

2m11.2661.9

Université de Montréal

Estimation de la probabilité de ruine et sa dérivée par
simulation.

par

Quoc Phong Le

Département d'informatique et de recherche opérationnelle

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès Sciences (M.Sc.)
en informatique

Mai, 1998

©Quoc Phong Le



ψA 2000

76

U54

1998

v.029

Université de Montréal

Estimation de la probabilité de ruine et sa dérivée par simulation

par

Guo Zhong

Département d'informatique et de recherche opérationnelle

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des arts et des sciences
en vue de l'obtention du grade de
Maîtrise en Sciences (M.Sc.)
en informatique

1998

Université de Montréal



Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:
"Estimation de la probabilité de ruine et sa dérivée par simulation."

Présenté par:
Quoc Phong Le

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

Président: Pierre L'Ecuyer
Directeur: Félixi J. Vazquez-Abrad
Membre: Louis Doray

Mémoire accepté le: 28.10.1998

Sommaire

Le surplus d'une compagnie d'assurance au temps $t \geq 0$ est la différence entre la somme du capital initial au temps 0 et les primes totales reçues et le total des montants de réclamation jusqu'au temps t . Soit $\{U(t), t \geq 0\}$, le processus de surplus dont le modèle est défini plus tard dans la première partie du chapitre 1. Lorsque $U(t) < 0$ pour $t < \infty$, on dit que la ruine est survenue. On dénote $\psi(u, \lambda)$ la probabilité que cet événement (la ruine) survienne, lorsque le taux d'arrivée des sinistres est λ . Déterminer cette probabilité constitue un sujet crucial pour les compagnies d'assurance et intéresse plusieurs chercheurs oeuvrant dans le domaine actuariel.

Bien qu'il existe des expressions explicites pour $\psi(u, \lambda)$ pour certaines distributions du montant de réclamations, on doit généralement recourir aux méthodes numériques ou à la simulation pour l'estimer. Cette dernière est effectivement le sujet de ce travail. Les lecteurs vont trouver au chapitre 2 l'introduction des approches de simulation utilisées pour nos expériences. Toutefois, l'estimation de $\psi(u, \lambda)$ par simulation ne se fait pas sans problème. Dénotons T , le moment où survient la ruine pour la première fois et A l'ensemble de toutes les trajectoires du processus $\{U(t)\}$ pour lesquelles $T < \infty$. Par la simulation directe du processus $\{U(t)\}$, étant sur une trajectoire, on ne sait pas si cette trajectoire appartient à A ou à A^c . Donc on ne peut pas établir une politique infaillible pour contrôler la fin de notre simulation. Heureusement, il existe la méthode du changement de mesure (IS) que l'on discute dans le chapitre 3, qui nous permet dans certains cas de contourner ce problème avec succès. D'autre part, estimer $\psi(u, \lambda)$ en utilisant le processus $\{U(t)\}$ sous IS n'est certainement pas la seule méthode existante. On peut aussi l'estimer à l'aide du processus d'entreposage $X(t)$ (*Storage Process*) ou par la méthode de convolution (chapitre 1). On discute également les calculs des dérivées de $\psi(u, \lambda)$ par rapport

au taux d'arrivée λ des réclamations dans le chapitre 4.

À part de l'estimation de $\psi(u, \lambda)$ et de la dérivée de $\psi(u, \lambda)$ par rapport au taux d'arrivée des sinistres, nous voulons aussi présenter l'implantation de nos processus sous plusieurs approches de simulation et de comparer l'efficacité de nos méthodes sans vouloir prouver que l'une de ces méthodes est meilleure. Selon l'application, les lecteurs vont choisir la méthode ainsi que l'implantation qui leur convient. Afin de compléter ce travail, on présente dans le chapitre 5, les résultats de nos expériences ainsi que les comparaisons de l'efficacité de nos estimateurs.

Table des matières

1	Description des modèles	5
1.1	Formulation du problème	5
1.2	Calcul de $\psi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ à l'aide du processus de surplus $\mathbf{U}(t)$	8
1.2.1	Modèle linéaire	8
1.2.2	Modèle non linéaire	10
1.3	Calcul de $\psi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ à l'aide du processus d'entreposage $\mathbf{X}(t)$	11
1.3.1	Formulation du modèle	11
1.3.2	Modèle non linéaire	15
1.3.3	Modèle linéaire	16
1.4	Calcul de $\psi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ à l'aide du modèle de convolution	17
1.5	Conclusion	20
2	Simulation et analyse statistique	21
2.1	Introduction	21
2.2	Répétition (Replication)	22
2.3	Moyennes par lots (Batch means)	24
2.4	Méthode régénérative (Regenerative Method)	25
3	Estimation de $\psi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ par simulation	28
3.1	Processus de surplus $\mathbf{U}(t)$	28
3.1.1	Méthode du changement de mesure	29

3.1.2	L'application	31
3.2	Processus d'entreposage $\mathbf{X}(t)$	36
3.2.1	Moyennes par lots	37
3.2.2	Méthode régénérative	38
3.3	Modèle de convolution	40
4	Estimateur de la dérivée de $\psi(u, \lambda)$ par rapport au taux d'arrivée des réclamations λ	42
4.1	Analyse des perturbations rares (RPA)	42
4.1.1	Processus de surplus $U(t)$	44
4.1.2	Processus d'entreposage $\mathbf{X}(t)$	48
4.2	Méthode du rapport de vraisemblance	56
5	Résultats de simulations	59
5.1	Loi Exponentielle	61
5.1.1	Processus de surplus $U(t)$	62
5.1.2	Processus d'entreposage $\mathbf{X}(t)$	63
5.1.3	Modèle de convolution	64
5.1.4	Tableau d'efficacité:	64
5.2	Loi de Weibull	72
5.2.1	Processus de surplus $U(t)$	73
5.2.2	Processus d'entreposage $\mathbf{X}(t)$	76
5.2.3	Modèle de convolution	77
5.2.4	Tableau d'efficacité:	77
5.3	Loi de Pareto	83
5.3.1	Processus de surplus $U(t)$	84
5.3.2	Processus d'entreposage $\mathbf{X}(t)$	84
5.3.3	Modèle de convolution	85
5.3.4	Tableau d'efficacité:	85

5.4 Conclusion:	91
Remerciements	93

Chapitre 1

Description des modèles

On étudie dans ce chapitre, la probabilité de ruine $\psi(u, \lambda)$ à l'aide du processus de surplus $U(t)$ ([10], [13]), du processus d'entreposage (*Storage Process*) $X(t)$ [23] et du modèle de convolution [10]. Le modèle de convolution a été développé et utilisé uniquement lorsqu'on ignore le facteur d'intérêt dans la formulation du problème (cas linéaire). Cependant, soulignons que l'on peut calculer $\psi(u, \lambda)$ à l'aide du processus de surplus $U(t)$ et du processus d'entreposage $X(t)$ avec (cas non-linéaire) ou sans facteur d'intérêt.

1.1 Formulation du problème

On dénote $U(t)$, le surplus d'un assureur au temps t . Le modèle traditionnel de $U(t)$ ([13], [4], [10] et [16]) est

$$U(t) = u + ct - S(t), \quad t \geq 0, \quad (1.1)$$

où:

- c est le taux de prime reçue (on suppose que la prime est reçue continuellement à un taux constant $c > 0$).
- $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ est le montant de réclamations accumulé jusqu'au temps t .

- $N(t)$ est le nombre total de réclamations jusqu'au temps t
- Y_i est le montant de la i -ième réclamation.
- u est le surplus initial, i.e. $U(0) = u$.
- T_i est le temps jusqu'à la i -ième réclamation.
- Supposons que les T_i et Y_i soient mutuellement indépendantes.

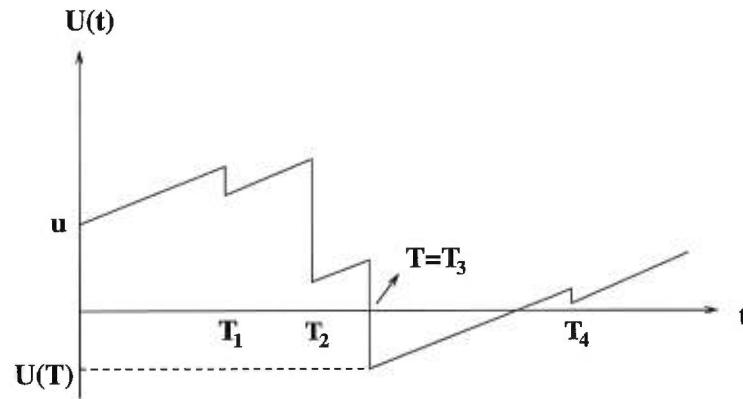


Figure 1.1: Un exemple typique du $\{U(t)\}$ (modèle linéaire).

Notons que dans ce modèle traditionnel de $U(t)$, le facteur d'intérêt est ignoré (modèle linéaire). Un exemple typique du modèle linéaire du processus de surplus $\{U(t), t \geq 0\}$ est illustré à la figure 1.1. Dans cet exemple, la ruine est survenue au temps $t = T_3$.

Une variante pour la forme traditionnelle de $U(t)$ est présentée par Hans U. Gerber [13]. D'après Gerber, le processus de surplus $\{U(t), t \geq 0\}$ est défini par un surplus initial $U(0) = u$ et l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dU(t) = C(U(t))dt - dS(t) \quad (1.2)$$

où $S(t)$ est défini comme dans le modèle traditionnel et $C(\cdot)$ est appelée la *premium rate function* tel que

$$C(u) = c + \delta u > 0 \quad \text{pour } u > 0 \quad (1.3)$$

où δ est la force d'intérêt ($\delta = \ln(1 + i)$ où i est le taux d'intérêt).

Remarquons que l'égalité (1.2) est un modèle plus général que le modèle traditionnel. En effet, ce dernier correspond au cas où $C(\cdot)$ est constant ($\delta = 0$). Si on inclut le facteur d'intérêt (i.e. $\delta > 0$), alors

$$U(t) = ue^{\delta t} + c(e^{\delta t} - 1)/\delta - \int_0^t e^{\delta(t-z)} dS(z) \quad (1.4)$$

est une solution de (1.2).

En regardant la figure 1.2, le processus donné par (1.4) suit la dynamique suivante:

$$\begin{aligned} U(t) &= U(t_1)e^{\delta(t-t_1)} + c(e^{\delta(t-t_1)} - 1)/\delta \quad t \in [t_1, t_2) \\ U(t_2) &= U(t_1)e^{\delta(t_2-t_1)} + c(e^{\delta(t_2-t_1)} - 1)/\delta - Y_2. \end{aligned} \quad (1.5)$$

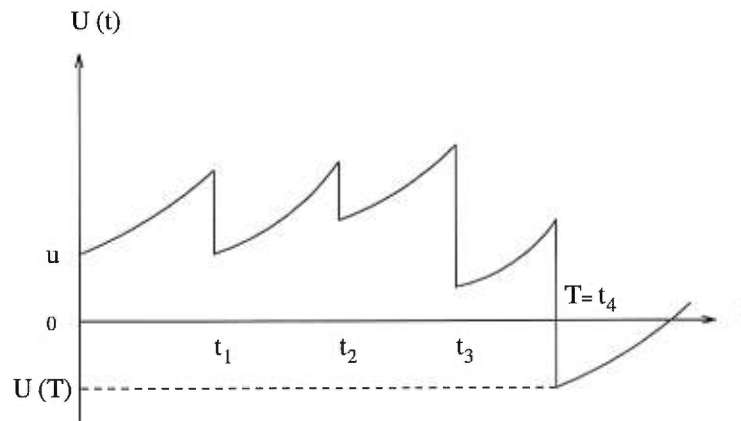


Figure 1.2: Un exemple typique de $\{U(t)\}$ (cas non-linéaire).

On définit la probabilité de ruine comme la probabilité que le surplus tombe au dessous de 0. Soit T l'instant où apparaît la ruine, alors

$$T = \min\{t : t \geq 0 \text{ et } U(t) < 0\}. \quad (1.6)$$

Si $T = \infty$, i.e. $U(t) \geq 0$ pour $\forall t \geq 0$, on pose $T = \infty$, i.e. la ruine n'apparaît pas. Donc, la probabilité de ruine peut être exprimée sous forme

$$\psi(u, \lambda) = \Pr(T < \infty). \quad (1.7)$$

1.2 Calcul de $\psi(u, \lambda)$ à l'aide du processus de surplus $U(t)$

On définit le modèle linéaire (1.1) à l'aide des deux processus suivants:

- Le processus poissonnien des arrivées de réclamations $\{N(t), t \geq 0\}$ avec taux $\lambda > 0$. Si on définit W_i comme le temps entre deux réclamations successives, alors $W_i = T_{i+1} - T_i$ suit une exponentielle de paramètre λ ([31], [30]).
- Le processus du montant de réclamation accumulé $\{S(t), t \geq 0\}$.

Si $S(t) = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{N(t)}$, où Y_1, Y_2, \dots sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une distribution G , et si elles sont aussi indépendantes de $N(t)$, alors $\{S(t), t \geq 0\}$ est appelé un processus de Poisson composé [31]. De plus, à un temps $t \geq 0$ fixe, $S(t)$ suit une distribution Poisson composée avec

$$E[S(t)] = \lambda \mu t, \quad (1.8)$$

$$\text{Var}[S(t)] = \lambda \mu_2 t \quad (1.9)$$

où $\mu = E[Y]$ et $\mu_2 = E[Y^2]$.

1.2.1 Modèle linéaire

Avant de formuler une expression pour $\psi(u, \lambda)$, on introduit un concept très important dans la théorie du risque. Supposons que la prime c excède l'espérance du

montant de réclamation accumulé par unité de temps, i.e. $c > \lambda\mu$, ce qui implique qu'il existe un θ tel que $c = (1 + \theta)\lambda\mu$ où θ est positif. θ est appelé la *relative security loading* ([13], [4], [16] et [10]). Soit $(-\infty, \gamma)$, le plus grand intervalle pour lequel la fonction génératrice des moments (f.g.m.) de la distribution du montant d'une réclamation existe ($M_Y(r) = E[e^{Yr}]$) (on suppose qu'elle tend vers ∞ quand $r \rightarrow \gamma$). Considérons l'équation:

$$\lambda + cr = \lambda M_Y(r) \quad r < \gamma \quad (1.10)$$

ou l'expression équivalente en remplaçant c par $(1 + \theta)\lambda\mu$,

$$1 + (1 + \theta)\mu r = M_Y(r) \quad r < \gamma. \quad (1.11)$$

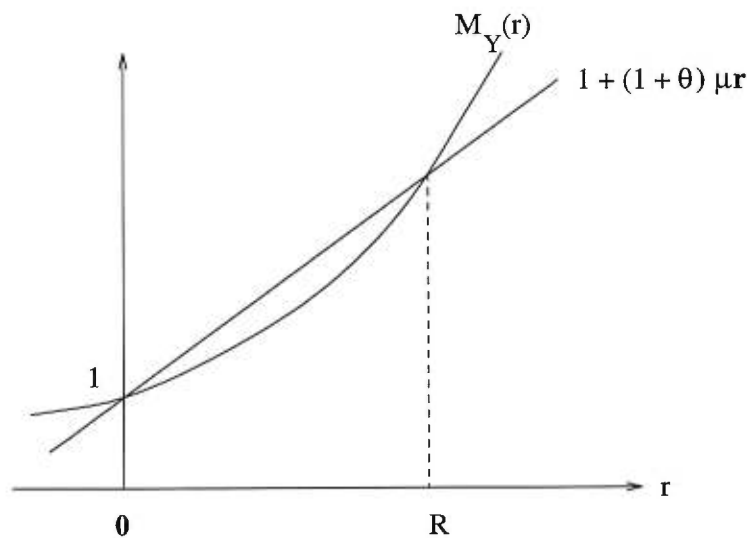


Figure 1.3: Définition du coefficient d'ajustement.

L'équation (1.11) a deux solutions (voir figure 1.3): $r = 0$ et $r = R$. On appelle R , le coefficient d'ajustement. À l'aide de l'égalité (1.10) et sa solution R , nous sommes en mesure d'énoncer un théorème qui permet de trouver la formule classique de $\psi(u)$ ([10] et [16]).

Théorème 1.1: Pour $u \geq 0$,

$$\psi(u, \lambda) = \frac{e^{-Ru}}{\mathbb{E}[e^{-RU(T)} | T < \infty]} \quad (1.12)$$

où R est le coefficient d'ajustement ([10], [16],[13]). Le coefficient d'ajustement R joue un rôle important dans la théorie de ruine car il nous permet de trouver une borne supérieure de $\psi(u, \lambda)$. Cette borne supérieure est appelée la borne supérieure exponentielle de Lundberg [34]. Pour expliquer la borne supérieure de Lundberg, il suffit de remarquer que, étant donné $T < \infty$, il est nécessaire que $U(T)$ soit négatif. Par conséquent, le dénominateur de (1.12) excède 1. Donc, $\psi(u, \lambda)$ est borné par l'expression:

$$\psi(u, \lambda) \leq e^{-Ru} < 1, \quad \forall u. \quad (1.13)$$

Lorsque la distribution du montant d'une réclamation Y suit une loi exponentielle avec paramètre $\mu = \mathbb{E}(Y)$, l'égalité (1.12) peut être résolue explicitement ([10], [16]):

$$\begin{aligned} \psi(u, \lambda) &= (1 - R\mu) \exp\{-R\mu\} \\ &= \frac{1}{1 + \theta} \exp\left\{-\frac{\theta}{1 + \theta} \frac{u}{\mu}\right\}, \quad u \geq 0 \end{aligned}$$

où $R = \frac{\theta}{(1 + \theta)\mu}$.

On peut aussi trouver une expression explicite de $\psi(u, \lambda)$ pour certaines familles de distribution du montant de réclamation, par exemple *Mixture of Erlang Claims Amounts* [25], mais en général, le dénominateur de l'égalité (1.12) est difficile à calculer.

1.2.2 Modèle non linéaire

Reprenons le modèle de surplus (1.2). Soit y le montant de la première réclamation, et soit t le moment où cette réclamation apparaît. En généralisant la formule de Gerber [13] pour le cas linéaire, on obtient une expression de $\psi(u, \lambda)$ pour le cas non linéaire

$$\psi(u, \lambda) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty \psi(C(U(t)) - y) dP(y) dt \quad (1.14)$$

où $U(t) = u + \int_0^t C(U(s)) ds$ et $dP(y)$ est la densité de Y .

Une expression exacte de $\psi(u)$ a été donnée par Sergerdahl [27] dans le cas où le montant des réclamations suit une exponentielle et la fonction du taux de prime $C(u) = c + \delta u$ [23]:

$$\psi(u, \lambda) = \frac{\Gamma(\frac{\lambda}{\delta}, \frac{c\mu}{\delta} + u\mu)}{\Gamma(\frac{\lambda}{\delta}, \frac{c\mu}{\delta}) + \frac{\delta}{\lambda} (\frac{c\mu}{\delta})^{\frac{\lambda}{\delta}} e^{-\frac{c\mu}{\delta}}} \quad (1.15)$$

où la fonction gamma incomplète est définie comme

$$\Gamma(a, b) = \int_b^\infty x^{a-1} e^{-x} dx.$$

1.3 Calcul de $\psi(u, \lambda)$ à l'aide du processus d'entreposage $X(t)$

1.3.1 Formulation du modèle

Considérons le processus $\{X(t)\}$ défini par une valeur initiale arbitraire $X(0)$ et l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dX(t) = \begin{cases} -C(X(t))dt + dS(t) & \text{si } X(t) < 0 \\ dS(t) & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.16)$$

où $C(\cdot)$ et $S(t)$ prennent les mêmes définitions qu'à la section (1.1.1). Le processus défini en (1.16) peut-être tombé en dessous de 0, en ce cas, on impose qu'il soit égal à 0 jusqu'au prochain saut (réclamation). La figure 1.4 illustre une trajectoire de $X(t)$ et $U(t)$.

Le processus $\{X(t)\}$ est appelé le processus d'entreposage (*Storage process*). Dans ce qui suit, on souligne la dualité qui existe entre le processus de surplus

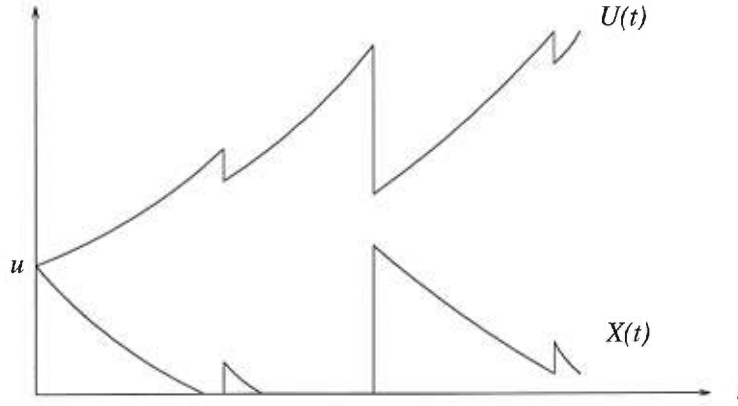


Figure 1.4: Une trajectoire de $X(t)$ et $U(t)$

$\{U(t)\}$ et le processus $\{X(t)\}$ définis respectivement par (1.2) et (1.16). Michaud [23] démontre cette dualité de la manière suivante:

En premier lieu, on définit $\bar{\psi}(u, \lambda) = 1 - \psi(u, \lambda)$ et on démontre que $\bar{\psi}(u, \lambda)$ est une solution de l'équation intégral-différentielle:

$$C(u) \frac{d}{du} \bar{\psi}(u, \lambda) = \lambda \bar{\psi}(u, \lambda) - \lambda \int_{-\infty}^u \bar{\psi}(u - y) dP(y), \quad u > 0. \quad (1.17)$$

Soit $u(t) = u + \int_0^t C(u(s)) ds$. Avant la première réclamation, $u(t)$ et $U(t)$ sont égaux. Si on considère un intervalle de temps arbitraire de longueur h tel qu'il y ait au plus une réclamation entre 0 et h alors, il n'y a pas de réclamation avec probabilité $e^{-\lambda h}$. S'il n'y a pas de réclamation dans cet intervalle, alors le surplus au temps h est $u(h)$. Avec une réclamation au temps $t < h$, le surplus devient $u(t) - y$. En appliquant la loi de probabilité totale, on obtient:

$$\bar{\psi}(u, \lambda) = e^{-\lambda h} \bar{\psi}(u(h)) + \lambda \int_0^h e^{-\lambda t} \int_{-\infty}^{u(t)} \bar{\psi}(u(t) - y) dP(y) dt. \quad (1.18)$$

Comme $\bar{\psi}(u, \lambda)$ est indépendant de h , en dérivant chaque côté de l'égalité (1.18) par rapport à h et en prenant la limite quand h tend vers 0, on retrouve l'égalité (1.17).

