

2m11.2940.7

Université de Montréal

**Tarification et conception
de réseau en télécommunication**

par

Amélie Forget

Département d'informatique et de recherche opérationnelle

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en informatique

décembre 2001

©Amélie Forget, 2001



QA

76

U54

2002

v.016

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

**Tarification et conception
de réseau en télécommunication**

présenté par:

Amélie Forget

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

Jean-Yves Potvin

(président-rapporteur)

Patrice Marcotte

(directeur de recherche)

Gilles Savard

(co-directeur)

Brigitte Jaumard

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

11 mars 2002

Résumé

Suite à une récente déréglementation, le monde des télécommunications a été amené à réétudier le problème de tarification et de conception de réseau afin de faire face à la concurrence nouvelle. Ce mémoire s'intéresse à ce problème. Nous tentons de maximiser le revenu de l'opérateur en déterminant les niveaux de tarifs ainsi que les arcs à ouvrir de façon à favoriser l'utilisation des arcs tarifés et à engendrer des profits importants. Afin de tenir compte de l'interaction entre le client et l'opérateur, le problème est envisagé sous la forme d'un problème biniveau. Une heuristique de résolution basée sur la relaxation lagrangienne y est proposée. La qualité des solutions fournies par l'heuristique est comparée aux solutions obtenues par la formulation linéaire mixte du problème. L'heuristique permet de trouver de bonnes solutions en des temps de calcul réduits pour des problèmes où la résolution exacte s'avère difficile.

Mots clés: biniveau, relaxation lagrangienne, méthode de sous-gradient, algorithme primal-dual.

Abstract

A recent deregulation has led the telecommunications world to re-examine pricing and network design issues with a view to facing new competition. This thesis addresses the question. We try to optimize the operator's income by identifying tariff levels and arcs to open in order to facilitate the use of priced arcs and generate substantive benefits. In order to take interaction between client and operator into account, the question is examined as a bi-level problem, and we propose a resolution heuristics based on Lagrangian relaxation. We compare the quality of the solutions provided by heuristics with the solutions that a mixed integer linear formulation of the problem can provide. In a time where finding exact solutions to large problems is difficult due to calculations limitations, heuristics help to find good solutions.

Key words: bilevel, relaxation Lagrangian, subgradient method, primal-dual algorithm.

Table des matières

Résumé	iii
Abstract	iv
Table des matières	v
Liste des tableaux	viii
Liste des figures	xii
Liste des abréviations	xiii
Remerciements	xiv
Chapitre 1	
Introduction	1
Chapitre 2	
Revue bibliographique	4
2.1 Problème de tarification en télécommunication	4

2.2	Formulation biniveau des problèmes de tarification	5
2.3	Problème de conception de réseau	12
2.4	Problème de tarification et de conception de réseau	16

Chapitre 3

Modèle de tarification et de conception de réseau en télécommu- nication		19
3.1	Cas général	20
3.2	Cas particulier : un seul produit	27
3.3	Formulation linéaire mixte	29

Chapitre 4

Algorithme de résolution		32
4.1	Relaxation lagrangienne	32
4.2	Algorithme de sous-gradient	34
4.3	Algorithme de sous-gradient pour un problème de conception op- timale à deux niveaux	38
4.3.1	Modèle de conception optimale biniveau	38
4.3.2	Minimisation du dual lagrangien	40
4.3.3	Résolution du sous-problème lagrangien pour u fixé	42
4.3.4	Détermination des tarifs optimaux	49
4.4	Algorithme de résolution pour le problème de tarification et de conception en télécommunication	50
4.4.1	Résolution du dual lagrangien	52
4.4.2	Résolution du sous-problème lagrangien pour u fixé	53

Chapitre 5

Implantation et résultats numériques		58
---	--	-----------

	vii
5.1 Description générale des problèmes tests	58
5.2 Ajustement des paramètres	60
5.3 Analyse des résultats	63
Chapitre 6	
Conclusion	67
Bibliographie	69
Annexe A	
Résultats numériques	xv
Annexe B	
Calcul d'un chemin de coût minimum	lxvi

Liste des tableaux

2.1	Principales classes de problèmes biniveaux étudiées	7
2.2	Paramètres et variables pour le problème de tarification biniveau <i>PT</i>	9
2.3	Paramètres et variables pour le problème de conception de réseau <i>PCR</i>	14
3.1	Paramètres du problème de tarification et de conception de réseau en télécommunication <i>PTCR</i>	22
3.2	Variables pour le problème de tarification et de conception de ré- seau en télécommunication <i>PTCR</i>	22
A.1	Ajustement des multiplicateurs de départ ($u_0 = 0$)	xvii
A.2	Ajustement des multiplicateurs de départ ($u_a^0 = 1000/k$)	xviii
A.3	Ajustement des multiplicateurs de départ ($u_a^0 = f_a/k - 0,01$)	xix
A.4	Ajustement des multiplicateurs de départ ($u_a^0 = f_a/k + 0,01$)	xx

A.5	Ajustement du pas ($\gamma = 1$)	xxi
A.6	Ajustement du pas ($\gamma = 5$)	xxii
A.7	Ajustement du pas ($\gamma = 10$)	xxiii
A.8	Ajustement du pas ($\gamma = 15$)	xxiv
A.9	Ajustement du pas ($\gamma = 20$)	xxv
A.10	Ajustement du nombre d'itérations primale-duale ($m = 1$)	xxvi
A.11	Ajustement du nombre d'itérations primale-duale ($m = 5$)	xxvii
A.12	Ajustement du nombre d'itérations primale-duale ($m = 10$)	xxviii
A.13	Ajustement du nombre d'itérations primale-duale ($m = 15$)	xxix
A.14	Ajustement du nombre d'itérations primale-duale ($m = 20$)	xxx
A.15	Ajustement de la constante de modification des tarifs optimaux ($\rho = 0, 10$)	xxxii
A.16	Ajustement de la constante de modification des tarifs optimaux ($\rho = 0, 30$)	xxxiii
A.17	Ajustement de la constante de modification des tarifs optimaux ($\rho = 0, 50$)	xxxiv
A.18	Ajustement de la constante de modification des tarifs optimaux ($\rho = 0, 70$)	xxxv
A.19	Ajustement de la constante de modification des tarifs optimaux ($\rho = 0, 90$)	xxxvi
A.20	Ajustement du critère d'arrêt ($\delta = 5$)	xxxvii

A.21 Ajustement du critère d'arrêt ($\delta = 10$)	xxxvii
A.22 Ajustement du critère d'arrêt ($\delta = 15$)	xxxviii
A.23 Ajustement du critère d'arrêt ($\delta = 20$)	xxxix
A.24 Ajustement du critère d'arrêt ($\delta = 25$)	xl
A.25 Ajustement du critère d'arrêt ($\delta = 30$)	xli
A.26 Résultats pour des réseaux de 10 produits comportant 5 % et 10 % d'arcs tarifables	xlii
A.27 Résultats pour des réseaux de 10 produits comportant 15 % et 20 % d'arcs tarifables	xliii
A.28 Résultats pour des réseaux asymétriques de 20 produits	xliv
A.29 Résultats pour des réseaux symétriques de 20 produits	xlv
A.30 Analyse de sensibilité sur des réseaux de 10 produits ($f_a = 0 \times ca$)	xlvi
A.31 Analyse de sensibilité sur des réseaux de 10 produits ($f_a = 3 \times ca$)	xlvii
A.32 Analyse de sensibilité sur des réseaux de 10 produits ($f_a = 30 \times ca$)	xlviii
A.33 Analyse de sensibilité sur des réseaux de 10 produits ($f_a = 60 \times ca$)	xlix
A.34 Analyse de sensibilité sur des réseaux de 10 produits ($f_a = 90 \times ca$)	l
A.35 Analyse de sensibilité sur des réseaux de 10 produits ($f_a = 300 \times ca$)	li
A.36 Analyse de sensibilité sur des réseaux asymétriques de 20 produits ($f_a = 0 \times ca$)	lii
A.37 Analyse de sensibilité sur des réseaux asymétriques de 20 produits ($f_a = 3 \times ca$)	liii

A.38 Analyse de sensibilité sur des réseaux asymétriques de 20 produits ($f_a = 30 \times ca$)	liv
A.39 Analyse de sensibilité sur des réseaux asymétriques de 20 produits ($f_a = 60 \times ca$)	lv
A.40 Analyse de sensibilité sur des réseaux asymétriques de 20 produits ($f_a = 90 \times ca$)	lvi
A.41 Analyse de sensibilité sur des réseaux asymétriques de 20 produits ($f_a = 300 \times ca$)	lvii
A.42 Analyse de sensibilité sur des réseaux symétriques de 20 produits ($f_a = 0 \times ca$)	lviii
A.43 Analyse de sensibilité sur des réseaux symétriques de 20 produits ($f_a = 3 \times ca$)	lix
A.44 Analyse de sensibilité sur des réseaux symétriques de 20 produits ($f_a = 30 \times ca$)	lx
A.45 Analyse de sensibilité sur des réseaux symétriques de 20 produits ($f_a = 60 \times ca$)	lxi
A.46 Analyse de sensibilité sur des réseaux symétriques de 20 produits ($f_a = 90 \times ca$)	lxii
A.47 Analyse de sensibilité sur des réseaux symétriques de 20 produits ($f_a = 300 \times ca$)	lxiii
A.48 Comparaison des résultats obtenus avec un pas de 5 et un pas de 10 pour des problèmes comportant 10 produits	lxiv
A.49 Comparaison des résultats obtenus avec un pas de 5 et un pas de 10 pour des problèmes comportant 20 produits	lxv

Liste des figures

3.1	La borne supérieure sur le profit n'est pas atteinte	24
3.2	Une solution optimale avec un tarif négatif	25
4.1	Algorithme de sous-gradient	37
4.2	Algorithme de sous-gradient pour un problème de conception optimale à deux niveaux	41
4.3	Résolution du sous-problème lagrangien	45
4.4	Algorithme de résolution du sous-problème lagrangien	48
B.1	Algorithme de résolution de plus courts chemins	lxviii

Liste des abréviations

<i>DL</i>	Problème dual lagrangien
<i>MIP</i>	Problème linéaire mixte
<i>P</i>	Problème
<i>PEN</i>	Problème pénalisé
<i>PBC</i>	Problème biniveau avec conception
<i>PCR</i>	Problème de conception de réseau
<i>PTCR</i>	Problème de tarification et de conception de réseau
<i>PTCR₁</i>	Problème de tarification et de conception de réseau pour un seul produit
<i>PT</i>	Problème de tarification
<i>SP</i>	Sous-problème
<i>SPL</i>	Sous-problème lagrangien
<i>Topt</i>	Problème de détermination des tarifs optimaux

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de maîtrise Patrice Marcotte et mon co-directeur Gilles Savard pour le soutien, l'attention et les encouragements qu'ils m'ont offerts tout au long de l'élaboration de ce travail. Je leur exprime aussi toute ma reconnaissance pour m'avoir fourni la possibilité d'effectuer un stage en France me permettant d'approfondir mes connaissances.

Je tiens également à souligner l'excellente collaboration et l'accueil chaleureux de toute l'équipe du laboratoire d'automatique et de mécanique industrielle et humaine / recherche opérationnelle et informatique (LAMIH-ROI) de l'Université de Valenciennes.

Un merci tout à fait particulier à Luce Brotcorne pour l'encadrement et l'aide chaleureuse et constante qu'elle m'a apportés tout au long de mon stage. Les bons moments passés ensemble tant au travail qu'aux loisirs me furent des plus bénéfiques. Que de fois elle a su me procurer la gaieté dont j'avais besoin étant loin des miens!

L'amitié de Frédéric Semet me fut fort précieuse. Son affabilité, ses judicieux conseils, ses observations m'ont permis plus d'une fois de progresser dans ma recherche.

Je dois beaucoup à mon ami Erik Bouchard pour sa généreuse compréhension et son soutien moral tout au long de ce travail.

Enfin, j'exprime toute ma gratitude à mes parents pour leur appui indéfectible pendant toute la durée de mes études.

Chapitre 1

Introduction

Si le XX^e siècle a été le siècle de l'automatisation, le XXI^e siècle sera sans contredit celui de la communication et de l'information. En effet, on sait qu'en science et technologie chaque siècle prépare le suivant. À la fin du XVIII^e siècle, la machine à vapeur laissait entrevoir l'industrialisation à venir. L'avènement de l'électricité, au XIX^e siècle, posait des balises pour les nouvelles technologies qui firent leur apparition dans la première moitié du XX^e (particulièrement en téléphonie, en audiovisuel et en mécanisation) alors que la seconde partie fut dominée par la naissance de l'ordinateur et de la numérisation. Ce dernier siècle, selon certains, a préparé le terrain pour une nouvelle révolution : celle des télécommunications. À l'instar de la révolution provoquée par l'imprimerie au XVI^e siècle, les télécommunications rendront l'information encore plus accessible. Un éventail de services ont déjà fait leur apparition et bien d'autres encore sont à venir.

En effet, les technologies développées ces dernières années, telles la fibre optique, la numérisation de la voix et des images, permettent aux opérateurs d'offrir

de nouveaux services à leurs clients. La numérisation permet de véhiculer simultanément plusieurs communications sur une même ligne, assurant l'intégration tout en transmettant des informations de nature différente. Ces services varient du transfert de la voix et des données aux transferts des images par le biais d'outils tels que les télécopieurs, les traitements d'images, les téléconférences et l'Internet. Ces nouveaux services de communication font de plus en plus partie de notre quotidien.

Tous ces services ont envahi notre monde professionnel et notre vie privée. L'Internet a pris des proportions phénoménales. Aujourd'hui, le marché des télécommunications rapproche des millions de personnes ; nous atteindrons le milliard au cours de la prochaine décennie. Il n'est pas surprenant qu'un tel enthousiasme de la part des consommateurs ait des répercussions sur le domaine des télécommunications. Au cours des dernières années, ce domaine a été fortement déréglementé. Le nombre d'agents liés à la fourniture d'un service, précédemment limité à deux (le client et le fournisseur), s'est accru suite à la présence de nombreuses compagnies concurrentes sur le même marché. Pour un service donné, le client a maintenant le choix de l'opérateur. De plus, plusieurs opérateurs peuvent contribuer à la fourniture d'un service pour un client donné. La déréglementation touchant le domaine des télécommunications nécessite la mise en place de lois d'interconnexions entre les opérateurs. Ces lois sont de trois types : réglementaires, techniques et tarifaires. C'est à ce dernier point que nous nous intéresserons.

Le problème de tarification et de conception de réseau en télécommunication que nous étudions dans ce mémoire fait intervenir deux agents de décision (un opérateur et des clients). Ces agents interagissent séquentiellement et hiérarchiquement. L'offre aux origines et la demande aux destinations sont supposées connues et fixées. Des clients doivent écouler des communications, chacune étant constituée d'un site «origine» vers un site «destination», à moindre coût. Pour ce faire, les clients ont le choix entre plusieurs opérateurs proposant des tarifs

différents.

Nous considérons ici le problème d'un opérateur X maximisant son profit. Face à la demande des clients, il doit, d'une part, décider d'ouvrir ou non des connexions pour acheminer les communications de ses clients et, d'autre part, leur proposer des tarifs sur les connexions ouvertes. L'opérateur X ne considère pas les réactions des opérateurs concurrents, mais les réactions des clients vis-à-vis des tarifs proposés. Pour une topologie de réseau et des tarifs fixés par l'opérateur, les clients désirent écouler leur communication à moindre coût. Une solution tarifaire optimale pour l'opérateur X sera donc suffisamment élevée pour générer des profits, mais pas trop élevée pour ne pas défavoriser le recours à ses services par les clients.

Ce mémoire comporte quatre parties. La première partie propose une courte revue bibliographique du sujet (Chapitre 2). Nous y abordons d'abord le problème de tarification en télécommunication, puis une formulation biniveau de ce problème. Enfin, un bref survol du problème de conception de réseau termine ce chapitre. La seconde partie présente le modèle de tarification et de conception de réseau en télécommunication (Chapitre 3). Nous y exposons le cas général, le cas particulier où nous n'avons qu'un seul produit et la formulation linéaire mixte du modèle général. La troisième partie développe la méthode heuristique de résolution utilisée pour résoudre notre problème (Chapitre 4). Nous y effectuons un rappel de la méthode de la relaxation lagrangienne, base de notre heuristique, ainsi qu'un rappel de la méthode du sous-gradient. Par la suite, nous expliquons les méthodes de résolution du dual lagrangien et du sous-problème lagrangien. Enfin, la quatrième partie, porte sur l'analyse des résultats numériques obtenus (Chapitre 5). Nous décrivons au préalable les problèmes tests utilisés, puis nous analysons l'ajustement des paramètres. Finalement, nous comparons les résultats trouvés à l'aide de l'heuristique avec ceux obtenus par la formulation linéaire mixte.

Chapitre 2

Revue bibliographique

Dans la littérature, peu d'articles traitent simultanément de tarification et de conception de réseau. Aussi, dans un premier temps, notre revue bibliographique traitera du problème de tarification à la section 2.1. Le problème de tarification peut être vu comme un problème biniveau. En effet, l'opérateur désire maximiser son revenu alors que l'utilisateur tente de minimiser ses coûts. C'est pourquoi nous considérons cette approche à la section 2.2. Ensuite, à la section 2.3, nous effectuons un survol de la littérature portant sur les problèmes de conception de réseau. Finalement, nous concluons notre revue en abordant le problème de tarification et conception de réseau.

2.1 Problème de tarification en télécommunication

Suite aux évolutions technologiques récentes, différents services de télécommunication, tels que la téléphonie, la vidéo et l'envoi de données peuvent partager un seul réseau. L'engouement pour l'utilisation de l'Internet et la saturation résul-

tante du réseau risquent d'engendrer une dégradation du niveau de service pour le client. Il est donc devenu indispensable pour les opérateurs de télécommunication de tenir compte de la qualité du service rendu aux clients lors de la détermination des tarifs. Les travaux actuels en matière de tarification en télécommunication traitent essentiellement de ce problème. Les variables de décision de l'opérateur sont alors les niveaux de tarifs. Les utilisateurs, quant à eux, arbitrent les tarifs qu'ils doivent payer (pour écouler leur communication et la qualité de services reçus) selon le choix de l'opérateur.

Pour de plus amples détails, nous référons le lecteur, par exemple, à l'article de Kelly *et al.* [30] qui propose un historique de la tarification en télécommunication et à l'article de Wang *et al.* [43] dans lequel nous trouvons une revue de la littérature.

Il existe plusieurs façons d'aborder un problème de tarification. Nous avons choisi l'approche biniveau. En effet, ce problème peut être vu comme un modèle mathématique à deux niveaux. Le problème de premier niveau maximise le revenu de l'opérateur en prenant comme contrainte la solution optimale d'un problème de second niveau. Ce dernier minimise les coûts des clients pour l'utilisation des lignes de transmission.

2.2 Formulation biniveau des problèmes de tarification

Bien que la formulation d'un problème mathématique à deux niveaux soit apparue dans les années 1970, il a fallu attendre une autre décennie pour qu'un certain nombre de chercheurs motivés par la théorie des jeux consacrent un effort important à la compréhension des concepts fondamentaux associés à ces problèmes et proposent plusieurs algorithmes pour les résoudre.

Un problème de programmation mathématique à deux niveaux est défini par deux problèmes d'optimisation séquentiellement reliés ¹. Le domaine réalisable ou (et) l'objectif du premier problème est déterminé implicitement par la solution du second problème. On formalise généralement un tel problème comme la minimisation d'un programme mathématique où un sous-ensemble des variables est solution optimale d'un second programme mathématique paramétré. Si nous notons x (respectivement y) le vecteur de décision du meneur (respectivement du suiveur), un programme biniveau peut être formulé sous la forme :

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \quad & f(x, y) \\ \text{s.c.} \quad & (x, y) \in X, \\ & y \in S(x), \end{aligned}$$

où $S(x)$ dénote l'ensemble des solutions optimales du programme mathématique paramétrisé par le vecteur du meneur x :

$$\begin{aligned} S(x) = \quad & \arg \min_y g(x, y) \\ \text{s.c.} \quad & (x, y) \in Y. \end{aligned}$$

Pour le problème $S(x)$ le vecteur y est déterminé après que le vecteur x ait été fixé.

Ce modèle est un outil bien adapté pour la modélisation de situations où les acteurs agissent sans coopération et où les décisions sont prises de façon séquentielle. C'est le cas lorsque le système est hiérarchisé. Parmi ces applications, citons celles en gestion, en planification, en conception industrielle et en transport (conception de réseaux, problème d'estimation de la demande, problème de tarification). Pour plus de détails, consulter la bibliographie de Calamai et Vicente [12].

¹Le problème de second niveau peut également être caractérisé par une inégalité variationnelle plutôt que par un problème d'optimisation (Marcotte et Zhu [36], Luo *et al.* [34]).

D'un point de vue algorithmique, quatre classes de problèmes biniveaux ont été principalement étudiées : les problèmes biniveaux linéaire-linéaire, les problèmes biniveaux linéaire-quadratique, les problèmes biniveaux quadratiques et les problèmes biniveaux bilinéaire-bilinéaire. Pour la première classe, les fonctions objectifs du meneur et du suiveur et les fonctions définissant les contraintes sont affines. La différence, pour la seconde classe, est que la fonction objectif du suiveur est quadratique. Dans le cas de la troisième classe, les fonctions objectifs du meneur et du suiveur sont quadratiques alors que les contraintes sont affines. Enfin, pour la dernière classe, les fonctions objectifs du meneur et du suiveur sont bilinéaires et les contraintes affines.

Classes de problèmes	objectif du meneur	objectif du suiveur	contraintes
linéaire-linéaire	affine	affine	affines
linéaire-quadratique	affine	quadratique	affines
quadratiques	quadratique	quadratique	affines
bilinéaire-bilinéaire	bilinéaire	bilinéaire	affines

TAB. 2.1 – Principales classes de problèmes biniveaux étudiées

La première classe de problèmes fut la plus étudiée. Hansen *et al.* [27] ont démontré que ces problèmes font partie de la classe de problèmes fortement NP-complet en réduisant KERNEL ² à un problème min-max linéaire, un cas particulier de cette classe. Plusieurs types d'algorithmes ont été développés pour ce type de problème. Des chercheurs comme Bialas et Karwan [8], Bard ([2],[3]) ainsi que Candler et Towsley [13] ont étudié ces problèmes en prenant comme hypothèses que le domaine réalisable est compact et $S(x)$ est univoque. Savard [41] a,

²Le problème KERNEL se définit comme suit : étant donné le graphe orienté $G = (V, E)$, existe-t-il un sous-ensemble $K \subseteq V$ de sommets à la fois stable (c'est-à-dire qu'aucune paire de sommets de K ne soient adjacents) et absorbant (c'est-à-dire que tout sommet $v_i \in V/K$ soit à l'origine d'un arc (v_i, v_k) de E où $v_k \in K$).

quant à lui, étudié le problème sans faire appel à ces hypothèses. Une approche souvent utilisée consiste à substituer au problème du second niveau ses conditions d'optimalité. La difficulté de cette approche, tout comme pour les autres approches, est que le nouveau problème n'est pas convexe. Fortuny et McCarl [21] ont transformé ce nouveau problème en un problème en nombres entiers mixtes. Bard et Falk [4], Bard et Moore [5] et Hansen *et al.* [27] ont résolu ce type de problème par une méthode de séparation et d'évaluation progressive. Au même moment, Faustino et Jùdice [19] développaient un algorithme basé sur la résolution séquentielle de problèmes de complémentarité linéaire. Finalement, Önal [40] a présenté une heuristique basée sur une modification du simplexe pour résoudre ce type de problème.

Voyons maintenant un survol des études effectuées pour lesdeuxième et troisième classes de problèmes. Vicente *et al.* [42] et Gauvin et Savard [22] ont développé des techniques de descentepour résoudre des problèmes biniveaux quadratiques. Les algorithmes énumératifs de Bard et Moore [5] et Hansen *et al.* [27] ainsi que la méthode séquentielle de Faustino et Jùdice [19]s'appliquent aux problèmes biniveaux linéaire-quadratique. Pour les problèmes non-linéaires, nous référons le lecteur au volume de Luo *et al.* [34] pour un survol de la théorie.

De façon générale, un problème de tarification fait intervenir deux agents de décision. Un «meneur» détermine des tarifs sur un ensemble défini de biens ou de services alors qu'un «suiveur» optimise son propre objectif en tenant compte du niveau de tarif fixé par le meneur. La nature des interactions entre les agents nous conduit à formuler un problème de tarification sous forme de problème de programmation à deux niveaux. À notre connaissance, la première étude théorique de ce type de problème a été proposée par Labbé *et al.* [32].

Un problème de tarification sur un réseau peut se modéliser de la façon suivante. Soient les vecteurs x et y représentant les niveaux d'activités tarifables et

non tarifables. Soit T le vecteur de tarifs perçus pour les activités du vecteur x . Le coût des activités x avant tarification est de c et le coût des activités y est de d . Les matrices d'incidence sommet-arc tarifable, respectivement sommet-arc non tarifable sont notées respectivement A et B . La demande est donnée par le vecteur b . Dans le cas où les revenus sont proportionnels au niveau d'activité x et que l'ensemble réalisable du niveau des tarifs est défini par un polyèdre, nous obtenons le problème PT suivant (Les notations sont résumées dans le tableau 2.2)³ :

$$(PT) \max_T Tx \quad (2.1)$$

$$\text{s.c. } TC \geq e \quad (2.2)$$

$$\min_{x,y} (c + T)x + dy \quad (2.3)$$

$$\text{s.c. } Ax + By = b, \quad (2.4)$$

$$x, y \geq 0. \quad (2.5)$$

x	vecteur de flot pour les activités tarifables
y	vecteur de flot pour les activités non tarifables
T	vecteur de tarifs rattachés aux activités
C	matrice de contraintes
e	membre de droite pour les contraintes relatives aux tarifs
c	coût avant tarification d'une activité non tarifable
d	coût d'une activité liée au vecteur y
A	matrice d'incidence pour les arcs tarifables
B	matrice d'incidence pour les arcs non tarifables
b	vecteur de demande

TAB. 2.2 – Paramètres et variables pour le problème de tarification biniveau PT

³Par ailleurs, on notera que nous utilisons dorénavant la notation dite «verticale» .

Le problème de premier niveau est défini par les équations (2.1) et (2.2) et celui du second niveau est défini par les équations (2.3), (2.4) et (2.5). Le meneur désire maximiser son revenu en fixant des tarifs sur un sous-ensemble d'arcs. Le suiveur réagit à ces tarifs et minimise ses coûts. PT est un problème biniveau bilinéaire-bilinéaire. En effet, la fonction objectif du meneur est bilinéaire⁴ tout comme celle du suiveur. Les fonctions définissant les contraintes sont linéaires.

