternative :

$$C^k = \sum_{(i,j) \in A} \alpha_{ij}^k c_{ij} + \sum_{j \in N} \tau_j^k w_j^k, \quad (1.4)$$

où les probabilités aux nœuds τ_j^k et les probabilités aux arcs α_{ij}^k sont définies par

$$\tau_j^k = \sum_{i \in N} \tau_i^k \pi_{ij}^k,$$

$$\alpha_{ij}^k = \tau_i^k \pi_{ij}^k.$$

Nguyen et Pallottino [42] et Spiess et Florian [52] proposent un modèle de fréquence pour le calcul des coûts aux nœuds w_j^k . Ces coûts aux nœuds sont associés au temps moyen d'attente au nœud j , correspondant à l'hyperchemin k . Les probabilités d'accès π_{ij}^k sont directement proportionnelles aux probabilités que l'autobus associé au nœud $j \in E_{ik}^+$ soit le premier à arriver à l'arrêt i parmi ceux inclus dans l'ensemble E_{ik}^+ . Le temps moyen d'attente des passagers adoptant l'hyperchemin k est inversement proportionnel à la fréquence des lignes qui forment l'ensemble des lignes attrayantes

E_{ik}^+ . Le modèle de fréquence est défini par les deux équations :

$$\begin{aligned}\pi_{ij}^k &= f_j / \sum_{l \in E_{ik}^+} f_l \quad \forall j \in E_{ik}^+, \\ w_j^k &= a / \sum_{i \in E_{jk}^+} f_i,\end{aligned}\tag{1.5}$$

où f_j est la fréquence de la ligne de transport associée au nœud $j \in E_{ik}^+$, et a est un paramètre positif. À partir de ce modèle de fréquence, les auteurs ont formulé le modèle d'affectation de transport en commun dans l'espace des flots sur les hyperchemins en supposant qu'à l'équilibre, tous les passagers adoptent les hyperchemins les plus courts pour se rendre de leur origine à leur destination. Le calcul des plus courts hyperchemins est obtenu par un algorithme efficace décrit dans Nguyen et Pallottino [43]. Un vecteur de flots sur les hyperchemins h^* est un vecteur d'équilibre s'il satisfait l'inégalité variationnelle :

$$\langle C(v^*), v - v^* \rangle + \langle z, h - h^* \rangle \geq 0 \quad \forall h \in \Omega,\tag{1.6}$$

où le vecteur des coûts aux arcs $C(v) = \{c_{ij}(v)\}_{(i,j) \in E}$ dépend du flot pour tenir compte de la congestion, le vecteur des coûts aux nœuds $z = \{\sum_{i \in N} \tau_i^k w_i^k\}$ est constant et Ω désigne l'ensemble des flots sur les hyperchemins réalisables.

Wu [58] et Wu, Florian et Marcotte [60] modifient le modèle de Nguyen et Pallottino [42] en ajoutant des coûts d'attente additionnels $w_{ij}(v)$ pour les arcs d'accès du réseau. Les auteurs développent différents algorithmes de résolution basés sur la méthode classique de Jacobi linéarisé et la méthode de projection.

Bouzaïene-Ayari, Gendreau et Nguyen [6] et Bouzaïene-Ayari [7] développent un modèle d'affectation de passagers dans un réseau de transport en commun. Dans ce modèle, les temps d'attente des passagers dépendent du flot ainsi que des fréquences et des capacités d'autobus. La probabilité d'accès à un autobus dépend du flot et est définie par :

$$\pi_{ij}^k(v) = \frac{w_j(v)^{-1}}{\sum_{l \in E_{ik}^+} w_l(v)^{-1}},\tag{1.7}$$

où $w_j(v)$ dénote le temps d'attente moyen associé à l'autobus indexé par j . Ce modèle mène à une formulation inéquation variationnelle-point fixe :

$$\langle C(v^*), v - v^* \rangle + \langle z(v^*), h - h^* \rangle \geq 0 \quad \forall h \in \Omega, \quad (1.8)$$

$$v_{ij} = \sum_q \sum_r \sum_k \alpha_{ij}^k(v) h^k \quad \forall (i, j) \in A, \quad (1.9)$$

pour laquelle un algorithme qui résout une suite d'inéquations variationnelles paramétrisées a été conçu. La difficulté de cette formulation réside sur la nature de la fonction de coût. Outre qu'elle n'est pas monotone, son calcul n'est pas un processus trivial ce qui complique considérablement l'étude du modèle d'équilibre.

1.1.2 Réseaux avec capacités rigides

Dans cette sous-section, nous nous intéressons au problème général d'équilibre dans un réseau de transport, avec des capacités explicites sur les flots d'arcs. Dans les modèles de la sous-section précédente, les effets de congestion étaient représentés à l'aide des fonctions de coût ou bien les fonctions d'attente se trouvaient à jouer le rôle de contraintes de capacités implicites comme dans le modèle de Gendreau [24]. Si nous introduisons des contraintes de capacités dans le modèle, nous ne sommes plus assurés de l'existence d'un équilibre au sens de Wardrop. En effet, un chemin ne peut pas être utilisé si un plus court chemin non saturé est présent. Deux approches ont été envisagées afin de modéliser les capacités. La première est une approche duale considérée par Hearn [27] et Patriksson [45]. La seconde, basée sur les stratégies, est due à Marcotte et Nguyen [37].

Approche duale

Hearn [27] et Patriksson [45] généralisent le principe de Wardrop en ajoutant au coût d'arc saturé la variable duale associée à sa contrainte de capacité. Les auteurs interprètent la variable duale associée à un arc saturé comme un temps d'attente attribué à la congestion de cet arc. Ferrari ([19], [20]) développe un modèle semblable à celui de Hearn et Patriksson, et établit l'existence d'une solution d'équilibre qui

satisfait les contraintes de capacités. L’auteur présente une procédure itérative pour le calcul de la solution d’équilibre et le vecteur dual associé.

Larsson et Patriksson [32] proposent la méthode duale lagrangienne pour résoudre le problème d’équilibre avec capacités, où ils résolvent le sous-problème d’équilibre sans capacités avec l’algorithme de décomposition simpliciale. Les auteurs présentent une implantation de cet algorithme et fournissent des résultats numériques illustrant la performance de cette approche. Toutefois, l’utilisation des délais d’attente dans le modèle d’affectation d’équilibre demeure controversée. En effet, ce processus implicite n’est pas décrit mathématiquement, bien que sa validité ait été justifiée à l’aide du concept des “files d’attente verticales” (Daganzo [14]).

Modèles de transport en commun interurbain

Nguyen, Pallottino et Malucelli [44] développent un modèle d’affectation de passagers dans un réseau de transport en commun avec priorités qui tient compte simultanément du choix d’itinéraire et de l’heure de départ. Ils introduisent la notion de capacité disponible pour modéliser l’accès au réseau selon la discipline PAPP. La capacité disponible à un arrêt tient compte d’abord des usagers qui sont déjà à bord et ensuite de l’ordre d’arrivée des usagers à l’arrêt. Nguyen et al. présentent deux formulations pour ce modèle. La première utilise explicitement la contrainte de capacité. La seconde repose sur l’approche de pénalité. Si la capacité disponible est dépassée, on ajoute des coûts de pénalité supplémentaires. Cette dernière approche mène à une formulation variationnelle d’un problème d’affectation d’équilibre pour laquelle une procédure de résolution a été suggérée. Les résultats numériques indiquent que la solution d’équilibre diffère de celle obtenue par l’approche standard de Hearn [27] et Patriksson [45]. Ceci explique la complexité de cette approche due aux fonctions de pénalité asymétriques associées aux arcs d’accès.

Marcotte et Nguyen [37] fournissent un nouveau modèle d’équilibre dans des réseaux avec capacités avec des coûts d’arc constants et sans priorités. Les auteurs introduisent une nouvelle définition de stratégie du point de vue des usagers du réseau avec capacités rigides. Une stratégie dicte, en chacun des nœuds du réseau, un ordre de préférences parmi les nœuds successeurs. Celle-ci doit proposer un arc de déviation

lorsque le premier choix correspond à un arc de capacité finie. Un chemin utilisé dépend de probabilités d'accès aux arcs, elles mêmes fonctions des flots affectés aux stratégies. Le coût d'une stratégie est défini comme l'espérance du coût du chemin utilisé. Une affectation du flot aux stratégies satisfait aux conditions d'équilibre si aucun usager ne peut réduire son coût espéré en modifiant sa stratégie. Ces conditions d'équilibre constituent une extension du principe de Wardrop au modèle avec stratégies et peuvent se formuler sous forme d'un problème d'inégalité variationnelle. Les probabilités d'accès aux arcs dérivent d'un processus de chargement du flot dans le réseau. Ce processus de chargement effectue une simulation déterministe du cheminement du flot depuis les origines jusqu'aux destinations. Les auteurs considèrent deux hypothèses physiques décrivant le chargement du flot à un nœud unique. La première impose la formation d'une file d'attente unique tandis que la seconde prescrit la formation de files d'attente distinctes (chargement parallèle). Ils montrent que la fonction calculant les coûts des stratégies n'est ni différentiable ni monotone sous les deux hypothèses de chargement. Dans le cas de chargement parallèle, cette fonction n'est même pas toujours continue. Malgré l'absence des bonnes propriétés mathématiques de la fonction de coût, Schoeb [48] et Marcotte, Nguyen et Schoeb [38] développent des algorithmes efficaces pour la résolution de ce modèle. Les résultats obtenus montrent que ce modèle stratégique est soluble numériquement.

1.2 Modèles dynamiques

Bien que les modèles statiques puissent être utilisés pour les études de planification à long terme, il y a plusieurs limitations dans l'application de ces modèles puisqu'ils ne tiennent pas compte de la variation dans le temps de la demande en transport. Nous nous penchons dans cette section sur la composante principale des modèles d'affectation dynamique du trafic qui est le problème de chargement dynamique du réseau. Les modèles de chargement dynamique permettent de reproduire les mouvements des usagers dans le réseau une fois que les choix de chemins reliant les origines aux destinations et les demandes temporelles associées à chacun de ces chemins sont connus. Nous présentons une revue de deux principales classes de ces modèles en prêtant une attention particulière sur la règle PAPP que devraient satis-

faire les modèles réalistes. Cependant, nous verrons que plusieurs modèles n'arrivent pas à garantir la condition PAPP.

1.2.1 Modèles de simulation

La première catégorie de modèles dynamiques étudie l'évolution temporelle des charges présentes sur les arcs dans un système de transport. Ces modèles tentent de résoudre le problème de chargement dynamique en simulant les ajustements des choix d'heure de départ et de chemin des usagers en réponse à la congestion dans le réseau. Les méthodes de résolution proposées sont essentiellement basées sur la simulation pour décrire les choix des usagers et utilisent les interactions entre les véhicules pour mesurer la performance du réseau. Nous pouvons diviser ces modèles en deux groupes : modèles microscopiques et modèles macroscopiques.

Modèles microscopiques

Dans le cas de simulation microscopique, les interactions entre les véhicules sont modélisées avec un niveau élevé de détails, par exemple, le changement de voies, l'interaction entre deux voitures qui se suivent. Ces modèles supposent que le comportement d'un véhicule est fonction des conditions du trafic dans son environnement. Parmi ces modèles, nous retrouvons les logiciels commerciaux INTEGRATION [54], AIMSUN2 [3] et TRANSIMS [41].

Daganzo [12] a fait remarquer que les hypothèses de ces modèles sont difficiles à valider, car le comportement humain dans le trafic réel est difficile à observer et à mesurer. Ceci est un point important car, pour qu'une simulation soit valide, les hypothèses microscopiques doivent être justes puisqu'ils peuvent affecter le comportement macroscopique de façon imprévisible (Daganzo [13]). Il faut noter que le haut niveau de détail de tels modèles leur permet de bien reproduire le débordement des files d'attente. Toutefois, pour ceux qui utilisent ce type de modèles, le calibrage s'avère une tâche ardue. Aussi, leur utilisation requiert des ressources informatiques importantes, ce qui peut s'avérer trop coûteux dans le cas de réseaux de tailles moyenne et grande.

Modèles macroscopiques

Dans l'approche de simulation macroscopique, les véhicules sont regroupés en paquets et leurs interactions sont modélisées d'une façon plus agrégée. La plupart de ces modèles s'inspirent de la théorie hydrodynamique du flot énoncée au milieu du siècle par Lighthill et Whitham [35] et Richards [46]. Considérons les variables suivantes :

q : le flot passant par un point donné par unité de temps.

k : la densité représentant le nombre de véhicules par unité de distance.

ν : la vitesse à un point donné.

x : la position.

t : le temps.

Ces derniers modèles utilisent d'une part la relation fondamentale vitesse-flot-densité :

$$q = \nu k$$

D'autre part, ils sont basés sur le principe de conservation des véhicules qui établit que durant un intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$, la variation dans le nombre de véhicules sur une tranche de route donnée $[x, x + \Delta x]$ est égale à la différence entre le nombre de véhicules entrants et sortants de cette même tranche de route. Ce principe peut être exprimé à l'aide de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial k(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} = 0$$

Les approches de type macroscopique utilisent des méthodes numériques pour résoudre les équations différentielles partielles proposées dans les modèles de Lighthill et Whitham [35] et de Richards [46].

Daganzo [13] propose un modèle macroscopique de transmission de cellules basé sur le concept qu'un véhicule à un point spatio-temporel est affecté seulement par les conditions au voisinage de ce point. Velan [55] a implanté ce modèle dans un programme de simulation appelé CellNetLoad. Ce programme a été utilisé pour résoudre le problème de chargement dynamique dans un corridor de déplacement sur une autoroute unidirectionnelle reliée à une artère parallèle par le moyen de bretelles d'accès

et de sortie. Ce modèle de transmission de cellules n'a pas la structure nécessaire pour modéliser explicitement les retards causés par les changements de voie et les mouvements opposés permis aux carrefours.

Les modèles macroscopiques ne sont pas parfaits vu qu'ils utilisent, entre autres, des relations d'état stable. Toutefois, les modèles de transmission de cellules développés par Daganzo [13] et Velan [55] étaient des premières tentatives dans le but d'obtenir un modèle tout à fait opérationnel.

1.2.2 Modèles analytiques

La seconde catégorie de modèles d'affectation dynamique regroupe les modèles analytiques qui consistent à généraliser dans le contexte dynamique les conditions d'équilibre statique définies par Wardrop. Les modèles de cette catégorie permettent de déterminer les charges temporelles d'arcs selon ces conditions.

Dans cette classe de modèles, chaque arc a possède, en général, les caractéristiques suivantes :

- Le flot entrant $u_a(t)$.
- Le flot sortant $w_a(t)$.
- Le nombre d'utilisateurs $x_a(t)$ sur l'arc a .

Modèles basés sur les fonctions de sortie

La première formulation d'un modèle dynamique est due à Merchant et Nemhauser [39], [40] qui proposent un modèle discret permettant de formuler le problème d'affectation dynamique comme un problème d'optimisation non linéaire et non convexe. Pour décrire la propagation du flot, ils utilisent une fonction de flot de sortie pour chaque arc, $W(x(t))$, qui détermine le nombre de véhicules qui sort d'un arc à une période donnée en fonction du nombre de véhicules présents dans l'arc au début de la période.

À cause des difficultés provenant de la non-convexité du modèle, Carey [8] propose un modèle similaire mais convexe. Carey [9] généralise le modèle pour plusieurs destinations et commodités et ajoute plusieurs classes de contraintes pour assurer la condition PAPP.

Wie et al. ([56], [57]) ont proposé les deux formulations suivantes pour la fonction de sortie W :

$$W(x(t)) = \xi \cdot x(t)$$

$$W(x(t)) = C^{out} \cdot (1 - e^{-\frac{x(t)}{\xi}}),$$

où ξ est une constante positive invariante avec le temps et C^{out} est la capacité sur le flot sortant de l'arc en question.

Drissi-Kaïtouni et Gendreau [17] proposent une formulation discrète du problème de chargement dynamique. Les usagers sont forcés de suivre un ordre de sortie des arcs pour respecter la condition PAPP. Le temps est divisé en intervalles de même longueur. Les auteurs proposent une procédure qui consiste à faire circuler le flot des origines aux destinations à chaque période de temps.

Astarita [1] a relevé à l'aide d'un exemple numérique quelques faiblesses des modèles utilisant les fonctions de sortie. Il note, entre autres, que le temps de parcours est nul pour les arcs vides avec une vitesse infinie de propagation du flot. Pour les arcs qui sont en train de se décharger, le dernier usager est condamné à rester éternellement sur l'arc avec un temps de parcours infini. Il a remarqué que, puisque le flot entrant dans un arc est immédiatement ajouté à tous les usagers déjà sur cet arc, les résultats obtenus semblent montrer que le futur affecte le présent (le temps de parcours de l'utilisateur entrant dans l'arc dépend du futur flot entrant). Finalement, Astarita a aussi fait remarquer que la condition PAPP sur les arcs n'est pas garantie.

Modèles basés sur des réseaux espace-temps

Les modèles présentés dans cette sous-section ont été conçus pour résoudre le problème d'affectation dynamique en temps discret et sont basés sur des modèles développés pour le problème du flot maximal dynamique par Ford et Fulkerson [21]. Dans ce modèle, chaque arc a admet une capacité d'entrée limitée C_a et un temps fixe τ_a pour le traverser. À chaque période et en chacun des nœuds du réseau, les usagers peuvent ou emprunter un arc incident et continuer leur voyage ou attendre la prochaine période dans une file d'attente. Le réseau espace-temps résultant est construit comme suit :

- chaque nœud $n \in N$ est étendu en $(M + 1)$ nœuds $n_t, t = 0, 1, \dots, T$
- chaque arc $a \in A$ est étendu en $T + 1 - \tau_a$ arcs $(j_t, k_{t+\tau_a})$ tel que $t + c_a \leq T$. Ces arcs sont nommés arcs de transport. Le temps d'attente aux nœuds est représenté au moyen des arcs (j_t, j_{t+1}) où $t = 0, 1, \dots, T - 1$; Ces arcs sont appelés arcs d'attente.

Zawack et Thompson [62] adaptent ce modèle au problème d'affectation dynamique avec une seule destination. Ils ajoutent une contrainte de capacité sur les files d'attente aux nœuds du réseau. Les auteurs minimisent le coût total de transport de tout le système en formulant le problème d'affectation dynamique comme un problème de flot à coût minimum avec capacités sur les arcs. Ils proposent deux méthodes de résolution basées sur les algorithmes de flot à coût minimum et des plus courts chemins.

Drissi-Kaïtouni et Hamed-Bencheikroun [16] présentent un modèle discret pour le problème d'affectation dynamique à destinations multiples où les files d'attente sont plutôt incorporés sur les arcs. Ainsi à chaque période, le nombre d'utilisateurs qui peuvent accéder à un arc plus les utilisateurs qui se trouvent déjà dans la file d'attente de cet arc de la période antérieure, sont bornés par la capacité totale de l'arc en question. Drissi-Kaïtouni et Hamed-Bencheikroun suggèrent l'algorithme de Frank et Wolfe pour résoudre ce modèle. Un inconvénient de ce modèle est que la condition PAPP n'est pas nécessairement vérifiée.

Modèles basés sur les fonctions de temps sur les arcs

Enfin, nous complétons la revue de la littérature en présentant les modèles basés sur la fonction de délai $s(t)$. Cette fonction détermine le temps de déplacement de l'utilisateur entrant dans l'arc à l'instant t .

Friesz et al. [23] présentent une formulation pour le problème de chargement défini comme un système d'équations fonctionnelles :

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= u(t) - w(t) \\ s(t) &= T(x(t)). \end{aligned}$$

Les auteurs montrent que si la fonction T est linéaire, la condition de FIFO sur les arcs est toujours vérifiée.

Fernandez et de Cea [18] proposent plutôt le modèle de chargement suivant :

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= u(t) - w(t) \\ s(t) &= T(x(t)) \\ w(t + s(t)) &= \frac{x(t)}{s(t)}.\end{aligned}$$

La dernière équation était une tentative de trouver une relation explicite entre le flot sortant $w(t)$ et la fonction de délai $s(t)$. Toutefois, avec cette formulation, le modèle ne pouvait pas garantir la condition PAPP ni même la conservation du flot des véhicules à l'intérieur des arcs.

Astarita [1] présente une façon d'établir le flot sortant $w(t)$ en respectant la condition de FIFO. La fonction de sortie dépend de la fonction de délai $s(t)$ et du flot entrant $u(t)$:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= u(t) - w(t) \\ s(t) &= T(x(t)) \\ w(t + s(t)) &= \frac{u(t)}{1 + \frac{ds(t)}{dt}}.\end{aligned}$$

Astarita démontre que la dernière équation est une condition suffisante et nécessaire pour satisfaire la condition PAPP. À l'aide d'un exemple numérique, l'auteur montre que son modèle peut simuler une file d'attente résultant d'un goulot d'étranglement et ce, sans l'ajout de contraintes additionnelles. Cependant, son modèle ainsi que tous les modèles précédents ne reproduisent pas les débordements des files d'attente.

Dans sa thèse de doctorat, Rubio-Ardanaz [47] développe un modèle continu pour le problème de chargement dynamique avec capacités limitées sur les arcs. Pour représenter adéquatement le phénomène de débordement vers l'arrière ("spill-back"), il utilise le concept de demande et disponibilité locales pour déterminer la quantité de flot sur le point d'entrer ou de sortir dans chaque arc. Rubio-Ardanaz propose un algorithme de résolution et fournit des exemples numériques.

1.3 Conclusion

Au terme de cette revue des modèles d'affectation d'équilibre, il nous paraît important de porter un jugement global sur les travaux qui ont été fait sur le sujet jusqu'à maintenant. Dans le cas statique, on constate qu'il y a relativement peu de modèles qui tiennent compte de la capacité des véhicules. Si l'on pouvait vraiment négliger les priorités, le modèle de Marcotte et Nguyen [37] décrirait d'une manière adéquate le comportement des usagers dans un réseau avec capacités rigides. Il faut rendre crédit à ces auteurs pour leur formulation du problème en termes de stratégies. Dans la première partie de notre travail, nous développons un modèle similaire mais qui tient compte explicitement des priorités.

Concernant les modèles dynamiques, on remarque que les modèles de simulation résolvent le problème de chargement en simulant les interactions entre les véhicules pour mesurer la performance du réseau. Pour les modèles analytiques, les auteurs essayent de généraliser dans le contexte dynamique les conditions d'équilibre définies par Wardrop. Les modèles utilisant les fonctions de sortie comme (Drissi-Kaïtouni et Gendreau [17]) relèvent quelques faiblesses comme l'a mentionné Astarita [1]. Parmi ces faiblesses, on note que le temps de parcours est nul pour les arcs vides avec une vitesse infinie de propagation du flot. Pour les modèles basés sur des réseaux espace-temps comme (Zawack et Thompson [62]), les auteurs représentent le problème d'affectation dynamique en temps discret comme un problème d'affectation statique dans un réseau élargi espace-temps. Toutefois, dans tous ces modèles, la condition PAPP n'est pas nécessairement vérifiée. Finalement, notons que tous les modèles basés sur les fonctions de temps sur les arcs ne reproduisent pas les débordements des files d'attente à l'exception du modèle de Rubio-Ardanaz [47] qui représente le phénomène de débordement vers l'arrière en utilisant le concept de demande et disponibilité locales.

Partie 1

**MODÈLE D'AFFECTATION STATIQUE AVEC
PRIORITÉS**

Chapitre 2

Présentation du modèle

Dans la première partie de cette thèse, nous nous intéressons au problème d'affectation statique dans un réseau de transport en commun muni de capacités fixes sur le flot des arcs, dans lequel le transport des usagers est représenté à l'aide du concept de stratégie. Le modèle proposé constitue une extension du modèle d'équilibre stratégique introduit par Marcotte et Nguyen [37], au cas où des **priorités** sont présentes. Ces priorités, qui surviennent fréquemment en réalité, découlent du fait que les usagers se trouvant à l'intérieur d'un autobus dans un nœud de transfert conservent leur place. Elles induisent des complexités théoriques et algorithmiques notamment au niveau du "chargement du réseau" qui constitue le sujet du prochain chapitre. Dans la première section de ce chapitre, nous considérons un exemple de faible taille à partir duquel nous illustrons le concept de priorité dans un réseau de transport en commun. La seconde section traite de la formulation mathématique du modèle. Cette formulation est identique à celle du modèle sans priorités de Marcotte et Nguyen. L'originalité de notre modèle repose sur l'hypothèse que l'accès aux arcs congestionnés est soumis à des priorités.

2.1 Un réseau de transport en commun

Considérons le réseau de transport en commun représenté par le graphe de la figure 2.1. Ce réseau comprend 5 nœuds et 7 arcs. À chaque arc du réseau sont associés un coût et une capacité fixes (tableau 2.1); 15 unités de flot circulent de l'origine 1 à la destination 5. À la figure 2.1, les chemins 1 – 3 et 2 – 3 – 5 correspondent à deux

lignes d'autobus *A* et *B* de capacités fixes égales à 10 et les autres arcs désignent des voies piétonnes de capacités infinies.

arc	coût	capacité
(1, 3)	100	10
(1, 2)	150	∞
(2, 3)	110	10
(2, 5)	800	∞
(3, 4)	200	∞
(3, 5)	120	10
(4, 5)	400	∞

TAB. 2.1 – Description des paramètres du réseau 1

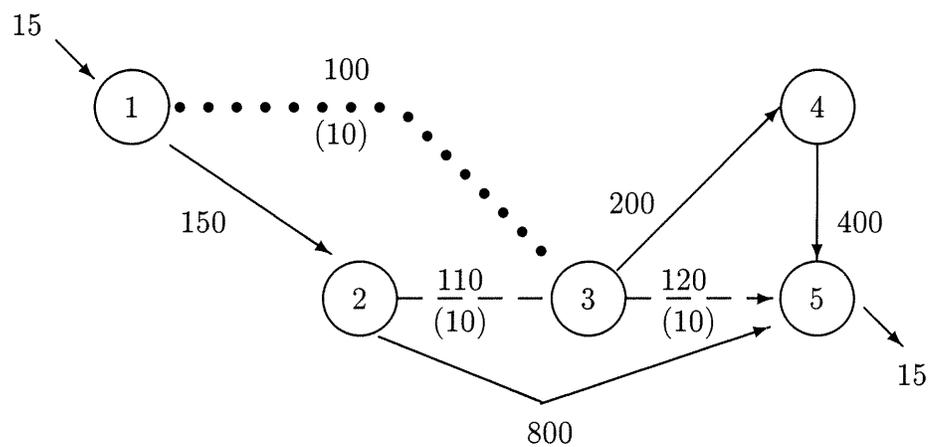


FIG. 2.1 – Réseau 1

Dans le modèle d'affectation classique, on répartit le flot sur les chemins. Dans le réseau 1, nous avons 5 chemins reliant le nœud 1 au nœud 5. Ces chemins sont classés, suivant l'ordre croissant de leur coût au tableau 2.2. Notons par x_i le flot affecté au

étiquette	chemin	coût	capacité
1	1-3-5	220	10
2	1-2-3-5	380	10
3	1-3-4-5	700	10
4	1-2-3-4-5	860	10
5	1-2-5	950	∞

TAB. 2.2 – Description des chemins du réseau 1

chemin i ($1 \leq i \leq 5$). Les conditions définissant les flots de chemin réalisables sont :

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 15 && \text{satisfaction de la demande} \\
 x_1 + x_3 &\leq 10 \\
 x_2 + x_4 &\leq 10 && \text{contraintes de capacités} \\
 x_1 + x_2 &\leq 10 \\
 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 && \text{non-négativité du flot}
 \end{aligned}$$

Dans un premier temps, nous essayons de trouver un équilibre sans tenir compte des priorités. À cause des contraintes de capacités, l'existence d'un équilibre au sens de Wardrop n'est pas assuré pour notre exemple. Nous adoptons un principe d'équilibre plus faible. À l'équilibre, *aucun usager ne peut améliorer son coût de transport en changeant unilatéralement pour un autre chemin de capacité résiduelle non nulle.*

Pour trouver une affectation d'équilibre, nous utilisons l'approche duale proposée par Larsson et Patriksson [32]. On trouve d'abord un vecteur de flot de chemin réalisable minimisant le coût total des usagers :

$$\min_x \{220x_1 + 380x_2 + 700x_3 + 860x_4 + 950x_5\}.$$

La solution unique de ce problème de programmation linéaire est $x^* = (10, 0, 0, 5, 0)$, obtenue par exemple par l'algorithme du simplexe. Ensuite, on ajoute au coût d'un

arc saturé la variable duale associée à sa contrainte de capacité, soit 640 pour les deux arcs (1, 3) et (3, 5). Les nouveaux coûts de transport que nous obtenons satisfont aux conditions de Wardrop. En effet, les coûts de transport sur les deux chemins utilisés 1 et 4 sont maintenant tous égaux à 860.

Maintenant, si nous tenons compte des *priorités* dans notre exemple, la solution $x^* = (10, 0, 0, 5, 0)$ n'est plus un vecteur d'équilibre. En effet, un siège occupé au nœud 3 par un usager ayant effectué un transfert de la ligne A à la ligne B est maintenant *admissible* pour l'usager qui abordera l'autobus de la ligne B au nœud 2. Par conséquent, un usager empruntant le chemin 4 peut améliorer son coût de transport en changeant pour le chemin 2 et empêcherait ainsi un usager utilisant le chemin 1 de monter à bord au nœud 3, ce qui va à l'encontre de la définition d'équilibre. Ceci a amené des auteurs comme Nguyen, Pallottino et Malucelli [44] à introduire une nouvelle définition d'équilibre dans des réseaux avec priorités. Ces auteurs proposent un nouveau concept fondé sur la *capacité disponible* qui joue le rôle de capacité résiduelle dans le cas sans priorités.

La *capacité résiduelle* d'un arc de transport $a = (i, j)$ est définie comme :

$$r_{ij} = u_{ij} - y_{ij} = u_{ij} - \sum_{k=1}^n y_{i_k j},$$

où u_{ij} est la capacité de l'arc (i, j) et $S^-(j) = \{(i_1, j), (i_2, j), \dots, (i_n, j)\}$ désigne l'ensemble des arcs de transfert incidents au nœud j , ordonné suivant les temps d'arrivée au nœud j .

La *capacité disponible* d'un arc de transfert $(i_m, j) \in S^-(j)$ est définie comme :

$$q_{i_m j} = u_a - \sum_{k=1}^n y_{i_k j}.$$

Si l'on définit les capacités résiduelle et disponible d'un chemin p comme $R_p = \min\{r_a : a \in p\}$ et $Q_p = \min\{q_a : a \in p\}$, il est facile à démontrer que $R_p \leq Q_p, \forall p$. Ainsi, un chemin saturé (de capacité résiduelle nulle) peut avoir une capacité disponible positive. Dans notre exemple du réseau 1, avec le vecteur $x^* = (10, 0, 0, 5, 0)$, les capacités résiduelles et disponibles des 5 chemins sont :

chemin	1	2	3	4	5
capacité résiduelle	0	0	0	5	∞
capacité disponible	0	5	0	5	∞

Par conséquent, un nouvel usager empruntant le chemin 2 pourrait repousser un usager utilisant le chemin 1 au chemin 2 ou au chemin 4.

En utilisant ce nouveau concept de capacité disponible, Nguyen, Pallottino et Malucelli [44] adaptent la définition d'équilibre pour tenir compte des priorités. *À l'équilibre, il n'existe pas de chemin de capacité disponible non nulle dont le coût est inférieur au coût d'un chemin utilisé.* Avec cette définition, le nouveau vecteur d'équilibre pour notre exemple est $x^{**} = (0, 10, 5, 0, 0)$. Notons que, contrairement au cas sans priorités, les deux chemins utilisés ici ne correspondent pas aux chemins les plus courts. Comme dans l'approche duale de Larsson et Patriksson, les auteurs ajoutent au coût d'un arc de capacité disponible nulle la variable duale associée à sa contrainte de capacité. Dans notre exemple, cette variable duale est égale à 320 pour les deux arcs (2, 3) et (3, 5) et le coût de transport à l'équilibre décroît de 18% (860 à 700).

Maintenant, étudions ce même problème d'affectation sous un angle différent. En pratique, aucun individu n'accepte d'utiliser les chemins sous-optimaux tel que 1 – 2 – 3 – 4 – 5. Les individus appréhendent toutefois la congestion de l'arc (3, 5) et par conséquent, la déviation sur l'arc (3, 4). Dans ce contexte, le trajet d'un individu est *stochastique*; il dépend de la probabilité d'accès à l'arc (3, 5). L'hypothèse de comportement suivant laquelle un usager peut modifier son chemin en fonction des conditions locales (flot et capacité) du réseau constitue une *stratégie*. Si le flot souhaitant accéder à un arc excède sa capacité, l'on définit une probabilité d'accès à cet arc; cette probabilité est proportionnelle à la capacité de l'arc et inversement proportionnelle au flot d'entrée. Lorsque x unités de flot tendent d'accéder à un arc dont la capacité est u , on fait l'hypothèse que la probabilité d'accès est égale à :

$$\min\left\{1, \frac{u}{x}\right\}.$$

Un usager n'ayant pu accéder à un arc saturé doit reporter son choix sur un second

arc, puis éventuellement sur un troisième, etc. Une stratégie correspondra dans ce cas, en chaque nœud du réseau, à un ordre de préférences sur les arcs incidents au nœud considéré. Les préférences à un nœud sont représentées par une liste ordonnée de nœuds successeurs. Voici un exemple d'une stratégie pour les usagers du réseau 1 :

nœuds :	1	2	3	4	5
s_1 :	[2]	[3, 5]	[5, 4]	[5]	[]

Au nœud d'origine 2, l'utilisateur adoptant la stratégie s_1 préfère emprunter l'arc (2, 3) plutôt que l'arc (2, 5). Au nœud 3, il favorise l'accès au nœud 5 par rapport à celui au nœud 4, etc. On remarque que cette stratégie propose un arc de marche de capacité infinie lorsque le premier choix correspond à un arc de transport de capacité finie. L'utilisateur a la possibilité de changer de chemin lorsqu'un arc préféré devient saturé. Dans le tableau 2.3, on retrouve un échantillon de stratégies associées au réseau 1. Les crochets vides correspondent aux nœuds terminaux. Un nœud terminal est soit une destination (nœud 5 dans l'exemple) soit un nœud qui ne pourrait être visité étant donné les préférences associés.

nœuds :	1	2	3	4	5
s_1 :	[2]	[3, 5]	[5, 4]	[5]	[]
s_2 :	[3, 2]	[3, 5]	[5, 4]	[5]	[]
s_3 :	[3]	[3, 5]	[5, 4]	[5]	[]
s_4 :	[2]	[3]	[5, 4]	[5]	[]
s_5 :	[2, 3]	[3, 5]	[5, 4]	[5]	[]
s_6 :	[3, 2]	[3, 5]	[4, 5]	[5]	[]
s_7 :	[3, 2]	[5]	[]	[]	[]
s_8 :	[2]	[5, 3]	[5, 4]	[5]	[]

TAB. 2.3 – Échantillon de stratégies pour le réseau 1

Le calcul du coût d'une stratégie est un processus non trivial. Contrairement au modèle classique, le trajet d'un usager dans le réseau n'est pas déterministe. L'adoption d'une stratégie mène à différentes possibilités de chemins. Le trajet d'un usager dépend des *probabilités d'accès aux arcs*. Ces probabilités sont calculées à partir du

dépend des *probabilités d'accès aux arcs*. Ces probabilités sont calculées à partir du flot affecté aux stratégies. À l'aide de celles-ci, on obtient (pour une certaine stratégie) la probabilité qu'un chemin soit utilisé. Le coût d'une stratégie est la somme pondérée des coûts des chemins formant cette stratégie.

Afin de simplifier la recherche d'un équilibre, nous éliminons plusieurs stratégies. On rejette les stratégies s_3 et s_4 car leurs sélections ne garantissent pas l'atteinte de la destination 5. Par exemple, la stratégie s_3 ne propose aucun arc de marche lorsque l'arc (1, 3) devient saturé. Certaines stratégies sont dominées par d'autres au niveau des coûts de transport. Par exemple, la stratégie s_6 est dominée par s_2 car indépendamment des valeurs de flots, le coût de la stratégie s_2 est moindre que celui de s_6 . Un raisonnement semblable s'applique aux stratégies s_7 et s_8 qui sont respectivement dominées par s_2 et s_1 . Finalement, on rejette aussi la stratégie s_5 qui est équivalente à s_2 . Par conséquent, nous ne conservons que les deux stratégies intéressantes, s_1 et s_2 .

Nous recherchons tout d'abord une affectation d'équilibre stratégique en ignorant les priorités. Une affectation de flots aux stratégies satisfait aux conditions d'équilibre de Wardrop lorsque *toutes les stratégies utilisées ont un coût identique, ce coût étant inférieur ou égal aux coûts des stratégies non utilisées*. Dénotons par π_{13}, π_{23} et π_{35} les probabilités d'accès respectives aux arcs (1, 3), (2, 3) et (3, 5) pour un usager du réseau 1. Si l'on désigne par x_i le flot de la stratégie s_i ($i = 1, 2$), les probabilités π_{13}, π_{23} et π_{35} sont données comme suit :

$$\begin{aligned}\pi_{13} &= \frac{\text{capacité de l'arc (1, 2)}}{\text{flot entrant}} = \min\left\{1, \frac{10}{x_2}\right\}, \\ \pi_{23} &= \frac{\text{capacité de l'arc (2, 3)}}{\text{flot entrant}} = \min\left\{1, \frac{10}{x_1 + (1 - \pi_{13})x_2}\right\}, \\ \pi_{35} &= \frac{\text{capacité de l'arc (3, 5)}}{\text{flot entrant}} = \min\left\{1, \frac{10}{\pi_{23}x_1 + (\pi_{13} + (1 - \pi_{13})\pi_{23})x_2}\right\}.\end{aligned}$$

Les coûts des stratégies s_1 et s_2 , notés C_1 et C_2 s'expriment comme suit :

$$C_1 = 150 + \pi_{23}(110 + \pi_{35}(120) + (1 - \pi_{35})(200 + 400)) + (1 - \pi_{23})(800), \quad (2.1)$$

$$C_2 = \pi_{13}(100 + \pi_{35}(120) + (1 - \pi_{35})(200 + 400)) + (1 - \pi_{13})C_1. \quad (2.2)$$

Nous avons trois cas qui peuvent se produire à l'équilibre : (1) les deux stratégies sont utilisées, (2) la stratégie s_1 est la seule utilisée et (3) la stratégie s_2 est la seule utilisée. Le premier cas ne peut se produire car on peut montrer qu'il n'existe pas de couples (x_1, x_2) correspondant à l'égalité des coûts stratégiques C_1 et C_2 donnés par les équations (2.1) et (2.2). Dans le cas 2, nous avons $x_1 = 15$ et $x_2 = 0$, ce qui implique que $\pi_{13} = 1$, $\pi_{23} = \frac{10}{15}$ et $\pi_{35} = 1$. En remplaçant ces valeurs dans les équations (2.1) et (2.2), nous obtenons :

$$C_1 = 150 + \frac{10}{15}(110 + 120) + \frac{5}{15}(800) = 420,$$

$$C_2 = 100 + 120 = 220.$$

On observe que la stratégie non utilisée a un coût inférieur à celui de la stratégie utilisée. Il est clair que cette situation ne constitue pas un équilibre. Par conséquent, la stratégie s_2 est la seule utilisée à l'équilibre (cas 3). Dans ce cas, $x_1 = 0$ et $x_2 = 15$, ce qui donne : $\pi_{13} = \frac{10}{15}$, $\pi_{23} = 1$ et $\pi_{35} = \frac{10}{15}$. Après substitution de ces valeurs dans les équations (2.1) et (2.2), nous obtenons :

$$C_1 = 150 + 110 + \frac{10}{15}(120) + \frac{5}{15}(200 + 400)$$

$$= 540,$$

$$C_2 = \frac{10}{15}(100 + \frac{10}{15}(120) + \frac{5}{15}(200 + 400)) + \frac{5}{15}(540)$$

$$= 433\frac{1}{3}.$$

Étant donné que $C_2 < C_1$ et que $x_1 = 0$, ce cas constitue un équilibre et l'affectation de flot $x^* = (x_1^*, x_2^*) = (0, 15)$ est la solution unique du problème d'équilibre sans priorités dans le réseau 1. Le coût espéré de transport à l'équilibre est alors de $433\frac{1}{3}$.

Maintenant, la situation est totalement différente lorsqu'on tient compte des priorités. Il est clair par la topologie du réseau 1 que les usagers montant à bord de l'autobus de la ligne B au nœud 2 et empruntant l'arc (2, 3) peuvent toujours accéder à l'arc (3, 5) en restant à bord. Ainsi, le groupe d'usagers empruntant la ligne d'autobus B au nœud 3 a priorité sur celui utilisant l'arc (1, 3) pour accéder à l'arc (3, 5)

de capacité finie. On dit alors que le flot stratégique au nœud 3 impliquant le premier groupe d'utilisateurs est *prioritaire* par rapport au second pour s'engager sur l'arc (3, 5). Nous devons donc tenir compte de cette notion de flot prioritaire pour le calcul des probabilités d'accès. Considérons l'exemple du réseau 1. À l'origine 1, x_1 unités de flot de s_1 veulent emprunter l'arc (1, 2) et x_2 unités de flot de s_2 préfèrent accéder au nœud 3. Puisque la capacité de l'arc de transport (1, 3) est 10 et que l'arc (1, 2) supporte un flot infini, il résulte que les probabilités d'accès aux arcs (1, 2) et (1, 3) sont respectivement 1 (associée à la stratégie s_1) et $\pi_{13} = \min\{1, \frac{10}{x_2}\}$ (associée à s_2). Au nœud 2, on observe x_1 unités de flot de s_1 et $(1 - \pi_{13})x_2$ unités de flot de s_2 qui favorisent l'accès au nœud 3. La probabilité d'accès à l'arc (2, 3) (pour les deux stratégies s_1 et s_2) est $\pi_{23} = \min\{1, \frac{10}{x_1 + (1 - \pi_{13})x_2}\}$ car ce dernier arc a une capacité de 10. Au nœud 3, on retrouve respectivement $\pi_{23}[x_1 + (1 - \pi_{13})x_2]$ et $\pi_{13}x_2$ unités de flot en provenance des arcs (2, 3) et (1, 3). À cause des priorités, le premier groupe d'utilisateurs est prioritaire par rapport au second pour l'accès à l'arc (3, 5) de capacité 10. Pour respecter cette priorité, nous devons charger en premier le flot stratégique prioritaire impliquant seulement la première classe d'utilisateurs. Ainsi, la probabilité d'accès pour cette première classe, notée $\pi_{35}^{(1)}$, est égale à la capacité de l'arc (3, 5) divisée par le flot stratégique prioritaire :

$$\pi_{35}^{(1)} = \min\left\{1, \frac{10}{\pi_{23}(x_1 + (1 - \pi_{13})x_2)}\right\}$$

Ensuite, on met à jour la capacité résiduelle de l'arc (3, 5) ($\bar{u}_{35} = 10$) qui devient $\bar{u}_{35} = 10 - \pi_{35}^{(1)} \cdot [x_1 + (1 - \pi_{13})x_2]$. Si $\bar{u}_{35} = 0$, tous les usagers de la seconde classe n'ont d'autre choix que d'emprunter l'arc de déviation (3, 4) pour atteindre la destination 5. Par contre, si $\bar{u}_{35} > 0$ alors $\pi_{13}x_2$ unités de flot de cette seconde classe tentent d'accéder à l'arc (3, 5) de capacité résiduelle non nulle. Par conséquent, la probabilité d'accès des usagers de la seconde classe, notée $\pi_{35}^{(2)}$, est donnée comme suit :

$$\pi_{35}^{(2)} = \begin{cases} 0 & \text{si } \bar{u}_{35} = 0 \\ \min\left\{1, \frac{\bar{u}_{35}}{\pi_{13}x_2}\right\} & \text{si } \bar{u}_{35} > 0. \end{cases}$$

Signalons un cas dégénéré causé par la nullité simultanée de la capacité résiduelle et du flot stratégique. Dans ce cas, les probabilités d'accès aux arcs sont indéfinies. La question qui se pose : Quelle valeur de probabilité π_{jk}^s devons-nous associer au triplet (j, k, s) satisfaisant cette condition ? Nous reviendrons sur ce point important au prochain chapitre.

Maintenant, à l'aide des probabilités d'accès π_{13} , π_{23} , $\pi_{35}^{(1)}$ et $\pi_{35}^{(2)}$, les coûts des stratégies s_1 et s_2 prennent la forme suivante :

$$C_1 = 150 + \pi_{23}(110 + \pi_{35}^{(1)}(120) + (1 - \pi_{35}^{(1)})(200 + 400)) + (1 - \pi_{23})(800), \quad (2.3)$$

$$C_2 = \pi_{13}(100 + \pi_{35}^{(2)}(120) + (1 - \pi_{35}^{(2)})(200 + 400)) + (1 - \pi_{13})C_1. \quad (2.4)$$

Comme dans le cas sans priorités, le cas où les deux stratégies sont utilisées ne peut pas se produire à l'équilibre. Traitons tout d'abord le cas où la stratégie s_2 est la seule utilisée. Dans ce cas, $x_1 = 0$ et $x_2 = 15$, il résulte que $\pi_{13} = \frac{10}{15}$, $\pi_{23} = 1$, $\pi_{35}^{(1)} = 1$ et $\pi_{35}^{(2)} = \frac{1}{2}$. Après substitution de ces valeurs dans les équations (2.3) et (2.4), nous obtenons :

$$C_1 = 150 + 110 + 120 = 380,$$

$$C_2 = \frac{10}{15}(100 + 60 + 300) + \frac{5}{15}(380) = 433\frac{1}{3}.$$

Étant donné que $C_2 > C_1$, l'affectation de flot $(x_1, x_2) = (0, 15)$ ne correspond pas à un équilibre de Wardrop. Considérons maintenant le cas où la stratégie s_1 est la seule utilisée, ce cas correspond aux flots stratégiques $x_1 = 15$ et $x_2 = 0$, ce qui implique que $\pi_{13} = 1$, $\pi_{23} = \frac{10}{15}$, $\pi_{35}^{(1)} = 1$ et $\pi_{35}^{(2)} = 0$. En remplaçant ces valeurs dans les équations (2.3) et (2.4), nous obtenons :

$$C_1 = 150 + \frac{10}{15}(110 + 120) + \frac{5}{15}(800) = 570,$$

$$C_2 = 100 + 200 + 400 = 700.$$

On observe que la stratégie utilisée a un coût inférieur à celui de la stratégie non utilisée. Il est clair que le vecteur $(x_1, x_2) = (15, 0)$ constitue l'unique solution du

problème d'équilibre avec priorités dans le réseau 1. Le coût de transport à l'équilibre est de 570. Remarquons que le coût de transport croît par rapport au coût obtenu dans le cas sans priorités.