Par la suite, on pose $F(u, t) = \Pr(X(t) \leq u, t \geq 0)$, la fonction de répartition de la variable aléatoire $X(t)$. Si on choisit $C(\cdot)$ assez grand tel que $X(t)$ ne tend pas vers ∞ et qu'il ait une distribution stationnaire, alors on a ([31], [29] et [30])

$$F(u) = \lim_{t \rightarrow \infty} F(u, t),$$

Avec les mêmes arguments qui nous amènent à (1.17), on écrit l'équation intégrodifférentielle pour $F(u)$:

$$C(u) \frac{d}{du} F(u) = \lambda F(u) - \lambda \int_{-\infty}^u F(u-y) dP(y), \quad u > 0. \quad (1.19)$$

Soit $u(t) = u + \int_t^0 C(u(s)) ds$ et considérons l'intervalle de temps $t_0 - h \leq t \leq t_0$ ($0 < h < t_0$). L'événement $(X(t_0) \leq x)$ est équivalent à l'une des deux situations suivantes:

1. $(X(t_0 - h) \leq u(-h))$ s'il n'y a pas eu de saut dans cet intervalle, ou
2. $(X(t_0 - h') \leq u(-h') - y)$ si le dernier saut dans cet intervalle de temps est survenu au temps $t_0 - h'$ ($h' < h$) et le montant de ce saut est y .

Par la loi de probabilité totale, on obtient

$$\begin{aligned} F(u, t_0) &= e^{-\lambda h} F(u(-h), t_0 - h) \\ &+ \lambda \int_0^h e^{-\lambda h'} \int_{-\infty}^{u(-h')} F(u(-h') - y, t_0 - h') dP(y) dh'. \end{aligned}$$

Prenons la limite quand t_0 tend vers l'infini, nous obtenons:

$$F(u) = e^{-\lambda h} F(u(-h)) + \lambda \int_0^h e^{-\lambda h'} \int_{-\infty}^{u(-h')} F(u(-h') - y) dP(y) dh'. \quad (1.20)$$

En dérivant chaque côté de l'égalité (1.20) par rapport à h et en prenant la limite quand h tend vers 0, on retrouve l'égalité (1.19).

Finalement, si on compare (1.17) et (1.19), on vérifie que $\bar{\psi}(u, \lambda)$ et $F(u)$ sont tous les deux solutions de la même équation intégrodifférentielle (avec conditions: $\bar{\psi}(\infty) = F(\infty) = 1$) et que cette équation a une solution unique [12, p. 78], on peut

conclure alors que $\bar{\psi}(u, \lambda) = F(u)$. Ainsi, calculer $\psi(u, \lambda)$ est équivalent à calculer $F(u) = 1 - \psi(u, \lambda)$.

Dans ce qui suit, on désire trouver une expression explicite pour $F(u)$. D'après les travaux de Dufresne & Gerber [12], on définit $D(u, t)$, le temps total que $\{X(t)\}$ passe en dessous du niveau u avant le temps t , et on obtient une expression explicite pour $F(u)$:

$$F(u) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{D(u, t)}{t} \quad \text{p.s.} \quad (1.21)$$

L'équation (1.21) dit que, à long terme, la probabilité que $\{X(t)\}$ soit inférieur à u est égale à la proportion du temps que $\{X(t)\}$ passe en dessous du niveau u . La preuve de (1.21) se trouve dans [17, Théorème 1, p. 58].

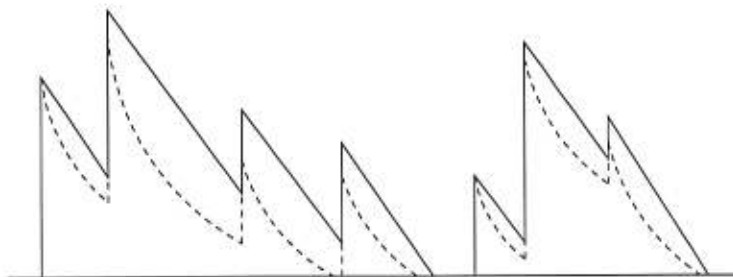


Figure 1.5: Une trajectoire de $X(t)$ et $X'(t)$

D'autre part, considérons $\{X(t)\}$, le processus non-linéaire (i.e. $c(u) = c + \delta u$) et $\{X'(t)\}$, le processus linéaire (i.e. $\delta = 0$). Le processus non-linéaire est dominé stochastiquement par le processus linéaire (voir figure 1.5). Si nous changeons l'échelle du temps à $t' = ct$ alors, le processus $\{X'(t')\}$ devient un processus du travail (*Work Process*) dans une file d'attente M/G/1 avec taux d'arrivée $\lambda' = \lambda/c$ et temps de service $\{Y_i\}$. Si $c > \lambda E[Y]$, on a

$$\frac{\lambda}{c} < \frac{1}{E[Y]} \Leftrightarrow \lambda' < \frac{1}{E[Y]}.$$

D'après la théorie des files d'attente et la théorie du renouvellement ([30],[31]) alors la file est stable et

$$E(C) = \frac{1}{\lambda E(Y)} < \infty$$

où C est le nombre clients servis pendant la période d'occupation (la période durant laquelle le système n'est pas vide), et le système se régénère p.s. ([30], [31]). Ainsi, ce résultat justifie le choix de c dans la section 1.2.1 et confirme la convergence de (1.21). Du théorème de renouvellement, on a une autre forme pour (1.21):

$$F(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n d_i(u)}{\sum_{i=1}^n W_i}, \quad (1.22)$$

où W_i est le temps entre le $(i-1)$ -ième et le i -ième saut et $d_i(u)$ est le temps que le processus passe en dessous du niveau u entre le $(i-1)$ -ième et le i -ième saut.

1.3.2 Modèle non linéaire

Toujours d'après Dufresne & Gerber, la valeur de $X(t)$ entre deux sauts est une solution de l'équation $X'(t) = -c - \delta X(t)$:

$$X(t) = X(t_0)e^{-\delta(t-t_0)} - c \left(\frac{1 - e^{-\delta(t-t_0)}}{\delta} \right), \quad t > t_0. \quad (1.23)$$

La chaîne imbriquée de $X(t)$, dénotée par $\{X_n\}$, est obtenue en posant X_n égal à la valeur de $X(t)$ immédiatement après le n -ième saut:

$$X_n = \max \left[Y_n, X_{n-1}e^{-\delta W_n} - c \left(\frac{1 - e^{-\delta W_n}}{\delta} \right) + Y_n \right], \quad X_0 = u. \quad (1.24)$$

Le temps total que le processus passe en dessous du niveau u avant le n -ième saut est obtenu récursivement par

$$D_{n+1}(u) = \begin{cases} D_n(u) + W_{n+1}, & X_n \leq u, \\ D_n(u) + \max(0, W_{n+1} - r_{n+1}), & X_n > u, \end{cases} \quad (1.25)$$

avec $D_0(u) = 0$, et r_{n+1} est le temps nécessaire pour atteindre le niveau x en commençant par X_n (supposons qu'il n'y a pas de réclamation pendant cette période). Ce temps est calculé à l'aide de (1.23) en prenant $X(t_0) = X_n$ et $X(t) = x$. Par conséquent,

$$r_{n+1} = \frac{1}{\delta} \ln \left(\frac{X_n + c/\delta}{u + c/\delta} \right). \quad (1.26)$$

Figure 1.6 illustre un exemple lorsque $X_n > u$. Dans ce cas, le temps que $X(t)$ passe en dessous de u entre les n -ième et $n + 1$ -ième réclamations est $W_{n+1} - r_{n+1}$.

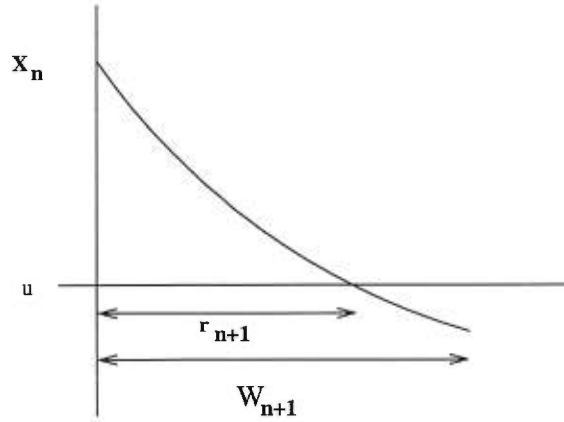


Figure 1.6: cas $X_n > x$

1.3.3 Modèle linéaire

Le modèle linéaire est le cas où $\delta = 0$. De manière similaire à la section précédente, la valeur de $X(t)$ entre deux sauts est

$$X(t) = X(t_0) - c(t - t_0), \quad t > t_0. \quad (1.27)$$

La chaîne imbriquée de $X(t)$, dénotée par $\{X_n\}$, est obtenue en posant X_n , la valeur de $X(t)$ immédiatement après le n -ième saut:

$$X_n = \max [Y_n, X_{n-1} - cW_n + Y_n], \quad X_0 = u. \quad (1.28)$$

Finalement, $D_n(x)$ prend la même formule que le modèle non linéaire avec

$$r_{n+1} = \frac{X_n - u}{c}. \quad (1.29)$$

1.4 Calcul de $\psi(u, \lambda)$ à l'aide du modèle de convolution

Dans cette section, on modélise uniquement la probabilité de ruine pour le cas linéaire (sans taux d'intérêt). À cette fin, considérons le montant du surplus $U(t)$ au temps où il tombe pour la première fois en dessous du niveau initial (il se pourrait que ce cas ne se produise jamais). Le théorème suivant permet de trouver une expression simple de $\psi(0)$ [10], la probabilité de ruine, si le surplus initial est 0.

Théorème 1.3: Pour un processus Poisson composé, la probabilité que le surplus tombe au dessous de son niveau initial u et qu'il se trouve entre $u - y$ et $u - y - dy$ pour la première fois, est

$$\frac{\lambda}{c}[1 - G(y)]dy = \frac{1 - G(y)}{(1 + \theta)\mu}dy \quad y > 0 \quad (1.30)$$

où $G(y) = P[Y \leq y]$, la fonction de répartition du montant de réclamation Y [10].

À l'aide de (1.30), on peut maintenant calculer la probabilité que le surplus tombe au dessous de son niveau original,

$$\frac{1}{(1 + \theta)\mu} \int_0^\infty (1 - G(y))dy = \frac{1}{(1 + \theta)}. \quad (1.31)$$

De cette manière, si $u = 0$, $\frac{1}{(1 + \theta)}$ est la probabilité que le surplus tombe au dessous de 0, i.e. la ruine apparaît. Alors

$$\psi(0) = \frac{1}{1 + \theta}. \quad (1.32)$$

On remarque que $\psi(0)$ dépend du *security loading* θ et non pas de la distribution du montant des réclamations.

Rappelons qu'on veut trouver une expression pour $\psi(u, \lambda), \forall u \geq 0$. On définit L_1 , une variable aléatoire représentant la différence entre le surplus et son niveau initial au moment où le surplus tombe au dessous du niveau initial pour la première fois, étant donné que cet événement est survenu. La densité de L_1 est obtenue en divisant

$$\frac{1 - G(y)}{(1 + \theta)\mu}$$

par

$$\psi(0) = \frac{1}{1 + \theta}$$

et la fonction de répartition de L_1 est

$$F_{L_1}(y) = \frac{1}{\mu} \int_0^y (1 - G(x)) dx. \quad (1.33)$$

Définissons

$$L = \max_{t \geq 0} \{S(t) - ct\}, \quad (1.34)$$

appelé *Maximal aggregate loss* [10]. La figure 1.7 illustre un résultat de L . Puisque $S(t) - ct = 0$ pour $t = 0$, alors $L \geq 0$. Pour obtenir la distribution de L , on considère, pour $u \geq 0$,

$$\begin{aligned} 1 - \psi(u, \lambda) &= \Pr[U(t) \geq 0, \quad \forall t] \\ &= \Pr[u + ct - S(t) \geq 0, \quad \forall t] \\ &= \Pr[S(t) - ct \leq u, \quad \forall t] \\ &= \Pr[L \leq u]. \end{aligned}$$

Donc, la distribution de L est le complément de la probabilité de ruine

$$\bar{\psi}(u, \lambda) = \Pr[L \leq u]. \quad (1.35)$$

Afin de compléter cette section, on trouve ensuite la distribution de L . En particulier, $1 - \psi(0) = Pr[L \leq 0] = Pr[L = 0]$ car $L \geq 0$, alors L est une variable aléatoire mixte avec une masse de probabilité au point 0.

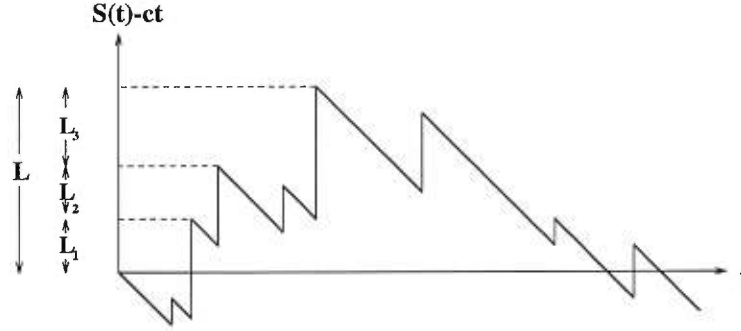


Figure 1.7: Un résultat typique de l'Aggregate Loss Process

Définition: [30] Soit X_1, X_2, \dots , une suite des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On dit qu'un record est survenu au temps n si

$$X_n > \max(X_1, \dots, X_{n-1}).$$

Considérons le nombre de fois que l'Aggregate Loss Process $\{S(t) - ct\}$ atteint un nouveau record. Une fois un nouveau record atteint, il y a une probabilité de $1 - \psi(0)$ que ce record ne soit pas battu et une probabilité de $\psi(0)$ qu'il le soit. Si on pose N , le nombre de nouveaux records, alors N suit la distribution Géométrique($1 - \psi(0)$). De plus, le montant de surplus au moment d'un nouveau record a la même distribution que L_1 . On peut réécrire L sous forme

$$L = L_1 + L_2 + \dots + L_N \tag{1.36}$$

où les L_i sont mutuellement indépendantes et indépendantes de N et suivent la distribution de L_1 . Alors par définition du processus Géométrique composé, $L = \sum_{i=1}^N L_i$ suit une loi Géométrique composée.

1.5 Conclusion

En général, à l'exception des cas pour lesquels le surplus initial $u = 0$ (voir section 1.3, l'équation (1.32)) et certaines familles de distributions du montant de réclamations, le dénominateur de (1.12) et l'équation (1.22) sont très difficile à exprimer explicitement donc, il est difficile d'obtenir une expression analytique pour $\psi(u, \lambda)$. On rencontre le même problème lorsqu'on utilise le modèle de convolution! Devant une telle situation où les méthodes mathématiques standard ne peuvent donner une solution analytique de $\psi(u, \lambda)$, l'utilisation de la simulation afin d'estimer $\psi(u, \lambda)$ s'avère un bon choix et c'est effectivement l'objectif de ce mémoire.

Soulignons que, la contribution de ce travail est de présenter les algorithmes requis pour les implantations des systèmes informatiques applicables aux combinaisons suivantes:

- $U(t)$ et l'approche de répétition (avec IS);
- $X(t)$ et l'approche des moyennes par lot;
- $X(t)$ et l'approche régénérative;
- Modèle de convolution et l'approche de répétition.

De plus, nous présentons les avantages ainsi que les inconvénients de ces combinaisons (fin du chapitre 5) dans le but de guider le lecteur éventuel à choisir la combinaison qui lui convient.

L'introduction aux approches de simulation utilisées dans ce travail ainsi que les analyses statistiques des résultats sont présentés dans le chapitre suivant. Toutefois, dans ce travail, on se concentre plus sur les cas linéaires i.e. sans facteur d'intérêt.

Chapitre 2

Simulation et analyse statistique

2.1 Introduction

Etymologiquement, le mot latin “simulare” veut dire copier, feindre, faire paraître comme réelle une chose qui ne l’est point. La définition suivante de la simulation est donnée par Shannon [28]:

La simulation est un processus qui consiste à construire un modèle d’un système réel et à effectuer des expériences avec ce modèle, dans le but de comprendre le comportement ou d’évaluer sous plusieurs stratégies (entre les limites imposées par un critère ou un ensemble des critères) le fonctionnement du système.

La raison principale de l’utilisation de la simulation est que, plusieurs systèmes ne peuvent pas être analysés convenablement par des méthodes mathématiques standard (par exemple, la solution analytique est limitée par un certain nombre de paramètres du système ou elle n’existe pas). C’est souvent le cas lorsque les interactions entre les variables sont non linéaires ou lorsque des effets aléatoires sont inhérents au système.

La simulation est une méthode très intéressante puisque son domaine d’application est très varié et aussi parce qu’elle nous permet d’étudier un système sans subir le coût de construction et de modification d’un système réel qui s’avère très souvent

élevé.

Aussi, la simulation nous permet de reproduire des copies iid des variables aléatoires ou des processus pour estimer leur espérance mathématique par la moyenne de l'échantillon. Mais, le résultat d'une simulation est aussi une variable aléatoire avec une variance positive. Le problème fondamental des méthodes numériques est de donner une précision aux résultats. Cependant, dans le contexte de simulation stochastique, le concept statistique approprié est celui d'un intervalle de confiance [18]. Supposons que $\hat{\theta}$ est l'estimateur de θ . La couverture d'un intervalle de la forme $IC = (\hat{\theta} - \epsilon, \hat{\theta} + \epsilon)$ est la probabilité que $\theta \in IC$. Souvent, on ne connaît pas la distribution de $\hat{\theta}$ mais, à l'aide du théorème de la limite centrale, on connaît la distribution approximative ou la distribution limite. Ce qui nous permet de construire l'intervalle de confiance en posant $\Pr[\theta \in IC] = 1 - \alpha$ afin de retrouver l'erreur approximative ϵ . La quantité α est appelé le niveau de confiance.

Dans les sections qui suivent, nous présentons les différentes approches pour la construction des intervalles de confiances (IC) des estimateurs que nous utilisons dans ce travail ([19],[8]):

- L'approche de répétition (Replication);
- L'approche des moyennes par lot (Batch means);
- L'approche régénérative (Regenerative Method).

2.2 Répétition (Replication)

Supposons que nous voulions estimer EX , l'espérance d'une variable aléatoire X . L'approche dite de répétition consiste à faire N simulations indépendantes avec les mêmes conditions initiales afin d'obtenir la suite de N réalisations (observations) de X ; que l'on appelle X_1, X_2, \dots, X_N . Supposons que $EX = \mu$ et $\text{Var}X = \sigma^2 < \infty$. Définissons:

- $\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$;
- $S_N^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2$.

Sous cette approche, les X_i sont indépendants et identiquement distribués (iid). De plus, \bar{X} et S_N^2 sont, respectivement, des estimateurs sans biais de μ et σ^2 . D'après le théorème de la limite centrale,

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1).$$

Supposons que $\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var} S_N^2 = 0$, alors en utilisant l'inégalité de Chebychev:

$$P(|S_N^2 - \sigma^2| \geq \epsilon) \leq \frac{E(S_N^2 - \sigma^2)^2}{\epsilon^2} = \frac{\text{Var} S_N^2}{\epsilon^2}$$

et ainsi, $\lim_{N \rightarrow \infty} P(|S_N^2 - \sigma^2| \geq \epsilon) = 0$. D'après la loi forte des grands nombres, S_N^2 converge en probabilité vers σ^2 quand $N \rightarrow \infty$. Par conséquent, σ/S_N converge en probabilité vers 1. En appliquant le théorème de Slutsky [11], on obtient

$$\left(\frac{\sigma}{S_N}\right) \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{N}} = \frac{\bar{X} - \mu}{S_N/\sqrt{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1) \quad \text{quand } N \rightarrow \infty.$$

Donc, l'intervalle de confiance (IC) de μ , valide asymptotiquement, peut être estimé ainsi:

$$\bar{X} \pm z_{1-\alpha/2} S_N/\sqrt{N}$$

où $z_{1-\alpha/2}$ est tel que $P[-z_{1-\alpha/2} \leq N(0, 1) \leq z_{1-\alpha/2}] = 1 - \alpha$.