Dans le cas où le problème du suiveur est convexe (ce qui est le cas ici puisqu'il est linéaire) et sous les conditions de régularités classiques, ce dernier peut être remplacé par ses conditions d'optimalité de Kuhn-Tucker qui sont alors nécessaires et suffisantes. Dans le cas linéaire, nous obtenons :

$$(PT) \quad \max_{T,x,y} \quad Tx$$

$$\text{s.c.} \quad TC \geq e \quad (2.6)$$

$$Ax + By = b,$$

$$x, y \geq 0,$$

$$\lambda A \leq c + T,$$

$$\lambda B \leq d,$$

$$(c + T)x + dy - \lambda B = 0 \quad (2.7)$$

où le vecteur λ représente le vecteur de variables duales associées aux contraintes de conservation de flot (2.4).

Remarquons que ce problème à un seul niveau demeure difficile à résoudre. En effet, le problème global peut avoir un domaine réalisable non convexe voire même vide en présence de contraintes de premier niveau telles que (2.6). La non-linéarité de l'objectif et la non-linéarité de la contrainte d'égalité des objectifs (2.7) compliquent aussi la résolution.

⁴Cette fonction est linéaire en T pour x fixé et vice-versa.

Certaines manipulations algébriques permettent de transformer l'objectif bilinéaire en un objectif linéaire (voir à ce sujet l'article de Labbé *et al.* [32]). Dans ce cas, seule la contrainte de complémentarité n'est pas linéaire. Il faut alors développer un algorithme capable de traiter cette contrainte (algorithme de pénalité par exemple).

Le problème de tarification formulé sous forme de problème à deux niveaux a été appliqué dans le contexte des transports routiers par Brotcorne *et al.* [11] ainsi que pour le transport de marchandises par Brotcorne *et al.* [10]. Dans le premier article, il s'agit de déterminer les tarifs (péages) optimaux sur un sous-ensemble de tronçons d'un réseau de transport multiproduit de façon à maximiser le profit du meneur (le gouvernement ou une société privée) en tenant compte de la réaction du suiveur (groupe de voyageurs qui minimisent leur coût de transport entre leur origine et leur destination). Pour un niveau de tarif fixé, le problème du suiveur est un problème de plus courts chemins.

Le second article est une étude du problème de tarification pour le transport de marchandises. Dans ce contexte, un transporteur (le meneur) maximise son revenu en déterminant des tarifs sur un sous-ensemble d'arcs sous son contrôle alors qu'une compagnie d'expédition (le suiveur) doit écouler une quantité donnée de biens de sites origines vers des clients à moindre coût. Pour un niveau de tarif donné, la répartition de flux est obtenue en résolvant un problème de transbordement.

Deux méthodes de résolution approchée ont été proposées pour résoudre des problèmes de tarification dans le domaine des transports. La première est basée sur une recherche séquentielle par arcs de tarifs maximisant le profit (Brotcorne *et al.* [11]). La deuxième heuristique de type primale-duale se base sur la formulation du problème biniveau de tarification sous forme d'un problème d'un seul niveau bilinéaire (Brotcorne *et al.* [10] et [11]). Ce dernier est obtenu en rempla-

çant le problème de second niveau par ses conditions d'optimalité. Une méthode exacte y est aussi développée ; elle consiste à linéariser l'objectif du meneur et la contrainte de complémentarité après avoir remplacé le problème de second niveau par ses conditions d'optimalité. Les méthodes heuristiques nous permettent d'obtenir des solutions de qualité en des temps de calcul réduits pour des instances pour lesquelles la résolution exacte d'une formulation mixte du problème biniveau de tarification n'est plus possible.

La spécificité du problème de tarification étudiée ici, par rapport aux problèmes traités dans les travaux de Brotcorne *et al.* ([10],[11]), consiste à considérer simultanément la détermination des connexions à ouvrir ainsi que la politique tarifaire à appliquer. Dans Brotcorne *et al.* ([10],[11]) seule la détermination des tarifs est considérée.

2.3 Problème de conception de réseau

Abordons maintenant le problème de conception de réseau. Ce problème peut être modélisé de la façon suivante. Soit \mathcal{N} l'ensemble de sommets et \mathcal{A} l'ensemble potentiel d'arcs disponibles pour la conception du réseau. La sélection des arcs définissant le réseau dépend d'un compromis entre les coûts de conception et les coûts d'opération. Soit \mathcal{K} l'ensemble des produits à écouler sur le réseau. Pour chaque produit $k \in \mathcal{K}$, la quantité de flot n^k à écouler d'une origine $o(k)$ vers une destination $d(k)$ est connue. La quantité de flot sur un arc $(i, j) \in \mathcal{A}$ est limitée à γ_{ij} . Le coût de transfert d'une unité de flot du produit k sur l'arc $(i, j) \in \mathcal{A}$ est noté c_{ij}^k . De plus, l'utilisation d'un arc (i, j) nécessite le paiement d'un coût fixe f_{ij} . Les variables de décision du problème comprennent les variables de conception du réseau ($y_{ij} = 1$ si l'arc (i, j) est ouvert, 0 sinon) et les flux des produits k circulant sur les arcs ($x_{ij}^k \forall (i, j) \in \mathcal{A}, \forall k \in \mathcal{K}$). Le problème de conception optimale de

réseau peut alors être formulé de la façon suivante :

$$(PCR) \quad \min \sum_{k \in \mathcal{C}} \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} c_{ij}^k x_{ij}^k + \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} f_{ij} y_{ij}$$

$$\text{s.c.} \quad \sum_{j:(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij}^k - \sum_{j:(j,i) \in \mathcal{A}} x_{ji}^k = b_i^k \quad \forall i \in \mathcal{N}, \forall k \in \mathcal{K} \quad (2.8)$$

$$\sum_k x_{ij}^k \leq \gamma_{ij} y_{ij} \quad \forall i \in \mathcal{N}, \forall k \in \mathcal{K} \quad (2.9)$$

$$x_{ij}^k \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{N}, \forall k \in \mathcal{K} \quad (2.10)$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in \mathcal{A} \quad (2.11)$$

où

$$b_i^k = \begin{cases} n^k & \text{si } i = o(k), \\ -n^k & \text{si } i = d(k), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'objectif est de minimiser les coûts : coût d'utilisation par unité de flot et coût d'ouverture d'un tronçon du réseau. La contrainte (2.8) représente la conservation de flot. La contrainte (2.9) nous assure que le flot total sur un arc ne dépasse pas la capacité de l'arc si cet arc est ouvert et que le flot de l'arc est nul si l'arc n'est pas choisi dans le réseau. Cela implique que le flot d'un produit peut devoir emprunter plus d'un chemin (multiroutage). La contrainte (2.10) exige des flots positifs ou nuls. La contrainte (2.11) représente l'état d'un arc : $y_{i,j} = 1$ si l'arc i, j est ouvert, 0 sinon. Ce problème est donc un problème linéaire mixte-entier, avec $|\mathcal{A}|$ variables entières et $|\mathcal{A}||\mathcal{C}|$ variables continues.

Le problème de conception de réseau sans capacité ne comporte pas de contrainte de capacité sur les arcs. La contrainte (2.9) est donc remplacée par

$$x_{ij}^k \leq n_k y_{ij} \quad \forall (i, j) \in \mathcal{A}$$

signifiant que le flot d'un produit peut emprunter un arc uniquement s'il est ouvert. Le flot total d'un produit empruntera dans ce cas le chemin de moindre coût (monoroutage).

\mathcal{K}	l'ensemble des produits
\mathcal{N}	l'ensemble des nœuds du réseau
\mathcal{A}	l'ensemble des arcs orientés du réseau
c_{ij}^k	le coût pour envoyer une unité de flot du produit k sur l'arc (i, j)
γ_{ij}	capacité sur l'arc (i, j)
f_{ij}	coût d'ouverture pour l'arc (i, j)
$o(k)$	nœud d'origine pour le produit k
$d(k)$	nœud de destination pour le produit k
x_{ij}^k	le flot du produit k sur l'arc (i, j)
y_{ij}	vaut 1 si l'arc (i, j) est utilisé, 0 autrement.

TAB. 2.3 – Paramètres et variables pour le problème de conception de réseau *PCR*

Notons que le problème de conception de réseau sans capacité est un problème NP-difficile. La preuve se base sur le fait que le problème de l'arbre de Steiner est en fait un cas spécial d'un problème de conception de réseau sans capacité. Le détail de cette preuve se trouve dans Holmberg *et al.* [29].

Gavish [23] définit le processus de conception de réseau pour le domaine des télécommunications comme un processus long et complexe qui exige trois étapes : concevoir la topologie du réseau, déterminer l'allocation de la capacité et faire le routage du trafic.

Le problème de conception optimale de réseau, de façon à minimiser les coûts de gestion du réseau tout en atteignant un objectif spécifique (comme écouler une quantité prédéfinie de communications ou atteindre un niveau de sécurité donné) existe dans de nombreux contextes tels que les transports, les télécommunications et l'informatique. Nous renvoyons le lecteur aux articles de Minoux [39] et Magnanti [35] pour un survol des modèles, des méthodes de résolution et des applications du problème de conception de réseau.

Plusieurs méthodes de résolution peuvent être utilisées pour résoudre le problème de conception de réseau sans capacité. Magnanti *et al.* [35] utilisent une décomposition de Benders. Balakrishnan *et al.* [1] traitent ce problème par une méthode de montée duale. Les résultats obtenus par ces derniers sont près de l'optimalité (1% à 4%). Holmberg *et al.* [29] et Migdalas [38], quant à eux, discutent de différentes relaxations et différentes méthodes de décomposition. Enfin, Holmberg et Hellstrand [28] ont résolu le problème en utilisant une heuristique lagrangienne et la méthode de «branch-and-bound» .

Ce dernier article (Holmberg et Hellstrand [28]) présente une comparaison des différentes méthodes de résolution. Des expériences numériques ont montré que les méthodes basées sur la décomposition de Benders, la décomposition croisée et la valeur moyenne de la décomposition croisée ne sont pas des méthodes com-

pétitives. De plus, la méthode de montée duale ne fonctionne pas bien, même si la valeur de la fonction objective est bonne. En effet, la méthode de recherche de sous-gradient utilisée par la méthode de montée duale est efficace lorsque les fonctions duales sont différentiables au point d'itération. Or, la nature de la méthode de montée duale mène à des fonctions duales qui sont non différentiables, rendant ici la recherche de sous-gradient inefficace. C'est pourquoi la méthode d'Holmberg et Hellstrand [28] est plus performante que celle de Balakrishnan *et al.*[1].

La spécificité du problème de conception étudié ici, par rapport aux problèmes traités dans les travaux précédents, consiste à considérer simultanément les connexions à ouvrir ainsi que de la politique tarifaire à appliquer. Dans les études précédentes, seule la détermination des connexions à ouvrir est considérée.

2.4 Problème de tarification et de conception de réseau

Aujourd'hui, avec la déréglementation des marchés, les modèles de tarification et de conception en télécommunication doivent harmoniser les objectifs des fournisseurs et ceux des usagers. Aussi, dans ce mémoire, nous nous intéressons au problème de tarification et de conception de réseau où la tarification et la conception sont traitées de façon simultanée. Les concepteurs de réseaux ont toujours pris en compte le problème de tarification. Toutefois, les modèles élaborés jusqu'à maintenant n'intègrent pas une compétition entre les fournisseurs de services et les usagers.

Kelly *et al.* [30] présentent un modèle de calcul de prix qui reflète les caractéristiques des réseaux ATM à intégration de services en plus de présenter l'histoire de la tarification en télécommunication. Deux composantes sont intégrées à leur

modèle : un coût d'accès et un coût d'usage. Toutefois, la concurrence des marchés n'a pas été considérée. De plus, les techniques de calcul n'ont pas été révélées. Bencheick [7] a conçu un modèle permettant de fixer les tarifs dans un réseau numérique à intégration de services pour un réseau ayant deux classes de trafic. Il a utilisé la programmation biniveau indirectement en mettant en présence deux agents : un fournisseur de services et une compagnie de conception de réseau. Dans notre modèle, les agents sont les consommateurs et la compagnie. Wang *et al.* [43] ont aussi considéré ce problème dans les réseaux numériques à intégration de services. Ils ont déterminé les prix des services selon l'importance que l'utilisateur leur accorde. Ni la concurrence des marchés, ni les revenus de la compagnie n'ont été pris en compte. Un modèle de conception de réseau numérique à intégration de services à large bande (RNIS-LB) a été développé par Girard et Zidane [25]. Ils ont utilisé un modèle de maximisation de revenu généré par le réseau. L'heuristique proposée est du même type que celle de Girard [24]. Encore une fois, dans cette étude, ni la concurrence, ni le comportement des consommateurs n'ont été considérés. Le problème de tarification pour un réseau simple offrant de multiples services a été étudié par Cocchi *et al.* [16]. Dans cet article, chacun de ces services a un critère de performance particulier. Pour la détermination des tarifs, ces auteurs utilisent des critères normatifs. Ceux-ci ne sont donc pas le résultat d'une structure de compétition. Un système modélisé comme une file d'attente M/M/1 avec plusieurs classes de services a été réalisé par Mendelson et Wang [37]. Les tarifs sont déterminés en suivant l'importance du service pour l'utilisateur. Dans cet article, le revenu des compagnies et la concurrence ne sont pas considérés. Pour de plus amples détails, nous renvoyons le lecteur au mémoire de Julsain [26].

Tous ces modèles ont une différence principale avec celui étudié dans ce mémoire. La concurrence entre les fournisseurs de services ainsi que le comportement des utilisateurs ne sont pas pris en compte dans les études précédentes.

Toutefois, l'article de Lederer [33] traite d'un problème de tarification et de conception de réseau dans le domaine aérien où l'on tient compte de la concurrence. La compétition entre différentes firmes est modélisée sous forme d'équilibre de Nash. Les firmes choisissent d'abord les fréquences de services sur chacun des arcs (conception de réseau), ensuite pour un réseau, elles déterminent les tarifs de façon à maximiser leur profit. Chaque usager choisit le chemin de moindre coût, ce coût étant la somme des tarifs et d'un coût lié à la satisfaction relative au vol (nombre de connexions, temps d'attente, distance parcourue). Pour une topologie de réseau et des tarifs fixés, le problème de choix de chemin des usagers est un problème d'équilibre de l'utilisateur. L'auteur propose des modèles, pour deux types de compétition entre firmes, basés sur des hypothèses de choix différents des usagers : possibilité ou non d'utiliser les services de plusieurs compagnies pour se déplacer sur le réseau. Les propriétés de l'équilibre de Nash obtenu selon ces types de compétition sont discutées, mais aucun algorithme de résolution n'est proposé.

Chapitre 3

Modèle de tarification et de conception de réseau en télécommunication

Le modèle de programmation mathématique biniveau que nous proposons comme solution au problème de tarification et de conception de réseau en télécommunication est présenté dans ce chapitre. Nous explicitons, tout d'abord, le modèle pour le cas général (multiproduit). Nous énonçons également les hypothèses nécessaires à la résolution. Puis, nous analysons le cas particulier où nous n'avons qu'un seul produit (section 3.2). Toutefois, dans ce travail, nous ne nous attardons pas à ce cas particulier, car une méthode de résolution a déjà été étudiée par Brotcorne *et al.* ([10], [11]). Nous portons donc toute notre attention au cas multiproduit. Enfin, une formulation linéaire mixte pour le problème est décrite à la section 3.3.

3.1 Cas général

Dans un premier temps, nous formulons le problème de tarification et de conception de réseau en télécommunication multiproduit sous forme d'un programme mathématique à deux niveaux. Nous avons retenu cette formulation, car elle permet de tenir compte de l'interaction hiérarchique entre l'opérateur et les clients (respectivement le meneur et le suiveur selon la terminologie utilisée en programmation biniveau). Un problème biniveau peut être considéré comme un modèle d'équilibre « offre-demande » où la fonction de demande est obtenue en résolvant un programme mathématique. Définissons tout d'abord la notation utilisée.

Le réseau de télécommunication est modélisé comme un graphe dont les sommets sont les centres de commutation et les arcs sont les lignes de transmission. Le réseau est donc représenté par un graphe $G = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$. \mathcal{N} est l'ensemble des sommets, un sommet représentant une origine, une destination, le début ou la fin d'un tronçon tarifable. L'ensemble des arcs \mathcal{A} est partitionné en deux sous-ensembles : les arcs tarifables \mathcal{A}_1 et les arcs non tarifables \mathcal{A}_2 . L'opérateur X désirent maximiser son profit, appelé le meneur, peut librement fixer le coût unitaire d'usage (T_a) des arcs tarifables. Le coût unitaire d'utilisation des arcs non tarifables (d_a) ne peut être modifié par cet opérateur. Le meneur doit payer un coût d'acheminement des communications (c_a) sur les arcs tarifables et un coût fixe d'ouverture (f_a) pour tout arc tarifable qu'il décide d'ouvrir.

La demande est modélisée par un ensemble \mathcal{K} de produits. Un produit k est défini comme un ensemble de flux ayant la même origine $o(k)$ et la même destination $d(k)$. Pour chaque produit $k \in \mathcal{K}$, n^k représente la quantité totale de

flot pour le produit k . Le vecteur de demande b_k est donné par :

$$b_i^k = \begin{cases} n^k & \text{si } i = o(k), \\ -n^k & \text{si } i = d(k), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les variables x_a, y_a sont des variables indiquant le flot total sur l'arc $a \in \mathcal{A}_1$, respectivement $a \in \mathcal{A}_2$. Le flot du produit k circulant sur l'arc tarifé a (respectivement non tarifé) est représenté par x_a^k (respectivement y_a^k). Le modèle à deux niveaux pour le problème de tarification et conception est le suivant (Les variables et les notations sont explicitées dans les tableaux 3.2 et 3.1) :

$$(PTCR) \max_{T,v} \sum_{a \in \mathcal{A}_1} \sum_{k \in \mathcal{K}} T_a x_a^k - \sum_{a \in \mathcal{A}_1} f_a v_a - \sum_{a \in \mathcal{A}_1} \sum_{k \in \mathcal{K}} c_a x_a^k \quad (3.1)$$

$$\text{s.c. } v_a \in \{0, 1\} \quad \forall a \in \mathcal{A}_1, \quad (3.2)$$

$$\min_{x,y} \sum_{k \in \mathcal{K}} \left(\sum_{a \in \mathcal{A}_1} T_a x_a^k + \sum_{a \in \mathcal{A}_2} d_a y_a^k \right) \quad (3.3)$$

$$\text{s.c. } Ax^k + By^k = b^k \quad \forall k \in \mathcal{K}, \quad (3.4)$$

$$x_a^k \leq n^k v_a \quad \forall a \in \mathcal{A}_1, \forall k \in \mathcal{K}, \quad (3.5)$$

$$x^k, y^k \geq 0 \quad \forall k \in \mathcal{K}. \quad (3.6)$$

Le meneur maximise son revenu (3.1) qui est la différence entre le profit lié à l'utilisation des arcs tarifés et la somme des coûts d'opération (coûts d'ouverture des arcs et coûts d'acheminement des communications). Le suiveur minimise ses coûts d'acheminement des communications (3.3). Pour un niveau de tarifs fixés par le meneur et une topologie de réseau donnée, le flot de chaque produit k se déplace sur le chemin de coût minimum entre l'origine $o(k)$ et la destination $d(k)$ puisque ce problème ne comporte aucune contrainte de capacité. Le problème du second niveau est donc un problème de plus courts chemins.

\mathcal{N}	ensemble de sommets ($ \mathcal{N} = n$)
\mathcal{A}	ensemble d'arcs ($ \mathcal{A} = m$)
\mathcal{A}_1	ensemble d'arcs tarifables ($ \mathcal{A}_1 = m_1$)
\mathcal{A}_2	ensemble d'arcs non tarifables ($ \mathcal{A}_2 = m_2$)
\mathcal{K}	ensemble de produits
A	matrice d'incidence pour les arcs tarifables
B	matrice d'incidence pour les arcs non tarifables
f_a	coût fixe d'ouverture de $a \in \mathcal{A}_1$
c_a	coût d'acheminement des communications sur $a \in \mathcal{A}_1$ (pour le meneur)
d_a	coût unitaire de communication de $a \in \mathcal{A}_2$ (pour le suiveur)
$o(k)$	origine du produit k
$d(k)$	destination du produit k
b^k	vecteur de demande du produit k

TAB. 3.1 – Paramètres du problème de tarification et de conception de réseau en télécommunication *PTCR*

T_a	tarif sur $a \in \mathcal{A}_1$
v_a	vaut 1 si l'arc a est ouvert, 0 sinon ($a \in \mathcal{A}_1$)
x_a	flot total sur l'arc $a \in \mathcal{A}_1$
y_a	flot total sur l'arc $a \in \mathcal{A}_2$
x_a^k	flot du produit k sur l'arc $a \in \mathcal{A}_1$
y_a^k	flot du produit k sur l'arc $a \in \mathcal{A}_2$

TAB. 3.2 – Variables pour le problème de tarification et de conception de réseau en télécommunication *PTCR*

La contrainte (3.2) représente l'état d'un arc tarifable, v_a vaut 1 si l'arc a est ouvert, 0 sinon. La contrainte (3.4) est la contrainte de conservation du flot. La contrainte (3.5) permet un flot non nul sur l'arc a si et seulement si cet arc est ouvert. La contrainte (3.6) exige des flots positifs ou nuls.

Afin d'éviter les trivialités, nous formulons les hypothèses suivantes. Tout d'abord, pour éliminer les solutions triviales procurant un profit infini, nous faisons l'hypothèse qu'il existe, pour chaque produit k , un chemin reliant l'origine $o(k)$ à la destination $d(k)$ composé uniquement d'arcs non tarifables. Pour des problèmes ayant des coûts d'ouverture nuls pour chacun des arcs tarifables, il est possible de calculer assez facilement une borne supérieure. Pour le calcul de cette borne, nous considérons le coût d'acheminement du meneur (c_a) comme un coût fixe sur les arcs tarifables pour le suiveur. Puis, dans le cas où les coûts d'ouverture sont nuls, la borne supérieure pour le profit du meneur est la différence entre la somme des coûts des plus courts chemins non tarifables reliant les origines $o(k)$ aux destinations $d(k)$ et la somme des coûts des plus courts chemins reliant les origines $o(k)$ aux destinations $d(k)$ où les tarifs sont fixé à 0. Le coût d'utilisation de chaque arc tarifable ($a \in \mathcal{A}_1$) est le coût c_a d'acheminement du meneur. Le coût d'utilisation des arcs non tarifables est d_a . Toutefois, cette borne n'est pas toujours atteinte. En effet, considérons l'exemple décrit à la figure 3.1. L'arc (5, 6) est tarifable. La demande est de 2 unités pour le premier produit d'origine 1 et de destination 2 et de 4 unités pour le second produit d'origine 3 et de destination 4. Le coût d'ouverture et le coût d'écoulement pour le meneur de l'arc (5, 6) sont respectivement 0 et 1. La solution optimale du problème est obtenue en fixant un tarif de 2 sur l'arc (5, 6). La totalité du flot empruntera ainsi l'arc tarifable et le profit du meneur vaudra 6. Regardons maintenant la valeur de la borne supérieure sur le profit. La somme des coûts des plus courts chemins non tarifables pour chaque produit est de 40. En considérant les coûts d'écoulement du meneur comme étant des coûts fixes pour le suiveur et des tarifs nuls, la somme des coûts

des plus courts chemins reliant les origines $o(k)$ aux destinations $d(k)$ est de 26. Cette valeur est obtenue en additionnant les coûts d'utilisation pour chaque produit c'est-à-dire $2 \times (2 + 1 + 1) + 4 \times (3 + 1 + 1) = 26$. La borne supérieure vaut donc 14. Par contre, avec des coûts d'ouverture non nuls, le calcul d'une borne supérieure devient beaucoup plus complexe.

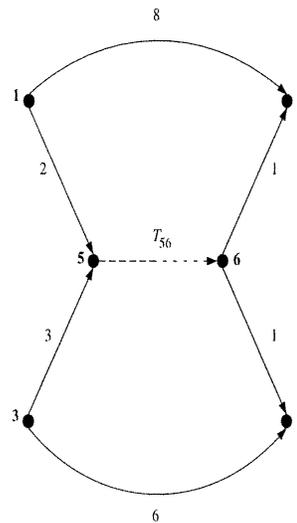


FIG. 3.1 – La borne supérieure sur le profit n'est pas atteinte

Ensuite, pour un niveau de tarif et une topologie de réseau fixés par le meneur, le flot de chaque produit k se déplace sur le chemin de coût minimum entre l'origine $o(k)$ et la destination $d(k)$, le coût d'un chemin étant la somme des coûts des arcs le composant. Toutefois, il est possible qu'il existe plusieurs chemins de même coût minimum pour le suiveur. Nous faisons l'hypothèse qu'entre des chemins de coûts égaux, le suiveur choisira un chemin parmi ceux procurant le meilleur profit au meneur. Cette hypothèse pourrait être relâchée en diminuant la valeur du tarif associé à chaque arc d'une valeur ϵ suffisamment petite.

La troisième hypothèse est liée à la présence possible de tarifs négatifs. Cette possibilité permet d'engendrer des effets compensatoires entre les différents tarifs lorsque les arcs associés sont utilisés par plusieurs produits. En effet, considérons l'exemple décrit à la figure 3.2 où les arcs (5,6) et (6,4) sont tarifables. La demande est de une unité pour le premier produit d'origine 1 et de destination 4 et de une unité pour le produit d'origine 3 et de destination 4. Dans ce cas, l'effet compensatoire d'un tarif négatif joue un rôle important et la solution optimale correspond à un profit de 8 unités monétaires obtenu en posant un tarif de 5 unités sur l'arc (5,6) et un tarif de -2 unités sur l'arc (6,4). Il nous faut donc supposer qu'il n'existe pas d'ensemble de tarifs générant du profit et créant un circuit de poids négatif dans le réseau. Cette hypothèse implique que la solution optimale du problème de second niveau est un ensemble de plus courts chemins. Ces problèmes sont résolus par l'algorithme de Ford-Bellman-Moore ([6], [20]).