L'étude de cet exemple met clairement en évidence la différence qui existe entre les deux modèles stratégiques, avec et sans priorités. Sur le plan de la modélisation, l'approche avec priorités décrit le comportement des usagers de façon plus réaliste. Sur le plan mathématique, on obtient une formulation des conditions d'équilibre où le calcul de la fonction de coût tient compte implicitement des priorités.

2.2 Formulation mathématique

Dans cette section, nous donnons une description détaillée de notre modèle stratégique, où nous mettons en évidence la notion d'équilibre stratégique. Nous terminons cette section par la formulation des conditions d'équilibre sous forme d'une inégalité variationnelle.

2.2.1 Modélisation statique

Dans sa nature, le problème d'affectation d'équilibre est essentiellement **dynamique** : les usagers quittent leur origine à un moment précis dans le temps, et cela influe sur le reste de leurs déplacements. Dans cette première partie de la thèse, nous développons un modèle **statique** où les variables de décision sont des **flots** sur les stratégies du réseau, exprimés en usagers/période. Ce modèle détermine l'état moyen du système de transport en commun dans la période d'intérêt (heure de pointe), c'est à dire la charge moyenne d'usagers sur les différentes portions du réseau et les coûts moyens de transport par stratégie entre les origines et les destinations.

2.2.2 Réseau avec capacités rigides

De manière générale, on représente le **réseau de transport en commun** par un graphe orienté $G = (N, A)$ et par un ensemble de **lignes de transport** $L = \{L_1, L_2, \dots, L_l\}$. Les ensembles N et A contiennent respectivement les **nœuds** et les **arcs** du graphe. Une hypothèse importante imposée sur le graphe G est l'absence

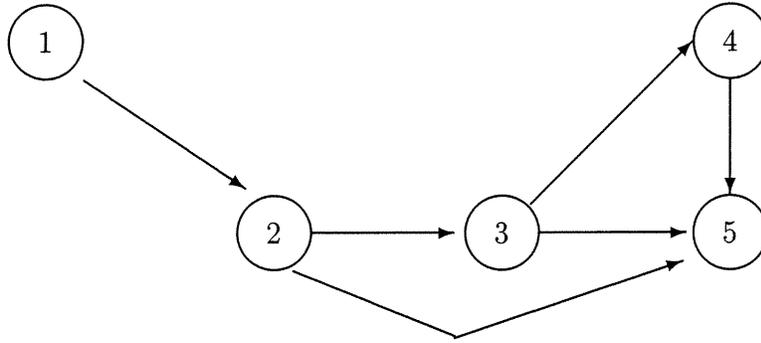
de circuit (un circuit est un chemin dont le premier et le dernier nœud coïncident). Cette hypothèse est essentielle au bon déroulement du processus du chargement du réseau, comme nous le verrons au prochain chapitre. Les nœuds du graphe topologique G sont étiquetés de 1 à $|N|$ de manière à ce que l'étiquette d'un nœud soit toujours supérieure à celles de ses nœuds prédécesseurs. On associe l'étiquette 1 à un nœud sans prédécesseur (il doit en exister au moins un puisque le graphe G ne contient pas de circuits). Le réseau 1 représenté par le graphe de la figure 2.1 constitue un étiquetage valide. Chaque arc a du graphe est désigné par un couple (j, k) où j et k sont les nœuds de départ et d'arrivée de l'arc a . Chaque ligne de transport L_i ($1 \leq i \leq l$) représente une séquence de sections de ligne. Une section de ligne désigne un arc de transport reliant deux nœuds consécutifs sur une même ligne et représentant un déplacement à bord d'un autobus.

À chaque arc du réseau sont associés un **coût** et une **capacité** fixes. On dénote par c_{ij} et u_{ij} le coût et la capacité associés à l'arc (i, j) . On donne la valeur $+\infty$ à la capacité d'un arc de marche qui n'appartient pas à une ligne de transport du réseau.

Le flot circule depuis les nœuds **origines** vers les nœuds **destinations**. On note respectivement O et D l'ensemble des origines et l'ensemble des destinations du réseau. Une **paire origine-destination** (ou paire O - D) est un couple $(q, r) \in O \times D$ tel que l'origine q et la destination r sont reliées par au moins un chemin élémentaire. On dénote I l'ensemble des paires O - D du réseau. Enfin, à chaque paire $(q, r) \in I$ est associé une **demande** fixe et positive d_{qr} .

2.2.3 Stratégies

On suppose que chaque usager du réseau choisit une stratégie pour son déplacement. Une **stratégie** est une fonction qui associe à chaque nœud j du réseau un sous-ensemble ordonné de ses nœuds successeurs. On note j^+ l'ensemble des nœuds successeurs de j et E_j l'ensemble de tous les sous-ensembles ordonnés de j^+ . Ainsi, une stratégie s associe à chaque nœud $j \in N$ un élément E_j^s de l'ensemble E_j . On appelle E_j^s l'**ordre de préférences** associé à la stratégie s au nœud j . Chaque stratégie s est associée à une paire O - D $(q(s), r(s)) \in I$. On dénote par $H(s) = (N^s, A^s)$

FIG. 2.2 – Le graphe stratégique de s_1 dans le réseau 1

le **graphe stratégique** induit par la stratégie s . Ce graphe est un sous-graphe de G dont l'ensemble A^s s'écrit sous la forme $\cup_{j \in N^s} \{(j, k) \in A : k \in E_j^s\}$ et chaque nœud j de l'ensemble N^s est relié à la destination $r(s)$. La figure 2.2 illustre le graphe stratégique induit par la stratégie s_1 dans le réseau 1. On note P^s l'ensemble des chemins élémentaires reliant l'origine $q(s)$ à la destination $r(s)$ dans le graphe $H(s)$. L'ensemble des stratégies qui sont associés à la paire $O-D$ (q, r) est dénoté par S_{qr} . L'ensemble de toutes les stratégies du réseau est défini alors :

$$S = \bigcup_{(q,r) \in I} S_{qr}.$$

Nous verrons plus loin qu'il est possible en pratique de réduire significativement la taille de l'ensemble S .

2.2.4 Flot et coût stratégiques

Un vecteur de **flots stratégiques** est un vecteur de la forme $x = \{x_s\}_{s \in S}$ où x_s dénote le flot attribué à la stratégie s . Un vecteur de flots stratégiques est *réalisable* s'il satisfait aux deux conditions suivantes :

$$x_s \geq 0 \quad \forall s \in S;$$

$$\sum_{s \in S_{qr}} x_s = d_{qr} \quad \forall (q, r) \in I.$$

La première contrainte assure la non-négativité des flots stratégiques tandis que la seconde garantit la satisfaction des demandes associées aux paires $O-D$. On note par X

l'ensemble des vecteurs de flots stratégiques réalisables. Remarquons que cet ensemble possède une structure polyédrale que l'on peut exploiter au niveau algorithmique.

Le coût d'une stratégie s dépend directement des **probabilités d'accès aux arcs** : $\pi_{jk}^s ((j, k) \in A)$; π_{jk}^s est la probabilité d'accéder au nœud k à partir du nœud j en utilisant la stratégie s . Ces probabilités sont calculables à l'aide du processus de chargement du réseau et doivent tenir compte des flots prioritaires. Nous décrivons ce processus en détail au prochain chapitre.

Soit x un vecteur de flots stratégique réalisable. Si l'on suppose que les probabilités d'accès $\pi_{jk}^s(x)$ ($k \in E_j^s$) sont connues pour une stratégie s , le coût de la stratégie s est défini comme l'espérance du coût des chemins utilisés. La probabilité qu'un usager adoptant la stratégie s utilise un chemin $p \in P^s$ est donnée comme suit :

$$\kappa_p^s(x) = \prod_{(j,k) \in p} \pi_{jk}^s(x). \quad (2.5)$$

Le coût d'un chemin p est simplement la somme des coûts des arcs formant ce chemin :

$$C^p = \sum_{(j,k) \in p} c_{jk}. \quad (2.6)$$

Le **coût de la stratégie** s (ou coût stratégique) est défini comme la somme pondérée des coûts de tous les chemins élémentaires de l'ensemble P^s :

$$C^s(x) = \sum_{p \in P^s} \kappa_p^s(x) C^p. \quad (2.7)$$

Cette définition est inutilisable en pratique car le nombre de chemins dans l'ensemble P^s est exponentiel en $|N^s|$. Cependant, on peut calculer efficacement les coûts stratégiques à l'aide des probabilités d'accès aux nœuds τ_j^s . Ces probabilités sont calculées récursivement à partir des probabilités d'accès aux arcs $\pi_{jk}^s(x)$:

$$\tau_j^s(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \notin N^s \\ 1 & \text{si } j = q(s) \\ \sum_{k \in j^-} \tau_k^s(x) \pi_{kj}^s(x) & \text{si } j \in N^s \setminus \{q(s)\}. \end{cases} \quad (2.8)$$

Nous obtenons alors une définition alternative du coût stratégique :

$$C^s(x) = \sum_{(j,k) \in A^s} \tau_j^s(x) \pi_{jk}^s(x) c_{jk}. \quad (2.9)$$

On constate que le calcul du coût de la stratégie s est dans l'ordre exact du nombre d'arcs ($C^s \in \Theta(A^s)$) lorsque l'on connaît les probabilités π_{jk}^s .

2.2.5 Élimination de stratégies

Bien que le nombre de stratégies possibles est de beaucoup supérieur au nombre de chemins élémentaires dans le réseau, nous pouvons éliminer trois types de stratégies de l'ensemble stratégique S .

Stratégie inadmissible

Une stratégie s est dite **admissible** si pour tout vecteur de flots réalisable la probabilité d'atteindre la destination $r(s)$ est 1. Autrement dit :

$$s \in S_{qr} \text{ est admissible} \Leftrightarrow \forall x \in X \quad \tau_r^s(x) = 1.$$

Par opposition, une stratégie s est **inadmissible** s'il existe un vecteur de flot pour lequel les usagers adoptant cette stratégie ne sont pas assurés d'atteindre la destination $r(s)$. Mathématiquement, cette condition s'exprime comme suit :

$$s \text{ est inadmissible} \Leftrightarrow \exists x \in X, \exists j \in N^s : \sum_{k \in j^+} \pi_{jk}^s(x) < 1.$$

On garantit l'admissibilité d'une stratégie en s'assurant que chacun de ses ordres de préférences contienne un arc de coût élevé ("arc de marche") de capacité infinie.

Stratégie dominée

Une stratégie s est dite **dominée** par une stratégie s' si le coût de s est toujours plus grand ou égal à celui de s' , et strictement supérieur pour au moins un vecteur de flots réalisable :

$$s \text{ est dominée par } s' \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in X & C^s(x) \geq C^{s'}(x) \\ \exists x \in X & C^s(x) > C^{s'}(x). \end{cases}$$

L'utilisateur qui minimise son coût de transport n'a pas avantage à adopter une stratégie dominée. Il est donc naturel d'exclure ce type de stratégies de l'ensemble S .

Stratégie équivalente

Deux stratégies sont **équivalentes** si elles ont des coûts égaux pour tout vecteur de flots réalisable :

$$s \text{ est équivalente à } s' \Leftrightarrow \forall x \in X \quad C^s(x) = C^{s'}(x).$$

En général, des stratégies équivalentes expriment une information redondante. Par exemple, la stratégie s_5 du réseau 1 contient essentiellement la même information que la stratégie s_2 . Parmi une classe de stratégies équivalentes, on considère une seule stratégie qui fait appel au plus petit nombre d'arcs.

2.2.6 Conditions d'équilibre

Un vecteur de flots stratégiques réalisable $x^* \in X$ est un **vecteur d'équilibre stratégique** si, par rapport au vecteur de probabilités $\{\pi_{jk}^s(x^*)\}_{s \in \mathcal{S}}$, aucun usager ne peut réduire son coût espéré en modifiant unilatéralement sa stratégie. En d'autres termes, pour chaque paire $O-D$, les coûts des stratégies utilisées sont tous égaux, et inférieurs aux coûts des stratégies non utilisées. Formellement, le vecteur x^* satisfait le système de complémentarité généralisé :

$$\forall (q, r) \in I, \quad \exists \mu_{qr} : \begin{cases} C^s(x^*) \geq \mu_{qr} & \forall s \in S_{qr} \\ x_s^*(C^s(x^*) - \mu_{qr}) = 0 & \forall s \in S_{qr}. \end{cases} \quad (2.10)$$

Notons que ces conditions constituent une extension du concept classique d'équilibre de Wardrop aux réseaux avec capacités, en utilisant la notion de stratégie. Les conditions d'équilibre (2.10) peuvent être formulées de manière équivalente à l'aide de l'inégalité variationnelle $IV(C, X)$:

$$\langle C(x^*), x^* - x \rangle \leq 0 \quad \forall x \in X, \quad (2.11)$$

où $C = \{C^s\}_{s \in \mathcal{S}}$ désigne la fonction de coût stratégique définie sur X . On note X^* l'ensemble des solutions de cette inégalité variationnelle.

Chapitre 3

Chargement du réseau

Au chapitre précédent, nous avons défini le coût d'une stratégie à l'aide des probabilités d'accès aux arcs. Dans ce chapitre, nous expliquons comment calculer ces dernières probabilités à partir d'un vecteur de flots stratégiques. Le processus de calcul des probabilités π_{jk}^s constitue le **chargement du réseau**. Ce processus effectue une simulation déterministe du cheminement du flot depuis les origines jusqu'aux destinations en adoptant la discipline correspondant à une **file d'attente unique** à chaque nœud du réseau. Les coûts de transport ne pourront être évalués qu'une fois cet algorithme de chargement est exécuté. L'originalité de notre algorithme est fondée sur les **priorités** que nous devons tenir compte pour le calcul de ces probabilités.

Dans la première section, nous introduisons la notion de flot prioritaire et décrivons le déroulement du mécanisme de chargement à un nœud j du réseau. À la seconde section, nous présentons l'algorithme de chargement. Cet algorithme calcule les probabilités d'accès $\pi_{jk}^s(x)$ et les coûts stratégiques $C^s(x)$ induits par un vecteur de flots stratégiques x . Finalement, à la troisième section, nous démontrons l'existence d'une solution d'équilibre du modèle stratégique. Ce résultat fondamental constitue une des contributions importantes de cette thèse.

3.1 Mécanisme de chargement

Le mécanisme de chargement simule, à partir de règles déterministes, le cheminement du flot stratégique dans le réseau de transport. Cette simulation consiste à charger les nœuds itérativement afin de dériver les flots stratégiques aux arcs, notés

v_{jk}^s , en fonction des flots stratégiques aux nœuds, notés z_j^s . Le processus débute aux nœuds origines, pour lesquels on connaît les flots stratégiques initiaux. On charge ensuite les autres nœuds suivant l'ordre topologique du réseau. Après le chargement d'un nœud j , on obtient les probabilités d'accès π_{jk}^s à partir de la formule :

$$\pi_{jk}^s = \frac{v_{jk}^s}{z_j^s} \quad \forall s \in S, \forall k \in E_j^s, \quad (3.1)$$

formule qui n'est valide que pour les flots stratégiques positifs.

Maintenant, concentrons-nous sur le chargement à un nœud j du réseau. Pour traiter les priorités, nous considérons seulement **deux classes** d'usagers où la première classe regroupe tous les usagers qui sont à bord d'un autobus d'une ligne donnée. Naturellement, la première classe est **prioritaire** par rapport à la seconde pour s'engager sur l'arc reliant le nœud j au nœud successeur appartenant à cette ligne d'autobus. Mais comment tenir compte des priorités pour effectuer le chargement au nœud j ? Cette question nous amène à définir rigoureusement la notion de flot prioritaire.

3.1.1 Flot prioritaire

Considérons une stratégie s ayant un flot non nul à un nœud j et supposons l'existence d'un nœud $\bar{k} \in j^-$ tel que le triplet $(\bar{k}, j, E_j^s(1))$ appartienne à une ligne de transport L_i ($1 \leq i \leq l$). Il est clair que les usagers montant à bord de l'autobus de la ligne L_i au nœud \bar{k} et empruntant l'arc (\bar{k}, j) peuvent toujours accéder à l'arc $(j, E_j^s(1))$ en restant à bord. Ainsi, la classe d'usagers empruntant la ligne d'autobus L_i a priorité sur celle utilisant un des arcs (k, j) ($k \in j^-, k \neq \bar{k}$) pour accéder à l'arc $(j, E_j^s(1))$. On dit alors que le flot stratégique impliquant la première classe d'usagers, noté z_j^{s1} , est **prioritaire** par rapport au flot z_j^{s2} (impliquant la seconde classe) pour s'engager sur l'arc $(j, E_j^s(1))$.

Maintenant, montrons comment calculer les quantités z_j^{s1} et z_j^{s2} associées à un couple (j, s) . Tout d'abord, on trouve parmi les nœuds prédécesseurs du nœud j , un nœud $\bar{k} \in j^-$ tel que $(\bar{k}, j, E_j^s(1)) \in L_i$. L'absence d'un tel triplet implique qu'il n'existe aucun flot prioritaire au nœud j . Dans ce cas, tout le flot stratégique z_j^s est

non prioritaire. Dans le cas contraire, l'existence d'un nœud \bar{k} (correspondant au flot prioritaire) sépare le flot stratégique z_j^s en deux parties :

$$z_j^s = \sum_{k \in j^-} \pi_{kj}^s z_k^s = \pi_{\bar{k}j}^s z_{\bar{k}}^s + \sum_{k \neq \bar{k}} \pi_{kj}^s z_k^s. \quad (3.2)$$

Puisque les nœuds sont chargés suivant l'ordre topologique du réseau, les probabilités d'accès aux arcs (π_{kj}^s) sont déjà connues pour $k \in j^-$. Ainsi, à partir de la décomposition du flot z_j^s suivant la formule (3.2), nous déduisons que $z_j^{s1} = \pi_{\bar{k}j}^s z_{\bar{k}}^s$ et que $z_j^{s2} = \sum_{k \neq \bar{k}} \pi_{kj}^s z_k^s$.

Le pseudocode suivant calcule, pour un couple (j, s) donné, les flots stratégiques z_j^{s1} et z_j^{s2} .

PROCÉDURE PRIORITÉ (j, s)

```

input :  $j \in N$                                 [nœud]
           $s \in S$                                 [stratégie]
output :  $\{z_j^{s1}\}_{j \in N, s \in S}$             [flot prioritaire]
           $\{z_j^{s2}\}_{j \in N, s \in S}$             [flot non prioritaire]
 $\bar{k} := 0$ 
for  $k \in j^-$  do
  if  $(k, j, E_j^s(1)) \in L_i$  then              [ $1 \leq i \leq l$ ]
     $\bar{k} := k$ 
  endif
endfor
if  $\bar{k} > 0$  then
   $z_j^{s1} = \pi_{\bar{k}j}^s z_{\bar{k}}^s$                     [mise à jour du flot prioritaire]
   $z_j^{s2} = \sum_{k \neq \bar{k}} \pi_{kj}^s z_k^s$         [mise à jour du flot non prioritaire]
  else
     $z_j^{s1} = 0$ 
     $z_j^{s2} = z_j^s$                             [tout le flot  $z_j^s$  est non prioritaire]
  endif

```

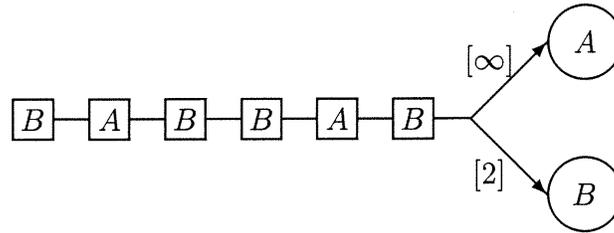


FIG. 3.1 – Illustration d'une file d'attente unique

3.1.2 Chargement à file unique

Le **chargement à file unique** à un nœud est un mécanisme de chargement dans lequel le flot est *distribué uniformément dans une file d'attente unique pour l'accès aux nœuds successeurs*.

Concentrons-nous sur le chargement à un nœud unique j . Pour l'instant nous considérons les stratégies ayant un ordre de préférence non vide et un flot positif au nœud j . À cause des priorités, nous supposons l'existence de deux classes \bar{S}^1 et \bar{S}^2 tel que $\forall i = 1, 2 \quad \bar{S}^i = \{s \in S : E_j^s \neq \emptyset, z_j^{s_i} > 0\} \subset \bar{S} = \{s \in S : E_j^s \neq \emptyset\}$. L'ensemble \bar{S} est appelé ensemble des **stratégies actives** au nœud j . Pour respecter les priorités au nœud j , le chargement est effectué en premier lieu pour la classe prioritaire \bar{S}^1 et ensuite pour la seconde classe \bar{S}^2 . Pour chaque classe \bar{S}^i ($i = 1, 2$), les usagers ont différentes préférences sur les arcs incidents au nœud j . Lorsque x unités de flot tendent d'accéder à un arc dont la capacité résiduelle est μ , on fait l'hypothèse que la probabilité d'accès est la même pour tous et est égale à :

$$\min\{1, \mu/x\}.$$

Si $\mu/x < 1$, alors une proportion $1 - \mu/x$ des usagers de la classe \bar{S}^i ne pourra pas accéder à l'arc, et ceux-ci devront reporter leur choix sur un second arc non saturé.

Pour gérer l'affectation simultanée du flot sur les arcs du réseau, nous considérons l'hypothèse physique imposant la formation d'une file d'attente unique. La figure 3.1 illustre un exemple de chargement à file unique. Dans cet exemple, chaque carré représente une unité de flot. Une unité de flot possède un nœud de préférences, dont

l'étiquette (A ou B) est inscrite au centre de son carré. Ainsi, 4 unités de flots désirent accéder au nœud B tandis que 2 unités de flot préfèrent le nœud A . On suppose que les 3 premières unités de flot sont prioritaires par rapport aux 3 dernières et que l'arc menant au nœud B possède une capacité maximale de 2 unités de flot. On affecte la première unité de flot au nœud B , puis la seconde unité au nœud A et ensuite la troisième unité au nœud B . À ce stade, l'arc menant au nœud B est saturé et le chargement prend fin pour la classe prioritaire. On affecte alors les trois unités de flot résiduelles au nœud A . En résumé, la moitié du flot d'étiquette B accède au nœud B , et tout le reste du flot atteint le nœud A .

Le chargement à file unique à un nœud j est un processus itératif. Pour chaque classe \bar{S}^i ($1 \leq i \leq 2$), on débute une itération par la construction de l'ensemble K . Cet ensemble contient les premiers nœuds des ordres de préférences des stratégies au nœud j . Ensuite on calcule :

$$\beta^i = \min_{k \in K} \left\{ \frac{\bar{u}_{jk}}{d_k} \right\},$$

où d_k est la demande en flot pour le nœud k et \bar{u}_{jk} est la capacité résiduelle de l'arc (j, k) . Si $\beta^i \geq 1$ alors tous les usagers accèdent à leur nœud préféré car $\bar{u}_{jk} \geq d_k$ pour tout $k \in K$. Dans ce cas, le chargement au nœud j se termine pour la classe en question. Par contre, si $\beta^i < 1$ alors on observe la saturation de l'arc (j, \bar{k}) où :

$$\bar{k} \in \arg \min_{k \in K} \left\{ \frac{\bar{u}_{jk}}{d_k} \right\}.$$

La probabilité d'atteindre un nœud préféré est égale à β^i . La capacité résiduelle de l'arc (j, \bar{k}) étant devenue nulle, on élimine le nœud \bar{k} des ordres de préférences des stratégies. Finalement, on met à jour les capacités résiduelles des arcs, les flots stratégiques résiduels au nœud j et les flots stratégiques sur les arcs incidents. Lorsqu'un arc devient saturé, la probabilité d'accès à cet arc est calculée en divisant le flot ayant accédé à cet arc via une stratégie donnée par le flot total de la même stratégie ayant atteint le nœud j .

Expliquons comment le chargement au nœud j (effectué en **deux temps**) fonctionne dans la situation illustrée à la figure 3.2. Dans cet exemple, 40 usagers au

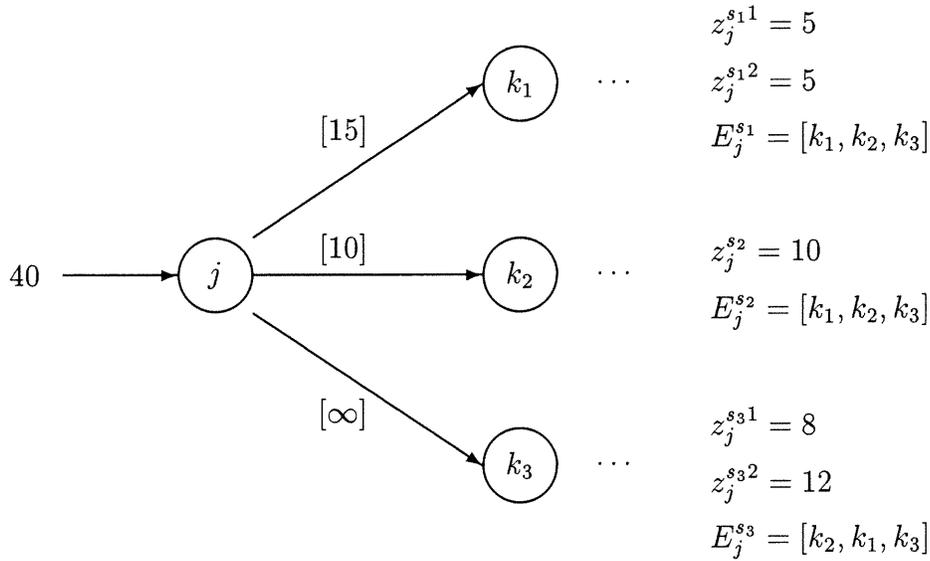


FIG. 3.2 – Chargement au nœud j

nœud j doivent être affectés aux arcs (j, k_1) , (j, k_2) et (j, k_3) , où 5 unités de flot de la stratégie s_1 ($E_j^{s_1} = [k_1, k_2, k_3]$) et 8 unités de flot de la stratégie s_3 ($E_j^{s_3} = [k_2, k_1, k_3]$) ont priorité sur 10 unités de flot de la stratégie s_2 ($E_j^{s_2} = [k_1, k_2, k_3]$), 5 de s_1 et 12 de s_3 . Les capacités des arcs (j, k_1) , (j, k_2) et (j, k_3) sont respectivement 15, 10 et ∞ .

On débute par le chargement de la première classe $\bar{S}^1 = \{s_1, s_3 : z_j^{s_1} = 5, z_j^{s_3} = 8\}$. À la première itération, les 5 unités de flot de s_1 et les 8 unités de s_3 sont affectées à leur nœud préféré car $15 > 5$ et $10 > 8$. On met ensuite à jour les capacités résiduelles des arcs (j, k_1) et (j, k_3) et le chargement prend fin pour la classe \bar{S}^1 . La seconde itération est le début du chargement de la classe $\bar{S}^2 = \{s_1, s_2, s_3 : z_j^{s_1} = 5, z_j^{s_2} = 10, z_j^{s_3} = 12\}$. À cet itération, l'arc (j, k_2) devient saturé puisque nous avons $2/12 < 10/15$. On affecte alors 0.83 unités de flot de s_1 et 1.67 unités de s_2 au nœud k_1 , et 2 unités de flot de s_3 au nœud k_2 . Le nœud k_2 est ensuite éliminé des ordres de préférences $E_j^{s_1}$, $E_j^{s_2}$ et $E_j^{s_3}$. À la troisième itération, 22.5 unités de flot (4.17 de s_1 + 8.33 de s_2 + 10 de s_3) veulent emprunter l'arc (j, k_1) , dont la capacité résiduelle est 7.5. Ainsi, 1.39 unités de flot de s_1 , 2.78 unités de s_2 et 3.33 unités de s_3 accèdent au nœud k_1 . Une quatrième itération est nécessaire pour terminer le chargement du nœud j . Les 15 unités de flots résiduelles au nœud j choisissent alors l'arc (j, k_3) de capacité infinie. Finalement, on calcule les probabilités d'accès aux arcs à partir de la formule (3.1).

Par exemple, nous obtenons $\pi_{jk_1}^{s_1} = 7.22/10$ car parmi 10 unités de flot de s_1 , 7.22 unités utilisent l'arc (j, k_1) . Les résultats du chargement au nœud j sont résumés au tableau 3.1.

	arc :	(j, k_1)	(j, k_2)	(j, k_3)
itération 1	capacité résiduelle :	15	10	∞
	flot :	$5(s_1)$	$8(s_3)$	0
itération 2	capacité résiduelle :	10	2	∞
	flot :	$5.83(s_1)+1.67(s_2)$	$10(s_3)$	0
itération 3	capacité résiduelle :	7.5	0	∞
	flot :	$7.22(s_1)+4.45(s_2)$ $+3.33(s_3)$	$10(s_3)$	0
itération 4	capacité résiduelle :	0	0	∞
	flot :	$7.22(s_1)+4.45(s_2)$ $+3.33(s_3)$	$10(s_3)$	$2.78(s_1)+5.55(s_2)$ $+6.67(s_3)$

$$\begin{aligned} \text{probabilités : } \pi_{jk_1}^{s_1} &= \frac{7.22}{10} & \pi_{jk_1}^{s_2} &= \frac{4.45}{10} & \pi_{jk_1}^{s_3} &= \frac{3.33}{20} & \pi_{jk_2}^{s_3} &= \frac{10}{20} \\ \pi_{jk_3}^{s_1} &= \frac{2.78}{10} & \pi_{jk_3}^{s_2} &= \frac{5.55}{10} & \pi_{jk_3}^{s_3} &= \frac{6.67}{20} \end{aligned}$$

TAB. 3.1 – Résultats du chargement au nœud j

3.1.3 Chargement généralisé

Considérons une stratégie s ayant un flot nul et un ordre de préférences non vide à un nœud j . Dans ce cas, la formule (3.1) ne peut être utilisée pour le calcul des probabilités π_{jk}^s puisque nous aurions une forme indéterminée. Or le calcul de ces probabilités pour une stratégie de flot nul est nécessaire car pour construire une stratégie optimale s^* , on crée un flot virtuel nul associé à s^* et la décomposition de ce flot virtuel doit fournir des probabilités $\pi_{jk}^{s^*}$ tangibles. Voilà pourquoi nous devons étendre le processus de chargement aux flots stratégiques nuls, que nous appelons **micro-chargement**.

Pour chaque classe $\bar{S}^i = \{s \in S : E_j^s \neq \emptyset, z_j^{si} > 0\} \forall i = 1, 2$, introduisons la variable ρ_j^{si} qui désigne la proportion résiduelle du flot z_j^{si} au nœud j . On initialise

cette proportion à 1. À une itération donnée, on associe la stratégie s à un nœud préféré $k \in K$. On calcule ensuite β^i , la proportion résiduelle du flot $z_j^{s_i}$ affectée au nœud k . À partir de cette proportion β^i , on met à jour le flot stratégique résiduel :

$$\bar{z}_j^{s_i} := (1 - \beta^i) \bar{z}_j^{s_i},$$

puis la probabilité d'accès au nœud k :

$$\pi_{jk}^s := \begin{cases} \pi_{jk}^s + \beta^i \frac{\bar{z}_j^{s_i}}{z_j^s} & \text{si } z_j^s > 0 \\ \pi_{jk}^s + \beta^i \rho_j^{s_i} & \text{si } z_j^s = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Finalement, on met à jour la proportion résiduelle de flot :

$$\rho_j^{s_i} := (1 - \beta^i) \rho_j^{s_i}.$$

Ces formules itératives généralisent le calcul des probabilités π_{jk}^s . Le chargement de s s'annule pour la classe \bar{S}^i lorsque $\rho_j^{s_i}$ ou $\bar{z}_j^{s_i}$ s'annule.

Décrivons maintenant le processus de **chargement généralisé** au nœud j . Nous construisons d'abord les classes \bar{S}^1 et \bar{S}^2 à l'aide de la procédure **PRIORITÉ**. Nous associons ensuite la proportion $\rho_j^{s_i}$, initialisée à 1, à chaque stratégie $s \in \bar{S}^i$ ($1 \leq i \leq 2$). Pour chaque classe \bar{S}^i , une itération débute par la construction des ensembles S_k qui regroupent les stratégies $s \in \bar{S}^i$ ayant le nœud k comme premier choix résiduel. Ensuite, on calcule la proportion β^i du flot résiduel qui accède au nœud k , pour chaque stratégie $s \in S_k$. À l'aide de cette dernière variable, la mise à jour des probabilités π_{jk}^s est donnée par la formule (3.3). La mise à jour des autres variables est similaire. On élimine le nœud k de tous les ensembles de préférences résiduels lorsque la capacité résiduelle \bar{u}_{jk} s'annule. Le chargement au nœud j se termine pour la classe \bar{S}^i dès que $\beta^i = 1$.

Signalons un cas dégénéré causé par la nullité de flots stratégiques. Il est possible que durant une itération du chargement, la demande d_k pour un nœud $k \in K$ soit nulle. Ceci est sans conséquence si la capacité résiduelle \bar{u}_{jk} est non nulle. Le rapport \bar{u}_{jk}/d_k (dans la définition de β^i) prend alors la valeur $+\infty$. Dans le cas où la capacité

résiduelle \bar{u}_{jk} est nulle, on est devant une forme indéterminée (0/0). Cette situation particulière peut se produire seulement dans le cas où le chargement prend fin pour la première classe \bar{S}^1 et qu'il existe des usagers de la seconde classe (de flot stratégique nul) qui préfèrent accéder à l'arc saturé (j, k) . Dans ce cas, nous devons éliminer le nœud k de tous les ensembles de préférences résiduels avant d'effectuer le chargement de la seconde classe \bar{S}^2 . Ainsi, nous aurons $\pi_{jk}^s = 0$ pour chaque stratégie s dans l'ensemble S_k .

3.2 Algorithme de chargement

Dans cette section, nous donnons une description détaillée de l'algorithme de chargement. Dans le but de présenter cet algorithme dans un contexte pratique, nous introduisons d'abord la notion d'ensemble de travail stratégique.

3.2.1 Ensemble de travail stratégique

Pour des réseaux non triviaux, il est impossible de connaître toutes les stratégies de l'ensemble S . En pratique, nous considérons un sous-ensemble de S contenant au moins une stratégie pour chaque paire $O-D$. Ce sous-ensemble, noté W , est appelé **ensemble de travail stratégique**. On note W_{qr} l'ensemble de travail associé à la paire $O-D$ (q, r) . Le processus de chargement est restreint aux stratégies incluses dans l'ensemble de travail. Tout ensemble de travail W induit un **domaine de travail stratégique** :

$$X_W = \{x \in X : x_s = 0 \quad \forall s \in S \setminus W\}.$$

L'ensemble X_W est un polyèdre dont les points extrémaux sont aussi des points extrémaux du polyèdre X .

3.2.2 Procédure PCAPLOAD

Le chargement du réseau fournit le vecteur des probabilités $\pi = \{\pi_{jk}^s\}_{(j,k) \in A, s \in W}$ et le vecteur de coûts stratégiques $C = \{C^s\}_{s \in W}$ associés à un vecteur de flots stratégiques $x = \{x_s\}_{s \in W}$. On charge les nœuds suivant l'ordre topologique du réseau.

Le chargement d'un nœud j comprend trois parties. D'abord, on construit l'ensemble des stratégies actives \overline{W} au nœud j ainsi que les deux classes \overline{W}^1 et \overline{W}^2 . Ensuite, vient la phase d'affectation du flot. Cette phase s'effectue en deux étapes successives pour tenir compte des priorités. Chaque étape correspond à une classe \overline{W}^i ($1 \leq i \leq 2$). Enfin, la mise à jour des coûts stratégiques à l'aide de la formule (2.9) termine le chargement au nœud j . Le code suivant décrit l'algorithme de chargement d'un vecteur stratégique x .

PROCÉDURE PCAPLOAD (x)

input : $x = \{x_s\}_{s \in W}$ [vecteur de flots stratégiques]
output : $\pi = \{\pi_{jk}^s(x)\}_{(j,k) \in A, s \in W}$ [probabilités d'accès aux arcs]
 $C = \{C^s(x)\}_{s \in W}$ [vecteur de coûts stratégiques]

INITIALISATION

for $s \in W$ **do**
 $C^s := 0$ [coût de la stratégie s]
 $z_{q(s)}^s := x_s$ [flot à l'origine de s]
 $\tau_{q(s)}^s := 1$ [probabilité d'accès à l'origine de s]
for $j \in N$ ($j \neq q(s)$) **do**
 $z_j^s := 0$ [flot stratégique au nœud j]
 $\tau_j^s := 0$ [probabilité d'accès au nœud j]
for $k \in E_j^s$ **do** avec la stratégie s]
 $v_{jk}^s := 0$ [flot stratégique sur l'arc (j, k)]
 $\pi_{jk}^s := 0$ [probabilité d'accès à l'arc
(j, k) avec la stratégie s]
endfor
endfor
endfor

PHASE D'AFFECTION

for $j \in N$ (dans l'ordre topologique) **do**
 $\overline{W} := \{s \in W : E_j^s \neq \emptyset\}$ [ensemble des stratégies actives]
for $s \in \overline{W}$ **do**

$\bar{E}_j^s := E_j^s$ [ordre de préférences résiduel]
PRIORITÉ(j, s) $\rightarrow z_j^{s1}, z_j^{s2}$ [flot stratégique avec et sans priorité]
endfor
 $\bar{W}^1 := \{s \in \bar{W} : z_j^{s1} > 0\}$ [stratégies actives de flot prioritaire]
 $\bar{W}^2 := \{s \in \bar{W} : z_j^{s2} > 0\}$ [stratégies actives de flot non prioritaire]
for $k \in j^+$ **do**
 $\bar{u}_{jk} := u_{jk}$ [capacité résiduelle de l'arc (j, k)]
endfor
for $i = 1$ **to** 2 **do** [chargement en deux étapes]
for $s \in \bar{W}^i$ **do**
 $\bar{z}_j^{si} := z_j^{si}$ [flot stratégique résiduel]
 $\rho_j^{si} := 1$ [proportion résiduelle du flot stratégique]
endfor
while $\bar{W}^i \neq \emptyset$ **do**
 $K := \emptyset$ [ensemble des premiers choix résiduel]
for $k \in j^+$ **do**
 $d_k := 0$ [demande pour le nœud k]
 $S_k := \emptyset$ [ensemble des stratégies ayant le
nœud k comme premier choix résiduel]
endfor
for $s \in \bar{W}^i$ **do**
 $k := \bar{E}_j^s(1)$ [premier choix résiduel de la stratégie s]
 $K := K \cup \{k\}$ [construction de K]
 $S_k := S_k \cup \{s\}$ [construction de S_k]
 $d_k := d_k + \bar{z}_j^{si}$ [construction de d_k]
endfor
 $\nu := \max\{d_k/\bar{u}_{jk} : k \in K\}$
 $\beta^i := \min\{1/\nu, 1\}$ [proportion de flot résiduel affectée]
for $k \in K$ **do**
for $s \in S_k$ **do**
 $z_k^s := z_k^s + \beta^i \bar{z}_j^{si}$ [mise à jour du flot z_k^s]
 $v_{jk}^s := v_{jk}^s + \beta^i \bar{z}_j^{si}$ [mise à jour du flot d'arc v_{jk}^s]
 $\bar{z}_j^{si} := \bar{z}_j^{si} - \beta^i \bar{z}_j^{si}$ [mise à jour du flot résiduel \bar{z}_j^{si}]

```

if  $z_j^s > 0$  then
     $\pi_{jk}^s := \pi_{jk}^s + \beta^i \frac{z_j^{si}}{z_j^s}$ 
    else [mise à jour de la probabilité  $\pi_{jk}^s$ ]
     $\pi_{jk}^s := \pi_{jk}^s + \beta^i \rho_j^{si}$ 
endif
     $\rho_j^{si} := (1 - \beta^i) \rho_j^{si}$  [mise à jour de la proportion  $\rho_j^{si}$ ]
endfor
 $\bar{u}_{jk} := \bar{u}_{jk} - \beta^i d_k$  [mise à jour de la capacité résiduelle  $\bar{u}_{jk}$ ]
if  $\bar{u}_{jk} = 0$  then
    for  $s \in \bar{W}^1 \cup \bar{W}^2$  do
         $\bar{E}_j^s := \bar{E}_j^s - \{k\}$  [mise à jour de l'ordre résiduel  $\bar{E}_j^s$ ]
    endfor
endif
endfor
if  $\beta^i = 1$  then
     $\bar{W}^i = \emptyset$  [fin du chargement pour  $\bar{W}^i$ ]
endif
endwhile
endfor
for  $s \in W$  do
    for  $k \in E_j^s$  do
         $C^s := C^s + c_{jk} \tau_j^s \pi_{jk}^s$  [mise à jour du coût  $C^s$ ]
         $\tau_k^s := \tau_k^s + \tau_j^s \pi_{jk}^s$  [mise à jour de la probabilité  $\tau_k^s$ ]
    endfor
endfor
endfor

```

Montrons maintenant que la procédure **PCAPLOAD** est de complexité polynomiale en fonction de $|N|$ et $|A|$. La boucle **while** est la partie du code qui détermine l'ordre de l'algorithme. Cette boucle est effectuée au plus deux fois pour tenir compte des priorités. Soit t le nombre d'itérations exécutés par les deux boucles. À chaque tour de boucle, un arc devient saturé, sauf peut-être à la dernière itération de chacune des boucles. Par conséquent, on effectue ces deux boucles au plus $|j^+| + 1$ fois

au nœud j . Nous obtenons alors la majoration suivante :

$$t \leq \sum_{j \in N} (|j^+| + 1) = |A| + |N|,$$

ce qui prouve bien la polynomialité de la procédure de chargement.

3.3 Existence d'un équilibre

Cette section traite du problème d'existence d'une solution de l'inégalité variationnelle $IV(C, X)$. Dans un premier temps, nous démontrons l'existence dans le cas du modèle stratégique sans priorités (Schoeb [48] et Marcotte, Nguyen et Schoeb [38]). Ensuite, nous décrivons l'extension de ce résultat au modèle avec priorités.

3.3.1 Modèle sans priorités

Dans le cas sans priorités, nous utilisons le résultat général suivant : *Si la fonction de coût est continue alors l'ensemble des solutions X^* est non vide* (Border [5]). La continuité de la fonction de coût C découle de la continuité des probabilités d'accès aux arcs $\pi = \{\pi_{jk}^s(x)\}_{(j,k) \in A, s \in W}$. Cette fonction de probabilités $\pi(x)$ s'exprime, pour tout $j \in N$, comme la composition de deux fonctions :

$$\begin{aligned} \pi & : X \xrightarrow{f_j} R^{|\overline{W}|} \xrightarrow{g} [0, 1]^{|E_j^s| \times |\overline{W}|} \\ x & \rightarrow z_j = \{z_j^s\}_{s \in \overline{W}} \rightarrow \{\pi_{jk}^s(z_j)\}_{k \in E_j^s, s \in \overline{W}}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

où $\overline{W} = \{s \in W \mid E_j^s \neq \emptyset\}$ et z est le vecteur de flots stratégiques au nœud j .

Nous démontrons la continuité de la fonction $\pi = g \circ f_j$, en parcourant les nœuds dans l'ordre topologique du réseau. À un nœud j quelconque, nous supposons avoir déjà démontré la continuité de la fonction π aux nœuds prédécesseurs $k \in j^-$. Au nœud j , la fonction π est la composition des deux fonctions f_j et g suivant (3.4). La fonction $f_j(x) = z_j$ étant continue ($z_j^s = \sum_{k \in j^-} \pi_{kj}^s(z_k) z_k^s$ est continue), il nous suffit donc de démontrer la continuité de la fonction g . En d'autres termes, il nous reste à

prouver que :

$$\lim_{z \rightarrow \bar{z}} \pi_{jk}^s(z_j) = \pi_{jk}^s(\bar{z}_j) \quad \forall k \in E_j^s, \forall s \in \bar{W}, \bar{z}_j = (\bar{z}_j^s)_{s \in \bar{W}}, z_j = (z_j^s)_{s \in \bar{W}}$$

Supposons que l'ensemble des nœuds successeurs au nœud j est de la forme $j^+ = \{k_1, k_2, \dots, k_l\}$. Chaque itération du chargement effectué au nœud j correspond à la saturation d'au moins un arc (j, k_i) ($1 \leq i \leq l$). Puisque plusieurs arcs peuvent être saturés simultanément, le nombre d'itérations est au plus l .

Supposons que pour un vecteur de flots stratégiques \bar{z} , le chargement au nœud j s'effectue en \bar{t} itérations ($1 \leq t \leq \bar{t}$). On débute une itération n ($n = 1, 2, \dots, \bar{t}$) par la construction de l'ensemble $\bar{K}^{(n)}$ qui regroupe les premiers nœuds des ordres de préférences des stratégies au nœud j . Ensuite, on calcule la proportion du flot affectée :

$$\bar{\beta}^{(n)} = \min_{k_i \in \bar{K}^{(n)}} \left\{ \frac{\bar{u}_i^{(n)}}{\bar{d}_i^{(n)}} \right\},$$

où $\bar{u}_i^{(n)}$ est la capacité résiduelle de l'arc (j, k_i) et $\bar{d}_i^{(n)}$ est la demande résiduelle pour le nœud k_i . Soit $\bar{I}^{(n)}$ l'ensemble des indices pour lesquels le minimum est atteint :

$$\bar{I}^{(n)} = \left\{ i : i \in \arg \min_{k_i \in \bar{K}^{(n)}} \left\{ \frac{\bar{u}_i^{(n)}}{\bar{d}_i^{(n)}} \right\} \right\}.$$

Le nombre d'arcs saturés à l'itération n pour le vecteur \bar{z} est égal à $|\bar{I}^{(n)}|$ et $\bar{d}_i^{(n)} > 0 \forall i \in \bar{I}^{(n)}$ par construction. Considérons maintenant un vecteur de flots stratégiques z qui tend vers le vecteur \bar{z} et dont le chargement au nœud j s'effectue en t itérations. Nous associons à z , les quantités résiduelles $d_i^{(n)}$, $u_i^{(n)}$ et $\beta^{(n)}$, et l'ensemble $I^{(n)}$ ($1 \leq n \leq t$).

