Université de Montréal

LE PRINCIPE, LE THÉORÈME ET LES FONCTIONS DE BLOCH

par

Jean-Philippe Villeneuve

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

août 1999

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

LE PRINCIPE, LE THÉORÈME ET LES FONCTIONS DE BLOCH

présenté par

Jean-Philippe Villeneuve

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Anatole Joffe
(président-rapporteur)

Paul M. Gauthier
(directeur de recherche)

Qazi Ibadur Rahman
(membre du jury)

Mémoire accepté le :

7 février 2000

SOMMAIRE

Le présent mémoire a comme principal objectif la démonstration du Théorème de Bloch. Pour ce faire, nous allons avoir besoin du Principe de Bloch et du Théorème de Rouché. Ainsi, le premier chapitre sera consacré au Principe de Bloch. Nous allons donc parcourir la théorie des familles normales de Paul Montel, pour en arriver à ce principe. Comme autre application, la démonstration du petit Théorème de Picard sera faite. Dans le deuxième chapitre, nous démontrerons le Théorème de Bloch. Notons que le Théorème de Bloch donne, en fait, une caractéristique du comportement de l'image d'une fonction holomorphe définie sur le disque unité. Aussi, nous parlerons de la constante de Bloch, constante qui est rattachée à ce théorème, et nous donnerons quelques applications. De plus, nous allons voir, dans ce même chapitre, le Théorème de Landau, un théorème similaire mais un peu plus facile à expliquer. Comme application, nous avons une autre démonstration du petit Théorème de Picard. En terminant, le troisième chapitre sera constitué d'une étude des fonctions de Bloch. Nous donnerons différentes définitions de ces fonctions et quelques applications utilisant la constante de Bloch et ces fonctions.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je veux remercier mon directeur de recherche Monsieur Paul M. Gauthier pour m'avoir fait découvrir la dynamique des mathématiciens. J'ai beaucoup apprécié sa très grande disponibilité, sa rapidité de correction, son hospitalité et, surtout, son esprit critique de mathématicien. Merci aussi pour l'aide financière qu'il m'a accordée et pour les voyages qu'il a financés, dans lesquels j'ai pu faire des rencontres importantes.

Ensuite, j'aimerais remercier ma famille pour son support, mes amis pour leur confiance et, finalement, Anne pour tout.

Table des matières

Sommaire iii

Remerciements iv

Table des figures vii

Introduction 1

Chapitre 1. Le Principe de Bloch 3

1.1. Notations et topologies utilisées 3

1.2. Les familles normales 5

1.3. Le Théorème de Montel 8

1.4. Le Théorème de Marty 11

1.5. Le Principe de Bloch 14

1.6. Le Principe de Bloch de Robinson-Zalcman 16

1.7. Le Principe Heuristique de Minda 22

Chapitre 2. Le Théorème de Bloch 23

2.1. Le Théorème de Landau 23

2.2. Le Théorème de Bloch 24

2.3. Les constantes de Bloch et de Landau 27

2.4. La fonction extrémale 29

2.5. La semi-continuité du rayon de Landau 29

2.6. La semi-continuité du rayon de Bloch 35

2.7. La démonstration du Théorème 38

2.8. Applications immédiates 41

Chapitre 3. Les fonctions de Bloch 47

3.1. Définitions 47

3.2. Caractérisation des fonctions de Bloch 50

3.3. Applications 58

Conclusion 61

Annexe A. Appendice 63

Bibliographie 68

Table des figures

2.5.1 Le domaine G_n 31

2.5.2 Le disque $D(f(z), \lambda_{f(z)})$ dans $f_n(\Omega_n)$. 34

2.6.1 La disposition des différents rayons. 36

2.7.1 La courbe γ et le domaine G 40

2.8.1 La fonction g 42

3.2.1 Le schéma de la preuve. 53

A.0.1 La fonction $F(s,t)$. 65

INTRODUCTION

Ce mémoire se veut une étude de la théorie engendrée par le mathématicien français André Bloch (1893-1948). André Bloch a démontré, en 1925, un théorème d'analyse complexe qui donne une caractérisation du comportement de l'image d'une fonction holomorphe dont le domaine est le disque unité. Plus formellement, nous avons ceci:

Théorème de Bloch: *Il existe une constante positive B telle que toute fonction holomophe f définie sur le disque unité, avec la propriété que $|f'(0)| = 1$, possède un disque schlicht (un disque avec une certaine propriété) de rayon au moins égale à B dans son image.*

Notons premièrement que les termes seront expliqués au chapitre 2. Remarquons aussi que le mathématicien allemand Paul Koebe (1882-1945) avait démontré, au début du siècle, que toute fonction holomorphe, normalisée et injective du disque unité avait dans son image un disque (schlicht) de rayon au moins égale à 0,25 unité. Comme cette dernière classe de fonctions est incluse dans la classe des fonctions holomorphes, nous avons un indice, qui sera cependant pas utilisé, pour déterminer la valeur de la constante

$$\beta = \sup\{B : \text{ le Théorème de Bloch est vrai}\},$$

dite la constante de Bloch.

Le mathématicien E. Landau (1877-1938) a étudié, dans les mêmes années que Bloch, le comportement des fonctions holomorphes. En considérant non pas des disques schlichts mais tout simplement des disques, il a démontré un théorème analogue à celui de Bloch. Pour la terminologie, ce théorème est le Théorème de Landau et la constante reliée à ce théorème est la constante de Landau.

Les valeurs des constantes de Bloch (β) et de Landau (λ) demeurent encore inconnues. Mais nous avons, quand même, de bons estimés. Ces constantes sont de l'ordre de 0,5 unité. Le chapitre 2 sera consacré à l'étude du Théorème de Bloch et de Landau et de leurs constantes ainsi qu'à la démonstration du Théorème de Bloch.

Cependant pour faire cette démonstration, nous allons avoir besoin de la théorie du Principe de Bloch. Ceci constitura donc le premier chapitre. Le Principe de Bloch est un phénomène décrivant le comportement des familles normales de fonctions holomorphes. Ce concept fut introduit, au début du siècle, par Paul Montel (1876-1975), un mathématicien français. Ainsi nous verrons le Théorème de Montel et ses applications.

Finalement, dans le troisième et dernier chapitre, nous allons discuter les fonctions de Bloch. Ces fonctions peuvent être définies de multiples façons, comme, par exemple, avec la semi-norme de Bloch (définition usuelle) ou en utilisant le concept de famille normale du chapitre 1. À l'aide de ces fonctions, Landau a prouvé un autre théorème. Ce théorème met en relation la classe des fonctions de Bloch et la valeur de la constante de Bloch. Nous pouvons aussi étudier cette classe de fonctions avec de l'analyse fonctionnelle, mais nous ne traiterons pas ce cas dans le présent ouvrage. Nous allons donc seulement voir quelques applications.

Chapitre 1

LE PRINCIPE DE BLOCH

Ce premier chapitre sera consacré à l'explication du Principe de Bloch ou Principe Heuristique. Pour ce faire, nous allons introduire le concept de famille normale de fonctions et étudier la théorie de Paul Montel. En fait, le Principe de Bloch se veut un "test" pour démontrer qu'une famille de fonctions méromorphes ou holomorphes est normale. Notons que dans sa forme générale ce principe est vague et ainsi pas démontrable. Cependant, pour la démonstration du Théorème de Bloch, qui est le principal thème du prochain chapitre, nous allons avoir besoin d'un certain Principe de Bloch. Nous allons donc clore ce chapitre en démontrant le Principe Heuristique de Robinson-Zalcman et énoncer celui de Minda.

1.1. Notations et topologies utilisées

Tout d'abord, nous présentons ici les notations qui seront utilisées dans ce mémoire:

1. $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ représentent respectivement les entiers naturels positifs, les entiers, les nombres rationnels, les nombres réels et les nombres complexes. De plus, la notation $\mathbf{R}^+$ signifira les nombres réels positifs différents de zéro.
2. Nous allons noter la Sphère de Riemann ($\mathbf{C} \cup \{\infty\}$) par $\hat{\mathbf{C}}$.

3. Soient $a \in \mathbf{C}$ et $r \in \mathbf{R}^+$. Alors
   (i) $D(a,r) = \{z \in \mathbf{C} : |z-a| < r\}$ est le disque de centre a et de rayon r.
   (ii) $D'(a,r) = \{z \in \mathbf{C} : 0 < |z-a| < r\}$ est le disque pointé en a.
4. D est le symbole pour le disque unité $D(0,1)$.
5. Soit Ω un ouvert du plan complexe. Alors, $H(\Omega)$ et $M(\Omega)$ représentent respectivement l'ensemble des fonctions holomorphes et méromorphes définies sur Ω.
6. Un *domaine* du plan complexe $\mathbf{C}$ est un ensemble ouvert et connexe.
7. Soit E un ensemble de $\mathbf{C}$. Alors $\overline{E}, \partial E, E^\circ, E^c$ sont respectivement l'adhérance de E, la frontière de E, l'intérieur de E et le complémentaire de E.

Maintenant pour définir la topologie, les ouverts de $\mathbf{C}$ seront les ouverts usuelles, soit engendrés par la distance euclidienne. Pour la convergence des fonctions holomorphes, nous allons utiliser principalement la convergence uniforme sur les compacts. Cette convergence est plus faible que la convergence uniforme, mais plus forte que la convergence point par point. Nous avons les exemples suivants pour illustrer ce fait.

Exemples 1.1.1. 1. Soit le disque unité D et soit la suite $\{f_n\}$ de fonctions holomorphes définies par $f_n(z) = z^n$. Alors la suite converge vers 0 mais pas uniformément sur D (en prenant la suite $\{z_n = 1-1/n\}$, d'où $f_n(z_n) \to e^{-1}$). Cependant la suite converge uniformément sur tout compact de D. En effet soit K un compact de D. Alors posons $M = \max_{z\in K}|z|$. Ainsi $|z|^n \leq M^n$ et nous concluons que la suite converge uniformément sur le compact K.

2. Concernant l'exemple d'une suite de fonctions qui converge point par point mais pas uniformément sur les compacts, nous référons le lecteur à la page 278 du dernier livre de Remmert ([**19**]).

Cette convergence engendre la même topologie que la convergence χ- uniforme sur les compacts, où χ est la distance cordale, soit:

Définition 1.1.2. La distance cordale χ est définie sur $\hat{\mathbf{C}}$ comme suit: si $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, alors

$$\chi(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}},$$

si un des deux points est ∞, alors

$$\chi(z, \infty) = \chi(\infty, z) = \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}.$$

Notons que cette distance est en fait la distance euclidienne dans $\mathbf{R}^3$ entre les deux points sur la Sphère de Riemann qui proviennent de la projection du plan complexe sur la Sphère de Riemann. Ainsi, elle est "plus petite" que la distance euclidienne dans le plan, étant donné qu'elle est la distance euclidienne divisée par un nombre supérieur à un. Nous allons donc munir la Sphère de Riemann de cette métrique et considérer les fonctions méromorphes comme étant des applications holomorphes

$$f : (\Omega, |\cdot|) \to (\hat{\mathbf{C}}, \chi(\cdot, \cdot)),$$

où Ω est ouvert du plan complexe.

1.2. Les familles normales

Dans cette section, nous définirons les familles normales et donnerons quelques exemples. Remarquons que ce terme fut donné par Paul Montel dans un article de 1912.

Définition 1.2.1. Nous disons qu'une famille $\mathcal{F}$ de fonctions holomorphes (méromorphes) définies sur un domaine $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ est normale sur Ω si toute suite $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ contient une sous-suite qui converge uniformément (χ-uniformément) sur tout compact de Ω soit vers une fonction f holomorphe (méromorphe) ou soit vers l'infini.

Remarques 1.2.2.

1. Si une suite $\{f_n\}$ de fonctions holomorphes converge χ-uniformément vers f sur les compacts, on peut montrer que soit f est holomorphe, soit $f \equiv \infty$.
2. Dans la définition normalement donnée dans les livres, nous ne retrouvons pas de caractéristique sur la fonction limite f. En fait, ces caractéristiques découlent de la topologie utilisée, soit la convergence χ-uniforme sur les compacts.
3. Pour une suite de fonctions d'une famille donnée, il peut exister deux sous-suites possédant ces propriétés, c'est-à-dire une de ces sous-suites converge uniformément sur tout compact du domaine vers une fonction holomorphe et l'autre converge uniformément vers l'infini sur tout compact. (Voir l'exemple 1.2.3 no 3.)
4. Lorsque nous disons qu'une suite de fonctions holomorphes converge uniformément vers l'infini, certains auteurs disent plutôt qu'elle diverge uniformément vers l'infini.

Exemples 1.2.3.

1. Si
$$\mathcal{F} = \{f_n(z) = z^n : n \in \mathrm{N}\},$$
alors la famille est normale sur $D = \{z : |z| < 1\}$ et sur $\Omega = \{z : |z| > 1\}$. En effet soit $K \subset D$ un compact. Alors, en posant
$$M = \max\{|a| : a \in K\},$$

nous avons uniformément

$$|f_n(a)| = |a|^n \leq M^n \to 0.$$

Soit maintenant $\tilde{K} \subset \Omega$ un autre compact. Alors posons

$$m = \min\{|a| : a \in \tilde{K}\}.$$

Ceci nous donne que

$$|f_n(a)| = |a^n| \geq |m|^n \to \infty.$$

2. Soit

$$\mathcal{F} = \{f_n(z) = \frac{n}{z}, n \in \mathbf{N}\},$$

Alors les f_n sont des fonctions méromorphes sur D et la suite $\{f_n\}$ converge χ-uniformément sur tout compact K de D vers l'infini. En effet, $\forall 1 > \epsilon > 0$, $\exists N_\epsilon > \sqrt{1/\epsilon^2 - 1}M$ où $M = \max_K |z|$, tel que

$$\chi(f_n(z), \infty) < \epsilon, \forall n > N_\epsilon, \forall z \in K.$$

Donc cette famille est une famille normale.

3. Soit la famille de fonctions holomorphes

$$\mathcal{F} = \{f_c(z) = c^{(-1)^c}, c \in \mathbf{R}\}$$

définies sur D. Alors, cette famille est normale sur D. Dans un premier temps, prenons la sous-suite des indices pairs, soit

$$f_{2n}(z) = n^{(-1)^{2n}} = n, \forall n \in \mathbf{N}.$$

Cette sous-suite converge uniformément vers l'infini, sur tout compact de D. Dans un second temps, regardons la sous-suite des indices impairs,

$$f_{2n-1}(z) = (2n-1)^{(-1)^{2n-1}} = \frac{1}{2n-1}, \forall n \in \mathbf{N}.$$

Donc, celle-ci converge uniformément sur tout compact de D vers la fonction identiquement nulle, ($f \equiv 0$).

4. Soit

$$\mathcal{F} = \{f_n(z) = nz : n \in \mathbf{N}\}.$$

Alors, comme

$$f_n(0) = 0, \forall n \text{ et } f_n(z) \to \infty, \forall z \neq 0,$$

nous trouvons que $\mathcal{F}$ n'est pas une famille normale sur tout domaine contenant l'origine.

1.3. Le Théorème de Montel

Introduisons, tout d'abord, les concepts de famille de fonctions continues localement bornée et équicontinue et, par la suite, le Théorème d'Arzéla-Ascoli. Ensuite, nous étudirons le Théorème de Montel et ses applications, comme la démonstration du petit Théorème de Picard.