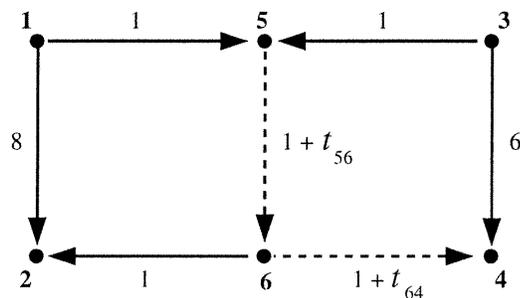


FIG. 3.2 – Une solution optimale avec un tarif négatif

Voyons maintenant deux formulations équivalentes pour le problème *PTCR*. D'abord, la caractérisation de la solution du problème du suiveur comme des chemins portant la totalité du flot d'un produit ou un flot nul nous conduit à considérer des vecteurs de demande unitaire pour les produits :

$$e^k = \begin{cases} 1 & \text{si } i = o(k), \\ -1 & \text{si } i = d(k), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous obtenons le modèle équivalent suivant :

$$\begin{aligned}
(PTCR) \quad & \max_{T,v} \sum_{a \in \mathcal{A}_1} \sum_{k \in \mathcal{K}} n^k T_a x_a^k - \sum_{a \in \mathcal{A}_1} f_a v_a - \sum_{a \in \mathcal{A}_1} \sum_{k \in \mathcal{K}} n^k c_a x_a^k \\
\text{s.c.} \quad & v_a \in \{0, 1\} \qquad \qquad \qquad \forall a \in \mathcal{A}_1, \\
\min_{x,y} \quad & \sum_{k \in \mathcal{K}} n^k \left(\sum_{a \in \mathcal{A}_1} T_a x_a^k + \sum_{a \in \mathcal{A}_2} d_a y_a^k \right) \\
\text{s.c.} \quad & Ax^k + By^k = e^k \qquad \qquad \qquad \forall k \in \mathcal{K}, \\
& x_a^k \leq v_a \qquad \qquad \qquad \forall a \in \mathcal{A}_1, \forall k \in \mathcal{K}, \quad (3.7) \\
& x^k, y^k \geq 0 \qquad \qquad \qquad \forall k \in \mathcal{K}.
\end{aligned}$$

Ensuite, la contrainte (3.7) du problème du second niveau exigeant un flot nul sur les arcs fermés peut être placée au premier niveau. Lorsque l'on déplace cette contrainte, l'état d'un arc devient inconnu du suiveur. Pour s'assurer qu'aucun flot n'utilise un arc fermé, le meneur fixe un tarif infini (T_a) sur chacun de ces arcs. Ces nouveaux tarifs dissuaderont le suiveur d'utiliser les arcs fermés, l'amenant à choisir un chemin de moindre coût et, ainsi, aucun flot ne circulera sur ces arcs.

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}
 (PTCR) \quad & \max_{T,v} \sum_{a \in \mathcal{A}_1} \sum_{k \in \mathcal{K}} n^k T_a x_a^k - \sum_{a \in \mathcal{A}_1} f_a v_a - \sum_{a \in \mathcal{A}_1} \sum_{k \in \mathcal{K}} n^k c_a x_a^k \\
 \text{s.c.} \quad & v_a \in \{0, 1\} && \forall a \in \mathcal{A}_1, \\
 & x_a^k \leq v_a && \forall a \in \mathcal{A}_1, \forall k \in \mathcal{K}, \\
 \\
 & \min_{x,y} \sum_{k \in \mathcal{K}} n^k \left(\sum_{a \in \mathcal{A}_1} T_a x_a^k + \sum_{a \in \mathcal{A}_2} d_a y_a^k \right) \\
 \text{s.c.} \quad & Ax^k + By^k = e^k && \forall k \in \mathcal{K}, \\
 & x^k, y^k \geq 0 && \forall k \in \mathcal{K},
 \end{aligned}$$

3.2 Cas particulier : un seul produit

Nous considérons maintenant le cas où nous avons un seul produit d'origine o et destination d . Le problème de tarification et de conception de réseau en télécommunication est alors le suivant :

$$\begin{aligned}
 (PTCR_1) \quad & \max_{T,v} \sum_{a \in \mathcal{A}_1} n T_a x_a - \sum_{a \in \mathcal{A}_1} f_a v_a - \sum_{a \in \mathcal{A}_1} n c_a x_a \\
 \text{s.c.} \quad & v_a \in \{0, 1\} && \forall a \in \mathcal{A}_1, \\
 & x_a \leq v_a && \forall a \in \mathcal{A}_1, \\
 \\
 & \min_{x,y} n \left(\sum_{a \in \mathcal{A}_1} T_a x_a + \sum_{a \in \mathcal{A}_2} d_a y_a \right) \\
 & Ax + By = e, \\
 & x, y \geq 0.
 \end{aligned}$$

Les variables x et y étant solutions d'un problème de plus court chemin avec demande unitaire, elles indiquent également si l'arc est emprunté. Les variables

x_a et v_a associées aux arcs tarifables ont donc le même rôle : elles indiquent si un arc est emprunté. Or, les coûts d'ouverture des arcs tarifables interdisent qu'un arc soit ouvert s'il n'est pas utilisé. La contrainte $x_a \leq v_a$ peut être remplacée par $x_a = v_a$ et nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 (PTCR_1) \quad & \max_{T,v} \sum_{a \in \mathcal{A}_1} nT_a x_a - \sum_{a \in \mathcal{A}_1} f_a v_a - \sum_{a \in \mathcal{A}_1} nc_a x_a \\
 \text{s.c.} \quad & v_a \in \{0, 1\} \quad \forall a \in \mathcal{A}_1, \\
 & x_a = v_a \quad \forall a \in \mathcal{A}_1, \\
 & \min_{x,y} n \left(\sum_{a \in \mathcal{A}_1} T_a x_a + \sum_{a \in \mathcal{A}_2} d_a y_a \right) \\
 & Ax + By = e, \\
 & x, y \geq 0,
 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
 (PTCR_1) \quad & \max_{T,v} \sum_{a \in \mathcal{A}_1} nT_a x_a - \sum_{a \in \mathcal{A}_1} f_a x_a - \sum_{a \in \mathcal{A}_1} nc_a x_a \\
 \text{s.c.} \quad & x_a \in \{0, 1\} \quad \forall a \in \mathcal{A}_1, \\
 & \min_{x,y} n \left(\sum_{a \in \mathcal{A}_1} T_a x_a + \sum_{a \in \mathcal{A}_2} d_a y_a \right) \\
 & Ax + By = e, \\
 & x, y \geq 0.
 \end{aligned}$$

Il s'agit d'un problème de tarification d'un seul produit semblable à ceux étudiés par Brotcorne *et al.* ([10], [11]). En effet, en posant $\tilde{T}_a = T_a - \frac{1}{n}f_a - c_a$, le problème $(PTCR_1)$ peut se réécrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 (PTCR_1) \quad & \max_{\tilde{T}} \sum_{a \in \mathcal{A}_1} n\tilde{T}_a x_a \\
 & \min_{x,y} \sum_{a \in \mathcal{A}_1} n(\tilde{T}_a + c_a + 1/nf_a)x_a + \sum_{a \in \mathcal{A}_2} nd_a y_a \\
 \text{s.c.} \quad & Ax + By = e, \\
 & x, y \geq 0.
 \end{aligned}$$

Ce problème à la même forme que ceux résolus par Brotcorne *et al.* ([10], [11]) à l'aide d'une heuristique séquentielle sur les arcs ou encore par une heuristique primale-duale. Remarquons que les frais d'acheminement des communications (c) et les frais d'ouverture des arcs (f) pour le meneur ont des répercussions sur les tarifs.

Étant donné qu'il existe une méthode de résolution pour le cas particulier d'un seul produit, nous porterons désormais toute notre attention au cas général multiproduit.

3.3 Formulation linéaire mixte

Dans cette section, nous considérons une formulation du problème *PTCR* sous forme d'un problème linéaire mixte. Rappelons d'abord le problème de tarification et de conception de réseau multiproduit *PTCR* :

$$\begin{aligned}
 (PTCR) \quad & \max_{T,v} \sum_{a \in \mathcal{A}_1} \sum_{k \in \mathcal{K}} n^k T_a x_a^k - \sum_{a \in \mathcal{A}_1} f_a v_a - \sum_{a \in \mathcal{A}_1} \sum_{k \in \mathcal{K}} n^k c_a x_a^k \\
 \text{s.c.} \quad & v_a \in \{0, 1\} && \forall a \in \mathcal{A}_1, \\
 & x_a^k \leq v_a && \forall a \in \mathcal{A}_1, \forall k \in \mathcal{K}, \\
 \min_{x,y} \quad & \sum_{k \in \mathcal{K}} n^k \left(\sum_{a \in \mathcal{A}_1} T_a x_a^k + \sum_{a \in \mathcal{A}_2} d_a y_a^k \right) && (3.8)
 \end{aligned}$$

$$\text{s.c.} \quad Ax^k + By^k = e^k \quad \forall k \in \mathcal{K}, \quad (3.9)$$

$$x^k, y^k \geq 0 \quad \forall k \in \mathcal{K}. \quad (3.10)$$

Remplaçons le problème de second niveau par ses conditions d'optimalité. Le problème du suiveur, défini par l'objectif (3.8) et les contraintes (3.9) et (3.10),

est séparable par produit. Nous désignons par λ^k les variables duales associées au sous-problème pour le produit k . Le problème *PTCR* est donc équivalent à :

$$\begin{aligned}
& \max_{T,v,x,y,\lambda} \sum_{a \in \mathcal{A}_1} \sum_{k \in \mathcal{K}} n^k T_a x_a^k - \sum_{a \in \mathcal{A}_1} f_a v_a - \sum_{a \in \mathcal{A}_1} \sum_{k \in \mathcal{K}} n^k c_a x_a^k \\
& \text{s.c.} \quad v_a \in \{0, 1\} \quad \forall a \in \mathcal{A}_1, \\
& \quad x_a^k \leq v_a \quad \forall a \in \mathcal{A}_1, \forall k \in \mathcal{K}, \\
& \quad Ax^k + By^k = e^k \quad \forall k \in \mathcal{K}, \\
& \quad x^k \geq 0, y^k \geq 0 \quad \forall a \in \mathcal{A}_2, \forall k \in \mathcal{K}, \\
& \quad \lambda^k A \leq T, \lambda^k B \leq d \quad \forall k \in \mathcal{K}, \\
& \quad n^k (Tx^k + dy^k - \lambda^k e^k) = 0 \quad \forall k \in \mathcal{K}.
\end{aligned}$$

La non-linéarité intervient à deux niveaux. D'abord, au niveau de l'objectif :

$$\sum_{a \in \mathcal{A}_1} \sum_{k \in \mathcal{K}} n^k T_a x_a^k,$$

et dans la contrainte d'égalité des objectifs primal et dual (contrainte de complémentarité) :

$$\sum_{a \in \mathcal{A}_1} n^k T_a x_a^k + \sum_{a \in \mathcal{A}_2} n^k d_a y_a^k - n^k \sum_{i \in \mathcal{N}} \lambda_i^k e_i^k = 0 \quad \forall k \in \mathcal{K}.$$

Afin de linéariser ces deux équations, nous définissons pour chaque arc une variable de tarif par produit T_a^k tel que

$$T_a^k = T_a x_a^k \quad \forall a \in \mathcal{A}_1, \forall k \in \mathcal{K}.$$

Les trois contraintes suivantes sont ajoutées au problème afin d'intégrer cette définition à notre problème :

$$\begin{aligned}
& -Mx_a^k \leq T_a^k \leq Mx_a^k \quad \forall a \in \mathcal{A}_1, \forall k \in \mathcal{K}, \\
& -M(1 - x_a^k) \leq T_a^k - T_a \leq M(1 - x_a^k) \quad \forall a \in \mathcal{A}_1, \forall k \in \mathcal{K}, \\
& x_a^k \in \{0, 1\} \quad \forall a \in \mathcal{A}_1, \forall k \in \mathcal{K}.
\end{aligned}$$

En effet, si la variable x_a^k est égale à 1, les usagers du produit k utilisent l'arc a et ils paient T_a où $T_a^k = T_a$. Par contre, si la variable x_a^k est nulle alors $T_a^k = 0$. Nous obtenons le problème linéaire mixte *MIP* suivant :

$$\begin{aligned}
(MIP) \quad & \max_{T,v,x,y,\lambda} \sum_{a \in \mathcal{A}_1} \sum_{k \in \mathcal{K}} n^k T_a^k - \sum_{a \in \mathcal{A}_1} f_a v_a - \sum_{a \in \mathcal{A}_1} \sum_{k \in \mathcal{K}} n^k c_a x_a^k \\
\text{s.c.} \quad & v_a \in \{0, 1\} && \forall a \in \mathcal{A}_1, \\
& x_a^k \leq v_a && \forall a \in \mathcal{A}_1, \forall k \in \mathcal{K}, \\
& Ax^k + By^k = e^k && \forall k \in \mathcal{K}, \\
& y^k \geq 0 && \forall a \in \mathcal{A}_2, \forall k \in \mathcal{K}, \\
& \lambda^k A \leq T, \lambda^k B \leq d && \forall k \in \mathcal{K}, \\
& n^k (Tx^k + dy^k - \lambda^k e^k) = 0 && \forall k \in \mathcal{K}, \\
& -Mx_a^k \leq T_a^k \leq Mx_a^k && \forall a \in \mathcal{A}_1, \forall k \in \mathcal{K}, \\
& -M(1 - x_a^k) \leq T_a^k - T_a \leq M(1 - x_a^k) && \forall a \in \mathcal{A}_1, \forall k \in \mathcal{K}, \\
& x_a^k \in \{0, 1\} && \forall a \in \mathcal{A}_1, \forall k \in \mathcal{K}.
\end{aligned}$$

Le nombre de variables binaires est égal au nombre d'arcs tarifables multiplié par le nombre de produits, c'est-à-dire $m_1 |\mathcal{K}|$.

Nous pouvons résoudre ce problème à l'aide d'un algorithme de «branch-and-bound» tel que celui utilisé par le logiciel CPLEX [17]. Cette approche nous permet d'évaluer la qualité des solutions pour des problèmes de taille réduite fournies par l'heuristique proposée.

Chapitre 4

Algorithme de résolution

Dans ce chapitre, nous présentons la méthode heuristique de résolution étudiée. Comme cette heuristique est basée sur le principe de la relaxation lagrangienne, nous effectuons un rappel de cette méthode dans la première partie. Dans la seconde partie, nous expliquons la méthode de sous-gradient qui est utilisée pour résoudre le problème engendré par la relaxation lagrangienne. La troisième partie développe l'algorithme utilisé. Nous y explicitons la résolution du dual lagrangien ainsi que la résolution du sous-problème lagrangien. Finalement, la quatrième partie développe l'algorithme pour le problème de tarification et de conception de réseau.

4.1 Relaxation lagrangienne

Une approche lagrangienne consiste, entre autres, à relâcher certaines contraintes difficiles d'un programme mathématique afin d'en faciliter la résolution. Nous illustrons ici l'approche lorsqu'elle est appliquée à un programme linéaire.

Soit le problème suivant :

$$\begin{aligned}
 (P) \quad z = \max_x \quad & cx \\
 \text{s.c.} \quad & Ax + By = b, \\
 & Dx \leq d, \\
 & x \in \{0, 1\}^n,
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

où $A \in \mathfrak{R}^{m_1} \times \mathfrak{R}^n$, $D \in \mathfrak{R}^{m_2} \times \mathfrak{R}^n$ et $b \in \mathfrak{R}^{m_1}$, $d \in \mathfrak{R}^{m_2}$, $c, x \in \mathfrak{R}^n$. Nous supposons que les contraintes $Ax + By = b$ ont une structure simple dans le sens où, si nous ne travaillions qu'avec ces contraintes, le problème mathématique résultant serait facile à résoudre. Les contraintes de conservation de flot sont un exemple de telles contraintes. Les contraintes $Dx \leq d$ sont dites «compliquantes», car elles rendent le problème difficile. Si nous écartons tout simplement ces contraintes compliquantes du problème, nous obtenons une borne supérieure pour le problème, mais fort probablement non réalisable pour le problème originel (P) .

Pour toute valeur du vecteur $u = (u_1, u_2, \dots, u_m) \geq 0$, appelé le vecteur des multiplicateurs de Lagrange ou encore le vecteur dual associé aux contraintes compliquantes, nous définissons la fonction suivante : $cx + u(d - Dx)$, appelée le «Lagrangien». La fonction de Lagrange ou le sous-problème lagrangien de P $SPL(u)$ pour tout $u \geq 0$ est donné par :

$$\begin{aligned}
 (SPL(u)) \quad z(u) = \max_x \quad & cx + u(d - Dx) \\
 \text{s.c.} \quad & Ax + By = b, \\
 & x \in \{0, 1\}^n.
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

La résolution de ce problème nous donne une borne supérieure pour le problème originel P . Le vecteur de multiplicateurs u permet de combler l'écart entre la valeur du problème relaxé $SPL(u)$ et la valeur optimale du problème originel P . En se référant à la théorie de la dualité lagrangienne, nous constatons qu'un

problème dual de $SPL(u)$ s'exprime comme le problème dual suivant :

$$(DL) \quad \min_u \{z(u) : u \geq 0\}.$$

Le problème dual consiste à minimiser le maximum de la fonction $cx + u(d - Dx)$. Résoudre le problème dual nous permet de trouver la «meilleure» borne supérieure.

Notons que si P est un problème convexe et stable ¹, tel un problème linéaire, il existe un vecteur de multiplicateurs tel que la valeur de l'objectif de P est égale à la valeur de l'objectif de DL . En effet, le théorème de dualité forte nous garantit que, si le problème $SPL(u)$ possède une solution optimale finie, il en est de même pour le problème dual DL et les valeurs optimales de ces deux problèmes sont égales. Par contre, si un des problèmes ($SPL(u)$ ou DL) n'est pas borné alors le domaine réalisable de l'autre est vide.

Comme $z(u)$ est souvent non différentiable, une approche simple et facile à implanter, pour résoudre ce problème, consiste à utiliser un algorithme de sous-gradient.

4.2 Algorithme de sous-gradient

Les multiplicateurs lagrangiens sont modifiés de façon itérative afin que la solution du dual DL soit la plus proche possible de la solution optimale de P (4.1).

¹Le problème P est stable si sa fonction de perturbation v évaluée à 0 prend une valeur finie et si cette fonction v ne décroît pas très brusquement dans aucune direction de perturbation dans le voisinage de 0.

À chaque itération j , la valeur $z(u)$ s'obtient par la résolution du sous-problème lagrangien $SPL(u)$ (4.2). Étant donné que u^j est modifié à chaque itération et que la résolution du nouveau sous-problème lagrangien ne garantit pas nécessairement une meilleure solution, nous gardons la meilleure valeur de $z(u)$ trouvée jusqu'à présent. Nous notons cette valeur \tilde{z} .

La direction d^j peut être définie comme étant celle d'un sous-gradient g^j de la fonction $z(u^j)$. Un tel sous-gradient fait partie du sous-différentiel $\partial z(u) = d - Dx$.

Néanmoins, afin de rendre la méthode plus efficace, nous pouvons combiner les directions d'itérations successives. Cela permet parfois d'obtenir plus rapidement de bonnes solutions. Il suffit alors d'utiliser la formule suivante en faisant un choix judicieux pour θ^j :

$$d^j \leftarrow g^j + \theta^j d^{j-1}.$$

Plusieurs choix de paramètre θ^j sont possibles. Le plus simple consiste à considérer $\theta^j \leq 1$ (règle de Crowder [18]). Une autre règle est celle de Camerini-Fratta-Maffioli [14] :

$$\theta^j \leftarrow \begin{cases} -\mu g^j d^{j-1} / \|d^{j-1}\|^2 & \text{si } g^j d^{j-1} \leq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où μ est un paramètre préalablement déterminé. Nous pouvons choisir μ de façon empirique. Les auteurs proposent alors de prendre une valeur de 1,5. Un autre choix pour ce paramètre serait de déterminer μ par la règle de «l'auto-ajustement» selon laquelle $\mu \leftarrow -\|g^j\| \|d^{j-1}\| / g^j d^{j-1}$. Ce dernier choix, intégré à la règle de Camerini-Fratta-Maffioli, nous donne :

$$\theta^j \leftarrow \begin{cases} \|g^j\| / \|d^{j-1}\| & \text{si } g^j d^{j-1} \leq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Enfin, un pas γ^j , à partir du point courant u^j dans la direction d^j , peut être défini par

$$\gamma^j \leftarrow \alpha^j (z_{inf} - z(u^j)) / g^j d^j,$$

où α^j est un facteur qui dépend de l'évolution de \tilde{z} et z_{inf} est une borne inférieure pour le problème.

Chaque fois que la valeur \tilde{z} n'a pas été améliorée pendant δ_* itérations successives, nous divisons le paramètre α^j par un facteur constant δ ($\delta \geq 0$). La valeur z_{inf} est soit une borne inférieure déjà connue, soit une borne calculée. Si nous ne connaissons pas a priori de borne inférieure pour le problème, nous utilisons alors la formule suivante pour la déterminer :

$$z_{inf} \leftarrow \beta \tilde{z},$$

où β est une constante inférieure à un ou une variable dynamique. Dans le deuxième cas, nous initialisons β à une petite valeur et, par la suite, nous mettons à jour β lorsque nous modifions α^j . Cette mise à jour consiste à multiplier β par un facteur β^* ($\beta^* \geq 1$).

Finalement, le critère d'arrêt utilisé est en fait composé de deux critères. Le premier est satisfait lorsque la meilleure valeur \tilde{z} n'a pas été améliorée depuis δ_{**} itérations successives ($\delta_{**} \geq \delta_*$). Nous choisissons δ_{**} suffisamment grand afin d'éviter les optimums locaux. Le deuxième critère est satisfait lorsque α^i devient proche de 0. Ce critère combiné au premier permet un gain de temps considérable pour une perte de niveau de qualité de z_{inf} négligeable.

Itération 0 : (Initialisation)

- $j \leftarrow 0$
- $u \leftarrow u^0$

Itération j : ($u \leftarrow u^j$)

- Résoudre $SPL(u)$ (4.2) et obtenir $z(u)$,
- Soit $g(u^j) \in \partial z(u)$
- $d^j \leftarrow g^j + \theta d^{j-1}$ et $\gamma^j \leftarrow \alpha^j (z_{inf} - z(u^j)) / g^j d^j$
- $u^{j+1} \leftarrow \max\{0, u^j - \gamma^j d^j\}$,
- Vérifier le critère d'arrêt :
 - si \tilde{z} n'a pas été améliorée depuis δ_{**} itérations ou que α^j devient près de 0 : Arrêt,
 - sinon $j \leftarrow j + 1$.

FIG. 4.1 – Algorithme de sous-gradient

4.3 Algorithme de sous-gradient pour un problème de conception optimale à deux niveaux

4.3.1 Modèle de conception optimale biniveau

Notre modèle est un problème biniveau avec conception de réseau multiproduit. Un cas particulier de *PTCR* est

$$\begin{aligned}
 (PBC) \quad & \max_{T,v} \quad Tx - fv \\
 & \text{s.c.} \quad v \in \{0, 1\}^n, \\
 & \quad \quad \quad x \leq v, \\
 & \min_{x,y} \quad (c + T)x + dy \\
 & \quad \quad \quad Ax + By = e, \\
 & \quad \quad \quad x, y \geq 0.
 \end{aligned}$$

Pour ce problème comme pour le nôtre (*PTCR*), le suiveur tente de minimiser ses coûts alors que le meneur tente de maximiser son profit. Ce dernier doit pour cela déterminer la conception du réseau ainsi que les tarifs optimaux. La différence entre les deux problèmes (*PBC* et *PTCR*) se situe au niveau de l'objectif du meneur. Dans le cas du *PTCR*, le meneur doit payer un coût d'écoulement supplémentaire lorsque l'arc tarifable est utilisé. De plus, pour le *PBC* nous ne considérons qu'un seul produit.

Comme le modèle *PBC* est un peu moins complexe que le modèle *PTCR*, nous commençons par expliciter la technique de résolution utilisée pour le *PBC*, ensuite nous la généralisons pour la résolution du *PTCR* (voir section 4.4). Nous allons donc détailler l'algorithme de sous-gradient appliqué à un problème de conception optimale à deux niveaux.

Tout d'abord, la contrainte de charge ($x \leq v$), qui comprend des variables du second niveau x et des variables du premier niveau v , est relâchée. Pour toute valeur de multiplicateurs $u \geq 0$, le sous-problème lagrangien noté $SPL(u)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} z(u) = & \max_{T,v} Tx - fv + u(v - x) \\ & \text{s.c. } v \in \{0, 1\}^n, \\ & \min_{x,y} (c + T)x + dy \\ & \text{s.c. } Ax + By = e, \\ & x, y \geq 0, \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} z(u) = & \max_{T,v} (T - u)x + (u - f)v \\ & \text{s.c. } v \in \{0, 1\}^n, \\ & \min_{x,y} (c + T)x + dy \\ & \text{s.c. } Ax + By = e, \\ & x, y \geq 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Pour toute valeur du vecteur de multiplicateurs $u \geq 0$, la solution du sous-problème lagrangien (4.3) fournit une borne supérieure sur la solution optimale de $PTCR$. Afin de trouver la meilleure borne supérieure, nous résolvons le problème dual lagrangien :

$$(DL) \quad \min_u \{z(u) : u \geq 0\}.$$

Dans les deux prochaines sections, nous décrivons la résolution du dual lagrangien et la résolution du sous-problème. Nous adaptons l'algorithme vu précédemment au problème biniveau avec conception. Notre heuristique est constituée de deux niveaux. La première des deux sections décrit une itération majeure (boucle externe) de notre heuristique, alors que la deuxième section détaille une itération mineure (boucle interne).

4.3.2 Minimisation du dual lagrangien

Nous cherchons à minimiser $z(u)$ pour $u \geq 0$. Pour résoudre ce problème, nous utilisons un algorithme de sous-gradient tel que décrit à la section 4.2.

Nous initialisons d'abord u^0 . Par la suite, nous devons résoudre le problème $SPL(u)$. Ce problème peut être résolu par un algorithme primal-dual tel que nous le verrons à la section suivante.

En résolvant le problème $SPL(u)$ pour un u donné, nous obtenons un vecteur v ainsi qu'un vecteur de tarification T et deux vecteurs de flot (x, y) .

Étant donné la relaxation effectuée sur la contrainte de charge ($x \leq v$), nous ne sommes pas assurés que, dans la solution obtenue, aucun arc fermé ne porte du flot. Avant de calculer l'objectif du meneur, il convient de forcer l'ouverture d'un arc, s'il est utilisé, et de forcer sa fermeture dans le cas contraire. Après avoir évalué l'objectif du meneur pour la solution corrigée et avoir mis à jour la meilleure solution en termes de profit, nous calculons le nouveau u^{j+1} . Ce raisonnement est répété tant que le critère d'arrêt n'est pas satisfait. L'algorithme de sous-gradient pour le PBC est résumé ci-dessous. Le meilleur profit du meneur est noté *profit**.

Itération 0 : (Initialisation)

- $j \leftarrow 0$
- $u \leftarrow u^0$
- $profit^* \leftarrow 0$

Itération j : ($u \leftarrow u^j$)

- Résoudre $SPL(u)$ (4.3) et obtenir \tilde{T} et x ,
- Si $x_j = 1$ alors $v_j \leftarrow 1$ sinon $v_j \leftarrow 0$
- Calculer l'objectif du meneur ($profit$)
- Si $profit \geq profit^*$ alors $profit^* \leftarrow profit$
- $d^j \leftarrow g(u^j) + \theta d^{j-1}$ et $\gamma^j \leftarrow \alpha^j (z_{inf} - z(u^j)) / g^j d^j$
- $u^{j+1} \leftarrow \max\{0, u^j - \gamma^j d^j\}$,
- Vérifier le critère d'arrêt :
 - si \tilde{z} n'a pas été améliorée depuis δ_{**} itérations ou que α^i devient près de 0 : Arrêt,
 - sinon $j \leftarrow j + 1$.

