Université de Montréal

Le Théorème de Bloch sur le recouvrement holomorphe

par

Nabil Ayoub

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Maître ès sciences (M.Sc.)
en Mathématiques

Août 2002

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Le Théorème de Bloch sur le recouvrement holomorphe

présenté par

Nabil Ayoub

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Paul Arminjon
(président-rapporteur)

Paul M.Gauthier
(directeur de recherche)

Richard Fournier
(co-directeur)

André Giroux
(membre du jury)

Mémoire accepté le:
4 novembre 2002

SOMMAIRE

Ce mémoire vise à étudier deux sujets classiques de l'analyse complexe : le lemme de Schwarz et le recouvrement holomorphe. Pour ce faire, nous allons tout d'abord expliciter des théorèmes considérés comme des applications directes du lemme de Schwarz. Par la suite, nous amorcerons l'étude du recouvrement holomorphe, et ce faisant, nous démontrerons le théorème de Bloch. Finalement, nous donnerons des estimations de la constante de Bloch.

Mots clés

- Lemme de Schwarz
- Lemme d'Ahlfors
- Théorème de Bloch
- Constante de Bloch

SUMMARY

The topic of this project is the study of two classical complex analysis subjects : the Schwarz Lemma, and holomorphic coverings. First, we shall present some direct applications of the Schwarz Lemma. Then, we will concentrate on holomorphic coverings; a proof of the Bloch theorem will be provided. Finally, some estimations of the Bloch constant will be presented.

Keywords

- Schwarz Lemma
- Ahlfors' Lemma
- Bloch's theorem
- Bloch's constant

Table des matières

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je tiens à remercier mon directeur de recherche, monsieur Paul M. Gauthier, de m'avoir accueilli dans l'univers de l'analyse complexe et de m'avoir transmis ses connaissances enrichissantes qui m'ont permis de me lancer dans ce domaine. Son soutien moral, financier et ses conseils mathématiques m'ont été d'une aide inestimable.

Je remercie également mon co-directeur, monsieur Richard Fournier, de m'avoir dirigé et guidé durant ce travail. Le temps et l'aide qu'il m'a consacrés m'ont été précieux.

Enfin, je remercie l'équipe informatique du département, tous mes amis, surtout Roni, et finalement, ma chère Omayma.

INTRODUCTION

Le recouvrement holomorphe dans le plan demeure un des sujets cruciaux de l'analyse complexe. L'étude de ce sujet a été abordée par le mathématicien français André Bloch (1893-1943). Ce dernier a démontré que *toute fonction holomorphe* f *sur le disque unité, avec la propriété* $f'(0) = 1$, *couvre dans son image et de façon injective un disque de rayon* $\beta > 0$, *où* β *est une constante universelle.* Ce théorème a ouvert la voie à des études ultérieures qui, d'ailleurs, se poursuivent jusqu'à nos jours.

Dans cette optique, le présent mémoire abordera deux notions en paralèlle qui visent respectivement à illustrer certaines applications du lemme de Schwarz et à expliciter le problème du recouvrement initialement proposé par Bloch.

Ainsi, le premier chapitre sera consacré à l'étude du lemme de Schwarz et aboutit à un lemme très important qu'est celui de Pick-Schwarz. Plusieurs applications vont en découler, notamment le théorème de Julia, le théorème de Carathéodory et celui de Pick.

Ensuite, le deuxième chapitre portera sur la notion de métrique. Afin de bien cerner l'objet d'étude, nous allons nous attarder, en particulier, sur la métrique de Poincaré. Nous allons aussi traiter de la courbure de Gauss et du lemme d'Ahlfors, lemme qui va jouer un rôle important dans l'estimation de la constante de Bloch.

Enfin, le théorème de Bloch sera démontré dans le troisième chapitre. Il sera aussi question de l'étude des fonctions de Bloch afin d'arriver à une estimation de la constante de Bloch. Finalement, l'estimation d'Ahlfors va clore le chapitre.

