Université de Montréal

Analyse des représentations mentales utilisées en résolution de problèmes arithmétiques chez des élèves du troisième cycle primaire

par

Lise-Anne St.Vincent

Département de didactique

Faculté des sciences de l'éducation

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès arts (M.A.)
en didactique des mathématiques

Décembre 2001

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

ce mémoire intitulé :

Analyse des représentations mentales utilisées en résolution de problèmes arithmétiques chez des élèves du troisième cycle primaire

présenté par :

Lise-Anne St.Vincent

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Président rapporteur ______________________________ Gisèle Lemoyne

Membre du jury ______________________________ Françoise Armand

Directrice de recherche ______________________________ Louise Poirier

À David-Frédérick,

Élaine, Ian

et Pénélope,

mes anges

RÉSUMÉ EN FRANÇAIS ET MOTS CLÉS

Cette étude porte sur la construction de la représentation mentale d'un problème en résolution de problème mathématique à l'étape de compréhension d'un énoncé écrit. En considérant différentes recherches empiriques, nous avons proposé un schéma illustrant la construction de la représentation mentale du problème. À l'aide d'expérimentations, nous avons ensuite mis en évidence les manifestations de cette construction chez des sujets du troisième cycle du primaire. Notre choix méthodologique s'inspire de la thèse de Poirier (1992) qui utilise des problèmes arithmétiques complexes, problèmes de reconstruction de transformations possédant des caractéristiques favorables à la construction d'une représentation mentale du problème.

Cette étude nous a permis de constater que moins l'élève maîtrise la résolution de ce type de problèmes, moins il fait appel à la représentation mentale d'un point de repère initial (point de référence) pour amorcer le processus de résolution. Plus encore, l'élève utilise une représentation mentale de plus en plus élaborée et adéquate au fur et à mesure qu'il augmente son niveau de compétence en résolution de problèmes arithmétiques complexes. Cependant, au moment où l'élève maîtrise très bien la structure, le contexte et le concept des entiers relatifs (présentés à l'intérieur des problèmes), on constate le phénomène inverse, soit une nette diminution des manifestations de l'utilisation d'une représentation mentale du problème.

Mots clés : compréhension – construction – mathématique – schéma

ENGLISH RESUME AND KEY WORDS

This research studies the construction of mental representation of a problem in solving mathematic problems, particularly during the comprehension process of a written problem. In relation with certain aspects of various empiric studies, we propose a schematization that shows the construction of the mental representation of a problem. In the experimentation with the third grade grammar school students, we focused on the manifestations of this construction. Our methodology is inspired by Poirier's (1992) thesis who presented complex arithmetic problems to her subjects, problems that required transformations reconstruction particularly convenient to the construction of a mental representation.

Through this research, we noticed that the less the student skillfully resolves this type of problems, the less he uses a reference point to initiate the resolving process. Moreover, the student uses a more elaborate and efficient mental representation while he upgrades his level of competency in resolving complex arithmetic problems. When the student masters the structure skillfully, the context and the concept of relative integers (presented in the problems), we noticed the opposite situation, that in fact he uses less the mental representation of the problem.

Key words : comprehension – construction – mathematics - schematization

SOMMAIRE

Dans les nouveaux programmes de formation de l'école québécoise, la résolution de problèmes est présentée comme une compétence transversale et disciplinaire. Il apparaît dès lors essentiel de développer chez les élèves des habiletés dans ce domaine.

La résolution de problèmes mathématiques est un processus qui comprend diverses étapes. La première étape consiste dans le décodage des éléments de la situation-problème et sa modélisation. Cette étape concerne la compréhension de la situation-problème et s'avère déterminante pour poursuivre le processus de résolution. Considérant l'importance de cette première étape, il devient important de faire une analyse plus approfondie des connaissances apportées par certaines recherches empiriques sur ce sujet.

À travers les études présentées, nous avons pu dégager l'importance de la représentation mentale du problème lors de l'étape de compréhension d'une situation-problème mathématique et identifier les types de représentations mentales alors utilisés. Un schéma illustrant la construction de la représentation mentale à l'étape de compréhension d'un énoncé écrit en résolution de problèmes est proposé. Notre étude s'est intéressée à la construction de la représentation mentale d'un problème mathématique en nous appuyant sur ce schéma-synthèse. Une question se pose alors : « comment mettre en évidence cette représentation mentale d'un problème, représentation qui demeure très souvent implicite?

Le choix méthodologique est inspiré de la recherche de Poirier (1992). Les types de problèmes arithmétiques complexes, problèmes de reconstruction de transformations,

utilisés pour l'expérimentation, possédaient des caractéristiques favorables à la construction d'une représentation mentale. Par exemple, le problème suivant :

> Annie joue aux billes. À la première partie, elle gagne 13 billes. Elle joue encore une fois; on ne te dit pas ce qui s'est passé. Si on sait qu'après ces deux parties, elle a gagné 8 billes, a-t-elle gagné ou perdu à la deuxième partie et combien? (Poirier, 1992, p.11)

Dans ce type de problèmes, on peut noter quatre grandes caractéristiques : une structure plus complexe de l'énoncé écrit, une absence d'état initial (situation de départ inconnue), des opération effectuées dans des contextes inhabituels (sur des collections discrètes ou sur des positions) et l'utilisation de nombres entiers relatifs exigeant du sujet une interprétation qui dépasse le cadre habituel présenté avec les nombres naturels. Poirier (1992) distinguait trois grands modèles de résolution de problèmes : un modèle linéaire (niveau1), un modèle de comparaison d'états (niveau 2) et un modèle de comparaison d'entiers relatifs (niveau3). Dans son étude, Poirier (1992) explique que ces trois modèles représentent le niveau de maîtrise de la résolution des problèmes de reconstruction de transformations et que l'élève emprunte un modèle de niveau plus élevé au fur et à mesure qu'il augmente sa compétence. Ce mouvement évolutif dans le processus de résolution laissait supposer le même phénomène pour la représentation mentale du problème à l'étape de la compréhension du problème. Dans l'analyse des résultats, parmi les trois niveaux de résolution, nous avons retrouvé des manifestations témoignant de l'acquisition graduelle d'habiletés de construction de la représentation mentale d'un problème.

De cette analyse, il ressort que moins l'élève maîtrise la résolution de ce type de problèmes de reconstruction de transformations, moins il fait appel à la représentation mentale d'un point de repère initial (point de référence) pour amorcer un processus de résolution. Les problèmes présentés aux sujets lors de l'expérimentation étaient caractérisés, entre autres, par l'absence d'état initial, c'est-à-dire sans connaître la situation de départ avant que les transformations ne soient effectuées. Cette absence d'état initial à l'intérieur des problèmes impliquait l'absence d'un point de départ pour amorcer un processus de résolution et semblait provoquer une amorce dans le processus de construction de la représentation mentale du problème. L'utilisation d'un point de référence a semblé déterminante dans le degré de maîtrise de la résolution de problèmes faisant appel à la reconstruction de transformations.

Cette étude nous a également permis de constater que l'élève utilisait une représentation mentale du problème de plus en plus élaborée et adéquate au fur et à mesure qu'il augmentait son niveau de compétence en résolution de problèmes arithmétiques complexes. Cependant, lorsque l'élève maîtrisait très bien la structure, le contexte et le concept des entiers relatifs (présentés à l'intérieur des problèmes), nous avons pu constater le phénomène inverse, soit une nette diminution des manifestations de l'utilisation d'une représentation mentale du problème.

TABLE DES MATIÈRES

Liste des tableaux

Liste des annexes

Remerciements

L'auteure désire remercier Madame Louise Poirier, professeure agrégée au département de didactique de l'Université de Montréal pour son appui et son discernement tout au long de ce mémoire.

L'auteure tient également à exprimer sa profonde gratitude envers Madame Nicole Durand-Lutzy pour ses nombreuses lectures attentives et son soutien inconditionnel jusqu'à la toute fin de ce projet. Cette dernière partie s'adresse aussi à Monsieur David-Frédérick Lutzy qui a toujours cru à ce projet et qui a été un accompagnateur extraordinaire.

De plus, l'auteure tient à remercier Mesdames Carol et Danielle St.Vincent pour leur aide à plusieurs niveaux ainsi qu'aux autres membres de la famille et Monsieur Jacques César pour leur intérêt et leurs encouragements. Finalement, l'auteure désire exprimer toute son appréciation aux enseignants et aux élèves de l'école Louis-Collin de la Commission scolaire de Montréal pour leur participation à cette étude.

CHAPITRE I

CONTEXTE PRATIQUE

CHAPITRE I

CONTEXTE PRATIQUE

Dans mon travail d'enseignement et de rééducation, j'ai été témoin à plusieurs reprises des difficultés d'apprentissage en mathématiques qu'éprouvent certains élèves. Malgré les efforts déployés de part et d'autre, ces élèves piétinent parfois longtemps à un niveau ou l'autre de leur apprentissage. En mathématiques, la résolution de problèmes est demeurée, d'après mes observations, une source principale de difficultés. La résolution de problèmes est généralement amenée à l'élève sous forme de situation-problème. Une situation-problème est un énoncé caractérisé par un but, souvent exprimé sous forme de question. Comme type de difficulté, il est fréquent, par exemple, de rencontrer des élèves qui cherchent les opérations à effectuer dans une situation-problème avec l'intention d'utiliser tous les nombres présents sans comprendre le sens du problème ou en ignorant les unités avec lesquelles ils travaillent. En accompagnant ces jeunes, je me suis interrogée sur la pertinence de développer chez eux des habiletés dans le domaine de la résolution de problèmes.

Actuellement, nous vivons une réforme majeure des orientations dans les programmes de formation de l'école québécoise. Il s'avère nécessaire d'identifier les orientations spécifiques du programme de mathématiques afin d'évaluer la pertinence, pour l'apprenant, de développer les dites habiletés.

1.1. Le programme du M.É.Q.

Le nouveau programme de formation de l'école québécoise a entre autres pour mission de faire acquérir à l'apprenant des compétences, des connaissances et des habiletés au niveau affectif, social, cognitif et moteur. Il met l'accent sur la réussite scolaire de tous les élèves. Au niveau primaire, on veut permettre à l 'enfant de faire des apprentissages de base qui contribueront au développement graduel de son autonomie intellectuelle et sociale. L'école veut permettre à chaque élève d'atteindre le plus haut degré de réussite.

> L'apprentissage est défini dans le Programme de formation comme un processus influencé à la fois par le cognitif et l'affectif, qui permet la modification des acquis antérieurs de l'élève et une réorganisation de sa structure cognitive à partir de ses nouveaux acquis. Inscrite dans les perspectives cognitiviste et socioconstructiviste, cette conception veut que tout apprentissage soit essentiellement une construction personnelle fortement marquée par l'environnement culturel et les interactions sociales. (M.É.Q. 2000, p.5)

En d'autres mots, on veut permettre à l'élève de construire sa représentation du monde, en étant, dans cette démarche, le premier agent de ses apprentissages. L'enseignant a un de rôle de médiateur, d'accompagnateur et de guide dans le cheminement de l'élève.

En ce qui concerne sa structure, le nouveau programme s'articule sur deux plans : à l'intérieur de chaque discipline (compétences disciplinaires) et entre les disciplines (compétences transversales). La résolution de problèmes est d'abord présentée comme une compétence transversale et par la suite comme une compétence à l'intérieur de la discipline des mathématiques.

1.1.1. La résolution de problèmes : une compétence transversale

Dans le programme de formation, les compétences transversales sont définies comme la mobilisation des capacités, des habiletés et des connaissances de l'apprenant pour agir efficacement dans des situations variées et complexes : elles correspondent à un « savoir-agir ». Les compétences transversales proposées sont regroupées en quatre catégories qui sont d'ordre intellectuel, méthodologique, personnel et social et de la communication.

Les compétences d'ordre méthodologique concernent la pratique de méthodes de travail efficaces et l'exploitation des technologies de l'information et de la communication comme outils de travail. L'élève cherche les meilleures conditions pour exécuter un travail, choisit les stratégies appropriées et les met en œuvre dans toutes les disciplines.

Les compétences d'ordre personnel et social ont trait à la construction de l'individualité et à l'affirmation de soi. Elles prédisposent à un «savoir-vivre » ensemble dans l'environnement social.

Les compétences reliées au domaine de la communication concernent le partage de l'information. L'élève apprend à échanger dans un langage précis et approprié.

De leur côté, les compétences d'ordre intellectuel permettent entre autres à l'élève de prendre contact avec la réalité, de se l'approprier, de l'interpréter et de la comprendre. Elles favorisent l'exploitation de l'information, la résolution de problèmes, l'exercice de la pensée critique et la mise en œuvre de la pensée créatrice. Exploiter l'information signifie rechercher, organiser, utiliser l'information puis évaluer sa démarche. Exercer sa pensée critique signifie analyser une situation, construire son opinion, porter un jugement puis évaluer sa démarche. Mettre en œuvre sa pensée créatrice signifie explorer différentes possibilités de réalisation, élaborer un projet de création ou d'innovation, représenter ses idées sous diverses formes puis évaluer le fruit de sa pensée créatrice.

Enfin, dans le programme de formation, résoudre des problèmes signifie développer sa capacité d'analyser les composantes de la situation-problème, de cerner le contexte de la situation-problème, d'identifier les éléments qui la composent et d'établir des liens entre eux.

La résolution de problèmes occupe une place fondamentale dans le programme de formation et ce, à travers toutes les disciplines, du primaire jusqu'à la fin du secondaire.

1.1.2. La résolution de problèmes dans le programme de mathématique

À l'intérieur du programme de mathématique, la résolution de problèmes occupe une place centrale. Son importance augmente d'un cycle à l'autre comparativement aux trois autres compétences disciplinaires: déployer un raisonnement mathématique à l'aide d'un réseau de concepts et de processus; communiquer à l'aide du langage mathématique; apprécier la contribution de la mathématique aux différentes sphères de l'activité humaine.[1]

Le développement du langage mathématique permet à l'élève de comprendre et de se représenter le monde dans lequel il vit de façon méthodique. Cela exige l'appropriation des concepts de lois et de règles. Il ressort de l'observation du schéma extrait du programme de formation du M.É.Q. (voir annexe I) que la résolution de problèmes est

---

[1] Au moment où ces lignes sont écrites, nous apprenons que cette quatrième compétence est supprimée dans le programme de mathématiques.

au cœur du développement de la discipline. Elle sert d'agent intégrateur aux trois autres compétences en favorisant la contextualisation. Par la résolution de problèmes, l'élève s'engage dans un processus qui l'amène à développer les trois autres compétences de la mathématique.

Que signifie résoudre un problème? Dans le programme mathématique, la résolution d'une situation-problème est un processus qui comprend quatre étapes : décoder les éléments qui composent cette situation et la modéliser; appliquer différentes stratégies en vue d'élaborer une solution; valider la solution; partager l'information relative à la solution.

À la première étape, le décodage des éléments de la situation-problème et sa modélisation, l'élève tente de se représenter mentalement l'énoncé du problème en se référant à des modèles de situations-problèmes résolues antérieurement. Lors de la deuxième étape, l'élève applique différentes stratégies en vue d'élaborer une solution. Il tente de résoudre le problème en progressant à travers des opérations choisies. À la troisième étape, l'élève valide la solution, estime si la réponse trouvée est plausible. Finalement, lors de la dernière étape, l'élève partage l'information relative à la solution et la communique.

La première étape de décodage des éléments de la situation-problème et sa modélisation retient particulièrement notre attention. Suite aux observations faites auprès d'élèves, il ressort que les difficultés éprouvées dans la résolution de problèmes relèvent principalement de l'absence ou d'une représentation mentale inadéquate de la situation-problème. La modélisation (ou la saisie) du problème s'effectue au moment où l'élève, à la lecture, prend contact avec la situation-problème et tente de se la représenter mentalement. Il importe que cette saisie soit réussie pour poursuivre le processus de résolution parce que sans une compréhension adéquate et suffisante d'une situation-problème, l'élève ne peut arriver à formuler des hypothèses, à mobiliser et à utiliser efficacement des ressources pour l'élaboration d'une solution.

Les documents du Ministère de l'Éducation décrivent ainsi ce qui est attendu de l'élève à la fin de chaque cycle, au niveau du décodage et de la modélisation en résolution de problèmes :

> À la fin du premier cycle, l'élève résout une situation-problème comportant des données complètes ou superflues. Il dégage les données utiles en ayant recours à différents modes de représentation tels des objets, des dessins, des symboles ou des mots. Au deuxième cycle, l'élève accroît son aptitude à décoder les éléments de la situation-problème en dégageant l'information implicite. En vue de déterminer la tâche à exécuter et de dégager les données utiles et l'information implicite, il utilise divers modes de représentation, tels des diagrammes, des tableaux, des symboles ou des mots. Au troisième cycle, l'élève approfondit encore son aptitude à décoder les éléments de la situation-problème en reconnaissant spécialement les données manquantes. Il accroît son habileté à représenter la situation sous diverses formes. L'élève manifeste de plus en plus son autonomie dans la résolution. Il se sert de modes de représentation très variés tels des symboles, des mots, des schémas, des arbres ou des grilles d'analyse et associe la structure de l'énoncé à celle d'autres énoncés semblables afin de déterminer la tâche à exécuter et dégager les données implicites ou manquantes.(M.É.Q., 2000, p.214)

En développant ces capacités à tous les cycles, les élèves sont capables, au troisième cycle, de décoder les éléments de la situation-problème c'est-à-dire de déterminer le sens des termes et des symboles mathématiques, de distinguer les données pertinentes des données non pertinentes, de dégager l'information implicite, de reconnaître une situation-problème à données manquantes et de dégager la tâche à réaliser. Ils doivent aussi identifier la structure émergeant de différents types d'énoncés. De plus, l'élève doit modéliser la situation-problème c'est-à-dire associer la situation à des situations semblables résolues antérieurement, reconnaître les similitudes entre diverses situations-problèmes, représenter la situation à l'aide d'objets, de dessins, d'images, de diagrammes, de symboles, de mots, de mimes, de simulations, de tableaux, de schémas organisateurs, d'arbres, etc.

En scrutant les nouveaux programmes de l'école québécoise, il apparaît essentiel de développer chez les élèves des habiletés dans le domaine de la résolution de problèmes.

L'étape de la compréhension de la situation-problème est déterminante pour poursuivre le processus de résolution. Étant donné l'importance de cette première étape en résolution de problèmes mathématiques, il est fondamental de faire une analyse plus approfondie des connaissances que certaines recherches empiriques apportent au niveau du décodage des éléments de la situation-problème et de sa modélisation. Le chapitre suivant présente cette analyse.

CHAPITRE II

CONTEXTE THÉORIQUE ET OBJECTIFS DE RECHERCHE

CHAPITRE II

CONTEXTE THÉORIQUE ET OBJECTIFS DE RECHERCHE

Afin de mieux cerner les objectifs de la recherche, ce chapitre présente d'abord une analyse de certaines recherches qui approfondissent nos connaissances relativement à l'étape de la compréhension dans la résolution de problèmes mathématiques. Suivra une analyse de certaines études concernant un mécanisme qui permet le décodage des éléments qui composent la situation-problème et sa modélisation : la représentation mentale.

2.1. L'étape de compréhension dans l'activité de résolution de problèmes

Sous un angle didactique, Charnay et Mante (1995), chercheurs en didactique des mathématiques, présentent la résolution de problèmes en mathématiques comme un processus composé de trois étapes en constante interaction : la lecture de l'énoncé et la construction de la représentation du problème; l'élaboration, l'instanciation (contextualiser les données) et l'exécution d'une procédure; la communication du résultat.

À la lecture de l'énoncé, première étape du processus, lors du décodage des éléments qui composent la situation et de sa modélisation, l'élève construit une représentation du problème comme le disent Charnay et Mante (1995):

> Lire c'est comprendre... comprendre c'est construire ce qu'on appelle une représentation de la situation décrite par le texte. Pour le cas d'énoncé de problème, cette représentation est constituée de toutes les informations que nous avons retenues en lisant ... qui nous ont permis de lui donner du sens. (p.65)

Cette définition met en évidence deux dimensions importantes impliquées dans la compréhension d'une situation-problème: construire et représenter. Ces concepts se retrouvent dans plusieurs études s'intéressant à la résolution de problèmes mathématiques. La section suivante fait référence à certaines de ces études.

2.1.1. Recherches expérimentales sur l'étape de compréhension en résolution de problèmes

Depuis quelques décennies, les difficultés en résolution de problèmes mathématiques sont associées à l'étape de compréhension. Zimmerman (1989) présente une étude faite aux États-Unis en 1979 par le *National Assessment of Education* qui démontre que la source première des difficultés en résolution de problèmes vient de l'incapacité qu'a l'élève de choisir l'opération adéquate. Cette étude, basée sur des épreuves administrées à 70 000 jeunes de 9 à 13 ans, démontre que même si les calculs et les opérations étaient adéquates, les élèves n'avaient pas appris à appliquer ces techniques de calcul à la résolution de problème. L'auteure arrive à la conclusion que pour comprendre un problème, l'enfant doit être en mesure de faire des inférences sur des informations encodées antérieurement, de trouver et de reconnaître des items analogues archivés dans sa mémoire et de suivre une argumentation logique pour comprendre et cerner ce que le problème demande.

Par ailleurs, Erlich (1990), chercheur en psychologie éducative expérimentale, a effectué une recherche en France d'une durée de cinq ans avec des élèves de CE2, CM2 et 6^{e} (l'équivalent au Québec de la troisième et de la cinquième année primaire ainsi que de la première année du secondaire) sur les résolutions de problèmes d'arithmétique simple.

