A1.1
G
1023

L'évaluation par option réelle :
Une application au secteur du cuivre

Par
Jasmin Valade
VALJ01058003

Rapport de recherche de maîtrise
Sous la direction de M. Marcel Boyer

Université de Montréal, sciences économiques
Décembre 2005

Sommaire

L'évaluation de la valeur présente nette (VPN) est la méthodologie la plus utilisée dans le monde financier. Par contre, cette méthode est statique et n'inclut pas la flexibilité inhérente qu'ont les gestionnaires de projets. Or, en appliquant les techniques d'évaluations d'options développées depuis les derniers 30 ans, une nouvelle approche, dite d'évaluation par option réelle, a fait son apparition. Ainsi, en réussissant à valoriser les options imbriquées dans chaque projet, l'approche option réelle permet de mieux évaluer la valeur de chaque projet. Elle permet aussi de faire une meilleure optimisation de l'allocation des ressources, car certains projets qui étaient rejetés par l'approche traditionnelle sont maintenant développés.

Dans notre rapport de recherche, nous proposons un modèle de développement d'une mine de cuivre qui incorpore une option d'attente américaine et une option d'attente européenne. Les résultats démontrent que l'identification de la flexibilité managériale et son évaluation selon l'approche option réelle peut changer la VPN d'un projet, mais aussi changer le moment optimal d'investissement initial. Par contre, nous démontrons aussi que selon certaines caractéristiques, la valeur des options peut être négligeable ou même difficile à calculer.

Table des matières

Liste des tableaux

I. Introduction

La prise de décision dans le monde corporatif est basée sur des critères de création de valeur. Lorsqu'un projet suggéré crée de la valeur pour l'entreprise, il devrait être considéré comme étant bénéfique. Ainsi, l'entreprise calculera la valeur actualisée des profits futurs que génèrera le projet et soustraira les coûts d'investissements. Si cette valeur finale, dénommée la valeur présente nette (VPN), est positive, alors le projet sera entamé surtout s'il n'y a pas de restrictions sur l'utilisation du capital. Par contre, même si la VPN est le critère le plus fréquemment utilisé dans le monde des affaires, elle contient toutefois certains défauts en présence d'incertitude sur les cash-flows futurs.

Premièrement, l'analyse de la VPN est un processus statique qui ignore complètement la présence de flexibilité dans un projet incertain. Ainsi, la présence d'une équipe de gestionnaires de projet confirme le fait qu'un projet fonctionne rarement comme il l'a été conçu. Ces derniers vont donc prendre des décisions au cours de la durée du projet et vont soit décider d'entreprendre une expansion si les conditions économiques sont favorables ou d'entreprendre une contraction dans des conditions opposées. Ce ne sont que deux exemples de leur flexibilité, par contre ceux-ci représentent des cas où les cash-flows futurs espérés sont beaucoup plus difficiles à évaluer, ainsi que la crédibilité de la VPN initialement trouvée.

Deuxièmement, en présence d'incertitude, la pratique actuelle dans l'utilisation de la VPN consiste à trouver un taux d'escompte (souvent sans risque) et ensuite à l'ajuster par une prime de risque. Cette prime de risque se base souvent d'après des modèles financiers comme le « Capital Asset Pricing Model » (CAPM) qui comprennent certaines hypothèses difficiles à prouver en réalité. Qui plus est, dans le cas d'investissements réels, le risque assigné à chaque projet est différent et donc chaque projet nécessite sa propre prime de risque. De plus, lorsque certains aspects d'un projet sont fixes, notamment les salaires des employés à contrat, et que d'autres ne le sont pas, telles les ventes, il y a présence d'effet de levier qui fait en sorte que le taux d'escompte ajusté par le risque (RADR) devient éventuellement un nombre aléatoire. Ainsi, il n'y a pas de RADR qui capture la valeur exacte du projet.

De plus, la méthode de la VPN démontre seulement si un projet est profitable, mais ne démontre pas si le projet devrait être adopté immédiatement ou bien retardé pour maximiser sa valeur. L'opposé de cet exemple est que la VPN n'aide pas non plus à prendre en compte la réouverture potentielle d'un projet dans la prise de décision pour son abandon.

Le besoin de trouver une méthode pour mettre en valeur la flexibilité imbriquée dans un projet a stimulé l'utilisation de la théorie des options. L'adaptation par les gestionnaires aux conditions changeantes économiques leur permet de mieux gérer le risque et donc de le mitiger sans toutefois renoncer au plein potentiel des profits. Cet aspect asymétrique de la présence de décisions dynamiques est une autre composante de la valeur d'un projet qui transforme la distribution de la VPN en plaçant plus de poids vers le potentiel de profits au détriment des pertes. Ainsi, en combinant la VPN traditionnelle avec cette nouvelle composante de flexibilité, nous obtenons une «VPN élargie » qui est à la base de la théorie des options réelles. De ce fait, la VPN traditionnelle devient la partie passive de la valeur d'un projet et l'application d'options réelles devient la partie active de cette nouvelle valeur.

Nous allons démontrer que l'analyse par option réelle ajoute définitivement de la valeur à un projet en capturant la flexibilité des gestionnaires, ce que l'analyse par la VPN néglige. Par contre, dans le but de cibler notre analyse, nous allons nous concentrer surtout sur les aspects d'options réelles présents dans le développement de projets au sein du domaine des ressources naturelles. De plus, nous voulons démontrer la dominance de l'analyse option réelle vis-à-vis l'étude de la VPN traditionnelle quant à l'allocation optimale des ressources économiques. Ainsi, notre modèle sera développé par rapport à un projet minier marginal, c'est-à-dire avec une VPN nulle.

La deuxième section de notre recherche définira l'analyse option réelle tout en expliquant en détail les applications variées. Dans la troisième section, vous trouverez une revue de la littérature sur le sujet. La quatrième section exposera un modèle d'application au secteur minier. La cinquième section s'attardera sur les extensions possibles du modèle, suivie d'une conclusion à notre recherche recherche.

II. Définition de l'approche option réelle

Depuis les articles fondamentaux sur les options par Black et Scholes (1973) et Merton (1973), les théories et le marché des options financières sont en plein essor. Cependant, l'évolution de cette littérature a eu un effet boule de neige sur le monde de l'évaluation de projets. C'est ainsi qu'on vît apparaître une nouvelle application à ces théories d'options et ce, en les appliquant aux choix possibles de décisions des gestionnaires. Dans l'évaluation de projets traditionnels, les analystes financiers utilisent depuis bien longtemps la VPN pour savoir si un projet est rentable.[1] Cette démarche consiste à estimer les cash-flows futurs et ensuite à les escompter au présent. Par la suite, l'investissement initial est soustrait et si la valeur finale est positive, l'investissement est alors rentable. Ceci est démontré par l'équation ci-dessous[2] :

$$VPN = \sum_{t=1}^{T} \frac{CF_t}{(1 + RADR)^t} - I_0 \tag{1}$$

Dans cette équation, CF_t désigne les cash-flows au temps t et I_0 représente l'investissement initial. À nouveau, RADR signifie le taux d'escompte ajusté pour le risque.

L'approche option réelle propose que cette équation sous-estime la rentabilité d'un investissement irréversible car elle n'incorpore pas la flexibilité présente dans le développement d'un projet en présence d'incertitude. Or, un gestionnaire a souvent de la flexibilité quant à retarder, réduire ou augmenter l'envergure et abandonner ou remettre en marche un projet. Ces options d'opération, présentes dans la plupart des projets portant sur l'exploitation des ressources naturelles, permettent aux gestionnaires de transformer le projet depuis son plan initial, selon les nouvelles conditions économiques de l'heure. Puisque les gestionnaires réagissent à l'acquisition de nouvelles informations, le modèle de la VPN doit contenir une composante qui donne de la valeur à cette flexibilité. L'approche option réelle ajoutera alors cette composante selon la valeur des

[1] Slade (2001) p. 195. En effet, c'est Fisher en 1907 qui a démontré sa puissance dans l'évaluation d'obligations peu risquées.
[2] Certes, cette expression est exacte dans l'évaluation de cash-flows sans risque comme des bons du trésor canadiens, où le taux sans risque remplace le RADR.

options imbriquées dans le projet. Ainsi, un projet d'investissement sera composé d'une collection d'options (d'achat et/ou de vente), ayant comme actif sous-jacent la valeur brute du projet réalisable selon l'option. L'équation suivante résume cette approche[3] :

$$\text{VPN élargie} = \sum_{t=0}^{T} \frac{CF_t}{(1+i)^t} - I_0 + \text{options réelles} \qquad (2)$$

Ainsi, la valeur d'une option au sein d'un projet peut donc être calculée en isolant le terme d'option dans l'équation (2). Nous allons voir plus tard que nous pouvons trouver la valeur de chaque option individuellement selon cette méthode; cependant, en combinant les options ensemble, leur valeur combinée peut diminuer.

De plus, pour mieux comprendre les options, nous allons élaborer quelques principes à leur égard. Premièrement, une option est un contrat créé d'après un actif sous-jacent. Un exemple de ce dernier est une action échangée à la bourse. Ce contrat donne le droit, mais non l'obligation au détenteur d'acheter ou de vendre l'actif sous-jacent. Celui-ci stipule aussi une date d'échéance et un prix d'exercice de l'option vis-à-vis la valeur marchande de l'action. Il existe deux types d'options : une option d'achat et une option de vente. La relation entre le prix d'exercice et la valeur du sous-jacent influence grandement la valeur de l'option. Dans le cas d'une option d'achat, lorsque la valeur du sous-jacent est plus grand que le prix d'exercice, on dit alors que l'option est échangée « dans-les-cours ». Dans le cas inverse, l'option est dite échangée « hors-des-cours » et « à parité » lorsque ces deux valeurs sont égales. De plus, la valeur d'une option a deux composantes : la valeur intrinsèque et extrinsèque. La première n'est

---

[3] Trigeorgis (1993b) p. 203

présente que lorsque l'option est dans-les-cours et elle représente la différence entre la valeur du sous-jacent et le prix d'exercice.[4] Pour sa part, la valeur extrinsèque représente la prime dans la valeur de l'option que l'acheteur paie pour obtenir l'option. Cette dernière valeur diminue dans le temps et disparaît à échéance. À ce moment, il ne reste que la valeur intrinsèque et ce, seulement si l'option échoit dans-les-cours. Ainsi, une option sera seulement exercée lorsqu'il y a présence de valeur intrinsèque, sinon il est moins coûteux d'acheter l'actif sous-jacent directement sur le marché. Il existe aussi deux types d'options : l'option américaine et l'option européenne. La seule différence est que la dernière ne permet pas l'exercice de l'option avant l'échéance. Un dernier point important au sujet des options et de leur valeur est qu'une option a plus de valeur si, *ceteris paribus*, l'échéance est plus longue et la volatilité de l'actif sous-jacent est plus grande.

La grande différence entre les options réelles et les options financières est que ces dernières peuvent être recréées synthétiquement au sein d'un portefeuille sans risque sur le marché avec une combinaison d'achat et/ou vente de l'actif sous-jacent, de l'option et des obligations sans risque. Ceci est la base de la méthode de valorisation d'option Black-Scholes[5]. Ainsi, une option financière est redondante au niveau des actionnaires, puisqu'elle ne crée pas de la valeur pour la compagnie. Lorsqu'une compagnie décide de mitiger son risque avec des transactions sur le marché des options, elle fait une action qu'un actionnaire aurait pu faire lui-même. Donc, si l'actionnaire désirait prendre ce risque, il pourrait simplement acheter des contrats financiers exactement contraire à la

---

[4] Par contre, il faut escompter cette valeur pour l'option européenne puisque l'exercice de celle-ci n'est pas permis avant l'échéance.