L'idée intuitive de notre preuve repose sur la relation qui existe entre le nombre d'arcs saturés pour le vecteur z et celui associé au vecteur \bar{z} . En effet, à la première itération du chargement du vecteur \bar{z} , le nombre d'arcs saturés simultanément est égal à $|\bar{I}^{(1)}|$. Pour le vecteur z , ou bien ce nombre est le même ou bien il se pourrait

qu'un ou plusieurs arcs de capacité résiduelle presque nulle restent non saturés. Ce dernier cas ne peut se produire que s'il y a dégénérescence pour le vecteur \bar{z} . Dénotons par $m_1 (1 \leq m_1 \leq |\bar{I}^{(1)}|)$ le nombre d'itérations requises pour effectuer le chargement de z correspondant à la première itération du chargement de \bar{z} . À la fin de ces m_1 itérations, le nombre d'arcs saturés pour z et \bar{z} est le même. D'une façon générale, dénotons par $m_1 + \dots + m_n$ le nombre d'itérations requises pour effectuer le chargement du flot z au nœud j étant donné qu'on a effectué n itérations pour le chargement du flot \bar{z} .

L'étape de notre preuve s'énonce comme suit. D'abord dans la proposition 1, nous démontrons, pour chaque itération $n \in [1 \cdot \bar{t} - 1]$, que la proportion du flot affectée $\beta^{(m_1 + \dots + m_{n-1} + 1)}$ tend vers $\bar{\beta}^{(n)}$ et que la proportion $\beta^{(m_1 + \dots + m_{n-1} + m)}$ tend vers 0, pour tout $m \in [2 \cdot m_n]$. Ce résultat important montre que les m itérations supplémentaires effectuées pour le vecteur z afin de saturer le même nombre d'arcs que \bar{z} induisent des proportions quasiment nulles. Ensuite, nous prouvons dans la proposition 2 qu'à la dernière itération \bar{t} du chargement de \bar{z} , au plus deux itérations peuvent être effectuées pour le chargement de z . Finalement, en combinant ces deux propositions et en calculant les probabilités d'accès aux arcs après chaque itération $n \in [1 \cdot \bar{t}]$, nous démontrons dans la proposition 3 la continuité des probabilités $\pi = \{\pi_{jk_i}^s(z)\}_{k_i \in j^+, s \in W}$.

Proposition 1 *Supposons que le chargement du flot \bar{z} (respectivement z) s'effectue en \bar{t} (respectivement t) itérations, alors nous avons :*

1. $\lim_{z \rightarrow \bar{z}} d_i^{(m_1 + \dots + m_{n-1} + 1)} = \bar{d}_i^{(n)} \quad 1 \leq m_k \leq |\bar{I}^{(k)}| \quad \forall k \in [1 \cdot n] \quad \forall n \in [1 \cdot \bar{t} - 1], \quad \forall i \in \bar{K}^{(n)}$
2. $\lim_{z \rightarrow \bar{z}} u_i^{(m_1 + \dots + m_{n-1} + 1)} = \bar{u}_i^{(n)} \quad 1 \leq m_k \leq |\bar{I}^{(k)}| \quad \forall k \in [1 \cdot n] \quad \forall n \in [1 \cdot \bar{t} - 1], \quad \forall i \in \bar{K}^{(n)}$
3. $\lim_{z \rightarrow \bar{z}} \beta^{(m_1 + \dots + m_{n-1} + 1)} = \bar{\beta}^{(n)} \quad 1 \leq m_k \leq |\bar{I}^{(k)}| \quad \forall k \in [1 \cdot n] \quad \forall n \in [1 \cdot \bar{t} - 1]$
4. $\lim_{z \rightarrow \bar{z}} \beta^{(m_1 + \dots + m_{n-1} + m)} = 0 \quad \forall m \in [2 \cdot m_n] \quad \forall n \in [1 \cdot \bar{t} - 1].$

preuve : par induction sur n ($1 \leq n \leq \bar{t} - 1$)

i) $n = 1$:

$$1. \forall k_i \in \bar{K}^{(1)}, \lim_{z \rightarrow \bar{z}} d_i^{(1)} = \lim_{z \rightarrow \bar{z}} \sum_{s \in S_i^{(1)}} z_j^s = \sum_{s \in S_i^{(1)}} \bar{z}_j^s = \bar{d}_i^{(1)},$$

où $S_i^{(n)}$ est l'ensemble des stratégies admettant le nœud k_i comme premier choix résiduel à l'itération n du chargement de \bar{z} .

$$2. \forall k_i \in \bar{K}^{(1)}, u_i^{(1)} = \bar{u}_i^{(1)} \text{ et donc } \lim_{z \rightarrow \bar{z}} u_i^{(1)} = \bar{u}_i^{(1)}.$$

$$3. \beta^{(1)} = \min_{k_i \in \bar{K}^{(1)}} \left\{ \frac{u_i^{(1)}}{d_i^{(1)}} \right\} = \frac{u_{i_1}^{(1)}}{d_{i_1}^{(1)}} \quad (i_1 \in I^{(1)}). \text{ L'indice } i_1 \text{ doit appartenir à l'en-}$$

semble $\bar{I}^{(1)}$ car si $i_1 \in I^{(1)}$ nous aurions $\frac{u_{i_1}^{(1)}}{d_{i_1}^{(1)}} \geq \frac{u_{i_1}^{(1)}}{d_{i_1}^{(1)}} \quad \forall k_i \in \bar{K}^{(1)}$. En passant

à la limite quand $z \rightarrow \bar{z}$, nous obtenons $\frac{\bar{u}_{i_1}^{(1)}}{\bar{d}_{i_1}^{(1)}} \geq \frac{\bar{u}_{i_1}^{(1)}}{\bar{d}_{i_1}^{(1)}} \quad \forall k_i \in \bar{K}^{(1)}$ donc

$i_1 \in \bar{I}^{(1)}$. Par conséquent, $I^{(1)} \subseteq \bar{I}^{(1)}$ et $\lim_{z \rightarrow \bar{z}} \beta^{(1)} = \bar{\beta}^{(1)}$.

4. Nous devons considérer deux cas :

– Premier cas : $I^{(1)} = \bar{I}^{(1)}$ c'est à dire à l'itération 1 le nombre d'arcs saturés est le même pour z et \bar{z} . Dans ce cas, la propriété (4) de la proposition 1 ne s'applique pas car $m_1 = 1$.

– Second cas : $I^{(1)} \subsetneq \bar{I}^{(1)}$ c'est à dire à l'itération 1 le nombre d'arcs saturés pour z_j est moindre que celui pour \bar{z}_j . Dans ce cas $m_1 > 1$ et nous devons effectuer $m_1 - 1$ ($m_1 \leq |\bar{I}^{(1)}|$) itérations supplémentaires pour que les arcs non saturés pour z_j deviennent saturés. Montrons par induction sur m ($2 \leq m \leq m_1$) que $\lim_{z \rightarrow \bar{z}} \beta^{(m)} = 0$.

$$(a) \underline{m = 2} : \beta^{(2)} = \min_{k_i \in K^{(1)}} \left\{ \frac{u_i^{(2)}}{d_i^{(2)}} \right\} = \frac{u_{i_2}^{(2)}}{d_{i_2}^{(2)}} \quad (i_2 \in I^{(2)}).$$

$$\beta^{(2)} = \frac{u_{i_2}^{(2)}}{d_{i_2}^{(2)}} \iff \frac{u_i^{(2)}}{d_i^{(2)}} \geq \frac{u_{i_2}^{(2)}}{d_{i_2}^{(1)}} \quad \forall k_i \in K^{(1)} = \bar{K}^{(1)} \cup (K^{(1)} \setminus \bar{K}^{(1)})$$

$$\implies \frac{u_i^{(1)} - \beta^{(1)} d_i^{(1)}}{(1 - \beta^{(1)}) d_i^{(1)}} \geq \frac{u_{i_2}^{(1)} - \beta^{(1)} d_{i_2}^{(1)}}{(1 - \beta^{(1)}) d_{i_2}^{(1)}} \forall k_i \in K^{(1)} \setminus \overline{K}^{(1)}.$$

En passant à la limite quand $z \rightarrow \bar{z}$ et en utilisant (1) (2) et (3), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\bar{u}_{i_2}^{(1)} - \bar{\beta}^{(1)} \bar{d}_{i_2}^{(1)}}{(1 - \bar{\beta}^{(1)}) \bar{d}_{i_2}^{(1)}} &\leq \frac{\bar{u}_i^{(1)} - \bar{\beta}^{(1)} \bar{d}_i^{(1)}}{(1 - \bar{\beta}^{(1)}) \bar{d}_i^{(1)}} \forall k_i \in K^{(1)} \setminus \overline{K}^{(1)} \\ \iff \frac{\bar{u}_{i_2}^{(2)}}{\bar{d}_{i_2}^{(2)}} &\leq 0 \quad (\bar{u}_i^{(1)} - \bar{\beta}^{(1)} \bar{d}_i^{(1)} \leq 0 \text{ par définition de } \bar{\beta}^{(1)}) \\ \iff \bar{u}_{i_2}^{(2)} = 0 \quad &(\bar{d}_{i_2}^{(2)} > 0 \text{ car } i_2 \in I^{(2)}). \end{aligned}$$

Donc $\lim_{z \rightarrow \bar{z}} u_{i_2}^{(2)} = \bar{u}_{i_2}^{(2)} = 0$ et par conséquent $\lim_{z \rightarrow \bar{z}} \beta^{(2)} = 0$.

(b) hypothèse d'induction : $\lim_{z \rightarrow \bar{z}} \beta^{(m)} = 0$ pour $m = 2, \dots, m_1 - 1$.

$$(c) \underline{m = m_1} : \beta^{(m_1)} = \min_{k_i \in K^{(m_1-1)}} \frac{u_i^{(m_1)}}{d_i^{(m_1)}} = \frac{u_{i_{m_1}}^{(m_1)}}{d_{i_{m_1}}^{(m_1)}} (i_{m_1} \in I^{(m_1)}).$$

$$\lim_{z \rightarrow \bar{z}} u_{i_{m_1}}^{(m_1)} = \lim_{z \rightarrow \bar{z}} u_{i_{m_1}}^{(m_1-1)} - \beta^{(m_1-1)} d_{i_{m_1}}^{(m_1)} = \lim_{z \rightarrow \bar{z}} u_{i_{m_1}}^{(m_1-1)} \quad (\text{h.i})$$

$$\lim_{z \rightarrow \bar{z}} u_{i_{m_1}}^{(m_1-1)} = \lim_{z \rightarrow \bar{z}} u_{i_{m_1}}^{(m_1-2)} - \beta^{(m_1-2)} d_{i_{m_1}}^{(m_2)} = \lim_{z \rightarrow \bar{z}} u_{i_{m_1}}^{(m_1-2)} \quad (\text{h.i})$$

...

$$\lim_{z \rightarrow \bar{z}} u_{i_{m_1}}^{(3)} = \lim_{z \rightarrow \bar{z}} u_{i_{m_1}}^{(2)} - \beta^{(2)} d_{i_{m_1}}^{(2)} = \lim_{z \rightarrow \bar{z}} u_{i_{m_1}}^{(2)} = 0 \quad (\text{h.i})$$

Par conséquent $\lim_{z \rightarrow \bar{z}} u_{i_{m_1}}^{(m_1)} = 0$ et donc $\lim_{z \rightarrow \bar{z}} \beta^{(m_1)} = 0$.

ii) **hypothèse d'induction** : supposons que (1), (2), (3) et (4) sont vérifiés pour $n = 1, 2, \dots, \bar{t} - 2$ et montrons le résultat pour $n = \bar{t} - 1$.

iii) $n = \bar{t} - 1$:

$$1. \forall k_i \in \overline{K}^{(\bar{t}-1)},$$

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \bar{z}} d_i^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-2} + 1)} &= \lim_{z \rightarrow \bar{z}} (1 - \beta^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-2)})} d_i^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-2})} \\ &= \lim_{z \rightarrow \bar{z}} d_i^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-2})} \quad (\text{hypothèse d'induction}) \end{aligned}$$

\vdots

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{z \rightarrow \bar{z}} d_i^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-3} + 2)} \quad (\text{hypothèse d'induction}) \\
 &= \lim_{z \rightarrow \bar{z}} (1 - \beta^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-3} + 1)}) [d_i^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-3} + 1)} + \sum_{s \in S_i^{(\bar{t}-1)}} z_j^s] \\
 &= (1 - \bar{\beta}^{(\bar{t}-2)}) [\bar{d}_i^{(\bar{t}-2)} + \sum_{s \in S_i^{(\bar{t}-1)}} \bar{z}_j^s] \quad (\text{hypothèse d'induction}) \\
 &= \bar{d}_i^{(\bar{t}-1)}.
 \end{aligned}$$

 2. $\forall k_i \in \bar{K}^{(\bar{t}-1)}$,

$$\begin{aligned}
 \lim_{z \rightarrow \bar{z}} u_i^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-2} + 1)} &= \lim_{z \rightarrow \bar{z}} u_i^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-2})} - \beta^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-2})} d_i^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-2})} \\
 &= \lim_{z \rightarrow \bar{z}} u_i^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-2})} \quad (\text{hypothèse d'induction})
 \end{aligned}$$

 \vdots

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{z \rightarrow \bar{z}} u_i^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-3} + 2)} \quad (\text{hypothèse d'induction}) \\
 &= \lim_{z \rightarrow \bar{z}} u_i^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-3} + 1)} - \beta^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-3} + 1)} d_i^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-3} + 1)} \\
 &= \bar{u}_i^{(\bar{t}-2)} - \bar{\beta}^{(\bar{t}-2)} \bar{d}_i^{(\bar{t}-2)} \quad (\text{hypothèse d'induction}) \\
 &= \bar{u}_i^{(\bar{t}-1)}.
 \end{aligned}$$

 3. $\beta^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-2} + 1)} = \min_{k_i \in K^{m_1 + \dots + m_{\bar{t}-2}}} \left\{ \frac{u_i^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-2} + 1)}}{d_i^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-2} + 1)}} \right\}$. De la même façon que

 dans le cas $n = 1$, nous déduisons à partir des propriétés (1) et (2) que :

$$I^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-2} + 1)} \subset \bar{I}^{(\bar{t}-1)} \quad \text{et que} \quad \lim_{z \rightarrow \bar{z}} \beta^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-2} + 1)} = \bar{\beta}^{(\bar{t}-1)}.$$

 4. même preuve que dans le cas $n = 1$ en utilisant (1), (2) et (3). \square

Proposition 2 *Supposons que le chargement du flot \bar{z} (respectivement z) s'effectue en \bar{t} (respectivement t) itérations, alors :*

$$t = m_1 + m_2 + \dots + m_{\bar{t}} \text{ avec } 1 \leq m_{\bar{t}} \leq 2 \text{ et } 1 \leq m_n \leq |\bar{I}^{(n)}| \quad \forall 1 \leq n \leq \bar{t} - 1.$$

preuve : Tout d'abord, à partir de la proposition 1, nous savons que $m_1 + m_2 + \dots + m_{\bar{t}-1}$ itérations sont requises pour effectuer le chargement du flot z étant donné qu'on a effectué $\bar{t} - 1$ itérations pour le chargement du flot \bar{z} . En plus, nous pouvons facilement étendre les propriétés (1), (2) et (3) de la proposition 1 à $n = \bar{t}$, c'est à dire : $\lim_{z \rightarrow \bar{z}} d_i^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-1} + 1)} = \bar{d}_i^{(\bar{t})}$, $\lim_{z \rightarrow \bar{z}} u_i^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-1} + 1)} = \bar{u}_i^{(\bar{t})} \forall k_i \in \bar{K}^{(\bar{t})}$ et $\lim_{z \rightarrow \bar{z}} \beta^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-1} + 1)} = \bar{\beta}^{(\bar{t})} = 1$. Par conséquent, il nous reste seulement à montrer que $1 \leq m_{\bar{t}} \leq 2$ c'est à dire à la dernière itération \bar{t} du chargement de \bar{z} , au plus deux itérations peuvent être effectuées pour le chargement de z .

Le chargement du flot \bar{z} s'effectue en \bar{t} itérations ce qui implique que $\bar{\beta}^{(\bar{t})} = 1$. Pour le flot z , nous avons deux cas :

- Premier cas : $\beta^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-1} + 1)} = 1$; dans ce cas, nous avons $m_{\bar{t}} = 1$.
- Deuxième cas : $\beta^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-1} + 1)} < 1$ et $\lim_{z \rightarrow \bar{z}} \beta^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-1} + 1)} = 1$; dans ce cas nous avons $\beta^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-1} + 2)} = 1$. En effet :

$$\beta^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-1} + 2)} = \min_{k_i} \left\{ \frac{u_i^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-1} + 2)}}{d_i^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-1} + 2)}}, 1 \right\} \quad (k_i \in K^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-1} + 2)}).$$

Or $d_i^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-1} + 2)} = (1 - \beta^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-1} + 1)})(d_i^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-1} + 1)}) \rightarrow 0$ quand $z \rightarrow \bar{z}$

et donc $\lim_{z \rightarrow \bar{z}} \frac{u_i^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-1} + 2)}}{d_i^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-1} + 2)}} = \infty$ ce qui implique que $\beta^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-1} + 2)} = 1$. \square

Proposition 3 *Supposons que le chargement du flot \bar{z} s'effectue en \bar{t} itérations ($1 \leq \bar{t} \leq l$), alors :*

$$\forall s \in \bar{W} \quad \lim_{z \rightarrow \bar{z}} \pi_{jk_i}^s(z) = \pi_{jk_i}^s(\bar{z}) \quad \forall i (1 \leq i \leq l)$$

preuve : Étant donné que nous ne pouvons calculer la probabilité d'accès à un arc donné que lorsque celui-ci devient saturé ou lorsque le chargement se termine au nœud j , nous évaluons les probabilités d'accès aux arcs à la fin de chaque itération n ($1 \leq n \leq \bar{t}$) du vecteur \bar{z} . Pour le faire, nous aurons besoin de la suite $\bar{\alpha}^{(n)}$ suivante :

$$\bar{\alpha}^{(1)} = \bar{\beta}^{(1)}$$

$$\bar{\alpha}^{(n)} = \bar{\alpha}^{(n-1)} + (1 - \bar{\alpha}^{(n-1)})\bar{\beta}^{(n)}$$

En utilisant la proposition 1, il est facile de démontrer par induction sur n ($1 \leq n \leq \bar{t} - 1$) que $\lim_{z \rightarrow \bar{z}} \alpha^{(m_1 + \dots + m_{n-1} + m)} = \bar{\alpha}^{(n)} \forall 1 \leq m \leq m_n$. À partir de la proposition 2, nous avons aussi que $\lim_{z \rightarrow \bar{z}} \alpha^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-1} + m)} = 1 \forall 1 \leq m \leq 2$.

1. **Fin itération 1** : montrons que $\forall i_1 \in \bar{I}^{(1)} = I^{(1)} \cup \dots \cup I^{(m_1)}, \forall s \in S_{i_1}^{(1)}$

$$\lim_{z \rightarrow \bar{z}} \pi_{jk_{i_1}}^s(z) = \pi_{jk_{i_1}}^s(\bar{z}).$$

$$\forall i_1 \in \bar{I}^{(1)} \forall s \in S_{i_1}^{(1)} \quad \pi_{jk_{i_1}}^s(\bar{z}) = \bar{\alpha}^{(1)}.$$

$\forall 1 \leq m \leq m_1 \forall i_1 \in I^{(m)} \forall s \in S_{i_1}^{(1)} \quad \pi_{jk_{i_1}}^s(z) = \alpha^{(m)}$ et nous avons

$$\lim_{z \rightarrow \bar{z}} \pi_{jk_{i_1}}^s(z) = \lim_{z \rightarrow \bar{z}} \alpha^{(m)} = \bar{\alpha}^{(1)} = \pi_{jk_{i_1}}^s(\bar{z}).$$

2. **Fin itération 2** : montrons que $\forall i_1 \in \bar{I}^{(1)}, \forall i_2 \in \bar{I}^{(2)}, \forall s \in (S_{i_2}^{(1)}) \cup (S_{i_1}^{(1)} \cap S_{i_2}^{(2)})$

$$\lim_{z \rightarrow \bar{z}} \pi_{jk_{i_2}}^s(z) = \pi_{jk_{i_2}}^s(\bar{z}).$$

$$- \forall i_2 \in \bar{I}^{(2)} = I^{(m_1+1)} \cup \dots \cup I^{(m_1+m_2)}, \forall s \in S_{i_2}^{(1)} \quad \pi_{jk_{i_2}}^s(\bar{z}) = \bar{\alpha}^{(2)}.$$

$\forall 1 \leq m \leq m_2 \forall i_2 \in I^{(m_1+m)} \forall s \in S_{i_2}^{(1)} \quad \pi_{jk_{i_2}}^s(z) = \alpha^{(m_1+m)}$ et nous avons

$$\lim_{z \rightarrow \bar{z}} \pi_{jk_{i_2}}^s(z) = \lim_{z \rightarrow \bar{z}} \alpha^{(m_1+m)} = \bar{\alpha}^{(2)} = \pi_{jk_{i_2}}^s(\bar{z}).$$

$$- \forall i_1 \in \bar{I}^{(1)}, \forall i_2 \in \bar{I}^{(2)}, \forall s \in S_{i_1}^{(1)} \cap S_{i_2}^{(2)} \quad \pi_{jk_{i_2}}^s(\bar{z}) = \bar{\alpha}^{(2)} - \bar{\alpha}^{(1)}.$$

$$\forall 1 \leq p_1 \leq m_1 \forall 1 \leq p_2 \leq m_2, \forall i_1 \in I^{(p_1)}, \forall i_2 \in I^{(m_1+p_2)},$$

$$\forall s \in S_{i_1}^{(1)} \cap S_{i_2}^{(2)} \quad \pi_{jk_{i_2}}^s(z) = \alpha^{(m_1+p_2)} - \alpha^{(p_1)} \text{ et nous avons}$$

$$\lim_{z \rightarrow \bar{z}} \pi_{jk_{i_2}}^s(z) = \lim_{z \rightarrow \bar{z}} \alpha^{(m_1+p_2)} - \alpha^{(p_1)} = \bar{\alpha}^{(2)} - \bar{\alpha}^{(1)} = \pi_{jk_{i_2}}^s(\bar{z}).$$

⋮

3. **Fin itération $\bar{t} - 1$** : de la même façon, nous montrons que : $\forall i_1 \in \bar{I}^{(1)}, \forall i_2 \in \bar{I}^{(2)}, \dots, \forall i_{\bar{t}-1} \in \bar{I}^{(\bar{t}-1)}, \forall s \in (S_{i_{\bar{t}-1}}^{(1)}) \cup (S_{i_1}^{(1)} \cap S_{i_{\bar{t}-1}}^{(2)}) \cup \dots \cup (S_{i_1}^{(1)} \cap S_{i_2}^{(2)} \cap \dots \cap S_{i_{\bar{t}-1}}^{(\bar{t}-1)})$

$$\lim_{z \rightarrow \bar{z}} \pi_{jk_{i_{\bar{t}-1}}}^s(z) = \pi_{jk_{i_{\bar{t}-1}}}^s(\bar{z}).$$

4. **Fin itération \bar{t}** :

– pour le vecteur \bar{z} :

$$\forall i_1 \in \bar{I}^{(1)}, \forall i_2 \in \bar{I}^{(2)}, \dots, \forall i_{\bar{t}-1} \in \bar{I}^{(\bar{t}-1)}, \forall i_{\bar{t}} \in \bar{K}^{(\bar{t})}$$

$$\forall s \in S_{i_{\bar{t}}}^{(1)} \quad \pi_{jk_{i_{\bar{t}}}}^s(\bar{z}) = 1 \text{ et } \pi_{jk_r}^s(\bar{z}) = 0 (k_r \in \bar{K}^{(\bar{t})}, r \neq i_{\bar{t}}).$$

$$\forall s \in S_{i_1}^{(1)} \cap S_{i_{\bar{t}}}^{(2)} \quad \pi_{jk_{i_{\bar{t}}}}^s(\bar{z}) = 1 - \bar{\alpha}^{(1)} \text{ et } \pi_{jk_r}^s(\bar{z}) = 0 (k_r \in \bar{K}^{(\bar{t})}, r \neq i_{\bar{t}}).$$

⋮

$$\forall s \in S_{i_1}^{(1)} \cap \dots \cap S_{i_{\bar{t}-1}}^{(\bar{t}-1)} \cap S_{i_{\bar{t}}}^{(\bar{t})} \quad \pi_{jk_{i_{\bar{t}}}}^s(\bar{z}) = 1 - [\bar{\alpha}^{(1)} + \dots + \bar{\alpha}^{(\bar{t}-1)}] \text{ et}$$

$$\pi_{jk_r}^s(\bar{z}) = 0 (k_r \in \bar{K}^{(\bar{t})}, r \neq i_{\bar{t}}).$$

– pour le vecteur z , nous distinguons deux cas :

(a) $m_{\bar{t}} = 1$

$$\forall 1 \leq p_1 \leq m_1, \dots, \forall 1 \leq p_{\bar{t}-1} \leq m_{\bar{t}-1}, \forall i_1 \in I^{(p_1)}, \dots,$$

$$\forall i_{\bar{t}-1} \in I^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-2} + p_{\bar{t}-1})}, \forall i_{\bar{t}} \in K^{(\bar{t})}$$

$$\forall s \in S_{i_{\bar{t}}}^{(1)} \quad \pi_{jk_{i_{\bar{t}}}}^s(z) = 1 \text{ et } \pi_{jk_r}^s(z) = 0 (k_r \in K^{(\bar{t})}, r \neq i_{\bar{t}}).$$

$$\forall s \in S_{i_1}^{(1)} \cap S_{i_{\bar{t}}}^{(2)} \quad \pi_{jk_{i_{\bar{t}}}}^s(z) = 1 - \alpha^{(p_1)} \text{ et } \pi_{jk_r}^s(z) = 0 (r \neq i_{\bar{t}}).$$

⋮

$$\forall s \in S_{i_1}^{(1)} \cap \dots \cap S_{i_{\bar{t}-1}}^{(\bar{t}-1)} \cap S_{i_{\bar{t}}}^{(\bar{t})},$$

$$\pi_{jk_{i_{\bar{t}}}}^s(z) = 1 - [\alpha^{(p_1)} + \dots + \alpha^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-2} + p_{\bar{t}-1})}] \text{ et } \pi_{jk_r}^s(z) = 0 (r \neq i_{\bar{t}}).$$

Dans tous les cas, nous avons :

$$\lim_{z \rightarrow \bar{z}} \pi_{jk_{i_{\bar{t}}}}^s(z) = \pi_{jk_{i_{\bar{t}}}}^s(\bar{z}) \text{ et } \lim_{z \rightarrow \bar{z}} \pi_{jk_r}^s(z) = \pi_{jk_r}^s(\bar{z}) (k_r \in K^{(\bar{t})}, r \neq i_{\bar{t}}).$$

(b) $m_{\bar{t}} = 2$

$$\forall 1 \leq p_1 \leq m_1, \dots, \forall 1 \leq p_{\bar{t}} \leq m_{\bar{t}}, \forall i_1 \in I^{(p_1)}, \dots,$$

$$\forall i_{\bar{t}} \in I^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-1} + p_{\bar{t}})}, \forall i'_{\bar{t}} \in K^{(\bar{t}+1)}$$

$$\forall s \in S_{i'_{\bar{t}}}^{(1)} \quad \pi_{jk_{i'_{\bar{t}}}}^s(z) = 1 \text{ et } \pi_{jk_r}^s(z) = 0 (k_r \in K^{(\bar{t}+1)}, r \neq i'_{\bar{t}}).$$

$$\forall s \in S_{i_{\bar{t}}}^{(1)} \cap S_r^{(2)} \quad \pi_{jk_{i_{\bar{t}}}}^s(z) = \alpha^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-1} + p_{\bar{t}})} \text{ et}$$

$$\pi_{jk_r}^s(z) = 1 - \alpha^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-1} + p_{\bar{t}})} (k_r \in K^{(\bar{t}+1)}, r \neq i'_{\bar{t}}).$$

$$\forall s \in S_{i_1}^{(1)} \cap S_{i'_{\bar{t}}}^{(2)} \quad \pi_{jk_{i'_{\bar{t}}}}^s(z) = 1 - \alpha^{(p_1)} \text{ et } \pi_{jk_r}^s(z) = 0 (r \neq i'_{\bar{t}}).$$

$$\forall s \in S_{i_1}^{(1)} \cap S_{i_{\bar{t}}}^{(2)} \cap S_r^{(3)} \quad \pi_{jk_{i_{\bar{t}}}}^s(z) = \alpha^{(m_1 + \dots + m_{\bar{t}-1} + p_{\bar{t}})} - \alpha^{(p_1)} \text{ et}$$

$$\pi_{jk_r}^s(z) = 1 - \alpha^{(m_1 + \dots + m_{\bar{i}-1} + p_{\bar{i}})} \quad (r \neq i_{\bar{i}}').$$

$$\vdots$$

$$\forall s \in S_{i_1}^{(1)} \cap \dots \cap S_{i_{\bar{i}}}^{(\bar{i})},$$

$$\pi_{jk_{i_{\bar{i}}}}^s(z) = 1 - [\alpha^{(p_1)} + \dots + \alpha^{(m_1 + \dots + m_{\bar{i}-2} + p_{\bar{i}-1})}] \text{ et } \pi_{jk_r}^s(z) = 0 \quad (r \neq i_{\bar{i}}'),$$

$$\pi_{jk_{i_{\bar{i}}}}^s(z) = \alpha^{(m_1 + \dots + m_{\bar{i}-1} + p_{\bar{i}})} - [\alpha^{(p_1)} + \dots + \alpha^{(m_1 + \dots + m_{\bar{i}-2} + p_{\bar{i}-1})}] \text{ et}$$

$$\pi_{jk_r}^s(z) = 1 - \alpha^{(m_1 + \dots + m_{\bar{i}-1} + p_{\bar{i}})} \quad (r \neq i_{\bar{i}}'),$$

Dans tous les cas, nous pouvons facilement voir que :

$$\forall i_{\bar{i}} \in K^{(\bar{i})} = I^{(m_1 + \dots + m_{\bar{i}-1} + p_{\bar{i}})} \cup K^{(\bar{i}+1)}$$

$$\lim_{z \rightarrow \bar{z}} \pi_{jk_{i_{\bar{i}}}}^s(z) = \pi_{jk_{i_{\bar{i}}}}^s(\bar{z}) \text{ et } \lim_{z \rightarrow \bar{z}} \pi_{jk_r}^s(z) = \pi_{jk_r}^s(\bar{z}) \quad (k_r \in \bar{I}^{(\bar{i})}, r \neq i_{\bar{i}}). \quad \square$$

On en déduit un théorème d'existence.

Théorème 1 *Considérons le modèle stratégique présenté au chapitre 2. Dans le cas sans priorités, il existe au moins une solution à l'inégalité variationnelle $IV(C, X)$.*

3.3.2 Modèle avec priorités

Dans le cas du modèle stratégique sans priorités, la fonction de coût C est continue et l'existence d'un vecteur d'équilibre nous est garantie par le théorème de point fixe de Brouwer [5]. Malheureusement, dans le cas avec priorités, il se peut que la fonction de coût C soit discontinue en des points particuliers du domaine X . Ceci correspond aux points dégénérés où le flot stratégique et la capacité résiduelle sont tous les deux nuls.

Discontinuité de la fonction de coût

Observons le réseau 2, illustré à la figure 3.3, dans lequel 5 unités de flot circulent de l'origine 1 à la destination 5. Le chemin 1-3-5 correspond à une ligne d'autobus de capacité 5 et les autres arcs désignent des arcs de marche de capacités infinies. Chaque usager choisit une stratégie pour atteindre la destination 5. Considérons les deux stratégies suivantes :

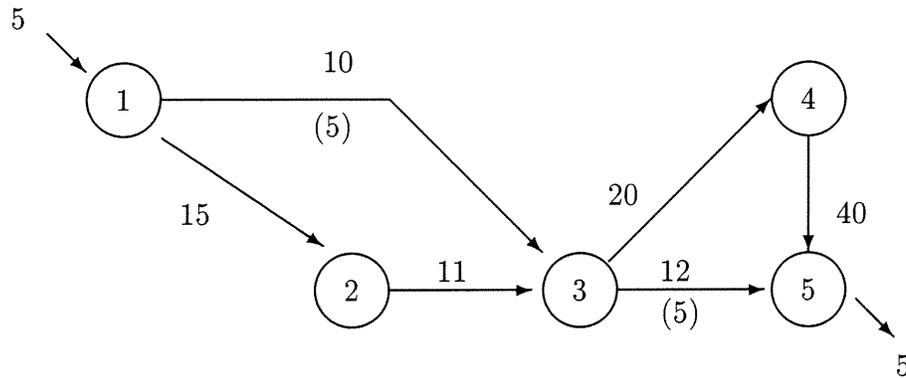


FIG. 3.3 – Réseau 2

nœuds :	1	2	3	4	5
s_1 :	[2]	[3]	[5, 4]	[5]	[]
s_2 :	[3, 2]	[3]	[5, 4]	[5]	[]

Il est clair que les autres stratégies admissibles sont dominées par l'une de celles-ci. Notons x_i et C_i le flot et le coût de la stratégie s_i ($i = 1, 2$). Décrivons le processus de calcul des coûts stratégiques. Au nœud 1, x_1 unités de flot préfèrent le nœud 2, tandis que x_2 unités de flot choisissent l'arc (1, 3). Nous obtenons alors les probabilités suivantes :

$$\pi_{12}^{s_1} = \pi_{13}^{s_2} = 1.$$

L'affectation du flot résiduel de s_1 et s_2 termine le chargement du nœud 1. La quantité totale du flot que l'on retrouve au nœud 3 est : $x_1 + x_2 = 5$. Au nœud 3, le chargement s'effectue en deux étapes pour tenir compte des priorités. Ainsi, nous obtenons :

$$\pi_{35}^{s_2} = \min\left\{1, \frac{5}{x_1}\right\} = 1,$$

$$\pi_{35}^{s_1} = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 = 0 \\ \min\left\{1, \frac{5-x_2}{x_1}\right\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous calculons les coûts stratégiques à partir des probabilités d'accès aux arcs. Nous avons :

$$\begin{aligned} C_1 &= 15 + 11 + \pi_{35}^{s_1} 12 + (1 - \pi_{35}^{s_1})(20 + 40) \\ &= 86 - 48\pi_{35}^{s_1}, \\ C_2 &= 10 + 12 \\ &= 22. \end{aligned}$$

Montrons maintenant que la fonction de coût est discontinue au point $(0, 5)$. Considérons le vecteur de flots stratégiques $(\epsilon, 5 - \epsilon)$, où ϵ est un petit nombre positif. La probabilité d'accès à l'arc $(3, 5)$ pour la stratégie s_1 est :

$$\pi_{35}^{s_1} = \frac{\epsilon}{\epsilon} = 1.$$

Nous obtenons ainsi :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} C_1(\epsilon, 5 - \epsilon) = 38,$$

alors que nous avons $C_1(0, 5) = 86$. La fonction de coût C est donc discontinue mais possède toutefois une solution d'équilibre stratégique :

$$x^* = (0, 5) \quad \text{avec} \quad C(x^*) = (86, 22).$$

Existence d'un équilibre

Pour démontrer l'existence d'un équilibre dans le cas du modèle avec priorités, nous utilisons la proposition 3 de la sous-section précédente. Nous nous baserons aussi sur l'**inégalité de Ky Fan**, dont une preuve est présentée, entre autres, dans le livre de Aubin [2]. Cette inégalité utilise la notion de *semi-continuité inférieure* d'une fonction.

Une fonction $f : R^n \rightarrow R$ est **semi-continue inférieurement** en un point \bar{x} , si

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \text{ tel que } \|x - \bar{x}\| < \eta \implies f(\bar{x}) - f(x) \leq \epsilon \\ \iff f(\bar{x}) \leq \liminf_{x \rightarrow \bar{x}} f(x), \end{aligned}$$

$$\text{où } \liminf_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = \sup_{\eta > 0} \inf_{x: \|x - \bar{x}\| < \eta} f(x).$$

Théorème 2 (Inégalité de Ky Fan) : Soit X un sous-ensemble convexe et compact de R^n et Φ une fonction de $X \times X$ vers R satisfaisant :

$$\begin{aligned} \forall y \in X, x \rightarrow \Phi(x, y) \text{ est semi-continue inférieurement} \\ \forall y \in X, y \rightarrow \Phi(x, y) \text{ est concave.} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Alors il existe $x^* \in X$ tel que

$$\sup_{y \in X} \Phi(x^*, y) \leq \sup_{y \in X} \Phi(y, y). \quad (3.6)$$

Maintenant, considérons le vecteur de probabilités $\tilde{\pi} = \{\tilde{\pi}_{jk}^s(z_j^s)\}_{j \in N, k \in E_j^s, s \in \overline{W}}$ induit par la procédure de chargement **PCAPLOAD**. Les quantités $\tilde{\pi}_{jk}^s$ sont calculées de la même façon que dans le cas sans priorités sauf pour la situation de dégénérescence causée par la nullité simultanée du flot stratégique et de la capacité résiduelle. Cette situation particulière correspond au triplet $(j, k, s) \in N \times E_j^s \times \overline{W}$ satisfaisant les conditions :

$$\overline{W}^1 \neq \emptyset, s \in \overline{W}^2, z_j^s = 0 \text{ et } \bar{u}_{jk} = 0. \quad (3.7)$$

Dans l'exemple de la figure 3.3, cette situation correspond au triplet $(3, 5, s_1)$. Dans ce cas particulier, on attribue à la probabilité $\tilde{\pi}_{jk}^s$ la valeur 0. Il est clair que cette situation ne peut pas se produire dans le cas sans priorités.

Proposition 4 *Considérons le vecteur de probabilités $\tilde{\pi}(x)$ et le vecteur de coûts stratégiques $C(x)$ induit par l'algorithme **PCAPLOAD**(x). Si $\forall (j, k) \in A, c_{jk} > 0$, alors*

1. $\forall (j, k, s) \in N \times E_j^s \times \overline{W}, z_j \rightarrow \tilde{\pi}_{jk}^s(z_j)$ est semi-continue inférieurement,
2. $\forall s \in W, x \rightarrow C^s(x)$ est semi-continue inférieurement.

preuve :

1. Considérons un vecteur \tilde{z}_j correspondant à la situation de dégénérescence définie par les conditions (3.7). Par définition, $\tilde{\pi}_{jk}^s(\tilde{z}_j) = 0$ et nous avons que $\liminf_{z_j \rightarrow \tilde{z}_j} \tilde{\pi}_{jk}^s(z_j) = \tilde{\pi} \in [0, 1]$. Ceci implique que :

$$\tilde{\pi}_{jk}^s(\tilde{z}_j) \leq \liminf_{z_j \rightarrow \tilde{z}_j} \tilde{\pi}_{jk}^s(z_j).$$

Par conséquent, la fonction $z_j \rightarrow \tilde{\pi}_{jk}^s(z_j)$ est semi-continue inférieurement au point \tilde{z}_j .

Maintenant à l'aide de la proposition 3, nous avons pour tout vecteur $\bar{z}_j \neq \tilde{z}_j$:

$$\lim_{z \rightarrow \bar{z}} \tilde{\pi}_{jk}^s(z_j^s) = \lim_{z \rightarrow \bar{z}} \pi_{jk}^s(z_j^s) = \pi_{jk}^s(\bar{z}_j^s) = \tilde{\pi}_{jk}^s(\bar{z}_j^s),$$

ce qui montre que $\forall \bar{z}_j \neq \tilde{z}_j$, la fonction $z_j \rightarrow \tilde{\pi}_{jk}^s(z_j)$ est semi-continue inférieurement.

2. Signalons d'abord qu'on peut facilement démontrer que la fonction $x \rightarrow \tau_j^s(x)$ (donnée par la formule (2.8)) est semi-continue inférieurement dans l'ensemble X , en parcourant les nœuds j suivant l'ordre topologique du réseau et en utilisant les propriétés de la semi-continuité.

Maintenant, montrons que $\forall s \in W$, la fonction de coût $x \rightarrow C^s(x)$ est semi-continue inférieurement. Soit $\epsilon > 0$.

$\forall j \in N$, $x \rightarrow \tau_j^s(x)$ est semi-continue inférieurement

$$\iff \forall \epsilon' = \frac{\epsilon}{2|A^s|c_{jk}} > 0, \exists \eta_1 > 0 \text{ tel que } \|x - \bar{x}\| < \eta_1 \implies \tau_j^s(\bar{x}) - \tau_j^s(x) \leq \epsilon'.$$

De même, $\forall (j, k) \in A^s$, $x \rightarrow \pi_{jk}^s(x)$ est semi-continue inférieurement

$$\iff \forall \epsilon' > 0, \exists \eta_2 > 0 \text{ tel que } \|x - \bar{x}\| < \eta_2 \implies \pi_{jk}^s(\bar{x}) - \pi_{jk}^s(x) \leq \epsilon'.$$

Pour $\epsilon > 0$, il existe $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\} > 0$ tel que :

$$\begin{aligned} C^s(\bar{x}) - C^s(x) &= \sum_{(j,k) \in A^s} c_{jk} (\tau_j^s(\bar{x}) \pi_{jk}^s(\bar{x}) - \tau_j^s(x) \pi_{jk}^s(x)) \\ &= \sum_{(j,k) \in A^s} c_{jk} (\pi_{jk}^s(\bar{x}) (\tau_j^s(\bar{x}) - \tau_j^s(x)) + \tau_j^s(x) (\pi_{jk}^s(\bar{x}) - \pi_{jk}^s(x))) \\ &\leq \sum_{(j,k) \in A^s} c_{jk} \left(1 \cdot \frac{\epsilon}{2|A^s|c_{jk}} + 1 \cdot \frac{\epsilon}{2|A^s|c_{jk}} \right) \\ &\leq \epsilon, \end{aligned}$$

ce qui prouve bien que la fonction $x \rightarrow C^s(x)$ est semi-continue inférieurement. \square

Théorème 3 *Considérons le modèle stratégique avec priorités présenté au chapitre 2. Si les coûts sur les arcs sont tous positifs, alors il existe au moins une solution à l'inégalité variationnelle $IV(C, X)$.*

preuve : Posons $\Phi(x, y) = \langle C(x), x - y \rangle$.

La fonction Φ est concave en y et satisfait clairement $\Phi(y, y) = 0$. Puisque $\forall s \in W$,

la fonction $C^s(x)$ est semi-continue inférieurement (proposition 4), il en est de même pour la fonction $x \rightarrow \Phi(x, y)$. En effet, d'une part nous avons $\forall s \in W$, $C^s(\bar{x})$ est borné par $M = \sum_{(j,k) \in A^s} c_{jk}$ ce qui implique que la norme $\|C(\bar{x})\|$ est finie. D'autre part, par définition de la semi-continuité, nous avons pour tout $s \in W$:

$$\begin{aligned} \forall \epsilon' = \frac{\epsilon}{2\|\bar{x} - y\|} > 0 \exists \eta > 0 \text{ tel que } \|x - \bar{x}\| < \eta \implies C^s(x) \geq C^s(\bar{x}) - \epsilon' \\ \iff \forall \epsilon' > 0 \exists \eta > 0 \text{ tel que } \|x - \bar{x}\| < \eta \implies -C^s(x) \leq -C^s(\bar{x}) + \epsilon'. \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} \langle -C(x), x - y \rangle &\leq \langle -C(\bar{x}), x - y \rangle + \epsilon' \|x - y\| \\ &\leq \langle -C(\bar{x}), \bar{x} - y \rangle + \langle -C(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle + \epsilon' \|x - y\| \\ &\leq \langle -C(\bar{x}), \bar{x} - y \rangle + \|C(\bar{x})\| \|x - \bar{x}\| + \epsilon' \|x - \bar{x}\| \\ &\quad + \epsilon' \|\bar{x} - y\| \\ &\leq \langle -C(\bar{x}), \bar{x} - y \rangle + (\epsilon' + \|C(\bar{x})\|) \eta + \frac{\epsilon}{2} \\ &\leq \langle -C(\bar{x}), \bar{x} - y \rangle + \epsilon \quad \text{si } \eta \leq \frac{\epsilon}{2(\epsilon' + \|C(\bar{x})\|)}, \end{aligned}$$

ce qui montre que la fonction $x \rightarrow \Phi(x, y)$ est semi-continue inférieurement sur l'ensemble compact X . Nous avons toutes les hypothèses pour utiliser l'inégalité de Ky Fan (théorème 2). Il existe donc un vecteur $x^* \in X$ tel que :

$$\forall y \in X, \quad \langle C(x^*), x^* - y \rangle \leq 0,$$

qui est équivalent à dire qu'il existe au moins un vecteur $x^* \in X$ solution de l'inégalité variationnelle $IV(C, X)$. □

Chapitre 4

Recherche d'un équilibre stratégique

Ce chapitre traite de la résolution algorithmique du modèle stratégique avec priorités dans un réseau de transport en commun. La première section est consacrée à la construction d'une stratégie optimale. Ce problème consiste à générer efficacement, pour un certain vecteur de flots stratégiques et une certaine paire O-D, la stratégie ayant le coût le plus faible. La difficulté de ce problème repose sur la construction de la stratégie de coût minimal tout en respectant les priorités pour l'accès aux arcs du réseau. À la seconde section, nous proposons des algorithmes de recherche d'un équilibre stratégique. Ces algorithmes découlent d'une adaptation efficace de l'algorithme de Frank et Wolfe ainsi que des algorithmes de projection pour trouver un équilibre stratégique. Enfin, la dernière section présente les résultats numériques portant sur la recherche d'équilibres stratégiques. Cette dernière section vise principalement à tester les performances de nos algorithmes.

4.1 Construction d'une stratégie optimale

Dans le modèle d'équilibre classique, la recherche d'équilibre fait souvent appel au calcul d'un chemin le plus court. De manière similaire, la construction d'une stratégie optimale joue un rôle essentiel dans la recherche d'un équilibre stratégique.

