Université de Montréal

La notion d'obstacle en formation des maîtres :
une réalisation didactique fondée sur l'algèbre égyptienne

par

Kathleen Quesnel

Département de Didactique

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
En vue de l'obtention du grade de M.A.
Didactique des mathématiques

Juin, 2002

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé :

La notion d'obstacle en formation des maîtres : une réalisation didactique fondée sur l'algèbre égyptienne

présenté par :

Kathleen Quesnel

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Ewa Puchalska

président rapporteur

Sophie René de Cotret

directrice de recherche

Gisèle Lemoyne

membre du jury

RÉSUMÉ :

Lors de l'élaboration de séquences d'enseignement en mathématiques, il est important de tenir compte des difficultés des élèves ainsi que des obstacles qu'ils peuvent rencontrer. Mais qu'est-ce qu'un obstacle ? Comment le traiter ? Les enseignants sont-ils formés pour repérer et traiter des obstacles ? Les questions ci-dessus seront traitées à partir de la description et l'analyse d'une expérimentation menée auprès d'étudiants-maîtres au baccalauréat en enseignement au secondaire. Le but de cette expérimentation est de sensibiliser les étudiants-maîtres à la notion d'obstacle. Pour ce faire, nous avons voulu leur faire vivre un obstacle en leur proposant une activité fondée sur les mathématiques égyptiennes. L'histoire, de par sa fonction dépaysante nous a permis de les déstabiliser suffisamment pour leur faire ressentir l'obstacle. Une comparaison sera faite entre les résultats obtenus auprès des étudiants-maîtres et ceux obtenus auprès d'enseignants s'étant prêtés à la même expérimentation. Nous verrons que l'obstacle peut être très résistant et que la didactique n'échappe pas à ses propres théories. Il faut donc tenir compte de ce qui fait obstacle à la compréhension de la notion d'obstacle. Finalement, nous verrons les modifications que notre expérimentation a suscitées au niveau des conceptions des étudiants-maîtres face à la notion d'obstacle.

MOTS CLÉS : Didactique, mathématiques, obstacle, conceptions inadéquates, difficultés, erreurs, histoire, Égypte, formation des maîtres

ABSTRACT :

While elaborating new mathematical teaching routines, it is important to consider the difficulties and obstacles encountered by students. But what is an obstacle ? How is it dealt with ? Are teachers adequately formed to notice and properly deal with obstacles ? The above questions will be treated in the following description and analysis of an experience using student-masters of the BES as subjects. The purpose of the experience is to heighten the student-masters' awareness of the notion of obstacle. In order to achieve that goal, we led them to experiment an obstacle using Egyptian mathematics. The disorienting characteristics of the use of historical context allowed us to destabilize them enough for them to feel the « obstacle ». A comparative evaluation will also be done between the results of the student-masters and those of the teachers that also underwent the same experience. We will see that the obstacle can be very resistant and that even didactic itself cannot escape its own theories. Therefor, we have to consider what is being an obstacle to the understanding of the notion of obstacle. Finally, we will see how the students-masters' conception of the notion of obstacle was altered by our experimentation.

KEYWORDS: Didactic, mathematics, obstacle, misconceptions, errors, difficulties, history, Egypt, teacher's training

Table des matières

INTRODUCTION 1

CHAPITRE 1 : PROBLÉMATIQUE 4

CHAPITRE 2 : CADRE THÉORIQUE 11

Première partie 12

2.1. La formation des maîtres 12

2.2. Didactique des mathématiques 15

2.3. Notion d'obstacle 17

2.3.1. Définition 17

2.3.2. Identification de l'obstacle 18

2.3.3. Traitement de l'obstacle 20

2.3.4. Comment prévoir l'obstacle 21

2.3.5. Analyse épistémologique de la notion d'obstacle 23

2.4. Histoire des mathématiques en enseignement 25

Deuxième partie 27

2.5. Histoire de l'algèbre (considérations épistémologiques) 27

2.5.1. Contexte historique et socio-économique 28

2.5.2. L'écriture égyptienne 29

2.5.3. Les fractions 31

2.5.4. Le Papyrus Rhind 33

2.5.5. Techniques de calcul égyptien 35

2.6. Obstacles en algèbre 38

2.6.1. Le symbole d'égalité 40

2.6.2. Les symboles littéraux 41
2.6.3. Inverse ou opposé 43
2.6.4. Le zéro 43
2.6.5. Les trois types d'approches dans la résolution algébrique 43
2.7. L'objectif 45

CHAPITRE 3 : MÉTHODOLOGIE 47
3.1. L'analyse des préalables 50
3.1.1. L'analyse des conceptions des élèves, des difficultés et des obstacles qui marquent leur évolution 50
3.1.2. Analyse du champ de contraintes 55
3.2. Conception et analyse a priori 56
3.2.1. Algèbre 56
3.2.2. L'époque 58
3.2.3. Les problèmes égyptiens 60
3.2.4. Enseignement des outils de base 64
3.2.5. Cueillette des données 65
3.2.6. Analyse a priori 67
3.3. Préexpérimentation 70

CHAPITRE 4 : ANALYSE A POSTERIORI 72
4.1. Expérimentation I : description du déroulement 73
4.2. Analyse approfondie des résultats 82
4.2.1 Erreurs mathématiques 83
4.2.2 Erreurs historiques 91
4.3. Analyse des études de cas 97

CHAPITRE 5 : ÉVALUATION ET MODIFICATIONS 102

5.1. Conception de l'expérimentation II 104

5.2. Déroulement et analyse de l'expérimentation II 108

5.2.1. Situation de mobilisation et de formulation 109

5.2.2. Atelier de résolution de problèmes égyptiens 111

5.2.3. Retour sur l'activité et discussion en plénière 116

5.2.4. Évaluation des effets de notre deuxième expérimentation 122

CONCLUSION 124

BIBLIOGRAPHIE 128

Liste des tableaux

Tableau I : Degré de satisfaction des répondants et répondantes par rapport à l'ensemble de la formation suivie au BES (n= 337) 6

Tableau II : Proportions de personnes en accord avec des énoncés portant sur la formation suivie dans les départements disciplinaires (%)* 6

Tableau III : Proportions de personnes disant qu'il leur est facile d'accomplir des actions liées à la maîtrise de la matière enseignée (n=353) (%) 8

Tableau IV : Symboles égyptiens pour les nombres de 1 à 9 000.......................30

Tableau V : Conception de l'expérimentation I 57

Tableau VI : Erreurs mathématiques...90

Tableau VII : Erreurs historiques...96

Tableau VIII : Comparaison des expérimentations I et II...............................105

Tableau IX : Le traitement de l'obstacle, du concret au général......................110

Liste des figures

Figure 1 : Fragment d'une peinture ornant une stèle 29
Figure 2 : Hiéroglyphes des fractions du hekat 32
Figure 3 : Hiéroglyphes des fractions du setat 32
Figure 4 : Fractions unitaires les plus utilisées dans le Papyrus Rhind 32
Figure 5 : Page titre du Papyrus Rhind 34
Figure 6 : Dénombrement d'objets dans des ensembles 40

Liste des annexes

Annexe 1 : Transformation de fractions en fractions unitaires xv

Annexe 2 : Les règles dans l'élaboration de la table de 2/n xvi

Annexe 3 : Entrevue avec François xvii

Annexe 4 : Étude de cas xix

Annexe 5 : Problèmes tirés du Papyrus Rhind xxii

Annexe 6 : Exercices de multiplication et de division égyptiennes xxvii

Annexe 7 : Analyse comparative des études de cas xxviii

Annexe 8 : Mise en situation et formation sur les mathématiques égyptiennes (expérimentation II). xliii

Liste des sigles et des abréviations

Av. J.-C. : avant Jésus-Christ

c.-à-d. : c'est-à-dire

BES : Baccalauréat en enseignement au secondaire

DID 4545 : Didactique des mathématiques au secondaire 2

I.R.E.M. : Institut de recherche pour l'enseignement des mathématiques

MEQ: Ministère de l'éducation du Québec

Remerciements

À tous ceux qui ont joué un rôle important dans la réalisation de ce projet, je tiens à vous témoigner ma reconnaissance.

D'abord, j'aimerais remercier tout particulièrement ma directrice de recherche, Sophie René de Cotret, pour m'avoir appuyée dans ce projet. Malgré son horaire chargé, elle a toujours su trouver du temps pour m'écouter et me conseiller judicieusement. Elle a fait preuve d'une grande ouverture d'esprit face à mes idées parfois farfelues et a accepté de me suivre dans ce projet en me laissant toute la latitude nécessaire. Merci pour la confiance que tu m'as accordée.

Merci aux enseignants de troisième secondaire du Collège Laval, qui ont pris du temps en classe avec leurs élèves pour passer le questionnaire qui m'a servi à élaborer l'étude de cas. Merci également aux trois enseignants qui ont participé à la préexpérimentation.

Le présent travail n'aurait pu se faire sans la participation des étudiants-maîtres inscrits au cours de DID4545 à l'Université de Montréal. Merci à tous pour le temps et les efforts que vous avez investis lors de la première expérimentation.

Je ne saurais oublier de remercier les quatre participants qui ont bien voulu se lever un samedi matin et venir passer la journée avec moi pour se prêter à ma deuxième expérimentation. Votre participation a été grandement appréciée.

Merci à Denise et Véronique pour avoir pris le temps de me lire. Un merci particulier à Gislaine Coulombe pour avoir accepté de me lire à la dernière minute et pour m'avoir appris certaines règles de français.

Finalement, j'aimerais remercier mes parents et amis qui ont cru en moi et qui m'ont supportée dans la réalisation de ce travail.

À ma mère, Carole, avec amour et gratitude.

Introduction

Au cours des dix dernières années, les programmes de formation des maîtres au secondaire ont beaucoup changé et d'autres changements s'annoncent avec la prochaine réforme des programmes en éducation. De plus en plus d'efforts sont faits pour former de bons enseignants aptes à répondre aux besoins des élèves. Pour ce faire, le Ministère de l'Éducation du Québec propose un cadre de référence renfermant les diverses compétences que devrait acquérir un futur maître. Parmi celles-ci, on retrouve la capacité d' « anticiper les obstacles à l'apprentissage des contenus à faire apprendre ». (MEQ :Martinet, Raymond et Gauthier, 2001, p. 141)

Nous voulons donc, par notre projet de recherche, tenter de sensibiliser les étudiants-maîtres à la notion d'obstacle. Pour ce faire, nous avons élaboré une courte séquence d'enseignement fondée sur les mathématiques égyptiennes. Au départ, nos objectifs étaient de faire vivre un obstacle aux étudiants-maîtres, puis de les amener à voir le parallèle entre ce qu'ils venaient de vivre et ce que peuvent vivre les élèves du secondaire.

Une préexpérimentation auprès d'enseignants nous a permis de vérifier certains de nos choix didactiques et de tester notre séquence d'enseignement. Une première expérimentation auprès d'étudiants-maîtres nous a ensuite permis de vérifier leurs conceptions de la notion d'obstacle et d'obtenir un aperçu des effets de notre séquence sur ces conceptions. Nous avons malheureusement été incapable de recueillir suffisamment de données témoignant de l'effet de notre séquence pour en tirer toutes les conclusions voulues. Nous avons alors décidé d'élaborer une deuxième expérimentation dans le but d'obtenir une meilleure évaluation des effets de notre séquence sur les conceptions des étudiants-maîtres face à la notion d'obstacle. Nous en avons profité pour corriger quelques lacunes que nous avions relevées lors de la première expérimentation. C'est ce qui nous a poussée à nous fixer un troisième objectif visant à amener les étudiants-maîtres à trouver des façons de traiter l'obstacle.

Dans notre premier chapitre, nous présentons notre problématique de recherche. Nous y décrivons le contexte et les motivations entourant notre idée de recherche, ce qui nous a poussée à nous intéresser à ce sujet, l'intérêt pour le domaine de l'éducation et nos objectifs.

Dans notre deuxième chapitre, nous présentons le cadre théorique se rapportant à notre sujet de recherche. Il y est question de la formation des maîtres, de la didactique des mathématiques, de la notion d'obstacle, de l'utilisation de l'histoire des mathématiques en enseignement, de l'histoire de l'algèbre et des obstacles en algèbre.

Au troisième chapitre, nous présentons la méthodologie ayant servi à élaborer notre séquence d'enseignement, nous appuyant sur l'ingénierie didactique telle que définie par Artigue. Nous y expliquons également nos choix didactiques et nous présentons une analyse a priori décrivant nos hypothèses et nos attentes face à notre séquence.

Nous présentons ensuite, dans notre quatrième chapitre, les résultats de la première expérimentation. Nous y effectuons une analyse a posteriori en comparant les résultats réels et ceux anticipés dans le cadre de l'analyse a priori. Nous analysons également les erreurs commises par les étudiants-maîtres lors de l'expérimentation. Finalement, nous effectuons une étude comparative des résultats obtenus lors des études de cas produites avant et après l'expérimentation.

Dans notre cinquième et dernier chapitre, nous présentons les modifications apportées pour notre deuxième expérimentation et les raisons qui les justifient. Nous présentons également les résultats obtenus lors de cette deuxième expérimentation entremêlés d'une analyse qualitative de ces résultats.

Finalement, nous présentons les conclusions auxquelles nous sommes arrivée ainsi que les questions que notre recherche a soulevées. Nos résultats de recherche ont confirmé plusieurs de nos hypothèses, et laissent entrevoir de nouvelles perspectives de recherches fort intéressantes.

Chapitre 1

Problématique

De nos jours, nous entendons régulièrement parler, à la télévision, à la radio ou dans les journaux, de problèmes reliés à l'éducation. Il est souvent question des nouveaux programmes d'éducation au primaire et au secondaire. Tout comme celles du primaire et du secondaire, la formation universitaire n'y échappe pas. Il faut former des enseignants capables d'appliquer les réformes et les dernières recherches en éducation dans leur enseignement quotidien. Le ministère de l'Éducation du Québec faisait d'ailleurs paraître récemment un document intitulé : « La formation à l'enseignement, Les orientations, Les compétences professionnelles » (MEQ, 2001) dans lequel on retrouve des lignes directrices visant à orienter l'enseignement universitaire offert aux futurs maîtres.

Malgré tous les efforts faits par les universités pour former de bons enseignants, il n'est pas rare d'entendre les nouveaux enseignants dire que la profession d'enseignant s'apprend beaucoup plus sur le terrain que dans une salle de cours. L'application des théories apprises à l'université ne se fait pas facilement en situation concrète d'enseignement. Les enseignants chevronnés disent souvent : « Ce que tu as vu à l'université tu peux mettre ça de côté. Tu vas maintenant voir ce qu'est la réalité. »

Pourtant, si on se réfère aux statistiques établies par le MEQ, on dénote que la majorité des finissants du BES sont satisfaits de la formation universitaire dans son ensemble (83,6 %), tel que l'indique le tableau I tiré d'une étude faite par le Ministère de l'éducation et les Universités du Québec « pour savoir comment la nouvelle formation est perçue par les personnes qui l'ont reçue et par leurs employeurs dans le milieu scolaire ». (MEQ, 2000 p. 1)

Degré de satisfaction	%
TRÈS SATISFAISANT	**18,3**
PLUTÔT SATISFAISANT	**65,3**
PLUTÔT INSATISFAISANT	15,3
TRÈS INSATISFAISANT	1,1
TOTAL	100,0

Tableau I : Degré de satisfaction des répondants et répondantes par rapport à l'ensemble de la formation suivie au BES (n= 337) (tiré de MEQ, 2000, p. 33)

ÉNONCÉ	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Total
Satisfaction par rapport aux cours disciplinaires			
a) De manière générale, je suis satisfait ou satisfaite des cours que j'ai suivis dans mes spécialités disciplinaires (sont exclus ici les cours de didactique disciplinaire).	25,9	43,0	**68,9**
b) Ma formation m'a permis d'approfondir suffisamment les contenus d'enseignement de mes disciplines de formation.	26,6	41,1	**67,7**
c) Ma formation en didactique m'a permis de développer suffisamment d'habiletés relativement à l'enseignement de mes disciplines de formation.	22,5	38,1	**60,6**
Considérations des besoins des étudiants et étudiantes du BES			
d) Les professeurs qui m'ont enseigné mes spécialités disciplinaires ont su répondre à mes besoins de formation comme futur enseignant ou enseignante (sont exclus ici les professeurs de didactique disciplinaire).	11,7	34,1	**45,8**
e) Le contenu des cours disciplinaires a tenu compte du contenu des programmes d'études du secondaire.	12,9	26,4	**39,3**
f) Les professeurs qui m'ont enseigné mes disciplines de formation ont conçu des activités particulières pour les futurs enseignants et enseignantes (sont exclus ici les professeurs de didactique disciplinaire).	11,7	26,6	**38,3**

* Les pourcentages sont calculés sur la base des disciplines de formation, ce qui donne environ 775 réponses au total par énoncé puisque chaque personne a deux disciplines, ou parfois plus. Le nombre de personnes ayant répondu à ces énoncés est de 383.

Tableau II : Proportions de personnes en accord avec des énoncés portant sur la formation suivie dans les départements disciplinaires (%)*
(tiré de MEQ, 2000, p. 30)

Par contre, en se référant au tableau II, on s'aperçoit qu'un plus petit pourcentage, c'est-à-dire 60,6 % des mêmes finissants considèrent que la formation reçue en didactique de leur discipline principale leur a permis de développer suffisamment d'habiletés relativement à l'enseignement de cette discipline. Mais ce pourcentage est-il suffisant ? Comme en fait mention Jean Portugais dans l'avant-propos de son livre intitulé « Didactique des mathématiques et formation des enseignants », il y a un constant débat entre les universités à savoir s'il est préférable de consacrer plus de temps à une formation plus poussée dans la discipline principale ou à une formation didactique de l'enseignement de cette discipline. Seulement 39,3 % des étudiants considèrent que le contenu des cours disciplinaires tient compte du contenu des programmes d'études du secondaire. Seulement 45,8 % considèrent que les professeurs qui leur ont enseigné leurs spécialités disciplinaires ont su répondre à leur besoin de formation en tant qu'enseignant.

Le tableau III nous montre que la majorité des étudiants sont d'accord pour dire qu'ils maîtrisent suffisamment leurs disciplines d'enseignement (81,4 %). Cependant, plusieurs, bien que dans une proportion un peu moindre (67,7 %) disent reconnaître assez facilement les contenus difficiles pour les élèves et 58,2 % estiment prévoir assez facilement les erreurs que les élèves font le plus souvent. Cela est relativement faible si on admet que reconnaître les difficultés et les erreurs possibles des élèves est une habileté importante chez un enseignant. Un enseignant qui prévoit les erreurs de ses élèves peut construire ses leçons en conséquence de façon à traiter ces erreurs et modifier les conceptions inadéquates des élèves. C'est dans les cours de didactique que les futurs enseignants apprennent à développer ces habiletés.

Pour pouvoir prévoir les erreurs commises par les élèves, il faut connaître la cause de ces erreurs. Dans cette étude, il sera question d'un aspect important de la didactique des mathématiques en ce qui a trait à l'étude des causes d'erreurs : la notion d'obstacle. Notre recherche vise l'élaboration d'une situation didactique ayant pour but d'amener les étudiants-maîtres à se familiariser avec cette notion pour laquelle ils ont peut-être des obstacles. Les connaissances qu'ils développeront face à la notion d'obstacle pourront éventuellement les aider à prévoir les difficultés et les erreurs commises par les élèves.

TYPE D'ACTION	Très facile	Plutôt facile	Total
Employer le vocabulaire propre à la discipline que j'enseigne et les termes adéquats	47,9	48,2	**96,1**
Montrer mon enthousiasme à l'égard des disciplines que j'enseigne	62,2	32,4	**94,6**
Maîtriser les contenus relatifs aux disciplines que j'enseigne, en conformité avec les programmes	28,7	52,7	**81,4**
Choisir des ressources didactiques appropriées à l'apprentissage des élèves	13,8	61,8	**75,6**
Reconnaître les contenus difficiles à faire apprendre aux élèves	11,8	55,9	**67,7**
Prévoir les difficultés éprouvées et les erreurs commises fréquemment par les élèves	8,6	49,6	**58,2**

Tableau III : Proportions de personnes disant qu'il leur est facile d'accomplir des actions liées à la maîtrise de la matière enseignée (n=353) (%)
(tiré de MEQ, 2000, p. 39)

Évidemment, cette idée n'est pas venue spontanément. Aussi nous voudrions sensibiliser le lecteur à ce qui nous a amenée à nous intéresser à la formation des étudiants-maîtres en didactique des mathématiques. Nous croyons que ces quelques explications aideront le lecteur à se situer dans le contexte de cette recherche.

Tout a commencé par une prise de conscience de nos limites en tant qu'enseignante. Déjà lors de notre baccalauréat, les stages nous ont permis de nous rendre compte à quel point il peut parfois se révéler difficile d'amener un élève à comprendre certaines notions. On a beau expliquer de plusieurs manières différentes, parfois ça demeure incompréhensible pour lui. L'apprentissage se fait donc peut-être autrement… Nous nous sommes alors posé les questions suivantes : « Qu'est-ce qui cause ce problème ? » et « Comment l'élève pense-t-il ? ». Les cours du BES n'avaient malheureusement pas su répondre tout à fait à ces questions. Toutefois, les rares cours offerts en didactique laissaient entrevoir que la réponse se trouvait probablement dans cette science. Nous avons donc poussé les recherches un peu plus loin.

En travaillant à un projet de recherche sur l'histoire de la numération, nous avons entrevu un lien possible entre l'histoire des mathématiques et la notion d'obstacle en didactique. En faisant des exercices de numération provenant des civilisations égyptiennes antiques nous avons fait face à des difficultés. Nos connaissances des mathématiques modernes ne suffisaient pas pour résoudre le problème à la manière des Égyptiens. Comment une telle chose pouvait-elle être possible ? Des hommes, il y a des siècles de cela, avaient réussi à résoudre ces problèmes avec des outils mathématiques rudimentaires et nous, avec toutes nos connaissances des mathématiques modernes, n'arrivions pas à comprendre. Tout d'un coup, tous nos points de repère venaient de disparaître ou du moins se révélaient inutiles, voire nuisibles. Pour arriver à résoudre le problème à la manière des Égyptiens, il nous a fallu faire abstraction de plusieurs de nos connaissances actuelles et tenter de nous mettre dans la peau de l'Égyptien de l'époque en utilisant les mêmes outils mathématiques que lui et en essayant de voir le contexte dans lequel ces problèmes ont été écrits. Nos connaissances actuelles nuisaient à notre compréhension des mathématiques égyptiennes.

Pour mieux situer le lecteur, voici un exemple de problème auquel nous avons fait face : Dans tous les traités mathématiques de l'ancienne Égypte, on n'utilise que les fractions unitaires. Une quantité comme 2/7 sera plutôt représentée de la façon suivante : 1/4 + 1/28. Par nos lectures, nous avons trouvé quatre méthodes qui permettent de décomposer une fraction en fractions unitaires (voir annexe 1). Mais attention, ce ne sont pas toutes les méthodes qui fonctionnent dans tous les cas. Il existe également plusieurs règles à suivre dans la présentation du résultat final (voir annexe 2). Par exemple, les fractions doivent être placées en ordre décroissant et sans répétition. Une décomposition comme 1/6+1/18 serait acceptée alors que 1/9+1/9 ne le serait pas. Toutes ces règles semblaient très complexes. Nous n'arrivions pas à voir pourquoi les Égyptiens se compliquaient ainsi la vie. Il est tellement plus facile d'utiliser des fractions comme 2/9. Et c'est alors que nous avons pensé… Et si les élèves pensaient exactement la même chose lorsqu'on leur enseigne! Les règles sur les nombres fractionnaires leur semblent peut-être complexes et inutiles. Pourquoi utiliser des nombres fractionnaires quand on peut utiliser les nombres décimaux ? Les élèves portent en eux un bagage de connaissances qui entrent parfois en conflit avec les nouvelles notions qu'on veut leur apprendre.

C'est alors que nous nous sommes rendu compte qu'une chose simple comme une addition de fractions peut sembler très complexe si on change le contexte et que tout à coup nos points de repère deviennent inadéquats. La plupart du temps, les enseignants en mathématiques sont des gens qui ont toujours bien réussi dans ce champ d'étude et qui n'ont jamais vraiment éprouvé de difficultés, du moins pas avec les notions enseignées au secondaire. Il peut alors être difficile pour ces enseignants de comprendre la détresse d'un élève devant certains problèmes. C'est pourquoi nous avons pensé que l'histoire des mathématiques pourrait aider à comprendre les obstacles auxquels les élèves font face puisqu'on peut étudier une notion vue au secondaire en la changeant de contexte et ainsi être confronté à des obstacles qui n'avaient pas eu l'occasion d'apparaître comme tels auparavant.

Notre projet de recherche vise donc d'une part à sensibiliser les étudiants-maîtres à la notion d'obstacle par l'entremise d'une séquence d'enseignement qui a pour but de leur faire vivre des obstacles mathématiques sur des notions de niveau secondaire et d'autre part, à faire ressortir ce qui pourrait faire obstacle à leur compréhension de la notion d'obstacle. Pour ce faire, nous utiliserons l'histoire des mathématiques comme outil de contextualisation afin de placer les étudiants-maîtres dans une situation où leurs connaissances deviennent inappropriées et peuvent constituer un obstacle.

Chapitre 2

Cadre théorique

Pour bien comprendre la problématique reliée à cette recherche, il faut prendre en considération les divers facteurs s'y rattachant. Ce cadre théorique tente de rendre compte de ce qui a été écrit sur ces sujets. Dans une première partie, nous présenterons les principaux objectifs visés par la formation des maîtres. Il sera ensuite question de la didactique des mathématiques ainsi que de la didactification de la didactique. Comme nous nous intéressons plus particulièrement à la notion d'obstacle, une section de notre travail sera consacrée à ce sujet. Et comme nous souhaitons utiliser l'histoire des mathématiques pour traiter notre sujet, nous terminerons cette première partie par un chapitre sur l'utilisation de l'histoire en enseignement.

Nous avons décidé de traiter l'obstacle à partir de l'algèbre. Nous avons choisi l'algèbre parce qu'il s'agit d'un sujet qui renferme souvent plusieurs obstacles pour les élèves du secondaire. Dans une deuxième partie, il sera donc question de l'histoire de l'algèbre ainsi que des obstacles et erreurs des élèves du secondaire en algèbre.

Première partie

2.1. La formation des maîtres

Lorsqu'on s'intéresse à la formation des maîtres, nous devons nous poser certaines questions, notamment : « Comment voulons-nous former les futurs maîtres ? » « Quelles seront les principales tâches qu'ils auront à accomplir ? » « Que devons-nous attendre d'eux ? »

> *« Au cours des dernières décennies, de nombreux travaux de recherche devant servir à l'élaboration de modèles de formation des enseignants étaient portés par l'objectif de définir les comportements fondamentaux et les habiletés de base (skills) caractérisant un bon enseignement. » (Portugais, 1995, p. 14)*

Mais qu'est-ce qu'un bon enseignant ? En réponse à cette question, Astolfi (1989) propose quatre familles de variables sur lesquelles peut reposer la formation des maîtres. Tout d'abord, un enseignant doit avoir une certaine facilité à communiquer. Deuxièmement, il doit maîtriser les contenus à enseigner. Il doit également observer, analyser, gérer, réguler et évaluer les situations d'apprentissage qu'il met en place. Finalement, l'enseignant doit être conscient de l'ensemble des valeurs et des finalités auxquelles il se réfère dans ses choix pédagogiques et didactiques. Toujours selon Astolfi,

> *« Le principe d'isomorphisme préconise que c'est en faisant vivre et analyser aux formés des situations semblables – au niveau des attitudes, des démarches, voire des contenus – à celles qu'ils pourront faire connaître à leurs élèves, que le formateur aide durablement les formés à intégrer l'ensemble des procédures en jeu, car ils en assimilent toute la signification. » (Astolfi et Develay, 1989, p. 115)*

Ce principe peut être vu selon diverses formules de formation comme en témoigne à nouveau Astolfi. Notons entre autres, la formation par observation, la formation par instruction, la formation par production, la formation par simulation, la formation par documentation et la formation par rétroaction. Dans le cadre de cette recherche, nous avons choisi la formation par simulation qui « *donne aux formés la possibilité d'exprimer par des mises en situation différentes (jeux de rôles, expressions diverses...) leurs représentations personnelles d'une situation.* » (Astolfi et Develay, 1989, p. 118-119) Nous croyons que la simulation est une formule qui correspond bien à nos besoins puisque nous voulons faire entrer les étudiants-maîtres dans un jeu de rôle, en leur proposant des exercices tirés d'un contexte historique où ils joueront à la fois le rôle d'Égyptiens et d'élèves.

Avant d'aller plus loin, regardons ce qui se fait présentement dans les universités du Québec en matière de formation des maîtres. Jusqu'à maintenant, il n'existe aucun programme officiel établi par le MEQ en ce qui concerne les cours offerts à la formation des maîtres. Le ministère propose un cadre de référence contenant des objectifs généraux ou des compétences, mais la responsabilité revient à chaque université de déterminer le contenu du programme et d'établir les objectifs spécifiques visés. Ces programmes doivent ensuite être approuvés par le MEQ. Cette liberté d'action occasionne bien souvent des différences entre les contenus offerts d'une université à l'autre comme le mentionnent Bednarz et René de Cotret (1996).

Au cours des dernières années, nous avons fait face à plusieurs remaniements concernant les programmes du primaire et du secondaire. La formation initiale des maîtres ne peut ignorer ces changements majeurs dans le domaine de l'éducation au Québec.

> *« C'est pourquoi, le ministère de l'Éducation du Québec définit dans le document ministériel « La formation à l'enseignement - Les orientations - Les compétences professionnelles », les orientations en regard de la formation à l'enseignement, le référentiel de compétences professionnelles attendues au terme de la formation initiale ainsi que les profils de sortie. L'établissement de ces balises constitue la première étape d'un processus qui comprend ensuite l'élaboration des programmes par les universités, l'agrément de ces programmes et la reconnaissance d'aptitude à l'enseignement.»* (MEQ: Martinet, Raymond et Gauthier, 2001, p. 1)

Ce document constitue une source de référence pour guider les universités dans l'élaboration de leurs programmes de formation.

Une des composantes prescrites par le ministère dans ce document, est l'habileté du futur maître à « *appuyer le choix et le contenu de ses interventions sur les données récentes de la recherche en matière de didactique et de pédagogie.* » (MEQ : Martinet, Raymond et Gauthier, 2001, p. 141) La didactique est donc un élément clé de la formation des futurs maîtres. Une autre composante proposée par le ministère est la capacité chez les futurs maîtres d'*« anticiper les obstacles à l'apprentissage des contenus à faire apprendre»*. *«Au terme de la formation* *initiale, l'étudiante ou l'étudiant doit être en mesure de détecter, en situation d'apprentissage, les forces et les difficultés des élèves.* » (MEQ : Martinet, Raymond et Gauthier, 2001, p. 141, 145) Notre désir d'étudier la notion d'obstacle en didactique des mathématiques à l'intérieur de la formation des maîtres est donc tout à fait relié aux attentes ministérielles en ce qui concerne la formation initiale des maîtres. Mais avant de s'attarder davantage à la notion d'obstacle, regardons en quoi consiste la didactique des mathématiques et quel sera son rôle à l'intérieur de notre projet de recherche.

2.2. Didactique des mathématiques

En France, la didactique des mathématiques s'est développée à la suite de la réforme des mathématiques modernes dans les années soixante. Pour bien comprendre l'évolution de cette science, il est important d'en connaître les définitions. En voici donc une écrite par Guy Brousseau (1991), (tiré de Portugais, 1995, p. 28) :

> *« Science s'intéressant à la production et la communication des connaissances mathématiques dans ce que cette production et cette communication ont de spécifique de ces connaissances. La didactique des mathématiques étudie la façon dont les connaissances sont créées, communiquées et employées pour la satisfaction des besoins des hommes vivant en société, et plus particulièrement :*
> *- d'une part, les opérations essentielles de la diffusion des connaissances (théorie des situations didactiques), les conditions de leur existence et de leur diffusion (l'écologie des savoirs) et les transformations que cette diffusion produit, aussi bien sur ces connaissances (transposition didactique) que sur leurs utilisateurs (apprentissages, rapport au savoir),*
> *- d'autre part, les institutions et les activités ayant pour objet de faciliter ces opérations. »*

Avec le développement de cette nouvelle science dans le domaine de l'éducation, plusieurs chercheurs se sont démarqués par leurs travaux. On n'a qu'à penser à Brousseau, Chevallard, Bednarz... En 1969, on a vu naître, en France, les

I.R.E.M. (Institut de recherche pour l'enseignement des mathématiques). Ces instituts ont pour mission de :[1]

- Contribuer à la formation initiale et continue des enseignants.
- Contribuer à l'expérimentation pédagogique.
- Élaborer et diffuser des documents pour enseignants et formateurs.
- Mener des recherches sur l'enseignement des mathématiques.

L'intérêt accru pour la didactique des mathématiques, est en partie attribuable à la demande grandissante en ce qui a trait à cette science. L'accroissement de la demande est relié à diverses contingences :

> *« l'échec scolaire en mathématiques mis au devant de la scène publique par un nouveau rapport sur les performances insuffisantes des élèves, les difficultés des enseignants de trouver des moyens adaptés pour enseigner un contenu donné, de nouvelles directives ministérielles quant à l'approche à privilégier sur un secteur particulier, etc. » (Portugais, 1995, p. 2)*

Parmi les préoccupations des didacticiens, on retrouve la question de la formation des maîtres. Comment former des enseignants compétents ? Quelles notions didactiques leur seront utiles ? Comment leur enseigner ?

> *« Le désir – légitime – d'en arriver rapidement à des solutions aux problèmes de formation a fait que les résultats ou les concepts de la didactique se sont retrouvés, sans autre, au sein de cours offerts aux futurs enseignants. Ces derniers, croyant que les contenus de didactique étudiés devaient servir à fonder leur pratique professionnelle, s'en sont emparé et en ont vite fait des « applications en classe ». La plupart d'entre eux auront d'ailleurs constaté les décalages inhérents à ce passage ; certains insistant sur la distance entre ce qui a été vu au cours de didactique et ce qu'ils ont pu en faire en classe réelle. » (Portugais, 1995, p. 5)*

Comment rendre les contenus didactiques utiles pour le futur enseignant dans sa classe ? Comment s'assurer qu'il y ait réinvestissement de connaissances ? Dans l'enseignement de la didactique tout comme dans l'enseignement des mathématiques, nous pouvons faire face à des conceptions inadéquates relativement à certaines notions.

---

[1] http://www.univ-irem.fr/presentation.php3

Nous sommes ici en présence d'un phénomène de didactification de la didactique. Les didacticiens qui travaillent à la formation des maîtres doivent être conscients de la présence des phénomènes didactiques qui ont cours dans leur propre enseignement. Lorsqu'on enseigne la notion d'obstacle, il faut tenir compte que certains étudiants peuvent avoir des conceptions erronées à ce sujet. Il ne suffit donc pas de présenter les théories et les résultats de recherches. Il faut trouver des moyens didactiques pour s'assurer que les théories soient bien comprises et intégrées et qu'il y ait par la suite un réinvestissement des connaissances, c'est-à-dire que les étudiants-maîtres soient en mesure d'intégrer leurs nouvelles connaissances à leur enseignement.

Ce qui nous intéresse dans le cadre de cette recherche sont les travaux portant sur la notion d'obstacle. Plusieurs chercheurs ont étudié la notion d'obstacle et plusieurs écrits ont été publiés à ce sujet. Plus rares sont ceux par contre qui ont écrit sur les obstacles liés à la notion d'obstacle. Mais regardons d'abord ce que signifie le terme « obstacle » tel qu'il est défini en didactique.

2.3. Notion d'obstacle

Lorsqu'un élève fait une erreur dans un problème mathématique, il est possible que cette erreur révèle un obstacle d'ordre didactique. Nos interventions en tant qu'enseignant dépendront alors de cet obstacle. Mais tout d'abord, qu'est-ce qu'un obstacle au sens didactique du terme ?

2.3.1. Définition

Un obstacle est une connaissance qui avait ses succès à l'intérieur d'un domaine de validité[2] donné, mais qui sortie de ce domaine de validité produit des erreurs. Par exemple, un élève peut très bien comprendre les fractions et savoir que

---

[2] Domaine de validité : ensemble des situations à l'intérieur desquelles une connaissance est applicable de manière adéquate.

lorsqu'on a 5 1/3 ça veut dire 5+1/3. Cet élève pourrait alors extrapoler et réappliquer cette connaissance en algèbre en disant que 4x ça veut dire 4+x. Il est facile de penser à une situation où cette conception produirait une erreur. Par exemple, si on demandait à l'élève de résoudre l'équation suivante : « 4x=8 » il pourrait répondre que x=4 plutôt que x=2 car 4+4=8. Cette dernière conception est évidemment inadéquate, mais elle découle d'un raisonnement qui à l'origine était vrai et qui fonctionnait bien lorsqu'il était appliqué au domaine de l'écriture des nombres fractionnaires.

Brousseau mentionne d'ailleurs à ce sujet que :

> *« L'erreur n'est pas seulement l'effet de l'ignorance, de l'incertitude, du hasard que l'on croit dans les théories empiristes ou behavioristes de l'apprentissage, mais l'effet d'une connaissance antérieure, qui avait son intérêt, ses succès, mais qui, maintenant, se révèle fausse ou simplement inadaptée. » (Brousseau, 1983, p. 171)*

Si les erreurs des élèves peuvent parfois être le résultat d'une simple distraction, elles peuvent aussi être le résultat d'une connaissance-obstacle ou d'une conception inadéquate. Il est donc important d'analyser les causes d'erreurs. *« Cette analyse est nécessaire pour ensuite pouvoir intervenir, démontrer l'obstacle, aider l'élève à surpasser l'erreur. »* (Bednarz, 1987, p. 21)

2.3.2. Identification de l'obstacle

Comment distinguer une erreur attribuable à un obstacle d'une simple erreur d'inattention ? Duroux propose quatre critères permettant de reconnaître un obstacle.

« 1. Il s'agit d'une connaissance qui fonctionne comme telle sur un ensemble de situations et pour certaines valeurs des variables de ces situations.

2. L'obstacle est une connaissance qui, en tentant de s'adapter à d'autres situations ou à d'autres valeurs des variables, va provoquer des erreurs spécifiques, repérables, analysables.

3. L'obstacle est une connaissance stable. Dans les situations qui sortent de son domaine de validité, son rejet coûtera plus… qu'une tentative d'adaptation à tout prix, même si cela alourdit notablement le processus de résolution employé.

4. *L'obstacle ne pourra donc être franchi que dans des situations spécifiques de rejet, et ce rejet sera constitutif du savoir. ... Le retour même sur la conception obstacle sera partie intégrante du nouveau savoir. » (Duroux, 1983, p. 54)*

Comme Duroux le mentionne, il peut être coûteux de susciter le rejet d'une connaissance-obstacle. Mais pourquoi ? En fait, une notion peut être apprise seulement si elle peut être utilisée avec succès dans diverses situations. Plus elle a du succès, plus elle prend de la valeur et devient solide dans l'esprit de l'élève. Il est alors possible que celui-ci tente de l'adapter à l'extérieur de son domaine de validité. Étant donné ses nombreuses réussites par le passé, la notion deviendra résistante et sera difficilement modifiable. Elle peut donc dans certains cas se révéler un support intéressant et dans d'autres cas, agir en tant qu'obstacle.