Les conclusions de cette étude montrent clairement que les difficultés majeures rencontrées par les élèves ne sont pas d'ordre logico-mathématique mais concernent la lecture et la compréhension de l'énoncé, la sélection et l'organisation des informations pertinentes, la traduction de ces informations en termes mathématiques. En bref, les difficultés sont d'ordre sémantique. Erlich explique que la représentation sémantique se construit à chaque instant : la représentation sémantique est un groupe organisé de quelques concepts actifs cognitivement, la signification d'un événement réel ou imaginaire ou d'une information transmise par un discours. Pour comprendre le problème, l'élève doit effectuer des recherches et des mises en relation, parfois même faire des constructions inférentielles complexes, opérer des sélections, des réorganisations et des reformulations à l'intérieur des informations fournies dans l'énoncé. L'élève doit donc être en mesure de lire suffisamment bien. En résolution de problème mathématique, une lecture exhaustive et analytique s'impose pour ne pas négliger des informations indispensables. Erlich (1990) affirme que la lecture analytique s'apprend et se développe. Il présente même un programme systématisant cet apprentissage. En résolution de problèmes, il soutient que certaines conditions doivent être respectées à l'intérieur même du texte proposé à l'élève: le lexique et la syntaxe utilisés dans l'énoncé doivent être suffisamment familiers pour l'élève.

À travers une autre approche, dans son étude sur l'évolution des niveaux de compétences dans des problèmes additifs, Lamour (1999) explique que la structure des problèmes est un facteur de difficulté qui affecte les performances de résolution. La structure du problème renvoie aux relations sémantiques qui existent entre les éléments de l'énoncé. Il soulève également que la majorité des auteurs s'accordent pour distinguer différentes catégories de problèmes selon le degré de complexité de la structure mise en jeu dans les énoncés de problèmes. Lamour (1999) présente également une modélisation proposée par Okamoto (1996) de l'activité de résolution selon les compétences des enfants, soit un rendement faible, moyen ou fort. Dans cette modélisation, Okamoto (1996) tient compte de la dimension de la compréhension des aspects linguistiques de l'énoncé qui se développe avec l'âge des enfants. Selon Okamoto (1996), l'activation des connaissances conceptuelles est déterminée par la compréhension de l'énoncé par le sujet.

Lamour (1999) s'intéresse également au rôle de la formulation des problèmes. Ainsi, la longueur de l'énoncé, la place de la question, la congruence des éléments de l'énoncé avec l'ordre des événements ou des opérations en jeu de même que les opérateurs sémantiques sont des facteurs qui jouent un rôle dans la plus ou moins grande facilité qu'éprouvent les enfants à résoudre un problème additif. La longueur de l'énoncé réfère à la suffisance des explications tout en évitant de perdre le lecteur dans une multitude de détails non pertinents à la résolution. La place de la question renvoie le lecteur au but : si la question est à la fin, le lecteur peut la repérer plus facilement que si elle est placée au début de l'énoncé. La congruence des éléments de l'énoncé avec l'ordre des événements ou des opérations en jeu réfère à l'action à poser pour résoudre le problème par rapport à la présentation du déroulement de la situation dans l'énoncé. Par exemple, un problème faisant intervenir un verbe de perte est mieux résolu lorsqu'il s'agit de trouver l'ensemble de départ. Les opérateurs sémantiques impliquent la présence d'une unité comme « de plus que » qui permet à l'enfant de déterminer le type d'action à poser.

Enfin, dans son approche théorique, Lamour (1999) ajoute que, bien que l'on puisse regrouper certains problèmes selon les transformations mises en jeu, un autre facteur est également déterminant : la nature de l'inconnue dans la situation-problème : « En effet, selon que l'on doit rechercher l'état final, la transformation ou l'état initial, on observe des performances de résolution très différentes. »(p.41)

Quant à Julo (1995), il s'est intéressé à la manière dont les sujets parviennent à comprendre la situation décrite dans l'énoncé. Par exemple : comment les sujets appréhendent-ils les énoncés de problèmes dans lesquels ils ne peuvent percevoir la structure immédiatement? Quels sont les mécanismes qui permettent de transformer un texte particulier en éléments mathématiques? Julo (1995) propose la notion de schéma pour évoquer la construction de la représentation de la situation. Le schéma est un processus actif qui représente l'articulation entre la prise d'informations dans l'énoncé et l'activation de connaissances par le sujet. Richard (1990) explique que les schémas seraient une façon de représenter l'organisation des connaissances archivées en mémoire et une façon d'exprimer comment ces connaissances sont utilisées pour comprendre et faire des inférences face à une situation donnée. Julo (1995) soutient que le processus de schématisation est au cœur de l'activité de représentation, qu'il est le noyau central de notre compréhension du problème et que c'est à partir de ce processus que la modélisation se développe. On sait peu de choses sur la forme exacte que pourraient avoir ces schémas de problèmes et la manière dont ils pourraient être organisés en mémoire. Les schémas se forment à partir des problèmes auxquels nous sommes confrontés, des représentations que nous nous en faisons pour les résoudre et des analogies que nous percevons entre eux. Les schémas peuvent correspondre à des problèmes typiques. Du point de vue didactique, Julo (1995) affirme :

> La principale certitude sur laquelle on peut s'appuyer est le fait que la qualité des schémas des problèmes dont nous disposons à un moment donné est liée à la qualité des représentations que nous avons été amenés à construire auparavant. Si ce sont les schémas qui déterminent, pour une part importante, la représentation que nous faisons d'un problème donné, c'est certainement, en retour, la nature de cette nouvelle représentation particularisée qui va contribuer le plus à définir la forme des schémas dont nous disposerons à l'issue de ce problème. (p.108)

Kintsh (1988) a également proposé que le sujet a besoin de schémas qui lui permettent d'élaborer une représentation de la situation mais affirme qu'il a aussi besoin d'instancier une autre forme de schéma capable de mettre en œuvre des procédures conduisant à la solution : des schémas de compréhension.

Lamour (1999) reprend cette notion de schéma comme mode d'organisation et d'activation des connaissances et, dans son étude, détermine de manière plus précise, la nature des schémas susceptibles d'être activés en résolution de problèmes additifs.

L'étude de Lamour (1999) confirme qu'il existe deux types de schémas permettant à l'enfant de comprendre et de résoudre un énoncé de problème : des schémas de solution et des schémas de compréhension. Les schémas de compréhension constituent la base sur laquelle l'enfant va pouvoir déclencher le schéma de solution, lequel contient les procédures de résolution et les règles d'actions régissant leur déroulement.

Lamour (1999) conclue que, chez un individu, le développement des schémas de compréhension spécifiques aux problèmes additifs a peut-être un rôle à jouer dans la construction des futurs schémas susceptibles d'être mis en œuvre dans d'autres champs de résolution :

> Nous pouvons penser que le développement des schémas de compréhension contribue à la formation de schémas plus généraux de type : reconnaissance de structure sous-jacente, reconnaissance des actions présentes dans l'énoncé et reconnaissance du but à atteindre.(p.208)

Poirier (1992) s'est également intéressée à l'étude des modèles implicites mis en œuvre par les enfants lors de la résolution de problèmes arithmétiques complexes (problèmes de combinaisons de transformations), ce que Julo (1995) appelle les schémas. Cette recherche met en évidence trois grands modèles de résolution utilisés par les enfants selon le niveau de compétence de résolution caractérisé par un rendement jugé faible, moyen et fort. Dans cette étude, les problèmes additifs proposés aux sujets mettent en jeu une séquence de changements impliquant une reconstruction de l'un d'entre eux. Ces problèmes présentent deux caractéristiques : d'une part, leur structure sous-jacente exige du sujet une reconstruction, une telle structure pouvant être symbolisée par a+?=b, où a et b étaient deux nombres connus; d'autre part, la nature des données proposées (a et b) est associée à des changements plutôt qu'à des états exigeant ainsi du sujet une interprétation qui dépasse le cadre habituel des nombres naturels. L'analyse développementale réalisée dans cette recherche fait ressortir l'évolution des trois grands modèles de résolution d'un niveau scolaire à l'autre. Cette recherche permet aussi de mettre en évidence deux sauts conceptuels importants dans le passage d'un modèle à l'autre : le premier est lié à la compréhension de la structure sous-jacente des problèmes, allant d'une non-prise en compte de la reconstruction à une prise en compte de celle-ci : le deuxième est lié à la conception même du nombre par l'enfant lui permettant de se détacher des états et d'opérer en termes de changements. Dans son cadre conceptuel, Poirier (1992) présente la notion de modèles mentaux implicites qui règlent les actions des enfants dans la résolution de ces types de problèmes de transformations. Son étude vise principalement à rendre explicites les modèles mentaux concernant la résolution et non les modèles mentaux concernant la compréhension du problème ou, comme le nomme Lamour (1999), « les schémas de compréhension ». Une étude s'intéressant plus spécifiquement aux schémas de compréhension avec ce type d'approche serait un outil pertinent pour mieux cerner les mécanismes qui permettent le décodage des éléments qui composent la situation-problème et la modélisation.

Erlich et Tardieu (1993) se sont intéressés spécifiquement au rôle des modèles mentaux dans la compréhension des textes. Ils définissent ainsi le modèle mental:

> Un modèle mental est une représentation mentale de la réalité à laquelle réfère le texte, plus riche que la représentation linguistique du texte , et qui résulte d'une activité constructive mettant en jeu les connaissances générales et spécialisées du sujet. (Erlich et Tardieu, 1993, p.71)

Les différentes études présentées réfèrent à la représentation mentale comme à un mécanisme permettant le décodage d'éléments et la modélisation d'une situation-problème. Comment se construit une représentation mentale?

Julo (1995) affirme que les avancées récentes de la psychologie cognitive conduisent à s'intéresser à la résolution de problèmes à partir du concept de la représentation du problème, en considérant des résultats de plus en plus précis dans les recherches concernant les processus de compréhension impliqués dans l'activité de résolution de problèmes.

Certains concepts avancés en psychologie cognitive amènent des éléments de réponse dans un cadre général de résolution de problème. Dans la recension des écrits concernant la représentation mentale dans le développement cognitif, on peut cependant constater que la majorité des études ont été effectuées avec des sujets adultes, en dehors du contexte scolaire (Bideaud et Courbois, 1998). La prochaine section reprend certaines de ces études pour dégager des concepts pouvant s'appliquer également dans une activité de compréhension en regard de la résolution de problème mathématique.

2.1.2. Représentation mentale en résolution de problèmes

Certaines études portant sur la résolution de problèmes divers font ressortir des principes généraux quant aux différents processus mis en jeu lors d'une représentation mentale. Ainsi, Kaufmann (1990) suggère que l'imagerie mentale est un système de soutien qui donne accès à des processus cognitifs simples, de type « perceptuel » tels des modèles mentaux favorisant des comparaisons et des anticipations avec des informations perçues antérieurement. Ce type de processus simple pourrait être sollicité pour résoudre un problème peu structuré c'est-à-dire dans lequel les informations sont présentées de façon non séquentielle. Dans un problème structuré, des processus «computationnels » sont utilisés : il s'agit là de raisonnements se déroulant de manière algorithmique. Dans un problème peu structuré, ces processus (ou modes) computationnels seraient difficiles, voire impossibles à utiliser, parce que les informations doivent être analysées et restructurées attentivement. Kaufmann fait une distinction importante quant aux types de représentations mentales utilisées par l'individu qui résout un problème: les représentations « propositionnelles » et « analogues ». On parle de représentation propositionnelle lorsque l'individu doit exécuter une tâche avec des procédures définies (connues, programmées). Il utilisera alors un mode computationnel. Les représentations analogues interviennent lorsque l'individu doit exécuter une tâche nouvelle avec des procédures non-structurées et inconnues. Il utilisera à ce moment-là un mode perceptuel . Les représentations analogues sont plus difficiles à manipuler parce qu'elles renferment de nombreuses informations dont certaines sont souvent non pertinentes dans le cadre d'une tâche. Cependant, elles sont importantes lorsque l'individu possède peu ou pas d'expérience pour la tâche à accomplir. Moins le problème à résoudre est structuré, plus l'utilité de l'imagerie augmente, particulièrement à un niveau avancé d'abstraction.

De son côté, McNamara (1994) aborde le concept de représentation mentale en établissant deux catégories : les représentations analogues et les représentations symboliques. Les représentations analogues sont reliées par une intégration sensorielle à une expérience antérieure. Les représentations symboliques sont abstraites et représentent des inférents logiques. La représentation symbolique est aussi appelée propositionnelle. Une « proposition » est la plus petite unité de connaissance qui peut être significative (pas nécessairement un mot mais également une idée). Les représentations propositionnelles se retrouvent dans ce qu'on nomme des réseaux. Il existe plusieurs schèmes qui permettent de retirer de l'information mais la plupart sont basés sur le concept «activation d'associations». Un réseau est composé de plusieurs relais d'associations. Dans un réseau, chaque relais est connecté à une autre représentation propositionnelle et le débit d'associations est extrêmement rapide (1 à 2 millisecondes par relais). Chaque relais est activé lorsque l'attention est centrée sur lui. Une fois que l'attention passe à un autre relais, son activation s'estompe rapidement. Plus le réseau est utilisé souvent, plus les informations sont retirées rapidement.

Selon Kaufmann (1990) et McNamara (1994), l'individu exécute spontanément des procédures dans un mode de représentation propositionnelle à l'aide de réseaux en relais si le problème à résoudre se réfère à un contexte familier. Cependant, si le problème à résoudre se réfère à un contexte non familier ou contient des informations non familières, l'individu utilise un mode de représentation analogue pour traduire cette information par une unité adéquate et l'intégrer ensuite dans un relais d'associations et selon un mode de réseau qui opère rapidement.

Par ailleurs, Jonhson-Laird (1993) définit de façon générale le modèle mental comme une représentation interne d'un état de choses du monde extérieur. Selon lui, même dans les modèles mentaux les plus simples, on retrouve une combinaison d'éléments propositionnels et analogiques.

> Les sujets construisent une représentation interne (ou modèle mental) du contenu des prémisses et, sur la base de cette représentation, cherchent à tirer une première conclusion. S'ils n'arrivent pas à trouver cette conclusion, ils arrêtent le processus inférenciel et concluent «on ne peut rien déduire».(Jonhson-Laird, 1993, p.105)

Johnson-Laird (1993) soutient que, pour certains problèmes, les sujets sont capables de dériver des conclusions correctes à partir de n'importe quel type de prémisses (explications fournies pour la résolution du problème), tandis que pour d'autres problèmes ces mêmes sujets ont besoin de leurs connaissances du monde. Si les sujets arrivent à la conclusion « on ne peut rien déduire », ils entrent dans un processus de construction de représentation du problème à l'aide d'éléments propositionnels et analogiques.

Plus spécifiquement dans le domaine mathématique, des études effectuées avec des sujets adultes démontrent que le niveau de réussite de la résolution de problèmes mathématiques semble relié à la capacité d'utiliser la représentation mentale pour construire une procédure (Hagarty et Kozhevicov, 1999). Cette recherche permet d'associer l'utilisation de la représentation en mode propositionnel et la réussite de la résolution tandis que l'utilisation de la représentation en mode analogue y est négativement co-reliée. Dans cette étude, les auteures soutiennent que l'utilisation d'images en mode analogue peut parfois amener à focaliser le raisonnement sur des détails non pertinents qui distraient l'attention de l'individu des éléments principaux dans la représentation originale du problème, comme elle peut jouer un rôle positif. Dans la résolution de problème, les détails concrets d'objets doivent souvent ne pas être considérés et les relations davantage représentées. La représentation mentale en mode propositionnel favorise une meilleure performance en résolution de problèmes mathématiques que la représentation en mode analogue qui est associée à un rendement plus faible parce qu'elle détourne l'attention des relations principales dans l'énoncé du problème. Dans la résolution de problèmes mathématiques, la construction de représentations en mode propositionnel des relations peut être considérée comme étant de haute qualité dans ce sens qu'elle représente l'information essentielle pertinente pour résoudre le problème et omettre les détails superflus. À travers ces études, on constate que différents types de représentations mentales sont utilisés selon la nature du contexte (familier, non familier). Ces deux types de représentations sont utilisés à l'étape de la compréhension d'une situation-problème. La présence de ces deux types de représentations soulève certaines questions : à quel moment chaque type entre t-il en jeu dans le décodage des éléments et la modélisation de la situation-problème? est-il possible de schématiser la construction d'une représentation mentale d'une situation-problème en tenant compte de ces deux types de représentations et d'observer ses manifestations par le biais expérimental? sous quelles conditions s'effectue la construction d'une représentation mentale en résolution de problème mathématique à l'étape de la compréhension d'un énoncé écrit dans une résolution de problème mathématique?

En considérant les points présentés précédemment et en en greffant d'autres, il est possible de proposer une suite d'opérations illustrant la construction de la représentation mentale à l'étape de la compréhension d'un énoncé écrit en résolution de problème. C'est ce que présente la section suivante.

2.1.3. La construction de la représentation mentale du problème

Cette partie propose d'abord un regroupement de certaines notions déjà présentées et d'autres notions prises en compte suivi d'un schéma illustrant la construction de la représentation mentale pour la compréhension d'un énoncé écrit en résolution de problème.

Dans un premier temps, nous reprenons les notions prises directement en compte (certaines déjà présentées à la section précédente) pour l'élaboration du schéma. Dans un deuxième temps, nous présentons le schéma de la construction de la représentation mentale du problème avec la suite des opérations et les divers éléments qui la composent.

Chaque notion retenue est présentée par un énoncé et brièvement expliquée. Chaque énoncé est numéroté et renvoie à une section du schéma décrit en deuxième partie et illustré en annexe 2.

2.1.3.1. Notions prises en compte pour la schématisation

1. La syntaxe et le contexte doivent être relativement familiers et les habiletés en lecture suffisantes pour réaliser une intention.

Dès que l'élève est confronté à la première lecture de l'énoncé, ses habiletés en lecture pourront lui permettre ou non de poursuivre le processus de résolution. Erlich (1990) soutient que l'élève doit être capable de lire suffisamment pour être en mesure de résoudre des problèmes mathématiques écrits. En effet, en résolution de problèmes mathématiques, une lecture exhaustive et analytique s'impose pour ne pas négliger des informations indispensables. Il faut également que le lexique et la syntaxe utilisés dans l'énoncé soient suffisamment familiers pour que l'élève soit capable de traduire ce qu'il lit. La familiarité du lexique implique qu'il puisse associer les mots aux références correspondantes. La familiarité de la syntaxe implique qu'il ait déjà eu un contact avec ce type de structure de phrase.

Lorsqu'il lit l'énoncé, l'élève utilise une série de stratégies pour réaliser une intention. Si le texte est plus difficile qu'il le croyait, il doit réajuster ses choix comme le précise Van Grunderbeeck (1994):

> Le lecteur est donc mentalement très actif : d'une manière visuelle, cognitive et métacognitive. Dans sa démarche de recherche d'un sens afin de réaliser son intention, il devra mobiliser ses connaissances du monde et ses connaissances linguistiques et faire interagir celles-ci avec l'information apportée par le texte. (p.15)

Situation d'exécution de procédures : trouver une solution satisfaisant le but en respectant les contraintes (notions #2,3)

2. Situation d'exécution de procédures

La première section du schéma est appelée « Situation d'exécution de procédures » parce que l'élève ne se trouve pas en activité de compréhension réelle. Richard (1985) explique que le sujet éprouve un problème lorsqu'il ne dispose pas d'une procédure permettant de passer d'un état de départ à un état final. À l'inverse, lorsqu'il a une procédure, il n'est pas en situation de problème, mais en situation d'exécution de procédures.

3. Trouver une solution satisfaisant le but en respectant les contraintes

L'objectif de la première section « Situation d'exécution des procédures » est centré sur la recherche de solutions et l'aboutissement d'un processus qui n'implique pas nécessairement la construction d'une procédure. Richard (1985) explique que la construction d'une représentation mentale est réalisée en vue d'un certain type de traitement c'est-à-dire la recherche d'une solution qui remplit le but tout en respectant les contraintes de la situation : « L'objectif premier est de réussir et l'activité de compréhension est finalisée par cet objectif. » (p.278)

Mise en formats propositionnels : les informations connues ou familières se représentent et se structurent spontanément dans un mode computationnel dans des relais d'association qui opèrent très rapidement. (notions # 4,5,6,7)

4. Les informations connues ou familières se structurent spontanément.

Lors de la recherche de solutions, l'élève structure spontanément toutes les informations qu'il reconnaît, comme le dit Richard (1985) : « Dans un problème difficile on a tendance à adopter une interprétation qui permet d'isoler dans le problème des sous-problèmes qu'on sait résoudre. » (p.280)

5. Le mode computationnel

Kaufmann (1990) introduit le mode computationnel. Il explique que le sujet opère un raisonnement de façon inductive ou déductive avec des inférences structurées : il reconnaît des informations qu'il organise pour former un algorithme de résolution, ce qu'il nomme mode computationnel.

6. Les relais d'associations opèrent très rapidement.

McNamara (1994) explique qu'il existe plusieurs schèmes qui permettent de prendre de l'information mais la plupart sont basés sur le concept «d'activation d'associations» (voir la section précédente dans le même chapitre). La caractéristique remarquable de l'utilisation des relais est la vitesse d'opération. Le sujet réagit rapidement pour choisir ses stratégies d'exécution.