Particulièrement, supposons qu'on veuille estimer $p = E(X)$ où $X \sim \text{Bernoulli}(p)$. Si $\hat{p} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$ est l'estimateur de p alors, d'après le théorème de la limite centrale :

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\text{Var}/N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1)$$

où $\text{Var}(X) = p(1 - p)$. Si N est assez grand tel que $\hat{p} \xrightarrow{\mathcal{P}} p$, alors $\hat{p}(1 - \hat{p}) \xrightarrow{\mathcal{P}} \text{Var}(X) = p(1 - p)$. Donc l'intervalle de confiance de p , valide asymptotiquement, pourrait être estimé par:

$$\text{IC} = \hat{p} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{N}}. \quad (2.1)$$

2.3 Moyennes par lots (Batch means)

Contrairement à l'approche de répétition, la méthode des moyennes par lots est basée sur une seule "longue" simulation. Cette méthode est souvent utilisée lorsqu'on désire estimer $\theta = \lim_{i \rightarrow \infty} E(X_i)$ pour $\{X_i\}$, un processus stochastique stationnaire. En général, il existe une corrélation entre les états successifs de $\{X_i\}$. Supposons qu'on obtienne une suite d'observations X_1, X_2, \dots, X_m d'une seule simulation de longueur m . On divise cette suite d'observations en n lots de taille l (supposons que m est un multiple de l). On définit:

- $\bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i;$
- $S_X^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2;$
- $Y_i = \frac{1}{l} \sum_{j=1+(i-1)l}^{il} X_j;$
- $\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i;$
- $S_Y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2.$

La méthode des moyennes par lot utilise \bar{Y} pour estimer θ (souligne que $\bar{X} = \bar{Y}$). Si les X_i étaient indépendants, alors S_X^2/m et S_Y^2/n seraient des estimateurs sans biais de $\text{Var}(\bar{X})$ et $\text{Var}(\bar{Y})$ respectivement. Par contre quand les X_i sont corrélés, alors ces deux estimateurs (S_X^2/m et S_Y^2/n) sont biaisés mais en général, la corrélation entre Y_i est moins forte que celle entre X_i si l est assez large. Par conséquent, S_Y^2/n est moins biaisé que S_X^2/m ([19], [8]). Donc, si on choisit la taille l assez large telle que les Y_i soient appromotivement iid, alors

$$\frac{\bar{Y} - \theta}{S_Y/\sqrt{N}} \sim t(n-1) \quad (\text{Student } (n-1) \text{ degrés de liberté}).$$

L'intervalle de confiance de l'estimateur de θ , valide asymptotiquement, peut être estimé comme suit [8]:

$$\text{IC} = \bar{Y} \pm t_{n-1, 1-\alpha/2} \sqrt{S_Y^2/n}$$

où $t_{n-1, 1-\alpha/2}$ est la valeur telle que $P[-t_{1-\alpha/2} \leq t(n-1) \leq t_{1-\alpha/2}] = 1 - \alpha$.

Toutefois, il n'existe pas de méthode pour le choix de la taille l du lot sans jeter un coup d'oeil sur les observations. On devrait choisir l assez grand mais en même temps, garder raisonnable le nombre de lots n .

2.4 Méthode régénérative (Regenerative Method)

Définition: Un processus stochastique $\{Y(t), t \geq 0\}$ (continu ou discret) est régénératif s'il existe une suite de temps $0 \leq R_0 < R_1 < R_2 < \dots$ (les points de régénération) auxquels le processus "repart à zéro" i.e. la loi de probabilité de $\{Y(t), t \geq R_i\}$ est la même pour tout $i = 0, 1, 2, \dots$ et $\{Y(t), t \geq R_i\}$ est indépendant de $\{Y(t), t < R_i\}$, pour tout i . La portion du processus entre deux R_i consécutifs est appelé un *cycle régénératif* et les cycles sont iid.

Soient $\{X(t)\}$ un processus régénératif et $T_i = R_i - R_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots$, la longueur du i -ième cycle. Soit

$$\theta = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(s) ds.$$

Comme $\{X(t)\}$ se régénère alors, d'après la théorie du renouvellement,

$$\theta = \frac{1}{\mathbb{E}T_1} \mathbb{E} \int_0^{T_1} X(s) ds = \frac{\mathbb{E}Y_1}{\mathbb{E}T_1}$$

où $\{(Y_i, T_i)\}$ sont iid et $Y_i = \int_0^{T_i} X(s) ds$.

Dans notre cas,

$$1 - \psi(u) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{1}_{\{X(s) \leq u\}} ds = \frac{1}{\mathbb{E}[TC_1]} \mathbb{E} \left(\int_0^{TC_1} \mathbf{1}_{\{X(s) \leq u\}} ds \right) = \frac{\mathbb{E}[DC_1]}{\mathbb{E}[TC_1]}$$

où TC_1 et DC_1 représentent respectivement la durée du 1er cycle et le temps que $X(t)$ passe en dessous du niveau u pendant ce cycle.

Supposons qu'on veut estimer

$$\theta = \frac{\mathbb{E}(Y_i)}{\mathbb{E}(T_i)}.$$

La méthode régénérative consiste à simuler N cycles régénératifs et à utiliser $\bar{Z} = \bar{Y}/\bar{T}$ pour estimer θ où $\bar{Y} = \sum_{i=1}^N Y_i$, $\bar{T} = \sum_{i=1}^N T_i$. On remarque que \bar{Z} est un estimateur biaisé de θ puisque

$$\mathbb{E} \left[\frac{\sum_{i=1}^N Y_i}{\sum_{i=1}^N T_i} \right] \neq \frac{\mathbb{E}[Y_i]}{\mathbb{E}[T_i]}.$$

Soient

$$\begin{aligned} K_i &= Y_i - \theta T_i \\ \mathbb{E}(K_i) &= \mathbb{E}(Y_i) - \theta \mathbb{E}(T_i) \\ &= 0 \\ \text{Var}(K_i) &= \mathbb{E}(K_i^2) \\ &= \mathbb{E}(Y_i^2 - 2\theta Y_i T_i + \theta^2 T_i^2) \\ &= \mathbb{E}(Y_i^2) - 2\theta \mathbb{E}(Y_i T_i) + \theta^2 \mathbb{E}(T_i^2) \\ &= \text{Var}(Y_i) - 2\theta \text{Cov}(Y_i, T_i) + \theta^2 \text{Var}(T_i) + [\mathbb{E}(Y_i) - \theta \mathbb{E}(T_i)]^2 \\ &= \text{Var}(Y_i) - 2\theta \text{Cov}(Y_i, T_i) + \theta^2 \text{Var}(T_i). \end{aligned}$$

Supposons que $\text{Var}(K_i) < \infty$ et notons que $\bar{K} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N K_i$, la théorème de la limite centrale nous donne

$$\frac{\bar{K}}{\sqrt{\text{Var}(K_i)/N}} = \frac{(\bar{Z} - \theta)\bar{T}}{\sqrt{\text{Var}(K_i)/N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1)$$

Soient \tilde{Z} et \tilde{S}^2 tels que, si $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}\sqrt{N}(\tilde{Z} - \bar{Z}) &\rightarrow 0, \\ \tilde{S}^2 &\rightarrow \text{Var}(K)\end{aligned}$$

avec probabilité égale à 1. D'après le *Mapping Theorem* [6],

$$\frac{(\tilde{Z} - \theta)\bar{T}}{\sqrt{\tilde{S}^2/N}} \Rightarrow N(0, 1).$$

Donc, si on choisit $\tilde{Z} = \bar{Z}$ et $\tilde{S}^2 = \widehat{\text{Var}}(K)$ (l'estimateur de $\text{Var}(K)$) [8], où

$$\widehat{\text{Var}}(K) = \widehat{\text{Var}}(Y) - 2\theta\widehat{\text{Cov}}(Y, T) + \theta^2\widehat{\text{Var}}(T);$$

$$\widehat{\text{Var}}(Y) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2;$$

$$\widehat{\text{Var}}(T) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (T_i - \bar{T})^2;$$

$$\widehat{\text{Cov}}(Y, T) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})(T_i - \bar{T})$$

alors, l'intervalle de confiance de θ , valide asymptotiquement, peut être calculé comme suit:

$$\text{IC} = \bar{Z} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(K)/N}}{\bar{T}}$$

où, $1 - \alpha = P[-z_{1-\alpha/2} \leq N(0, 1) \leq z_{1-\alpha/2}]$.

Chapitre 3

Estimation de $\psi(u, \lambda)$ par simulation

3.1 Processus de surplus $U(t)$

En général, pour les événements rares comme la ruine d'une compagnie d'assurance, on a beaucoup de difficulté en simulation. En effet, la probabilité de ruine $\psi(u, \lambda)$ n'est autre que la proportion des trajectoires qui mènent à la ruine parmi toutes les trajectoires possibles. Alors, en utilisant la simulation directe du processus de surplus $U(t)$ pour estimer cette proportion, on ne peut pas prédéterminer une politique infaillible pour la fin de la simulation puisqu'on ne peut pas savoir si la ruine surviendra plus tard sur cette trajectoire.

Pour contourner ce problème, on utilise la méthode du changement de mesure (*Importance Sampling*), qui a, dans notre cas, pour but de faire précipiter des événements rares en estimant la même quantité désirée.

3.1.1 Méthode du changement de mesure

Considérons l'espace (Ω, \mathcal{F}) où Ω est un espace d'échantillonnage et \mathcal{F} est un σ -algèbre de Ω . Soit \mathbf{P} une mesure finie sur (Ω, \mathcal{F}) , i.e. \mathbf{P} est une fonction telle que ([7], [5])

1. $\mathbf{P} : \mathcal{F} \mapsto \mathbf{R}^+$
2. $\mathbf{P}(\emptyset) = 0, \mathbf{P}(\Omega) = p < \infty$ et
3. $\forall A, B \in \mathcal{F} : A \cap B = \emptyset, \mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.

En particulier, si $p = 1$, on dit que \mathbf{P} est une mesure de probabilité ou tout simplement une probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) .

Soit \mathbf{Q} une autre mesure de probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) . On dit que \mathbf{P} est **absolument continue** par rapport à \mathbf{Q} si $\forall A \in \mathcal{F}, \mathbf{Q}(A) = 0$ implique $\mathbf{P}(A) = 0$ [7]. On le dénote $\mathbf{P} \ll \mathbf{Q}$.

Soient \mathbf{P} , une mesure finie sur (Ω, \mathcal{F}) et \mathbf{Q} une probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) telle que $\mathbf{P} \ll \mathbf{Q}$. Supposons qu'on veut estimer $\theta = \int_{\Omega} h(\omega) d\mathbf{P}(\omega)$. Le théorème de Radon-Nikodym [7] assure qu'il existe une variable aléatoire $\left[\frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{Q}} \right](\omega)$ telle que

$$\theta = \int_{\Omega} h(\omega) \left[\frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{Q}} \right](\omega) d\mathbf{Q}(\omega) = E_{\mathbf{Q}}[hL(\mathbf{P}, \mathbf{Q})]$$

où $L(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \omega) = \left[\frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{Q}} \right](\omega)$ et $E_{\mathbf{Q}}$ dénote l'espérance sous la mesure \mathbf{Q} . On appelle $L(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \omega)$, la dérivée de Radon-Nikodym.

Proposition 3.1: Si $L(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \omega) \leq 1$ pour tout ω tel que $h(\omega) \neq 0$, alors

$$\text{Var}_{\mathbf{Q}}[hL(\mathbf{P}, \mathbf{Q})] \leq \text{Var}_{\mathbf{P}}[h] .$$

Pour vérifier ce résultat, il suffit de remarquer que:

$$\text{Var}_{\mathbf{Q}}[hL(\mathbf{P}, \mathbf{Q})] = E_{\mathbf{Q}}[h^2 L^2(\mathbf{P}, \mathbf{Q})] - [E_{\mathbf{Q}}[hL(\mathbf{P}, \mathbf{Q})]]^2$$

$$\begin{aligned}
&= E_{\mathbf{Q}}[h^2 L^2(\mathbf{P}, \mathbf{Q})] - \theta^2 \\
&\leq \text{Var}_{\mathbf{P}}[h].
\end{aligned}$$

Donc, avec la méthode de changement de mesure, parfois on peut réduire la variance de notre estimateur et par conséquent, obtenir un meilleur intervalle de confiance si on choisit une mesure de probabilité \mathbf{Q} appropriée.

Considérons maintenant notre modèle linéaire du processus de surplus. Posons Ω , l'ensemble de toutes les trajectoires possibles de $U(t)$. Selon la représentation canonique ou de Skorohod, chacune de ces trajectoires est dénotée par $\omega = \{(W_i, Y_i), i = 1, 2, \dots\}$ où $W_i = T_i - T_{i-1}$ est le temps entre la i -ième et $(i - 1)$ -ième réclamation et Y_i est le montant de la i -ième réclamation. Soit \mathcal{F} , la σ -algèbre des ensembles de Borel de Ω et soit $A \in \Omega$, le sous-ensemble qui contient toutes les trajectoires de $U(t)$ pour lesquelles la ruine apparaît. Construisons \mathcal{F}_A , la σ -algèbre de A telle que $\mathcal{F}_A = \{B \in \mathcal{F} : B \subseteq A\}$.

Si \mathbf{P} est la mesure de probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) sous laquelle W_i suit la distribution exponentielle de paramètre λ , Y_i suit une distribution générale G et les (W_i, Y_i) sont iid alors, $\mathbf{P}(A) = \psi(u, \lambda) < 1$. Rappelons que dans la section 1.2.1, nous supposons que la prime c excède l'espérance du montant de réclamation accumulé par unité de temps (i.e. $c > \lambda\mu$) dans le but de ramener $\psi(u, \lambda)$ inférieure à 1.

Lorsque nous simulons directement le processus $U(t)$ pour estimer $\mathbf{P}(A)$, nous ne savons pas à priori si nous sommes sur une trajectoire menant à la ruine. Ainsi, il n'existe aucune méthode infallible pour fixer la fin de la simulation. En effet, l'absence de ruine jusqu'à l'instant t ne certifie en rien que la ruine ne surviendra pas à l'instant $t + t_0$ ($t_0 > 0$). Pour éviter ce problème, soit \mathbf{Q} , une probabilité sur (A, \mathcal{F}_A) . Par définition de la mesure de probabilité, $\mathbf{Q}(A) = 1$ (la ruine est certaine).

En appliquant la méthode du changement de mesure, nous aimerions simuler notre processus sous cette nouvelle mesure de probabilité \mathbf{Q} , afin d'obtenir un estimateur de $\psi(u)$. Appelons $\tilde{\mathbf{P}}$, la mesure finie sur (A, \mathcal{F}_A) telle que $\tilde{\mathbf{P}}(B) = \mathbf{P}(B)$,

pour $\forall B \in \mathcal{F}_A$. Si \mathbf{Q} est choisi tel que $\tilde{\mathbf{P}} \ll \mathbf{Q}$ alors, d'après le théorème de Radon-Nikodym, il existe une variable aléatoire non-négative $Z(\omega)$ telle que $\tilde{\mathbf{P}}(B) = \int_B Z(\omega) d\mathbf{Q}(\omega)$. En particulier,

$$\tilde{\mathbf{P}}(A) = \int_A Z(\omega) d\mathbf{Q}(\omega) = E_{\mathbf{Q}}[Z] = \mathbf{P}(A) = \psi(u, \lambda).$$

3.1.2 L'application

Considérons le modèle linéaire du processus de surplus $U(t)$ (1.1). Posons

$$\tau = \min \left\{ n : u + cT_n \leq \sum_{i=1}^n Y_i \right\}, \quad (3.1)$$

où T_n est le temps où survient la n -ième réclamation ($n \geq 0$), avec $T_0 = 0$. τ est une variable aléatoire représentant le temps d'arrêt (*Stopping time*) adapté à la filtration naturelle du processus $\{U_n\}$ [7], où $U_n = U(T_n)$. Intuitivement, ceci veut dire que, connaissant l'histoire du processus $\{(W_1, Y_1), \dots, (W_n, Y_n)\}$ jusqu'à la n -ième réclamation, nous pouvons déterminer si $\tau \leq n$. Posons

$$h[(W_i, Y_i); i = 1, \dots, \tau] = \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}}.$$

Soient f_1, g_1 les densités de W_i et Y_i respectivement alors, par l'indépendance de ces deux variables,

$$P[\tau = 1] = \int_{\Omega} \mathbf{1}_{\{\tau=1\}} g_1(Y) f_1(W) dW dY.$$

Plus généralement, pour tout $n \geq 1$, par l'indépendance des $\{(W_i, Y_i)\}$:

$$\begin{aligned} P[\tau \leq n] &= \int_{\Omega} \mathbf{1}_{\{\tau \leq n\}} \prod_{i=1}^n g_1(Y_i) f_1(W_i) dW_i dY_i \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} \mathbf{1}_{\{\tau=k\}} \prod_{i=1}^k g_1(Y_i) f_1(W_i) dW_i dY_i \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{1}_{\{\tau \leq n\}} \prod_{i=1}^{\tau} g_1(Y_i) f_1(W_i) dW_i dY_i. \end{aligned}$$

En prenant la limite de $P[\tau \leq n]$ lorsque n tend vers l'infini on obtient:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[\tau \leq n] = \int_{\Omega} \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}} \prod_{i=1}^{\tau} g_1(Y_i) f_1(W_i) dW_i dY_i = E_{\lambda}(h) = \psi(u, \lambda)$$

où $E_\lambda(h)$ dénote l'espérance de h sous la probabilité \mathbf{P} .

Alors $d\tilde{\mathbf{P}}(\omega) = \prod_{i=1}^{\tau} g_1(Y_i) f_1(W_i) dW_i dY_i$ pour $\forall \omega \in A$. Supposons que la fonction génératrice des moments de Y existe. Définissons:

$$\begin{aligned} g_2(y) &= \frac{e^{\alpha y} g_1(y)}{M_Y(\alpha)} = K e^{\alpha y} g_1(y) \\ f_2(w) &= \lambda_0 e^{-\lambda_0 w} \quad (\lambda_0 > \lambda) \end{aligned} \quad (3.2)$$

où $K = \frac{1}{M_Y(\alpha)}$ et $M_Y(\alpha) = E[e^{Y\alpha}]$. Soit la mesure \mathbf{Q} telle que

$$d\mathbf{Q}(\omega) = \prod_{i=1}^{\tau} g_2(Y_i) f_2(W_i) dW_i dY_i,$$

avec $\lambda_0 > \frac{c}{E_{\mathbf{Q}}(Y)}$. Alors, \mathbf{Q} est une probabilité sur (A, \mathcal{F}_A) et \mathbf{Q} domine $\tilde{\mathbf{P}}$. Donc, la dérivé de Radon-Nikodym peut être calculée ainsi:

$$\begin{aligned} L(\tilde{\mathbf{P}}, \mathbf{Q}, \omega) &= \prod_{i=1}^{\tau} \frac{g_1(Y_i) f_1(W_i)}{g_2(Y_i) f_2(W_i)} = \prod_{i=1}^{\tau} \frac{\lambda e^{-\lambda W_i} g_1(Y_i)}{\lambda_0 e^{-\lambda_0 W_i} K e^{\alpha Y_i} g_1(Y_i)} \\ &= \left(\frac{\lambda}{K \lambda_0} \right)^{\tau} \exp[(\lambda_0 - \lambda) T_\tau - \alpha \sum_i^{\tau} Y_i], \end{aligned}$$

où $T_\tau = \sum_{i=1}^{\tau} W_i$. Finalement, en appliquant la méthode de changement de mesure on obtient:

$$\begin{aligned} \psi(u) &= E_\lambda(h) = E_{\lambda_0}(hL) \\ &= E_{\lambda_0} \left\{ \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}} \left(\frac{\lambda}{K \lambda_0} \right)^{\tau} \exp \left\{ (\lambda_0 - \lambda) T_\tau - \alpha \sum_i^{\tau} Y_i \right\} \right\} \\ &= E_{\lambda_0} \left\{ \left(\frac{\lambda}{K \lambda_0} \right)^{\tau} \exp \left\{ (\lambda_0 - \lambda) T_\tau - \alpha \sum_i^{\tau} Y_i \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

L'égalité (3.3) est obtenue puisqu'on suppose que la ruine est certaine sous la nouvelle mesure \mathbf{Q} ($\tau < \infty$ p.s.). Si la fonction génératrice des moments de Y existe, le choix de α et λ_0 est fait comme suit:

- Soit $\lambda_0 = \lambda + cR$ où R est le coefficient d'ajustement alors,

$$\frac{\lambda}{K \lambda_0} = \frac{\lambda M_Y(R)}{\lambda + cR} = 1.$$

- D'après 3.1,

$$\begin{aligned}
& u + cT_\tau - \sum_{i=1}^{\tau} Y_i \leq 0 \\
\iff & cT_\tau - \sum_{i=1}^{\tau} Y_i \leq 0 \\
\iff & (\lambda_0 - \lambda)T_\tau - \frac{(\lambda_0 - \lambda)}{c} \sum_{i=1}^{\tau} Y_i \leq 0,
\end{aligned}$$

alors en choisissant

$$\alpha = \frac{(\lambda_0 - \lambda)}{c}$$

on s'assure que $\exp\{(\lambda_0 - \lambda)T_\tau - \alpha \sum_{i=1}^{\tau} Y_i\} \leq 1$.

Donc, avec un tel choix de α et λ_0 ,

$$L(\tilde{\mathbf{P}}, \mathbf{Q}, \omega) = \left(\frac{\lambda}{K\lambda_0}\right)^\tau \exp\left\{(\lambda_0 - \lambda)T_\tau - \alpha \sum_{i=1}^{\tau} Y_i\right\} \leq 1 \quad (3.4)$$

et par la proposition 3.1, la variance de notre estimateur est réduite. Mais lorsque la fonction génératrice des moments de Y n'existe pas, on doit se contenter de choisir $\alpha = \frac{(\lambda_0 - \lambda)}{c}$ avec un $\lambda_0 > \frac{c}{E_{\mathbf{Q}}(Y)}$ et $g_2(y) = g_1(y)$.

La simulation du processus $U(t)$ sous la nouvelle mesure en utilisant l'approche de répétition consiste à faire N simulations indépendantes afin d'obtenir L_1, \dots, L_N et chaque simulation prend fin lorsque $U(t)$ tombe en dessous de 0.

Algorithme 3.1.1

Pour $i = 1$ jusqu'à N faire

$j \leftarrow 0$.

Répéter

Incrémenter j .

Générer W_j et Y_j selon g_1 et g_2 .

Calculer $\sum_{k=1}^j Y_k$ et $\sum_{k=1}^j W_j$.

Tant que $u + c \sum_{k=1}^j W_j > \sum_{k=1}^j Y_k$

Calculer $L_i \leftarrow \left(\frac{\lambda}{K \lambda_0} \right)^j \exp[(\lambda_0 - \lambda)T_j - \alpha \sum_k^j Y_k]$.