Des conceptions ayant connu plusieurs succès peuvent être difficiles à modifier chez l'élève. Si on lui montre comment faire, il est possible que l'élève adopte la méthode enseignée par le professeur lorsqu'il se retrouvera dans des situations similaires, sans nécessairement comprendre le sens rattaché à ce qu'il fait. Par contre, s'il se trouve face à une nouvelle situation, il risque fort de retourner à sa conception initiale puisqu'il exerce un certain contrôle de sens sur celle-ci. Il est aussi possible pour un élève de fonctionner en ayant des conceptions divergentes qui cohabitent en les appliquant à des situations différentes. Nous en avons un bon exemple avec François dans l'entrevue menée par Louise Poirier avec un élève de 5^{e} année du primaire au sujet des fractions. (voir annexe 3) En effet, François a un raisonnement erroné en ce qui concerne la comparaison de fractions. Lorsqu'on lui demande laquelle des deux fractions entre 3/8 et 6/16 est la plus grosse, il dessine une tablette de chocolat de huit morceaux et en colore 3 morceaux. Il dessine ensuite une tablette de seize morceaux qui sera deux fois plus grosse que la précédente et colore 6 morceaux. En comparant ses deux dessins, il en vient à la conclusion que 6/16 est plus gros que 3/8 puisqu'il reste plus de morceaux non colorés dans la deuxième tablette. En fait, François n'a pas utilisé des « tout » de même grandeur pour comparer ses fractions. Pourtant, si on lui demande de résoudre le problème autrement, il arrive à appliquer la technique apprise en classe qui consiste à mettre au même dénominateur en passant par des fractions équivalentes. Il connaît donc la technique et sait bien l'exécuter. Ceci nous démontre bien qu'il est possible d'avoir recours à des conceptions divergentes par rapport à une même notion. Lorsqu'on a présenté à François un nouveau problème semblable, il a à nouveau utilisé un raisonnement inadéquat, probablement issu de l'adaptation de ce qu'il connaît, au lieu d'avoir recours à la technique que lui avait enseignée son professeur.

2.3.3. Traitement de l'obstacle

Comme nous venons de le voir, il arrive que certaines conceptions soient solidement ancrées dans la pensée de l'élève. Ces conceptions sont alors difficiles à changer et il faudra plus qu'une simple démonstration du fonctionnement de la nouvelle technique pour convaincre l'élève de modifier sa façon de penser. Il faudra que l'élève sente bien les limites de sa conception et qu'il sente lui-même le besoin d'avoir recours à d'autres connaissances. C'est donc le rôle de l'enseignant de mettre en conflit les conceptions inadéquates de l'élève.

Encore une fois, Brousseau décrit bien la situation :

> *« L'obstacle est constitué comme une connaissance, avec des objets, des relations, des méthodes d'appréhension, des prévisions, avec des évidences, des conséquences oubliées, des ramifications imprévues... Il va résister au rejet, il tentera comme il se doit, de s'adapter localement, de se modifier aux moindres frais, de s'optimiser sur un champ réduit, suivant un processus d'accommodation bien connu. C'est pourquoi, il faut un flux suffisant de situations nouvelles, inassimilables par lui, qui vont le déstabiliser, le rendre inefficace, inutile, faux, qui vont en rendre nécessaire la reprise ou le rejet, l'oubli, la scotomisation – jusque dans ses ultimes manifestations. » (Brousseau, 1983, p. 175)*

> *« ... ainsi, si l'on veut déstabiliser une notion assez enracinée, il sera avantageux que l'élève puisse investir suffisamment ses conceptions dans des situations :*
> - *assez nombreuses et importantes pour lui*

- *et surtout aux conditions informationnelles suffisamment différentes pour qu'un saut qualitatif soit nécessaire. » (Brousseau, 1983, p. 176)*

Afin d'illustrer les propos de Brousseau, prenons l'exemple d'un enfant du primaire qui résout des problèmes de multiplication par additions répetées. Il résoudra alors le problème suivant comme suit : « Combien y a-t-il de billes si j'ai 4 sacs et que dans chaque sac j'ai 6 billes ? » Réponse : 6+6+6+6=24. Si on tente de montrer à l'enfant comment multiplier en faisant 6x4, il risque de se heurter à des difficultés et de revenir à sa stratégie de départ. Par contre, si on lui demande « Combien y a-t-il de billes si j'ai 15 sacs et que dans chaque sac j'ai 24 billes ? » Il sera alors coûteux pour l'enfant d'utiliser l'addition répétée et il cherchera à adapter cette façon de faire ou encore, il tentera de développer une nouvelle stratégie.

Mais l'obstacle n'est pas néfaste à l'apprentissage comme on pourrait le croire.

« il ne s'agit pas de considérer des obstacles externes comme la complexité ou la fugacité des phénomènes, ni d'incriminer la faiblesse des sens et de l'esprit humain ; c'est dans l'acte même de connaître intimement qu'apparaissent par une sorte de nécessité fonctionnelle des lenteurs et des troubles... On connaît contre une connaissance antérieure »(Bachelard, 1983, p. 13)

« Les obstacles d'origine proprement épistémologique sont ceux auxquels on ne peut, ni ne doit échapper, du fait même de leur rôle constitutif dans la connaissance visée. »(Brousseau, 1983, p. 178)

« L'erreur n'est plus perçue comme un mal. Elle est vue comme quelque chose de nécessaire à la construction de connaissances, elle est donc utile, presque inévitable...Cela suppose que, comme enseignant, on prenne en considération les conceptions de l'étudiant, qu'on soit à l'écoute de celles-ci. » (Bednarz, 1987, p. 121)

2.3.4. Comment prévoir l'obstacle

En tant qu'enseignant, il ne faut pas tenter d'éviter les obstacles, il faut plutôt tenter de les prévoir et d'en tirer parti. Sophie René de Cotret et Réal Larose (2002) proposent un ensemble de situations didactiques, fondées sur la théorie des situations didactiques de Brousseau, destinées à mettre en conflit les obstacles à la réussite. On y retrouve les cinq situations suivantes :

1. Une situation de connaissance-obstacle, où l'enseignant doit identifier la connaissance-obstacle qu'il cherche à modifier chez ses élèves.
2. Une situation de mobilisation, où l'élève sera appelé à mobiliser sa connaissance-obstacle à l'intérieur d'une situation portant sur le contenu d'enseignement visé.
3. Une situation de formulation, où l'élève sera appelé à formuler sa connaissance-obstacle : *« Il s'agit en quelque sorte de faire prendre conscience à l'étudiant de la procédure qu'il met en œuvre de manière à ce qu'il puisse, lors de la situation suivante, juger de sa validité.* » (Larose et René de Cotret, 2002, p. 19)
4. Une situation d'invalidation/validation, où l'enseignant tentera, soit de mettre la connaissance-obstacle de l'élève en conflit en lui proposant une situation dans laquelle cette connaissance atteindra ses limites, soit de valider la connaissance adéquate de l'élève.
5. Une situation d'institutionnalisation, où l'enseignant présente le savoir visé. « *L'enseignant identifie ainsi pour les étudiants ce qui, dans leurs solutions ou celles de leurs collègues, relève du savoir institutionnel – celui que l'on retrouve dans les manuels scolaires ou de référence.* » (Larose et René de Cotret, 2002, p. 20)

Pour terminer, il est important lorsqu'on s'intéresse aux obstacles rencontrés par les élèves tout au long de leur apprentissage, de distinguer les différents types d'obstacles. Comme les connaissances peuvent être d'origines diverses, il en est de même des obstacles. Brousseau distingue trois types d'obstacles en didactique : l'obstacle **d'origine ontogénique**, c'est-à-dire qui est relié au développement cognitif de l'élève ; l'obstacle **d'origine didactique**, qui prend source directement dans l'enseignement et qui est relié aux choix didactiques de l'enseignant ; et celui **d'origine épistémologique**, c'est-à-dire un obstacle qui a été observé historiquement dans l'évolution de certaines notions mathématiques. Le traitement des obstacles tel que nous l'avons décrit dans ce texte peut s'appliquer aux obstacles d'origine didactique et épistémologique mais s'applique difficilement aux obstacles d'origine ontogénique. En effet, dans de tels cas, seul le temps saura produire un changement, en considérant évidemment que l'enfant évolue dans un milieu normal qui favorise l'apprentissage.

2.3.5. Analyse épistémologique de la notion d'obstacle

La notion d'obstacle ne date pas d'hier. Tout comme les mathématiques, elle a beaucoup évoluée. D'abord popularisée par Bachelard dans les années 30, elle fut reprise par plusieurs chercheurs dont Brousseau et Glaeser tel qu'il en fut mention dans notre cadre théorique. Il est à noter que nous parlerons dans cette analyse de l'obstacle épistémologique au sens large du terme. Giordan (1989) mentionne les modifications apportées à la proposition de Bachelard suite à l'ensemble des travaux réalisés dans les années quatre-vingt concernant l'analyse des « erreurs ». Pour mieux comprendre, regardons d'abord le modèle de Bachelard tel que proposé par Giordan.

> *« Toute élaboration de savoir n'est pas fortuite ou accumulative, elle se heurte à des difficultés. Ces dernières sont inhérentes à ce que Bachelard appelle la « pensée commune ». Elles constituent des empêchements au développement d'une connaissance scientifique, se situant dans le processus d'élaboration suivant un énoncé, que l'on pourrait schématiser de la manière suivante : » (Giordan, 1989, p. 372)*

C.C. --------------------- X ------------------> S.S.

(connaissance commune) ↑ (savoir scientifique)

O.E.

(obstacle épistémologique)

Voici maintenant les différences soulevées par Giordan entre le modèle de Bachelard et le modèle actuel (1989) concernant l'obstacle épistémologique :

- Il n'y a pas nécessairement une unique connaissance commune qui peut faire obstacle à la compréhension d'une notion quelconque qui fait partie du savoir scientifique. Pour une même situation, il peut y avoir plus d'une connaissance inadéquate qui cause une même erreur.
- Le chemin entre la connaissance commune et le savoir scientifique n'est pas nécessairement linéaire. Il peut arriver que plusieurs obstacles successifs surviennent.
- Chaque obstacle présente une « certaine épaisseur ». Certains obstacles sont plus persistants que d'autres, en raison, notamment, de leur champ de validité. Plus la connaissance en cause a eu de « succès », plus sa cohérence interne sera forte et plus elle sera difficile à déstabiliser.
- On ne retrouve pas des obstacles uniquement entre la connaissance commune et le savoir scientifique. On peut aussi les retrouver à l'intérieur même du savoir scientifique.

Giordan mentionne que l'idée d'obstacle, telle qu'elle est comprise par la majorité des gens, peut être reliée au concept de mur. En effet, si on se réfère au dictionnaire, le mot obstacle est décrit comme une difficulté, une barrière, une opposition ou un empêchement. Le mot obstacle est donc porteur de conceptions qui sont inadéquates dans un cadre didactique. Avec les recherches en didactique, notamment celles de Brousseau, l'obstacle est plutôt décrit comme un palier sur lequel on peut s'appuyer. Mais comme pour plusieurs le mot « obstacle » risque d'être surtout associé au concept de mur, il faudra donc tenir compte dans notre séquence didactique de cet obstacle potentiel, relié à la notion d'obstacle.

2.4. Histoire des mathématiques en enseignement

L'histoire des mathématiques a intéressé plusieurs historiens et plusieurs mathématiciens au cours des trois derniers siècles. Son utilisation en enseignement est cependant un peu plus récente. Depuis quelques décennies, de plus en plus de chercheurs et d'enseignants s'intéressent à ce sujet. Dans les écoles, on voit déjà l'apparition de l'utilisation de l'histoire des mathématiques en enseignement. On n'a qu'à penser aux manuels qui présentent certains passages historiques à titre informatif à la fin des chapitres ou pour présenter un nouveau sujet.

Lefebvre (1993) répertorie différents types d'usage de l'histoire en mathématiques dans l'enseignement. L'histoire peut être utilisée pour donner des informations brèves (des noms, des dates ou des faits historiques) permettant de faire des liens avec la matière. Elle peut également servir à susciter l'intérêt en intégrant des anecdotes et des histoires notionnelles. L'histoire peut aussi être intégrée dans la construction d'activités pédagogiques, en utilisant des textes anciens, des exemples ou des démonstrations tirés de l'histoire des mathématiques. Ceci demande évidemment une plus grande connaissance de l'histoire de la part de l'enseignant. On peut aussi utiliser l'histoire dans le cadre d'activités interdisciplinaires ou dans des projets à long terme.

Récemment, John Fauvel publiait une étude ICMI intitulée « History in mathematics education » (2000), dans laquelle des gens provenant de divers pays partagent leurs expériences en ce qui a trait à l'utilisation de l'histoire des mathématiques en enseignement. Dans cette étude, un chapitre est consacré à l'utilisation de l'histoire des mathématiques dans la formation des maîtres. Plusieurs semblent d'accord pour dire que l'intégration de l'histoire dans la formation des futurs maîtres est importante. Au Maroc par exemple, on a élaboré un cours pour la formation des maîtres, fondé sur l'utilisation des textes anciens et la résolution d'exercices provenant de ces textes. L'évaluation du cours a mené à trois conclusions importantes :

« First, history of mathematics helped the students to analyse mathematical concepts and, to a certain extent, to choose suitable teaching strategies. Second, the students became aware of difficulties that may arise if history is used to teach some mathematics or to clarify concepts. Third, there are cases where the history of mathematics can convey concepts, inappropriate for teaching mathematics. » (Fauvel et Van Maanen, 2000, p. 126)

Contrairement à ce qui fut fait au Maroc, notre objectif en utilisant l'histoire des mathématiques n'est pas d'amener les étudiants-maîtres à analyser un concept mathématique mais plutôt à découvrir un concept didactique. Évelyne Barbin soulève d'ailleurs des points très intéressants à ce sujet. Elle fait ressortir l'aspect dépaysant de l'histoire des mathématiques sur l'apprentissage. Selon elle, la lecture des textes anciens provoque un dépaysement et rend inutilisable nos conceptions actuelles si l'on veut comprendre ces textes dans le contexte dans lequel ils ont été écrits.

« L'étonnement épistémologique est bénéfique. Par exemple, lorsque nous nous posons la question : pourquoi les contemporains n'ont pas compris tel texte ? Car cette question renvoie souvent à une autre : pourquoi les élèves ne comprennent-ils pas ? » (Barbin, 1997, p. 22)

La fonction dépaysante de l'histoire comme la décrit Evelyne Barbin est donc intimement liée aux grandes préoccupations de la didactique des mathématiques, dont une concerne la formation des maîtres.

« ... Bien des enseignants considèrent que la transformation de l'image des mathématiques que leur a permis l'histoire a, non seulement modifié leurs manières d'enseigner, mais aussi leurs relations pédagogiques. En fait, c'est un autre regard sur les élèves qu'ils ont pu porter : ils ont le moyen de comprendre leurs erreurs, parce qu'ils connaissent maintenant les obstacles mais aussi parce que l'erreur, comme l'hésitation ou l'approximation, sont des manifestations de la pensée agissante. » (Barbin, 1997, p. 24)

Nous croyons donc que l'utilisation de l'histoire des mathématiques, par sa fonction dépaysante, pourra nous aider à sensibiliser les étudiants-maîtres à la notion d'obstacle. Nous voulons les amener à découvrir leurs propres limites en modifiant leurs points de repère et ainsi les amener à se questionner et à réfléchir sur les erreurs et les obstacles que vivent leurs élèves et la manière avec laquelle ils leur viennent en aide.

Deuxième partie

L'histoire des mathématiques est un domaine très vaste. Aussi avons-nous choisi de travailler principalement sur l'algèbre, puisqu'elle occupe une place importante dans les programmes du secondaire. Nous reviendrons plus en détail sur les raisons justifiant le choix de l'algèbre dans le chapitre 3.

Nous vous présentons ici un bref aperçu de l'histoire de l'algèbre et plus particulièrement de l'algèbre égyptienne. Nous vous présenterons les raisons qui nous ont amenée à choisir l'Égypte antique comme période historique pour notre travail sur l'obstacle. Il sera également question dans cette deuxième partie des obstacles que l'on peut retrouver en algèbre chez des élèves du secondaire. Comme nous le verrons au chapitre trois, cette section nous a été utile lors de l'élaboration de notre étude de cas.

2.5. Histoire de l'algèbre (considérations épistémologiques)

L'algèbre telle que nous la connaissons aujourd'hui est le résultat d'une longue évolution. Le symbolisme actuel n'a pas toujours été utilisé. Plusieurs historiens divisent l'évolution de l'algèbre en trois phases importantes.

> « *La première phase a été celle de l'algèbre terminologique, caractérisée par une absence totale de symboles, en dehors du fait que les mots eux-mêmes y sont employés dans leur propre sens symbolique. (...) Au stade suivant, l'algèbre est devenue syncopée : certains mots d'usage fréquent ont été abrégés et sont ainsi devenus de véritables « idéogrammes algébriques ». (...) Dernière phase : celle de l'algèbre symbolique actuelle (...)* »(Ifrah, 1994, p. 454)

Dans le cadre de cette recherche, nous avons choisi de nous concentrer sur la première phase, plus particulièrement sur la civilisation égyptienne datant de 1800 av. J.-C., afin de dépayser les étudiants-maîtres et ainsi de leur faire vivre un obstacle. Nous avons toutefois examiné d'autres possibilités à partir de plusieurs textes à ce sujet (Charbonneau, 1992 ; Lefebvre, 1992 ; Radford, 1992). Nous avons, entre autres, entrevu la possibilité d'utiliser l'arithmétique de Diophante (Ver Eecke, 1959) qui se situe dans la deuxième phase établie par les historiens, mais déjà les concepts utilisés se rapprochaient trop de l'algèbre que nous connaissons aujourd'hui. Par exemple, Diophante utilisait déjà un présymbolisme et effectuait des opérations sur des inconnues. Comme notre but est de rendre les connaissances des étudiants-maîtres inadéquates, nous avons opté pour une forme plus rudimentaire de l'algèbre qui comporte de plus grandes différences par rapport à nos acquis en matière d'algèbre. Certains diront qu'on ne peut parler d'algèbre au sein des anciennes civilisations égyptiennes. Évidemment, comme le symbolisme n'était pas utilisé, on ne peut pas parler d'algèbre au sens de manipulation symbolique. Toutefois, des textes anciens datant de 1800 av. J.-C. nous démontrent que les Égyptiens arrivaient à résoudre des équations du premier degré par d'autres procédés. Ce sont donc principalement des exercices de ce genre que nous présenterons aux étudiants-maîtres. Mais pour ce faire, il faut d'abord connaître les outils dont disposaient les Égyptiens ainsi que le contexte dans lequel ces problèmes ont été posés et résolus. Faisons donc un retour en arrière, à l'époque des premières civilisations égyptiennes afin de redécouvrir les mathématiques d'un autre œil.

2.5.1. Contexte historique et socio-économique

Tout d'abord, il est intéressant de savoir que les mathématiciens de cette époque étaient en fait les scribes qui avaient pour fonction première de tenir les comptes et de percevoir les taxes pour le pharaon. Les échanges à cette époque se faisaient en nature car il n'y avait pas encore de monnaie dans les échanges intérieurs. La bière et le pain étaient les deux éléments prédominants dans l'alimentation égyptienne et servaient de monnaie d'échange. Il y a d'ailleurs plusieurs problèmes à ce sujet.

Figure 1 : Fragment d'une peinture ornant une stèle.
(Tiré de Keller, p. 20)

Sur l'image ci-dessus, on peut apercevoir des scribes qui notent la quantité de blé. Ils calculeront ensuite le nombre de pains que cela devrait donner. Si le paysan ne ramène pas le nombre exact, il sera bâtonné.

Les scribes n'ont probablement pas été appréciés de tous. Aussi, certains textes de l'ancienne Égypte témoignent que des écrits ont été volés et des scribes tués.

> *« Voyez donc, les bureaux administratifs sont ouverts, les rôles ont été enlevés, de sorte que celui qui était un serf peut devenir le maître des serfs. Voyez donc, les scribes sont tués, leurs écrits enlevés. Ah, combien suis-je malheureux de la misère de ce temps ! » (Lalouette, 1984, tiré de Keller, p. 22)*

2.5.2. L'écriture égyptienne

Ce sont des soldats français, lors de l'expédition de Napoléon en Égypte qui firent la découverte de la pierre de Rosette. C'est grâce à cette pierre sur laquelle on retrouvait une inscription en trois langues (grec, démotique et hiéroglyphique) que nous avons pu déchiffrer les hiéroglyphes.

Au niveau du système numérique, qui est un système additif en base 10, on retrouve deux types d'écriture. L'écriture hiéroglyphique et l'écriture hiératique. Le tableau IV montre la différence entre ces deux styles d'écriture.

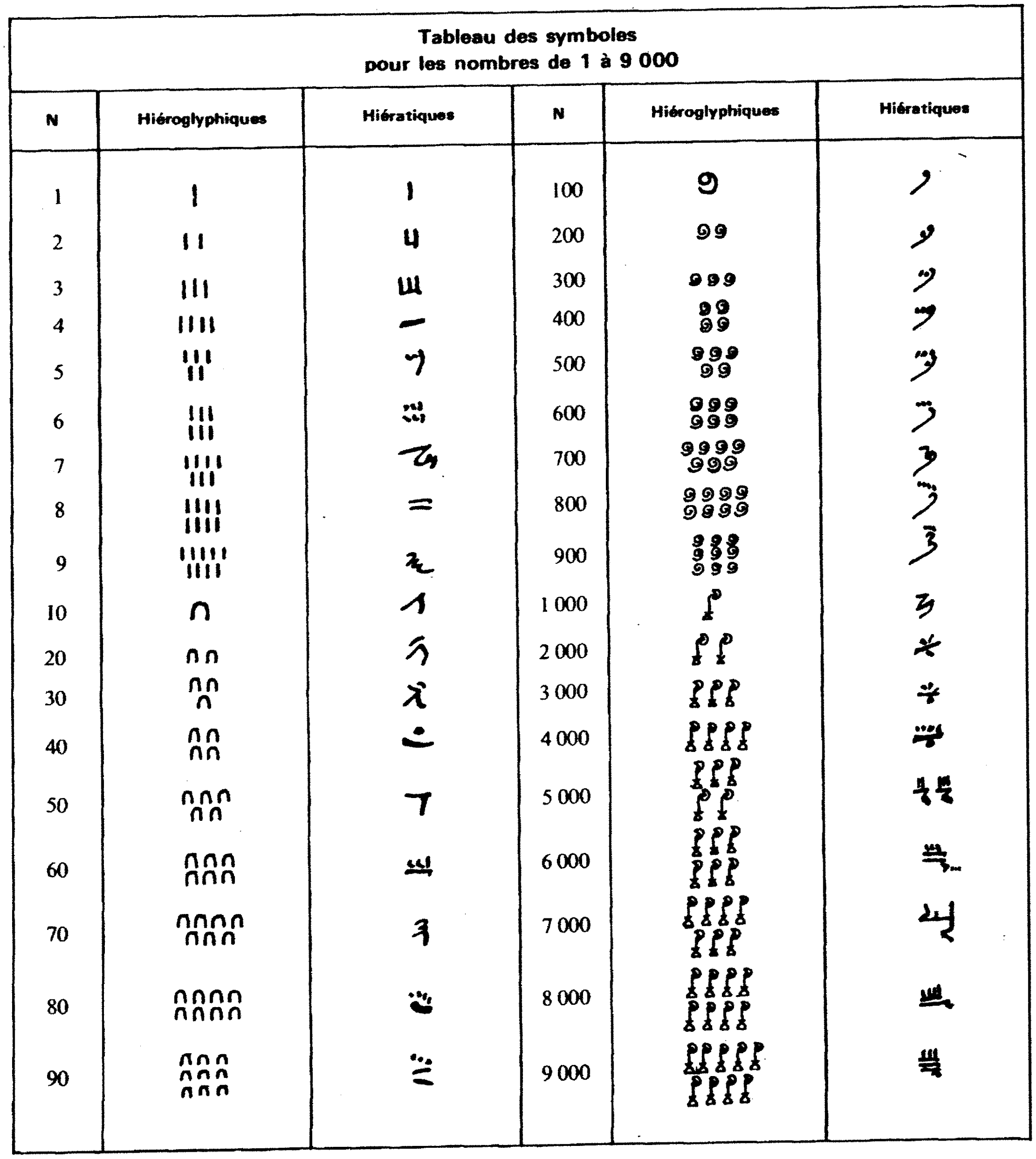


Tableau IV : Symboles égyptiens pour les nombres de 1 à 9 000
(tiré de Colette, 1973, p. 34)

« L'écriture hiéroglyphique apparaît, en général sur les tombes, les monuments, les pierres, alors que sur les papyrus, c'est l'écriture hiératique (de forme cursive) qui prédomine, étant mieux adaptée à l'écriture manuelle. »[3]

---

[3] Collette, Jean-Paul (1973). Histoire des mathématiques. Éditions du renouveau pédagogique. p. 32

Il est à noter que la majorité des traités égyptiens se lisent de droite à gauche. Pour s'en assurer, il suffit de regarder dans quelle direction pointe la tête des animaux ou des diverses figurines. Si elles pointent vers la droite, alors on doit lire le texte de droite à gauche.

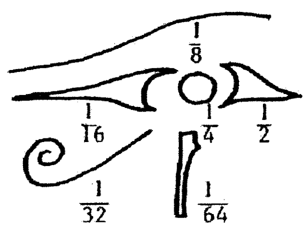
2.5.3. Les fractions

Dans les anciens traités mathématiques égyptiens, on ne retrouve que des fractions unitaires à l'exception de 2/3. Pour les Égyptiens de l'époque, une fraction de la forme n/m où n et m > 1 est vue comme une division inachevée. Par exemple, au lieu d'écrire 4/5, les Égyptiens écrivaient 1/2 1/5 1/10 (c.-à-d. 1/2+1/5+1/10) . Une fraction était pour eux une dernière partie d'un tout. Ainsi, 1/5 signifiait « part 5 », donc cinquième partie.

Il existe des règles particulières concernant l'écriture des fractions unitaires (voir annexe 2). Tout d'abord, il faut savoir que lors de l'écriture de fractions, les Égyptiens n'utilisaient jamais deux fois une même fraction unitaire. Par exemple, la fraction 2/5 ne pouvait pas être représentée par 1/5 1/5. Il existait cependant des tables permettant l'écriture rapide de fractions sous la forme 2/n. Ces tables s'avéraient particulièrement utiles lors de multiplications et de divisions. Une autre règle importante à retenir est que les Égyptiens utilisaient la plus petite quantité de fractions unitaires possible. Par exemple, les Égyptiens préféraient 1/2 1/5 1/10 à 1/2 1/5 1/15 1/30 pour représenter 4/5. Lors de l'écriture des fractions, les Égyptiens écrivaient les fractions unitaires en ordre décroissant (du plus petit dénominateur au plus grand).

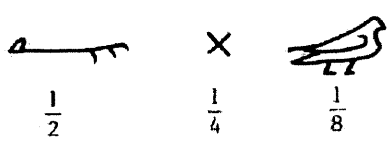
Plusieurs se sont posé la question à savoir comment les Égyptiens faisaient pour additionner des fractions unitaires ? Il n'est fait mention nulle part dans les écrits d'une technique d'addition alors que la multiplication et la division sont expliquées. On a retrouvé un rouleau de cuir (acheté en 1858 par Rhind) qui contenait des tables d'addition. Il a cependant fallu 60 ans pour découvrir une technique permettant de le dérouler sans l'abîmer.

Dans les traités mathématiques égyptiens, on retrouve diverses façons de représenter les fractions. En voici quelques-unes:



Le hekat est l'unité de capacité des céréales. 1 hekat équivaut à 4,5 litres.

Figure 2 : Hiéroglyphes des fractions du hekat (tiré de Keller, p. 4)



Le setat correspond à dix mille coudées carrées.
1 coudée = 0,523 m

Figure 3 : Hiéroglyphes des fractions du setat (tiré de Keller, p. 5)

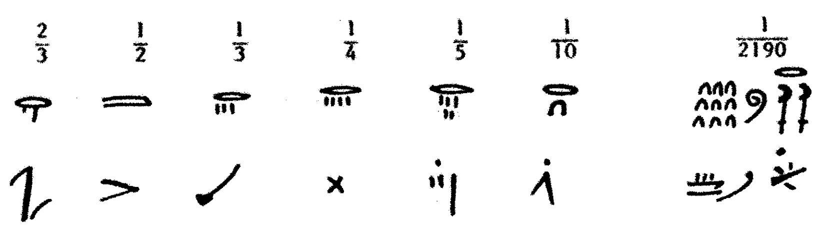


Figure 4 : Fractions unitaires les plus utilisées dans le Papyrus Rhind (tiré de Keller, p. 6)

2.5.4. Le Papyrus Rhind

Les exercices qui seront présentés aux étudiants-maîtres dans le cadre de cette recherche sont tirés du Papyrus Rhind. Il s'agit d'un document qui a été découvert à Thèbes, supposément dans les ruines d'un bâtiment près du Ramesseum. Il fut acheté en 1858 par l'écossais A.H. Rhind à Louxor. Il fut par la suite déposé au British Museum. En 1898, le British Museum publia un fac-similé inégalé du Papyrus Rhind. Aujourd'hui, le papyrus original se retrouve en deux grands fragments conservés au British Museum ainsi que quelques petits fragments qui sont en la possession de l'*Historical Society of New York.* À l'origine, le document aurait mesuré 18 pieds de long par 13 pouces de large.

Il fut rédigé en écriture hiératique par le scribe Ahmose vers 1650 av. J.-C. Selon le copiste, le document daterait de la 33^{e} année du règne du souverain nommé Aaouserenrê Apophis mais serait en fait la copie d'un document plus ancien datant de la XII^{e} dynastie et rédigé sous le règne du roi Mymaôtrê Ameremhat. Le document original devait donc dater de 1850 à 1800 av. J.-C.

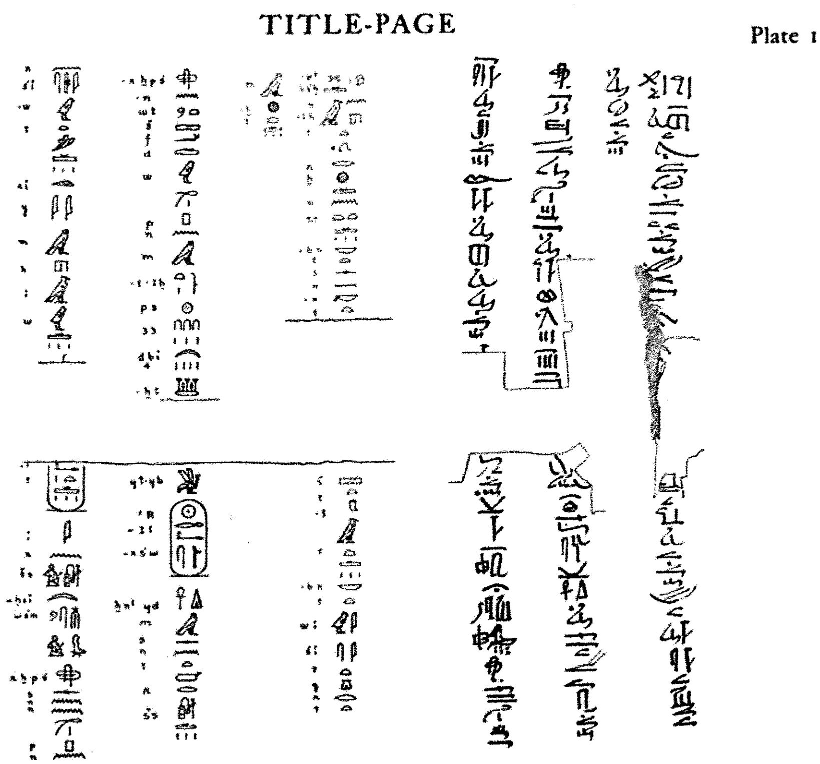
Le Papyrus Rhind traite de divers problèmes, entre autres des problèmes de comptabilité, d'arithmétique et de géométrie. On y retrouve également des problèmes de résolution d'équations du premier degré, bien que les équations telles que nous les connaissons aujourd'hui n'étaient pas encore utilisées.

Dans l'Égypte ancienne, les scribes utilisaient de l'encre noire ainsi que de l'encre rouge. Les diverses utilités de l'encre rouge ont été analysées et décrites par G. Posener.

> « *On écrit en rouge :*
> - *pour mettre un élément en évidence*
> - *pour diviser un texte*
> - *pour isoler un mot*
> - *pour différencier des catégories.* »
>
> (Couchoud, 1993, p. 185)

La signification attribuée à l'utilisation de l'encre rouge est relative à chaque document. Ainsi, la signification ne sera peut-être pas la même, si on lit un document médical, un compte rendu de dates de livraison ou une œuvre littéraire. Il y aurait peut-être eu aussi une certaine connotation magique ou religieuse attribuée à l'utilisation de l'encre rouge dans certains documents.

Dans le Papyrus Rhind, l'emploi de l'encre rouge est très varié. Par exemple, on peut retrouver les mots « diviser » et « exécution » écrits à l'encre rouge. Aussi, la moitié du temps, le mot « somme » est écrit en rouge. Généralement, les titres sont écrits en rouge afin d'indiquer le début d'un nouveau problème. Ce n'est cependant pas systématique et il y a des exceptions.



Photograph I, Columns I-3 B.M. Facsimile, Plate 1

Figure 5 : Page titre du Papyrus Rhind (tiré de Chace, 1979, p. 85)

Traduction anglaise : (Chace, 1979, p. 84)

« Accurate reckoning of entering into things, knowledge of existing things all, mysteries … secrets all. Now was copied book this in year 33, month four of the inundation season [under the majesty of the] King of [Upper and] Lower Egypt, 'A-user-Rê', endowed with life, in likeness to writing of old made in the time of the

King of Upper [and Lower] Egypt, [Ne-ma]'et-[Rê]. Lo the scribe A'h-mosè writes copy this. »

Traduction française : (Couchoud, 1993, p. I)

« Exemple de calcul afin de sonder les choses, et connaître tout ce qui est obscur ... ainsi que tous les secrets. C'est pour cela assurément qu'à recopié ce rouleau en l'an 33 durant le quatrième mois de la saison de l'inondation... [sous la majesté du roi de Haute] et Basse-Égypte Aaouserrê, doué de vie, conformément aux écrits des temps anciens qui ont été faits au temps [du roi Ny-ma]ât-Rê (Amenemhat II). C'est le scribe Ahmose qui a recopié cet ouvrage. » (SIC)

2.5.5. Techniques de calcul égyptien

Afin de résoudre les problèmes tirés du Papyrus Rhind, les étudiants-maîtres devront utiliser certaines techniques de calcul présentes dans la civilisation égyptienne. Ils devront aussi s'habituer à travailler avec des fractions unitaires. Comme nous l'avons mentionné un peu plus tôt, les procédés d'addition et de soustraction ne sont pas explicités dans les documents qu'on a retrouvés jusqu'à présent. Par contre, la multiplication et la division chez les anciens Égyptiens ont été décrites par plusieurs auteurs. Les étudiants-maîtres devront donc apprendre entre autres à multiplier et à diviser par doublement, une technique bien différente de celle que nous employons régulièrement de nos jours. De plus, ils devront se familiariser avec la technique de « fausse position ». Il s'agit d'une méthode permettant de résoudre des équations du premier degré.

La multiplication

Ex. : 24 x 37

	1	37	
	2	74	
	4	148	
16 + 8 = 24 ← +	8	296	+ → 296 + 592 = 888
	16	592	

réponse : 888

La multiplication, se fait par <u>doublement</u> et par <u>addition.</u>

1. On fait 2 colonnes. On remplace le plus petit nombre par 1. Dans l'autre colonne, on met le plus grand nombre tel quel.
2. À chaque ligne, on double les valeurs de la ligne précédente.
3. Dans la colonne du plus petit nombre, on cherche les nombres qui additionnés entre eux donneront ce nombre (ici= 24)
4. On prend les valeurs correspondantes dans l'autre colonne et on les additionne. On obtient alors le résultat voulu.

La division

Ex. : 847 ÷ 33 ⇒ diviseur
↳ Dividende

	33	1	
	66	2	
33+264+528= 825 ← +	132	4	+ → 1+8+16 = 25
	264	8	
	528	16	

réponse : 25 reste 22

La division se fait par <u>doublement</u> et par <u>addition</u>

1. On fait 2 colonnes : Dans la première on met le diviseur, dans la deuxième on met le nombre 1.
2. À chaque ligne, on double les valeurs de la ligne précédente.
3. On cherche dans la première colonne les nombres qui additionnés entre eux donneront la valeur du dividende (ou du moins le nombre qui s'en rapproche le plus sans le dépasser.)
4. On prend les valeurs correspondantes dans la deuxième colonne et on les additionne.

Si la valeur à l'étape 3 n'arrive pas juste, on cherche le reste en soustrayant du dividende la valeur trouvée à l'étape 4.

Fausse position

La fausse position est une méthode fondée sur la proportionnalité qui était utilisée en Égypte antique, et qui permet de résoudre certaines équations du 1er degré sans avoir recours à l'algèbre actuelle. Il s'agit d'un des procédés les plus anciens.

> « *Lorsqu'elle ne peut directement procéder du connu à l'inconnu, l'arithmétique sait éviter l'emploi de l'inconnue par le recours – entre autres procédés – à une « fausse supposition », c'est-à-dire à une hypothèse arbitraire sur la valeur de l'inconnue : il reste alors à déterminer le coefficient de proportionnalité qui permet de passer de cette valeur supposée à la valeur cherchée. C'est la règle fameuse, et ancienne, dite « de faux », « de fausse position » ou encore, dans les ouvrages plus récents, « de fausse supposition », dont le traitement est demeuré inchangé, et fortement stéréotypé sur plusieurs siècles.* » (Chevallard, 1989, p. 27)

En d'autres mots, pour appliquer la méthode de « fausse position » il faut :

1. Attribuer une valeur à la quantité recherchée ;
2. Effectuer les calculs à partir de la valeur supposée ;
3. Comparer le résultat obtenu au résultat recherché ;
4. Déterminer le coefficient de proportionnalité ;
5. À l'aide du coefficient de proportionnalité et de la valeur supposée, déterminer la quantité recherchée.

Exemple d'application de la méthode de « fausse position »

> *« J'ai mis certaine somme d'Écus en Banque pour en avoir chaque an 6 pour 100 : Au bout de 10 ans m'ont été baillés 500 Écus pour tout : Quelle était la somme principale ? »* (Pelletier du Mans, 1554 tiré de Chevallard, 1989, p. 27)

Traduction actuelle : $10 \cdot 6\% \cdot x + x = 500$

Supposons que la quantité est 200 écus. Nous aurions ainsi après 10 ans, 320 écus. Or, ce que nous cherchons, c'est la quantité qui nous permettra d'avoir 500 écus après 10 ans. Pour passer de 320 à 500, il suffit de multiplier par 1,5625 (ou 1 et 9/16 ou encore 1 1/2 1/16). Il suffit donc de multiplier la quantité supposée, soit 200 écus par ce même coefficient pour trouver la quantité réellement recherchée.

2.6. Obstacles en algèbre

Comme nous l'avons vu au début de la section 2.5, nous pouvons séparer l'histoire de l'algèbre en trois étapes importantes. Il arrive que certains élèves passent par des étapes semblables dans leur apprentissage de l'algèbre (Harper, 1987 cité dans Kieran, 1990). Nous verrons un peu plus loin que le symbolisme est source d'erreurs pour plusieurs élèves. Mais d'abord, voyons comment l'algèbre est enseignée au secondaire.

L'algèbre est entre autres présentée au secondaire comme un outil de généralisation de l'arithmétique. On apprend cependant aux élèves des règles algébriques qui n'ont pas d'équivalent en arithmétique, tel qu'opérer sur l'inconnue. Ceci peut être la cause de confusion chez plusieurs élèves. En effet, au début de leur apprentissage de l'algèbre, les élèves ont déjà un bagage de connaissances et de compétences acquises par leurs expériences en arithmétique. Ces conceptions devront être élargies et parfois même modifiées afin de pouvoir être utilisables en algèbre.

Certains problèmes utilisant le symbolisme littéral peuvent être résolus par l'arithmétique. En effet, des problèmes de la forme $x + a = b$, $ax = b$ ou encore $ax + b = c$ peuvent être facilement résolus sans avoir recours à l'algèbre. Par exemple, dans $x + 4 = 7$, un élève peut se demander 4 plus quoi égale 7 et arriver à trouver la réponse sans aucun travail sur l'inconnue, ce qui est une des caractéristiques du raisonnement algébrique. Lors de son apprentissage de l'arithmétique, l'élève a déjà eu à résoudre de tels problèmes. Le problème prenait alors souvent la forme suivante : $\square + 4 = 7$, où l'inconnue est symbolisée par un espace vide ou un point d'interrogation. D'autres problèmes par contre nécessitent une démarche algébrique. Par exemple, la résolution d'équations contenant une inconnue de chaque côté du signe "=" comme $ax + b = cx + d$ peut difficilement se faire seulement par arithmétique. Le passage entre l'utilisation de l'arithmétique et l'utilisation de l'algèbre dans la résolution de problèmes est une étape importante dans l'apprentissage de l'algèbre et peut renfermer plusieurs obstacles. (Kieran, 1990)

Pour bien comprendre, voyons ce qui différencie ces deux domaines. En arithmétique, les élèves associent beaucoup les opérations à des grandeurs et au contexte. L'inconnue correspond au « point final du trajet emprunté par l'élève ». Au contraire, en algèbre, l'élève accepte d'opérer sur cette inconnue et les opérations qu'il effectue sont détachées des grandeurs et du contexte. (Bednarz et Janvier, 1991)

Comme nous l'avons vu précédemment dans les trois phases de l'évolution de l'algèbre, l'algèbre actuelle est caractérisée par son symbolisme. Avant même de commencer son apprentissage de l'algèbre, l'élève a des conceptions relativement à certains symboles mathématiques. Ces conceptions ont principalement été développées dans un cadre arithmétique. En effet, les symboles d'addition, de soustraction, de multiplication, de division et d'égalité ne lui sont pas inconnus. Mais la signification qu'il leur donne n'est pas nécessairement adaptée à une démarche algébrique.