7. Mise en formats propositionnels

Dans la première étape d'exécution de procédures, le sujet associe rapidement à une proposition toutes les informations familières trouvées dans le texte. McNamara (1994) présente la proposition comme la plus petite unité de connaissance qui peut être significative (pas nécessairement un mot, mais aussi une idée). Les représentations propositionnelles se retrouvent souvent dans les réseaux, les relais d'associations (voir la section précédente dans le même chapitre).

8. Exécution de procédures.

Le sujet exécute les stratégies qu'il a jugées adéquates à l'étape précédente de recherche comme l'indique Richard (1985) : « La notion de procédure met l'accent sur les actions qui modifient la situation. »

L'individu choisit à l'aide de ses relais des règles d'actions, des stratégies qui lui semblent adéquates. (notions #9, 10)

9. L'individu choisit à l'aide de ses relais des règles d'actions.

Par la représentation du problème écrit, l'individu calcule des règles d'actions qui engendrent elles-mêmes des actions. Vergnaud (1985) explique que ces actions ont pour but de transformer le réel ou de l'interroger (écart effet-prédiction).

10. L'individu choisit à l'aide de ses relais des stratégies qui lui semblent adéquates.

Lorsque le sujet arrive à cerner des règles d'actions à l'aide de ses relais d'association, il arrête sa recherche mentale comme le soutient Richard (1985) : « Tout se passe comme si l'analyse du problème était interrompue dès qu'elle permet une interprétation sémantiquement acceptable et qui par ailleurs permet l'application de procédures connues. »(p.280)

Construction progressive d'une procédure : réussir l'activité de compréhension du problème écrit. (notions #11, 12)

11. Construction progressive d'une procédure

Lorsque le sujet utilise les opérations de la deuxième section du schéma, il doit élaborer davantage sa représentation mentale des informations et construire peu à peu une procédure de résolution. Le concept de procédure sert à caractériser ses choix et ses actions (Richard, 1985).

12. Réussir l'activité de compréhension du problème écrit.

Afin de comprendre le problème écrit, l'élève doit comprendre le texte c'est-à-dire intégrer l'ensemble de ses éléments dans une représentation cohérente qui assure l'élaboration de la signification (Gallina, 1998).

L'individu retourne analyser le texte et sélectionne à nouveau des informations, des signifiants pour identifier dans les données du problème celles qui sont pertinentes pour l'atteinte du but. (notions #13, 14, 15)

13. L'individu retourne analyser le texte et sélectionne à nouveau des informations.

Van Grunderbeeck (1994) soutient que si une situation de lecture comporte un problème principal à résoudre, il peut surgir en cours de route une série de problèmes intermédiaires, comme un mot inconnu ou une structuration confuse de l'information, que le lecteur devra résoudre avant de continuer : «Cela exige, par conséquent, l'arrêt de la stratégie en cours, l'appel à une autre stratégie pour résoudre le nouveau problème, la vérification de la réponse trouvée, puis le retour au problème principal. » (p.16)

14. Les signifiants.

Le terme « signifiants » réfère au langage naturel, aux gestes, aux dessins, aux schémas, aux tableaux ou encore à l'algèbre (Vergnaud, 1985). Pendant la période du développement de l'apprentissage des mathématiques au niveau primaire, les enfants sont censés faire usage de signifiants spécifiques tels que diagramme d'Euler-Venn, schémas, tableaux, égalités et équations, graphiques et du signifiant général qu'est le langage naturel : les problèmes sont toujours présentés avec l'aide partielle sinon totale du langage naturel (Vergnaud, 1985).

15. Identifier dans les données du problème celles qui sont pertinentes pour l'atteinte du but.

Parmi les informations recueillies, le sujet doit faire le tri et retenir uniquement celles qui peuvent servir à modifier ses actions comme le soutient Richard (1985) : « Pour qu'une connaissance soit utilisable, il faut réaliser ce double ajustement entre le savoir et les données. »(p.296)

16. Caractérisation des connaissances.

Cette partie du processus sert à caractériser les connaissances du sujet sur le problème dans le but de l'amener à associer une information moins familière à une idée. Richard (1985) définit la caractérisation comme la représentation mentale qui met l'accent sur les significations, à savoir : la construction d'objets symboliques, la définition de relations entre ces objets, l'attribution de propriétés à ces objets, la définition de contraintes sur les actions susceptibles de modifier les propriétés des objets et leurs relations.

Activité d'interprétation : élaboration des représentations sémantiques. Les informations non familières ou qui sont présentées dans une structure non familière sont traduites en propositions. (notions # 17,18)

17. Activité d'interprétation : élaboration des représentations sémantiques.

Le concept de représentation sémantique présenté par Erlich (1990) est ici repris. Il explique que dans la résolution des problèmes arithmétiques simples, on doit joindre à la construction de la représentation sémantique un modèle de traduction sémantico-mathématique qui demande à l'élève d'interpréter ce qu'il décode.

18. Les informations non familières ou qui sont présentées dans une structure non familière sont traduites en propositions.

Dans une étude faite sur des modèles de stratégies utilisées lors de la résolution de problèmes, Helstrup (1988) fait la constatation suivante : dans un contexte de pensée et de résolution de problème, les premières réactions qui sont fréquemment de nature verbale peuvent échouer à résoudre le problème. Le défi consiste à trouver une façon plus appropriée d'utiliser des stratégies verbales. C'est ici qu'entrent en jeu les opérations en représentation mentale en mode analogue. En conséquence, si l'individu possède l'étiquetage nécessaire pour gérer l'information dans son format original, les opérations de représentation mentale en mode analogue n'augmenteront pas son taux de réussite. Si l'imagerie transforme l'information originale dans un format que les opérations verbales ne peuvent utiliser, les résultats seraient davantage appauvris. Par contre, si la transformation procure un format qui accélère la recherche d'informations dans un mode d'opérations verbales, le taux de réussite de résolution de problèmes augmenterait certainement.

19. L'espace potentiel de recherche.

La représentation est constituée par l'interprétation que le sujet se fait des données du problème, à savoir la situation initiale, le but à atteindre et les moyens pour y parvenir. L'ensemble des éléments de cette représentation définit un espace potentiel de recherche tel que le mentionne Richard (1985) :

> L'espace de tous les états qu'il est possible d'atteindre, compte tenu de l'interprétation que le sujet a de la situation et des opérateurs utilisables : c'est l'espace de base du problème pour le sujet. La recherche de la solution consiste à trouver dans cet espace un chemin allant de la situation initiale au but, en utilisant un certain nombre d'heuristiques de recherche, par exemple la génération de plans, l'analyse des conditions permettant d'atteindre le but, l'examen des actions possibles à partir de la situation présente et le choix de celle qui minimise la distance au but, l'anticipation des résultats des actions, etc. » (p.290)

20. Traduire une représentation visuelle dans un signifié

Vergnaud (1985) présente le signifié comme le correspondant au rapport entre le réel et la représentation. On retrouve quatre catégories: les invariants opératoires (+, -, ...), les règles d'actions (ce que je dois faire) , les inférences (ce que cet objet, ce symbole représente...) et les prédictions (ce qui devrait se passer).

Le signifié amène le concept de schème qui a un rôle central dans le fonctionnement de la représentation : « Un schème est une totalité dynamique organisée : on peut le définir comme une application (au sens mathématique) qui prend ses entrées (informations) et ses sorties (actions, commandes motrices) dans des espaces multi-dimensionnels. »(Vergnaud, 1985, p.248)

21. Choix d'un format propositionnel.

Un format propositionnel, tel que défini par Kaufmann (1990), traduit une idée, une description explicite. Il peut être facilement et rapidement manipulé. Il a le potentiel pour opérer de façon algorithmique.

22. La représentation propositionnelle.

McNamara (1994) explique la représentation de connaissances simples (images propositionnelles) comme des unités de la représentation complexe de connaissances (concepts, schémas, modèles mentaux).

23. Choix des procédures selon une nouvelle structure relationnelle.

Face à un problème non familier, on ne dispose pas de schéma déjà construit à l'intérieur duquel on peut représenter le problème. Richard (1985) soutient que le sujet doit alors construire une structure de relations qui soit cohérente c'est-à-dire compatible avec les informations de l'énoncé et avec la structure générale d'un problème. Le sujet doit composer avec un état de départ, un but et des opérateurs susceptibles de s'appliquer aux états. Il choisit des nouvelles règles d'actions en tenant compte des nouvelles relations qu'il a pu établir lors de l'introduction des formats propositionnels créés.

Les différentes notions prises en compte présentées, voici maintenant la proposition d'un schéma de construction de la représentation mentale lors de la compréhension d'un énoncé écrit en résolution de problèmes mathématiques.

2.1.3.2. La schématisation de la construction de la représentation mentale

La suite des opérations de cette schématisation se présente dans un ordre précis comme l'illustre le schéma en annexe 2.

Déjà, à la première lecture de l'énoncé, certaines conditions préalables sont requises : la syntaxe et le contexte doivent être relativement familiers et les habiletés en lecture suffisantes pour réaliser une intention.(1)[1]

La première section du schéma, la « Situation d'exécution des procédures »(2), concerne les opérations qui ont pour fonction de trouver une solution au problème en répondant au but et en respectant les contraintes(3). Le point de départ est la première lecture de l'énoncé. Suite à cette prise de contact, les informations connues et familières se représentent, se structurent spontanément(4) et opèrent très rapidement dans un mode computationnel(5) dans des relais d'associations(6): c'est la mise en formats propositionnels(7).

---

[1] Les vingt-trois nombres entre parenthèses dans cette description font référence aux vingt-trois notions présentées dans la section précédente.

La seconde étape de la « Situation d'exécution des procédures »$_{(8)}$ est le choix que fait l'individu des règles d'actions$_{(9)}$ et des stratégies$_{(10)}$ qui lui semblent les plus adéquates. L'individu exécute ensuite les procédures choisies. S'il n'arrive pas à choisir des stratégies, il passe tout de suite à la deuxième catégorie d'opérations telle que présentée dans la deuxième partie du schéma (expliquée plus loin). S'il réussit, il vérifie sa réponse. Si la réponse est satisfaisante, le processus de résolution s'arrête là. Si la réponse s'avère inadéquate, l'individu entre dans la deuxième catégorie d'opérations.

La deuxième section du schéma, la « Construction progressive d'une procédure »$_{(11)}$ concerne les opérations qui ont pour fonction de réussir l'activité de compréhension du problème écrit$_{(12)}$. Dans cette section, l'individu retourne d'abord analyser le texte et sélectionner à nouveau des informations$_{(13)}$, des signifiants$_{(14)}$. Dans les données du problème, il identifie celles qui sont pertinentes pour l'atteinte du but$_{(15)}$ de façon à redéfinir les actions et les transformations à opérer en fonction des contraintes de la situation. Si, à la relecture, l'individu constate qu'il avait négligé des informations familières, il retourne à la première section, à l'étape du choix des règles d'actions et des stratégies. Sinon, il s'engage dans la caractérisation des connaissances$_{(16)}$, un mécanisme de construction de la représentation mentale du problème qui est une activité d'interprétation et d'élaboration des représentations sémantiques$_{(17)}$.

Ce sous-processus vise la traduction des informations non familières ou présentées dans une structure non familière en unités dites propositionnelles$_{(18)}$, utilisables dans les relais d'associations. Il se veut un espace potentiel de recherche$_{(19)}$ à l'intérieur duquel l'individu se représente des objets, des concepts, des scènes ou des événements dans un mode analogue.

L'individu traduit la représentation visuelle dans un signifié(20), soit un mot, une idée ou une courte proposition pertinente, et choisit un format propositionnel(21).

S'il ne réussit pas à créer un format avec les informations sélectionnées, il doit revenir au début de la construction d'une procédure, soit analyser le texte et sélectionner à nouveau des informations et des signifiants pour identifier dans les données du problème celles qui sont pertinentes pour l'atteinte du but.

Si l'individu réussit à créer une représentation propositionnelle(22) dans l'espace potentiel de recherche, il revient à la première catégorie d'opérations de situation d'exécution de procédures pour choisir des stratégies mais cette fois avec une nouvelle structure relationnelle(23). Il réutilise des relais d'associations en intégrant le nouveau format à l'intérieur des relais et sélectionne des stratégies d'exécution.

Si l'individu n'arrive pas à utiliser le nouveau format qu'il a créé dans des relais d'associations à la « Situation d'exécution des procédures » avec la nouvelle structure relationnelle, il revient encore une fois à l'analyse du texte et à la sélection des informations et des signifiants pour identifier dans les données du problème celles qui sont pertinentes pour l'atteinte du but. Par contre, s'il réussit à sélectionner des règles d'actions et des stratégies d'exécution, il revient à l'exécution des procédures et à la vérification de sa réponse.

Cette proposition de schéma permet maintenant de mieux situer les objectifs de recherche qui sont exposés dans la prochaine section.

2.2. Objectifs de recherche

Cette étude s'intéresse à la construction de la représentation mentale d'un problème mathématique, plus précisément à la compréhension de l'énoncé écrit d'un problème et des conditions dans lesquelles elle s'effectue. Elle se présente comme une recherche de type descriptive. En s'appuyant sur les notions présentées ci haut et le schéma-synthèse proposé, il s'agit de cerner les manifestations de cette construction par un biais expérimental.

Dans le prochain chapitre, l'approche méthodologique sera précisée ainsi que les facteurs retenus pour l'étude expérimentale. La population visée, le choix et l'analyse des problèmes, l'élaboration et le schème expérimental seront présentés.

CHAPITRE III

MÉTHODOLOGIE

CHAPITRE III

MÉTHODOLOGIE

3.1. Approche globale

Dans cette recherche de nature descriptive, pour le chercheur, le défi tient à la nature implicite de la représentation mentale. La démarche générale consiste en une analyse comparative de cas portant sur la construction de la représentation mentale du problème à partir des raisonnements mis en œuvre par les élèves lors de la résolution de problèmes mathématiques. La recherche vise à cerner des manifestations de la représentation mentale à l'aide de mises en situation de résolution de problèmes mathématiques.

3.2. Les variables en jeu

Dans cette étude, se trouvent deux grandes classes de variables particulièrement intéressantes: le niveau scolaire des sujets et le type de problèmes. Les raisons de ces choix sont précisées dans les prochaines sections.

3.2.1. Niveau scolaire des sujets

Pour mieux observer le processus de représentation mentale utilisé en résolution de problème mathématique, il est nécessaire de sélectionner des sujets qui ont déjà développé une certaine habileté à résoudre des problèmes mathématiques écrits.

Le programme de mathématiques du M.E.Q. (2000) affirme qu'au troisième cycle, l'élève doit être en mesure de décoder ainsi les éléments de la situation-problème :

déterminer le sens des termes et des symboles mathématiques, distinguer les données pertinentes des données non pertinentes, dégager l'information implicite, reconnaître une situation-problème à données manquantes, dégager la tâche à réaliser. De plus, l'élève doit pouvoir modéliser la situation-problème ce qui signifie, entre autres, associer la situation à des situations semblables résolues antérieurement, et reconnaître les similitudes entre diverses situations-problèmes. C'est avec un groupe de sujets du troisième cycle du primaire qu'il convient davantage d'expérimenter pour vérifier la nature des processus de représentation mentale à la compréhension d'un problème mathématique écrit puisque c'est à ce cycle du primaire que l'élève doit maîtriser cette première étape de résolution de problèmes en mathématiques. Par ailleurs, les habiletés en lecture doivent être suffisantes pour éviter une difficulté supplémentaire à la compréhension de l'énoncé écrit du problème. À la fin du primaire, l'élève a plus de chance de maîtriser ces habiletés qu'aux cycles précédents.

3.2.2. Type de problèmes

Pour faciliter l'analyse des processus utilisés en résolution de problème par les différents sujets, il importe de déterminer un domaine mathématique dans lequel un bagage suffisant de connaissances a été accumulé jusque là. Selon Poirier (1992), l'apprentissage de l'arithmétique constitue la base sur laquelle vont s'appuyer les apprentissages mathématiques ultérieurs. En conséquence, c'est dans ce domaine mathématique qu'il semble plus pertinent d'expérimenter.

Cette recherche nous permettra de voir si la construction de la représentation mentale du problème se manifeste à la compréhension de l'énoncé écrit d'un problème arithmétique à l'aide d'observations d'élèves mis en situations de résolution. Pour analyser les manifestations de cette construction, il est préférable d'observer des élèves ayant des raisonnements qui contrastent en résolution de types distincts de problèmes arithmétiques.

On peut préciser davantage l'objectif principal de cette étude comme la description des manifestations de la construction de la représentation mentale du problème à l'étape de la compréhension d'un problème arithmétique chez des enfants du troisième cycle du primaire ayant des raisonnements contrastants en résolution de problèmes arithmétiques. À cet objectif principal, viennent se greffer quelques sous-objectifs: étudier l'impact de certaines conditions sur la construction de la représentation mentale du problème telles que la structure sémantique, l'absence d'état initial, la familiarité du contexte et la nature des nombres dans les problèmes arithmétiques présentés; confronter le schéma proposé au chapitre précédent avec les manifestations de la représentation mentale du problème observées à l'expérimentation.

Dans les sous-sections suivantes les quatre caractéristiques des problèmes arithmétiques qui sont proposés dans l'expérimentation sont expliquées.

3.2.2.1. La structure des problèmes

Après un questionnement sur les types de représentation mentale utilisés par un individu en résolution de problèmes mathématiques (voir chapitre II), il est possible de construire un ensemble de situations qui peuvent être expérimentées auprès d'élèves à l'aide d'un test écrit et d'entrevues.

Dans son étude réalisée dans le domaine de l'arithmétique, Poirier (1992) explique que les problèmes dont la réponse correspond au résultat d'une action directe (comme a+b=? où l'état initial et la transformation sont connus) sont plus faciles à résoudre pour les enfants que des problèmes exigeant une reconstruction simple (de forme a+?=b où l'état initial est connu mais la transformation est inconnue). Les problèmes exigeant une reconstruction complexe, c'est-à-dire lorsque les données sur lesquelles on doit opérer constituent des transformations opérées sur des collections ou des déplacements s'avèrent encore plus difficiles à résoudre que les problèmes arithmétiques simples. Poirier (1992) présente l'analyse conceptuelle réalisée par Vergnaud (1976) qui émet l'hypothèse que les situations mettant en jeu une composition de transformations exigent un changement conceptuel important de la part de l'élève, le nombre passant d'un état à une transformation. Dans de telles situations, les enfants doivent se décentrer des états et opérer sur des transformations. Les problèmes arithmétiques de composition de transformations font appel à un déroulement dans le temps et évoquent une action. Ils peuvent être composés d'une combinaison de changements et ne nécessitent pas la connaissance de l'état initial. Voici un exemple de problème arithmétique complexe faisant appel à une composition de transformations et à l'intérieur de cette composition à une reconstruction sur une collection discrète:

> Annie joue aux billes. À la première partie, elle gagne 13 billes. Elle joue encore une fois; on ne te dit pas ce qui s'est passé. Si on sait qu'après ces deux parties, elle a gagné 8 billes, a-t-elle gagné ou perdu à la deuxième partie et combien? (Poirier, 1992, p.11)

Dans ce type de problèmes, une séquence plus ou moins complexe de deux transformations est considérée, la première transformation et la transformation résultante sont données et l'élève doit reconstruire la deuxième opération. Dans ces situations, l'état initial ou intermédiaire n'est pas donné comme dans les problèmes mettant en jeu une transformation arithmétique simple. L'enfant doit être capable de raisonner sur les transformations sans tenir compte des états que celles-ci amènent.

Les types de problèmes qui sont retenus pour l'expérimentation de la présente recherche sont similaires à ceux utilisés par Poirier (1992). Cette étude a retracé les problèmes les plus pertinents entre autres pour le troisième cycle primaire, susceptibles de faire ressortir différentes classes de procédures de résolution utilisées par les enfants, étant intéressée aux modèles implicites mis en œuvre. De plus, ces problèmes sont classés par degré de complexité en terme de résolution selon une analyse de Vergnaud (Poirier, 1992, p.92). Puisque ces types de problèmes favorisent la mise en œuvre des modèles implicites des enfants lors de la résolution de problèmes, il semble conséquent d'affirmer qu'ils favorisent également les processus de représentation mentale à la compréhension de l'énoncé écrit particulièrement à cause de la non-familiarité de la structure sémantique puisqu'une étude des manuels scolaires au Québec a montré la quasi absence de ce type de problèmes (Poirier, 1992).

La structure sémantique du problème telle que définie par Vergnaud (voir chapitre II, contexte théorique) réfère à la structure qui relie les données du problème. La structure du problème, nous venons de le voir, peut influencer le processus de représentation mentale. Un autre facteur doit être considéré afin de déterminer le type de problèmes qui fait lieu d'investigation : l'absence d'état initial.

3.2.2.2. L'absence d'état initial

Dans son étude, Poirier (1992) ressort de son analyse des principaux manuels scolaires le peu de travail qui est fait dans le sens d'un détachement des états:

> Les problèmes écrits présentés aux élèves du deuxième cycle du primaire font, dans la majorité des cas, intervenir des états. Les problèmes font généralement intervenir un état initial sur lequel est appliquée une transformation et la question porte sur l'état final. Plus rarement, la question portera sur la transformation ou sur l'état initial, et dans ces cas, l'état final sera donné. (p.266)

Si on met l'élève en présence de problèmes portant sur la reconstruction de transformations, il est possible qu'il essaie de le résoudre en demeurant centré sur les états. S'il n'y a pas d'état initial et qu'il le constate, il devra déterminer une nouvelle approche pour résoudre le problème. L'absence d'état initial implique l'absence d'un point de départ pour amorcer un processus de résolution de problème. Poirier (1992) explique que certains élèves manifestent le besoin d'un état initial soit en jugeant le problème impossible à résoudre parce qu'il n'y a pas d'état initial ou en se dotant eux-mêmes d'un état initial fictif. Cette absence de point de référence initial se manifestera t-elle dans la construction de la représentation mentale du problème?