Chapitre 1

LEMME DE SCHWARZ ET APPLICATIONS

Nous allons consacrer ce premier chapitre à l'étude du lemme de Schwarz. Dans la première section, nous démontrerons le lemme de Pick-Schwarz et le théorème de Julia, théorème qui portera sur certaines limites angulaires. Ensuite, dans la deuxième section, nous donnerons la définition du produit de Blaschke, ce qui va nous mener au théorème de Carathéodory. Cette même section portera finalement sur la démonstration du théorème de Pick.

1.1. Notations

Tout au long de ce mémoire, les notations suivantes seront utilisées :

- $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ (disque unité ouvert du plan complexe)
- $\overline{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ (disque unité fermé du plan complexe)
- $D_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho\}$.
- $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$.
- Rez = partie réelle de z.
- Un domaine Ω de $\mathbb{C}$ est un ensemble ouvert et connexe.
- $H(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} \big| f$ est analytique sur Ω $\}$.
- Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{C}$. Alors $\overline{E}, \partial E$ sont respectivement l'adhérence et la frontière de E.
- Nous allons noter la sphère de Riemann $(\mathbb{C} \cup \{\infty\})$ par $\hat{\mathbb{C}}$.
- Le Laplacien ΔF d'une fonction $F(z, \overline{z})$ est $\Delta F = 4\frac{\partial^2 F(z,\overline{z})}{\partial z \partial \overline{z}}$.

1.2. Lemme de Schwarz

Soit D le disque unité dans le plan complexe et soit S l'ensemble des fonctions analytiques de D dans $\overline{D}$. Donc si $f \in S$, on a $|f(z)| \leq 1$.

Présentons maintenant le lemme classique de Schwarz.

Lemme 1.2.1. *Si $f \in S$ avec $f(0) = 0$, alors on a :*

a) $|f(z)| \leq |z|, \forall z \in D$.

b) $|f'(0)| \leq 1$; de plus, si $|f'(0)| = 1$ ou si $|f(z)| = |z|$ pour un $z \neq 0$, alors il existe une constante C de module 1 tel que $f(z) = Cz$ pour tout z dans D.

Preuve

Soit g une fonction de $D \rightarrow C$ définie de la manière suivante :

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Il est clair que g est analytique dans D. Soit z un point de D de module r avec $0 < r < 1$; alors $|g(z)| = |\frac{f(z)}{z}| \leq \frac{1}{r}$. En appliquant le principe du maximum à g, il en résulte que $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$ pour tout z dans le disque $|z| < r$, et enfin $|f(z)| \leq \frac{|z|}{r}$. En faisant tendre r vers 1, on obtient $|f(z)| \leq |z|$. En fixant $z = 0$, on aura $|g(0)| \leq 1$ et $|f'(0)| \leq 1$, ce qui prouve a) et b).

Maintenant si pour un z fixé ($z \neq 0$), on a $|f(z)| = |z|$ ou bien $|f'(0)| = 1$, alors la fonction g atteint son maximum en un point intérieur de D. En utilisant le principe du maximum pour une seconde fois, la fonction g sera une constante C de module 1. Il en résulte que $f(z) = Cz$. $\square$

Dans ce qui suit, nous allons appliquer le lemme de Schwarz pour caractériser les applications conformes de D dans D. Pour cela , soit a $\in D$, et définissons une transformation de Moebius par $\varphi(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$; on a que φ est analytique pour $|z| < |a|^{-1}$. φ est donc analytique dans un disque ouvert contenant la frontière de D.

Remarque : φ envoie le disque unité sur lui-même parce que :

$$\frac{|z-a|}{|1-\overline{a}z|} < 1 \Leftrightarrow |z-a|^2 < |1-\overline{a}z|^2$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 - 2Re(\overline{a}z) + |a|^2 < 1 - 2Re(\overline{a}z) + |a|^2|z|^2$$

$$\Leftrightarrow |a|^2(1-|z|^2) < 1 - |z|^2$$

$$\Leftrightarrow |z| < 1.$$

Ajoutons que φ envoie la frontière du disque unité sur elle-même. De plus, on a que φ est inversible et son inverse est $\psi(z) = \frac{z+a}{1+\overline{a}z}$. Donc φ est une bijection de $D \to D$ et son inverse est également une transformation de Moebius.