[5] La formule Black-Scholes ainsi que sa dérivation est définie en annexe 1.

stratégie de la compagnie et ainsi garder le même risque qu'auparavant tout en gardant ses parts dans la compagnie. Par contre, il écoperait des coûts de transactions qui diminueraient ses gains d'auparavant. Or, les options réelles sont des options sur des décisions à propos d'actifs réels qui eux ne peuvent pas être recréées par un portefeuille synthétique. Or, lorsqu'une compagnie décide d'exercer une de ces options (par exemple, restreindre l'envergure d'un projet), un investisseur ne peut pas faire d'opération sur le marché pour contrecarrer cette décision. Ainsi, les options réelles ont un impact direct sur la valeur d'un projet et donc d'une compagnie.

C'est ainsi qu'investir dans un projet d'exploitation minier est similaire à l'exercice d'une option financière, mais complètement différent quant à son impact sur la valeur de la compagnie. Quoiqu'il existe pour chacune un moment opportun d'exercice, prendre la décision de faire un investissement irréversible signifie qu'on élimine l'option d'attendre pour avoir de l'information supplémentaire quant au risque de l'investissement. Or, lorsque cette information possède de la valeur, il faut soustraire sa valeur en tant que coût d'opportunité de la composante active de la VPN élargie[6]. Donc, en exerçant une option de développer un projet, il se peut qu'un gérant renonce à certaines options, comme celle de retarder le projet. Nous élaborerons le contexte des options multiples plus loin. Cette option renoncée faisant impact sur la composante active de la valeur du projet, l'analyse option réelle rapporte donc toujours une valeur égale ou supérieure à l'analyse traditionnelle de la VPN, puisqu'une option ne peut pas avoir une valeur négative. Elle est bornée par un minimum de 0, ce qui est logique

[6] Slade (2001) p. 196

puisqu'elle donne le droit et non l'obligation au gérant de transformer un projet selon le plan initial.

Cependant, il existe certains points différents entre les options réelles et les options financières, surtout lorsqu'il s'agit de la question de l'irréversibilité des décisions reliées aux options réelles. Par exemple, chaque décision invoquant des actifs réels ressemble à une séquence d'exercices d'options. Ainsi, dans un projet minier, une compagnie achètera une propriété, ce qui lui donne l'option (d'achat) de l'explorer. Si la propriété détient des ressources exploitables, la compagnie a l'option de développer la propriété pour y extraire ces ressources. Par contre, elle peut également retarder cet investissement selon les conditions économiques (option d'achat américaine). Puisque l'investissement initial peut être élevé et séquentiel s'échelonnant sur plusieurs années, la compagnie peut insérer dans son contrat de construction qu'elle a l'option de renoncer à l'investissement subséquent pour chaque étape. Dans ce cas, elle paiera une prime dans le contrat pour obtenir ces options (options d'achats européennes). Une fois la mine en opération, la compagnie a l'option à chaque période de faire une expansion (option d'achat européenne), une contraction des opérations (option de vente européenne) ou rendre la mine inactive selon les conditions économiques (option de vente européenne). Si la mine devient inactive, la compagnie a l'option de la remettre en marche (option d'achat américaine) ou simplement de la vendre pour sa valeur résiduelle (option de vente américaine).[7] Toutes ces décisions ne peuvent pas être recréées sur les marchés financiers et sont donc source de valeur pour la compagnie.

[7] Voir l'annexe 2 pour un tableau descriptif de la composante des options réelles.

Dans son article, Trigeorgis (1993b) propose que les options réelles, en principe, puissent être évaluées selon les mêmes principes que les options financières, même si celles-ci ne sont pas échangées sur le marché. Ceci s'explique par l'étape de prise de décision d'investissement qui cherche à déterminer ce que les cash-flows futurs du projet pourraient valoir s'ils étaient échangés sur le marché. En autres mots, de quel montant le projet augmenterait-il la capitalisation boursière d'une compagnie échangée publiquement selon le choix d'investissement (l'option exercée)? De ce fait, un gestionnaire peut donc estimer la valeur du sous-jacent selon la valeur ajoutée à la capitalisation boursière.

Par contre, ces valeurs futures doivent être ramenées en valeur présente, ce qui garde le problème du taux d'escompte. Comme nous l'avons mentionné, l'approche traditionnelle est d'ajouter une prime de risque au taux d'escompte sans risque, démontrée ci-dessous :

$$VPN = \sum_{t=0}^{T} \frac{E(CF_t)}{1 + R_f + \beta_{m,i}(E(R_m) - R_f)} \tag{3}$$

Où :

- $E(\cdot)$ est l'opérateur espérance
- R_f est le taux sans risque
- R_m est le rendement du marché
- $\beta_{m,i}(E(R_m) - R_f)$ est la prime de risque du projet i
- $RADR = R_f + \beta_{m,i}(E(R_m) - R_f)$

Malheureusement, il faut prendre en compte qu'en présence de coûts fixes avec des revenus variables, la prime de risque d'équilibre changera à chaque période et donc devient impossible à déterminer. Il n'y a donc pas de prime de risque adéquate pour évaluer correctement un projet en présence d'effet de levier.[8]

Ainsi, certains auteurs, dont Trigeorgis (1993b), ont adressé ce problème en suggérant que n'importe quelle réclamation contingente d'un actif, échangé ou non, puisse être évaluée dans un monde avec présence de risque systématique en remplaçant sa croissance actuelle avec un taux d'équivalent certain au sein d'un monde risque-neutre.[9] Or, cette pratique permet de transformer les cash-flows espérés en équivalent certain, par l'utilisation de probabilités risque-neutres. Ceci nous permet donc d'escompter au taux sans risque à chaque période, faisant place à un taux d'escompte unique et approprié. L'équation (4) démontre comment, en soustrayant la prime de risque de l'espérance des cash-flows, nous obtenons un équivalent certain au numérateur, qui peut ensuite être escompté au taux sans risque.

$$VPN = \sum_{t=0}^{T} \frac{E(CF_t) - \beta_{m,i}(E(R_m) - R_f)}{1 + R_f} \tag{4}$$

Cette analyse peut s'avérer très complexe surtout pour des actifs non échangés, car elle nécessite un modèle d'équilibre de marché comme le CAPM. Par contre, pour la plupart des commodités, il existe un marché à terme qui annule le besoin d'un modèle de marché puisque les prix en équivalents certains sont déjà présents. Dans le cas où la période future des prix à termes serait trop courte ou qu'il n'y ait simplement pas de marché à terme, McDonald et Siegel (1985) expliquent comment construire un prix à

[8] Voir Sick (à venir) pp. 276-279 pour la démonstration.
[9] Trigeorgis (1993b) p. 206

terme « artificiel »[10]. Or, le taux d'intérêt sans risque est le lien principal entre la différence du prix courant et le prix à terme d'une commodité. Ainsi, en exploitant ce lien, nous pouvons construire notre propre structure du marché à terme d'une commodité à partir des données du marché.

Par contre, la valeur temps de l'argent n'est pas le seul facteur présent dans la relation entre le prix courant et celui à terme. L'autre ajustement qui doit être fait est par rapport au *convenience yield*. Cette mesure découle du fait que le détenteur de la commodité sous contrat de la vendre dans une période future reçoit des bénéfices du fait de détenir la commodité actuellement; un privilège dont le détenteur du contrat d'achat ne bénéficie pas. Ces bénéfices principaux sont reliés à la présence d'inventaire, puisque celui-ci permet de garder les coûts sous contrôle s'il y a une période de pénurie de cette commodité sur le marché. Ainsi, le détenteur de l'inventaire peut puiser dans son inventaire en espérant que la pénurie ne sera plus présente lorsque son contrat sera échu (donc un prix similaire à la période initiale quand il doit livrer la commodité). De plus, ce dernier peut aussi profiter d'une augmentation non anticipée de la demande locale pour la commodité en puisant dans son inventaire à nouveau. Ces bénéfices sont donc calculés, net des coûts d'entreposage, et donnent donc une sorte de dividende découlant de la détention de la commodité. Ce taux doit donc être escompté au prix présent pour

[10] Pour justifier ce concept, il faut faire la distinction entre la valeur d'un projet selon les prix du marché et selon les attentes que possède chaque individu. Dans le premier cas, il existe une relation entre le prix courant et les prix à termes grâce à des conditions d'arbitrages. Ainsi, même si un contrat à terme n'est pas transigé sur le marché, il détient quand même un prix théorique. D'après ceci, nous pouvons construire une structure de prix à terme théorique (artificielle) et l'appliquer à l'évaluation actuelle d'un projet. Cette valeur sera donc ce que le marché évalue le projet théoriquement. Dans l'autre cas, d'après les attentes continuellement changeantes des participants au marché, il se peut que certaines personnes ne trouvent pas juste la valeur donnée par ces prix artificiels. Par contre, ceci découle de leurs attentes, ce qu'il faut distinguer des prix présents sur le marché actuel.

préserver l'équilibre de marché. Sick (à venir) a démontré la relation du prix courant aux prix futurs découlant de l'escompte avec *convenience yield*[11] :

$$S_t = F_{t,T} \left(\frac{1+\delta}{1+Rf} \right)^{T-t} \tag{5}$$

Où :

- S_t signifie le prix courant au temps t
- $F_{t,T}$ est le prix futur au temps T selon la période courante t
- δ est le *convenience yield*

Par ailleurs, Brennan et Schwartz (1985b) ont démontré que ce *convenience yield* n'était présent que dans les commodités à fins commerciales (ex. le cuivre, le pétrole) et non dans les commodités à fins spéculatives (ex. or). Ils démontrent aussi que ce *convenience yield* est proportionnel au prix courant de la commodité, ce qui est logique, puisque lorsque le prix est relativement haut, ceci implique une pénurie et donc l'avantage d'avoir un inventaire. À l'opposé, lorsque le prix est relativement bas, ceci implique un surplus d'offre et l'avantage de détenir un inventaire diminue.