Le troisième facteur à considérer pour déterminer les problèmes à proposer est le contexte.

3.2.2.3. Le contexte

Le type de problème présenté dans la section précédente réfère à des transformations portant sur une collection discrète. Dans son étude, Poirier (1992) utilise également des problèmes mettant en jeu des transformations impliquant la reconstruction d'un changement à des grandeurs continues dans des contextes de déplacement.

Voici un exemple de problème arithmétique complexe faisant appel à une composition de transformation et à l'intérieur de cette composition à une reconstruction dans un contexte de déplacement (opérant sur des positions) cette fois-ci:

> Des laveurs de vitre sont installés sur une plate-forme. La première fois, on monte la plate-forme de 130 mètres. On la déplace encore une fois, on ne te dit pas comment. Si on sait qu'après ces deux déplacements, elle est montée de 80 mètres depuis le début, dis-moi si elle est montée ou descendue la deuxième fois et de combien? (Poirier, 1992, p.293)

Deux contextes sont retenus pour l'étude : les transformations opérant sur des collections discrètes et les déplacements opérant sur des positions.

Des problèmes mathématiques qui portent une structure sémantique plus complexe ou un contexte non familier évitent l'exécution de procédures de résolution automatisées qui peut éliminer le processus de construction du problème à partir d'une sélection d'indices (McNamara, 1999). En effet, si l'individu se retrouve devant un problème portant une structure sémantique plus simple ou un contexte familier, la construction mentale s'avère beaucoup moins nécessaire et les élèves risquent d'utiliser les données numériques dans un algorithme sans tenir compte du sens, du but à atteindre.

Le dernier facteur considéré pour le choix des problème est la nature des nombres.

3.2.2.4. La nature des nombres

Les nombres entiers relatifs sont les nombres entiers positifs et négatifs. L'ensemble des nombres entiers relatifs est désigné par $Z=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$. Poirier (2001) explique: « Les entiers relatifs sont utilisés dans différents contextes, le plus courant étant la température, mais on les emploie également sur des lignes du temps, ainsi que pour désigner des altitudes, des profondeurs, des gains, des pertes, etc. » (p.86)

Dans son étude portant sur l'analyse de l'enseignement des entiers relatifs dans les manuels scolaires et les guides d'enseignement du Québec, Jordi (2000) souligne le caractère complexe de l'apprentissage des entiers relatifs. Un bilan du matériel proposé dans les manuels scolaires au primaire met en évidence un enseignement qui privilégie à outrance le concept de nombre comme mesure de grandeur ou de quantité. Jordi (2000) explique que dans la grande majorité des situations proposées dans les manuels, on croit enseigner les entiers relatifs alors qu'on ne fait que travailler les entiers naturels : « La droite numérique a ceci de pervers qu'elle donne à son utilisateur l'impression qu'il travaille avec des entiers relatifs alors qu'il n'en n'est rien » (p.194)

Dans son étude, Jordi (2000) relève l'importance de présenter aux élèves des modèles pour les aider dans leur apprentissage des entiers relatifs.

Dans les problèmes de compositions de transformations proposés par Poirier (1992), l'élève doit faire appel aux nombres entiers relatifs. Ces caractéristiques vont exiger du sujet une interprétation qui dépasse le cadre habituel présenté avec les nombres naturels.

Dans notre étude, les problèmes proposés aux sujets mettent en jeu une séquence de changements avec reconstruction d'un d'entre eux. Ces problèmes possèdent donc quatre caractéristiques : leur structure sous-jacente exige du sujet une reconstruction, l'absence d'état initial, le contexte et les données numériques sont associées à des changements et non à des états.

3.3. Choix des instruments

Les instruments choisis pour faire émerger les différentes formes que peut prendre le processus opérationnel de représentation mentale lors de la compréhension d'un énoncé écrit d'un problème arithmétique sont de deux ordres : un test écrit et des entrevues semi-dirigées.

Un premier test écrit est administré en grand groupe. Ce test est centré sur la résolution de situations faisant appel à la reconstruction d'une transformation permettant de sélectionner des candidats à raisonnements contrastants (présentant un rendement très fort ou très faible).

Les entrevues semi-dirigées telles que présentées par Savoie-Zajc (2000) permettent de rendre explicites les formes de processus de représentation mentale que les sujets à raisonnements contrastants utilisent. Un schéma d'entrevue comportant une série de problèmes de types distincts est établi. Une entrevue semi-dirigée permet d'amener le sujet à préciser et expliciter son raisonnement. Le risque que comporte un tel type d'entrevue est d'induire la présence d'une construction de la représentation mentale d'un problème alors que l'élève n'en expérimente pas spontanément à prime abord. En induisant ce phénomène, il est probable de remarquer une évolution de cette habileté.

Puisque la construction de la représentation mentale du problème est de nature implicite, cette méthode s'avère efficace pour aller vérifier rapidement cette construction chez le sujet. La méthodologie de cette recherche s'inspire de la thèse de Poirier (1992) qui a étudié les modèles implicites mis en œuvre par les enfants de niveau primaire lors de la résolution de problèmes arithmétiques complexes.

Des élèves sont retenus pour cette rencontre individuelle. Ils sont soumis à certaines contraintes visant à rendre explicites les formes de processus qu'ils utilisent. À partir des résultats, un regroupement présentant différentes formes stables de représentations mentales peut être effectué.

3.4. Démarche de recherche

La démarche globale se présente comme suit : tout d'abord, une analyse des différents modèles mentaux mis en œuvre en résolution de problèmes arithmétiques complexes tels que décrits dans l'étude de Poirier (1992) qui permet de sélectionner des items discriminants pour l'épreuve écrite; ensuite l'élaboration et l'expérimentation de cette épreuve écrite visant à faire ressortir des classes de procédures; et finalement la sélection des sujets à raisonnements contrastants, l'élaboration et l'expérimentation d'entrevues.

Le test écrit a pour but de caractériser les élèves en termes des procédures utilisées sur l'ensemble des situations. L'entrevue, pour sa part, a pour but de rendre explicite le processus de représentation mentale utilisé à la compréhension du problème selon les différents modèles mentaux identifiés à travers les procédures. Quelques élèves par niveau, représentant chacune des classes de modèles, seront choisis et vus en entrevue.

La première étape consiste en l'élaboration d'un test écrit basé sur l'analyse des trois classes de modèles mentaux mis en œuvre en résolution de problèmes arithmétiques complexes chez des élèves de quatrième, cinquième et sixième année primaire tels que décrits dans l 'étude de Poirier (1992). Ce test est administré au dernier cycle du primaire (cinquième et sixième année).

3.4.1. Analyse des procédures utilisées, cadre de référence pour l'épreuve

Les critères de sélection pour les candidats sont basés sur l'analyse des modèles mentaux implicites mis en œuvre lors de la résolution de problèmes par Poirier (1992). Selon les données fournies par le sujet à la résolution du problème, il est possible d'anticiper le niveau de maîtrise par le sujet de la structure sous-jacente des problèmes de transformation complexe exigeant une reconstruction. On retrouve trois grands modèles qui témoignent du niveau de maîtrise : le modèle linéaire, le modèle de comparaison d'états et le modèle de comparaison de nombres relatifs. Dans le modèle linéaire, l'enfant opère sur les deux données fournies dans l'énoncé de façon séquentielle, les considérant l'une après l'autre, ignorant la donnée manquante et sans comprendre qu'il y ait une reconstruction. Le sujet ne perçoit pas la structure sous-jacente du problème (symbolisée par a+?=b) mais l'interprète plutôt comme un autre énoncé, mettant bout à bout les informations données (symbolisé par a+b=?). Le sujet reste centré sur des états en utilisant des nombres naturels.

Dans le modèle de comparaison d'états, l'enfant se représente la structure sous-jacente du problème et reconnaît qu'il y a une reconstruction à faire. Les sujets traitent encore les données en tant qu'états et opèrent avec des nombres naturels qui sont associés à des mesures de collections et de grandeur. Le sujet compare les deux données pour trouver la différence entre les nombres.

Dans le modèle de comparaison de nombres relatifs, l'enfant se représente la structure sous-jacente du problème et reconnaît qu'il y a une reconstruction à faire. De plus, les sujets traitent les données comme des nombres relatifs. Parfois, les données sont des nombres relatifs associés à certaines positions statiques dans le plan (le support d'une droite numérique est souvent utilisé). Enfin, les nombres relatifs sont quelques fois associés à des changements et ont une représentation plus dynamique.

Le problème suivant illustre ce propos:

> Alexandre se rend au marché aux puces avec sa collection de roches. Au premier kiosque, il achète 12 roches. Il s'arrête à un second kiosque; on ne te dit pas ce qu'il a fait. Si on sait que lorsqu'il retourne chez lui, il a diminué sa collection de 9 roches, a-t-il acheté ou vendu des roches au deuxième kiosque et combien ?

À titre d'exemple, si le sujet utilise un modèle linéaire pour résoudre ce problème, ses résultats pourraient se manifester comme suit : Alexandre a 12 roches puis il en vend 9, donc il lui en reste 3, il en en a donc vendu 9 au deuxième kiosque. Le premier changement est devenu un état initial sur lequel vient agir le changement résultant pour obtenir un état final. C'est un traitement séquentiel des données.

S'il utilise un modèle de comparaison d'états, ses résultats pourraient se manifester comme suit : Alexandre achète 12 roches au début. La deuxième fois, on ne sait pas, puis il en a neuf à la fin. Il en donc vendu trois.

S'il utilise un modèle de comparaison de nombres relatifs, ses résultats pourraient se manifester comme suit : si on sait qu'après ces deux kiosques, Alexandre a diminué sa collection de 9 roches cela signifie qu'à la fin il a moins 9 roches. Il en avait acheté 12 au début, ce qui signifie plus 12. Il a fallu qu'il vende douze roches pour aller jusqu'au point 0 et en revende 9 pour se rendre jusqu'à moins neuf. En conséquence, il a fallu qu'il en vende 9 et 12. Au total, il en a vendu 21.

Ces classes permettent d'identifier plus précisément les sujets qui ont un raisonnement amenant un rendement jugé fort (ceux qui utilisent un modèle de comparaison de nombres relatifs) et faible (ceux qui utilisent un modèle linéaire).

3.4.2. Élaboration de l'épreuve écrite

Après avoir identifié les trois types de modèles mis en œuvre par les élèves dans la résolution de situations faisant appel à la reconstruction d'un changement, la prochaine étape consiste à sélectionner les problèmes les plus susceptibles de mettre en évidence les trois types de procédures. Une classification des sujets selon ces procédures permet de faire émerger les raisonnements les plus contrastants (rendements forts et faibles). Douze problèmes sont retenus, les mêmes pour les deux degrés ($5^{ème}$ et $6^{ème}$ années).

Dans son étude, Poirier (1992) a construit une épreuve écrite en se référant à une étude de Vergnaud (Poirier, 1992, p.92). Selon une typologie échelonnée de 1 à 6, il est possible de classer les différents types de problèmes mettant en jeu une composition de transformations selon le degré de complexité des problèmes en termes de résolution. Ainsi, les types 1 et 2 représentent les problèmes mettant en jeu une séquence directe c'est-à-dire que toutes les transformations vont dans le même sens. Le type 1 comprend uniquement des transformations positives et le type 2 des transformations négatives.

Exemple d'un problème de type 1 (premier gain de 13 et gain résultant de 31) :

> Julien joue aux billes. À la première partie, il gagne 13 billes. Il joue encore une fois; on ne te dit pas ce qui s'est passé. Si on sait qu'après ces deux parties, il a gagné 31 billes, a-t-il gagné ou perdu à la deuxième partie et combien?

Exemple d'un problème de type 2 (première perte de 14 et perte résultante de 29) :

> Marie-Soleil joue aux billes. À la première partie, elle perd 14 billes. Elle joue encore une fois; on ne te dit pas ce qui s'est passé. Si on sait qu'après ces deux parties, elle a perdu 29 billes, a-t-elle gagné ou perdu à la deuxième partie et combien?

Les types 3 et 4 représentent les problèmes mettant en jeu une séquence indirecte, c'est-à-dire que les deux transformations sont opposées et la transformation résultante va dans le même sens que la première transformation. Le type 3 comprend une première transformation positive tandis que le type 4 comprend une première transformation négative.

Exemple d'un problème de type 3 (premier gain de 13 et gain résultant de 8) :

> Ian se rend au marché aux puces avec sa collection de roches. Au premier kiosque, il achète 13 roches. Il s'arrête à un second kiosque ; on ne te dit pas ce qu'il a fait. Si on sait que lorsqu'il retourne chez lui, il a augmenté sa collection de 8 roches, a-t-il acheté ou vendu des roches au deuxième kiosque et combien ?

Exemple d'un problème de type 4 (première perte de 10 et perte résultante de 4) :

> Guillaume se rend au marché aux puces avec sa collection de roches. Au premier kiosque, il vend 10 roches. Il s'arrête à un second kiosque ; on ne te dit pas ce qu'il a fait. Si on sait que lorsqu'il retourne chez lui, il a diminué sa collection de 6 roches, a-t-il acheté ou vendu des roches au deuxième kiosque et combien ?

Les types 5 et 6 représentent les problèmes mettant en jeu une séquence indirecte dans la situation où la première transformation et la transformation résultante sont opposées : le type 5 comprend une première transformation positive et le type 6 une première transformation négative.

Exemple d'un problème de type 5 (premier gain de 12 et perte résultante de 6) :

> Alexandre se rend au marché aux puces avec sa collection de roches. Au premier kiosque, il achète 12 roches. Il s'arrête à un second kiosque ; on ne te dit pas ce qu'il a fait. Si on sait que lorsqu'il retourne chez lui, il a diminué sa collection de 9 roches, a-t-il acheté ou vendu des roches au deuxième kiosque et combien ?

Exemple d'un problème de type 6 (première perte de 11 et gain final de 7) :

> Mathieu se rend au marché aux puces avec sa collection de roches. Au premier kiosque, il vend 11 roches. Il s'arrête à un second kiosque ; on ne te dit pas ce qu'il a fait. Si on sait que lorsqu'il retourne chez lui, il a augmenté sa collection de 7 roches, a-t-il acheté ou vendu des roches au deuxième kiosque et combien ?

Le test écrit est composé de quatre types de problèmes faisant appel à la reconstruction d'un changement (types 3, 4, 5 et 6) parce que les deux premiers types ne sont pas discriminants puisque faciles à réussir. De plus, on retrouve un type de problème faisant appel à une séquence de changements sans reconstruction (problèmes arithmétiques courants) :

> Élaine se rend au marché aux puces avec sa collection de roches. Au premier kiosque, elle vend 8 roches. Elle s'arrête à un second kiosque et elle achète 6 roches. A-t-elle augmenté ou diminué sa collection de roches et de combien ?

Finalement, il y a un problème de type 6 où un état initial est donné parce que certains élèves n'arrivent pas à reconstruire la transformation sans état initial :

> Pénélope a 17 roches. Elle se rend au marché aux puces avec sa collection et vend 9 roches au premier kiosque. Elle s'arrête à un second kiosque ; on ne te dit pas ce qu'elle a fait. Si on sait que lorsqu'elle retourne chez elle, elle a

augmenté sa collection de 5 roches, a-t-elle acheté ou vendu des roches au deuxième kiosque et combien ?

Nous retrouvons six types de problèmes, chacun étant présenté dans les deux contextes (transformation de collections discrètes et déplacement de position), pour un total de douze problèmes. Ces douze énoncés sont repris à l'annexe III.

3.4.3. Expérimentation de l'épreuve écrite

Les cent dix élèves (deux classes de cinquième année (vingt-huit et vingt-sept élèves) et deux classes de sixième année (vingt-sept et vingt-huit élèves) qui ont participé à cette étude sont des sujets qui fréquentent une école de la Commission scolaire de Montréal, située dans la région nord, une région socio-économique moyenne. Cette école est composée majoritairement d'élèves de souche québécoise. L'épreuve a été administrée à l'intérieur d'une période de cinquante minutes par groupe, deux en avant-midi et deux en après-midi.

L'administration du test s'est déroulée comme suit : l'expérimentatrice a présenté l'expérimentation dans le cadre d'un travail universitaire et en a explicité ainsi l'objectif : chercher à mieux comprendre comment des élèves de cinquième et sixième année travaillent en mathématique en précisant que les travaux ne « comptent pas pour le bulletin ». Les élèves ont été invités à résoudre leurs problèmes en explicitant, sur des carnets assemblés à cette fin et distribués individuellement, comment ils s'y prenaient. Chaque page correspond à un problème. Après la résolution de chaque problème, les élèves détachaient la feuille du carnet et l'expérimentatrice passait de pupitre en pupitre pour récupérer les feuilles détachées. De cette façon, les élèves ne pouvaient revenir sur des problèmes déjà faits, suite à la résolution d'un nouveau problème, minimisant ainsi l'influence d'un problème sur un autre. Toujours dans le but de minimiser l'influence possible d'un item sur un autre, les problèmes étaient présentés dans un ordre aléatoire, sauf pour les deux derniers problèmes comportant un état initial et systématiquement présentés à la fin de l'épreuve (dans un ordre aléatoire pour ce qui est des deux contextes). Un système de codification permet ensuite de reconstituer chaque carnet à des fins d'analyse des résultats. Ainsi, dans le coin supérieur droit de chaque feuille, se trouve un code qui indiquant le niveau scolaire (5,6), le numéro de l'élève (1 à n, selon le nombre d'élèves dans le groupe) et l'ordre de présentation du problème (1 à 12).

3.4.4. Les entrevues

Une première correction et analyse du test écrit ont été faites dans le but de caractériser chaque élève selon les termes de la procédure utilisée sur l'ensemble des problèmes faisant appel à la reconstruction d'un changement.

3.4.4.1. Choix des sujets pour l'entrevue

Après une première analyse en vue de mettre en évidence des « patterns » stables de résolution sur l'ensemble des problèmes faisant appel à une reconstruction, l'étape suivante fut de classer les élèves en fonction de la procédure dominante utilisée dans la résolution. Les sujets étant ainsi caractérisés en termes de procédure dominante, il s'est avéré plus facile d'identifier les élèves avec un rendement fort ou faible. La présence et la qualité des traces ont été déterminantes dans la sélection, rendant plus explicites les processus utilisés. Au total, dix-sept élèves ont été choisis à l'intérieur des quatre groupes : sept garçons et dix filles. Parmi eux, six élèves manifestaient un modèle de résolution dit linéaire, quatre un modèle de comparaison d'entiers naturels et sept un modèle de comparaison d'entiers relatifs (ces résultats sont repris dans l'analyse, chapitre IV).

3.4.4.2. Élaboration des entrevues

L'entrevue comporte deux objectifs : vérifier la stabilité des modèles utilisés dans différentes situations-problèmes et rendre explicites les différentes formes de processus de représentation mentale utilisées par les élèves dans la résolution de problème faisant appel à la reconstruction d'un changement.

À cette fin, le déroulement de l'entrevue s'est effectué de la même façon pour tous les élèves. Dans un premier temps, un problème de type 4 déjà résolu lors du test écrit est présenté à l'élève afin de vérifier la stabilité de la procédure utilisée référant à une classe de modèle identifiée lors de la sélection. Ensuite, trois problèmes similaires à ceux présentés lors du test sont posés visant à rendre explicite la forme de processus de représentation mentale utilisée : deux de type 4 (les deux contextes) et un de type 6 (déplacement de position).

Tous les énoncés de problèmes présentés en entrevue sont repris dans l'annexe IV.

3.4.4.3 Expérimentation des entrevues

Les entrevues ont débuté trois semaines après la passation du test écrit et se sont tenues pendant une période de quatre jours.

Les entrevues se sont toutes déroulées de la même façon. Chaque sujet a été interviewé individuellement par la même expérimentatrice. Elle présentait les problèmes un à un au sujet. Ce dernier devait lire à haute voix ou silencieusement le problème, puis le résoudre et expliquer sa démarche. L'expérimentatrice questionnait l'élève et reformulait ses réponses pour lui permettre de préciser sa pensée. Un verbatim est donné à titre d'exemple à l'annexe V. Voici quelques exemples de questions utilisées au courant d'une même entrevue pour permettre à l'élèves de verbaliser sa démarche de construction de représentation mentale :

- *Raconte-moi comment tu t'y es pris pour répondre à la question?*
- *Es-tu capable de m'expliquer ce qui se passe dans ta tête lorsque tu essaies de résoudre le problème?*
- *Comment te représentes-tu le problème?*
- *Tu pourrais m'expliquer ce que tu vois dans ta tête avec le plus de détails possible?*
- *Est-ce que tu te représentes ce problème-là d'une certaine façon dans ta tête? Es-tu capable de m'expliquer le plus en détails possible comment ça se passe?*

Les entrevues d'une durée moyenne de vingt minutes ont toutes été enregistrées sur magnétophone afin de garder la trace des propos de l'élève et d'y référer au moment de l'analyse.

Dans le chapitre suivant, l'analyse des résultats obtenus d'abord au test écrit sera présentée puis, dans un second temps, l'analyse des entrevues menées auprès des sujets sélectionnés.