FIG. 4.2 – Algorithme de sous-gradient pour un problème de conception optimale à deux niveaux

4.3.3 Résolution du sous-problème lagrangien pour u fixé

Voyons maintenant la méthode utilisée pour résoudre le problème $SPL(u)$ pour un vecteur de multiplicateurs u fixé.

Rappelons d'abord le problème $SPL(u)$:

$$\begin{aligned}
 SPL(u) \quad & \max_{T,v} (T - u)x + (u - f)v \\
 \text{s.c.} \quad & v \in \{0, 1\}^n \\
 & \min_{x,y} (c + T)x + dy \\
 & Ax + By = e, \\
 & x, y \geq 0.
 \end{aligned}$$

Remarquons qu'une fois que le vecteur u est fixé, ce problème est séparable en deux sous-problèmes. Un sous-problème en v :

$$\begin{aligned}
 (SP(u)) \quad & \max_v (u - f)v \\
 \text{s.c.} \quad & v \in \{0, 1\}^n
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

et un second sous-problème en T, x, y :

$$\begin{aligned}
 (SP(u, v)) \quad & \max_T (T - u)x + (u - f)v \\
 & \min_{x,y} (c + T)x + dy, \\
 \text{s.c.} \quad & Ax + By = e, \\
 & x, y \geq 0.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Le problème en v se résout simplement en déterminant la valeur des composantes $(u - f)_i$. Si cette valeur est supérieure ou égale à zéro, alors $v_i = 1$, sinon $v_i = 0$.

$$v_i = \begin{cases} 1 & \text{si } (u - f)_i \geq 0, \\ 0 & \text{si } (u - f)_i \leq 0. \end{cases}$$

Une fois le vecteur v fixé, nous devons résoudre le second problème $SP(u, v)$. Ce problème peut être résolu par un algorithme primal-dual.

Brotcorne [9] a proposé un algorithme primal-dual pour résoudre un problème de tarification de réseau multiproduit. Cet algorithme est basé sur la reformulation du problème à deux niveaux bilinéaire-bilinéaire sous forme d'un problème à un seul niveau bilinéaire obtenu en pénalisant les conditions d'optimalité du problème du suiveur. Ce problème à un seul niveau bilinéaire est résolu par une stratégie primale-duale. La seule contrainte non linéaire du problème relative au saut de dualité est pénalisée. Afin de rendre le problème séparable par commodité au niveau des tarifs et des flots, un vecteur de tarifs est défini pour chaque arc et chaque produit. De plus, la contrainte d'égalité de ces tarifs est pénalisée de façon quadratique. Cet algorithme est constitué de trois pas principaux. Au pas 1, à l'aide de l'algorithme de Frank-Wolfe, on résout un problème quadratique pour des vecteurs de flux sur les arcs tarifables et non tarifables x, y fixés afin d'obtenir les vecteurs de tarifs T par commodité. Au pas 2, le problème bilinéaire est résolu en x, y pour le vecteur T fixé par un algorithme de plus courts chemins. Le but de ces deux pas est de générer des changements de solution du suiveur. Pour chacune de ces solutions, au pas 3, le niveau optimal des tarifs T est déterminé en résolvant un problème linéaire. Nous utilisons essentiellement la même technique mais nous l'appliquons à un problème de tarification et de conception de réseau. Nous devons donc adapter cet algorithme à notre problème. Nous ne définissons pas les tarifs par produits donc il n'y a pas de pénalité quadratique. Au pas 1, nous déterminons le vecteur de tarifs en résolvant un problème linéaire à l'aide du logiciel CPLEX. Donc, nous avons également deux pas dont le but est de générer des changements de solution du suiveur mais qui sont constitués de la résolution de deux problèmes linéaires. Nous devons, de plus, déterminer l'ouverture des arcs.

Explicitons maintenant en détail l'algorithme primal-dual que nous avons utilisé pour résoudre le sous-problème $SP(u, v)$. Nous remplaçons d'abord le problème de second niveau par ses conditions d'optimalité. Nous obtenons le modèle suivant où λ représente le vecteur dual associé à la contrainte de conservation de flot dans le problème (4.5) :

$$\begin{aligned}
 (SP(u, v)) \quad & \max_{T, x, y, \lambda} (c + T - u)x + (u - f)v \\
 \text{s.c.} \quad & Ax + By = e, \\
 & x, y \geq 0, \\
 & \lambda A \leq c + T, \\
 & \lambda B \leq d, \\
 & (c + T)x + dy - \lambda e = 0.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Les contraintes de ce problème sont linéaires, à l'exception de la contrainte d'égalité des objectifs du problème (4.6). En pénalisant cette contrainte, le problème $SP(u, v)$ devient :

$$\begin{aligned}
 (PEN(u, v)) \quad & \max_{T, x, y, \lambda} (c + T - u)x + (u - f)v - M_1((c + T)x + dy - \lambda e) \\
 \text{s.c.} \quad & Ax + By = e, \\
 & x, y \geq 0, \\
 & \lambda A \leq c + T, \\
 & \lambda B \leq d,
 \end{aligned}$$

où M_1 est un scalaire positif.

Pour résoudre ce problème, nous pouvons appliquer une heuristique primale-duale s'inspirant de celle développée par Brotcorne *et al.* ([10], [11]). Pour une itération générale l , l'heuristique décrite à la figure 4.3 est constituée de deux pas. À l'étape 1, nous résolvons le problème linéaire $PEN(u, v)$ pour des vecteurs de flux sur les arcs tarifables et non tarifables x, y fixés. La solution est le vecteur

de tarif T . Au pas 2, le problème $PEN(u, v)$ est résolu en x, y pour le vecteur T fixé. Il s'agit d'un problème de plus courts chemins. Le but de cette heuristique est de visiter des solutions du suiveur x, y intéressantes pour le meneur. Pour chacune de ces solutions, nous déterminons, au pas 3, le niveau optimal des tarifs T , en résolvant un problème linéaire en T , et nous évaluons l'objectif du meneur pour cette solution du suiveur et pour ce niveau de tarif.

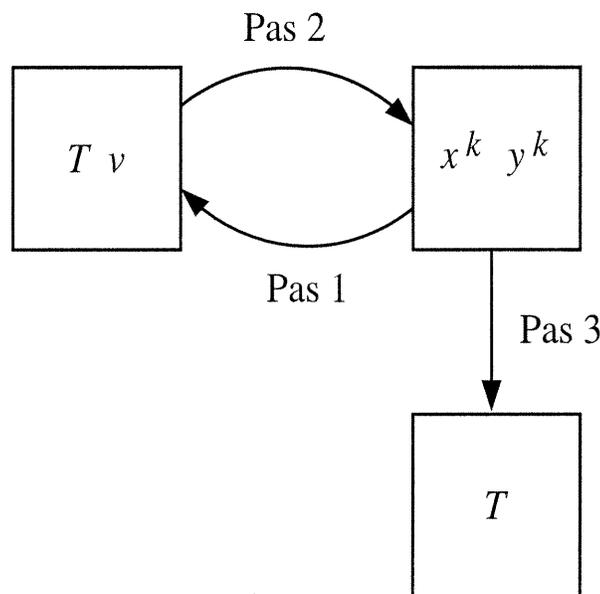


FIG. 4.3 – Résolution du sous-problème lagrangien

Décrivons maintenant de façon détaillée les différentes étapes de l'algorithme. Lors de l'initialisation de l'algorithme (pas 0), les tarifs des arcs tarifables sont fixés à 0 et tous les arcs sont ouverts. À partir de ces données, nous pouvons trouver les variables de flot x, y par la résolution d'un problème de plus courts chemins.

Au pas 1, les vecteurs T et λ sont solutions du problème suivant pour x fixé :

$$\begin{aligned}
 (PEN(u, v, x)) \quad & \max_{T, \lambda} (1 - M_1)Tx + M_1\lambda e \\
 \text{s.c.} \quad & \lambda A \leq c + T, \\
 & \lambda B \leq d.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Ce problème est un problème linéaire que nous résolvons à l'aide du logiciel CPLEX [17]. Nous pourrions également résoudre ce problème à l'aide d'un algorithme de plus courts chemins.

Au pas 2, nous résolvons le problème suivant pour T fixé :

$$\begin{aligned}
 (PEN(u, v, T)) \quad & \max_{x, y, \lambda} (c + (1 - M_1)T - u)x - M_1dy + M_1\lambda e \\
 \text{s.c.} \quad & Ax + By = e, \\
 & x, y \geq 0, \\
 & \lambda A \leq c + T, \\
 & \lambda B \leq d.
 \end{aligned}$$

De nouveau, ce problème est séparable en un sous-problème de plus courts chemins en x et y et en un sous-problème linéaire en λ .

$$\begin{aligned}
 (PEN1(u, v, T)) \quad & \max_{x, y} (c + (1 - M_1)T - u)x - M_1dy \\
 \text{s.c.} \quad & Ax + By = e, \\
 & x, y \geq 0.
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}
 (PEN2(u, v, T)) \quad & \max_{\lambda} M_1\lambda e \\
 \text{s.c.} \quad & \lambda A \leq c + T, \\
 & \lambda B \leq d.
 \end{aligned}$$

À chaque changement de base de la solution de $PEN1(u, v, T)$, nous déterminons les tarifs optimaux du problème pour des flux sur les arcs fixés (la résolution de ce problème sera détaillée dans la section suivante) et nous calculons la fonction objectif du meneur ainsi que le profit. Nous gardons l'ensemble des résultats (T, v, x) générant le plus grand profit.

Notons que, pour amener l'algorithme à visiter plus de solutions (x, y) intéressantes pour le suiveur, le pas 2 n'est pas résolu pour des valeurs de tarifs déterminées au pas 1, mais pour une combinaison entre cette valeur et celle de l'itération précédente. Ce vecteur de tarifs est donné par :

$$\text{tarif}^{r+1} \leftarrow \rho \times \text{tarif}^r + (1 - \rho) \times \text{tarif}^{r-1},$$

où $0 \leq \rho \leq 1$ et r est un compteur d'itérations.

Pas 0 : (Initialisation)

- $l \leftarrow 0$.
- $\pi(T^0, v^0, x^0, y^0)^* \leftarrow 0$
- $T_0 \leftarrow 0$
- Résoudre $SP(u^0)$ (4.4),
- Aller au pas 2.

Pas 1 : (Calcul de T^l et λ^l)

Résoudre $PEN(T^l, \lambda^l)$ (4.7).

Pas 2 : (Calcul de x^l et y^l)

Résoudre le problème de plus courts chemins $PEN(x^l, y^l)$ (4.8).

S'il y a changement en (x, y) par rapport à l'itération précédente alors

- déterminer des tarifs optimaux \bar{T}^l , $T^l \leftarrow \bar{T}^l$
- calculer l'objectif du meneur : $\pi(T^l, v^l, x^l, y^l) = T^l x^l - f v^l$
- si $\pi(T^l, v^l, x^l, y^l) \geq \pi(T^*, v^*, x^*, y^*)$ alors $\pi(T^*, v^*, x^*, y^*) \leftarrow \pi(T^l, v^l, x^l, y^l)$

Pas 3 : (Critère d'arrêt)

Si le critère d'arrêt est satisfait : arrêt.

Sinon $l = l + 1$, $M_1 \leftarrow M_1 + 1$ et aller au étape 1.

FIG. 4.4 – Algorithme de résolution du sous-problème lagrangien

4.3.4 Détermination des tarifs optimaux

Les pas 1 et 2 de l'algorithme primal-dual ne nous assurent pas que, pour des flux sur les arcs tarifables et non tarifables x et y fixés, les tarifs sont optimaux. Afin de palier à ce problème, nous utilisons la technique d'optimisation inverse. Cette technique consiste à déterminer, pour des vecteurs de flot x , y fixés, un vecteur optimal de tarifs.

Rappelons d'abord le problème PBC :

$$\begin{aligned}
 (PBC) \quad & \max_{T,v} Tx - fv \\
 & \text{s.c. } v \in \{0, 1\}^n, \\
 & x \leq v, \\
 & \min_{x,y} (c + T)x + dy \\
 & Ax + By = e, \\
 & x, y \geq 0.
 \end{aligned}$$

En remplaçant le problème de second niveau par ses conditions d'optimalité, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 (PBC) \quad & \max_{T,v} Tx - fv \\
 & \text{s.c. } v \in \{0, 1\}^n, \\
 & x \leq v, \\
 & Ax + By = e, \\
 & x, y \geq 0, \\
 & \lambda A \leq c + T, \\
 & \lambda B \leq d, \\
 & (c + T - \lambda A)x = 0, \\
 & (d - \lambda B)y = 0.
 \end{aligned}$$

Pour v , x et y fixés, nous obtenons directement le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned}
 (T_{opt}) \quad & \max_T \quad Tx \\
 \text{s.c.} \quad & \lambda A \leq c + T, \\
 & \lambda B \leq d, \\
 & (c + T - \lambda A)_i \geq 0 \quad \text{si } x_i \geq 0, \\
 & (c + T - \lambda A)_i = 0 \quad \text{si } x_i = 0, \\
 & (d - \lambda B)_i \geq 0 \quad \text{si } y_i \geq 0, \\
 & (d - \lambda B)_i = 0 \quad \text{si } y_i = 0.
 \end{aligned}$$

4.4 Algorithme de résolution pour le problème de tarification et de conception en télécommunication

Dans la section précédente, nous avons explicité l'algorithme de sous-gradient pour un problème de conception optimale à deux niveaux (*PBC*). Une des différences entre ce problème et le nôtre se situe au niveau de l'objectif du meneur. Dans le cas du *PTCR*, le meneur doit payer un coût d'écoulement supplémentaire lorsque l'arc tarifable est utilisé. De plus, pour le *PBC* nous ne considérons qu'un seul produit alors que le problème *PTCR* comporte plusieurs produits. Il faut donc généraliser l'algorithme de résolution pour *PBC* au cas multiproduit. Nous allons donc adapter le raisonnement des sections 4.3.2, 4.3.3 et 4.3.4 au problème de tarification et de conception en télécommunication présenté sous forme d'un problème à deux niveaux.

Rappelons tout d'abord le modèle :

$$\begin{aligned}
 (PTCR) \quad & \max_{T,v} \sum_{a \in \mathcal{A}_1} \sum_{k \in \mathcal{K}} n^k T_a x_a^k - \sum_{a \in \mathcal{A}_1} f_a v_a - \sum_{a \in \mathcal{A}_1} \sum_{k \in \mathcal{K}} n^k c_a x_a^k \\
 \text{s.c.} \quad & v_a \in \{0, 1\} && \forall a \in \mathcal{A}_1, \\
 & x_a^k \leq v_a && \forall k \in \mathcal{K}, \forall a \in \mathcal{A}_1, \\
 \\
 & \min_{x,y} \sum_{k \in \mathcal{K}} n^k \left(\sum_{a \in \mathcal{A}_1} T_a x_a^k + \sum_{a \in \mathcal{A}_2} d_a y_a^k \right) \\
 \text{s.c.} \quad & Ax^k + By^k = e^k && \forall k \in \mathcal{K}, \\
 & x^k, y^k \geq 0 && \forall k \in \mathcal{K}.
 \end{aligned}$$

La contrainte de charge ($x_a^k \leq v_a \quad \forall k \in \mathcal{K}, \forall a \in \mathcal{A}_1$), comprenant des variables du second niveau x_a^k et des variables du premier niveau v_a , est relâchée. Pour toute valeur de multiplicateurs $u \geq 0$, le sous-problème lagrangien noté ($SPL(u)$) s'écrit :

$$\begin{aligned}
 SPL(u) \quad & \max_{T,v} \sum_{a \in \mathcal{A}_1} \sum_{k \in \mathcal{K}} n^k T_a x_a^k - \sum_{a \in \mathcal{A}_1} f_a v_a - \sum_{a \in \mathcal{A}_1} \sum_{k \in \mathcal{K}} n^k c_a x_a^k \\
 & + \sum_{a \in \mathcal{A}_1} \sum_{k \in \mathcal{K}} u_a^k (v_a - x_a^k) \\
 \text{s.c.} \quad & v_a \in \{0, 1\} && \forall a \in \mathcal{A}_1, \\
 \\
 & \min_{x,y} \sum_{k \in \mathcal{K}} n^k \left(\sum_{a \in \mathcal{A}_1} T_a x_a^k + \sum_{a \in \mathcal{A}_2} d_a y_a^k \right) \\
 \text{s.c.} \quad & Ax^k + By^k = e^k && \forall k \in \mathcal{K}, \\
 & x^k, y^k \geq 0 && \forall k \in \mathcal{K}, \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
 SPL(u) \quad & \max_{T,v} \sum_{a \in \mathcal{A}_1} \sum_{k \in \mathcal{K}} (n^k(T_a - c_a) - u_a^k)x_a^k + \sum_{a \in \mathcal{A}_1} \sum_{k \in \mathcal{K}} (u_a^k - f_a)v_a \\
 \text{s.c.} \quad & v_a \in \{0, 1\} \qquad \qquad \qquad \forall a \in \mathcal{A}_1, \\
 \\
 \min_{x,y} \quad & \sum_{k \in \mathcal{K}} n^k \left(\sum_{a \in \mathcal{A}_1} T_a x_a^k + \sum_{a \in \mathcal{A}_2} d_a y_a^k \right) \\
 \text{s.c.} \quad & Ax^k + By^k = e^k \qquad \qquad \qquad \forall k \in \mathcal{K}, \\
 & x^k, y^k \geq 0 \qquad \qquad \qquad \forall k \in \mathcal{K}.
 \end{aligned}$$

Pour toute valeur de multiplicateurs $u \geq 0$, la solution du sous-problème lagrangien ($SPL(u)$) fournit une borne supérieure sur la solution optimale de $PTCR$. Afin de trouver la meilleure borne supérieure, nous résolvons le problème dual lagrangien :

$$(DL) \quad \min\{z(u) : u \geq 0\}.$$

4.4.1 Résolution du dual lagrangien

Le problème dual lagrangien est résolu par un algorithme de sous-gradient tel que décrit à la section 4.3.2. Nous initialisons d'abord u^0 . À chaque itération, il faut résoudre le sous-problème lagrangien $SPL(u)$. Nous voyons en détail, à la section suivante, la méthode primale-duale qui a été utilisée pour résoudre ce problème.

Par la suite, nous effectuons la correction pour le vecteur de conception v : si $x_j = 1$, alors $v_j \leftarrow 1$ et si $x_j = 0$, alors $v_j \leftarrow 0$. À l'aide des résultats obtenus, nous calculons ensuite l'objectif du mineur et nous gardons les vecteurs T , v et x donnant le meilleur profit.

Puis, nous calculons la direction : $d^j \leftarrow g(u^j)$ où $g(u^j) \leftarrow v_a(u^j) - x_a^k(u^j)$. Nous aurions pu aussi choisir la direction suivante : $d^j \leftarrow g(u^j) + \theta^j d^{j-1}$, où $g(u^j) \leftarrow v_a(u^j) - x_a^k(u^j)$ et où θ^j est déterminé par la règle de Camerimi-Fratta-Maffioli et la règle de l'auto-ajustement. Enfin, nous déterminons :

$$u^{j+1} \leftarrow \max\{0, u^j - \gamma^j d^j\},$$

où $\gamma^j \leftarrow \alpha^i(Z_{inf} - z(u^j))/g^i d^i$ et nous vérifions le critère d'arrêt.

4.4.2 Résolution du sous-problème lagrangien pour u fixé

Voyons maintenant la méthode utilisée pour résoudre le problème $SPL(u)$ pour un vecteur de multiplicateurs u fixé. Comme dans la section 4.3.3, le problème $SPL(u)$ est séparable en deux sous-problèmes :

$$\begin{aligned} SP(u) \quad & \max_{T,v} \sum_{a \in \mathcal{A}_1} \sum_{k \in \mathcal{K}} (u_a^k - f_a) v_a \\ \text{s.c.} \quad & v_a \in \{0, 1\} \quad \forall a \in \mathcal{A}_1, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} SP(u, v) \quad & \max_{T,v} \sum_{a \in \mathcal{A}_1} \sum_{k \in \mathcal{K}} (n^k (T_a - c_a) - u_a^k) x_a^k + \sum_{a \in \mathcal{A}_1} \sum_{k \in \mathcal{K}} (u_a^k - f_a) v_a \\ & \min_{x,y} \sum_{k \in \mathcal{K}} n^k \left(\sum_{a \in \mathcal{A}_1} T_a x_a^k + \sum_{a \in \mathcal{A}_2} d_a y_a^k \right) \quad (4.10) \\ \text{s.c.} \quad & Ax^k + By^k = e^k \quad \forall k \in \mathcal{K}, \\ & x^k, y^k \geq 0 \quad \forall k \in \mathcal{K}. \end{aligned}$$

Pour résoudre le premier problème $SP(u)$, il suffit d'évaluer $\sum_{k \in \mathcal{K}} u_a^k - f_a$. Si cette somme est supérieure ou égale à 0, alors $v_a = 1$ (l'arc a est ouvert), sinon $v_a = 0$ (l'arc a est fermé).

Une fois le vecteur v fixé, nous devons résoudre le second problème $SP(u, v)$. D'abord, nous remplaçons le problème de second niveau par ses conditions d'optimalité. Nous obtenons le modèle suivant où λ^k représente le vecteur de variables duales associées aux contraintes de conservation de flot du problème $SP(u, v)$ (4.10) pour chaque produit k :

$$\begin{aligned}
(SP(u, v)) \quad & \max_T \sum_{a \in \mathcal{A}_1} \sum_{k \in \mathcal{K}} (n^k(T_a - c_a) - u_a^k)x_a^k + \sum_{a \in \mathcal{A}_1} \sum_{k \in \mathcal{K}} (u_a^k - f_a)v_a \\
\text{s.c.} \quad & Ax^k + By^k = e^k && \forall k \in \mathcal{K}, \\
& x^k, y^k \geq 0 && \forall k \in \mathcal{K}, \\
& \lambda^k A \leq T && \forall k \in \mathcal{K}, \\
& \lambda^k B \leq d && \forall k \in \mathcal{K}, \\
& n^k(Tx^k + dy^k - \lambda^k e^k) = 0 && \forall k \in \mathcal{K}. \tag{4.11}
\end{aligned}$$

Les contraintes de ce problème sont linéaires, à l'exception de la contrainte d'égalité des objectifs (4.11). Pour les variables x^k, y^k (resp. λ^k) primales (resp. duales) admissibles pour tous les produits $k \in \mathcal{K}$, le terme de gauche de ces contraintes est toujours non négatif. Elles peuvent être transformées en une seule contrainte en considérant leur somme. En pénalisant la contrainte résultante, le problème $SP(u, v)$ devient :

$$\begin{aligned}
(PEN(u, v)) \quad & \max_{T, x, y, \lambda} \sum_{a \in \mathcal{A}_1} \sum_{k \in \mathcal{K}} (n^k(T_a - c_a) - u_a^k)x_a^k + \sum_{a \in \mathcal{A}_1} \sum_{k \in \mathcal{K}} (u_a^k - f_a)v_a \\
& - M_1 \sum_{k \in \mathcal{K}} n^k \left(\sum_{a \in \mathcal{A}_1} T_a x_a^k + \sum_{a \in \mathcal{A}_2} d_a y_a^k - \lambda^k e^k \right) \\
\text{s.c.} \quad & Ax^k + By^k = e^k && \forall k \in \mathcal{K}, \\
& x^k, y^k \geq 0 && \forall k \in \mathcal{K}, \\
& \lambda^k A \leq T && \forall k \in \mathcal{K}, \\
& \lambda^k B \leq d && \forall k \in \mathcal{K}, \tag{4.12}
\end{aligned}$$

où M_1 est un scalaire positif.

Pour résoudre ce problème, nous pouvons appliquer une heuristique primale-duale telle que décrite à la section 4.3.3.

Lors de l'initialisation de l'heuristique (pas 0), les tarifs des arcs tarifables sont fixés à 0 et tous les arcs sont ouverts. À partir de ces données, nous pouvons trouver les variables de flot x, y par la résolution d'un problème de plus courts chemins.

Au pas 1, les vecteurs T, v et λ sont solutions du problème suivant pour x^k fixé $\forall k \in \mathcal{K}$:

$$\begin{aligned}
 (PEN(u, v, x, y)) \quad & \max_{T, \lambda} \sum_{a \in \mathcal{A}_1} \left(\sum_{k \in \mathcal{K}} (1 - M_1) n^k x_a^k \right) T_a + M_1 \sum_{k \in \mathcal{K}} n^k \lambda^k e^k \\
 & + \sum_{a \in \mathcal{A}_1} \sum_{k \in \mathcal{K}} (u_a^k - f_a) v_a \\
 \text{s.c.} \quad & \lambda^k A \leq T \quad \forall k \in \mathcal{K}, \\
 & \lambda^k B \leq d \quad \forall k \in \mathcal{K}.
 \end{aligned}$$

Ce problème est un problème linéaire que nous résolvons à l'aide du logiciel CPLEX [17]. La résolution de ce problème pourrait également se faire à l'aide d'un algorithme de plus courts chemins.

Au pas 2, nous résolvons le problème suivant pour T fixé :

$$\begin{aligned}
 (PEN(u, v, T)) \quad & \max_{x, y, \lambda} \sum_{a \in \mathcal{A}_1} \sum_{k \in \mathcal{K}} ((1 - M_1) n^k T_a - u_a^k - n^k c_a) x_a^k \\
 & - \sum_{a \in \mathcal{A}_2} \sum_{k \in \mathcal{K}} M_1 n^k d_a y_a^k + M_1 \sum_{k \in \mathcal{K}} n^k \lambda^k e^k \\
 \text{s.c.} \quad & Ax^k + By^k = e^k \quad \forall k \in \mathcal{K}, \\
 & x^k, y^k \geq 0 \quad \forall k \in \mathcal{K}, \\
 & \lambda^k A \leq T \quad \forall k \in \mathcal{K}, \\
 & \lambda^k B \leq d \quad \forall k \in \mathcal{K}.
 \end{aligned}$$

Ce problème est séparable en un sous-problème de plus courts chemins en x et y et en un sous-problème linéaire en λ :

$$\begin{aligned}
 (PEN1(u, v, T)) \quad & \max_{x, y} \sum_{a \in \mathcal{A}_1} \sum_{k \in \mathcal{K}} ((1 - M_1) n^k T_a - u_a^k - n^k c_a) x_a^k \\
 & - \sum_{a \in \mathcal{A}_2} \sum_{k \in \mathcal{K}} M_1 n^k d_a y_a^k \\
 \text{s.c.} \quad & Ax^k + By^k = e^k \quad \forall k \in \mathcal{K}, \\
 & x^k, y^k \geq 0 \quad \forall k \in \mathcal{K}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (PEN2(u, v, T)) \quad & \max_{\lambda} \sum_{k \in \mathcal{K}} M_1 n^k \lambda^k e^k \\
 \text{s.c.} \quad & \lambda^k A \leq T \quad \forall k \in \mathcal{K}, \\
 & \lambda^k B \leq d \quad \forall k \in \mathcal{K}.
 \end{aligned}$$

À chaque nouvelle solution en x, y , nous déterminons les tarifs optimaux du problème. Pour cela, nous résolvons le problème suivant :

$$\begin{aligned}
 (T_{opt}) \quad & \max_{T, \lambda} \sum_{a \in \mathcal{A}_1} \sum_{k \in \mathcal{K}} n^k T_a x_a^k \\
 \text{s.c.} \quad & \lambda^k A \leq T \quad \forall k \in \mathcal{K}, \\
 & \lambda^k B \leq d \quad \forall k \in \mathcal{K}, \\
 & n^k (T x^k + d y^k - \lambda^k e^k) = 0 \quad \forall k \in \mathcal{K}.
 \end{aligned}$$

La résolution de ce problème permet de trouver un ensemble de tarifs admissibles pour le problème *PTCR* pour un ensemble de flux fixés sur les arcs donnés.