Incrémenter i .

Fin (Pour).

D'après la section 2.2, l'estimateur de $\psi(u, \lambda)$ est:

$$\hat{\psi}(u, \lambda) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N L_i,$$

l'intervalle de confiance pour $\psi(u, \lambda)$ (valide lorsque $N \rightarrow \infty$) est

$$\text{IC} = \hat{\psi}(u, \lambda) \pm z_{1-\alpha/2} S / \sqrt{N}$$

où $S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (L_i - \hat{\psi}(u, \lambda))^2$.

Considérons maintenant le modèle non-linéaire (1.4). D'après le travail de Asmussen [2], le changement de mesure est maintenant adapté à la filtration naturelle du processus de la façon suivant:

A l'étape i , on génère $Y_i \sim g_{2i}(y)$ et $W_i \sim \exp(\lambda_{0i})$ et ensuite, on calcule $U(t_i)$, $c(U(t_i))$, R_i et λ_{0i} où:

- $U(t_i) = U(t_{i-1})e^{\delta W_i} + c(e^{\delta W_i} - 1)/\delta - Y_i$ (voir l'égalité (1.5)).
- $c(U(t_i)) = c + \delta U(t_i)$ (voir l'égalité (1.3)).
- R_i satisfait l'équation:

$$\lambda + c(U(t_i))R_i = \lambda M_Y(R_i),$$

R_i est appelé le coefficient d'ajustement local.

- $\lambda_{0i} = \lambda + c(U(t_i))R_i$.

De cette manière, $\frac{\lambda M_Y(R_i)}{\lambda_{0i}} = 1$ et il est démontré dans [2] que $\tau < \infty$ avec probabilité 1. Donc

$$L(\tilde{\mathbf{P}}, \mathbf{Q}, \omega) = \prod_{i=1}^{\tau} LL_i \quad (3.5)$$

où, $LL_i = \exp \{c(U(t_i))R_iW_i - R_iY_i\}$. L'implantation du processus $U(t)$ pour le modèle non-linéaire afin d'estimer $\psi(u, \lambda)$ est la suivante:

Algorithme 3.1.2

Pour $j = 1$ jusqu'à N faire

$i \leftarrow 1$; $U(t_i) \leftarrow u$; $c(U(t_i)) \leftarrow c + \delta u$; $\lambda_{0i} \leftarrow \lambda + c(U(t_i))R_i$.

Répéter

Incrémenter i .

Générer W_i et Y_i selon $\exp(\lambda_{0i})$ et g_{2i} .

Calculer $U(t_i)$, $c(U(t_i))$, R_i et λ_{0i} .

$LL_i \leftarrow \exp \{c(U(t_i))R_iW_i - R_iY_i\}$.

Tant que $U(t_i) > 0$

$L_j \leftarrow \prod_k^i LL_k$.

Incrémenter j .

Fin (Pour).

L'estimateur de $\psi(u, \lambda)$ et son intervalle de confiance sont calculés de la même façon que le modèle linéaire:

$$\hat{\psi}(u, \lambda) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N L_j,$$

$$\text{IC} = \hat{\psi}(u, \lambda) \pm z_{1-\alpha/2} S / \sqrt{N}$$

$$\text{où } S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (L_j - \hat{\psi}(u, \lambda))^2.$$

3.2 Processus d'entreposage $X(t)$

Dans cette section, on utilise la chaîne imbriquée $\{X_n\}$ décrite en section 1.3.2 afin d'estimer la probabilité de ruine $\psi(u, \lambda)$. Rappelons que, comme le processus de surplus, le processus d'entreposage $X(t)$ est caractérisé par la suite des variables $\{(W_i, Y_i)\}$ pour $i = 1, 2, \dots$ et que:

$$1 - \psi(u, \lambda) = F(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n d_i(u)}{\sum_{i=1}^n W_i}.$$

La figure 3.1 illustre une trajectoire de $\{X_n\}$ dans le cas linéaire ($\delta = 0$) ainsi que

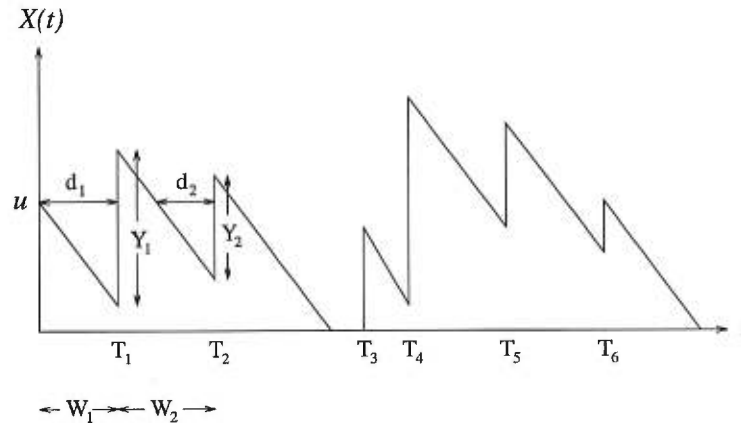


Figure 3.1: Une trajectoire de $X(t)$.

ces variables. Il est clair que les d_i sont dépendants (voir l'égalité (1.25)). Si on pose \hat{F} , l'estimateur de $F(u)$ alors, $\hat{\psi}(u, \lambda) = 1 - \hat{F}$ est donc un estimateur de $\psi(u, \lambda)$. Comme discuté à la section 2.3, l'approche des moyennes par lot est appropriée pour ce type de problème. D'autre part, $\{X_n\}$ est un processus de renouvellement qui se régénère à chaque fois qu'il atteint 0. La méthode régénérative est donc aussi applicable pour simuler $\{X_n\}$.

Dans les sous-sections qui suivent, nous présentons l'implantation du processus $\{X_n\}$ dans le cas linéaire pour estimer $\psi(u, \lambda)$ sous la supposition que W_i suit une loi exponentielle de paramètre λ et le montant de réclamations Y suit une distribution générale G . L'implantation du processus $\{X_n\}$ dans le cas non-linéaire est

exactement la même que le cas linéaire sauf qu'il faut remplacer les formules pour r_n et X_n du cas non-linéaire.

3.2.1 Moyennes par lots

Supposons qu'on fasse une simulation de longueur Nb (le temps de la simulation) où N est le nombre de lots à simuler, b est la taille de chaque lot (en seconde). Les statistiques résultantes sont calculés à chaque fois qu'on termine un lot. Soient:

- i un compteur du nombre des lots.
- X dénote X_n .
- $D = \sum_{i=1}^n d_i(u)$
- Y, r, W dénotent les variables Y_n, r_n, W_n de notre modèle.
- F_i la proportion du temps que processus passe en dessous du niveau u du i -ième lot.
- $T = \sum_i^n W_i$ le temps jusqu'à la n -ième réclamation.

L'implantation du processus $\{X_n\}$ pour estimer $\psi(u, \lambda)$ ainsi que son intervalle de confiance sous l'approche des moyennes par lot est effectuée comme suit:

Algorithme 3.2.1

Initialiser $T = 0$

Pour $i = 1$ jusqu'à N faire

$X \leftarrow 0; D \leftarrow 0; r \leftarrow 0.$

Répéter

Générer W et Y .

Si $X \leq u$ alors $D \leftarrow D + W$. Sinon, $D \leftarrow D + \max(0, W - r)$.

$X \leftarrow \max(Y, X - cW + Y)$.

$r \leftarrow (X - u)/c$.

$T \leftarrow T + W$.

Tant que $T \leq ib$

$F_i \leftarrow D/b$.

Incrémenter i .

Fin (pour).

D'après la section 2.3, l'estimateur de $\psi(u, \lambda)$ est:

$$\hat{\psi}(u, \lambda) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (1 - F_i).$$

L'intervalle de confiance de $\psi(u, \lambda)$:

$$\text{IC} = \hat{\psi}(u, \lambda) \pm t_{N-1, 1-\alpha/2} S / \sqrt{N}$$

$$\text{où } S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (1 - F_i - \hat{\psi}(u, \lambda))^2.$$

3.2.2 Méthode régénérative

Soient TC_i et DC_i , la durée du i -ième cycle régénératif et le temps que le processus passe en dessous du niveau u pendant ce cycle. Supposons qu'on simule une trajectoire du processus $\{X_n\}$ qui contient N cycles régénératifs et si on reprend les variables utilisées dans la section précédente, alors l'implantation du processus $\{X_n\}$ pour estimer $\psi(u, \lambda)$ ainsi que son intervalle de confiance sous l'approche régénérative se présente comme suit:

Algorithme 3.2.2

$i \leftarrow 1; X \leftarrow 0; D \leftarrow 0; r \leftarrow 0; TC \leftarrow 0.$

Tant que $i \leq N$ Faire

Générer W et Y .

$TC \leftarrow TC + W.$

Si $X \leq u$ alors $D \leftarrow D + W$. Sinon, $D \leftarrow D + \max(0, W - r)$.

Si $X - cW \leq 0$ alors

$DC_i \leftarrow D; TC_i \leftarrow TC; X \leftarrow Y.$

Incrémenter $i; TC \leftarrow 0; D \leftarrow 0.$

Sinon, $X \leftarrow X - cW + Y.$

$r \leftarrow (X - u)/c.$

Fin (Tant que).

A la fin de la simulation, on obtient la suite des couples (DC_i, TC_i) , pour $i = 1, 2, \dots, N$. Donc, d'après les calculs établis à la section 2.1, l'estimateur de $\psi(u, \lambda)$ et son intervalle de confiance pourraient être présentés sous les formes suivantes:

$$\hat{\psi}(u, \lambda) = 1 - \frac{\sum_i^N DC_i}{\sum_i^N TC_i} = 1 - \frac{\overline{DC}}{\overline{TC}} = 1 - \hat{F}(u)$$

où $\hat{F}(u)$ est l'estimateur de $F(u)$,

$$\text{IC} = \hat{\psi}(u, \lambda) \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(RC)/N}}{\overline{TC}}$$

où $RC = DC - \psi(u, \lambda)TC$

et $\widehat{\text{Var}}(RC) = \widehat{\text{Var}}(DC) - 2\hat{\psi}(u, \lambda)\widehat{\text{Cov}}(DC, TC) + [\hat{\psi}(u, \lambda)]^2\widehat{\text{Var}}(TC).$

3.3 Modèle de convolution

Rappelons que la probabilité de ruine calculée à l'aide de la méthode de convolution (voir section 1.4) est $\psi(u, \lambda) = Pr[L > u] = E[\mathbf{1}_{\{L > u\}}]$, où:

- $L = \sum_i^N L_i$,
- $N \sim$ Géométrique $\left(\frac{\theta}{1 + \theta}\right)$ où θ est la *Security loading*,
- $L_i \sim F(y) = \frac{1}{E(Y)} \int_0^y (1 - G(x)) dx$,
- Y est la variable aléatoire représentant le montant des réclamations avec distribution G .

Soit

$$P = \begin{cases} 1 & \text{Si } \sum_i^N L_i > u \\ 0 & \text{Sinon.} \end{cases}$$

La simulation faite sous l'approche de répétitions consiste à simuler M trajectoires indépendantes du processus *Aggregate Loss* $\{L\}$ afin d'obtenir P_1, P_2, \dots, P_M . La méthode exacte est dépeinte à l'algorithme 3.3.

Algorithme 3.3 :

Pour $i = 1$ à M faire

Générer $N_i \sim$ Géométrique $\left(\frac{\theta}{1 + \theta}\right)$.

Pour $j = 1$ à N_i faire

Générer L_j .

Incrémenter j .

Fin (Pour).

Si $L = \sum_j^{N_i} L_j > u$ alors $P_i = 1$. Sinon, $P_i = 0$.

Incrémenter i .

Fin (Pour).

L'estimateur $\hat{\psi}(u, \lambda)$:

$$\hat{\psi}(u, \lambda) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M P_i.$$

Soulignons que $\psi(u, \lambda)$ est une proportion, donc on peut utiliser (2.1) pour estimer son intervalle de confiance:

$$\text{IC} = \hat{\psi}(u, \lambda) \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\hat{\psi}(u, \lambda)(1 - \hat{\psi}(u, \lambda))/M}.$$

Chapitre 4

Estimateur de la dérivée de $\psi(u, \lambda)$ par rapport au taux d'arrivée des réclamations λ

Dans ce chapitre, nous présentons l'estimation de la dérivée de $\psi(u, \lambda)$ par rapport au taux d'arrivée des réclamations λ . Pour les processus $\{U(t)\}$ et $\{X(t)\}$, nous appliquons l'analyse des perturbations rares (RPA). Cependant, nous utilisons la méthode du rapport de vraisemblance pour le modèle de convolution.

4.1 Analyse des perturbations rares (RPA)

L'analyse des perturbations rares est proposée par Brémaud & Vazquez-Abad [9] pour estimer la dérivée par rapport au taux d'arrivée d'un processus ponctuel. Rappelons que nos deux processus $\{U(t), t > 0\}$ et $\{X(t), t > 0\}$ sont caractérisés par des variables (W_i, Y_i) où W_i représente le temps entre la $(i-1)$ -ième et la i -ième réclamation, Y_i représente le montant de la i -ième réclamation. Soit $\{\eta_i\}$, une suite de variables Bernoulli de paramètre $\Delta\lambda/\lambda$ ($\Delta\lambda > 0$) indépendantes de (W_i, Y_i) et considérons le processus [32] caractérisé par (W_i, \tilde{Y}_i) où:

$$\tilde{Y}_i = \begin{cases} 0 & \text{si } \eta_i = 1 \\ Y_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce nouveau processus suit la même distribution qu'un processus dont le taux d'arrivée est $\lambda - \Delta\lambda$ [30]. On appelle *système fantôme* le nouveau système, *système nominal* le système original et *réclamation fantôme* la réclamation qui est enlevée du système nominal. Notons que, pour une trajectoire avec N réclamations, comme les $\{\eta_i\}$ sont iid et suivent la distribution Bernoulli $\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)$, alors le nombre de réclamations fantômes suit une distribution Binomiale $\left(N, \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)$. La figure (4.1) illustre un exemple du système fantôme où il y a une seule réclamation fantôme à la première position i.e. $\eta_1 = 1$ et $\eta_i = 0$ pour $\forall i \neq 1$.

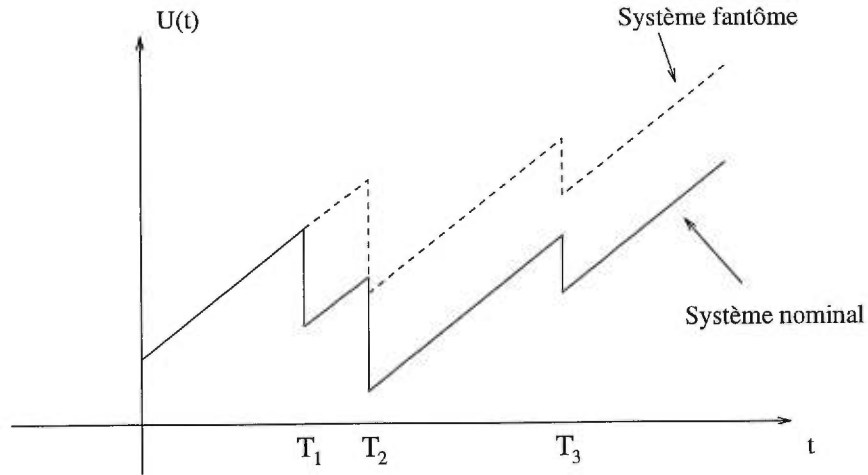


Figure 4.1: Un exemple du système fantôme pour $U(t)$ avec $\eta_1 = 1$.

Soit $h(W_1, Y_1; \dots; W_N, Y_N)$, la fonction d'intérêt du système avec taux d'arrivée des réclamations λ tel que $Eh = \psi(u, \lambda)$ et $h(W_1, \tilde{Y}_1; \dots; W_N, \tilde{Y}_N)$, la fonction correspondante du système avec taux d'arrivée des réclamations $(\lambda - \Delta\lambda)$ tel que $Eh = \psi(u, \lambda - \Delta\lambda)$. Par définition:

$$\frac{d}{d\lambda}\psi(u, \lambda) = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{E_\lambda[h] - E_{\lambda - \Delta\lambda}[h]}{\Delta\lambda}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} E_\lambda \left\{ \sum_{m=1}^N \binom{N}{m} \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)^m \left(1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)^{N-m} \times \right. \\
&\quad \left. E_m \left[\frac{h(W_1, Y_1; \dots; W_N, Y_N) - h(W_1, \tilde{Y}_1; \dots; W_N, \tilde{Y}_N)}{\Delta\lambda} \right] \right\} \quad (4.1)
\end{aligned}$$

où $\binom{N}{m} \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)^m \left(1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)^{N-m}$ est la probabilité qu'il y a m réclamations fantômes parmi N réclamations et E_m dénote l'espérance conditionnelle de l'événement m réclamations fantômes parmi N réclamations. Dans les sous-sections qui suivent, on utilise l'égalité (4.1) pour calculer $\psi(u, \lambda)$ à l'aide de chacun de nos deux processus $\{U(t), t > 0\}$ et $\{X(t), t > 0\}$.

4.1.1 Processus de surplus $U(t)$

Reprenons l'expression (3.3) et posons $K_0 = \lambda/K\lambda_0$. Pour le système nominal $\psi(u, \lambda)$ a la forme:

$$\psi(u, \lambda) = E_{\lambda_0} \left\{ K_0^\tau \exp \left[(\lambda_0 - \lambda)T_\tau - \alpha \sum_i^\tau Y_i \right] \right\}. \quad (4.2)$$

Évaluons $\psi(u, \lambda - \Delta\lambda)$ du système fantôme en appliquant le changement de mesure avec $\lambda_0 - \Delta\lambda$

$$\begin{aligned}
\psi(u, \lambda - \Delta\lambda) &= E_{\lambda_0 - \Delta\lambda} \left\{ \left(\frac{\lambda - \Delta\lambda}{K(\lambda_0 - \Delta\lambda)} \right)^\tau \exp \left[(\lambda_0 - \lambda)T_\tau - \alpha \sum_i^\tau Y_i \right] \right\} \\
&= E_{\lambda_0 - \Delta\lambda} \left\{ K_0^\tau \exp \left[(\lambda_0 - \lambda)T_\tau - \alpha \sum_i^\tau Y_i \right] + R(\Delta\lambda) \right\}
\end{aligned}$$

où le terme restant $R(\Delta\lambda)$ est:

$$R(\Delta\lambda) = \left(\left(\frac{\lambda - \Delta\lambda}{K(\lambda_0 - \Delta\lambda)} \right)^\tau - K_0^\tau \right) \exp \left[(\lambda_0 - \lambda)T_\tau - \alpha \sum_i^\tau Y_i \right].$$

On souligne que les temps d'arrêt adaptés τ des deux systèmes sont différents.

Dénotons:

- $\tau(0)$, le temps d'arrêt adapté du système nominal et

- $\tau(\eta)$, le temps d'arrêt adapté du système fantôme, qui devient une fonction de η où $\eta = \{\eta_i, i \leq \tau(0)\}$ et η_i suit la loi Bernoulli de paramètre $\Delta\lambda/\lambda$.

Alors, en utilisant les mêmes arguments qui nous amènent à l'égalité (4.1), on obtient:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda}\psi(u, \lambda) &= \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\psi(u, \lambda) - \psi(u, \lambda - \Delta\lambda)}{\Delta\lambda} \\
&= \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} E_{\lambda_0} \left\{ \sum_{m=0}^{\tau(0)} \binom{\tau(0)}{m} \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}\right)^m \left(1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}\right)^{\tau(0)-m} \times \right. \\
&\quad \frac{1}{\Delta\lambda} E_m \left\{ K_0^{\tau(0)} \exp \left[(\lambda_0 - \lambda) T_{\tau(0)} - \alpha \sum_i^{\tau(0)} Y_i \right] - \right. \\
&\quad \left. \left. K_0^{\tau(\eta)} \exp \left[(\lambda_0 - \lambda) T_{\tau(\eta)} - \alpha \sum_i^{\tau(\eta)} \tilde{Y}_i \right] - R(\Delta\lambda) \right\} \right\}. \quad (4.3)
\end{aligned}$$

Soulignons qu'il y a une différence entre (4.1) et (4.3). Pour l'égalité (4.1), N est une constante. Cependant, $\tau(0)$ et $\tau(\eta)$ sont des temps d'arrêt aléatoires pour l'égalité (4.3). Soulignons aussi que seulement les systèmes fantômes ayant la première réclamation parmi les $\tau(0)$ réclamations du système nominal sont considérés. En effet, tout autre système fantôme (la première réclamation fantôme est survenue après $\tau(0)$) est identique au système nominal (la ruine est nécessairement survenue au même moment que le système nominal i.e. $\tau(0)$) donc ne contribue rien à la différence finie de (4.3).

Pour calculer la limite du côté droite de l'égalité (4.3), on reprend la méthode décrite dans [9], qui est utilisée dans [33] pour démontrer que s'il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\sup_{\Delta\lambda < \epsilon} E_{\lambda_0 - \Delta\lambda} \left\{ \tau^3 \left(\frac{\lambda}{K\lambda_0} \right)^\tau \right\} < \infty, \quad (4.4)$$

alors, lorsque $\Delta\lambda$ tend vers 0, l'égalité (4.3) ne contient que les termes pour $m = 0, 1$, et a la forme:

$$\frac{d}{d\lambda}\psi(u, \lambda) = E_{\lambda_0} \left\{ \frac{\tau(0)}{\lambda} K_0^{\tau(0)} \exp \left[(\lambda_0 - \lambda) T_{\tau(0)} - \alpha \sum_i^{\tau(0)} Y_i \right] - \right.$$

$$\frac{1}{\lambda_0} \sum_{j=1}^{\tau(0)} K_0^{\tau(j)} \exp \left[(\lambda_0 - \lambda) T_{\tau(j)} - \alpha \sum_i^{\tau(j)} Y_i \right] \} \quad (4.5)$$

où $\tau(j)$ dénote le temps d'arrêt adapté du système fantôme avec une réclamation fantôme à la position j ($Y_j = 0$). L'idée de la preuve de (4.5) est de calculer séparément les termes pour $m = 0$, $m = 1$ et $m \geq 2$ de l'égalité (4.3).