CHAPITRE IV

ANALYSE DES RÉSULTATS

CHAPITRE IV

ANALYSE DES RÉSULTATS

Les données recueillies lors de l'expérimentation seront traitées en deux temps. D'abord l'analyse des résultats de l'épreuve écrite suivie de l'analyse des entrevues.

4.1. Analyse des résultats de l'épreuve écrite

Le test écrit portait sur la résolution de situations faisant appel à la reconstruction d'une transformation et permettait de sélectionner des candidats à raisonnements contrastants (résultant à des rendements forts et faibles).

Ce test avait pour but de caractériser les élèves en termes des procédures utilisées pour l'ensemble des situations. La section qui suit explique les résultats attendus selon les différents niveaux de maîtrise en se basant sur les diverses procédures utilisées.

4.1.1. Traitement des données recueillies au test écrit en fonction du niveau de maîtrise

Selon les données fournies par le sujet dans la résolution du problème, il est possible d'anticiper le niveau de maîtrise par le sujet de la structure sous-jacente des problèmes de transformation complexe exigeant une reconstruction. On retrouve trois classes de modèles qui témoignent du niveau de maîtrise : le modèle linéaire (niveau 1), le modèle de comparaison d'états (niveau 2) et le modèle de comparaison de nombres relatifs (niveau 3). Tel qu'expliqué dans le chapitre précédent (voir la section 3.4.1.), dans le modèle linéaire, l'enfant opère sur les deux données fournies dans l'énoncé de façon séquentielle, les considérant l'une après l'autre, ignorant la donnée manquante sans comprendre qu'il y a une reconstruction et traitant les nombres comme des états. Dans le modèle de comparaison d'états, le sujet compare les deux données pour trouver la différence entre les nombres, vus ici comme des états et non comme des transformations. Dans le modèle de comparaison de nombres relatifs, les sujets perçoivent la structure sous-jacente du problème et traitent les données comme des nombres relatifs, parfois associés à des changements.

Ces trois niveaux permettent d'identifier plus précisément les sujets qui ont un raisonnement amenant un rendement jugé fort (ceux qui utilisent un modèle de comparaison de nombres relatifs) et faible (ceux qui utilisent un modèle linéaire).

On retrouve dans la première partie du test écrit quatre types de problèmes faisant appel à la reconstruction d'un changement (types 3, 4, 5 et 6). Les deux premiers types sont éliminés parce que trop faciles à réussir et n'aidant pas à la discrimination. Les résultats de cette première partie seront analysés de manière à faire ressortir le type de procédure le plus utilisé par l'élève pour résoudre les divers problèmes et sélectionner des candidats présentant des types de manifestations contrastants. Les autres types de problèmes présentés dans le test ne servaient qu'à repérer d'autres difficultés qui auraient empêché l'élève de résoudre les problèmes de reconstruction tel le besoin d'avoir un état initial.

Pour aider à l'évaluation et au classement des données fournies par les élèves lors de l'épreuve écrite, la section suivante présente un référent de correction. La procédure attendue en ce qui a trait à chaque problème est décrite à l'aide d'un exemple pour les trois niveaux de maîtrise c'est-à-dire les trois modèles expliqués par Poirier (1992) (voir chapitre III).

4.1.2. Les résultats attendus selon le niveau de maîtrise

Voici des exemples de résultats attendus pour chacun des huit problèmes de reconstruction considérés pour le traitement selon les trois degrés de maîtrise : modèle linéaire, comparaison d'états et comparaison d'entiers relatifs.

Les deux problèmes de type 3

(**Collection discrète**)

Ian se rend au marché aux puces avec sa collection de roches. Au premier kiosque, il achète 13 roches. Il s'arrête à un second kiosque ; on ne te dit pas ce qu'il a fait. Si on sait que lorsqu'il retourne chez lui, il a augmenté sa collection de 8 roches, a-t-il acheté ou vendu des roches au deuxième kiosque et combien ?

Exemple de résultat attendu si l'élève utilise une procédure selon un modèle linéaire :

13 roches + 8 roches = 21 roches Il a acheté 21 roches

Exemple de résultat attendu si l'élève utilise une procédure selon un modèle de comparaison :

Il a 13 roches au départ et 8 à la fin. Entre 13 et 8, il y a une différence de 5 roches. Il a vendu 5 roches.

<u>Exemple de résultat attendu si l'élève utilise une procédure selon un modèle de comparaison d'entiers relatifs</u> :

Il a +13 roches au départ et +8 roches à la fin. Pour aller de +13 roches à +8 roches, il a fait –5, donc il en a vendu 5 roches.

(**Déplacement**)

David a escaladé une paroi rocheuse afin d'y installer un drapeau. Une fois le drapeau installé, il monte de 130 mètres. Il se déplace encore une fois, on ne te dit pas comment. Si on sait qu'après ces deux déplacements, il est monté de 80 mètres par rapport au drapeau, est-il monté ou descendu la deuxième fois et de combien ?

<u>Exemple de résultat attendu si l'élève utilise une procédure selon un modèle linéaire</u> :

130 mètres + 80 mètres = 210 mètres. Il a monté 210 mètres.

<u>Exemple de résultat attendu si l'élève utilise une procédure selon un modèle de comparaison</u> :

Il est à 130 mètres au début et 80 mètres à la fin. La différence entre les deux est de 50 mètres. Il a donc descendu de 50 mètres.

<u>Exemple de résultat attendu si l'élève utilise une procédure selon un modèle de comparaison d'entiers relatifs</u> :

Il est à +130 mètres au début et +80 mètres à la fin. Pour passer de +130 mètres à +80 mètres, il a fait –50 mètres. Ce qui veut dire qu'il a descendu de 50 mètres.

<u>Les deux problèmes de type 4</u>

(Collection discrète)

Guillaume se rend au marché aux puces avec sa collection de roches. Au premier kiosque, il vend 10 roches. Il s'arrête à un second kiosque ; on ne te dit pas ce qu'il a fait. Si on sait que lorsqu'il retourne chez lui, il a diminué sa collection de 6 roches, a-t-il acheté ou vendu des roches au deuxième kiosque et combien ?

<u>Exemple de résultat attendu si l'élève utilise une procédure selon un modèle linéaire</u> :

10 roches - 6 roches = 4 roches. Il a acheté 4 roches

<u>Exemple de résultat attendu si l'élève utilise une procédure selon un modèle de comparaison</u> :

Il a 10 roches au départ et 6 à la fin. Entre 10 et 6, il y a une différence de 4 roches. Il a vendu 4 roches.

<u>Exemple de résultat attendu si l'élève utilise une procédure selon un modèle de comparaison d'entiers relatifs</u> :

Il a vendu 10 roches donc il a -10 roches au départ et -6 roches à la fin. Pour aller de -10 roches à -6 roches, il a fait +4, donc il en a acheté 4 roches.

(Déplacement)

Frédéric a escaladé une paroi rocheuse afin d'y installer un drapeau. Une fois le drapeau installé, il descend de 100 mètres. Il se déplace encore une fois, on ne te dit pas comment. Si on sait qu'après ces deux déplacements, il est descendu de 60 mètres par rapport au drapeau, est-il monté ou descendu la deuxième fois et de combien ?

Exemple de résultat attendu si l'élève utilise une procédure selon un modèle linéaire :

100 mètres - 60 mètres = 40 mètres. Il a monté de 40 mètres.

Exemple de résultat attendu si l'élève utilise une procédure selon un modèle de comparaison :

Il est à 100 mètres au début et 60 mètres à la fin. La différence entre les deux est de 40 mètres. Il a donc descendu de 40 mètres.

Exemple de résultat attendu si l'élève utilise une procédure selon un modèle de comparaison d'entiers relatifs :

Il est à +100 mètres au début et +60 mètres à la fin. Pour passer de +100 mètres à +60 mètres, il a fait –40 mètres. Ce qui veut dire qu'il a descendu de 40 mètres.

Les deux problèmes de type 5

(Collection discrète)

Alexandre se rend au marché aux puces avec sa collection de roches. Au premier kiosque, il achète 12 roches. Il s'arrête à un second kiosque ; on ne te dit pas ce qu'il a fait. Si on sait que lorsqu'il retourne chez lui, il a diminué sa collection de 9 roches, a-t-il acheté ou vendu des roches au deuxième kiosque et combien ?

Exemple de résultat attendu si l'élève utilise une procédure selon un modèle linéaire :

12 roches - 9 roches = 3 roches. Il a acheté 3 roches

<u>Exemple de résultat attendu si l'élève utilise une procédure selon un modèle de comparaison d'entiers relatifs</u> :

Il est à +70 mètres au début et –30 mètres à la fin. Pour passer de +70 mètres à -30 mètres, il a fait –100 mètres. Ce qui veut dire qu'il a descendu de 100 mètres.

<u>Les deux problèmes de type 6</u>

(**Collection discrète**)

Mathieu se rend au marché aux puces avec sa collection de roches. Au premier kiosque, il vend 11 roches. Il s'arrête à un second kiosque ; on ne te dit pas ce qu'il a fait. Si on sait que lorsqu'il retourne chez lui, il a augmenté sa collection de 7 roches, a-t-il acheté ou vendu des roches au deuxième kiosque et combien ?

<u>Exemple de résultat attendu si l'élève utilise une procédure selon un modèle linéaire</u> :

11 roches + 7 roches = 18 roches. Il a acheté 18 roches.

<u>Exemple de résultat attendu si l'élève utilise une procédure selon un modèle de comparaison</u> :

Il a 11 roches au départ et 7 à la fin. Entre 11 et 7, il y a une différence de 4 roches. Il a vendu 4 roches.

<u>Exemple de résultat attendu si l'élève utilise une procédure selon un modèle de comparaison d'entiers relatifs</u> :

Il a -11 roches au départ et +7 roches à la fin. Pour aller de -11 roches à +7 roches, il a fait +18, donc il en a acheté 18 roches.

(Déplacement)

Jean a escaladé une paroi rocheuse afin d'y installer un drapeau. Une fois le drapeau installé, il descend de 70 mètres. Il se déplace encore une fois, on ne te dit pas comment. Si on sait qu'après ces deux déplacements, il est monté de 20 mètres par rapport au drapeau, est-il monté ou descendu la deuxième fois et de combien ?

<u>Exemple de résultat attendu si l'élève utilise une procédure selon un modèle linéaire</u> :

70 mètres + 20 mètres = 90 mètres. Il a monté 90 mètres.

<u>Exemple de résultat attendu si l'élève utilise une procédure selon un modèle de comparaison</u> :

Il est à 70 mètres au début et 20 mètres à la fin. La différence entre les deux est de 50 mètres. Il a donc descendu de 50 mètres.

<u>Exemple de résultat attendu si l'élève utilise une procédure selon un modèle de comparaison d'entiers relatifs</u> :

Il est à -70 mètres au début et +20 mètres à la fin. Pour passer de -70 mètres à +20 mètres, il a fait +90 mètres. Ce qui veut dire qu'il a monté de 90 mètres.

Les différents exemples présentés ci-dessus sont des « solutions-repères » pour permettre l'analyse détaillée des résultats des 110 élèves ayant participé au test écrit. Chaque résultat des problèmes retenus pour l'analyse (types 3, 4, 5, 6) a été évalué selon le degré de maîtrise représenté: linéaire (L), comparaison d'états (C) ou comparaison d'entiers relatifs (ER).

La prochaine section présente cette analyse sous forme de tableau.

4.1.3. Le codage des résultats du test écrit pour la sélection des candidats

Afin de mieux visualiser l'ensemble des résultats, ils ont été regroupés sous forme d'un tableau. Un extrait vous est ici présenté. Le tableau complet se retrouve à l'annexe VI. Chaque élève est représenté par un code. Le premier nombre (5 ou 6) représente le degré scolaire et le second (entre 1 et 29) représente le numéro du questionnaire. La lettre (a ou b) indique de quel groupe il s'agit. Pour chaque type de problème, il y a deux types de transformations : celles opérées sur une collection discrète (C) et celles opérées sur les déplacements (D). En ce qui a trait aux divers résultats, (AN) signifie que la réponse fournie ne permettait pas de classer la procédure de résolution soit que la page était blanche ou qu'on y retrouvait une note de l'élève indiquant qu'il n'avait pas compris le problème ou qu'il était impossible à résoudre ou encore que l'élève avait utilisé des opérations non pertinentes telles que des divisions ou des multiplications. Pour chaque élève, une compilation du total de chaque type de procédure est effectuée et la fréquence détermine quelle procédure est la plus utilisée et par conséquent la plus représentative. Si deux types apparaissent le même nombre de fois, le niveau le plus élevé de maîtrise est considéré comme représentatif du candidat, indiquant une progression à utiliser de plus en plus ce type de procédures. À la fin, un bilan est fait (résultats sur 110 et ensuite en %) pour illustrer les différents niveaux de maîtrise pour chaque problème.

Pour faciliter la lecture de ce tableau, les résultats des 17 candidats sélectionnés pour l'entrevue sont colorés selon le niveau de maîtrise. Ainsi, un résultat évalué comme une procédure représentant un niveau de maîtrise linéaire (L) sera coloré en rouge, comparaisons d'états (C) en jaune et comparaisons d'entiers relatifs (ER) en turquoise.

On peut constater que dans la plupart des problèmes analysés, le modèle de comparaisons d'états demeure le plus utilisé, suivi du modèle linéaire et finalement du modèle de comparaisons d'entiers relatifs. Il est à noter que le taux de réponses annulées est plus élevé pour les problèmes de type 6 (plus complexes) que pour les autres types.

Rouge : modèle linéaire
Jaune : comparaisons d'états
Turquoise : comparaisons d'entiers relatifs

Élève	Type 3		Type 4		Type 5		Type 6		Modèle
	C	D	C	D	C	D	C	D	
5.1a	L	L	L	AN	L	AN	L	AN	L
5.2a	L	L	L	L	L	L	L	L	L
5.3a	L	L	AN	L	L	L	L	L	L
5.4a	AN	AN	AN	AN	AN	L	AN	C	L
5.5a	L	C	AN	L	L	L	L	C	L
5.6a	AN	AN	AN	AN	L	L	L	AN	L
5.7a	L	L	L	L	L	L	L	L	L
5.8a	L	C	AN	AN	L	AN	L	AN	L
5.9a	L	L	L	C	L	C	L	C	L
5.10a	C	C	L	L	L	L	L	L	L
5.11a	L	C	C	L	AN	L	L	L	L
5.12a	L	C	L	AN	L	L	C	C	L
5.13a	AN	ER	L	C	ER	ER	L	ER	ER
5.14a	C	C	C	C	L	ER	L	ER	C
5.15a	C	C	C	C	C	C	C	C	C
5.16a	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER
5.17a	C	C	C	C	AN	AN	L	AN	C
5.18a	C	C	C	C	L	C	L	C	C
5.19a	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER
5.20a	C	C	C	C	C	C	C	AN	C
5.21a	ER	ER	ER	AN	ER	ER	ER	ER	ER
5.22a	C	AN	C	C	ER	ER	ER	ER	ER
5.23a	AN	AN	AN	AN	L	L	C	L	L
5.24a	C	C	C	C	C	C	L	C	C
5.25a	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER
5.26a	C	C	C	C	C	C	C	C	C
5.27a	L	L	L	L	L	L	L	L	L
5.28a	L	C	C	C	L	C	ER	L	C

Total sur 110 élèves

L	38	21	21	22	34	35	38	27	33
C	35	57	45	49	34	36	21	29	50
ER	21	19	23	21	22	28	25	31	27
AN	16	13	21	18	20	11	26	23	

%

L	35	19	19	20	31	32	35	25	30
C	31	52	41	45	31	33	19	26	45
ER	19	17	21	19	20	25	23	28	25
AN	15	12	19	16	18	10	23	21	

Extrait du Tableau I
Analyse détaillée des résultats des élèves de cinquième et sixième année au test écrit pour les problèmes de types 3, 4, 5 et 6

Les 17 candidats retenus fournissaient des réponses plus explicites et souvent plus élaborées que les autres élèves. Les sujets au premier niveau de résolution (modèle linéaire : 33%) et au dernier niveau (modèle de comparaisons d'entiers relatifs : 25%) manifestaient des différences procédurales importantes laissant supposer des représentations mentales également différentes. Puisque les écarts procéduraux laissaient présager des écarts visibles dans la construction de la représentation du problème, plus de sujets utilisant des procédures appartenant au modèle linéaire et de comparaisons d'entiers relatifs ont été rencontrés en entrevue. Rappelons-le, parmi les sujets rencontrés, six empruntent un modèle linéaire, quatre un modèle de comparaisons d'états et sept un modèle de comparaisons d'entiers relatifs.

L'entrevue comportait deux objectifs : vérifier la stabilité des modèles utilisés dans différentes situations-problèmes et rendre explicite la représentation mentale du problème utilisée par les élèves dans la résolution de problème faisant appel à la reconstruction d'un changement.

À cette fin, le déroulement de l'entrevue s'est effectué de la même façon pour tous les élèves. Dans un premier temps, un problème de type 4 déjà présenté lors du test écrit était à nouveau présenté à l'élève afin de vérifier la stabilité de la procédure utilisée référant à un modèle identifié lors de la sélection. Ensuite, trois problèmes similaires aux problèmes présentés lors du test étaient posés visant à rendre explicite la forme de processus de représentation mentale utilisée : deux nouveaux problèmes, différents du test écrit, de type 4 (les deux contextes) et un nouveau de type 6 (déplacement de position). Pour plus de détails, voir chapitre III, section 3.4.4.

La section qui suit présente l'analyse des dix-sept entrevues. Chaque entrevue n'est pas reprise en détail, seuls les informations et les détails les plus pertinents pour appuyer l'analyse ont été retenus et ce, afin d'éviter toute redondance. Cependant, à titre d'exemple, le *verbatim* de l'entrevue qui s'est déroulée avec l'élève 6.22b est présenté à annexe V.

4.2. Traitement des données recueillies durant l'entrevue

Le tableau qui suit présente des observations générales sur l'ensemble des sujets vus en entrevue. Il regroupe les sujets selon le niveau de maîtrise évalué lors du test écrit et indique les limites d'âge, la répartition garçons et filles et le temps moyen requis pour résoudre les problèmes.

Niveau de maîtrise évalué au test écrit	Modèle linéaire Niveau 1	Comparaison d'états Niveau 2	Comparaison d'entiers relatifs Niveau 3
Nombre de sujets	6	4	7
Limites d'âge Âge moyen	de 10 à 12 ans 11 ans	de 11 à 12 ans 12 ans	de 10 à 12 ans 11 ans
Nombre de garçons et filles	3 G 3 F	4 F	4 G 3 F
Limites de temps Durée moyenne de l'entrevue	de 15 à 28 min 23 min	de 13 à 23 min 20 min	de 15 à 25 min 19 min

Tableau II
Présentation d'observations générales lors des entrevues

Dans ce tableau, nous pouvons constater une bonne répartition des différentes caractéristiques des sujets parmi les trois groupes. De plus, nous pouvons remarquer la diminution du temps requis pour l'entrevue. Le rapport du rendement au niveau de la résolution par rapport au temps requis semble impliquer que plus le sujet est compétent dans la résolution de problèmes de ce type, plus il est rapide.

L'analyse des différentes entrevues fait ensuite ressortir une évolution dans l'utilisation des procédures de résolution par certains sujets. Dans le tableau qui suit, on peut remarquer que 5 élèves ont démontré une progression au niveau de la maîtrise, 1 élève a démontré une régression et onze sont demeurés au même niveau. Ces observations illustrent la possibilité d'évolution dans l'utilisation des procédures.

Modèle linéaire Niveau 1	Comparaison d'états Niveau 2	Comparaison d'entiers relatifs Niveau 3
(5.19b) **Stabilité**	(6.1b) **Stabilité**	(5.25a) **Régression**
(5.2a) **Stabilité**	(5.15a) **Évolution**	(5.9b) **Stabilité**
(6.24b) **Stabilité**	(6.17b) **Évolution**	(6.4b) **Stabilité**
(5.5b) **Stabilité**	(6.28a) **Évolution**	(5.16a) **Stabilité**
(6.21a) **Évolution**		(5.19a) **Stabilité**
(5.9a) **Évolution**		(6.22b) **Stabilité**
		(6.6a) **Stabilité**

Tableau III
Évaluation du niveau des procédures utilisées par l'élève lors de l'entrevue

Par ailleurs, dans une analyse plus détaillée des entrevues, il est possible de dégager des similitudes dans la façon de se représenter mentalement un problème entre les sujets démontrant un même niveau de maîtrise. La section suivante décrit ces similitudes.

4.2.1. Regroupement des différentes manifestations de la représentation mentale du problème rencontrées selon le degré de maîtrise

Dans un premier temps, le tableau qui suit aidera à visualiser les types de manifestations rencontrées chez les sujets des trois niveaux de maîtrise. Dans un deuxième temps, ces manifestations seront reprises de manière plus exhaustive en reprenant d'abord le concept de point de référence et ensuite l'analyse selon les trois niveaux de maîtrise.