Définition 1.3.1. Soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions continues définies sur un domaine Ω. Alors,

1. elle est localement bornée sur ce domaine Ω si pour tout $z_0 \in \Omega$ il existe un voisinage $V(z_0) \subset \Omega$ et une constante réelle positive $M(z_0)$ tels que

$$|f(z)| \leq M, \forall z \in V(z_0), \forall f \in \mathcal{F};$$

2. elle est équicontinue sur un domaine Ω si $\forall z_0 \in \Omega$ et $\forall \epsilon > 0$, il existe un voisinage $V(z_0)$ tel que

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon, \forall z \in V(z_0), \forall f \in \mathcal{F}.$$

Théorème 1.3.2 (Théorème d'Arzéla-Ascoli). *Si $\mathcal{F}$ est une famille localement bornée et équicontinue de fonctions définies sur Ω, alors pour tout suite $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ il existe une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction f continue.*

Notons que la contribution d'Ascoli est de 1883 et celle d'Arzéla de 1895. Qu'arrive-t-il lorsque les fonctions de la famille sont holomorphes? C'est ce qu'a découvert Paul Montel (1876-1975). Nous allons donc présenter, sans démontrer, ce fameux Théorème de Montel. Montel le démontra en 1907 (dans sa thèse), et indépendamment le mathématicien Koebe le prouva un an plus tard.

Théorème 1.3.3 (Théorème de Montel). *Si $\mathcal{F}$ est une famille localement bornée de fonctions holomorphes, alors $\mathcal{F}$ est une famille normale.*

Remarques 1.3.4.

1. Une famille localement bornée de fonctions holomorphes est équicontinue et donc le Théorème de Montel est une conséquence du Théorème d'Arzéla-Ascoli.
2. Il existe des familles normales de fonctions holomorphes qui ne sont ni localement bornées ni équicontinues. Donc la réciproque du Théorème de Montel n'est pas vraie. En effet, soit f une fonction holomorphe non-constante qui ne s'annule jamais sur un domaine Ω. Considérons la famille

$$\mathcal{F} = \{cf(z) : c \in \mathbf{R}^+\}$$

de fonctions holomorphes. Alors cette famille est normale, car la fonction f est éloignée de 0 et de ∞ sur tout compact et toute suite de nombres dans $\mathbf{R}^+$ a une sous-suite qui converge vers une valeur dans $\mathbf{R}^+ \cup \{0\} \cup \{\infty\}$. Mais, cette famille n'est clairement pas bornée localement et sûrement pas équicontinue, car pour $z_0, z \in \Omega$, nous avons

$$|cf(z) - cf(z_0)| = c|f(z) - f(z_0)|.$$

3. Si une famille normale $\mathcal{F}$ de fonctions holomorphes est bornée en un seul point du domaine de définition, alors la famille $\mathcal{F}$ est localement bornée. Ceci vient du fait que la fonction limite f de n'importe quelle suite est holomorphe, donc bornée sur tout compact.

Pour clore cette section, nous allons donner quelques applications du Théorème de Montel, dont une nous servira dans le troisième chapitre.

Proposition 1.3.5 (Test Fondamental de Normalisation(TFN)). *Soient $a, b \in \mathbf{C}$ et soit une famille $\mathcal{F}$ de fonctions holomorphes définies sur un domaine Ω qui ne prennent pas les valeurs a et b. Alors $\mathcal{F}$ est normale sur Ω.*

Dans la démonstration, la fonction modulaire elliptique est utilisée. Comme application immédiate de ce test est la preuve du petit Théorème de Picard.

Théorème 1.3.6 (Petit Théorème de Picard). *Une fonction entière non-constante omets au plus une valeur de $\mathbf{C}$.*

Démonstration. Supposons que f soit une fonction entière qui ne prend pas les valeurs a et b de $\mathbf{C}$, avec $a \neq b$. Ainsi, posons

$$D_n = \{\zeta \in \mathbf{C} : |\zeta| < 2^n\},$$

pour $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, et

$$f_n(z) = f(2^n z). \tag{1.3.1}$$

Ceci nous donne une suite de fonctions entière telle que

$$f_n(D_1) = f(D_{n+1}), \forall n. \tag{1.3.2}$$

Donc la suite $\{f_n\}$ omets les deux points a et b. Par le Test Fondamental de Normalisation (voir Proposition 1.3.5), nous avons que $\{f_n\}$ est une famille normale dans D_1. Comme la suite $\{f_n\}$ est localement bornée en 0 (car $f_n(0) = f(0), \forall n$), nous avons que $\{f_n\}$ est bornée sur tout compact de D_1. En particulier, il existe une constante $M > 0$ telle que

$$|f_n(z)| < M, \forall z \in \overline{D_0}. \tag{1.3.3}$$

Donc, par les équations 1.3.1 et 1.3.3, nous trouvons que

$$|f(z)| \leq M, \forall z \in \mathbf{C},$$

et nous concluons que la fonction f est constante, par le Théorème de Liouville. Et le théorème est démontré. □

Voici en terminant un autre théorème. Celui-ci sera utilisé dans le troisième chapitre.

Théorème 1.3.7. *Soit $\mathcal{F}$ une famille normale de fonctions holomorphes définies sur un domaine Ω. Alors la famille $\mathcal{F}' = \{f' : f \in \mathcal{F}\}$ est localement bornée (et donc normale) s'il existe un point $z_0 \in \Omega$ et une constante réelle M tels que $|f(z_0)| < M, \forall f \in \mathcal{F}$.*

1.4. Le Théorème de Marty

Le Théorème de Marty est, en fait, une caractérisation des familles normales de fonctions méromorphes. Avant de l'énoncer, nous allons voir les théorèmes de la section précédente dans leurs versions méromorphes, soit le Théorème de Montel, le TFN et le Petit Théorème de Picard. Commençons donc avec le Théorème de Montel.

Théorème 1.4.1 (Théorème de Montel). *Une famille $\mathcal{F}$ de fonctions méromorphes est normale sur un domaine Ω si et seulement si $\mathcal{F}$ est une famille χ-équicontinue sur Ω, c'est-à-dire équicontinue avec la distance cordale.*

Pour ce qui concerne le Test Fondamental de Normalisation, nous le retrouvons sous une forme plutôt similaire.

Proposition 1.4.2 (Test Fondamental de Normalisation Généralisé). *Soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions méromorphes définies sur un domaine Ω qui ometent trois valeurs distinctes $a, b, c \in \hat{\mathbf{C}}$. Alors la famille $\mathcal{F}$ est normale sur Ω.*

DÉMONSTRATION. Si la valeur ∞ n'est pas prise par les fonctions de la famille $\mathcal{F}$, alors toutes les fonctions de la famille sont holomorphes. Donc, nous appliquons directement le TFN de la version holomorphe (voir Propostion 1.3.5). Sinon, nous avons que $a, b, c \in \mathbf{C}$. Aussi, définissons la famille

$$\mathcal{G} = \left\{ g(z) = \frac{c-a}{c-b}\frac{f(z)-b}{f(z)-a} : f \in \mathcal{F} \right\}.$$

Comme la famille $\mathcal{G}$ est une famille de fonctions holomorphes qui ometent les points 0 et 1, nous pouvons appliquer le TFN de la version holomophe. Ceci nous donne que $\mathcal{G}$ est une famille normale avec la métrique usuelle. Puisque cette métrique est plus grande que la métrique cordale, nous concluons que la famille $\mathcal{G}$ est aussi normale avec la métrique cordale. Comme les transformations homographiques sont χ-uniformément continues, nous concluons que la famille $\mathcal{F}$ est normale. $\square$

Avec cette généralisation au cas méromorphe du Test Fondamental de Normalisation, nous pouvons, comme application immédiate, démontrer le Petit Théorème de Picard dans sa version méromorphe. Mais, il est plus facile d'utiliser la version holomorphe de ce théorème pour le démontrer.

Théorème 1.4.3 (Petit Théoreme de Picard). *Soit f une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ qui omets trois valeurs distinctes. Alors f est une fonction constante sur $\mathbf{C}$.*

DÉMONSTRATION. Si $f(z) \neq \infty, \forall z \in \mathbf{C}$, alors nous sommes dans le cas holomorphe et c'est déjà démontré (voir Théorème 1.3.6). Sinon, prenons

$$g(z) = \frac{c-a}{c-b}\frac{f(z)-b}{f(z)-a}.$$

Laquelle fonction omets les points 0 et 1, et donc par la version holomorphe de ce théorème (voir Théorème 1.3.6), nous avons le résultat. □

En terminant, il y a une magnifique caractérisation des familles normales de fonctions méromorphes, qui est donnée par le Théorème de Marty. Mais il est peu utilisé dans la pratique, car il est difficilement applicable à une famille quelconque de fonctions méromorphes. Cependant, il intervient dans la démonstration du Théoème de Bloch. Voici donc l'énonce de ce théorème et la définition de dérivée sphérique d'une fonction méromorphe.

Définition 1.4.4. La dérivée sphérique d'une fonction méromorphe est définie comme suit:

$$f^{\#}(z) = \lim_{h\to 0} \frac{\chi(f(z+h), f(z))}{|h|} = \begin{cases} \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} & \text{si } f(z) \neq \infty \\ \left|\left(\frac{1}{f}\right)'(z)\right| & \text{si } f(z) = \infty. \end{cases}$$

En fait, c'est la norme de la dérivée de la fonction f mais calculée avec la métrique cordale ou sphérique, c'est-à-dire la constante de Lipschitz de f.

Théorème 1.4.5 (Théorème de Marty). *Une famille $\mathcal{F}$ de fonctions méromorphes est normale sur un domaine Ω si et seulement si la famille $\mathcal{F}^{\#}$ des dérivées sphériques est localement bornée, c'est-à-dire pour tout compact K de Ω, il existe une constante $C(K)$ telle que*

$$f^{\#}(z) \leq C, \forall z \in K, \forall f \in \mathcal{F}.$$

1.5. Le Principe de Bloch

Même si le Théorème de Marty est un théorème magnifique, dans la pratique il est très difficile à appliquer, car il faut montrer que la famille des dérivées sphériques est localement bornée. Il faut donc trouver un test ou un critère pour caractériser les familles normales de fonctions méromorphes. Ainsi, le Principe Heuristique ou le Principe de Bloch se veut une telle caractérisation. Ce Principe a été formalisé par A. Robinson dans son article de 1973 (voir **[20]**). Il discute, dans cet article, des principaux problèmes des mathématiques contemporaines. Tout d'abord, nous allons noter $\langle f, \Omega \rangle$ pour signifier que f est une fonction définie sur le domaine Ω. Aussi nous allons considérer que $\langle f, \Omega \rangle$ et $\langle f, \tilde{\Omega} \rangle$ sont deux éléments distincts si $\Omega \neq \tilde{\Omega}$ (bien sûr f doit être définie sur Ω et $\tilde{\Omega}$). Maintenant, nous énoncerons seulement ce principe et donnerons quelques exemples et contre-exemples. Les deux prochaines sections seront consacrées à la description plus formelle d'exemples du Principe de Bloch. Le Principe de Bloch se lit comme suit:

Principe de Bloch: Une famille de fonctions holomorphes (méromorphes) ayant une propriété $\mathcal{P}$ en commun dans un domaine Ω est ou peut être une famille normale sur Ω si la propriété $\mathcal{P}$ n'est pas possédée par aucune fonction entière (méromorphe) non-contante du plan $\mathbf{C}$.

Regardons d'un peu plus près ce Principe.

Exemples 1.5.1. 1. Disons que f a la propriété $\mathcal{P}$ sur Ω si $|f(z)| < 23, \forall z \in \Omega$. Notons ainsi $\langle f, \Omega\rangle \in \mathcal{P}$. Par le Théorème de Liouville, une fonction entière bornée est constante, et par le Théorème de Montel (voir Théorème 1.3.3) la famille $\{f : \langle f, \Omega\rangle \in \mathcal{P}\}$, avec Ω fixé, est normale. Donc, dans ce cas-ci, nous avons bien que la propriété $\mathcal{P}$ n'est vérifiée par aucune fonction entière non-constante, et que la famille $\mathcal{F}$ est normale.

2. Soient a, b, c trois points distints de $\hat{\mathbf{C}}$. Alors,

$$\langle f, \Omega\rangle \in \mathcal{P} \text{ si } f(z) \neq a, b, c, \forall z \in \Omega.$$

Par le petit Théorème de Picard (voir Théorème 1.4.3), une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ qui omets trois valeurs distinctes est constante et, par le Test Fondamental de Normalisation Généralisé (voir Proposition 1.4.2), nous avons que la famille $\{f : \langle f, \Omega\rangle \in \mathcal{P}\}$, avec Ω fixé, est normale.

3. Voici maintenant un exemple d'une famille qui n'est pas normale et dans laquelle aucune fonction entière possède une certaine propriété: soit g une fonction holomorphe sur le disque unité D et soit D le domaine naturel de g. Posons

$$\mathcal{F} = \{f_c(z) = cz + g(z), \forall c \in \mathbf{R}, \forall z \in D,$$

et

$$\langle f, \Omega\rangle \in \mathcal{P}, \text{ si } \exists c : f(z) = f_c(z), \forall z \in \Omega.$$

Ainsi, nous avons

$$\langle f, \Omega \rangle \notin \mathcal{P}, \forall \Omega \supset D \text{ et } \Omega \neq D.$$

En particulier, nous pouvons prendre $\Omega = \mathbf{C}$. Clairement, la famille $\mathcal{F}$ n'est pas normale.

1.6. Le Principe de Bloch de Robinson-Zalcman

Nous allons finalement présenter le premier Principe de Bloch démontré. Il a été formalisé par A. Robinson en 1973 (voir **[20]**) et prouvé par L. Zalcman en 1975 (voir **[25]**). Nous expliquerons donc ce principe, le démontrerons et donnerons des applications.

Définition 1.6.1. Soit $\mathcal{P}$ une propriété (i.e. un ensemble d'éléments $\langle f, \Omega \rangle$) de fonctions méromorphes. Alors $\mathcal{P}$ est appelé une propriété normale si les conditions suivantes sont vérifiées:

1. Si $\langle f, \Omega \rangle \in \mathcal{P}$ et $\tilde{\Omega}$ est un domaine inclus dans Ω, alors $\langle f, \tilde{\Omega} \rangle \in \mathcal{P}$.
2. Si $\langle f, \Omega \rangle \in \mathcal{P}$ et $\phi(z) = az + b, a \neq 0$, alors $\langle f \circ \phi, \phi^{-1}(\Omega) \rangle \in \mathcal{P}$.
3. Soit $\{\langle f_n, \Omega_n \rangle \in \mathcal{P}\}$ avec $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots$ une suite de domaines qui recouvre $\mathbf{C}(\mathbf{C} = \cup \Omega_n)$. Alors si $\{f_n\}$ converge χ-uniformément sur les sous-ensembles compacts de $\mathbf{C}$ vers f, alors $\langle f, \mathbf{C} \rangle \in \mathcal{P}$.
4. Si $\langle f, \mathbf{C} \rangle \in \mathcal{P}$, alors f est une constante.

Théorème 1.6.2 (Le Principe de Bloch de Robinson-Zalcman). *Si $\mathcal{P}$ est une propriété normale, alors la famille suivante est normale sur Ω un domaine de $\mathbf{C}$:*

$$\mathcal{F} = \{f : \langle f, \Omega \rangle \in \mathcal{P}\}.$$

Lemme 1.6.3 (Lemme de Zalcman). *Soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions holomorphes (méromorphes) définies sur le disque unité D. Alors $\mathcal{F}$ n'est pas une famille normale sur D si et seulement si il existe*

1. *un nombre réel r entre 0 et 1,*
2. *des points z_n, tels que $|z_n| < r$,*
3. *une suite $\{f_n\}$ de fonctions de $\mathcal{F}$,*
4. *une suite de nombres réels ρ_n qui converge vers zéro,*

tels que

$$g_n(\zeta) = f_n(z_n + \rho_n\zeta) \to g(\zeta)$$

converge uniformément (χ-uniformément) sur tout compact de $\mathbf{C}$ vers une fonction entière (méromorphe) g non-constante.