Nous pouvons donc ajouter le *convenience yield* dans un modèle binomial. Puisque l'approche option réelle prend en sorte les séquences dans le temps, cela peut donc se transformer en arbre binomial avec des périodes infinitésimalement petites. Cette méthode d'évaluer les options réelles est fondée sur la programmation dynamique où la VPN est recalculée à chaque branche de l'arbre binomial. Par contre, nous pouvons simplifier ce phénomène à un modèle binomial à une période pour des fins de démonstration. Or, si nous connaissons le prix actuel (S) de notre commodité et le taux

[11] Ceci est la version discrète. McDonald et Siegel (1985) ont écrit l'expression en temps continu selon $F_0^t = P_0 e^{(r-\delta)t}$.

sans risque(R_f), nous pouvons trouver les probabilités risque-neutres selon l'équation suivante[12] :

$$S = \frac{\hat{\pi}(1+\delta)\cdot S(1+u) + (1-\hat{\pi})(1+\delta)\cdot S(1+d)}{1+Rf} \tag{6}$$

Où :

- $\hat{\pi}$ est la probabilité risque-neutre
- u et d sont les pourcentages de hausse et baisse de prix respectifs
- δ est le *convenience yield*

En divisant cette équation par S et ensuite en isolant $\hat{\pi}$, nous obtenons :

$$\hat{\pi} = \frac{\dfrac{1+R_f}{1+\delta} - (1+d)}{u-d} \tag{7}$$

Ceci nous donne donc les probabilités risque-neutres à chaque étape et nous pouvons donc faire une analyse approfondie d'un arbre binomial, tout en escomptant au taux sans risque. Comme le tableau I ci-dessous le démontrera, l'arbre binomial à deux périodes permet de bien illustrer la différence entre l'analyse option réelle par la programmation dynamique et l'analyse traditionnelle de la VPN. Puisque l'analyse traditionnelle prendra l'espérance des cash-flows futurs sans prendre compte de la flexibilité des gestionnaires face à la nouvelle information, elle sous-estime les cash-flows futurs. Notre tableau démontre un exemple de développement minier où la compagnie a le choix, à chaque étape, de développer le projet, attendre pour avoir plus d'information ou abandonner le projet. Il y a donc des options à chaque point de flexibilité dans l'arbre. Ainsi, en prenant le choix d'abandonner un projet, une compagnie s'assure de minimiser ses pertes aux coûts d'exploration. Par contre, en prenant simplement l'espérance des cash-flows selon la méthode traditionnelle, on

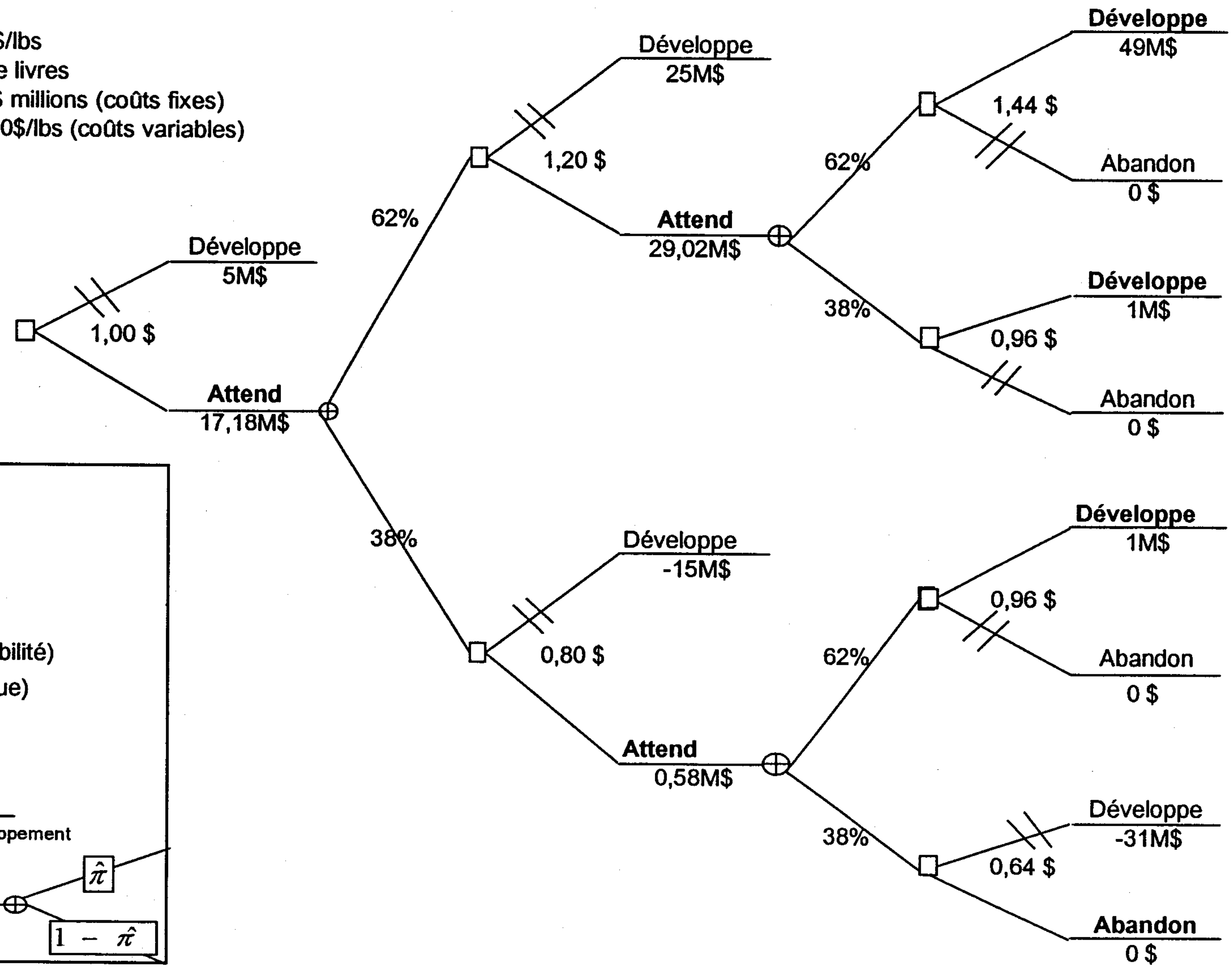
[12] Sick (à venir) p. 281

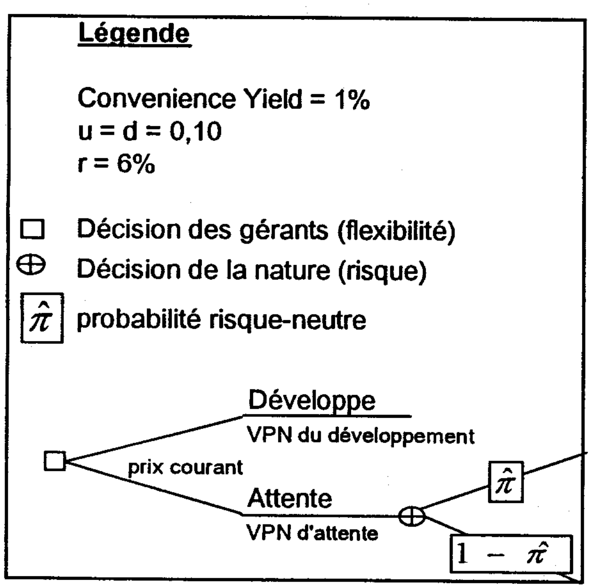
suppose que la mine sera développée dès le début et donc, à certaines étapes, elle subira des pertes si le prix de la commodité produite diminue sous un certain seuil. Ces pertes font donc partie de l'espérance des cash-flows futurs sous la méthode traditionnelle. En supposant que la mine n'est pas développée dès le début, en principe, nous permettons de mettre de la valeur à l'option d'attente. Or, si l'espérance de la VPN de la prochaine période est plus grande que la VPN actuelle, alors l'option d'attendre a une valeur positive égale à la différence entre ces deux valeurs. Lorsque cette situation a lieu, le développement actuel ne maximise donc pas la valeur du projet. Par opposition, si la valeur est négative, signifiant une VPN plus grande au développement immédiat, alors l'option d'attendre n'est pas exercée et elle a donc une valeur nulle, déclenchant le développement du projet.

Par contre, même si la programmation dynamique démontre comment les options réelles peuvent mitiger le risque tout en laissant la pleine possibilité de profits futurs, nous pouvons simplifier l'exemple pour n'inclure que le critère de maximisation du projet. Ainsi, le tableau 1 prend en compte qu'une fois le projet développé, la valeur de la commodité ne fluctue plus. Il identifie aussi les probabilités risque-neutres du changement des prix, ainsi que les points de flexibilité pour les gestionnaires. Ceci permet donc de savoir à quelle période le projet sera maximisé avec l'utilisation de la programmation dynamique. Également, le calcul de l'espérance prend en compte le choix optimal à chaque branche, c'est-à-dire le choix en gras. L'espérance de ces deux valeurs est ensuite escomptée à la période d'avant. Ce processus est répété récursivement jusqu'à la période initiale.

Tableau 2 : Programmation dynamique pour le développement du mine de cuivre

Specs
Un projet minier
S Prix courant du cuivre = 1$/lbs
Q Réserves = 100 millions de livres
K Dépenses en capital = 45$ millions (coûts fixes)
E Dépenses courantes = 0,50$/lbs (coûts variables)
NPV = (S-E)*Q-K





D'après ce dernier tableau, nous observons que la période optimale d'exercice est à la dernière période. Or, si nous avons une option qui n'expire pas, comment savoir s'il y une période d'exercice optimale? Selon cette optique, McDonald et Siegel (1986) ont découvert une règle d'attente pour finalement exercer l'option de développement. Le temps optimal d'après eux provient du moment où les bénéfices sont deux fois plus grands que le coût d'investissement. Quoiqu'il puisse sembler arbitraire, ce critère découle intuitivement de la logique de la structure du prix d'une option. Or, lorsque celle-ci est très loin dans-les-cours, la probabilité d'exercice approche 100%. Ainsi, à la limite, la valeur extrinsèque disparaît complètement et la valeur intrinsèque restante combinée au prix d'exercice équivaut à la valeur du projet. Donc, il n'y a plus aucun intérêt à continuer d'attendre. Ce phénomène permet donc d'empêcher un processus où attendre sera toujours la meilleure décision de maximisation du projet, même en présence d'escompte.

Une autre méthode pour évaluer la valeur d'options réelles provient de simulations Monte Carlo. Cette méthode est quand même assez récente en termes d'applications générales, puisqu'elle dépend fortement de la puissance et rapidité des ordinateurs. Une méthode très populaire est de simuler l'évolution stochastique d'une (des) variable(s) clé(s) au problème d'évaluation. Un des processus stochastiques les plus utilisés est le mouvement brownien géométrique (MBG) décrit ci-dessous :

$$dp(t) = \mu dt + \sigma dB(t) \tag{8}$$

Dans ce processus stochastique, p(t) est le logarithme naturel du prix du cuivre, μ et σ désignent la tendance et la volatilité du prix de l'actif et B(t) est un processus Wiener standard avec moyenne nulle et variance égale à un. Ce processus est très utile lors de la prévision de prix car la valeur reste toujours positive et donc ceci permet d'éviter d'obtenir des prix négatifs. Par la suite, le processus est répété un grand nombre de fois (ex. 100 000), chacun indépendant, et selon la méthode utilisée, l'information est utilisée pour prédire un prix. Par exemple, pour trouver la valeur d'une option européenne à son échéance, nous pouvons simuler 50 000 fois la valeur du sous-jacent par MBG jusqu'à l'échéance de l'option et ensuite utiliser la moyenne des valeurs trouvées pour déduire la valeur du sous-jacent et donc de l'option. Nous allons voir plus tard une autre méthode pour estimer la valeur d'options américaines par simulation.

De plus, le MBG est pratique car il permet d'être manipulé avec aisance. Or, nous pouvons ajouter au MBG un processus de retour à la moyenne à la tendance. Dans ce cas, les chocs au prix ne sont pas persistants et donc la croissance ou la diminution persistante du prix doit être causée par une multitude de chocs. Dans ce modèle, les chocs vont avoir une variable de retour à la moyenne modélisée par une demi-vie. Cette variable décrit le temps nécessaire pour qu'un choc soit atténué de moitié. Par contre, sans la présence d'un autre choc, le prix du MBG revient éventuellement à sa moyenne.