4.1.1 Procédé de construction général

Le **problème d'hyperchemin optimal** consiste à trouver un hyperchemin joignant l'origine q à la destination r de coût minimal. Un hyperchemin h est représenté par un couple (s, π^s) , où s est une stratégie et π^s est un vecteur de probabilités d'accès aux arcs. La construction d'un hyperchemin optimal $h^* = (s^*, \pi^{s^*})$ suit le procédé récursif décrit par Nguyen et Pallottino [42]. Au nœud j , on associe l'ordre de préférences optimal $E_j^{s^*}$, et on note $\omega_j^{s^*}$ le coût de l'hyperchemin reliant le nœud j à la destination r . Cette dernière variable est calculée à l'aide de l'**équation générale de Bellman** :

$$\omega_j^{s^*} = \begin{cases} \infty & \text{si } j > r \\ 0 & \text{si } j = r \\ \sum_{k \in E_j^{s^*}} \pi_{jk}^{s^*} (c_{jk} + \omega_k^{s^*}) & \text{si } j < r, \end{cases} \quad (4.1)$$

où l'ordre de préférences optimal est solution du problème :

$$E_j^{s^*} \in \arg \min_{E_j^s \in E_j} \left\{ \sum_{k \in E_j^s} \pi_{jk}^s (c_{jk} + \omega_k^{s^*}) \right\}. \quad (4.2)$$

On applique l'équation générale de Bellman suivant l'ordre topologique inverse du réseau (de la destination r vers l'origine q). Le coût de l'hyperchemin optimal h^* est $\omega_q^{s^*}$. Notons que le procédé construit les hyperchemins optimaux reliant chacun des nœuds à la destination r .

La complexité du procédé de construction d'hyperchemins optimaux dépend du problème combinatoire (4.2). En général, le nombre d'ensembles de préférences candidats à l'optimalité pour le problème (4.2) est $|j^+|$ et l'énumération de tous les ordres de l'ensemble E_j est donc inefficace. Nous proposons plus loin une méthode efficace pour résoudre ce problème.

4.1.2 Application au modèle stratégique

Observons maintenant comment appliquer l'équation générale de Bellman (4.1) au modèle stratégique. Étant donné un vecteur de flots stratégiques x et une paire

O-D (q, r) , nous voulons construire efficacement une stratégie $s_{qr}^*(x)$ dans l'ensemble :

$$W_{qr}^*(x) = \arg \min_{s \in W_{qr}} \{C^s(x)\}.$$

Une telle stratégie admet un coût minimal $c_{qr}^*(x)$ pour la paire O-D (q, r) , relativement au vecteur de flots stratégiques x . Nous voulons construire cette stratégie de flot nul à l'aide de l'équation générale de Bellman, tout en respectant les priorités pour l'accès aux arcs du réseau.

Le chargement du réseau précède la construction de la stratégie optimale $s_{qr}^*(x)$. Le chargement du vecteur de flots stratégiques x induit les vecteurs de flots stratégiques aux noeuds $z^1 = \{z_j^{s^1}\}$ et $z^2 = \{z_j^{s^2}\}$. Nous voulons effectuer le micro-chargeement (chargement du flot nul $z_j^{s^*}$) aux noeuds j afin d'obtenir les probabilités $\pi_{jk}^{s^*}$ associées à l'ordre de préférences optimal $E_j^{s^*}$. La connaissance des vecteurs z^1 et z^2 permet de démarrer le micro-chargeement à un noeud j quelconque du réseau. Cependant, le déroulement du micro-chargeement comporte une difficulté principale. Nous ne connaissons pas à l'avance si le flot nul $z_j^{s^*}$ est prioritaire ou non pour l'accès aux noeuds successeurs de j , étant donné que le micro-chargeement est effectué suivant l'ordre topologique inverse. Pour pallier à ce problème, nous procédons comme suit. Dans un premier temps, nous évaluons pour chaque noeud $k \in j^+$ deux valeurs de coût : $\omega_k^{s^*1}$ et $\omega_k^{s^*2}$. Pour chaque noeud $k \in j^+$, nous avons deux cas :

1. $z_k^{s^*}$ est prioritaire : dans ce cas, le micro-chargeement est exécuté sur l'ensemble $\bar{W}^1 \cup \{s^*\}$ et induit le coût $\omega_k^{s^*1}$.
2. $z_k^{s^*}$ est non prioritaire : dans ce cas, le micro-chargeement est effectué successivement sur les ensembles \bar{W}^1 et $\bar{W}^2 \cup \{s^*\}$ et fournit le coût $\omega_k^{s^*2}$.

Ensuite, nous calculons les coûts $\omega_j^{s^*p}$ ($p = 1, 2$) à l'aide de l'équation générale de Bellman :

$$\omega_j^{s^*p} = \sum_{k \in E_j^{s^*}} \pi_{jk}^{s^*} (c_{jk} + \omega_k^{s^*}), \text{ avec } \omega_k^{s^*} = \begin{cases} \omega_k^{s^*1} & \text{if } (j, k, E_k^{s^*}(1)) \in L_i \ (1 \leq i \leq l) \\ \omega_k^{s^*2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, nous sommes sûr que le déroulement du micro-chargeement tient compte des

priorités pour l'accès aux lignes d'autobus. Notons qu'à l'origine q , il n'y a pas de priorités et donc le coût de la stratégie optimal $c_{qr}^{s^*}$ est égal à $\omega_q^{s^*2}$.

Exemple de construction d'une stratégie optimale

Considérons le réseau de transport en commun illustré à la figure 4.1. Dans ce réseau, les chemins 1 – 3 et 2 – 3 – 5 correspondent à deux lignes d'autobus de capacités respectives 10 et 20, et la demande pour l'unique paire O-D est de 40 unités de flot. Nous supposons que l'ensemble de travail contient une seule stratégie, soit : $s_1 = ([3, 2], [3, 5], [5, 4], [5], [])$. Le vecteur de flots stratégiques courant est : $x = (x_1) = (40)$. Nous recherchons maintenant une stratégie s^* de coût minimal.

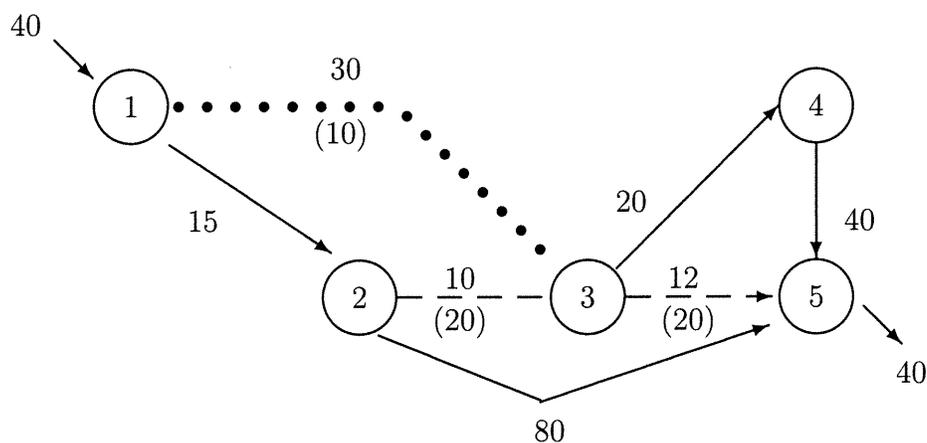


FIG. 4.1 – Réseau 3

Le chargement du vecteur de flots stratégiques x est très simple. À partir du nœud 1, 10 unités de flot accèdent au nœud 3 et 30 unités atteignent le nœud 2. Au nœud 2, le flot se divise sur les arcs (2, 3) et (2, 5) suivant les proportions $2/3$ et $1/3$. Ainsi, un total de 30 (20+10) unités de flot accèdent au nœud 3. À cause des priorités, seulement les 20 unités de flot en provenance du nœud 2 peuvent atteindre le nœud 5 avec l'arc (3, 5). On obtient enfin les flots stratégiques $z_j^{s_1^1}$ et $z_j^{s_1^2}$ en chacun des nœuds du réseau :

nœud j :	1	2	3	4	5
$z_j^{s_1^1}$:	-	-	20	-	-
$z_j^{s_1^2}$:	40	30	10	20	40

À présent, la connaissance des vecteurs z^1 et z^2 permet de construire la stratégie optimale s^* .

Le procédé de construction débute à la destination 5. On pose alors $\omega_5^{s^*1} = \omega_5^{s^*2} = 0$ et $E_5^{s^*} = []$. Au nœud 4, l'ordre de préférences optimale est $[5]$ et $\omega_4^{s^*1} = \omega_4^{s^*2} = 40$. Au nœud 3, l'arc $(3, 5)$ constitue le choix optimal et donc $E_3^{s^*} = [5, 4]$. Le micro-chargement de s^* au nœud 3 sur l'ensemble $\{s_1 : z_3^{s_1} = 20\} \cup \{s^*\}$ fournit les probabilités $\pi_{35}^{s^*} = 1$ et $\pi_{34}^{s^*} = 0$. De même, le micro-chargement exécuté successivement sur les ensembles $\{s_1 : z_3^{s_1} = 20\}$ et $\{s_1 : z_3^{s_1} = 10\} \cup \{s^*\}$ induit les probabilités $\pi_{35}^{s^*} = 0$ et $\pi_{34}^{s^*} = 1$. On applique ensuite l'équation générale de Bellman (4.1) au nœud 3 :

$$\begin{aligned} \omega_3^{s^*1} &= (1)(12 + \omega_5^{s^*2}) + (0)(20 + \omega_4^{s^*2}) = 12, \\ \omega_3^{s^*2} &= (0)(12 + \omega_5^{s^*2}) + (1)(20 + \omega_4^{s^*2}) = 60. \end{aligned}$$

L'ordre de préférences optimal au nœud 2 est clairement $E_2^{s^*} = [3, 5]$. Les probabilités $\pi_{23}^{s^*}$ et $\pi_{25}^{s^*}$ sont respectivement $2/3$ et $1/3$ pour le micro-chargement effectué sur l'ensemble $\{s_1 : z_2^{s_1} = 30\} \cup \{s^*\}$. Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} \omega_2^{s^*1} &= (1)(10 + \omega_3^{s^*1}) + (0)(80 + \omega_5^{s^*2}) = 22, \\ \omega_2^{s^*2} &= (2/3)(10 + \omega_3^{s^*1}) + (1/3)(80 + \omega_5^{s^*2}) = 124/3. \end{aligned}$$

Le procédé de construction se termine à l'origine 1. On cherche un ordre de préférences E_1^s minimisant l'expression

$$\pi_{12}^s(15 + \omega_2^{s^*2}) + \omega_{13}^s(30 + \omega_3^{s^*2}) = (169/3)\pi_{12}^s + (90)\pi_{13}^s.$$

Puisque l'arc $(1, 2)$ est de capacité infinie, l'ensemble $E_1^{s^*} = [2]$ et les coûts minimaux $\omega_1^{s^*1}$ et $\omega_1^{s^*2}$ sont égaux à $169/3$. Finalement, nous obtenons la stratégie optimale $s^* = ([2], [3, 5], [5, 4], [5], [])$, dont le coût est $169/3$. Le procédé de construction de s^* est résumé au tableau 4.1.

nœud j	$E_j^{s^*}$	$\omega_j^{s^*1}$	$\omega_j^{s^*2}$
5	[]	0	0
4	[5]	40	40
3	[5, 4]	12	60
2	[3, 5]	22	$\frac{141}{3}$
1	[2]	$\frac{169}{3}$	$\frac{169}{3}$

TAB. 4.1 – Construction d'une stratégie optimale dans le réseau 3

Calcul efficace de l'ordre de préférences optimal

Nous proposons maintenant une méthode efficace pour résoudre le problème d'optimisation (4.2). Ce problème consiste à trouver un ordre de préférences optimal $E_j^{s^*}$ minimisant $\omega_j^{s^p} = \sum_{k \in E_j^s} \pi_{jk}^s (c_{jk} + \omega_k^{s^*})$ ($p = 1, 2$). Soit $E_j^{\bar{s}} = [k_1, k_2, \dots, k_l]$ un ordre de préférences tel que $l = |j^+|$ et :

$$c_{jk_i} + \omega_{k_i}^{s^*} \leq c_{jk_{i+1}} + \omega_{k_{i+1}}^{s^*} \quad \forall i = 1, 2, \dots, l - 1. \quad (4.3)$$

La construction de l'ordre de préférences $E_j^{\bar{s}}$ nécessite seulement le tri de l valeurs et peut être résolu par n'importe quelle procédure de tri.

Théorème 4 *L'ordre de préférences $E_j^{\bar{s}}$ satisfaisant la condition (4.3) est une solution optimale du problème (4.2).*

preuve : La preuve est semblable à celle du théorème 3 présenté dans le mémoire de maîtrise de Schoeb [48].

4.1.3 Algorithme PCAPSHORT

Nous présentons maintenant l'algorithme **PCAPSHORT** qui construit une stratégie optimale $s^* \in W_{gr}^*(x)$. Auparavant, nous effectuons le chargement du vecteur de flots stratégiques x afin d'obtenir les vecteurs de flots stratégiques aux nœuds z^1 et z^2 . La procédure **PCAPSHORT** prend en input les vecteurs (z^1, z^2) et la paire O-D (q, r) , et retourne la stratégie optimale s^* et son coût C^{s^*} .

Le déroulement de la procédure **PCAPSHORT** suit l'équation générale de Bellman (4.1). On balaye les nœuds suivant l'ordre topologique inverse du réseau. Le traitement d'un nœud j comprend deux étapes. On construit d'abord l'ordre de préférences optimal $E_j^{s^*}$ à l'aide d'une procédure de tri. Ensuite, on effectue le micro-chargement de s^* au nœud j sur l'ensemble $\overline{W}^1 \cup \{s^*\}$, puis successivement sur les ensembles \overline{W}^1 et $\overline{W}^2 \cup \{s^*\}$. Ces deux micro-chargements fournissent respectivement les coûts $\omega_j^{s^*1}$ et $\omega_j^{s^*2}$. Nous présentons ci-dessous le code de l'algorithme **PCAPSHORT**.

PROCÉDURE PCAPSHORT ($z^1, z^2, (q, r)$)

input : $z^1 = \{z_j^{s^*1}\}_{s \in W, j \in N}$ [vecteur de flot stratégique avec priorité]
 $z^2 = \{z_j^{s^*2}\}_{s \in W, j \in N}$ [vecteur de flot stratégique sans priorité]
 (q, r) [paire O-D]
output : s^*, C^{s^*} [stratégie optimale et son coût]

INITIALISATION

for $j \in N$ **do**
 if $j \leq r$ **then**
 $\omega_j^{s^*} := \omega_j^{s^*1} := \omega_j^{s^*2} := 0$ [coûts de la stratégie optimale partant au nœud j]
 else
 $\omega_j^{s^*} := \omega_j^{s^*1} := \omega_j^{s^*2} := \infty$
 endif
endfor

MICRO-CHARGEMENT

for $j \in N$ (dans l'ordre topologique inverse et $j < r$) **do**
 for $k \in j^+$ **do**
 if $(j, k, E_k^{s^*}(1)) \in L_i$ **then** [1 ≤ i ≤ l]
 $\omega_k^{s^*} := \omega_{1k}^{s^*}$ [$z_k^{s^*}$ est prioritaire]
 else
 $\omega_k^{s^*} := \omega_{2k}^{s^*}$ [$z_k^{s^*}$ est prioritaire]
 endfor

```

endif
endfor
 $E_j^{s^*} := \text{sort}(j^+)$  [tri croissant de l'ensemble  $\{c_{jk} + \omega_k^{s^*}\}_{k \in j^+}$ ]
 $\bar{W} := \{s \in W : E_j^s \neq \emptyset\}$  [ensemble des stratégies actives]
for  $p := 1$  to 2 do [deux phases de micro-chargement]
if  $p = 1$  then [ $z_j^{s^*}$  est prioritaire]
     $\bar{W}^1 := \{s \in \bar{W} : z_j^{s^1} > 0\} \cup \{s^*\}$  [stratégies actives de flot prioritaire]
     $\bar{W}^2 := \{\emptyset\}$ 
    else [ $z_j^{s^*}$  est non prioritaire]
         $\bar{W}^1 := \{s \in \bar{W} : z_j^{s^1} > 0\}$  [stratégies actives de flot prioritaire]
         $\bar{W}^2 := \{s \in \bar{W} : z_j^{s^2} > 0\} \cup \{s^*\}$  [stratégies actives de flot non prioritaire]
    endif
for  $k \in E_j^{s^*}$  do
     $\bar{u}_{jk} := u_{jk}$  [capacité résiduelle de l'arc  $(j, k)$ ]
     $\pi_{jk}^{s^*} := 0$  [probabilité d'accès à l'arc  $(j, k)$  avec la stratégie  $s^*$ ]
endfor
for  $s \in \bar{W}$  do
     $\bar{E}_j^s := E_j^s$  [ordre de préférences résiduel]
endfor
for  $i := 1$  to 2 do [micro-chargement sur  $\bar{W}^1$  et  $\bar{W}^2$ ]
for  $s \in \bar{W}^{(i)}$  do
     $\bar{z}_j^s := z_j^{s^i}$  [flot stratégique résiduel]
     $\rho_j^{s^i} := 1$  [proportion résiduelle du flot stratégique]
endfor
while  $\bar{W}^i \neq \emptyset$  do
     $K := \emptyset$  [ensemble des premiers choix résiduels]
    for  $k \in j^+$  do
         $d_k := 0$  [demande pour le nœud  $k$ ]
         $S_k := \emptyset$  [ensemble des stratégies ayant le nœud  $k$  comme premier choix résiduel]
    endfor
    for  $s \in \bar{W}^i$  do
         $k := \bar{E}_j^s(1)$  [premier choix résiduel de la stratégie  $s$ ]

```

```

     $K := K \cup \{k\}$  [construction de  $K$ ]
     $S_k := S_k \cup \{s\}$  [construction de  $S_k$ ]
     $d_k := d_k + \bar{z}_j^s$  [construction de  $d_k$ ]
endfor
 $\nu := \max\{d_k/\bar{u}_{jk} : k \in K\}$ 
 $\beta^i := \min\{1/\nu, 1\}$  [proportion de flot résiduel affectée ]
for  $k \in K$  do
    for  $s \in S_k$  do
        if  $s = s^*$  then
             $\pi_{jk}^s := \pi_{jk}^s + \beta^i \rho_j^{si}$  [mise à jour de la probabilité  $\pi_{jk}^{s^*}$ ]
             $\rho_j^{si} := (1 - \beta^i) \rho_j^{si}$  [mise à jour de la proportion  $\rho_j^{s^*}$ ]
        else
             $\bar{z}_j^s := \bar{z}_j^s - \beta^i \bar{z}_j^s$  [mise à jour du flot résiduel  $\bar{z}_j^s$  ]
             $\rho_j^{si} := (1 - \beta^i) \rho_j^{si}$  [mise à jour de la proportion  $\rho_j^{si}$ ]
        endif
    endfor
    endfor
     $\bar{u}_{jk} := \bar{u}_{jk} - \beta^i d_k$  [mise à jour de la capacité résiduelle  $\bar{u}_{jk}$ ]
    if  $\bar{u}_{jk} = 0$  then
        for  $s \in \bar{W}^1 \cup \bar{W}^2$  do
             $\bar{E}_j^s := \bar{E}_j^s - \{k\}$  [mise à jour de l'ordre résiduel  $\bar{E}_j^s$  ]
        endfor
    endif
endfor
if  $\beta^i = 1$  then [fin du micro-chargement sur  $\bar{W}^i$ ]
     $\bar{W}^i = \emptyset$ 
endif
endwhile
endfor [fin du micro-chargement]
for  $k \in E_j^{s^*}$  do
     $\omega_j^{s^*p} := \omega_j^{s^*p} + \pi_{jk}^{s^*}(c_{jk} + \omega_k^{s^*})$  [mise à jour du coût  $\omega_j^{s^*p}$ ]
endfor
endfor
if  $j = q$  then  $C^{s^*} := \omega_q^{s^*2}$  [coût de la stratégie optimale]

```

endif
endfor

Une seule application de **PCAPSHORT** fournit les stratégies optimales reliant un nœud quelconque à la destination r . Notons aussi que la complexité théorique de **PCAPSHORT** est polynomiale.

Considérons maintenant une stratégie s^* retournée par **PCAPSHORT**. Sous quelles conditions cette stratégie est-elle admissible, non dominée et non redondante ? Nous garantissons qu'elle est admissible s'il existe un chemin de capacité infinie joignant chacun des nœuds à la destination r . Si $W_{qr}^*(x)$ est un singleton alors la stratégie s^* est non dominée. En effet, cette stratégie admet un coût strictement inférieur à ceux des autres stratégies pour le vecteur de flot x . Finalement, la stratégie s^* peut être équivalente à un autre stratégie mais heureusement, cette situation est détectable en pratique. Nous reviendrons sur ce dernier point à la prochaine section.

4.2 Algorithmes de résolution

Nous proposons maintenant des algorithmes pour trouver un équilibre stratégique. La recherche d'un équilibre stratégique se ramène à la résolution de l'inégalité variationnelle $IV(C, X)$, où C est la fonction de coût induite par le chargement du réseau et X est le polyèdre des flots stratégiques réalisables. La résolution de cette inégalité variationnelle comporte deux difficultés principales. La première difficulté provient du nombre exponentiel de stratégies. Cette difficulté réduit notre choix algorithmique et nous amène à adopter une stratégie de restriction pour trouver un équilibre. La seconde difficulté repose sur la nature de la fonction de coût. Cette fonction n'est ni différentiable, ni séparable et ni monotone. De plus, chaque évaluation de celle-ci est coûteuse en temps de calcul.

De manière générale, un algorithme d'équilibre génère une suite d'approximations d'un vecteur de flot d'équilibre. Le critère d'arrêt de l'algorithme est basé sur une mesure de distance entre l'affectation de flot courante et l'ensemble des solutions d'équilibre. Pour nos heuristiques, nous utilisons une fonction de mérite associée à l'inégalité variationnelle $IV(C, X)$, appelée fonction d'écart, comme critère

d'arrêt. Dans la première sous-section, nous introduisons cette fonction d'écart. La sous-section suivante présente l'algorithme de recherche *PFW* qui adapte d'une façon intelligente l'algorithme de Frank et Wolfe pour trouver un équilibre stratégique. Enfin, la dernière sous-section traite des méthodes de projection.

4.2.1 Fonction d'écart

Considérons l'inégalité variationnelle $IV(C, X)$ possédant l'ensemble de solutions X^* . Une *fonction de mérite* associée à cette inégalité variationnelle est une fonction réelle non négative définie sur X et s'annulant seulement sur X^* . Si g est une fonction de mérite alors l'inégalité variationnelle $IV(C, X)$ est équivalente au problème d'optimisation globale :

$$\min_{x \in X} g(x),$$

dont la valeur optimale est nulle. Nous verrons plus loin comment calculer une telle fonction g dans le cas du modèle stratégique. La *fonction d'écart primale*, introduite par Hearn [28] est un exemple classique de fonction de mérite. Cette fonction, notée g_p , s'exprime comme suit :

$$g_p(x) = \max_{y \in X} \langle C(x), x - y \rangle.$$

Il est facile de voir que cette fonction vérifie les propriétés d'une fonction de mérite. Malheureusement, la fonction d'écart primale est presque toujours non convexe. Ainsi, la minimisation de cette fonction peut se heurter aux minimaux locaux.

Introduisons maintenant la **fonction d'écart relative** (ou simplement fonction d'écart) appliquée à notre réseau. Cette fonction, notée g , s'exprime de la manière suivante :

$$g(x) = \frac{g_p(x)}{\langle C(x), x \rangle},$$

où g_p désigne la fonction d'écart primale. Remarquons que le produit scalaire se trouvant au dénominateur est toujours positif. Ainsi, la fonction g constitue bien une fonction de mérite.

Application au réseau stratégique

Soit x un vecteur de flots stratégiques réalisable. On note \bar{x} une solution du problème d'optimisation suivant :

$$\min_{y \in X} \langle C(x), y \rangle. \quad (4.4)$$

L'affectation de flot \bar{x} minimise le coût total des usagers relativement au vecteur de coût $C(x)$. La structure du polyèdre X facilite la construction d'une solution \bar{x} du problème (4.4). Pour chaque paire O-D (q, r) , on affecte la demande d_{qr} à la stratégie de coût minimal $s_{qr}^*(x)$. On obtient ainsi le vecteur de flots stratégiques \bar{x} défini comme suit :

$$\bar{x}_s = \begin{cases} d_{qr} & \text{si } s = s_{qr}^*(x) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.5)$$

Prenons un vecteur de flots stratégiques quelconque $y \in X$. Nous obtenons l'inégalité suivante :

$$\langle C(x), y \rangle \geq \sum_{(q,r) \in I} c_{qr}^*(x) d_{qr} = \langle C(x), \bar{x} \rangle,$$

ce qui démontre que le vecteur \bar{x} (construit à l'aide de la formule (4.5)) est solution de l'inégalité variationnelle $IV(C, X)$. Le vecteur \bar{x} constitue un point extrémal du polyèdre X et est appelé vecteur de flot **extrémal optimal** induit par le vecteur x . Introduisons maintenant les quantités :

$$c = \langle C(x), x \rangle;$$

$$c^* = \langle C(x), \bar{x} \rangle.$$

Le nombre c représente le coût total des usagers tandis que le nombre c^* désigne le coût total optimal relativement au vecteur de coût $C(x)$. À partir de ces deux quantités, la fonction d'écart $g(x)$ s'exprime sous la forme :

$$g(x) = \frac{c - c^*}{c}. \quad (4.6)$$

La fonction g mesure alors la *différence relative entre le coût total des usagers et le coût total optimal relativement aux coûts de transport courants*. Le vecteur de flot courant x est à l'équilibre si et seulement si les quantités c et c^* coïncident, auquel cas l'affectation de flot courante minimise le coût total localement.

Contribution des paires O-D

Il est parfois pertinent de mesurer le comportement de notre algorithme relatif à une paire $O-D$ donnée. À cet égard, nous pouvons décomposer la fonction d'écart suivant chaque paire $O-D$. Cette décomposition fournit la *contribution de chaque paire $O-D$* à la fonction d'écart g . La contribution de la paire $O-D$ (q, r) , notée $g_{qr}(x)$, s'exprime comme suit :

$$g_{qr}(x) = \frac{\langle C_{qr}(x), x_{qr} \rangle - c_{qr}^*(x) d_{qr}}{\langle C(x), x \rangle},$$

où x_{qr} et C_{qr} désignent les flots et coûts stratégiques associés à la paire (q, r) .

On obtient une expression similaire de la fonction d'écart g en additionnant la contribution de chaque paire $O-D$:

$$g(x) = \sum_{(q,r) \in I} g_{qr}(x).$$

Une paire $O-D$ (q, r) est dite à l'équilibre lorsque sa contribution g_{qr} est nulle. L'équilibre du réseau entier est atteint lorsque toutes les paires $O-D$ se trouvent simultanément à l'équilibre.

Procédure d'évaluation

La procédure d'évaluation de la fonction d'écart g est nommée **GAP**. L'input de cette procédure est un vecteur de flots stratégiques x . La première étape de la procédure consiste à calculer le coût total c . Cette étape requiert un appel de la procédure **PCAPLOAD** sur l'input x . La seconde étape comprend la construction du vecteur extrémal optimal \bar{x} et le calcul de c^* . Cette dernière étape nécessite l'appel de la procédure **PCAPSHORT** sur chaque paire $O-D$. Finalement, on calcule $g(x)$

à l'aide de la formule (4.6).

PROCÉDURE GAP (x)

input : $x = \{x_s\}_{s \in W}$ *[vecteur de flot stratégiques]*
output : $g(x)$ *[valeur de la fonction d'écart en x]*
 \bar{x} *[vecteur de flot extrémal optimal]*

INITIALISATION

for $s \in W$ **do** *[flot optimal affecté à la stratégie s]*
 $\bar{x}_s := 0$
endfor

$c := 0$ *[coût total]*
 $c^* := 0$ *[coût total optimal]*

CALCUL DU COÛT TOTAL

PCAPLOAD(x) $\rightarrow z^1, z^2, C$ *[chargement du vecteur de flot x]*

for $s \in W$ **do** *[mise à jour du coût total]*
 $c := c + x_s C^s$
endfor

CALCUL DU COÛT TOTAL OPTIMAL

for $(q, r) \in I$ **do**
PCAPSHORT($z^1, z^2, (q, r)$) $\rightarrow s^*, C^{s^*}$ *[calcul de la stratégie optimale]*
 $W := W \cup \{s^*\}$ *[enrichissement de l'ensemble de travail]*
 $\bar{x}_{s^*} := d_{qr}$ *[construction de \bar{x}]*
 $c^* := c^* + \bar{x}_{s^*} C^{s^*}$ *[mise à jour du coût total optimal]*
endfor

$g(x) := (c - c^*)/c$ *[évaluation de la fonction d'écart]*

En pratique, on appelle **PCAPSHORT** une seule fois pour chacune des destinations. On obtient ainsi toutes les stratégies optimales du réseau. Un appel de la procédure **GAP** requiert donc un appel de **PCAPLOAD** et $|D|$ appels de **PCAPSHORT**.

Enfin, notons que l'évaluation de la fonction d'écart implique un *enrichissement* de l'ensemble de travail courant. En effet, la construction du vecteur extrémal optimal \bar{x} intègre de nouvelles stratégies dans l'ensemble de travail. La possibilité d'enrichir l'ensemble de travail W à partir de la procédure **GAP** est à la base de la recherche d'un équilibre stratégique.

4.2.2 Algorithme de linéarisation

L'algorithme de Frank et Wolfe [22] est fort utilisé pour résoudre des problèmes d'équilibre de trafic sur des chemins. Cette popularité découle du fait que l'algorithme exploite efficacement la structure du réseau. En effet, à l'intérieur d'une itération, la méthode comprend un problème de chemin le plus court soluble rapidement (Sheffi [49]). Nous adaptons cet algorithme à la quête d'un équilibre stratégique. La construction de stratégie optimale remplace alors la procédure de chemin le plus court. L'algorithme de Frank et Wolfe adapté suggère une façon naturelle de s'approcher d'un équilibre. Toutefois, la convergence de l'algorithme n'est pas garantie puisque notre fonction de coût ne s'exprime pas comme un gradient. Cet algorithme constitue alors une heuristique que nous appelons **pseudo Frank-Wolfe** (ou PFW).

Déroulement de la méthode

Le déroulement de l'algorithme PFW est simple. Au départ, on dispose d'un ensemble de travail W^0 et d'un vecteur de flots stratégiques x^0 . À l'itération k , on cherche une solution extrémale optimale \bar{x}^k au programme linéaire :

$$\min_{y \in X} \langle C(x^k), y \rangle.$$

Une telle solution est générée par la procédure **GAP** sur l'input x^k . Ensuite, une *combinaison convexe* des vecteurs x^k et \bar{x}^k fournit une nouvelle approximation d'un équilibre :

$$x^{k+1} = (1 - \theta^k)x^k + \theta^k\bar{x}^k.$$

Pour chaque paire O-D (q, r) , on réaffecte une proportion θ^k de la demande d_{qr} à la stratégie optimale $s_{qr}^*(x^k)$. Du même coup, on enrichit l'ensemble de travail courant

W^k de cette stratégie optimale. La figure 4.2 montre une itération de l'algorithme PFW sur un polyèdre trivial. La suite des pas θ^k doit tendre vers zéro. Cette condi-

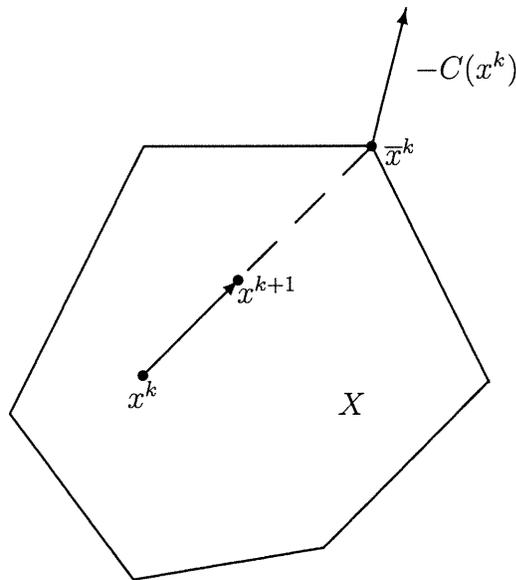


FIG. 4.2 – La k -ième itération de l'algorithme PFW

tion est nécessaire à la convergence de la méthode. Cependant, les pas ne doivent pas converger trop rapidement, sinon la méthode cesse de progresser après quelques itérations, avant même de s'approcher de l'ensemble des solutions X^* . On impose alors que la série associée à la suite de pas diverge. Un choix populaire des pas θ_k est la **suite harmonique** $\theta^k = 1/(k + 1)$. Nous appelons **PSTRATEQ1** l'algorithme PFW utilisant les pas harmoniques. La fonction d'écart g sert de critère d'arrêt pour l'algorithme.

ALGORITHME PSTRATEQ1

input : $x^0 = \{x_s^0\}_{s \in W^0}$	[vecteur de flots stratégiques initial]
$\epsilon > 0$	[facteur de tolérance]
output : x^*	[équilibre stratégique]

INITIALISATION

GAP(x^0) $\rightarrow \bar{x}^0, g(x^0)$

$k := 0$

BOUCLE PRINCIPALE

while $g(x^k) \geq \epsilon$ **do**

$x^{k+1} := (1 - \theta^k)x^k + \theta^k \bar{x}^k$ [nouvelle approximation de l'équilibre]

$k := k + 1$

GAP(x^k) $\rightarrow \bar{x}^k, g(x^k)$

endwhile

$x^* := x^k$ [vecteur d'équilibre stratégique]

Soit $\{x^k\}$ la suite produite par la méthode PFW. L'algorithme original de Frank et Wolfe converge sous l'hypothèse que la fonction de coût correspond à un gradient (Sheffi [49]). Notre fonction de coût C ne possède pas cette dernière propriété. Cependant, si la suite $\{x^k\}$ admet une limite y , alors $y \in X^*$.

Théorème 5 *Si la suite $\{x_k\}$ générée par **PSTRATEQ1** converge vers y , alors $y \in X^*$.*

preuve (par contradiction) : Soit y le point limite de la suite $\{x_k\}$. Supposons que $y \notin X^*$. Il existe alors une stratégie $\tilde{s} \in W_{gr}$ telle que :

$$y_{\tilde{s}} > 0 \quad \text{et} \quad C^{\tilde{s}}(y) > c_{gr}^*(y).$$

Puisque C est semi-continue inférieurement, nous avons :

$$x_{\tilde{s}}^k > 0 \quad \text{et} \quad C^{\tilde{s}}(x^k) > c_{gr}^*(x^k) \quad (k \geq \bar{k}),$$

car sinon, par le théorème 1, nous aurons pour tout vecteur $x \in X$:

$$\langle C(x^k), x^k - x \rangle \leq 0 \quad (k \geq \bar{k}).$$

et $\langle C(y), y - x \rangle \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \langle C(x^k), x^k - x \rangle \leq 0$, contredit l'hypothèse $y \notin X^*$.

Ainsi, la composante $\bar{x}_{\tilde{s}}^k$ est nulle pour $k \geq \bar{k}$. Il en découle que :

$$x_{\tilde{s}}^{k+1} = (1 - \theta^k)x_{\tilde{s}}^k = \frac{k}{k+1}x_{\tilde{s}}^k \quad (k \geq \bar{k}).$$

En appliquant cette formule récursive successivement, nous obtenons :

$$x_{\bar{s}}^{\bar{k}+l} = \frac{\bar{k}}{\bar{k}+l} x_{\bar{s}}^{\bar{k}}.$$

On constate que $x_{\bar{s}}^{\bar{k}+l}$ tend vers zéro lorsque l tend vers l'infini. Cela contredit l'hypothèse $y_{\bar{s}} > 0$. \square

Un des défauts de la méthode PFW est son faible taux de convergence. Si notre suite converge vers un équilibre, nous ne pouvons espérer mieux qu'un taux de convergence *sous-linéaire* (taux de convergence théorique de la méthode Frank-Wolfe) :

$$g(x^k) \in O(1/k).$$

Initialisation et critère d'arrêt

Nous décrivons maintenant la construction d'un vecteur de flot initial x^0 . Nous appliquons la procédure **PCAPSHORT** sur chacune des paires O-D (q, r) , avec un input (z^1, z^2) vide. En l'absence de flot, cette procédure retourne bien une stratégie admissible s_{qr}^* . L'ensemble des premiers nœuds de préférences de cette stratégie constitue alors un plus court chemin. On affecte la demande d_{qr} à la stratégie s_{qr}^* . Ainsi, l'ensemble de travail initial W^0 contient une stratégie pour chacune des paires O-D. Nous arrêtons la recherche d'un équilibre lorsque la fonction d'écart g , évaluée en x^k , est suffisamment faible. Malheureusement, ce critère d'arrêt ne fournit pas de borne sur la distance euclidienne entre x^k et l'ensemble des solutions X^* car la fonction de coût C n'est pas fortement monotone. Toutefois, une valeur faible de la fonction g traduit une situation de trafic stable où les usagers adoptent des stratégies quasiment optimales.

Réduction de la taille de l'ensemble de travail

À chaque itération de l'algorithme PFW, la taille de l'ensemble de travail courant augmente de la valeur $|I|$. Une conséquence de l'accroissement de l'ensemble de travail est le grand besoin d'espace mémoire pour représenter les stratégies ainsi que l'augmentation du temps de calcul de la procédure **GAP**. Par conséquent, nous

avons avantage à garder la taille de l'ensemble de travail la plus petite possible. Les deux règles qui suivent vont dans cette direction. La première règle prend effet après chaque appel de la procédure **PCAPSHORT**. Nous effectuons un test avant d'introduire une stratégie optimale dans l'ensemble de travail courant. Pour chacune des paires O-D (q, r) , nous trouvons la stratégie $\tilde{s} \in W_{qr}$ de coût minimal :

$$\tilde{s} \in \arg \min_{s \in W_{qr}} C^s.$$

Soit ϵ_1 la tolérance pour la comparaison des coûts stratégiques. Nous acceptons la stratégie optimale $s^* = s_{qr}^*$ seulement si :

$$C^{s^*} + \epsilon_1 < C^{\tilde{s}}.$$

Dans le cas contraire, on pose $s^* = \tilde{s}$. Le paramètre ϵ_1 permet de détecter les stratégies optimales quasi-redundantes.

La seconde règle permet d'éliminer des stratégies actives sous-optimales. On note ϵ_2 une borne inférieure sur le flot de chaque stratégie. Au début de chaque itération k de la procédure **GAP**, nous considérons l'approximation courante de l'équilibre x^k . Si $x_s^k < \epsilon_2$ pour une certaine stratégie $s \in W^k$ alors on élimine la stratégie s de l'ensemble de travail W^k . Pour satisfaire la demande, nous affectons le flot de s à une autre stratégie active. Cette stratégie active est choisie arbitrairement parmi les stratégies relatives à la paire $(q(s), r(s))$. L'application de ces deux règles a pour effet de réduire la taille de l'ensemble de travail. Un bon choix des paramètres ϵ_1 et ϵ_2 accélère la recherche d'un équilibre. Plus ces paramètres sont élevés, plus ils écartent certaines stratégies intéressantes de notre ensemble stratégique. Par contre, ces quantités doivent être faibles pour mener une recherche intelligente. Les valeurs optimales de ces paramètres dépendent des données du réseau. Il est prudent de débiter la recherche avec des faibles valeurs ϵ_1 et ϵ_2 . Au besoin, on augmente ces valeurs de manière progressive. En général, cette technique permet d'obtenir un ensemble de stratégies intéressantes.

Variante

Nous présentons maintenant une variante de l'algorithme **PSTRATEQ1** nommée **PSTRATEQ2**. Cette variante est semblable à celle proposée par Schoeb [48]. À l'itération k , nous modifions la manière de combiner les vecteurs x^k et \bar{x}^k . Pour chacune des paires O-D (q, r) , la proportion de flot affectée à la stratégie optimale s^* dépend des coûts stratégiques. Pour chaque stratégie $s \in W_{qr}^k$, cette proportion est donnée comme suit :

$$\theta_s^k = 1 - \frac{C^{s^*}}{C^s}.$$

Ces proportions θ_s^k sont appelées **pas adaptatifs**. On modélise dans ce cas un comportement basé sur le degré d'insatisfaction. Plus un usager est insatisfait d'une stratégie, plus il y a de chance qu'il rejette celle-ci. En revanche, la probabilité qu'un usager modifie une stratégie quasi-optimale est faible.

Soit $\{x^k\}$ la suite produite par l'algorithme **PSTRATEQ2**. Supposons que cette suite converge vers y . Nous démontrons que $y \in X^*$.

Théorème 6 *Si la suite $\{x_k\}$ générée par **PSTRATEQ2** converge vers y , alors $y \in X^*$.*

preuve (par contradiction) : Soit y le point limite de la suite $\{x_k\}$. Supposons que $y \notin X^*$. nous trouvons alors une stratégie $\tilde{s} \in W_{qr}$ telle que :

$$y_{\tilde{s}} > 0 \quad \text{et} \quad C^{\tilde{s}}(y) > c_{qr}^*(y).$$

Puisque C est semi-continue inférieurement, nous avons :

$$x_{\tilde{s}}^k > 0 \quad \text{et} \quad C^{\tilde{s}}(x^k) > c_{qr}^*(x^k) \quad (k \geq \bar{k}).$$

Cela implique que $\bar{x}_{\tilde{s}}^k = 0$ pour $k \geq \bar{k}$.

Maintenant, montrons que $\lim_{k \rightarrow \infty} |\bar{x}_{\tilde{s}}^k - x_{\tilde{s}}^k| = 0$. D'une part, lorsque k tend vers l'infini nous avons :

$$|x_{\tilde{s}}^{k+1} - x_{\tilde{s}}^k| = \theta_{\tilde{s}}^k |\bar{x}_{\tilde{s}}^k - x_{\tilde{s}}^k| \rightarrow 0. \quad (4.7)$$

D'autre part, par semi-continuité de la fonction C , nous déduisons :

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \theta_{\bar{s}}^k &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{c_{qr}^*(x^k)}{C_{\bar{s}}(x^k)} \right) \\ &\geq 1 - \frac{c_{qr}^*(y)}{C_{\bar{s}}(y)} > 0. \end{aligned}$$

Ainsi, les pas $\theta_{\bar{s}}^k$ ne convergent pas vers zéro. Par (4.7), on déduit :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\bar{x}_{\bar{s}}^k - x_{\bar{s}}^k| = 0.$$

Puisque $\bar{x}_{\bar{s}}^k = 0$ pour k assez grand, on conclut que :

$$y_{\bar{s}} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{\bar{s}}^k = 0.$$

Cela contredit l'hypothèse $y_{\bar{s}} > 0$. □

4.2.3 Algorithmes de projection

Les **algorithmes de projection** sont des méthodes itératives et basés sur la formulation de point fixe d'une inégalité variationnelle. Ces méthodes doivent être appliquées sur un espace de travail stratégique fixe.

Rappelons la formulation de point fixe de inégalité variationnelle $IV(C, X)$:

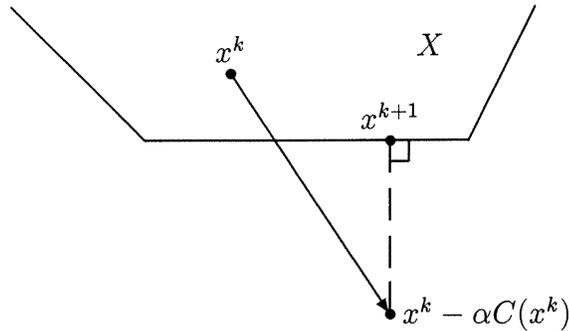
$$x^* \in X^* \Leftrightarrow x^* = p_{\alpha}(x^*),$$

où α est un paramètre positif et $p_{\alpha}(x) = \text{proj}_X(x - \alpha C(x))$ désigne la projection du vecteur $x - \alpha C(x)$ sur l'ensemble convexe X suivant la norme euclidienne.

L'algorithme projectif le plus naturel est l'**algorithme de projection**, défini par l'équation de récurrence :

$$x^{k+1} = p_{\alpha}(x^k) = \text{proj}_X(x^k - \alpha C(x^k)),$$

où le paramètre α reste à déterminer. La figure 4.3 illustre une itération typique de cet algorithme.

FIG. 4.3 – La k -ième itération de l'algorithme de projection

Si la fonction C est fortement monotone alors l'inégalité variationnelle $IV(C, X)$ possède une solution unique. Dans ce cas, une valeur de α suffisamment faible induit une suite de points x^k vérifiant l'inégalité :

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq \rho \|x^k - x^*\|,$$

avec ρ compris dans l'intervalle $(0, 1)$. La suite $\{x^k\}$ possède donc un taux de convergence *linéaire*. Lorsque C n'est pas fortement monotone (comme dans notre cas), la convergence de cette suite n'est pas garantie. Cependant, si la suite possède une limite y , alors $y \in X^*$. En effet, puisque p_α est continue nous avons :

$$y = \lim_{k \rightarrow \infty} x^k = \lim_{k \rightarrow \infty} p_\alpha(x^{k-1}) = p_\alpha(y).$$

Pour améliorer les chances d'obtenir un point fixe, il est nécessaire de choisir α assez faible. En pratique, on peut déterminer la valeur idéale de ce paramètre de manière empirique.