En arithmétique, la réponse ne garde pas la trace de la démarche. En algèbre c'est un peu différent et c'est souvent ce qui pose problème. Par exemple, si on demandait à un élève combien il y a d'objets dans les deux ensembles représentés à la figure 6, celui-ci trouverait probablement la réponse facilement. L'élève reconnaîtra le nombre total d'objets dans deux ensembles contenant respectivement 5 et 8 objets comme 13 et non pas 5+8. Il est alors possible que cet élève éprouve de la difficulté dans un cadre algébrique où on retrouve "a" objets dans un premier ensemble et "b" objets dans un deuxième, à concevoir que le total est de a+b. Tout à coup, la réponse représente la démarche utilisée et non pas un nombre précis (Kieran, 1990). Pour plusieurs élèves, une telle réponse n'est pas acceptable puisqu'en arithmétique, ils n'ont pas été habitués à voir le symbole « + » dans une réponse. Pour eux le problème n'est pas terminé tant qu'on n'aboutit pas à un résultat, c'est-à-dire à un nombre, et non à une opération. Certains élèves ont tendance à vouloir transformer les expressions en équations. Par exemple, s'ils ont une expression comme x + 7, ils chercheront à rajouter le signe = et à trouver une réponse numérique. L'expression devient alors une équation.

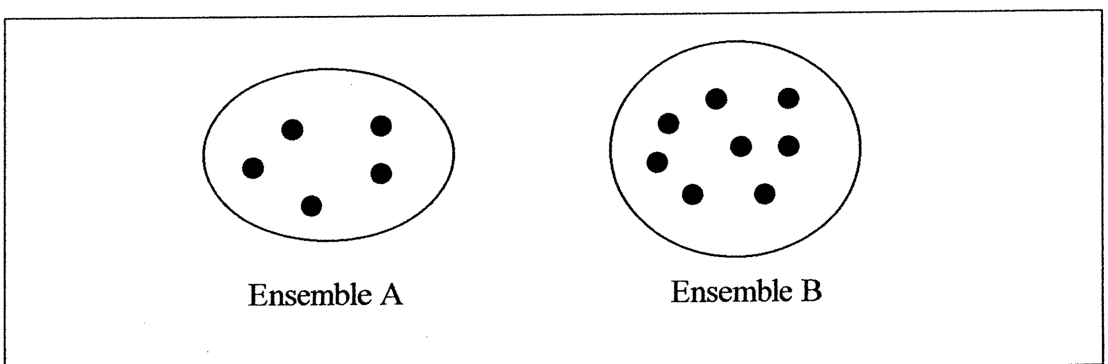


Figure 6 : Dénombrement d'objets dans des ensembles

2.6.1. Le symbole d'égalité

La notion d'égalité est en soi une notion qui est souvent à l'origine de plusieurs erreurs. Il s'agit d'un sujet très vaste. Des thèses complètes ont déjà été écrites sur cette notion. Nous tenterons donc d'en résumer certains points importants.

Le symbole d'égalité est perçu par plusieurs élèves comme un symbole séparateur plutôt qu'une relation d'équivalence. La conception reliée au signe d'égalité que développent les élèves peut donner lieu à certains obstacles. En arithmétique, l'élève a été habitué à ce que la réponse soit à droite du signe « = ». Pour plusieurs « = » signifie « ça donne ... ». (Kieran, 1981) Cette représentation du symbole d'égalité peut fonctionner dans certaines situations comme par exemple 2x+5 =13. On peut traduire ceci de la façon suivante : « Deux fois quoi plus cinq donne treize ? ». Par contre, une telle représentation ne pourrait s'appliquer à une équation comme $2x + 5 = x + 9$. Le symbole « = » doit alors être vu comme une relation d'équivalence et non plus comme un séparateur entre le problème et la réponse.

2.6.2. Les symboles littéraux

Avant ses débuts en algèbre, l'élève a déjà utilisé des termes littéraux en mathématiques, que ce soit dans la représentation de formules comme A = bxh ou en tant qu'unités de mesure comme m, cm, g ... Ces connaissances peuvent dans certains cas être nuisibles à l'introduction des variables en algèbre. Une étude menée par Küchemann en 1981 (dans Kieran, 1990) auprès de 3 000 élèves britanniques de 13 à 15 ans a démontré que 73 % des élèves de 13 ans, 59 % des élèves de 14 ans et 53 % des élèves de 15 ans traitent les lettres dans les expressions ou les équations comme des objets. Peu sont capables de considérer les lettres comme des inconnues et encore moins comme des nombres généraux ou variables.

Un autre problème relié aux symboles littéraux est la traduction d'un problème écrit en symboles. Plusieurs élèves éprouvent des difficultés à mettre un problème en équations. Dans une étude menée par Clément (cité dans Kieran, 1990), on a demandé à des élèves d'écrire une équation en utilisant les variables S et P pour représenter le problème suivant:

> « *There are six times as many students as professors at this university. Use S for the number of students and P for the number of professors.* » « *It was*

found that 37% of the students answered incorrectly ; and of these, 68% represented the problem as 6S=P. » (Kieran, 1990, p. 102)

Ces élèves ont traduit littéralement le problème mot à mot.

Plusieurs élèves ont tendance à penser que dans une équation comme 6S=P, S est plus grand que P. Ceci est attribuable à leur interprétation du problème écrit. Il est clairement écrit qu'il y a plus d'élèves que de professeurs. L'habileté à décrire verbalement une relation n'implique pas automatiquement l'habileté de symboliser cette relation mathématiquement. Certains problèmes demandent, pour être représentés par une équation, que l'élève soit capable d'écrire l'inverse de ce qu'il fera arithmétiquement pour résoudre le problème, mais ceci n'est pas applicable à tous les problèmes. Cela dépend de la formulation du problème en question. Une des difficultés de la mise en équations est d'ailleurs le fait que les habiletés qu'elle nécessite varient selon la formulation du problème.

L'habileté à utiliser l'inverse et l'opposé est nécessaire aussi lorsqu'on demande à l'élève de résoudre une équation. Pour ce faire, il doit utiliser des opérations contraires à celles présentes dans l'équation. Nous avons tendance à assumer que les élèves savent reconnaître les opérations inverses et opposées comme la soustraction qui est l'opposée de l'addition. Nous assumons qu'ils savent que 3+4=7 est équivalent à 7-4=3. Et nous nous attendons à ce qu'ils soient capables de généraliser cela en algèbre ($x+4=7 \Leftrightarrow 7-4=x$). Or, ce n'est pas toujours le cas. On peut remarquer deux erreurs fréquentes faites par les élèves. La première est la suivante : $x+4=7 \Leftrightarrow 7+4=x$. L'élève transporte un nombre de l'autre côté du signe "=" tout en gardant l'addition plutôt qu'en utilisant son opposé. Il faut cependant faire attention à ce que l'utilisation de l'inverse et de l'opposé ne devienne pas une règle qu'on applique systématiquement, car cette règle peut devenir un obstacle dans certains cas. Par exemple, on peut observer des raisonnements comme celui-ci : $x + 4 = 7 \Leftrightarrow x + 4 - 4 = 7 + 4$, où l'élève a appliqué la règle « je dois faire le contraire de l'autre côté du signe = ».

2.6.3. Inverse ou opposé

Une autre erreur fréquente chez les élèves est la confusion entre ajouter l'opposé ou multiplier par l'inverse. Par exemple, pour un problème du type 7x=15, certains élèves répondent x=15-7 ou x=-15/7. Dans le premier cas, l'élève confond la multiplication par l'inverse et l'ajout de l'opposé. Dans le second cas, l'élève a bien utilisé l'inverse mais il a également utilisé la règle « un nombre change de signe lorsqu'il change de membre ». (I.R.E.M., 1989)

2.6.4. Le zéro

Certains élèves éprouvent de la difficulté à concevoir que 0/8=0. Dans un problème du type 8x=0 certains élèves répondront x=-8 ou encore x=1/8. L'erreur est encore plus fréquente lorsqu'on fait face à un problème du type 0x=8. L'élève a beau connaître les propriétés du zéro, il est difficile d'accepter une solution inexistante. On obtient souvent des réponses comme x=8 ou x=0. Certains confondent aussi le neutre multiplicatif et le neutre additif. Par exemple, dans un problème de simplification, comme $8x^2/2x(4x)$ certains répondront que c'est égal à zéro puisque le numérateur et le dénominateur s'annulent.

2.6.5. Les trois types d'approches dans la résolution algébrique

Des études sur l'apprentissage de l'algèbre ont démontré qu'il existe plusieurs approches dans la résolution de problèmes. Ces différentes approches ont été classées en trois catégories : l'approche intuitive, l'approche par essais et erreurs et l'approche formelle (Kieran, 1990). L'approche intuitive, comme son nom l'indique, fait appel à l'intuition et à la logique de l'élève. Elle nécessite une bonne mémoire puisque les opérations se font mentalement. L'approche par essais et erreurs est surtout utilisée dans les débuts de l'algèbre mais elle est vite abandonnée puisqu'il s'agit d'une approche qui demande beaucoup de temps et qui est peu efficace. Par contre, les élèves qui utilisent cette approche ont tendance à mieux comprendre l'effet de balance entre les deux côtés du signe égal. La méthode formelle quant à elle, consiste à effectuer les mêmes opérations des deux côtés du signe d'égalité. Il s'agit en fait d'une procédure à suivre. Les élèves qui utilisent une combinaison de l'approche formelle et intuitive réussissent mieux que ceux qui utilisent une seule de ces approches (Kieran, 1990).

2.7. L'objectif

L'objectif général de cette recherche est de concevoir et de mettre à l'épreuve une petite séquence d'enseignement visant à sensibiliser les étudiants-maîtres à la notion d'obstacle. Par cette séquence d'enseignement, nous souhaitons dans un premier temps amener les étudiants-maîtres à vivre une situation d'obstacle, et dans un deuxième temps, les amener à prendre conscience de ce qui leur fait obstacle et les amener à faire un parallèle entre la situation d'obstacle qu'ils auront vécue et ce que peuvent vivre les élèves du secondaire.

Nous avons choisi la méthode de simulation (Astolfi, 1989) pour tenter de sensibiliser les étudiants-maîtres à la notion d'obstacle. Nous voulons leur faire vivre un obstacle en mathématiques, relié à une notion vue au secondaire (la résolution d'équations) et leur faire reconnaître à partir de cette expérience ce qu'est un obstacle. Mais la didactique n'échappe pas à ses propres théories. Quels seront les obstacles rencontrés par les étudiants-maîtres face à la notion d'obstacle ? Comment traiter ces obstacles ? Mais aussi, comment arriver à faire vivre un obstacle en mathématiques à des étudiants-maîtres ?

Comme la plupart des enseignants sont des gens qui ont toujours eu de la facilité en mathématiques, particulièrement en ce qui concerne les notions vues au secondaire, il faudra trouver un moyen de rendre leurs connaissances inadéquates. Mais comment ? Nous avons choisi d'utiliser l'histoire pour sa fonction dépaysante, afin de sortir la notion visée de son contexte habituel. En se plaçant dans le contexte historique, les étudiants-maîtres ne pourront avoir recours à leurs connaissances actuelles en matière d'algèbre, ce qui risque d'amener un premier obstacle en matière de compréhension des techniques égyptiennes. Par la suite, nous tenterons de leur faire vivre un deuxième obstacle face à la résolution d'équations. Cette fois-ci, ce ne sera pas leurs connaissances actuelles qui feront obstacle, mais bien leurs nouvelles connaissances égyptiennes. L'obstacle sera-t-il vraiment celui que nous souhaitons voir ressortir ? Pour nous en assurer, nous devrons porter une grande importance au choix des problèmes et à l'ordre dans lequel ils seront présentés aux étudiants-maîtres. Il en sera d'ailleurs fait mention dans le prochain chapitre, où nous tenterons de répondre à certaines questions que nous venons de poser, en détaillant, en analysant et en élaborant davantage les divers facteurs mis en œuvre dans l'élaboration de notre séquence d'enseignement.

Chapitre 3

Méthodologie

Comme notre projet de recherche vise à observer des comportements et à les analyser au lieu de comparer des statistiques, nous nous fonderons sur une étude qualitative plutôt que quantitative. Pour ce faire, nous aurons recours à l'ingénierie didactique telle que décrite par Artigue (1988).

> *« L'ingénierie didactique, vue comme méthodologie de recherche, se caractérise en premier lieu par un schéma expérimental basé sur des « réalisations didactiques » en classe, c'est-à-dire sur la conception, la réalisation, l'observation et l'analyse de séquences d'enseignements. » (Artigue, 1988, p. 285-286)*

En effet, nous voulons élaborer et expérimenter une mini séquence d'enseignement autour de la notion d'obstacle.

La méthodologie d'ingénierie didactique décrite par Artigue comporte quatre phases importantes : l'analyse des préalables, la conception et l'analyse a priori, l'expérimentation, l'analyse a posteriori et l'évaluation.

Avant de concevoir une séquence didactique, il faut être conscient des divers facteurs qui peuvent influencer cette séquence. Le cadre théorique est un guide pour l'élaboration d'une séquence, mais ce n'est pas suffisant. Il faut également s'appuyer sur l'analyse des préalables afin d'avoir une meilleure vue d'ensemble. Ces analyses peuvent être diverses. Artigue (1988) en énumère quelques-unes qu'on retrouve le plus souvent :

- *l'analyse épistémologique des contenus visés par l'enseignement ;*
- *l'analyse de l'enseignement usuel et de ses effets ;*
- *l'analyse des conceptions des élèves, des difficultés et des obstacles qui marquent leur évolution ;*
- *l'analyse du champ de contraintes dans lequel se situera la réalisation didactique effective.*

Dans le cadre de notre recherche, nous avons décidé de nous concentrer principalement sur l'analyse épistémologique de la notion d'obstacle déjà réalisée à l'intérieur du cadre théorique, l'analyse des conceptions des étudiants-maîtres face à cette notion et une brève analyse du champ de contraintes. Comme l'ingénierie didactique telle que décrite par Artigue s'applique principalement à l'élaboration de séquences en mathématiques, certaines analyses sont plus difficiles à réaliser lorsque le sujet principal est une notion didactique plutôt que mathématique. Par exemple, en ce qui concerne l'enseignement usuel de la notion d'obstacle, il est difficile de parler « d'usuel » puisque les programmes peuvent être différents d'une université à l'autre.

Une fois l'analyse préalable terminée, nous serions alors en mesure de commencer l'élaboration de la séquence didactique. Lors de la conception, plusieurs questions surgissent et le chercheur doit faire des choix didactiques.

> *« Dans cette seconde phase, le chercheur prend la décision d'agir sur un certain nombre de variables du système non fixées par les contraintes : variables de commande dont il suppose qu'elles sont des variables pertinentes par rapport au problème étudié. »* (Artigue, 1988, p. 291)

Après avoir élaboré la séquence didactique et justifié les choix que nous avons dû faire, vient l'analyse a priori. Il s'agit en fait de formuler nos hypothèses et nos attentes face au déroulement de notre situation. *« L'objectif de l'analyse a priori est donc de déterminer en quoi les choix effectués permettent de contrôler les comportements des élèves et leur sens. »* (Artigue, 1988, p. 294)

Nous serions alors prête pour l'expérimentation, la cueillette des données puis l'analyse a posteriori et la validation. En général les données recueillies sont sous la forme d'observations réalisées lors de la séquence didactique ou de travaux d'élèves en classe ou hors classe. Au besoin, on peut compléter ces données par l'utilisation de méthodologies externes telles que le questionnaire, l'entretien individuel ou en petit groupe, … (Artigue, 1988).

Finalement, notons que la validation de l'ingénierie didactique est fondée sur la confrontation entre les analyses a priori et les analyses a posteriori, comparativement aux recherches traditionnelles qui ont recours à l'expérimentation et qui basent leur validation sur la comparaison statistique des performances entre des groupes expérimentaux et des groupes témoins.

3.1. L'analyse des préalables

Avant de commencer la conception de notre séquence didactique, nous avons voulu analyser plus en profondeur quelques aspects de l'enseignement de la notion d'obstacle en formation des maîtres qui n'ont pas été traités dans le cadre théorique. Comme l'analyse épistémologique des contenus visés par l'enseignement a déjà été abordée dans le cadre théorique, nous passerons immédiatement à l'analyse des conceptions des étudiants-maîtres face à la notion d'obstacle.

3.1.1. L'analyse des conceptions des élèves, des difficultés et des obstacles qui marquent leur évolution

Étude de cas

Nous avons d'abord consulté la littérature, afin de trouver des conceptions, des difficultés et des obstacles des étudiants-maîtres face à la notion d'obstacle. Comme peu de recherches à notre connaissance ont été faites à ce sujet (Giordan, Larose et René de Cotret), nous avons décidé de compléter notre analyse par une étude de cas proposée aux étudiants-maîtres (voir annexe 4). Notre but premier en réalisant cette étude de cas, est de rechercher les conceptions préalables des étudiants-maîtres face à la notion d'obstacle, et de vérifier s'ils ont des conceptions inadéquates qui pourraient éventuellement se transformer en obstacles.

L'étude de cas a été construite à partir de cas réels d'élèves. Nous avons demandé à cinq classes d'élèves de troisième secondaire de répondre aux questions suivantes :

1. $11 + x = 27$
2. $0,31 + x = 1$
3. $11/15 + x = 1$
4. $x + 7x = 48$
5. $x + 3x = 5$
6. $x + x/2 = 16$
7. $3(x + 2x) - (x + 2x) = 36$

Il est à noter que cette expérience a été faite au début de l'année scolaire, après le troisième cours. Les élèves n'avaient donc pas encore eu l'occasion de revoir les notions d'algèbre apprises l'année précédente. Après avoir étudié les réponses des élèves, nous avons choisi quelques cas, soit ceux d'Éric, Julie, Martin et Anne, qui renfermaient certaines erreurs présentées à la section 2.6. Les erreurs les plus fréquentes étaient au niveau du symbole d'égalité et au niveau de l'utilisation de l'inverse ou de l'opposé. Nous avons donc gardé quatre cas qui renfermaient ces erreurs afin d'en faire une étude de cas qui a été présentée aux étudiants-maîtres.

L'étude de cas a été réalisée au cours de la semaine du 13 au 20 septembre 2001, avec un groupe d'étudiants-maîtres, dans un cours de didactique des mathématiques (4e année) dans le cadre du BES à l'Université de Montréal. Vingt étudiants et étudiantes ont fait le travail qui était à faire à la maison. Il s'agit du même groupe qui participera à l'expérimentation de la séquence d'enseignement au mois de novembre.

Les consignes pour l'étude de cas étaient les suivantes :

Dans les pages suivantes, nous vous présentons les réponses de certains élèves. Évidemment, les noms utilisés sont fictifs afin d'assurer l'anonymat des élèves. Analysez leurs démarches, et répondez aux questions suivantes :

1. *Pour chacun des élèves, identifiez les erreurs et les obstacles rencontrés.*
2. *Quelles sont, selon vous, les causes d'erreurs ?*
3. *Que pensez-vous qui fait obstacle à la réussite de ces élèves ?*
4. *Comment aideriez-vous ces élèves ? Justifiez votre réponse.*

Ces questions ont été élaborées en fonction de certaines attentes et certains points que nous voulions faire ressortir. Les questions 1 et 3 nous renseignent sur la distinction que font les étudiants-maîtres entre erreur et obstacle. À partir de cette distinction, nous pourrons déjà entrevoir des pistes de conceptions préalables. Les questions 2 et 3 nous informent sur l'idée que se font les étudiants-maîtres des causes d'erreurs. S'agit-il d'un manque à combler ou d'une connaissance qui devient inadéquate ? Déjà, les conceptions préalables des étudiants-maîtres deviennent plus claires. Et finalement, la question 4 vient vérifier s'il y a cohérence entre ce que l'étudiant-maître a répondu aux questions 1, 2 et 3, qui sont plus des questions d'ordre théorique, et ce qu'il ferait réellement dans la pratique. Ceci vient donc compléter notre protocole pour l'étude des conceptions préalables des étudiants-maîtres face à la notion d'obstacle.

Compte rendu des résultats

À la question 1, nous n'avons pas vraiment eu l'effet escompté. En effet, les étudiants-maîtres n'ont pas fait de différence entre erreur et obstacle. À cette question, ils n'ont fait ressortir que l'erreur et n'ont pas fait mention de l'obstacle. Il s'agit tout de même d'un indice par rapport à leur conception de l'obstacle. Peut-être ne voient-ils pas de différence entre ces deux concepts ? Peut-être ne savent-ils pas ce qu'est un obstacle ?

Onze étudiants-maîtres décrivent l'erreur en disant ce que l'élève a fait alors que neuf étudiants-maîtres décrivent l'erreur en disant ce que l'élève n'a pas fait ou ce qu'il n'a pas compris. Voici deux exemples de formulation d'erreur provenant d'étudiants-maîtres et liés aux problèmes d'Éric tirés de l'étude de cas (voir annexe 4) :

- *« Il additionne du côté droit de l'égalité la constante qu'il a soustraite du côté gauche au lieu de la soustraire. »*
- *« Il ne fait pas la même opération des 2 côtés de l'équation. »*

Bien qu'un peu plus de la moitié des étudiants-maîtres décrivent l'erreur comme quelque chose que l'élève a fait plutôt que quelque chose qu'il n'a pas fait, nous verrons plus loin que cette formulation n'est pas conservée à la question 3 où il est question d'obstacles.

En ce qui concerne les causes d'erreurs à la question 2, les étudiants-maîtres utilisent les termes suivants pour les décrire :

« il ne comprend pas que..., il ne réalise pas que..., il a des lacunes concernant..., il ne se souvient pas..., il a oublié..., il manque de compréhension. »

On peut constater que la plupart des étudiants-maîtres considèrent la cause d'erreur comme une notion incomprise ou oubliée. Certains utilisent la formulation « il a compris... » mais ils laissent sous-entendre que l'élève a tort de penser ainsi. On pourrait donc penser que ces derniers comprennent le sens accordé à la notion d'obstacle. Pourtant, comme nous le verrons un peu plus tard, lors du traitement de l'obstacle, ces étudiants-maîtres tenteront eux aussi de combler le manque au lieu de partir de ce que l'élève sait. Or, comme nous l'avons mentionné à la section 2.3.3., il faudra plus qu'une simple démonstration du fonctionnement de la nouvelle technique pour convaincre l'élève de modifier sa façon de penser. Aucun étudiant-maître n'a mentionné que les connaissances utilisées par les élèves ont leur succès dans d'autres situations.

Dans le même ordre d'idée, l'obstacle est décrit au numéro 3 comme un manque à combler plutôt qu'une connaissance inadéquate. La majorité des étudiants-maîtres considèrent l'obstacle comme une notion ou un concept que l'élève n'a pas compris et qu'il doit comprendre pour résoudre le problème. Voici deux exemples de formulation d'obstacle soulevés par des étudiants-maîtres dans l'étude du cas d'Éric (voir annexe 4) :

- *Obstacle : Mauvaise compréhension de la notion d'équation, d'égalité entre les 2 membres (gauche-droite)*
- *Obstacle : Transférer une constante d'un côté à l'autre de l'égalité*

Selon les réponses des étudiants-maîtres, nous avons remarqué que la majorité d'entre eux émettaient des diagnostics assez radicaux au lieu de faire des hypothèses sur les causes possibles d'erreurs ou sur les obstacles. À les lire individuellement, on croirait qu'il n'y a qu'une cause d'erreur possible, pourtant quand on regarde l'ensemble de leurs réponses, on s'aperçoit qu'il peut y avoir plus d'une cause ou d'un obstacle possible relié à une même erreur.

D'après leurs solutions pour venir en aide aux élèves (question 4), on peut observer une tendance à donner ce qui manque. Certains proposent de réexpliquer certaines notions ou de faire une révision de certains concepts. Un étudiant-maître a même mentionné qu'il fallait « renforcer la notion incomprise ». *« L'obstacle majeur dans ce cas étant la non-compréhension du sens d'un coefficient, il faut renforcer cette notion. »* Plusieurs ont proposé de donner des exemples plus concrets en utilisant des pommes. En voici un exemple : *« Mes 11 pommes + les tiennes (x) donnent 27 pommes. Pour savoir combien de pommes tu as, il faut faire 27 pommes – 11 pommes = 16 pommes = x. »* Un autre étudiant-maître a proposé de faire un exemple avec de l'argent puis de lui faire faire des séries d'exercices semblables. D'autres ont suggéré d'utiliser une balance pour faire comprendre le sens de l'égalité aux élèves. Deux étudiants-maîtres ont suggéré d'utiliser des exemples numériques, c'est-à-dire de remplacer les inconnues par des nombres afin d'aider l'élève à comprendre. Malgré l'intérêt de ces propositions, aucune ne semble s'appuyer sur les connaissances inadéquates car aucun étudiant-maître n'a proposé de travailler sur les conceptions antérieures en jeu dans la démarche des élèves.

Si on se réfère à la définition de Brousseau, on peut donc constater que les étudiants-maîtres ont une conception inadéquate de la notion d'obstacle, puisqu'ils considèrent l'obstacle comme un manque plutôt qu'une connaissance inadéquate. Cette conception est peut-être reliée à leur expérience personnelle. Ils ont probablement observé plus d'une fois des enseignants qui, pour aider un élève qui ne comprend pas, réexpliquaient la matière ou donnaient de nouveaux exemples.

3.1.2. Analyse du champ de contraintes

Lors de la mise en place de notre dispositif expérimental, nous ferons face à certaines contraintes (temps, horaire, caractère facultatif de la participation des sujets, …) qui pourront avoir un impact sur nos résultats.

Comme notre expérimentation se fera durant les heures de cours, il faudra tenir compte de l'horaire de ce cours qui se donne en blocs de 3 heures. Nous devrons prévoir deux périodes pour arriver à compléter l'expérimentation. Il y aura donc un délai d'une semaine entre l'activité de résolution de problèmes et le retour sur cette activité. Il est possible que ce délai occasionne certains oublis de la part des étudiants-maîtres, mais aussi, d'un autre côté, qu'il permette une certaine digestion ou réflexion de ce qui aura été fait la première semaine.

Il est aussi important de noter que la période prévue pour la première partie de notre expérimentation sera de 19 h 00 à 22 h 00. Il est donc possible que les étudiants-maîtres soient fatigués et aient plus de difficulté à se concentrer. De plus, il faut mentionner que les dates ont été choisies en fonction de l'enseignante qui donne habituellement ce cours. L'expérimentation aura donc lieu vers la fin de la session. Les étudiants-maîtres vivront alors une période de stress, ce qui risque d'avoir une influence sur leur participation. Aussi, comme l'activité que nous proposons est facultative pour eux et qu'elle ne sera pas évaluée dans le cadre du cours, il est possible qu'ils y accordent moins d'importance.

3.2. Conception et analyse a priori

En élaborant notre projet de recherche, nous nous sommes posé plusieurs questions. Nous avons eu des choix à faire à différents niveaux. Ces choix doivent être faits sur des bases solides et ne peuvent être laissés au hasard. Nous nous proposons donc de vous faire part de ces choix et des raisons qui les motivent. Le tableau V résume les grandes lignes de la conception de notre expérimentation.

Pour arriver à construire un tel dispositif expérimental, il nous a fallu, comme nous l'avons mentionné précédemment, faire certains choix. Nous nous sommes entre autres questionnée sur la notion mathématique à intégrer à notre séquence, sur l'époque historique à utiliser, sur les problèmes à proposer aux étudiants-maîtres, sur la manière de présenter la séquence d'enseignement et aussi sur la manière de recueillir les données. Voici donc la description et la justification de nos choix didactiques.

3.2.1. Algèbre

Comme nous en avons fait mention dans notre cadre théorique, nous avons choisi de nous concentrer sur l'algèbre. Mais l'algèbre est un domaine très vaste et il a fallu nous restreindre davantage. Nous avons d'abord hésité entre la résolution de problèmes et la manipulation algébrique. La résolution de problèmes est un sujet très intéressant mais parfois difficile à traiter. Nous avions jusqu'alors trouvé peu de textes portant sur les erreurs et les obstacles reliés à la résolution de problèmes. Par contre, nous avions beaucoup plus de documentation concernant les manipulations algébriques. Toujours concernant la résolution de problèmes, nous nous sommes rendu compte qu'un obstacle majeur à cette notion était la mise en équations. Or, si on se réfère à l'histoire des mathématiques, la mise en équations ne vient que dans la troisième phase, soit vers 1591, avec Viète. Comme nous visions une époque un peu plus éloignée dans l'histoire des mathématiques afin de créer un changement de contexte plus important, il aurait été difficile de transposer ces obstacles dans les

Hypothèses :

- Nous croyons que les étudiants-maîtres traiteront l'obstacle en « donnant ce qui manque ».
- Nous croyons que l'algèbre moderne viendra faire obstacle aux étudiants-maîtres lors de la résolution de problèmes égyptiens.

Activité	But	Moment et lieu	Cueillette de données
1. Situation de recherche des conceptions : Étude de cas (Éric, Julie, Martin, Anne)	Identifier les conceptions des étudiants-maîtres par rapport à la notion d'obstacle.	13 au 20 sept. 2001 À la maison	• Réponses écrites aux études de cas
2. Situation d'apprentissage : Présentation de la théorie concernant les mathématiques égyptiennes* (exposé magistral et exercices)	Informer les étudiants-maîtres sur ce qui se faisait en mathématiques en Égypte antique, et les outiller pour l'atelier de résolution de problèmes.	12 nov. 2001, de 19 h à 22 h En classe	• Enregistrement vidéo de l'exposé
3. Situation de mobilisation : Atelier de résolution de problèmes tirés du Papyrus Rhind (nos 22, 24, 25, 26 et 28)	Faire vivre un obstacle aux étudiants-maîtres.	12 nov. 2001, de 19 h à 22 h En classe	• Enregistrements audio (toutes les équipes) + vidéo (1 équipe) • Feuilles de calculs
4. Situation de formulation : Rapport écrit Discussion en plénière	Faire verbaliser les étudiants-maîtres sur ce qu'ils ont vécu et ce que cela leur a apporté.	12 nov. 2001, de 19 h à 22 h En classe	• Rapport écrit • Enregistrement vidéo de la plénière
5. Situation d'invalidation/validation: Partir de l'obstacle vécu par les étudiants-maîtres pour leur montrer comment traiter un obstacle	Amener les étudiants-maîtres à mieux comprendre ce qu'est un obstacle et les amener à faire le parallèle avec ce que peuvent vivre les élèves du secondaire.	22 nov. 2001, de 17 h 30 à 19 h 00 En classe	• Enregistrement vidéo
6. Situation d'institutionnalisation : Présentation de la théorie concernant la notion d'obstacle	Officialiser les connaissances des étudiants-maîtres par rapport à la notion d'obstacle.	22 nov. 2001, de 17 h 30 à 19 h 00 En classe	• Enregistrement vidéo
7. Situation d'évaluation Reprise de l'étude de cas (Éric, Julie, Martin, Anne)	Vérifier si la séquence a eu un effet sur les conceptions des étudiants-maîtres concernant la notion d'obstacle.	Du 22 nov. au 6 déc. 2001 À la maison	• Réponses écrites aux études de cas

* Les étudiants-maîtres ont reçu une feuille sur la multiplication et la division égyptiennes ainsi que des exercices à faire à la maison une semaine avant l'expérimentation afin d'assimiler davantage ces notions.

Tableau V : Conception de l'expérimentation I

problèmes proposés aux étudiants-maîtres. C'est alors que nous avons pensé à regarder de plus près les problèmes proposés par le Papyrus Rhind. Les problèmes que nous avons choisis portaient tous sur la résolution d'équations du premier degré. Nous nous sommes alors demandé s'il était convenable de parler de manipulations algébriques dans la résolution de ces équations si on se référait aux techniques de l'époque. Après avoir essayé quelques problèmes, nous nous sommes rendu compte que les manipulations étaient effectivement différentes, mais bien présentes. Le fait de ne pas travailler à partir d'équations nous fait réfléchir davantage sur notre démarche. C'est ce qui a fini de nous convaincre. Nous avons donc décidé de nous concentrer sur la résolution d'équations du premier degré, ce qui implique des manipulations algébriques. Par contre, nous ne pourrons pas ignorer complètement les difficultés relatives à la résolution de problèmes puisque les exercices anciens sont formulés sous forme de texte et non pas d'équations. Le travail de manipulation ne se fera donc pas directement sur une équation comme nous y sommes habitués en algèbre.

3.2.2. L'époque

À la suite de nos expériences antécédentes décrites dans la problématique, nous avions choisi d'utiliser l'histoire des mathématiques afin de créer une contextualisation et d'amener les étudiants-maîtres à faire face à des obstacles. Mais l'histoire des mathématiques est très vaste. Valait-il mieux choisir une seule période historique ou en choisir plusieurs afin de faire un survol plus complet de l'algèbre ? Évidemment, il aurait été très intéressant de voir l'évolution de cette notion dans le temps. Par contre, l'utilisation de plusieurs périodes historiques dans le cadre de cette recherche aurait demandé une maîtrise beaucoup plus grande de l'histoire et des outils mathématiques propres à chacune des périodes. Si cela est vrai pour l'élaboration de la séquence, cela l'est d'autant plus pour la présentation en classe. Il faudrait plusieurs heures de cours pour arriver à étudier en profondeur plusieurs périodes historiques de façon à être capable de résoudre des problèmes provenant de ces périodes. Un survol trop rapide risquerait de faire ressortir des difficultés qui ne sont pas nécessairement liées à des obstacles. Comme le temps qui nous est alloué pour notre expérimentation est assez réduit (3-4 heures), il vaut mieux se concentrer sur une seule période historique afin de permettre aux étudiants-maîtres de mieux se familiariser avec les outils mathématiques de l'époque et de vraiment entrer dans le jeu.

Une fois cette décision prise, il nous restait encore à identifier la période de l'histoire de l'algèbre que nous allions utiliser. Nous avions déjà eu par le passé, l'occasion de nous familiariser un peu avec la civilisation égyptienne et la civilisation babylonienne. Ces anciennes civilisations présentent une forme d'algèbre très rudimentaire et assez éloignée de ce que nous connaissons aujourd'hui, ce qui est parfait pour ce que nous voulons faire. Comme nous avions plus de documentation sur la civilisation égyptienne et qu'il a été possible de retrouver une traduction du Papyrus Rhind, l'utilisation de cette époque se révélait plus avantageuse qu'une autre. De plus, on retrouve dans le papyrus non seulement les énoncés des problèmes, mais aussi les démarches de résolution utilisées par les scribes. Avant de prendre une décision définitive, nous avons voulu vérifier au moyen d'autres ouvrages historiques. Aussi avons-nous regardé la possibilité d'utiliser l'Arithmétique de Diophante. En lisant la traduction de cet ouvrage de Diophante, nous nous sommes rendu compte que plusieurs aspects qui y étaient traités se rapprochaient de l'algèbre actuelle. Par exemple, Diophante utilisait déjà à l'époque un présymbolisme. Il avait également défini la notion d'inconnue et effectuait des opérations sur cette inconnue.

> *« Enfin, le nombre qui ne possède aucune des particularités précédentes, mais qui possède en soi une quantité indéterminée d'unités, s'appelle l'arithme, et sa marque distinctive est ς. »* (Ver Eecke, 1959, p. 2-3)

Comme il est plus facile de faire un rapprochement avec les notions algébriques que nous connaissons aujourd'hui, le dépaysement aurait été plus difficile à effectuer et les obstacles auraient peut-être été moins nombreux. Nous avons donc choisi de nous concentrer sur la civilisation égyptienne et l'utilisation du

Papyrus Rhind comme texte de référence pour les exercices à présenter aux étudiants-maîtres.

3.2.3. Les problèmes égyptiens

Combien de problèmes faut-il proposer aux étudiants-maîtres ? Lesquels ? Pourquoi ceux-là ? Pour répondre à ces questions, il nous a fallu travailler plusieurs problèmes du Papyrus Rhind. Comme nous l'avons mentionné précédemment, nous nous sommes concentrée sur les problèmes de résolution d'équations du premier degré, puisque c'est ce qui se rapprochait le plus de l'algèbre, tout en étant suffisamment éloigné des problèmes et des résolutions actuels. Parmi les problèmes que nous avons faits, nous en avons retenu six, soit les problèmes 21, 22, 24, 25, 26 et 28 du Papyrus Rhind.(voir annexe 5)

Les deux premiers problèmes (21 et 22) sont des problèmes simples de la forme $a + x = b$ où on doit trouver la valeur de x. Ce sont des problèmes qui peuvent très bien être résolus arithmétiquement. Pour résoudre ces problèmes, les étudiants-maîtres devront utiliser les techniques de multiplication et de division égyptiennes qu'ils auront apprises précédemment. Nous leur présenterons la solution du premier problème afin de les familiariser avec les démarches du scribe. Ensuite, ils devront tenter de résoudre le problème 22, qui est semblable. Pour ce faire, ils devront utiliser les connaissances de l'époque et faire fi de leurs connaissances actuelles en ce qui a trait au symbolisme algébrique. Il n'est pas question de traduire le problème en équations.

Pour donner une meilleure idée au lecteur, regardons l'énoncé du problème 21 ainsi que la solution proposée par le scribe :

Problème 21 : « Combien faut-il pour compléter 2/3 1/15 en 1 ? »[4]

Il est dit : complète 2/3 1/15 à 1.
Total : 11, manque : 4. On opère sur 15 pour trouver 4.

1	15
1/10	1 ½
\ 1/5	3
\ 1/15	1
Total	4

C'est donc 1/5 1/15 qu'il faut ajouter.
Exemple de preuve :
2/3 1/5 1/15 1/15 donne effectivement 1. Donc c'est bien 1/5 1/15 qu'il faut ajouter.

Cette solution nous laisse croire que les Égyptiens ont cherché à travailler sur des entiers plutôt que sur des fractions. Ils ont posé un total de 15 au lieu de 1. Le 2/3 devient alors 10 et le 1/15 devient 1, pour un total de 11. Il manque donc 4 pour arriver à 15. Les Égyptiens tentent par la suite de trouver l'équivalent si la quantité totale vaut 1. Ils opèrent alors sur 15 pour trouver 4 en utilisant l'algorithme de division.

Par la suite, nous présenterons aux étudiants-maîtres les problèmes 24, 25 et 26 qui sont de la forme $x + ax = b$. Contrairement aux problèmes précédents, ceux-ci peuvent difficilement être résolus arithmétiquement. Une nouvelle connaissance est requise pour pouvoir résoudre ces problèmes : la méthode de fausse position décrite précédemment. Mais nous ne présenterons pas tout de suite cette méthode. Nous voulons que les étudiants-maîtres sentent que leurs connaissances actuelles les conduisent à des solutions inadéquates et qu'ils sentent le besoin d'avoir recours à une nouvelle connaissance. C'est alors, et seulement alors, que nous leur présenterons la méthode de fausse position en prenant exemple sur le problème 24. Ils pourront ensuite résoudre les problèmes 25 et 26 qui sont semblables.

[4] Grâce au symbolisme, on peut aujourd'hui traduire ce problème par : $2/3 + 1/15 + x = 1$

Pour bien comprendre la différence entre les problèmes 21, 22 et 24, 25, 26 ainsi que les nouvelles connaissances auxquelles ceux-ci font appel, regardons l'énoncé du problème 24 ainsi que la solution du scribe :

Problème 24 : « Une quantité et son 1/7 additionnés ensemble donne 19. Quelle est cette quantité ? »[5]

\ 1	7
\ 1/7	1
1	8
\ 2	16
1/2	4
\ 1/4	2
\ 1/8	1
\1	2 1/4 1/8
\2	4 1/2 1/4
\4	9 1/2

La quantité est 16 1/2 1/8 et son 1/7 est 2 1/4 1/8, ce qui ensemble donne 19.