Nous pouvons trouver quelques exemples de familles qui ne sont pas normales avec ce lemme, mais sa principale utilité est de démontrer le Principe de Robinson-Zalcman, ce que nous allons faire.

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{P}$ une propriété normale, et supposons que $\mathcal{F}$ ne soit pas une famille normale. Alors il existe un disque $D(a, s) \subset \Omega$ sur lequel $\mathcal{F}$ n'est pas normale. Par la condition (1), si $f \in \mathcal{F}$, alors nous trouvons que $\langle f, D(a, s)\rangle \in \mathcal{P}$, car $D(a, s) \subset \Omega$ et $\langle f, \Omega\rangle \in \mathcal{P}$. En prenant la fonction $\phi(z) = sz + a$ et en utilisant la deuxième condition, nous pouvons remplacer Ω par $\phi^{-1}(\Omega)$ et supposer que $D(a, s) = D(0, 1)$. Comme la famille $\mathcal{F}$ n'est pas normale sur le disque unité D, nous obtenons, par le Lemme de Zalcman, une suite de fonctions $\{f_n\}$ dans $\mathcal{F}$, une suite de points $\{z_n\}$ inférieur en module à un certain $r \in (0, 1)$ et une suite de nombres réels ρ_n, convergeant vers 0, tels que

$$g_n(\zeta) = f_n(z_n + \rho_n\zeta) \to g(\zeta)$$

converge uniformément (χ-uniformément) sur tout compact de $\mathbf{C}$ vers une fonction entière (méromorphe) g non-constante. Considérons maintenant la suite de fonctions $\{g_n\}$ et posons

$$R_n = \frac{1-r}{\rho_n} \text{ et } \Omega_n = \{\zeta : |\zeta| < R_n\}.$$

Notons que la suite $\{R_n\}$ est une suite croissante de nombres réels. Ainsi, si $|\zeta| < R_n$, nous obtenons que $|z_n + \rho_n \zeta| < 1$ et donc, par (2), que $\langle g_n, \Omega_n \rangle \in \mathcal{P}, \forall n$. Comme $\{g_n\}$ converge uniformément (χ-uniformément) sur tout compact de $\mathbf{C} = \cup \Omega_n$, nous trouvons par (3) que $\langle g, \mathbf{C} \rangle \in \mathcal{P}$. Finalement, en appliquant la quatrième condition, nous concluons que g est identiquement une constante. Ceci nous donne la contradiction. $\square$

Comme première application du Principe Heuristique de Robinson-Zalcman, nous avons la démonstration du Test Fondamental de Normalisation Étendu.

Proposition 1.6.4 (Test Fondamental de Normalisation Étendu). *Soit $\epsilon > 0$ et soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions méromorphes définies sur Ω. Alors, supposons que toute fonction f de $\mathcal{F}$ omets trois valeurs (distinctes) $a, b, c \in \hat{\mathbf{C}}$, valeurs qui dépendent de la fonction f, tels que*

$$\chi(a,b)\chi(b,c)\chi(c,a) \geq \epsilon > 0.$$

Alors la famille $\mathcal{F}$ est normale sur Ω.

Démonstration. Considérons la propriété suivante: $\langle f, \Omega \rangle \in \mathcal{P}_\epsilon$ si f omets trois valeurs (distinctes) $a, b, c \in \hat{\mathbf{C}}$ tels que

$$\chi(a,b)\chi(b,c)\chi(c,a) \geq \epsilon > 0.$$

Montrons que $\mathcal{P}_\epsilon$ est une propriété normale. Il faut donc vérifier les quatres conditions de la définition.

1. Si $\langle f, \Omega \rangle \in \mathcal{P}_\epsilon$ et $\Omega' \subset \Omega$, alors il est clair que si l'on restreint le domaine de f à $\tilde{\Omega}$, la propriété sera conservée.
2. Si $\langle f, \Omega \rangle \in \mathcal{P}_\epsilon$ et $\phi(z) = \alpha z + \beta$, alors, comme $f(\Omega) = f \circ \phi(\phi^{-1}(\Omega))$, nous avons que $\langle f \circ \phi, \phi^{-1}(\Omega) \rangle \in \mathcal{P}_\epsilon$.
3. Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions holomorphes (méromorphes) qui ometent les valeurs a_n, b_n, c_n avec

$$\chi(a_n, b_n)\chi(b_n, c_n)\chi(c_n, a_n) \geq \epsilon > 0,$$

et qui converge uniformément (χ-uniformément) sur les compacts de $\mathbf{C}$ vers une fonction f. Dans le cas où la fonction f est une constante, nous avons le résultat, soit $\langle f, \mathbf{C} \rangle \in \mathcal{P}_\epsilon$. Sinon, comme la Sphère de Riemann est compacte, nous trouvons, en passant possiblement à une sous-suite, l'existence de points distincts a, b, c tels que

$$\chi(a_n, a) \to 0, \chi(b_n, b) \to 0, \chi(c_n, c) \to 0.$$

Ainsi

$$\chi(a, b)\chi(b, c)\chi(c, a) \geq \epsilon > 0,$$

par continuité. Il reste à montrer que f ne prends pas les valeurs a, b, c. Supposons qu'il existe un point $z_0 \in \mathbf{C}$ tel que $f(z_0) = a$. Si $a \neq \infty$, alors il existe un rayon $r > 0$ tel que sur $\overline{D(z_0, r)}$ la fonction f est bornée et holomorphe. De plus la suite $\{f_n - a_n\}$ converge uniformément vers $f - a$ sur ce compact. Par le Théorème de Hurwitz (voir Théorème A.8) et par le fait que f n'est pas constante, nous trouvons que $f_n - a_n$ possède le même nombre de zéros que $f - a$ pour n assez grand, ce qui est une contradiction.

Dans l'autre cas, (où $a = \infty$) il suffit d'appliquer le même raisonnement à $1/f_n$ et à $1/f$. Donc $\langle f, \mathbf{C}\rangle \in \mathcal{P}_\epsilon$.

4. Si $\langle f, \mathbf{C}\rangle \in \mathcal{P}_\epsilon$, alors par le Petit Théorème de Picard (voir Théorème 1.4.3), nous avons que f est une fonction constante.

Donc la famille $\mathcal{F} = \{\langle f, \Omega\rangle \in \mathcal{P}\}$ est une famille normale sur Ω. □

Mais ce principe a quand même ses limites. En effet, nous allons donner deux contre-exemples. Dans ces deux contre-exemples, une famille sera normale et l'autre non. Elles vont vérifier le Principe de Bloch, mais pas celui de Robinson-Zalcman.

Contre-exemples 1.6.5. 1. Disons que

$$\langle f, \Omega\rangle \in \mathcal{P} \text{ si } f \text{ est une fonction bornée sur } \Omega.$$

Nous avons déjà démontrer que la famille $\mathcal{F} = \{f : \langle f, \Omega\rangle \in \mathcal{P}\}$, avec Ω un domaine de $\mathbf{C}$ fixé est une famille normale. Mais nous ne pouvons pas appliquer le Principe de Robinson-Zalcman, car la troisième condition n'est pas vérifiée. En effet, prenons une fonction entière non-constante et considérons la suite de domaines $\Omega_n = \{z \in \mathbf{C} : |z| < n\}$. Alors $\langle f, \Omega_n\rangle \in \mathcal{P}, \forall n$ et $\langle f, \Omega\rangle \notin \mathcal{P}$.

2. Soient a, b deux points distincts du plan complexe $\mathbf{C}$. Définissons alors la propriété $\mathcal{P}$ de fonctions holomorphe comme suit:

$$\langle f, \Omega\rangle \in \mathcal{P} \text{ si } \begin{array}{l} 1.\ f' \text{ omets les deux valeurs } a \text{ et } b, \\ 2.\ f'(z) \neq f(z), \forall z \in \Omega. \end{array}$$

Ainsi, si $\langle f, \mathbf{C}\rangle \in \mathcal{P}$, alors la fonction holomorphe f' ne prend pas les valeurs a et b. Donc, par le Petit Théorème de Picard (voir Théorème 1.3.6), nous obtenons que f' est une fonction constante, d'où, $f(z) = cz+d$

avec $c, d \in \mathbf{C}$. Mais, comme

$$f(z) - f'(z) = cz + d - c \neq 0,$$

nous concluons que la fonction f est une constante. Nous avons donc démontrer que la condition 4 est vérifiée et, par conséquent, la condition du Principe de Bloch aussi. Cependant, en prenant la famille

$$\mathcal{F} = \{f_n(z) = nz : n \in \mathbf{N}\},$$

de fonctions holomorphes définies sur le disque unité D. Nous avons bien que f_n' omets tous les points non-naturels du plan complexe et que $n - nz \neq 0, \forall z \in D$. Donc $\langle f_n, D\rangle \in \mathcal{P}, \forall n$ et nous avons déjà montrer que cette famille n'est pas normale. Revenons maintenant à la propriété $\mathcal{P}$ avec a, b quelconques et démontrons qu'elle n'est pas une propriété normale au sens de la définition 1.6.1. En fait, nous allons montrer que la deuxième condition n'est pas vérifiée. Soit $\{\langle f_n, \Omega\rangle \in \mathcal{P}\}$ avec les f_n non-constantes. Comme la fonciton f_n n'est pas constante, il existe un point z_0 tel que $f_n'(z_0) = \alpha \neq 0$. Comme a et b sont distincts, nous pouvons supposer $a \neq 0$. Choisissons β tel que z_0 soit un point de l'image de la fonction

$$\phi(\zeta) = \frac{a}{\alpha}\zeta + \beta.$$

Ainsi, comme il existe un point $\zeta_0 \in \phi^{-1}(\Omega)$ tel que $\phi(\zeta_0) = z_0$, nous avons que la fonction $(f \circ \phi)'$ prends la valeur a en z_0. Donc $\langle f \circ \phi, \phi^{-1}(\Omega)\rangle \notin \mathcal{P}$ et la prorpiété $\mathcal{P}$ n'est pas normale.

1.7. Le Principe Heuristique de Minda

Le but de cette section est d'énoncer un théorème qui sera utilisé dans la preuve du Théorème de Bloch.

Définition 1.7.1. Soit $\mathcal{P}$ une propriété de fonctions holomorphes. Alors $\mathcal{P}$ est appelé une propriété $\mathcal{M}$-normale si les cinq conditions suivantes sont vérifiées:

1. Si $\langle f, \Omega\rangle \in \mathcal{P}$ et $\tilde{\Omega}$ est un domaine inclu dans Ω, alors $\langle f, \tilde{\Omega}\rangle \in \mathcal{P}$.
2. Si $\langle f, \Omega\rangle \in \mathcal{P}$ et $\phi(z) = az + b, a \neq 0$, alors $\langle f \circ \phi, \phi^{-1}(\Omega)\rangle \in \mathcal{P}$.
3. Si $\langle f, \Omega\rangle \in \mathcal{P}$ et $c \in \mathbf{C}$, alors $\langle f + c, \Omega\rangle \in \mathcal{P}$.
4. Soit $\{\langle f_n, \Omega_n\rangle \in \mathcal{P}\}$ avec $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots$ une suite de domaines qui recouvre $\mathbf{C}(\mathbf{C} = \cup\Omega_n)$. Si $\{f_n\}$ converge uniformément sur les sous-ensembles compacts de $\mathbf{C}$ vers f, alors $\langle f, \mathbf{C}\rangle \in \mathcal{P}$.
5. La fonction identitée I associée au domaine $\mathbf{C}$ n'est pas un élément de $\mathcal{P}$, c'est-à-dire $\langle I, \mathbf{C}\rangle \notin \mathcal{P}$.

Théorème 1.7.2. *Si $\mathcal{P}$ est une propriété $\mathcal{M}$-normale, alors la famille suivante:*

$$\mathcal{F} = \{f : \langle f, \Omega\rangle \in \mathcal{P}\}$$

est normale sur Ω.

La démonstration est sensiblement la même que celle du Principe de Robinson-Zalcman. On peut consulter le livre de Schiff (voir **[23]**) à la page 109.

Chapitre 2

LE THÉORÈME DE BLOCH

Tout d'abord, mentionnons que ce chapitre est le principal chapitre de ce mémoire. Ainsi, nous allons démontrer le Théorème de Bloch. En fait, nous commencerons avec la description du problème rattaché au Théorème de Landau, un théorème moins fort mais tout aussi joli que le Théorème de Bloch. Ensuite viendra les sections traitant du Théorème de Bloch, des constantes de Bloch et de Landau et de l'étude de la semi-continuité du rayon de Bloch et de Landau. Finalement la fameuse démonstration et quelques applications termineront ce chapitre.

2.1. Le Théorème de Landau

Le Théorème de Landau est un théorème qui caractérise l'image d'une fonction holomorphe. En fait, il répond au problème suivant:

Problème 1: Est-ce qu'il existe une constante $r_0 > 0$ telle que toute fonction holomorphe non-constante du disque unité possède dans son image un disque de rayon au moins r_0?

Une première remarque, c'est la normalisation des fonctions. En effet, prenons la suite de fonction $f_n = z/n$. Ainsi nous obtenons que

$$r_0 = \lim_{n\to\infty} 1/n = 0,$$

ce qui n'est pas très intéressant. La normalisation qui sera utilisée sera $|f'(0)| = 1$.

Pour faciliter la notation, introduisons donc la terminologie suivante:

Notation 2.1.1. Soit $f \in H(D)$. Dans le cas où f est une fonction constante, nous noterons $\lambda_f = 0$. Sinon, nous définissons pour tout $z \in D$

$$\lambda_{f(z)} = \sup\{r : D(f(z), r) \subset f(D)\},$$

et

$$\lambda_f = \sup\{\lambda_{f(z)} : z \in D\}.$$

Ainsi, nous avons que $\lambda_{f(z)}$ représente le plus grand disque centré en $f(z)$ et compris dans $f(D)$. De plus, λ_f est aussi appelé le rayon intérieur de $f(D)$. Avec cette terminologie, nous sommes en mesure d'énoncer le Théorème de Landau qui résout le Problème 1 et se lit comme suit:

Théorème 2.1.2 (Théorème de Landau). *Il existe une constante réelle L positive telle que toute fonction holomorphe avec $|f'(0)| = 1$ et définie sur D possède un disque dans son image de rayon au moins L, c'est-à-dire $\lambda_f \geq L$.*

Remarquons que si pour une certaine constante $L_0 > 0$ le Théorème de Landau est vrai, alors le théorème demeurera vrai pour $0 < L < L_0$. Ainsi, posons

$$\lambda = \sup\{L : \text{ le Théorème 2.1.2 est vrai}\}.$$

Aussi, nous pouvons définir cette constante, nommée la constante de Landau, comme suit:

$$\lambda = \inf\{\lambda_f : f \in H(D) \text{ et } |f'(0)| = 1\}.$$

2.2. Le Théorème de Bloch

Soit $f \in H(D)$. Alors la fonction f, vue comme une fonction du disque de rayon 1 centré à l'origine de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$, est une fonction C^∞. Ainsi, nous pouvons appliquer le Théorème des fonctions inverses (voir Théorème A.2). Nous obtenons donc qu'il existe, en tout point z_0 où le jacobien de f ne s'annule pas ($Jac_R f(z_0) \neq 0$), des voisinages U de z_0 et V de $f(z_0)$ tels que la fonction f est inversible, (de manière équivalente, nous disons que f est une bijection de U sur V). Comme conséquence immédiate des équations de Cauchy-Riemann, nous avons la remarque suivante:

Proposition 2.2.1. *Soit $f \in H(\mathbf{C})$ et soit $Jac_C f$ la notation du jacobien complexe, respectivement $Jac_R f$ pour le jacobien réel, de la fonction f vue comme une fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$. Alors nous avons l'égalité suivante:*

$$Jac_R f(z) = |Jac_C f(z)|^2,$$

et la définition naturelle:

$$f'(z) = Jac_C f(z).$$

Définition 2.2.2. Soit f une fonction holomorphe définie sur un domaine Ω du plan complexe et soit $z \in \Omega$. Alors un disque $D(f(z), r)$ est dit un disque *schlicht* en $f(z)$ s'il existe un voisinage ouvert U de z dans Ω tel que la fonction

$$f|_U : U \to D(f(z), r)$$

est une bijection, donc biholomorphe.