Le principal défaut de l'algorithme de projection est de ne converger que sous l'hypothèse de la forte monotonie de la fonction C . Plusieurs variantes de cet algorithme ont été proposées qui convergent sous une hypothèse plus faible. Parmi ces variantes, on retrouve l'**algorithme de Konnov** [30]. Cet algorithme fait appel à deux projections et une combinaison convexe. On effectue dans l'ordre les trois instructions suivantes :

$$\begin{aligned} p^k &= \text{proj}_X(x^k - \lambda C(x^k)), \\ y^k &= (1 - \theta)x^k + \theta p^k, \\ x^{k+1} &= \text{proj}_X(x^k - \alpha C(y^k)), \end{aligned}$$

où $\alpha, \lambda \in R^+$ et $\theta \in (0, 1)$. La figure 4.4 illustre une itération de l'algorithme. L'al-

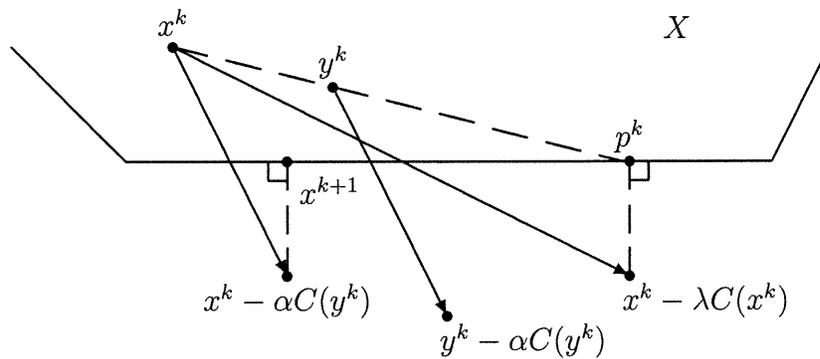


FIG. 4.4 – L'algorithme de Konnov

gorithme de Konnov converge sous l'hypothèse que C est *pseudo-monotone*, c'est à dire :

$$\langle C(x), x - y \rangle \leq 0 \implies \langle C(y), x - y \rangle \leq 0 \quad \forall x, y \in X.$$

Cette propriété est plus faible que la monotonie. L'algorithme de Konnov possède un taux de convergence comparable à celui de l'algorithme de projection. On doit toutefois choisir α suffisamment faible et λ proportionnel à $1/\theta$.

Finalement, on obtient l'**algorithme de l'extragradient** en posant $\theta = 1$ et $\lambda = \alpha$ dans la méthode de Konnov. Cet algorithme, proposé par Korpelevitch [31] constitue une méthode très robuste. Il converge sous l'hypothèse de pseudo-monotonie, mais son taux de convergence peut être moins bon que ceux des méthodes précédentes.

Les algorithmes de projection font appel à l'opérateur de projection $\text{proj}_{X^w}(\cdot)$. La projection d'un point sur un polyèdre quelconque constitue un problème complexe.

Heureusement, il existe une méthode de projection efficace lorsque le polyèdre s'exprime comme un produit de simplexes comme c'est le cas pour l'espace de travail X_W . Une description de cette méthode de projection est décrite dans Schoeb [48].

4.3 Résultats numériques

Cette section traite des résultats numériques portant sur le calcul d'équilibres stratégiques. Ces résultats visent essentiellement à tester les performances de nos algorithmes. Cependant, certaines propriétés théoriques du modèle stratégique (monotonie de la fonction coût) sont également étudiés. Nous nous intéressons d'abord au calcul d'un équilibre dans un réseau de petite taille. La simplicité de ce petit réseau facilite une analyse théorique du problème. Nous testons ensuite nos méthodes sur un réseau de taille moyenne. Ce second problème constitue un défi algorithmique plus intéressant.

4.3.1 Premier problème : le petit réseau

Considérons le réseau 4 illustré à la figure 4.5, tiré de l'article de Marcotte et Nguyen [37]. Ce petit réseau modélise une situation fictive de transport en commun. Les usagers habitant aux nœuds 1 et 2 partagent chaque jour une destination commune : le nœud 6. Aux heures de pointe, les demandes pour les paires O-D (1,6) et (2,6) sont de 10 et 12 respectivement. Les chemins 1 – 4 – 6 et 2 – 3 – 4 correspondent à deux lignes d'autobus A et B de capacités égales à 10 unités de flot. Les autres arcs sont interprétés comme des arcs de marche. Nous recherchons un équilibre de trafic en utilisant le concept de stratégie.

Il est clair que l'autobus constitue un moyen de transport attrayant pour minimiser le temps de transport. Le choix de l'autobus comporte toutefois une part de risque. En effet, on peut refuser l'accès abordable du véhicule, faute de place disponible. Par exemple, imaginons qu'au nœud 3 plusieurs individus provenant du nœud 1 choisissent la ligne B . Une proportion de ceux-ci ne trouveront pas de places libres à bord du véhicule et devront utiliser l'arc de marche coûteux (3,6). On constate alors une augmentation du coût de transport associé à ce choix stratégique. Éventuellement,

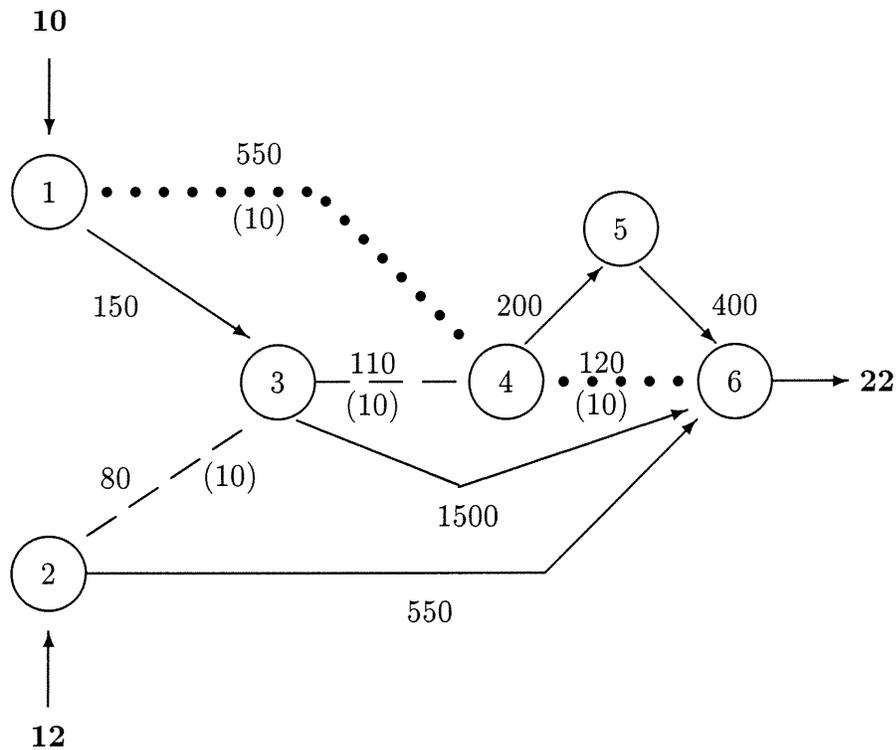


FIG. 4.5 – Réseau 4

certain usagers emprunteront la ligne d'autobus *A* ou l'arc de marche (2,6), afin d'éviter la possibilité de se retrouver sur l'arc (3,6).

En tenant compte des priorités, on retrouve 4 stratégies intéressantes. Les usagers originaires du nœud 1 ont le choix entre les deux stratégies suivantes :

nœud :	1	2	3	4	5	6
s_1 :	[4]	[]	[]	[6]	[]	[]
s_2 :	[3]	[]	[4, 6]	[6, 5]	[6]	[]

Pour la paire O-D (2,6), on retient les deux stratégies pertinentes :

nœud :	1	2	3	4	5	6
s_3 :	[]	[3, 6]	[4]	[6, 5]	[6]	[]
s_4 :	[]	[6]	[]	[]	[]	[]

Il est facile de montrer que toute autre stratégie est dominée par (ou équivalente à) l'une de ces quatre stratégies. par exemple, la stratégie ([3], [], [4, 6], [5], [6], []) est

dominée par s_2 , la stratégie $([], [6, 3], [4, 6], [6, 5], [6], [])$ est équivalente à s_4 puisque l'arc (2,6) est de capacité infinie, etc.

Résolution exacte

Notons x_i et C_i le flot et le coût de la stratégie s_i ($i = 1, 2, 3$ et 4). Nous recherchons un vecteur de flot x^* qui satisfait les conditions d'équilibre du réseau. Dénotons par π_{23} la probabilité d'atteindre la ligne d'autobus B au nœud 2 pour les usagers adoptant la stratégie s_3 . Posons également π_{34} la probabilité d'atteindre la ligne d'autobus B au nœud 3 pour les usagers adoptant la stratégie s_2 . De même, π_{46} désigne la probabilité d'accéder à la ligne d'autobus A au nœud 4 pour les usagers utilisant la stratégie s_2 ou s_3 . Ces probabilités sont données comme suit :

$$\begin{aligned}\pi_{23} &= \min\left\{1, \frac{10}{x_3}\right\} \\ \pi_{34} &= \begin{cases} 0 & \text{si } x_3 \geq 10 \\ \min\left\{1, \frac{10-x_3}{x_2}\right\} & \text{sinon.} \end{cases} \\ \pi_{46} &= \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 = 10 \\ \frac{10-x_1}{x_2+x_3} & \text{sinon.} \end{cases}\end{aligned}$$

Maintenant, à l'aide des probabilités π_{23} , π_{34} et π_{46} les coûts stratégiques s'expriment de la manière suivante :

$$\begin{aligned}C_1(x) &= 670; \\ C_2(x) &= 150 + \pi_{34}[110 + \pi_{46}120 + (1 - \pi_{46})(200 + 400)] + (1 - \pi_{34})1500; \\ C_3(x) &= \pi_{23}[80 + 110 + \pi_{46}120 + (1 - \pi_{46})(200 + 400)] + (1 - \pi_{23})550; \\ C_4(x) &= 550.\end{aligned}$$

D'abord, nous affirmons que $x_3^* \leq 10$. Dans le cas contraire, nous pouvons facilement démontrer que les conditions de Wardrop ne sont pas satisfaites. Maintenant, traitons le cas où les quatre stratégies sont utilisées à l'équilibre. Dans ce cas, le vecteur $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$ est solution du système d'équations :

$$150 + \frac{10 - x_3^*}{x_2^*} \left[110 + \frac{10 - x_1^*}{x_2^* + x_3^*} 120 + \frac{x_3^*}{x_2^* + x_3^*} (200 + 400) \right] + \frac{x_2^* + x_3^* - 10}{x_2^*} 500 = 670$$

$$80 + 110 + \frac{10 - x_1^*}{x_2^* + x_3^*} 120 + \frac{x_3^*}{x_2^* + x_3^*} (200 + 400) = 550$$

$$x_1^* + x_2^* = 10$$

$$x_1^* + x_2^* = 12.$$

La solution unique de ce système est $x^* \approx (5, 5, 5.24, 6.76)$. Cette solution d'équilibre n'est pas unique. En effet, le vecteur $(10, 0, 0, 12)$ constitue une autre solution d'équilibre pour le réseau 4, avec seulement deux stratégies utilisées, soient s_1 et s_4 . Avec cette affectation de flot stratégique, aucun usager ne peut améliorer son coût de transport en changeant unilatéralement sa stratégie, étant donné que la capacité résiduelle de l'arc $(4, 6)$ est nulle. Maintenant, si la demande de la paire $(1, 6)$ passe de 10 à $10 + \epsilon$ unités de flot, alors les ϵ unités de flot additionnelles n'ont d'autre choix que d'emprunter le chemin 1-3-4-5-6 de coût égal à $860 > 670$ (coût du chemin 1-4-6 emprunté par les 10 usagers de la paire $(1, 6)$). Cette situation montre l'instabilité de la solution d'équilibre $(10, 0, 0, 12)$ par rapport à de légères perturbations des données du réseau.

Résolution numérique

Nous testons nos méthodes qui recherchent un équilibre sur le réseau 4. L'ensemble de travail stratégique contient les quatre stratégies intéressantes du réseau (s_1, s_2, s_3 et s_4). Ainsi nous appliquons nos algorithmes sur l'espace complet des stratégies. Nous accordons un maximum de 10 000 itérations par expérience.

Nous débutons les tests avec les deux méthodes PFW. Les résultats de l'algorithme **PSTRATEQ1** (pas harmoniques) sont exposés aux tableaux 4.2 et 4.3 tandis que ceux de l'algorithme **PSTRATEQ2** (pas adaptatifs) sont présentés au tableau 4.4. Chaque ligne du tableau correspond à une itération donnée de l'algorithme. On y retrouve le vecteur de flots stratégiques, le vecteur de coût stratégique et la valeur de la fonction d'écart. Les flots (et coûts) stratégiques sont arrondis au centième alors que la valeur de la fonction d'écart est arrondie au millième.

Nous constatons que l'algorithme **PSTRATEQ1** converge lentement vers l'une des deux solutions d'équilibre, selon le choix du vecteur de flot initial. Ainsi, cette méthode converge vers la solution $(10, 0, 0, 12)$ (respectivement $(5, 5, 5.24, 6.76)$) en démarrant avec le vecteur de flot $(0, 10, 0, 12)$ (respectivement $(2, 8, 4, 8)$). Pour l'algorithme **PSTRATEQ2**, nous avons vérifié que, quel que soit le vecteur de flot, cette heuristique converge toujours vers la solution $(5, 5, 5.24, 6.76)$. Le tableau 4.4 montre cette convergence pour le vecteur initial $(0, 10, 0, 12)$.

Nous expérimentons ensuite les méthodes projectives. Le choix de paramètres de contrôle (tel que α) est déterminé de manière empirique. Pour $\alpha < 0.02$, nous observons que, dépendamment du vecteur de flot initial choisi, les méthodes projectives convergent rapidement vers l'une des deux solutions d'équilibre. Par exemple, les tableaux 4.5 et 4.6 présentent la convergence de l'algorithme de projection et l'algorithme de Konnov vers la solution $(5, 5, 5.24, 6.76)$ tandis que le tableau 4.7 expose la convergence de l'algorithme d'extragradient vers la solution $(10, 0, 0, 12)$. Finalement, comme le montre le tableau 4.8, toutes ces méthodes convergent vers la solution extrémale $(10, 0, 0, 12)$ pour une valeur de α assez grande. Ceci s'explique du fait que l'algorithme se déplace d'un vecteur extrémal à un autre jusqu'à l'atteinte de la solution d'équilibre extrémale $(10, 0, 0, 12)$.

Maintenant, nous modifions le réseau 4 afin d'obtenir une solution d'équilibre unique. Fixons la demande de la paire $O-D$ $(1,6)$ à 9 unités de flot. Cette modification n'influence pas la nature de l'ensemble stratégique. Dans ce cas, $(5, 4, 6.19, 5.81)$ constitue un vecteur d'équilibre stratégique. En effet, les coûts des stratégies pour une paire $O-D$ sont alors égaux : $C(x) = (670, 670, 550, 550)$. Les résultats de l'algorithme **PSTRATEQ1**, l'algorithme **PSTRATEQ2** et l'algorithme de projection sont présentés aux tableaux 4.9, 4.10 et 4.11 respectivement.

#iter.	Flots stratégiques				Coûts stratégiques				Fonction d'écart (%)
	x_{s_1}	x_{s_2}	x_{s_3}	x_{s_4}	C_{s_1}	C_{s_2}	C_{s_3}	C_{s_4}	
0	0.00	10.00	0.00	12.00	670.00	380.00	310.00	550.00	27.692
1	0.00	10.00	1.33	10.67	670.00	549.33	310.00	550.00	21.744
2	0.00	10.00	2.40	9.60	670.00	684.80	353.64	550.00	19.049
5	2.31	7.69	4.62	7.38	670.00	838.54	420.77	550.00	16.076
10	4.44	5.56	6.67	5.33	670.00	1016.00	523.33	550.00	13.722
20	6.43	3.57	5.57	6.43	670.00	672.50	602.50	550.00	2.216
50	8.28	1.72	2.69	9.31	670.00	672.50	602.50	550.00	1.082
100	9.07	0.93	1.44	10.56	670.00	672.50	602.50	550.00	0.584
200	9.52	0.48	0.75	11.25	670.00	672.50	602.50	550.00	0.304
500	9.80	0.20	0.31	11.69	670.00	672.50	602.50	550.00	0.124
1000	9.90	0.10	0.15	11.85	670.00	672.50	602.50	550.00	0.062
2000	9.95	0.05	0.08	11.92	670.00	672.50	602.50	550.00	0.021
10000	10.00	0.00	0.00	12.00	670.00	860.00	790.00	550.00	0.001

TAB. 4.2 – **PSTRATEQ1** appliqué au réseau 4

#iter.	Flots stratégiques				Coûts stratégiques				Fonction d'écart (%)
	x_{s_1}	x_{s_2}	x_{s_3}	x_{s_4}	C_{s_1}	C_{s_2}	C_{s_3}	C_{s_4}	
0	2.00	8.00	4.00	8.00	670.00	769.50	406.00	550.00	14.408
1	3.14	6.86	5.14	6.86	670.00	857.27	460.86	550.00	13.418
2	4.00	6.00	6.00	6.00	670.00	931.33	502.00	550.00	12.729
5	5.64	4.36	6.55	5.45	670.00	858.77	580.55	550.00	7.146
10	4.50	5.50	5.25	6.75	670.00	739.73	526.00	550.00	4.023
20	5.08	4.92	5.08	6.92	670.00	623.69	553.69	550.00	1.939
50	5.04	4.96	5.57	6.43	670.00	732.68	551.71	550.00	1.154
100	5.11	4.89	5.32	6.68	670.00	668.95	555.43	550.00	0.528
200	5.01	4.99	5.18	6.82	670.00	656.52	550.47	550.00	0.257
500	4.98	5.02	5.24	6.76	670.00	672.04	549.24	550.00	0.115
1000	4.99	5.01	5.24	6.76	670.00	669.93	549.62	550.00	0.022
2000	5.00	5.00	5.25	6.75	670.00	670.51	550.05	550.00	0.017
10000	5.00	5.00	5.24	6.76	670.00	670.01	550.01	550.00	0.002

TAB. 4.3 – **PSTRATEQ1** appliqué au réseau 4 (autre vecteur de flot initial)

#iter.	Flots stratégiques				Coûts stratégiques				Fonction d'écart (%)
	x_{s_1}	x_{s_2}	x_{s_3}	x_{s_4}	C_{s_1}	C_{s_2}	C_{s_3}	C_{s_4}	
0	0.00	10.00	0.00	12.00	670.00	380.00	310.00	550.00	27.692
1	0.00	10.00	5.24	6.76	670.00	1045.02	310.00	550.00	34.023
2	3.59	6.41	8.19	3.81	670.00	1339.71	482.25	550.00	26.715
3	6.79	3.21	8.66	3.34	670.00	1254.74	636.09	550.00	16.459
5	8.51	1.49	5.88	6.12	670.00	762.98	692.98	550.00	6.854
10	9.13	0.87	2.09	9.91	670.00	719.18	649.18	550.00	1.849
40	5.00	5.00	5.30	6.70	670.00	681.27	549.93	550.00	0.426
70	5.00	5.00	5.24	6.76	670.00	670.02	549.99	550.00	0.001
100	5.00	5.00	5.24	6.76	670.00	670.00	550.00	550.00	0.000

TAB. 4.4 – **PSTRATEQ2** appliqué au réseau 4

#iter.	Flots stratégiques				Coûts stratégiques				Fonction d'écart (%)
	x_{s_1}	x_{s_2}	x_{s_3}	x_{s_4}	C_{s_1}	C_{s_2}	C_{s_3}	C_{s_4}	
0	0.00	10.00	0.00	12.00	670.00	380.00	310.00	550.00	27.692
1	0.00	10.00	1.20	10.80	670.00	532.40	310.00	550.00	22.276
2	0.00	10.00	2.40	9.60	670.00	684.80	310.00	550.00	19.049
3	0.07	9.93	3.60	8.40	670.00	833.43	313.55	550.00	25.644
5	2.28	7.72	5.77	6.23	670.00	1014.06	419.26	550.00	22.838
10	7.01	2.99	5.72	6.28	670.00	695.23	625.23	550.00	3.660
20	7.17	2.83	3.05	8.95	670.00	629.30	559.30	550.00	2.425
50	5.00	5.00	5.24	6.76	670.00	669.90	550.11	550.00	0.008
100	5.00	5.00	5.24	6.76	670.00	670.00	550.00	550.00	0.000

TAB. 4.5 – Algorithme de projection appliqué au réseau 4 ($\alpha = 0.01$)

#iter.	Flots stratégiques				Coûts stratégiques				Fonction d'écart (%)
	x_{s_1}	x_{s_2}	x_{s_3}	x_{s_4}	C_{s_1}	C_{s_2}	C_{s_3}	C_{s_4}	
0	2.00	8.00	0.00	12.00	670.00	380.00	310.00	550.00	31.512
1	0.55	9.45	1.20	10.80	670.00	491.94	336.40	550.00	21.167
2	0.00	10.00	2.27	9.73	670.00	668.05	310.00	550.00	18.339
3	0.00	10.00	3.47	8.53	670.00	820.45	310.00	550.00	25.423
5	2.10	7.90	5.69	6.31	670.00	1011.52	410.74	550.00	23.528
10	6.95	3.05	5.76	6.24	670.00	693.93	623.93	550.00	3.617
20	7.03	2.97	3.19	8.81	670.00	628.37	558.37	550.00	2.417
50	5.00	5.00	5.24	6.76	670.00	669.89	550.10	550.00	0.008
100	5.00	5.00	5.24	6.76	670.00	670.00	550.00	550.00	0.000

TAB. 4.6 – Algorithme de Konnov appliqué au réseau 4 ($\alpha = 0.01$, $\lambda = 0.05$, $\theta = 0.001$)

#iter.	Flots stratégiques				Coûts stratégiques				Fonction d'écart (%)
	x_{s_1}	x_{s_2}	x_{s_3}	x_{s_4}	C_{s_1}	C_{s_2}	C_{s_3}	C_{s_4}	
0	0.00	10.00	10.00	2.00	670.00	1650.00	310.00	550.00	49.662
1	4.90	5.10	10.02	1.98	670.00	1650.00	545.21	550.00	27.438
2	9.80	0.20	8.87	3.13	670.00	849.42	779.42	550.00	13.479
3	10.00	0.00	7.67	4.33	670.00	860.00	790.00	550.00	12.164
5	10.00	0.00	5.27	6.73	670.00	860.00	790.00	550.00	8.691
7	10.00	0.00	2.87	9.13	670.00	860.00	790.00	550.00	4.931
8	10.00	0.00	1.67	10.33	670.00	860.00	790.00	550.00	2.933
9	10.00	0.00	0.47	11.53	670.00	860.00	790.00	550.00	0.849
10	10.00	0.00	0.00	12.00	670.00	860.00	790.00	550.00	0.000

TAB. 4.7 – Algorithme de l'extragrédient appliqué au réseau 4 ($\alpha = 0.01$)

#iter.	Flots stratégiques				Coûts stratégiques				Fonction d'écart (%)
	x_{s_1}	x_{s_2}	x_{s_3}	x_{s_4}	C_{s_1}	C_{s_2}	C_{s_3}	C_{s_4}	
0	0.00	10.00	1.00	11.00	670.00	507.00	310.00	550.00	23.098
1	0.00	10.00	12.00	0.00	670.00	1650.00	350.00	550.00	47.343
2	10.00	0.00	12.00	0.00	670.00	1650.00	750.00	550.00	15.287
3	10.00	0.00	0.00	12.00	670.00	860.00	790.00	550.00	0.000

TAB. 4.8 – Algorithme de projection appliqué au réseau 4 ($\alpha = 1$)

#iter.	Flots stratégiques				Coûts stratégiques				Fonction d'écart (%)
	x_{s_1}	x_{s_2}	x_{s_3}	x_{s_4}	C_{s_1}	C_{s_2}	C_{s_3}	C_{s_4}	
0	0.00	9.00	0.00	12.00	670.00	380.00	310.00	550.00	28.742
1	0.00	9.00	1.71	10.29	670.00	480.79	310.00	550.00	23.475
2	0.00	9.00	3.00	9.00	670.00	662.22	310.00	550.00	18.243
5	1.64	7.36	5.45	6.55	670.00	914.53	388.55	550.00	21.088
10	3.94	5.06	7.50	4.50	670.00	1116.17	499.00	550.00	17.153
20	5.88	3.12	6.92	5.08	670.00	674.65	592.46	550.00	2.384
50	4.82	4.18	6.21	5.79	670.00	709.07	541.43	550.00	1.670
100	5.09	3.91	6.23	5.77	670.00	659.21	554.53	550.00	0.659
200	4.98	4.02	6.23	5.77	670.00	683.81	549.07	550.00	0.480
500	5.02	3.98	6.21	5.79	670.00	671.81	550.76	550.00	0.094
1000	5.00	4.00	6.20	5.80	670.00	672.02	550.05	550.00	0.066
2000	5.00	4.00	6.20	5.80	670.00	671.23	549.90	550.00	0.022
10000	5.00	4.00	6.19	5.81	670.00	670.32	550.00	550.00	0.001

TAB. 4.9 – **PSTRATEQ1** appliqué au réseau 4 ($d_{16} = 9$)

#iter.	Flots stratégiques				Coûts stratégiques				Fonction d'écart (%)
	x_{s_1}	x_{s_2}	x_{s_3}	x_{s_4}	C_{s_1}	C_{s_2}	C_{s_3}	C_{s_4}	
0	0.00	9.00	0.00	12.00	670.00	380.00	310.00	550.00	28.742
1	0.00	9.00	5.24	6.76	670.00	977.80	310.00	550.00	31.063
2	2.83	6.17	8.19	3.81	670.00	1316.76	445.99	550.00	27.811
3	5.86	3.14	8.91	3.09	670.00	1306.18	591.38	550.00	15.771
5	7.53	1.47	6.87	5.13	670.00	717.81	647.81	550.00	5.549
10	7.59	1.41	3.87	8.13	670.00	640.92	570.92	550.00	2.381
20	5.59	3.41	6.39	5.61	670.00	644.15	574.15	550.00	2.354
50	5.00	4.00	6.19	5.81	670.00	669.97	550.01	550.00	0.001
100	5.00	4.00	6.19	5.81	670.00	670.00	550.00	550.00	0.000

TAB. 4.10 – **PSTRATEQ2** appliqué au réseau 4 ($d_{12} = 9$)

#iter.	Flots stratégiques				Coûts stratégiques				Fonction d'écart (%)
	x_{s_1}	x_{s_2}	x_{s_3}	x_{s_4}	C_{s_1}	C_{s_2}	C_{s_3}	C_{s_4}	
0	0.00	9.00	0.00	12.00	670.00	380.00	310.00	550.00	28.742
1	0.00	9.00	1.20	10.80	670.00	408.22	310.00	550.00	25.956
2	0.00	9.00	2.40	9.60	670.00	577.56	310.00	550.00	20.531
3	0.00	9.00	3.60	8.40	670.00	746.89	382.36	550.00	21.737
5	1.51	7.49	5.91	6.09	670.00	995.87	601.07	550.00	24.592
10	6.34	2.66	6.63	5.37	670.00	671.07	536.75	550.00	2.633
20	5.00	4.00	5.48	6.52	670.00	606.75	550.00	550.00	3.271
50	5.00	4.00	6.19	5.81	670.00	670.00	550.00	550.00	0.000

TAB. 4.11 – Algorithme de projection appliqué au réseau 4 ($\alpha = 0.01$ et $d_{12} = 9$)

#iter.	Flots stratégiques				Coûts stratégiques				Fonction d'écart (%)
	x_{s_1}	x_{s_2}	x_{s_3}	x_{s_4}	C_{s_1}	C_{s_2}	C_{s_3}	C_{s_4}	
0	0.00	9.00	0.00	12.00	670.00	380.00	310.00	550.00	28.742
1	0.00	9.00	12.00	0.00	670.00	1650.00	350.00	550.00	46.299
2	9.00	0.00	12.00	0.00	670.00	1650.00	710.00	550.00	13.195
5	0.00	9.00	12.00	0.00	670.00	1650.00	350.00	550.00	46.299
10	9.00	0.00	12.00	0.00	670.00	1650.00	710.00	550.00	13.195
20	9.00	0.00	0.00	12.00	670.00	380.00	310.00	550.00	43.467
50	9.00	0.00	12.00	0.00	670.00	1650.00	710.00	550.00	13.195
100	9.00	0.00	0.00	12.00	670.00	380.00	310.00	550.00	43.467
200	9.00	0.00	0.00	12.00	670.00	380.00	310.00	550.00	43.467

TAB. 4.12 – Algorithme de l'extragradiant appliqué au réseau 4 ($\alpha = 0.1$ et $d_{12} = 9$)

On constate que toutes ces méthodes convergent vers l'unique solution d'équilibre. La convergence de l'algorithme **PSTRATEQ1** est lente, similaire à celle de la suite $\{1/n\}$. Par contre, l'algorithme **PSTRATEQ2** et les méthodes de projection sont très rapides. Ces méthodes convergent avec une valeur de α suffisamment faible. On observe que ces méthodes divergent dès que α dépasse la valeur 0.1 (tableau 4.12).

En théorie, les méthodes projectives exhibent un taux de convergence linéaire sous l'hypothèse de monotonie de la fonction de coût. Cette observation soulève une question intéressante : la fonction de coût associée au réseau 4 est-elle monotone ? Une fonction est monotone si sa matrice jacobienne est semi-définie positive. Au voisinage du vecteur $x^* = (5, 5, 5.24, 6.76)$, les coûts stratégiques sont :

$$C_1(x) = 670;$$

$$C_2(x) = 150 + \left(\frac{10 - x_3}{x_2}\right) \left(110 + \frac{10 - x_1}{10}(120) + \frac{x_1}{10}(600)\right) + \left(\frac{x_2 + x_3 - 10}{x_2}\right) 1500;$$

$$C_3(x) = 190 + \frac{10 - x_1}{10}(120) + \frac{x_1}{10}(600);$$

$$C_4(x) = 550.$$

La fonction de coût C est donc différentiable au point x^* . La matrice jacobienne J , évaluée au point x^* , s'exprime comme suit :

$$J = C'(x^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 45.7 & 196.11 & 206 & 0 \\ 48 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que la matrice symétrisée $J + J^t$ ne possède pas de valeur propre négative. Ainsi, la matrice J est semi-définie positive. Par conséquent, la fonction de coût est monotone au voisinage du vecteur x^* . Cette propriété explique en grande partie le succès des méthodes projectives.

4.3.2 Second problème : le réseau de Sioux Falls

Nous nous intéressons maintenant à la recherche d'un équilibre stratégique dans un réseau de taille moyenne. Le réseau 5, illustré à la figure 4.6, possède 24 nœuds

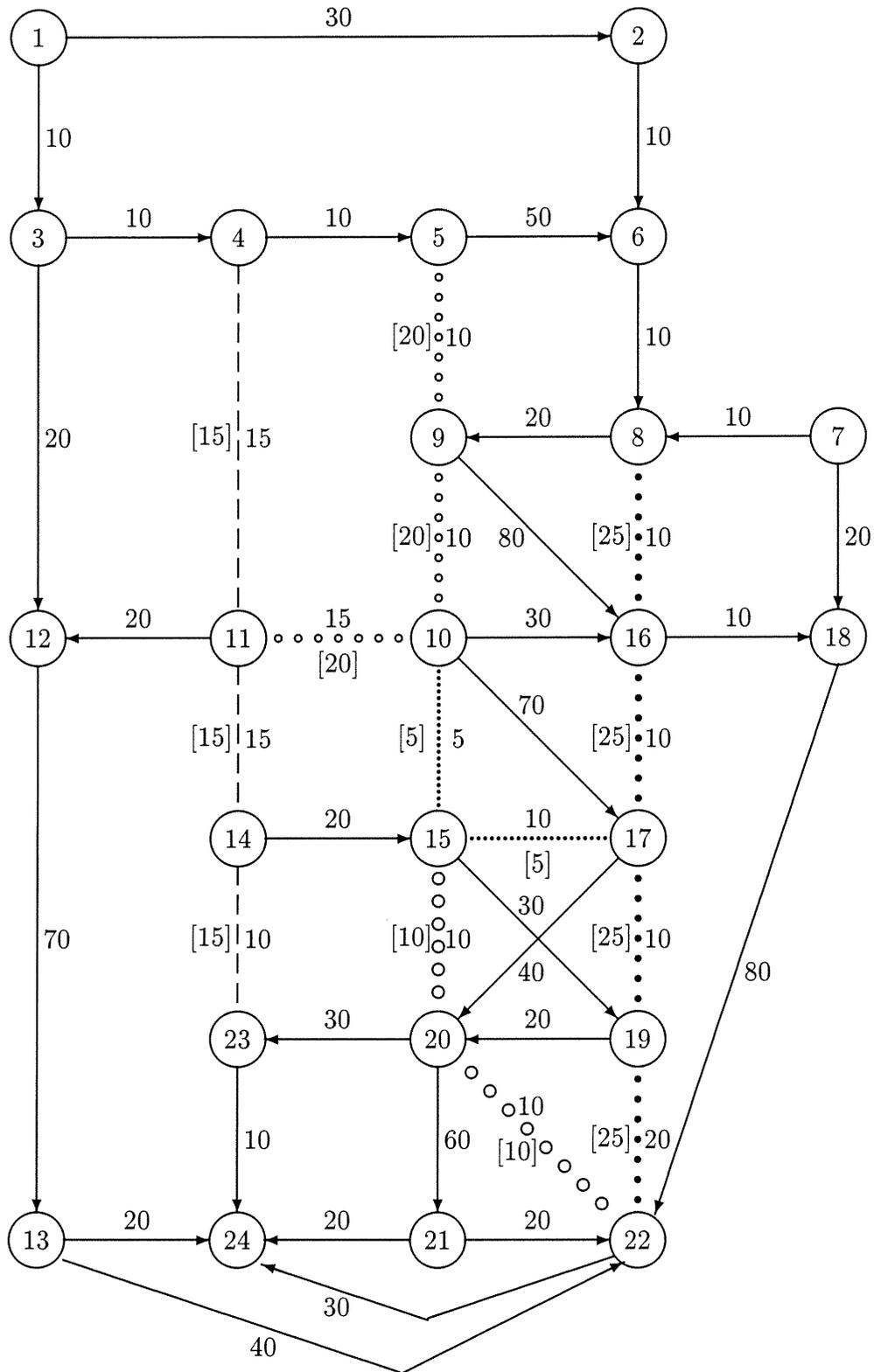


FIG. 4.6 – Réseau 5

et 44 arcs. Ce réseau comprend 4 paires O-D et 5 lignes de transport décrites aux tableaux 4.13 et 4.14. Le réseau 5 est une version acyclique simplifiée du réseau de la ville Sioux Falls présenté dans l'article de Suwansirikul [53].

Il est pratiquement impossible de résoudre exactement le problème d'équilibre stratégique associé au réseau 5. Considérons par exemple la stratégie décrite dans le tableau 4.15. Cette stratégie contient 101 chemins distincts joignant l'origine 1 à la destination 24. En modifiant les ordres de préférences de certains nœuds (comme 10, 15 et 20), on obtient un grand nombre de stratégies valables. Or, il est inconcevable de calculer manuellement le coût de stratégies si complexes. Nous entreprenons alors la recherche d'un équilibre stratégique sans information sur l'ensemble des solutions.

Tout d'abord, mentionnons que si les capacités de toutes les lignes de transport sont assez grandes, tous les usagers utiliseront les plus courts chemins du réseau 5. Ainsi, le vecteur de coût $C(x) = (70, 75, 90, 60)$ fournit des bornes inférieures sur les délais de transport pour chaque couple origine-destination.

Maintenant, nous testons nos méthodes qui recherchent un équilibre sur le réseau 5. Nous débutons les tests avec l'algorithme **PSTRATEQ1**. On contrôle la taille de l'espace de travail stratégiques à l'aide des paramètres ϵ_1 (tolérance pour la comparaison des coûts stratégiques) et ϵ_2 (borne inférieure sur le flot stratégique). Nous posons $\epsilon_1 = 10^{-4}$ et $\epsilon_2 = 0.05$. Nous testons ensuite l'algorithme **PSTRATEQ2** en posant : $\epsilon_1 = 10^{-4}$ et $\epsilon_2 = 0.01$. Les résultats de ces tests sont présentés aux tableaux 4.16 et 4.17. Ces tableaux contiennent, pour chaque paire O-D, le nombre de stratégies et la contribution à la fonction d'écart. Finalement, le tableau 4.18 compare les coûts stratégiques minimaux des deux algorithmes.

Nous observons que les méthodes affichent d'excellents résultats. La fonction d'écart, initialement de 28%, est inférieure à 1% après environ 40 itérations. On observe aussi une décroissance significative de la fonction d'écart après plusieurs centaines d'itérations. Ainsi, l'algorithme **PSTRATEQ2** induit une solution quasi-exacte au bout de 1000 itérations (fonction d'écart de l'ordre de 10^{-6}). Moins performant certes, l'algorithme **PSTRATEQ1** se comporte bien asymptotiquement et ce, à cause d'un choix approprié du paramètre ϵ_2 (borne inférieure sur le flot stratégique).

Paire O-D	Notation	Demande	Chemin de capacité infinie	Coût
(1,24)	OD1	35	$p_1 = \{1, 3, 12, 13, 24\}$	120
(1,22)	OD2	25	$p_2 = \{1, 3, 12, 13, 22\}$	140
(7,24)	OD3	20	$p_3 = \{7, 18, 22, 24\}$	130
(7,22)	OD4	20	$p_4 = \{7, 18, 22\}$	100

TAB. 4.13 – Description des paires O-D du réseau 5

lignes de transport (L_i)	Capacité
10-15-17	5
15-20-22	10
4-11-14-23	15
5-9-10-11	20
8-16-17-19-22	25

TAB. 4.14 – Description des lignes de transport du réseau 5

nœud :	1	2	3	4	5	6
ensemble de préférences :	[3]	[]	[4]	[11, 5]	[9, 6]	[8]
nœud :	7	8	9	10	11	12
ensemble de préférences :	[]	[16, 9]	[10, 16]	[11, 15, 16, 17]	[14, 12]	[13]
nœud :	13	14	15	16	17	18
ensemble de préférences :	[24]	[23, 15]	[20, 17, 19]	[17, 18]	[19, 20]	[22]
nœud :	19	20	21	22	23	24
ensemble de préférences :	[22, 20]	[22, 23, 21]	[24]	[24]	[24]	[]

TAB. 4.15 – Une stratégie pour la paire O-D (1,24) du réseau 5

# iter.	Nombre de stratégies par paire O-D				Contribution de chaque paire O-D à la fonction d'écart (%)				
	OD1	OD2	OD3	OD4	OD1	OD2	OD3	OD4	total
0	1	1	1	1	11.141	5.307	12.439	0.000	28.887
1	2	2	2	1	2.979	4.441	7.188	0.046	14.654
2	3	3	3	2	1.791	3.212	4.661	0.340	9.994
5	3	4	3	2	1.090	3.195	3.910	0.819	9.013
10	3	4	3	3	0.780	1.310	1.664	0.213	3.967
20	3	4	3	3	0.313	0.676	0.889	0.101	1.979
50	3	4	3	3	0.057	0.265	0.362	0.060	0.744
100	3	4	3	3	0.059	0.131	0.166	0.030	0.386
200	3	4	4	3	0.011	0.068	0.086	0.012	0.176
500	3	2	2	3	0.015	0.002	0.004	0.005	0.026
1000	2	2	2	3	0.002	0.001	0.002	0.003	0.008
2000	2	2	2	3	0.000	0.001	0.001	0.001	0.003
10000	2	2	1	2	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001

TAB. 4.16 – PSTRATEQ1 appliqué au réseau 5

# iter.	Nombre de stratégies par paire O-D				Contribution de chaque paire O-D à la fonction d'écart (%)				
	OD1	OD2	OD3	OD4	OD1	OD2	OD3	OD4	total
0	1	1	1	1	11.141	5.307	12.439	0.000	28.887
1	2	2	2	1	4.941	5.837	7.978	1.151	19.907
2	2	2	3	2	3.872	5.047	5.105	0.064	14.087
5	3	3	3	2	1.554	3.199	1.169	0.101	6.022
10	3	4	3	2	1.011	1.361	0.182	0.069	2.623
20	3	4	2	3	0.220	0.250	0.037	0.057	0.562
50	3	2	2	3	0.026	0.002	0.039	0.087	0.155
100	3	2	2	3	0.001	0.005	0.026	0.069	0.101
200	2	2	2	3	0.000	0.001	0.013	0.028	0.042
500	2	2	2	3	0.000	0.000	0.001	0.003	0.004
1000	2	2	1	2	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

TAB. 4.17 – PSTRATEQ2 appliqué au réseau 5

Heuristiques	Coûts stratégiques minimaux par paire O-D			
	OD1	OD2	OD3	OD4
PSTRATEQ1	120.00	140.00	129.03	99.99
PSTRATEQ2	120.00	140.00	129.03	100.00

TAB. 4.18 – Coûts stratégiques minimaux (réseau 5)

L'évolution du domaine de travail diffère d'une méthode à l'autre. Le nombre de stratégies actives à la 200^{ième} itération est de 14 stratégies pour **PSTRATEQ1** comparativement à 9 pour **PSTRATEQ2**. Ainsi, l'utilisation des pas harmoniques est plus bénéfique à l'enrichissement de l'ensemble de travail stratégique. Voilà pourquoi on fixe le paramètre ϵ_2 à une valeur plus élevée pour **PSTRATEQ1**.

Les deux méthodes PFW convergent vers le même vecteur d'équilibre stratégique. Une comparaison des flots stratégiques (ces dernières valeurs n'étant pas présentées par souci de clarté) ne donne aucune différence significative.

Nous poursuivons les expériences en modifiant le réseau 5 afin de le rendre plus congestionné. Les nouvelles demandes des 4 paires *O-D* sont respectivement 40, 50, 30 et 40 unités de flot. Les capacités de toutes les lignes de transport sont diminuées de 3 unités de flot et les coûts de transport des arcs (12, 13) et (18, 22) deviennent 80 et 90 respectivement. Nous répétons ici les tests prévus pour le réseau 5. Les résultats de ces tests sont présentés aux tableaux 4.19, 4.20 et 4.21.

Comme pour le réseau 5, les tests correspondant au réseau 5 modifié sont concluants. Il est intéressant d'observer les progressions de l'algorithme **PSTRATEQ2**. La fonction d'écart, initialisée à 38%, passe de 9% à 2% entre les itérations 5 et 10 et est dans l'ordre de 0.5% à la vingtième itération. L'évolution du domaine de travail diffère d'un réseau à l'autre. À cet égard, le nombre de stratégies utilisées à l'équilibre pour la paire **OD4** est de 2 pour le réseau 5 contre 1 en faveur du réseau 5 modifié. La modification du réseau 5 influence donc réellement la nature du domaine stratégique. Les solutions d'équilibre pour les deux réseaux sont totalement différentes. Elles diffèrent en terme de flots stratégiques mais aussi, au niveau des coûts d'équilibre (tableau 4.21).

# iter.	Nombre de stratégies par paire O-D				Contribution de chaque paire O-D à la fonction d'écart (%)				
	OD1	OD2	OD3	OD4	OD1	OD2	OD3	OD4	total
0	1	1	1	1	11.579	12.157	11.887	4.942	40.564
1	2	2	2	2	2.655	8.551	11.079	0.887	23.161
2	3	3	3	2	7.496	6.978	7.320	3.510	25.304
5	3	4	3	2	0.931	6.657	4.188	1.240	13.016
10	3	5	3	2	0.137	2.183	1.793	0.032	4.146
20	3	5	3	3	0.169	1.456	1.278	0.350	3.253
50	3	5	3	3	0.136	0.541	0.414	0.104	1.194
100	3	5	3	3	0.066	0.244	0.207	0.062	0.578
200	3	5	3	3	0.021	0.124	0.125	0.031	0.301
500	3	5	3	3	0.002	0.059	0.035	0.016	0.111
1000	2	3	2	3	0.005	0.025	0.010	0.008	0.047
2000	2	3	2	3	0.003	0.006	0.002	0.004	0.015
10000	2	2	2	1	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001

TAB. 4.19 – **PSTRATEQ1** appliqué au réseau 5 modifié

# iter.	Nombre de stratégies par paire O-D				Contribution de chaque paire O-D à la fonction d'écart (%)				
	OD1	OD2	OD3	OD4	OD1	OD2	OD3	OD4	total
0	1	1	1	1	10.823	11.311	11.465	4.492	38.090
1	2	2	2	2	3.064	8.723	8.727	1.397	21.911
2	2	3	2	2	4.146	4.767	5.435	0.334	14.682
5	2	5	3	2	1.547	4.387	2.939	0.688	9.561
10	3	5	3	2	0.376	1.221	0.251	0.317	2.164
20	3	5	2	3	0.083	0.186	0.045	0.085	0.400
50	3	3	2	3	0.023	0.021	0.096	0.058	0.197
100	3	3	2	3	0.004	0.025	0.064	0.033	0.125
200	2	3	2	3	0.001	0.022	0.031	0.008	0.062
500	2	3	2	2	0.000	0.005	0.005	0.000	0.010
1000	2	3	2	1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

TAB. 4.20 – **PSTRATEQ2** appliqué au réseau 5 modifié

Heuristiques	Coûts stratégiques minimaux par paire O-D			
	OD1	OD2	OD3	OD4
PSTRATEQ1	130.00	150.00	139.99	110.00
PSTRATEQ2	130.00	150.00	140.00	110.00

TAB. 4.21 – Coûts stratégiques minimaux (réseau 5 modifié)

Maintenant, concentrons-nous sur la paire (7, 24). Nous allons observer le comportement stratégique des usagers pour chacun des réseaux. Pour le réseau 5, on constate qu'il y a une seule stratégie utilisée pour les usagers de la paire (7, 24). Les 20 usagers associés à cette paire adoptent tous la stratégie s_1 illustrée au tableau 4.22. À partir du nœud d'origine 7, les 20 unités de flot accèdent au nœud 8. Au nœud 8, on retrouve environ 36 unités de flot (20 de s_1 et 16 des stratégies des autres paires $O-D$) qui veulent emprunter le premier arc (8, 16) de la ligne d'autobus $L_5 = 8-16-17-19-22$ dont la capacité est 25. Seulement 69% de ces usagers réussissent à monter à bord de la ligne L_5 et 31% sont refoulés sur l'arc (8, 9). À partir du nœud 9, parmi les 6 usagers de s_1 , 0.6 unités de flot accèdent à la ligne de transport $L_4 = 9-10-11$ pour ensuite emprunter le chemin 11-12-13-24 de capacité infinie, 0.2 unités de flot utilisent l'arc (9, 10) avant d'accéder à l'arc (10, 15) de la ligne $L_1 = 10-15-17$ et les 5.2 unités résiduelles empruntent l'arc (9, 16). Au nœud 15, environ 14 usagers (dont seulement 0.2 unités de s_1) rivalisent pour l'accès à la ligne $L_2 = 15-20-22$ de capacité 10. 70% de ces usagers montent à bord de la ligne L_2 pour ensuite atteindre la destination 24 via l'arc de marche (22, 24) et 30% utilisent l'arc (15, 17) de la ligne L_1 . Au nœud 16, on retrouve 25 usagers (dont 14 unités de flot de la stratégie s_1) en provenance de l'arc (8, 16) de la ligne L_5 contre environ 9 usagers (dont 5 unités de s_1) via l'arc (9, 16). Pour respecter les priorités, le premier groupe d'usagers est prioritaire pour l'accès à l'arc (16, 17) de la ligne L_5 . Ainsi, les 5 unités non prioritaires de s_1 vont emprunter le chemin 16-18-22-24. Finalement, à partir du nœud 17, les 14 unités prioritaires de la stratégie s_1 accèdent aux arcs (17, 19) et (19, 22) de la ligne L_5 avant d'atteindre le nœud 24 et les 0.02 unités non prioritaires utilisent le chemin 17-20-22-24. Le coût espéré de la stratégie s_1 en fonction des probabilités d'accès aux arcs est égal à 129.03.