Pour solutionner ce problème, le scribe utilise la méthode de « fausse position » telle que décrite au chapitre deux. Comme il ne peut travailler avec une quantité inconnue, il fera une supposition de manière à travailler sur du connu. Dans ce cas, le scribe suppose que la quantité est 7. Son 1/7 sera alors égal à 1 et leur somme donnera 8. Comme la réponse souhaitée n'est pas 8 mais bien 19, il faudra trouver le coefficient de proportionnalité. C'est pourquoi on opère sur 8 pour trouver 19. Le scribe cherche ce qui multiplié par 8 donne 19 et trouve 2 1/4 1/8. Finalement, il multiplie la quantité supposée par le coefficient de proportionnalité pour trouver la réponse finale, soit 16 1/2 1/8.

Finalement, lorsque les étudiants-maîtres tenteront de résoudre le problème 28, une autre difficulté s'ajoutera. Le problème comprend un peu plus de données, ce qui le rend plus difficile à comprendre sans passer par l'équation. De plus, le fait qu'il y ait maintenant plus qu'une valeur numérique dans le problème vient

[5] Grâce au symbolisme, on peut aujourd'hui traduire ce problème par : $x + 1/7\,x = 19$

compliquer les choses. Par où commencer ? Quelle valeur utiliser pour faire la fausse position ? Voici des questions que risquent de se poser les étudiants-maîtres. Pour résoudre ce problème, ils devront adapter leurs nouvelles connaissances à cette nouvelle situation. Il ne suffit plus de répéter une règle apprise par cœur, mais il faut la comprendre pour arriver à la modifier quelque peu. Pour bien comprendre, regardons l'énoncé du problème 28 et sa solution.

Problème 28 : « Une quantité et son 2/3 sont additionnés. De cette somme est soustrait le 1/3 de cette même somme pour donner 20. Quelle est la quantité ? »[6-7]

\ 1	9
\ 2/3	6
\ 1	15
\ 1/3	5
1	10
\ 2	20
\ 1	2
2	4
4	8
\ 8	16

La quantité est 18.

Encore une fois, nous utiliserons la méthode de « fausse position ». Nous supposons donc que la quantité est 9. Nous avons choisi 9 puisqu'il nous faut une quantité qui puisse être divisible deux fois par trois. Ainsi, en prenant 9, le 2/3 de la quantité est 6 et leur somme est 15. Le tiers de cette somme est 5 et la différence entre les deux est de 10. Comme la réponse souhaitée n'est pas 10 mais bien 20, il nous faudra trouver le coefficient de proportionnalité. Dans ce cas-ci, on peut voir tout de suite que le coefficient sera 2. Il ne reste plus qu'à multiplier la quantité

---

[6] Grâce au symbolisme, on peut aujourd'hui traduire ce problème par : $(x + 2/3x) - 1/3(x + 2/3x) = 20$

[7] Ce problème a été légèrement modifié afin de répondre aux besoins de notre expérimentation. Le problème original se lit comme suit : « Une quantité et son 2/3 sont additionnés. De cette somme est soustrait le 1/3 de cette même somme pour donner 10. Quelle est la quantité ? »

supposée (9) par le coefficient de proportionnalité (2) pour arriver à la réponse finale, soit 18.

Il est à noter que le problème 28 sera légèrement modifié afin de nous assurer que les étudiants-maîtres utiliseront la fausse position. Ainsi, au lieu d'avoir :

$(x + 2/3x) - 1/3(x - 2/3x) = 10$, nous aurons :

$$(x + 2/3x) - 1/3(x - 2/3x) = 20$$

En utilisant la version originale, soit $(x + 2/3x) - 1/3(x - 2/3x) = 10$, il est possible de trouver la réponse sans nécessairement comprendre la méthode de « fausse position ». Si on pose que $x=9$, on n'a pas à déterminer le coefficient de proportionnalité puis à trouver la réponse à l'aide de celui-ci puisque la réponse est 9. C'est pourquoi nous avons changé le « 10 » pour un « 20 », afin d'obliger les étudiants-maîtres à trouver un coefficient de proportionnalité, tel que le prescrit la « fausse position », pour arriver à la réponse.

3.2.4. Enseignement des outils de base

Avant de lancer les étudiants-maîtres dans la résolution de problèmes égyptiens, il faudra leur donner les outils nécessaires à la réalisation de cette tâche. Mais comment ? Devons-nous adopter une approche constructiviste où les étudiants-maîtres participeront activement à la construction de leurs connaissances ou une approche magistrale où les étudiants-maîtres seront un peu plus passifs ? Comme le temps qui nous est alloué est plutôt restreint, et que les étudiants-maîtres ont selon nous un bagage de connaissances suffisantes pour effectuer un contrôle du sens sur la nouvelle matière qui leur sera présentée, nous avons opté pour le cours magistral où nous présenterons les techniques utilisées par les scribes au moyen d'exemples de l'époque. Nous sommes néanmoins consciente qu'avec une telle approche et aussi peu de temps, les étudiants-maîtres ne maîtriseront pas parfaitement ces nouvelles techniques, ou du moins elles ne seront pas encore devenues des automatismes, ce qui pourra peut-être représenter une difficulté supplémentaire pour certains lors de la résolution de problèmes égyptiens. Mais comme ceci est représentatif de ce que nous retrouvons dans les classes du secondaire (ce ne sont pas tous les élèves qui maîtrisent les techniques de calcul au même niveau), nous avons décidé de garder cette approche.

Avant d'introduire les techniques de calcul utilisées par les Égyptiens, nous avons pensé faire une présentation du contexte historique et social dans lequel se situent ces problèmes, ainsi qu'une brève présentation du Papyrus Rhind duquel sont tirés les problèmes. Nous croyons que cela aidera les élèves à se placer dans le contexte et à entrer dans le jeu. Cette présentation sera faite de façon magistrale avec images à l'appui. Nous croyons que l'utilisation d'images dans la présentation est un aspect important, puisqu'elle permet aux étudiants de faire des liens avec les idées et les conceptions qu'ils ont concernant l'Égypte ancienne. C'est une façon d'attirer leur attention et de les intéresser à la suite de la séquence.

3.2.5. Cueillette des données

L'expérimentation se fera au sein d'un groupe de 26 étudiants-maîtres de quatrième année du BES, de l'Université de Montréal, inscrits au deuxième cours de didactique des mathématiques. L'analyse qui sera faite à la suite de l'expérimentation sera qualitative puisque nous ne comptons pas compiler les données de manière numérique, ni établir des statistiques. Pour recueillir les données, nous avons retenu quatre méthodes : les enregistrements audio et vidéo, les protocoles de calcul, le rapport écrit, et les études de cas.

Vidéo-film et enregistrement audio

Lors du travail en équipe sur les problèmes égyptiens, toutes les équipes seront enregistrées en audio, et de plus une de ces équipes sera filmée.[8] Le but est de

---

[8] Évidemment, l'idéal serait de pouvoir filmer chacune des équipes pour ensuite rédiger le verbatim et l'analyser. Malheureusement, ceci serait difficilement réalisable étant donné le matériel nécessaire à une telle opération.

garder les traces les plus exactes possible du travail qui a été fait au sein des équipes. Quels sont les commentaires qui ont été faits ? Quelles sont les difficultés qu'ils ont rencontrées ? Quels sont les différents essais qu'ils ont faits avant d'arriver à la réponse ? Est-ce que tout le monde était du même avis ? Ce sont des questions auxquelles il peut être difficile de répondre à l'aide d'un rapport écrit seulement car les étudiants ont tendance à omettre certains détails qui peuvent parfois être importants lors de la rédaction finale.

> *« Producing written reports of the problem-solving phase revealed a process of purification through which students preserved the deep structure of the chain of their actions in the problem-solving phase but suppressed details »* (Hershkowitz et Scharz, 1999, p. 65-66)

Après l'expérimentation, un verbatim sera écrit pour chaque équipe en fonction des enregistrements, et une analyse du verbatim sera effectuée.[9]

Protocole de calcul

Lors de la résolution de problèmes, les étudiants-maîtres devront inscrire toutes leurs démarches sur des feuilles fournies à cet effet. Les feuilles seront séparées en deux colonnes. Dans la colonne de droite nous demanderons aux étudiants-maîtres de laisser les traces de leurs démarches et dans la colonne de gauche de commenter leurs erreurs et les raisonnements qui ont mené à ces erreurs ainsi que les impasses et les façons de s'en sortir. Nous voulons ainsi les inciter à réfléchir sur leur apprentissage et leur faire prendre conscience de leurs erreurs et de ce qui les a causées. Les étudiants-maîtres seront avertis de ne rien effacer puisque nous voulons garder toutes les traces de leurs démarches, particulièrement lorsqu'ils feront des erreurs.

[9] Les verbatims seront disponibles par l'entremise d'Internet en écrivant à : kquesnel@hotmail.com

Rapport écrit

Lors du travail en équipe, les étudiants-maîtres auront également comme consigne de garder par écrit des traces de leurs raisonnements, de leurs débats, des difficultés et des problèmes rencontrés et des erreurs commises. La contrainte d'écrire un rapport provoquera un dialogue qui grâce à l'enregistrement audio pourra être analysé. Un rapport individuel ainsi qu'un rapport de groupe par équipe devront être remis à la fin de l'expérimentation (d'une durée de 3 heures). L'analyse de ces rapports devrait nous renseigner sur l'évolution des conceptions des étudiants-maîtres face à la notion d'obstacle.

Plénière

Après l'expérimentation et une analyse sommaire des rapports écrits, un retour devra être fait en classe. Pour ce faire, nous inviterons les étudiants-maîtres à participer à une discussion en plénière au cours de laquelle une série de questions élaborées à la suite de l'analyse des rapports écrits seront posées. Le but de cette plénière est de valider et institutionnaliser les connaissances des étudiants-maîtres face à la notion d'obstacle. Le choix des questions directrices de la plénière sera donc d'une importance capitale afin d'atteindre notre objectif d'invalidation/validation et d'institutionnalisation.

Étude de cas

Après la plénière, nous soumettrons aux étudiants-maîtres la même étude de cas qu'ils ont faite plus tôt dans la session. Le but de refaire cet exercice est de voir s'il y a eu un changement au niveau des conceptions des étudiants face à la notion d'obstacle.

3.2.6. Analyse a priori

L'expérimentation débutera par une présentation magistrale du contexte historique et des outils mathématiques utilisés à l'époque. Pour assurer une meilleure compréhension de ces outils (multiplication et division), nous donnerons aux étudiants-maîtres une feuille décrivant les algorithmes de multiplication et de division ainsi que des exercices à faire à la maison, une semaine avant l'expérimentation (voir annexe 6). Nous reviendrons par la suite sur ce sujet en classe pour s'assurer que ce soit bien compris. Malgré notre souci de bien outiller les étudiants-maîtres pour la séance de résolution de problèmes, il est possible que certains d'entre eux éprouvent quelques difficultés face à ces nouvelles techniques, ce qui ne sera pas sans conséquence sur le reste de l'expérimentation. Il faudrait analyser plus en profondeur la cause de ces difficultés. Nous croyons qu'il s'agira peut-être de leurs connaissances actuelles sur le sujet qui viendront faire obstacle à la compréhension de ces nouvelles techniques. Dans un tel cas, ceci ne viendrait que renforcer notre idée. Mais nous ne nous concentrerons pas sur les obstacles qui pourront survenir à ce niveau puisqu'ils sont moins prévisibles et qu'ils n'agiront pas sur tout le monde.

Après la mise en situation et l'explication des techniques de calcul égyptiennes, les étudiants-maîtres seront invités à essayer de résoudre des problèmes algébriques de l'époque. Le travail se fera en équipes de 3 ou 4. Après la séance de travail en équipe, un rapport devra être écrit afin de garder des traces de leurs raisonnements, de leurs débats, des difficultés et des problèmes rencontrés et des erreurs commises. Lors de la résolution de problèmes, les étudiants-maîtres auront comme consigne de résoudre les problèmes en utilisant uniquement les outils de l'époque. Ils ne pourront donc pas traduire le problème en équations. Ceci risque d'entraîner des difficultés ou du moins de ralentir certains étudiants dans leur raisonnement. Les étudiants-maîtres risquent d'être tentés d'avoir d'abord recours à leurs connaissances actuelles, au lieu d'utiliser des techniques avec lesquelles ils sont moins familiers.

Pour débuter la séance de résolution de problèmes, nous présenterons la solution du problème 21 au tableau. Nous voulons ainsi les familiariser avec les démarches qu'utilisaient les scribes et leur donner un exemple d'utilisation des techniques de calcul égyptiennes pour la résolution de problèmes. Par la suite, les étudiants-maîtres devront résoudre un problème semblable au premier. Nous croyons que la majorité des étudiants-maîtres devraient réussir assez bien cette tâche, puisqu'ils auront déjà un modèle de base.

Par contre, les choses risquent de se compliquer au troisième problème. Nous avons volontairement choisi un problème où les connaissances égyptiennes des étudiants-maîtres ne seront pas suffisantes pour le résoudre. Nous voulons ainsi faire surgir un obstacle. Il sera intéressant d'analyser ce que les étudiants-maîtres auront noté à cette étape de l'expérimentation, dans leur rapport écrit. Nous les laisserons essayer de résoudre le problème avec les outils qu'ils possèdent et nous attendrons de sentir chez eux le besoin de nouveaux outils. Pour ce faire, nous circulerons dans les rangées et vérifierons le travail qui est fait par chaque équipe, tout en posant parfois des questions pour voir où ils en sont dans leur raisonnement. C'est seulement lorsque le besoin se fera sentir que nous leur présenterons la méthode de la fausse position ainsi que la solution du troisième problème tel qu'écrit par le scribe. Ils devraient ensuite réussir à faire le quatrième problème sans trop de difficultés.

Un nouvel obstacle risque de survenir au cinquième et dernier problème. Le problème ne requiert aucune nouvelle connaissance pour être résolu, mais il possède un niveau de complexité un peu plus élevé. Les étudiants-maîtres devront donc adapter les connaissances apprises à la nouvelle situation.

Lors de l'analyse des rapports écrits ainsi que des verbatims, nous nous attendons à voir un certain décalage. Le verbatim devrait être un peu plus complet et risque de révéler certains aspects oubliés par les étudiants-maîtres lors de la rédaction. Par contre, nous croyons que les rapports écrits nous renseigneront suffisamment sur la façon dont les étudiants-maîtres ont perçu les causes d'erreurs qu'ils auront produites. Nous espérons que ceux-ci décriront leurs obstacles sous forme de connaissances inadéquates.

Suite à l'analyse des rapports écrits et des verbatims, un retour sera fait en classe afin de valider et d'institutionnaliser les connaissances relatives à la notion d'obstacle. Ce retour se fera sous forme de plénière dirigée par certaines questions clés. Ces questions devront être construites suite à l'analyse des résultats. La préexpérimentation prévue pour la mi-octobre – telle que décrite dans la section expérimentation – pourra sans doute nous donner déjà une idée concernant l'évolution des conceptions des étudiants ainsi que les moyens de valider et d'institutionnaliser le savoir relatif à la notion d'obstacle.

Après la plénière, nous demanderons aux étudiants-maîtres de refaire l'étude de cas afin de vérifier s'il y a eu un changement au niveau de leurs conceptions à la suite de la séquence d'enseignement fondée sur l'histoire des mathématiques. Nous nous attendons à voir une différence entre les deux, principalement au niveau de la question concernant les causes d'erreurs.

3.3. Préexpérimentation

Une préexpérimentation a été faite à la mi-octobre 2001 avec la participation de trois enseignants en mathématiques qui se sont portés volontaires pour participer à cette expérience. Le but de la préexpérimentation était de tester la séquence d'enseignement et de vérifier certains des choix didactiques avant l'expérimentation finale.

L'activité a duré deux heures. Tout d'abord, nous avons présenté une brève description du contexte historique puis nous avons expliqué les algorithmes de multiplication et de division égyptiennes. Les participants ont ensuite mis en pratique ce qu'ils venaient d'apprendre en faisant quelques exercices. Nous avons enchaîné avec le problème 21 tiré du Papyrus Rhind et nous avons tenté de démontrer la démarche utilisée par le scribe pour résoudre ce problème. Les participants ont ensuite eu à solutionner par eux-mêmes certains problèmes du

Papyrus Rhind (n^{os} 22 – 24 – 25 – 28). Lors de la résolution de problèmes, nous étions présente pour répondre aux questions des participants. Nous avons terminé cette activité par une petite discussion portant sur ce que l'activité leur avait apporté ainsi que sur les points forts et les points faibles de l'activité.

Lors de cette préexpérimentation, nous avons remarqué que les participants étaient très persévérants et ne voulaient pas avoir d'aide. Grâce à leur ténacité, ils ont réussi à résoudre les différents problèmes. Par contre, ce ne fut pas sans difficulté. Ils ont tous souligné combien il était difficile de faire abstraction de l'algèbre et de résoudre les problèmes autrement. On peut donc dire que leurs connaissances au niveau de l'algèbre a joué le rôle d'obstacle dans la résolution des problèmes égyptiens, même s'ils ont fini par trouver la réponse. Il ne faut pas oublier que les participants sont des enseignants en mathématiques et qu'ils ont un bagage mathématique leur permettant plus facilement d'adapter leurs connaissances que les élèves du secondaire.

Lors de la discussion à la fin de l'activité, les participants ont mentionné que cet exercice leur avait fait réaliser comment peuvent se sentir leurs élèves face à de nouveaux problèmes à résoudre. Ce qu'on enseigne nous semble facile et on oublie parfois que les élèves voient ces notions pour la première fois et peuvent être déconcertés face à certains problèmes.

Les participants ont également mentionné qu'ils auraient préféré une progression plus lente au niveau de la difficulté des problèmes à résoudre. Ils auraient eu besoin d'un peu plus de pratique avant de s'attaquer au problème 28. C'est pourquoi, nous avons décidé d'ajouter le problème 26 lors de l'expérimentation I.

Chapitre 4

Analyse a posteriori

L'analyse a posteriori consiste à comparer ce qui s'est réellement passé avec ce que nous avions prévu. En 4.1, nous décrirons le déroulement de l'expérimentation I telle qu'elle s'est réellement passée. Dans le cadre de notre expérimentation, nous avons fait une première analyse sommaire des résultats afin d'élaborer le retour qui avait pour objectif de valider et d'institutionnaliser les connaissances reliées à la notion d'obstacle. En 4.2, nous présenterons une analyse plus approfondie des résultats fondée sur les démarches des étudiants-maîtres lors de la résolution des problèmes égyptiens. Finalement, en 4.3 nous présenterons une analyse des études de cas qui avaient pour but de nous renseigner sur l'assimilation de la notion d'obstacle chez les étudiants-maîtres.

4.1. Expérimentation I : description du déroulement

L'expérimentation I a eu lieu le 12 novembre 2001 à l'Université de Montréal de 19 h 00 à 22 h 00 dans le cadre du cours DID4545 offert aux étudiants de quatrième année du BES. Vingt et un étudiants-maîtres étaient présents lors de cette activité.

Souvenons-nous d'abord que préalablement à l'expérimentation I, les étudiants-maîtres avaient participé à une étude de cas au cours de la semaine du 13 au 20 septembre 2001. De plus, ils ont reçu un document sur les algorithmes de multiplication et de division égyptiennes ainsi que des exercices à faire à la maison, la semaine précédant l'expérimentation.

Lors de l'expérimentation, nous avons débuté par une présentation magistrale du contexte historique et des outils mathématiques utilisés à l'époque. Il a été question des trois étapes de l'évolution de l'algèbre, du contexte social en Égypte aux alentours de 1800 av. J.-C., de l'écriture égyptienne et de leur système de numération, du Papyrus Rhind, des fractions égyptiennes ainsi que des algorithmes de multiplication et de division égyptiennes. Bien que les étudiants-maîtres avaient déjà reçu le document sur la multiplication et la division égyptiennes la semaine précédente, nous nous sommes rendu compte que plusieurs d'entre eux n'avaient pas fait leurs devoirs. Nous avons donc pris du temps en classe pour faire quelques exercices et expliquer le fonctionnement de ces algorithmes. À notre surprise, certains étudiants-maîtres ont dit mieux comprendre les algorithmes égyptiens que nos algorithmes actuels. Pour eux, cela avait plus de sens. Nous leur avons ensuite présenté le problème 21 accompagné de la solution du scribe. La lecture de la solution proposée par le scribe n'a pas été suffisante à la compréhension de la méthode utilisée. Comme pour nous il importait que les étudiants-maîtres comprennent la solution au premier problème afin que cela puisse devenir un obstacle par la suite, nous avons expliqué les démarches du scribe au tableau. Comme nous voulions être certaine que les étudiants-maîtres comprendraient, nous sommes partie de ce qu'ils connaissaient et nous avons traduit le problème en équations en représentant l'inconnue par un point d'interrogation. Nous avons réalisé un peu plus tard que ceci a peut-être eu un effet pervers quant à l'utilisation de l'algèbre dans la résolution des problèmes égyptiens par les étudiants-maîtres. De plus, nous avons laissé sous–entendre l'utilisation du produit croisé alors que les documents historiques n'en laissent pas supposer l'utilisation chez les Égyptiens.

Après la démonstration du problème 21, nous avons présenté les consignes pour l'atelier de résolution de problèmes, demandé aux étudiants-maîtres de se regrouper en six équipes de 4 ou 5, installé les magnétophones, trouvé des volontaires qui acceptaient d'être filmés et distribué les documents.

Voici les consignes qu'ont reçu les étudiants-maîtres concernant le déroulement de l'atelier :

Partie A

Sur vos feuilles de calcul, notez les erreurs produites et les raisonnements qui ont mené à ces erreurs. Notez également les impasses et les façons de s'en sortir.

Faites vos calculs dans la partie gauche des feuilles. Encadrez les bonnes réponses en bleu et encerclez les erreurs ou les impasses en rouge. Utilisez la marge de droite pour expliquer vos raisonnements. N'EFFACEZ RIEN !

Partie B : rapport individuel

Après avoir fait tous les problèmes, répondez aux questions suivantes :

- Lors de la résolution, avez-vous été déconcertés et pourquoi ?
- Lors de la résolution, certains aspects vous ont-ils semblés familiers ? Si oui, lesquels ?
- Pensez-vous que ces problèmes pourraient être intéressants à présenter à des élèves du secondaire ? Pourquoi ?

Partie C : Rapport de groupe

Après chaque problème, faites un retour en équipe pour comparer vos résultats et discuter des difficultés que vous avez rencontrées ainsi que des erreurs que vous avez commises et des raisonnements que vous avez utilisés. Ajouter à ce rapport tout commentaire ou remarque qui peut survenir lors de vos discussions.

En ce qui concerne la partie A, nous avons remarqué, lors de l'analyse des résultats, que les consignes n'avaient pas été tout à fait respectées. Très peu d'étudiants ont respecté le code de couleur pour distinguer les bonnes réponses, les erreurs et les impasses. Il y a également peu d'étudiants qui ont utilisé la marge de droite sur leur feuille de réponses pour expliquer leurs raisonnements. En fait, les commentaires et les explications relatives à leurs démarches et raisonnements étaient en général très brefs et peu nombreux, ce qui a rendu l'analyse des résultats un peu plus difficile. Heureusement, le verbatim rédigé à partir de l'enregistrement audio nous a été fort utile pour reconstituer et comprendre les démarches et les raisonnements produits. En comparant le verbatim et les feuilles de calcul des étudiants-maîtres, nous nous sommes aperçue que certains d'entre eux avaient effacé certaines parties erronées de leur démarche.

Pour ce qui est de la partie B, nous avons remarqué que les étudiants-maîtres ont répondu rapidement aux deux premières questions et ont discuté plus longuement en équipes en ce qui a trait à la troisième question. Les réponses obtenues à la première question au sujet de ce qui les a déconcertés sont venues confirmer nos prévisions. Effectivement, nous avions prévu que l'algèbre agirait en tant que connaissance-obstacle et en ce sens, la majorité des étudiants-maîtres ont laissé sous-entendre que l'algèbre leur avait en quelque sorte nuit. Ils ont eu de la difficulté à faire abstraction de l'algèbre. « On a tendance à résoudre à l'aide de moyens qu'on connaît. » Une autre chose qui les a déconcertés fut le manque de repères au niveau des connaissances égyptiennes. Qu'est-ce qui était connu des Égyptiens et qu'est-ce qui ne l'était pas ? Qu'avaient-ils le droit d'utiliser pour résoudre les problèmes ?

Concernant les aspects qui leur ont semblé familiers, les étudiants-maîtres ont répondu que le problème 22, qui était semblable au problème 21, leur a semblé familier, ainsi que les problèmes 25 et 26 qui étaient semblables au problème 24. Certains ont mentionné que la formulation des problèmes était semblable à celle utilisée aujourd'hui. D'autres ont souligné le fait que l'utilisation du produit croisé leur était familier. Pourtant, si l'on se fie aux documents historiques, le produit croisé ne semblait pas utilisé par les Égyptiens. Ce recours au produit croisé a peut-être été induit par la démonstration du problème 21 que nous avons présentée ou par les explications que nous avons données à certaines équipes concernant la fausse position lors de l'atelier de résolution.

Finalement, en ce qui concerne le rapport de groupe, peu d'éléments nouveaux en sont ressortis. Il s'agissait pour la plupart d'un résumé des points abordés dans la partie B.

Pendant l'atelier, nous avons circulé dans la classe afin de répondre aux questions des équipes. Sur les six équipes qui participaient à l'expérimentation, quatre d'entre elles ont eu recours à notre aide pour réussir à résoudre les problèmes. Ces équipes ont toutes bloqué au problème 24. Les étudiants-maîtres ne voyaient pas comment résoudre le problème autrement que par l'algèbre. Après nous être assurée qu'ils avaient bien réfléchi au problème, nous leur avons donné un texte sur la fausse position. Mais la lecture du texte n'était pas suffisante. Nous avons dû leur expliquer le fonctionnement de la méthode de « fausse position ». Dans ce cas, donner ce qui manque n'a pas été suffisant. À la suite de nos explications, ces équipes ont réussi à utiliser un raisonnement se rapprochant davantage du raisonnement égyptien. En ce qui concerne les deux équipes qui n'ont pas eu recours à notre aide, nous avons remarqué une utilisation de l'algèbre beaucoup plus accentuée. Selon les commentaires rapportés par le verbatim, ils étaient conscients du fait qu'ils ne devaient pas utiliser l'algèbre, mais ils l'ont déguisée en tentant de se convaincre qu'ils n'y avaient pas vraiment recours.

Après l'atelier de résolution de problèmes, nous avons conclu la séance par une brève discussion afin de recueillir les impressions et les commentaires des étudiants-maîtres. En général, ils ont dit avoir eu de la difficulté à laisser de côté leur connaissance de l'algèbre. De plus, ils ont eu de la difficulté à distinguer ce que les Égyptiens connaissaient de ce qu'eux connaissaient. Lorsque nous leur avons demandé si l'expérience leur avait apporté quelque chose, une des étudiantes a répondu que les algorithmes de multiplication et de division égyptiennes lui avaient semblé plus simple à comprendre que nos algorithmes actuels. Certains ont également fait référence à l'applicabilité de cette activité au secondaire ; quelques-uns se sont dit intéressés à présenter l'algorithme de multiplication et de division, mais tous se sont entendus pour dire que les problèmes 24 à 28 étaient trop complexes pour être présentés au secondaire. Par leurs commentaires, on peut déjà supposer qu'ils n'ont pas tout à fait saisi le but de cette activité qui était de les sensibiliser à la notion d'obstacle. Le premier objectif qui était de leur faire vivre une situation d'obstacle semble réussi puisqu'ils ont mentionné à quel point il leur a été difficile de ne pas utiliser leurs connaissances algébriques pour résoudre les problèmes. Par contre, l'atelier ne leur a pas permis de prendre conscience qu'ils venaient de vivre un obstacle et qu'il s'agissait là du point important de notre expérimentation. Si l'histoire a réussi à leur faire vivre un obstacle par sa propriété de dépaysement, elle a aussi restreint leur réflexion à l'aspect mathématique, délaissant l'aspect méta-cognitif et didactique de l'activité. Leur attention était tellement portée sur la résolution de problèmes, qu'ils n'ont pas réfléchi à leur méthode d'apprentissage et ils ne se sont pas observés en tant qu'élèves comme nous l'aurions souhaité. Évidemment, un tel travail de prise de conscience ne se fait pas nécessairement spontanément et des situations doivent être prévues à cet effet.

À la suite de l'expérimentation du 12 novembre 2001, un retour d'environ une heure a été fait en classe avec les étudiants-maîtres pendant le cours du 22 novembre. L'objectif de ce retour était de valider et d'institutionnaliser leurs connaissances relatives à la notion d'obstacle. Le retour a été construit à la suite d'une première analyse sommaire des résultats.

Pour cette première analyse, nous avons étudié seulement les réponses au problème 24, d'abord par contrainte de temps, mais aussi parce que nous avons jugé que nous en tirions suffisamment d'informations pertinentes pour notre étude puisque nous avions déjà observé lors de l'activité que c'est en faisant ce numéro que les étudiants-maîtres ont eu le plus de difficultés. Rappelons que le problème 24 consistait à trouver une quantité si cette quantité et son 1/7 additionnés ensemble donnent 19.

Notre analyse a été très révélatrice au niveau des stratégies de raisonnement utilisées par les étudiants-maîtres. Nous avons pu observer que ceux-ci ont tenté au cours de l'atelier de mettre de côté leurs connaissances antérieures pour respecter les nouvelles règles du jeu. Si le problème était facile, qu'il ne comportait pas trop de nouvelles variables et qu'il permettait un certain contrôle à l'aide des connaissances nouvelles, ils arrivaient à le résoudre sans trop de difficultés. Ce fut d'ailleurs le cas pour le problème 22, qui était semblable au problème 21, et qui pouvait être facilement résolu à l'aide des algorithmes de multiplication et de division égyptiennes qu'ils venaient d'apprendre.

Par contre, si le problème devenait un peu plus complexe, qu'on y ajoutait un nouvel élément, alors il s'en suivait une perte de contrôle illustrée par le fait qu'ils n'arriveraient pas à poursuivre dans la même voie. C'est d'ailleurs ce qui s'est produit aux problèmes 24 et 28. Face à cette perte de contrôle, les étudiants ont tenté de reprendre le contrôle en essayant d'adapter leurs connaissances, ce qui a parfois conduit à des résultats plutôt douteux. Par exemple au numéro 24, nous avons retrouvé la démarche suivante :

$$x + 1/7\,x = 19$$
$$1\ 1/7\,x = 19$$
$$19 \div 1 =$$
$$19 \div 1/7 =$$

Cet étudiant a voulu diviser 19 par 1 et 1/7. Mais comme les exemples précédents ne comportaient pas de division de fractions, il a cherché à adapter ses connaissances sans penser que la division n'est pas distributive sur l'addition.

Un autre exemple d'adaptation des connaissances que nous avons retrouvé chez quelques étudiants est au niveau de la dissimulation de l'algèbre. Comme ils savaient qu'ils ne pouvaient utiliser l'algèbre, ils ont tenté de la modifier de façon à la rendre utilisable dans le contexte égyptien. Certains ont donc remplacé les « x » par des « ? » en essayant de se convaincre qu'il ne s'agissait plus vraiment d'algèbre. En fait, ils se sont contentés d'en modifier l'apparence et non pas le contenu.

Lorsqu'ils ne sont pas parvenus à mettre leurs connaissances antérieures de côté, une autre façon de reprendre le contrôle a été d'adapter les résultats plutôt que leurs connaissances. Ainsi, au problème 24 certains ont trouvé comme réponse que la quantité cherchée était 16 reste 5. Or, une quantité ne peut s'écrire avec un reste. La plupart l'ont réalisé et ont tenté d'adapter cette réponse afin de l'écrire de manière acceptable. Ils ont donc cherché à savoir ce que représentait le reste. À notre grande surprise certains ont fait des erreurs assez flagrantes à ce niveau. Mentionnons d'abord que pour arriver à 16 r.5 les étudiants-maîtres ont divisé 133 par 8. Certains en ont déduit que 16 r. 5 était équivalent à 16 et 5/133 ou encore 16 et 5/7 alors que dans les faits, 16 r.5 était équivalent à 16 5/8. Nous discuterons plus longuement de ces erreurs dans l'analyse des erreurs mathématiques et historiques présentée à la section 4.2. Comme 16 et 5/8 n'est pas écrit sous forme de fractions unitaires, il faut encore adapter la réponse afin d'arriver à la réponse finale soit 16 1/2 1/8. Comme les Égyptiens n'utilisaient pas de fractions autres que les fractions unitaires, il est peu probable qu'ils soient arrivés à un résultat intermédiaire comme 16 et 5/8. En faisant une adaptation du résultat, ces étudiants-maîtres ont mis l'accent sur la réponse plutôt que sur le raisonnement qui a produit cette réponse.

Finalement, nous avons observé qu'une autre façon de reprendre le contrôle a été d'adapter le problème en tant que tel. Lors de la résolution du problème 24, nous avons constaté que certains étudiants ont tenté de modifier le problème afin de le faire ressembler au problème 21 qu'ils avaient compris et par rapport auquel ils avaient un certain contrôle du sens. Une analyse plus en profondeur de ce phénomène sera faite à la section 4.2.

C'est donc à la suite de cette première analyse sommaire des résultats que nous avons construit le retour qui a été fait avec les étudiants-maîtres. Nous voulions leur faire prendre conscience de leurs erreurs et de ce qui a causé ces erreurs pour ensuite en tirer des conclusions concernant la notion d'obstacle. Nous avons commencé le retour en leur demandant de calculer 16 r.5 plus son 1/7. Certains ont alors mentionné que lors de la résolution du problème 24, ils avaient transformé 16 r.5 en 16 et 5/8. Nous leur avons donc fait réaliser que puisque les Égyptiens utilisaient seulement des fractions unitaires, il était peu probable qu'ils soient arrivés à un résultat intermédiaire de cette sorte. Nous avons ensuite demandé aux étudiants-maîtres ce qui les avait menés à une telle réponse. Certains avaient utilisé la fausse position, d'autres avaient utilisé l'algèbre. Nous leur avons alors présenté quelques erreurs ou adaptations rencontrées lors de notre analyse en leur parlant de ce qui arrive lorsqu'on perd le contrôle du sens. Nous les avons ainsi amenés à faire le parallèle entre ce qu'ils ont vécu lors de l'atelier et ce que les élèves du secondaire vivent, comme l'avaient fait plus spontanément les enseignants en exercice lors de la préexpérimentation. Dans le cas des étudiants-maîtres, leur connaissance de l'algèbre est venue nuire à l'apprentissage des mathématiques égyptiennes alors que dans le cas d'élèves du secondaire leur connaissance de l'arithmétique peut parfois nuire à l'apprentissage de l'algèbre. Nous leur avons ensuite fait prendre conscience à quel point certaines connaissances peuvent être résistantes en citant un de leurs collègues qui avait dit : « Je suis borné, je vais continuer à utiliser ma méthode. » Nous leur avons alors demandé comment ils pourraient aider des élèves qui bloquent en algèbre à cause de leurs connaissances en arithmétique à surmonter l'obstacle. Un des étudiants-maîtres a alors mentionné qu'il était sans doute possible de partir de l'arithmétique pour expliquer les nouvelles notions algébriques. Nous avons voulu tester cette hypothèse auprès d'eux en refaisant le problème 24 tiré du Papyrus Rhind, mais en partant de leurs connaissances actuelles des mathématiques. Nous avons donc utilisé l'algèbre et les suites pour arriver à leur faire comprendre la méthode de « fausse position ». Après leur avoir fait faire un autre exercice semblable, les étudiants-maîtres ont dit que la méthode de résolution leur semblait beaucoup plus claire et qu'ils savaient maintenant ce qu'ils avaient le droit de faire et de ne pas faire. Pour conclure ce retour, nous avons procédé à l'institutionnalisation en présentant un survol théorique de la notion d'obstacle. Afin de vérifier si l'expérimentation a eu un effet, nous avons demandé aux étudiants-maîtres de refaire l'étude de cas qu'ils avait faite au mois de septembre. Le travail était à faire à la maison et à remettre deux semaines plus tard, soit au dernier cours de la session. Malheureusement, seulement cinq étudiants-maîtres nous ont remis la deuxième étude de cas, ce qui est venu un peu biaiser nos résultats comme nous le verrons à la section 4.3. avec l'analyse des études de cas. Cette « désertion » est probablement attribuable à la fin de session.

4.2. Analyse approfondie des résultats

Dans une analyse plus poussée, nous avons voulu montrer l'existence de « connaissances-obstacles » à partir des raisonnements utilisés par les étudiants-maîtres pour résoudre les problèmes tirés du Papyrus Rhind. Pour ce faire, nous avons analysé les démarches des étudiants-maîtres en nous fondant sur leurs feuilles de calcul ainsi que sur le verbatim produit par l'enregistrement audio de la séance de résolution de problèmes pour chacune des équipes. Nous avons cherché à identifier les erreurs produites par les étudiants-maîtres pour ensuite en analyser la cause et voir si ces erreurs étaient le résultat de « connaissances-obstacles ». Nous avons regroupé les erreurs en deux grandes catégories, soit les erreurs mathématiques et les erreurs historiques. Par erreur historique nous entendons une utilisation anachronique de certains principes mathématiques. Par exemple, l'utilisation de l'algèbre actuelle pour résoudre un problème tiré du Papyrus Rhind et datant de 1800 av. J.-C. alors que ce concept était encore inconnu et inutilisé en Égypte à ce moment, ou encore l'utilisation de fractions non unitaires. Pour ce qui est des erreurs mathématiques, il s'agit d'erreurs de calcul ou de raisonnement reliées à divers concepts mathématiques. Nous avons été surprise de remarquer autant d'erreurs mathématiques de la part de futurs enseignants. Nous nous attendions à avoir beaucoup plus d'erreurs historiques que mathématiques ce qui n'a pas été le cas. En fait, il est assez difficile de comparer les deux types d'erreurs de manière quantitative. Les erreurs mathématiques sont plus nombreuses, diversifiées et ponctuelles, et se répètent rarement d'une équipe à l'autre alors que les erreurs historiques sont moins diversifiées mais persistent plus longtemps et se retrouvent bien souvent chez plusieurs équipes. Regardons maintenant plus en détails les erreurs relevées pour chacune de ces deux catégories.

4.2.1 Erreurs mathématiques

Afin de faciliter le traitement des erreurs mathématiques, nous les avons classées selon les sous-catégories suivantes : réponse, reste, fractions (transformation du reste, erreur de calcul ou de raisonnement), manipulations algébriques, algorithmes égyptiens (x et ÷), erreurs diverses de calcul ou de raisonnement, adaptation et verbalisation. Pour mieux comprendre à quoi correspondent ces sous-catégories, regardons quelques exemples d'erreurs reliées à chacune d'elles et ce qui a pu les causer.

Réponse

Lors de la résolution du problème 24, plusieurs étudiants-maîtres sont arrivés à une réponse sous la forme 16 r.5. Ce résultat n'est pas faux en soit, mais dans le contexte du problème il donne lieu à une réponse inadéquate. Le problème 24 consistait à trouver une quantité qui additionnée à son 1/7 donnait 19. Or, sur le plan mathématique une quantité ne peut pas être exprimée avec un reste. La plupart des étudiants-maîtres ont pris conscience de cette erreur et ont tenté de la corriger. Mais plutôt que de réviser la démarche mathématique qui les a menés à cette réponse, ils ont tenté d'en modifier la forme afin de la rendre adéquate.

Cette erreur est probablement reliée aux exercices de division égyptienne faits avant l'atelier de résolution de problèmes. Les exercices proposés étaient effectivement résolus en utilisant un reste plutôt qu'en poursuivant l'opération de manière à obtenir une somme de fractions unitaires. Il est donc possible que cette erreur ait été induite par l'enseignement préliminaire qu'ils ont reçu et pourrait être évitée en modifiant celui-ci. Mais est-il vraiment souhaitable de faire disparaître cette erreur ? L'erreur en tant que telle comporte peu d'intérêt dans le cadre de notre recherche puisqu'elle ne révèle pas d'obstacle. Les étudiants-maîtres ont pris conscience assez rapidement de l'erreur et sont parvenus à la corriger par diverses stratégies. Par contre, nous verrons un peu plus tard que les stratégies utilisées pour corriger cette erreur sont très intéressantes et méritent de ne pas être évitées.