Un autre aspect intéressant que nous pouvons appliquer au MBG est la présence de sauts. Or, ceci peut être modélisé par la présence d'un processus Poisson au sein du MBG. L'équation (9) démontre l'ajout d'un processus de retour à la moyenne ainsi qu'un processus Poisson.

$$dp(t) = \eta(\bar{p} - p)dt + \sigma dz + dq \tag{9}$$

Où:
$$dq = \left\langle \frac{-1 \ avec\ probabilité\ \lambda dt}{0\ avec\ probabilité\ 1-\lambda dt} \right.$$

Dans ce cas-ci, dq est le processus Poisson, $\bar{p}$ est le prix moyen pour lequel le prix p tend à retourner et η est la vitesse de retour. Lorsque η tend vers l'infini, x ne peut pas dévier de sa moyenne. À l'opposé, lorsque η tend vers 0, alors le processus devient un mouvement brownien standard. Il peut s'avérer très difficile de déterminer si un actif est mieux décrit par un MBG ou un processus de retour à la moyenne. Le plus grand problème découle de la longueur de temps des données disponibles. Or, d'après l'analyse des données du pétrole en dollars constants depuis les 120 dernières années, on peut démontrer statistiquement que le prix suit bel et bien un processus de retour à la moyenne. Par contre, lorsqu'on analyse les 40 dernières années, alors le MBG semble mieux décrire l'évolution des prix.[13] Le test statistique adéquat pour déterminer quel processus reflète mieux la réalité est le test de racine unitaire développé par Dickey-Fuller (1981). Or, en présence de racine unitaire, le processus adéquat à choisir est celui avec retour à la moyenne.

III. Revue de la littérature

De ce fait, en analysant les décisions possibles futures, nous pouvons voir que l'analyse par option réelle approxime plus adéquatement la valeur de marché d'un projet. Beaucoup de littérature a été écrite à ce sujet, dont certains articles clés affectant l'évolution de cette nouvelle approche.

[13] Dixit et Pindyck (1994) pp.77-78

Dans un article fondamental, Mcdonald et Siegel (1985) démontrent comment utiliser la théorie des options pour évaluer un projet lorsqu'il y a une option d'abandon. Ils découvrent qu'un projet risqué en présence d'incertitude peut incorporer des techniques de valorisation d'options pour mieux évaluer la vraie valeur du projet. Plus tard, McDonald et Siegel (1986) étudient le même pouvoir des options, mais cette fois-ci dans le but d'évaluer la valeur d'une option d'attendre avant d'investir. Ils s'attaquent à l'asymétrie existante entre les décisions d'investir ou attendre, c'est-à-dire que la première est irréversible, mais la deuxième ne l'est pas. Ils découvrent une règle de décision qui incorpore le coût d'opportunité perdu du fait de la possibilité d'attendre quand un projet est développé. Ceci englobe donc ce que nous avons décrit plus haut, c'est-à-dire la nécessité de soustraire la valeur des options annulées quand une option qui les précède est exercée.

Dans un autre article similaire, Brennan et Schwartz (1985a) élaborent un modèle général pour générer le moment opportun de développer un projet d'extraction de ressources naturelles. Ils incorporent aussi l'option d'attendre, les options de fermeture ainsi que de réouverture dans la prise de décision pour changer d'état de production; c'est-à-dire d'un état de fermeture à un état d'ouverture et vice-versa. D'après l'approche microéconomique traditionnelle, une entreprise devrait rester en production tant que ses revenus sont plus grands que ses coûts variables. De leur côté, Brennan et Schwartz argumentent que la valeur des options de changement d'état devrait être incluse aussi dans l'analyse. Par exemple, ils démontrent qu'un projet devrait rester en fonction jusqu'au point où les revenus plus la valeur de l'option de réouverture égalent la valeur des coûts variable. En opposé, un projet devrait rester fermé jusqu'au point où les revenus égalent les coûts variables plus l'option de fermeture. Ceci mène donc à une zone grise de décision qui dépend entièrement de l'état actuel de production.[14]

Plus récemment, Moel et Tufano (2002) ont utilisé le modèle de Brennan et Schwartz (1985b) pour faire une étude empirique sur la fermeture et ouverture de mines d'or en Amérique du Nord. Ils s'intéressaient à savoir si l'approche option réelle pouvait expliquer toutes ces décisions de gestion. Ils étudient l'évolution de l'or en contraste avec l'abandon de mines qui ont l'option de réouverture. Ils démontrent l'impact de la volatilité du prix de l'or dans la prise de décision. Or, lorsque la volatilité augmente, cela ajoute du poids dans les queues de la distribution des prix. Donc, une hausse dans la volatilité a un effet de repousser les seuils de changement d'état de la mine, soit la réouverture et la fermeture. Ainsi, un gérant choisira d'attendre pour avoir plus d'information sur les prix futurs lorsque la volatilité augmente quant à sa décision de fermeture ou de réouverture. Rappelons que par définition, la valeur d'une option augmente (diminue) avec une hausse (diminution) de la volatilité du sous-jacent. Ceci suit donc le concept qu'ont élaboré Brennan et Schwartz (1985a). De plus, Moel et Tufano comparent cette méthode à la méthode de VPN dynamique où la volatilité du sous-jacent ne joue aucun rôle, car la VPN est recalculée à chaque branche de l'arbre binomial. Ils découvrent que la tendance de fermeture des mines est bien expliquée par un modèle d'options réelles. L'importance provient d'un phénomène d'hystérésis où la fermeture des mines a un effet retard d'après les prix de l'or. Ceci suggère donc que la flexibilité des gestionnaires soit définitivement un aspect important dans leurs décisions et ainsi un modèle d'options réelles avec volatilité peut mieux décrire leurs actions.

[14] Brennan & Schwartz (1985b) pp. 147-152

Quoiqu'il existe beaucoup de littérature à propos de l'analyse des options réelles et leur importance dans l'évaluation de projet, la plupart des articles traitant sur le sujet n'analyse souvent que l'impact d'une option indépendante sur la vie d'un projet. De sa part, Trigeorgis (1993a) explique plus en détail l'interaction qu'ont plusieurs options sur la valeur totale. Il démontre le principe de non additivité des options, puisque la valeur incrémentale qu'une option rapporte à un projet est plus basse lorsque prise en combinaison avec d'autres options que lorsqu'elle est prise en isolation. Ce phénomène s'accentue lorsqu'il y a déjà un grand nombre d'options déjà prises en compte dans un projet. Ainsi, une option oubliée lors d'une analyse d'évaluation peut avoir un impact négligeable sur la VPN du projet. Par contre, il est important de noter que si nous additionnons la valeur de chaque option séparément, il y a un grand risque de surestimer la valeur d'un projet.

Pour illustrer ce manque d'additivité, nous pouvons prendre un exemple où une compagnie a deux options de réduire son envergure de production avec échéances différentes, donc nous observons deux options de vente européenne qui n'ont pas nécessairement le même prix d'exercice. Les deux options ont de la valeur, mais si la compagnie décide de réduire son envergure d'après l'exercice de sa première option, alors la deuxième option perd beaucoup de sa valeur. Ce phénomène a lieu puisque les deux options partagent une partie de la même valeur intrinsèque. Donc lorsque la première option est exercée, la valeur intrinsèque de la deuxième option diminue[15]. En d'autres mots, imaginons une usine qui a les options de réduire sa production de 10% dans un an et 20% dans deux ans d'après le niveau initial. Si elle décide d'exercer la première option, alors la production diminue à 90% du niveau initial. Or, si la compagnie

[15] Trigeorgis (1993a) p. 8

veut diminuer encore sa production dans la deuxième année, donc en exerçant la deuxième option, elle ne pourra réduire sa production que de 12,5% supplémentaire pour avoir une production de 80% du niveau initial. Ainsi, la deuxième option a perdu de la valeur une fois que la première option a été exercée, car chacune partageait la baisse initiale de 10% de production Le cas extrême se situe lorsque deux options ont le même prix d'exercice. Dans notre exemple précédent, ceci symboliserait deux options de réduire la production du même montant, disons 10%. Or si la première option est exercée, alors la deuxième option perd toute sa valeur à moins qu'il existe une autre option entre les deux périodes qui donne la chance à la compagnie de prendre expansion. Il est donc important de constater que l'addition de chaque option différente peut mener à une surévaluation de la valeur des options totales.

Par contre, le degré d'interaction entre chaque option est relié au type d'option et au degré de chevauchement des valeurs intrinsèques de chacune. Or, Trigeorgis (1993a) donne trois règles qui résument les situations où les options ont tendance à être additives. Premièrement, lorsque celles-ci sont de types opposés. Par exemple, si une compagnie a une option de faire de l'expansion sous des conditions économiques favorables (option d'achat) et une option de contraction (option de vente) lorsque les conditions sont mauvaises, alors la valeur des deux options combinées s'approchera de la valeur de chacune additionnée ensemble. Ceci s'explique encore par le bas degré de chevauchement des valeurs intrinsèques. Deuxièmement, le plus rapproché les périodes d'échéances (à la limite la même période), le plus les options garderont leurs valeurs en les combinant ensemble. L'effet opposé a lieu si les options ont des échéances de plus en plus éloignées. Troisièmement, le plus les options sont hors-des-cours, le plus leurs valeurs seront conservées en faisant la combinaison. Par exemple, en ayant une option d'expansion d'une mine si le prix de la ressource augmente de 100% dans la prochaine année et une option de fermeture si le prix diminue de 75%, à nouveau la valeur combinée des deux options s'approchera de la valeur de chacune additionnée ensemble. Évidemment, dans plusieurs cas, les options très loin hors-des-cours ont une valeur négligeable. Toutefois, le concept est important à retenir lorsqu'on prend des combinaisons des trois règles citées ci-dessus.

Par ailleurs, sachant que certaines combinaisons d'options valent plus que d'autres, nous pouvons accepter qu'ignorer certaines options (généralement les options de vente) ne mènera pas automatiquement vers des divergences signifiantes dans l'évaluation d'un projet parce qu'il y a un effet de rendement marginal décroissant pour chaque option ajoutée au portefeuille d'options. Ainsi, la valeur ajoutée qu'apporte une option de plus à un projet tend à diminuer au fur et à mesure que les valeurs intrinsèques se chevauchent.[16] Donc, pour développer une analyse option réelle, il est important d'identifier les options majeures qu'auront les gestionnaires dans le développement de leur projet, car les options secondaires ou redondantes n'auront pas un impact signifiant sur la valeur totale du projet.

Quoiqu'il soit facile d'évaluer une option européenne selon la formule Black-Scholes, il est cependant plus difficile d'évaluer une option américaine. Nous pouvons facilement déduire qu'elle est bornée au minimum à la valeur de la même option européenne grâce à son droit d'exercer l'option avant la date d'échéance. De plus, son seuil maximal reste identique à celui d'une option européenne, soit le prix du sous-jacent. Dans le but de trouver une façon d'estimer la valeur d'une option américaine, Longstaff

[16] Trigeorgis (1993a) p.13

et Schwartz (2001) ont développé un modèle par l'utilisation de simulations Monte Carlo intitulé la Méthode de moindre carré Monte Carlo (LSM)[17]. Dans cette méthode, l'analyse par régression est utilisée pour estimer la valeur de l'option américaine.