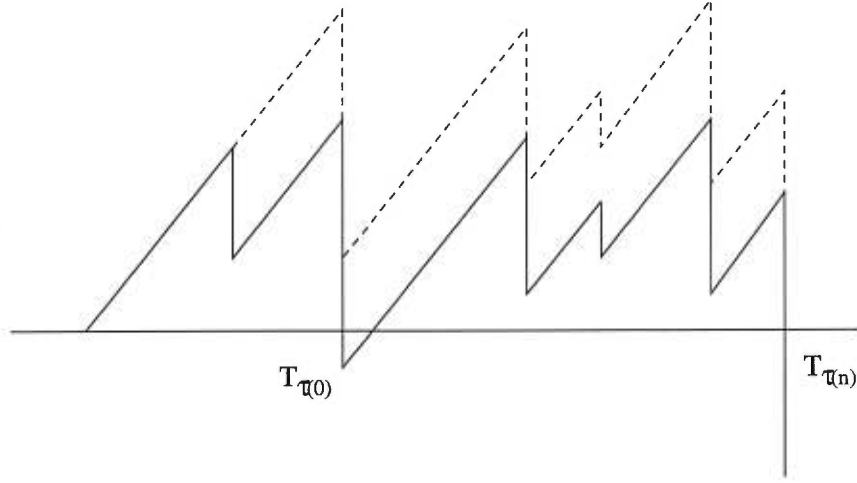


Figure 4.2: Une trajectoire du système fantôme $j = 1$.

D'après l'égalité (4.5), il semble que nous devons évaluer le système nominal qui contient un nombre aléatoire $\tau(0)$ de réclamations et, pour chaque réclamation, nous devons également considérer le système fantôme correspondant. Mais en vérité, on peut facilement déterminer si un système fantôme est "mort" (atteint 0) ou "vivant" à partir du système nominal grâce aux remarques suivantes:

- La différence entre le système fantôme j et le système nominal est Y_j .
- Au moment de ruine i.e. $\sum_i^{\tau(0)} Y_i - u - cT_{\tau(0)} \geq 0$, pour $j \leq \tau(0)$ tel que $\sum_i^{\tau(0)} Y_i - u - cT_{\tau(0)} \geq Y_j$ alors $\tau(j) = \tau(0)$ i.e. le système fantôme est mort.
- Si on continue à générer notre processus nominal $U(t)$ i.e. générer W_n et Y_n où $n > \tau(0)$ alors, lorsque le système nominal meurt de nouveau, tout système fantôme vivant j qui satisfait $\sum_i^n Y_i - u - cT_n \geq Y_j$ est mort aussi

$(\tau(j) = n)$. On continue le processus jusqu'à ce qu'il ne reste aucun système fantôme vivant.

La figure (4.2) illustre une trajectoire du système fantôme pour $j = 1$. Ce système reste vivant à $T_{\tau(0)}$ et meurt au temps $T_{\tau(n)}$. Dénotons $\hat{\psi}'(u, \lambda)$ l'estimateur de $\frac{d}{d\lambda}\psi(u, \lambda)$. L'implantation complète de notre système est présentée dans l'algorithme 3.1.1a. Cet algorithme est une version améliorée de l'algorithme 3.1.1 afin de calculer parallèlement $\hat{\psi}(u)$ et $\hat{\psi}'(u, \lambda)$.

Algorithme 3.1.1a:

Pour $i = 1$ jusqu'à N Faire

$j \leftarrow 0$; arrêt $\leftarrow 0$; nominal \leftarrow Vrai.

Répéter

Si nominal Alors

Répéter

Incrémenter j .

Générer W_j et Y_j selon g_1 et g_2 .

Calculer $\sum_{k=1}^j Y_k$ et $\sum_{k=1}^j W_j$.

Tant que $u + c \sum_{k=1}^j W_j > \sum_{k=1}^j Y_k$

nominal \leftarrow Faux; Temp $\leftarrow \sum_{k=1}^j Y_k - u - c \sum_{k=1}^j W_j$.

nbfan $\leftarrow j$.

$L_i \leftarrow \left(\frac{\lambda}{K\lambda_0} \right)^j \exp[(\lambda_0 - \lambda) \sum_{k=1}^j W_j - \alpha \sum_{k=1}^j Y_k]$.

$LD_i \leftarrow j L_i (\lambda_0 / \lambda)$.

Pour $f = 1$ à nbfan Faire

Si $Y_f \leq$ Temp Alors

$LD_i \leftarrow LD_i - \left(\frac{\lambda}{K\lambda_0} \right)^j \exp[(\lambda_0 - \lambda) \sum_{k=1}^j W_j - \alpha \sum_{k=1}^j Y_k + Y_f]$.

$Y_f \leftarrow 0$; Incréments arrêt.

Fin (Si).

Fin (Pour).

Sinon

$$\text{Temp} \leftarrow \sum_{k=1}^j Y_k - u - c \sum_{k=1}^j W_j.$$

Pour $f = 1$ à nbfan Faire

Si $Y_f \leq \text{Temp}$ et $Y_f > 0$ Alors

$$LD_i \leftarrow LD_i - \left(\frac{\lambda}{K\lambda_0} \right)^j \exp[(\lambda_0 - \lambda) \sum_{k=1}^j W_j - \alpha \sum_k Y_k + Y_f].$$

$Y_f \leftarrow 0$; Incréments arrêt.

Fin (Si).

Fin (Si).

Tant que arrêt \neq nbfan

Incrémenter i .

Fin (Pour).

Ainsi, l'estimateur de $\psi'(u, \lambda)$ et son intervalle de confiance (valide asymptotiquement) de niveau α sont:

$$\hat{\psi}'(u, \lambda) = \frac{1}{N\lambda_0} \sum_{i=1}^N LD_i,$$

$$\text{IC} = \hat{\psi}'(u, \lambda) \pm z_{1-\alpha/2} S / \sqrt{N}$$

$$\text{où } S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (LD_i / \lambda_0 - \hat{\psi}(u, \lambda))^2.$$

4.1.2 Processus d'entreposage $X(t)$

Considérons la chaîne imbriquée X_n (1.24) du processus d'entreposage $X(t)$ et rappelons que

$$1 - \psi(u, \lambda) = F(u) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{X(t) \leq u\}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \left\{ \sum_{i=1}^{N(t)} d_i \right\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{N(t)} d_i \quad \text{p.s.}$$

où d_i est le temps que le processus passe en dessous du niveau u entre le $(i-1)$ -ième et le i -ième saut et $N(t)$ est le nombre de réclamation survenues dans $[0, t)$.

Posons

$$h[X(s), s \leq t] = \sum_{i=1}^{N(t)} d_i.$$

Soit $\{\eta_i\}$, une suite de variables Bernoulli indépendantes de paramètre $\Delta\lambda/\lambda$, indépendantes de $\{W_i, Y_i\}$. De la même façon qu'à la section précédente, notre processus fantôme est obtenu en associant la suite $\{\eta_i\}$ au processus nominal. Si on dénote $\{X_\lambda(t)\}$, le processus avec taux d'arrivée des réclamations λ , alors par définition:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} F(u) &= \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\lambda} \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{E\{h[X_\lambda(s), s \leq t]\} - E\{h[X_{\lambda-\Delta\lambda}(s), s \leq t]\}}{t} \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \left\{ \frac{E\{h[X_\lambda(s), s \leq t]\} - E\{h[X_{\lambda-\Delta\lambda}(s), s \leq t]\}}{t \Delta\lambda} \right\}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Fixons $t < \infty$ et considérons la différence finie dénotée par $F_\Delta(\lambda, t)$ de l'égalité (4.6). En conditionnant sur le nombre m de réclamations fantômes parmi $N(t)$ réclamations, on obtient:

$$\begin{aligned} F_\Delta(\lambda, t) &= E \left\{ \sum_{m=0}^{N(t)} \binom{N(t)}{m} \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \right)^m \left(1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \right)^{N(t)-m} \times \right. \\ &\quad \left. E_m \left\{ \frac{[h(X_\lambda(s); s \leq t)] - [h(X_{\lambda-\Delta\lambda}(s); s \leq t)]}{t \Delta\lambda} \right\} \right\} \end{aligned} \quad (4.7)$$

où E_m est l'espérance conditionnelle par rapport au nombre de réclamations fantômes étant donné $N(t)$ réclamations. Pour $m \geq 2$, les termes dans la somme de l'égalité (4.7) sont de l'ordre $\mathcal{O}(\Delta\lambda^2)$ et ils s'annulent presque sûrement quand $\Delta\lambda \rightarrow 0$; pour $m = 0$, les systèmes nominal et fantôme coïncident et la différence entre les h est égale à 0. Donc, il ne reste que le cas $m = 1$:

$$F_\Delta(\lambda, t) = E \left\{ N(t) \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \right) \left(1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \right)^{N(t)-1} \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& E_1 \left\{ \frac{[h(X_\lambda(s); s \leq t) - h(X_{\lambda-\Delta\lambda}(s); s \leq t)]}{t\Delta\lambda} \right\} \\
&= E \left\{ N(t) \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \right) \left(1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \right)^{N(t)-1} \times \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{N(t)} \sum_{j=1}^{N(t)} \left\{ \frac{\sum_{n=1}^{N(t)} [d_n(0) - d_n(j)]}{t\Delta\lambda} \right\} \right\} \tag{4.8}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\lambda} E \left\{ \left(1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \right)^{N(t)-1} \sum_{j=1}^{N(t)} \left\{ \frac{\sum_{n=1}^{N(t)} [d_n(0) - d_n(j)]}{t} \right\} \right\} \tag{4.9}$$

où $d_n(0)$ est le temps que le processus nominal passe en dessous du niveau u entre la $(n-1)$ -ième et la n -ième réclamation et, $d_n(j)$ est celui correspondant au système fantôme où il y a une seule réclamation fantôme à la position j . Le facteur $\frac{1}{N(t)}$ apparaissant dans (4.8) est la probabilité que la réclamation fantôme se trouve à la position j pour $j = 1, \dots, N(t)$.

Si on prend la limite de l'égalité (4.9) lorsque $\Delta\lambda \rightarrow 0$ et la remplace dans (4.6), on obtient:

$$\frac{d}{d\lambda} F(u) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} E \sum_{j=1}^{N(t)} \left\{ \frac{\sum_{n=1}^{N(t)} [d_n(0) - d_n(j)]}{t} \right\}. \tag{4.10}$$

Donc, la dérivée de $\psi(u, \lambda)$ par rapport à λ est

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda} \psi(u, \lambda) &= -\frac{d}{d\lambda} F(u) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} E \sum_{j=1}^{N(t)} \left\{ \frac{\sum_{n=1}^{N(t)} [d_n(j) - d_n(0)]}{t} \right\}. \tag{4.11}
\end{aligned}$$

Comme dans le cas du processus $U(t)$ de la section précédente, nous n'allons pas générer les systèmes fantômes mais nous allons plutôt raisonner afin d'obtenir $d_n(j) - d_n(0)$. Rappelons que $X(t)$ est un processus régénératif (section 1.3) et dénotons $\{X_n(0)\}$ le processus nominal, $\{X_n(j)\}$ le processus fantôme où la j -ième réclamation est ignorée.

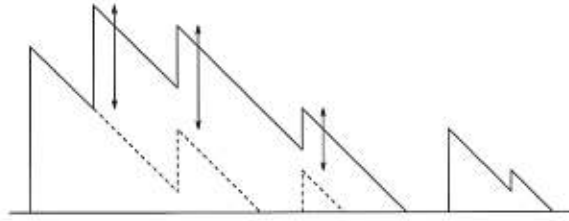


Figure 4.3: Une trajectoire du système fantôme $X_n(j)$ avec $j = 1$ (cas linéaire).

Cas linéaire:

On remarque que:

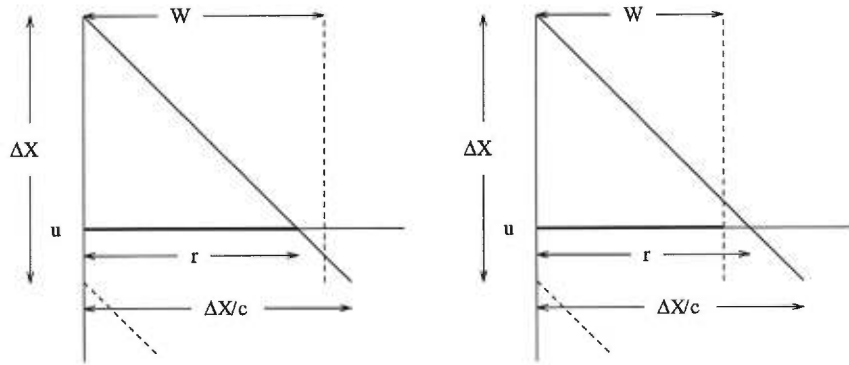


Figure 4.4: Cas $r_{n+1} - \Delta X_n(j)/c \leq 0$.

- $X_n(j) = X_n(0)$ pour $j < n$ et $X_j(j) = X_j(0) - Y_j$.
- Soit $\Delta X_n(j) = X_n(0) - X_n(j)$. Alors $\Delta X_n(j) = 0$ pour $\forall j < n$ et $\Delta X_j(j) = Y_j$. De plus, comme illustré dans la figure (4.3), $\Delta X_n(j)$ décroît et s'annule lorsque $X_n(0) = 0$ i.e. à la fin d'un cycle régénératif. Au début d'un nouveau cycle régénératif, les deux processus coïncident. Donc, $\Delta X_n(j) > 0$ seulement à l'intérieur du cycle auquel j appartient. Avec toutes ces remarques, $\Delta X_n(j)$ peut être calculé récursivement comme suit:

$$\Delta X_{n+1}(j) = \begin{cases} \Delta X_n(j) & \text{si } X_n(0) - cW_{n+1} > \Delta X_n(j), \\ X_n(0) - cW_{n+1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Soit $\Delta d_n(j) = d_n(j) - d_n(0)$. Pour formuler $\Delta d_n(j)$ on distingue deux cas:

1. Pour $X_n(0) \leq u$, il est évident que $\Delta d_n(j) = 0$.

2. Pour $X_n(0) > u$,

$$\Delta d_n(j) = \begin{cases} \min(r_{n+1}, W_{n+1}) & r_{n+1} - \Delta X_n(j)/c \leq 0, \\ \Delta X_n(j)/c - \max(0, r_{n+1} - W_{n+1}) & 0 < r_{n+1} - \Delta X_n(j)/c \leq W_{n+1}, \\ 0 & r_{n+1} - \Delta X_n(j)/c > W_{n+1}. \end{cases}$$

L'implantation du processus $X(t)$ dans le cas non-linéaire est la même que le cas linéaire. La figure 4.4 illustre le cas où $X_n(0) > u$ et $r_{n+1} - \Delta X_n(j)/c \leq 0$. Soient :

- ΔX_j dénote $\Delta X_n(j)$.
- Δd dénote $\sum_j \sum_n \Delta d_n(j)$.

L'implantation du processus $X(t)$ pour estimer $\psi'(u, \lambda)$ sous l'approche des moyennes par lot et la méthode régénérative est présentée respectivement par l'algorithme 3.2.1a et l'algorithme 3.2.2a. Comme dans la section précédente, ces deux algorithmes sont des versions complètes des algorithmes 3.2.1 et 3.2.2 afin d'estimer simultanément $\psi(u, \lambda)$ et $\psi'(u, \lambda)$.

Algorithme 3.2.1a:

$T \leftarrow 0$

Pour $i = 1$ jusqu'à N faire

$X \leftarrow u, D \leftarrow 0, r \leftarrow 0, \text{nbfan} \leftarrow 0, \Delta d \leftarrow 0.$

Répéter

Générer W et Y .

Si $X \leq u$ alors $D \leftarrow D + W$.

Sinon

$$D \leftarrow D + \max(0, W - r).$$

Pour $j = 1$ à nbfan Faire

$$\text{Si } (r - \Delta X_j/c) < 0 \text{ Alors } \Delta d \leftarrow \Delta d + \min(r, W).$$

$$\text{Si } (r - \Delta X_j/c) \leq W \text{ Alors } \Delta d \leftarrow \Delta d + \Delta X_j/c - \max(0, r - W).$$

End (Pour).

Si $(X - cW \leq 0)$ Alors nbfan $\leftarrow 0$, $X \leftarrow Y$.

Sinon,

Pour $j = 1$ à nbfan Faire

$$\text{Si } (X - cW < \Delta X_j) \text{ Alors } \Delta X_j \leftarrow X - cW.$$

$$X \leftarrow X - cW + Y.$$

Fin (Si).

nbfan \leftarrow nbfan + 1, $\Delta X_{\text{nbfan}} \leftarrow Y$, $r \leftarrow (X - u)/c$.

$$T = T + W.$$

Tant que $T \leq ib$

$$F_i \leftarrow D/b.$$

$$DF_i \leftarrow \Delta d/\lambda b.$$

Incrémenter i .

Fin (pour).

L'estimateur de $\psi'(u, \lambda)$ est:

$$\hat{\psi}'(u, \lambda) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (DF_i).$$

L'intervalle de confiance de $\psi'(u, \lambda)$:

$$\text{IC} = \hat{\psi}'(u, \lambda) \pm t_{N-1, 1-\alpha/2} S/\sqrt{N}$$

$$\text{où } S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (DF_i - \hat{\psi}'(u, \lambda))^2.$$

Algorithme 3.2.2a:

$i \leftarrow 1; X \leftarrow 0; D \leftarrow 0; r \leftarrow 0; ST \leftarrow 0.$

Tant que $i \leq N$ Faire

Générer W et Y .

$ST \leftarrow ST + W.$

Si $X \leq u$ alors $D \leftarrow D + W.$

Sinon,

$D \leftarrow D + \max(0, W - r).$

Pour $j = 1$ à nbfan Faire

Si $(r - \Delta X_j/c) < 0$ Alors $\Delta d \leftarrow \Delta d + \min(r, W).$

Si $(r - \Delta X_j/c) \leq W$ Alors $\Delta d \leftarrow \Delta d + \Delta X_j/c - \max(0, r - W).$

End (Pour).

Si $X - cW \leq 0$ alors

$DC_i \leftarrow D; TC_i \leftarrow ST; \Delta dC_i \leftarrow \Delta d; X \leftarrow Y.$

$D \leftarrow 0; \Delta d \leftarrow 0; \text{nbfan} \leftarrow 0.$

Incrémenter $i; ST \leftarrow 0; D \leftarrow 0.$

Sinon,

Pour $j = 1$ à nbfan Faire

Si $(X - cW < \Delta X_j)$ Alors $\Delta X_j \leftarrow X - cW.$

$X \leftarrow X - cW + Y.$

Fin (Si).

nbfan \leftarrow nbfan + 1; $\Delta X_{\text{nbfan}} \leftarrow Y$; $r \leftarrow (X - u)/c$.

Fin (Tant que).

L'estimateur de $\psi'(u, \lambda)$ et son intervalle de confiance pourraient être présentés sous les formes suivantes:

$$\hat{\psi}'(u, \lambda) = \frac{\sum_i^N \Delta dC_i}{\sum_i^N TC_i},$$

$$\text{IC} = \hat{\psi}'(u, \lambda) \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(RC')/N}}{\overline{TC}}$$

où $RC' = \Delta dC - \psi'(u, \lambda)TC$

et $\widehat{\text{Var}}(RC') = \widehat{\text{Var}}(\Delta dC) - 2\hat{\psi}'(u, \lambda)\widehat{\text{Cov}}(\Delta dC, TC) + [\hat{\psi}'(u, \lambda)]^2\widehat{\text{Var}}(TC)$.

Cas non-linéaire:

De façon analogue du cas linéaire [33]:

- $\Delta X_n(j)$:

$$\Delta X_{n+1}(j) = \begin{cases} \Delta X_n(j) e^{-\delta W_{n+1}} & \text{Si } X_n(0) - \frac{c}{\delta}(e^{\delta W_{n+1}} - 1) > \Delta X_n(j), \\ e^{\delta W_{n+1}} [X_n(0) - \frac{c}{\delta}(e^{\delta W_{n+1}} - 1)] & \text{Sinon.} \end{cases}$$

- $\Delta d_n(j)$:

1. Pour $X_n(0) \leq u$, il est évident que $\Delta d_n(j) = 0$.
2. Pour $X_n(0) > u$,

$$\Delta d_n(j) = \max(\min(r_{n+1}, W_{n+1}) - r_{n+1}(j))$$

$$\text{où } r_{n+1}(j) = r_{n+1} + \frac{1}{\delta} \ln \left(1 - \frac{\Delta X_n(j)}{X_n(0) + c/\delta} \right).$$

Remarque: On pourrait aussi estimer la dérivée de $\psi(u, \lambda)$ à l'aide du processus $X(t)$ par la méthode d'IPA (Infinitesimal Perturbation Analysis).

4.2 Méthode du rapport de vraisemblance

La méthode du rapport de vraisemblance est aussi connue sous le nom méthode de la fonction de score ([32], [14]). Rappelons que sous la méthode de convolution, la probabilité de ruine a la forme:

$$\begin{aligned}\psi(u, \lambda) &= P\left(\sum_{i=1}^N L_i > u\right) = E_\lambda \left[\mathbf{1}_{\{\sum_i^N L_i > u\}} \right] \\ &= \sum_{n \geq 0} P\left(\sum_{i=1}^n L_i > u \mid N = n\right) p_\lambda(n) \\ &= E_\lambda \left[P\left(\sum_{i=1}^N L_i > u\right) \right]\end{aligned}$$

où

- les variables L_i sont mutuellement indépendantes et indépendantes de N et suivent la distribution $F(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x (1 - G(y)) dy$,
- $p_\lambda(n) = P(N = n) = \frac{\theta}{1 + \theta} \left(\frac{1}{1 + \theta}\right)^n = (1 - \lambda c/\mu) (\lambda \mu/c)^n$,
- θ est le “Security loading”,
- $c = (1 + \theta)\lambda\mu$ est la prime et
- μ est l’espérance du montant de réclamation Y dont la distribution est G .