Du lemme de Schwarz découle un lemme très important, le lemme de Pick-Schwarz, qui va jouer un rôle primordial dans la démonstration du théorème de Landau .

Lemme 1.2.2. *Soit $f : D \to D$ une fonction holomorphe. Alors :*
i) $\forall z \in D,\ \frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2}$.
ii) $\forall z_1, z_2 \in D,\ \frac{|f(z_1)-f(z_2)|}{|1-\overline{f(z_1)}f(z_2)|} \leq \frac{|z_1-z_2|}{|1-\overline{z_1}z_2|}$.
De plus, si f est une transformation de Moebius, alors on aura l'égalité dans i) et ii). Inversement, si on a l'égalité en un point z_0 dans i), ou bien pour un couple $z_1 \neq z_2$ dans ii), alors f sera une transformation de Moebius.

Preuve

i) Soit $z_0 \in D$ et soit $w_0 = f(z_0)$. Définissons $\phi(z) = \frac{z-z_0}{1-\overline{z}_0 z}$ et $\psi(w) = \frac{w-w_0}{1-\overline{w}_0 w}$. En calculant les modules des dérivées, on obtient $|\phi'(z_0)| = \frac{1}{1-|z_0|^2}$ et $|\psi'(w_0)| = \frac{1}{1-|w_0|^2}$. Soit $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$; on a que F est analytique dans D. De plus, F envoie le disque unité sur lui-même et F satisfait les hypothèses du lemme précédent, car :

$$F(0) = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(0) = (\varphi \circ f)(z_0) = \varphi(w_0) = 0, \quad \text{et } |F(z)| = |\psi(f(\frac{z+z_0}{1+\overline{z}_0}))| \leq 1.$$

Appliquons le lemme de Schwarz à F. Ceci nous donne $|F'(0)| \leq 1$, c'est-à-dire que $\frac{|f'(z_o)|}{1-|w_0|^2}(1-|z_0|^2) \leq 1$ et $\frac{|f'(z_0)|}{1-|w_0|^2} \leq \frac{1}{1-|z_0|^2}$, ce qui prouve i).

Supposons que l'égalité a lieu en un point z_0 ; alors $|F'(0)| = 1$ par le lemme de Schwarz, et F sera une rotation autour de l'origine et par suite $f = \psi^{-1} \circ F \circ \varphi$ devient une transformation de Moebius $f(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Inversement, si f est une transformation de Moebius, alors pour tout z dans D, l'égalité aura lieu dans i) et ceci vient du fait que :

$$\begin{aligned}
\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} &= \frac{\frac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}z|^2}}{1-|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}|^2} \\
&= \frac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}z|^2-|z-a|^2} \\
&= \frac{1-|a|^2}{(1-|a|^2)(1-|z|^2)} \\
&= \frac{1}{1-|z|^2}.
\end{aligned}$$

ii) Soit z_1, z_2 deux points de D tel que $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$. Soit

$$\varphi(z) = \frac{z-z_1}{1-\overline{z_1}z} \ ; \quad \psi(w) = \frac{w-w_1}{1-\overline{w_1}w} \ ; \quad F = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}.$$

Comme dans la partie i), F est analytique sur D et $F(0) = 0$, $|F(z)| \leq 1$, et d'après le lemme de Schwarz, $|F(z)| \leq |z|, \forall z \in D$. Plus spécifiquement, prenons $z = \varphi(z_2)$. Alors $|F(\varphi(z_2))| \leq |\varphi(z_2)|$ et enfin $\frac{|f(z_2)-f(z_2)|}{|1-\overline{f(z_1)}f(z_2)} \leq \frac{|z_1-z_2|}{|1-\overline{z_1}z_2|}$, ce qui prouve l'inégalité ii).

Si l'égalité a lieu pour un couple z_1 et z_2 différents, il s'en suit que $|F(\varphi(z_2)| = |\varphi(z_2)|$, et par le lemme de Schwarz, F sera une rotation, et par la suite, f sera une transformation de Moebius.