Pour comprendre l'intuition de cette approche, rappelons que le détenteur de l'option américaine analysera à chaque période d'exercice la valeur actuelle d'exercice de l'option par rapport à la valeur espérée du sous-jacent. Si l'espérance des gains futurs est inférieure aux gains immédiats, c'est-à-dire que la valeur du sous-jacent est présentement plus grande que son espérance future et le prix d'exercice, alors, l'option sera exercée. Donc, la stratégie d'exercice optimale est fondamentalement déterminée par l'espérance conditionnelle du sous-jacent en gardant l'option active. La clé du modèle LSM est que l'espérance conditionnelle peut être estimée d'après une coupe transversale de l'information obtenue par simulation. Cet information est ensuite appliqué à la technique de moindre carré.[18] Puisque la méthode est récursive, il faut donc débuter par les valeurs espérées des options américaines (pour chaque série) à la dernière période, ce qui équivaut donc à la valeur de l'option européenne, et ensuite revenir progressivement vers la période initiale. Une fois terminée, nous obtenons une matrice d'exercice optimale ainsi que la valeur de chaque option à son exercice. En escomptant au présent, nous prenons la moyenne des valeurs présentes et ceci nous donne une valeur approximée de la valeur de l'option américaine.

Prenons l'exemple d'une action au prix S avec une option d'achat à échéance T et au prix d'exercice E. De plus, posons que le prix de l'action suit un mouvement

[17] L'abréviation provient du terme original anglais : Least Square Monte Carlo
[18] Longstaff et Schwartz (1993) p.114

brownien géométrique (MBG) et que le taux d'intérêt est fixe et égal à i. La première étape consiste à simuler Z fois la trajectoire des prix risque-neutres jusqu'au temps T. Puisque la méthode LSM est discrète, il faut ensuite diviser la période T en t petites périodes. Ceci nous donnera donc une matrice de gains donnant le prix de l'option à chaque temps t et pour chaque simulation. La deuxième étape débute au temps T et nécessite l'identification de toutes les options dans-les-cours au temps T-1 qui devront être comparées aux valeurs du temps T. Longstaff et al. expliquent qu'il n'est pas nécessaire de prendre en considération les options hors-des-cours et à parité au temps T-1 puisque cela n'affecte pas les estimateurs de la régression et améliore considérablement l'efficacité de l'algorithme. La troisième étape consiste à faire une régression avec les séries dans-les-cours en ayant comme variable dépendante Y le montant dans-les-cours des options au temps T escompté au temps T-1.[19] La variable indépendante X est simplement la valeur de l'option brute au temps T-1. On fait ensuite la régression de Y sur X, selon la spécification choisie. Une spécification simple est de prendre la régression de Y sur une constante, X et X^2 comme le font Longstaff et al.

$$E(Y) = \alpha + \beta_1 + \beta_2 X^2 + \varepsilon \text{ sous l'hypothèse que } \mathrm{E}(\varepsilon) = 0 \tag{10}$$

Ensuite, nous trouvons par moindre carré les valeurs de $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ qui sont par définition sans biais et convergentes. Une fois les paramètres établis, nous devons trouver l'espérance conditionnelle de Y sachant X. Nous solutionnons donc l'équation :

[19] La formule est donc Y = prix de l'option – E, où Y est strictement positif puisqu'on ne considère pas les options hors-des-cours et à parité.

$$E(Y|X) = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 X + \hat{\beta}_2 X \tag{11}$$

Ceci donne une valeur espérée pour garder l'option, donc en ne l'exerçant pas. La quatrième étape implique ensuite la comparaison de cette valeur espérée conditionnelle avec la valeur d'exercice pour chaque série identifiée auparavant. Si l'espérance conditionnelle est plus grande que la valeur actuelle de l'option en t-1, alors l'option ne sera pas exercée en t-1 et le temps T restera le temps optimal d'exercice. Par contre, si le résultat est contraire à celui énoncé ci-dessus, alors l'option sera exercée. Les étapes 2 à 4 sont ensuite répétées récursivement reculant d'une période à chaque fois jusqu'à T - t = 1. Une matrice va donc être créée avec une règle d'exercice pour chaque série. Or, dans chacune où il y a exercice, on prend la valeur dans-les-cours de l'option trouvée lors de la simulation initiale au moment d'exercice. Par la suite, on escompte au présent, ce qui donne une colonne de gains actualisés. Finalement, nous prenons la moyenne des gains en incluant toutes les options nulles[20] et ceci nous donne une approximation de la valeur de l'option américaine.

Ce modèle est donc très pratique et efficace quant à l'évaluation d'options simples avec seulement un sous-jacent. Par contre, si l'analyse du prix des options nécessite toutes les trajectoires de prix au lieu de seulement les trajectoires d'options dans-les-cours, Imai (2003) démontre que la méthode LSM devient moins efficace. Ceci peut avoir lieu avec des projets où il y a des multitudes d'options de substitutions. On ne peut donc pas appliquer la méthode LSM universellement.

[20] Les options qui n'ont pas été exercées et qui ont donc une valeur nulle.

IV. Modèle

Spécification

Le but de notre modèle est de démontrer et d'évaluer la différence que peut rapporter l'approche option réelle en tant que valeur ajoutée. Nous allons analyser un projet d'extraction de ressources naturelles qui se concentre uniquement sur le cuivre et qui n'est pas encore développé, mais qui a terminé la phase d'exploration. Nous voulons aussi démontrer que l'approche option réelle ajoute de la valeur, donc nous analyserons un projet qui a une VPN traditionnelle presque nulle. Par contre, nous voulons démontrer le pouvoir des options réelles sans toutefois aller dans toutes les possibilités, donc nous allons nous concentrer sur certaines options d'attentes et ignorer les autres options comme les options de fermeture et réouverture, expansion et contraction, etc. De plus, nous allons supposer que le projet sera financé au moment où la décision de construction sera prise. Nous allons aussi simplifier notre analyse en ayant seulement le prix futur du cuivre comme facteur stochastique. Ainsi, les coûts, les taxes, les réserves et les taux d'intérêt seront considérés fixes et connus. Qui plus est, en s'inspirant de l'analyse de Brennan et Schwartz (1985b), une fois la mine construite, nous allons supposer que le prix du cuivre restera fixe pour la durée de vie de la mine. Le prix du cuivre sera modélisé sans retour à la moyenne selon un mouvement brownien géométrique d'après l'équation :

$$dp(t) = \mu dt + \sigma dB(t) \qquad (12)$$

Dans l'équation (10), $p(t)$ est le logarithme naturel du prix du cuivre, μ et σ désignent la tendance et la volatilité du prix du cuivre respectivement et B(t) est un processus Wiener standard avec moyenne nulle et variance égale à un. Nous devons prendre le mouvement brownien géométrique car il permet d'assurer la contrainte de perte limitée de -100%, puisque le prix ne peut jamais être négatif. De plus, nous voulons choisir une série de données des prix à termes du cuivre et non les prix courants puisque nous avons vu déjà que les prix à termes sont des équivalents certains et donc, nous pouvons les escompter au taux sans risque.

Également, pour trouver la tendance historique du prix du cuivre, nous allons prendre le logarithme naturel du prix du cuivre pour les 60 mois les plus récents dans les données et faire une régression sur une variable du logarithme naturel de temps en incluant une constante. Pour trouver la volatilité, nous allons prendre l'écart type sans biais de la série des prix du cuivre pour ces mêmes mois. Donc, le dénominateur de l'équation de l'écart type sera 59 au lieu de 60.

De plus, nous voulons modéliser un projet minier où les gestionnaires ont les options de développer la mine sous deux régimes de coûts différents. Ainsi, chaque scénario consistera en une analyse de VPN traditionnelle et une analyse option réelle. Par contre, puisque nous voulons démontrer l'impact à la marge de l'évaluation par option réelle, le cas de base pour chaque scénario aura une VPN traditionnelle environnant zéro. Par la suite, nous comparerons les deux scénarios pour voir lequel est le plus avantageux, et ainsi le plus profitable pour la compagnie minière.

Le premier scénario, avec un haut niveau d'investissement initial combiné par des coûts d'opérations plus bas, donne l'option de développer tout de suite ou d'attendre jusqu'à un maximum de sept ans pour le développement. Ce scénario va inclura donc l'analyse de la VPN traditionnelle avec une option d'attente américaine. L'évaluation de cette option sera faite d'après le modèle binomial. Alors, nous aurons une option américaine au prix d'exercice égal au coût d'investissement initial requis, avec échéance de sept ans. De plus, la valeur du sous-jacent sera la valeur présente de la mine sans compter l'investissement initial requis.

Le deuxième scénario implique la possibilité de développer la mine avec un investissement initial bas, mais qui ne peut être produit que dans dix ans. Par contre, ce scénario inclut des coûts d'opérations plus élevés. Celui-ci sera composé d'une option européenne avec échéance de dix ans et un prix d'exercice égal au coût d'investissement bas. À nouveau, la valeur du sous-jacent sera la valeur présente du projet sans compter l'investissement initial. Pour trouver la valeur du projet, nous pouvons prendre la moyenne des simulations de MBG pour le prix futur du cuivre après dix ans. Nous allons donc faire 250 simulations ayant 250 sous-périodes à travers les dix ans. En déterminant un prix espéré futur du cuivre dans 10 ans, nous aurons une espérance des gains monétaires futurs du développement à la période terminale que nous escompterons jusqu'à la période initiale. Ceci donnera une VPN traditionnelle qui à nouveau sera près de zéro. En ajoutant l'analyse option réelle, c'est-à-dire l'option de développement, nous pourrons évaluer la VPN élargie du projet. Ainsi, après avoir déterminé la valeur VPN du projet, nous appliquerons nos données historiques dans le modèle de Black-Scholes. Ceci nous donnera donc la valeur de cette option européenne que nous ajouterons à la VPN traditionnelle.

Les deux évaluations avec options réelles seront comparées à leur scénario de base respectif qui consiste en une analyse statique de la VPN traditionnelle propre à chacune. Or, suivant le critère de décision de la VPN, le projet selon les scénarios de base ne devrait pas être développé puisqu'il ne crée pas de valeur. Ainsi, nous voulons démontrer si l'évaluation par option réelle change l'allocation du capital en donnant au projet une VPN élargie positive.

Données

Les données des prix du cuivre sont de contrats à terme avec échéance d'un mois qui proviennent du NYMEX et sont des moyennes mensuelles de 60 mois consécutifs allant de mars 1999 jusqu'en mars 2004. Le taux d'intérêt sans risque est fixé arbitrairement à 4%. Les coûts d'investissement et d'opérations, ainsi que les réserves de minerais, sont inspirés des estimés d'une mine canadienne. Les coûts, par contre, ont été ajustés pour donner une VPN presque nulle selon l'analyse traditionnelle. Le tableau 2 ci-dessous résume les données fixes utilisées en plus d'inclure la VPN traditionnelle pour chaque scénario.