Reste

Nous avons remarqué chez certains étudiants-maîtres une compréhension du reste en tant qu'addition plutôt qu'en tant que fraction. Au problème 24, ces étudiants ont divisé 133 par 8 pour obtenir 16 reste 5. Comme une quantité ne peut s'écrire sous forme de reste, ils ont tenté de redonner un sens au reste. Voici la réflexion d'un des étudiants-maîtres à ce sujet alors que les autres membres de son équipe cherchaient à transformer le reste en fraction et se posaient la question « il reste 5 sur quoi ? »:

> *« Pourquoi reste 5 ? Ce n'est pas nécessairement reste 5 sur quelque chose. On n'a pas besoin de mettre ça. C'est 5 que tu additionnes à 16 x 8. »*

Cette conception est fort intéressante. Ce qui en fait la force c'est qu'elle est en partie vraie. Effectivement, 16 x 8 + 5 = 133. Par contre, cette façon de représenter le reste deviendra inadéquate si on transfère la quantité trouvée à l'équation initiale qui était $8x/7 = 19$. C'est d'ailleurs ce qui a amené ce même étudiant à commettre l'erreur suivante : « 8 x 16 ÷ 7 va donner un nombre, va donner 14 + 5, va donner 19. » Ce résultat (14) n'est visiblement pas issu du calcul précédent mais du besoin d'arriver à 19 en ayant un reste de 5. Cette erreur est le résultat de sa conception inadéquate du reste. On pourrait donc dire en quelque sorte que sa compréhension du reste est un obstacle à l'écriture de la réponse. Le verbatim nous révèle d'ailleurs que cette conception est assez persistante chez cet étudiant.

Fractions : transformation du reste

En tentant de transformer la réponse du problème 24 afin de faire disparaître le reste, certains ont eu recours à des raisonnements assez surprenants de la part d'étudiants-maîtres. Voici quelques exemples de raisonnements erronés que nous avons observés :

- 16 ÷ 3 = 5 reste 1, c'est-à-dire 5 et 1/16
- 19 ÷ 8 = 2 reste 3, c'est-à-dire 2 et 3/19
- 133 ÷ 8 = 16 reste 5, c'est-à-dire 16 et 5/133
- 133 ÷8 = 16 reste 5, c'est-à-dire 16 et 5/16

Il est à noter que ces erreurs ont toutes été produites par des équipes différentes et ne sont pas le produit d'une seule équipe. Dans les trois premiers cas, les étudiants-maîtres ont divisé le reste par le dividende plutôt que par le diviseur, alors que dans le quatrième cas, les étudiants ont divisé le reste par le quotient plutôt que par le diviseur. Qu'est-ce qui a bien pu amener des futurs enseignants en mathématiques à commettre de telles erreurs ? La question reste sans réponse. Pour que quatre équipes sur six aient produit des erreurs de même nature il s'agit peut-être d'un problème plus important qu'un simple manque d'attention. Il vaudrait peut-être la peine de faire de plus amples recherches à ce sujet et d'étudier les conceptions des étudiants-maîtres par rapport aux restes et aux fractions.

Fractions : erreurs de calcul ou de raisonnement

Les erreurs de calcul ou de raisonnement sont plus diversifiées et une même erreur n'est jamais produite par plus d'une équipe. De façon générale, les étudiants-maîtres ayant commis des erreurs de calcul ont pris conscience de leurs erreurs assez rapidement, soit par eux-mêmes ou par l'intervention de leurs pairs. Bien que ces erreurs semblent être causées par un manque d'attention plutôt que par un sérieux problème de compréhension, il n'en demeure pas moins surprenant d'observer de telles erreurs de la part de futurs enseignants. En voici quelques exemples :

- « Moi j'ai dit 1 et 1/3 c'est 5/3 »
- « 12 + 2/3 de 12 ça fait 16 »
- « 3 + 2/3 de 3 => 3+6=9 »
- « 2/3 de 30 c'est combien ? 2/3 de 30 c'est 10. Non, non. C'est 20 »
- « 2/3 x 1/30 = 20 »

- « Si 1/7 → 19 alors 8/7 → 152 »
- « 1/7 x 2 = 2/14 »

Ces erreurs de calcul et de raisonnement, bien qu'elles ne semblent pas produites par des « connaissances-obstacles », laissent tout de même entrevoir un certain malaise face au calcul fractionnaire. Comment se fait-il que des étudiants-maîtres ayant fait des cours de mathématiques de niveau universitaire commettent de telles erreurs ? Peut être est-ce dû au fait qu'ils sont aux prises avec un nouveau problème pour lequel ils n'ont pas le contrôle du sens. Comme toute leur attention est centrée sur la recherche de sens relié au nouveau problème, il est possible qu'ils appliquent des règles apprises d'avance sans réfléchir pour exercer un contrôle du sens. Leurs réflexions semblent davantage orientées vers la recherche de nouveaux raisonnements que vers l'application des acquis.

En fait, ces erreurs ne sont peut-être pas causées par une connaissance-obstacle proprement dite mais elles sont peut-être le résultat d'effets secondaires produits par l'obstacle. Nous ne nous aventurerons pas, dans le cadre de cette recherche, à prouver cette hypothèse mais il pourrait être très intéressant d'étudier ce phénomène dans des recherches ultérieures.

Manipulations algébriques

Au niveau des manipulations algébriques, nous ne retrouvons qu'une seule erreur qui a été produite par un seul étudiant. Lors de la résolution du problème 28 : « *Une quantité et son 2/3 sont additionnés. De cette somme est soustrait le 1/3 de cette même somme pour donner 20. Quelle est cette quantité ?* », l'étudiant a traduit le problème de la façon suivante :

$$? + 2/3? - 1/3[? + 2/3?] = 20$$

Il a ensuite multiplié par 3, de façon à faire disparaître les fractions. Voici ce qu'il a obtenu :

$$3? + 2? - 1[3? + 2?] = 60$$

$$5? - 5? = 0 = 60$$

Cet étudiant a multiplié à la fois le nombre qui se trouvait devant la parenthèse et les nombres qui se trouvaient à l'intérieur de la parenthèse. Certains de ses pairs ont tenté de lui faire remarquer son erreur mais il a fallu attendre que l'étudiant arrive à 5? –5? = 0 = 60 pour qu'il se rendre compte lui même que son raisonnement était inadéquat. Cela démontre bien qu'il est important de mettre d'abord la conception inadéquate en situation d'échec avant de vouloir la modifier.

Algorithmes égyptiens (x et ÷)

Comme nous l'avions prévu, certains étudiants-maîtres ont éprouvé quelques difficultés au niveau de l'application des algorithmes de calcul égyptien. Lors des exercices faits en classe, tout semblait bien fonctionner, mais pour des problèmes plus complexes, leur attention n'est plus centrée sur le sens relié à l'algorithme. Ils ont donc tenté d'appliquer des algorithmes sans en contrôler le sens et c'est probablement ce qui a produit les erreurs suivantes :

- 20 x 9 = ?

1	9
/ 2	18
4	36
8	72
16	144

rép. : 2 reste 2

Au lieu de chercher les nombres de la colonne de gauche qui additionnés entre eux donneront 20, cet étudiant a utilisé la colonne de droite.

- 7 x 19 = ?

/ 1	19
/ 2	38
4	76
8	152
/ 16	304

rép. : 361

Au lieu de chercher les nombres qui additionnés entre eux donneront 7 dans la colonne de gauche, cet étudiant a cherché les nombres qui additionnés entre eux donnaient 19. En fait, il a fait 19x19 plutôt que 7x19.

Erreurs diverses de calcul ou de raisonnement

Dans cette catégorie, nous avons classé les erreurs de calcul ou de raisonnement qui n'entraient pas dans les catégories précédentes. Ces erreurs ont probablement toutes été causées par de l'inattention. En voici quelques exemples :

- 7 x 19 = 127
- « 133 c'est un nombre premier »
- 19 ÷ 1 1/7 = 19 ÷1 + 19 ÷ 1/7

Adaptation

Lors de la résolution du problème 24, où il fallait trouver une quantité qui additionnée à son 1/7 allait donner 19, certaines équipes ont tenté de transformer le problème afin de le faire ressembler au problème 21 qu'ils maîtrisaient bien. Le problème 21 consistait à trouver la quantité qui additionnée à 2/3 + 1/15 donnerait 1. Voici deux exemples d'adaptation inadéquate tirés du verbatim produit lors de l'atelier de résolution de problèmes :

$$\frac{14}{16} + \underset{1/8}{?} = 1 \quad = \quad \frac{21}{24} + \underset{3/24}{?} = \frac{1}{8}$$

- « C'est 1/8 dans les deux cas. Ça me donne 1. »
- « Pourquoi tu veux que ça donne 1? »
- « Parce que j'essaie de faire référence à l'autre truc. »

On voit bien par ce commentaire que l'étudiant tente de transformer le problème de façon à obtenir la même forme qu'au numéro précédent qu'il a été capable de résoudre.

- « On a 1/133 1/19 + quelque chose qui va donner 1. »

On constate ici que la multiplication a été remplacée par une addition afin de retrouver le même modèle que le problème 21.

Ce type d'erreur est très révélateur au niveau de l'obstacle. Face à du nouveau, on tente de s'adapter en cherchant des ressemblances avec ce qui nous est familier afin de pouvoir appliquer des connaissances que nous maîtrisons.

Verbalisation

En ce qui concerne les erreurs de verbalisation, il s'agit en fait d'une mauvaise formulation de la pensée ou de l'utilisation de termes inadéquats. Par exemple, lors de la résolution du problème 24, un étudiant a fait la remarque suivante : « 16 va nous donner 133 reste 5. » En fait, il aurait plutôt dû dire « 16 reste 5 va nous donner 133 ». Ce type d'erreurs semble être uniquement causé par de l'inattention et ne laisse pas supposer de lacunes au niveau du raisonnement.

Maintenant que nous avons fait le tour des différents types d'erreurs mathématiques rencontrés chez les étudiants-maîtres lors de la résolution des problèmes tirés du Papyrus Rhind, regardons la distribution de ces erreurs. Dans le tableau VI, nous avons classé les types d'erreurs en indiquant le nombre d'erreurs pour chacune des sous-catégories, le nombre d'équipes ayant commis la même erreur et le numéro de l'équipe ayant commis chacune des erreurs. Ceci nous permet de vérifier si une même erreur a été produite par plusieurs équipes et également de vérifier la répartition des erreurs au sein des équipes.

En observant le tableau VI, on se rend compte que les erreurs relatives à la réponse et au reste sont peu nombreuses, mais ont été produites par plusieurs équipes alors que les autres erreurs sont plus nombreuses mais sont toutes produites par des équipes différentes. En ce qui concerne les erreurs de réponse, celles-ci sont étroitement liées au contexte historique particulier dans lequel les problèmes devaient être résolus. Étant donné le grand nombre d'équipes ayant commis cette erreur (5/6), on peut supposer que d'autres étudiants-maîtres risquent de commettre la même erreur dans des conditions semblables. Par contre, dans un autre contexte, il est peu probable de retrouver cette erreur. Pour ce qui est des erreurs de reste, il pourrait être possible d'observer de telles erreurs dans un autre contexte, puisque celles-ci ne dépendent pas du contexte historique relié aux problèmes résolus. Il est quelque peu surprenant de constater qu'autant d'étudiants-maîtres démontrent des difficultés avec la notion de reste. Deux équipes ont produit des raisonnements inadéquats quant au sens même du reste et quatre équipes ont produit des erreurs en voulant transformer le reste en fraction. Peut-être y aurait-il matière à s'interroger sur les conceptions des étudiants-maître face à la notion de reste et de fractions. Pour ce qui est des erreurs relatives aux fractions, elles sont plus disparates mais il s'agit d'une des catégories renfermant le plus d'erreurs. Comme nous l'avons mentionné précédemment, il s'agit peut-être uniquement d'erreurs d'inattention causées par leur recherche de contrôle du sens lié au problème en tant que tel, ce qui viendrait diminuer le contrôle de sens attribué à l'application des acquis. Néanmoins, un doute persiste. Il serait intéressant selon nous d'approfondir les recherches à ce sujet et de vérifier les conceptions des étudiants-maîtres concernant la notion de fractions.

Description	**Nombre d'erreurs**	**Nombre d'équipes ayant commis la même erreur**	**Numéro de l'équipe ayant commis l'erreur**
Réponse	1	5	1, 2, 3, 4, 5
Reste	2	2 – 2	3, 4 – 3, 4
Fractions :			
• Transformation du reste	1	4	1, 2, 5, 6
• Erreurs de calcul ou de raisonnement	8	1 – 1 – 1 – 1 – 1 – 1 – 1 – 1	3 – 3 – 3 – 2 – 6 – 1 – 1 – 5
Manipulations algébriques	1	1	4
Algorithmes égyptiens (x et ÷)	7	1 – 1 – 1 –1 – 1 – 1 – 1	3 – 2 – 2 – 2 – 5 – 4 – 6
Erreurs diverses de calcul ou de raisonnement	6	1 – 1 – 1 – 1 – 1 – 1	3 – 3 – 3 – 3 – 2 – 5
Adaptation	3	1 – 1 – 1	1 – 2 – 2
Verbalisation	4	1 – 1 – 1 – 1	3 – 3 – 3 – 4

Tableau VI : Erreurs mathématiques

4.2.2 Erreurs historiques

Rappelons d'abord que par erreur historique nous entendons une utilisation anachronique de certains principes mathématiques. Afin de faciliter le traitement de ces erreurs historiques, nous les avons classées selon les catégories suivantes : fractions, algèbre moderne et calcul moderne. À chacune de ses catégories sont reliées des sous-catégories. Pour mieux comprendre à quoi correspondent ces sous-catégories, voyons quelques exemples d'erreurs reliées à chacune et ce qui a pu les causer.

FRACTIONS

Au niveau des fractions, nous avons groupé les erreurs selon les trois sous-catégories suivantes : répétition de fractions semblables, non utilisation du nombre minimum de termes et utilisation de fractions non unitaires.

La répétition de fractions semblables consiste à écrire une fraction sous forme de somme de fractions unitaires en utilisant plus d'une fois une même fraction unitaire. Par exemple, lors de la résolution du problème 22, un étudiant a transformé 9/30 en 1/15+1/15+1/15+1/15+1/30. Cette équivalence n'est pas fausse en soit, mais si on se replace dans le contexte historique du problème alors on fait face à une « erreur historique ». Effectivement, parmi les règles d'écriture des fractions en Égypte antique, il est dit qu'une fraction unitaire ne doit pas être utilisée plus d'une fois pour représenter une quantité quelconque. Cette erreur produite par les étudiants-maîtres est peut-être causée par l'ignorance de la règle égyptienne qui proscrit la répétition dans l'écriture des fractions puisqu'il n'en a pas été question lors de l'exposé magistral sur les mathématiques égyptiennes.

Par « **non-utilisation du nombre minimal de termes** » nous entendons une transformation de fractions en fractions unitaires utilisant un nombre de fractions unitaires plus élevé que le minimum requis. Par exemple, lors de la résolution du problème 22, un étudiant a transformé 9/30 en 1/6 1/10 1/30 plutôt que 1/5 1/10. Ces deux expressions sont équivalentes et correctes sur le plan mathématique, mais au niveau historique, les règles d'écriture égyptiennes stipulent qu'on doit écrire les nombres en utilisant le moins de fractions unitaires possible. Encore une fois, cette dérogation à la règle peut avoir été causée par l'ignorance de cette règle puisqu'elle n'a pas été mentionnée lors de l'exposé magistral.

En ce qui concerne **l'utilisation de fractions non unitaires**, nous avons jugé pertinent de distinguer deux cas particuliers. Nous avons remarqué que plusieurs étudiants-maîtres utilisaient les fractions non unitaires dans un cas précis : pour désigner un reste. Dans ce cas, l'utilisation d'une fraction non unitaire a été suscitée par l'obtention d'un reste lors de la division. Les étudiants-maîtres ont alors voulu traduire ce reste en quantité et, pour ce faire, ils ont eu recours à la forme fractionnaire avec laquelle ils sont habitués de travailler. On a pu observer cette erreur chez toutes les équipes. La plupart des étudiants étaient néanmoins conscients de leur erreur et ont ensuite tenté d'y remédier.

D'autres erreurs ont été produites concernant l'utilisation de fractions non unitaires dans diverses situations, mais dans ce cas il serait trop long d'en faire l'énumération. Notons simplement que toutes les équipes ont utilisé à un moment ou un autre des fractions non unitaires lors de leur résolution de problèmes. L'exemple le plus fréquent est l'utilisation de 8/7 pour représenter 1 et 1/7 dans le problème 24.

L'utilisation des fractions non unitaires est probablement causée par leurs habitudes mathématiques actuelles concernant l'écriture fractionnaire. Il s'agit donc d'un bel exemple où les connaissances antérieures sont causes d'erreurs. Nous pourrions dire que leurs connaissances des fractions fait obstacle à une résolution des problèmes qui serait fidèle au contexte historique de l'époque.

ALGÈBRE MODERNE

En ce qui concerne l'algèbre moderne, nous avons classé les erreurs selon les trois sous-catégories suivantes : la symbolisation algébrique, l'addition d'inconnues et l'utilisation des techniques de manipulation algébrique actuelles. En ce qui a trait à la **symbolisation algébrique**, il est difficile de quantifier le nombre d'erreurs ainsi produites puisqu'il s'agit en fait d'une seule erreur qui est répétée maintes et maintes fois tout au long de la résolution des problèmes. Toutes les équipes sans exception ont utilisé à plusieurs reprises des symboles pour traduire le problème en équations et représenter la quantité inconnue. Certains ont utilisé la variable « x » comme nous le faisons en algèbre moderne et d'autres ont tenté de déguiser cette symbolisation algébrique en utilisant des points d'interrogation ou des parenthèses pour représenter l'inconnue. La plupart des étudiants sont conscients du fait qu'ils ne doivent pas utiliser de symboles mais ils y ont tout de même recours, incapables de trouver autre chose. Certains vont même jusqu'à essayer de se convaincre que les Égyptiens connaissaient l'algèbre afin de justifier leur utilisation des symboles. Nous constatons une utilisation de la symbolisation algébrique plus prononcée chez les deux équipes qui n'ont pas reçu le texte sur la fausse position. Chez les quatre autres équipes, on peut observer un changement à partir du moment où la fausse position leur a été présentée. Peut-être cela leur a-t-il permis de reprendre un certain contrôle de sens. Quoi qu'il en soit, cela n'a pas été suffisant pour enrayer complètement l'utilisation de la symbolisation algébrique. Nous constatons donc une grande résistance des conceptions et des habitudes des étudiants.

Une autre habitude bien ancrée chez les étudiants-maîtres est d'opérer sur des inconnues. Malgré les restrictions historiques qui leur avaient été données, plusieurs étudiants ont **additionné des inconnues**. Nous en avons un bon exemple au problème 24 où plusieurs étudiants ont additionné une quantité « x » et son 1/7 pour donner « 8/7 de x ». Certains ont effectué une opération semblable en transformant d'abord les fractions en entiers, obtenant ainsi « 7x + x = 8x ».

En plus d'additionner des inconnues, plusieurs étudiants-maîtres ont eu recours à des **techniques de manipulation algébrique actuelles** pour isoler une variable en multipliant ou en divisant des deux côtés de l'égalité. En fait, toutes les équipes ont fait cette erreur historique. Voici, à titre d'exemple, le commentaire d'un étudiant-maître lors de la résolution du problème 24 : *« Ça donne 19 ÷ 8/7. Bien là* *j'ai isolé mon point d'interrogation. Ça revient à chercher 8/7 · ? = 19. C'est comme si on veut isoler, on divise par 8/7 des deux bords. »*

Il est curieux de constater que les étudiants-maîtres ne semblent pas dérangés par le fait d'opérer sur des inconnues. Ils se sentent plus mal à l'aise face à l'utilisation de symboles pour représenter les inconnues que face à l'addition d'inconnues ou face à l'utilisation de techniques algébriques comme « isoler une variable ». Est-ce que la symbolisation représente davantage une utilisation de l'algèbre que le fait d'opérer sur des inconnues ? À quoi ces étudiants-maîtres associent-ils l'algèbre et comment la caractérisent-ils ? Sûrement, opérer sur l'inconnue est une caractéristique de l'algèbre pour le didacticien, mais peut-être pas pour le futur maître ou du moins pas lorsque celui-ci joue le rôle d'élève. Aussi, une fois la variable posée, le « péché » est commis et le reste devient légal. Il pourrait se révéler intéressant de vérifier les conceptions des étudiants-maîtres à ce sujet.

CALCUL MODERNE

Finalement, en ce qui concerne le calcul moderne, nous avons groupé les erreurs en trois catégories : l'utilisation de la calculatrice, l'utilisation de nombres décimaux et l'utilisation du produit croisé.

Par les commentaires recueillis lors de l'atelier et transcrits dans le verbatim, nous avons pu déduire que certains étudiants-maîtres ont eu recours à la **calculatrice** pour effectuer certains calculs comme en témoigne la citation suivante, tirée du verbatim : « Veux-tu que je le fasse avec la calculatrice ? Tu veux vérifier si ça marche ? » En fait, les étudiants-maîtres qui ont utilisé la calculatrice semblent l'avoir fait dans le but de valider leur réponse. Nous n'avons trouvé que deux exemples de l'utilisation de la calculatrice, mais il est possible que celle-ci ait été utilisée à bien d'autres reprises sans qu'il en ait été mention. Si la calculatrice est, comme nous le pensons, un outil de validation, elle ne viendra pas produire d'erreurs lors de la résolution historique du problème. En fait, cette erreur pourrait être évitée en interdisant l'utilisation de la calculatrice sans que cela n'ait d'effet sur la manière dont les étudiants-maîtres résoudront le problème.

Le même phénomène est observable au niveau de l'utilisation des nombres décimaux. Effectivement, certains étudiants semblent avoir utilisé les nombres décimaux pour valider leurs réponses comme en témoigne l'extrait suivant tiré du verbatim : « N'oubliez pas qu'on cherche 16,625 comme réponse ». Il est intéressant de noter que les deux équipes qui ont fait usage de la calculatrice, ne figurent pas parmi celles qui ont utilisé les nombres décimaux. On peut cependant se demander si les équipes qui ont utilisé les nombres décimaux n'ont pas utilisé la calculatrice pour arriver à ces résultats. De même, l'utilisation des nombres décimaux ne semble pas faire obstacle à la résolution historique des problèmes et pourrait être évitée sans qu'il y ait des répercussions sur les résultats de notre expérimentation.

Finalement, certains étudiants-maîtres ont eu recours au produit croisé pour résoudre les problèmes proposés. En fait, seules des équipes ayant reçu le texte sur la fausse position ont utilisé le produit croisé. Sur les quatre équipes ayant reçu le texte, deux seulement ont eu recours au produit croisé. Cela peut avoir été causé par les explications que nous leur avons données à la suite de la lecture du texte. Il est possible que nous ayons laissé sous-entendre une ressemblance au niveau du raisonnement avec le produit croisé utilisé de nos jours. Certains étudiants auront alors conclu qu'il était correct d'y avoir recours. Cet obstacle est probablement d'ordre didactique puisqu'il s'agit peut-être d'une erreur induite par le chercheur.

Si certaines erreurs peuvent être évitées sans que cela n'ait d'effet sur les résultats de l'expérimentation, ce n'est pas le cas pour toutes les catégories d'erreurs. Les erreurs relatives à l'utilisation de l'algèbre nous semblent primordiales puisqu'il s'agit d'une connaissance qui fait obstacle à la résolution adéquate des problèmes dans le contexte historique proposé. La résistance au changement de ces connaissances illustre bien le phénomène de l'obstacle tel que le vivent les élèves du secondaire.

Regardons maintenant la distribution de l'ensemble des erreurs historiques. Tout comme pour les erreurs mathématiques, nous avons produit un tableau dans lequel nous avons classé les types d'erreurs en indiquant le nombre d'erreurs pour chacune des sous-catégories, le nombre d'équipes ayant commis la même erreur et le numéro de l'équipe ayant commis chacune des erreurs. Nous pourrons ensuite comparer les résultats avec les résultats obtenus lors de l'analyse des erreurs mathématiques.

En observant le tableau VII, on se rend compte qu'il y a beaucoup moins d'erreurs historiques que d'erreurs mathématiques. Par contre les erreurs historiques sont produites par beaucoup plus d'équipes que les erreurs mathématiques. Nous aurions donc de fortes chances de retrouver ces mêmes erreurs chez d'autres étudiants-maîtres, advenant que l'on répète l'expérimentation dans des conditions similaires.

Description	**Nombre d'erreurs**	**Nombre d'équipes ayant commis la même erreur**	**Numéro de l'équipe ayant commis l'erreur**
Fractions :			
• Répétition de fractions semblables	1	2	1, 3
• Non-utilisation du nombre minimal de termes	1	1	3
• Utilisation de fractions non unitaires	2	6 – 6	1, 2, 3, 4, 5, 6 – 1, 2, 3, 4, 5, 6
Utilisation de l'algèbre :			
• Utilisation d'un symbole pour représenter l'inconnue	1	6	1, 2, 3, 4, 5, 6
• Addition d'inconnues	2	5 - 4	1, 3, 4, 5, 6, – 2, 3, 4, 6
• Utilisation des techniques de manipulation algébriques actuelles.	1	6	1, 2, 3, 4, 5, 6
Recours au calcul moderne :			
• Utilisation de la calculatrice	1	2	3, 6
• Utilisation de nombres décimaux	1	2	1, 2
• Utilisation du produit croisé	1	2	2, 5

Tableau VII : Erreurs historiques

Un autre point important dont il faut tenir compte dans la comparaison des erreurs mathématiques et historiques est la persistance de ces erreurs. Malheureusement, notre tableau ne nous permet pas de tirer de conclusions à ce sujet. En fait, nos outils de collecte de données ne nous permettaient pas de quantifier la persistance des erreurs ou la résistance des conceptions inadéquates. Nous avons néanmoins observé à partir des commentaires transcrits dans le verbatim, une persistance plus forte au niveau des erreurs historiques. Compte tenu de l'aspect persistant, nous croyons que les erreurs historiques, dans notre cas, sont de meilleurs indicateurs d'obstacles que les erreurs mathématiques.

Comparativement aux erreurs mathématiques, les étudiants-maîtres semblent plus souvent conscients de leurs erreurs en ce qui a trait aux erreurs historiques. Parfois ils tentent de les corriger et d'autres fois ils continuent d'utiliser une connaissance historiquement inadéquate même s'ils savent qu'ils ne le devraient pas. Par exemple, ils sont conscients du fait qu'il ne faut pas utiliser de fractions de la forme n/m et ils tentent de les modifier. Par ailleurs, même s'ils savent qu'il ne faut pas utiliser d'algèbre, ils essaient moins de s'en passer. Est-ce parce qu'ils possèdent des connaissances qui leur permettent de faire autrement au niveau des fractions mais pas au niveau de l'algèbre ?

4.3. Analyse des études de cas

Afin de vérifier si notre séquence d'enseignement avait eu un effet sur la conception des étudiants-maîtres face à l'obstacle, nous leur avons demandé de refaire l'étude de cas qui leur avait été présentée au mois de septembre, afin de comparer les résultats avant et après l'expérimentation. Malheureusement, nous avons eu très peu de réponses à la deuxième étude de cas. Le travail était à faire à la maison et à remettre au dernier cours de la session, soit deux semaines après le retour que nous avons fait avec eux en classe. Seulement cinq étudiants-maîtres sur vingt et un, ont répondu à la deuxième étude de cas. Étant donné ce nombre minime de réponses, il nous est impossible de tirer des conclusions positives de notre expérimentation. Nous avons néanmoins pu observer certains faits et faire quelques suppositions. Mais d'abord, revoyons les consignes qui ont été données aux étudiants-maîtres pour la réalisation de l'étude de cas :

Dans les pages suivantes, nous vous présentons les réponses de certains élèves. Évidemment, les noms utilisés sont fictifs afin d'assurer l'anonymat des élèves. Analysez leurs démarches, et répondez aux questions suivantes :

1. *Pour chacun des élèves, identifiez les erreurs et les obstacles rencontrés.*
2. *Quelles sont, selon vous, les causes d'erreurs ?*
3. *Que pensez-vous qui fait obstacle à la réussite de ces élèves ?*
4. *Comment aideriez-vous ces élèves ? Justifiez votre réponse.*

Suite à notre analyse comparative des deux études de cas (avant et après l'expérimentation) voici ce que nous avons pu observer[10]:

De manière générale, les étudiants-maîtres ayant répondu à la deuxième étude de cas ne semblent pas démontrer par leurs réponses une compréhension riche du concept d'obstacle tel que nous l'entendons. Par contre, certaines réflexions laissent supposer une certaine ouverture face à la conception de l'obstacle en tant que connaissance antérieure qui avait ses succès mais qui, sortie de son contexte, ne fonctionne plus. Mais les conceptions inadéquates face au concept d'obstacle semblent trop persistantes pour amener les étudiants-maîtres à changer complètement.

Il est curieux de constater que certains étudiants-maîtres qui semblent démontrer une certaine compréhension de la notion d'obstacle, ne semblent pas voir

[10] Une version plus détaillée de l'analyse comparative entre les deux études de cas est disponible à l'annexe 7.

l'obstacle comme une cause d'erreur puisque leurs réponses aux questions 2 et 3 sont assez différentes. Par exemple, dans l'étude du cas d'Éric, un des étudiants-maîtres a mentionné que la cause d'erreur était la suivante :

« L'élève a confondu : il faut faire +11, -11 du même côté du signe « = » pour ne pas changer l'égalité, mais il faut faire –11 et –11 de part et d'autre du signe « = » pour conserver l'égalité. L'élève a mélangé ces 2 concepts. »

Ce même étudiant a répondu que ce qui a fait obstacle à sa réussite était :

« Une mauvaise compréhension du concept d'égalité. »

Tous les étudiants ont répondu à la première question en terme d'erreur et n'ont pas fait allusion à l'obstacle, et ce dans les deux études de cas. Notre objectif par rapport à cette question, qui était de voir la différence que les étudiants percevaient entre erreur et obstacle n'a pas été atteint. Par contre, si on regarde les réponses obtenues à la question 3, on remarque une légère différence comparativement aux réponses obtenues à la question 1. On peut supposer que les étudiants-maîtres perçoivent une différence entre erreur et obstacle mais cette différence ne semble pas être bien définie. Par exemple, dans l'étude du cas de Martin un étudiant-maître a répondu à la première question comme suit :

« Il n'additionne pas les termes semblables avant de diviser et divise mal (ne fait pas la distributivité). »

Ce même étudiant a répondu à la troisième question en disant que Martin :

« Il n'est pas habitué avec une technique que dès qu'il y a un coefficient numérique différent de 1 affecté à x, il faut immédiatement faire l'opération inverse. Il oublie d'additionner les termes semblables avant car il ne transpose pas ce qu'il a appris en algèbre. »

En comparant ces deux réponses, on peut observer certaines différences. À la première question, l'étudiant décrit ce que l'élève n'a pas fait ou a mal fait. À la troisième question, il décrit ce que l'élève est habitué de faire, ce qui se rapproche un peu plus de l'idée d'obstacle que nous voulions leur faire découvrir. Par contre le même étudiant a répondu de manière différente aux autres cas, ce qui laisse supposer que ses définitions des concepts d'erreur et d'obstacle ne sont pas très claires. Dans l'étude du cas d'Éric, il a répondu à la question 3 : « *L'élève mêle deux méthodes qu'il a apprises sans les comprendre* » et dans l'étude du cas de Julie, il a répondu : « *L'élève ne comprenait pas encore le langage algébrique.* »

Nous avons remarqué que certains étudiants utilisent des formulations qui sont incorrectes sur le plan mathématique pour exprimer leurs idées. Par exemple, à la question 1, un étudiant a répondu que Martin ne respectait pas la priorité des équations lors de l'isolation d'une variable. Or, la priorité des équations n'est pas un concept mathématique. Il aurait plutôt dû parler de priorité des opérations. Ce manque de rigueur et de précision au niveau du vocabulaire utilisé et des formulations de phrases peut se révéler problématique si répété devant des élèves du secondaire car ceux-ci n'ont pas le bagage mathématique nécessaire pour effectuer les corrections de langage comme nous savons le faire en tant que professionnels.

Malgré le petit échantillon de réponses recueillies, on peut constater que la séquence d'enseignement n'a pas eu tout l'effet souhaité. Les conceptions des étudiants-maîtres face à la notion d'obstacle et à la façon d'intervenir auprès des élèves du secondaire sont plus résistantes que nous l'avions d'abord pensé.

Notre premier objectif qui était de faire vivre une situation d'obstacle aux étudiants-maîtres semble atteint puisque notre analyse des erreurs mathématiques et historiques nous a révélé que l'algèbre actuelle agissait en tant que connaissance-obstacle. Par contre, nous ne sommes pas certaine si les étudiants-maîtres ont fait le lien entre l'expérience qu'ils venaient de vivre et la théorie à propos de l'obstacle présentée lors du retour. De fait, notre deuxième objectif qui était de faire un parallèle entre la situation d'obstacle vécue par les étudiants-maîtres et les situations d'obstacles vécues par les élèves du secondaire ne semble pas atteint. Si on se réfère aux études de cas reçues après l'expérimentation, les étudiants-maîtres ne semblent pas capables de transférer leurs nouvelles connaissances face à l'obstacle dans l'évocation d'une situation concrète d'enseignement au secondaire. On peut alors imaginer que dans une situation réelle d'enseignement avec toutes les contraintes que l'on peut rencontrer dans une classe du secondaire, le transfert risque de se faire encore plus difficilement (Gattuso, 1992). Il faudrait donc réviser certains de nos choix didactiques qui ont guidé la réalisation de l'expérimentation I.

Chapitre 5

Évaluation et modifications

À la lumière des résultats obtenus lors de notre première expérimentation, nous constatons que nous nous sommes principalement concentrée sur les obstacles mathématiques des étudiants-maîtres. Le retour a d'ailleurs été préparé en fonction des obstacles mathématiques qui sont ressortis lors de la résolution des problèmes égyptiens afin d'amener les étudiants-maîtres à prendre conscience de leurs obstacles et de les amener à établir un parallèle avec ce que peuvent vivre les élèves du secondaire. Cependant, nous n'avons pas tenu compte dans l'organisation de notre expérimentation, du travail sur leurs obstacles à l'obstacle. Nous avons réussi à leur faire vivre une situation d'obstacle mais nous avons omis de prendre en considération leurs conceptions antérieures face à la notion d'obstacle pour les faire évoluer, voire même les « détruire ». Les deux conceptions continuaient donc à agir en parallèle, soit leur conception antérieure qui était de percevoir l'obstacle comme un manque de connaissance et la nouvelle conception que nous les avons amené à découvrir qui était de percevoir l'obstacle comme une connaissance inadéquate puisque sortie de son domaine de validité. « *Il peut donc exister, chez les futurs enseignants, des conceptions contradictoires à propos de l'apprentissage et, en fonction des situations dans lesquelles ils sont placés, l'une ou l'autre de ces conceptions sera mise en œuvre.* » (René de Cotret, 2000, p. 26) Comme leur conception antérieure de l'obstacle a été formée par le modèle d'enseignants qu'ils ont eu en tant qu'apprenants, ils ont tendance à retourner à cette conception lorsqu'on les place face à une situation liée à un contexte de classe.

Comme nous avons décelé certaines lacunes à notre première expérimentation, nous avons décidé d'en élaborer une deuxième. D'abord, après la première expérimentation, nous n'avions reçu que très peu d'études de cas décrivant les conceptions des étudiants-maîtres par rapport à l'obstacle. Nous espérions donc, en élaborant une deuxième expérimentation, arriver à mieux contrôler cet aspect. De plus, dans la première expérimentation, nous avions orienté nos interventions et notre retour sur les obstacles mathématiques des étudiants-maîtres plutôt que sur leurs obstacles à la notion d'obstacle. Nous souhaitions donc dans le cadre de la deuxième expérimentation travailler à modifier plus directement ou explicitement leur connaissance-obstacle relativement à la notion d'obstacle, cette connaissance pouvant se formuler comme étant de donner ce qui manque lorsqu'un élève est en situation d'obstacle. C'est ainsi que nous en sommes venue à nous fixer un troisième objectif, soit celui d'amener les étudiants-maîtres à trouver des façons de traiter l'obstacle. Finalement, nous avons voulu par cette deuxième expérimentation comparer des enseignants en exercice et des étudiants-maîtres en formation. Cette idée nous est venue en comparant les résultats obtenus lors de la préexpérimentation qui avait été faite auprès d'enseignants et l'expérimentation I qui avait été faite auprès d'étudiants-maîtres. Nous avions alors remarqué que les enseignants en exercice avaient plus facilement fait le lien entre ce qu'ils venaient de vivre et ce que les élèves du secondaire peuvent vivre face à certains problèmes mathématiques. Nous espérions donc que les enseignants en exercice aident les étudiants-maîtres à faire le parallèle entre l'expérience vécue dans le cadre de notre expérimentation et ce que vivent les élèves du secondaire.

5.1. Conception de l'expérimentation II

Afin d'élaborer notre deuxième expérimentation, nous avons à nouveau eu recours à la théorie des situations de Brousseau (Larose et René de Cotret, 2002), mais cette fois-ci nous avons tenté de l'appliquer plus directement à la notion d'obstacle. Le tableau VIII démontre les grandes différences au niveau de l'élaboration des deux expérimentations.

Expérimentation I	Expérimentation II
1- Hypothèses : • Nous croyons que les étudiants-maîtres traiteront l'obstacle en « donnant ce qui manque ». • Nous croyons que l'algèbre moderne viendra faire obstacle aux étudiants-maîtres lors de la résolution de problèmes égyptiens.	**1- Situation de connaissance-obstacle :** Traiter l'obstacle en donnant ce qui manque, *c'est-à-dire en réexpliquant ou en donnant un exemple.*
2- Situation de recherche des conceptions : Étude de cas (Éric, Julie, *Martin*, Anne)	**2- Situation de mobilisation :** Étude de cas (Éric, Julie, Anne)
3-	**3- Situation de formulation :** *« Si vous aviez à conseiller un futur enseignant sur la manière d'aider un élève qui a fait une erreur dans un problème mathématique, que lui diriez-vous ? »*
4a- Situation d'apprentissage : Présentation de la théorie concernant les mathématiques égyptiennes[*] (exposé magistral et exercices) **4b- Situation de mobilisation :** Atelier de résolution de problèmes tirés du Papyrus Rhind (nos 22, 24, 25, 26 et 28) **4c- Situation de formulation :** Rapport écrit Discussion en plénière **4d- Situation d'invalidation/validation :** Partir de l'obstacle vécu par les étudiants-maîtres pour leur montrer la façon de traiter un obstacle	**4- Situation d'invalidation :** - Présentation de la mise en situation - Présentation de la théorie sur les mathématiques égyptiennes - Atelier de résolution de problèmes (nos 22, 24, 25, 28) - *Interventions relatives au conseil formulé à l'étape 3* - Discussion en plénière et retour sur l'activité fondé sur le traitement de l'obstacle - Retour : *immédiatement après l'activité*
5- Situation d'institutionnalisation : Théorie portant sur la notion d'obstacle	**5- Situation d'institutionnalisation :** Théorie portant sur la notion d'obstacle
6- Situation d'évaluation : Étude de cas (les 4 mêmes qu'à l'étape 2) À faire à la maison et à remettre 2 semaines après le retour	**6- Situation d'évaluation :** Étude de cas (*Martin*) *Immédiatement après l'expérimentation*

[*] Les étudiants-maîtres ont reçu une feuille sur la multiplication et la division égyptiennes ainsi que des exercices à faire à la maison une semaine avant l'expérimentation afin d'assimiler davantage ces notions.

Tableau VIII : Comparaison des expérimentations I et II

Pour la deuxième expérimentation, nous avons dans un premier temps identifié la connaissance-obstacle que nous voulions modifier par notre expérimentation. Nous avons prédit à la lumière de notre analyse, que les participants allaient percevoir la cause d'erreur comme un manque et y remédier en réexpliquant ou en donnant un autre exemple concret. Nous avons ensuite cherché une situation de mobilisation qui ferait ressortir la connaissance-obstacle que nous venons de décrire. Pour ce faire, nous avons eu recours à l'étude de cas utilisée lors de la première expérimentation. Cette fois-ci, nous avons décidé de leur faire analyser uniquement trois des quatre cas que nous avions présentés lors de la première expérimentation. Nous avons gardé le quatrième cas pour l'évaluation à la fin de l'expérimentation au lieu de leur faire refaire l'étude des quatre cas comme nous l'avions fait à l'expérimentation I. Nous avons choisi d'utiliser les cas d'Éric, Julie et Anne pour la situation de mobilisation, et de garder le cas de Martin pour la situation d'évaluation. La situation d'évaluation nous a servi en fait à évaluer les changements apportés par l'expérimentation au niveau des conceptions des participants par rapport à l'obstacle. Pour ce faire, nous avons préféré utiliser le cas de Martin puisqu'il nous semblait plus représentatif de ce à quoi nous nous attendions. Par exemple, lors de la première expérimentation certains avaient désigné la cause d'erreur chez Anne comme un simple manque d'attention. Nous avons donc voulu garder un cas où l'obstacle était plus facilement repérable et identifiable.