Chapitre 5

Implantation et résultats numériques

Ce chapitre est consacré à l'implantation et l'analyse des résultats numériques obtenus par la méthode de résolution approchée (voir section 3.1) pour résoudre le problème de tarification et de conception de réseau en utilisant la méthode décrite au chapitre précédent. Nous comparons les résultats obtenus par cette méthode à ceux obtenus par la résolution exacte de la formulation linéaire mixte du problème (voir section 3.3). Dans un premier temps, nous décrivons la structure des problèmes tests utilisés. Puis, nous ajustons les paramètres de notre heuristique. Finalement, nous analysons les résultats numériques obtenus.

5.1 Description générale des problèmes tests

Tous les problèmes analysés ont la même structure. Les tests numériques ont été réalisés sur des réseaux sous forme de grille. Ce type de réseau a été choisi, car il permet de contrôler le nombre d'arcs appartenant aux «chemins» reliant les origines aux destinations des communications. Nous considérons des grilles

composées de 60 sommets et de 208 arcs telles que chaque paire de sommets adjacents soit reliée par des arcs à double sens. Les coûts des arcs pour le suiveur sont générés aléatoirement entre 2 et 20.

Nous étudions des réseaux symétriques et des réseaux asymétriques. Pour les premiers, les coûts des arcs opposés sont égaux, ce qui n'est pas le cas pour les seconds. Nous prenons en considération d'abord dix produits, puis vingt.

Sur ces réseaux, nous définissons certains arcs comme tarifables. Cette sélection ne se fait pas au hasard mais par la méthode suivante implantée en C++. D'abord, un arc est choisi comme tarifable seulement s'il existe un «chemin» reliant chaque origine $o(k)$ à chaque destination $d(k)$ pour chaque produit n'utilisant pas cet arc ni aucun autre arc déjà sélectionné comme étant tarifable. Pour identifier les arcs susceptibles d'être utilisés par le suiveur, nous déterminons préalablement les plus courts chemins pour chaque produit. Enfin, nous calculons la fréquence d'occurrences des arcs dans ces chemins et nous choisissons les arcs tarifables parmi les arcs ayant les plus grandes fréquences. Afin de rendre ces arcs attractifs, le coût initial de chaque arc choisi comme tarifable est diminué de moitié. Nous considérons des problèmes contenant respectivement 5 %, 10 %, 15 % et 20 % d'arcs tarifables.

Les coûts d'acheminement des communications pour le meneur sont générés aléatoirement entre 2 et 20. Nous étudions le comportement de l'heuristique pour des valeurs de coûts fixes d'arcs plus ou moins élevées par rapport aux coût d'acheminement (coût fixe = 0, 3, 30, 60, 90 et 300 fois le coût d'acheminement). En choisissant des coûts d'ouverture nuls, nous sommes amenés à résoudre un problème de tarification simple, c'est-à-dire sans conception de réseau. Plus la valeur des coûts d'ouverture est élevée, plus les décisions de conception du problème de réseau sont cruciales.

5.2 Ajustement des paramètres

L'heuristique a été implantée en C et les tests ont été réalisés sur une station Entreprise 10 000 (400 Mhz). De plus, le problème linéaire de l'étape 1 de l'itération mineure ainsi que le problème de détermination des tarifs optimaux ont été résolus à l'aide du logiciel CPLEX 6.6.0 [17]. Le facteur de pénalité M_1 du saut de dualité est initialisé à 1,3 et est incrémenté de 0,5 unité lors de chaque itération primale-duale.

Il convient maintenant de préciser la valeur des paramètres intervenant dans l'heuristique proposée. Afin d'ajuster les paramètres, nous choisissons d'utiliser des coûts d'ouverture modérés de 30 fois le coût d'acheminement. Les coûts d'ouverture varient donc de 60 à 600. Pour l'ajustement, nous n'utiliserons que des instances comportant 10 produits et ayant 10 % ou 15 % d'arcs tarifables. Nous testons l'algorithme avec $\theta = 0$, ce qui revient à utiliser la méthode du sous-gradient simple. Pour pouvoir utiliser cette méthode, nous devons d'abord choisir deux paramètres, soit les multiplicateurs u_a^0 de départ et le pas pour la relaxation lagrangienne. Pour commencer, nous ne résolvons qu'une itération de l'algorithme primal-dual (itération mineure) et nous effectuons 300 itérations principales. Par la suite, nous déterminons le nombre d'itérations primale-duale à effectuer ainsi que la constante de modification des tarifs. Finalement, nous ajustons le critère d'arrêt.

Deux situations de départ s'offrent à nous : soit que tous les arcs du réseau sont fermés, soit qu'ils sont tous ouverts. Pour qu'un arc a soit ouvert, il faut que la somme

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} u_a^k - f_a$$

soit supérieure ou égale à zéro. Nous savons que la valeur f_a se situe entre 60 à 600 pour tous les arcs a . Si tous les u_a^k sont inférieurs à 60, tous les arcs se-

ront fermés puisque la somme (5.1) sera inférieure à zéro dans tous les cas. De même, si nous choisissons tous les u_a^k supérieurs à 600 alors tous les arcs seront ouverts. Or, si tous les arcs sont fermés et que nous prenons des multiplicateurs u_a^0 très petits, nous devons attendre plusieurs itérations avant de voir l'ouverture d'un arc (voir au tableau A.1). De même, si nous prenons des multiplicateurs u_a^0 trop élevés beaucoup d'itérations sont requises avant qu'un arc ne se ferme. Nous avons effectué cette expérience en prenant comme valeur de départ $1000/k$ pour le vecteur de multiplicateurs de Lagrange associé à chacun des arcs (tableau A.2). Afin d'obtenir le plus rapidement possible le bon design de réseau, il est préférable de considérer des multiplicateurs u_a^0 critiques, c'est-à-dire des multiplicateurs u_a^0 permettant d'ouvrir ou de fermer de justesse les arcs s'il y a lieu de l'être. L'avantage de ce choix est que l'état d'un arc sera rapidement corrigé, s'il y a lieu. Pour réaliser cette situation initiale, il suffit de prendre, comme valeur de départ pour les vecteurs de multiplicateurs, le coût d'ouverture sur le nombre de produits plus une petite valeur ϵ . Autrement dit, à l'itération 0, nous avons

$$u_a^{0,k} = f_a/k + \epsilon \quad \forall a \quad \forall k.$$

Pour fermer les arcs, nous choisissons $\epsilon \leq 0$ alors que, pour les ouvrir, notre choix se porte sur un $\epsilon \geq 0$. Les tests sont réalisés en considérant $\epsilon = -0,01$ et $\epsilon = +0,01$ (voir tableaux A.3 et A.4). Dans l'ensemble des problèmes testés, nous remarquons qu'ouvrir ou fermer de justesse les arcs sont deux bons choix. Pour poursuivre l'ajustement, nous avons choisi $u_a^{0,k} = f_a/k + 0,01$.

Ensuite, nous déterminons l'ordre de grandeur du pas (γ) à effectuer le long de la direction de sous-gradient lors de la résolution du dual lagrangien. Nous testons des pas constants de 1, 5, 10, 15 et 20 (voir tableaux A.5 - A.9). Pour un très petit pas constant (tel que $\gamma = 1$) après 300 itérations principales, nous ne sommes pas arrivés à fermer assez d'arcs pour générer suffisamment de profit par rapport aux coûts d'ouverture et aux coûts d'écoulement. Il y a même un problème pour lequel nous ne réussissons pas à trouver une réponse positive. Cela est dû au fait que

nous ne sommes pas arrivés à fermer tous les arcs ce qui aurait donné un profit nul. Avec un pas de 5, la situation s'améliore et le nombre d'itérations nécessaires pour trouver la meilleure solution a beaucoup diminué. Avec cet ajustement, nous trouvons une solution générant du profit pour tous les problèmes. Un pas de 5 est suffisamment grand pour que l'ouverture ou la fermeture des arcs s'effectue (s'il y a lieu) lors des 300 premières itérations. Avec un pas plus grand, soit un pas de 10, de 15 ou de 20, nous obtenons de moins bons résultats pour certains problèmes. Nous faisons des pas trop grands et nous ne trouvons pas la solution optimale. Nous continuons donc notre analyse avec un pas constant de 5 le long de la direction du sous-gradient.

Après avoir déterminé la solution initiale et la longueur du pas de l'approche lagrangienne, nous devons fixer le nombre d'itérations (m) à effectuer pour l'heuristique primale-duale. Jusqu'à présent, nous évaluons notre algorithme avec seulement une itération primale-duale. Nous n'utilisons pas toute la puissance de notre algorithme puisque le sous-problème lagrangien n'était résolu que de façon très grossière. Pour améliorer cette situation, nous considérons des tests avec 1, 5, 10, 15 et 20 itérations de la boucle interne de notre heuristique pour résoudre le sous-problème lagrangien (voir tableaux A.10 - A.14). Avec 5 itérations, il y a peu de différences en comparaison avec les résultats obtenus au moyen d'une seule itération. Par contre, avec 10 itérations, les résultats s'améliorent. Nous notons que les dernières itérations internes nous ont permis d'améliorer les solutions obtenues. Avec 15 itérations, nous obtenons une erreur maximale de 15 % pour les problèmes testés. Avec 20 itérations, nous obtenons encore une légère amélioration. Notons que, pour de plus grandes valeurs de m , les améliorations sont négligeables pour des temps de calcul beaucoup plus élevés. Nous optons donc pour 20 boucles internes pour résoudre le sous-problème lagrangien ce qui constitue un compromis entre efficacité et rapidité de l'algorithme.

Dans la méthode primale-duale de résolution du sous-problème de Lagrange,

nous modifions les tarifs obtenus par la résolution de $PEN(u, v)$ de l'heuristique primale-duale afin de visiter plus de solutions du suiveur intéressantes pour le meneur. Cette modification consiste à considérer une combinaison convexe des nouveaux tarifs et ceux de l'itération précédente. Nous ajustons le paramètre ρ compris entre 0 et 1 de telle sorte que

$$\text{tarif}^{r+1} \leftarrow \rho \times \text{tarif}^r + (1 - \rho) \times \text{tarif}^{r-1}.$$

Nous ajustons ce paramètre en testant des valeurs ρ de 0,10 à 1,00 (voir tableaux A.15 - A.19). En observant les résultats, $\rho = 0,10$, $\rho = 0,30$ et $\rho = 0,50$ sont des bons choix. Nous choisissons 0,50 pour poursuivre notre analyse.

Finalement, il nous reste à fixer le critère d'arrêt de l'algorithme. Jusqu'à présent, nous avons fixé un nombre d'itérations à effectuer, soit 300 pour la méthode du sous-gradient simple. Un critère mieux approprié consiste à arrêter l'algorithme après un certain nombre δ d'itérations où il n'y a pas eu de changement de solution pour le suiveur. Pour ajuster ce paramètre, nous testons des valeurs δ de 5 à 30 (voir tableaux A.20 - A.25). Avec un δ de 5, l'algorithme s'arrête beaucoup trop tôt et nous n'obtenons pas de bons résultats. Si nous augmentons δ , les solutions s'améliorent. C'est avec un δ de 25 que l'on obtient les meilleurs résultats. Le fait d'augmenter δ au-delà de 25 n'apporte pas d'amélioration. Nous optons donc pour $\delta = 25$.

5.3 Analyse des résultats

Commentons, maintenant, les résultats obtenus pour des instances comprenant 10 produits et 5 %, 10 %, 15% et 20 % d'arcs tarifables (voir tableaux A.26 et A.27) ou 20 produits et 5 %, 10 %, 15% et 20 % d'arcs tarifables (voir tableaux A.28 et A.29). Rappelons que ces résultats ont été calculés pour des instances avec des coûts modérés d'ouverture des arcs tarifables ($f_a = 30 \times c_a$). La sensibilité

des résultats par rapport à cette valeur sera discutée par la suite.

Premièrement, nous constatons que notre heuristique nous permet d'obtenir des solutions de qualité pour l'ensemble des problèmes générés. Les temps de calcul pour la résolution des problèmes sont assez bas, environ une minute pour la plupart des problèmes. Les solutions sont, le plus souvent, obtenues lors des 50 premières itérations majeures. Remarquons également que les 20 itérations mineures ont été requises dans certains cas afin de trouver la meilleure solution. Pour tous les problèmes tests de 10 produits, nous avons obtenu une résolution exacte par CPLEX. Toutefois, nous observons des sauts de dualité importants (jusqu'à 110,16 %) pour certains problèmes. Nous remarquons que CPLEX s'est révélé assez rapide pour solutionner des problèmes ayant entre 5 % et 15 % d'arcs tarifables. Par contre, pour les cas de 20 % d'arcs tarifables, nous notons un comportement instable. En augmentant le pourcentage d'arcs tarifables, nous complexifions le problème. Très souvent, plus ce pourcentage augmente, plus le temps de résolution augmente.

Les solutions obtenues à l'aide de l'heuristique sur les réseaux comprenant 20 produits (voir tableaux A.28 et A.29) sont de qualité similaire à celles obtenues pour des réseaux de 10 produits. Le nombre moyen d'itérations requises afin d'obtenir la meilleure solution est demeuré semblable. Même si les temps de calcul sont plus élevés, ils sont encore modérés. Cette constatation est importante puisqu'en télécommunication les instances de problèmes contiennent un nombre important de produits. Pour les tests comportant 20 produits et un pourcentage élevé d'arcs tarifables, la résolution exacte n'est plus toujours possible. Afin d'obtenir une approximation de la solution optimale pour ces instances, nous avons dû arrêter CPLEX après un certain laps de temps. Aussi, nous remarquons que, même pour des réseaux avec 5 % d'arcs tarifables, les temps de calcul de CPLEX peuvent être très élevés (autour de 1000 secondes). En comparant les instances ayant des structures de coûts asymétriques (A.28) avec celles ayant des

coûts symétriques (A.29), nous nous rendons compte que les premières semblent plus faciles à résoudre. Pour confirmer cette observation, il nous faudrait faire davantage de tests.

Analysons maintenant la sensibilité de notre heuristique face à des coûts plus faibles ou plus élevés. Observons le comportement de l'heuristique pour les problèmes de 10 produits. Six valeurs de coûts d'ouverture d'arcs sont choisies (voir tableaux A.30 - A.35). D'abord, nous fixons les coûts d'ouverture à 0. Il s'agit de résoudre un problème de tarification simple. Ensuite, nous posons des valeurs de coûts d'ouverture faibles par rapport à la demande et aux coûts d'écoulement des arcs ($f_a = 3 \times c_a$). Puis, nous utilisons des coûts d'ouverture modérés ($f_a = 30 \times c_a$), élevés ($f_a = 60 \times c_a$, $f_a = 90 \times c_a$) et très élevés ($f_a = 300 \times c_a$). Plus la valeur des coûts d'ouverture est élevée, plus les décisions du meneur par rapport à la conception du réseau sont importantes. Nous constatons que le nombre d'arcs tarifés utilisés dans la solution décroît lorsque les valeurs de coûts d'ouverture augmentent. Pour des coûts d'ouverture plus élevés, nous observons que, pour certaines instances, aucun arc tarifable n'est utilisé. Ainsi, pour des coûts d'ouverture $f_a = 90 \times c_a$, presque tous les arcs tarifables sont fermés dans la solution optimale. Cette situation s'explique par le fait qu'aucun tarif suffisamment grand ne peut être fixé pour compenser les frais d'ouverture. Pour des coûts d'ouverture faibles, très peu d'itérations majeures sont nécessaires pour obtenir la meilleure solution. En termes de qualité de solution, le comportement de l'heuristique est relativement stable pour les différentes valeurs de coûts d'ouverture considérées. Nous avons pratiquement toujours des solutions optimales ou près de l'optimum.

Nous remarquons des instances pour lesquelles notre heuristique nous a fourni de moins bonnes solutions (tableau A.48). Toutefois, en augmentant le pas de 5 unités ($\gamma = 10$), ces problèmes sont résolus à l'optimum. Le fait d'avoir relâché la contrainte de charge rend notre heuristique un peu aveugle pour ce qui est des

arcs ouverts ou fermés lors de la résolution du problème de plus courts chemins ($PEN1(u, v, T)$). Le choix des multiplicateurs de départ (u_a^0) et du pas (γ) doivent donc être judicieux pour que le terme en u_a^j ait assez d'influence pour amener l'heuristique à prendre les bonnes décisions lors de la résolution du problème de plus courts chemins. Sinon, lors de la correction d'ouverture des arcs, si un flot passe par cet arc, nous l'ouvrons sans aucun regard au coût d'investissement de cet arc. Augmenter le pas est une façon d'arriver à un bon choix de u_a^j pour ces problèmes. Notons que, plus les coûts fixes sont élevés, plus CPLEX a de la facilité à résoudre les problèmes.

L'heuristique se comporte essentiellement de la même façon pour les réseaux comprenant 20 produits (voir tableaux A.36 - A.47). Cependant, ce n'est que pour des coûts d'ouverture $f_a = 300 \times c_a$, que presque tous les arcs tarifables sont fermés dans la solution optimale. Avec 20 produits et des coûts d'ouverture faibles et modérés, CPLEX éprouve beaucoup plus de difficultés à résoudre certaines instances et pour d'autres, il ne parvient pas à trouver de solution. Pour l'heuristique, nous obtenons encore des temps de résolution modérés quoique plus élevés. Les réseaux asymétriques semblent encore une fois plus faciles à résoudre que les réseaux symétriques. La qualité des solutions obtenues pour des coûts d'ouverture faibles est excellente. Lorsque les coûts d'ouverture augmentent, la qualité est un peu moins bonne que lorsque nous n'avons que 10 produits. Nous avons souvent des solutions optimales ou près de l'optimum. Toutefois, pour trois problèmes nous avons obtenu des solutions négatives (tableau A.49). En augmentant le pas ($\gamma = 10$), nous avons obtenu l'optimum pour ces trois problèmes. Il y aurait lieu de faire d'autres tests afin de vérifier si lorsque nous augmentons les coûts d'ouverture ainsi que le nombre de produits, nous devrions modifier le choix de nos paramètres.

Chapitre 6

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié un problème conjoint de tarification et de conception de réseau. Nous avons considéré la situation où un opérateur maximise son profit en tenant compte de la réaction de ses clients qui minimisent leurs coûts d'écoulement. Pour atteindre son but, cet opérateur doit prendre des décisions de conception de réseau et déterminer des tarifs. Le problème a été formulé sous la forme d'un problème biniveau bilinéaire-bilinéaire avec variables binaires de façon à intégrer l'interaction hiérarchique existant entre les agents de décision (opérateur, clients).

Nous avons développé une approche de résolution pour résoudre ce type de problème. Notre heuristique est basée sur la méthode de relaxation lagrangienne où nous avons relâché les contraintes de charge. Ensuite, nous avons transformé la formulation biniveau du sous-problème lagrangien sous forme d'un problème d'un seul niveau bilinéaire équivalent. Puis, le problème lagrangien est résolu par une méthode primale-duale et le dual lagrangien est résolu par une méthode de sous-gradient.

Afin de juger l'efficacité de notre heuristique, nous avons procédé à des tests sur des réseaux sous forme de grille générés aléatoirement. Nous avons comparé les résultats de notre heuristique aux résultats obtenus par la résolution exacte d'une formulation linéaire mixte équivalente du problème PTCR par un code commercial (CPLEX). La très bonne qualité des solutions obtenues en un temps de calcul modéré pour des problèmes où la résolution exacte s'avérait très difficile à l'aide du logiciel CPLEX, nous démontre l'efficacité de notre heuristique.

Parmi les extensions possibles de ce travail, il y aurait la possibilité de tester notre heuristique en prenant une combinaison de sous-gradients ($0 \leq \theta \leq 1$). La modélisation biniveau bilinéaire-bilinéaire considérée pour le problème de tarification et de conception de réseau pourrait être raffinée afin de refléter davantage la réalité. Le fait de considérer des problèmes réels de tarification et de conception de réseau confirmerait l'efficacité de l'heuristique présentée. L'ajout, à notre modèle, de contraintes de capacité sur les connexions en charge du meneur, serait une autre extension possible à ce mémoire.

Suite à la récente déréglementation et à l'engouement sans cesse grandissant pour le domaine des télécommunications, il va de soi que le problème de tarification et de conception de réseau demeurera sans doute, au cours des prochaines années, un sujet de recherche très présent. L'étude du problème de tarification et de conception de réseau étudié conjointement en est à ses débuts; d'autres approches de résolution seront également développées et son application s'étendra sûrement à de nombreux autres domaines. Nous espérons que ce mémoire contribuera un tant soit peu à ce développement.

Bibliographie

- [1] BALAKRISHNAN A., MAGNANTI T.L. et WONG R.T., A dual ascent procedure for large-scale uncapacitated network conception, *Operations Research*, **37**, pp. 716-740, 1989.
- [2] BARD J.F., Optimality conditions for the bilevel programming problem, *Naval Research Logistics Quartely*, **31**, pp. 13-26, 1984.
- [3] BARD J.F., An investigation of the linear three-level programming problem, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, **14**, pp. 711-717, 1984.
- [4] BARD J.F. et FALK J.E., An explicit solution in the multi-level programming problem, *Computers and Operations Research*, **9**, pp. 77-100, 1982.
- [5] BARD J.F. et MOORE J.T., A branch and bound algorithm for the bilevel programming problem, *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, **11**, pp. 281-292, 1990.
- [6] BELLMAN R.E., On a routing problem, *Quarterly Applied Mathematics*, **16**, pp. 87-90, 1958.
- [7] BENCHEICK A., Conception et tarification d'un réseau privé multidébit à large bande dans un environnement concurrentiel, *Thèse de Doctorat 1997*,

Institut National de Recherche Scientifique (INRS)-Télécommunication,
255 p., 1997.

- [8] BIALAS W. et KARWAN M., On two-level optimization, *IEEE-Transactions on Automatic Control*, **27**, pp. 211-214, 1982.
- [9] BROTCORNE L., Approches opérationnelles et stratégiques des problèmes de trafic routier, thèse de doctorat, Université Libre de Bruxelles , Février 1998.
- [10] BROTCORNE L., LABBÉ M., MARCOTTE P. et SAVARD G., A bilevel model and solution algorithm for a freight tariff-setting problem, *Transportation Science*, **34**, pp. 289-302, 2000.
- [11] BROTCORNE L., LABBÉ M., MARCOTTE P. et SAVARD G., A bilevel model for toll optimization on a multicommodity transportation network, *Transportation Science*, **35**, pp. 1-14, 2001.
- [12] CALAMAI P.H. et VICENTE L.N., Bilevel and multilevel programming : a bibliography review, *Journal of Global Optimization*, **5**, pp. 291-306, 1994.
- [13] CANDLER W. et TOWSLEY R., A linear two-level programming problem, *Computers and Operations Research*, **9**, pp. 59-76, 1982.
- [14] CAMERINI P.M., FRATTA L. et MAFFIOLI F., On improving relaxation methods by modified gradient techniques, *Mathematical Programming Study*, **3**, pp. 26-34, 1975.
- [15] CHEN Y. et FLORIAN M., The nonlinear bilevel programming problem : Formulations, regularity and optimality conditions, *Optimization*, **32**, pp. 193-209, 1995.
- [16] COCCHI R. et AL., Pricing in computer networks : motivation, formulation, and example, *IEEE/ACM Transactions on Networking*, **1**(6), pp. 614-627, 1993.
- [17] CPLEX Optimisation inc., Using the CPLEX callable library and CPLEX mixed integer library, 1993.

- [18] CROWDER H., Computational improvements for subgradient optimization, *Symposia Mathematica, vol XIX*, Academic Press, London, pp. 357-372, 1976.
- [19] FAUSTINO A.M. et JÚDICE J.J., A sequential LCP method for bilevel linear programming, *Annals of Operations research*, **34**, pp. 89-106, 1992.
- [20] FORD L.R., *Network flow theory*, Rand Corporation, 1956.
- [21] FORTUNY J. et MCCARL B.A., A representation and economic interpretation of a two-level programming Problem, *Journal of Operation Research Society*, **32**, pp. 59-76, 1982.
- [22] GAUVIN J. et SAVARD G., The steepest descent direction for the nonlinear bilevel programming problem, *Operations Research Letters*, **15**, pp. 275-282, 1994.
- [23] GAVISH B., Topological design of telecommunication networks - Local access design methods, *Annals of Operations research*, **33**, pp. 17-71, 1991.
- [24] GIRARD A., Revenue optimization of telecommunication networks, *IEEE Transactions on Communications*, **41**, pp. 583-591, 1993.
- [25] GIRARD A. et ZIDANE R., Revenue optimization of B-ISDN networks, *IEEE Transactions on Communications*, **43**, pp. 15-25, 1995.
- [26] JULSAIN, H. Tarification dans les réseaux de télécommunications une approche par programmation mathématique à deux niveaux, mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, 1999.
- [27] HANSEN P., JAUMARD B. et SAVARD G., New branch-and-bound rules for linear bilevel programming, *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, **13**, pp. 1194-1217, 1992.
- [28] HOLMBERG K. et HELLSTRAND J., Solving the uncapacited network design problem by a Lagrange heuristic and branch-and-bound, *Operations Research*, **46**, pp. 247-259, 1998.

- [29] HOLMBERG K, JÖRNSTEN K. et MIGDALAS A., Decomposition methods applied to discrete network design. Working Paper LiTH-MAT/OPT-WP-1986-07, Optimisation, Departement of mathematics, Linköping Institute of technology, Sweden, 1986.
- [30] KELLY F., SOLOMON J. et WALKER D., Tariffing in the new IP/ATM environment, *Telecommunications Policy*, **21**, pp. 283-295, 1997.
- [31] KOLSTAD C. et LASDON L., Derivative evaluation and computational experience with large bilevel mathematical programs, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **65**, pp. 485-499, 1990.
- [32] LABBÉ M., MARCOTTE P. et SAVARD G., A bilevel model of taxation and its application to optimal highway pricing, *Management Science*, **44**, pp. 1595-1607, 1998.
- [33] LEDERER P. J., A competitive network design problem with pricing, *Transportation Science*, **27**, pp. 25-38, 1993.
- [34] LUO Z.-Q., PANG J.-S. et RALPH D., Mathematical programs with equilibrium constraints, Cambridge University Press, 1996.
- [35] MAGNANTI T.L., MIREAULT P. et WONG R.T., Tailoring benders decomposition for uncapacitated network design, *Mathematical Programming Study*, **26**, pp. 112-154, 1986.
- [36] MARCOTTE P. et ZHU D., Equilibria with infinitely many differentiated classes of customers, *Complementarity and variational problems, proceedings of the international conference on complementarity problems*, Ferris M. et Pang J-S éditeurs, SIAM, pp. 234-258, 1997.
- [37] MENDELSON H. et WANG S., Optimal incentive-compatible priority pricing for the M/M/1 queue, *Operations Research*, **48**, pp. 870-883, 1990.
- [38] MIGDALAS A., Mathematical programming techniques for analysis and design of communication and transportation networks, PhD thesis, Departement of Mathematics, Linköping University, Sweden, 1988.