Tableau II: Données du modèle

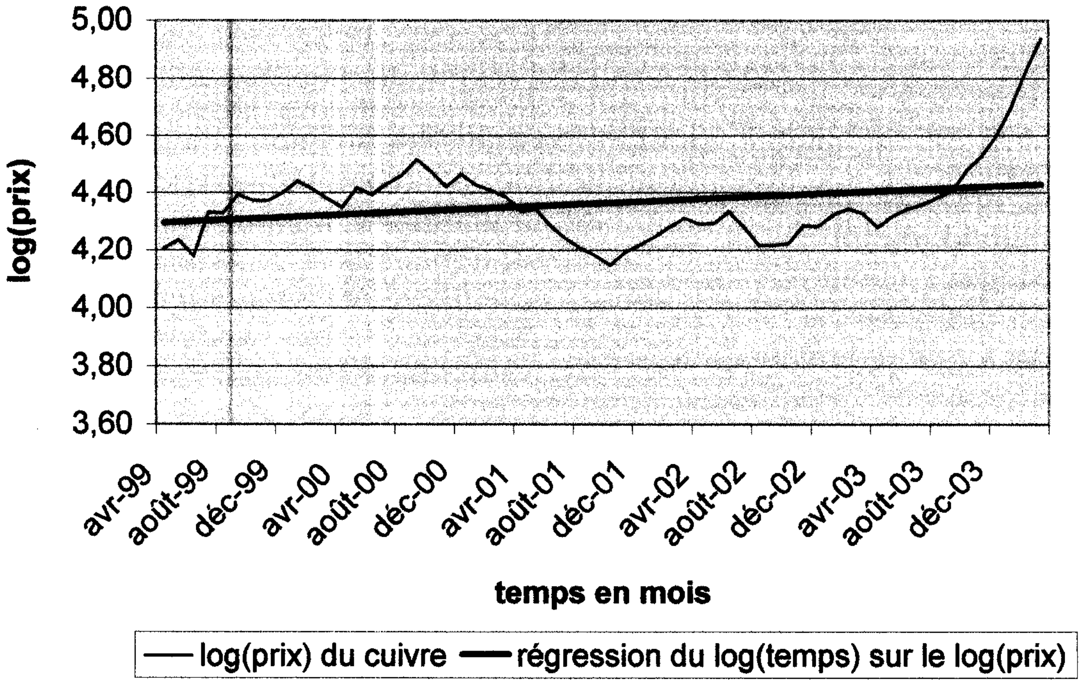
Scénario	**1**	**2**
Option	Américaine	Européenne
Investissement initial	1000000000	500000000
coût d'opération $/livre	1,12 $	1,58 $
réserves sur 30 ans (en livres)	8670000000	8670000000
Prix du cuivre	[21]1,32 $	[22]1,73 $
revenus annuels	381 480 000 $	499 970 000 $
coûts annuels	323 680 000 $	456 620 000 $
profits annuels	57 800 000 $	43 350 000 $
VPN traditionnelle à 4%	(20 510 066 $)	[23]6 409 415,81 $

[21] Provient de la dernière donnée sur le prix à terme du cuivre (mars 2004).
[22] Provient de simulations MBG décrites en détail plus bas.
[23] Puisque le scénario n'a lieu que dans dix ans, les valeurs utilisées sont escomptées de dix années de plus. Ainsi, pour avoir la valeur du projet dans dix ans, il faut multiplier la VPN actuel par $1{,}04^{10}$.

Résultats

Le tableau III présente le graphique du log(prix) du cuivre et la régression sur le log(temps) où le chiffre entre parenthèses est l'écart-type. Nous voyons que la tendance du prix à travers le temps est de 3,43%. Ce résultat sera donc appliqué au MBG par la variable μ. En prenant l'écart type sans biais de la série temporelle des prix nominaux de cuivre, nous obtenons un écart type de 13,16%. Cette valeur s'appliquera donc à la variable σ du MBG.

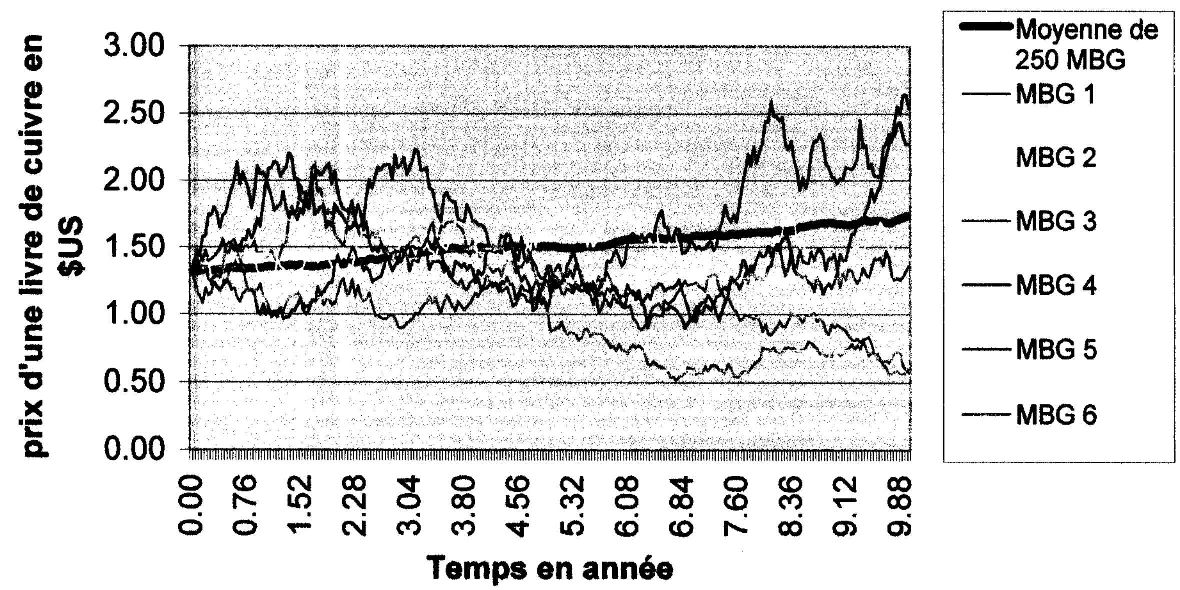
Tableau III
log prix du cuivre sur 60 mois avec régression
Log(prix) = 4,26 + 0,0343*log(temps)
(0,0204)



Le tableau IV présente la moyenne de 250 simulations de MBG décrits ci-dessus avec 250 étapes sur une période de 10 ans, en guise de prévision du prix du cuivre pour le troisième scénario. Nous obtenons ainsi un prix du cuivre de 1,73$ dans 10 ans. Ce sera donc le prix de base pour l'évaluation du développement de la mine d'après le troisième scénario. Par ailleurs, l'écart-type de la moyenne des MBG est de 1,46$ pour les 250 simulations.

Tableau IV

Moyenne des simulations de MBG pour une durée de 10 ans, avec 250 étapes et 250 simulations



Scénario 1 : Investissement initial haut

Selon la VPN traditionnelle, le projet, avec un investissement initial de 1$ milliard et des coûts d'opération de 1,12$ par livre de cuivre extraite, une production de 289 millions de livres par an et un prix de vente de 1,316$, a une VPN de –20,51$

millions. Selon ces conditions et cette méthode d'évaluation, le projet n'a donc pas de valeur pour la compagnie minière, ce qui l'incitera à ne pas développer le projet.

Ajoutons maintenant l'option d'attendre à notre analyse traditionnelle. Selon ce scénario, la compagnie peut attendre avant de débuter le projet, mais elle doit construire une nouvelle usine de transformation, ce qui justifie l'investissement initial de 1$ milliard. De plus, elle a sept ans pour commencer à construire son usine, mais elle peut débuter la construction quand elle le veut. Ceci équivaut donc à une option d'achat américaine du projet. Nous pouvons utiliser la méthode binomiale pour obtenir une valeur pour cette option américaine. Selon les résultats obtenus sur le logiciel Crystal Ball, la valeur de l'option américaine est de 283,53$ millions, ce qui donne une VPN élargie de 262,99$ millions. Le tableau V ci-dessous démontre les résultats. Le projet devient donc profitable pour la compagnie, puisque l'option réelle capture la volatilité du prix du cuivre qui pourrait le faire augmenter à l'avenir et rendre le projet profitable.

Tableau V: Valeur de l'option américaine

VP du projet en millions	**$979,49**
Investissement initial en millions	**$1 000,00**
Date d'échéance en années	**7,00**
Taux d'intérêt sans risque	**4,00%**
Volatilité	**13,16%**
Valeur de l'option en millions *Approche binomiale (1000 étapes)*	**$283,53**

Scénario 2 : Investissement initial bas

Le deuxième scénario diffère du premier puisque l'investissement initial est plus bas à 500$ millions, par contre les coûts d'opérations sont plus onéreux à 1,58$ par livre extraite. Ceci peut s'expliquer par l'utilisation d'une usine de transformation à proximité déjà construite, mais qui nécessite des coûts de transport plus élevés. De plus, nous faisons l'hypothèse que cette usine n'est disponible que dans 10 ans et que la décision de son utilisation ne peut pas être différée. Ainsi, nous avons la présence d'une option d'achat européenne sur le développement du projet. D'ailleurs, en ayant déterminé le prix futur du cuivre dans 10 ans à 1,73$ d'après les simulations de MBG, nous pouvons déterminer que le projet a une VPN traditionnelle de 6,41$ millions. Pour toute fin pratique, on peut la considérer nulle. Par contre, en incorporant la valeur de l'option de développement, que nous avons obtenue en solutionnant le modèle Black-Scholes, nous obtenons une VPN élargie de 191,97$ millions. L'option d'attendre a donc une valeur de 185,56$ millions selon le modèle. Le tableau VI résume les résultats.

Tableau VI : Valeur de l'option européenne

Date d'échéance en année	10,00
Volatilité	13,16%
VP du projet en millions	$506,41
Taux d'intérêt sans risque	4,00%
Investissement initial en millions	$500,00
Modèle Black-Scholes	
Valeur de l'option européenne en millions	**$185,56**

Commentaires

D'après les deux scénarios, nous pouvons bien constater que le projet a plus de valeur lorsque la possibilité d'attendre avant de le développer est prise en considération. Ceci supporte donc l'hypothèse que l'approche option réelle dévoile de la valeur dans le projet qui n'était pas prise en considération par l'approche traditionnelle. Cette valeur découle spécifiquement, dans notre cas, de la flexibilité des gestionnaires à développer le projet immédiatement ou à attendre avant de le développer. Ainsi, pour optimiser les profits, la compagnie devrait suivre la stratégie selon le premier scénario car celui-ci crée plus de valeur que le deuxième scénario. Un constat intéressant à cet égard provient du fait que selon l'approche de la VPN traditionnelle, le choix de projet aurait été inversé puisque seulement le développement selon le deuxième scénario était profitable. Ceci démontre donc que l'allocation des ressources à la marge peut changer selon le type d'évaluation qui est utilisé.

Une différente façon d'aborder la problématique consiste à évaluer les projets selon des acquisitions indépendantes, mutuellement exclusives. Imaginons une compagnie qui fait face aux deux scénarios. Si elle fait l'analyse traditionnelle, d'après le premier scénario, elle demandera une subvention de 20,51$ millions pour accepter d'acheter le projet. Par contre, si elle décide qu'elle n'a pas besoin de développer le projet immédiatement, elle peut éliminer un degré d'incertitude de ses revenus futurs (qui sont dépendants de l'évolution du prix du cuivre). Or, puisqu'en attendant, elle diffère l'investissement initial, le risque de perte diminue puisqu'elle ne fera pas cet investissement initial dans des mauvaises conditions économiques. Ainsi, selon l'évaluation option réelle, la compagnie paierait au maximum 262,99$ millions pour acheter le projet. Dans le cas du deuxième scénario, elle paierait au maximum 6,41$ millions selon l'analyse traditionnelle et 191,97$ millions selon l'évaluation option réelle. Ces valeurs d'options agissent donc comme assurance contre une perte majeure de l'investissement initial. On voit comment l'évaluation par option réelle permet de mitiger le risque d'un investissement irréverssible, tout en capturant les gains potentiels.