En utilisant cette terminologie, le Théorème des fonctions inverses nous prouve l'existence d'un disque schlicht en l'image de tout point où le jacobien d'une fonction holomorphe ne s'annule pas. Par conséquent, toute fonction holomorphe non-constante du disque unité possède un disque schlicht dans son image. Nous pouvons donc ajouter cette contrainte au problème 1. Ceci nous donne

Problème 2: Est-ce qu'il existe une constante $r_1 > 0$ telle que toute fonction holomorphe non-constante du disque unité possède dans son image un disque schlicht de rayon au moins r_1?

Commençons avec l'exemple suivant. Prenons la suite de fonctions holomorphes et injectives $f_n = z/n$. Alors, nous trouvons

$$r_1 \leq r_0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Ceci nous démontre qu'il nous faut aussi une normalisation.

Notation 2.2.3. Soit $f \in H(D)$ et $z \in D$. Dans le cas où f ne possède aucun disque schlicht centré en $f(z)$, nous noterons $\beta_{f(z)} = 0$. Sinon posons

$$\beta_{f(z)} = \sup\{r : D(f(z), r) \text{ est un disque schlicht}\}.$$

De plus, nous définissons:

$$\beta_f = \sup\{\beta_{f(z)} : z \in D\}.$$

Une première remarque, pour nous donner un indice sur la réponse du Problème 2, est le Théorème de Distortion de Koebe (voir [**18**])

Théorème 2.2.4 (Théorème de Distortion de Koebe). *Soit f une fonction holomorphe et injective du disque unité D. Alors, nous avons l'inégalité suivante:*

$$\frac{1}{4}(1 - |z|^2)|f'(z)| \leq \beta_{f(z)} \leq (1 - |z|^2)|f'(z)|. \tag{2.2.1}$$

Ainsi, à la lumière de ce théorème, nous avons une borne, pour une certaine classe de fonctions holomorphes, sur le r_1 du problème. En fait, le mathématicien français André Bloch, ayant eu une vie très mouvementée, démontra ces théorèmes en 1925 (voir [**4**]):

Théorème 2.2.5 (Théorème de Bloch (1ère version)). *Il existe une constante réelle B positive telle que toute fonction $f \in H(D)$ possède un disque schlicht dans l'image de f dont le rayon est au moins égale à $B|f'(0)|$. Plus formellement, nous avons que*

$$\beta_f \geq B|f'(0)|.$$

Théorème 2.2.6 (Théorème de Bloch (2e version)). *Il existe une constante positive B telle que toute fonction $f \in H(D)$ avec $|f'(0)| = 1$ possède un disque schlicht de rayon au moins égale à B dans son image.*

Notons que nous avons l'équivalence entre ces deux théorèmes.

De la même manière que pour la constante de Landau, nous avons que la définition de la constante de Bloch est la suivante:

$$\beta = \sup\{B : \text{ le Théorème 2.2.5 est vrai}\}.$$

Aussi, de façons équivalente, nous pouvons définir la constante β comme suit:

$$\beta = \inf\{\beta_f : f \in H(D) \text{ et } |f'(0)| = 1\}.$$

2.3. Les constantes de Bloch et de Landau

Le Théorème de Landau, tout comme le Théorème de Bloch, sont des théorèmes d'existence, ce qui signifie que le théorème ne mentionne pas l'endroit du plus grand disque (schlicht). En effet, supposons, dans le cas du Théorème de Bloch, par exemple, que le disque soit centré à l'origine. Alors, prenons la suite de fonctions holomorphes

$$f_n(z) = nz^2 + z.$$

Ainsi, nous avons que

$$f_n'(z) = 2nz + 1,$$

et que

$$f_n'(-\frac{1}{2n}) = 0, \quad f_n'(0) = 1.$$

Donc, comme la dérivée s'annule en un seul point, nous obtenons que

$$\beta_{f_n(\frac{-1}{n})} = \left| f_n\left(-\frac{1}{2n}\right) \right| = \frac{1}{4n}.$$

Ceci entraîne que

$$\beta \leq \inf \beta_{f_n} \leq \inf \frac{1}{4n} = 0,$$

et nous obtenons la contradiction.

Aussi nous pouvons répéter cet argument à n'importe quel autre point du disque unité (en prenant $\{f_n(z) = n(z + z_0)^2 + z\}$ comme suite de fonctions). Notons en terminant que cette erreur, soit d'énoncer que les disques schlichts sont centrés à l'origine, se trouve souvent dans les livres, voir par exemple [**2**] et [**15**].

Nous allons maintenant donner quelques résultats sur la valeurs de ces deux constantes. Tout d'abord, comme $f(z) = z$ est une fonction biholomorphe du disque unité sur lui-même et que $f'(0) = 1$, nous trouvons que

$$\beta \leq 1 \text{ et } \lambda \leq 1.$$

Ensuite, nous avons que

$$\beta \leq \lambda$$

car un disque schlicht est aussi un disque. Les premiers estimés sur β furent donnés par L. Ahlfors et H. Grunsky (voir [**1**]) dans les années 30. Les voici donc:

$$0,4330127\cdots = \frac{\sqrt{3}}{4} \leq \beta \leq \frac{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{11}{12})}{\Gamma(\frac{1}{4})\sqrt{1+\sqrt{3}}} = 0,4718617\cdots.$$

Notons que Ahlfors et Grunsky ont conjecturé que

$$\beta = \frac{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{11}{12})}{\Gamma(\frac{1}{4})\sqrt{1+\sqrt{3}}}.$$

En 1990, Mario Bonk (voir **[5]**) a démontré que

$$\frac{\sqrt{3}}{4} + 10^{-14} \leq \beta,$$

Ensuite, Chen Huaihui et P. M. Gauthier (voir **[7]**) ont prouvé, en 1996, que

$$\frac{\sqrt{3}}{4} + 2 \cdot 10^{-4} \leq \beta.$$

Dans le cas de la constante de Landau, les estimés sont les suivants (voir **[23]**):

$$\frac{1}{2} < \lambda \leq \frac{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{5}{6})}{\Gamma(\frac{1}{6})} = 0.5432588\cdots.$$

2.4. La fonction extrémale

Ahlfors et Grunsky croient avoir trouvé une fonction extrémale, c'est-à-dire une fonction qui possède comme valeur de β_f la constante de Bloch conjecturée par eux, soit

$$\beta_f = \beta = \frac{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{11}{12})}{\Gamma(\frac{1}{4})\sqrt{1+\sqrt{3}}}.$$

Remarquons que cette fonction soit disant extrémale est en fait une certaine fonction triangulaire de Schwarz normalisée et le β_f de cette fonction n'est pas atteint.

2.5. La semi-continuité du rayon de Landau

Comme nous avons vu précédemment, le Théorème de Landau, de même que celui de Bloch, ne nous donne aucun renseignement sur l'endroit des disques (schlichts) et sur le comportement de ces disques (schlichts) par rapport aux fonctions. Nous allons donc, dans cette section et dans la prochaine, étudier le comportement des fonctions suivantes:

$$\begin{array}{rccl} l: & H(D) & \to & \mathbf{R}^+ \\ & f & \mapsto & l(f) = \lambda_f. \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} b: & H(D) & \to & \mathbf{R}^+ \\ & f & \mapsto & b(f) = \beta_f. \end{array}$$

La fonction l représente le comportement du rayon intérieure d'une fonction holomorphe, tandis que la fonction b associe à une fonction holomorphe f la valeur β_f. Quel est donc le comportement de ces fonctions? Pour répondre à cette question, posons-nous le problème suivant:

Problème 3: Est-ce que la fonction l ou la fonction b définies ci-haut sont continues par rapport à la topologie de la convergence uniforme sur les compacts pour l'espace $H(D)$ et à la topologie euclidienne pour $\mathbf{R}^+$?

Le but de cette section est de résoudre le problème avec la fonction l. Mais, tout d'abord, nous démontrerons, par un exemple, que la fonction l et la fonction b ne sont pas continues.

Exemple 2.5.1. Par le Théorème de la convergence de Carathéodory (voir Théorème A.6), nous pouvons montrer que la fonction l et la fonction b ne sont pas continues. En effet, soit

$$\{f_n : D \to G_n\}$$

la suite de fonctions holomorphes et bijectives telles que

$$f_n(0) = 0 \text{ et } f_n{}'(0) > 0,$$

et telles que les domaine G_n sont définis à la figure 2.5.1.

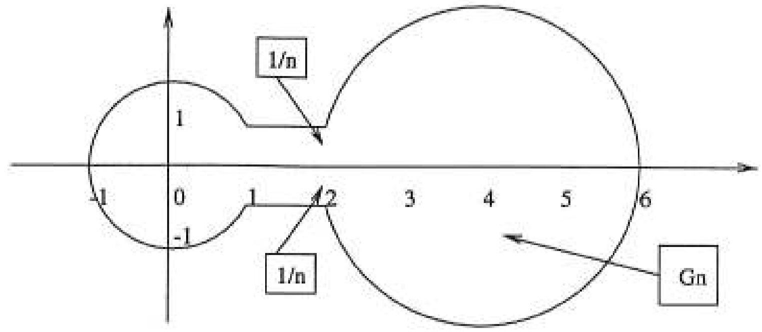

FIG. 2.5.1. *Le domaine G_n*

Notons que ces fonctions existent par le Théorème des applications de Riemann (voir Théorème A.7). Comme G_n converge vers D relativement à 0, le Théorème de la convergence de Carathéodory nous démontre que f_n converge uniformément sur tout compact vers f bijective. Mais, nous avons que $\lambda_{f_n} = \beta_{f_n} = 2, \forall n$ et $\lambda_f = \beta_f = 1$.

Remarquons que cet exemple nous donne aussi un contre-exemple au problème suivant: soit $\mathcal{G}$ une famille de fonctions holomorphes et soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble dense de $\mathcal{G}$, alors les constantes de Bloch pour ces deux familles sont les mêmes.

Revenons maintenant au fait que ces fonctions ne sont pas continues. Encore d'après cet exemple, nous avons peut-être une chance qu'elles soient semi-continue inférieurement. En fait, c'est le cas (voir Corollaires 2.5.4 et 2.6.2). Cependant, nous allons démontrer un peu plus. Au lieu de considérer l'espace $H(D)$, nous utiliserons une suite de fonctions holomorphes $\langle f_n, \Omega_n \rangle$ qui converge uniformément sur tout compact de $\Omega = \cup_n \Omega_n$ vers une fonction f. Ceci nous donne, dans le cas de la fonction l (l'autre sera considérée dans la prochaine section), le théorème suivant.

Théorème 2.5.2. *Soit $\{(f_n, \Omega_n)\}$ une suite de fonctions holomorphes définies sur des domaines Ω_n de $\mathbf{C}$ tels que $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}, \forall n$. Si la suite de fonctions converge uniformément sur les compacts de $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty}\Omega_n$ vers une fonction f holomorphe sur Ω, alors*

$$\underline{\lim}_{f_n \to f} \lambda_{f_n} \geq \lambda_f.$$

Lemme 2.5.3. *Sous les mêmes conditions du Théorème 2.5.2, nous avons, pour tout $z \in \Omega$, l'inégalité suivante:*

$$\underline{\lim}_{f_n \to f} \lambda_{f_n(z)} \geq \lambda_{f(z)}. \tag{2.5.1}$$

DÉMONSTRATION DU LEMME. Soit $z \in \Omega$ et $f(z) = w$. Soit un rayon $r_z > 0$ tel que $\overline{D(z, r_z)} \subset \Omega$ et pour tout $z' \in \partial D(z, r_z)$ nous avons $f(z') \neq w$. Soit $0 < r_w < \epsilon = d(w, f(\partial D(z, r_z))$. Comme $\{f_n\}$ converge uniformément sur les compacts de Ω, nous trouvons l'existence d'un entier N_w ayant la propriété que

$$d(f(\partial D(z, r_z)), f_n(\partial D(z, r_z))) < \epsilon' = \epsilon - r_w, \forall n > N_w.$$

Ainsi, nous obtenons qu'il existe un rayon $r_w > 0$ et N_w tel que

$$f_n(\Omega_n) \supset D(w, r_w), \forall n > N_w.$$

Soit maintenant un compact $K \subset f(\Omega)$ et soit le recouvrement d'ouverts suivant:

$$K \subset \bigcup_{w \in K} D(w, r_w),$$

où r_w est défini par l'argument précédent. Alors il existe un sous-recouvrement fini du compact, disons:

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{m} D(w_j, r_{w_j}).$$

Pour chaque w_j il existe un entier N_{w_j} tel que $f_n(\Omega_n) \supset D(w_j, r_{w_j}), \forall n > N_{w_j}$. Donc, en prenant $N_K = \max_j(N_{w_j})$, nous avons

$$f_n(\Omega_n) \supset K, \forall n > N_K.$$

Fixons $z \in \Omega$ tel que $\lambda_{f(z)} \neq 0$. Soit $0 < r < \lambda_{f(z)}$, d'où $\overline{D(f(z), r)} \subset f(\Omega)$. Alors, par le paragraphe prédédent, il existe un entier N_r tel que

$$f_n(\Omega_n) \supset \overline{D(f(z), r)}, \forall n > N_r. \tag{2.5.2}$$

Donc,

$$\underline{\lim}_{f_n \to f} \lambda_{f_n} \geq r, \forall r < \lambda_{f(z)},$$

d'où

$$\underline{\lim}_{f_n \to f} \lambda_{f_n} \geq \lambda_{f(z)}.$$

Il nous reste à montrer que

$$\underline{\lim}_{f_n \to f} \lambda_{f_n(z)} \geq \lambda_{f(z)}, \forall z \in \Omega.$$

Fixons $z \in \Omega$ et soit $r < \lambda_{f(z)}$. Ainsi, comme $f_n(\Omega_n) \supset D(f(z), r), \forall n > N_r$, (voir l'équation 2.5.2), et comme la convergence des f_n est aussi ponctuelle ($|f_n(z) - f(z)| < \epsilon, \forall n > N_\epsilon$), nous trouvons (voir la figure 2.5.2), en prenant $\epsilon < \lambda_{f(z)} - r$, que

$$\lambda_{f_n(z)} \geq r - \epsilon, \forall n > n_\epsilon = \max(N_r, N_\epsilon).$$