Inversement, si f est une transformation de Moebius, alors :

$$\begin{aligned}
\frac{|f(z_1)-f(z_2)|}{|1-\overline{f(z_1)}f(z_2)|} &= \frac{\left|\frac{z_1-a}{1-\overline{a}z_1} - \frac{z_2-a}{1-\overline{a}z_2}\right|}{\left|1-\left(\overline{\frac{z_1-a}{1-\overline{a}z_1}}\right)\frac{z_2-a}{1-\overline{a}z_2}\right|} \\
&= \left|\frac{\frac{(z_1-a)(1-\overline{a}z_2)-(z_2-a)(1-\overline{a}z_1)}{(1-\overline{a}z_2)(1-\overline{a}z_1)}}{\frac{(1-a\overline{z_1})(1-\overline{a}z_2)-(\overline{z_1}-\overline{a})(z_2-a)}{(1-\overline{a}z_2)(1-\overline{a}z_1)}}\right| \\
&= \left|\frac{z_1-\overline{a}z_1z_2-a-|a|^2z_2-z_2+\overline{a}z_1z_2+a-|a|^2z_1}{1-\overline{a}z_2-a\overline{z_1}+|a|^2\overline{z_1}z_2-\overline{z_1}z_2+a\overline{z_1}+\overline{a}z_2-|a^2|}\right| \\
&= \left|\frac{(1-|a|^2)(z_1-z_2)}{(1-|a|^2)(1-\overline{z_1}z_2)}\right| \\
&= \frac{|z_1-z_2|}{|1-\overline{z_1}z_2|}.
\end{aligned}$$

Ceci prouve le lemme. $\square$

Dans ce paragraphe, on va définir la distance pseudohyperbolique sur D par

$$\rho(z,w)=\frac{|z-w|}{|1-z\overline{w}|},\, z,w\in D.$$

Plus tard, on va démontrer que c'est une métrique sur D. À partir de cette distance, on peut reformuler le lemme précédent en disant que toute fonction analytique de D dans D est lipschitzienne par rapport à la distance pseudohyperbolique .

De plus, cette distance est invariante sous les transformations de Moebius, c'est-à-dire que $\rho(z,w)=\rho(\varphi(z),\varphi(w))$ pour n'importe quelle transformation φ de Moebius, et ceci découle directement de la partie ii) du lemme précédent .

Pour $0<r<1$, on note $K(z_0,r)=\{z:\rho(z,z_0)<r\}$. $K(z_0,r)$ est appelé un disque non-euclidien. Notons que ce disque est l'image inverse du disque $|w|<r$ par la transformation $w=\varphi(z)=\frac{z-z_0}{1-\bar{z}z_0}$, donc $K(z_0,r)$ peut être vu comme un disque euclidien

$$\Delta(c,R)=\{z:|z-c|<R\}$$

dont le centre c est égal à $\frac{(1-r^2)z_0}{1-r^2|z_0|^2}$ et le rayon R est égal à $\frac{r(1-|z_0|^2)}{1-r^2|z_0|^2}$.

En se basant sur le fait que l' image de la droite passant par les points 0 et z_0 est invariante par φ, il en résulte que $\partial\overline{K(z_0,r)}=\varphi^{-1}(|w|=r)$ est un cercle orthogonal à cette droite ; donc le diamètre de $K(z_0,r)$ est l'image inverse du segment $[-r\frac{z_0}{|z_0|},r\frac{z_0}{|z_0|}]$ par φ, et coincide donc avec le segment $[\alpha,\beta]=[\frac{z_0-r}{1-rz_0}\frac{z_0}{|z_0|},\frac{z_0+r}{1+rz_0}\frac{z_0}{|z_0|}]$. Notons que, pour $z_0>0$, α et β sont les points de la frontière de $K(z_0,r)$ de modules minimum et maximum respectivement. On peut vérifier que le centre $c=\frac{\alpha+\beta}{2}$ et le rayon $R=\frac{|\beta|-|\alpha|}{2}$.