Modèle linéaire **Niveau 1**	**Comparaisons d'états** **Niveau 2**	**Comparaisons d'entiers relatifs** **Niveau 3**
• Absence de point de référence pour se situer	• Utilisation d'un point de référence	• Utilisation d'un point de référence
Trois types de procédures rencontrées : 1. Aucune évocation de la situation-problème énoncée. 2. Détails non pertinents : évocation de détails non pertinents dans la situation-problème. 3. Aucune correspondance : évocation juste de la situation-problème énoncée sans correspondance avec les opérations choisies	Deux types de procédures rencontrées : 1. Représentations d'états : correspondance partielle des représentations mentales avec le choix des opérations : l'élève se représente des états et non des transformations 2. Représentations de transformations : correspondance partielle de la représentation des transformations et du choix des opérations. Difficultés avec les entiers relatifs.	Deux types de procédures rencontrées : 1. Évocation des transformations en simulant un mouvement, soit par des gestes ou un film mental en faisant correspondre simultanément des opérations avec ou sans entiers relatifs 2. Évocation de concept en y faisant correspondre des entiers relatifs

Tableau IV
Regroupement des manifestations de représentations mentales selon le niveau de maîtrise démontré

4.2.1.1. Point de référence

L'utilisation d'un point de référence est une représentation mentale d'un point de départ ou d'un objet de référence permettant par la suite d'effectuer une transformation.

Chez les sujets utilisant le modèle linéaire de résolution, l'absence de point de référence est frappante. Dans l'entrevue comme dans le test écrit, les sujets du niveau 1 ne mentionnent aucunement un point de départ ou un objet de référence. Les sujets dans les deux autres niveaux en utilisent tous. En voici un exemple à partir du problème suivant :

> Des laveurs de vitres sont installés sur une plate-forme et lave une première vitre. Après avoir lavé cette vitre, on descend la plate-forme de 70 mètres. On la déplace encore une fois, on ne te dit pas comment. Si on sait qu'après ces deux déplacements, elle est montée de 20 mètres par rapport à la première vitre, dis-moi si elle est montée ou descendue la deuxième fois et de combien ?

L'élève 5.5b exprime ce qu'il se représente mentalement ainsi : « Je vois la plate-forme descendre de 70 m et de 20 m. Ensuite, je vois 50 m et 70 m écrits à côté. ». Tandis que l'élève 5.25a (niveau 2) explique avec ses doigts sur la table : « Le premier déplacement est à x_1... ». Ou encore l'élève 5.19a (niveau 3) exprime ceci : « Je vois les personnes qui descendent de la première vitre qui est à mon point 0. »

L'utilisation d'un point de référence semble déterminante dans le degré de maîtrise de la résolution de problèmes faisant appel à la reconstruction de transformations sans état initial. Au départ, le choix des problèmes considérait le critère de l'absence d'état initial comme un facteur déterminant dans l'amorce du processus de résolution, donc au moment de la construction de la représentation mentale du problème (voir chapitre III section 3.2.2.2.). On supposait alors la possibilité qu'un élève mis en présence de problèmes portant sur la reconstructions de transformations essaie de le résoudre en demeurant centré sur les états. Sans état initial, l'élève doit déterminer une nouvelle approche pour résoudre le problème. Dans l'analyse de la représentation mentale du problème, il ressort que les élèves réussissant à résoudre en partie ou totalement les situations-problèmes se fixent un point de référence en se le représentant mentalement pour amorcer le processus de résolution de problème. Certains élèves concrétisent ce point en utilisant des gestes : mains mimant des positions (5.19a), doigts-curseurs sur la table (5.25a), avancer et reculer un crayon sur la table (6.21a).

Dans les prochaines sections, les différentes manifestations de représentations mentales selon chaque niveau de maîtrise de résolution seront reprises de façon plus exhaustive.

4.2.1.2. Représentations mentales rencontrées dans le Niveau 1

Parmi les trois manifestations de représentation mentale rencontrées, la première forme, nommée « Aucune évocation », indique que lors de la recherche de nombres pour former des opérations l'élève n'évoque pas du tout ce qu'il lit. L'absence de représentation mentale de la situation-problème mène vers un mode de résolution aléatoire. Par exemple l'extrait de l'entrevue avec l'élève 5.19b : « Ce que je vois dans ma tête c'est ce que j'écris : des chiffres. Je prends 10, je prends 6 et je soustrais. Ça me donne 4. »

Les deux autres situations rencontrées, nommées « Détails non pertinents » et « Aucune correspondance », indiquent une évocation partielle de la situation-problème. Soit que l'élève évoque des détails non-significatifs pour la résolution tels des laveurs de vitres qui lavent des fenêtres d'auto sur une plate-forme (5.2a) ou encore qu'il évoque un portrait d'ensemble assez juste de la situation-problème à l'aide d'esquisses dans sa tête. Par exemple, l'élève (6.24b) exprime : « Je me répète le problème plusieurs fois et je vois une petite montagne et un bonhomme dessinés. C'est un peu flou dans ma tête. » Cependant, dans les deux cas, les opérations ne correspondent pas aux représentations mentales évoquées. Par exemple, pour le problème suivant :

> Des laveurs de vitres sont installés sur une plate-forme et lave une première vitre. Après avoir lavé cette vitre, on descend la plate-forme de 70 mètres. On la déplace encore une fois, on ne te dit pas comment. Si on sait qu'après ces deux déplacements, elle est montée de 20 mètres par rapport à la première vitre, dis-moi si elle est montée ou descendue la deuxième fois et de combien ?

L'élève (5.2a) qui évoquait des laveurs de vitres avec une auto sur une plate-forme arrive à la conclusion en reprenant les nombres : « Puisque la plate-forme descend, c'est 70-20= 50mètres. ». L'élève (6.24b) qui évoquait des esquisses, pour sa part, reprend les nombres du problème et résout le problème sans poursuivre la construction de la représentation mentale du problème en essayant d'y faire correspondre des opérations: « Je vois comme une plate-forme qui monte toute la longueur de 90 m sur l'édifice avec des vitres dessinées. Après, je fais 70-20=50. ». Ce qui mène, comme dans le premier cas, à un mode de résolution séquentiel.

Au niveau suivant, on remarque une correspondance plus adéquate entre les représentations mentales et le choix des opérations.

4.2.1.3. Représentations mentales rencontrées dans le Niveau 2

Pour les sujets utilisant un modèle de résolution de comparaison d'états, et ce, dans les deux formes de manifestations de représentations mentales rencontrées, la correspondance entre les représentations mentales de la situation-problème et le choix des opérations est partielle.

Dans la première forme nommée « Représentations d'états », l'élève établit la correspondance entre des états et non des transformations. Il se représente adéquatement la situation-problème en utilisant des positions. Par exemple, pour le problème suivant :

> Paul a une voiture téléguidée qu'il peut faire avancer ou reculer. La première fois, il fait reculer sa voiture de 30 mètres. Il la déplace encore une fois, on ne te dit pas comment. Si on sait qu'après ces deux déplacements, la voiture a reculé de 18 mètres depuis le début, dis-moi si Paul l'a fait avancer ou reculer la deuxième fois et de combien ?

L'élève 5.15a par exemple évoque des dessins et des barres avec des nombres naturels à côté : « L'auto ne bouge pas, elle est rendue. ». Le choix des opérations se fait dans ce cas en comparant des nombres. : « 30 et 18. Je fais 30 –18= 12mètres. ».

Dans la deuxième forme, nommée « Représentations de transformations », l'élève établit un lien entre un nombre et une transformation pendant l'évocation mais n'en tient pas compte pour la totalité de la résolution. Par exemple, pour le même problème énoncé au paragraphe précédent, l'élève 6.1b dit: « Je vois l'auto avancer et reculer jusqu'à 18 mais 18 est plus petit que 30 alors 30-18=12. ».

Les manifestations de représentations mentales rencontrées au niveau 2 impliquent par leur nature (les correspondances partielles) une progression vers une intégration totale du concept nécessaire à la résolution de ce type de problème : les entiers relatifs. Les sujets du niveau 3 semblent avoir intégré ce concept à deux degrés différents.

4.2.1.4. Représentations mentales rencontrées dans le Niveau 3

À ce niveau, les manifestations impliquées dans les deux formes semblent de nature très différente.

Dans la première forme nommée « Évocation de transformations en simulant un mouvement », les élèves utilisent des gestes (ils déplacent leurs mains pour simuler une auto qui bouge par exemple) ou des films mentaux (ils racontent une histoire avec des personnages qui se déplacent) et choisissent simultanément des opérations et des transformations en utilisant parfois des entiers relatifs. Par exemple, pour le problème des laveurs de vitres, l'élève 6.22b fait des gestes avec ses mains en disant : « Y en a un qui lave les vitres puis descend de 70m, ensuite il remonte de 20 m plus haut que la première vitre. ».

Dans la seconde forme nommée « Évocation de concept », les sujets se représentent la situation-problème partiellement et traduisent rapidement les transformations en termes d'entiers relatifs qu'ils manipulent ensuite comme des opérations. Par exemple, l'élève 6.6a associe directement un entier relatif à une transformation : « Je sais qu'une perte de six veut dire –6, après j'utilise seulement les chiffres, ça va plus vite. ». Ces sujets ne se représentent pas beaucoup la situation-problème comparativement aux élèves utilisant l'autre forme de procédure. Cependant, ils semblent bien maîtriser la résolution de problème en comparant les entiers relatifs. Ainsi, pour le problème des laveurs de vitres, l'élève 6.6a exprime : « Ça fait 70 mètres pour me rendre à 0 et 20 mètres de plus pour descendre à -20 mètres. Donc 70 et 20= 90 mètres. ».

4.3. Résumé des analyses

De ces observations, il ressort premièrement que moins l'élève maîtrise la résolution de ce type de problème de reconstruction de transformations, moins il fait appel à la représentation mentale d'un point de référence pour amorcer un processus de résolution.

Ensuite, plus l'élève maîtrise la résolution de ce type de problème, plus la représentation mentale d'un mouvement associé à la transformation est présente et plus l'élève tend à faire correspondre simultanément cette représentation mentale des transformations évoquées à des opérations adéquates.

Cependant, il appert que lorsque le sujet maîtrise très bien la notion d'entiers relatifs, il utilisera moins la représentation mentale de la situation-problème mais associera plutôt des entiers relatifs qui traduisent directement les transformations discernées dans le problème.

Ces analyses ont fait ressortir différentes manifestations de la représentation mentale utilisée pour la compréhension de l'énoncé écrit en résolution de problèmes arithmétiques chez des élèves du troisième cycle primaire. Le chapitre V, « Interprétation des résultats », proposera une correspondance des manifestations de la représentation mentale analysées au schéma de construction de représentation mentale proposé dans le contexte théorique (voir chapitre II).

CHAPITRE V

INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS

Chapitre V

INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS

L'analyse des résultats de cette recherche fait ressortir différentes manifestations de la représentation mentale utilisée pour la compréhension de l'énoncé écrit en résolution de problèmes arithmétiques chez des élèves du troisième cycle primaire. Ce présent chapitre discute d'abord des explications possibles de ces manifestations de la représentation mentale relevées et la construction dans les trois niveaux de résolution sera expliquée en fonction du schéma de construction de représentation mentale proposé dans le contexte théorique (voir chapitre II, section 2.1.3.2.). En deuxième lieu, quelques pistes d'interventions seront présentées pour aider l'élève dans l'apprentissage de la construction d'une représentation mentale du problème à l'étape de compréhension. Finalement, des perspectives de recherche seront présentées.

5.1. Construction d'une représentation mentale du problème en résolution de problèmes arithmétiques

Les explications avancées font d'abord référence aux regroupements des manifestations relevées lors de l'analyse des résultats (voir tableau IV, chapitre IV) qui distingue les trois grands modèles de résolution de problèmes présentés par Poirier (1992) (voir chapitre III, section 3.4.1.): modèle linéaire (niveau1), modèle de comparaison d'états (niveau 2) et modèle de comparaison d'entiers relatifs (niveau 3). Dans son étude, Poirier (1992) explique que ces trois modèles représentent le niveau de maîtrise de la résolution des problèmes de reconstruction de transformations et que l'élève empruntera un modèle de niveau plus élevé au fur et à mesure qu'il augmentera sa compétence. Ce mouvement évolutif dans le processus de résolution laisse supposer le même phénomène en ce qui a trait à la représentation mentale du problème à l'étape de la compréhension du problème. Selon Lamour (2000), les schémas de compréhension du problème déclenchent le processus de recherche de la solution (voir chapitre II, section 2.1.1.) impliquant ainsi une construction de la représentation mentale du problème de plus en plus adéquate selon le niveau de maîtrise atteint par l'élève.

Dans l'analyse des résultats, parmi les trois niveaux de résolution, on retrouve des manifestations qui témoignent de l'acquisition graduelle d'habiletés de construction de la représentation mentale d'un problème (voir tableau III, chapitre IV.).

Il est ressorti de l'analyse que moins l'élève maîtrise la résolution de ce type de problèmes de reconstruction de transformations, moins il fait appel à la représentation mentale d'un point de référence pour amorcer un processus de résolution. Dans la prochaine section, nous proposerons des pistes d'explications.

5.1.1. Utilisation d'un point de référence

Les problèmes présentés aux sujets lors de l'expérimentation avaient entre autres, comme caractéristique l'absence d'état initial (voir chapitre III, section 3.2.2.2.). Cette absence d'état initial implique aussi l'absence d'un point de départ pour amorcer un processus de résolution. Poirier (1992) explique que certains élèves manifestent le besoin d'un état initial soit en jugeant le problème impossible à résoudre parce qu'il n'y a pas d'état initial ou en se dotant eux-mêmes d'un état initial fictif. Cette absence de point de référence initial semble provoquer une amorce dans le processus de construction d'une représentation mentale du problème. L'élève a le besoin de se fixer un repère et de positionner les autres données du problème autour de celui-ci. Si le sujet ne se fixe pas de point de repère, il ne semble pas trouver un sens à l'ordre des opérations qu'il effectue par la suite. Les règles d'actions reposent principalement sur la décision d'emplacement de ce point de repère. L'utilisation d'un point de référence est une représentation mentale d'un point de départ ou d'un objet de référence permettant par la suite d'effectuer une transformation. Les nombres utilisés à l'intérieur des problèmes présentés étant des entiers relatifs, les élèves avaient tendance à rechercher un point zéro.

Jordi (2000) présente dans son étude, une historique de la construction des entiers relatifs et explique les difficultés des mathématiciens à établir un lien entre les nombres positifs et négatifs, c'est-à-dire unifier la droite numérique avec un zéro. Par ailleurs, Jordi (2000) explique l'intégration difficile du concept de nombre relatif dans l'apprentissage des mathématiques. L'élève doit aussi effectuer un passage au delà de 0, sans qu'il n'y soit généralement préparé. Tel que proposé par Jordi (2000), l'apprentissage des nombres entiers relatifs est facilité par l'utilisation de différents modèles: « Un modèle est un schéma, une image ou un discours organisé qui représente la complexité des situations abordées. » (p.43). Le passage au-delà de 0 suppose donc que le nombre 0 devienne un point de référence qui marque une frontière entre les entiers négatifs et positifs. Or, dans notre étude, lors de l'expérimentation, certains sujets spécifiaient clairement que leur point de référence était le nombre 0, d'autres parlaient plutôt de sommet ou encore utilisaient des gestes pour fixer un point de repère.

L'utilisation d'un point de référence semble déterminante dans le degré de maîtrise de la résolution de problèmes faisant appel à la reconstruction de transformations.

À l'intérieur du schéma proposé dans le contexte théorique (voir chapitre II, section 2.1.3.2.), la fixation d'un point de référence se retrouve dans la deuxième section du schéma : la construction progressive d'une procédure. Afin de mieux saisir à quel endroit se situe cette étape de fixation du point de référence, voici la description de la partie « Construction progressive d'une procédure ».

Cette section comprend les opérations qui ont pour fonction de réussir l'activité de compréhension du problème écrit. Dans cette partie, l'individu analyse à nouveau le texte et sélectionne à la relecture de nouvelles informations, des signifiants. Le terme « signifiants » réfère à des termes qui représentent une action, un concept , un objet ou une situation. Plus précisément, dans les données du problème, l'élève identifie celles qui sont pertinentes pour l'atteinte du but de façon à redéfinir les actions et les transformations à opérer en fonction des contraintes de la situation. Il s'engage ensuite à caractériser les connaissances dans un mécanisme de construction de la représentation mentale du problème par la construction d'objets symboliques, la définition de relations entre ces objets, l'attribution de propriétés à ces objets, la définition de contraintes sur les actions susceptibles de modifier les propriétés des objets et leurs relations.

Ce mécanisme de construction de la représentation mentale du problème vise la traduction d'informations non familières ou présentées dans une structure non familière en unités dites propositionnelles (des unités utilisables dans un mode computationnel extrêmement rapide). On nomme cet instant « un espace potentiel de recherche » à l'intérieur duquel l'individu se représente des objets, des concepts, des scènes ou des événements dans un mode analogue, c'est à dire en image sensorielle perçue antérieurement. Dans l'espace potentiel de recherche, l'individu traduit la représentation dans un signifié, soit un mot, une idée ou une courte proposition pertinente, et choisit un format propositionnel.

La représentation mentale du problème dans l'espace potentiel de recherche est constituée par l'interprétation que le sujet se fait des données du problème, à savoir la situation initiale, le but à atteindre et les moyens pour y parvenir.

La fixation d'un point de référence se situe à l'intérieur de l'espace potentiel de recherche lorsque le sujet interprète les données du problèmes et se représente une situation initiale. Lorsqu'il réussit à situer un point de référence, il réussit à mettre en format propositionnel un point de départ, c'est-à-dire à associer une idée, une image, un schéma ou autre à la situation initiale et continuer son processus de résolution.

Par ailleurs, nous avons constaté dans l'analyse des résultats que plus l'élève maîtrise la résolution de ce type de problème, plus la représentation mentale d'un mouvement associé à la transformation est présente et plus l'élève tend à faire correspondre simultanément cette représentation mentale des transformations évoquées à des opérations adéquates. Nous allons reprendre ces manifestations dans la prochaine section.

5.1.2. Construction de la représentation mentale

En analysant l'ensemble des types de construction rencontrés dans les trois niveaux, on peut constater que les sujets utilisent une représentation mentale du problème de plus en plus élaborée et adéquate jusqu'à une diminution par la suite de l'utilisation d'une représentation mentale. Nous reprenons dans les sections suivantes chaque type de manifestations de la représentation mentale du problème rencontré dans les différents niveaux en les comparant au schéma de construction d'une représentation mentale proposé au chapitre II (voir section 2.1.3.2.).

5.1.2.1. Les trois types de construction rencontrés dans le niveau 1

À l'intérieur de ce niveau, on trouve 3 types de construction de la représentation mentale du problème. Dans le premier type de construction « Aucune évocation » (voir tableau IV, chapitre IV), les sujets utilisent les nombres pour choisir des opérations de façon séquentielle. Ils restent au niveau de l'exécution des procédures sans toucher à la construction progressive d'une procédure, se limitant ainsi à la première étape telle que présentée dans le schéma (voir chapitre II, section 3.1.2.2).

Les sujets trouvent une solution qui satisfait l'opération qu'ils ont déterminée de manière séquentielle en juxtaposant les nombres de l'énoncé repris dans un ordre quelconque. La lecture de l'énoncé ne déclenche pas la structuration d'informations écrites, mais plutôt des nombres présentés. Cette apparente absence de structuration des informations écrites soulève certaines questions : Les sujets ont-ils été suffisamment mis en présence de situations-problèmes nécessitant de prendre en compte les informations écrites comme dans ce type de problèmes arithmétiques complexes ? Les sujets ressentent-ils l'intérêt à prendre en compte les informations écrites? Les sujets sont-ils aptes à modéliser la situation-problème? Sont-ils capables d'évoquer une situation-problème adéquatement? Ont-ils atteint la maturation au niveau cognitif pour évoquer une situation-problème et y faire correspondre des opérations?

Dans le deuxième type « Détails non pertinents », les sujets sélectionnent, dans le texte, des informations qui ne sont pas nécessairement pertinentes pour atteindre le but visé, la résolution de problème, et ce sans se servir de ces informations pour définir les actions et les transformations à opérer en fonction des contraintes de la situation.

Dans ce type, les interrogations sont de même nature que dans le premier type mais la tentative de prendre en compte certaines informations écrites laisse supposer que les sujets sont aptes à évoquer certaines informations, même si elles ne sont pas nécessairement utiles. C'est au niveau de la sélection des informations que les difficultés se présentent. Savent-ils repérer les informations significatives? S'interrogent-ils sur la nature des informations à sélectionner?

Dans le dernier type «Aucune correspondance », les sujets construisent une représentation mentale du problème en sélectionnant les informations pertinentes, mais sans pour autant les utiliser pour choisir les règles d'actions et les stratégies adéquates pour résoudre le problème. Dans la démarche, le schéma de résolution ne se réfère pas au schéma de compréhension du problème (voir chapitre II, section 2.1.2.) : les schémas semblent rester sur deux voies parallèles. L'élève manifeste qu'il est apte à se représenter mentalement le problème, mais construit son schème de résolution sans tenir compte de cette représentation. S'interroge-il sur le lien à faire entre la représentation et la résolution? Sait-il traduire les informations représentées mentalement en opérations mathématiques? Et inversement, sait-il traduire les opérations mathématiques en représentations mentales?

Au niveau suivant, on remarque une correspondance plus adéquate, bien qu'encore partielle, entre les représentations mentales et le choix des opérations.