D’autre part, $P\left(\sum_i^n L_i > u \mid N = n\right)$ est indépendante de λ alors

$$\begin{aligned}P\left(\sum_i^n L_i > u \mid N = n\right) p_\lambda(n) &= P\left(\sum_i^n L_i > u\right) p_\lambda(n) \\ &= P\left(\sum_i^n L_i > u\right) \frac{p_\lambda(n)}{p_{\lambda_0}(n)} p_{\lambda_0}(n)\end{aligned}$$

où $p_{\lambda_0}(n) = (1 - \lambda_0 c/\mu) (\lambda_0 \mu/c)^n$, pour tout $\lambda_0 > \mu/c$. Ce qui implique que

$$\psi(u, \lambda) = \sum_{n \geq 0} P\left(\sum_i^n L_i > u\right) \frac{p_\lambda(n)}{p_{\lambda_0}(n)} p_{\lambda_0}(n).$$

Soulignons que cette dernière expression de $\psi(u, \lambda)$ est équivalente à un changement de mesure. En effet, soient $\Omega = \mathbf{N}$ et $\mathcal{F} = \sigma(\mathbf{N})$ et soit \mathbf{P}_λ la probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) avec masse de probabilité p_λ . Soit \mathbf{P}_{λ_0} , une autre probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) avec masse de probabilité p_{λ_0} , il est clair que $\mathbf{P}_\lambda \ll \mathbf{P}_{\lambda_0}$. Donc, en appliquant la méthode de changement de mesure, la probabilité de ruine $\psi(u, \lambda)$ est exprimée comme suit:

$$\psi(u, \lambda) = E_{\lambda_0} \left[P \left(\sum_i^N L_i > u \right) \frac{p_\lambda(N)}{p_{\lambda_0}(N)} \right] = E_{\lambda_0} \left[L(\lambda, \lambda_0, N) \mathbf{1}_{\{\sum_i^N L_i > u\}} \right] \quad (4.12)$$

où $L(\lambda, \lambda_0, N) = \frac{p_\lambda(N)}{p_{\lambda_0}(N)} = \frac{(1 - \lambda c/\mu)(\lambda\mu/c)^N}{(1 - \lambda_0 c/\mu)(\lambda_0\mu/c)^N}$ est la dérivée de Radon-Nikodym.

Dérivons les deux côtes de l'égalité (4.12) par rapport à λ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \psi(u, \lambda) &= \frac{d}{d\lambda} E_{\lambda_0} \left[L(\lambda, \lambda_0, N) \mathbf{1}_{\{\sum_i^N L_i > u\}} \right] \\ &= E_{\lambda_0} \left[\frac{d}{d\lambda} L(\lambda, \lambda_0, N) \mathbf{1}_{\{\sum_i^N L_i > u\}} \right] \quad (\text{par convergence dominante}) \\ &= E_{\lambda_0} \left[L(\lambda, \lambda_0, N) \frac{d}{d\lambda} \ln L(\lambda, \lambda_0, N) \mathbf{1}_{\{\sum_i^N L_i > u\}} \right] \\ &= E_{\lambda_0} \left[L(\lambda, \lambda_0, N) S(\lambda, \lambda_0, N) \mathbf{1}_{\{\sum_i^N L_i > u\}} \right] \end{aligned}$$

où $S(\lambda, \lambda_0, N) = \frac{d}{d\lambda} \ln L(\lambda, \lambda_0, N)$. $S(\lambda, \lambda_0, N)$ est appelé la fonction de score.

Remplaçons $L(\lambda, \lambda_0, N)$ par $\frac{(1 - \lambda c/\mu)(\lambda\mu/c)^N}{(1 - \lambda_0 c/\mu)(\lambda_0\mu/c)^N}$, $S(\lambda, \lambda_0, N)$ devient

$$\begin{aligned} S(\lambda, \lambda_0, N) &= \frac{d}{d\lambda} \left[\ln \frac{(1 - \lambda c/\mu)(\lambda\mu/c)^N}{(1 - \lambda_0 c/\mu)(\lambda_0\mu/c)^N} \right] \\ &= \frac{d}{d\lambda} [\ln(1 - \lambda c/\mu) + N \ln(\lambda\mu/c)] \\ &= \mu \left(\frac{N}{\lambda\mu} - \frac{1}{c - \lambda\mu} \right). \end{aligned}$$

Remarquons que la fonction de score ne dépend pas de λ_0 , alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \psi(u, \lambda) &= E_\lambda \left[S(\lambda, N) \mathbf{1}_{\{\sum_i^N L_i > u\}} \right] \\ &= \mu E_\lambda \left[\left(\frac{N}{\lambda\mu} - \frac{1}{c - \lambda\mu} \right) \mathbf{1}_{\{\sum_i^N L_i > u\}} \right]. \end{aligned}$$

Soit $\hat{\psi}'(u, \lambda)$, l'estimateur de $\frac{d}{d\lambda}\psi(u, \lambda)$ et soit $p = \frac{N}{\lambda\mu} - \frac{1}{c - \lambda\mu}$. Les calculs de $\hat{\psi}'(u, \lambda)$ et son intervalle de confiance sont faits parallèlement avec ceux de $\hat{\psi}(u, \lambda)$ en ajoutant des calculs de p dans l'algorithme 3.3:

Algorithme 3.3a:

Pour $i = 1$ à M faire

Générer $N_i \sim \text{Géométrique} \left(\frac{\theta}{1 + \theta} \right)$.

Pour $j = 1$ à N_i faire

Générer L_j .

Fin (Pour).

Si $L = \sum_j^{N_i} L_j > u$ alors

$$P_i = 1,$$

$$p_i = \frac{N_i}{\lambda\mu} - \frac{1}{c - \lambda\mu}.$$

Sinon, $P_i = 0, p_i = 0$.

Incrémenter i .

Fin (Pour).

L'estimateur $\hat{\psi}'(u, \lambda)$:

$$\hat{\psi}'(u, \lambda) = \frac{\mu}{M} \sum_{i=1}^M p_i,$$

et l'intervalle de confiance de $\psi'(u)$:

$$IC = \hat{\psi}'(u, \lambda) \pm z_{1-\alpha/2} S_M \sqrt{M}$$

où $S^2 = \frac{1}{M-1} \sum_i^M (\mu p_i - \hat{\psi}'(u, \lambda))^2$.

Chapitre 5

Résultats de simulations

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats de simulations pour plusieurs distributions du montant de réclamation Y avec le même taux d'arrivée de réclamations $\lambda = 1$, la même prime $c = 1.5$.

Nous présentons également dans nos résultats, l'efficacité de nos estimateurs, une mesure qui nous permet de comparer la performance de nos méthodes de simulation dont la notion est la suivante [21]:

Notion de l'efficacité d'un estimateur: Soit \bar{X} , une variable aléatoire que l'on prend pour estimer une valeur inconnue μ . Le biais, la variance et l'erreur quadratique moyenne (MSE) de \bar{X} sont définis respectivement par:

$$\begin{aligned}\beta &= E[\bar{X}] - \mu; \\ \sigma^2 &= \text{Var}(\bar{X}) = E[(\bar{X} - E[\bar{X}])^2]; \\ \text{MSE}(\bar{X}) &= E[(\bar{X} - \mu)^2] = \beta^2 + \sigma^2,\end{aligned}$$

et l'efficacité (Eff) de \bar{X} est définie comme

$$\text{Eff}(\bar{X}) = \frac{1}{t_{CPU} \text{MSE}(\bar{X})}$$

où t_{CPU} est le temps moyen du CPU pour la simulation. Cette mesure tient compte des deux facteurs qui affectent la performance dans une simulation:

1. La vitesse de calcul et
2. L'erreur de calcul.

En particulier, si $\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_i X_i$ est l'estimateur de $EX_i = \mu$ où X_i sont iid et N est la taille de la simulation alors, t_{CPU} est proportionnel à N i.e. $t_{CPU} = \alpha N$ et, $\text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma_X^2}{N}$. Donc, l'efficacité devient une mesure indépendante de la longueur de la simulation.

Mais pour vraiment comparer la performance des méthodes de simulations, à part de l'efficacité d'un estimateur, nous allons considérer aussi d'autres critères:

- “*Set-up time*”: Le temps requis pour les calculs préliminaires avant d'écrire le programme. Par exemple, le développement du rapport de vraisemblance lorsqu'on utilise le processus de surplus $U(t)$ (section 3.1.2).
- La robustesse: Lorsqu'on parle de la robustesse d'une méthode de simulation, c'est que l'on veut qu'elle soit efficace pour tout domaine d'application. Dans notre cas, l'estimation de $\psi(u, \lambda)$ est robuste si elle fonctionne pour toute distribution de Y .

Soulignons que l'implantation de tous nos systèmes sont faites avec SIMOD, un progiciel de simulation de systèmes stochastiques à événement discrets, avec vision par événement ou par processus. Ce progiciel est implanté sous forme de modules pré-compilés, écrits en Modula-2 [22]. Parmi ces modules, on retrouve RAND1 qui nous permettent de générer des valeurs aléatoires suivant différentes lois de probabilité comme Exponentielle, Weibull, Normale, etc. Nous utilisons également les modules EVENT et GENEP pour générer nos processus de Poisson.

Pour chaque modèle, avant de présenter les résultats des simulations ainsi que le tableau comparatif de l'efficacité des méthodes de simulations, nous présentons en détails les calculs nécessaires et les algorithmes pour la génération de nos variables aléatoires non-fournies par le module RAND1 de SIMOD.

5.1 Loi Exponentielle

Pour cet exemple, on connaît l'expression analytique de $\psi(u, \lambda)$ et de sa dérivée. Cela nous permet de vérifier nos résultats de simulation. Si $Y \sim \exp(\beta)$, sa fonction de densité a la forme:

$$g_1(y) = \begin{cases} \beta e^{-\beta y} & \text{Si } y \geq 0, \\ 0 & \text{Sinon.} \end{cases}$$

$$E[Y] = \frac{1}{\beta}.$$

$$M_Y(r) = \frac{\beta}{\beta - r}.$$

Comme nous l'avons vu dans la section 1.2.1 pour le cas linéaire, nous pouvons trouver sans difficulté les valeurs théoriques de $\psi(u, \lambda)$ et de $\frac{d}{d\lambda}\psi(u, \lambda)$.

La probabilité de ruine dans le cas où Y suit une distribution exponentielle est

$$\psi(u, \lambda) = \frac{1}{1 + \theta} \exp \left\{ \frac{\theta}{1 + \theta} u \beta \right\}, \quad u \geq 0. \quad (5.1)$$

Rappelons que $c = (1 + \theta)\lambda E[Y] = (1 + \theta)\frac{\lambda}{\beta}$, donc $\theta = \frac{c\beta}{\lambda} - 1$. En remplaçant la valeur de θ dans (5.1) on obtient:

$$\psi(u, \lambda) = \frac{\lambda}{c\beta} \exp \left\{ \left(\frac{\lambda}{c\beta} - 1 \right) u \beta \right\}, \quad u \geq 0. \quad (5.2)$$

Donc, la dérivée de $\psi(u, \lambda)$ par rapport à λ est

$$\frac{d}{d\lambda}\psi(u, \lambda) = \left(\frac{1 + \lambda u/c}{c\beta} \right) \exp \left\{ \left(\frac{\lambda}{c\beta} - 1 \right) u \beta \right\}. \quad (5.3)$$

Prenons $\beta = 1$ et remplaçons les valeurs de β , c et λ dans (5.2) et (5.3). On obtient la valeur théorique de $\psi(u, \lambda)$ et sa dérivée par rapport à λ :

$$\psi(u, \lambda)|_{\lambda=1} = \frac{2}{3} e^{-\frac{1}{3}u}, \quad u \geq 0, \quad (5.4)$$

$$\frac{d}{d\lambda}\psi(u, \lambda)|_{\lambda=1} = \left(1 + \frac{2}{3}u \right) \frac{2}{3} e^{-\frac{1}{3}u}, \quad u \geq 0. \quad (5.5)$$

Pour le cas non-linéaire (voir section 1.2.2), l'expression analytique de $\psi(u, \lambda)$ est donnée par Sergerdahl (l'équation (1.15)). Nous utilisons *mathematica* afin de calculer sa dérivée. Pour la simulation, nous reprenons les mêmes valeurs pour λ , c et, nous prenons $\delta = 0.05$.

5.1.1 Processus de surplus $U(t)$

Cas linéaire

Nous avons vu dans la section 3.2.1, lors de l'utilisation de la méthode du changement de mesure, que si la fonction génératrice des moments existe alors les choix optimaux pour λ_0 et α sont tels que

$$\lambda_0 > \frac{c}{\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[Y]}, \quad (5.6)$$

$$\lambda_0 = \lambda + cR \quad \text{et} \quad (5.7)$$

$$\alpha = \frac{(\lambda_0 - \lambda)}{c} = R. \quad (5.8)$$

En particulier, dans le cas $Y \sim \exp(\beta)$ (voir section 1.2.1):

$$R = \frac{\theta\beta}{1 + \theta} = \beta - \frac{\lambda}{c}.$$

Sous la probabilité \mathbf{Q} , Y a la densité (voir section 3.1.2)

$$g_2(y) = \frac{e^{Ry} g_1(y)}{M_Y(R)} = (\beta - R)e^{-(\beta - R)y} = \frac{\lambda}{c} e^{-\frac{\lambda}{c}y}.$$

D'autre part, la condition (5.7) implique que $\lambda_0 = c\beta$. Donc, en appliquant l'algorithme 3.1.a avec $\lambda_0 = c\beta = 1.5$ et $Y \sim \exp\left(\frac{\lambda}{c}\right)$ on obtient les résultats du tableau 5.1.

Cas non-linéaire

D'après l'approche du changement de mesure discutée à la fin de la section 3.1.2, on applique directement l'algorithme 3.1.2. Les résultats se trouvent au tableau 5.6.

Remarque

En examinant ces résultats , on remarque que:

- Le temps de CPU augmente avec u , ce qui est normal car il nous faut plus de temps pour que $U(t) \leq 0$.
- $\hat{\sigma}_{\hat{\psi}}$ et $\hat{\sigma}_{\hat{\psi}'}$ sont des fonctions décroissantes de u .
- l'approche IS est très efficace (voir tableau 5.5) dans les cas difficiles (la ruine est de plus en plus rare lorsque u augmente).

5.1.2 Processus d'entreposage $X(t)$

Les estimateurs de $\psi(u, \lambda)$ et de $\frac{d}{d\lambda}\psi(u, \lambda)$ sous l'approche des moyennes par lots et la méthode régénérative pour le cas linéaire se trouvent aux tableaux 5.2 et tableau 5.3 respectivement. Les résultats du cas non-linéaire sont présentés aux tableaux 5.7 et 5.8. Notons que la seule différence entre l'approche des moyennes par lots et la méthode régénérative est dans les calculs pour les intervalles de confiance. Ce qui explique la ressemblance des résultats de ces deux méthodes. Par contre, les temps de CPU sous la méthode régénérative sont plus longs car il y a plus de calculs à effectuer pour la variance et la covariance (voir section 2.4). Cependant, le temps de calcul est inversement proportionnel à u , car la mise-à-jour des statistiques lorsque le processus d'entreposage est au dessus du niveau u devient moins fréquent (voir l'algorithme 3.2.1a et 3.2.2a de la section 4.1.2).

5.1.3 Modèle de convolution

Avec le modèle de convolution, l'algorithme 3.3a de la section 4.2 génère les variables L_i dont la distribution est

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\mathbb{E}(Y)} \int_0^x (1 - G(y)) dy \\ &= \beta \int_0^x e^{-\beta y} dy = 1 - e^{-\beta x} \sim \exp(\beta). \end{aligned}$$

Les résultats des simulations avec le modèle de convolution se trouvent au tableau 5.4. On remarque qu'ils sont très stables: le temps de CPU ne dépend pas de u .

5.1.4 Tableau d'efficacité:

L'efficacité de nos estimateurs est présentée au tableau 5.5 pour le cas linéaire et tableau 5.9 pour le cas non-linéaire.

Probabilité de ruine $\psi(u, \lambda)$ (loi Exponentielle)				
	$u = 0$	$u = 2$	$u = 4$	$u = 6$
$\hat{\psi}(u, \lambda)$	0.675	0.340	0.175	0.090
$\hat{\sigma}_{\hat{\psi}}$	0.0039	0.0020	0.0010	0.0005
IC (90%)	(0.669,0.682)	(0.337,0.344)	(0.173,0.177)	(0.090,0.091)
$\psi(u, \lambda)$	0.66667	0.34228	0.17573	0.09022
Dérivée de la probabilité de ruine $\psi'(u, \lambda)$				
	$u = 0$	$u = 2$	$u = 4$	$u = 6$
$\hat{\psi}'(u, \lambda)$	0.686	0.778	0.636	0.443
$\hat{\sigma}_{\hat{\psi}'}$	0.0272	0.0247	0.0171	0.0105
IC (90%)	(0.642,0.731)	(0.738,0.819)	(0.608,0.664)	(0.426,0.461)
$\psi'(u, \lambda)$	0.66667	0.79864	0.64435	0.45112
Temps de calcul & Nombre total de réclamations observées				
Nb de réclamations	10,465	24,640	38,202	52,038
$T_{CPU}(s)$	0.72	1.29	1.69	2.18

Tableau 5.1: Processus $U(t)$ avec IS: 3,500 répétitions (modèle linéaire).

Probabilité de ruine $\psi(u, \lambda)$ (loi Exponentielle)				
	$u = 0$	$u = 2$	$u = 4$	$u = 6$
$\hat{\psi}(u, \lambda)$	0.667	0.344	0.177	0.092
$\hat{\sigma}_{\hat{\psi}}$	0.0028	0.0040	0.0039	0.0034
IC (90%)	(0.662,0.671)	(0.337,0.350)	(0.171,0.184)	(0.086,0.097)
$\psi(u, \lambda)$	0.66667	0.34228	0.17573	0.09022
Dérivée de la probabilité de ruine $\psi'(u, \lambda)$				
	$u = 0$	$u = 2$	$u = 4$	$u = 6$
$\hat{\psi}'(u, \lambda)$	0.664	0.798	0.642	0.456
$\hat{\sigma}_{\hat{\psi}'}$	0.0028	0.0116	0.0157	0.0185
IC (90%)	(0.659,0.669)	(0.778,0.817)	(0.616,0.669)	(0.425,0.487)
$\psi'(u, \lambda)$	0.66667	0.79864	0.64435	0.45112
Temps de calcul & Nombre total de réclamations observées				
Nb de réclamations	100,000	100,000	100,000	100,000
$t_{CPU}(s)$	2.24	2.20	2.03	1.95

Tableau 5.2: Processus $X(t)$ 100 lots de longueur 1000 (modèle linéaire).

Probabilité de ruine $\psi(u, \lambda)$ (loi Exponentielle)				
	$u = 0$	$u = 2$	$u = 4$	$u = 6$
$\hat{\psi}(u, \lambda)$	0.671	0.349	0.182	0.095
$\hat{\sigma}_{\hat{\psi}}$	0.0032	0.0048	0.0047	0.0039
IC (90%)	(0.665,0.676)	(0.341,0.357)	(0.174,0.189)	(0.088,0.101)
$\psi(u, \lambda)$	0.66667	0.34228	0.17573	0.09022
Dérivée de la probabilité de ruine $\psi'(u, \lambda)$				
	$u = 0$	$u = 2$	$u = 4$	$u = 6$
$\hat{\psi}'(u, \lambda)$	0.671	0.817	0.676	0.481
$\hat{\sigma}_{\hat{\psi}'}$	0.0032	0.0148	0.0213	0.0219
IC (90%)	(0.665,0.676)	(0.793,0.842)	(0.641,0.711)	(0.445,0.517)
$\psi'(u, \lambda)$	0.66667	0.79864	0.64435	0.45112
Temps de calcul & Nombre total de réclamations observées				
Nb de réclamations	91,272	91,272	91,272	91,272
$T_{CPU}(s)$	2.79	2.65	2.59	2.44

Tableau 5.3: Processus $X(t)$ avec la méthode régénérative: 30,000 cycles (modèle linéaire).

Probabilité de ruine $\psi(u, \lambda)$ (loi Exponentielle)				
	$u = 0$	$u = 2$	$u = 4$	$u = 6$
$\hat{\psi}(u, \lambda)$	0.665	0.339	0.176	0.091
$\hat{\sigma}_{\hat{\psi}}$	0.0021	0.0021	0.0017	0.0013
IC (90%)	(0.661,0.668)	(0.336,0.343)	(0.173,0.179)	(0.089,0.093)
$\psi(u, \lambda)$	0.66667	0.34228	0.17573	0.09022
Dérivée de la probabilité de ruine $\psi'(u, \lambda)$				
	$u = 0$	$u = 2$	$u = 4$	$u = 6$
$\hat{\psi}'(u, \lambda)$	0.668	0.802	0.651	0.460
$\hat{\sigma}_{\hat{\psi}'}$	0.0092	0.0087	0.0084	0.0077
IC (90%)	(0.653,0.683)	(0.788,0.816)	(0.638,0.665)	(0.447,0.473)
$\psi'(u, \lambda)$	0.66667	0.79864	0.64435	0.45112
Temps de calcul & Nombre total de réclamations observées				
Nb de réclamations	99,848	99,848	99,848	99,848
$T_{CPU}(s)$	1.86	1.89	1.89	1.90

Tableau 5.4: Modèle de convolution : 50,000 répétitions (modèle linéaire).