Jusqu'à présent, les deux premières étapes (situation de connaissance-obstacle et situation de mobilisation) ressemblent en grande partie à ce qui a été fait lors de la première expérimentation. Par contre, les objectifs s'y rattachant sont quelque peu différents. Lors de la première expérimentation, les études de cas avaient été utilisées pour identifier les conceptions des étudiants-maîtres par rapport à la notion d'obstacle alors que dans la deuxième expérimentation, elles ont servi à mettre en application les conceptions que nous avions identifiées à l'étape précédente.

Au niveau de la troisième étape, soit la formulation, nous pouvons apercevoir un changement majeur puisque cette étape était absente de la première expérimentation. Nous avons demandé aux participants de formuler un conseil pour venir en aide à un élève qui a fait une erreur dans un problème mathématique. Nous voulions ainsi les amener à généraliser les réponses qu'ils avaient données à la question 4 de l'étude de cas : *« Comment aideriez-vous ces élèves ? Justifiez votre réponse. »* L'étape de formulation permettait une certaine prise de conscience et une réflexion sur la conception en jeu et permettait d'énoncer clairement cette conception. Celle-ci sera d'ailleurs reprise lors de la situation d'invalidation.

Par la suite, nous avons placé les participants dans une situation d'invalidation en reprenant l'activité de résolution de problèmes égyptiens. Cette fois-ci, nous avons ajouté une mise en situation dans le but de modifier le contrat didactique et d'inciter les participants à entrer dans le jeu par intérêt plutôt que pour faire plaisir au professeur. Avant de commencer l'activité de résolution de problèmes, nous avons donné aux participants une courte formation sur les mathématiques égyptiennes. La théorie que nous y avons présentée était la même que celle de la première expérimentation. La seule différence était que les participants n'ont pas reçu de feuille sur les algorithmes de multiplication et de division avant l'expérimentation comme ce fut le cas lors de la première expérimentation. Puisque la dernière fois plusieurs étudiants-maîtres n'avaient pas fait le travail à la maison, nous avons préféré cette fois-ci tout faire en classe de façon que tous les participants aient la même formation. En ce qui concerne l'activité de résolution de problèmes, nous avons gardé les mêmes problèmes qu'à la première expérimentation à l'exception du problème 26 que nous avons enlevé. Comme il était semblable aux numéros 24 et 25 et qu'il était plus facile à résoudre puisqu'il ne comportait pas de reste, nous avons décidé de l'enlever et de laisser plus de temps pour les autres problèmes.

Tout au long de l'activité, les participants avaient le droit de poser trois questions. Nous avons répondu à ces questions en fonction du conseil qu'ils avaient formulé lors de la situation de formulation. Nous voulions ainsi tenter d'invalider leur conception concernant le traitement de l'obstacle. Nous nous attendions que l'aide apportée en suivant leur conseil ne leur permette pas de surmonter l'obstacle et que cela les amène à réviser leur conception. Après l'activité de résolution de problèmes, les participants ont dû répondre à un questionnaire écrit dans le but de les préparer à la discussion plénière. Cette dernière visait à leur faire verbaliser ce qu'ils avaient vécu lors de l'activité et à voir si cela avait eu un impact sur leur conception de l'obstacle. En fait, la discussion plénière servait en quelque sorte à valider ou invalider leur conception concernant le traitement de l'obstacle. Nous avons enchaîné avec la situation d'institutionnalisation où nous avons présenté la théorie se rapportant à la notion d'obstacle dans le but d'officialiser les connaissances des étudiants-maîtres par rapport à cette notion. Finalement, nous avons terminé la journée par une situation d'évaluation où nous avons demandé aux participants de répondre à une dernière étude de cas. Nous voulions ainsi vérifier si notre expérimentation avait produit des changements au niveau de leur conception de l'obstacle.

Voyons maintenant comment s'est déroulée cette deuxième expérimentation et quels sont les résultats que nous avons obtenus.

5.2. Déroulement et analyse de l'expérimentation II

L'expérimentation II a eu lieu le samedi 6 avril 2002, de 9 h 30 à 16 h 30 à l'Université de Montréal. Parmi les participants, nous avions deux étudiants-maîtres de troisième année inscrits au BES à l'Université de Montréal et deux enseignants ayant au moins 2 ans d'expérience et oeuvrant dans des écoles de Montréal. Les participants ont été choisis sur une base volontaire. Nous aurions souhaité avoir plus de participants, mais certains se sont désistés à la dernière minute. Il est malheureusement difficile de trouver des volontaires prêts à s'investir gratuitement, surtout un samedi de 9 h 30 à 16 h 30.

5.2.1. Situation de mobilisation et de formulation

La journée a débuté par l'accueil des participants, puis nous les avons invités à répondre à l'étude de cas. Tel que nous l'avions prévu, les réponses obtenues lors de l'étude des trois premiers cas étaient semblables à celles obtenues lors de la première expérimentation. À la quatrième question, la plupart des participants ont dit qu'ils aideraient ces élèves en leur expliquant à nouveau le concept ou en leur donnant un exemple concret. À la suite de l'étude de cas, nous avons amené les participants à formuler leur connaissance concernant le traitement de l'obstacle en leur posant la question suivante : *« Si vous aviez à conseiller un futur enseignant sur la manière d'aider un élève qui a fait une erreur dans un problème mathématique, que lui diriez-vous ? »* Nous voulions ainsi les amener à formuler les caractéristiques de leur action pour aider un élève qui fait des erreurs.

En lisant les conseils des participants, nous avons été quelque peu surprise par les résultats. Nous nous attendions à avoir des réponses brèves qui généraliseraient ce qu'ils avaient répondu à la question 4 de l'étude de cas mais au lieu de cela, nous avons eu des réponses longues et plutôt vagues, différentes de celles qu'ils avaient proposées dans l'étude de cas. Cet écart observé entre les réponses obtenues à la question 4 de l'étude de cas et la généralisation faite dans la formulation du conseil est assez surprenant. Il laisse entrevoir une différence de conception entre le concret et le général. En théorie les participants ont un certain discours et en pratique ils en ont un autre. Pourquoi une telle contradiction ? Lors de la rédaction du conseil, un des participants nous a demandé si le conseil visait à aider un élève ayant des difficultés en algèbre ou par rapport à n'importe quelle notion mathématique. Nous lui avons répondu que le conseil devait s'appliquer à n'importe quelle notion. Cela a peut-être eu un effet sur leurs réponses et explique peut-être en partie le fait qu'ils aient été aussi vagues. De plus, lors de la discussion en plénière les enseignants nous ont fait comprendre qu'ils n'avaient pas très bien saisi la question que nous leur avions posée concernant la formulation du conseil.

Voyons brièvement, à l'aide du tableau IX, les réponses que nous avons obtenues :

Réponses à la question 4 de l'étude de cas	**Formulation d'un conseil**
Étudiants-maîtres :	
• Expliquer le concept mathématique incompris par l'élève • Donner des exemples	• Faire ressortir les points positifs dans la démarche de l'élève • Faire verbaliser l'élève sur sa démarche • Si l'élève sait où son raisonnement fait défaut, lui donner un exemple concret ; sinon, il faut d'abord défaire ses fausses idées
Enseignants :	
• Expliquer le concept mathématique incompris par l'élève • Donner un exemple • Utiliser des objets ou des images afin de représenter visuellement le problème.	• Faire ressortir les points forts de l'élève • Amener l'élève à reformuler le problème • Amener l'élève à planifier sa démarche de résolution • Trouver les outils utiles pour résoudre le problème • Amener l'élève à critiquer sa solution

Tableau IX : Le traitement de l'obstacle, du concret au général

Au niveau du conseil formulé par les étudiants-maîtres, nous pouvons déjà entrevoir des traces d'éléments relatifs à une conception de l'obstacle telle que nous l'entendons. Il reste néanmoins du travail à faire, tout particulièrement au niveau de leur approche d'aide par l'exemple où ils se retrouvent en fait à donner un modèle que l'élève pourra suivre sans nécessairement comprendre. De plus, les étudiants-maîtres n'ont pas mentionné de quelle manière ils s'y prendraient pour défaire les fausses idées de l'élève.

En ce qui concerne la réponse des enseignants, il s'agit plutôt d'une méthodologie de résolution de problèmes qu'ils proposent à l'élève. Étonnamment, il n'est pas mention de la manière dont l'enseignant amènera l'élève à effectuer chacune des étapes de leur méthodologie. Comment l'enseignant aidera-t-il l'élève qui est bloqué et qui ne comprend pas ? À cette question, pas de réponse. Il semblerait que les enseignants aient mal saisi la nature du conseil que nous leur demandions. Pourtant, la question nous semble claire et nous voyons difficilement comment nous pourrions la clarifier davantage.

5.2.2. Atelier de résolution de problèmes égyptiens

Après l'étape de formulation, nous sommes passée à la phase d'invalidation. Pour ce faire, nous avons réutilisé l'atelier de résolution de problèmes présenté lors de l'expérimentation I. Comme nous l'avons mentionné un peu plus tôt, nous avons ajouté une mise en situation afin d'amener une certaine dévolution. Les participants étaient invités à participer à un voyage dans le temps afin de contribuer à l'avancement de la science, en allant découvrir le monde mathématique de l'Égypte antique. Avant de partir, une courte formation sur ce que nous connaissons aujourd'hui des mathématiques égyptiennes leur a été présentée. Tout comme lors de la première expérimentation, nous leur avons parlé du contexte historique, de l'écriture égyptienne, des algorithmes de multiplication et de division, de l'addition et de la soustraction, des règles des fractions, des problèmes écrits, et nous leur avons présenté un exemple de résolution d'un problème tiré du Papyrus Rhind. Cependant, cette fois-ci la présentation des mathématiques égyptiennes avait comme idée conductrice de préparer les participants à leur voyage. Nous voulions ainsi les inciter à entrer dans le jeu en faisant le lien entre la théorie et notre mise en situation.[11] D'après les réactions des participants, notre mise en situation semble avoir produit l'effet escompté. Lors de la résolution de problèmes, aucun participant n'a justifié ses démarches en disant que c'était ce que le professeur avait fait ou encore que c'était ce à quoi il s'attendait. Les participants semblaient motivés à

[11] Vous trouverez à l'annexe 8 les documents qui ont été remis aux participants concernant la mise en situation et la formation sur les mathématiques égyptiennes.

« gagner » le jeu en solutionnant adéquatement les problèmes et faisaient régulièrement référence à la mise en situation.

Après avoir donné aux participants les outils mathématiques nécessaires à l'atelier de résolution de problèmes, nous avons pris une pause dîner pour ensuite revenir avec la deuxième partie de notre mise en situation. Les participants se retrouvaient alors en Égypte et étaient conviés à une réunion de scribes où on leur annonçait que des imposteurs avaient tenté de s'infiltrer dans les lieux. Ils étaient alors soumis à des épreuves mathématiques pour prouver leur innocence. S'ils ne parvenaient pas à résoudre les problèmes en utilisant les méthodes de calcul égyptien, ils seraient jetés aux crocodiles.

Voici les consignes qu'ont reçues les participants pour faire l'activité :

- *Résolvez les quatre problèmes suivants dans votre cahier.*
- *Laissez toutes les traces de vos démarches.*
- *Il est interdit d'effacer ou de camoufler une erreur par une tache d'encre. En cas d'erreur, rayez-la proprement de façon que ce soit encore lisible.*
- *La consultation en équipe est permise.*
- *Matériel permis : cahier de réponses, crayon à l'encre, résumé de la formation, appareil permettant de poser 3 questions au centre de contrôle. (l'utilisation de la calculatrice est défendue)*
- *On suppose que les scribes ont leurs rouleaux contenant les tables d'addition. (comme vous ne possédez pas de rouleau, vous devrez effectuer les additions mentalement)*
- *Vos questions au centre de contrôle doivent être écrites sur la feuille à cet effet.*
- *Lorsque vous avez terminé, vous devez TOUT remettre au responsable.*

Problème n° 1

Combien faut-il pour compléter 2/3 1/30 en 1 ?

Problème n° 2

Une quantité et son 1/7 additionnés ensemble donne 19. Quelle est cette quantité ?

Problème n° 3

Une quantité et son 1/2 additionnés ensemble donne 16. Quelle est cette quantité ?

Problème n° 4

Une quantité et son 2/3 sont additionnés. De cette somme est soustrait le 1/3 de cette même somme pour donner 20. Quelle est la quantité ?

Dans le cadre de cette deuxième expérimentation, nous avons décidé de remettre à chaque participant une reliure à anneaux contenant des feuilles blanches. Contrairement à l'expérimentation I, les questions n'étaient plus écrites sur les feuilles de calcul, ce qui permettait aux participants de répondre aux questions dans l'ordre qui leur convenait et de prendre autant de pages qu'ils le voulaient pour la résolution des problèmes. De plus, les feuilles de réponses ne comportaient plus de marge à droite pour les commentaires. Comme nous n'avions eu que très peu de commentaires lors de la première expérimentation et que les verbatims nous avaient davantage renseignée sur le raisonnement des étudiants-maîtres, nous avons décidé d'abandonner l'idée de leur faire écrire des commentaires sur leur raisonnement et leurs erreurs.

Comme certains étudiants-maîtres n'ont pas respecté la consigne de ne pas effacer lors de la première expérimentation, nous avons voulu nous assurer qu'une telle chose ne se reproduise pas. Nous avons donc fourni des crayons à l'encre à chacun des participants en leur indiquant de ne pas tenter de dissimuler les erreurs. Comme les participants étaient moins nombreux et que nous avons filmé les deux équipes à tour de rôle, il était peut-être plus gênant de camoufler des réponses. Malgré tout, un des participants a quand même tenté de contourner les règles en effectuant certains calculs sur la paume de sa main. Ceci démontre bien à quel point nos connaissances antérieures peuvent êtres résistantes et combien il peut être tentant d'y avoir recours.

Lors de la première expérimentation, les étudiants-maîtres nous avaient mentionné qu'une des choses qui les avaient déconcertés était de ne pas savoir ce qu'ils avaient le droit de faire. Afin de tenter de remédier à ce problème, nous avons décidé pour la deuxième expérimentation de fournir un document résumant les grandes lignes de la formation sur les mathématiques égyptiennes. Bien que cela se soit révélé quelque peu utile, le problème n'a pas été complètement résolu. Certains participants ont soulevé le fait qu'ils ne savaient pas toujours ce qu'ils avaient le droit de faire et ce qui existait à cette époque. En fait, par cette interrogation, ces participants cherchaient à définir les limites du domaine de validité dans lequel se retrouvent leurs connaissances.

L'interdiction d'utiliser la calculatrice avait pour but d'éviter des erreurs historiques reliées à son utilisation, semblables à celles observées lors de la première expérimentation. La consigne a bien été respectée ce qui a, comme prévu, éliminé les erreurs de ce type.

Pour les fins de notre mise en situation, nous avons introduit un appareil permettant aux participants de communiquer avec nous s'ils éprouvaient des difficultés. Nous voulions ainsi orienter davantage nos interventions. Celles-ci étaient guidées par les questions des participants auxquelles nous tentions de répondre en utilisant le conseil énoncé lors de la phase de formulation. Les participants avaient droit à trois questions. En mettant ainsi à leur disposition un nombre limité de questions, nous espérions favoriser chez les participants une réflexion sur leur apprentissage. En effet, le fait d'avoir un nombre limité de questions devraient les amener à réfléchir davantage sur la formulation de leurs questions et sur ce qu'ils recherchent comme aide afin d'optimiser leur chance de résoudre les problèmes. De plus, nous nous attendions que les questions posées par les participants nous renseignent sur l'aide qu'ils demandent en tant qu'élève comparativement à l'aide qu'ils proposent en tant qu'enseignant.

Nous avons été quelque peu surprise par la tournure des événements. Contrairement à ce que nous avions pensé, les participants n'ont pas utilisé les questions pour obtenir de l'aide dans la résolution des problèmes. L'équipe d'enseignants a résolu tous les problèmes sans poser de questions. Lorsqu'ils ont eu terminé, nous leur avons demandé s'ils étaient certains d'avoir la vie sauve et ils nous ont répondu « non ». Pourquoi ne pas avoir utilisé l'aide disponible ? Certains élèves ont parfois la même attitude de ne pas demander d'aide. Est-ce par gêne ou par peur de montrer leur incompréhension ? Est-ce un phénomène relié au statut « d'élève » ? Comme le temps alloué à l'activité n'était pas écoulé, nous avons suggéré aux enseignants d'utiliser leurs questions afin d'essayer d'écarter les doutes. Leurs questions visaient davantage à valider leurs réponses qu'à les aider face aux connaissances. Pour leur part, les étudiants-maîtres ont utilisé une de leurs questions pour valider leur réponse au deuxième problème, puis vers la fin de l'exercice, voyant que les enseignants utilisaient leurs questions pour vérifier leurs réponses, ils ont posé une autre question pour valider le raisonnement utilisé pour résoudre le quatrième problème.

Au niveau de nos interventions, il a été plus facile de répondre aux étudiants-maîtres qu'aux enseignants en utilisant le conseil qu'ils avaient écrit lors de la phase de formulation. À la première question, ils demandaient une réponse de type « oui ou non » pour savoir si leur réponse était bonne. Leur conseil ne s'appliquait donc pas dans ce cas-ci. Par contre, il s'appliquait bien dans le cas de leur deuxième question où ils voulaient savoir si leur raisonnement était adéquat. Nous avons d'abord fait ressortir les points forts de leur démarche, puis nous leur avons demandé où se situait selon eux le problème. Comme ils nous ont mentionné que le problème était au niveau de l'utilisation de l'algèbre, nous leur avons présenté un exemple permettant de résoudre le problème autrement. Pour ce qui est de l'équipe d'enseignants, le conseil qu'ils avaient écrit se prêtait mal pour répondre à leurs questions. Leur conseil représentait une méthodologie de résolution de problèmes. Or, ils comprenaient très bien le problème et ce qu'ils devaient trouver mais ils ne savaient pas comment y parvenir. Malheureusement leur conseil ne faisait pas mention de la manière dont l'enseignant devait agir face à l'élève dans une telle situation. Leurs questions visaient également à savoir si leurs réponses étaient bonnes, mais aussi à vérifier les connaissances des Égyptiens. À ce sujet, ils ont demandé si les Égyptiens savaient multiplier des fractions et ce que les Égyptiens faisaient face à des fractions non unitaires.

5.2.3. Retour sur l'activité et discussion en plénière

Après l'activité de résolution de problèmes, nous avons demandé aux participants de répondre par écrit à certaines questions afin de les préparer au retour sur l'activité. Nous en avons ensuite discuté en plénière. Comme le retour s'est fait immédiatement après l'activité de résolution de problèmes, il a été plus facile de faire verbaliser les participants sur leur apprentissage et sur l'expérience qu'ils venaient de vivre. Voici les questions qui ont été abordées lors du retour sur l'activité :

1. *Croyez-vous avoir la vie sauve ou servirez-vous de repas aux crocodiles ? Justifiez votre réponse.*

2. *Lors de l'activité, avez-vous été déconcerté et par quoi ?   OUI   NON*

3. *Qu'est-ce qui rendait cette activité difficile ?*

4. *Avez-vous utilisé votre appareil pour communiquer avec le centre de contrôle (en d'autres mots, avez-vous posé des questions au professeur) ?*
   OUI   NON

5. *Si oui, à combien de reprises ?   1   2   3*

6. *Était-ce suffisant ?* *OUI NON*

   Justifiez votre réponse

7. *À quel moment avez-vous utilisé vos questions ?*

8. *Est-ce que la réponse que vous avez reçue vous a aidé ?* *OUI NON*

   Si oui, dites pourquoi ; si non, dites ce que vous auriez aimé que le professeur fasse pour vous aider davantage.

9. *Qu'est-ce que cette activité vous a permis de réaliser ?*

10. *Maintenez-vous la formulation que vous avez faite en réponse à la question suivante : « Si vous aviez à conseiller un futur enseignant sur la manière d'aider un élève aux prises avec un obstacle, que lui diriez-vous ? »*

    OUI NON

    Justifiez votre réponse.

11. *Si vous avez répondu « NON » à la question 10, formulez un nouveau conseil.*

Lors de la discussion de groupe, tous ont répondu qu'ils se feraient dévorer par les crocodiles pour avoir utilisé l'algèbre. Comme il s'agit là d'un outil mathématique qui leur est très familier et qu'ils maîtrisent bien, et qui en plus aurait pu leur permettre de résoudre le problème facilement, il est très difficile de s'en passer. Cela décrit bien la conception de l'obstacle que nous voulions les amener à découvrir. Un des enseignants a aussi mentionné le fait qu'il était difficile de jouer le rôle d'un Égyptien puisqu'il n'avait pas toutes les connaissances mathématiques qu'un Égyptien de l'époque pouvait avoir. Ses connaissances des mathématiques égyptiennes étaient réduites et encore fragiles, et il ne savait pas toujours ce qu'il pouvait faire et ce qu'il ne pouvait pas faire.

Un des étudiants-maîtres a mentionné que l'activité aurait été plus facile s'ils avaient eu d'autres exemples avant d'entrer dans le jeu. Un des enseignants a appuyé ce fait en disant qu'il s'agissait de matière trop nouvelle. Il a également fait le parallèle avec ce qui se passe dans les classes du secondaire. À ce moment, l'autre étudiant-maître a fait remarquer que l'exemple que nous avons apporté à leur équipe en réponse à leur question, les avait grandement aidés. Notre stratégie se révèle donc plus ou moins utile puisqu'elle n'atteint pas son but qui consiste à invalider leur proposition ou du moins à la nuancer.

Par la suite, nous avons présenté les réponses aux problèmes qu'ils venaient de tenter de résoudre. Il aurait été intéressant de demander à l'équipe d'étudiants-maîtres de présenter leurs démarches afin de vérifier si l'exemple que nous leur avions donné leur avait vraiment permis de comprendre le raisonnement ou s'il leur avait uniquement permis de reproduire un modèle. Nous aurions ainsi pu valider ou invalider notre propre stratégie.

Nous avons ensuite poursuivi la discussion en parlant de l'utilisation qu'ils ont faite de leurs trois questions. Comme nous le mentionnions un peu plus tôt, ils ont tous utilisé leurs questions à la fin. Les étudiants-maîtres se sont dit très satisfaits des réponses qu'ils ont obtenues. Elles les ont semble-t-il beaucoup aidés. Ceci nous a en fait quelque peu troublée car le traitement de l'obstacle par l'exemple était une conception que nous jugions inadéquate. Il risque d'être alors plus difficile de les amener à comprendre la notion d'obstacle. Nous verrons à partir des discussions qui ont suivi, comment notre opinion à ce sujet s'est vu nuancée. En ce qui concerne les enseignants, les réponses qu'ils ont eues ne leur ont pas été aussi bénéfiques. Quand nous leur avons demandé ce qui aurait pu les aider davantage, un des enseignants a répondu : « le truc. Comme les élèves.» Bien qu'il ait dit cela un peu en riant, ce commentaire laisse entrevoir une prise de conscience de ce que vivent les élèves du secondaire.

Lorsque nous leur avons demandé ce que l'activité leur avais permis de réaliser, les réponses ont été diverses. Un des étudiants-maîtres a fait remarquer qu'il valait mieux ne pas attendre trop tard pour poser des questions. L'autre étudiant-maître a dit qu'il était difficile de faire abstraction des connaissances que l'on possède déjà pour les remplacer par d'autres connaissances pour parvenir à un nouveau raisonnement. Selon lui, c'était compliqué et cela demandait beaucoup plus de travail. Cela illustre bien comment une connaissance-obstacle peut être résistante et combien il peut être coûteux de tenter de la modifier. Mais peut-on dire pour autant qu'il fait le lien ou qu'il associe cette idée à celle d'obstacle ? Il faudra voir.

Quant aux enseignants, un d'eux a mentionné que leur conseil était un peu utopique. Il s'est rendu compte que si un élève était bloqué pour vrai, le fait de lui demander de faire le problème devant lui et de le faire verbaliser ne règlera pas nécessairement le problème. Lorsque nous lui avons demandé ce qu'il entendait par « bloqué pour vrai » il a répondu que si l'élève était bloqué pour vrai, ça voulait dire qu'il ne voyait vraiment rien et qu'il n'avait aucune idée de la façon de procéder. L'autre enseignant a alors renchéri en disant : « C'est comme nous tantôt. On était bloqué sur notre stratégie. C'est un peu le même principe. On essayait des dessins, des trucs comme ça, mais ça revenait toujours à l'algèbre. » Et l'autre enseignant de répliquer : « On ne voyait rien d'autre. On ne voyait que ça. » Ces commentaires de la part des deux enseignants laissent entrevoir un certain rapprochement entre ce qu'ils venaient de vivre comme expérience et ce que les élèves peuvent vivre au secondaire, ce qui répond au deuxième objectif que nous nous étions fixé. Comme nous l'avions supposé, les enseignants ont davantage senti le lien entre ce qu'ils venaient de vivre et ce que les élèves du secondaire peuvent vivre que les étudiants-maîtres.

Finalement, nous avons demandé aux participants s'ils maintenaient la formulation de leur conseil. Nous avons alors eu droit à une discussion très intéressante sur l'utilisation d'exemples dans l'enseignement. Les étudiants-maîtres ont dit qu'ils maintenaient la formulation de leur conseil et qu'ils feraient davantage ressortir l'importance de donner des exemples. Un des enseignants a alors réagi en disant qu'il n'était pas d'accord pour toujours donner des exemples aux élèves parce qu'ils ont ainsi tendance à reproduire un modèle sans nécessairement comprendre le sens. L'autre enseignant a rajouté qu'en donnant des exemples, on oriente en quelque sorte les stratégies de l'élève. Les élèves ne cherchent alors que le « truc » - un peu comme ce qu'ils auraient aimé avoir pour résoudre les problèmes égyptiens - sans chercher à comprendre pourquoi ce « truc » fonctionne. Un des étudiants-maîtres a alors fait remarquer qu'il avait toujours appris de cette façon et qu'il serait vraiment dépourvu s'il était privé d'exemples. Un des enseignants a tenté de nuancer ses propos en disant qu'il ne voulait pas éliminer complètement les exemples. Lui-même en donnait à ses élèves lorsqu'il présentait de la nouvelle matière. Par contre, il était d'avis qu'il fallait tenter de limiter les exemples de façon que les élèves cherchent un peu par eux-mêmes. L'autre enseignant a renchéri en disant qu'il était bon de donner des exemples mais qu'il ne fallait pas non plus que les mathématiques ne deviennent qu'une recherche d'algorithmes. Le raisonnement et la recherche de sens reliés à ces algorithmes sont très importants et ne devraient pas être négligés.

Au cours de cette discussion, nous avons vraiment pu observer une différence d'opinion entre les enseignants et les étudiants-maîtres. À prime abord, nous étions d'accord avec les enseignants pour dire qu'en donnant un exemple, nous offrons à l'élève un modèle ou une marche à suivre qu'il peut appliquer sans nécessairement comprendre. Pourtant un doute s'est installé. Comment des étudiants sont-ils parvenus à faire des mathématiques de niveau universitaire en apprenant à l'aide d'exemples si donner un exemple ne permet pas un contrôle du sens ? Se pourrait-il que donner un exemple, c'est-à-dire en quelque sorte donner ce qui manque, pourrait dans certains cas permettre à l'élève de surmonter un obstacle ? Dans l'affirmative, quels sont ces cas qui rendent l'utilisation de l'exemple un traitement adéquat à l'obstacle ? Nous émettons ici l'hypothèse que l'exemple peut servir à traiter un obstacle dans la mesure où l'élève a les connaissances nécessaires et prend le temps pour l'analyser et dégager le sens qui s'y rattache, reprenant ainsi à sa charge le contrôle du sens. L'exemple servirait en fait de catalyseur permettant à l'élève de faire les liens nécessaires pour comprendre. Le véritable défi pour un enseignant n'est pas, selon nous, de venir en aide aux élèves doués qui sont capables de donner du sens à partir d'un exemple, mais bien d'aider les élèves pour lesquels l'exemple ne sera pas suffisant. Or, si les étudiants-maîtres ont le bagage nécessaire pour s'approprier le sens relié à un exemple portant sur l'algèbre égyptienne, peuvent-ils concevoir que donner un exemple n'est pas nécessairement un traitement efficace à l'obstacle dans tous les cas ? Ceci pourrait peut-être expliquer, du moins en partie, la résistance des conceptions des étudiants-maîtres face à la notion d'obstacle et à son traitement.

Bien qu'ils ne soient pas entièrement convaincus qu'il faille limiter l'utilisation d'exemples, les étudiants-maîtres ont semblé très réceptifs aux propos des enseignants. Ils avaient l'occasion de communiquer avec des gens qui avaient de l'expérience dans le milieu et qui n'avaient aucune influence sur leurs résultats universitaires. Cela a peut-être permis aux étudiants-maîtres d'être plus à l'aise pour communiquer leurs idées et faire ressortir leurs vraies conceptions et non celles suggérées par le professeur. Comme nous l'avions prévu, nous avons trouvé qu'il était très bénéfique de regrouper des étudiants-maîtres et des enseignants car il en est ressorti des discussions fort intéressantes qui n'auraient peut-être pas eu lieu si nous avions fait l'expérience seulement avec des étudiants-maîtres.

Après la discussion, nous avons regardé un exemple d'élève faisant face à un obstacle[12] puis nous avons fait un bref survol de la théorie concernant la notion d'obstacle afin d'institutionnaliser les connaissances acquises lors de l'activité. Nous avons terminé la journée en demandant aux participants de répondre à une dernière étude de cas, semblable à celles qu'ils avaient faites en avant-midi, question de

[12] Voir cas de François à l'annexe 3

comparer leur conception avant et après l'activité. Comme la journée tirait à sa fin et qu'ils avaient été très concentrés lors de la résolution des problèmes, les participants ont semblé un peu moins réceptifs lors de la dernière partie de l'expérimentation. Il aurait peut-être été préférable de prendre une courte pause pour leur permettre de se dégourdir un peu. Néanmoins, les résultats ont été meilleurs que ceux obtenus à la première expérimentation.

5.2.4. Évaluation des effets de notre deuxième expérimentation

En comparant les études de cas faites en avant-midi et celle faite à la fin de la journée, nous avons observé plus de changements de la part des étudiants-maîtres que de la part des enseignants. Un des étudiants-maîtres qui avait d'abord proposé d'aider les élèves en leur expliquant de nouveau ce qu'ils n'avaient pas compris ou en leur donnant un exemple, a changé son affirmation lors de la dernière étude de cas en disant qu'il tenterait de confronter la technique de l'élève afin de lui faire prendre conscience de son erreur avant d'essayer d'apporter des modifications à sa compréhension. L'autre étudiant-maître qui avait lui aussi opté pour une approche par l'exemple a changé quelque peu sa manière d'aider l'élève en tentant d'abord de détruire ses connaissances erronées. Par contre, il ne mentionne pas comment il pense réussir à détruire ces connaissances. En ce qui concerne les enseignants, les changements ont été mineurs. Rappelons que lors de la première étude de cas ils avaient proposé d'aider l'élève en lui expliquant le concept à nouveau et en lui donnant un exemple. Nous avons été quelque peu surprise de retrouver sensiblement la même chose à la deuxième étude de cas, étant donné leur discours lors de la discussion plénière. Ils avaient alors clairement énoncé que ce qui leur avait causé problème lors de l'activité était de ne pas pouvoir utiliser l'algèbre qui était pour eux un outil familier. Ils ont même fait le lien avec ce que vivent les élèves du secondaire lorsqu'ils bloquent devant un problème. De plus, ils avaient mis les étudiants-maîtres en garde contre une utilisation abusive d'exemples en disant que cela risquait de réduire les mathématiques à des algorithmes dépourvus de sens. Pourtant, en faisant la dernière étude de cas, un des enseignants a répondu à la question 4, qui consistait à expliquer comment ils viendraient en aide à cet élève, qu'il donnerait un exemple numérique et qu'il reviendrait sur certains concepts. Encore une fois nous observons une différence majeure entre le discours et l'action simulée. Mais pourquoi ? Linda Gattuso (1992) aborde ce sujet dans sa thèse : « Les conceptions personnelles au sujet de l'enseignement des mathématiques et leur reflet dans la pratique : un essai d'autoanalyse »

Il y a certes encore du chemin à faire et nous nous rendons compte du fait qu'il est un peu utopique de vouloir changer aussi rapidement des habitudes si profondément ancrées. Nous croyons tout de même avoir réussi à sensibiliser les participants à la notion d'obstacle et à déstabiliser certaines de leurs conceptions face à l'obstacle et à la manière de le traiter.

Conclusion

À l'origine, l'objectif principal de notre projet de recherche était de sensibiliser les étudiants-maîtres à la notion d'obstacle. Cet objectif est selon nous atteint puisque nous avons pu observer certains changements au niveau des réponses obtenues aux études de cas avant et après notre séquence d'enseignement. De plus, les commentaires des étudiants-maîtres lors des discussions plénières laissent entrevoir une ouverture d'esprit face à la conception de l'obstacle prônée par Brousseau. Il serait toutefois utopique de croire que notre séquence ait entraîné un abandon complet des conceptions antérieures des étudiants-maîtres face à la notion d'obstacle.

En ce qui concerne nos objectifs intermédiaires, le premier visant à faire vivre une situation d'obstacle aux étudiants-maîtres a selon nous été tout à fait réussi. Comme nous l'avions prévu, tous les étudiants-maîtres ont eu tendance à avoir recours à l'algèbre et n'ont pas réussi à s'en dissocier complètement. Ils ont eux-mêmes identifié l'algèbre comme la cause de leurs difficultés en ce qui a trait à la résolution des problèmes égyptiens.

Par contre, en ce qui concerne notre deuxième objectif qui était de faire établir un parallèle entre l'expérience vécue par les étudiants-maîtres lors de notre atelier et ce que peuvent vivre les élèves au secondaire, les résultats ne sont pas aussi significatifs que nous l'avions espéré. En effet, les étudiants-maîtres ne semblent pas faire ce lien aussi spontanément que nous l'aurions cru. Peut-être est-ce dû à leur double rôle d'élève et d'enseignant ? Il est possible que leur rôle d'élève ait pris le dessus lors de l'expérimentation et les ait empêché de faire le lien entre ce qu'ils venaient de vivre et ce que les élèves du secondaire peuvent vivre. Nous nous sommes d'ailleurs rendu compte que les enseignants en exercice avaient tendance à faire plus facilement ce parallèle que les étudiants-maîtres. Est-ce dû à leur expérience de travail ? Leur contact quotidien avec des élèves les a peut-être aidés à faire le lien avec ce que les jeunes du secondaire peuvent vivre. Dans ce cas, serait-il préférable d'aborder certains sujets didactiques en formation continue plutôt qu'en formation des maîtres ? Malgré le fait que les enseignants semblent mieux saisir la notion d'obstacle et faire le lien avec ce que peuvent vivre les élèves du secondaire, leurs actions parlent autrement. Leurs habitudes semblent plus résistantes que celles des étudiants-maîtres. Peut-être est-ce encore relié au double rôle élève/enseignant des étudiants-maîtres. De par leur statut d'élève, ils ont peut-être tendance à accepter plus facilement ce que le professeur leur dit. En ce qui concerne les enseignants en exercice, leurs conceptions ont été renforcées par la pratique et leur vécu en tant qu'enseignants, ce qui explique peut-être leur plus grande résistance.

Finalement, en ce qui a trait à notre troisième objectif, spécifique à la deuxième expérimentation, qui était d'amener les étudiants-maîtres à trouver des façons de traiter l'obstacle, nous considérons qu'il est partiellement atteint. En effet, nous avons pu observer des modifications au niveau des réponses que les étudiants-maîtres ont donné à la question 4 de l'étude de cas, concernant la manière d'aider l'élève en difficulté. Ces modifications laissent entrevoir une prise de conscience et un début de cheminement au niveau des conceptions reliées au traitement de l'obstacle.

Notre projet de recherche nous a permis de prendre conscience de plusieurs choses que nous avions prévues et bien d'autres auxquelles nous n'avions pas pensé. D'abord, comme nous l'avions prédit, nous avons pu observer que les étudiants-maîtres avaient des conceptions inadéquates de la notion d'obstacle. Ils ne semblent pas avoir de définition précise de ce concept et ils le confondent souvent avec le concept d'erreur. Ils traitent l'obstacle la plupart du temps en expliquant de nouveau ou en donnant un exemple, ce qui à nos yeux correspond à donner ce qui manque. Leurs conceptions sont résistantes et difficilement modifiables. Ceci est peut-être dû comme nous l'avons mentionné au chapitre 5, au fait que ces méthodes ont un grand historique de réussites au sein de leur propre apprentissage. À ce propos, notre recherche nous a permis de nuancer notre vision des exemples en tant que connaissance-obstacle face au traitement de l'obstacle. Nous croyons qu'il serait possible d'amener un élève à surmonter un obstacle en lui donnant un exemple, à condition que cet élève ait les connaissances nécessaires pour effectuer un contrôle du sens. Évidemment, il ne s'agit que d'une hypothèse et de plus amples recherches seraient nécessaires pour confirmer ce point.

Un autre aspect intéressant que nous a confirmé notre projet de recherche est l'efficacité de l'histoire pour amener les étudiants-maîtres à vivre un obstacle. La fonction de dépaysement suscitée par l'utilisation de l'histoire est venue brouiller les repères des étudiants-maîtres et a rendu certaines de leurs connaissances inadéquates. Par contre, un point que nous n'avions pas entrevu concernant l'utilisation de l'histoire en formation des maîtres est sa capacité à faire ressortir des erreurs d'inattention. Le nombre d'erreurs mathématiques produites par les étudiants-maîtres nous a surprise. Nous croyons que leur contrôle du sens au niveau des acquis a été remplacé par une recherche de contrôle du sens au niveau du nouveau raisonnement, laissant ainsi place à des erreurs d'inattention. Cette hypothèse serait toutefois à vérifier. Il vaudrait également la peine de vérifier s'il s'agit bien uniquement d'erreurs d'inattention. Au niveau des fractions, les erreurs ont été particulièrement nombreuses. Cela cache peut-être un problème plus sérieux.

Notre recherche nous a aussi fait réaliser que la didactique n'échappe pas à ses propres principes et qu'il n'est pas toujours évident d'appliquer sa propre médecine. Nous avons vu avec l'expérimentation I qu'il pouvait être difficile d'agir à deux niveaux. Dans notre cas, nous devions appliquer notre théorie de l'obstacle pour arriver à traiter les obstacles des étudiants-maîtres face à la notion d'obstacle, ce que nous avons tenté d'ajuster grâce à la deuxième expérimentation.

Finalement, nous avons également réalisé que l'institutionnalisation est un concept didactique complexe et dont la mise en œuvre est difficile à planifier. En effet, le déroulement d'une situation d'institutionnalisation est fortement influencé par le bon fonctionnement des situations précédentes, ce qui le rend difficile à prévoir. Comment organiser une situation d'institutionnalisation? Est-elle uniquement sous la responsabilité de l'enseignant? Comment organiser une situation d'institutionnalisation de façon à ce que l'élève puisse se sentir impliqué et ait sa part de responsabilités? Malheureusement, nous n'avons pas de réponses à ces questions.

Pour terminer, nous voudrions souligner que nos observations ne permettent pas de généraliser et qu'elles sont simplement issues des cas observés. De futures recherches pourraient permettre de vérifier certaines affirmations à un niveau plus général et de répondre à de nouvelles questions que nous avons soulevées dans le cadre de ce travail.

Bibliographie

Astolfi, Jean-Pierre et Develay, Michel (1989) *Didactique des sciences et formation des enseignants :* La didactique des sciences. France : Presses Universitaires de France. 127 p.

Bachelard, Gaston (1983) *La formation de l'esprit scientifique: la notion d'obstacle épistémologique.* Paris : Librairie Philosophique J. Vrin, douzième édition, 256 p.