5.1.2.2. Les deux types de construction rencontrés dans le niveau 2

À l'intérieur de ce niveau, on trouve 2 types de représentation mentale du problème. Dans le premier type de construction de la représentation mentale « Représentations d'états » (voir tableau IV, chapitre IV), les sujets construisent une représentation mentale adéquate de la situation-problème, mais de façon statique c'est-à-dire qu'ils font correspondre les nombres à des positions ou « états » plutôt qu'à des transformations. Ils construisent une procédure dans l'espace de recherche sans être aptes à traduire le concept « d'entiers relatifs », qu'ils ne semblent pas avoir ainsi intégré.

Les sujets construisent une représentation mentale statique de la situation. Se sentent-ils le besoin de fixer une image pour arriver à faire correspondre des entiers naturels parce qu'ils ne savent pas manipuler les entiers relatifs? Savent-ils comment se représenter mentalement une situation dynamique, impliquant des transformations?

Dans le deuxième type « Représentations de transformations», les sujets construisent une représentation adéquate de la situation-problème, font correspondre les nombres à des transformations, se construisent une procédure dans l'espace de recherche et traduisent le concept « d'entiers relatifs » en formats propositionnels (par exemple : l'auto recule de 18m, donc –18). Mais ils ne semblent pas se servir de ces formats pour choisir des stratégies adéquates par la suite. Ils ne semblent pas assez familiers avec la manipulation des entiers relatifs à l'intérieur des opérations et choisissent après tout ce travail de construction des règles d'actions avec des entiers naturels, comme s'ils se retrouvaient dans la première partie du schéma « Situation d'exécution de procédures » sans avoir été dans la deuxième partie « Construction progressive d'une procédure ». Ont-ils des modèles permettant de manipuler les entiers relatifs?

Les manifestations de représentation mentale rencontrées au niveau 2 impliquent par leur nature (les correspondances partielles) une progression vers une intégration totale du concept nécessaire à la résolution de ce type de problème, les entiers relatifs. Au niveau suivant, les sujets semblent avoir intégré ce concept à deux degrés différents.

5.1.2.3. Les deux types de construction rencontrés dans le niveau 3

À l'intérieur de ce niveau, on trouve deux types de représentation mentale du problème. Les manifestations impliquées dans ces deux types semblent de nature très différente. Dans le premier type de construction de la représentation mentale « Évocation des transformations en simulant un mouvement» (voir tableau IV, chapitre IV), les sujets utilisent des gestes ou des films mentaux et choisissent simultanément des opérations et des transformations en utilisant parfois des entiers relatifs. Dans l'espace de recherche, les sujets traduisent les données à l'aide de mouvements sans nécessairement recourir à des entiers relatifs.

Dans ce type, la présence de mouvement démontre une manipulation des entiers relatifs. Les sujets créent mentalement le mouvement qu'implique l'entier négatif. Souvent, ils ne tiennent plus compte des signes des nombres dans les opérations finales parce que les signes sont représentés dans le mouvement que cela induisait. Ainsi, un nombre négatif peut être représenté par un recul ou une descente et devenir une opération de soustraction. En considérant l'efficacité du dernier type, on peut supposer que les sujets se retrouvant dans le premier type sont en voie d'acquisition totale du type de problème de reconstruction et du concept d'entiers relatifs.

Dans le dernier type « Évocation de concept», les sujets se représentent la situation-problème et traduisent directement les transformations en entiers relatifs qu'ils manipulent ensuite comme des opérations. Ces sujets se représentent peu la situation-problème comparativement aux sujets utilisant le premier type. On ne retrouve pas de mouvement (gestes ou films mentaux) dans la représentation mentale du problème, mais simplement une représentation mentale d'un point de référence. Les sujets repèrent rapidement les informations écrites pertinentes pour définir leurs règles d'actions et associent rapidement les opérations mathématiques à effectuer avec les entiers relatifs. Ils ne semblent pas entrer dans la section « Construction d'une procédure ». Ils structurent spontanément les informations dans un mode propositionnel et exécutent très rapidement. Ces sujets ne semblent pas avoir besoin de représentation mentale du problème parce qu'ils ne sont pas dans un contexte non familier autant au niveau du type de problème que du concept des entiers relatifs. Ils ont un bagage suffisant pour choisir des stratégies efficaces.

5.1.2.4. La forme générale de la construction de la représentation mentale du problème

Le schéma de la construction de la représentation mentale du problème proposé dans le contexte théorique (chapitre II, section 2.1.3.2.) semble être représentatif de la forme générale de l'ensemble des types rencontrés dans l'analyse des résultats. Ce schéma illustre les étapes franchies lorsque l'individu veut résoudre un problème arithmétique écrit dans un contexte non familier. Les types de construction de la représentation mentale rencontrés présente le mouvement évolutif dans le processus de représentation mentale du problème à l'étape de la compréhension du problème. Les sujets franchissent différentes étapes dans le schéma selon son niveau de maîtrise du problème.

Dans la prochaine section, quelques pistes seront présentées pour aider l'élève à se représenter mentalement de façon plus adéquate des problèmes de ce type.

5.2. Pistes possibles d'intervention

L'analyse des principaux manuels scolaires utilisés au Québec de Poirier (1992) indique le peu de travail qui est fait dans le sens du détachement des états :

> Les problèmes écrits présentés aux élèves du deuxième cycle du primaire, font dans la très grande majorité des cas, intervenir des états. Les problèmes font généralement intervenir un état initial, sur lequel est appliqué une transformation et la question porte sur l'état final...Rien ne prépare ainsi l'élève à affronter cette restructuration conceptuelle importante qui l'attend face au nombre, et que l'appropriation des situations additives considérées rend nécessaire. (p.265)

Poirier (1992) cite Brousseau (1983) qui affirme que le franchissement d'un obstacle exige des interactions répétées de l'élève avec l'objet de sa connaissance et implique très souvent, une restructuration des modèles d'action et du langage. La mise en présence de situations d'enseignement variées où on retrouve des problèmes présentant une structure et un contexte différents est souhaitable pour amener l'élève à développer ses habiletés à décoder et modéliser. À la première étape de la résolution de problème, au moment du décodage des éléments de la situation-problème et sa modélisation, l'élève tente de se représenter mentalement l'énoncé du problème en se référant à des modèles de situations-problèmes résolues antérieurement. Cela suppose que plus un élève aura résolu un grand nombre de situations-problèmes constituées d'une structure non familière et présentant un contexte différent, plus il sera apte à comprendre le problème à résoudre et arriver à formuler des hypothèses, à mobiliser et à utiliser efficacement des ressources pour l'élaboration d'une solution.

Par ailleurs, dans son étude, Jordi (2000) fait un bilan de l'apprentissage des entiers relatifs au Québec. En analysant plusieurs manuels scolaires, elle arrive à la conclusion que dans la grande majorité des situations proposées au niveau primaire , on croit enseigner les entiers relatifs alors qu'on ne fait que travailler les entiers naturels : « Comme on a pu le constater, l'enseignement de Z ne force jamais l'utilisation de Z. ». (Jordi, 2000, p.194). Par exemple, dans un problème demandant de calculer une augmentation du nombre de degrés au courant d'une journée (de –10 à 5 degrés Celcius), l'élève peut effectuer simplement une opération d'addition sans prendre en compte que ce sont des entiers relatifs : « 10 + 5 = 15 ». Pour que le passage des nombres naturels aux entiers relatifs se fasse, Jordi (2000), cite, entre autres, une recommandation de Vergnaud (1989) affirmant l'importance pour l'élève de reconnaître des problèmes variés que posent les nombres négatifs quant à leur signification et quant à leur manipulation. Encore, au niveau du concept des entiers relatifs, la fréquence de la mise en présence de situations-problèmes variées impliquant l'utilisation d'entiers relatifs est souhaitable, non seulement pour l'apprentissage des nombres relatifs, mais aussi pour développer les habiletés à se représenter mentalement un problème qui présente des informations non familières.

Amener l'élève à s'interroger sur ses représentations mentales, lui faire prendre conscience des gestes mentaux qu'il pose est aussi une piste d'interventions souhaitable. Si l'élève reconnaît les gestes mentaux qu'il pose, il sera en mesure de renseigner l'intervenant de l'étape à laquelle il se situe dans la construction de la représentation mentale. L'intervenant pourra le guider à l'étape suivante.

Il ressort de notre étude que les mécanismes de construction de la représentation mentale du problème se divisent en sous-mécanismes, ce qui ouvre de nombreuses perspectives de recherches.

5.3.Perspectives de recherche

Cette étude s'est intéressée à l'analyse de la représentation mentale du problème à l'étape de la compréhension de l'énoncé écrit d'une situation-problème.

Les problèmes utilisés dans notre étude favorisent la construction d'une représentation mentale du problème. Quels autres types de problèmes pourraient favoriser cette construction?

Par ailleurs, il serait avantageux de cerner les déclencheurs à l'intérieur des problèmes qui incitent l'élève à se les représenter mentalement. De même qu'il serait intéressant d'analyser le passage qui s'effectue entre le moment où l'élève se représente adéquatement le problème et le résout efficacement et le moment où son besoin de se représenter le problème diminue de façon abrupte tout en le résolvant de façon plus efficace.

En cernant davantage les éléments précurseurs au développement des habiletés concernant le décodage et la modélisation de situations-problèmes, nous serons alors en mesure de mieux définir les sous-mécanismes de construction de la représentation mentale du problème et d'améliorer les interventions durant l'apprentissage de la résolution de problèmes.

RÉFÉRENCES

Bideaud, J. et Courbois Y. (1998). Image mentale et développement : de la théorie piagétienne aux neurosciences cognitives . Paris : Presses Universitaires de France.

Charnay, R. et Mante M. (1995). Mathématiques. Paris: Éditions Hatier, tome 1.

Charnay, R. et Mante M. (1996). Mathématiques. Paris: Éditions Hatier, tome 2.

Courbois, Y. et Gallina, J.-M. (1999). Scanning visual mental images : A developmental point of view. Cahiers de Psychologie Cognitive, vol.18, p.502-508.

Ehrlich, M.F. et Tardieu, H (1993). Modèles mentaux, modèles de situation et compréhension de textes dans M.F. Erlich, H.Tardieu et M.Cavazza (éd), Les modèles mentaux : une approche cognitive des représentations (p.47-77). Paris : Masson.

Ehrlich, S. (1985). Les représentations sémantiques. Revue de Psychologie française, novembre, tome 30 3/4, p.285-295.

Ehrlich, S. (1990). Sémantique et mathématique. Condé-sur-Noireau : Éditions Nathan.

Gallina, J.-M. (1998). Image mentale et compréhension de textes décrivant des configurations spatiales : vers une approche développementale dans J.Bideaud et Y. Courbois (éd), Image mentale et développement : de la théorie piagétienne aux neurosciences cognitives (p.115-138). Paris : Presses Universitaires de France.

Hagarty, M. et Kozhevikov, M. (1999). Types of Visual-Spatial Representations and Mathematical Problem Solving. Journal of Educational Psychology, vol.91, p.684-689.

Helstrup, T. (1988). Imagery as a Cognitive strategy dans M. Denis, J. Engelkamp et J.T.E Richardson (éd.), Cognitive and Neuropsychological Approaches to Mental Imagery (p.241-250). Dordrecht : Martinus Nijhoff Publishers.

Jonhson-Laird, P.N. (1993). La théorie des modèles mentaux dans M.F. Erlich, H.Tardieu et M.Cavazza (éd), Les modèles mentaux : une approche cognitive des représentations (p.1-20). Paris : Masson.

Jordi, I. (2000). Analyse de l'enseignement des entiers relatifs dans les manuels scolaires et les guides d'enseignement du Québec. Mémoire de maîtrise, Université de Montréal, Montréal, Québec.

Julo, J. (1995). Représentation des problèmes et réussite en mathématiques. Rennes : P.U.R.

Kaufmann, G. (1990). Imagery Effects on Problem Solving dans P.J. Hampson, D.F. Marks et J.T.E Richardson (éd), Imagery and Current Developments (p. 169-196). London : Routledge.

Kintsh, W. (1988). The role of knowledge in discourse comprehension : a construction-integration model. Psychological review, vol.95, 2, p.163-182.

Lamour, J. (1999). L'évolution des niveaux de compétence dans l'appréhension de problèmes additifs chez les enfants de C.M.2. Thèse de doctorat, Université de Rennes, Rennes, Haute-Bretagne.

M.É.Q.. (2000). Programme de formation de l'école québécoise.

McNamara, T.P. (1994). Knowledge Representation dans R.J. Sternberg (éd.), Thinking and Problem Solving (p.81-117). London : Academic Press.

McNamara, T.P. (1999). Single-Code versus Multiple-Code Theories in Cognition dans R.J. Sternberg (éd.), Nature of Cognition (p.113-135). Cambridge : Massachussetts Institute of Technology Press.

Poirier, L. (1992). Étude des modèles implicites mis en œuvre par les enfants lors de la résolution de problèmes arithmétiques complexes mettant en jeu la reconstruction d'une transformation. Thèse de doctorat, Université du Québec à Montréal, Montréal, Québec.

Poirier, L. (2001). Enseigner les maths au primaire. Saint-Laurent: Éditions du Renouveau pédagogique.

Richard, J.-F. (1985). La représentation du problème. Revue de Psychologie française, novembre, tome 30 3/4, p.277-284.

Karsenti, T., Savoie-Zacj, L. (2000). Introduction à la recherche en éducation, Sherbrooke, Québec: CRP.

Vergnaud, G. (1985). Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation. Revue de Psychologie française, novembre, tome 30 3/4, p.245-252.

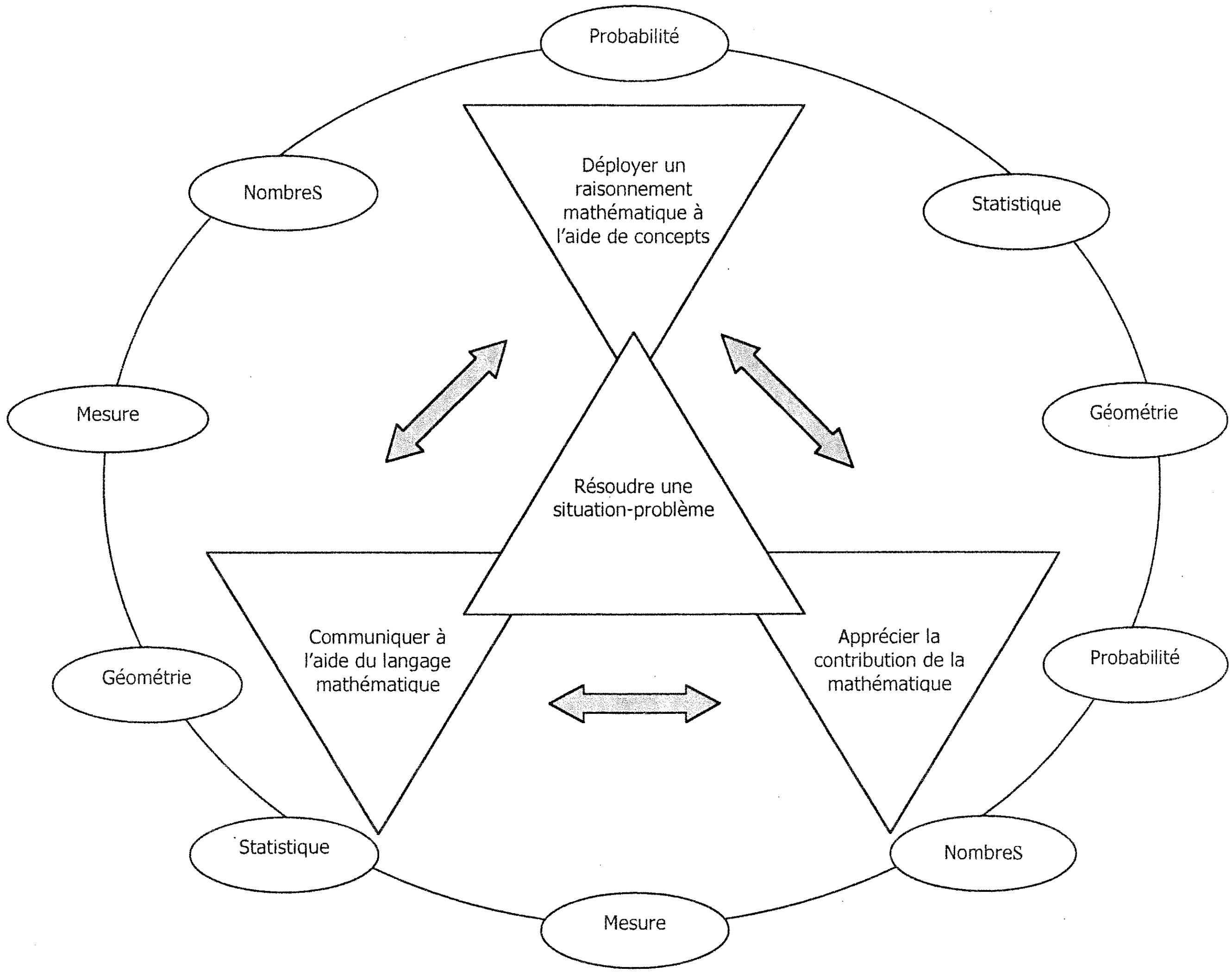
Vergnaud, G. (1994). L'enfant, la mathématique et la réalité. Berne : Peter Lang.

Van Grunderbeeck, N. (1994). Les difficultés en lecture, diagnostic et pistes d'intervention. Boucherville : Gaëtan Morin.

Zimmerman, H. (1989). A Design To Improve Children's Competencie's in Solving Mathematical Word Problems. Mémoire de maîtrise, Université Nova, Nouvelle-Écosse.(microfiche)

ANNEXE I

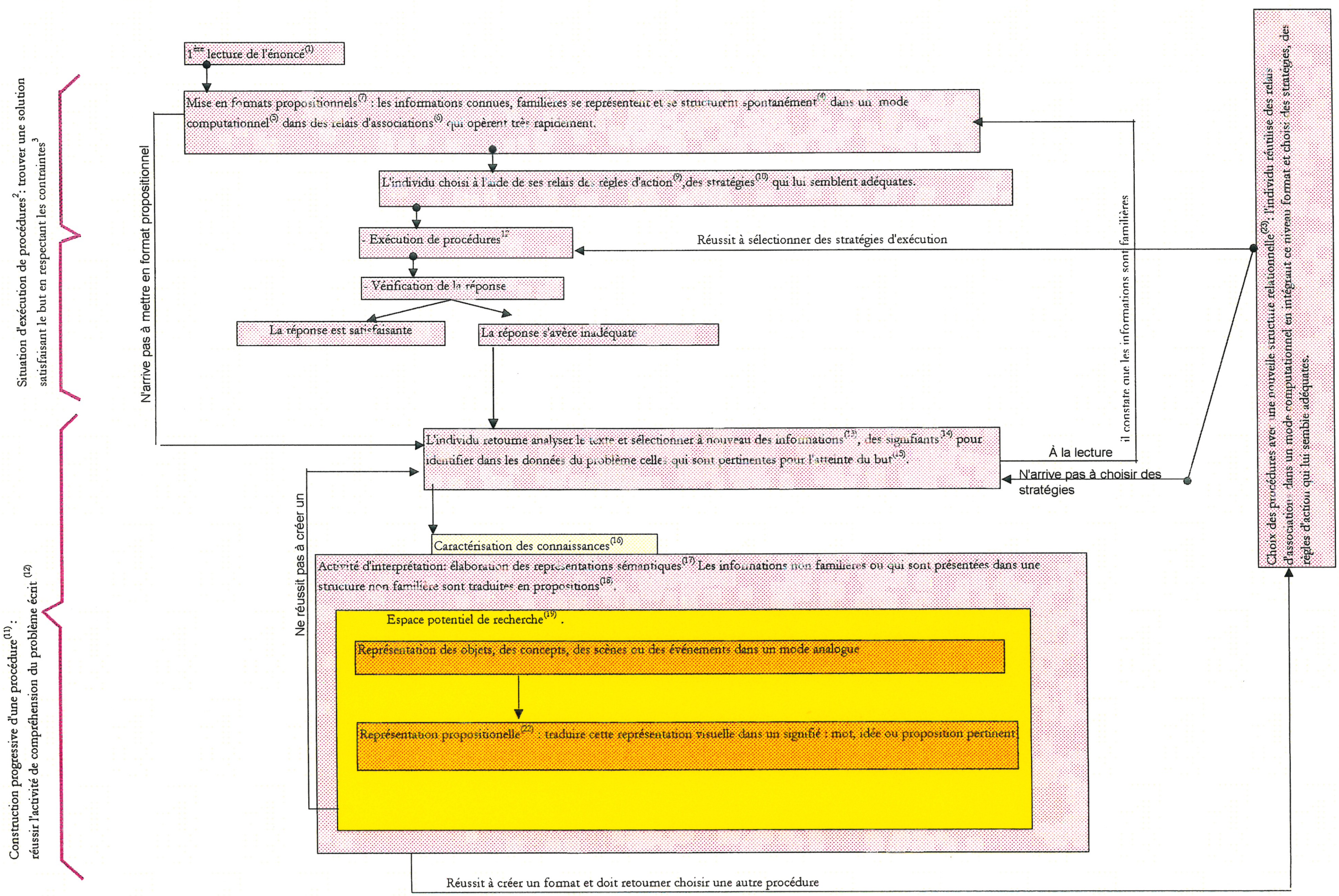
Mathématique primaire



Les quatre compétences et le contenu disciplinaire de la mathématique au primaire (M.É.Q. (2000), p.213)

ANNEXE II

LA CONSTRUCTION D'UNE REPRÉSENTATION MENTALE À L'ÉTAPE DE COMPRÉHENSION D'UN PROBLÈME MATHÉMATIQUE



ANNEXE III

Test écrit

Troisième cycle

A - 8 problèmes de reconstruction

2 problèmes de type 3

(Collection discrète)

Ian se rend au marché aux puces avec sa collection de roches. Au premier kiosque, il achète 13 roches. Il s'arrête à un second kiosque ; on ne te dit pas ce qu'il a fait. Si on sait que lorsqu'il retourne chez lui, il a augmenté sa collection de 8 roches, a-t-il acheté ou vendu des roches au deuxième kiosque et combien ?