Maintenant, observons le comportement stratégique des usagers dans le réseau 5 modifié. On constate que seulement 85% de ces usagers utilisent la stratégie s_1 adoptée par tous les usagers du réseau 5. Le cheminement du flot stratégique de ces usagers est le même que précédemment sauf que les probabilités d'accès aux lignes de transport diminuent à cause de l'augmentation de la congestion dans le réseau. Cette augmen-

nœud :	7	8	9	10	11	12
ensemble de préférences :	[8, 18]	[16, 9]	[10, 16]	[15, 11, 17, 16]	[14, 12]	[13]
nœud :	13	14	15	16	17	18
ensemble de préférences :	[24]	[23, 15]	[20, 17, 19]	[17, 18]	[19, 20]	[22]
nœud :	19	20	21	22	23	24
ensemble de préférences :	[22, 20]	[22, 23, 21]	[]	[24]	[24]	[]

TAB. 4.22 – Seule stratégie utilisée pour la paire *O-D* (7,24) du réseau 5

Chemin	Réseau 5	Réseau 5 modifié
p_1	62%	76%
p_2	0%	63%
p_3	0%	15%
p_4	44%	100%

TAB. 4.23 – Pourcentages d'utilisation des chemins de capacité infinie

tation de la congestion a aussi pour effet de pousser les 15% des flots résiduels de la paire (7, 24) à utiliser la stratégie impliquant le seul chemin p_4 de capacité infinie afin d'éviter la possibilité de ne pas trouver de places libres à bord des lignes d'autobus. On remarque que ce pourcentage d'utilisation de ce chemin passe de 0% pour le réseau 5 à 15% pour le réseau 5 modifié. En fait, ce pourcentage d'utilisation des chemins de capacité infinie augmente pour les 4 paires *O-D* du réseau (tableau 4.23). Les tests effectués sur d'autres réseaux montrent que ces pourcentages augmentent à chaque fois que la congestion devient plus forte. À la limite, lorsque les capacités de toutes les lignes de transport sont presque nulles, les algorithmes convergent vers la solution d'équilibre où tous les usagers du réseau adoptent les chemins de capacité infinie.

Partie 2

**UN MODÈLE D'AFFECTATION D'ÉQUILIBRE
DYNAMIQUE**

Chapitre 5

Chargement dynamique

5.1 Introduction

Dans la première partie de cette thèse, nous avons développé un modèle statique dans un réseau de transport en commun où les individus utilisent des stratégies pour se rendre de leur origine vers leurs destination. Dans cette seconde partie, nous développons un nouveau modèle d'affectation **dynamique** dans un réseau de trafic routier avec capacités rigides où les usagers adoptent aussi des stratégies. Cette notion de stratégie n'a pas été considérée à ce jour dans les modèles dynamiques. Deux aspects principaux distinguent ce modèle du modèle statique. Premièrement, les variables de décision ne sont plus des flots sur les stratégies du réseau, mais plutôt des **volumes** (nombres réels) de véhicules. Deuxièmement, il est difficile de déduire les volumes sur les arcs et les stratégies, et par conséquent les délais sur les stratégies, à partir des 'désirs' de déplacement des usagers du réseau. Le dernier point constitue le grand défi que doit relever tout modèle dynamique. En effet, afin d'obtenir les délais sur les stratégies à tout instant, il est nécessaire d'effectuer un **chargement** des véhicules sur le réseau, comme dans le modèle précédent. Ce processus doit satisfaire la discipline **PAPP (premier-arrivé premier-parti)** pour simuler le cheminement des usagers dans le réseau. Bien que cette condition est très difficile à imposer dans un modèle, nous avons réussi à concevoir un algorithme de chargement efficace qui tient compte des priorités d'accès aux arcs selon la condition PAPP.

Le modèle proposé est un modèle en temps discret qui répartit la demande temporelle de chaque paire origine-destination sur les arcs du réseau. Chaque arc admet un

coût et une capacité fixe. La capacité d'un arc représente le nombre maximal d'usagers/période qui peuvent y accéder. Le rôle de ces capacités est fondamental dans la formulation du modèle. Un usager qui désire emprunter un arc saturé devra opter pour un autre arc ou bien attendre la prochaine période dans une file d'attente. Cette approximation de la situation réelle induit une synchronisation des déplacements des usagers dans le réseau espace-temps résultant.

L'originalité de ce nouveau modèle dynamique repose sur l'hypothèse que les usagers utilisent des stratégies pour leur déplacement. Cette notion de stratégie diffère légèrement de celle utilisée dans le modèle statique précédent. En effet, nous supposons ici que les ordres de préférences tiennent compte de l'instant initial d'arrivée à chacun des nœuds du réseau espace-temps. À un nœud j donné, des usagers adoptant la même stratégie peuvent avoir des ordres de préférences différents selon leur instant initial d'arrivée au nœud j . Autrement dit, l'ordre de préférences des usagers dépend de leur temps d'attente écoulé au nœud j . Comme nous allons le voir au chapitre 6, cette nouvelle définition de stratégie est nécessaire pour respecter les priorités pour le calcul de la stratégie optimale.

Pour caractériser la notion d'équilibre, nous supposons que les instants de départ des véhicules sont fixés et que les usagers ont une connaissance parfaite des conditions de la veille et modifient seulement leurs stratégies pour améliorer leurs coûts de déplacement de la journée courante. Nous étudierons la recherche d'un équilibre stratégique dynamique en détail au prochain chapitre.

La seconde section traite de la description et de la formulation mathématique du modèle. Dans la troisième section, nous décrivons en détail le processus de chargement dynamique dans le réseau. La difficulté de ce dernier processus repose sur la condition PAPP que nous devons respecter pour le chargement des volumes stratégiques.

5.2 Présentation du modèle

Dans cette section, nous présentons les caractéristiques fondamentales relatives à notre modèle et décrivons les notions de stratégie et de volume stratégique dans le contexte dynamique.

5.2.1 Capacités et stratégies

Considérons un réseau de transport représenté par un graphe orienté $G = (N, A)$. L'ensemble N contient les nœuds du graphe tandis que l'ensemble A regroupe les arcs du graphe. L'arc dont le nœud de départ est j et le nœud d'arrivée est k est représenté par le couple (j, k) . La période du système $[0, T]$ est divisée en t ($t = 0, \dots, T$) périodes de même longueur, où T est supposé assez grand pour permettre à tous les véhicules d'atteindre leur destination au plus tard à l'instant T . On suppose que les instants de départ des véhicules sont fixés et que chaque usager choisit avant son départ une **stratégie** de déplacement.

Le flot circule depuis les nœuds origines vers les nœuds destinations. On note respectivement par O et D l'ensemble des origines et l'ensemble des destinations du réseau. À chaque couple $(q, r) \in O \times D$ et à chaque période de temps t ($t = 0, 1, \dots, T' \leq T - 1$) est associé une demande fixe et positive d_{qr}^t . L'instant T' représente le dernier instant de départ pour les usagers du réseau. Une paire origine-destination (ou paire $(q, r)(t)$) est un couple formé d'une origine q et d'une destination r reliées par un chemin, pour lequel les véhicules quittent l'origine q à l'instant t . Enfin, on note $I(t)$ l'ensemble des paires O - $D(t)$ du réseau.

À chaque arc du réseau sont associés un **coût** et une **capacité** fixes. On dénote par c_{jk} et u_{jk} le coût et la capacité associés à l'arc (j, k) ; u_{jk} représente le nombre maximal de véhicules par période qui peuvent emprunter l'arc (j, k) . Le rôle de ces capacités est fondamental dans la formulation du modèle stratégique. Imaginons que plusieurs usagers préfèrent l'accès à un arc de capacité finie. Une proportion de ceux-ci doivent emprunter un autre arc non saturé ou bien attendre la prochaine période dans une file d'attente. Le **réseau espace-temps** résultant $R = (V, E)$ est construit comme suit :

- chaque nœud $j \in N$ est divisé en $T + 1$ nœuds j_t , $t = 0, \dots, T$:

$$V = \{j_t : j \in N, 0 \leq t \leq T\}$$

- chaque arc $a \in A$ est divisé en $T + 1 - c_a$ arcs (j_t, k_{t+c_a}) tel que $t + c_a \leq T$. Ces arcs sont nommés **arcs de transport**. Le temps d'attente aux nœuds est représenté

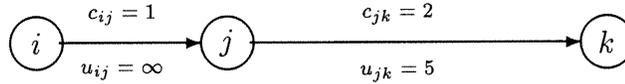


FIG. 5.1 – Réseau 6

au moyen des arcs (j_t, j_{t+1}) où $t = 0, 1, \dots, T - 1$; ces arcs, qui représentent des files d'attente "verticales", sont appelés **arcs d'attente**. Nous supposons que les capacités de ces arcs sont infinies :

$$E_1 = \{(j_t, k_{t+c_{jk}}) : (j, k) \in A, 0 \leq t \leq T - c_{jk}\}$$

$$E_2 = \{(j_t, j_{t+1}) : j \in N, 0 \leq t \leq T - 1\}$$

$$E = E_1 \cup E_2$$

Par exemple, considérons le petit réseau exposé à la figure 5.1 et supposons que $T = 5$. Le réseau espace-temps associé est illustré à la figure 5.2. Dans cet exemple, 15 usagers au nœud i à l'instant $t = 0$ désirent atteindre le nœud k via le nœud j . Ces 15 usagers empruntent l'arc (i_0, j_1) de capacité infinie. À partir du nœud j_1 , seulement 5 usagers accèdent à l'arc (j_1, k_3) de capacité 5 et les 10 autres usagers devront attendre la prochaine période au nœud j . À l'instant $t = 2$, les 5 premiers usagers ont déjà parcouru une période complète (moitié de leur trajet) et libèrent ainsi la place à 5 autres usagers afin d'emprunter l'arc (j_2, k_3) . À l'instant $t = 3$, le premier groupe d'usagers a complété le parcours de l'arc (j, k) et chaque usager du second groupe a parcouru la moitié de son trajet. À cet instant, le dernier groupe constitué des 5 derniers usagers peut accéder à l'arc (j_3, k_4) . On remarque ainsi une synchronisation des déplacements des usagers dans le réseau R .

Il est important de noter que R est un graphe standard, avec $|V| = n(T + 1)$ et $|E| \leq (m + n)T$ où $n = |N|$ et $m = |A|$. Par conséquent, sa taille est pseudo-polynomiale par rapport à la taille du graphe original G . De plus, le graphe R ne contient pas de circuits. Cette caractéristique est essentielle au bon déroulement du processus du chargement dynamique du réseau.

Nous appliquons la notion de stratégie sur le réseau espace-temps R en tenant compte de l'instant initial d'arrivée à chacun des nœuds du réseau. Une stratégie est

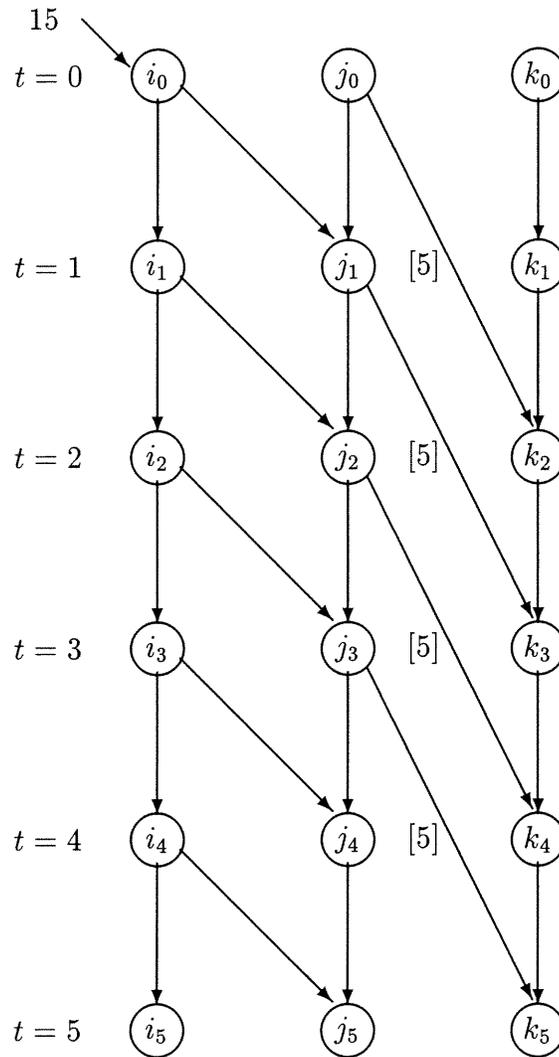


FIG. 5.2 – Expansion du réseau 6

une fonction qui associe à chaque nœud j_t du réseau R un sous-ensemble ordonné de ses nœuds successeurs suivant l'instant initial $t' \leq t$ d'arrivée au nœud j . Celle-ci doit proposer, pour chaque instant t' , un arc de transport de capacité suffisante ou bien un arc d'attente lorsque le premier choix correspond à un arc de transport de capacité finie. On note j_t^+ l'ensemble des nœuds successeurs du nœud j_t . L'ensemble E_j^t contient tous les sous-ensembles ordonnés de j_t^+ . Ainsi, une stratégie s associe à chaque nœud $j_t \in V$ un sous-ensemble $E_j^{stt'}$ ($t' \leq t$) de l'ensemble E_j^t . L'ensemble $E_j^{stt'}$ représente l'**ordre de préférences** au nœud j_t pour les usagers adoptant la stratégie s et ayant atteint le nœud j à l'instant t' . À titre d'exemple, voici trois stratégies

intéressantes pour les usagers du réseau 6 (figure 5.1) :

ensemble								
de préférences :	E_i^{s00}	E_i^{s11}	E_i^{s22}	E_j^{s11}	E_j^{s21}	E_j^{s22}	E_j^{s33}	E_k^{s55}
s_1 :	$[j_1]$	$[]$	$[]$	$[k_3, j_2]$	$[k_4]$	$[k_4, j_3]$	$[]$	$[]$
s_2 :	$[]$	$[j_2]$	$[]$	$[]$	$[k_4, j_3]$	$[k_4]$	$[k_5]$	$[]$
s_3 :	$[]$	$[]$	$[j_3]$	$[]$	$[]$	$[]$	$[k_5]$	$[]$

Chaque stratégie s est associée à une paire $(q(s), r(s))(t)$, t étant l'instant où tous les individus utilisant la stratégie s quittent l'origine $q(s)$. On dénote par $H(s) = (V^s, E^s)$ le **graphe stratégique** induit par la stratégie s . Ce graphe est un sous graphe de R dont l'ensemble des arcs E^s est l'union de l'ensemble des arcs de transport $\cup_{j_t \in V^s} \{(j_t, k_{t+c_{jk}}) \in E_1 : k_{t+c_{jk}} \in E_j^{stt'}, t' \leq t\}$ et de l'ensemble des arcs d'attente $\cup_{j_t \in V^s} \{(j_t, j_{t+1}) \in E_2 : j_{t+1} \in E_j^{stt'}, t' \leq t\}$, et chaque nœud j_t de l'ensemble V^s est relié à la destination $r(s)$. Un exemple d'un tel graphe est illustré à la figure 5.3. Il s'agit du graphe stratégique induit par la stratégie s_2 dans le réseau 6. On note P^s l'ensemble des chemins élémentaires de la paire $(q(s), r(s))(t)$ dans le graphe $H(s)$. L'ensemble des stratégies qui sont associés à la paire $(q, r)(t)$ est dénoté par S_{qr}^t . L'ensemble de toutes les stratégies du réseau est défini comme suit :

$$S = \bigcup_{0 \leq t \leq T} S^t = \bigcup_{0 \leq t \leq T} \bigcup_{(q,r,t)} S_{qr}^t,$$

où S^t est l'ensemble de toutes les stratégies s telle que les usagers de la stratégie s quittent l'origine $q(s)$ à l'instant t .

Comme dans le cas du modèle statique, l'ensemble stratégique S est restreint en éliminant trois types de stratégies : stratégies inadmissibles, stratégies dominées et stratégies équivalentes (voir chapitre 2, section 2.2.5).

5.2.2 Volume et coût stratégiques

Un vecteur de **volumes stratégiques** est un vecteur de la forme $x = \{x_s^t\}_{s \in S}$ où x_s représente le volume affecté à la stratégie s à l'instant t . Un vecteur de volumes

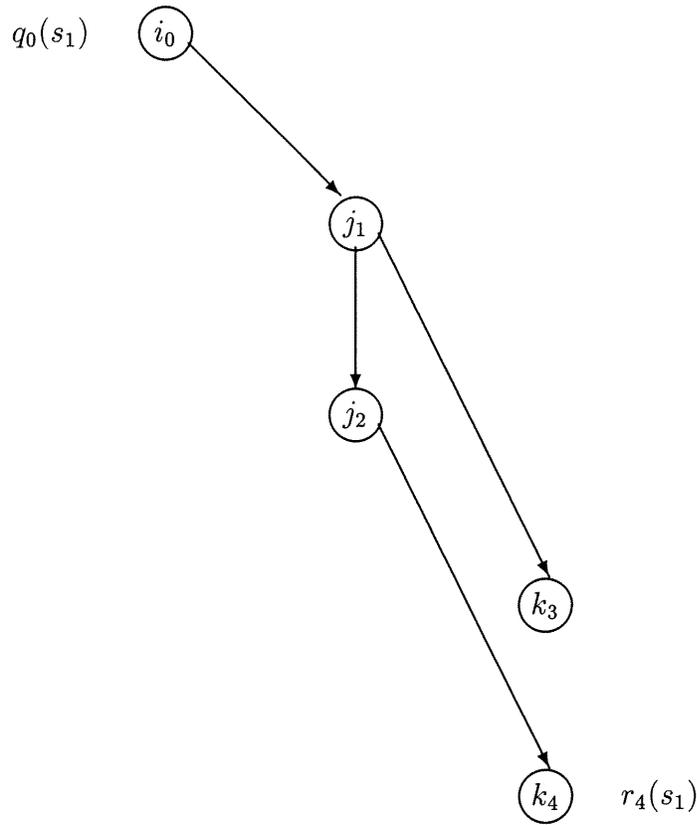


FIG. 5.3 – Le graphe stratégique de s_1 dans le réseau 6

stratégiques est dit réalisable s'il satisfait aux deux conditions suivantes :

$$x_s^t \geq 0 \quad \forall s \in S;$$

$$\sum_{s \in S_{qr}^t} x_s^t = d_{qr}^t \quad \forall (q, r)(t) \in I(t), \forall 0 \leq t \leq T.$$

La première contrainte assure la non-négativité des volumes stratégiques et la seconde condition fait en sorte que les demandes associées aux paires $O-D(t)$ soient satisfaites. L'ensemble des vecteurs de volumes stratégiques réalisables est noté X .

Le coût d'une stratégie s dépend directement des **probabilités d'accès aux arcs** : $\pi_{jk}^{st'}$ et $\pi_j^{st'}$ (reliée à l'attente) ; $\pi_{jk}^{st'}$ (respectivement $\pi_j^{st'}$) est la probabilité d'atteindre le nœud $k_{t'+c_{jk}}$ (respectivement $j_{t'+1}$) à partir du nœud $j_{t'}$ en utilisant la stratégie s . Ces probabilités sont induites par le vecteur de volumes stratégiques suivant le processus de chargement dynamique du réseau. Nous étudierons ce processus

en détail à la prochaine section.

Soit x un vecteur de volumes stratégiques réalisable. Supposons connues les probabilités d'accès $\pi_{jk}^{st'}(x)$ et $\pi_j^{st'}(x)$ associées à la stratégie s . On définit le coût de la stratégie s comme l'espérance du coût des chemins utilisés. La probabilité qu'un usager de la stratégie s utilise un chemin $p(t) \in P^s$ (associé à la paire $(q(s), r(s))(t)$) est le produit des probabilités d'accès aux arcs formant ce chemin :

$$\kappa_{p(t)}^s(x) = \prod_{t' \geq t} \left\{ \prod_{(j_{t'}, k_{t'+c_{jk}}) \in p(t)} \pi_{jk}^{st'}(x) \times \prod_{(j_{t'}, j_{t'+1}) \in p(t)} \pi_j^{st'}(x) \right\}. \quad (5.1)$$

Le coût d'un chemin $p(t)$ est simplement la somme des coûts des arcs de transport et d'attente constituant ce chemin :

$$C^{p(t)} = \sum_{t' \geq t} \left\{ \sum_{(j_{t'}, k_{t'+c_{jk}}) \in p} c_{jk} + \sum_{(j_{t'}, j_{t'+1}) \in p} 1 \right\}. \quad (5.2)$$

Le **coût de la stratégie** s (ou coût stratégique) est défini comme la somme pondérée des coûts de tous les chemins élémentaires de l'ensemble P^s :

$$C_s^t(x) = \sum_{p(t) \in P^s} \kappa_{p(t)}^s(x) C^{p(t)}. \quad (5.3)$$

Cette définition n'est pas utilisable en pratique car le nombre de chemins dans l'ensemble P^s est exponentiel en $|V^s|$. Cependant, on peut calculer efficacement les coûts stratégiques à l'aide des probabilités d'accès aux nœuds. On note $\tau_j^{st'}$ la probabilité d'accéder au nœud $j_{t'}$ avec la stratégie s . Ces probabilités sont calculées récursivement à partir des probabilités d'accès aux arcs $\pi_{jk}^{st'}(x)$ et $\pi_j^{st'}(x)$:

$$\tau_j^{st'}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } j_{t'} \notin V^s \\ 1 & \text{if } j_{t'} = q_t(s) \\ \tau_j^{s(t'-1)} \pi_j^{s(t'-1)} + \sum_{k_{t_c} \in j_{t'}^-} \tau_k^{st_c} \pi_{kj}^{st_c} & \text{if } j_{t'} \in V^s \setminus \{q_t(s)\}, \end{cases} \quad (5.4)$$

où $t_c = t' - c_{jk}$ est l'instant où l'utilisateur quitte le nœud k pour emprunter l'arc (k, j) .

Nous obtenons alors une expression alternative du coût stratégique :

$$C_s^t(x) = \sum_{t' \geq t} \left\{ \sum_{(j_{t'}, k_{t'+c_{jk}}) \in E_1^s} \tau_j^{st'}(x) \pi_{jk}^{st'}(x) c_{jk} + \sum_{(j_{t'}, j_{t'+1}) \in E_2^s} \tau_j^{st'}(x) \pi_j^{st'}(x) \right\}. \quad (5.5)$$

On voit que le calcul du coût de la stratégie s est dans l'ordre exact du nombre d'arcs ($C^s \in \Theta(|E^s|)$) lorsque l'on connaît les probabilités $\pi_{jk}^{st'}$ et $\pi_j^{st'}$.

5.3 Chargement dynamique

Dans la section précédente, nous avons exprimé la notion de coût stratégique à l'aide des probabilités d'accès aux arcs. Dans cette section, nous expliquons comment calculer ces dernières probabilités à partir d'un vecteur de volumes stratégiques, en respectant la condition PAPP (premier arrivé-premier parti). Ce processus de calcul des probabilités $\pi_{jk}^{st'}$ constitue le **chargement dynamique du réseau**.

Dans la première sous-section, nous décrivons le déroulement du mécanisme de chargement à un nœud $j_{t'}$ du réseau espace-temps. À la seconde sous-section, nous présentons l'algorithme de chargement dynamique. Cet algorithme calcule les probabilités d'accès $\pi_{jk}^{st'}(x)$ et les coûts stratégiques $C_s^t(x)$ associés à un vecteur de volumes stratégiques x . La difficulté du processus repose sur la condition PAPP que nous devons satisfaire pour le calcul des coûts $C_s^t(x)$.

5.3.1 Mécanisme de chargement

Le mécanisme de chargement dynamique simule, à partir de règles déterministes, le cheminement des usagers dans le réseau. Une caractéristique importante pour le bon fonctionnement de ce processus est l'absence de circuits. En effet, le processus débute aux nœuds origines, pour lesquels on connaît les volumes stratégiques initiaux et doit parcourir les autres nœuds suivant l'ordre topologique du réseau. Dans notre modèle, nous avons un ordre topologique naturel qui est induit par la représentation espace-temps du réseau. À chaque nœud $j_{t'}$ de ce réseau, le mécanisme consiste à obtenir les volumes stratégiques aux arcs, notés $v_{jk}^{st'}$, en fonction des volumes stratégiques aux nœuds, notés $z_j^{st'}$. Après le chargement d'un nœud $j_{t'}$, on obtient les probabilités d'accès $\pi_{jk}^{st'}$ à partir de la formule :

$$\pi_{jk}^{st'} = \frac{v_{jk}^{st'}}{z_j^{st'}} \quad \forall s \in S, \forall k_{t'+c_{jk}} \in E_j^{st't''} \quad (t'' \leq t'), \quad (5.6)$$

formule qui n'est valide que pour les volumes stratégiques positifs. Nous verrons au prochain chapitre le calcul de ces probabilités pour une stratégie de volume nul lorsque nous devons définir le coût des stratégies optimales.

Maintenant, imaginons que plusieurs usagers se trouvent à un nœud $j_{t'}$ du réseau. Ces usagers diffèrent par leur temps initial d'arrivée au nœud j . Naturellement, un groupe d'usagers ayant atteint le nœud j à l'instant $u \leq t'$ est prioritaire par rapport à un autre groupe ayant accédé au nœud j à l'instant $u' \geq u$, pour l'accès aux nœuds successeurs de $j_{t'}$. Le processus de chargement doit donc tenir compte de ces priorités pour assurer la **condition PAPP** sur les arcs du réseau.

Condition PAPP

Une caractéristique importante de notre modèle est la condition PAPP qui doit être satisfaite pour maintenir l'ordonnancement temporel des véhicules sur les arcs du réseau.

Concentrons-nous sur le chargement à un nœud unique $j_{t'}$. Pour satisfaire la condition PAPP sur les arcs incidents de $j_{t'}$, nous devons séparer chaque groupe d'usagers impliquant un volume stratégique $z_j^{st'}$ en sous-groupes suivant l'instant initial d'arrivée au nœud j . Nous dénotons par $z_j^{st't''}$ le volume stratégique au nœud $j_{t'}$ impliquant le groupe d'usagers de la stratégie s ayant atteint le nœud j à l'instant $t'' \leq t'$. Avec cette séparation du volume stratégique, on regroupe toutes les stratégies actives (ayant un ensemble de préférences non vide au nœud $j_{t'}$) dans une classe $\bar{S}^{t't''}$ restreinte aux usagers ayant accédé au nœud j à l'instant t'' :

$$\bar{S}^{t't''} = \{s \in S : E_j^{st't''} \neq \emptyset, z_j^{st't''} > 0\} \quad (5.7)$$

Le volume $z_j^{st't''}$ est calculé récursivement à partir des probabilités d'accès aux arcs $\pi_{jk}^{st'}$ et $\pi_j^{st'}$ (x) :

$$z_j^{st't''} = \begin{cases} 0 & \text{si } j_{t'} \notin V^s \\ x_s^t & \text{si } j_{t'} = q_t(s) \text{ (} t'' = t' \text{)} \\ \pi_j^{s(t'-1)} z_j^{s(t'-1)t''} & \text{si } j_{t'} \in V^s \setminus \{q_t(s)\} \text{ et } t'' \leq t' - 1 \\ \sum_{k_{t_c} \in j_{t'}^-} \pi_{kj}^{st_c} z_k^{st_c} & \text{si } j_{t'} \in V^s \setminus \{q_t(s)\} \text{ et } t'' = t' \text{ (} t_c = t' - c_{kj} \text{)}. \end{cases} \quad (5.8)$$

Cette formule du volume $z_j^{st't''}$, qui exprime le cheminement des usagers dans le réseau dynamique, est à la base de notre processus du chargement. En effet, pour respecter les priorités au nœud $j_{t'}$, on charge d'abord les volumes des stratégies de la première classe $\bar{S}^{t'0}$. Ensuite, on charge dans l'ordre les autres volumes stratégiques suivant l'instant initial d'arrivée au nœud j . Par construction, la condition PAPP sera automatiquement vérifiée sur les arcs incidents de $j_{t'}$.

Chargement à file unique

Comme dans le cas du modèle statique, l'affectation simultanée des usagers sur les arcs du réseau suit le mécanisme de chargement à file unique dans lequel le volume stratégique est distribué uniformément dans une file d'attente unique pour l'accès aux nœuds successeurs.

Le chargement à file unique à un nœud j_t est un processus itératif. Pour chaque classe $\bar{S}^{tt'}$ ($t' \leq t$), on débute une itération par la construction de l'ensemble K . Ce dernier ensemble regroupe les premiers nœuds des ordres de préférences des stratégies au nœud j_t . Ensuite on calcule :

$$\beta^{tt'} = \min_{k \in K} \left\{ \frac{\bar{u}_{jk}}{d_k} \right\},$$

où d_k est la demande en flot pour le nœud $k_{t+c_{jk}}$ et \bar{u}_{jk} est la capacité résiduelle de l'arc (j, k) . Si $\beta^{tt'} \geq 1$ alors tous les usagers accèdent aux nœuds qu'ils préfèrent car $\bar{u}_{jk} \geq d_k$ pour tout $k \in K$. Dans ce cas, le chargement au nœud j_t se termine pour la classe en question. Par contre, si $\beta^{tt'} < 1$ alors l'arc (j, \bar{k}) pour lequel $\bar{k} \in \arg \min_{k \in K} \left\{ \frac{\bar{u}_{jk}}{d_k} \right\}$ devient saturé. La probabilité d'atteindre un nœud préféré est égale à $\beta^{tt'}$. La capacité résiduelle de l'arc (j, \bar{k}) étant devenue nulle, on élimine le nœud \bar{k} des ordres de préférences des stratégies. Finalement, on met à jour les capacités résiduelles des arcs, les volumes stratégiques résiduels au nœud j_t et les volumes stratégiques sur les arcs incidents.

Expliquons le déroulement du chargement à file unique au nœud j_t ($t = 4$) dans le sous-réseau illustré à la figure 5.4. Dans cet exemple, 40 usagers au sommet j_4

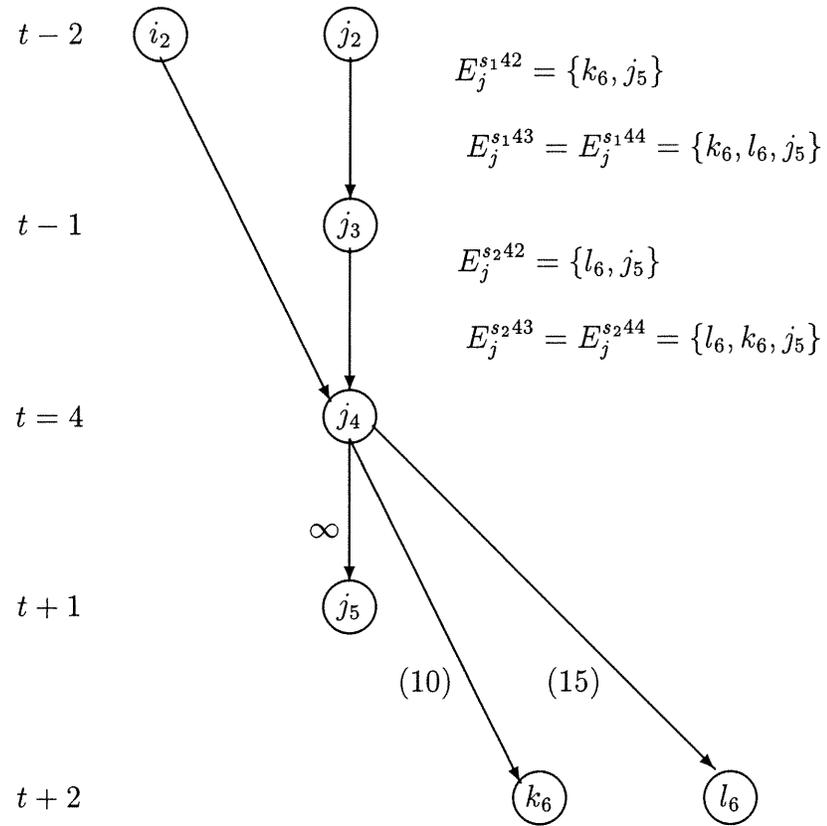


FIG. 5.4 – Chargement dynamique au nœud j_4

rivalisent pour l'accès aux nœuds j_5 , k_6 et l_6 , où 12 usagers de la stratégie s_1 et 8 de la stratégie s_2 ont accédé au nœud j_4 à partir du nœud $i_2(t = 2)$. On suppose que 10 (respectivement 3) usagers de la stratégie s_1 et 5 (respectivement 2) de s_2 ont atteint nœud j_4 à partir du nœud j_3 dont l'instant initial d'arrivée au nœud j est l'instant 3 (respectivement 2). Les capacités des arcs (j_4, k_6) et (j_4, l_6) sont respectivement 10 et 15. Avec ces hypothèses et en utilisant la définition (5.7), nous avons $\bar{S}^{42} = \{s_1, s_2 : z_j^{s_1^{42}} = 3, z_j^{s_2^{42}} = 2\}$, $\bar{S}^{43} = \{s_1, s_2 : z_j^{s_1^{43}} = 10, z_j^{s_2^{43}} = 5\}$ et $\bar{S}^{44} = \{s_1, s_2 : z_j^{s_1^{43}} = 10, z_j^{s_2^{43}} = 5\}$.

On débute par le chargement de la première classe \bar{S}^{42} . À la première itération, les 3 usagers de s_1 et les 2 usagers de s_2 sont affectés à leurs nœuds préférés car $10 > 3$ et $15 > 2$. Les capacités résiduelles des arcs (j_4, k_6) et (j_4, l_6) deviennent 7 et 13 et le chargement se termine pour la classe \bar{S}^{42} . La seconde itération est le début

du chargement de la classe $\bar{S}^{43} = \{s_1, s_2 : z_j^{s_1 43} = 10, z_j^{s_2 43} = 5\}$. À cette itération, l'arc (j_4, k_6) devient saturé puisque nous avons $7/10 < 13/5$. On affecte alors 7 unités de volume de s_1 au nœud k_6 , et 3.5 unités de volume de s_2 au nœud l_6 . On élimine ensuite le nœud k_6 des ordres de préférences $E_j^{s_1 42}$, $E_j^{s_1 43}$, $E_j^{s_2 42}$ et $E_j^{s_2 43}$. À la troisième itération, 4.5 unités de volume (3 de s_1 + 1.5 de s_2) veulent emprunter l'arc (j_4, l_6) , dont la capacité résiduelle est 9.5. Ainsi, les 3 unités de volume de s_1 et les 1.5 unités de s_2 accèdent au nœud l_6 et le chargement prend fin pour la classe \bar{S}^{43} . La quatrième itération est le début du chargement de la dernière classe $\bar{S}^{44} = \{s_1, s_2 : z_j^{s_1 43} = 10, z_j^{s_2 43} = 5\}$. On observe 12 unités de la stratégie s_1 et 8 unités de s_2 qui rivalisent pour l'arc (j_4, l_6) de capacité résiduelle 5. À ce stade, seulement 3 unités de volume de s_1 et 2 unités de s_2 utilisent l'arc (j_4, l_6) . Une cinquième itération est nécessaire pour terminer le chargement au nœud j_4 . Les 15 unités de volume résiduelles au nœud j_4 choisissent alors l'arc (j_4, j_5) de capacité infinie. Finalement, on calcule les probabilités d'accès aux arcs à l'aide de la formule (5.6). Par exemple, nous obtenons $\pi_{jk}^{s_1 4} = 10/25$ car parmi 25 usagers de la stratégie s_1 , 10 usagers utilisent l'arc (j, k_1) . Les résultats du chargement au nœud j_4 sont résumés au tableau 5.1.

5.3.2 Algorithme de chargement

Cette sous-section décrit en détail l'algorithme de chargement. Deux aspects importants différencient cet algorithme de celui du cas statique. Premièrement, il y a plusieurs sous-classes d'usagers à prendre en considération pour respecter les priorités contrairement à seulement deux classes dans le cas statique. Deuxièmement, pour respecter les priorités, les usagers sont classifiés suivant l'instant initial d'arrivée à un nœud j tandis que dans le cas statique ils sont classifiés suivant leur appartenance ou non à une ligne de transport.

L'algorithme de chargement dynamique du réseau, nommé **DCAPLOAD**, détermine le vecteur des probabilités $\pi = \{\pi_{jk}^{st}\}_{(j,k) \in A, s \in W^t}$ et le vecteur de coûts stratégiques $C = \{C_s^t\}_{s \in W^t, t \leq T}$ induits par un vecteur de volumes stratégiques $x = \{x_s^t\}_{s \in W^t, t \leq T}$, où W^t est l'ensemble de travail induit par les stratégies s telle que les usagers

	arc :	(j_4, k_6)	(j_4, l_6)	(j_4, j_5)
itération 1	cap. rés. :	10	15	∞
	volume :	$3(z_j^{s_1 42})$	$2(z_j^{s_2 42})$	0
itération 2	cap. rés. :	7	13	∞
	volume :	$3(z_j^{s_1 42})+7(z_j^{s_1 43})$	$2(z_j^{s_2 42}) + 3.5(z_j^{s_2 43})$	0
itération 3	cap. rés. :	0	9.5	∞
	volume :	$3(z_j^{s_1 42})+7(z_j^{s_1 43})$	$2(z_j^{s_2 42}) + 3.5(z_j^{s_2 43})$ $+3(z_j^{s_1 43}) + 1.5(z_j^{s_2 43})$	0
itération 4	cap. rés. :	0	5	∞
	volume :	$3(z_j^{s_1 42})+7(z_j^{s_1 43})$	$2(z_j^{s_2 42}) + 5(z_j^{s_2 43})$ $+3(z_j^{s_1 43}) + 3(z_j^{s_1 44})$ $+2(z_j^{s_2 44})$	0
itération 5	cap. rés. :	0	0	∞
	volume :	$3(z_j^{s_1 42})+7(z_j^{s_1 43})$	$2(z_j^{s_2 42}) + 5(z_j^{s_2 43})$ $+3(z_j^{s_1 43}) + 3(z_j^{s_1 44})$ $+2(z_j^{s_2 44})$	$9(z_j^{s_1 44})$ $+6(z_j^{s_2 44})$

$$\text{probabilités : } \pi_{jk}^{s_1 4} = \frac{10}{25} \quad \pi_{jl}^{s_1 4} = \frac{6}{25} \quad \pi_j^{s_1 4} = \frac{9}{25} \quad \pi_{jl}^{s_2 4} = \frac{9}{15} \quad \pi_j^{s_2 4} = \frac{6}{15}$$

TAB. 5.1 – Résultats du chargement dynamique au nœud j_4

quittent l'origine $q(s)$ à l'instant t . On charge les nœuds suivant l'ordre temporel du réseau espace-temps. Le chargement d'un nœud j_t comprend trois étapes. D'abord, on construit les ensembles des stratégies actives $\overline{W}^{tt'}$ à ce sommet. Ensuite vient la phase principale d'affectation des usagers. Au pire cas, s'il existe des usagers ayant atteint le nœud j à l'instant $0, 1, \dots, t$ et qui sont encore en attente, cette phase s'effectue en $t + 1$ boucles successives pour tenir compte des priorités. Chaque boucle t' ($0 \leq t' \leq t$) est associée à une classe $\overline{W}^{tt'}$. Chaque itération de la boucle t' correspond à une itération du chargement. On quitte cette boucle dès que $\overline{W}^{tt'}$ est vide. Enfin, la mise à jour des coûts stratégiques à l'aide de la formule (5.5) termine le chargement au nœud j_t . Le code suivant décrit l'algorithme de chargement d'un vecteur stratégique x .

PROCÉDURE DCAPLOAD (x)

input : $x = \{x_s^t\}_{s \in W^t, t \leq T}$ [vecteur de volumes stratégiques]
output : $\{\pi_{jk}^{st}(x)\}_{(j,k) \in A, s \in W^t}$ [probabilités d'accès aux arcs]
 $C = \{C_s^t(x)\}_{s \in W^t, t \leq T}$ [vecteur de coûts stratégiques]

INITIALISATION

for $t = 0$ **to** T **do**

for $s \in W^t$ **do**

$C_s^t := 0$ [coût de la stratégie s]

$z_{q(s)}^{st} := x_s^t$ [volume à l'origine $q_t(s)$]

$\tau_{q(s)}^{st} := 1$ [probabilité d'accès à $q_t(s)$]

for $t' = t$ **to** T **do**

for $j_{t'} \in V$ ($j_{t'} \neq q_t(s)$) **do**

for $t'' = t$ **to** t' **do**

$z_j^{st't''} := 0$ [volume stratégique au nœud $j_{t'}$ si j
 a été atteint à l'instant t'']

endfor

$\tau_j^{st'} := 0$ [probabilité d'accès au nœud $j_{t'}$
 avec la stratégie s]

for $k_{t'+c_{jk}} \in E_j^{st'}$ **do**

$v_{jk}^{st'} := 0$ [volume stratégique sur l'arc $(j_{t'}, k_{t'+c_{jk}})$]

$\pi_{jk}^{st'} := 0$ [probabilité d'accès à l'arc

endfor ($j_{t'}, k_{t'+c_{jk}}$) avec la stratégie s]

endfor

endfor

endfor

endfor

PHASE D'AFFECTION

for $t = 0$ **to** T **do**

for $j_t \in V$ (dans l'ordre temporel) **do**

for $k_{t+c_{jk}} \in j_t^+$ **do**

$\bar{u}_{jk} := u_{jk}$ [capacité résiduelle de l'arc $(j_t, k_{t+c_{jk}})$]

endfor

```

 $\bar{u}_j := \infty$  [[ $(j_t, j_{t+1})$  admet une capacité infinie]]
for  $t' = 0$  to  $t$  do
   $z_j^{st} := z_j^{st} + z_j^{stt'}$  [volume stratégique total  $z_j^{st}$ ]
   $\bar{W}^{tt'} := \{s \in W : E_j^{stt'} \neq \emptyset\}$  [ensemble de stratégies actives en  $j_t$   
selon l'instant d'accéder au nœud  $j$ ]
endfor
for  $t' = 0$  to  $t$  do
  for  $s \in \bar{W}^{tt'}$  do
     $\bar{E}_j^{stt'} := E_j^{stt'}$  [ordre de préférences résiduel]
     $\bar{z}_j^{stt'} := z_j^{stt'}$  [volume stratégique résiduel]
  endfor
  while  $\bar{W}^{tt'} \neq \emptyset$  do [début du chargement pour  $\bar{W}^{tt'}$ ]
     $K := \emptyset$  [ensemble des premiers choix résiduels]
    for  $k_{t+c_{jk}} \in j_t^+$  do [[ $k_{t+c_{jk}} = j_{t+1}$  (arc de marche)]]
       $d_k := 0$  [demande pour le nœud  $k_{t+c_{jk}}$ ]
       $W_k := \emptyset$  [ensemble de stratégies ayant le  
 $k_{t+c_{jk}}$  comme premier choix résiduel]
    endfor
    for  $s \in \bar{W}^{tt'}$  do
       $k_{t+c_{jk}} := \bar{E}_j^{stt'}(1)$  [premier choix résiduel de la stratégie  $s$ ]
       $K := K \cup \{k\}$  [construction de  $K$  ( $k = j$  si  
 $(j_t, \bar{E}_j^{stt'}(1))$  est un arc de marche)]
       $W_k := W_k \cup \{s\}$  [construction de  $W_k$ ]
       $d_k := d_k + \bar{z}_j^{stt'}$  [construction de  $d_k$ ]
    endfor
     $\mu := \max\{d_k / \bar{u}_{jk} : k \in K\}$ 
     $\beta^{tt'} := \min\{1/\mu, 1\}$  [proportion de volume résiduel affectée]
    for  $k \in K$  do
      for  $s \in W_k$  do
         $t'' := t + c_{jk}$  [instant pour accéder au nœud  $k$ ]
        if  $k = j$  then
           $z_j^{st+1t'} := z_j^{st+1t'} + \beta^{tt'} \bar{z}_j^{stt'}$  [mise à jour du volume  $z_j^{st+1t'}$ ]
        else
           $z_k^{st''t''} := z_k^{st''t''} + \beta^{tt'} \bar{z}_j^{stt'}$  [mise à jour du volume  $z_k^{st''t''}$ ]
        endfor
      endfor

```

```

    endif
     $v_{jk}^{st} := v_{jk}^{st} + \beta^{tt'} \bar{z}_j^{stt'}$  [mise à jour du flot d'arc  $v_{jk}^{st}$ ]
     $\bar{z}_j^{stt'} := (1 - \beta^{tt'}) \bar{z}_j^{stt'}$  [mise à jour du flot résiduel  $\bar{z}_j^{stt'}$ ]
     $\pi_{jk}^{st} := v_{jk}^{st} / z_j^{st}$  [mise à jour de la probabilité  $\pi_{jk}^{st}$ ]
  endfor
   $\bar{u}_{jk} := \bar{u}_{jk} - \beta^{tt'} d_k$  [mise à jour de la capacité  $\bar{u}_{jk}$ ]
  if  $\bar{u}_{jk} = 0$  then
    for  $t'' = 0$  to  $t$  do
      for  $s \in \bar{W}^{tt''}$  do
         $\bar{E}_j^{stt''} := \bar{E}_j^{stt''} - \{k_{t+c_{jk}}\}$  [mise à jour de l'ordre résiduel  $\bar{E}_j^{stt''}$ ]
      endfor
    endfor
  endif
endfor
if  $\beta^{tt'} = 1$  then
   $\bar{W}^{tt'} = \emptyset$  [fin du chargement pour la classe  $\bar{W}^{tt'}$ ]
endif
endwhile
endfor

for  $s \in W^t$ 
  for  $t' = t$  to  $T$ 
    for  $j_{t'} \in V$ 
      for  $k_{t'+c_{jk}} \in j_{t'}^+$  do
         $t'' = t' + c_{jk}$  [instant pour accéder au nœud  $k$ ]
         $C_s^t := C_s^t + c_{jk} \tau_j^{st'} \pi_{jk}^{st'}$  [mise à jour du coût  $C_s^t$ ]
         $\tau_k^{stt''} := \tau_k^{stt''} + \tau_j^{st'} \pi_{jk}^{st'}$  [mise à jour de  $\tau_k^{stt''}$ ]
      endfor
       $C_s^t := C_s^t + \tau_j^{st'} \pi_j^{st'}$  [mise à jour du coût  $C_s^t$ ]
       $\tau_j^{s(t'+1)} := \tau_j^{s(t'+1)} + \tau_j^{st'} \pi_j^{st'}$  [mise à jour de  $\tau_j^{s(t'+1)}$ ]
    endfor
  endfor
endfor

```

endfor
endfor

La procédure **DCAPLOAD** est de complexité polynomiale en fonction de $|N|$, $|A|$ et T . En effet, la boucle **while** est la partie du code qui détermine l'ordre de l'algorithme. Pour chaque nœud j_t , cette boucle est effectuée au plus $t + 1$ fois pour tenir compte des priorités. Soit n le nombre d'itérations exécutées par les boucles. À chaque tour de boucle, un arc devient saturé, sauf peut-être à la dernière itération de chacune des boucles. Par conséquent, on effectue ces boucles au plus $(|j_t^+| + t)$ fois au nœud j_t . Nous obtenons alors la majoration suivante :

$$\begin{aligned}
 n &\leq \sum_{t=0}^T \sum_{j_t \in V} (|j_t^+| + t) \\
 &= |E| + \frac{T(T+1)}{2}|N| \leq (|A| + |N|)T + \frac{T(T+1)}{2}|N|. \tag{5.9}
 \end{aligned}$$

Chapitre 6

Recherche d'un équilibre dynamique

La recherche d'un équilibre dynamique se ramène à la résolution de l'inégalité variationnelle associée au modèle dynamique. Cette résolution comporte deux difficultés principales. La première difficulté repose sur la nature de la fonction de coût induite par le chargement dynamique du réseau. Cette fonction n'est ni monotone ni différentiable. La seconde difficulté provient de la construction d'une stratégie optimale pour chacune des paires $O-D(t)$ du réseau. En effet, le procédé de construction d'une telle stratégie doit respecter la condition PAPP pour l'accès aux arcs du réseau.