- [39] MINOUX M., Network synthesis and optimum network design problems : Models, solution methods and applications, *Networks*, **19**, pp. 313-360, 1989.
- [40] ÖNAL H., A modified simplex approach for solving bilevel linear programming problem, *European Journal of Operational Research*, **67**, pp. 126-135, 1993.
- [41] SAVARD G., Contribution à la programmation mathématique à deux niveaux, *Thèse de Doctorat 1988, École Polytechnique de Montréal*, 127p., 1988.
- [42] VICENTE L., SAVARD G. et JÚDICE J., Descent approaches for quadratic bilevel programming, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **81**, pp. 379-399, 1994.
- [43] WANG Q., PEHA J.M., SIRBU M.A., The design of an optimal pricing scheme for ATM integrated-services networks, *Journal of Electronic Publishing, Special Issue on Internet Economics*, University of Michigan Press, May, 1996.

Annexe A

Résultats numériques

La présentation des résultats se fera à partir de tableaux. La première colonne indique le pourcentage d'arcs tarifables (nb d'arcs taxés).

Les quatre colonnes suivantes se rapportent à la résolution exacte à l'aide du logiciel CPLEX. Nous y retrouvons la valeur de la relaxation au noeud 0 (relaxation), le saut de dualité (saut de dualité), le temps de résolution (temps) et le nombre d'arcs tarifables utilisés (nb d'arcs taxés utilisés).

Les informations relatives à notre heuristique sont dans les cinq colonnes suivantes : le temps de résolution (temps), le nombre de solutions x , y visitées (nb de solutions visitées), le nombre d'arcs tarifables utilisés (nb d'arcs taxés utilisés), le numéro de l'itération majeure (no de l'itération majeure) et le numéro de l'itération mineure (no de l'itération mineure) auxquelles la meilleure solution a été trouvée.

Finalement, à la dernière colonne, nous retrouvons la qualité de la solution c'est-à-dire le rapport entre la solution calculée par l'heuristique et la solution

optimale obtenue par la méthode exacte (qualités de la solution).

Le saut de dualité ainsi que la qualité des solutions sont donnés en pourcentage. Toutefois, pour quelques cas, nous avons obtenus des résultats négatifs. Nous avons alors gardé les valeurs des sauts en valeurs absolues. Nous avons indiqués ces cas en notant les valeurs des sauts entre parenthèses.

De plus, pour chaque groupe d'instance (5 %, 10 %, 15 % et 20 % d'arcs tarifables), nous avons calculé les moyennes.

Nous n'avons pu obtenir systématiquement des solutions par la résolution exacte. Pour remédier à ce problème, nous avons arrêté CPLEX après un certain temps ou un certain nombre de noeuds. Pour les instances où nous avons arrêté CPLEX, nous avons fixé la limite de temps à 8 heures et le nombre maximum de noeuds a été fixé à 800 000. Ces instances ont été placées dans un second tableau qui sera identifié à cet effet.

nb d'arcs taxés	Cplex				Algorithme				qualité de la solution
	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	
21	383,03	32,54	40	5	25	51	7	66	0,94
	275,42	43,45	38	10	21	29	8	90	0,81
	219,97	8,90	11	4	22	26	6	70	0,80
	288,87	43,71	17	3	22	45	3	81	0,98
	492,97	80,57	39	4	23	37	5	84	0,79
	479,91	73,88	26	5	21	20	5	69	1,00
	481,46	33,00	28	5	23	56	6	70	0,64
	665,80	63,19	68	2	24	52	6	59	0,58
	424,18	14,96	10	2	21	28	4	58	0,93
	400,66	13,82	6	5	20	24	5	50	1,00
31	575,88	12,04	44	7	26	53	8	96	0,78
	383,16	22,02	52	4	27	70	9	65	0,50
	567,00	0,00	2	0	27	58	7	88	1,00
	751,10	4,76	37	12	26	64	12	72	1,00
	240,45	9,79	22	6	26	45	7	49	0,45
	1080,53	15,32	63	6	23	42	9	88	0,91
	438,74	30,19	16	8	26	28	9	58	0,53
	637,94	3,90	6	5	22	19	5	66	1,00
	113,49	110,16	12	1	23	34	3	89	(117)
	347,95	21,66	37	5	24	52	7	96	0,92

TAB. A.1 – Ajustement des multiplicateurs de départ ($u_0 = 0$)

nb d'arcs taxés	Cplex				Algorithme				
	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	qualité de la solution
21	383,03	32,54	40	5	22	35	8	80	0,58
	275,42	43,45	38	10	20	24	8	75	0,81
	219,97	8,90	11	4	27	14	6	75	0,88
	288,87	43,71	17	3	20	13	3	0	1,00
	492,97	80,57	39	4	22	36	2	52	0,91
	479,91	73,88	26	5	21	17	9	103	0,26
	481,46	33,00	28	5	20	23	6	56	0,85
	665,80	63,19	68	2	22	40	4	20	0,72
	424,18	14,96	10	2	21	16	2	0	1,00
	400,66	13,82	6	5	19	12	5	94	1,00
31	575,88	12,04	44	7	23	20	11	100	0,60
	383,16	22,02	52	4	23	29	3	0	0,83
	567,00	0,00	2	0	23	27	5	65	1,00
	751,10	4,76	37	12	23	52	13	70	0,57
	240,45	9,79	22	6	21	16	3	41	0,85
	1080,53	15,32	63	6	25	47	5	49	0,95
	438,74	30,19	16	8	24	24	3	15	0,53
	637,94	3,90	6	5	21	16	5	59	1,00
	113,49	110,16	12	1	22	22	2	16	(70)
	347,95	21,66	37	5	23	29	5	17	0,68

TAB. A.2 – Ajustement des multiplicateurs de départ ($u_a^0 = 1000/k$)

nb d'arcs taxés	Cplex				Algorithme				qualité de la solution
	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	
21	383,03	32,54	40	5	24	58	7	71	0,94
	275,42	43,45	38	10	21	24	8	38	0,84
	219,97	8,90	11	4	21	27	5	69	0,98
	288,87	43,71	17	3	21	35	3	62	0,98
	492,97	80,57	39	4	22	37	6	62	0,93
	479,91	73,88	26	5	22	34	5	48	1,00
	481,46	33,00	28	5	23	41	5	83	0,95
	665,80	63,19	68	2	21	31	5	77	0,68
	424,18	14,96	10	2	21	28	4	32	0,97
	400,66	13,82	6	5	19	16	5	36	1,00
31	575,88	12,04	44	7	26	48	7	98	0,77
	383,16	22,02	52	4	24	50	4	96	1,00
	567,00	0,00	2	0	29	43	8	76	1,00
	751,10	4,76	37	12	25	47	12	64	1,00
	240,45	9,79	22	6	25	48	7	49	0,45
	1080,53	15,32	63	6	23	30	7	67	1,00
	438,74	30,19	16	8	23	18	9	94	0,86
	637,94	3,90	6	5	22	17	5	59	1,00
	113,49	110,16	12	1	25	43	3	67	(117)
	347,95	21,66	37	5	26	45	6	81	0,92

TAB. A.3 – Ajustement des multiplicateurs de départ ($u_a^0 = f_a/k - 0,01$)

		Cplex				Algorithme			
nb d'arcs taxés	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	qualité de la solution
21	383,03	32,54	40	5	23	40	7	81	0,94
	275,42	43,45	38	10	20	24	8	62	0,83
	219,97	8,90	11	4	23	25	5	69	0,98
	288,87	43,71	17	3	20	24	3	57	0,98
	492,97	80,57	39	4	25	33	6	10	0,92
	479,91	73,88	26	5	22	29	5	48	1,00
	481,46	33,00	28	5	23	45	5	88	0,97
	665,80	63,19	68	2	22	39	6	82	0,63
	424,18	14,96	10	2	21	24	4	32	0,97
	400,66	13,82	6	5	20	18	5	33	1,00
31	575,88	12,04	44	7	30	55	7	10	0,77
	383,16	22,02	52	4	25	52	8	58	0,73
	567,00	0,00	2	0	23	29	8	47	1,00
	751,10	4,76	37	12	23	41	12	59	1,00
	240,45	9,79	22	6	23	26	6	99	1,00
	1080,53	15,32	63	6	24	33	9	54	0,91
	438,74	30,19	16	8	25	22	9	86	0,86
	637,94	3,90	6	5	21	15	5	61	1,00
	113,49	110,16	12	1	23	40	3	87	(57)
	347,95	21,66	37	5	26	57	7	85	0,92

TAB. A.4 – Ajustement des multiplicateurs de départ ($u_a^0 = f_a/k + 0,01$)

nb d'arcs taxés	Cplex				Algorithme				
	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	qualité de la solution
21	383,03	32,54	40	5	23	40	7	81	0,94
	275,42	43,45	38	10	23	24	8	62	0,83
	219,97	8,90	11	4	21	25	5	69	0,98
	288,87	43,71	17	3	23	24	3	57	0,98
	492,97	80,57	39	4	23	33	6	101	0,92
	479,91	73,88	26	5	22	29	5	48	1,00
	481,46	33,00	28	5	23	45	5	88	0,97
	665,80	63,19	68	2	22	39	6	82	0,63
	424,18	14,96	10	2	22	24	4	32	0,97
	400,66	13,82	6	5	20	18	5	33	1,00
31	575,88	12,04	44	7	28	55	7	102	0,77
	383,16	22,02	52	4	26	52	8	58	0,73
	567,00	0,00	2	0	25	29	8	47	1,00
	751,10	4,76	37	12	24	41	12	59	1,00
	240,45	9,79	22	6	24	26	6	99	1,00
	1080,53	15,32	63	6	24	33	9	54	0,91
	438,74	30,19	16	8	28	22	9	86	0,86
	637,94	3,90	6	5	23	15	5	61	1,00
	113,49	110,16	12	1	26	40	3	87	(57)
	347,95	21,66	37	5	29	57	7	85	0,92

TAB. A.5 – Ajustement du pas ($\gamma = 1$)

nb d'arcs taxés	Cplex				Algorithme				
	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	qualité de la solution
21	383,03	32,54	40	5	23	26	7	22	0,94
	275,42	43,45	38	10	20	19	8	15	0,83
	219,97	8,90	11	4	21	28	4	20	1,00
	288,87	43,71	17	3	20	24	3	22	0,98
	492,97	80,57	39	4	22	22	6	28	0,92
	479,91	73,88	26	5	21	15	5	11	1,00
	481,46	33,00	28	5	22	20	6	19	1,00
	665,80	63,19	68	2	23	43	6	26	0,81
	424,18	14,96	10	2	23	22	4	13	0,97
	400,66	13,82	6	5	19	9	5	9	1,00
31	575,88	12,04	44	7	27	38	7	40	1,00
	383,16	22,02	52	4	23	28	4	105	0,74
	567,00	0,00	2	0	23	15	8	15	1,00
	751,10	4,76	37	12	23	19	12	16	1,00
	240,45	9,79	22	6	23	24	6	20	1,00
	1080,53	15,32	63	6	23	24	7	27	1,00
	438,74	30,19	16	8	25	16	8	24	0,95
	637,94	3,90	6	5	21	12	5	20	1,00
	113,49	110,16	12	1	24	31	2	39	0,63
	347,95	21,66	37	5	26	45	5	102	1,00

TAB. A.6 – Ajustement du pas ($\gamma = 5$)

nb d'arcs taxés	Cplex				Algorithme				
	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	qualité de la solution
21	383,03	32,54	40	5	23	20	7	16	0,94
	275,42	43,45	38	10	20	17	8	18	0,83
	219,97	8,90	11	4	21	17	4	15	1,00
	288,87	43,71	17	3	21	16	3	13	0,98
	492,97	80,57	39	4	22	20	6	16	0,92
	479,91	73,88	26	5	21	12	5	10	0,91
	481,46	33,00	28	5	27	17	5	10	0,98
	665,80	63,19	68	2	22	21	6	15	0,81
	424,18	14,96	10	2	23	22	2	24	1,00
	400,66	13,82	6	5	20	9	5	5	1,00
31	575,88	12,04	44	7	24	31	7	22	1,00
	383,16	22,02	52	4	23	23	4	14	0,74
	567,00	0,00	2	0	24	16	8	17	1,00
	751,10	4,76	37	12	24	14	12	16	1,00
	240,45	9,79	22	6	23	17	6	22	1,00
	1080,53	15,32	63	6	24	17	7	18	1,00
	438,74	30,19	16	8	24	16	8	13	0,95
	637,94	3,90	6	5	21	10	5	13	1,00
	113,46	110,16	12	1	27	28	2	31	0,63
	347,95	21,66	37	5	23	30	6	21	0,92

TAB. A.7 – Ajustement du pas ($\gamma = 10$)

nb d'arcs taxés	Cplex				Algorithme				
	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	qualité de la solution
21	383,03	32,54	40	5	23	23	7	105	0,94
	275,42	43,45	38	10	22	22	8	13	0,83
	219,97	8,90	11	4	21	14	4	11	1,00
	288,87	43,71	17	3	21	15	3	8	0,98
	492,97	80,57	39	4	23	28	4	13	1,00
	479,91	73,88	26	5	21	10	5	9	1,00
	481,46	33,00	28	5	22	13	5	12	0,99
	665,80	63,19	68	2	23	31	6	113	0,81
	424,18	14,96	10	2	21	23	4	9	0,97
	400,66	13,82	6	5	19	8	5	5	1,00
31	575,88	12,04	44	7	24	24	7	107	1,00
	383,16	22,02	52	4	22	25	7	13	0,84
	567,00	0,00	2	0	22	11	8	4	1,00
	751,10	4,76	37	12	22	15	12	12	1,00
	240,45	9,79	22	6	22	15	6	9	1,00
	1080,53	15,32	63	6	22	19	7	102	1,00
	438,74	30,19	16	8	24	14	8	9	0,95
	637,94	3,90	6	5	21	13	5	6	1,00
	113,49	110,16	12	1	23	21	2	26	0,63
	347,95	21,66	37	5	23	24	6	14	0,89

TAB. A.8 – Ajustement du pas ($\gamma = 15$)

nb d'arcs taxés	Cplex				Algorithme				
	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	qualité de la solution
21	383,03	32,54	40	5	22	23	7	109	0,94
	275,42	43,45	38	10	21	21	11	15	0,83
	219,97	8,90	11	4	20	12	4	7	1,00
	288,87	43,71	17	3	21	21	3	16	0,98
	492,97	80,57	39	4	22	18	4	110	1,00
	479,91	73,88	26	5	20	9	5	6	1,00
	481,46	33,00	28	5	21	12	5	11	0,97
	665,80	63,19	68	2	22	25	6	108	0,81
	424,18	14,96	10	2	21	18	4	6	0,97
	400,66	13,82	6	5	19	9	5	5	1,00
31	575,88	12,04	44	7	24	26	8	119	0,81
	383,16	22,02	52	4	23	29	5	19	0,85
	567,00	0,00	2	0	23	13	8	8	1,00
	751,10	4,76	37	12	22	12	12	10	1,00
	240,45	9,79	22	6	22	15	6	10	1,00
	1080,53	15,32	63	6	22	12	6	11	1,00
	438,74	30,19	16	8	24	11	8	104	0,95
	637,94	3,90	6	5	21	10	5	7	1,00
	113,49	110,16	12	1	22	18	1	20	0,65
	347,95	21,66	37	5	23	31	5	22	1,00

TAB. A.9 – Ajustement du pas ($\gamma = 20$)

nb d'arcs taxés	Cplex				Algorithme					
	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	no de l'itération mineure	qualité de la solution
21	383,03	32,54	40	5	21	26	7	22	0	0,94
	275,42	43,45	38	10	19	19	8	15	0	0,83
	219,97	8,90	11	4	21	28	4	20	0	1,00
	288,87	43,71	17	3	21	24	3	22	0	0,98
	492,97	80,57	39	4	22	22	6	28	0	0,92
	479,91	73,88	26	5	20	15	5	11	0	1,00
	481,46	33,00	28	5	22	20	6	19	0	1,00
	665,80	63,19	68	2	23	43	6	26	0	0,81
	424,18	14,96	10	2	22	22	4	13	0	0,97
	400,66	13,82	6	5	19	9	5	9	0	1,00
31	575,88	12,04	44	7	25	38	7	40	0	1,00
	383,16	22,02	52	4	23	28	4	105	0	0,74
	567,00	0,00	2	0	23	15	8	15	0	1,00
	751,10	4,76	37	12	22	19	12	16	0	1,00
	240,45	9,79	22	6	23	24	6	20	0	1,00
	1080,53	15,32	63	6	27	24	7	27	0	1,00
	438,74	30,19	16	8	25	16	8	24	0	0,95
	637,94	3,90	6	5	23	12	5	20	0	1,00
	113,49	110,16	12	1	24	31	2	39	0	0,63
	347,95	21,66	37	5	25	45	5	102	0	1,00

TAB. A.10 – Ajustement du nombre d'itérations primale-duale ($m = 1$)

nb d'arcs taxés	Cplex				Algorithme					
	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	no de l'itération mineure	qualité de la solution
21	383,03	32,54	40	5	87	49	7	18	0	0,94
	275,42	43,45	38	10	84	55	8	9	3	0,92
	219,97	8,90	11	4	80	26	4	16	2	1,00
	288,87	43,71	17	3	79	55	3	15	3	0,98
	492,97	80,57	39	4	93	122	5	27	4	0,94
	479,91	73,88	26	5	83	44	5	17	3	1,00
	481,46	33,00	28	5	84	63	5	27	4	0,99
	665,80	63,19	68	2	84	90	4	42	4	0,82
	424,18	14,96	10	2	85	33	4	9	1	0,97
	400,66	13,82	6	5	76	11	5	11	0	1,00
31	575,88	12,04	44	7	100	67	7	30	2	0,78
	383,16	22,02	52	4	84	37	4	20	3	1,00
	567,00	0,00	2	0	89	33	8	18	0	1,00
	751,10	4,76	37	12	89	59	12	23	4	1,00
	240,45	9,79	22	6	87	59	6	30	4	1,00
	1080,53	15,32	63	6	91	60	7	25	3	1,00
	438,74	30,19	16	8	91	25	8	24	0	0,95
	637,94	3,90	6	5	86	25	5	11	2	1,00
	113,49	110,16	12	1	87	45	2	39	0	0,63
	347,95	21,66	37	5	85	50	6	46	3	1,00

TAB. A.11 – Ajustement du nombre d'itérations primale-duale ($m = 5$)

nb d'arcs taxés	Cplex				Algorithme					qualité de la solution
	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	no de l'itération mineure	
21	383,03	32,54	40	5	172	72	7	19	9	0,94
	275,42	43,45	38	10	153	58	8	12	9	0,83
	219,97	8,90	11	4	156	31	4	19	8	1,00
	288,87	43,71	17	3	159	87	3	14	9	0,98
	492,97	80,57	39	4	185	147	5	33	9	0,94
	479,91	73,88	26	5	160	47	5	12	9	1,00
	481,46	33,00	28	5	156	63	5	24	7	0,99
	665,80	63,19	68	2	163	106	3	39	7	1,00
	424,18	14,96	10	2	160	59	4	25	8	0,97
	400,66	13,82	6	5	149	10	5	8	0	1,00
31	575,88	12,04	44	7	179	102	7	29	4	0,78
	383,16	22,02	52	4	161	49	6	19	7	1,00
	567,00	0,00	2	0	169	34	8	17	9	1,00
	751,10	4,76	37	12	164	74	12	18	8	1,00
	240,45	9,79	22	6	168	44	6	21	6	1,00
	1080,53	15,32	63	6	168	49	7	24	0	1,00
	438,74	30,19	16	8	176	37	8	24	0	0,95
	637,94	3,90	6	5	162	33	5	15	8	1,00
	113,49	110,16	12	1	165	72	2	55	6	0,98
	347,95	21,66	37	5	169	99	5	45	8	1,00

TAB. A.12 – Ajustement du nombre d'itérations primale-duale ($m = 10$)

nb d'arcs taxés	Cplex				Algorithme					
	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	no de l'itération mineure	qualité de la solution
21	383,03	32,54	40	5	236	40	4	18	14	1,00
	275,42	43,45	38	10	222	62	8	14	13	0,89
	219,97	8,90	11	4	222	29	4	16	11	1,00
	288,87	43,71	17	3	226	124	3	25	12	1,00
	492,97	80,57	39	4	261	168	5	27	10	0,94
	479,91	73,88	26	5	233	70	5	20	12	1,00
	481,46	33,00	28	5	227	79	6	25	13	1,00
	665,80	63,19	68	2	237	165	3	46	12	1,00
	424,18	14,96	10	2	229	78	4	31	13	0,97
	400,66	13,82	6	5	214	10	5	8	0	1,00
31	575,88	12,04	44	7	253	104	7	39	4	1,00
	383,16	22,02	52	4	237	43	4	24	10	1,00
	567,00	0,00	2	0	244	64	8	8	10	1,00
	751,10	4,76	37	12	244	81	12	26	8	1,00
	240,45	9,79	22	6	242	58	3	20	7	0,85
	1080,53	15,32	63	6	252	64	7	22	5	1,00
	438,74	30,19	16	8	257	42	8	26	10	1,00
	637,94	3,90	6	5	241	34	5	13	13	1,00
	113,49	110,16	12	1	245	61	2	53	6	0,98
	347,95	21,66	37	5	245	140	6	40	9	1,00

TAB. A.13 – Ajustement du nombre d'itérations primale-duale ($m = 15$)

nb d'arcs taxés	Cplex				Algorithme					
	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	no de l'itération mineure	qualité de la solution
21	383,03	32,54	40	5	323	109	4	37	18	1,00
	275,42	43,45	38	10	291	66	8	16	19	0,89
	219,97	8,90	11	4	301	29	4	16	11	1,00
	288,87	43,71	17	3	298	113	3	13	19	1,00
	492,97	80,57	39	4	335	235	4	36	8	1,00
	479,91	73,88	26	5	313	87	5	11	14	1,00
	481,46	33,00	28	5	317	85	6	31	11	0,98
	665,80	63,19	68	2	334	204	3	47	11	0,88
	424,18	14,96	10	2	318	89	4	31	13	0,97
	400,66	13,82	6	5	289	10	5	8	0	1,00
31	575,88	12,04	44	7	373	106	7	35	4	1,00
	383,16	22,02	52	4	337	63	4	25	7	1,00
	567,00	0,00	2	0	334	60	8	8	11	1,00
	751,10	4,76	37	12	325	95	12	23	8	1,00
	240,45	9,79	22	6	321	58	6	20	15	1,00
	1080,53	15,32	63	6	337	88	7	25	17	1,00
	438,74	30,19	16	8	342	42	8	26	10	1,00
	637,94	3,90	6	5	317	32	5	12	13	1,00
	113,49	110,16	12	1	327	112	1	61	17	1,00
	347,95	21,66	37	5	329	143	5	49	10	1,00

TAB. A.14 – Ajustement du nombre d'itérations primale-duale ($m = 20$)

nb d'arcs taxés	Cplex				Algorithme					
	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	no de l'itération mineure	qualité de la solution
21	383,03	32,54	40	5	293	90	5	29	18	1,00
	275,42	43,45	38	10	271	84	8	15	19	0,89
	219,97	8,90	11	4	275	35	4	19	6	1,00
	288,87	43,71	17	3	275	79	3	11	19	1,00
	492,97	80,57	39	4	299	157	6	16	15	0,93
	479,91	73,88	26	5	275	67	5	11	18	1,00
	481,46	33,00	28	5	282	86	6	11	17	1,00
	665,80	63,19	68	2	282	148	3	43	19	1,00
	424,18	14,96	10	2	276	72	4	33	4	0,97
	400,66	13,82	6	5	260	11	5	8	0	1,00
31	575,88	12,04	44	7	292	135	7	41	10	1,00
	383,16	22,02	52	4	283	51	4	19	7	1,00
	567,00	0,00	2	0	284	51	8	10	13	1,00
	751,10	4,76	37	12	273	70	12	17	12	1,00
	240,45	9,79	22	6	274	82	6	26	15	1,00
	1080,53	15,32	63	6	302	103	7	35	19	1,00
	438,74	30,19	16	8	295	38	8	24	10	1,00
	637,94	3,90	6	5	273	36	5	21	0	1,00
	113,49	110,16	12	1	283	131	1	61	17	1,00
	347,95	21,66	37	5	288	170	5	48	14	1,00

TAB. A.15 – Ajustement de la constante de modification des tarifs optimaux ($\rho = 0, 10$)

Cplex					Algorithme					
nb d'arcs taxés	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	no de l'itération mineure	qualité de la solution
21	383,03	32,54	40	5	299	112	4	26	18	1,00
	275,42	43,45	38	10	283	92	8	46	19	0,91
	219,97	8,90	11	4	268	35	4	19	9	1,00
	288,87	43,71	17	3	273	176	3	14	19	1,00
	492,97	80,57	39	4	304	246	4	34	17	1,00
	479,91	73,88	26	5	277	57	5	11	14	1,00
	481,46	33,00	28	5	276	88	5	29	15	0,99
	665,80	63,19	68	2	282	177	3	48	11	1,00
	424,18	14,96	10	2	274	62	4	13	0	0,97
400,66	13,82	6	5	260	12	5	8	0	1,00	
31	575,88	12,04	44	7	295	109	6	31	13	0,98
	383,16	22,02	52	4	273	89	4	10	42	1,00
	567,00	0,00	2	0	284	59	8	9	10	1,00
	751,10	4,76	37	12	285	76	12	21	12	1,00
	240,45	9,79	22	6	277	79	6	17	15	1,00
	1080,53	15,32	63	6	289	86	7	27	19	1,00
	438,74	30,19	16	8	288	49	8	26	10	1,00
	637,94	3,90	6	5	267	35	5	11	11	1,00
	113,49	110,16	12	1	283	151	1	61	17	1,00
347,95	21,66	37	5	280	150	6	48	8	1,00	