V. Extensions

Une des lacunes évidentes que présente ce modèle est le manque de variables stochastiques. Les coûts sont probablement les plus aptes à changer. Un exemple provient du coût de l'énergie. Ainsi, une extension possible à ce modèle serait de modéliser les coûts selon une ou plusieurs variables stochastiques. On pourrait considérer le coût de l'énergie comme étant une variable stochastique ainsi que le coût des matériaux. Moel et Tufano (2002) ajoutent aussi le coût non-monétaire de trouver des nouveaux gestionnaires si le projet a des fermetures et réouvertures fréquentes. D'un autre côté, on pourrait ajouter au modèle une variable qui prend en compte le changement dans la qualité du minerai au fur et à mesure qu'il est extrait. Les projets miniers ont souvent des fluctuations dans leurs revenus à cause de ce phénomène. De plus, on pourrait essayer d'inclure la probabilité que les réserves augmentent après plusieurs années d'exploitation. Par exemple, les réserves sont souvent révisées à la hausse lorsqu'une mine se développe puisque de nouveaux gisements sont découverts. Une autre variable que nous pourrions ajouter est le *convenience yield.* D'après les études antérieures, cette variable pourrait être dépendante de la variable stochastique du prix d'une commodité.

De plus, puisque nous n'avions que deux scénarios, nous n'avions pas besoin d'utiliser le modèle LSM pour calculer la valeur de l'option américaine. Par contre, en ajoutant d'autres facteurs stochastiques à notre modèle, la méthode du LSM ne serait plus adéquate. Or, comme nous l'avons vu, Imai (2003) a démontré que plus il y a de variables stochastiques, plus le modèle de LSM devient inefficace. En substituant les options américaines pour une combinaison d'options européennes, nous pouvons au moins trouver une valeur minimale pour l'option américaine. De ce fait, Trigeorgis (1993a) démontre que la valeur d'une combinaison d'options européennes similaires tend à ne plus augmenter à la limite.

Avec l'approche option réelle, il est important de bien structurer la flexibilité qu'ont les gestionnaires afin de bien prendre en compte et modéliser chaque option significative d'un projet. Slade (2001) a écrit un des articles empiriques les plus approfondis quant à l'analyse des options réelles dans le contexte de l'opération des mines de cuivre au Canada. Dans son modèle économétrique en panel, elle inclut l'incertitude des coûts ainsi que des réserves. Or, il est vrai que lorsqu'une mine est exploitée, la qualité et la quantité de réserves peuvent augmenter. Ceci ajoute de la valeur à une option d'expansion de la mine. Le modèle de Slade essaie de démontrer que les décisions de gestion ex-post des mines de cuivre au Canada, c'est-à-dire les décisions d'expansion, de contraction, de fermeture et de réouverture, peuvent être confirmées d'après un modèle d'option réelle.

Plusieurs auteurs dont Slade (2001) et Schwartz (1997) essaient aussi de modéliser le prix des commodités d'après un mouvement brownien géométrique, mais cette fois en ajoutant un processus de retour à la moyenne. Cette hypothèse découle du fait que lorsque le prix d'une commodité est élevé, il y aura une augmentation d'exploration et, éventuellement, de développements miniers. Ceci aura pour effet d'augmenter l'offre à moyen terme et potentiellement de réduire le prix si la demande n'augmente pas. L'effet contraire a lieu lorsque les prix sont en dessous de la moyenne puisque les mines arrêteront leurs opérations, ce qui diminuera l'offre et augmentera le prix. Il ne faut pas non plus oublier l'effet de substitution présent d'après l'élasticité prix d'une commodité et l'apparition de nouveaux substituts grâce à l'innovation technologique.

Dans son analyse, Slade (2001) découvre que la demi-vie du processus de retour à la moyenne du cuivre est de sept ans et statistiquement signifiante. Économiquement, ceci signifie que le cuivre prend beaucoup de temps à se rétablir d'un choc. En pratique, on pourrait expliquer ceci par le long montant de temps qu'il faut pour qu'un projet minier se développe. Celui-ci peut prendre de trois à cinq ans à se développer à compter de l'exploration jusqu'au début de l'extraction. Néanmoins, il pourrait facilement y avoir un biais dans l'intensité de retour à la moyenne dépendant si les prix sont hauts ou bas. Or, le temps requis pour couper la source d'un minerai (ex. fermer une mine) est évidemment plus petit que le processus de développement complet d'une mine. Ainsi, nous pouvons supposer que les chutes de prix pourraient être moins persistantes que les hausses de prix, à moins que les coûts diminuent proportionnellement le cas échéant. Par contre, d'autres recherches devront confirmer ce point. Quoiqu'il en soit, sans prendre en compte un processus de retour à la moyenne, le MBG a quelques chances de mener à des estimations futures absurdes puisque les chocs au sein de ce dernier sont persistants.

Dans un autre modèle, Schwartz (2000) suggère que pour des investissements à long terme, on pourrait séparer les fluctuations à court terme des fluctuations à long terme et ainsi n'utiliser que ces dernières. Il remarque que pour les données du pétrole, la variation des prix à termes de courtes échéances est beaucoup plus grande que la variation des prix à termes de longues échéances. Ainsi, en n'utilisant que les longues échéances, nous pouvons utiliser un modèle à un facteur qui considère l'incertitude des prix d'équilibre évoluant selon un MBG standard.

Un autre aspect populaire dans la modélisation d'évaluation option réelle est la possibilité de saut dans les prix. Ainsi, dans leur analyse du secteur des ressources naturelles, Brennan et Schwartz (1985b) ont intégré un processus Poisson dans leur MBG pour prendre en compte le risque d'expropriation. McDonald et Siegel (1986) modélisent aussi le même processus au cas où la valeur du projet chuterait à zéro. De plus, Longstaff et Schwartz (2001) incorporent aussi la possibilité de sauts dans leur modèle LSM. Il est important de ne pas négliger la possibilité de sauts, que ce soit dans les prix des commodités assujetties aux conflits géopolitiques ou dans les coûts par l'apparition de normes environnementales plus strictes. Il faut donc développer un modèle qui prend en compte ces probabilités ou risques.

VI. Conclusion

Depuis plusieurs années, l'approche option réelle est définitivement inculquée dans le monde académique comme ayant le plus grand potentiel d'évaluer de façon plus exacte la flexibilité au sein de projets d'investissements. La flexibilité managériale, jouant un rôle primordial en présence d'incertitude et d'irréversibilité, ne peut pas être captée, ni évaluée avec les analyses de VPN traditionnelles statiques. Quoique cette dernière méthode soit la plus couramment utilisée au sein des décideurs financiers, elle a tendance à ne pas maximiser l'allocation des ressources. Ainsi, en négligeant la valeur de la flexibilité future, le critère de la VPN rejette des projets qui ont une valeur positive en prenant compte des options imbriquées dans ceux-ci. Cette flexibilité peut découler de plusieurs sources comme les options d'attente, d'investissements séquentiels, de transformation de l'échelle des opérations, d'abandon, de substitution et de croissance. Puisque les gestionnaires devraient toujours vouloir maximiser la valeur de leurs projets, ils se serviront de leur flexibilité lorsque les conditions économiques changent. Ainsi, au fur et à mesure que l'information future est dévoilée, le gestionnaire peut minimiser son risque en exerçant ou non des options réelles. Ceci lui permet de mitiger les risques de pertes tout en gardant un accès au maximum de profits possibles.

Or, depuis le développement des théories d'évaluations d'options de Black-Scholes (1973) et Merton (1973), son champ d'application s'est étendu à l'évaluation par option réelle. Les options réelles diffèrent des options financières par le fait qu'elles ne peuvent pas être recréées synthétiquement par des opérations sur les marchés financiers. Ainsi, en identifiant les options présentes au sein de chaque projet, l'approche option réelle permet d'évaluer la flexibilité future des gestionnaires avec l'utilisation de techniques d'évaluations d'options.

De ce fait, il existe trois techniques générales pour évaluer les options réelles : la solution d'équations différentielles, la programmation de VPN dynamique et les simulations Monte Carlo. Nous avons vu d'après notre modèle comment appliquer les deux premières méthodes selon le type d'option. Ainsi, une option américaine peut être évaluée récursivement selon un arbre binomial et une option européenne peut être évaluée selon des formules analytiques comme le Black-Scholes. Néanmoins, nous avons aussi vu comment l'application de simulations Monte Carlo est mise en oeuvre dans le contexte d'évaluation d'options américaines.

D'après les résultats obtenus, nous avons constaté que la valorisation d'une option d'attente au sein d'un projet marginal ajoute de la valeur au projet. Par contre, même au sein d'un modèle simple, en appliquant les propos de Trigeorgis (1993a) sur l'interaction des options, nous pouvons inférer qu'en ajoutant d'autres options au modèle, la valeur du projet ne pourrait qu'augmenter. L'évaluation par option réelle complète la VPN traditionnelle, puisqu'elle incorpore cette dernière dans son calcul tout en ajoutant le facteur de flexibilité.

Plusieurs défis restent à surmonter dont l'assimilation du pouvoir de l'évaluation par option réelle au monde des affaires en général. Il faut donc passer à l'acte d'éduquer les décideurs financiers. Ceux-ci ont intérêt à développer des méthodes plus précises pour évaluer des projets au sein d'un monde ultra compétitif. Du côté académique, il doit y avoir une élaboration de modèles plus généraux qui incorporent plusieurs options réelles au lieu d'une seule comme la plupart des articles déjà publiés. De plus, les économistes doivent continuer à élargir le champ d'application pour qu'éventuellement, cette technique soit assez complète pour devenir le nouveau modèle standard d'évaluation.

Annexes

Annexe 1 : Modèle Black-Scholes

Le modèle Black-Scholes est utilisé pour évaluer la valeur d'une option européenne sans dividende. Il existe une variante pour inclure les dividendes, par contre notre modèle n'en tient pas compte. Voici la version du modèle original sans dividende pour une option d'achat européenne.

$$w(x,t) = xN(d_1) - ce^{r(t-t^*)}N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln x/c + (r + \frac{1}{2}v^2)(t^* - t)}{v\sqrt{t^* - t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln x/c + (r - \frac{1}{2}v^2)(t^* - t)}{v\sqrt{t^* - t}}$$

Selon :

w(.) = fonction du prix de l'option d'achat européenne
x = prix de l'action
t = date actuelle
t* = date d'exercice
v = écart-type du rendement de l'action
r = taux d'intérêt à court terme sans risque
c = prix d'exercice
$N(d_x)$ = fonction de densité normale cumulative

Les hypothèses de base de ce modèle sont :

1. Le prix de l'actif sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique, avec une tendance et volatilité constante.
2. L'actif sous-jacent peut être vendu à découvert.
3. Il n'y existe pas d'opportunité d'arbitrage sans risque.
4. L'actif sous-jacent est échangé en temps continu.
5. Il n'y a pas de coûts de transactions, ni de taxes.
6. Les sécurités sont parfaitement divisibles.
7. Le taux d'intérêt est sans risque et constant pour toutes les maturités.