Dans la première section, nous décrivons la notion d'équilibre stratégique dans le contexte dynamique et démontrons l'existence d'une solution d'équilibre dynamique. La seconde section porte sur la construction d'une stratégie optimale. Ce problème consiste à générer efficacement, pour un certain vecteur de volumes stratégiques et une certaine paire $O-D(t)$, la stratégie de coût minimal. Nous proposons aussi dans cette section un algorithme de linéarisation adaptée à la recherche d'un équilibre dynamique. Enfin, la dernière section présente les résultats numériques visant à tester les performances de notre algorithme en quête d'équilibres dynamiques.

6.1 Conditions d'équilibre dynamique

Dans cette section, nous présentons une généralisation dynamique des conditions de Wardrop pour définir un équilibre stratégique dans un réseau de transport avec capacités rigides. Nous terminons cette section par un théorème d'existence.

Un vecteur de volumes stratégiques réalisable $x^* \in X$ est un **vecteur d'équilibre stratégique dynamique** si, pour chaque paire $O-D(t)$, les stratégies utilisées ont le même coût, ce coût étant inférieur ou égal à ceux des stratégies non utilisées. Mathématiquement, ces conditions prennent la forme suivante :

$$\forall 0 \leq t \leq T' \quad \forall (q, r)(t) \in I(t), \quad \exists \mu_{qr}^t : \begin{cases} C_s^t(x^*) \geq \mu_{qr}^t & \forall s \in W_{qr}^t \\ x_s^{t*}(C_s^t(x^*) - \mu_{qr}^t) = 0 & \forall s \in W_{qr}^t. \end{cases} \quad (6.1)$$

Ces conditions constituent une extension des conditions d'équilibre dynamique de Wardrop au modèle stratégique. Les conditions d'équilibre (6.1) peuvent s'exprimer de manière équivalente à l'aide de l'inégalité variationnelle $IV(C, X)$:

$$\begin{aligned} x^* &\in X \\ \langle C(x^*), x^* - x \rangle &\leq 0 \quad \forall x \in X, \end{aligned} \quad (6.2)$$

où $C = \{C_s^t\}_{s \in W}$ désigne la fonction de coût stratégique définie sur X . On note X^* l'ensemble des solutions de cette inégalité variationnelle.

Théorème 7 *Si les coûts sur les arcs c_{jk} sont tous positifs, alors il existe au moins une solution à l'inégalité variationnelle $IV(C, X)$.*

preuve : La preuve découle directement de l'application du théorème 4 à la fonction de coût C donnée par la formule (5.5). En effet, l'algorithme **DCAPLOAD** présente des points dégénérés similaires à ceux de l'algorithme **PCAPLOAD** décrit dans le chapitre 3. Ces points dégénérés, causés par la nullité simultanée de la capacité résiduelle et du volume stratégique, correspondent dans le cas dynamique aux triplets $(j, k, s) \in N \times E_j^{stt'} \times \overline{W}^{tt'}$ ($1 \leq t' \leq t$) satisfaisant les conditions : $\overline{W}^{tt'-1} \neq \emptyset$, $z_j^{stt'} = 0$ et $\bar{u}_{jk} = 0$. Dans ce cas, on attribue à la probabilité π_{jk}^{st} la valeur 0 et nous pouvons démontrer que la fonction de coût C est semi-continue inférieurement sur l'ensemble X (preuve similaire à celle de la proposition 4). L'existence d'une solution à l'inégalité variationnelle $IV(C, X)$ est assurée alors par l'application directe du théorème 4 au modèle dynamique.

6.2 Recherche d'un équilibre dynamique

Dans le modèle d'équilibre dynamique classique, la recherche d'équilibre fait appel au calcul d'un chemin dynamique le plus court. De manière analogue, la construction d'une stratégie optimale joue un rôle fondamental dans la quête d'un équilibre stratégique dynamique.

6.2.1 Construction d'une stratégie optimale

Étant donné un vecteur de volumes stratégiques x et une paire $(q, r)(t)$, nous voulons construire efficacement une stratégie $s_{qrt}^*(x)$ dans l'ensemble :

$$W_{qrt}^*(x) = \arg \min_{s \in W_{qr}^t} \{C_s^t(x)\}.$$

Une telle stratégie admet un coût minimal $c_{qrt}^*(x)$ pour la paire $(q, r)(t)$, relativement au vecteur de flots stratégiques x .

Le chargement du réseau précède la construction de la stratégie optimale $s_{qrt}^*(x)$. Le chargement du vecteur de volumes stratégiques x induit le vecteur de volumes stratégiques aux noeuds $z = \{z_j^{s^*t}\}$. La connaissance de ce vecteur z permet de démarrer le micro-chargement (chargement du volume nul $z_j^{s^*t}$) au noeud $j_{t'}$. Ce micro-chargement doit tenir compte des priorités pour construire les ordres de préférences optimaux au noeud $j_{t'}$. Pour chaque instant $t \leq p \leq t'$, l'ordre de préférences optimal $E_j^{s^*t'p}$ est construit en effectuant le micro-chargement successivement sur les ensembles $\bar{W}^{t'0}, \bar{W}^{t'1}, \dots, \bar{W}^{t'p-1}$ et $\bar{W}^{t'p} \cup \{s^*\}$ pourvu que les usagers de la stratégie s^* aient atteint le noeud j à l'instant p . Cette nouvelle définition de l'ordre de préférences, qui tient compte de l'instant initial d'arrivée au noeud j , est nécessaire pour respecter la condition PAPP au noeud $j_{t'}$. On applique ensuite le procédé récursif de Nguyen et Pallottino [42] au réseau espace-temps R . Le coût de l'hyperchemin reliant le noeud $j_{t'}$

à la destination r_T , noté $\omega_{pj}^{s^*t'}$, est calculé à l'aide de l'équation générale de Bellman :

$$\omega_{pj}^{s^*t'} = \begin{cases} \infty & \text{si } j \neq r, t = T \\ 0 & \text{si } j = r \\ \sum_{k_{t''} \in E_j^{s^*t'p}} \pi_{jk}^{s^*t'} (c_{jk} + \omega_{t''k}^{s^*t''}) + \pi_j^{s^*t'} (1 + \omega_{pj}^{s^*t'+1}) & \text{si } j \neq r, t < T, \end{cases} \quad (6.3)$$

où $t'' = t' + c_{jk}$ est l'instant d'arrivée au nœud k en empruntant l'arc (j, k) et l'ordre de préférences optimal $E_j^{s^*t'p}$ est solution du problème combinatoire suivant :

$$E_j^{s^*t'p} \in \arg \min_{E_j^{s^*t'p} \in E_j^{t'p}} \left\{ \sum_{k_{t''} \in E_j^{s^*t'p}} \pi_{jk}^{s^*t'} (c_{jk} + \omega_{t''k}^{s^*t''}) + \pi_j^{s^*t'} (1 + \omega_{pj}^{s^*t'+1}) \right\}. \quad (6.4)$$

On applique l'équation générale de Bellman suivant l'ordre temporel inverse (de la destination r_T vers l'origine q_t). Le coût de la stratégie optimale s^* est alors $\omega_{iq}^{s^*t}$.

La complexité du procédé de construction d'une stratégie optimale dépend du problème combinatoire (6.4). En général, le nombre d'ensembles de préférences candidats à l'optimalité pour le problème (6.4) est $|j_t^+|$ et l'énumération de tous les ordres de l'ensemble $E_j^{t'p}$ est donc inefficace. Une méthode efficace pour résoudre le problème d'optimisation (6.4) consiste à considérer l'ordre de préférences $E_j^{\bar{s}t'p} = [k_1, k_2, \dots, k_l]$ tel que $l = |j_t^+|$ et :

$$c_{jk_i} + \omega_{k_i}^{s^*t'+c_{jk_i}} \leq c_{jk_{i+1}} + \omega_{k_{i+1}}^{s^*t'+c_{jk_{i+1}}} \quad \forall i = 1, 2, \dots, l-1, \quad (6.5)$$

$$\text{avec } \omega_k^{s^*t''} = \begin{cases} \omega_{pk}^{s^*t''} & \text{si } k_{t''} = k_{t'+c_{jk}} = j_{t'+1} \\ \omega_{t''k}^{s^*t''} & \text{sinon.} \end{cases}$$

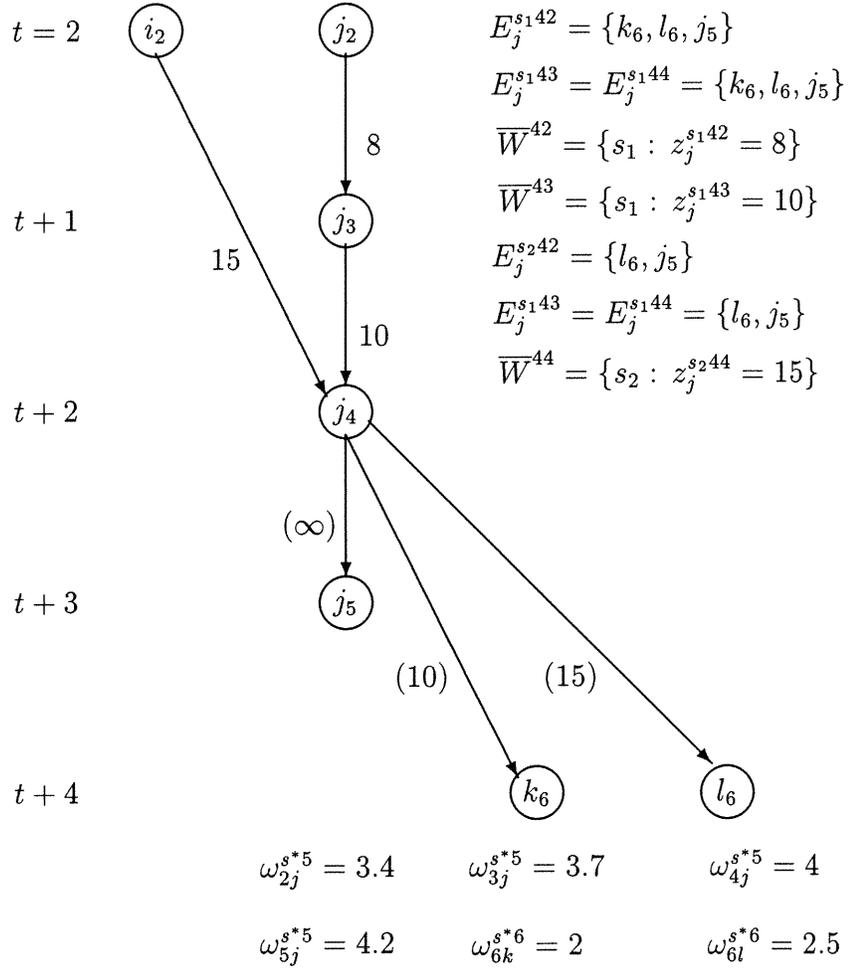
La construction de l'ordre de préférences $E_j^{\bar{s}t'p}$ requiert seulement le tri de l nombres.

Théorème 8 *L'ordre de préférences $E_j^{\bar{s}t'p}$ satisfaisant la condition (6.5) est une solution optimale du problème (6.4).*

preuve : La preuve est similaire à celle du théorème 5.

6.2.2 Exemple de construction d'une stratégie optimale

Nous allons montrer comment construire une stratégie réactive optimale au nœud j_4 dans le sous-réseau illustré à la figure 6.1. Dans cet exemple, nous supposons


 FIG. 6.1 – Construction de la stratégie optimale au nœud j_4

connues les valeurs $\omega_{t'k}^{s^{*t''}}$ ($t \leq t' \leq t''$) pour $k_{t''} \in j_4^+$ ($t'' = 4 + c_{jk}$). Au nœud j_4 , on suppose que 10 (respectivement 8) usagers de la stratégie s_1 , dont les ordres de préférences $E_j^{s^{14p}}$ ($p = 2, 3, 4$) sont tous égaux à $[k_6, l_6, j_5]$, ont atteint le nœud j_4 à l'instant 3 (respectivement 2). On retrouve aussi 15 usagers de la stratégie s_2 , dont les ordres de préférences $E_j^{s^{24p}}$ ($p = 2, 3, 4$) sont tous égaux à $[l_6, j_5]$ et qui ont accédé au nœud j_4 à partir du nœud i_2 . On calcule directement l'ordre $E_j^{s^{*42}} = [k_6, j_5, l_6]$ à partir des inégalités : $2 + 2 < 1 + 3.4 < 2 + 2.5$, l'ordre $E_j^{s^{*43}} = [k_6, l_6, j_5]$ à partir des inégalités : $2 + 2 < 2 + 2.5 < 1 + 3.7$ et l'ordre $E_j^{s^{*44}} = [k_6, l_6, j_5]$ à partir des inégalités : $2 + 2 < 2 + 2.5 < 1 + 4$. Nous effectuons trois fois le micro-chargement de s^* au nœud j_4 pour calculer les valeurs $\omega_{2j}^{s^{*4}}$, $\omega_{3j}^{s^{*4}}$ et $\omega_{4j}^{s^{*4}}$. Tout d'abord, nous supposons que les

usagers de la stratégie optimale s^* atteignent le nœud j à l'instant 2. Dans ce cas, nous devons effectuer le micro-chargement sur l'ensemble $\overline{W}^{42} \cup \{s^*\}$. Ce micro-chargement fournit les probabilités $\pi_{jk}^{s^*4} = 1$ et $\pi_j^{s^*4} = \pi_{jl}^{s^*4} = 0$, et nous obtenons :

$$\begin{aligned}\omega_{2j}^{s^*4} &= \pi_{jk}^{s^*4}(2 + \omega_{6k}^{s^*6}) + \pi_j^{s^*4}(1 + \omega_{2j}^{s^*6}) + \pi_{jl}^{s^*4}(2 + \omega_{6l}^{s^*6}) \\ &= 1(4) + 0(4.4) + 0(4.5) = 4.\end{aligned}$$

Maintenant, si les usagers adoptant la stratégie s^* accèdent au nœud j à l'instant 3, le micro-chargement effectué successivement sur les ensembles \overline{W}^{42} et $\overline{W}^{43} \cup \{s^*\}$ induit les probabilités $\pi_{jk}^{s^*4} = 1/5$, $\pi_{jl}^{s^*4} = 4/5$ et $\pi_j^{s^*4} = 0$. Dans ce cas, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\omega_{3j}^{s^*4} &= \pi_{jk}^{s^*4}(2 + \omega_{6k}^{s^*6}) + \pi_{jl}^{s^*4}(2 + \omega_{6l}^{s^*6}) + \pi_j^{s^*4}(1 + \omega_{3j}^{s^*6}) \\ &= \frac{1}{5}(4) + \frac{4}{5}(4.5) + 0(4.7) = \frac{22}{5} = 4.4.\end{aligned}$$

Enfin, le cas où les usagers utilisant la stratégie s^* atteignent le nœud j à l'instant 4 induit un micro-chargement successif sur les ensembles \overline{W}^{42} , \overline{W}^{43} et $\overline{W}^{44} \cup \{s^*\}$. On obtient alors les probabilités $\pi_{jk}^{s^*4} = 7/15$, $\pi_{jl}^{s^*4} = 8/15$ et $\pi_j^{s^*4} = 0$ et le coût $\omega_{4j}^{s^*4}$ est calculé comme suit :

$$\begin{aligned}\omega_{4j}^{s^*4} &= \pi_{jk}^{s^*4}(2 + \omega_{6k}^{s^*6}) + \pi_{jl}^{s^*4}(2 + \omega_{6l}^{s^*6}) + \pi_j^{s^*4}(1 + \omega_{4j}^{s^*6}) \\ &= \frac{7}{15}(4.5) + \frac{8}{15}(5) = \frac{71.5}{15} = 4.76.\end{aligned}$$

6.2.3 Algorithme DCAPSHORT

Nous présentons maintenant l'algorithme **DCAPSHORT** qui construit une stratégie optimale $s^* \in W_{grt}^*(x)$. Préalablement, nous effectuons le chargement du vecteur de volumes stratégiques x afin d'obtenir le vecteur de volumes stratégiques aux nœuds z . La procédure **DCAPSHORT** prend en input le vecteur z et la paire $(q, r)(t)$, et retourne la stratégie optimale s^* et son coût C^{s^*} .

Le déroulement de la procédure **DCAPSHORT** suit l'équation générale de Bellman (6.3). On balaye les nœuds suivant l'ordre temporel inverse. Le traitement d'un

nœud $j_{t'}$ comprend trois étapes. Pour chaque instant p ($t \leq p \leq t'$), on construit d'abord l'ordre de préférences optimal $E_j^{s^*t'p}$ à l'aide d'une procédure de tri. Ensuite, on démarre successivement le micro-chargement de s^* au nœud $j_{t'}$ sur les ensembles $\overline{W}^{t't}$, $\overline{W}^{t't+1}$, \dots , $\overline{W}^{t'p-1}$ et $\overline{W}^{t'p} \cup \{s^*\}$. Ce micro-chargement fournit les probabilités $\pi_{jk}^{s^*t'}$. Enfin, on calcule $\omega_{pj}^{s^*t'}$ avec la formule récursive (6.3). Nous présentons ci-dessous le code de l'algorithme **DCAPSHORT**.

PROCÉDURE DCAPSHORT ($z, (q, r)(t)$)

input : $z = \{z_j^{s^*t'}\}_{s \in W^t, j \in N}$ [vecteur de volume stratégique aux nœuds]
 $(q, r)(t)$ [paire $O-D(t)$]
output : s^*, C^{s^*} [stratégie optimale et son coût]

INITIALISATION

```

for  $t' \geq t$  do
  for  $j \in N$  do
    for  $p = t$  to  $t'$  do
      if  $j = r$  or ( $j \neq r$  and  $t < T$ ) then
         $\omega_{pj}^{s^*t'} := 0$  [coût de la stratégie optimale
        partant au nœud  $j_{t'}$ ]
      else
         $\omega_{pj}^{s^*t'} := \infty$ 
      endif
    endfor
  endfor
endfor
    
```

MICRO-CHARGEMENT

```

for  $t' = T - 1$  to  $t$  do
  for  $j_{t'} \in V$  (dans l'ordre temporel inverse et  $j \neq r$ ) do
    for  $p := t$  to  $t'$  do [ $z_j^{s^*t'}$  a atteint  $j$  à l'instant  $p$ ]
      for  $k_{t''} = k_{t'+c_{jk}} \in j_{t'}^+$  do
        if  $k_{t''} = j_{t'+1}$  then
    
```

```

         $\omega_j^{s^*t'+1} := \omega_{pj}^{s^*t'+1}$ 
    else
         $\omega_k^{s^*t''} := \omega_{t''k}^{s^*t''}$ 
    endif

endfor

 $E_j^{s^*t'p} := \text{sort} \{c_{jk} + \omega_k^{s^*t''}\}_{k_{t''} \in j_{t'}^+}$  [tri croissant de  $\{c_{jk} + \omega_k^{s^*t''}\}_{k_{t''} \in j_{t'}^+}$ ]
for  $k_{t'+c_{jk}} \in j_{t'}^+$  do
     $\bar{u}_{jk} := u_{jk}$  [capacité résiduelle de l'arc  $(j_{t'}, k_{t'+c_{jk}})$ ]
     $\pi_{jk}^{s^*t'} := 0$  [probabilité conditionnelle d'accès
    l'arc  $(j_{t'}, k_{t'+c_{jk}})$  avec la stratégie  $s^*$ ]
endfor
 $\bar{u}_j := \infty$  [( $j_{t'}, j_{t'+1}$ ) admet une capacité infinie]
 $\pi_j^{s^*t'} := 0$  [probabilité conditionnelle d'accès
    l'arc  $(j_{t'}, j_{t'+1})$  avec la stratégie  $s^*$ ]

for  $u = 0$  to  $p - 1$  do
     $\bar{W}^{t'u} := \{s \in W : E_j^{st'u} \neq \emptyset, z_j^{st'u} > 0\}$ 
endfor

 $\bar{W}^{t'p} := \{s \in W : E_j^{st'p} \neq \emptyset, z_j^{st'p} > 0\} \cup \{s^*\}$ 
for  $u = 0$  to  $p$  do [micro-chargement successif sur
    les ensembles  $\bar{W}^{t'u}$ ]
    for  $s \in \bar{W}^{t'u}$  do
         $\bar{E}_j^{st'u} := E_j^{st'u}$  [ordre de préférences résiduel]
         $\bar{z}_j^{st'u} := z_j^{st'u}$  [volume stratégique résiduel]
         $\rho_j^{st'u} := 1$  [proportion résiduelle de volume]
    endfor
    while  $\bar{W}^{t'u} \neq \emptyset$  do
         $K := \emptyset$  [ensemble des premiers choix résiduels]
        for  $k_{t'+c_{jk}} \in j_{t'}^+$  do [k_{t'+c_{jk}} = j_{t'+1} pour un arc d'attente]
             $d_k := 0$  [demande pour le nœud  $k_{t'+c_{jk}}$ ]
             $W_k := \emptyset$  [ensemble des stratégies ayant
            k_{t'+c_{jk}} comme premier choix résiduel]
        endfor
        for  $s \in \bar{W}^{t'u}$  do
             $k_{t'+c_{jk}} := \bar{E}_j^{st'u}(1)$  [premier choix résiduel de la stratégie  $s$ ]
             $K := K \cup \{k\}$  [construction de  $K$ ,  $k = j$  si

```

$(j_{t'}, \bar{E}_j^{st'u}(1))$ est un arc d'attente]

$W_k := W_k \cup \{s\}$ [construction de W_k]

$d_k := d_k + \bar{z}_j^{st'u}$ [construction de d_k]

endfor

$\mu := \max\{d_k/\bar{u}_{jk} : k \in K\}$

$\beta^{t'u} := \min\{1/\mu, 1\}$ [proportion de volume résiduel affectée]

for $k \in K$ **do**

for $s \in W_k$ **do**

if $s = s^*$ **then**

$\pi_{jk}^{st'} := \pi_{jk}^{st'} + \beta^{t'u} \rho_j^{st'u}$ [mise à jour de la probabilité $\pi_{jk}^{s^*t'}$]

$\rho_j^{st'u} := (1 - \beta^{t'u}) \rho_j^{st'u}$ [mise à jour de la proportion $\rho_j^{s^*t'}$]

else

$\bar{z}_j^{st'u} := (1 - \beta^{t'u}) \bar{z}_j^{st'u}$ [mise à jour du volume résiduel $\bar{z}_j^{st'u}$]

$\rho_j^{st'u} := (1 - \beta^{t'u}) \rho_j^{st'u}$ [mise à jour de la proportion $\rho_j^{st'u}$]

endif

endfor

$\bar{u}_{jk} := \bar{u}_{jk} - \beta^{t'u} d_k$ [mise à jour de la capacité \bar{u}_{jk}]

if $\bar{u}_{jk} = 0$ **then**

for $t'' = t$ **to** t' **do**

for $s \in \bar{W}^{t''}$ **do**

$\bar{E}_j^{st''} := \bar{E}_j^{st''} - \{k_{t'+c_{jk}}\}$ [mise à jour des ordres résiduels $\bar{E}_j^{st''}$]

endfor

endfor

endif

endfor

if $\beta^{t'u} = 1$ **then**

$\bar{W}^{t'u} = \emptyset$ [fin du micro-chargement pour $\bar{W}^{t'u}$]

endif

endwhile

endfor

for $k_{t''} \in E_j^{s^*t''}$ **do** [$t'' = t' + c_{jk}$]

$\omega_{pj}^{s^*t''} := \omega_{pj}^{s^*t''} + \pi_{jk}^{s^*t''} (c_{jk} + \omega_{t''k}^{s^*t''})$ [mise à jour du coût $\omega_{pj}^{s^*t''}$]

```

endfor                                     ( $p = t, \dots t'$ )
     $\omega_{pj}^{s^*t'}$  :=  $\omega_{pj}^{s^*t} + \pi_j^{s^*t}(1 + \omega_{pj}^{s^*t'+1})$ 
endfor
if  $j = q$  and  $t' = t$  then
    if  $\omega_{tq}^{s^*t} \leq T$  then
         $C^{s^*}$  :=  $\omega_{tq}^{s^*t}$ 
    else                                     [coût de la stratégie optimale]
         $C^{s^*}$  :=  $\infty$ 
    endif
endif
endfor
endfor

```

6.2.4 Algorithme de linéarisation

Dans le cas d'un réseau dynamique, il est impossible d'entreprendre la recherche d'un équilibre en connaissant à l'avance l'ensemble de travail stratégique. Ceci exclut l'utilisation des méthodes projectives (appliquées seulement sur un ensemble de travail fixe) pour rechercher un équilibre dynamique et nous amène à adopter une stratégie de restriction.

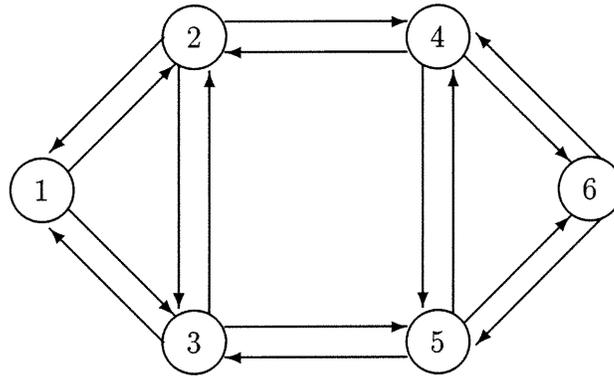
Nous adaptons l'algorithme **pseudo Frank-Wolfe** décrit au chapitre 4, pour trouver un équilibre stratégique dynamique. Le déroulement de l'algorithme ne change pas. Au départ, on dispose d'un ensemble de travail W^0 et d'un vecteur de volumes stratégiques x^0 . À l'itération k , nous combinons le vecteur courant x^k et le vecteur extrémal \bar{x}^k pour trouver une nouvelle approximation d'équilibre :

$$x^{k+1} = (1 - \theta^k)x^k + \theta^k\bar{x}^k,$$

où $\theta_s^k = 1 - \frac{C_s^t}{C_s^k}$ pour chaque stratégie $s \in W_{qr}^t$ et la solution extrémale \bar{x}^k est construite comme suit :

$$\bar{x}_s^k = \begin{cases} d_{qr}^t & \text{si } s = s_{qrt}^*(x^k) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6.6)$$

Nous appelons **DSTRATEQ** l'algorithme pseudo Frank-Wolfe utilisant les pas adap-

FIG. 6.2 – Petit réseau ($T = 65$)

tatifs θ_s^k . Le critère d'arrêt de l'algorithme est basé sur la même fonction d'écart relative g définie au chapitre 4.

Soit $\{x^k\}$ la suite produite par l'algorithme **DSTRATEQ**. Supposons que cette suite admet une limite y . En appliquant le théorème 6 (chapitre 4) au modèle dynamique, nous obtenons $y \in X^*$.

6.3 Résultats numériques

Dans cette section, nous présentons quelques résultats numériques portant sur le calcul d'équilibres stratégiques dynamiques. Ces résultats visent principalement à valider les performances de notre algorithme. Deux problèmes d'équilibre retiennent notre attention. Nous nous intéressons d'abord au calcul d'un équilibre dans un réseau de petite taille. Nous appliquons ensuite notre algorithme sur un réseau de taille moyenne.

6.3.1 Petit réseau

Le premier problème correspond au petit réseau illustré à la figure 6.2. Ce réseau possède 6 nœuds, 16 arcs et deux paires $O-D$ (1,6) et (6,1). Le nombre de périodes T et le dernier instant T' de départ des usagers sont fixés à 65 et à 9. Les coûts et les capacités sur les arcs sont présentés au tableau 6.1 tandis que les demandes temporelles pour chacune des paires $O-D$ sont exposées au tableau 6.2.

Arc	Coût	Capacité	Arc	Coût	Capacité
(1,2)	3	20	(3,5)	4	10
(2,1)	3	20	(5,3)	4	10
(1,3)	2	20	(4,5)	4	10
(3,1)	2	20	(5,4)	4	10
(2,3)	1	10	(4,6)	5	25
(3,2)	1	10	(6,4)	5	25
(2,4)	2	10	(5,6)	6	25
(4,2)	2	10	(6,5)	6	25

TAB. 6.1 – Données sur les arcs du petit réseau

Paire $O-D(t)$	Demande	Paire $O-D(t)$	Demande
(1,6,0)	5	(6,1,0)	10
(1,6,1)	10	(6,1,1)	15
(1,6,2)	25	(6,1,2)	30
(1,6,3)	18	(6,1,3)	23
(1,6,4)	15	(6,1,4)	20
(1,6,5)	17	(6,1,5)	22
(1,6,6)	30	(6,1,6)	35
(1,6,7)	45	(6,1,7)	50
(1,6,8)	15	(6,1,8)	20
(1,6,9)	12	(6,1,9)	17

TAB. 6.2 – Données sur les paires $O-D$ du petit réseau

Nous testons l'algorithme **DSTRATEQ** qui recherche un équilibre dynamique sur le petit réseau. On contrôle la taille de notre ensemble stratégique à l'aide des paramètres ϵ_1 et ϵ_2 (section 4.2.2). On pose $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.001$.

À une itération donnée, nous notons le nombre de stratégies actives, la valeur de la fonction d'écart et le temps de calcul (Cpu). Les tests ont été effectués sur un ordinateur *Sun Ultra Sparc*. L'algorithme a été codé en *C* sous le système d'exploitation *Solaris*. Les résultats des tests de convergence sont exposés au tableau 6.3. Le tableau 6.4 présente les coûts minimaux pour chacune des paires $O-D(t)$.

Nous poursuivons les expériences en modifiant le petit réseau afin de rendre la congestion plus considérable. Les capacités des arcs $(2, 3)$ et $(3, 2)$ passent de 10 à 5 unités de volume et toutes les demandes temporelles sont multipliées par le facteur $\frac{3}{2}$. Nous répétons ici les tests prévus pour le petit réseau. Les résultats de ces tests sont présentés aux tableaux 6.5 et 6.6.

Nous observons une convergence rapide de l'algorithme **DSTRATEQ** pour les deux réseaux. La variation de la fonction d'écart est sensiblement la même pour chacun des réseaux. La valeur de cette fonction est environ 1% au bout de 20 itérations. L'évolution du domaine de travail diffère d'un réseau à l'autre. Le nombre de stratégies générées à la vingtième itération est de 40 stratégies pour le petit réseau comparativement à 53 pour le petit réseau modifié. On observe aussi que le temps alloué à la recherche d'équilibre est plus long pour le petit réseau modifié. Les temps d'exécution de **DSTRATEQ** (cent premières itérations) pour les deux réseaux sont respectivement de 9 et de 12 minutes. Ainsi, nous constatons qu'une forte congestion influence la taille du domaine stratégique ainsi que le temps d'exécution de l'algorithme **DSTRATEQ**.

Observons finalement les coûts minimaux pour chacune des paires $O-D(t)$ des deux réseaux (tableaux 6.4 et 6.6). Ces résultats illustrent bien que la condition PAPP est vérifiée. Pour la paire $(1, 6)$, le coût stratégique minimal est égal à 10 périodes pour les usagers quittant l'origine 1 à l'instant 0. Pour le petit réseau (respectivement petit réseau modifié), ce coût minimal augmente de 3 (respectivement 6) périodes lorsque l'instant de départ de ces usagers devient 9. Pour les deux paires $(1, 6)$ et $(6, 1)$, on

constate une augmentation significative entre les coûts minimaux C^6 et C^7 . Ceci explique que le temps d'attente aux différents nœuds du réseau est très considérable pour les automobilistes quittant leur origine à l'instant 7.

# iter.	W	Fonction d'écart (%)	Cpu(sec)
0	20	26.4923	3.52
1	34	11.3380	8.47
2	34	5.5682	13.37
5	36	2.8952	28.36
10	40	1.5934	54.81
20	40	0.8830	111.27
30	40	0.5842	164.44
50	40	0.3081	275.80
100	40	0.0817	555.09

TAB. 6.3 – **DSTRATEQ** appliqué au petit réseau ($\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.001$)

Paire $O-D(t)$	Coût minimal	Paire $O-D(t)$	Coût minimal
(1,6,0)	10.000	(6,1,0)	10.000
(1,6,1)	10.000	(6,1,1)	10.333
(1,6,2)	10.799	(6,1,2)	11.333
(1,6,3)	11.888	(6,1,3)	12.156
(1,6,4)	12.000	(6,1,4)	12.189
(1,6,5)	12.000	(6,1,5)	12.263
(1,6,6)	12.209	(6,1,6)	12.617
(1,6,7)	13.075	(6,1,7)	13.831
(1,6,8)	13.360	(6,1,8)	14.536
(1,6,9)	13.018	(6,1,9)	14.555

TAB. 6.4 – Coûts minimaux après 100 itérations (petit réseau)

# iter.	$ W $	Fonction d'écart (%)	Cpu(sec)
0	20	40.8394	4.12
1	36	13.3624	9.61
2	36	6.1367	15.00
5	40	3.8735	32.16
10	47	2.1099	64.32
20	53	1.0616	135.83
30	55	0.7803	210.38
50	57	0.4901	367.39
100	57	0.2222	765.75

TAB. 6.5 – **DSTRATEQ** appliqué au petit réseau modifié ($\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.001$)

Paire $O-D(t)$	Coût minimal	Paire $O-D(t)$	Coût minimal
(1,6,0)	10.000	(6,1,0)	10.333
(1,6,1)	10.333	(6,1,1)	11.111
(1,6,2)	11.528	(6,1,2)	12.499
(1,6,3)	12.347	(6,1,3)	13.492
(1,6,4)	12.508	(6,1,4)	14.133
(1,6,5)	12.674	(6,1,5)	14.641
(1,6,6)	13.501	(6,1,6)	15.808
(1,6,7)	15.289	(6,1,7)	18.134
(1,6,8)	16.613	(6,1,8)	19.669
(1,6,9)	16.188	(6,1,9)	19.992

TAB. 6.6 – Coûts minimaux après 100 itérations (petit réseau modifié)

6.3.2 Réseau de Sioux Falls

Le calcul d'équilibres stratégiques dans le réseau dynamique de la ville de Sioux Falls (Suwansirikul [53]) constitue notre second problème numérique. Ce réseau, illustré à la figure 6.3, comprend 24 nœuds, 76 arcs et 8 paires $O-D$. Le nombre de périodes T et le dernier instant T' de départ des véhicules sont fixés à 100 et à 4.

Nous présentons les tests numériques effectués sur trois versions du réseau de Sioux Falls étiquetées **A**, **B** et **C**. Ces résultats visent à illustrer le comportement stratégique des usagers devant des modifications des différents paramètres du réseau (coûts, capacités et demandes). Les tableaux 6.7 et 6.8 contiennent les coûts et les capacités sur les arcs du réseau **A** ainsi que les demandes temporelles associées aux paires $O-D$. Le réseau **B** est obtenu à partir du réseau **A** en modifiant les capacités de quelques arcs et en multipliant toutes les demandes temporelles par le facteur 2. Le tableau 6.9 contient les nouvelles capacités du réseau **B**. Finalement, le réseau **C** est obtenu en effectuant une légère modification sur le réseau **B**. Les coûts et les capacités sur les arcs (17, 19) et (19, 17) passent de (6, 60) à (4, 20) et les nouvelles demandes temporelles de la paire (7, 20) sont présentées au tableau 6.10.

Les tests numériques se divisent en deux catégories : les tests de convergence et les tests sur les stratégies. Pour les tests de convergence, nous effectuons 50 itérations de l'algorithme **DSTRATEQ** sur chacun des réseaux. Nous fixons les paramètres de contrôle du domaine de travail (ϵ_1 et ϵ_2) à la valeur 0.1. À chaque itération, nous notons le nombre de stratégies générées, la valeur de la fonction d'écart et le temps de calcul (Cpu).

Les tests sur les stratégies consistent à analyser le comportement stratégique des usagers pour une paire $O-D(t)$ donnée en calculant les volumes, les coûts espérés et les **écart-types** des stratégies générées après 50 itérations de **DSTRATEQ**. L'écart-type d'une stratégie s mesure de combien les coûts des chemins empruntés par les usagers adoptant la stratégie s s'écartent du coût espéré C_s^t . Cette information importante que nous déduisons de notre algorithme pourrait influencer les usagers dans leur choix stratégique.

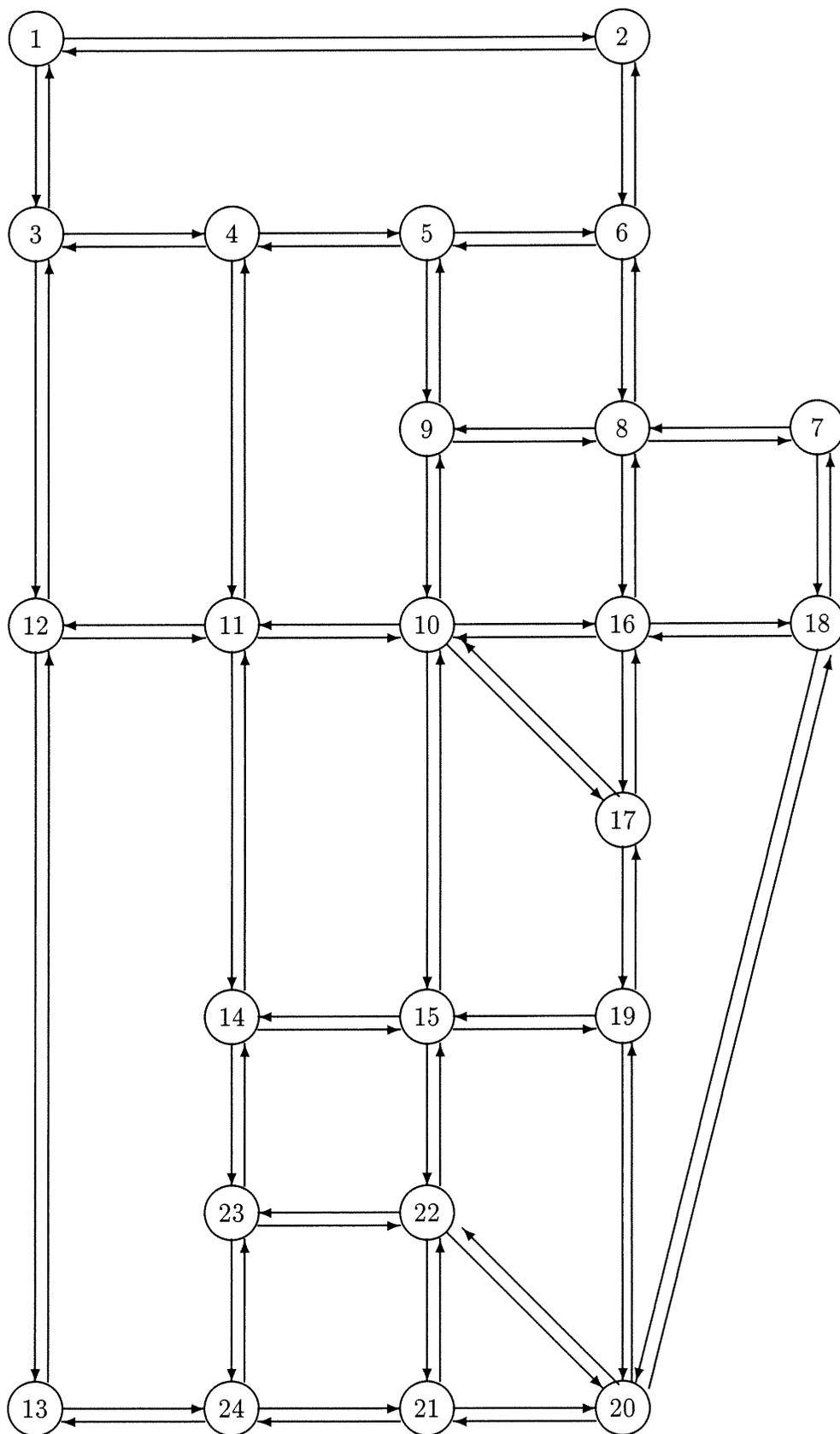


FIG. 6.3 – Réseau de Sioux Falls ($T = 100$)

Arc	Coût	Capacité	Arc	Coût	Capacité
(1,2)	6	60	(13,24)	4	60
(1,3)	2	60	(14,11)	3	15
(2,1)	6	60	(14,15)	4	60
(2,6)	2	60	(14,23)	2	10
(3,1)	2	60	(15,10)	4	20
(3,4)	2	60	(15,14)	4	60
(3,12)	4	60	(15,19)	2	60
(4,3)	2	60	(15,22)	2	60
(4,5)	2	60	(16,8)	2	40
(4,11)	3	10	(16,10)	2	60
(5,4)	2	60	(16,17)	2	40
(5,6)	10	60	(16,18)	2	60
(5,9)	2	20	(17,10)	6	60
(6,2)	2	60	(17,16)	2	40
(6,5)	10	60	(17,19)	6	60
(6,8)	2	60	(18,7)	4	60
(7,8)	2	60	(18,16)	2	60
(7,18)	4	60	(18,20)	16	60
(8,6)	2	60	(19,15)	2	60
(8,7)	2	60	(19,17)	6	60
(8,9)	4	60	(19,20)	4	30
(8,16)	2	40	(20,18)	16	60
(9,5)	2	20	(20,19)	4	30
(9,8)	4	60	(20,21)	4	60
(9,10)	2	20	(20,22)	6	10
(10,9)	2	20	(21,20)	4	60
(10,11)	3	10	(21,22)	8	60
(10,15)	4	20	(21,24)	4	60
(10,16)	2	60	(22,15)	2	60
(10,17)	6	60	(22,20)	6	10
(11,4)	3	10	(22,21)	8	60
(11,10)	3	10	(22,23)	2	10
(11,12)	4	60	(23,14)	2	10
(11,14)	3	15	(23,22)	2	10
(12,3)	4	60	(23,24)	2	60
(12,11)	4	60	(24,13)	4	60
(12,13)	14	60	(24,21)	4	60
(13,12)	14	60	(24,23)	2	60

TAB. 6.7 – Données sur les arcs du réseau **A**

Paire $O-D(t)$	Demande	Paire $O-D(t)$	Demande
(1,20,0)	25	(20,1,0)	25
(1,20,1)	40	(20,1,1)	40
(1,20,2)	55	(20,1,2)	55
(1,20,3)	30	(20,1,3)	30
(1,20,4)	20	(20,1,4)	20
(1,24,0)	20	(24,1,0)	20
(1,24,1)	35	(24,1,1)	35
(1,24,2)	50	(24,1,2)	50
(1,24,3)	25	(24,1,3)	25
(1,24,4)	15	(24,1,4)	15
(7,20,0)	15	(20,7,0)	15
(7,20,1)	30	(20,7,1)	30
(7,20,2)	45	(20,7,2)	45
(7,20,3)	20	(20,7,3)	20
(7,20,4)	10	(20,7,4)	10
(7,24,0)	15	(24,7,0)	15
(7,24,1)	30	(24,7,1)	30
(7,24,2)	45	(24,7,2)	45
(7,24,3)	20	(24,7,3)	20
(7,24,4)	10	(24,7,4)	10

TAB. 6.8 – Données sur les paires $O-D$ du réseau **A**

Arc	Capacité	Arc	Capacité
(8,16)	40	(16,8)	40
(16,17)	40	(17,16)	40
(19,20)	30	(20,19)	30

TAB. 6.9 – Nouvelles capacités du réseau **B**

Paire $O-D(t)$	Demande
(7,20,0)	60
(7,20,1)	120
(7,20,2)	180
(7,20,3)	80
(7,20,4)	40

TAB. 6.10 – Demandes de la paire (7, 20) (réseau **C**)

Si l'on utilise l'expression (5.3) du coût stratégique (voir chapitre 5), l'écart-type d'une stratégie s , notée σ_s^t , est définie comme suit :

$$\sigma_s^t(x) = \left[\sum_{p(t) \in P^s} \kappa_{p(t)}^s(x) (C^{p(t)})^2 - [C_s^t(x)]^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

où $\kappa_{p(t)}^s(x)$ est la probabilité d'utiliser le chemin $p(t)$ donnée par la formule (5.1) et $C^{p(t)}$ est le coût du chemin $p(t)$.