TAB. A.16 – Ajustement de la constante de modification des tarifs optimaux
($\rho = 0, 30$)

nb d'arcs taxés	Cplex				Algorithme					
	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	no de l'itération mineure	qualité de la solution
21	383,03	32,54	40	5	296	125	4	26	18	1,00
	275,42	43,45	38	10	268	93	8	12	19	0,92
	219,97	8,90	11	4	276	31	4	18	6	1,00
	288,87	43,71	17	3	287	176	3	18	19	1,00
	492,97	80,57	39	4	319	343	4	55	15	1,00
	479,91	73,88	26	5	283	71	5	11	14	1,00
	481,46	33,00	28	5	285	82	6	30	7	0,98
	665,80	63,19	68	2	283	149	3	43	11	1,00
	424,18	14,96	10	2	275	62	4	13	0	0,97
400,66	13,82	6	5	253	11	5	8	0	1,00	
31	575,88	12,04	44	7	300	114	7	29	12	1,00
	383,16	22,02	52	4	271	68	4	20	10	1,00
	567,00	0,00	2	0	279	65	8	8	10	1,00
	751,10	4,76	37	12	278	85	12	24	12	1,00
	240,45	9,79	22	6	275	60	6	18	15	1,00
	1080,53	15,32	63	6	291	114	7	25	17	1,00
	438,74	30,19	16	8	297	44	8	25	10	1,00
	637,94	3,90	6	5	263	34	5	13	13	1,00
	113,49	110,16	12	1	282	119	1	61	17	1,00
347,95	21,66	37	5	287	170	5	48	17	1,00	

TAB. A.17 – Ajustement de la constante de modification des tarifs optimaux
($\rho = 0,50$)

	Cplex				Algorithme					
	nb d'arcs taxés	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	no de l'itération mineure
21	383,03	32,54	40	5	288	118	4	27	18	1,00
	275,42	43,45	38	10	275	90	8	12	19	0,92
	219,97	8,90	11	4	270	34	4	15	8	1,00
	288,87	43,71	17	3	275	111	3	13	19	1,00
	492,97	80,57	39	4	303	159	5	22	17	0,79
	479,91	73,88	26	5	285	76	5	11	14	1,00
	481,46	33,00	28	5	276	89	6	21	15	1,00
	665,80	63,19	68	2	286	195	3	47	19	1,00
	424,18	14,96	10	2	275	80	4	31	14	0,97
	400,66	13,82	6	5	260	11	5	8	0	1,00
31	575,88	12,04	44	7	297	118	6	39	10	0,98
	383,16	22,02	52	4	267	41	4	20	9	1,00
	567,00	0,00	2	0	278	47	8	10	14	1,00
	751,10	4,76	37	12	290	94	12	17	18	1,00
	240,45	9,79	22	6	282	79	6	22	15	1,00
	1080,53	15,32	63	6	287	111	7	25	19	1,00
	438,74	30,19	16	8	299	50	8	26	10	1,00
	637,94	3,90	6	5	272	32	5	12	13	1,00
	113,49	110,16	12	1	283	125	1	67	17	1,00
	347,95	21,66	37	5	289	181	5	40	13	1,00

TAB. A.18 – Ajustement de la constante de modification des tarifs optimaux ($\rho = 0,70$)

nb d'arcs taxés	Cplex					Algorithme				
	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	no de l'itération mineure	qualité de la solution
21	383,03	32,54	40	5	291	62	4	22	18	1,00
	275,42	43,45	38	10	266	66	8	16	19	0,89
	219,97	8,90	11	4	269	27	4	16	11	1,00
	288,87	43,71	17	3	276	127	3	18	19	1,00
	492,97	80,57	39	4	308	218	6	40	17	0,92
	479,91	73,88	26	5	281	78	5	11	14	1,00
	481,46	33,00	28	5	280	86	6	31	17	0,98
	665,80	63,19	68	2	282	129	3	40	19	1,00
	424,18	14,96	10	2	274	71	4	31	12	0,97
	400,66	13,82	6	5	259	10	5	8	0	1,00
31	575,88	12,04	44	7	300	108	7	35	6	1,00
	383,16	22,02	52	4	280	54	4	4	10	1,00
	567,00	0,00	2	0	292	55	8	10	10	1,00
	751,10	4,76	37	12	268	71	12	17	12	1,00
	240,45	9,79	22	6	278	80	6	28	15	1,00
	1080,53	15,32	63	6	292	62	7	24	17	1,00
	438,74	30,19	16	8	293	47	8	26	10	1,00
	637,94	3,90	6	5	270	32	5	12	13	1,00
	113,49	110,16	12	1	281	119	1	62	17	1,00
	347,95	21,66	37	5	293	131	5	45	17	1,00

TAB. A.19 – Ajustement de la constante de modification des tarifs optimaux
($\rho = 0, 90$)

nb d'arcs taxés	Cplex				Algorithme					
	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	no de l'itération mineure	qualité de la solution
21	383,03	32,54	40	5	32	116	7	19	10	0,94
	275,42	43,45	38	10	21	69	8	12	19	0,92
	219,97	8,90	11	4	12	13	7	4	4	0,70
	288,87	43,71	17	3	23	109	4	9	19	0,88
	492,97	80,57	39	4	9	15	13	0	3	(549)
	479,91	73,88	26	5	21	61	5	11	14	1,00
	481,46	33,00	28	5	22	60	5	14	15	0,83
	665,80	63,19	68	2	15	49	8	6	15	0,38
	424,18	14,96	10	2	20	30	4	13	0	0,97
	400,66	13,82	6	5	14	11	5	8	0	1,00
31	575,88	12,04	44	7	28	71	8	14	12	0,74
	383,16	22,02	52	4	16	36	9	7	9	0,66
	567,00	0,00	2	0	18	47	8	8	10	1,00
	751,10	4,76	37	12	27	79	13	15	12	0,95
	240,45	9,79	22	6	27	56	6	18	15	1,00
	1080,53	15,32	63	6	26	81	8	15	12	0,90
	438,74	30,19	16	8	9	14	15	0	9	(408)
	637,94	3,90	6	5	14	30	7	6	16	0,97
	113,49	110,16	12	1	30	83	3	21	17	0,65
	347,95	21,66	37	5	26	64	8	14	8	0,87

TAB. A.20 – Ajustement du critère d'arrêt ($\delta = 5$)

nb d'arcs taxés	Cplex					Algorithme				
	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	no de l'itération mineure	qualité de la solution
21	383,03	32,54	40	5	44	122	4	26	18	1,00
	275,42	43,45	38	10	26	80	8	12	19	0,92
	219,97	8,90	11	4	17	23	7	4	4	0,70
	288,87	43,71	17	3	40	176	3	18	19	1,00
	492,97	80,57	39	4	35	127	5	14	17	0,79
	479,91	73,88	26	5	26	67	5	11	14	1,00
	481,46	33,00	28	5	43	82	6	30	7	0,98
	665,80	63,19	68	2	60	149	3	43	11	1,00
	424,18	14,96	10	2	25	35	4	13	0	0,97
	400,66	13,82	6	5	18	11	5	8	0	1,00
31	575,88	12,04	44	7	34	86	8	14	12	0,74
	383,16	22,02	52	4	22	53	9	7	9	0,66
	567,00	0,00	2	0	24	53	8	8	10	1,00
	751,10	4,76	37	12	40	85	12	24	12	1,00
	240,45	9,79	22	6	34	60	6	18	15	1,00
	1080,53	15,32	63	6	42	97	7	25	17	1,00
	438,74	30,19	16	8	40	44	8	25	10	1,00
	637,94	3,90	6	5	25	32	5	13	13	1,00
	113,49	110,16	12	1	37	88	3	21	17	0,65
	347,95	21,66	37	5	46	113	6	26	8	0,98

TAB. A.21 – Ajustement du critère d'arrêt ($\delta = 10$)

nb d'arcs taxés	Cplex					Algorithme				
	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	no de l'itération mineure	qualité de la solution
21	383,03	32,54	40	5	50	122	4	26	18	1,00
	275,42	43,45	38	10	31	86	8	12	19	0,92
	219,97	8,90	11	4	35	31	4	18	6	1,00
	288,87	43,71	17	3	47	176	3	18	19	1,00
	492,97	80,57	39	4	42	142	5	14	17	0,79
	479,91	73,88	26	5	31	71	5	11	14	1,00
	481,46	33,00	28	5	49	82	6	30	7	0,98
	665,80	63,19	68	2	65	149	3	43	11	1,00
	424,18	14,96	10	2	30	44	4	13	0	0,97
	400,66	13,82	6	5	23	11	5	8	0	1,00
31	575,88	12,04	44	7	55	114	7	29	12	1,00
	383,16	22,02	52	4	38	63	4	20	10	1,00
	567,00	0,00	2	0	30	65	8	8	10	1,00
	751,10	4,76	37	12	46	85	12	24	12	1,00
	240,45	9,79	22	6	38	60	6	18	15	1,00
	1080,53	15,32	63	6	48	100	7	25	17	1,00
	438,74	30,19	16	8	46	44	8	25	10	1,00
	637,94	3,90	6	5	29	34	5	13	13	1,00
	113,49	110,16	12	1	41	99	3	21	17	0,65
	347,95	21,66	37	5	54	132	6	26	8	0,98

TAB. A.22 – Ajustement du critère d'arrêt ($\delta = 15$)

nb d'arcs taxés	Cplex					Algorithme					qualité de la solution
	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	no de l'itération mineure		
21	383,03	32,54	40	5	50	122	4	26	18	1,00	
	275,42	43,45	38	10	31	86	8	12	19	0,92	
	219,97	8,90	11	4	35	31	4	18	6	1,00	
	288,87	43,71	17	3	47	176	3	18	19	1,00	
	492,97	80,57	39	4	42	142	5	14	17	0,79	
	479,91	73,88	26	5	31	71	5	11	14	1,00	
	481,46	33,00	28	5	49	82	6	30	7	0,98	
	665,80	63,19	68	2	65	149	3	43	11	1,00	
	424,18	14,96	10	2	30	44	4	13	0	0,97	
	400,66	13,82	6	5	23	11	5	8	0	1,00	
31	575,88	12,04	44	7	55	114	7	29	12	1,00	
	383,16	22,02	52	4	38	63	4	0	10	1,00	
	567,00	0,00	2	0	30	65	8	8	10	1,00	
	751,10	4,76	37	12	46	85	12	24	12	1,00	
	240,45	9,79	22	6	38	60	6	18	15	1,00	
	1080,53	15,32	63	6	48	100	7	25	17	1,00	
	438,74	30,19	16	8	46	44	8	25	10	1,00	
	637,94	3,90	6	5	29	34	5	13	13	1,00	
	113,49	110,16	12	1	41	99	3	21	17	0,65	
	347,95	21,66	37	5	54	132	6	26	8	0,98	

TAB. A.23 – Ajustement du critère d'arrêt ($\delta = 20$)

nb d'arcs taxés	Cplex				Algorithme					
	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	no de l'itération mineure	qualité de la solution
21	383,03	32,54	40	5	60	122	4	26	18	1,00
	275,42	43,45	38	10	41	93	8	12	19	0,92
	219,97	8,90	11	4	43	31	4	18	6	1,00
	288,87	43,71	17	3	54	176	3	18	19	1,00
	492,97	80,57	39	4	103	333	4	55	15	1,00
	479,91	73,88	26	5	40	71	5	11	14	1,00
	481,46	33,00	28	5	58	82	6	30	7	0,98
	665,80	63,19	68	2	75	149	3	43	11	1,00
	424,18	14,96	10	2	42	57	4	13	0	0,97
	400,66	13,82	6	5	32	11	5	8	0	1,00
31	575,88	12,04	44	7	66	114	7	29	12	1,00
	383,16	22,02	52	4	48	63	4	20	10	1,00
	567,00	0,00	2	0	39	65	8	8	10	1,00
	751,10	4,76	37	12	55	85	12	24	12	1,00
	240,45	9,79	22	6	48	60	6	18	15	1,00
	1080,53	15,32	63	6	59	114	7	25	17	1,00
	438,74	30,19	16	8	57	44	8	25	10	1,00
	637,94	3,90	6	5	39	34	5	13	13	1,00
	113,49	110,16	12	1	92	118	1	61	17	1,00
	347,95	21,66	37	5	85	170	5	48	17	1,00

TAB. A.24 – Ajustement du critère d'arrêt ($\delta = 25$)

nb d'arcs taxés	Cplex				Algorithme					
	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	no de l'itération mineure	qualité de la solution
21	383,03	32,54	40	5	63	122	4	26	18	1,00
	275,42	43,45	38	10	45	93	8	12	19	0,92
	219,97	8,90	11	4	47	31	4	18	6	1,00
	288,87	43,71	17	3	59	176	3	18	19	1,00
	492,97	80,57	39	4	116	333	4	55	15	1,00
	479,91	73,88	26	5	46	71	5	11	14	1,00
	481,46	33,00	28	5	63	82	6	30	7	0,98
	665,80	63,19	68	2	83	149	3	43	11	1,00
	424,18	14,96	10	2	47	58	4	13	0	0,97
	400,66	13,82	6	5	37	11	5	8	0	1,00
31	575,88	12,04	44	7	74	114	7	29	12	1,00
	383,16	22,02	52	4	52	63	4	20	10	1,00
	567,00	0,00	2	0	44	65	8	8	10	1,00
	751,10	4,76	37	12	61	85	12	24	12	1,00
	240,45	9,79	22	6	52	60	6	18	15	1,00
	1080,53	15,32	63	6	63	114	7	25	17	1,00
	438,74	30,19	16	8	62	44	8	25	10	1,00
	637,94	3,90	6	5	44	34	5	13	13	1,00
	113,49	110,16	12	1	94	118	1	61	17	1,00
	347,95	21,66	37	5	90	170	5	48	17	1,00

TAB. A.25 – Ajustement du critère d'arrêt ($\delta = 30$)

nb d'arcs taxés	Cplex				Algorithme					
	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	no de l'itération mineure	qualité de la solution
10	311,48	51,94	5	5	52	44	5	14	12	1,00
	312,70	36,55	8	3	44	31	3	16	14	1,00
	327,74	15,40	5	4	38	19	4	9	14	1,00
	565,88	45,10	6	1	44	75	2	10	13	1,00
	83,88	11,84	1	1	47	11	1	19	4	1,00
	0,00	0,00	2	0	38	24	0	9	3	1,00
	327,41	19,06	3	3	43	22	3	12	15	1,00
	744,76	27,31	11	3	33	9	6	0	7	1,00
	271,60	33,80	5	5	52	29	5	24	3	1,00
	499,58	38,00	19	4	40	35	4	6	15	1,00
	344,50	27,90	7	3	43	30	3	12	10	1,00
21	383,03	32,54	40	5	67	122	4	26	18	1,00
	275,42	43,45	38	10	47	93	8	12	19	0,92
	219,97	8,90	11	4	50	31	4	18	6	1,00
	288,87	43,71	17	3	63	176	3	18	19	1,00
	492,97	80,57	39	4	115	333	4	55	15	1,00
	479,91	73,88	26	5	46	71	5	11	14	1,00
	481,46	33,00	28	5	63	82	6	30	7	0,98
	665,80	63,19	68	2	81	149	3	43	11	1,00
	424,18	14,96	10	2	47	58	4	13	0	0,97
	400,66	13,82	6	5	35	11	5	8	0	1,00
	411,23	40,80	28	5	61	113	5	23	12	0,99

TAB. A.26 – Résultats pour des réseaux de 10 produits comportant 5 % et 10 % d'arcs tarifables

	Cplex				Algorithme					
	nb d'arcs taxés	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	no de l'itération mineure
31	575,88	12,04	44	7	73	114	7	29	12	1,00
	383,16	22,02	52	4	53	63	4	20	10	1,00
	567,00	0,00	2	0	44	65	8	8	10	1,00
	751,10	4,76	37	12	60	85	12	24	12	1,00
	240,45	9,79	22	6	52	60	6	18	15	1,00
	1080,53	15,32	63	6	65	114	7	25	17	1,00
	438,74	30,19	16	8	64	44	8	25	10	1,00
	637,94	3,90	6	5	44	34	5	13	13	1,00
	113,49	110,16	12	1	99	118	1	61	1	1,00
	347,95	21,66	37	5	113	170	5	48	1	1,00
	513,62	22,98	29	5	67	87	6	27	10	1,00
42	234,61	9,63	10	5	82	167	5	35	9	0,95
	510,43	15,74	112	8	86	139	8	44	18	1,00
	68,00	0,00	2	0	64	77	5	23	9	1,00
	1163,26	24,15	1918	10	131	343	10	58	12	1,00
	1729,64	15,54	140	8	78	160	8	29	18	1,00
	70,44	46,75	31	2	90	173	2	41	15	1,00
	418,24	50,44	108	3	85	187	3	38	9	1,00
	1121,07	29,16	513	11	128	165	13	66	17	1,00
	794,30	51,29	555	7	86	152	6	33	13	0,93
	1286,03	28,86	1546	9	100	89	10	57	17	1,00
	739,60	27,16	493	6	93	165	7	42	14	0,99

TAB. A.27 – Résultats pour des réseaux de 10 produits comportant 15 % et 20 % d'arcs tarifables

nb d'arcs taxés	Cplex				Algorithme					
	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de sol. visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'ité. majeure	no de l'ité. mineure	qualité de la sol.
10	670,82	86,86	1990	7	114	175	6	13	14	0,95
	765,72	38,97	31	5	87	46	5	11	14	1,00
	497,59	130,37	79	4	219	469	4	37	18	0,95
	644,71	85,40	700	5	140	230	5	20	15	0,97
21	835,96	86,18	2379	6	237	298	7	53	12	0,88
	1056,94	19,43	829	7	151	118	7	32	12	0,97
	377,30	76,31	326	3	177	336	3	8	17	1,00
	692,72	74,79	905	5	161	239	5	25	15	0,96
31	686,16	64,94	14472	7	221	234	7	41	19	1,00
	1475,29	-	-	-	243	263	9	46	7	-
	793,40	25,94	2688	7	143	139	7	22	19	1,00
	845,40	-	-	-	190	232	6	32	14	-
42	2773,43	-	-	-	553	415	18	44	13	-
	759,86	31,69	2826	9	144	79	10	22	17	1,00
	2054,41	-	-	-	265	258	15	32	10	-
	1341,14	-	-	-	251	231	10	34	14	-

Résultats obtenus avec arrêt de CPLEX

31	686,16	69,84	7610	9	221	234	7	41	19	1,03
	1475,29	98,29	7803	14	243	263	9	46	7	1,38
	793,40	25,94	2552	7	143	139	7	22	19	1,00
	845,40	64,40	3232	7	190	232	6	32	14	1,03
42	2773,43	51,64	13749	20	553	415	18	44	13	1,19
	759,86	31,69	2721	9	144	79	10	22	17	1,00
	2054,41	39,38	12716	20	265	258	15	32	10	1,14
	1341,14	54,45	7198	12	251	231	10	34	14	1,11

TAB. A.28 – Résultats pour des réseaux asymétriques de 20 produits

nb d'arcs taxés	Cplex				Algorithme					
	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	no de l'itération mineure	qualité de la solution
10	1006,84	45,50	499	6	92	46	6	10	18	1,00
	1467,12	55,09	1543	10	70	6	10	2	4	1,00
	928,16	60,03	2088	6	79	39	6	7	18	1,00
	1134,04	53,54	1377	7	80	30	7	6	13	1,00
21	911,23	30,18	948	5	113	43	6	16	18	0,98
	1173,77	48,48	88055	8	137	177	9	14	19	0,98
	1199,84	37,60	9579	6	164	66	6	30	6	1,00
	1117,29	47,20	1470	7	105	58	7	12	14	0,99
31	743,97	49,69	11530	6	111	70	6	15	19	1,00
	1406,93	51,28	4354	4	245	284	4	58	19	1,00
	1084,31	41,55	28850	8	186	191	10	28	19	0,97
	1091,05	43,71	22597	6	151	127	6	24	16	0,99
42	1082,54	-	-	-	261	239	9	32	18	-
	2437,83	-	-	-	248	258	8	26	14	-
	1056,71	19,00	143	5	235	375	5	26	19	1,00
	1271,91	-	-	-	205	220	7	30	19	-

Résultats obtenus avec arrêt de CPLEX

42	1082,54	116,51	10935	13	261	239	9	32	18	1,62
	2437,83	217,84	12828	13	248	258	8	26	14	2,17
	1056,71	19,00	137	5	235	375	5	26	19	1,00
	1272,50	89,30	7082	8	205	220	7	30	18	1,33

TAB. A.29 – Résultats pour des réseaux symétriques de 20 produits

nb d'arcs taxés	Cplex				Algorithme					
	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	no de l'itération mineure	qualité de la solution
21	1201,30	14,30	47	21	30	9	16	0	14	1,00
	1450,30	7,43	76	21	33	4	21	0	19	0,96
	835,23	5,86	14	21	30	7	18	0	10	0,97
	1222,63	11,25	42	21	33	15	21	1	2	1,00
	1507,45	23,76	916	21	33	8	16	0	9	1,00
	1214,50	11,73	21	21	31	3	15	0	5	1,00
	1309,92	17,38	106	21	31	12	13	0	18	1,00
	1517,64	23,69	283	21	31	4	15	0	19	0,95
	1177,34	5,88	33	21	31	6	13	0	15	0,98
	753,11	6,22	5	21	30	9	14	1	8	1,00
	1218,94	12,75	154	21	31	7	16	0	12	0,90
31	1755,02	7,14	43	31	34	7	24	0	10	1,00
	1281,86	10,98	579	31	35	10	22	2	18	1,00
	1684,37	5,60	51	31	32	10	29	0	11	1,00
	2220,50	7,62	92	31	33	4	28	0	12	1,00
	1308,30	12,98	140	31	36	2	23	0	9	0,99
	2073,04	9,68	316	31	32	8	16	0	12	1,00
	1470,35	13,98	68	31	37	5	21	0	10	0,99
	1456,83	14,53	106	31	32	21	19	0	11	1,00
	1009,98	7,79	13	31	32	6	21	0	17	0,99
	1546,57	8,76	75	31	37	10	19	4	6	1,00
	1580,68	9,91	148	31	34	8	22	1	12	0,99

TAB. A.30 – Analyse de sensibilité sur des réseaux de 10 produits ($f_a = 0 \times ca$)

nb d'arcs taxés	Cplex				Algorithme					
	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	no de l'itération mineure	qualité de la solution
21	1048,04	18,02	106	13	31	13	15	0	17	0,99
	1192,82	7,65	161	16	36	18	16	4	19	1,00
	662,61	4,84	7	13	31	6	13	0	4	1,00
	1065,49	16,70	50	10	35	21	19	1	16	1,00
	1361,23	26,86	69	13	44	14	13	9	9	0,99
	1085,50	13,31	21	15	31	6	15	0	2	1,00
	1193,54	19,47	153	12	32	15	13	0	17	1,00
	1381,21	28,60	330	13	33	11	15	2	8	1,00
	1035,81	5,48	14	11	33	16	13	0	15	0,98
	647,92	5,52	4	8	34	14	8	5	8	1,00
	1067,42	14,65	92	12	34	13	14	2	11	0,99
31	1528,80	8,66	68	20	37	15	20	3	4	1,00
	1079,57	13,28	174	18	37	10	17	3	2	0,99
	1394,72	7,62	91	22	40	25	25	5	3	1,00
	1962,91	9,17	257	20	35	12	26	4	13	0,99
	1092,03	16,30	146	15	39	17	23	0	8	0,99
	1855,25	7,74	194	12	36	18	14	3	18	1,00
	1238,96	14,61	69	19	45	35	16	6	10	0,99
	1284,38	14,37	95	14	32	11	17	0	9	1,00
	778,55	4,08	11	17	37	42	17	3	7	1,00
	1366,03	9,20	62	18	33	12	18	0	7	1,00
	1358,12	10,50	117	18	37	20	19	3	8	0,99

TAB. A.31 – Analyse de sensibilité sur des réseaux de 10 produits ($f_a = 3 \times ca$)

nb d'arcs taxés	Cplex				Algorithme					
	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	no de l'itération mineure	qualité de la solution
21	383.03	32.54	40	5	67	122	4	26	18	1,00
	275.42	43.45	38	10	47	93	8	12	19	0,92
	219.97	8.90	11	4	50	31	4	18	6	1,00
	288.87	43.71	17	3	63	176	3	18	19	1,00
	492.97	80.57	39	4	115	333	4	55	15	1,00
	479.91	73.88	26	5	46	71	5	11	14	1,00
	481.46	33.00	28	5	63	82	6	30	7	0,98
	665.80	63.19	68	2	81	149	3	43	11	1,00
	424.18	14.96	10	2	47	58	4	13	0	0,97
	400.66	13.82	6	5	35	11	5	8	0	1,00
	411,23	40,82	28	5	61	113	5	23	11	0,98
31	575.88	12.04	44	7	73	114	7	29	12	1,00
	383.16	22.02	52	4	53	63	4	20	10	1,00
	567.00	0,00	2	0	44	65	8	8	10	1,00
	751.10	4.76	37	12	60	85	12	24	12	1,00
	240.45	9.79	22	6	52	60	6	18	15	1,00
	1080.53	15.32	63	6	65	114	7	25	17	1,00
	438.74	30.19	16	8	64	44	8	25	10	1,00
	637.94	3.90	6	5	44	34	5	13	13	1,00
	113.49	110.16	12	1	99	118	1	61	1	1,00
	347.95	21.66	37	5	113	170	5	48	1	1,00
	513,62	22,98	29	5	67	87	6	27	10	1,00

TAB. A.32 – Analyse de sensibilité sur des réseaux de 10 produits ($f_a = 30 \times ca$)

nb d'arcs taxés	Cplex				Algorithme					qualité de la solution
	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	no de l'itération mineure	
21	143,37	54,16	10	3	86	232	3	40	19	1,00
	0,00	0,00	1	0	72	190	0	38	19	1,00
	76,30	21,11	4	2	51	40	2	19	6	1,00
	128,14	212,54	17	2	51	63	2	19	6	(61)
	230,48	80,06	10	2	88	211	2	43	15	1,00
	192,63	221,05	6	3	60	101	3	23	12	1,00
	236,99	18,49	6	2	67	104	2	34	13	1,00
	386,39	21,51	12	3	68	123	3	33	15	1,00
	302,94	21,66	5	2	47	15	2	18	0	1,00
262,83	30,76	4	3	41	7	3	14	0	1,00	
	196,01	68,14	8	2	63	109	2	28	11	-
31	160,22	22,31	13	5	129	221	5	87	8	1,00
	199,26	24,54	13	3	45	41	4	13	11	1,00
	305,24	16,51	10	2	64	64	3	29	6	0,98
	143,32	31,37	33	6	72	116	6	34	19	1,00
	63,53	17,66	8	2	66	88	2	34	18	1,00
	692,03	27,21	48	4	74	116	4	34	17	1,00
	232,25	58,00	9	1	68	59	1	34	15	1,00
	359,55	14,51	18	4	68	77	5	40	7	1,00
	55,02	129,25	4	1	80	84	1	51	17	1,00
76,52	10,89	7	2	70	95	2	39	16	1,00	
	228,70	35,23	14	3	74	96	3	40	13	0,99