(Déplacement)

David a escaladé une paroi rocheuse afin d'y installer un drapeau. Une fois le drapeau installé, il monte de 130 mètres. Il se déplace encore une fois, on ne te dit pas comment. Si on sait qu'après ces deux déplacements, il est monté de 80 mètres par rapport au drapeau, est-il monté ou descendu la deuxième fois et de combien ?

2 problèmes de type 4

(Collection discrète)

Guillaume se rend au marché aux puces avec sa collection de roches. Au premier kiosque, il vend 10 roches. Il s'arrête à un second kiosque ; on ne te dit pas ce qu'il a fait. Si on sait que lorsqu'il retourne chez lui, il a diminué sa collection de 6 roches, a-t-il acheté ou vendu des roches au deuxième kiosque et combien ?

(Déplacement)

Frédéric a escaladé une paroi rocheuse afin d'y installer un drapeau. Une fois le drapeau installé, il descend de 100 mètres. Il se déplace encore une fois, on ne te dit pas comment. Si on sait qu'après ces deux déplacements, il est descendu de 60 mètres par rapport au drapeau, est-il monté ou descendu la deuxième fois et de combien ?

<u>2 problèmes de type 5</u>

(Collection discrète)

Alexandre se rend au marché aux puces avec sa collection de roches. Au premier kiosque, il achète 12 roches. Il s'arrête à un second kiosque ; on ne te dit pas ce qu'il a fait. Si on sait que lorsqu'il retourne chez lui, il a diminué sa collection de 9 roches, a-t-il acheté ou vendu des roches au deuxième kiosque et combien ?

(Déplacement)

Patrick a escaladé une paroi rocheuse afin d'y installer un drapeau. Une fois le drapeau installé, il monte de 70 mètres. Il se déplace encore une fois, on ne te dit pas comment. Si on sait qu'après ces deux déplacements, il est descendu de 30 mètres par rapport au drapeau, est-il monté ou descendu la deuxième fois et de combien ?

<u>2 problèmes de type 6</u>

(Collection discrète)

Mathieu se rend au marché aux puces avec sa collection de roches. Au premier kiosque, il vend 11 roches. Il s'arrête à un second kiosque ; on ne te dit pas ce qu'il a fait. Si on sait que lorsqu'il retourne chez lui, il a augmenté sa collection de 7 roches, a-t-il acheté ou vendu des roches au deuxième kiosque et combien ?

(Déplacement)

Jean a escaladé une paroi rocheuse afin d'y installer un drapeau. Une fois le drapeau installé, il descend de 70 mètres. Il se déplace encore une fois, on ne te dit pas comment. Si on sait qu'après ces deux déplacements, il est monté de 20 mètres par rapport au drapeau, est-il monté ou descendu la deuxième fois et de combien ?

B - 2 problèmes sans reconstruction

(**Collection discrète**)

Élaine se rend au marché aux puces avec sa collection de roches. Au premier kiosque, elle vend 8 roches. Elle s'arrête à un second kiosque et elle achète 6 roches. A-t-elle augmenté ou diminué sa collection de roches et de combien ?

(**Déplacement**)

Sébastien a escaladé une paroi rocheuse afin d'y installer un drapeau. Une fois le drapeau installé, il descend de 80 mètres. Ensuite, il monte de 60 mètres. Après ces deux déplacements, est-il monté ou descendu par rapport au drapeau et de combien ?

C - 2 problèmes avec reconstruction et état initial de type 6

(**Transformation**)

Pénélope a 17 roches. Elle se rend au marché aux puces avec sa collection et vend 9 roches au premier kiosque. Elle s'arrête à un second kiosque ; on ne te dit pas ce qu'elle a fait. Si on sait que lorsqu'elle retourne chez elle, elle a augmenté sa collection de 5 roches, a-t-elle acheté ou vendu des roches au deuxième kiosque et combien ?

(**Déplacement**)

Geneviève a escaladé une paroi rocheuse afin d'y installer un drapeau à 90 mètres de hauteur. Une fois le drapeau installé, elle descend de 70 mètres. Elle se déplace encore une fois, on ne te dit pas comment. Si on sait qu'après ces deux déplacements, elle est montée de 30 mètres par rapport au drapeau, est-elle montée ou descendue la deuxième fois et de combien ?

ANNEXE IV

Problèmes d'entrevue

Troisième cycle

Première partie : Vérification

Type 4 *(problème déjà fait dans le carnet)*

(Déplacement)

Frédéric a escaladé une paroi rocheuse afin d'y installer un drapeau. Une fois le drapeau installé, il descend de 100 mètres. Il se déplace encore une fois, on ne te dit pas comment. Si on sait qu'après ces deux déplacements, il est descendu de 60 mètres par rapport au drapeau, est-il monté ou descendu la deuxième fois et de combien ?

Deuxième partie : Représentation mentale

Type 4 *(nouveaux problèmes présentés)*

(Collection)

Catherine joue aux billes. À la première partie, elle perd 10 billes. Elle joue encore une fois ; on ne te dit pas ce qui s'est passé. Si on sait qu'après ces deux parties, elle a perdu 6 billes, a-t-elle gagné ou perdu à la deuxième partie et combien ?

(Déplacement)

Paul a une voiture téléguidée qu'il peut faire avancer ou reculer. La première fois, il fait reculer sa voiture de 30 mètres. Il la déplace encore une fois, on ne te dit pas comment. Si on sait qu'après ces deux déplacements, la voiture a reculé de 18 mètres depuis le début, dis-moi si Paul l'a fait avancer ou reculer la deuxième fois et de combien ?

Type 6

(Déplacement)

Des laveurs de vitres sont installés sur une plate-forme et lave une première vitre. Après avoir lavé cette vitre, on descend la plate-forme de 70 mètres. On la déplace encore une fois, on ne te dit pas comment. Si on sait qu'après ces deux déplacements, elle est montée de 20 mètres par rapport à la première vitre, dis-moi si elle est montée ou descendue la deuxième fois et de combien ?

ANNEXE V

Verbatim

Entrevue no.15

*Code : **6.22b***

Date de naissance : xx mai 1989 **Âge :** 12 ans

*Niveau : **6ème année*** **Sexe :** F

*Date : **31 mai 2001***

Heure début : 10h19 **Durée de l'entrevue :** 16 min.

Expérimentatrice : Lise-Anne St.Vincent

Annie, ce n'est pas très compliqué. Je te passe un premier problème et puis tu le lis, tu le résous et tu racontes le problème, tu me racontes comment tu le résous.

Ok.

Ok.

(Elle lit silencieusement le problème.)

Ici là, quand t'écris il est descendu de 60 mètres là, c'tu parce qu'y est 60 mètres en dessous du drapeau ou parce qu'y a descendu du drapeau ?

Ben, lis-le fort puis essaie de le figurer. C'est important que je t'en donne pas trop.

Ok. Frédéric a escaladé une paroi rocheuse afin d'y installer un drapeau. Une fois le drapeau installé, il descend de 100 mètres. Il se déplace encore une fois, on ne te dit pas comment. Si on sait qu'après ces deux déplacements, il est descendu de 60 mètres par rapport au drapeau, est-il monté ou descendu ?

Puis là, ça répond à ta question ?

Oui, un peu... mais...mais ça veut dire qu'y est monté de 40 mètres ?

Comment tu t'y es prise ?

Ben, si on dit qu'y est descendu de 100 mètres...

Mmm mmm...

Pis là après y était 60 mètres en dessous du drapeau…ben c'est 40 mètres. Fait qu'y est monté de 40 mètres.

Ok, alors monté de 40 mètres. Es-tu capable de m'expliquer ce qui se passe dans ta tête pendant que t'essaies de le résoudre ?

Ben…ce qui se passe dans ma tête…

Comment tu te représentes le problème ? Qu'est-ce qui se passe dans ta tête ?

Ben moi je suis plutôt visuelle fait que je fais des petits dessins d'habitude.

Ok. Dans ta tête, c'est-tu avec des dessins ?

Oui.

Alors tu vois des dessins, tu vois une montagne ?

Ben oui.

Tu pourrais m'expliquer encore ce que tu vois ? Le plus de détails possible.

Ben…Je peux-tu dessiner ?

Oui. Vas-y.

Mettons que je vois une montagne de même. Pis là, mettons que le drapeau est ici. Pis là y descend de 100 mètres. Pis après y est 60 mètres en dessous. Fait que ça fait 40 mètres.

Alors, si je comprends bien, il descend de 100 mètres ?

Oui 100 mètres ici.

100 mètres ici.

Après y est à 60 mètres en dessous. Pis après, ben ça veut dire qu'y est monté de 40 mètres.

Puis quand tu le vois, parce que tu me dis que tu le vois dans ta tête, tu vois une montagne en dessin.

Mmm mmm.

Tu vois autre chose ? Tu vois le drapeau ?

Non, je vois rien que ça.

Mais tu as dessiné le drapeau. Tu ne le voyais pas ?

Oui, je le vois mais c'est tout.

Tu ne vois pas de bonhomme ? Tu vois juste ça. Tu vois des chiffres ou tu ne les vois pas ?

Oui je vois des chiffres.

Est-ce que ça bouge ou pas vraiment ? Tu vois jusqu'où ils sont rendus à chaque fois ?

Oui, où ils sont rendus.

Ok. Je t'en passe un autre. Tu peux déposer ton crayon. C'est la même chose, tu le lis et tu me le raconte. Tu me dis comment tu fais pour le résoudre.

(Elle lit silencieusement.)

Es-tu en train de le lire dans ta tête ?

Ben, elle a gagné 4 billes.

Raconte-moi le problème.

(Elle lit à haute voix.)
Catherine joue aux billes. À la première partie, elle perd 10 billes. Elle joue encore une fois ; on ne te dit pas ce qui s'est passé. Si on sait qu'après ces deux parties, elle a perdu 6 billes, a-t-elle gagné ou perdu à la deuxième partie et combien ?
Ben, si elle perd 10 billes à la première partie et pis on ne sait pas combien elle a gagné ou perdu à la deuxième partie, pis qu'à la fin elle se retrouve avec 6 billes de moins qu'au début, ça veut dire qu'elle a gagné 4 billes à la deuxième.

Est-ce que tu te représentes ce problème là dans ta tête d'une certaine façon ? Es-tu capable de m'expliquer le plus en détails possible comment ça se passe ?

Oui. Ben, je vois les 10 billes qu'elle a perdues.

Tu vois des vraies billes ou des dessins ?

Des vraies billes.

Ok. Ensuite ?

Pis ensuite je vois qu'elle a 6 billes de moins qu'au début. Ça veut dire qu'elle a gagné 4 billes.

Quand tu dis que tu vois le « 10 billes » et qu'après tu dis que tu vois 6 billes. Est-ce que vois le « 6 billes » à côté ou le « 10 billes » n'existe plus c'est le « 6 billes » qui est là ?

Le « 10 billes » existe plus.

Est-ce que tu vois Catherine ou tu ne la vois pas vraiment ?

Non.

Alors tu ne vois que les billes. Ok. Je t'en donne un autre ça va super bien. La même chose.

(Elle lit silencieusement.)

Puis ?

Il la fait avancer de 12 mètres.

Est-ce que tu es capable de me raconter le problème ?

Oui. Ben, y a Paul qui a une voiture téléguidée qu'il peut faire avancer ou reculer. Pis la première fois il l'a fait reculer de 30 mètres. Pis dans la deuxième des parties on sait pas ce qui se passe. Pis à la fin y a reculé de 18 mètres depuis le début. Fait que là il faut savoir s'il l'a faite reculer ou avancer et de combien.

Comment tu l'as résout ?

Ben, la voiture elle a reculé de 30 mètres. Pis, après le deuxième déplacement, on voit qu 'elle est reculée de 18 mètres. Fait qu'on fait 30-18 et ça fait 12.

Qu'est-ce qui se passe dans ta tête cette fois-ci ?

Ben, on voit l'auto.

Tu vois l'auto.

Elle recule de 30 mètres.

Ok.

Pis après on la voit qui a avancé parce qu'elle est rendue à 10 mètres.

Qui a avancé. Donc, tu ne la vois pas se déplacer. Tu la vois juste quand elle est rendue.

Mmm mmm.

Quand tu vois l'auto, tu vois une couleur ou une auto floue.

Une auto floue.

Ok, c'est beau. Est-ce que tu vois des chiffres à terre, est-ce que tu vois des barres ?

Non.

Bon, un dernier à résoudre.

(Elle lit silencieusement.)

Tu veux m'expliquer maintenant comment tu le résous ?

Euh, d'abord je sais pas ce que c'est des laveurs de vitres qui se déplace sur une plate-forme.

Tu ne sais pas ce que c'est ? Tu sais ce que c'est une vitre ?

Oui.

Alors des laveurs de vitres sur une plate-forme tu sais ce...

Ah oui qui lave des ! (Elle fait le geste de tenir une pôle et mime un laveur.)

Voilà !

Ok ! Ils montent sur une plate-forme... Ben, il est monté de 90 mètres.

Es-tu capable de m'expliquer comment tu le résous ?

Oui. Ben, on voit qu'ils lavent la vitre. Ben, y a en un qui lave une vitre et pis y descend de 70 mètres. Pis après, il est en haut de la première vitre mais 20 mètres plus haut. Fait que 70+20 pis ça fait 90.

Es-tu capable de me dire ce que tu vois ?

Ben oui. C'est un laveur de vitres qui lave une vitre. Pis là il descend de 70 mètres. Pis là on voit qu'il est en haut de la première vitre.

Tu vois les laveurs de vitres, tu vois l'édifice ?

Je vois plus les vitres.

Est-ce que tu les vois bouger ou quand ils sont rendus ?

Quand il est rendu en bas.

Est-ce que tu vois le bonhomme clair ou flou ?

Je vois plus une main qui lave les vitres.

De proche ou de loin ?

De proche

Est-ce que tu vois des chiffres à côté ?

Non.

Ok, c'est tout. Je te remercie.

ANNEXE VI

Tableau I
Analyse détaillée des résultats des élèves de cinquième et sixième année au test écrit pour les problèmes de types 3, 4, 5 et 6

Rouge : modèle linéaire
Jaune : comparaison d'états
Turquoise : comparaison d'entiers relatifs

Élève	Type 3		Type 4		Type 5		Type 6		Modèle
	C	D	C	D	C	D	C	D	
5.1a	L	L	L	AN	L	AN	L	AN	L
5.2a	L	L	L	L	L	L	L	L	L
5.3a	L	L	AN	L	L	L	L	L	L
5.4a	AN	AN	AN	AN	AN	L	AN	C	L
5.5a	L	C	AN	L	L	L	L	C	L
5.6a	AN	AN	AN	AN	L	L	L	AN	L
5.7a	L	L	L	L	L	L	L	L	L
5.8a	L	C	AN	AN	L	AN	L	AN	L
5.9a	L	L	L	C	L	C	L	C	L
5.10a	C	C	L	L	L	L	L	L	L
5.11a	L	C	C	L	AN	L	L	L	L
5.12a	L	C	L	AN	L	L	C	C	L
5.13a	AN	ER	L	C	ER	ER	L	ER	ER
5.14a	C	C	C	C	L	ER	L	ER	C
5.15a	C	C	C	C	C	C	C	C	C
5.16a	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER
5.17a	C	C	C	C	AN	AN	L	AN	C
5.18a	C	C	C	C	L	C	L	C	C
5.19a	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER
5.20a	C	C	C	C	C	C	C	AN	C
5.21a	ER	ER	ER	AN	ER	ER	ER	ER	ER
5.22a	C	AN	C	C	ER	ER	ER	ER	ER
5.23a	AN	AN	AN	AN	L	L	C	L	L
5.24a	C	C	C	C	C	C	L	C	C
5.25a	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER
5.26a	C	C	C	C	C	C	C	C	C
5.27a	L	L	L	L	L	L	L	L	L
5.28a	L	C	C	C	L	C	ER	L	C
5.1b	C	AN	C	L	L	L	AN	C	C
5.2b	L	AN	AN	L	AN	AN	AN	AN	L
5.3b	C	C	C	C	L	L	L	L	C
5.4b	AN	AN	L	AN	L	C	AN	AN	L
5.5b	L	L	L	L	L	L	AN	L	L
5.6b	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER
5.7b	AN	L	AN	L	AN	L	L	C	L
5.8b	C	C	C	C	ER	ER	ER	ER	ER
5.9b	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER
5.10b	C	C	C	C	AN	ER	AN	ER	C
5.11b	AN	AN	AN	L	AN	L	AN	AN	L
5.12b	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER
5.13b	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER
5.14b	L	AN	L	AN	L	AN	AN	AN	L
5.15b	C	C	AN	C	C	L	C	L	C
5.16b	C	L	C	C	C	L	C	L	C
5.17b	L	C	C	C	C	L	L	AN	C
5.18b	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER	AN	ER
5.19b	L	L	L	L	L	L	L	L	L
5.20b	L	L	AN	L	AN	L	L	AN	L

5.21b	AN	C	L	C	AN	AN	AN	AN	C
5.22b	C	C	AN	C	AN	C	C	AN	C
5.23b	C	C	C	C	AN	L	L	C	C
5.24b	AN	AN	C	C	L	L	L	C	C
5.25b	C	C	C	C	C	C	C	C	C
5.26b	L	C	C	C	C	C	L	C	C
6.1a	L	L	AN	AN	C	AN	L	AN	L
6.2a	L	C	L	C	C	L	L	L	L
6.3a	C	C	C	L	L	L	C	C	C
6.4a	L	C	C	C	AN	C	AN	AN	C
6.5a	C	L	C	C	C	C	AN	ER	C
6.6a	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER
6.7a	C	C	C	L	L	L	L	ER	L
6.8a	AN	C	C	C	AN	C	AN	C	C
6.9a	C	C	AN	L	C	C	AN	C	C
6.10a	L	AN	L	AN	AN	AN	L	AN	L
6.11a	L	C	AN	C	C	C	AN	C	C
6.12a	AN	AN	AN	C	AN	C	AN	AN	C
6.13a	L	L	L	L	L	L	L	L	L
6.14a	L	C	C	C	L	L	C	AN	C
6.15a	AN	AN	AN	AN	AN	C	AN	AN	C
6.16a	L	L	C	AN	C	C	AN	L	C
6.17a	L	L	C	L	L	C	L	C	L
6.18a	ER	C	ER	ER	ER	L	L	L	ER
6.19a	C	C	C	C	L	AN	AN	AN	C
6.20a	L	L	L	AN	L	L	L	L	L
6.21a	L	L	L	L	L	L	L	L	L
6.22a	L	L	C	C	C	C	C	C	C
6.23a	L	L	C	C	C	C	C	C	C
6.24a	C	C	C	C	L	L	L	L	C
6.25a	ER	ER	ER	ER	C	C	C	ER	ER
6.26a	AN	ER	AN	ER	AN	ER	AN	AN	ER
6.27a	L	ER	C	ER	ER	C	ER	ER	ER
6.28a	C	C	C	C	AN	C	AN	ER	C
6.1b	C	C	C	C	C	C	AN	C	C
6.2b	L	L	C	AN	C	AN	AN	AN	C
6.3b	C	C	L	L	L	L	L	L	L
6.4b	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER
6.5b	ER	C	ER	ER	C	ER	ER	ER	ER
6.6b	AN	C	AN	C	C	C	L	C	C
6.7b	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER
6.8b	L	C	C	C	C	C	C	L	C
6.9b	C	C	C	C	C	C	L	L	C
6.10b	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER
6.11b	AN	C	AN	C	C	ER	AN	L	C
6.12b	ER	C	AN	ER	C	ER	ER	ER	ER
6.13b	ER	C	ER	C	ER	ER	ER	ER	ER
6.14b	ER	C	ER	AN	AN	C	C	C	C
6.15b	C	C	ER	C	ER	ER	ER	ER	ER
6.16b	C	C	ER	C	C	C	ER	ER	C
6.17b	C	C	C	C	C	C	C	C	C
6.18b	L	C	C	AN	AN	AN	C	ER	C
6.19b	C	C	C	C	C	ER	ER	C	C
6.20b	L	C	C	AN	C	L	AN	C	C
6.21b	C	C	C	C	C	C	C	C	C
6.22b	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER
6.23b	C	C	L	C	L	C	L	L	L
6.24b	L	C	L	L	L	L	C	L	L
6.25b	L	C	ER	ER	C	ER	C	ER	ER
6.26b	AN	C	C	C	C	C	AN	L	C
6.27b	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER	ER
6.28b	C	C	C	C	C	C	AN	C	C

Total
sur 110
élèves

L	38	21	21	22	34	35	38	27	33
C	35	57	45	49	34	36	21	29	50
ER	21	19	23	21	22	28	25	31	27
AN	16	13	21	18	20	11	26	23	

%

L	35	19	19	20	31	32	35	25	30
C	31	52	41	45	31	33	19	26	45
ER	19	17	21	19	20	25	23	28	25
AN	15	12	19	16	18	10	23	21	