L'efficacité de $\hat{\psi}(u, \lambda)$ (loi Exponentielle)				
	$u = 0$	$u = 2$	$u = 4$	$u = 6$
Batch	4.440145E+004	2.021387E+004	1.967185E+004	3.711820E+004
Régénérative	3.607778E+004	1.624208E+004	1.750177E+004	2.626922E+004
Importance Sampling	8.305478E+004	1.890751E+005	5.220770E+005	1.673462E+006
Convolution	1.205938E+005	1.180283E+005	1.825288E+005	3.169380E+005
L'efficacité de $\hat{\psi}'(u, \lambda)$				
	$u = 0$	$u = 2$	$u = 4$	$u = 6$
Batch	4.309521E+004	2.991241E+003	1.216699E+003	1.234785E+003
Régénérative	3.607778E+004	1.721267E+003	8.496564E+002	8.548200E+002
Importance Sampling	1.784300E+003	1.280836E+003	1.986227E+003	4.255893E+003
Convolution	1.433600E+004	1.594678E+004	1.711588E+004	1.999795E+004

Tableau 5.5: Tableau comparatif de l'efficacité des méthodes (modèle linéaire).

Probabilité de ruine $\psi(u, \lambda)$ (loi Exponentiel)				
	$u = 0$	$u = 2$	$u = 4$	$u = 6$
$\hat{\psi}(u, \lambda)$	0.620	0.266	0.107	0.041
$\hat{\sigma}_{\hat{\psi}}$	0.0041	0.0021	0.0008	0.0003
IC (90%)	(0.613, 0.627)	(0.262, 0.269)	(0.105, 0.108)	(0.040, 0.041)
$\psi(u, \lambda)$	0.619915	0.264757	0.106251	0.040303
Temps de calcul & Nombre total de réclamations observées				
Nb de réclamations	10,190	20,080	29,200	37,070
$t_{CPU}(s)$	0.26	0.50	0.70	0.87

Tableau 5.6: Processus $U(t)$ avec IS: 3,500 répétitions (modèle non-linéaire).

Probabilité de ruine $\psi(u, \lambda)$ (loi Exponentiel)				
	$u = 0$	$u = 2$	$u = 4$	$u = 6$
$\hat{\psi}(u, \lambda)$	0.620	0.267	0.107	0.041
$\hat{\sigma}_{\hat{\psi}}$	0.0025	0.0029	0.0024	0.0016
IC (90%)	(0.616, 0.624)	(0.262, 0.272)	(0.104, 0.111)	(0.039, 0.044)
$\psi(u, \lambda)$	0.619915	0.264757	0.106251	0.040303
Dérivée de la probabilité de ruine $\psi'(u, \lambda)$				
	$u = 0$	$u = 2$	$u = 4$	$u = 6$
$\hat{\psi}'(u, \lambda)$	0.595	0.558	0.342	0.173
$\hat{\sigma}_{\hat{\psi}'}$	0.0021	0.0074	0.0081	0.0070
IC (90%)	(0.591, 0.598)	(0.546, 0.570)	(0.329, 0.356)	(0.161, 0.185)
$\psi'(u, \lambda)$	0.568656	0.542398	0.332780	0.168018
Temps de calcul & Nombre total de réclamations observées				
Nb de réclamations	100,000	100,000	100,000	100,000
$t_{CPU}(s)$	7.25	6.34	5.75	5.40

Tableau 5.7: Processus $X(t)$ 100 lots de longueur 1000 (modèle non-linéaire).

Probabilité de ruine $\psi(u, \lambda)$ (loi Exponentiel)				
	$u = 0$	$u = 2$	$u = 4$	$u = 6$
$\hat{\psi}(u, \lambda)$	0.622	0.269	0.109	0.041
$\hat{\sigma}_{\hat{\psi}}$	0.0026	0.0033	0.0025	0.0016
IC (90%)	(0.618, 0.627)	(0.264, 0.275)	(0.104, 0.113)	(0.038, 0.044)
$\psi(u, \lambda)$	0.619915	0.264757	0.106251	0.040303
Dérivée de la probabilité de ruine $\psi'(u, \lambda)$				
	$u = 0$	$u = 2$	$u = 4$	$u = 6$
$\hat{\psi}'(u, \lambda)$	0.597	0.566	0.349	0.174
$\hat{\sigma}_{\hat{\psi}'}$	0.0022	0.0078	0.0086	0.0073
IC (90%)	(0.593, 0.602)	(0.561, 0.572)	(0.345, 0.353)	(0.171, 0.177)
$\psi'(u, \lambda)$	0.568656	0.542398	0.332780	0.168018
Temps de calcul & Nombre total de réclamations observées				
Nb de réclamations	92,900	92,900	92,900	92,900
$t_{CPU}(s)$	7.90	6.97	6.47	6.26

Tableau 5.8: Processus $X(t)$ avec 30,000 cycles régénératifs (modèle non-linéaire).

L'efficacité de $\hat{\psi}(u, \lambda)$ (loi Exponentielle)				
	$u = 0$	$u = 2$	$u = 4$	$u = 6$
Batch	2.285766E+004	1.863291E+004	3.136589E+004	7.283707E+004
Régénérative	1.876953E+004	1.333748E+004	2.407298E+004	5.950418E+004
Importance Sampling	2.651933E+005	5.582025E+005	2.322144E+006	1.182430E+007
L'efficacité de $\hat{\psi}'(u, \lambda)$				
	$u = 0$	$u = 2$	$u = 4$	$u = 6$
Batch	3.116563E+004	2.852559E+003	2.675091E+003	3.729885E+003
Régénérative	2.727269E+004	2.369607E+003	2.091846E+003	3.032010E+003

Tableau 5.9: Tableau comparatif de l'efficacité des méthodes (modèle non-linéaire).

5.2 Loi de Weibull

Si $Y \sim \text{Weibull}(a, b)$ alors sa fonction de densité a la forme:

$$g_1(y) = ba^b y^{b-1} e^{-(ay)^b} \quad y > 0, \quad (5.9)$$

$$E[Y] = \frac{1}{a} \Gamma(1 + 1/b).$$

Choisissons $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $b = 2$. La densité en (5.9) devient:

$$g_1(y) = ye^{-\frac{y^2}{2}} \quad y > 0, \quad (5.10)$$

$$E[Y] = \sqrt{2} \Gamma(1 + 1/2) = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$\begin{aligned} M_Y(r) &= \int_0^\infty ye^{-\frac{y^2}{2} + yr} dy \\ &= 1 + r \int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2} + yr} dy = 1 + re^{\frac{r^2}{2}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(y-r)^2} dy. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Posons $z = y - r$ et faisons le changement de variable dans l'intégrale de (5.11),

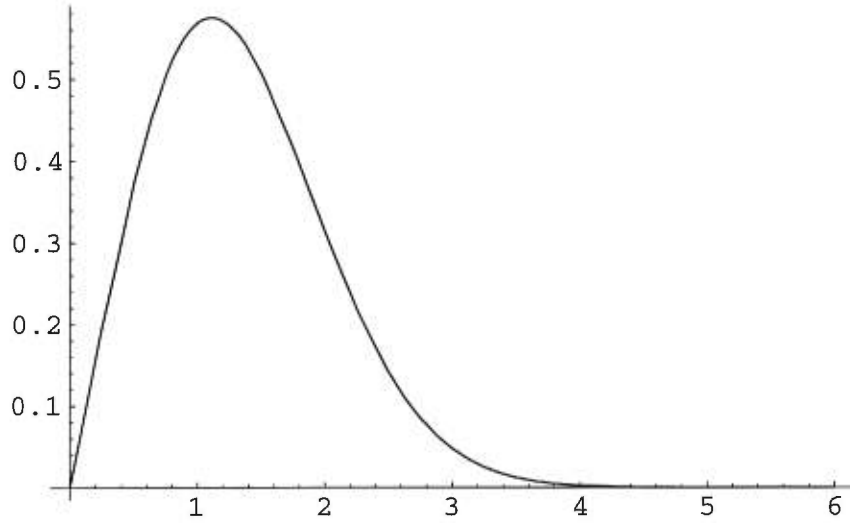


Figure 5.1: La densité $g_2(y)$.

nous obtenons:

$$M_Y(r) = 1 + re^{\frac{r^2}{2}} \int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1 + \sqrt{2\pi} \Phi(-r) re^{\frac{r^2}{2}}$$

où $\Phi(\cdot)$ est la distribution Normale(0, 1).

Les seules valeurs théoriques que l'on connaît dans ce cas sont:

$$\psi(0, \lambda) = \frac{1}{(1 + \theta)} = \frac{\lambda E[Y]}{c} = \frac{\sqrt{\pi/2}}{1.5} \simeq 0.835543,$$

$$\frac{d}{d\lambda} \psi(0, \lambda) = \frac{E[Y]}{c} = \frac{\sqrt{\pi/2}}{1.5} \simeq 0.835543.$$

5.2.1 Processus de surplus $U(t)$

Rappelons que le coefficient d'ajustement R est la solution de l'équation (1.11) de la section 1.2.1. En particulier dans notre cas, R est la solution de l'équation:

$$(1 + \theta)R = \sqrt{2\pi} \Phi(-R) R e^{\frac{R^2}{2}} \quad (5.12)$$

où $\theta = \frac{c}{\lambda EY} - 1 = \frac{1.5}{\sqrt{\pi/2}} - 1 \approx 0.19683$. En utilisant Mathematica pour résoudre (5.12), nous trouvons $R \approx 0.214272$ et $M_Y(R) \approx 1.32141$. Ainsi, d'après la section

3.2.1, nous choisissons $\lambda_0 = \lambda + cR \approx 1.321408$. Sous la probabilité \mathbf{Q} , Y a la densité

$$g_2(y) = \frac{e^{Ry}g_1(y)}{M_Y(R)} = \frac{1}{1.32141}ye^{-\frac{y^2}{2}+0.214272y}, \quad y > 0.$$

La figure 5.1 présente le graphe de g_2 . La génération de la variable Y sous la méthode d'inversion n'est pas réalisable car la formule de F^{-1} (la fonction inverse de la distribution de Y) est très complexe. Pour contourner ce problème, nous utilisons plutôt une combinaison de trois méthodes: méthode de composition, méthode d'inversion et méthode d'acceptation-rejet ([8],[19]). Commençons par la méthode d'acceptation-rejet. Cette méthode est très utile lorsque les méthodes directes (inversion, composition et convolution) ne sont pas réalisables et efficaces. Supposons que l'on veut générer Y ayant la densité g . L'idée de la méthode d'acceptation-rejet est de trouver une fonction t qui majore la densité g , i.e. $t(y) \geq g(y)$ pour tout y . En général, t n'est pas une densité car,

$$\infty > c = \int_{-\infty}^{\infty} t(y)dy \geq \int_{-\infty}^{\infty} g(y)dy = 1.$$

Soit $r(y) = t(y)/c$, il est clair que $r(y)$ est une fonction de densité. Supposons que nous pouvons générer facilement et rapidement une variable aléatoire Y ayant la densité r . L'algorithme général pour la méthode d'acceptation-rejet est la suivante [19]:

Algorithme 5.1:

1. Générer Y selon la densité r .
2. Générer $U \sim U(0, 1)$ (indépendent de Y).
3. Si $U \leq g(Y)/t(Y)$, retourner Y . Sinon aller à 1.

Cet algorithme accepte la valeur Y avec probabilité $(1/c)$ i.e. pour générer une variable aléatoire de densité g il faut générer en moyenne c variables aléatoires de densité r . Alors, il est important de choisir une fonction t telle que c est assez petit

pour que cet algorithme soit efficace. Autrement dit, t devrait être le plus près possible de g .

Dans notre cas, soulignons que la probabilité que $Y \geq 6$ est égale à 2.10^{-6} (assez peu probable) et que la ruine ne survient pas nécessairement lorsqu'il y a une réclamation $Y \geq 6$ (c'est plutôt une série rapprochée de Y qui cause la ruine) donc, on va générer des variables aléatoires Y qui suivent une distribution tronquée à 6. Choisissons

$$t(y) = \begin{cases} 0.575486 & 0 \leq y < 2 \\ -0.266460y + 0.847347 & 2 \leq y < 3 \\ -0.159885y + 0.095931 & 3 \leq y \leq 6. \end{cases}$$

En regardant la figure 5.2, on voit bien que $t(y) \geq g_2(y)$ pour $y \in [0, 6]$. Calculons

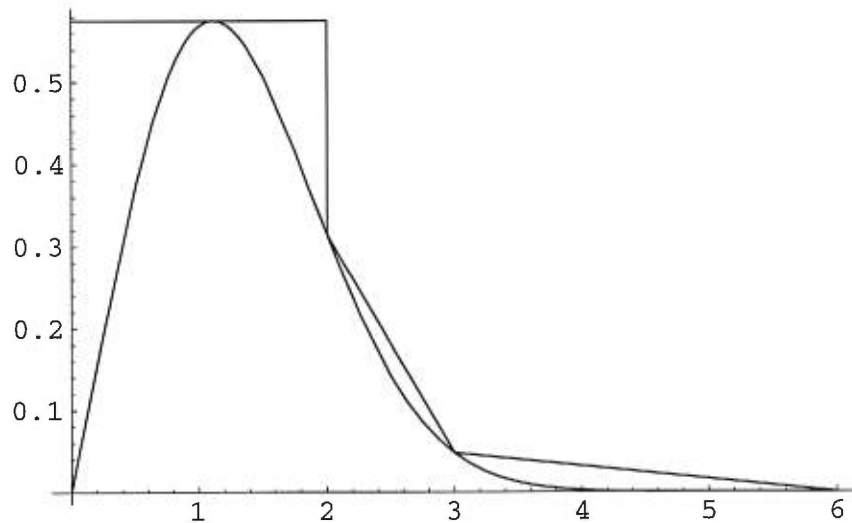


Figure 5.2: Graphe de $g_2(y)$ et $t(y)$.

maintenant c ,

$$c = \int_0^6 t(y)dy = 1.40412.$$

Ce qui implique que, l'algorithme d'acceptation-rejet accepte 71% des valeurs de Y générées dans l'étape 1 de l'algorithme 5.1.

Puisque notre densité r est une fonction linéaire par morceau alors nous ne pouvons pas appliquer directement l'algorithme 5.1 mais, nous allons plutôt combiner les

trois méthodes tel que mentionné ci-haut. Soient $I_1 = [0, 2)$, $I_2 = [2, 3)$, $I_3 = [3, 6]$. On peut représenter $r(y)$ sous forme:

$$r(y) = \sum_{j=1}^3 p_j r_j(y)$$

où $p_j = P[Y \in I_j]$, $r_j(y) = \frac{1}{p_j} r(y) \mathbf{1}_{\{I_j\}}(y)$ et

$$\mathbf{1}_{\{I_j\}}(y) = \begin{cases} 1 & \text{Si } y \in I_j \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

pour $j = 1, 2, 3$. L'idée de la méthode de composition est de générer une variable entière positive J tel que $P[J = j] = p_j$ et ensuite générer Y selon la densité r_j . Pour générer Y selon la densité r_j , nous utilisons la méthode d'inversion. L'algorithme 5.2 illustre notre méthode de génération des variables aléatoires ayant la distribution g_2 .

Algorithme 5.2:

1. Appliquer la méthode de composition afin de choisir I_j .
2. Générer Y selon $r_j(y)$.
3. Appliquer l'algorithme 5.1.

Les résultats de simulations en utilisant le processus $U(t)$ se trouvent dans le tableau 5.10. Nous pouvons constater que le comportement de ces résultats suit les mêmes tendances que pour la loi Exponentielle: $\hat{\sigma}$ devient meilleur et le temps de calcul s'allonge lorsque u augmente (car on simule davantage de réclamations) et l'efficacité croît avec u (voir tableau 5.14) .

5.2.2 Processus d'entreposage $X(t)$

Les estimateurs de $\psi(u, \lambda)$ et de $\frac{d}{d\lambda} \psi(u, \lambda)$ sous l'approche des moyennes par lots et la méthode régénérative (voir l'algorithme 3.2.1a et 3.2.2a de la section 4.1.2)

se trouvent au tableau 5.11 et tableau 5.12 respectivement. Remarquons que la simulation suit directement les algorithmes 3.2.1a et 3.2.2a sans avoir besoin du “set-up”.

5.2.3 Modèle de convolution

Lorsque le montant de réclamations suit une loi de Weibull(a, b), les variables aléatoires L_i (voir section 3.3) dans le modèle de convolution suivent la distribution suivante:

$$\begin{aligned} F_L(x) &= \frac{1}{E(Y)} \int_0^x (1 - G(y)) dy \\ &= \frac{a}{\Gamma(1 + \frac{1}{b})} \int_0^x e^{-(ay)^b} dy. \end{aligned}$$

En particulier, posons $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $b = 2$,

$$F_L(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 2[\Phi(y) - 0.5]. \quad (5.13)$$

Générer une variable aléatoire ayant la distribution en (5.13) est équivalent à générer une variable aléatoire ayant la distribution Normale(0, 1) et prendre sa valeur absolue. Le tableau 5.13 présente les résultats de nos estimateurs avec la méthode de convolution.

5.2.4 Tableau d’efficacité:

L’efficacité de nos estimateurs est présentée au tableau 5.14. Remarquons que le comportement de nos résultats dans ce cas (Weibull) est très semblable au cas de la loi Exponentielle (voir les commentaires dans la section précédente). Ce qui implique que, lorsque la fonction génératrice des moments du montant des réclamations existe, indépendamment de l’application, nous pouvons toujours utiliser l’une des quatre approches afin d’estimer la probabilité de ruine ainsi que sa dérivée par rapport au taux d’arrivée des réclamations.

Probabilité de ruine $\psi(u, \lambda)$ (loi Weibull)				
	$u = 0$	$u = 2$	$u = 4$	$u = 6$
$\hat{\psi}(u, \lambda)$	0.838	0.569	0.370	0.241
$\hat{\sigma}_{\hat{\psi}}$	0.0018	0.0010	0.0007	0.0005
IC (90%)	(0.835,0.841)	(0.568,0.571)	(0.369,0.371)	(0.240,0.242)
$\psi(u, \lambda)$	0.835543	-	-	-
Dérivée de la probabilité de ruine $\psi'(u, \lambda)$				
	$u = 0$	$u = 2$	$u = 4$	$u = 6$
$\hat{\psi}'(u, \lambda)$	0.894	1.728	1.935	1.863
$\hat{\sigma}_{\hat{\psi}'}$	0.0603	0.0551	0.0517	0.0405
IC (90%)	(0.795,0.993)	(1.637,1.818)	(1.850,2.020)	(1.796,1.929)
$\psi'(u, \lambda)$	0.835543	-	-	-
Temps de calcul & Nombre total de réclamations observées				
Nb de réclamations	15,025	43,589	76,086	110,386
$T_{CPU}(s)$	1.83	3.79	5.59	7.34

Tableau 5.10: Processus $U(t)$ avec IS: 3,500 répétitions.

Probabilité de ruine $\psi(u, \lambda)$ (loi Weibull)				
	$u = 0$	$u = 2$	$u = 4$	$u = 6$
$\hat{\psi}(u, \lambda)$	0.833	0.563	0.363	0.236
$\hat{\sigma}_{\hat{\psi}}$	0.0029	0.0060	0.0071	0.0072
IC (90%)	(0.829,0.838)	(0.553,0.573)	(0.351,0.375)	(0.224,0.247)
$\psi(u, \lambda)$	0.835543	-	-	-
Dérivée de la probabilité de ruine $\psi'(u, \lambda)$				
	$u = 0$	$u = 2$	$u = 4$	$u = 6$
$\hat{\psi}'(u, \lambda)$	0.822	1.666	1.846	1.702
$\hat{\sigma}_{\hat{\psi}'}$	0.0034	0.0270	0.0516	0.0679
IC (90%)	(0.817,0.828)	(1.622,1.711)	(1.761,1.932)	(1.590,1.815)
$\psi'(u, \lambda)$	0.835543	-	-	-
Temps de calcul & Nombre total de réclamations observées				
Nb de réclamations	100,000	100,000	100,000	100,000
$T_{CPU}(s)$	4.20	4.28	4.02	3.81

Tableau 5.11: Processus $X(t)$ 100 lots de longueur 1000.

Probabilité de ruine $\psi(u, \lambda)$ (loi Weibull)				
	$u = 0$	$u = 2$	$u = 4$	$u = 6$
$\hat{\psi}(u, \lambda)$	0.838	0.574	0.376	0.247
$\hat{\sigma}_{\hat{\psi}}$	0.0031	0.0068	0.0086	0.0089
IC (90%)	(0.833,0.843)	(0.563,0.586)	(0.362,0.390)	(0.232,0.261)
$\psi(u, \lambda)$	0.835543	-	-	-
Dérivée de la probabilité de ruine $\psi'(u, \lambda)$				
	$u = 0$	$u = 2$	$u = 4$	$u = 6$
$\hat{\psi}'(u, \lambda)$	0.838	1.725	1.936	1.806
$\hat{\sigma}_{\hat{\psi}'}$	0.0031	0.0333	0.0586	0.0777
IC (90%)	(0.833,0.843)	(1.671,1.780)	(1.840,2.032)	(1.678,1.934)
$\psi'(u, \lambda)$	0.835543	-	-	-
Temps de calcul & Nombre total de réclamations observées				
Nb de Réclamations	92,771	92,771	92,771	92,771
$T_{CPU}(s)$	4.02	4.04	3.86	3.70

Tableau 5.12: Processus $X(t)$ avec la méthode régénérative: 15,000 cycles.

Probabilité de ruine $\psi(u, \lambda)$ (loi Weibull)				
	$u = 0$	$u = 2$	$u = 4$	$u = 6$
$\hat{\psi}_U(u)$	0.834	0.564	0.367	0.241
$\hat{\sigma}_{\hat{\psi}}$	0.0026	0.0035	0.0034	0.0030
IC (90%)	(0.830,0.838)	(0.559,0.569)	(0.361,0.373)	(0.236,0.246)
$\psi(u, \lambda)$	0.835543	-	-	-
Dérivée de la probabilité de ruine $\psi'(u, \lambda)$				
	$u = 0$	$u = 2$	$u = 4$	$u = 6$
$\hat{\psi}'_U(u)$	0.799	1.669	1.930	1.798
$\hat{\sigma}_{\hat{\psi}'}$	0.036	0.032	0.030	0.030
IC (90%)	(0.740,0.857)	(1.635,1.740)	(1.880,1.980)	(1.748,1.848)
$\psi'(u, \lambda)$	0.835543	-	-	-
Temps de calcul & Nombre total de réclamations observées				
Nb de réclamations	100,718	100,718	100,718	100,718
$T_{CPU}(s)$	1.30	1.36	1.38	1.39

Tableau 5.13: Modèle de convolution : 20,000 répétitions.