Barbin, Evelyne (1997) *Histoire et enseignement des mathématiques : Pourquoi ? Comment ?* Bulletin AMQ, Vol. XXXVII, n° 1 mars 1997, p. 20-25

Bednarz, Nadine (1987) *Trouver l'obstacle derrière l'erreur - Une autre façon d'enseigner*. Prospectives, octobre 1987, p. 121-122

Bednarz, Nadine et Garnier, Catherine (1989) *Construction des savoirs - Obstacles et conflits.* Ottawa : Agence d'ARC Inc.. 398 p.

Bednarz, Nadine et Janvier, Bernadette (1991) *Émergence des raisonnements algébriques : un essai de caractérisation des sauts conceptuels qui marquent le passage à un mode de pensée algébrique.* Université du Québec, 15 p.

Bednarz,Nadine et Janvier, Bernadette (1993) *L'algèbre comme outil de résolution de problèmes : filiations et ruptures avec l'arithmétique.* Texte du colloque : Perspectives de recherches sur l'émergence et le développement de la pensée algébrique. 25 p.

Bednarz, Nadine et René de Cotret, Sophie (1996) *Formation à l'enseignement des mathématiques au secondaire : nouvelles perspectives et défis.* Canadian mathematics Education study group, edited by Yvonne M. Pothier, Mount Saint Vincent University, p. 57-68

Brousseau, G. (1983) *Les obstacles épistémologiques et les problèmes mathématiques.* Université de Bordeau : R.D.M vol 4.2, p. 166-197

Brousseau, G. (1991) *Glossaire de didactique.* Inédit transmis à la 6^{e} école d'été de didactique des mathématiques, 3 p.

Chace, Arnold Buffum (1979) *The Rhind mathematical Papyrus. United States of America.* Mathematical, Association of America. 147 p.

Charbonneau, Louis (1991-1992) *Du raisonnement laissé à lui-même au raisonnement outillé: l'algèbre depuis Babylone jusqu'à Viète.* Bulletin AMQ. Décembre 1991 - Mars 1992 p. 9-15

Chevallard, Y. (1989) *Arithmétique, Algèbre, Modélisation. Étapes d'une recherche.* IREM Aix-Marseille. n° 16, p. 27-28

Collette, Jean-Paul (1973) *Histoire des mathématiques.* Éditions du renouveau pédagogique, p. 29-44

Couchoud, Sylvia (1993) *Recherches sur les connaissances mathématiques de l'Égypte pharaonique.* Mathématiques égyptiennes. Paris : Éditions Le Léopard d'Or. 208 p.

Direction du recensement étudiant et de la recherche institutionnelle de l'Université du Québec (Mai 2000) *Enquête auprès des premiers diplômés et diplômées du baccalauréat en enseignement secondaire.* Québec : table MEQ-Universités

Duroux, Alain (1983) *La valeur absolue ; difficultés majeures pour une notion mineure.* Petit X, Grenoble : I.R.E.M. de Grenoble

Fauvel, Jonh et Maanen, Jan Van (2000) *History in Mathematics Education.* An ICMI study. Kluver Academic Publishers. 437 p.

Gattuso, Linda (1992) *Les conceptions personnelles au sujet de l'enseignement des mathématiques et leur reflet dans la pratique : un essai d'autoanalyse*. Thèse, Université de Montréal, 278 p.

Giordans, André (1989) *Construction des savoirs - Obstacles et conflits.* Ottawa : Agence d'ARC Inc. p. 372 - 381

Glaeser, Georges (1984) *A propos des obstacles épistémologiques : réponse à Guy Brousseau*. RDM, éditions La pensée sauvage, Vol. 5.2, p. 229-234

Hershkowitz, R. et Schwarz, B. B. (1999) *Reflective processes in a mathematics classroom with a rich learning environment.* Cognition and Instruction 17, p. 65-91

I.R.E.M. de Rennes (1989) *Analyse des difficultés.* Vers les équations, p. 5 à 8

Ifrah, George (1994) *De l'arithmétique à l'algèbre ou de l'individuel au collectif.* Histoire Universelle des chiffres. Paris : Éditions Robert Laffont. p. 454

Keller, Olivier ( ) *L'algèbre et le calcul en Égypte antique.* Lyon: Institut de recherche pour l'enseignement des mathématiques académie de Lyon. 58 p.

Kieran, Carolyn (1988) *Two different approaches amoung algebra learners.* Yearbook NCTM : The ideas of algebra, A-F Coxford (Ed.), p. 91-96

Kieran, Carolyn (1990) *Cognitive processes involved in learning school algebra.* Mathematics and cognition: a research synthesis by the international Group for the psychology of mathematic education. ICMI study series : Cambridge University Press, p. 96-112

Kline, Morris (1972) *Mathematical thought from ancient to modern times.* U.S.A. : Oxford University Press. 390 p.

Larose, Réal et René de Cotret, Sophie (2002) *Les didactiques et l'aide à la réussite.* Pédagogie Collégiale, Mars 2002, Vol. 15, nº 3, p. 18-22

Lefebvre, Jacques (1993) *Histoire des mathématiques.* UQAM : Bulletin AMQ. Octobre 1993, p. 22-27

Lefebvre, Jacques (1991- 1992) *Qu'est l'algèbre devenue ? De Viète (1591) à aujourd'hui (1991), quelques changements-clefs.* UQAM : Bulletin AMQ. Décembre 1991 - Mars 1992 p. 27 -32

Marchand, Patricia et Bednarz, Nadine (1999) *L'enseignement de l'algèbre au secondaire: Une analyse des problèmes présentés aux élèves.* Bulletin AMQ. vol XXXIX, nº 4, décembre 1999, p. 30-42

MEQ : Martinet, Anne ; Raymond, Danielle et Gauthier, Clermont (2001) *La formation à l'enseignement - Les orientations - Les compétences professionnelles.* Québec.

MEQ (2000), *Étude commanditée par la table MEQ-Universités et réalisée par la Direction du recensement étudiant et de la recherche institutionnelle de l'Université du Québec.*

Portugais, Jean (1995) *Didactique des mathématiques et formation des enseignants.* Éditions scientifiques européennes : Peter Lang S.A. 311 p.

Radford, Luis (1991-1992) *Diophante et l'algèbre pré-symbolique.* CIRADE, Université du Québec à Montréal et Université de San-Carlos, Guatemala : Bulletin AMQ. Décembre 1991 - Mars 1992 p. 73-80

René de Cotret, Sophie (2000) *La didactique des mathématiques et la formation des enseignants.* Didactique des mathématiques et formation des enseignants, sous la direction de Pascale Bouin et Linda Gattuso, 65e Congrès de l'ACFAS, Modulo Editeur, Collection Astroïde, p. 20-28

René de Cotret, Sophie (1986) *Étude historique de la notion de fonction: analyse épistémologique et expérimentation didactique.* UQAM. .

Schmidt, Sylvine (1992) *Raisonnements arithmétiques et algébriques dans un contexte de résolution de problèmes : obstacles et difficultés dans le passage de l'arithmétique à l'algèbre chez des futurs enseignants.* Actes du Colloque (avril 1992) portant sur l'émergence de l'algèbre, p. 33-44

Sleeman, D. (1986) *Introductory Algebra : A case Study of Student Misconceptions.* The journal of mathematical behavior n° 5 , p. 25-52

Smith D.E. (1958) *History of mathematics.* réédition Dover. p. iii

Vergnaud, Gérard (1989) *L'obstacle des nombres négatifs et l'introduction à l'algèbre.* CIRADE : Agence d'ARC. p. 76-83

Ver Eecke, Paul (1959) *Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones.* Diophante d'Alexandrie. Paris : Librairie scientifique et technique, 299 p.

Annexes

Annexe 1 : Transformation de fractions en fractions unitaires

Cas 1 : Par dédoublement

Ex. : 2/7 = 1/7 + 1/7
1/7 = 1/14 + 1/14
1/14 = 1/28 + 1/28
2/7 = [1/7 + 1/14 + 1/28] + 1/28
= 1/4 + 1/28

Cas 2 : Par décomposition de tiers

Ex. : 2/5 = 1/5 + 1/5
1/5 = 1/15 + 1/15 + 1/15
2/5 = [1/5 + 1/15 + 1/15] + 1/15
= 1/3 + 1/15

Cas 3 : Décomposition avec 2/n

Ex. : 5/13 = 2/13 + 2/13 + 1/13
= 1/4 + 1/26 + 1/52 + 1/13

NB : Les Égyptiens possédaient des tables avec les décompositions des fractions de la forme 2/n en fractions unitaires.

Cas 4 : Par division

Ex. : 2/5 = 2 ÷ 5

	1	5	
	2/3	3 1/3	
/	1/3	1 2/3	+ →2
/	1/15	1/3	
rép. :	1/3 1/15		

Comme on recherche 2/5, on regarde dans la colonne de droite quels sont les nombres qui additionnés ensemble donnent 2 puis on prend les nombres correspondants dans la colonne de gauche, d'où 2/5 = 1/3 + 1/15.

Annexe 2 : Les règles dans l'élaboration de la table de 2/n

1. On accepte les égalités ayant le plus petit nombre de fractions possible (pas de dénominateur > 1 000)

2. Utiliser le moins de termes possible (plus que 4 = inadmissible)

3. Ordre décroissant – sans répétition. (ex. : 1/5 + 1/18 + 1/34)

4. La première fraction doit comporter un dénominateur le plus petit possible, sauf si ça réduit considérablement la dernière fraction

5. On préfère les fractions paires ou impaires

Annexe 3 : Entrevue avec François

Interviewer : Louise Poirier

I : Je vais écrire des fractions puis j'aimerais que tu les mettes à leur plus simple expression.

É : OK

I : Si je te dis 2/4, est-ce que tu peux mettre ça à une plus simple expression ?

É : Oui, je peux mettre ça à 1/2 **2/4 = 1/2**

I : Oui ? Pourquoi ?

É : Parce que ici le chiffre 2 (pointe le 2 de 2/4), c'est juste 1 que tu peux faire puis le 4, c'est 2 fois 2 ; le 4 devient 2.

I : OK 3/9

É : Ça va donner 1 puis là 3 parce que tu peux dire 3 fois 3, ça va donner 9. Ça fait 1/3.
3/9 = 1/3

I : OK. 12/15

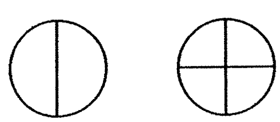
É : Là, on peut dire 4 fois 3, lequel est plus petit dans 4 fois 3 ? C'est 3 ça ici. Puis tu dis 5 fois 3, c'est 15 le plus petit chiffre dans ces deux-là (3 et 5), c'est 3 ; ça va donner 3/3
12/15 = 3/3

I : Et puis 20/24 ?

É : Euh… là ici, on peut dire 5 fois 4, c'est 4 le plus petit. Ici, on peut dire 4 fois 6, c'est 4. Ici, la réponse c'est 4/4 **20/24 = 4/4**

I : OK. J'ai écrit des fractions que j'ai mises deux à deux puis j'aimerais cela qu'entre les deux tu écrives si c'est égal ou si c'est plus petit ou plus grand.

É : OK. Là, je dis 1/2 est plus grand que 2/4. Parce que si supposons t'avais une tarte là, avec 1/2 tu peux la couper en deux. (Il fait le dessin)

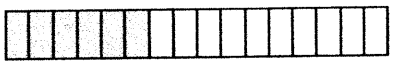


Je la coupe en deux. Ça c'est 1/2 puis je fais une autre tarte coupée en 4. Ça c'est 2/4. Fait que 2/4… tu peux… Ah! Non, c'est égal! **1/2 = 2/4**

I : OK. 3/8 et 6/16.

É : Quand on le sait pas, on peut faire le dessin. Là, il faut que je me serve toujours en premier des dénominateurs. Là, il y en a 8. Il faut que je fasse 8 morceaux de tablette de chocolat. Maintenant, disons que j'en ai mangé 3 morceaux.

Là, il va falloir que j'en fasse 16… là, disons que j'en ai mis 16 puis que j'en ai mangé 6… Là, je dis si c'est le plus gros. Tu n'as qu'à dire combien il y a de morceaux que t'as colorés et combien que t'as pas colorés… il y en a 10 puis l'autre il y en a juste 5. Celui-là (6/16 est plus gros).



I : Est-ce qu'il y a une autre façon de trouver à part les dessins ?

É : Oui.

I : Oui, quoi ?

É : Je le sais pas.

I : Ben essaie.

É : (Il applique la technique apprise en classe de mettre au même dénominateur en passant par des fractions équivalentes)

3/8 = 6/16

6/16

Aye, ça arrive mais là (en montrant les dessins, ça arrive pas) …

I : C'est quoi cette histoire ?

É : je sais pas. Moi, je dirais que c'est celui-là (montre les fractions équivalentes) parce que celui-là, il est calculé.

I : OK. 2 1/4 et 9/4

É : Euh… 1/4 puis 9/4, je sais tout de suite que c'est ¼ qui est plus petit. Mais, avec 2, on marque plus dans celui là (2 et 1/4) mais l'autre (9/4) en a plus aussi… non, parce que celui-là en a 2 puis l'autre en a juste un. C'est comme une pizza. Il y a juste 9 morceaux dans la pizza puis dans l'autre t'as deux pizzas au complet.

I : OK, Le dernier 3 et 0/8 et 3.

É : 3 et 0/8 c'est plus grand que 3. Parce que 0/8… J'ai une pomme puis j'en mange pas de morceau, il m'en reste 1 avec les 3 autres, ça fait 4. Ben 4 pommes, c'est plus grand que 3 pommes.

Annexe 4 : Étude de cas

Voici une série d'exercices que nous avons présentés à des élèves de troisième secondaire d'une école de Laval. Il est à noter que l'exercice a eu lieu au début de l'année après le troisième cours. L'expérimentation a été faite avec cinq classes d'environ 36 élèves chacune.

Pour chacun des numéros suivants, trouve la valeur de x.
Laisse toutes les traces de ta démarche.

1. $11 + x = 27$
2. $0{,}31 + x = 1$
3. $11/15 + x = 1$
4. $x + 7x = 48$
5. $x + 3x = 5$
6. $x + x/2 = 16$
7. $3(x + 2x) - (x + 2x) = 36$

Les consignes étaient les suivantes :

- Temps alloué : 10-15 minutes
- L'utilisation de la calculatrice est permise
- Aucune aide de la part de l'enseignant n'est permise
- Ne pas écrire son nom sur la copie (afin d'assurer l'anonymat dans le traitement des données)
- Aucune note ne sera attribuée pour ce travail. L'important n'est pas le nombre de bonnes réponses mais bien les démarches

Dans les pages suivantes, nous vous présentons les réponses de certains élèves. Évidemment, les noms utilisés sont fictifs afin d'assurer l'anonymat des élèves. Analysez leurs démarches, et répondez aux questions suivantes :

1. **Pour chacun des élèves, identifiez les erreurs et les obstacles rencontrés.**
2. **Quelles sont selon vous les causes d'erreurs ?**
3. **Que pensez-vous qui fait obstacle à la réussite de ces élèves ?**
4. **Comment aideriez vous ces élèves ? Justifiez votre réponse.**

Éric (Éric a réussi les problèmes 4-5-6)

1. $11 + x = 27$
$11 - 11 + x = 27 + 11$
$x = 38$

---

2. $0,31 + x = 1$
$0.31 - 0.31 + x = 1 + 0.31$
$x = 1.31$

---

3. $11/15 + x = 1$
$11/15 - 11/15 + x = 1 + 11/15$
x=1 et 11/15

Julie (Julie a réussi les problèmes 1-2-3 mais a échoué les autres)

1. $11 + x = 27$
$11 - 11 + x = 27 - 11$
$x = 16$

---

2. $0,31 + x = 1$
$0.31 - 0.31 + x = 1 - 0.31$
$x = 0.69$

---

4. $x + 7x = 48$
$x + 7 - 7 + x = 48 - 7$
$2x = 41$
$x = 20.5$

---

5. $x + 3x = 5$
$x + 3 - 3 + x = 5 - 3$
$2x = 2$
$x = 1$

Martin (Martin a réussi les trois premiers problèmes)

4. $x + 7x = 48$
$x + x = 48 \div 7$
$2x = 6.85$
$2x \div 2 = 6.85 \div 2$
$x = 3.42$

---

5. $x + 3x = 5$
$x + 3x \div 3 = 5 \div 3$
$x + x = 1.66$
$2x = 1.66 \div 2$
$2x \div 2 = 0.83$
$x = 0.83$

---

6. $x + x/2 = 16$
$x + x/2 * 2 = 16 * 2$
$x + x = 32$
$2x = 32$
$2x \div 2 = 32 \div 2$
$x = 16$

Anne (Anne a réussi tous les problèmes à l'exception du numéro 6.)

4. $x + 7x = 48$
$x + 7x = 8x = 48$
$8x \div 8 = 48 \div 8$
$x = 6$

---

5. $x + 3x = 5$
$4x \div 4 = 5 \div 4$
$x = 1.25$

---

6. $x + x/2 = 16$
$x + x/2 * 2 = 16 * 2$
$2x \div 2 = 32 \div 2$
$x = 16$

Annexe 5 : Problèmes tirés du Papyrus Rhind[13]

Problème 21

Énoncé

« Combien faut-il pour compléter 2/3 1/15 en 1 ? »

Solution

Il est dit : complète 2/3 1/15 à 1.

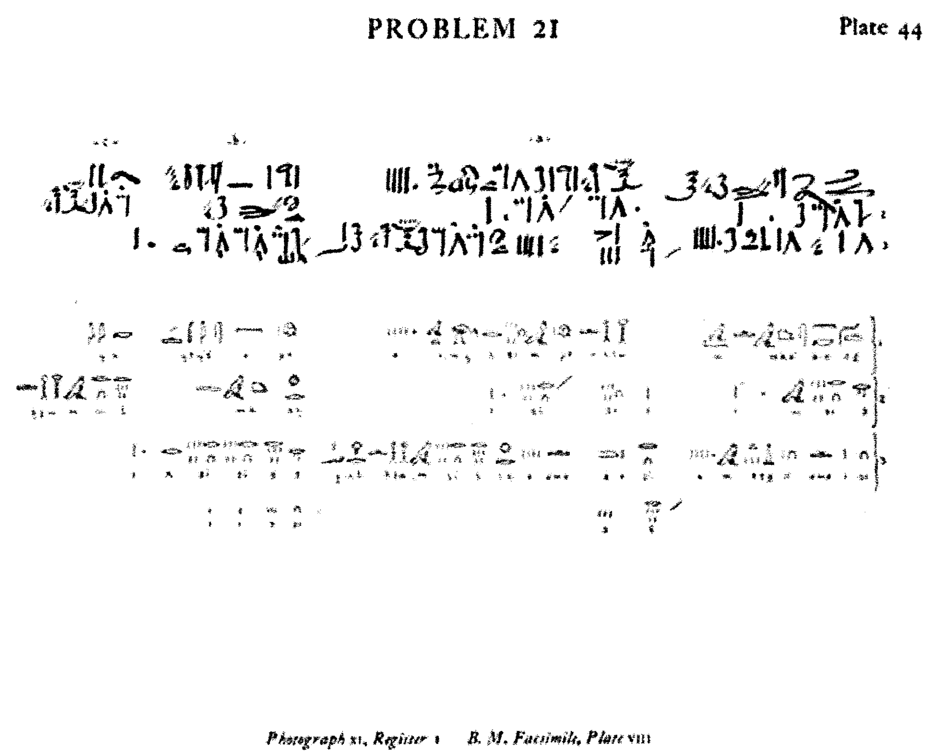
Total : 11, manque : 4. On opère sur 15 pour trouver 4.

1	15
1/10	1 1/2
\ 1/5	3
\ 1/15	1
dmd	4
Total	

C'est donc 1/5 1/15 qu'il faut ajouter.

Exemple de preuve :

2/3 1/5 1/15 1/15 donne effectivement 1. Donc c'est bien 1/5 1/15 qu'il faut ajouter.



Photograph XI, Register 1   B.M. Facsimile, Plate VIII
(tiré de Chace, 1979, p. 95)

[13] Les énoncés ont été traduit de Chace (1979) « The Rhind mathematical papyrus » pour le besoin de notre activité, et les solutions sont inspirées de celles présentées dans Chace.

Problème 22

Énoncé

« Combien faut-il pour compléter 2/3 1/30 en 1 ? »

Solution

Il est dit : complète 2/3 1/30 à 1.

Total : 21, manque 9. On opère sur 30 pour trouver 9

1	30
\ 1/10	3
\ 1/5	6

C'est donc 1/5 1/10 qu'il faut ajouter.

Exemple de preuve :

2/3 1/5 1/10 1/30 donne effectivement 1. Donc c'est bien 1/5 1/10 qu'il faut ajouter.

Problème 24

Énoncé

« Une quantité à laquelle on ajoute son 1/7 de sorte qu'elle devienne 19. Quelle est cette quantité ? »

Solution

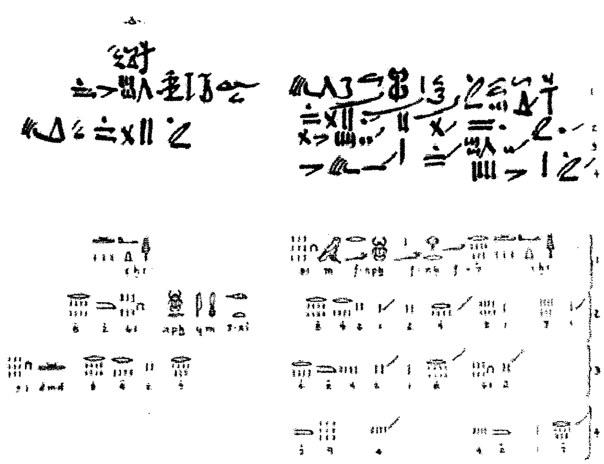
\ 1	7
\ 1/7	1

1	8
\ 2	16
1/2	4
\ 1/4	2
\ 1/8	1

\1	2 1/4 1/8
\2	4 1/2 1/4
\4	9 ½

La quantité est 16 1/2 1/8 et son 1/7 est 2 1/4 1/8, ce qui ensemble donne 19.

PROBLEM 24 Plate 47



Photograph XII, *Register* 1 *B. M. Facsimile, Plate* IX

Photograph XII, Register 1 B.M. Facsimile, Plate IX
(tiré de Chace, 1979, p. 97)

Problème 25

Énoncé
« Une quantité à laquelle on ajoute son 1/2 de sorte qu'elle devienne 16. Quelle est cette quantité ? »

Solution
\ 1 2
\ 1/2 1

\ 1 3
2 6
\ 4 12
\1/3 1

1 5 1/3
\ 2 10 2/3

La quantité est 10 2/3 et son 1/2 est 5 1/3, ce qui ensemble donne 16.

Problème 26

Énoncé
« Une quantité et son 1/4 additionnés ensemble donne 15. Quelle est cette quantité ? »

Solution
\ 1 4
\ ¼ 1

\ 1 5
\ 2 10

1 3
2 6
\ 4 12

La quantité est 12 et son 1/4 est 3, ce qui ensemble donne 15.

Problème 28

Énoncé

« Une quantité et son 2/3 sont additionnés. De cette somme est soustrait le 1/3 de cette même somme pour donner 20. Quelle est la quantité ? »

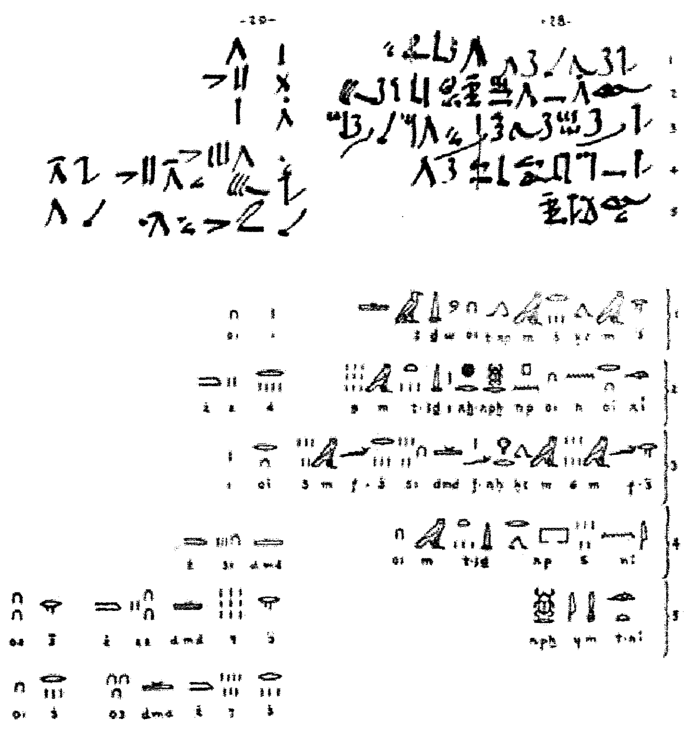
Solution

\ 1	9
\ 2/3	6
\ 1	15
\ 1/3	5
1	10
\ 2	20

\ 1	2
2	4
4	8
\ 8	16

La quantité est 18.

PROBLEMS 28 AND 29 Plate 51



Photograph xii, *Register* 5 *B. M. Facsimile, Plate* ix

Photograph XII, Register 5 B.M. Facsimile, Plate IX
(tiré de Chace, 1979, p. 99)

Annexe 6 : Exercices de multiplication et de division égyptiennes

1. Effectuer les divisions suivantes avec la nouvelle méthode apprise :

a) $121 \div 16$

b) $1\,043 \div 26$

2. Effectuer les multiplications suivantes avec la nouvelle méthode apprise :

a) 48 x 57

b) 37 x 25

Annexe 7 : Analyse comparative des études de cas

1a

Étude de cas n° 1 (avant)	**Étude de cas n° 2 (après)**
1. Pour chacun des élèves, identifiez les erreurs et les obstacles rencontrés.	
Éric : il soustrait la constante d'un côté et l'additionne de l'autre plutôt que … Julie : elle a séparé le 7 du x. Martin : veut éliminer la constante devant le x. Ne multiplie pas tout le côté gauche par cette constante. Fait juste diviser le terme impliqué par la constante. Anne : même que Martin.	Éric : lorsqu'il ajoute une constante d'un côté de l'égalité, il soustrait la même constante de l'autre côté. Julie : lorsqu'elle voit 7x, elle interprète cela comme étant 7 + x. Martin : afin d'isoler le x, il divise de chaque côté de l'égalité par la même constante en oubliant auparavant d'additionner tous les termes en x. Anne : elle a oublié de multiplier tous les termes de l'équation par la constante.
L'étudiant-maître perçoit l'erreur comme une action erronée qui a été posée.	L'étudiant-maître décrit l'erreur sensiblement de la même manière qu'à la première étude de cas. Dans le cas de Julie, par contre, il décrit la conception de l'élève.
2. Quelles sont selon vous les causes d'erreurs ?	
Éric : il pense qu'ainsi, il ne changera pas l'exactitude de l'équation. Julie : elle pense peut-être qu'elle ne peut pas traiter le x et le 7 ensemble puisque ce n'est pas la même chose. Martin et Anne : ces deux élèves ne regroupent pas les termes en x du côté gauche de l'égalité avant d'effectuer la multiplication ou la division.	Éric : cela est causé par une opération similaire ; « ce qu'on ajoute d'un côté, il faut le soustraire pour préserver l'égalité. » Julie : quand elle voit une constante, elle fait l'opération inverse du côté de la constante et de l'autre côté de l'égalité pour préserver le signe d'égalité. Martin : il veut faire tout trop vite et isole le x précédé d'une constante avant d'avoir additionné tous les termes en x semblables. Anne : erreur d'inattention car elle a réussi les numéros précédents.
Dans les deux premiers cas, l'étudiant-maître décrit la cause d'erreur comme une *conception inadéquate* alors que dans les 2 autres cas il la décrit comme une action qu'ils auraient dû faire. Il est surprenant de voir qu'il ait jumelé les cas de Martin et Anne en généralisant ses réponses pour les deux. C'est le seul à avoir fait ça.	Dans les deux premiers cas, l'étudiant-maître décrit encore la cause d'erreur comme une *conception erronée.* Par contre dans le cas de Martin, il associe l'erreur au fait qu'il soit allé trop vite. Et dans le cas d'Anne, il identifie la cause comme de l'inattention. Il a pris une voie échappatoire en identifiant ainsi les causes d'erreurs. Après la séquence, nous aurions cru qu'il aurait cherché un peu plus loin.

Étude de cas n° 1 (avant)	Étude de cas n° 2 (après)
3. Que pensez-vous qui fait obstacle à	**la réussite de ces élèves ?**
Éric : quand on voit qu'on fait, par exemple dans le premier problème −11 et +11, on pense qu'on n'a rien changé à l'égalité. Julie : x est précédé d'un facteur de multiplication et n'apparaît donc pas dans sa forme la plus simple. Martin et Anne : ils veulent juste éliminer la constante devant la variable. Il faudrait d'abord qu'ils regroupent les termes en x du côté gauche de l'égalité.	Éric : en ajoutant et soustrayant la même valeur, il croit qu'il préserve l'égalité. Julie : elle considère les constantes comme des termes différents des termes en x, d'où l'impossibilité de les additionner entre eux. Martin : comme le dit son prof, il effectue la même opération de chaque côté de l'égalité mais d'un côté il ne fait pas l'opération à chacun des termes. Anne : elle n'était peut-être pas habituée à voir un x pas entier, mais plutôt la moitié d'un x.
Il est difficile ici de généraliser la manière dont l'étudiant-maître décrit l'obstacle. Il n'est pas très constant, ce qui démontre que la notion d'obstacle n'est pas claire pour lui. Dans le cas d'Éric, il décrit l'obstacle comme une conception inadéquate, dans le cas de Julie il le décrit comme un problème plus compliqué et dans les cas de Martin et Anne il le décrit en tant qu'action posée par les élèves comparativement à l'action qu'ils auraient dû faire.	L'étudiant-maître décrit l'obstacle d'une manière se rapprochant du principe de conception erronée. En fait, il le décrit comme une croyance sans vraiment préciser (à part dans le cas de Martin) d'où lui provient cette croyance et pourquoi l'élève y adhère.
4. Comment aideriez-vous ces élèves ?	**Justifiez votre réponse.**
Éric : il faut faire comprendre à Éric que … Julie : faire comprendre que 7x est un tout indissociable. Martin et Anne : Martin et Anne doivent comprendre qu'en multipliant ou en divisant uniquement le terme accompagné de la constante, on ne préserve pas l'égalité.	Éric : lui faire prendre conscience avec des exemples numériques que ce qu'il fait d'un côté de l'égalité doit être fait de l'autre. Julie : lui faire remarquer que 7x est un tout et non pas 7 ajouté à x. Martin : lui montrer à l'aide d'exemples numériques ce qu'il faut faire. Anne : voir si son erreur est un oubli. S'il s'agit d'une vraie erreur il faut lui expliquer comment additionner des x entiers avec des x fractionnaires avant d'isoler x.

Étude de cas n° 1 (avant)	**Étude de cas n° 2 (après)**
L'étudiant-maître vient palier à l'obstacle en faisant comprendre la bonne démarche à l'élève. Par contre, il ne fait nullement mention de la manière qu'il utilisera pour *faire comprendre,* ni ce qui adviendra de l'autre façon de faire, sous-entendant peut-être en cela que l'une remplacera nécessairement l'autre.	On constate qu'il y a ici un souci de faire prendre conscience à l'élève de son erreur, mais il refait par la suite la même chose que dans la première étude de cas. Il montrera à l'élève comment faire. Sa compréhension de la notion d'obstacle n'est donc pas complète et certaines conceptions erronées persistent.
Conclusion : On peut constater une certaine amélioration entre les deux études de cas, mais ce n'est pas aussi marquant que nous l'aurions pensé. On constate une certaine ouverture d'esprit, notamment à la question 4 où l'étudiant-maître tente de faire prendre conscience à l'élève de son erreur, mais il n'y a pas de changements majeurs et on sent une résistance au niveau de ses conceptions.	

3c

Étude de cas n° 1 (avant)	**Étude de cas n° 2 (après)**
1. Pour chacun des élèves, identifiez les erreurs et les obstacles rencontrés.	
Éric : n'effectue pas les mêmes opérations des deux côtés. Julie : ne lit pas bien le problème. Ne comprend pas la différence entre 7x et 7+x. Martin : ne respecte pas la priorité des équations lors de l'isolation d'une variable. Anne : elle n'est pas à l'aise avec les fractions.	Éric : ne comprend pas le sens de l'équation. Julie : ne comprend pas certaines notions de base en algèbre. Elle pense que 7x = 7+x. Martin : ne comprend pas certaines notions de base en algèbre. (lorsqu'on x ou ÷, on doit le faire sur TOUT le côté). Anne : pas à l'aise avec l'addition de fractions et fractions avec dénominateurs différents.
L'erreur est perçue comme une action qui aurait dû être faite mais qui ne l'a pas été. L'étudiant-maître utilise la négation pour formuler l'action qui témoigne de l'erreur. Il n'est aucunement mention d'obstacle, ce qui laisse supposer que l'étudiant ne voit pas de différence majeure entre erreur et obstacle.	L'erreur est perçue comme un manque de compréhension. Une fois de plus, l'étudiant-maître utilise la négation dans sa formulation de l'erreur. Toutefois, on perçoit un changement avec « elle pense que 7x=7+x » qui témoigne d'une préoccupation de ce que l'élève pense. Encore une fois, il n'est aucunement mention d'obstacles, ce qui peut laisser supposer que l'étudiant-maître ne voit toujours pas la différence entre obstacle et erreur malgré la séquence d'enseignement.
2. Quelles sont selon vous les causes d'erreurs ?	
Éric : son manque de compréhension du principe des équations. Julie : elle résout tous les problèmes de la même façon. Martin : il isole tous les chiffres comme s'ils étaient des constantes. Anne : elle a oublié de mettre toutes ses variables sur le même dénominateur avant d'isoler.	Éric : il ne comprend pas le principe de l'égalité. Julie : elle ne semble pas différencier l'addition et la multiplication de variables. Martin : ne semble pas comprendre la façon d'isoler une variable à l'aide de « x et ÷ ». Anne : ne semble pas comprendre qu'il faut d'abord mettre les fractions sur le même dénominateur avant d'isoler une variable.

Étude de cas n° 1 (avant)	Étude de cas n° 2 (après)
Ici, l'étudiant-maître n'est pas constant dans sa manière de décrire la cause de l'erreur. Dans le cas d'Éric, il la décrit comme un *manque* de compréhension, dans le cas d'Anne il la décrit comme une *action qu'elle aurait dû faire* et dans les deux autres cas, il la décrit comme une *action erronée qui a été posée.* Cette dernière façon de décrire la cause de l'erreur nous permet de supposer que l'étudiant-maître perçoit déjà en partie le sens que l'on veut lui faire découvrir par rapport à l'obstacle. On peut penser que suite à la séquence, cette manière de décrire la cause de l'erreur devrait ressortir davantage.	Ici, la cause de l'erreur est très similaire à l'erreur elle-même. L'étudiant-maître identifie la cause de l'erreur comme un manque de compréhension. Il semblerait donc que l'étudiant-maître ne voit pas de différence (ou ne lui accorde pas d'importance) entre l'erreur elle-même et la cause de l'erreur. De plus, contrairement à ce que nous avions supposé à la suite de la première étude de cas, l'étudiant ne formule pas plus la cause d'erreur sous forme d'actions posées. À vrai dire, il ne l'emploie plus de tout. Est-ce que la séquence aurait eu un effet négatif sur sa compréhension de l'obstacle ?
3. Que pensez-vous qui fait obstacle à la réussite de ces élèves ?	
<u>Éric :</u> la loi des opérations (il ne comprend pas comment isoler une variable. <u>Julie :</u> ne semble pas bien comprendre la base de l'algèbre. (ne comprend pas qu'elle peut grouper les inconnues identiques en un seul tout) <u>Martin :</u> ne semble pas comprendre la priorité des équations et la différence entre coefficient et constante. <u>Anne :</u> ne semble pas comprendre que les problèmes d'algèbre se traitent comme une équation normale.	<u>Éric :</u> le manque de certaines notions de base d'algèbre. <u>Julie :</u> le manque de certaines notions de base d'algèbre. <u>Martin :</u> idem <u>Anne :</u> idem
L'étudiant-maître décrit l'obstacle comme une notion ou une technique incomprise. Il décrit ensuite ce que l'élève aurait dû faire. Ça ressemble beaucoup à ce qu'il a déjà répondu aux deux premières questions.	L'étudiant-maître décrit l'obstacle comme un manque. Sa conception erronée de l'obstacle est donc persistante et ne semble pas avoir été modifiée par la séquence d'enseignement. On peut même se demander si elle n'a pas été renforcée.

<table>
<tr><th>Étude de cas n° 1 (avant)</th><th>Étude de cas n° 2 (après)</th></tr>
<tr><td colspan="2">4. Comment aideriez-vous ces élèves ? Justifiez votre réponse.</td></tr>
<tr><td><u>Éric :</u> je lui expliquerais à nouveau …
<u>Julie :</u> je lui expliquerais en concrétisant mes explications (exemples avec des bananes).
<u>Martin :</u> en lui expliquant la différence entre une constante et un coefficient.
<u>Anne :</u> lui faire travailler quelques problèmes d'addition et de soustraction de fractions sans variable, puis avec variables.</td><td><u>Éric :</u> je lui expliquerais … à l'aide d'une balance.
<u>Julie :</u> reprendre les explications en personnifiant les variables (remplacer le x par le mot banane).
<u>Martin :</u> reprendre avec lui les principes de base de l'isolation de variables.
<u>Anne :</u> revoir avec elle …</td></tr>
<tr><td>L'étudiant-maître explique à nouveau, en ajoutant parfois un support visuel ou des exemples concrets. Il vient donc contrer l'obstacle en donnant ce qui manque.</td><td>L'étudiant-maître explique à nouveau, en ajoutant parfois un support visuel ou des exemples concrets. Il vient donc contrer l'obstacle en donnant ce qui manque. Par contre, le fait qu'il précise comment il expliquerait nous renseigne sur ce qu'il identifie comme devant être corrigé.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Conclusion : On peut donc conclure que la séquence n'a eu aucun effet positif et n'a pas réussi à modifier sa conception de la notion d'obstacle. Il continue à percevoir l'obstacle comme un manque et il réagit en donnant ce qui manque plutôt qu'en partant des conceptions de l'élève, bien qu'il cible davantage, dans la deuxième étude de cas, ce qu'il travaillerait et comment. Il y a peut-être une faille dans la séquence elle-même, ou sa conception est peut-être trop forte pour être modifiée aussi rapidement.</td></tr>
</table>

3d

Étude de cas n° 1 (avant)	**Étude de cas n° 2 (après)**
1. Pour chacun des élèves, identifiez les erreurs et les obstacles rencontrés.	
Éric : soustrait d'un côté et additionne de l'autre. Julie : confond 3x avec 3+x et 7x avec 7+x. Martin : oublie d'additionner les variables avant d'isoler. Anne : n'a pas distribué l'addition à droite de l'équation.	Éric : au lieu de faire la même opération de chaque côté, il fait l'opération inverse de l'autre côté. Julie : confond le lien multiplicatif avec le lien additif (ex. :3x = 3 + x et non 3•x). Martin : n'additionne pas les termes semblables avant de diviser et divise mal. Anne : erreur de distributivité sur la x.
L'étudiant-maître perçoit l'erreur parfois comme une action erronée qui a été faite, parfois comme une action qui aurait dû être faite.	Même chose qu'à la première étude de cas. La séquence d'enseignement n'a pas semblé produire d'effet à ce niveau.
2. Quelles sont selon vous les causes d'erreurs ?	
Éric : il mêle les 2 façons d'isoler une variable. Il se mêle dans les mots « change de bord » et « change de signe ». Julie : difficulté à comprendre le langage algébrique au niveau de l'addition et de la multiplication. Martin : ne fait pas le transfert de la connaissance de la notion de termes semblables qu'il a vu en algèbre ou il ignore ce qu'est un terme semblable. Anne : oublie ou ne prend pas conscience que la distributivité s'applique aussi en algèbre.	Éric : il a appris à changer le signe de l'autre côté de l'équation (sans comprendre). Julie : ne comprend pas le langage algébrique. Martin : il est habitué de faire des équations où il n'a pas à additionner les termes en x. Anne : ne se rappelle plus qu'il faut distribuer la x ou ÷ d'un côté de l'égalité en chaque terme.
Dans le cas de Martin, l'étudiant-maître décrit la cause de l'erreur comme une connaissance qui n'a pas été transférée dans un nouveau contexte. Cette représentation est tout à fait l'opposé de ce que nous voulons faire découvrir aux étudiants-maîtres concernant l'obstacle, puisque nous considérons l'obstacle comme une connaissance qui cherche à se transférer à tout prix, conduisant ainsi à des erreurs. Par contre dans les 3 autres cas, il décrit la cause comme une lacune ou une difficulté.	Dans 2 des cas, l'étudiant-maître décrit la cause comme une habitude ou une connaissance antérieure. Par contre dans les 2 autres cas, il la décrit comme un manque de compréhension ou de mémoire. La différence n'est pas très significative lorsqu'on compare avec la première étude de cas. On peut donc penser que l'étudiant-maître a une compréhension partielle de la notion d'obstacle.