Donc la dernière équation nous permet de conclure que

$$\underline{\lim}_{f_n \to f} \lambda_{f_n(z)} \geq r, \forall r < \lambda_{f(z)},$$

d'où,

$$\underline{\lim}_{f_n \to f} \lambda_{f_n(z)} \geq \lambda_{f(z)},$$

et l'équation 2.5.1 est vérifiée. □

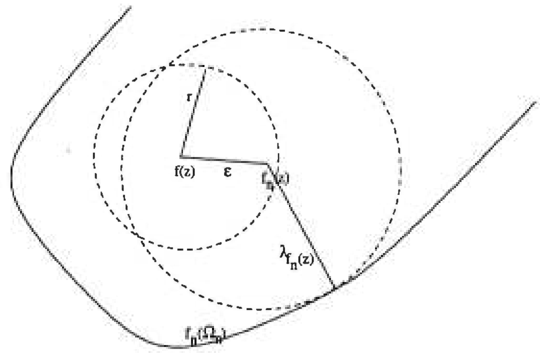

FIG. 2.5.2. *Le disque $D(f(z), \lambda_{f(z)})$ dans $f_n(\Omega_n)$.*

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. Nous avons vu dans la preuve du Lemme 2.5.3, que

$$\underline{\lim}_{f_n \to f} \lambda_{f_n} \geq \lambda_{f(z)},$$

pour tout $z \in \Omega$. Nous concluons donc que

$$\underline{\lim}_{f_n \to f} \lambda_{f_n} \geq \lambda_f.$$

□

Finalement, nous avons bien, par le théorème que la fonction l est semi-continue inférieurement, soit

Corollaire 2.5.4. *La fonction l suivante est une fonction semi-continue inférieurement.*

$$\begin{array}{rccl} l: & H(D) & \to & \mathbf{R}^+ \\ & f & \mapsto & l(f) = \lambda_f. \end{array}$$

2.6. La semi-continuité du rayon de Bloch

Cette section sera consacrée à l'étude de la continuité de la fonction suivante:

$$\begin{array}{rrcl} b: & H(D) & \to & \mathbf{R}^+ \\ & f & \mapsto & b(f) = \beta_f. \end{array}$$

Comme mentionné précédemment, la fonction b associe à une fonction holomorphe f la valeur β_f. Aussi, cette fonction, en utilisant le même exemple que dans la section précédente (voir Exemple 2.5.1), n'est pas continue. En fait, elle est semi-continue inférieurement, comme le stipule le corollaire du théorème suivant:

Théorème 2.6.1. *Soit $\langle f_n, \Omega_n \rangle$ une suite de fonctions holomorphes définies sur des domaines Ω_n de $\mathbf{C}$ tels que $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}, \forall n$. Si la suite de fonctions converge uniformément sur les compacts de $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ vers une fonction f holomorphe sur Ω, alors*

$$\underline{\lim}_{f_n \to f} \beta_{f_n} \geq \beta_f.$$

Démonstration. Nous pouvons supposer que $\beta_f \neq 0$. Fixons $z \in \Omega$ tel que $\beta_{f(z)} \neq 0$. Soit $D(f(z), r)$ un disque schlicht de $f(\Omega)$ de rayon r. Ainsi il existe un ouvert U de Ω qui contient z tel que la fonction

$$f|_U : U \to D(f(z), r)$$

est biholomorphe. Soit $0 < \rho < r$. Alors, nous allons montrer qu'il existe un N_ρ tel que si $n > N_\rho$, alors $D(f(z), \rho)$ est un disque schlicht de $f_n(\Omega_n)$.

Considérons le domaine

$$K = f_U^{-1}(\overline{D(f(z), \rho)}).$$

L'ensemble K est un compact, car $f|_U$ est un homéomorphisme sur $D(f(z), r)$ et K contient le point z. Appliquons le lemme du théorème sur la semi-continuité de

Landau (voir Lemme 2.5.3) à la suite de fonctions $\{\tilde{f}_n = f_n|_{U_n}\}$ où $U_n = \Omega_n \cap U$ qui converge sur tous les compacts de U vers $\tilde{f} = f|_U$. Ceci nous donne:

$$\underline{\lim}_{\tilde{f}_n \to \tilde{f}} \lambda_{\tilde{f}_n(z)} \geq \lambda_{\tilde{f}(z)} = r > \rho.$$

Notons que nous avons $\lambda_{\tilde{f}(z)} = r$, car $\tilde{f}(U) = f|_U(U) = D(f(z), r)$. Donc, il existe un entier N_0 tel que, pour $n > N_0$,

$$f_n(U_n) \supset \overline{D(f(z), \rho)}.$$

Aussi, par la convergence sur les compacts de la suite de fonctions $\{f_n\}$, nous trouvons que $\forall \epsilon > 0$, $\exists N_\epsilon$ tel que

$$|f_n - f| < \epsilon \text{ sur } \partial K, \forall n > N_\epsilon.$$

Soit $0 < \rho' < \rho$ et soit $w \in D(f(z), \rho')$. Prenons $\epsilon < \rho - \rho' < \inf_{\partial K} |f - w|$, (voir la figure 2.6.1). Ceci nous donne un certain N_1. Ainsi, nous avons obtenu

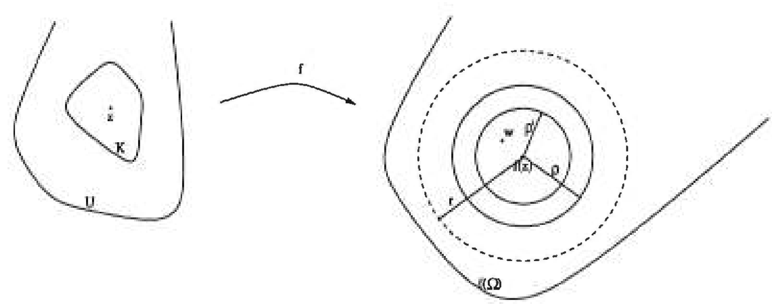

FIG. 2.6.1. *La disposition des différents rayons.*

les propriétés suivantes:

1. $f_n(\Omega_n) \supset f_n(U_n) \supset \overline{D(f(z), \rho)}, \forall n > \max(N_0, N_1) = N_2$,
2. $\sup_{\partial K} |f_n - f| < \epsilon < \inf_{\partial K} |f - w|, \forall n > \max(N_0, N_1) = N_2$.

Nous pouvons donc appliquer le Théorème de Rouché (voir Théorème A.9) aux fonction $\phi = f - w$ et $\psi = f_n - f = (f_n - w) - (f - w)$, pour $n > N_2$ et au domaine

$\overline{G} = K$. Ceci nous donne que $\phi = f - w$ et $\phi + \psi = (f - w) + (f_n - w) - (f - w) = f_n - w$ ont le même nombre de zéros dans K°, (nous pouvons même dire dans K, puisque sur $\partial K, |\phi| > 0$). Comme $f|_K$ est un homéomorphisme, la fonction $f - w$ possède un et un seul zéro sur K et donc de même pour $f_n - w, \forall n > N_2$. En prenant

$$G_n = (f_n|_K)^{-1}(D(f(z), \rho')),$$

nous obtenons que

$$f_n|_{G_n} : G_n \to D(f(z), \rho'), \forall n > N_2,$$

est injective, car $f_n - w$ a un seul zéro, $\forall w \in D(f(z), \rho')$, et certainement surjective et donc bijective et biholomorphe. Ainsi, nous concluons que $\forall n > N_2 = N_{\rho'}$

$$f_n(G_n) = D(f(z), \rho'),$$

est un disque schlicht de $f_n(\Omega_n), \forall \rho' < \rho < r \leq \beta_{f(z)}$. Ceci nous donne que

$$\begin{aligned} & \underline{\lim}_{f_n \to f} \beta_{f_n} && \geq && \rho, \forall \rho < r \leq \beta_{f(z)} \\ \Longrightarrow \quad & \underline{\lim}_{f_n \to f} \beta_{f_n} && \geq && r, \forall r \leq \beta_{f(z)} \\ \Longrightarrow \quad & \underline{\lim}_{f_n \to f} \beta_{f_n} && \geq && \beta_{f(z)}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\underline{\lim}_{f_n \to f} \beta_{f_n} \geq \beta_{f(z)},$$

d'où, en prennant le suprémum sur Ω, nous avons

$$\underline{\lim}_{f_n \to f} \beta_{f_n} \geq \beta_f.$$

$\square$

Remarquons que, comme dans le cas de Landau, nous aurions pu montrer que

$$\underline{\lim}_{f_n \to f} \beta_{f_n(z)} \geq \beta_{f(z)}.$$

Avec ce nouveau théorème, nous avons donc notre réponse sur le type de continuité de la fonction b avec le corollaire suivant:

Corollaire 2.6.2. *La fonction suivante est semi-continue inférieurement:*

$$\begin{array}{rccl} b: & H(D) & \to & \mathbf{R}^+ \\ & f & \mapsto & b(f) = \beta_f. \end{array}$$

2.7. La démonstration du Théorème

La présente section sera presqu'exclusivement consacrée à la démonstration du Théorème de Bloch.

Théorème 2.7.1 (Théorème de Bloch). *Il existe une constante $B > 0$ telle que $\beta_f \geq B$ pour toute fonction holomophe f du disque unité avec $f'(0) = 1$.*

Lemme 2.7.2. *Soit $R > 0$. Alors définissons la propriété $\mathcal{P}_R$ comme suit:*

$$\langle f, \Omega \rangle \in \mathcal{P}_R \text{ si } f \in H(\Omega) \text{ et } \beta_f \leq R.$$

Si on fixe Ω, la famille suivante:

$$\mathcal{F} = \{ f : \langle f, \Omega \rangle \in \mathcal{P}_R \},$$

est une famille normale.

Démonstration du Lemme. Il suffit de montrer que $\mathcal{P}_R$ est une propriété $\mathcal{M}$-normale (voir Définition 1.7.1), car par le Principe Heuristique de Minda (voir Théorème 1.7.2) une famille engendrée par une propriété $\mathcal{M}$-normale est normale. Pour ceci, vérifions les cinq conditions:

1. Par la définition de β_f, nous trouvons que si $\beta_f \leq R$ sur un domaine Ω, alors $\beta_f \leq R$ sur un domaine $\Omega' \subset \Omega$.

2. Soit $\phi(z) = az + b, a \neq 0$ et soit $\langle f, \Omega \rangle \in \mathcal{P}_R$. Alors comme $\phi'(z) = a, \forall z$, nous avons que $\langle f \circ \phi, \phi^{-1}(\Omega) \rangle \in \mathcal{P}_R$
3. Si $\langle f, \Omega \rangle \in \mathcal{P}_R$ et $c \in \mathbf{C}$, alors $\beta_f = \beta_{f+c}$.
4. Par le Théorème 2.6.1, nous avons que

$$\beta_f \leq \underline{\lim}_{f_n \to f} \beta_{f_n},$$

avec la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Ainsi comme $\beta_{f_n} \leq R, \forall n$, nous concluons que $\beta_f \leq R$, donc que $\langle f, \mathbf{C} \rangle \in \mathcal{P}_R$.

5. Comme la fonction identitée I est une bijection de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ (donc $\beta_I = \infty$), nous avons bien que $\langle I, \mathbf{C} \rangle \notin \mathcal{P}_M$.

Donc $\mathcal{P}_R$ est $\mathcal{M}$-normale et $\mathcal{F}$ est bien une famille normale sur Ω. □

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE BLOCH. De la définition de β, soit:

$$\beta = \inf\{\beta_f : f \in H(D), |f'(0)| = 1\},$$

nous obtenons qu'il existe une suite $\{f_n\}$ de fonctions holomorphes telles que

$$\lim_{n \to \infty} \beta_{f_n} = \beta \text{ et } |f_n'(0)| = 1.$$

Nous pouvons supposer que $f_n(0) = 0$ et que $\beta_{f_n} < \beta + 1/n$. Par le Lemme 2.7.2, la suite $\{f_n\}$ est une famille normale. Ainsi, en utilisant le fait que $f_n(0) = 0, \forall n$, nous trouvons qu'il existe une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact de D vers une fonction holomorphe f. Nous pouvons donc supposer que la suite $\{f_n\}$ possède cette propriété. De plus, comme $|f_n{}'(0)| = 1, \forall n$, nous avons que $|f'(0)| = 1$. Pour compléter la preuve, nous devons montrer que $\beta = \beta_f$. Par la semi-continuité du rayon de Bloch (voir le Corollaire 2.6.2), nous trouvons que

$$\beta_f \leq \underline{\lim}_{f_n \to f} \beta_{f_n} = \beta.$$

Ceci démontre et conclut cette preuve, car $\beta \leq \beta_f \leq \beta$. □

Remarques 2.7.3. 1. Le même raisonnement est applicable pour démontrer le Théorème de Landau.

2. Nous avons en fait démontrer qu'il existe une fonction holomorphe définie sur le disque unité telle que $\beta_f = \beta$. Ainsi, nous pouvons soulever la question suivante: "Est-ce que la constante de Bloch est atteinte, c'est-à-dire est-ce qu'il existe un disque fermé schlicht dans $f(D)$ de rayon égale à β (avec $\beta_f = \beta$)?" En fait, nous ne le savons pas, mais nous avons la proposition suivante:

Proposition 2.7.4. *Il existe une fonction $f \in H(D)$ telle que β_f ne soit pas atteinte.*

DÉMONSTRATION. Soit γ la courbe dans C donnée par $y = 2x/(x+1), 0 < x < \infty$, voir la figure 2.7.1.

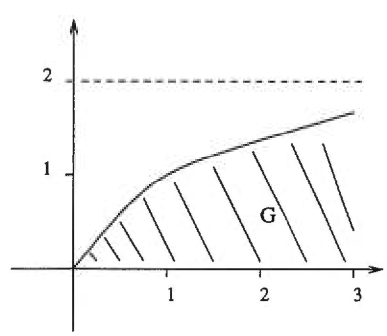

FIG. 2.7.1. *La courbe γ et le domaine G*

Ainsi définissons le domaine G comme étant l'ouvert du demi-plan $x > 0$ borné par γ et l'axe des réels positifs. Par le Théorème des applications de Riemann (voir Théorème A.7), nous obtenons une fonction $f : D \to G$ holomorphe et injective. Dans ce cas, β_f vaut un et cette constante n'est jamais atteinte, car $\forall z \in D$, $\beta_{f(z)} < 1$. $\square$

2.8. Applications immédiates

Dans cette dernière section, nous allons donner des applications des Théorèmes de Bloch (voir Théorèmes 2.2.5 et 2.2.6) et de Landau (voir Théorème 2.1.2). En fait, nous verrons le Théorème de Valiron et une autre démonstration du Petit Théorème de Picard. Ensuite viendra la démonstration de l'équivalence entre la constante de Bloch de la classe des fonctions holomorphes sur D et celles définies sur $\overline{D}$. Mais tout d'abord, commençons avec un corollaire du Théorème de Landau. Ce théorème sera utilisé dans la démonstration du Théorème de Valiron et celui-ci dans celle du Petit Théorème de Picard.