Nous débutons les expériences par les tests de convergence de **DSTRATEQ** sur chacun des réseaux **A**, **B** et **C**. Les résultats de ces tests sont exposés aux tableaux 6.11, 6.12 et 6.13. Les tableaux 6.14, 6.15 et 6.16 présentent les coûts minimaux pour chacune des paires $O-D(t)$.

Comme dans le cas du petit réseau, les tests correspondant au réseau de Sioux Falls sont concluants. Les progressions de **DSTRATEQ** sont comparables pour les réseaux **A**, **B** et **C**. La fonction d'écart progresse très lentement dans les dix premières itérations avant d'atteindre une valeur inférieure à 1% après un maximum de 30 itérations. Le temps d'exécution de chaque itération de **DSTRATEQ** est d'environ une minute pour les trois réseaux. Ce temps d'exécution élevé s'explique du fait qu'à chaque itération de l'algorithme, nous effectuons un chargement dynamique du réseau (un appel de l'algorithme **DCAPLOAD**) et la construction des stratégies optimales pour chacune des destinations et des instants de départ des usagers ($|D| \times T'$ appels de **DCAPSHORT**); chaque appel des algorithmes **DCAPLOAD** et **DCAPSHORT** tient compte des priorités et admet un temps d'exécution dans l'ordre de $(|A| + |N|)T + \frac{T(T+1)}{2}|N|$ (voir formule (5.9) du chapitre précédent). En appliquant cette

formule aux données du réseau, on obtient un maximum de l'ordre de dix millions opérations élémentaires pour chaque itération de **DSTRATEQ**. Dans un réseau où la congestion est localisée, ce temps pourrait être grandement réduit en utilisant un traitement adéquat des données.

L'évolution du domaine de travail diffère d'un réseau à l'autre. À cet égard, le nombre de stratégies générées à la cinquantième itération est de 80 pour le réseau **A**, 172 pour le réseau **B** et 192 en faveur du réseau **C**. La modification du réseau de Sioux Falls influence donc réellement la nature du domaine stratégique. Les solutions d'équilibre pour les trois réseaux sont totalement différentes. Elles diffèrent en terme de volumes stratégiques mais aussi, au niveau des coûts d'équilibre (tableaux 6.14, 6.15 et 6.16).

# iter.	$ W $	Fonction d'écart (%)	Cpu(sec)
0	40	6.3853	49.81
1	64	5.7933	118.56
2	67	4.9266	188.85
5	70	2.9340	406.69
10	77	1.5637	788.17
20	78	0.7630	1595.60
30	79	0.4816	2426.13
50	80	0.3279	4157.09

TAB. 6.11 – **DSTRATEQ** appliqué au réseau **A** ($\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.1$)

# iter.	$ W $	Fonction d'écart (%)	Cpu(sec)
0	40	32.5518	55.39
1	75	20.2456	139.39
2	92	14.4513	236.32
5	123	7.0109	577.66
10	149	3.5233	1250.41
20	168	1.4144	2811.61
30	171	0.9505	4479.48
50	172	0.5053	7894.81

TAB. 6.12 – **DSTRATEQ** appliqué au réseau **B** ($\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.1$)

# iter.	$ W $	Fonction d'écart (%)	Cpu(sec)
0	40	38.6861	56.49
1	76	24.6751	142.80
2	93	16.0157	240.55
5	130	7.5075	593.06
10	159	3.6671	1301.51
20	186	1.5922	2970.06
30	193	0.9470	4763.01
50	192	0.6316	8447.17

TAB. 6.13 – **DSTRATEQ** appliqué au réseau **C** ($\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.1$)

Paire $O-D(t)$	Coût minimal	Paire $O-D(t)$	Coût minimal
(1,20,0)	20.692	(20,1,0)	20.253
(1,20,1)	21.563	(20,1,1)	21.009
(1,20,2)	22.013	(20,1,2)	22.646
(1,20,3)	23.342	(20,1,3)	23.270
(1,20,4)	23.401	(20,1,4)	23.374
(1,24,0)	14.914	(24,1,0)	14.956
(1,24,1)	17.550	(24,1,1)	17.157
(1,24,2)	20.783	(24,1,2)	20.839
(1,24,3)	23.439	(24,1,3)	23.031
(1,24,4)	23.419	(24,1,4)	23.487
(7,20,0)	16.000	(20,7,0)	16.250
(7,20,1)	16.333	(20,7,1)	16.997
(7,20,2)	17.212	(20,7,2)	18.559
(7,20,3)	17.461	(20,7,3)	19.239
(7,20,4)	17.447	(20,7,4)	19.373
(7,24,0)	16.087	(24,0)	16.087
(7,24,1)	16.910	(24,1)	17.117
(7,24,2)	19.283	(24,2)	19.683
(7,24,3)	20.659	(24,3)	21.546
(7,24,4)	21.416	(24,4)	21.549

TAB. 6.14 – Coûts minimaux après 50 itérations (réseau **A**)

Paire $O-D(t)$	Coût minimal	Paire $O-D(t)$	Coût minimal
(1,20,0)	24.806	(20,1,0)	22.078
(1,20,1)	27.135	(20,1,1)	25.708
(1,20,2)	29.592	(20,1,2)	29.207
(1,20,3)	31.631	(20,1,3)	30.134
(1,20,4)	31.910	(20,1,4)	30.124
(1,24,0)	18.752	(24,1,0)	16.348
(1,24,1)	23.608	(24,1,1)	21.325
(1,24,2)	25.624	(24,1,2)	24.833
(1,24,3)	26.465	(24,1,3)	25.430
(1,24,4)	26.589	(24,1,4)	25.009
(7,20,0)	16.750	(20,7,0)	17.920
(7,20,1)	19.263	(20,7,1)	19.892
(7,20,2)	20.586	(20,7,2)	20.350
(7,20,3)	20.989	(20,7,3)	20.709
(7,20,4)	20.114	(20,7,4)	20.467
(7,24,0)	16.882	(24,0)	16.873
(7,24,1)	20.448	(24,1)	20.944
(7,24,2)	26.144	(24,2)	26.343
(7,24,3)	28.737	(24,3)	27.814
(7,24,4)	28.108	(24,4)	26.843

TAB. 6.15 – Coûts minimaux après 50 itérations (réseau **B**)

Paire $O-D(t)$	Coût minimal	Paire $O-D(t)$	Coût minimal
(1,20,0)	25.357	(20,1,0)	22.078
(1,20,1)	27.843	(20,1,1)	25.714
(1,20,2)	30.383	(20,1,2)	29.081
(1,20,3)	32.000	(20,1,3)	30.228
(1,20,4)	31.835	(20,1,4)	30.204
(1,24,0)	18.600	(24,1,0)	16.348
(1,24,1)	23.785	(24,1,1)	21.323
(1,24,2)	25.707	(24,1,2)	24.835
(1,24,3)	26.205	(24,1,3)	25.437
(1,24,4)	26.224	(24,1,4)	25.019
(7,20,0)	17.686	(20,7,0)	17.920
(7,20,1)	20.312	(20,7,1)	19.892
(7,20,2)	21.872	(20,7,2)	20.363
(7,20,3)	22.567	(20,7,3)	20.681
(7,20,4)	22.138	(20,7,4)	20.462
(7,24,0)	17.461	(24,0)	16.873
(7,24,1)	21.144	(24,1)	20.940
(7,24,2)	26.823	(24,2)	26.318
(7,24,3)	29.808	(24,3)	27.819
(7,24,4)	29.658	(24,4)	26.880

TAB. 6.16 – Coûts minimaux après 50 itérations (réseau C)

Maintenant, concentrons-nous sur la paire (7, 20). Pour chacun des trois réseaux, notre objectif est d'analyser le comportement stratégique des usagers qui quittent l'origine 7 aux instants 0 et 4 respectivement.

Pour le réseau **A**, on constate qu'il n'y a qu'une stratégie utilisée à l'équilibre pour les usagers de la paire (7, 20, 0). Les 15 automobilistes de cette paire adoptent tous la stratégie s_1 illustrée au tableau 6.17 en empruntant le seul chemin dynamique $7_0 - 8_2 - 16_4 - 10_6 - 15_{10} - 19_{12} - 20_{16}$. Cette stratégie admet un coût espéré égal à 16 périodes et un écart-type nul. Maintenant, observons le comportement stratégique des usagers qui quittent leur origine quatre périodes plus tard. À l'équilibre, seulement 10% des usagers utilisent la stratégie s_1 (seule stratégie adoptée par les usagers de la paire (7, 20, 0)) et 90% utilisent la stratégie s_2 exposée au tableau 6.18. À partir du nœud 7_4 , les 10 unités de flot des deux stratégies accèdent au nœud 8_6 . Au nœud 8_6 , ces 10 unités doivent attendre une période avant d'emprunter l'arc $(8_7, 16_9)$. À partir du nœud 16_9 , les usagers de la stratégie s_1 accèdent au nœud 10_{11} et ceux de la stratégie s_2 atteignent successivement les nœuds 17_{11} et 19_{17} . Au nœud 10_{11} , 31% des usagers de la stratégie s_1 réussissent à accéder au nœud 15_{15} pour ensuite emprunter l'arc $(15_{15}, 19_{17})$ tandis que 69% sont obligés d'attendre une période au nœud 10_{11} pour atteindre par la suite les nœuds 15_{16} et 19_{18} . Au nœud 19_{17} , 31% des usagers de la stratégie s_1 et 100% de s_2 veulent emprunter l'arc $(19_{17}, 20_{21})$ dont la capacité est 30. Seulement 55% de ces usagers atteignent la destination 20_{21} tandis que 45% se retrouvent au nœud 19_{18} . Au nœud 19_{18} , on retrouve 14% des usagers de la stratégie s_1 et 45% de s_2 ayant atteint le nœud 19 à l'instant 17 contre 69% ayant atteint le même nœud à l'instant 18. Pour respecter la condition PAPP, le premier groupe d'usagers est prioritaire pour l'accès à l'arc $(19_{18}, 20_{22})$. Ainsi, les usagers du premier groupe accèdent au nœud 20_{22} et le flot du second groupe se divise sur les arcs $(19_{18}, 20_{22})$ et $(19_{18}, 19_{19})$ suivant les proportions 6/10 et 4/10. Finalement, les 25% des usagers de s_1 au nœud 19_{19} atteignent le nœud 20_{23} . Le coût espéré des deux stratégies est égal à 17.5 périodes.

Nous poursuivons notre analyse en observant le comportement stratégique des usagers du réseau **B**. Les tableaux 6.18 et 6.19 présentent les stratégies utilisées pour

nœud :	7	8	10	15
ensemble de préférences (s_1) :	[8, 7]	[16, 8]	[15, 10]	[19, 15]
nœud :	16	19	20	
ensemble de préférences (s_1) :	[10, 17, 16]	[20, 19]	[]	

TAB. 6.17 – Seule stratégies utilisée pour la paire (7, 20, 0) (réseau **A**)

nœud :	7	8	10	15
ensemble de préférences (s_1) :	[8, 7]	[16, 8]	[15, 10]	[19, 15]
ensemble de préférences (s_2) :	[8, 18, 7]	[16, 8]		
nœud :	16	17	19	20
ensemble de préférences (s_1) :	[10, 17, 16]		[20, 19]	[]
ensemble de préférences (s_2) :	[17, 10, 16]	[19, 17]	[20, 19]	[]

TAB. 6.18 – Stratégies utilisées pour la paire (7, 20, 4) du réseau **A** et la paire (7, 20, 0) du réseau **B**

chacune des paires (7, 20, 0) et (7, 20, 4).

Tout d'abord, on observe l'effet de la modification de la capacité de l'arc (8, 16) sur le comportement des automobilistes. En effet, contrairement au réseau **A**, la congestion de cet arc force certains usagers à attendre plus d'une période au nœud 8 avant d'accéder au nœud 16. Ceci explique pourquoi un usager de la paire (7, 20, 0) décide de changer complètement sa stratégie lorsqu'il désire de reporter son instant de départ de 4 périodes. Au nœud 7, cet usager favorise l'accès au nœud 8 pour un instant de départ $t = 0$ (stratégies s_1 et s_2) tandis qu'il préfère emprunter l'arc (7, 18) lorsque t devient 4 (stratégies s_3 , s_4 et s_5). D'un autre côté, on remarque que le choix stratégique à un nœud du réseau **B** ne dépend pas de l'instant courant des usagers à ce nœud. Par exemple, au nœud 16, l'ensemble de préférences de la stratégie s_2 est toujours égal à [17, 10, 16] aux nœuds 16₄, 16₅ et 16₆. Finalement, le tableau 6.20 expose les volumes, les coûts espérés ainsi que les écart-types des stratégies pour chacune des paires (7, 20, 0) et (7, 20, 4). On constate que le coût minimal diffère de 4 périodes entre les deux paires, ce qui illustre l'effet du choix de l'instant de départ sur

les temps d'attente aux différents nœuds du réseau. Aussi, on remarque que l'écart-type de toutes les stratégies est relativement faible. Ceci veut dire que les usagers ne perçoivent pas cette notion dans leur choix stratégique.

Observons finalement les changements fondamentaux qui se produisent dans le réseau C . Premièrement, on constate l'impact de la congestion sur les temps d'attente sur chacun des nœuds du réseau. On remarque que pour chaque stratégie utilisée et à tout nœud j_t du réseau, il y a des usagers qui sont obligés d'attendre une ou plusieurs périodes avant d'accéder à leur nœud préféré. Ceci a pour effet d'augmenter le délai espéré de toutes les stratégies utilisées à l'équilibre. La seconde constatation concerne la nature des ensembles de préférences associés aux stratégies. Ces ensembles de préférences dépendent cette fois-ci de l'instant courant des usagers à un nœud du réseau. À titre d'exemple, la stratégie s_6 illustrée au tableau 6.21 propose deux ensembles de préférences différents aux nœuds 15 et 16. Ceci explique que la congestion force les usagers à changer leur comportement lorsqu'ils sont bloqués à l'entrée d'un arc congestionné.

6.3.3 Conclusion

Les résultats numériques que nous avons obtenus sont extrêmement encourageants. Bien que la fonction de coût induite par le processus de chargement ne possède pas de bonnes propriétés théoriques (monotonie, différentiabilité), la méthode de linéarisation converge assez rapidement dans le petit réseau et dans le réseau de Sioux Falls. Toutefois, nous avons observé un temps d'exécution assez élevé pour chaque itération de la méthode, ce qui nous amène à penser que dans le futur, il serait intéressant de réaliser une étude approfondie des structures de données utilisées pour représenter les composantes de nos modèles afin de minimiser le temps d'exécution de notre algorithme.

nœud :	7	8	16	17
ensemble de préférences (s_3) :	[18, 7]			
ensemble de préférences (s_4) :	[18, 8, 7]	[16, 8]	[17, 16]	[19, 17]
ensemble de préférences (s_5) :	[18, 7]		[17, 16]	[19, 17]
nœud :	18	19	20	
ensemble de préférences (s_3) :	[20, 18]			[]
ensemble de préférences (s_4) :	[20, 16, 18]	[20, 19]		[]
ensemble de préférences (s_5) :	[16, 20, 18]	[20, 19]		[]

TAB. 6.19 – Stratégies utilisées pour la paire (7, 20, 4) (réseau **B**)

Stratégie	Flot stratégique	Coût espéré	Écart-type
s_1	24.658	16.861	0.721
s_2	5.342	16.750	0.762
s_3	12.026	20.251	0.433
s_4	4.584	20.114	0.317
s_5	3.390	20.593	0.490

TAB. 6.20 – Volumes, coûts et écart-types des stratégies pour les paires (7, 20, 0) et (7, 20, 4) (réseau **B**)

nœud :	7	8	10	15 ₁₀	15 ₁₂
ensemble de préférences (s_6) :	[8, 18, 7]	[16, 8]	[15, 10]	[19, 22, 15]	[19, 15]
nœud :	16 ₄	16 ₆	17	19	20
ensemble de préférences (s_6) :	[10, 17, 16]	[17, 10, 16]	[19, 17]	[20, 19]	[]

TAB. 6.21 – Stratégie utilisée pour la paire (7, 20, 0) (réseau **C**)

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons montré que le concept de ‘stratégie’, utilisé avec profit dans un réseau de transport en commun sans priorités, peut être renouvelé et adapté à la résolution des problèmes d’équilibre statique et dynamique dans un réseau avec priorités. Bien que la fonction de coût ne soit ni différentiable ni monotone, les algorithmes proposés convergent numériquement sur des réseaux test.

Dans la première partie, nous avons proposé un modèle statique avec stratégies pour le transport en commun où l’accès aux lignes d’autobus est soumis à des règles de priorité. Ensuite, nous avons appliqué le concept de stratégie à la modélisation d’affectation dynamique de flots dans un réseau de trafic routier. Cette notion de stratégie de déplacement n’a pas été considérée jusqu’ici dans un modèle dynamique.

Dans notre approche de résolution, nous avons développé un algorithme de chargement qui simule le cheminement du flot des origines aux destinations et qui tient compte des priorités pour l’accès aux arcs du réseau. Sous l’hypothèse que la répartition des usagers dans les files d’attente est uniforme, nous avons démontré l’existence d’une solution d’équilibre stratégique. Ce dernier résultat constitue une contribution théorique fondamentale de notre thèse.

Les deux modèles proposés dans cette thèse représentent, à notre connaissance, des modèles innovateurs pour résoudre le problème d’affectation de trafic dans un réseau de transport avec capacités explicites. Les résultats numériques du quatrième et sixième chapitre nous laissent croire que ces deux modèles permettent d’obtenir de meilleures prédictions du comportement stratégique des usagers. Cependant, une telle conclusion doit être confirmée par l’application de ces modèles à des réseaux de grande taille, ce que nous espérons obtenir des développements futurs.

Le modèle d’affectation dynamique présenté est un modèle en temps discret nécessitant une division de la période d’étude en sous-intervalles de même longueur. Cela constitue la principale limitation du modèle car il est plus réaliste de considérer les paramètres du trafic comme des fonctions continues dans le temps. Une des avenues de recherche future consiste alors à adapter le concept de stratégie pour résoudre le problème d’affectation dynamique en temps continu.

Une autre avenue serait de fusionner les deux modèles développés dans cette thèse pour appliquer la notion de stratégie sur un réseau dynamique de transport en commun. Dans ce cas, si l'on connaît les temps de départ et d'arrivée des autobus aux différents nœuds du réseau, il faudrait développer un modèle stratégique qui tient compte des priorités suivant les temps d'arrivée des usagers aux nœuds de transfert.

Bibliographie

- [1] V. Astarita (1996), *A continuous time link model for dynamic network loading based on travel time function*, Proc. 13th International Symposium on Transportation and Traffic Theory (Tarrytown, N.Y.) (J.B. Lesort, ed.), Pergamon-Elisevier, pp. 79-102.
- [2] J.P. Aubin (1993), *Optima and equilibria : An introduction to nonlinear analysis*, Springer-Verlag.
- [3] J. Barceló, J.L. Ferrer et R. Grau (1994), *AIMSUN2 and the GETRAM simulation environment*, Internal Report, Departamento de Estadística e Investigación Operativa, Facultad de Informática, Univesitat Politècnica De Catalunya, pp. 54.
- [4] M.J. Beckmann, C.B. McGuire et C.B. Winston (1956), *Studies in the economics of transportation*, Yale University Press, Connecticut.
- [5] K. Border (1985), *Fixed point theorems with applications to economics and game theory*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [6] B. Bouzaïene-Ayari, M. Gendreau et S. Nguyen (1995), *An equilibrium-fixed point model for passenger assignment in congested transit networks*. Publication CRT-95-57, Centre de recherche sur les transports, Université de Montréal.
- [7] B. Bouzaïene-Ayari (1996), *Affectation statique des passagers dans les réseaux des transports en commun : modélisation et algorithme de résolution*, Ph.D dissertation, Département d'informatique et de recherche opérationnelle, Université de Montréal.
- [8] M. Carey (1987), *Optimal time-varying flows on congested networks*, Operations Research 35, pp. 58-69.

- [9] M. Carey (1992), *Nonconvexity of the dynamic traffic assignment problem*, Transportation Research B26, pp. 127-133.
- [10] C. Chriqui et P. Robillard (1975), *Commun bus line*, Transportation Science 9, pp. 115-121.
- [11] S. Dafermos (1980), *Traffic equilibrium and variational inequalities*, Transportation Science 14, pp. 42-54.
- [12] C.F. Daganzo (1995), *Properties of link travel time functions under dynamic loads*, Transportation Research 29B, pp. 95-98.
- [13] C.F. Daganzo (1995), *The cell transmission model, Part II*, Transportation Research 29B, pp. 79-93.
- [14] C.F. Daganzo (1996), *Effects of queue spillovers in transportation networks with a route choice*, Department of Civil and Environmental Engineering and Institute of Transportation Studies, University of California, Berkeley.
- [15] R.B. Dial (1967), *Transit pathfinder algorithm*, Highway Research Record 205, pp. 67-85.
- [16] O. Drissi-Kaitouni, A. Hamada-Benchekroun (1992), *A dynamic traffic assignment model and a solution algorithm*, Transportation Science 26, pp. 119-128.
- [17] O. Drissi-Kaitouni, M. Gendreau (1992), *A new dynamic traffic assignment model*, Publication CRT-854, Centre de recherche sur les transports, Université de Montréal.
- [18] J.E. Fernandez et J. de Cea (1994), *Flow propagation description in dynamic network assignment models*, Proceeding of Triennial Symposium on Transportation Analysis, Capri, Italy, pp. 517-532.
- [19] P. Ferrari (1995), *Road pricing and network equilibrium*, Transportation Research 29B, pp. 357-372.
- [20] P. Ferrari (1997), *Capacity constraints in urban transport networks*, Transportation Research 31B, pp. 291-301.
- [21] L.r. Ford et D.R. Fulkerson (1962), *Flows in Networks*, Princeton University Press, Princeton NY.

- [22] M. Frank et P. Wolfe (1956), *An algorithm for quadratic programming*, Naval Research Logistic Quarterly 3, pp. 95-110.
- [23] T.L. Friesz, D. Bernstein, T.E. Smith, R. Tobin et B.W. Wie (1993), *A variational inequality formulation on the dynamic network user equilibrium problem*, Operations Research 41, pp. 179-191.
- [24] M. Gendreau (1984), *Une étude approfondie d'un modèle d'équilibre pour l'affectation des passagers dans les réseaux de transport en commun*, Ph.D dissertation, Département d'informatique et de recherche opérationnelle, Université de Montréal.
- [25] M. Gendreau et B. Bouzaïene-Ayari (1996), *A discrete-time macroscopic dynamic traffic assignment model*, Publication 96-31, Centre de recherche sur les transports, Université de Montréal.
- [26] D. Hasselström (1981), *Public Transportation Planning - A Mathematical Programming Approach*, Ph.D dissertation, University of Gothenburg, Sweden.
- [27] D.W. Hearn (1980), *Bounding flows in traffic assignment models*, Research report 80-4, Department of Industrial and Systems Engineering, University of Florida, Gainesville.
- [28] D.W. Hearn (1982), *The gap function of a convex program*, Operational Research Letters 1, pp 67-71.
- [29] D.W. Hearn et M. Florian (1996), *Network equilibrium models and algorithms*, Network Routing, Handbooks in Operations Research and Management Science, Volume 8, North-Holland, Amsterdam.
- [30] I. Konnov (1993), *Combined relaxation methods for finding equilibrium points and solving related problems*, Mathematika 37, pp. 44-51.
- [31] G.M. Korpelevitch (1977), *The extragradient method for finding saddle points and other problems*, Matekon 13, pp. 35-49.
- [32] T. Larsson et M. Patriksson (1995), *An augmented Lagrangean dual algorithm for link capacity side constrained assignment problems*, Transportation Research 29B, pp. 433-455.

- [33] S. Lawphongpanich et D.W. Hearn (1984), *Simplicial decomposition of the asymmetric traffic assignment problem*, Transportation Research 18B, pp. 123-133.
- [34] F. Le Clercq (1972), *A public transport assignment method*, Traffic Engineering and Control 14, pp. 91-96.
- [35] M. Lighthill et G. Whitham (1955), *On Xinematic waves I and II a theory of traffic flow on long crowded roads*, Proceedings of the Royal Society of London, Series A. Royal Society, Vol. 229, pp. 317-345.
- [36] P. Marcotte (1997), *Inéquations variationnelles : motivation, algorithmes de résolution et quelques applications*, Publication 97-02, Centre de recherche sur les transports, Université de Montréal.
- [37] P. Marcotte et S. Nguyen (1998), *Hyperpath formulations of traffic assignment problems*, Equilibrium and Advanced Transportation Modelling (P. Marcotte and S. Nguyen, eds.), Kluwer Academic Publisher, pp. 175-199.
- [38] P. Marcotte, S. Nguyen et A. Schoeb (2000), *A strategic flow model of traffic assignment in capacitated networks*, Publication 2000-10, Centre de recherche sur les transports, Université de Montréal.
- [39] D. Merchant et G. Nemhauser (1978), *A model and an algorithm for the dynamic traffic assignment problems*, Transportation Science 12, pp. 183-199.
- [40] D. Merchant et G. Nemhauser (1978), *Optimality conditions for a dynamic traffic assignment model*, Transportation Science 12, pp. 200-207.
- [41] K. Nagel, P. Stretz, M. Pieck, S. Leckey, R. Donnelly et C.L. Barrett (1998), *TRANSIMS traffic flow characteristics*, Transportation Research Board 77th Annual Meeting, Preprint No. 981332.
- [42] S. Nguyen et S. Pallottino (1988), *Equilibrium traffic assignment for large scale transit networks*, European Journal of Operational Research 37, pp. 176-186.
- [43] S. Nguyen et S. Pallottino (1989), *Hyperpaths and shortest hyperpaths*, In B. Simeone, editor, Combinatorial Optimization, volume 1403 of Lecture Notes in Mathematics, pp. 258-271, Springer-Verlag, Berlin.

- [44] S. Nguyen, S. Pallottino et P. Malucelli (2001), *A modeling framework for the passenger assignment on a transport network with time-tables*, Transportation Science 55B, pp. 238-249.
- [45] M. Patriksson (1994), *The Traffic Assignment Problem-Models and Methods*, Topics in Transportation, VSP BV, The Netherlands.
- [46] P.L. Richards (1956), *Schockwaves on the hightway*, Operations Research 4, pp. 42-51.
- [47] J.M. Rubio-Ardanaz (2000), *Problème d'affectation dynamique sur un réseau de transport*, Ph.D dissertation, Département d'informatique et de recherche opérationnelle, Université de Montréal.
- [48] A. Schoeb (1999), *Une étude théorique et algorithmique d'un modèle d'affectation de trafic avec capacités rigides*, Mémoire de maîtrise, Département d'informatique et de recherche opérationnelle, Université de Montréal.
- [49] Y. Sheffi (1985), *Urban transportation networks : equilibrium analysis with mathematical programming methods*, Prentice Hall, New Haven.
- [50] M.J. Smith (1979), *Existence, uniqueness and stability of traffic equilibria*, Transportation Research 13B, pp. 295-304.
- [51] Spiess (1983), *On optimal route choice strategies in transit networks*, Publication 286, Centre de recherche sur les transports, Université de Montréal.
- [52] H. Spiess et M. Florian (1989), *Optimal strategies : a new assignment model for transit networks*, Transportation Research B 23, pp. 83-102.
- [53] C. Suwansirikul, T.L. Friesz et R.L. Tobin (1987), *Equilibrium decomposition optimization : a heuristic for the continuous equilibrium network design problem*, Transportation science 21, pp. 254-263.
- [54] M. Van Aerde (1999), *INTEGRATION Release 2.20 for WINDOWS : Users's Guide*, pp. 210.
- [55] S.M. Velan (2000), *The cell-transmission model : a new look at a dynamic network loading model*, Ph.D dissertation, Département d'informatique et de recherche opérationnelle, Université de Montréal.

- [56] B.W. Wie, T.L. Friesz et R.L. Tobin (1990), *Dynamic user optimal traffic assignment on congested multideestination networks*, Transportation Research 24B, pp. 431-442.
- [57] B.W. Wie, R.L. Tobin et T.L. Friesz (1994), *The augmented lagrangien method for solving dynamic traffic assignment models in discret time*, Transportation Science 28, pp. 179-191.
- [58] J.H. Wu (1991), *Monotone variational inequality problem study and its application to transportation network equilibrium problem*, Ph.D dissertation, Département d'informatique et de recherche opérationnelle, Université de Montréal.
- [59] J.H. Wu (1994), *Dynamic network equilibrium problem formulated as an infinite dimensional variational inequality problem*, Mathematical Programming 61, pp. 281-300.
- [60] J.H. Wu, M. Florian et P. Marcotte (1994), *Transit equilibrium assignment : a model and solutions algorithms*, Transportation Science 28, pp. 193-203.
- [61] J.G. Wardrop (1952), *Some theoretical aspects of road traffic research*, Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Part II, pp. 325-378.
- [62] D. Zawack et G. Thompson (1987), *A dynamic space-time network flow model for city traffic congestion*, Transportation Science 21, pp. 153-162.

Annexe A

Structures de données

Le choix de structures de données est une partie déterminante de l'implantation d'algorithmes. Dans cette annexe, nous décrivons les structures de données utilisées pour représenter les composantes principales des deux modèles stratégiques, à savoir le réseau, les stratégies, le domaine de travail et les paires $O-D$.

A.1 Modèle statique

On représente le réseau par un tableau de *listes d'adjacences*. Cette représentation est semblable à celle utilisée par Schoeb [48]. La seule différence est que dans cette nouvelle représentation, on associe à chaque arc a du réseau une étiquette k correspondant à son prédécesseur (s'il existe) dans une ligne d'autobus. On attribue à cette étiquette la valeur 0 si l'arc a constitue le premier arc d'une ligne d'autobus ou la valeur -1 s'il ne fait partie d'aucune ligne d'autobus (arc de marche). La liste d'adjacence associée au nœud i , notée $A(i)$, est une liste chaînée de structures. Chaque structure dans $A(i)$ représente un arc (i, j) où $j \in i^+$. La structure correspondant à l'arc (i, j) mémorise cinq données : l'étiquette j , le coût de l'arc (i, j) , la capacité de l'arc (i, j) , l'étiquette k et un pointeur vers la prochaine structure. Un pointeur nul désigne la fin d'une liste d'adjacence. Un tableau de $|N|$ pointeurs permet d'accéder à la première structure de chacune des listes d'adjacences $A(i)$. À titre d'exemple, la représentation du réseau 4 (voir section 4.3) est illustrée à la figure A.1.

La représentation d'une stratégie fait appel aux *listes de préférences* associées aux nœuds. La liste de préférences de la stratégie s associée au nœud i , notée $L(i, s)$, est

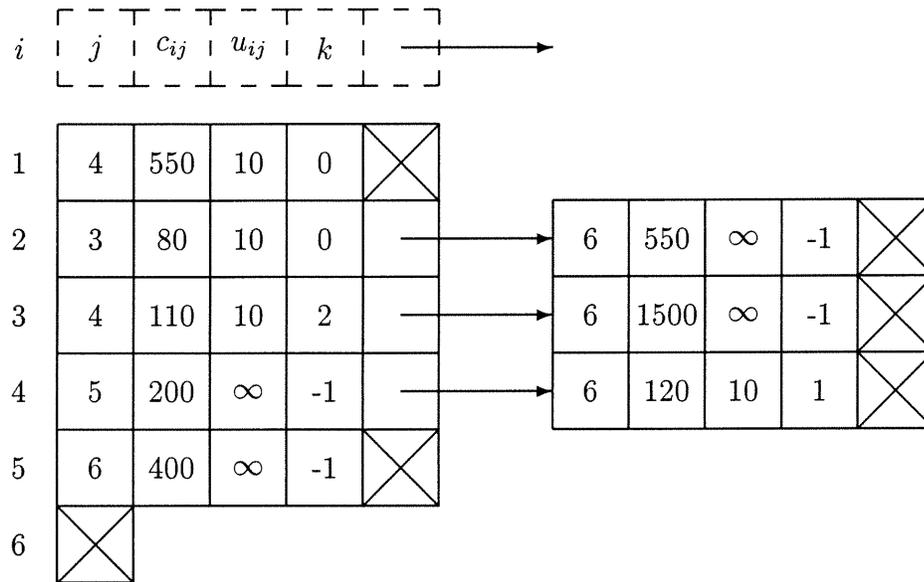


FIG. A.1 – Représentation du réseau 4

une liste chaînée de structures. Chaque structure est associée à un nœud de l'ordre de préférences E_i^s . La structure reliée au nœud $j \in E_i^s$ garde en mémoire l'étiquette j , la probabilité d'accès π_{ij}^s , le flot d'arc v_{ij}^s et un pointeur vers la prochaine structure. La stratégie s est représentée par un tableau de $|N|$ structures. La structure à l'indice i comprend le flot z_i^s , la probabilité d'accès au nœud τ_i^s et un pointeur vers la première structure de la liste de préférences $L(i, s)$. La figure A.2 illustre la représentation de la stratégie s_2 du réseau 4. Toutes les variables sont calculées après le chargement du vecteur $(0, 10, 0, 12)$.

L'union des stratégies constitue le domaine de travail stratégique. Ce domaine, dont la taille est dynamique, est représentée par une liste chaînée, notée L . Lorsqu'on incorpore une nouvelle stratégie dans le domaine de travail, on alloue de la mémoire pour une nouvelle structure dans la liste L . Cette structure mémorise l'étiquette de la stratégie, son coût, un pointeur vers sa représentation tabulaire (par convention, la première structure $L(1, s)$) et un pointeur vers la prochaine structure. Pour des fins pratiques, on exige que les structures associées aux stratégies relatives à une même

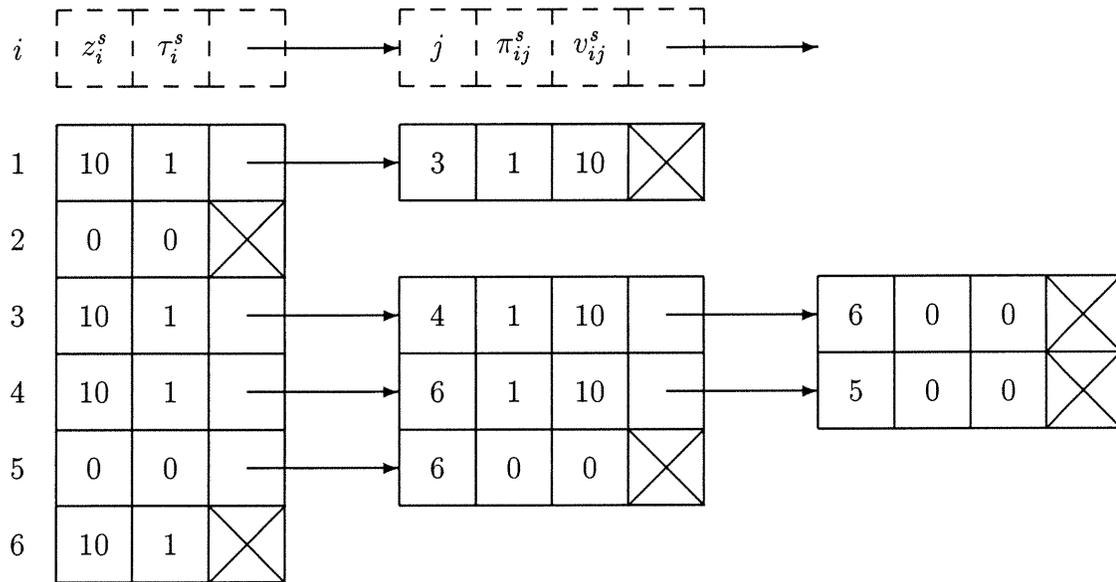


FIG. A.2 – Représentation de la stratégie s_2 du réseau 4

paire $O-D$ soient adjacentes.

Finalement, l'ensemble des paires $O-D$ est représentée par un tableau de $|I|$ structures. La structure reliée à la paire $O-D$ (q, r) garde en mémoire cinq données : l'origine q , la destination r , la demande d_{qr} , le nombre de stratégies dans le domaine W_{qr} et un pointeur vers la première structure de la sous-liste L relative à la paire $O-D$ (q, r) . La figure A.3 illustre la représentation des paires $O-D$ et d'un domaine de travail pour le réseau 4. Afin de simplifier le schéma, les tableaux représentant les stratégies ne sont pas montrés entièrement.

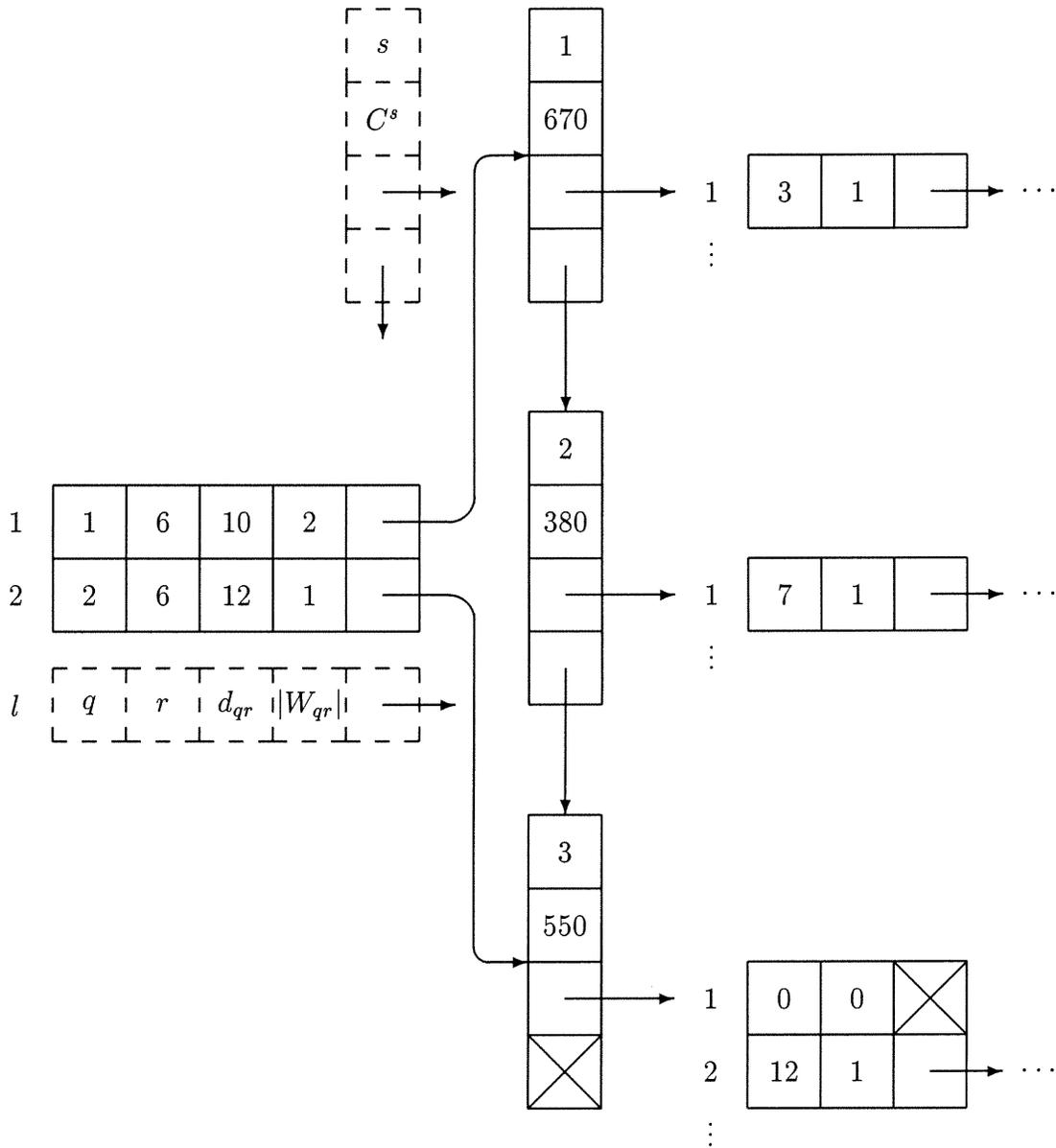


FIG. A.3 – Représentation des paires O-D et d'un domaine de travail du réseau 4

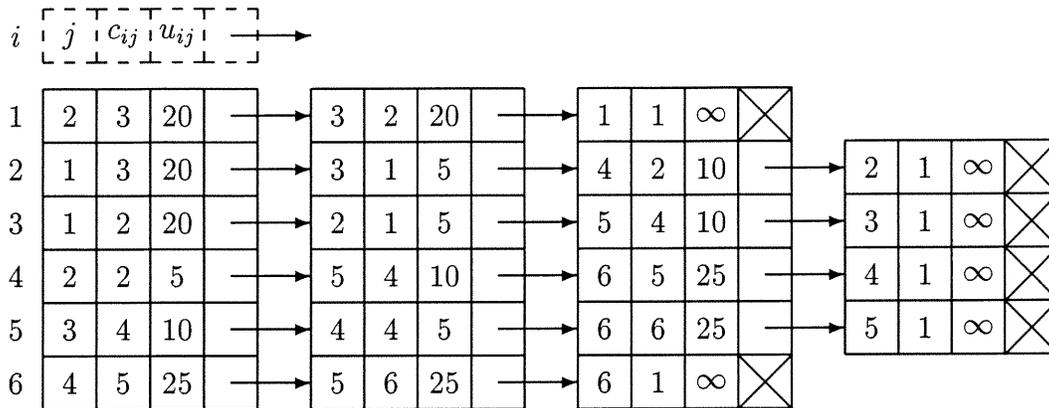


FIG. A.4 – Représentation du petit réseau dynamique

A.2 Modèle dynamique

Dans le cas dynamique, nous devons représenter les composantes du modèle où les paramètres du trafic sont des fonctions discrets dans le temps. Ceci consiste à appliquer les structures de données utilisées dans le modèle statique en tenant compte des variations temporelles de la demande associée à une paire $O-D$ et au choix stratégique à un nœud du réseau.

La représentation du réseau doit tenir compte des instants d'arrivée au nœud i_t ($0 \leq t \leq T$). Une représentation triviale consiste à étendre chaque nœud $i \in N$ en $T + 1$ nœuds i_t et chaque arc $a \in A$ en $T + 1 - c_a$ arcs (i_t, j_{t+c_a}) tel que $t + c_a \leq T$. Malheureusement, cette représentation occupe trop d'espace-mémoire et n'exploite pas la nature particulière de notre modèle. En effet, puisque les coûts et les capacités des arcs ne dépendent pas du temps, il serait plus efficace de représenter le réseau espace-temps comme un réseau statique et de tenir implicitement de l'instant d'arrivée à chaque nœud $i \in N$. On représente le réseau par un tableau de listes d'adjacences. La liste d'adjacence associée au nœud i , notée $A(i)$, est une liste chaînée de structures. Chaque structure dans $A(i)$ représente un arc de transport (i, j) où $j \in i^+$. La structure correspondant à l'arc (i, j) mémorise quatre données : l'étiquette j , le coût de l'arc (i, j) , la capacité de l'arc (i, j) , et un pointeur vers la prochaine structure, la convention étant que la dernière structure correspond à l'arc d'attente

(i, i) dont le coût est égal à 1 et la capacité est infinie. À chaque instant t , on traite seulement les structures de $A(i)$ qui vérifient la condition $t + c_{ij} \leq T$. Un tableau de $|N|$ pointeurs permet d'accéder à la première structure de chacune des listes d'adjacences $A(i)$. À titre d'exemple, la représentation du petit réseau (voir section 6.3) est illustrée à la figure A.4.

La représentation d'une stratégie est plus délicate que celle du réseau. En effet, comme nous l'avons vu en détail au chapitre 5, Le choix stratégique à un nœud i dépend de l'instant courante t et aussi de l'instant initial $t' \leq t$ d'arrivée au nœud j . Nous devons tenir compte explicitement de ces deux variables pour représenter efficacement chacune des stratégies. Cette représentation doit faire appel aux listes de préférences $L(i, s, t, t')$ associées au nœud i et à la stratégie s . Chaque structure de cette liste est associée à un nœud de l'ordre de préférences $E_i^{stt'}$. La structure reliée au nœud $j \in E_i^{stt'}$ garde en mémoire l'étiquette j , la probabilité d'accès $\pi_{ij}^{stt'}$, le volume d'arc $v_{ij}^{stt'}$ et un pointeur vers la prochaine structure. La stratégie s est représentée par un tableau de $|N| \times T$ structures. La structure à l'indice i_t comprend le volume z_i^{st} , la probabilité d'accès au nœud τ_i^{st} et un pointeur vers la première structure de la liste de préférences $L(i, s, t, t)$.

Les représentations du domaine stratégique et de l'ensemble des paires $O-D$ sont semblables à celles du modèle statique. Le domaine de travail stratégique, dont la taille est dynamique, est représentée par une liste chaînée, appelée liste de travail. Lorsqu'on incorpore une nouvelle stratégie dans le domaine de travail, on alloue de la mémoire pour une nouvelle structure dans la liste de travail. Cette structure mémorise l'étiquette de la stratégie, son coût, un pointeur vers sa représentation tabulaire (par convention, le premier élément du tableau) et un pointeur vers la prochaine structure. L'ensemble des paires $O-D(t)$, noté $I(t)$, est représenté par un tableau de $|I(t)|$ structures. La structure associée à la paire $(q, r)(t)$ garde en mémoire six données : l'origine q , la destination r , l'instant de départ t , la demande d_{qr}^t , le nombre de stratégies dans W_{qr}^t et un pointeur vers la première structure de la liste de travail relative à la paire $(q, r)(t)$. Ce dernier pointeur donne accès à la sous-liste de travail représentant l'ensemble W_{qr}^t .