TAB. A.33 – Analyse de sensibilité sur des réseaux de 10 produits ($f_a = 60 \times ca$)

nb d'arcs taxés	Cplex				Algorithme					
	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	no de l'itération mineure	qualité de la solution
21	42,90	229,98	4	2	87	227	2	44	15	1,00
	0,00	0,00	1	0	58	131	0	28	19	1,00
	0,00	0,00	1	0	60	35	0	30	8	1,00
	0,00	0,00	1	0	70	72	0	39	17	1,00
	109,26	290,22	9	1	61	227	1	16	17	1,00
	18,80	(18,80)	3	0	53	78	0	20	15	1,00
	147,64	34,22	5	2	58	52	2	28	8	1,00
	304,25	27,84	7	2	67	110	2	33	15	1,00
	268,11	24,13	5	1	57	11	1	29	1	1,00
171,40	111,61	4	3	40	7	3	12	0	1,00	
	106,24	-	4	1	61	95	1	28	12	1,00
31	18,00	0,00	2	0	114	109	1	83	9	1,00
	98,72	28,21	4	2	64	45	2	34	10	1,00
	271,24	26,75	8	1	49	23	2	16	2	0,56
	0,00	0,00	16	0	82	149	0	46	14	1,00
	14,00	0,00	2	3	57	43	1	28	16	1,00
	452,43	41,83	16	1	82	149	3	39	13	1,00
	201,99	72,64	5	1	109	142	1	75	10	1,00
	176,10	91,42	8	0	54	98	4	23	9	1,00
	25,97	(25,97)	3	0	73	81	0	40	17	1,00
0,00	0,00	1	0	64	66	0	33	12	1,00	
	125,84	-	7	1	71	82	1	38	12	0,95

TAB. A.34 – Analyse de sensibilité sur des réseaux de 10 produits ($f_a = 90 \times ca$)

nb d'arcs taxés	Cplex				Algorithme					
	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	no de l'itération mineure	qualité de la solution
21	0,00	0,00	1	0	70	42	0	27	18	1,00
	0,00	0,00	1	0	47	56	0	10	0	1,00
	0,00	0,00	1	0	49	7	0	8	15	1,00
	0,00	0,00	1	0	54	14	0	18	16	1,00
	0,00	0,00	1	0	69	51	0	26	11	1,00
	0,00	0,00	1	0	43	16	0	4	9	1,00
	0,00	0,00	1	0	86	12	0	49	2	1,00
	59,21	196,05	2	1	54	16	1	16	19	1,00
	58,00	866,67	1	1	48	5	1	9	4	1,00
	0,00	0,00	1	0	57	9	0	20	17	1,00
	11,72	106,27	1	0	58	23	0	19	11	1,00
31	0,00	0,00	1	0	73	13	0	36	0	1,00
	0,00	0,00	1	0	89	12	0	52	0	1,00
	58,88	1372,11	3	1	61	7	1	20	0	1,00
	0,00	0,00	10	0	59	11	0	22	1	1,00
	0,00	0,00	1	0	56	11	0	17	18	1,00
	0,00	0,00	1	0	114	71	0	62	14	1,00
	3,96	(3,96)	2	0	84	11	0	40	9	1,00
	0,00	0,00	1	0	64	35	0	30	5	1,00
	0,00	0,00	1	0	51	7	0	13	17	1,00
	0,00	0,00	2	0	51	7	0	14	0	1,00
	6,98	-	2	0	72	19	0	32	5	1,00

TAB. A.35 – Analyse de sensibilité sur des réseaux de 10 produits ($f_a = 300 \times ca$)

nb d'arcs taxés	Cplex				Algorithme					
	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	no de l'itération mineure	qualité de la solution
10	1324,22	38,66	6150	10	87	25	10	2	15	1,00
	1428,04	23,21	52	10	58	6	10	0	12	1,00
	1416,66	38,48	1335	10	74	34	10	1	19	0,99
	1389,64	33,45	2512	10	73	22	10	1	15	1,00
21	2494,42	-	-	-	77	24	20	2	18	-
	2136,96	16,97	88595	21	64	5	18	1	2	0,97
	1904,24	23,25	43882	21	99	18	21	0	13	0,98
	2178,54	-	-	-	80	16	20	1	11	-

Résultats obtenus avec arrêt de CPLEX

21	2494,42	45,19	4090	21	77	24	20	2	18	1,13
	2136,96	19,45	3557	21	64	5	18	1	2	0,99
	1904,24	32,24	3847	21	99	18	21	0	13	1,05
	2178,54	32,29	3831	21	80	16	20	1	11	1,06
31	2243,60	27,62	7910	31	131	17	29	27	16	1,08
	3006,04	48,34	242	31	118	11	30	21	19	1,20
	2780,13	32,89	7267	31	140	21	31	29	9	1,12
	2676,59	36,28	5140	31	130	16	30	26	15	1,13
42	4948,52	23,99	10274	42	93	14	31	0	16	1,05
	2671,23	33,70	8441	42	80	10	41	0	13	1,06
	4267,32	28,01	9680	42	110	7	37	3	3	1,09
	3962,36	28,57	9465	42	94	10	36	1	11	1,07

TAB. A.36 – Analyse de sensibilité sur des réseaux asymétriques de 20 produits ($f_a = 0 \times ca$)

Cplex					Algorithme					
nb d'arcs taxés	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	no de l'itération mineure	qualité de la solution
10	1248,29	40,89	9479	10	114	26	10	2	18	1,00
	1329,43	24,13	50	9	71	10	9	3	12	1,00
	1295,97	43,52	2689	10	92	69	10	3	18	1,00
	1291,23	36,18	4073	10	92	35	10	3	16	1,00
21	2250,11	-	-	-	103	62	20	2	16	-
	1949,93	17,18	22743	15	82	18	16	2	12	0,97
	1659,92	-	-	-	113	70	20	2	13	-
	1953,32	-	-	-	99	50	19	2	14	-

Résultats obtenus avec arrêt de CPLEX

21	2250,11	69,31	2895	19	103	62	20	2	16	1,29
	1949,93	21,11	3022	16	82	18	16	2	12	1,00
	1659,92	54,55	2760	17	113	70	20	2	13	1,20
	1953,32	48,32	2892	17	99	50	19	2	14	1,16
31	1945,50	29,96	4373	29	109	41	28	6	16	1,09
	2734,53	76,54	3337	24	103	30	27	5	12	1,47
	2450,66	47,19	2867	30	96	25	28	4	5	1,23
	2376,90	51,23	3526	28	103	32	28	5	11	1,26
42	4609,60	44,30	4862	33	147	42	29	5	11	1,22
	2204,39	60,67	4592	35	126	54	31	10	5	1,32
	3893,41	58,08	4287	42	120	28	30	3	15	1,33
	3569,13	54,35	4580	37	131	41	30	6	10	1,29

TAB. A.37 – Analyse de sensibilité sur des réseaux asymétriques de 20 produits
($f_a = 3 \times ca$)

	Cplex				Algorithme					
	nb d'arcs taxés	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de sol. visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'ité. majeure	no de l'ité. mineure
10	670,82	86,86	1990	7	114	175	6	13	14	0,95
	765,72	38,97	31	5	87	46	5	11	14	1,00
	497,59	130,37	79	4	219	469	4	37	18	0,95
	644,71	85,40	700	5	140	230	5	20	15	0,97
21	835,96	86,18	2379	6	237	298	7	53	12	0,88
	1056,94	19,43	829	7	151	118	7	32	12	0,97
	377,30	76,31	326	3	177	336	3	8	17	1,00
	756,73	60,64	1178	5	188	251	6	31	16	0,95
31	686,16	64,94	14472	7	221	234	7	41	19	1,00
	1475,29	-	-	-	243	263	9	46	7	-
	793,40	25,94	2688	7	143	139	7	22	19	1,00
	984,95	-	-	-	202	212	8	36	15	-
42	2773,43	-	-	-	553	415	18	44	13	-
	759,86	31,69	2826	9	144	79	10	22	17	1,00
	2054,41	-	-	-	265	258	15	32	10	-
	1862,57	-	-	-	321	251	14	33	13	-

Résultats obtenus avec arrêt de CPLEX

31	686,16	69,84	7610	9	221	234	7	41	19	1,03
	1475,29	98,29	7803	14	243	263	9	46	7	1,38
	793,40	25,94	2552	7	143	139	7	22	19	1,00
	984,95	64,69	5988	10	202	212	8	36	15	1,14
42	2773,43	51,64	13749	20	553	415	18	44	13	1,19
	759,86	31,69	2721	9	144	79	10	22	17	1,00
	2054,41	39,38	12716	20	265	258	15	32	10	1,14
	1862,57	40,90	9729	16	321	251	14	33	13	1,11

TAB. A.38 – Analyse de sensibilité sur des réseaux asymétriques de 20 produits
($f_a = 30 \times ca$)

nb d'arcs taxés	Cplex				Algorithme					
	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	no de l'itération mineure	qualité de la solution
10	347,73	136,55	99	4	173	175	4	26	18	1,00
	387,74	91,95	15	2	151	106	2	36	16	1,00
	104,85	(104,85)	12	0	215	410	0	40	19	1,00
	280,11	-	42	-	180	230	2	34	18	1,00
21	234,80	590,60	182	2	270	577	2	48	19	0,85
	648,63	13,40	44	6	151	112	6	25	16	1,00
	84,23	68,47	33	1	223	155	1	54	17	1,00
	322,55	224,16	86	3	215	281	3	42	17	0,95
31	358,24	90,55	65	1	195	164	1	44	0	1,00
	803,42	50,17	5057	5	187	200	7	27	11	1,00
	399,00	0,00	3	0	146	122	3	19	15	1,00
	520,22	46,91	1708	2	176	162	4	30	9	1,00
42	1793,59	-	-	-	951	933	10	77	19	-
	216,31	77,30	198	3	189	202	3	31	11	1,00
	1198,57	11,18	502	11	327	331	11	43	14	1,00
	1069,49	-	-	-	489	489	8	50	15	-

Résultats obtenus avec arrêt de CPLEX

	1793,59	126,75	21311	8	951	933	10	77	19	1,57
42	216,31	77,30	157	3	189	202	3	31	11	1,00
	1198,57	11,18	463	11	327	331	11	43	14	1,00
	1069,49	71,74	7310	7	489	489	8	50	15	1,19

TAB. A.39 – Analyse de sensibilité sur des réseaux asymétriques de 20 produits
($f_a = 60 \times ca$)

nb d'arcs taxés	Cplex				Algorithme					
	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	no de l'itération mineure	qualité de la solution
10	142,44	137,39	19	1	172	207	1	27	18	1,00
	288,26	166,91	16	1	158	117	1	41	7	1,00
	0,00	0,00	2	0	197	378	0	36	18	1,00
	143,57	101,43	12	1	176	234	1	35	14	1,00
21	7,92	(7,92)	5	0	196	333	0	37	19	1,00
	379,70	18,66	48	5	185	199	5	37	17	1,00
	52,54	162,69	8	1	262	137	1	66	19	1,00
	146,72	90,68	20	2	214	223	2	47	18	1,00
31	285,48	123,03	27	1	147	121	1	25	16	1,00
	418,00	85,78	2854	0	307	369	2	75	12	0,42
	309,00	0,00	2	0	133	93	3	18	11	1,00
	337,49	69,60	961	0	196	194	2	39	13	0,81
42	1244,29	64,37	224572	6	1040	1222	6	70	19	1,00
	38,27	(38,27)	56	0	195	163	0	51	18	1,00
	729,70	8,74	131	8	324	330	8	53	16	1,00
	670,75	36,56	74920	5	520	572	5	58	18	1,00

TAB. A.40 – Analyse de sensibilité sur des réseaux asymétriques de 20 produits
 $(f_a = 90 \times ca)$

nb d'arcs taxés	Cplex					Algorithme				
	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	no de l'itération mineure	qualité de la solution
10	0,00	0,00	1	0	136	125	0	20	18	1,00
	0,00	0,00	2	0	169	27	0	48	16	1,00
	0,00	0,00	2	0	142	163	0	18	18	1,00
	0,00	0,00	2	0	149	105	0	29	17	1,00
21	0,00	0,00	1	0	119	78	0	16	17	1,00
	0,00	0,00	1	0	178	115	0	40	14	1,00
	0,00	0,00	1	0	178	90	0	43	19	1,00
	0,00	0,00	1	0	158	94	0	33	17	1,00
31	0,00	0,00	3	0	183	71	0	50	19	1,00
	56,68	277,88	9	1	190	130	1	46	14	1,00
	61,00	0,00	2	0	126	57	1	18	15	1,00
	39,23	92,63	5	0	166	86	1	38	16	1,00
42	183,37	(183,37)	100	0	607	1032	1	84	19	(262)
	0,00	0,00	3	0	158	61	0	38	17	1,00
	0,00	0,00	2	0	202	133	1	43	16	(181)
	61,12	-	35	0	322	409	1	55	17	-

TAB. A.41 – Analyse de sensibilité sur des réseaux asymétriques de 20 produits
 $(f_a = 300 \times ca)$

	Cplex				Algorithme					
	nb d'arcs taxés	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	no de l'itération mineure
10	1578,52	25,88	2433	10	77	6	10	0	10	1,00
	2035,02	34,24	937	10	64	1	10	0	0	0,99
	1525,64	38,69	10524	10	61	4	10	0	17	0,96
	1713,06	32,94	4631	10	67	4	10	0	9	0,98
21	1820,32	-	-	-	73	8	21	0	12	-
	2088,57	-	-	-	104	28	18	17	17	-
	2219,58	20,56	81323	21	84	5	21	0	11	0,96
	2042,82	-	-	-	87	14	20	6	13	-

Résultats obtenus avec arrêt de CPLEX

21	1820,32	62,67	4799	21	73	8	21	0	12	1,24
21	2088,57	77,6	5733	21	104	28	18	17	17	1,36
21	2219,58	30,18	3946	21	84	5	21	0	11	1,04
	2042,82	53,89	4826	21	87	14	20	6	13	1,21
31	2111,58	38,74	7320	31	77	8	31	0	19	1,13
31	2945,15	93,51	7529	31	90	28	27	6	14	1,38
31	2418,85	53,38	10669	31	72	5	22	0	5	1,23
	2491,86	61,88	8506	31	80	14	27	2	13	1,25
42	3332,24	34,53	5968	42	97	10	41	2	3	1,11
42	4593,04	68,06	16484	42	85	11	37	1	10	1,38
42	2676,48	11,71	4708	42	87	25	39	1	19	1,00
	3533,92	38,10	9053	42	90	15	39	1	11	1,16

TAB. A.42 – Analyse de sensibilité sur des réseaux symétriques de 20 produits
($f_a = 0 \times ca$)

nb d'arcs taxés	Cplex				Algorithme					
	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de sol. visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'ité. majeure	no de l'ité. mineure	qualité de la sol.
10	1489,74	27,98	1770	9	79	6	10	0	10	1,00
	1977,58	35,54	738	10	76	4	10	2	18	1,00
	1433,38	42,34	10485	10	79	13	10	5	17	0,97
	1633,57	35,29	4331	10	78	8	10	2	15	0,99
21	1663,72	-	-	-	100	25	20	6	4	-
	1923,81	-	-	-	82	34	17	2	17	-
	2040,67	23,01	78570	21	95	14	21	3	16	1,00
	1876,07	-	-	-	92	24	19	4	12	-
42	2900,27	-	-	-	185	81	33	17	18	-
	4148,13	-	-	-	188	43	33	32	11	-
	2224,71	13,33	8941	31	164	100	31	18	16	1,00
	3091,04	-	-	-	179	75	32	22	15	-

Résultats obtenus avec arrêt de CPLEX

21	1663,72	54,19	2695	20	100	25	20	6	4	1,19
	1923,81	100,19	2731	20	82	34	17	2	17	1,50
	2040,67	37,7	2800	17	95	14	21	3	16	1,12
	1876,07	64,03	2742	19	92	24	19	4	12	1,27
31	1819,02	64,62	3734	29	155	81	25	18	2	1,30
	2638,06	186,12	3711	25	154	129	21	18	18	2,00
	2173,79	22,4	3744	21	98	32	17	5	10	1,07
	2210,29	91,05	3730	25	136	81	21	14	10	1,46
42	2900,27	69,41	3607	41	185	81	33	17	18	1,40
	4148,13	236,97	4485	41	188	43	33	32	11	2,80
	2224,71	13,56	8534	32	164	100	31	18	16	1,00
	3091,04	106,65	5542	38	179	75	32	22	15	1,73

TAB. A.43 – Analyse de sensibilité sur des réseaux symétriques de 20 produits
($f_a = 3 \times ca$)

nb d'arcs taxés	Cplex				Algorithme					
	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	no de l'itération mineure	qualité de la solution
10	1006,84	45,50	499	6	92	46	6	10	18	1,00
	1467,12	55,09	1543	10	70	6	10	2	4	1,00
	928,16	60,03	2088	6	79	39	6	7	18	1,00
	1134,04	53,54	1377	7	80	30	7	6	13	1,00
21	911,23	30,18	948	5	113	43	6	16	18	0,98
	1173,77	48,48	88055	8	137	177	9	14	19	0,98
	1199,84	37,6	9579	6	164	66	6	30	6	1,00
	1094,95	38,75	32861	6	138	95	7	20	14	0,99
31	743,97	49,69	11530	6	111	70	6	15	19	1,00
	1406,93	51,28	4354	4	245	284	4	58	19	1,00
	1084,31	41,55	28850	8	186	191	10	28	19	0,97
	1078,40	47,51	14911	6	181	182	7	34	19	0,99
42	1082,54	-	-	-	261	239	9	32	18	-
	2437,83	-	-	-	248	258	8	26	14	-
	1056,71	19,00	143	5	235	375	5	26	19	1,00
	1525,69	-	-	-	248	291	7	28	17	-

Résultats obtenus avec arrêt de CPLEX

	1082,54	116,51	10732	13	261	239	9	32	18	1,62
42	2437,83	217,84	13003	13	248	258	8	26	14	2,17
	1056,71	19	138	5	235	375	5	26	19	1,00
	1525,69	117,78	7958	10	248	291	7	28	17	1,60

TAB. A.44 – Analyse de sensibilité sur des réseaux symétriques de 20 produits
($f_a = 30 \times ca$)

nb d'arcs taxés	Cplex				Algorithme					qualité de la solution
	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	no de l'itération mineure	
10	658,51	81,91	145	5	145	121	6	19	12	1,00
	915,16	36,59	69	3	115	23	3	14	9	1,00
	559,09	122,75	288	4	142	123	4	24	12	1,00
	710,92	80,42	167	4	134	89	4	19	11	1,00
21	642,71	46,40	523	5	129	55	5	12	8	0,97
	693,03	53,33	2312	4	214	371	4	32	19	1,00
	780,81	52,50	490	6	138	59	6	16	13	1,00
	705,52	50,74	1108	5	160	162	5	20	13	0,99
31	295,59	457,72	1359	5	177	165	3	31	15	0,85
	1190,00	48,84	343	3	238	290	3	49	18	1,00
	535,00	181,58	4417	6	259	422	8	21	16	0,68
	673,53	229,38	2040	5	225	292	5	34	16	0,84
42	647,06	43,47	583	4	211	157	4	32	14	1,00
	1715,46	-	-	-	247	203	7	36	14	-
	784,56	26,95	111	4	205	320	5	24	19	1,00
	1049,03	-	-	-	221	227	5	31	16	-

Résultats obtenus avec arrêt de CPLEX

	647,06	43,47	575	4	211	157	4	32	14	1,00
42	1715,32	55,23	18941	7	247	203	7	36	14	1,04
	784,56	26,95	94	4	205	320	5	24	19	1,00
	1048,98	41,88	6537	5	221	227	5	31	16	1,01

TAB. A.45 – Analyse de sensibilité sur des réseaux symétriques de 20 produits
($f_a = 60 \times ca$)

nb d'arcs taxés	Cplex				Algorithme					
	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	no de l'itération mineure	qualité de la solution
10	360,27	291,59	164	5	221	272	5	37	11	1,00
	773,95	30,07	16	2	148	27	2	25	4	1,00
	289,12	863,73	2609	2	192	343	2	37	7	1,00
	474,45	395,13	930	3	187	214	3	33	7	1,00
21	436,61	40,84	41	3	161	34	4	34	13	0,91
	442,8	82,98	183	2	195	380	3	29	12	1,00
	461,58	63,68	73	4	219	165	4	48	10	1,00
	447,00	62,50	99	3	192	193	4	37	12	0,97
31	22,63	(22,63)	12	0	186	171	0	40	19	1,00
	1065,73	56,73	137	3	241	335	3	46	18	1,00
	91,61	663,43	30	1	286	400	1	54	12	1,00
	393,32	-	60	1	238	302	1	47	16	1,00
42	430,59	36,26	284	3	218	177	3	37	14	1,00
	1439,54	81,07	143723	7	272	282	7	37	16	0,95
	555,31	43,12	62	4	282	406	4	66	19	1,00
	808,48	53,48	48023	5	257	288	5	47	16	0,98

TAB. A.46 – Analyse de sensibilité sur des réseaux symétriques de 20 produits
 $(f_a = 90 \times ca)$

Cplex					Algorithme					
nb d'arcs taxés	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	no de l'itération mineure	qualité de la solution
10	0,00	0,00	2	0	195	114	0	44	12	1,00
	353,04	101,74	11	2	127	17	2	19	17	1,00
	0,00	0,00	2	0	175	96	0	44	12	1,00
	117,68	33,91	5	1	166	76	1	36	14	1,00
21	3,31	(3,31)	5	0	168	42	0	32	3	1,00
	0,00	0,00	3	0	212	304	0	45	19	1,00
	0,00	0,00	2	0	184	62	0	50	14	1,00
	1,10	-	3	0	188	136	0	42	12	1,00
31	0,00	0,00	2	0	143	68	0	24	5	1,00
	404,88	185,12	18	1	328	433	1	88	18	1,00
	0,00	0,00	2	0	171	85	0	39	12	1,00
	134,96	61,71	7	0	214	195	0	50	12	1,00
42	0,00	0,00	3	0	227	116	0	67	14	1,00
	226,89	278,15	27	1	264	394	4	34	7	(1088)
	21,55	(21,55)	4	0	344	619	0	87	19	1,00
	82,81	-	11	0	278	376	1	63	13	-

TAB. A.47 – Analyse de sensibilité sur des réseaux symétriques de 20 produits
 $(f_a = 300 \times ca)$

	Cplex				Algorithme					
nb d'arcs taxés	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	no de l'itération mineure	qualité de la solution
Résultats obtenus avec un pas de 5										
21	128,14	212,54	17	2	51	63	2	19	6	(61)
31	271,24	26,75	8	1	49	23	2	16	2	0,56
Résultats obtenus avec un pas de 10										
21	128,14	212,54	17	2	77	65	2	13	19	1,00
31	271,24	26,75	8	1	274	29	1	34	2	1,00

TAB. A.48 – Comparaison des résultats obtenus avec un pas de 5 et un pas de 10 pour des problèmes comportant 10 produits

Cplex					Algorithme					qualité de la solution
nb d'arcs taxés	relaxation	saut de dualité	temps (secondes)	nb d'arcs taxés utilisés	temps (secondes)	nb de solutions visitées	nb d'arcs taxés utilisés	no de l'itération majeure	no de l'itération mineure	
Résultats obtenus avec un pas de 5										
42	183,37	(183,37)	100	0	607	1032	1	84	19	(262)
42	0,00	0,00	2	0	202	133	1	43	16	(180)
42	226,89	278,15	27	1	264	394	4	34	7	(1088)
Résultats obtenus avec un pas de 10										
42	183,37	(183,37)	100	0	671	753	0	71	18	1,00
42	0,00	0,00	2	0	262	127	0	45	5	1,00
42	226,89	27,00	815	27	692	419	1	87	17	1,00

TAB. A.49 – Comparaison des résultats obtenus avec un pas de 5 et un pas de 10 pour des problèmes comportant 20 produits

Annexe B

Calcul d'un chemin de coût minimum

Nous décrivons, dans cette section, un algorithme de calcul de chemin du coût minimum entre une origine et une destination d'un produit k fixé. La présence de tarifs négatifs nous a conduits à considérer l'algorithme de Ford-Bellman-Moore ([6], [20]) .

Pour chaque sommet j , une première étiquette $coût(j)$ indique la longueur du plus court chemin de l'origine du produit vers le sommet j , si un tel chemin existe. Une seconde étiquette $préc(j)$ contient le sommet précédent j sur le chemin courant de valeur $coût(j)$. Ces indices nous permettent de reconstruire le chemin de coût minimum entre l'origine et la destination. Finalement, une troisième étiquette $profit(j)$ associée à chaque sommet représente le profit engendré par le chemin de l'origine à j pour le meneur. Cette étiquette permet de trouver le chemin de coût minimum procurant le meilleur profit au meneur dans le cas où il existe plusieurs chemins de coût minimum.

La mise à jour des étiquettes s'effectue lorsqu'un chemin de coût inférieur est trouvé ou encore lorsque deux chemins de coûts égaux sont trouvés et que l'un d'eux génère un profit supérieur pour le meneur. Les étiquettes sont mises à jour jusqu'à ce qu'elles satisfassent les conditions d'optimalité :

$$\text{coût}(j) \leq \begin{cases} \text{coût}(i) + T_{ij} & \text{si } (i, j) \in \mathcal{A}_1 \\ \text{coût}(i) + d_{ij} & \text{si } (i, j) \in \mathcal{A}_2 \end{cases}$$

$$\text{profit}(j) \geq \text{profit}(i) + T_{ij} \quad \forall (i, j) \in \mathcal{A}_1$$

L'algorithme est rappelé ci-dessous où *Liste* représente la liste séquentielle des sommets à examiner.

Pas 0 : (Initialisation)

1. $\text{coût}(s) \leftarrow 0$ et $\text{préc}(s) \leftarrow 0$.
2. $\text{coût}(j) \leftarrow \infty \quad \forall j \in \mathcal{N} - \{s\}$ et
 $\text{profit}(j) \leftarrow 0 \quad \forall j \in \mathcal{N}$
3. $\text{Liste} = \{s\}$

Pas 1 : (Modification des étiquettes)

Tant que *Liste* n'est pas vide

1. Sélectionner un sommet i dans la *Liste*
2. Pour tous les arcs $(i, j) \in \mathcal{A}$:
 - (a) Deux cas, selon que l'arc est tarifable ou non.
Cas 1 : Si $(i, j) \in \mathcal{A}_1$ alors $c \leftarrow T_{ij}$ et $p \leftarrow T_{ij}$
Cas 2 : Si $(i, j) \in \mathcal{A}_2$ alors $c \leftarrow d_{ij}$ et $p \leftarrow 0$
 - (b) si $(\text{coût}(j) \geq \text{coût}(i) + c)$ ou
 $(\text{coût}(j) = \text{coût}(i) + c \text{ et } \text{profit}(j) \leq \text{profit}(i) + p)$ alors
 - i. $\text{coût}(j) \leftarrow \text{coût}(i) + c$,
 - ii. $\text{profit}(j) \leftarrow \text{profit}(i) + p$,
 - (c) $\text{préc}(j) \leftarrow i$ et
 - (d) si $j \notin \text{Liste}$ alors $\text{Liste} = \text{Liste} \cup \{j\}$

FIG. B.1 – Algorithme de résolution de plus courts chemins