Corollaire 2.8.1 (Corollaire du Théorème de Landau). *Soit $R > 0$ et soit $f \in H(D(0,R))$. Alors, $\forall \epsilon > 0$, nous avons que l'image $f(D(0,R))$ contient un disque de rayon au moins égale à $R|f'(0)|(\lambda - \epsilon)$.*

Démonstration. Tout d'abord, supposons que $f'(0) \neq 0$ (sinon nous n'avons rien à démontrer). Ainsi, posons

$$\begin{array}{cccc} g: & D(0,1) & \to & \mathbf{C} \\ & \zeta & \mapsto & g(\zeta) = \frac{f(R\zeta)}{Rf'(0)}. \end{array}$$

La fonction g (voir figure 2.8.1) est donc holomorphe et $g'(0) = 1$. Par le Théorème de Landau (voir Théorème 2.1.2), nous obtenons que, pour tout $\epsilon > 0$ l'image $g(D(0,1))$ contient un disque de rayon $\lambda - \epsilon$. Comme

$$f(R\zeta) = f'(0)Rg(\zeta), (\text{avec } |\zeta| < 1),$$

nous concluons que pour $\epsilon > 0$ l'image $f(D(0,R))$ contient un disque de rayon $|f'(0)|R(\lambda - \epsilon)$. □

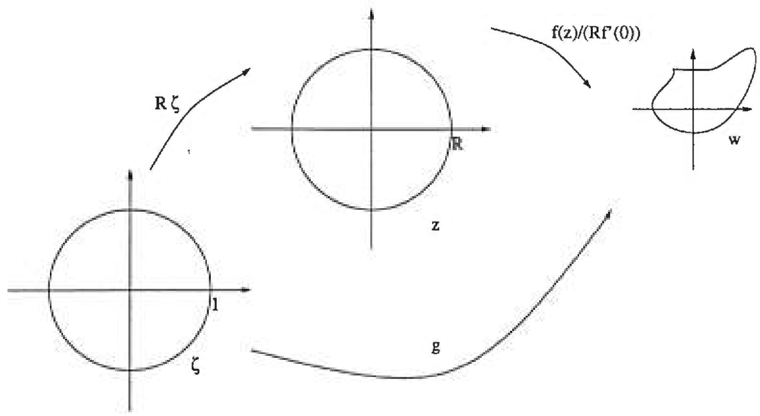

FIG. 2.8.1. *La fonction g*

Théorème 2.8.2 (Théorème de Valiron). *Soit f une fonction entière non-constante. Alors l'image $f(\mathbf{C})$ contient des disques arbitrairement grands.*

DÉMONSTRATION. Soit $z_0 \in \mathbf{C}$ tel que $f'(z_0) \neq 0$. En appliquant le corollaire précédent avec $\epsilon = \lambda/2$, nous avons que

$$f(\mathbf{C}) \supset f(D(z_0, R)) \supset D\left(a, \frac{R|f'(z_0)|\lambda}{2}\right), \forall R > 0.$$

Donc l'image $f(\mathbf{C})$ contient des disques de rayon $R|f'(z_0)|\lambda/2$, qui sont, en fait, des disques arbitrairement grands. $\square$

Théorème 2.8.3 (Petit Théorème de Picard). *Une fonction entière qui omet deux valeurs du plan complexe est constante.*

Lemme 2.8.4. *Soit f une fonction entière qui omet les valeurs 0 et 1. Alors il existe une fonction entière g telle que*

$$f(z) = -\exp(i\pi \cosh(2g(z))), \forall z \in \mathbf{C}.$$

Démonstration du Lemme. Comme la fonction f ne prend pas la valeur zéro, nous pouvons définir (en utilisant le Théorème de Monodromie (voir Théorème A.4)) une branche L de $\ln f$ sur $\mathbf{C}$. Ainsi, nous avons

$$f(z) = e^{L(z)}.$$

Considérons maintenant la fonction

$$F(z) = \frac{L(z)}{2\pi i}.$$

Alors la fonction F omet les valeurs entières $n \in \mathbf{Z}$ (car si $F(a) = n$ alors $f(a) = e^{2\pi i n} = 1$ et c'est impossible.). Donc nous définissons (en utilisant le Théorème de Monodromie (voir Théorème A.4)) une branche

$$H(z) = \sqrt{F(z)} - \sqrt{F(z) - 1},$$

et une branche du logarithme

$$g(z) = \ln H(z).$$

Avec ces nouvelles fonctions, il nous reste à calculer.

$$\begin{aligned}
\cosh(2g) + 1 &= \frac{e^{2g} + e^{-2g}}{2} + 1 \\
&= \frac{(e^{g} + e^{-g})^2}{2} \\
&= \frac{(1/H + H)^2}{2} \\
&= \frac{\left(\sqrt{F} - \sqrt{F-1} + \frac{1}{\sqrt{F} - \sqrt{F-1}}\right)^2}{2} \\
&= \frac{(\sqrt{F} - \sqrt{F-1} + \sqrt{F} + \sqrt{F-1})^2}{2} \\
&= 2F \\
&= \frac{L}{\pi i}.
\end{aligned}$$

D'où, nous concluons

$$f(z) = e^L = -\exp(i\pi\cosh(2g(z))).$$

□

Démonstration du Théorème de Picard. Soit f une fonction entière qui ne prend pas deux valeurs; nous pouvons supposer que ces valeurs sont 0 et 1. Ainsi par le Lemme 2.8.4, nous obtenons l'existence d'une fonction g entière telle que

$$f(z) = -\exp(i\pi\cosh(2g(z))).$$

Remarquons que la fonction g omet les valeurs

$$\pm\ln(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}) + im\pi/2, \forall n \geq 1, \forall m \in \mathbf{Z}. \tag{2.8.1}$$

En effet, supposons qu'il existe un point a tel que

$$g(a) = \pm\ln(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}) + im\pi/2.$$

Alors

$$\begin{aligned}
2\cosh(2g(a)) &= e^{2g(a)} + e^{-2g(a)} \\
&= e^{im\pi}(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})^{\pm 2} + e^{im\pi}(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})^{\mp 2} \\
&= (-1)^m((\sqrt{n}+\sqrt{n-1})^2 + (\sqrt{n}-\sqrt{n-1})^2) \\
&= (-1)^m(2(2n-1)).
\end{aligned}$$

D'où,

$$f(a) = -\exp(i\pi(-1)^m(2n-1)) = 1,$$

ce qui est contradictoire. Donc la fonction g ne prend pas les valeurs du réseau rectangulaire (voir équation 2.8.1), dont la hauteur de chaque rectangle est $\pi/2$. La largeur, quant à elle, est bornée, car

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \ln(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}) - \ln(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}) &= \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{1+\sqrt{\frac{n+1}{n}}}{1+\sqrt{\frac{n-1}{n}}}\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ceci nous donne donc que l'image de la fonction g ne contient pas de disques arbitrairement grands et, par le fait même, nous donne que la fonction f est constante avec le Théorème de Valiron (voir Théorème 2.8.2). □

Terminons donc ce chapitre avec la démonstration de cette propostion.

Proposition 2.8.5. *La constante de Bloch est la même pour la classe de fonctions holomorphes définies sur D et sur $\overline{D}$, c'est-à-dire:*

$$\beta = \inf\{\beta_f : f \in H(D), |f'(0)| = 1\} = \overline{\beta} = \inf\{\beta_f : f \in H(\overline{D}), |f'(0)| = 1\}.$$

Avant de démontrer cette proposition, nous allons avoir besoin de ces deux lemmes.

Lemme 2.8.6. *Soit $\phi : D \to D$. Alors $\beta_{f\circ\phi} \leq \beta_f$.*

Démonstration du Lemme. Soit $D(f(z), r)$ un disque schlicht de $f(D)$ et soit G un voisinage de z dans D tel que $f \circ \phi : G \to D(f(z), r)$ est une fonction biholomorphe. Alors la fonction $\phi : G \to \phi(G)$ est injective (car sinon $f \circ \phi$ ne le serait pas) et donc biholomorphe. Ceci nous donne que la fonction $f : \phi(G) \to D(a, r)$ est biholomorphe. Donc, comme chaque disque schlicht de $f \circ \phi$ est un disque schlicht de f, nous concluons que

$$\beta_{f\circ\phi} \leq \beta_f.$$

□

Lemme 2.8.7. *Soit une suite de fonctions $\phi_n : D \to D$ qui converge vers la fonction identitée. Alors $\beta_{f\circ\phi_n} \to \beta_f$.*

DÉMONSTRATION DU LEMME. Par le Lemme 2.8.6, nous avons que

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\beta_{f\circ\phi_n} \geq \beta_f.$$

Aussi, comme $f \circ \phi_n \to f$, nous trouvons que

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\beta_{f\circ\phi_n} \leq \beta_f.$$

Donc, nous obtenons que $\lim_{n\to\infty} \beta_{f\circ\phi_n} = \beta_f$. □

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. Comme l'espace de fonctions $H(\overline{D})$ est un sous-ensemble de $H(D)$, nous avons que

$$\overline{\beta} \geq \beta.$$

Fixons $f \in H(D)$ avec $|f'(0)| = 1$ et $\epsilon > 0$, il suffit de trouver une fonction $g \in H(\overline{D})$ avec $|g'(0)| = 1$ et $\beta_g \leq \beta_f + \epsilon$, car $\overline{\beta} = \inf_g \beta_g \leq \beta_f + \epsilon$ et $\overline{\beta} \leq \inf_f \beta_f + \epsilon = \beta + \epsilon$. Définissons $g_r(z) = f_r/r$, où $f_r(z) = f(rz), 0 < r < 1$. Nous avons bien que la fonction g_r est holomorphe et définie sur $\overline{D}$ et que $g_r'(0) = 1$. Par le Lemme 2.8.7, nous trouvons que β_{f_r} converge vers β_f lorsque r tends vers 1. Ainsi

$$\beta_{g_r} = \frac{\beta_{f_r}}{r} \xrightarrow{r\to 1} \beta_f.$$

Donc, nous concluons que $\overline{\beta} \leq \beta_f$ et que $\overline{\beta} = \beta$. □

Chapitre 3

LES FONCTIONS DE BLOCH

Dans ce dernier chapitre, nous allons voir le concept de fonctions de Bloch. Pour ce faire, nous les définirons et donnerons quelques exemples. Ensuite, nous démontrerons un théorème donnant l'équivalence entre plusieurs définitions d'une fonction de Bloch. En terminant, nous finirons avec une théorème de Landau important ainsi qu'une inégalité regroupant, entre autres, la constante de Bloch et la semi-norme de Bloch.

3.1. DÉFINITIONS

Avant d'introduire la définition usuelle d'une fonction de Bloch, nous allons définir la semi-norme de Bloch.

Définition 3.1.1. Soit $f \in H(D)$. Alors la semi-norme de Bloch est

$$||f||_{\mathcal{B}} = \sup\{(1 - |z|^2)|f'(z)| : |z| < 1\}.$$

En fait, ce serait une norme si nous posions $||f||_{\mathcal{B}} - |f(0)|$. Avec cette semi-norme, nous sommes en mesure de donner la définition d'une fonction de Bloch.

Définition 3.1.2. Soit $f \in H(D)$. Alors la fonction f est de Bloch si elle est bornée sous la semi-norme de Bloch, c'est-à-dire

$$||f||_{\mathcal{B}} = \sup\{(1 - |z|^2)|f'(z)| : |z| < 1\} < \infty.$$

Donnons maintemant quelques exemples et contre-exemple de fonctions de Bloch.

Exemples 3.1.3. 1. Toute fonction holomorphe qui est bornée sur le disque unité est une fonction de Bloch. Pour démontrer ceci, supposons que $|f(z)| < M$ sur le disque unité D. En utilisant les estimés de Cauchy et le fait que $z \in D$, nous obtenons que

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{1-|z|}.$$

Ainsi, nous concluons que f est une fonction de Bloch, car

$$\begin{aligned}
\|f\|_\beta &= \sup_{z\in D}(1-|z|^2)|f'(z)| \\
&\leq \sup_{z\in D}\frac{(1-|z|^2)M}{1-|z|} \\
&= 2M.
\end{aligned}$$

2. La fonction

$$f(z) = \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

est une fonction de Bloch. Il faut donc montrer que $\|f\|_\beta$ est bornée. La dérivée de la fonction f est

$$f'(z) = \frac{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)'}{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} = \frac{2}{1-z^2}.$$

D'où, nous trouvons que

$$\begin{aligned}
(1-|z|^2)|f'(z)| &= (1-|z|^2)\frac{2}{|1-z^2|} \\
&= 2\frac{1-|z|^2}{|1-z^2|} \\
&\leq 2\frac{1-|z|^2}{1-|z|^2} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Donc, nous pouvons calculer la semi-norme de la fonction f et nous obtenons

$$\begin{aligned} \|f\|_\beta &= \sup_{z\in D}(1-|z|^2)|f'(z)| \\ &\leq 2. \end{aligned}$$

Nous concluons que la fonction $f(z) = \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ est une fonction de Bloch, car $\|f\|_\beta \leq 2$. En fait, nous avons l'égalité puisque $|f'(0)| = 2$. Cependant la fonction n'est pas bornée. En effet, en posant $z = x + yi$, avec $x, y \in R$, le calcul devient

$$\begin{aligned} \sup_{z\in D}|f(z)| &= \sup_{z\in D}\left|\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right| \\ &\geq \lim_{x\to 1}\left|\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right| \\ &= \infty, \end{aligned}$$

ce qui nous donne un exemple d'une fonction de Bloch non-bornée.

3. Le dernier exemple sera un exemple de fonction qui n'est pas de Bloch. Par le premier exemple, il faut que cette fonction ne soit pas bornée. Une fonction possible est la suivante:

$$f(z) = \frac{1}{z-1}.$$

Comme la dérivée de f est $-1/(1-z)^2$, nous avons

$$\begin{aligned} \|f\|_\beta &= \sup_{z\in D}(1-|z|^2)|f'(z)| \\ &\geq \lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{(1-x)^2} \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{1+x}{1-x} \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Nous pouvons donc conclure que $\|f\|_\beta = \infty$, et que la fonction n'est pas une fonction de Bloch.

3.2. Caractérisation des fonctions de Bloch

Tout d'abord, nous allons donner la définition de la distance hyperbolique.

Définition 3.2.1. La distance hyperbolique ou non-euclidienne ρ est définie par

$$\rho(z_1, z_2) = \inf_\gamma \int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2},$$

avec γ une courbe dans D reliant z_1 à z_2. En calculant, nous obtenons la formule explicitement:

$$\rho(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \left|\frac{z_1 - z_2}{1-\overline{z_1} z_2}\right|}{1 - \left|\frac{z_1 - z_2}{1-\overline{z_1} z_2}\right|}.$$

Voici donc le théorème (voir au besoin le livre de Krantz **[15]**) qui donne plusieurs caractéristations ou définitions différentes des fonctions de Bloch. En particulier, nous démontrerons l'équivalence entre plusieurs définitions d'une fonction de Bloch.

Théorème 3.2.2. *Soit $f : D \to C$ une fonction holomorphe non-constante. Alors les énoncés suivants sont équivalents.*

1. *La fonction f est une fonction de Bloch.*
2. *Tous les disques schlichts de f ont leurs rayons bornés, ($\beta_f < \infty$).*
3. $f : (D, \rho(\cdot,\cdot)) \to (C, |\cdot|)$ *est uniformément continue.*
4. *La famille $\mathcal{F} = \{(f(\phi(z)) - f(\phi(0)) : \phi \in Aut(D)\}$ est une famille normale dans D.*
5. $\sup\{|(f \circ \phi)'(0)| : \phi \in Aut(D)\} < \infty$.

6. *Il existe une fonction g holomorphe et injective dans D et un nombre réel α positif tels que*

$$f(z) = \alpha \log g'(z).$$

Lemme 3.2.3. *Soit $\mathcal{F}$ une famille normale de fonctions holomorphes définies sur un domaine Ω. Alors la famille $\mathcal{F}' = \{f' : f \in \mathcal{F}\}$ est normale et localement bornée s'il existe un point $z_0 \in \Omega$ et une constante réelle M tels que $|f(z_0)| < M, \forall f \in \mathcal{F}$.*

Notons que ce dernier résultat est énoncé dans le premier chapitre de ce mémoire.