L'efficacité de $\hat{\psi}(u, \lambda)$				
	$u = 0$	$u = 2$	$u = 4$	$u = 6$
Batch	2.895969E+004	6.455331E+003	4.494609E+003	4.555316E+003
Régénérative	2.639342E+004	5.267674E+003	3.511740E+003	3.404020E+003
Importance Sampling	1.597594E+005	2.345971E+005	3.581385E+005	6.387824E+005
Convolution	1.111196E+005	5.978795E+004	6.238202E+004	7.867879E+004
L'efficacité de $\hat{\psi}'(u, \lambda)$				
	$u = 0$	$u = 2$	$u = 4$	$u = 6$
Batch	2.241181E+004	3.690336E+002	1.108297E+002	6.550871E+001
Régénérative	2.639342E+004	2.230509E+002	7.551788E+001	4.477315E+001
Importance Sampling	1.440935E+002	8.367740E+001	6.413453E+001	7.970861E+001
Convolution	6.034551E+002	7.318650E+002	7.861129E+002	7.846955E+002

Tableau 5.14: Tableau comparatif de l'efficacité des méthodes (loi de Weibull($\frac{1}{\sqrt{2}}, 2$)).

5.3 Loi de Pareto

Ce modèle est important parce qu'il s'ajuste bien à certaines données historiques. Mais cette distribution ne possède pas de fonction génératrice des moments donc, la simulation devient un outil important.

Si $Y \sim \text{Pareto}(a)$ alors sa fonction de densité a la forme:

$$g_1(y) = \frac{a}{(1+y)^{a+1}} \quad y > 0, a > 0. \quad (5.14)$$

$$E[Y] = \frac{1}{a-1} \quad a \neq 1.$$

Soulignons que la fonction génératrice des moments de Y n'existe pas. Pour générer Y , nous utilisons la méthode d'inversion.

$$F_1(y) = \int_0^y \frac{a}{(1+x)^{a+1}} dx = - \int_0^y \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{(1+x)^a} \right] dx = 1 - \frac{1}{(1+y)^a}.$$

Soit $U = F_1(Y)$, où $U \sim U(0, 1)$ alors,

$$U = 1 - \frac{1}{(1+Y)^a} \implies Y = (1-U)^{-1/a} - 1. \quad (5.15)$$

Prenons $a = 2$, (5.14) et $E[Y]$ deviennent:

$$g_1(y) = \frac{2}{(1+y)^3} \quad y > 0,$$

$$E[Y] = 1.$$

Notons que $E[Y^2] = \infty$, ce qui implique que la variance est infinie. Les valeurs théoriques que l'on connaît dans ce cas sont:

$$\psi(0, \lambda) = \frac{1}{(1+\theta)} = \frac{\lambda E[Y]}{c} = \frac{1}{1.5} \simeq 0.666667,$$

$$\frac{d}{d\lambda} \psi(0, \lambda) = \frac{E[Y]}{c} = \frac{\sqrt{\pi/2}}{1.5} \simeq 0.666667.$$

5.3.1 Processus de surplus $U(t)$

La fonction génératrice des moments n'existe pas pour une variables aléatoire qui suit la distribution Pareto donc, comme nous avons mentionné à la fin de la section 3.1.2, nous devons nous contenter de choisir $\alpha = \frac{(\lambda_0 - \lambda)}{c}$ avec $\lambda_0 > \frac{c}{E_{\mathbf{Q}}(Y)}$ et $g_2(y) = g_1(y)$. Le rapport de vraisemblance (voir section 3.1.2, l'égalité (3.4)) a la forme:

$$L(\tilde{\mathbf{P}}, \mathbf{Q}, \omega) = \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^\tau \exp\{(\lambda_0 - \lambda)T_\tau\}$$

et, l'égalité (4.5) devient:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda}\psi(u, \lambda) &= E_{\lambda_0} \left\{ \frac{\tau(0)}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^{\tau(0)} \exp[(\lambda_0 - \lambda)T_{\tau(0)}] - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\lambda_0} \sum_{j=1}^{\tau(0)} \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^{\tau(j)} \exp[(\lambda_0 - \lambda)T_{\tau(j)}] \right\}. \end{aligned}$$

Bien que cette méthode donne des estimateurs non-biaisés, le choix de λ_0 est un problème ouvert car, la variance de l'estimateur peut devenir importante. Nous avons fait plusieurs simulations préliminaires pour estimer la variance en fonction de λ_0 et nous avons constaté que les résultats sont très instables pour des grandes valeurs de λ_0 . Finalement, basé sur ces tests préliminaires, nous choisissons $\lambda_0 = 1.84$.

Lorsque la fonction génératrice des moments du montant des réclamations n'existe pas, l'estimation de $\psi(u, \lambda)$ et de $\frac{d}{d\lambda}\psi(u, \lambda)$ à l'aide de $U(t)$ avec le changement de mesure mentionné ci-haut n'est pas fiable, ce cas reste donc un sujet ouvert.

5.3.2 Processus d'entreposage $X(t)$

Les estimateurs de $\psi(u, \lambda)$ et de $\frac{d}{d\lambda}\psi(u, \lambda)$ sous l'approche des moyennes par lots et la méthode régénérative se trouvent au tableau 5.16 et au tableau 5.17 respectivement. Dans ce cas, d'après plusieurs tests, nous choisissons la taille du lot à 5,000 afin de s'assurer de l'indépendance (approximative) entre les lots. Encore une fois, on remarque que:

1. Le temps de CPU est inversement proportionnel à u . La méthode régénérative prend un peu plus de temps que les moyennes par lots.
2. La variance augmente avec u : l'estimation devient plus difficile.

5.3.3 Modèle de convolution

Lorsque le montant de réclamations suit la distribution Pareto(a), les variables aléatoires L_i dans le modèle de convolution suivent la distribution suivante:

$$\begin{aligned}
 F_L(x) &= \frac{1}{\mathbb{E}(Y)} \int_0^x (1 - G(y)) dy \\
 &= (a - 1) \int_0^x \frac{1}{(1 + y)^a} dy \\
 &= \int_0^x \frac{(a - 1)}{(1 + y)^a} dy \sim \text{Pareto}(a - 1).
 \end{aligned}$$

En particulier, lorsque $a = 2$, d'après (5.15), on génère $L_i = \frac{1}{1 - U_i} - 1 = \frac{U_i}{1 - U_i}$.
Remarquons que dans ce cas, $\mathbb{E}[L_i] = \infty$.

Nos résultats de simulation se trouvent au tableau 5.18.

5.3.4 Tableau d'efficacité:

L'efficacité de nos estimateurs est présentée au tableau 5.19. A l'exception de la méthode du changement de mesure, les trois autres méthodes fonctionnent très bien. La méthode de convolution est encore une fois très stable, de plus, elle domine les autres méthodes au niveau de l'efficacité.

Probabilité de ruine $\psi(u, \lambda)$ (loi Pareto)				
	$u = 0$	$u = 2$	$u = 4$	$u = 6$
$\hat{\psi}_U(u)$	0.634	0.339	0.223	0.217
$\hat{\sigma}_{\hat{\psi}}$	0.032	0.0168	0.0116	0.0417
IC (90%)	(0.582, 0.687)	(0.311, 0.367)	(0.204, 0.242)	(0.149, 0.286)
$\psi(u, \lambda)$	0.66667	-	-	-
Dérivée de la probabilité de ruine $\psi'(u, \lambda)$				
	$u = 0$	$u = 2$	$u = 4$	$u = 6$
$\hat{\psi}'_U(u)$	1.329	1.284	1.039	1.775
$\hat{\sigma}_{\hat{\psi}'}$	0.1794	0.1038	0.0860	0.6304
IC (90%)	(1.034, 1.625)	(1.113, 1.455)	(0.898, 1.181)	(0.738, 2.812)
$\psi'(u, \lambda)$	0.66667	-	-	-
Temps de calcul & Nombre total de réclamations observées				
Nb de réclamations	161,800	322,700	417,000	513,600
$T_{CPU}(s)$	4.24	9.45	12.42	16.06

Tableau 5.15: Processus $U(t)$ avec IS: 3,500 répétitions.

Probabilité de ruine $\psi(u, \lambda)$ (loi Pareto)				
	$u = 0$	$u = 2$	$u = 4$	$u = 6$
$\hat{\psi}_U(u)$	0.668	0.448	0.350	0.286
$\hat{\sigma}_{\hat{\psi}}$	0.0081	0.0136	0.0163	0.0180
IC (90%)	(0.654, 0.682)	(0.425, 0.471)	(0.321, 0.378)	(0.255, 0.318)
$\psi(u, \lambda)$	0.66667	-	-	-
Dérivée de la probabilité de ruine $\psi'(u, \lambda)$				
	$u = 0$	$u = 2$	$u = 4$	$u = 6$
$\hat{\psi}'_U(u)$	0.667	0.780	0.744	0.689
$\hat{\sigma}_{\hat{\psi}'}$	0.0081	0.0156	0.0217	0.0312
IC (90%)	(0.653, 0.681)	(0.753, 0.807)	(0.707, 0.782)	(0.635, 0.743)
$\psi'(u, \lambda)$	-	-	-	-
Temps de calcul & Nombre total de réclamations observées				
Nb de réclamations	100,000	100,000	100,000	100,000
$T_{CPU}(s)$	4.71	4.60	4.55	4.48

Tableau 5.16: Processus $X(t)$ 20 lots de longueur 5,000.

Probabilité de ruine $\psi(u, \lambda)$ (loi Pareto)				
	$u = 0$	$u = 2$	$u = 4$	$u = 6$
$\hat{\psi}_U(u)$	0.668	0.448	0.348	0.285
$\hat{\sigma}_{\hat{\psi}}$	0.0097	0.0159	0.0184	0.0199
IC (90%)	(0.653, 0.685)	(0.422, 0.474)	(0.318, 0.379)	(0.252, 0.318)
$\psi(u, \lambda)$	0.66667	-	-	-
Dérivée de la probabilité de ruine $\psi'(u, \lambda)$				
	$u = 0$	$u = 2$	$u = 4$	$u = 6$
$\hat{\psi}'_U(u)$	0.668	0.781	0.741	0.686
$\hat{\sigma}_{\hat{\psi}'}$	0.0097	0.0224	0.0281	0.0361
IC (90%)	(0.653, 0.685)	(0.744, 0.818)	(0.682, 0.890)	(0.627, 0.745)
$\psi'(u, \lambda)$	-	-	-	-
Temps de calcul & Nombre total de réclamations observées				
Nb de réclamations	90,783	90,783	90,783	90,783
$T_{CPU}(s)$	5.14	5.03	4.96	4.90

Tableau 5.17: Processus $X(t)$ avec la méthode régénérative: 30,000 cycles.

Probabilité de ruine $\psi(u, \lambda)$ (loi Pareto)				
	$u = 0$	$u = 2$	$u = 4$	$u = 6$
$\hat{\psi}_U(u)$	0.665	0.446	0.345	0.283
$\hat{\sigma}_{\hat{\psi}}$	0.0021	0.0022	0.0021	0.0020
IC (90%)	(0.661, 0.668)	(0.442, 0.449)	(0.342, 0.349)	(0.280, 0.287)
$\psi(u, \lambda)$	0.66667	-	-	-
Dérivée de la probabilité de ruine $\psi'(u, \lambda)$				
	$u = 0$	$u = 2$	$u = 4$	$u = 6$
$\hat{\psi}'_U(u)$	0.668	0.789	0.756	0.703
$\hat{\sigma}_{\hat{\psi}'}$	0.0092	0.0088	0.0086	0.0085
IC (90%)	(0.653, 0.683)	(0.775, 0.804)	(0.742, 0.771)	(0.689, 0.717)
$\psi'(u, \lambda)$	-	-	-	-
Temps de calcul & Nombre total de réclamations observées				
Nb de réclamations	99,848	99,848	99,848	99,848
$T_{CPU}(s)$	1.59	1.60	1.61	1.62

Tableau 5.18: Modèle de convolution : 50,000 répétitions.

L'efficacité de $\hat{\psi}(u, \lambda)$				
	$u = 0$	$u = 2$	$u = 4$	$u = 6$
Batch	3.278020E+003	1.183515E+003	8.313151E+002	6.857238E+002
Régénérative	2.045485E+003	7.892965E+002	5.955043E+002	5.156055E+002
Importance Sampling	2.304064E+002	3.730543E+002	6.029138E+002	3.587394E+001
Convolution	1.437849E+005	1.234096E+005	1.373452E+005	1.529115E+005
L'efficacité de $\hat{\psi}'(u, \lambda)$				
	$u = 0$	$u = 2$	$u = 4$	$u = 6$
Batch	3.257185E+003	8.917257E+002	4.646996E+002	2.289014E+002
Régénérative	2.045485E+003	3.961051E+002	2.544482E+002	1.562903E+002
Importance Sampling	7.327082E+000	9.823230E+000	1.089034E+001	1.566950E-001
Convolution	7.596853E+003	7.912417E+003	8.318455E+003	8.602540E+003

Tableau 5.19: Tableau comparatif de l'efficacité des méthodes (loi de Pareto(2)).

5.4 Conclusion:

Soulignons que le but de ce travail n'est pas de démontrer qu'une des approches de simulation utilisées, ou qu'un modèle parmi nos trois modèles, est meilleur que les autres. Nous voulons plutôt présenter l'implantation de nos systèmes sous plusieurs approches de simulations afin d'estimer la probabilité de ruine ainsi que sa dérivée par rapport à λ . Chaque implantation a des avantages ainsi que des inconvénients. Donc, selon l'application, les lecteurs pourraient choisir l'implantation qui leur convient:

1. $U(t)$ avec IS:

Avantages:

Pourvu que la fonction génératrice des moments du montant des réclamations existe et que les distributions équivalentes soient faciles à générer:

- Très efficace lors des cas difficiles (u est grand).
- La variance de l'estimateur est réduite.

Inconvénients:

- Demande du temps pour les calculs préliminaires (Set-up time).

En plus, la génération des montants de réclamation sous la nouvelle mesure doit-être optimisée pour ne pas augmenter le temps de calculs (voir le cas Weibull de la section 5.2.1).

- Lorsque la fonction génératrice des moments du montant des réclamations n'existe pas, le changement de mesure optimal n'est pas évident (voir les résultats dans le cas Pareto de la section 5.3) et reste un sujet de recherche ouvert.

2. $X(t)$ avec Moyennes par lot & Méthode régénérative:

Avantages:

- L'estimation de $\psi(u, \lambda)$ et $\frac{d}{d\lambda}\psi(u, \lambda)$ à l'aide du processus $X(t)$

sous l'approche des moyennes par lot et la méthode régénérative se sont faites sans trop de difficulté.

- Domaine d'application le plus large.
- Ces deux approches sont robustes dans le sens que nous n'avons qu'à générer $\{Y_i\}$ selon la distribution désirée sans faire des calculs préliminaires. Ceci nous permet donc d'utiliser même des distributions empiriques avec des données historiques.

Inconvénient:

- L'efficacité est légèrement moins bonne que les autres approches.

3. Modèle de convolution:

Avantages:

- Le plus stable parmi nos trois modèles.
- L'efficacité est généralement élevée.

Inconvénients:

- Cependant, il n'est pas toujours facile de générer les variables aléatoires L_i (voir section 4.2). Cela nous demande des calculs préliminaires (set-up) et aussi il faut trouver une méthode efficace afin de générer $\{L_i\}$.
- Ne s'applique que pour le cas linéaire.

Remerciements

Ce mémoire a pu être mené à bien grâce à la présence, aux conseils et aux encouragements de plusieurs personnes; c'est pourquoi je tiens à leur témoigner ici ma profonde gratitude.

Je remercie ma directrice de recherche Dr. Felisa J. Vázquez-Abad dont les qualités scientifiques et humaines ont été grandement appréciées. Merci à Dr. Daniel Dufresne pour avoir eu la gentillesse de répondre à quelques-unes de mes questions malgré ses nombreuses obligations.

Deux années en maîtrise ne pouvaient se passer sans que des liens d'amitié ne se tissent. Aussi, je tiens à remercier Richard Simard, Raphaël Bean, Michael Mahut, Mohamed A. Shiri, Yolanda Noriega pour leurs encouragements, Yanick Champoux pour ses conseils informatiques donnés avec tant de générosité et Marie-Ève Racicot, Huguette Beaulieu, Christiane Lemieux dont l'amitié a été un réconfort.

Enfin, une pensée particulière est adressée à ma famille. Son soutien tant financier que moral a été essentiel.

Bibliographie

- [1] S. Asmussen (1987) *Applied Probability and Queues*. John Wiley & Sons.
- [2] S. Asmussen & Hanne Mandrup Nielsen (1995) “Ruin Probabilities via Local Adjustment Coefficients”, *J. Appl. Prob.* **33**, 736-755.
- [3] S. Asmussen & Soren Schock Petersen (1988) “Ruin Probabilities Expressed in Terms of Storage Processes”, *Adv. Appl. Prob.* **20**, 913-916.
- [4] J. A. Beekman (1974) *Two Stochastic Processes*. Almquist & Wiksell International, Sweden.
- [5] P. Billingsley (1986) *Probability and Measure*. John Wiley & Sons, Inc.
- [6] P. Billingsley (1968) *Convergence of Probability Measures*. John Wiley & Sons, Inc.
- [7] P. P. Boyle, S. H. Cox, D. Dufresne, H. U. Gerber, H. H. Mueller, H. W. Pederson, S. R. Pliska, M. Sherris, E. S. Shiu, K. S. Tan (1998). “Appendix on Probability Theory.” *Financial Economics: With Applications to Investments, Insurance and Pensions*. H. Panjer, Editor. The Actuarial Foundation.
- [8] P. Bratley, B. L. Fox & L. E. Schrage (1987) *A Guide to Simulation*. Second Edition, Springer-Verlag New York Inc.

- [9] P. Brémaud & F.J. Vázquez-Abad (1992) “ On the Pathwise Computation of Derivatives with Respect to the rate of a Point Process: The Phantome RPA Methode”, *Queueing Systems*, 10: 249-270.
- [10] N. L. Bowers, H. U. Gerber, J. C. Hickman, D. A. Jones, C. J. Nesbitt (1986) *Actuarial Mathematics*. Society of Actuaries.
- [11] G. Casella & R. L. Berger (1990) *Statistical Inference*. Wadsworth & Brooks/code, Statistics/Probability Series.
- [12] F. Dufresne & H.U. Gerber (1989) “ Three methods to calculate the probability of ruin ”. *ASTIN BULLETIN*, **19**, 71-90.
- [13] H. U. Gerber (1979) *An Introduction to Mathematical Risk Theory*. S. S. Huebner Foundation for Insurance Education, Wharton School, University of Pennsylvania, Philadelphia.
- [14] P. Glynn (1987) “Likelihood Ratio Gradient Estimation: An Overview”, *Proceeding of the 1987 Winter Simulation Conference*, p.336-375.
- [15] K. J. Hastings (1997) *Probability and Statistics*. Addison-Wesley.
- [16] Wolf-Rüdiger Heilmann (1988) *Fundamentals of Risk Theory*. VVW Karlsruhe.
- [17] P.G. Hoel , S.C. Port & C.J. Stone (1972) *Introduction to stochastic processes*. Houghton Mifflin, Boston.
- [18] H. J. Larson (1973) *Introduction to the Theory of Statistics*. John Wiley & Sons, Inc.
- [19] A. M. Law & W. David Kelton (1991) *Simulation Modeling & Analysis*. McGraw-Hill, Inc.

- [20] A. M. Law & J. S. Carson (1979) *A Sequential Procedure for Determining the Length of a Steady-State Simulation*. *Operations Res.*, 27: 1011-1025.
- [21] P. L'Ecuyer (1994) "Efficiency Improvement and Variance Reduction ". Proceedings of 1994 Winter Simulation Conference, 122-132
- [22] P. L'Ecuyer (1993) " SIMOD: Définition fonctionnelle et guide d'utilisation". Rapport technique #221, dép. IRO de l'Université de Montréal.
- [23] F. Michaud (1996) "Estimating The Probability of Ruin for Variable Premiums by Simulation". *ASTIN BULLETIN*, vol. 26, No. 1, 93-105.
- [24] J. A. Payne (1982) *Introduction to simulation. Programming techniques and methodes of analysis* McGraw-Hill, Inc.
- [25] H. H. Panjer, G. E. Willmot (1992) *Insurance Risk Models*. Society of Actuaries.
- [26] J. Pitman (1993) *Probability*. Springer-Verlag, New York.
- [27] C.O. Sergerdahl (1942) "Über einige risikothoretische Fragestellungen". *Scandinavian Actuarial Journal*, 25, 43-83.
- [28] R.E. Shannon (1975) *System Simulation: The art and Science*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- [29] S. M. Ross (1983) *Stochastic processes*. Wiley series in probability and mathematical statistics.
- [30] S. M. Ross (1993) *Introduction to Probability Models*. Academic Press, San Diego, California.
- [31] H. M. Taylor & S. Karlin (1994) *An Introduction to Stochastic Modeling*. Academic Press, San Diego, California.

- [32] F. J. Vázquez-Abad (1992) "Sensitivity Analysis for Stochastic DEDS: an Overview". *Aportaciones Matemáticas Notas de Investigación* 7, pages 163-182.
- [33] F. J. Vázquez-Abad (1997) "Pathwise Derivative Estimation of Ruin Probabilities". *Insurance Mathematics and Economics*.
- [34] F. Etienne de Vylder (1996) *Advanced Risk Theory*. Editions de L'Université de Bruxelles.