Étude de cas n° 1 (avant)	Étude de cas n° 2 (après)
3. Que pensez-vous qui fait obstacle à	**la réussite de ces élèves ?**
Éric : cherche trop à mémoriser des règles sans réfléchir. Julie : ses connaissances antérieures en algèbre sont pauvres. Lacunes accumulées. Martin : lacunes accumulées. Anne : ne transfère pas les connaissances de sec. I en algèbre.	Éric : mêle deux méthodes qu'il a apprises sans les comprendre. Julie : ne comprend pas encore le langage algébrique. Martin : il est habitué de faire l'opération inverse dès que le coefficient affecté à x est différent de 1. Ne transpose pas ce qu'il a appris en algèbre. Anne : elle est habituée de travailler avec des nombres entiers. Avec des fractions, elle est déstabilisée et cherche à se débarrasser du dénominateur.
Ici, l'étudiant-maître décrit l'obstacle comme une connaissance antérieure qui est pauvre et qui n'est pas reconnue utile dans un nouveau contexte.	Ici, l'étudiant-maître ne démontre pas de changement majeur au niveau de sa compréhension de l'obstacle. On peut toutefois entrevoir certaines nuances. Par exemple, dans le cas de Julie il décrit l'obstacle comme un manque de compréhension. Dans les cas de Martin et Anne par contre il précise ce qui est fait et montre que l'habitude nuit.
4. Comment aideriez-vous ces élèves	**? Justifiez votre réponse.**
Éric : lui montrer pourquoi on fait la même opération de chaque côté (avec balance). Julie : retour sur les opérations algébriques. Martin : révision des opérations algébriques. Anne : généraliser les résultats de sec. I à l'algèbre.	Éric : retour à la méthode qu'il connaît pour lui expliquer la bonne méthode. Julie : retour sur l'algèbre, la signification des termes et la façon d'écrire le langage. Martin : en lui rappelant les règles à suivre. Anne : retour sur la distributivité des opérations algébriques et sur les opérations sur les fractions.
L'étudiant-maître fait un retour sur les notions incomprises. Il va donc donner ce qui manque en réexpliquant à nouveau.	Dans le cas d'Éric, l'étudiant-maître démontre un souci de partir de ce que l'élève connaît. Par contre dans les autres cas il semble revenir à la même méthode employée lors de la première étude de cas, c.-à.-d. faire un retour sur les notions incomprises. Par contre, il précise ce qui sera travaillé, ce qui peut être un indice d'un diagnostic plus précis par rapport à ce qui est inadéquat chez l'élève.

Étude de cas n° 1 (avant)	Étude de cas n° 2 (après)
Conclusion : Bien qu'il n'y ait pas de changements majeurs entre les deux études de cas, on remarque tout de même certaines précisions lors de la deuxième. En effet l'étudiant-maître semble plus précis dans sa description de ce qui est inadéquat chez l'élève ce qui peut nous laisser supposer une certaine amélioration au niveau de sa conception de l'obstacle.	

4d

Étude de cas n° 1 (avant)	Étude de cas n° 2 (après)
1. Pour chacun des élèves, identifiez les erreurs et les obstacles rencontrés.	
<u>Éric</u> : il additionne du côté droit de l'égalité la constante qu'il a soustraite du côté gauche, plutôt que de la soustraire. <u>Julie</u> : elle soustrait seulement la constante du terme (7, 3) plutôt que le terme en entier (7x, 3x). <u>Martin</u> : il divise ou multiplie seulement un terme en x plutôt que tout le membre de l'équation. <u>Anne</u> : multiplie seulement le terme en x par 2, plutôt que tout le membre de l'équation.	<u>Éric</u> : l'élève a fait +a d'un côté du = et –a de l'autre. <u>Julie</u> : l'élève a soustrait seulement le coefficient du terme en x (7-7+x plutôt que 7x-7x). <u>Martin</u> : il ne met pas ses termes semblables ensemble avant de ÷ ou •. <u>Anne</u> : l'élève n'additionne pas les termes semblables avant d'isoler.
Cet étudiant-maître décrit l'erreur comme une action incorrecte qui a été faite et la compare avec ce qui aurait dû être fait.	Pour les deux premiers cas, l'étudiant-maître décrit l'erreur de la même manière qu'à la première étude de cas. Par contre dans les deux autres cas, il la décrit en disant ce que l'élève n'a pas fait.
2. Quelles sont selon vous les causes d'erreurs ?	
<u>Éric</u> : applique le concept : « pour ne pas modifier une phrase mathématique, on doit additionner ce que l'on soustrait ». Or ceci est vrai du même côté mais pas de part et d'autre du signe =. <u>Julie</u> : elle considère 7x comme (7+x) plutôt que (7•x). <u>Martin</u> : il ne considère pas le côté gauche de l'équation comme un tout, donc il n'applique pas la distributivité de la ÷. <u>Anne</u> : même que Martin avec la multiplication.	<u>Éric</u> : l'élève a confondu ; il faut faire +11, -11 du même côté du = pour ne pas changer l'égalité, mais il faut faire –11 et –11 de part et d'autre du = pour conserver l'égalité. L'élève a mélangé ces 2 concepts. <u>Julie</u> : mauvaise compréhension : 7x = 7•x et non 7+x. <u>Martin</u> : mauvaise démarche d'isolation du x. <u>Anne</u> : une peur des fractions.
Ici, l'étudiant-maître voit la cause d'erreur un peu comme une conception erronée. Le cas d'Éric décrit d'ailleurs très bien l'obstacle, c'est-à-dire une connaissance-obstacle qui en s'adaptant cause une erreur.	L'étudiant-maître voit ici les causes d'erreurs comme quelque chose de mauvais (mauvaise compréhension, mauvaise démarche, peur) Dans sa formulation, il était plus proche du sens recherché de la notion d'obstacle lors de la première étude de cas que lors de la deuxième.

Étude de cas n° 1 (avant)	Étude de cas n° 2 (après)
3. Que pensez-vous qui fait obstacle à	**la réussite de ces élèves ?**
Éric : mauvaise compréhension de la notion d'équation, d'égalité entre les 2 membres. Julie : mauvaise définition de l'opération représentée par un coefficient « collé » à une variable. Martin : mauvaise démarche de résolution. Il devrait d'abord regrouper les termes semblables puis ÷ pour isoler le x. Anne : elle s'imagine qu'on additionne les termes semblables seulement quand le coefficient est entier.	Éric : une mauvaise compréhension du concept d'égalité. Julie : mauvaise assimilation des « règles » des expressions algébriques. Martin : l'élève ne considère pas le côté gauche du = comme un tout, c'est pourquoi il divise ou multiplie seulement le terme en x qui a un coefficient sans s'occuper de l'autre. Anne : manipuler des fractions.
L'étudiant-maître perçoit l'obstacle comme quelque chose de mauvais (ou peut-être aussi comme un manque) alors qu'il a décrit la cause d'erreur comme une conception erronée. Il ne semble donc pas sentir qu'un obstacle cause des erreurs. Toutefois une distinction existe.	Encore une fois, l'étudiant-maître perçoit l'obstacle comme quelque chose que l'élève ne fait pas comme il le faut. Cela laisse supposer que la séquence n'a pas eu d'effet remarquable au niveau de sa compréhension de la notion d'obstacle.
4. Comment aideriez-vous ces élèves	**? Justifiez votre réponse.**
Éric : analogie entre équation et balance à 2 plateaux. Julie : redéfinir la multiplication entre coefficient et variable. Martin : revoir les étapes d'une résolution d'équation. Rappeler que l'isolation du « x » est la dernière étape. Anne : montrer que sa multiplication par 2 affectant juste x/2 est incorrecte mathématiquement. Lui faire voir que le numéro 6 n'est pas différent des nos 4 et 5.	Éric : en amenant une balance pour lui montrer « physiquement » le concept d'égalité. Julie : en réexpliquant le sens de ax (a multiplie x). Martin : mettre des parenthèses du côté gauche du = pour montrer que c'est un tout. Anne : lui montrer que la démarche de résolution est la même qu'aux nos 4 et 5.
Ici, l'étudiant-maître réagit en donnant ce qui manque (à part peut-être dans le cas d'Anne où on peut percevoir un souci de faire prendre conscience à l'élève de son erreur).	Encore une fois, l'étudiant-maître ne fait que réexpliquer (donc il donne ce qui manque) à part dans le cas d'Anne où il part de quelque chose de connu et qui fonctionne bien pour l'élève. Malgré tout, l'étudiant-maître ne semble pas avoir bien saisi le concept d'obstacle.

Étude de cas nº 1 (avant)	Étude de cas nº 2 (après)
Conclusion : En comparant les deux études de cas, on se rend compte qu'il n'y a pas vraiment de différence entre les deux. La séquence d'enseignement n'a donc produit aucun changement visible au niveau de la conception reliée à la notion d'obstacle. Par les réponses obtenues dans l'étude de cas, on s'aperçoit d'ailleurs que cet étudiant-maître a une conception inadéquate de la notion d'obstacle au sens où nous l'entendons. En effet, il perçoit davantage l'obstacle comme un manque et y remédie en réexpliquant, ce qui revient à donner ce qui manque.	

4e

Étude de cas n° 1 (avant)	**Étude de cas n° 2 (après)**
1. Pour chacun des élèves, identifiez les erreurs et les obstacles rencontrés.	
Éric : il savait qu'il faut regrouper les termes semblables (n^{os} 4, 5, 6). Il veut donc faire la même chose avec les constantes en les changeant de côté de l'égalité, mais il se trompe de signe devant la constante. Julie : elle transforme une multiplication en addition sans s'en rendre compte. Elle a simplifié les problèmes à sa façon pour obtenir une forme d'équation qu'elle sait résoudre. Martin : il divise ou multiplie qu'un seul des 2 termes du même côté de l'équation. Il utilise la même démarche que dans les numéros précédents. Ne différencie pas les propriétés de multiplication et d'addition. Anne : elle a été désorientée par x/2. Elle a pris une démarche différente des numéros précédents pour résoudre ce problème. Ce n'est pas les fractions en général qu'elle ne saisit pas, car elle a réussi le n° 3.	Éric : pour isoler la variable, il additionne au lieu de soustraire la quantité qu'il a enlevé de l'autre côté de l'égalité. Julie : elle sépare le coefficient de la variable. Martin : il applique la division qu'à un seul des deux termes. Anne : elle a appliqué la multiplication qu'à un seul des deux termes du même côté de l'équation.
Cet étudiant-maître perçoit l'erreur comme une adaptation ou l'application d'une technique qui fonctionnait bien dans un autre contexte.	Cette fois-ci, l'étudiant-maître perçoit l'erreur comme une action incorrecte qui a été faite. On constate donc une régression par rapport à ce qui a été dit à la première étude de cas.
2. Quelles sont selon vous les causes d'erreurs ?	
Éric : façon dont sont écrits les problèmes. Si on avait eu x + 11 = 27, il les aurait probablement réussis. Julie : elle s'est trouvée mal prise avec le coefficient devant la variable. Elle n'a pas reconnu la multiplication entre le coefficient et la variable. Martin : le coefficient devant la variable l'embête. Cependant, il a reconnu la multiplication ou la division. Anne : elle n'a pas fait de lien entre ce numéro et les deux précédents. Je pense qu'elle a simplement été impressionnée par la fraction associée à une variable.	Éric : je pense que cette erreur est attribuable à la façon d'écrire la démarche. Du côté gauche, il n'est pas évident de voir si on a enlevé ou ajouté la valeur numérique car on voit cette valeur avec un moins devant et une autre fois avec rien devant. Julie : elle ne sait pas comment se débarrasser du nombre devant le x, alors elle transforme l'équation pour pouvoir faire une méthode qu'elle connaît. Martin : il était probablement embêté avec les deux termes en « x » alors il a transformé l'expression en quelque chose qu'il connaît (x +x) et plus simple. Anne : il semble évident que c'est la fraction qui a désorienté Anne.

Étude de cas n° 1 (avant)	Étude de cas n° 2 (après)
Cet étudiant-maître a semblé relier les causes d'erreurs aux particularités du langage mathématique. Dans les cas de Julie et de Martin, il décrit la cause d'erreur comme un blocage, une déstabilisation face à une situation donnée.	L'étudiant-maître reprend quelques idées de la première étude de cas. Par contre, dans les cas de Julie et Martin il ajoute l'aspect d'adaptation des connaissances où l'élève transforme un peu les règles du jeu de façon à retrouver une situation qui lui est familière. Il reprend ainsi sensiblement la même idée que ce qu'il avait démontré à la question 1 de la première étude de cas.
3. Que pensez-vous qui fait obstacle à la réussite de ces élèves ?	
Éric : démarche écrite. Il a compris le principe de résolution d'équations, mais il devra faire attention aux signes. Julie : elle devra réviser la notion de termes semblables. De plus, elle devra se familiariser avec les variables car elle sera dépourvue quand les problèmes se compliqueront. Martin : il devra réviser la notion de regroupement de termes semblables. De plus, il devra mettre au clair la différence des propriétés de la multiplication et de l'addition. Anne : identifier les fractions selon leurs différentes notations.	Éric : il ne comprend sûrement pas le symbole d'égalité et le but d'ajouter ou soustraire des valeurs de chaque côté de cette égalité. Julie : puisqu'elle ne comprend pas encore l'algèbre, elle utilise l'arithmétique. Martin : il serait probablement capable de résoudre une équation du genre 3x=18, mais il ne sent pas le besoin d'additionner les x. Anne : elle ne comprend peut-être pas que 1/2 x est aussi une quantité.
L'étudiant-maître perçoit l'obstacle comme une notion ou un concept qui n'est pas bien maîtrisé par l'élève et qu'il devrait réviser.	L'étudiant-maître décrit en général l'obstacle comme une incompréhension. On peut entrevoir dans le cas de Julie, une conception de l'obstacle fondée un peu plus sur une connaissance antérieure qui avait ses succès mais qui dans un autre contexte ne fonctionne plus. Mais on ne retrouve pas vraiment ce même raisonnement dans les autres cas, ce qui nous laisse supposer que la séquence d'enseignement n'a pas eu tout l'effet voulu.

Étude de cas n° 1 (avant)	**Étude de cas n° 2 (après)**
4. Comment aideriez-vous ces élèves ? Justifiez votre réponse.	
<u>Éric</u> : je reviendrais sur le concept de balance. Je lui suggérerais une autre façon d'écrire sa démarche. Je lui suggèrerais de vérifier sa réponse. <u>Julie</u> : je lui montrerais que la notation 7x veut dire 7•x et que cela représente deux chiffres multipliés ensemble. Ensuite je lui dirais qu'on peut additionner les termes semblables puisque… <u>Martin</u> : je lui donnerais des exemples concrets sur le principe de la balance dans une équation. <u>Anne</u> : je changerais la notation x/e par 1/2•x et je ferais la comparaison avec le problème précédent.	<u>Éric</u> : je lui demanderais de vérifier sa réponse et je lui demanderais ce qu'il a fait et pourquoi ? De cette façon, il se rendra compte lui même de son erreur et de ce qu'il faut faire. <u>Julie</u> : je lui demanderais de dire dans ses mots l'expression algébrique en remplaçant « x » par « une quantité ». Ensuite je lui expliquerais qu'on peut additionner les « x ». Je travaillerais avec elle le sens des multiplications. <u>Martin</u> : je ferais un lien avec l'arithmétique en parlant des propriétés d'opération. <u>Anne</u> : je ferais remplacer x par un chiffre connu pour que Anne voit bien qu'il s'agit d'un nombre auquel on ajoute sa moitié.
L'étudiant-maître réexpliquerait autrement.	L'étudiant-maître démontre un souci de partir de l'élève et de le faire verbaliser ce qu'il fait, de façon à tenter de lui faire prendre conscience de son erreur. Il y a encore une tendance à certains moments à réexpliquer et à donner ce qui manque mais on peut entrevoir un effort de partir des connaissances de l'élève. Il s'agit d'un changement important par rapport à la première étude de cas.
Conclusion : De façon générale, l'étudiant-maître ne semble pas démontrer par ses réponses une compréhension complète du concept d'obstacle tel que nous l'avons décrit. Par contre, certaines réflexions laissent supposer une certaine ouverture face à la conception de l'obstacle en tant que connaissance antérieure qui avait ses succès mais qui, sortie de son contexte, ne fonctionne plus. Les conceptions erronées face au concept d'obstacle semble trop persistantes pour amener l'étudiant-maître à changer complètement.	

Annexe 8 : Mise en situation et formation sur les mathématiques égyptiennes (expérimentation II).

Mise en situation - Première partie

Récemment, des chercheurs ont réussi à créer une machine à voyager dans le temps. Cette invention a rapidement suscité l'intérêt de nombreux historiens qui voyaient là un moyen d'avoir enfin des réponses à toutes leurs questions. Un groupe d'historiens en mathématiques vous a approchés pour faire partie d'une expérience sans précédent.

Vous ferez partie d'un groupe de mathématiciens qui effectuera un voyage dans le temps, à l'époque des Égyptiens, soit 1650 ans av. J.-C. Une fois sur place, vous devrez vous faire passer pour des scribes et tenter d'apprendre le plus de choses possible sur les mathématiques utilisées à cette époque. Pour vous préparer à votre mission, on vous propose une formation sur ce qui a été découvert jusqu'à présent concernant les mathématiques égyptiennes.

La formation comprend : contexte historique, écriture égyptienne, algorithmes de multiplication et de division, addition et soustraction, règles des fractions, problèmes écrits, exemple de résolution d'un problème tiré du Papyrus Rhind.

Avant de partir, on vous remet :

- un résumé de la formation dans ses grandes lignes
- un émetteur sophistiqué qui vous permettra de communiquer avec le centre de contrôle à trois reprises si vous êtes mal pris (permet de poser 3 questions au professeur)
- un traducteur auditif que vous pouvez mettre dans votre oreille pour comprendre les propos des Égyptiens
- Un traducteur visuel sous forme de verre de contact que vous pouvez porter pour déchiffrer les textes égyptiens

Sur place, il vous sera interdit de rapporter des vestiges de cette époque (à part des photos) et il vous est strictement interdit de transmettre vos connaissances actuelles aux Égyptiens car ceci pourrait transformer le cours de l'histoire, ce qui pourrait avoir des effets assez désastreux. Vous devez être TRÈS prudents lorsque vous utilisez des instruments ou des connaissances du XXI^{e} siècle.

Questions ?

Et c'est un départ !

Deuxième partie

Pendant votre séjour, vous visitez l'Égypte et apprenez plein de choses sur la civilisation égyptienne. Vous vous infiltrez comme prévu au Ramasseum en tant que scribe afin d'en découvrir plus sur les mathématiques de l'époque. Après 2 jours, tous les scribes sont convoqués dans un amphithéâtre. Vous assistez donc à la rencontre avec les autres. En entrant dans l'amphithéâtre, vous vous rendez compte qu'il y a des gardes postés à chaque entrée. Les scribes semblent perplexes et se demandent ce qui se passe. Un garde qui semble un peu plus haut gradé prend alors la parole :
« Des imposteurs se sont infiltrés parmi nous. Nous craignons qu'ils s'agissent d'espions étrangers qui tentent de nous soutirer de l'information. Les scribes seront donc tous soumis à un test afin de découvrir les imposteurs. Personne ne pourra sortir de cette salle tant que les problèmes n'auront pas été résolus et corrigés. Ceux qui n'arriveront pas à résoudre les problèmes avec les techniques égyptiennes seront jetés aux crocodiles. »

Les gardes remettent donc à chaque scribe un rouleau de papyrus sur lequel sont inscrits quatre problèmes à résoudre, ainsi qu'une plume et un encrier. Lorsque vous aurez terminé vous devez tout remettre au responsable.

(voir feuille de consignes pour plus de détails)

Théorie – Mathématiques égyptiennes

Contexte historique

Vous serez téléportés dans la Grande région de Thèbes près du Ramasseum, là où le Papyrus Rhind (**appendices I-II**) fut découvert. La découverte de ce papyrus nous laisse supposer la présence de scribes à cet endroit. Vous serez donc téléportés en 1650 av. J.-C. à la 33e année du règne d'Asouserenrê Apophis. Comme le Papyrus Rhind est une copie d'un original datant de 1850 à 1800 av. J.-C., on suppose qu'il y a peut-être d'autres originaux qui se trouvent à cet endroit et qui n'ont pas été préservés.

Détails importants :
Les scribes ne sont pas très bien vus de la part des paysans car ce sont eux qui perçoivent les taxes pour le souverain. Donc évitez les échanges avec les paysans.
Aussi, les échanges à l'intérieur du pays se font en nature (pain, bière …) sous forme de troc. Il n'y a donc pas de monnaie qui circule sauf pour les échanges avec l'extérieur du pays.

Écriture égyptienne

Ce sont des soldats français, lors de l'expédition de Napoléon en Égypte qui firent la découverte de la pierre de Rosette. C'est grâce à cette pierre sur laquelle on retrouvait une inscription en trois langues (grec, démotique et hiéroglyphique) que nous avons pu déchiffrer les hiéroglyphes.

Au niveau du système numérique, qui est un système additif en base 10, on retrouve 2 types d'écriture. L'écriture hiéroglyphique et l'écriture hiératique (**appendice III**).

> *« L'écriture hiéroglyphique apparaît, en général sur les tombes, les monuments, les pierres, alors que sur les papyrus, c'est l'écriture hiératique (de forme cursive) qui prédomine, étant mieux adaptée à l'écriture manuelle. »*[14]

Il est à noter que la majorité des traités égyptiens se lisent de droite à gauche. Pour s'en assurer, il suffit de regarder dans quelle direction pointe la tête des animaux ou des diverses figurines. Si elles pointent vers la droite, alors on doit lire le texte de droite à gauche.

---

[14] Collette, Jean-Paul (1973). Histoire des mathématiques. : Éditions du renouveau pédagogique. p.32

Algorithme de multiplication et de division

La multiplication

Ex. : 24 x 37

	1	37	
	2	74	
	4	148	
16 + 8 = 24 ← +	8	296	+ → 296 + 592 = 888
	16	592	

$\boxed{\text{réponse : 888}}$

La multiplication, se fait par <u>doublement</u> et par <u>addition.</u>

1. On fait 2 colonnes. On remplace le plus petit nombre par 1. Dans l'autre colonne, on met le plus grand nombre tel quel.
2. À chaque ligne, on double les valeurs de la ligne précédente.
3. Dans la colonne du plus petit nombre, on cherche les nombres qui additionnés entre eux donneront ce nombre (ici= 24).
4. On prend les valeurs correspondantes dans l'autre colonne et on les additionne. On obtient alors le résultat voulu.

La division

Ex. : 847 ÷ 33 ⇒ diviseur

↳ Dividende

	33	1	
	66	2	
33+264+528= 825 ← +	132	4	+ → 1+8+16 = 25
	264	8	
	528	16	

$\boxed{\text{réponse : 25 reste 22}}$

La division se fait par <u>doublement</u> et par <u>addition</u>

1. On fait 2 colonnes : Dans la première on met le diviseur, dans la deuxième on met le nombre 1.
2. À chaque ligne, on double les valeurs de la ligne précédente.
3. On cherche dans la première colonne les nombres qui additionnés entre eux donneront la valeur du dividende (ou du moins le nombre qui s'en rapproche le plus, sans le dépasser).
4. On prend les valeurs correspondantes dans la deuxième colonne et on les additionne.
5. Si la valeur à l'étape 3 n'arrive pas juste, on cherche le reste en soustrayant du dividende la valeur trouvée à l'étape 4.

Addition et soustraction

Pour additionner et soustraire, les scribes de l'époque avaient recours à des tables d'addition. Nous avons retrouvé un rouleau de cuir (qui fut acheté en 1858 par Rhind) contenant des tables d'addition.

Règles sur les fractions

- Les Égyptiens n'utilisent que des fractions unitaires (**appendice IV**). Pour eux, une fraction de la forme n/m où n, m >1 est vue comme une division inachevée. Par exemple, au lieu d'écrire 4/5, les Égyptiens écrivaient 1/2 1/5 1/10.
- Une exception à cette règle est la fraction 2/3 qui est reconnue par les Égyptiens.
- Lors de l'écriture de fractions, les Égyptiens utilisent la plus petite quantité de fractions unitaires possible. Par exemple, les Égyptiens vont préférer 1/2 1/5 1/10 à 1/2 1/5 1/15 1/30 pour représenter 4/5.
- Lors de l'écriture de fractions, les Égyptiens n'utilisent jamais deux fois une même fraction unitaire. Par exemple, la fraction 2/5 ne pourrait être représentée par 1/5 1/5
- Lors de l'écriture de fractions, les Égyptiens écrivent les fractions unitaires en ordre décroissant (du plus petit dénominateur au plus grand).

Problèmes écrits

Lors de la résolution de problèmes, les Égyptiens n'ont pas recours à la mise en équations. Effectivement, la symbolisation et le calcul sur les inconnues ont été développés un peu avec Diophante (~200-284) puis ont connu leur véritable essor avec Viète (1540-1603)

Exemple

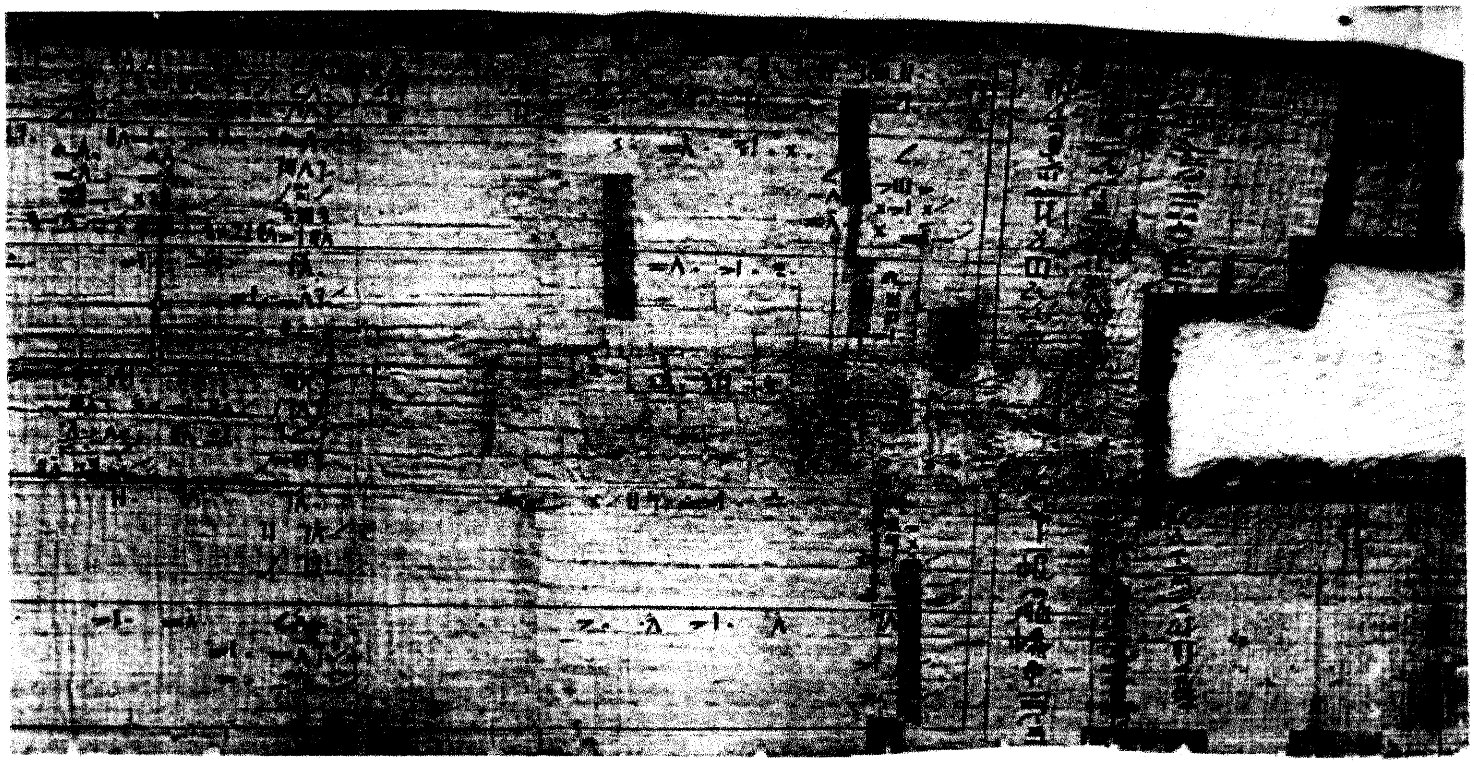
Problème 21 tiré du Papyrus Rhind (**appendice V**) : « Combien faut-il pour compléter 2/3 1/15 en 1? »

Il est dit : complète 2/3 1/15 à 1.
Total : 11, manque : 4. On opère sur 15 pour trouver 4.

2	15
1/10	1 1/2
\ 1/5	3
\ 1/15	1
dmd	4
Total	

C'est donc 1/5 1/15 qu'il faut ajouter.
Exemple de preuve :
2/3 1/5 1/15 1/15 donne effectivement 1. Donc c'est bien 1/5 1/15 qu'il faut ajouter.

Appendice I : Papyrus Rhind



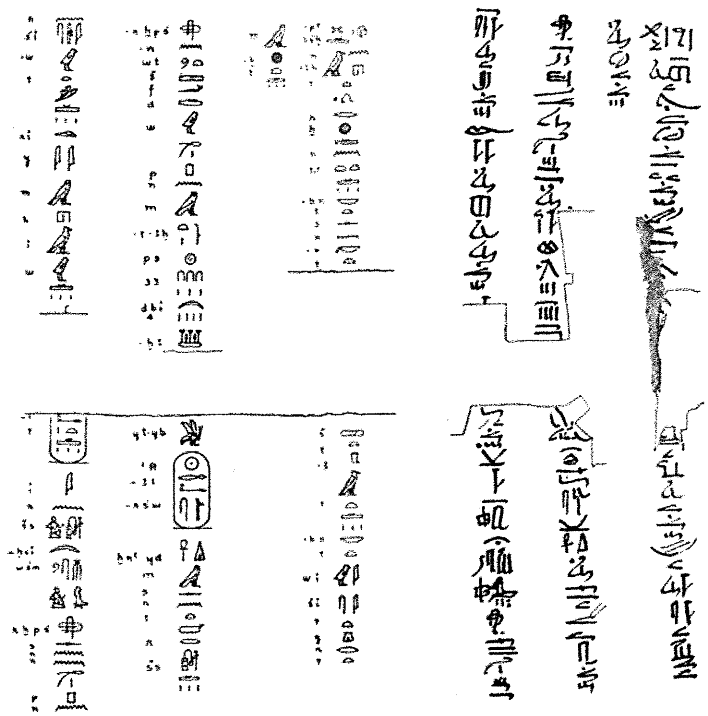
Part of Plate 5 2 divided by 17	Plate 2 2 divided by 3,5,7	Plate 1 Title Page
Part of Plate 6 2 divided by 19		
Part of Plate 7 2 divided by 21, 23	Plate 3 2 divided by 9, 11	
Part of Plate 8 2 divided by 25, 27	Plate 4 2 divided by 13, 15	

(tiré de Chace, 1979, p. 82)

Appendice II : Page titre du Papyrus Rhind

TITLE-PAGE

Plate 1



Photograph I, Columns I-3   B.M. Facsimile, Plate 1
(tiré de Chace, 1979, p. 85)

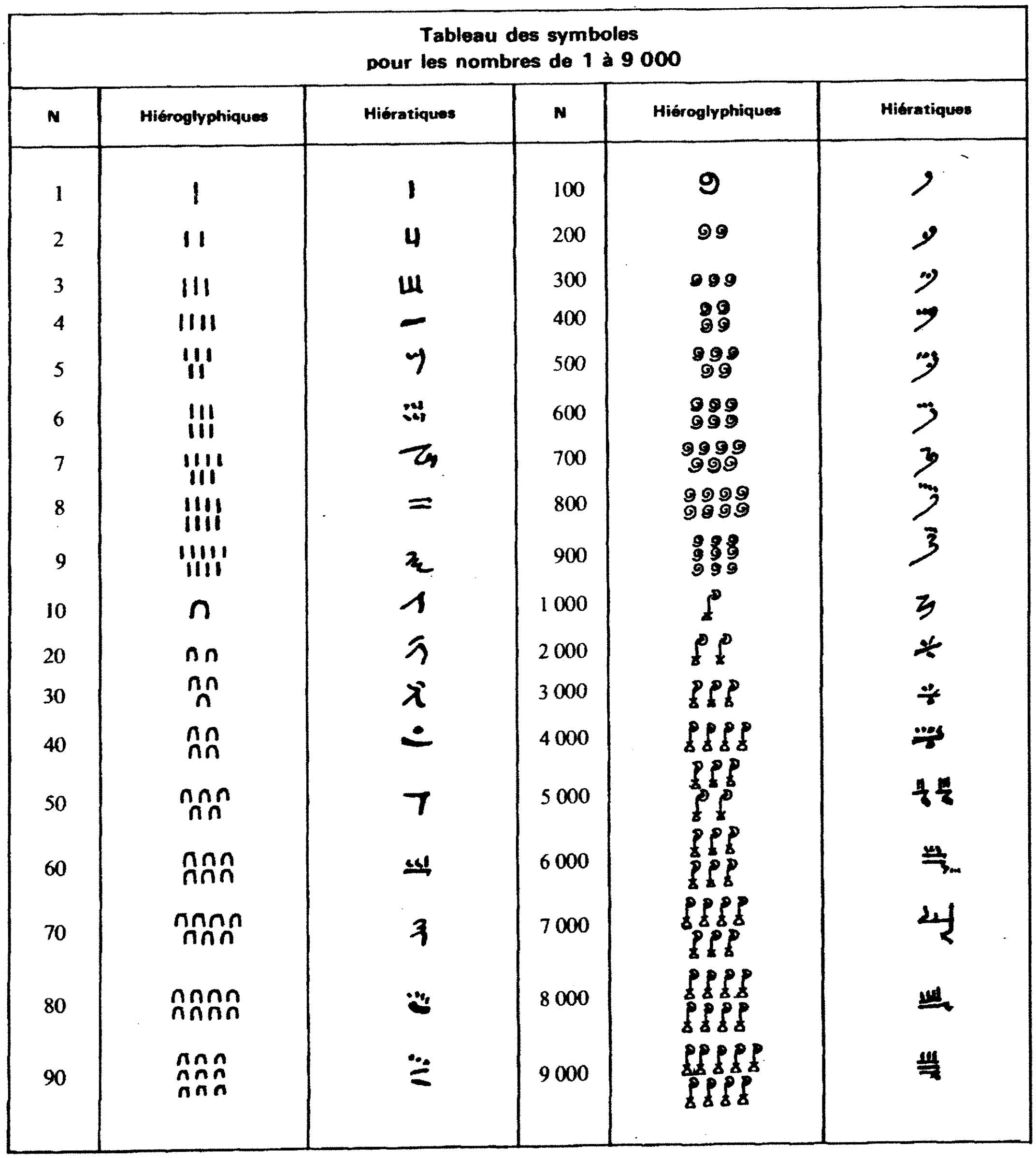
Traduction anglaise:[15]
Accurate reckoning of entering into things, knowledge of existing things all, mysteries … secrets all. Now was copied book this in year 33, month four of the inundation season [under the majesty of the] King of [Upper and] Lower Egypt, 'A-user-Rê', endowed with life, in likeness to writing of old made in the time of the King of Upper [and Lower] Egypt, [Ne-ma]'et-[Rê]. Lo the scribe A'h-mosè writes copy this.

Traduction française :[16]
Exemple de calcul afin de sonder les choses, et connaître tout ce qui est obscur … ainsi que tous les secrets. C'est pour cela assurément qu'à recopié ce rouleau en l'an 33 durant le quatrième mois de la saison de l'inondation… [sous la majesté du roi de Haute] et Basse-Égypte Aaouserrê, doué de vie, conformément aux écrits des temps anciens qui ont été faits au temps [du roi Ny-ma]ât-Rê (Amenemhat II). C'est le scribe Ahmose qui a recopié cet ouvrage.

---

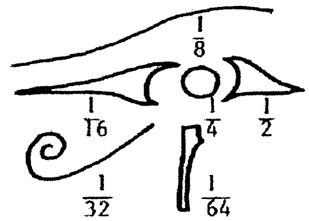
[15] Arnold Buffum Chace, 1979, The Rhind mathematical Papyrus, p. 84
[16] Sylvia Couchoud, 1993, Mathématiques égyptiennes, Éditions Le Léopard d'Or, p.I

Appendice III : Symboles égyptiens pour les nombres de 1 à 9 000



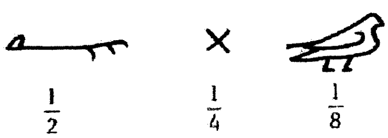
(tiré de Colette, 1973, p. 34)

Appendice IV : Les fractions égyptiennes



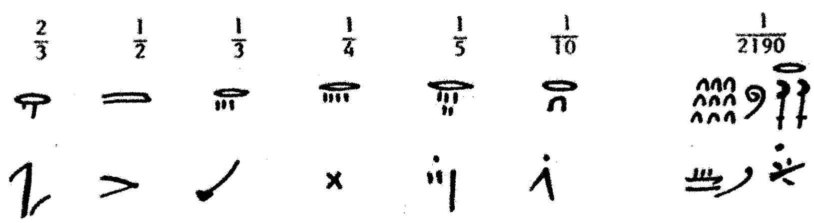
Le hekat est l'unité de capacité des céréales. 1 hekat équivaut à 4,5 litres.

Hiéroglyphes des fractions du hekat (tiré de Keller, p. 4)



Le setat correspond à dix mille coudées carrées.
1 coudée = 0,523 m

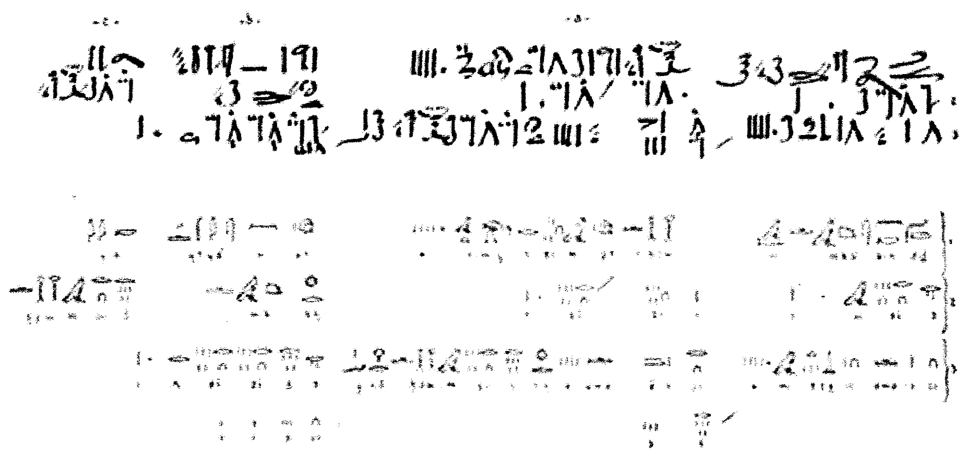
Hiéroglyphes des fractions du setat (tiré de Keller, p. 5)



Fractions unitaires les plus utilisées dans le Papyrus Rhind (tiré de Keller, p. 6)

Appendice V : Problème 21 du Papyrus Rhind

PROBLEM 21 Plate 44



Photograph xi, *Register* 1 *B. M. Facsimile, Plate* viii

Photograph XI, Register 1 B.M. Facsimile, Plate VIII
(tiré de Chace, 1979, p. 95)