Lemme 3.2.4. *Si f est une fonction holomorphe et injective définie sur le disque unité, alors l'inégalité suivante est vérifiée*

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| \leq \frac{6}{1-|z|^2}.$$

Inversement, une fonction f holomophe définie sur le disque unité est injective si

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| \leq \frac{2(\sqrt{5}-2)}{1-|z|^2}.$$

Démonstration du Lemme. Soit $\mathcal{S}$ la famille des fonctions

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$$

holomorphes, normalisées et injectives du disque unité. Alors $|a_2| \leq 2$, en fait, de Branges a démontré que $|a_n| \leq n, \forall n \in N$. Soit $f \in \mathcal{S}$ et soit $z_0 \in D$. Alors la fonction g suivante est holomorphe et injective

$$g(z) = \frac{f\left(\frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}\right) - f(z_0)}{(1-|z_0|^2)f'(z_0)} = z + b_2 z^2 + \cdots.$$

Remarquons que l'injectivité découle du fait que f et la transformée de Moebius sont des fonctions injectives. Ainsi, en calculant, nous obtenons

$$b_2 = \frac{1}{2}\left((1-|z_0|^2)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - 2\overline{z_0}\right).$$

D'où,

$$\begin{aligned} 4 &\geq \left|(1-|z|^2)\frac{f''(z)}{f'(z)} - 2\overline{z}\right| \\ &\geq \left|(1-|z|^2)\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| - |2\overline{z}|\right| \\ &\geq (1-|z|^2)\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| - 2|\overline{z}| \\ &\geq (1-|z|^2)\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| - 2. \end{aligned}$$

Donc nous concluons que

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| \leq \frac{6}{1-|z|^2},$$

si la fonction f est injective et holomorphe. La démonstration de l'autre inégalité est faite dans l'article de Duren, Shapiro et Shields ([**11**]). Aussi nous pouvons appeler ce lemme, le critère de Nehari et Duren-Shapiro-Shields. □

Lemme 3.2.5. *Soit $f \in H(D)$ non-constante. Alors $\forall\epsilon > 0$ et $\forall z \in D$ il existe un disque schlicht de rayon au moins $(\beta - \epsilon)|f'(z)|(1-|z|)$, où β est la constante de Bloch.*

Démonstration du Lemme. Soit $z_0 \in D$. Si $f'(z_0) = 0$, alors le lemme est démontré. Sinon, nous avons que $f'(z_0) \neq 0$ et nous considérons la fonction $\phi(z) = z_0 + z(1-|z_0|)$. Ainsi la fonction $G(z)$ définie comme suit est holomorphe

$$G(z) = \frac{f(\phi(z)) - f(z_0)}{|f'(z_0)|(1-|z_0|)}.$$

En calculant, nous obtenons que

$$G'(z) = \frac{f'(\phi(z))}{|f'(z_0)|}.$$

Donc, nous trouvons que $|G'(0)| = 1$ et, en appliquant le Théorème de Bloch, nous trouvons qu'il existe un disque schlicht de rayon au moins $\beta - \epsilon$ contenu dans $G(D)$. De manière équivalente, $f(\phi(D))$ contient un disque schlicht de rayon au moins $(\beta - \epsilon)|f'(z_0)|(1 - |z_0|)$ et, par conséquent, $f(D)$ contient le même disque. $\square$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. Le schéma de la preuve est décrit à la figure 3.2.1.

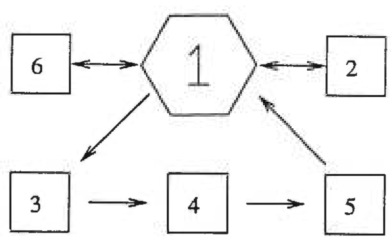

FIG. 3.2.1. *Le schéma de la preuve.*

: $1 \Rightarrow 2$ Soit f une fonction holomorphe et soit $z_0 \in D$ tel que $f'(z_0) \neq 0$. Par le Théorème des fonctions inverses (voir Théorème A.2), il existe $r > 0$ et un domaine $G \subseteq D$ contenant z_0 tels que $f : G \to D(f(z_0), r)$ est une fonction biholomorphe. Posons

$$g = (f|_G)^{-1}.$$

En appliquant le Lemme 3.2.5 à cette fonction, nous trouvons que pour tout $\epsilon > 0$, G contient un disque schlicht de rayon $(\beta - \epsilon)|g'(f(z_0))|r = \frac{(\beta-\epsilon)r}{|f'(z_0)|}$.

Comme $G \subseteq D$, nous obtenons que

$$\frac{\beta r}{|f'(z_0)|} \leq 1.$$

En utilisant la transformée de Moebius, soit $\phi(z) = \frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}$ et en appliquant la même démarche, nous avons que

$$\frac{\beta r}{|(f \circ \phi)'(0)|} = \frac{\beta r}{|f'(z_0)(1-|z_0|^2)|} \leq 1, \forall z_0, \text{ avec } f'(z_0) \neq 0.$$

De manière équivalente, nous avons montré que

$$\beta r \leq |f'(z_0)|(1-|z_0|^2).$$

Comme, par hypothèse f est une fonction de Bloch, nous concluons que

$$\beta_{f(z_0)} = \sup\{r : r \text{ admissible}\}$$

est uniformément bornée pour tout point z_0 tel que $f'(z_0) \neq 0$. Ainsi β_f est fini, ce qui clôt cette démonstration.

: 2 $\Rightarrow$1 Soit $f \in H(D)$ telle que $\beta_f < \infty$. Montrons que $\|f\|_{\mathcal{B}} < \infty$. En appliquant le Lemme 3.2.5 à la fonction f, nous obtenons l'existence en tout point $z \in D$ et pour tout $\epsilon > 0$ d'un disque schlicht de rayon au moins $(\beta - \epsilon)|f'(z)|(1-|z|)$. Comme β_f représente le supremum des rayons des disques schlichts, nous avons:

$$\begin{array}{rrcl} & \beta|f'(z)|(1-|z|) & \leq & \beta_f \\ \iff & |f'(z)|(1-|z|) & \leq & \frac{\beta_f}{\beta} \\ \iff & |f'(z)|(1-|z|^2) & \leq & \frac{\beta_f(1+|z|)}{\beta}. \end{array}$$

Donc, en prenant le supremum sur le disque unité, nous obtenons que la fonction f est une fonction de Bloch, c'est-à-dire que

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = \sup_{z \in D} |f'(z)|(1-|z|^2) \leq 2\frac{\beta_f}{\beta}.$$

: $1 \Rightarrow 3$ Soit $f : (D, \rho(\cdot,\cdot)) \to (C, |\cdot|)$ une fonction de Bloch. Montrons que f est une fonction uniformément continue. Soient $z_1, z_2 \in D$ et un chemin $\alpha \subset D$ reliant z_1 à z_2. Alors,

$$|f(z_2) - f(z_1)| = \left| \int_\alpha f'(z)dz \right|.$$

Comme f est une fonction de Bloch, nous avons que

$$(1 - |z|^2)|f'(z)| < c \in \mathbf{R}^+, \forall z \in D.$$

Ceci nous donne que:

$$\begin{aligned} |f(z_2) - f(z_1)| &= \left| \int_\alpha f'(z)dz \right| \\ &\leq \int_\alpha |f'(z)||dz| \\ &\leq c \int_\alpha \frac{|dz|}{1 - |z|^2}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} |f(z_2) - f(z_1)| &\leq c \inf_\alpha \int_\alpha \frac{|dz|}{1 - |z|^2} \\ &= c\rho(z_1, z_2), \end{aligned}$$

et, nous concluons que $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta = \epsilon / c$ tel que

$$\rho(z_1, z_2) < \delta \Longrightarrow |f(z_2) - f(z_1)| < \epsilon.$$

De façon équivalente la fonction f est uniformément continue.

: $3 \Rightarrow 4$ Pour démontrer que la famille

$$\mathcal{F} = \{(f(\phi(z)) - f(\phi(0)) : \phi \in \mathrm{Aut}(D)\}$$

est une famille normale dans D, il suffit, d'après le Théorème de Montel (voir Théorème 1.3.3), de montrer que la famille $\mathcal{F}$ est localement bornée. Soit $n \in N$ et soit la suite de compacts $K_n = \{z \in D : \rho(z, 0) \leq n\}$. Alors, nous avons bien que $\bigcup_n K_n = D$ et $K_n^\circ \subset K_n \subset K_{n+1}^\circ$. Ainsi, il suffit de trouver une constante réelle positive M_n telle que $|f(\phi(z))-f(\phi(0))| < M_n$, pour $z \in K_n$. Comme f est uniformément continue, pour $\epsilon = 1$, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\rho(z_1, z_2) < \delta \rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| < 1.$$

Pour tout n, si $M_n > n/\delta$, alors $\rho(0, z) \leq n$ entraîne l'existence d'une suite finie de nombres

$$0 = z_0, z_1, \ldots , z_{M_n} = z,$$

avec $\rho(z_{k-1}, z_k) < \delta$. Puisque f est uniformément continue et que $\phi \in \mathrm{Aut}(D)$ et donc

$$\rho(\phi(z_1), \phi(z_2)) = \rho(z_1, z_2),$$

nous trouvons que pour tout $z \in D$ avec $\rho(0, z) \leq n$, nous avons

$$|f(\phi(z)) - f(\phi(0))| \leq M_n.$$

Nous venons de démontrer que la famille est bornée sur les disques centrées en zéro, donc localement bornée et, par conséquent, elle est normale.

: $4 \Rightarrow 5$ Pour démontrer que la famille

$$\mathcal{F}' = \{(f \circ \phi)'(z)| : \phi \in (D)\}$$

est bornée en 0, il suffit de montrer qu'elle est localement bornée. Ainsi, par le Lemme 3.2.3 et puisque la dérivée de $f(\phi(z))-f(\phi(0))$ est $(f\circ\phi)'(z)$, il suffit de montrer que la famille

$$\mathcal{F} = \{(f(\phi(z)) - f(\phi(0)) : \phi \in \mathrm{Aut}(D)\}$$

est normale et bornée en un point. La première condition est vérifiée par hypothèse et la seconde, par le fait que $\mathcal{F}(0) = 0$. Nous concluons donc que

$$\sup\{|(f \circ \phi)'(0)| : \phi \in \mathrm{Aut}(D)\} < \infty.$$

: $5 \Rightarrow 1$ Soit $f \in H(D)$ telle que

$$\sup\{|(f \circ \phi)'(0)| : \phi \in \mathrm{Aut}(D)\} < \infty.$$

Alors montrons que f est une fonction de Bloch. Soit $z_0 \in D$ et posons

$$\phi(z) = \frac{z + z_0}{1 + \overline{z_0} z}, \quad \text{où } z \in D.$$

Alors $\phi \in \mathrm{Aut}(D)$. Calculons la dérivée de la fonction $(f \circ \phi)(z)$:

$$\begin{aligned} (f \circ \phi)'(z) &= f'(\phi(z)) \left(\frac{z + z_0}{1 + \overline{z_0} z} \right)' \\ &= f'(\phi(z)) \frac{1 - |z_0|^2}{(1 + \overline{z_0} z)^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant le fait que $|(f \circ \phi)'(0)| = |f'(z_0)|(1 - |z_0|^2)$ et l'hypothèse, nous concluons que la fonction f est une fonction de Bloch.

: $1 \Rightarrow 6$ Soit f une fonction de Bloch non-constante. Montrons qu'il existe une fonction g holomorphe et injective dans D et un nombre réel α positif tels que: $f(z) = \alpha \log g'(z)$. Posons

$$\alpha = 3\|f\|_\beta, \text{ et } g(z) = \int_0^z \exp\left(\frac{f(\zeta)}{\alpha} \right) d\zeta.$$

Ainsi, $g'(z) = \exp\left(\frac{f(z)}{\alpha}\right)$ et $g''(z) = \exp\left(\frac{f(z)}{\alpha}\right) \frac{f'(z)}{\alpha}$. D'où,

$$\begin{aligned} (1 - |z|^2) \left| \frac{g''(z)}{g'(z)} \right| &= (1 - |z|^2) \frac{|f'(z)|}{\alpha} \\ &\leq \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

En appliquant le critère de Nehari et Duren-Shapiro-Shields (voir Lemme 3.2.4), nous obtenons que la fonction g est injective, ce qui conclut cette démonstration.

: $6 \Rightarrow 1$ Soit g une fonction injective et f une branche de $\alpha \log g'(z)$, avec $\alpha > 0$. Montrons que f est une fonction de Bloch. Nous avons que

$$(1 - |z|^2)|f'(z)| = \alpha(1 - |z|^2)\left|\frac{g''(z)}{g'(z)}\right|.$$

En appliquant le Lemme 3.2.4 à la fonction g, nous obtenons que

$$\left|\frac{g''(z)}{g'(z)}\right| \leq \frac{6}{1 - |z|^2}.$$

Ainsi, nous concluons que la fonction f est une fonction de Bloch, et que

$$||f||_\beta \leq 6\alpha.$$

□

3.3. Applications

Cette section a comme objectif de donner des applications des fonctions de Bloch dans la théorie des fonctions analytiques. En fait, la principale application qui sera donnée ici est un théorème que Landau a démontré (voir **[16]**). Ce théorème utilise les fonctions de Bloch pour donner une idée de la valeur de la constante de Bloch. Il s'énonce comme suit

Théorème 3.3.1. *La constante de Bloch de la classe des fonctions de Bloch normalisée est la même que pour celle des fonctions holomorphes normalisée, bref nous avons ceci* $\beta = \inf\{\beta_f : ||f||_\beta < 1 \wedge |f'(0)| = 1\}$.

En regroupant ce théorème avec la Proposition 2.8.5, nous obtenons les équations suivantes

$$\begin{aligned}\beta &= \inf\{\beta_f : f \in H(D) \wedge |f'(0)| = 1\}\\ &= \inf\{\beta_f : f \in H(\overline{D}) \wedge |f'(0)| = 1\}\\ &= \inf\{\beta_f : \|f\|_\beta < 1 \wedge |f'(0)| = 1\}.\end{aligned}$$

Maintenant, nous allons donner une inégalité qui regroupe la constante de Bloch β, la semi-norme de Bloch $\|f\|_\beta$, le suprémum des rayons des disques schlichts d'une fonction f centré au point $f(z)$, soit $\beta_{f(z)}$, et le suprémum des disques schlichts contenus dans l'image de f, noté β_f . Voici donc cette inégalité

Proposition 3.3.2. *En utilisant les notations définies précédemment, nous avons, étant donnée $f \in H(D)$, que*

$$\beta_{f(z)} \leq (1 - |z|^2)|f'(z)| \leq 2\frac{\beta_f}{\beta}. \tag{3.3.1}$$

De plus, en prenant le supremum sur le disque unité, nous trouvons cette deuxième inégalité

$$\beta_f \leq \|f\|_\beta \leq 2\frac{\beta_f}{\beta}. \tag{3.3.2}$$

DÉMONSTRATION. Nous allons démontrer la première inégalité en deux parties.

1. Montrons que, $\forall z \in D$, nous avons que

$$\beta_{f(z)} \leq (1 - |z|^2)|f'(z)|.$$

Soit $f \in H(D)$ et soit $z \in D$. Si $f'(z) = 0$, alors l'inégalité est démontrée, car $f'(z) = \beta_{f(z)} = 0$. Sinon, posons

$$g(\zeta) = f\left(\frac{\zeta + z}{1 + \zeta\overline{z}}\right),$$

pour $|\zeta| < 1$. Comme $f \in H(D)$, nous avons que $g \in H(D)$ et $f(D) = g(D)$. Aussi, $g(0) = f(z)$, et $g'(0) = f'(z)(1-|z|^2) \neq 0$. Ainsi, il existe une fonction $h : D(f(z), \beta_{f(z)}) \to D(0,1)$ holomorphe, qui peut être considérée comme la fonction inverse de g, vérifiant les conditions du Lemme de Schwarz (voir Théorème A.1), soient $|h(f(z))| < 1$ et $h(f(z)) = 0$. Ceci nous donne que

$$|h'(f(z))| \leq \frac{1}{\beta_{f(z)}},$$

d'où,

$$\beta_{f(z)} \leq |g'(0)|.$$

Comme $g'(0) = f'(z)(1-|z|^2)$, nous concluons que

$$\beta_{f(z)} \leq |f'(z)(1-|z|^2)|.$$

Notons que nous avons l'égalité lorsque la fonction utilisée est $f(\zeta) = \frac{\zeta - z}{1-\bar{z}\zeta}$.