Preuve :

La formule spécifique ci-dessus découle d'une équation différentielle partielle. Prenons une option d'achat sur un actif sous-jacent de valeur (x) avec un prix d'exercice (c) et une date d'échéance (t*) pour garder les conventions établies. Le taux d'intérêt sans risque (r) et la volatilité de l'actif (v) sont constants.

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t \qquad \text{où } W_t \text{ est un processus Weiner.}$$

Posons la variable V qui sera la valeur de l'option en tant que fonction de X et t, donc V(X,t). Pour savoir la valeur de l'option avant la maturité, nous utilisons le Lemme d'Itô. Et nous obtenons :

$$dV = \left(\mu X \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 X^2 \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \right) dt + \sigma X \frac{\partial V}{\partial X} dW$$

Considérons un portefeuille :

$$\mathrm{P} = V - X\frac{\partial V}{\partial X}$$

Qui comporte une unité de l'option V et $-\partial V/\partial X$ unités de l'actif sous-jacent. La composition du portefeuille s'ajustera donc continuellement. Prenons maintenant le changement du rendement du portefeuille.

$$dR = dV - \frac{\partial V}{\partial X} dX$$

En substituant dans les équations ci-dessus, nous obtenons :

$$dR = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 X^2 \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \right) dt$$

Puisque la présence du terme dW a disparu, nous avons une équation de rendement sans risque. Donc, sans présence d'arbitrage, le rendement du portefeuille doit suivre le rendement du taux sans risque. Sachant le taux sans risque (r) selon un intervalle dt, nous obtenons le rendement du portefeuille :

$$dR = rPdt = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 X^2 \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \right) dt$$

En substituant pour P et en divisant par dt, nous obtenons l'équation différentielle partielle du Black-Scholes :

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 X^2\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}+rX\frac{\partial V}{\partial X}-rV=0$$

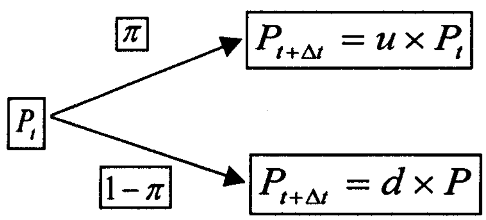
Cette équation décrit donc l'évolution du prix de l'option. Selon les hypothèses du modèle, cette équation est respectée si V a une dérivée seconde par rapport à X et une dérivée simple par rapport à t. La solution unique de cette équation est l'équation de Black-Scholes.

Annexe 2 : Tableau descriptif d'options réelles et ses composantes

Option	Achat/Vente	Type	Prix d'exercice	Actif sous-jacent
Attente	Achat	Américaine	Investissement requis au projet	la valeur du projet
Contraction	Vente	Européenne	Valeur de l'épargne potentielle	la valeur du projet
Expansion	Achat	Européenne	Valeur du coût d'expansion	la valeur du projet
Abandon	Vente	Américaine	Valeur résiduelle	la valeur du projet

Annexe 3 : Le modèle binomial

Le modèle binomial est un modèle discret qui tend asymptotiquement vers le modèle Black-Scholes si les mêmes hypothèses sont utilisées[24]. Par contre, le modèle binomial permet aussi d'évaluer la valeur d'une option américaine car il évalue le prix de l'option à chaque intervalle de temps entre la période courante et la date d'échéance de l'option. L'arbre binomial développé par le modèle prend la forme suivante :



Donc, à chaque étape Δt, il y a une probabilité π que $P_{t+\Delta t} = uP_t$ et une probabilité $1-\pi$ que $P_{t+\Delta t} = dP_t$ avec $0 < d < 1 < u$.

La valeur espérée de $P_{t+\Delta t}$ est égale à :

$$E(P_{t+\Delta t}) = \pi \cdot u^2 \cdot P_t^2 + (1-\pi) \cdot d \cdot P_t$$

Et sa variance est :

$$Var(P_{t+\Delta t}) = \pi \cdot u^2 \cdot P_t^2 + (1-\pi) \cdot d^2 \cdot P_t^2 - \left[\pi \cdot u \cdot P_t + (1-\pi) \cdot d \cdot P_t\right]^2$$

Supposons aussi que la variable Pt suit un mouvement brownien géométrique (MBG). Son espérance et sa variance sont respectivement :

$$E\left[P_{t+\Delta t} \middle| P_t\right] = P_t e^{\mu \Delta t}$$
$$Var\left[P_{t+\Delta t} \middle| P_t\right] = P_t^2 e^{2\mu \Delta t}\left(e^{\sigma^2 \Delta t} - 1\right)$$

---

[24] Cox, Ross et Rubinstein (1979)

On égalise donc les espérances du MBG et du binomial ainsi que leurs variances. Ceci nous donne, après simplifications, le système d'équation.

$$\pi u + (1-\pi)d = e^{\mu\Delta t}$$
$$\pi u^2 + (1-\pi)d^2 - [\pi u + (1-\pi)d]^2 = e^{2\mu\Delta t}(e^{\sigma^2\Delta t} - 1)$$

De plus, posons que $ud = 1$ comme troisième équation pour nous permettre de solutionner le système.

Nous pouvons aussi utiliser l'approximation de Taylor pour simplifier la variance du MBG dans le cas où Δt est infiniment petit. La variance du MBG devient donc $\sigma^2\Delta t$.

Nous obtenons :

$$\pi = \frac{e^{\mu\Delta t} - d}{u - d}$$

Si nous faisons l'expansion de Taylor des termes exponentiels de l'équation de la variance en ignorant les termes du deuxième ordre et plus, nous obtenons :

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \qquad \text{et} \qquad d = \frac{1}{u} = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

Pour générer le processus de prix en équivalent certain, on peut modifier l'expression (X) pour ajuster la croissance moyenne :

$$\pi = \frac{e^{\hat{\alpha}\Delta t} - d}{u - d}$$

Où le taux de croissance risque neutre $\hat{\alpha}$ est déterminé à partir du CAPM en temps continu :

$$\hat{\alpha} = r - \delta = \alpha - \gamma\sigma_m^2\beta$$

avec

$r \equiv$ taux sans risque

$\delta \equiv$ taux de dividende ou le convenience yield

$\alpha \equiv \mu \equiv$ taux de croissance anticipé du prix

$\beta \equiv$ coefficient beta du prix

$\sigma_m^2 \equiv$ variance du rendement du marché

$$\gamma = \frac{E[r_m] - r}{\sigma_m^2}$$

Annexe 4 : Données des prix du cuivre pour les contrats à terme d'un mois

Période	Date	Prix en cents	Log(prix)
1	avril-99	67,11	4,21
2	mai-99	69,17	4,24
3	juin-99	65,29	4,18
4	juillet-99	76,09	4,33
5	août-99	75,93	4,33
6	septembre-99	80,95	4,39
7	octobre-99	79,35	4,37
8	novembre-99	79,21	4,37
9	décembre-99	81,50	4,40
10	janvier-00	84,91	4,44
11	février-00	82,50	4,41
12	mars-00	79,73	4,38
13	avril-00	77,39	4,35
14	mai-00	82,83	4,42
15	juin-00	80,84	4,39
16	juillet-00	84,01	4,43
17	août-00	86,65	4,46
18	septembre-00	91,61	4,52
19	octobre-00	87,65	4,47
20	novembre-00	83,23	4,42
21	décembre-00	86,91	4,46
22	janvier-01	83,66	4,43
23	février-01	82,02	4,41
24	mars-01	80,17	4,38
25	avril-01	76,35	4,34
26	mai-01	76,93	4,34
27	juin-01	72,67	4,29
28	juillet-01	69,52	4,24
29	août-01	67,21	4,21
30	septembre-01	65,53	4,18
31	octobre-01	63,27	4,15
32	novembre-01	66,16	4,19
33	décembre-01	67,93	4,22
34	janvier-02	69,83	4,25
35	février-02	72,29	4,28
36	mars-02	74,60	4,31
37	avril-02	73,16	4,29
38	mai-02	73,27	4,29
39	juin-02	76,29	4,33
40	juillet-02	72,37	4,28
41	août-02	67,87	4,22
42	septembre-02	67,76	4,22
43	octobre-02	68,22	4,22
44	novembre-02	72,63	4,29
45	décembre-02	72,45	4,28
46	janvier-03	75,42	4,32

47	février-03	77,01	4,34
48	mars-03	75,76	4,33
49	avril-03	72,20	4,28
50	mai-03	75,09	4,32
51	juin-03	76,98	4,34
52	juillet-03	78,10	4,36
53	août-03	80,04	4,38
54	septembre-03	81,89	4,41
55	octobre-03	88,14	4,48
56	novembre-03	92,67	4,53
57	décembre-03	99,64	4,60
58	janvier-04	110,20	4,70
59	février-04	125,14	4,83
60	mars-04	139,45	4,94
	écart type	13,16	

Bibliographie

Black, F & Scholes, M (1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, vol. 3, 637-654.

Brennan, M & Schwartz, ES (1985a), "Evaluating Natural Resource Investments", *Journal of Business*, vol. 50, 361-375.

Brennan, M & Schwartz, ES (1985b), "A New Approach to Evaluating Natural Resource Investments", *Midland Corporate Finance Journal*, vol 3, 37-47.

Dickey, DA & Fuller, WA (1981), "Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with a Unit Root", *Econometrica*, vol. 49, 1057-1072.

Dixit, AK & Pindyck, RS (1994), *Investment under Uncertainty,* Princeton University Press, Princeton.

Imai, J (2003), "Evaluating the Switching Options by Simulation Methods", Publication du departement d'économie de l'Iwate Prefectural University. http://www.econ.tohoku.ac.jp/~jimai/paper/evaluating_SO.pdf

Longstaff, FA & Schwartz, ES (2001), "Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach", *The Review of Financial Studies*, vol. 14, no. 1, 113-147.

McDonald, RL & Siegel, DR (1985), "Investment and the Valuation of Firms When There is an Option to Shut Down", *International Economic Review*, vol. 26, no. 2, 331-349.

McDonald, RL & Siegel, DR (1986), "The Value of Waiting to Invest", *The Quarterly Journal of Economics*, vol. 101, no. 4, 707-728.

Merton, RC (1973), "The Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, vol. 4, 141-183.

Moel, A & Tufano, P (2002), "When Are Real Options Exercised? An Empirical Study of Mine Closings", *The Review of Financial Studies*, vol. 15, no. 1, 35-64.

Schwartz, ES (1997), "The stochastic behavior of commodity prices: Implications for valuation and hedging." *Journal of Finance,* vol. 52, pp.923-974.

Schwartz, ES & Smith, J (2000), "Short-Term Variations and Long Term Dynamics in Commodity Prices", *Management Science*, vol. 46, no. 7, 893-911.

Sick, Gordon (publication à venir), "*Valuation and Capital Budgeting*", 430 p.

Slade, M (2001), "Valuing Managerial Flexibility: An Application of Real-Option Theory to Mining Investments", *Journal of Environmental Economics and Management*, vol. 41, 193-233.

Trigeorgis, L (1993a), "The Nature of Option Interactions and the Valuation of Investments with Multiple Real Options", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 28, no. 1, 1-21.

Trigeorgis, L (1993b), "Real Options and Interactions with Financial Flexibility", Financial Management, autumn 1993, 202-224.