2. Démontrons ceci

$$(1-|z|^2)|f'(z)| \leq 2\frac{\beta_f}{\beta}.$$

Notons que soit β_f est finie ou infinie. Dans le premier cas, nous appliquons le Théorème 3.2.2 et nous trouvons le résultat (voir la démonstration de $2 \Rightarrow 1$). Dans le second cas, il suffit de remarquer que le membre de droite est l'infini.

$\square$

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons fait la démonstration de ce théorème:

Théorème de Bloch: *Il existe une constante positive B telle que toute fonction holomophe f définie sur le disque unité, avec la propriété que $|f'(0)| = 1$, possède un disque schlicht de rayon au moins égale à B dans son image.*

Pour ce faire, nous avons montré qu'il existe une fonction holomorphe f telle que

$$\beta_f = \beta = \inf\{\beta_f : f \in H(D) \wedge |f'(0)| = 1\}.$$

Ainsi, comme $|f'(0)| = 1$, alors $\beta_{f(0)} > 0$ et donc $\beta > 0$. Pour démontrer l'existence de cette fonction, nous avons appliqué le Principe de Bloch de Minda à une certaine suite de fonctions. Ce principe fait parti du chapitre 1 et dans ce chapitre, nous avons du parler des familles normales de Paul Montel pour en arriver à ce principe. Tandis que pour prouver que $\beta_f = \beta$, nous nous sommes servi de la semi-continuité du rayon de Bloch, soit

$$\underline{\lim}_{f_n \to f} \beta_{f_n} \geq \beta_f.$$

La dernière équation est aussi un point important. Pour la démontrer, nous avons utilisé la semi-continuité du rayon de Landau ou du rayon intérieur d'une fonction holomorphe, du Théorème de Rouché et, bien sûr, de la convergence sur les compacts de la suite de fonctions.

La constante de Bloch a aussi été étudier ici. Cette constante est en fait définie comme suit:

$$\beta = \sup\{B : \text{ le Théorème de Bloch est vrai}\},$$

et les estimés sont:

$$0,4330127\cdots = \frac{\sqrt{3}}{4} < \beta \leq \frac{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{11}{12})}{\Gamma(\frac{1}{4})\sqrt{1+\sqrt{3}}} = 0,4718617\cdots.$$

La valeur exacte de cette constante n'est pas connue encore. Il est conjecturé que sa valeur est la borne supérieure de l'inégalité. De plus, nous avons démontré dans le dernier chapitre que la constante de Bloch peut être définie de plusieurs façons, c'est-à-dire:

$$\begin{aligned} \beta &= \inf\{\beta_f : f \in H(D) \wedge |f'(0)| = 1\} \\ &= \inf\{\beta_f : f \in H(\overline{D}) \wedge |f'(0)| = 1\} \\ &= \inf\{\beta_f : \|f\|_\beta < 1 \wedge |f'(0)| = 1\}. \end{aligned}$$

Remarquons aussi que nous avons fait trois démonstrations différentes du Petit Théorème de Picard, (voir Théorèmes 1.3.6, 1.4.3 et 2.8.3).

Mentionnons en terminant que le Théorème de Bloch peut être énoncé en utilisant d'autres types de fonctions. Par exemples, les articles **[6]** et **[9]**, qui n'ont pas encore été publiés, traitent respectivement des constantes de Bloch pour les fonctions méromorphes et harmoniques.

Annexe A

APPENDICE

Il sera question de six Théorèmes importants de l'analyse complexe. Tout d'abord, nous verrons le Lemme de Schwarz et le Théorème des fonctions inverses. Ensuite viendra la théorie nécessaire au Théorème de Monodromie, soit la théorie sur les prolongements holomorphes, et le théorème lui-même. Nous terminerons avec les Théorèmes de Carathéordory, de Riemann, de Hurwitz et de Rouché.

Théorème A.1 (Lemme de Schwarz). *Soit f une fonction holomorphe définie sur D telle que*

$$|f(z)| < 1, \forall z \in D \textit{ et } f(0) = 0.$$

Alors

$$|f(z)| \leq z, \forall z \in D \textit{ et } |f'(0)| \leq 1.$$

Aussi s'il existe un z non-nul tel que $f(z) = z$ ou bien si $f'(0) = 1$, alors $f(z) = \lambda z$, avec $|\lambda| = 1$ une constante.

Théorème A.2 (Théorème des fonctions inverses). *Soit f une application C^1 d'un ouvert U de $\mathbf{R^n}$ dans $V \in \mathbf{R^n}$. S'il existe un point $\mathbf{x}$ dans U tel que le $Jac_R f|_{\mathbf{x}} \neq 0$, alors*

1. *il existe deux ouverts $\tilde{U}$ et $\tilde{V}$ de $\mathbf{R^n}$ avec $\mathbf{x} \in \tilde{U}$ et $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \in \tilde{V}$ sur lesquels f est une bijection de $\tilde{U}$ sur $\tilde{V}$.*
2. *Aussi, la fonction inverse, notée $g : \tilde{V} \to \tilde{U}$, est définie par*

$$g(f(\mathbf{x})) = \mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in \tilde{U}$$

est une fonction C^1 sur $\tilde{V}$.

Passons maintenant à la théorie des prolongements holomorphes d'une fonction.

Définitions A.3. 1. *Nous disons que deux courbes $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \mathbf{C}$ sont homotopes, noté $\gamma_0 \sim \gamma_1$, si:*

$$\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = a, \quad \gamma_0(1) = \gamma(1) = b,$$

et s'il existe une fonction continue

$$F : [0,1] \times [0,1] \to \mathbf{C}$$

telle que

$$F(0,t) = a, F(1,t) = b, F(s,0) = \gamma_0(s), F(s,1) = \gamma_1(s).$$

La figure A.0.1 nous donne une bonne idée de la fonction F.

2. *Le germe de l'élément $\langle f, \Omega \rangle$, avec Ω un domaine, au point a est noté $[f]_a$ et est défini comme suit:*

$$[f]_a = \{\langle g, \Omega \rangle : a \in \Omega, f = g \text{ sur un voisinage de } a\}.$$

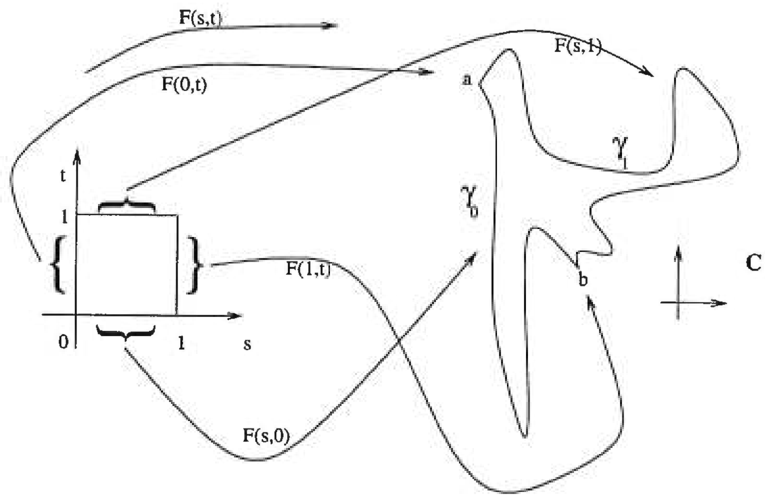

FIG. A.0.1. *La fonction $F(s,t)$.*

3. *Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbf{C}$ une courbe et supposons que $\forall t \in [0,1]$, nous avons un élément $\langle f_t, \Omega_t \rangle$ tel que:*

   (i) $\gamma(t) \in \Omega_t$,

   (ii) $\exists \delta > 0$, tel que si $|s-t| < \delta$ alors $\gamma(s) \in \Omega_t$ et $[f_s]_{\gamma(s)} = [f_t]_{\gamma(s)}$.

   Alors $\langle f_1, \Omega_1 \rangle$ est un prolongement holomorphe de $\langle f_0, \Omega_0 \rangle$ le long de γ.

Théorème A.4 (Théorème de Monodromie). *Soit Ω un domaine inclu dans un ouvert X du plan complexe $\mathbf{C}$ et soit $\langle f, \Omega \rangle$ un élément qui admet un prolongement le long de toute courbe dans X. Alors, soient $a \in \Omega, b \in X$ deux points, soient γ_0, γ_1 des courbes reliant a à b et soient*

$$\{\langle f_t, \Omega_t \rangle : 0 \leq t \leq 1\},\ \{\langle g_t, \tilde{\Omega}_t \rangle : 0 \leq t \leq 1\},$$

deux prolongement de $\langle f, \Omega \rangle$ le long de γ_0 et γ_1 respectivement. Alors, si $\gamma_0 \sim \gamma_1$ dans X, alors

$$[f_1]_b = [g_1]_b.$$

Avant de voir le Théorème de la convergence de Carathéodory, nous devons définir la convergence d'une suite de domaine.

Définition A.5. *Soient* $\{G_n\}$ *une suite de domaines de* $\mathbf{C}$ *contenant l'origine. Alors nous disons que* G_n *converge vers* G *relativement à l'origine si*

1. *soit* $G = \{0\}$ *ou soit* G *est un domaine de* $\mathbf{C}$ *tel que pour tout point* $w \in G$ *il existe un voisinage dans* G *qui est inclu dans* G_n *à partir d'un certain* n.
2. *Si* $w \in \partial G$, *alors il existe une suite* $w_n \in \partial G_n$ *qui converge vers* w.

Théorème A.6 (Théorème de la convergence de Carathéodory). *Soit*

$$\{f_n : D \to G_n\}$$

une suite de fonctions holomorphes et injectives telles que

$$f_n(0) = 0 \text{ et } f_n'(0) > 0.$$

Alors les f_n *convergent localement uniformément vers une fonction* $f : D \to G$ *holomorphe et injective, avec* $f(0) = 0$ *et* $f'(0) > 0$, *si et seulement si* $G_n \to G$ *relativement à l'origine et* $G \neq \{0\}$.

Terminons donc avec les derniers théorèmes utilisés dans ce mémoire.

Théorème A.7 (Théorème des applications de Riemann). *Soit* $G \subset C$ *un domaine simplement connexe strict du plan complexe et soit* $z_0 \in G$. *Alors il existe une unique fonction* $f : G \to D$ *holomorphe et bijective telle que* $f(z_0) = 0$ *et* $f'(z_0) > 0$.

Théorème A.8 (Théorème de Hurwitz). *Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions holomorphes définies sur un domaine Ω du plan complexe qui converge uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction f holomorphe et non-constante, telle que pour un certain $z_0 \in \Omega$, nous avons $f(z_0) = 0$ avec multiplicité m. Alors pour tout $r > 0$ suffisament petit, il existe un entier $N(r)$ tel que f_n possède m zéros dans le disque $D(z_0, r)$ et ce pour tout $n > N(r)$. (Bien sûr il faut compter les multiplicités des zéros.)*

Théorème A.9 (Théorème de Rouché). *Soit G borné avec ∂G lisse et soient ϕ et ψ deux fonctions holomorphes définies sur $\overline{G}$ telles que $|\psi| < |\phi|$ sur ∂G. Alors les fonctions ϕ et $\phi + \psi$ ont le même nombre de zéros dans G.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] **L. V. Ahlfors, H. Grunsky**, *Über die Blochsche Konstante*, Math. Z. **42** (1937), 671-673.

[2] **J. M. Anderson**, *Bloch functions: the basic theory.* Operators and function theory (Lancaster, 1984), 1–17, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C: Math. Phys. Sci., 153, Reidel, Dordrecht-Boston, Mass., 1985.

[3] **J. M. Anderson, J. Clunie, Ch. Pommerenke**, *On Bloch functions and normal functions*, J. Reine Angew. Math. **270** (1974), 12-37.

[4] **A. Bloch**, *Les Théorèmes de M. Valiron sur les fonctions entières et la théorie de l'uniformisation*, Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse (3) **17** (1925), 1-22.

[5] **M. Bonk**, *On Bloch's Constant*, Proc. Amer. Math. Soc. **110** (1990), 889-894.

[6] **M. Bonk, A. Eremenko**, *Covering properties of meromorphic functions, negative curvature and spherical geometry*, 3 avril 1999, article non-publié.

[7] **Huaihui Chen, P. M. Gauthier**, *On Bloch's Constant*, J. Anal. Math. **69** (1996), 275-291.

[8] **Huaihui Chen, P. M. Gauthier**, *On strongly normal functions*, Canad. Math. Bull. 39 (1996), no. 4, 408–419.

[9] **Huaihui Chen, P. M. Gauthier, W. Hengartner**, *Bloch constants for planer harmonic mappings*, 1999, article non-publié.

[10] **John B. Conway**, *Functions of one complex variable*, 2e ed., Springer-Verlag, 1978.

[11] **P.L. Duren, H.S. Shapiro, A.L. Shields**, *Singular measures and domains not of Smirnov type*, Duke Math. J. **33** (1966), 247-254.

[12] **P. M. Gauthier**, *Covering properties of holomorphic mappings*, Complex geometric analysis in Pohang (1997), 211–218, Contemp. Math., 222, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[13] **G. M. Golusin**, *Geometrische Funktionentheorie*, Deutscher Verlag der Wiss, 1957.

[14] **R. C. Gunning**, *Introduction to Holomorphic Functions of Several Variables*, Wadsworth and Brooks/Cole, 1990.

[15] **S. G. Krantz**, *Geometric analysis and function spaces*, AMS, 1993.

[16] **E. Landau**, *Über die Blochsche Konstante und zwei verwandte Weltkonstanten*, Math Z., **39**, 1929, 608-634.

[17] **Ch. Pommerenke**, *On Bloch functions*, J. London Math. Soc. (2) **2** (1970), 689-695.

[18] **Ch. Pommerenke**, *Boundary behaviour of conformal maps*, Springer-Verlag, 1992.

[19] **R. Remmert**, *Classical Topics in Complex Function Theory*, Springer-Verlag, 1998.

[20] **A. Robinson**, *Metamathematical problems*, J. Symbolic Logic, 38 (1973), 500-516.

[21] **W. Rudin**, *Principles of Mathematical Analysis*, 3e ed., McGraw-Hill, 1976.

[22] **W. Rudin**, *Real and Complex Analysis*, 3e ed., McGraw-Hill, 1987.

[23] **J. L. Schiff**, *Normal families*, Springer-Verlag, 1993.

[24] **W. Seidel, J. L. Walsh**,*On the derivatives of functions analytic in the unit circle and their radii of univalence and p-valence*, Trans. Amer. Math. Soc., **52** (1942), 128-216.

[25] **L. Zalcman**, *A heuristic principle in complex function theory*, Amer. Math. Monthly 82 (1975), no. 8, 813–817.

[26] **L. Zalcman**, *New light on normal families*, Proceedings of the Ashkelon Workshop on Complex Function Theory (1996), 237–245, Israel Math. Conf. Proc., 11, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1997.

[27] **L. Zalcman**, *Normal families: new perspectives*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 35 (1998), no. 3, 215–230.