Lemme 1.2.3. *Si $f\in S$, alors $|f(z)|\leq\frac{|f(0)|+|z|}{1+|f(0)|z}$, $z\in D$.*

Preuve

Appliquons le lemme de Pick-Schwarz pour $z_2=0$. Il en résulte que $\frac{|f(z)-f(0)|}{|1-\overline{f(0)}f(z)|}\leq|z|$, ce qui nous donne $f(z)\in\overline{K(f(0),|z|)}$, et par la suite, $|f(z)|\leq\frac{|f(0)|+|z|}{1+|z||f(0)|}$. $\square$

L'inégalité du triangle pour la distance pseudohyperbolique découle du lemme suivant :

Lemme 1.2.4. *Soit z_0,z_1,z_2 trois points dans D ; alors on a :*

$$\left|\frac{\rho(z_0,z_2)-\rho(z_2,z_1)}{1-\rho(z_0,z_2)\rho(z_2,z_1)}\right|\leq\rho(z_0,z_1)\leq\frac{\rho(z_0,z_2)+\rho(z_2,z_1)}{1+\rho(z_0,z_2)\rho(z_2,z_1)}.$$

Preuve

On peut supposer que $z_2=0$ à cause de l'invariance de ρ sous les transformations de

Moebius ; donc le problème se ramène à démontrer que :

$$\Big|\frac{|z_0|-|z_1|}{1-|z_0||z_1|}\Big| \leq \frac{|z_1-z_0|}{|1-\overline{z_0}z_1|} \leq \frac{|z_0|+|z_1|}{1+|z_0||z_1|}.$$

Supposons que $|z_1| = r$. Le point $z = \frac{z_1-z_0}{1-\overline{z_0}z_1}$ devient un point sur la frontière du disque non-euclidien $K(-z_0, r)$; ceci provient du fait que $|z_1| = \frac{|z+z_0|}{|1+\overline{z_0}z|} = r$. Donc il en résulte que :

$$\Big|\frac{|z_0|-r}{1-r|z_0|}\Big| \leq |z| = \frac{|z_1-z_0|}{|1-\overline{z_0}z_1|} \leq \frac{|z_0|+r}{1+|z_0|r}.$$

Ce qui prouve le lemme. $\square$

De l'inégalité précédente découle directement l'inégalité triangulaire suivante :

$$\rho(z_0, z_1) \leq \rho(z_0, z_2) + \rho(z_2, z_1).$$

Ceci montre bien que ρ est une métrique.

Lemme 1.2.5. *Soit f une fonction analytique dans $D \cup \{1\}$ tel que f(0)=0 et f(1)=1. Alors,*
i) $f'(1)$ est réel et $f'(1) \geq 1$.
ii) Si $f(z)$ est de la forme $\sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k$, $n \in \mathbb{N}$, alors $f'(1) \geq n$ et l'égalité aura lieu si seulement si $f(z) = z^n$.

Preuve

i) Puisque $f(0) = 0$, $|f(z)| \leq 1$, on aura $|f(z)| \leq |z|$ pour $|z| < 1$ (lemme de Schwarz). Pour $0 < z < 1$, on obtient $\frac{|1-f(z)|}{|1-z|} \geq \frac{1-|f(z)|}{|1-z|} \geq \frac{1-|z|}{1-z} = 1$. En faisant tendre z vers 1, nous aurons $|f'(1)| = \lim_{z\to 1} |\frac{f(z)-f(1)}{z-1}| \geq 1$. Il nous reste à démontrer que $f'(1)$ est positif.

Soit $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $f(e^{i\theta}) \neq 0$ lorsque $-\varepsilon < \theta < \varepsilon$. Soit $m(\theta) = \ln|f(e^{i\theta})|$. On a que m est une fonction lisse de θ. De plus, elle atteint son maximum pour $\theta = 0$, car $f(1) = max_{|z|<1}|f(z)| = 1$. Donc,

$$\begin{aligned} m'(0) =& \big(\frac{d}{d\theta}\ln f(e^{i\theta})\big)_{\theta=0} \\ =& \big(Re\frac{d}{d\theta}(\ln f(e^{i\theta}))\big)_{\theta=0} \\ =& \big(ie^{i\theta}\frac{f'(e^{i\theta})}{f(ei\theta)}\big)_{\theta=0} \\ =& \big(-Im\frac{e^{i\theta}f'(e^{i\theta})}{f(e^{i\theta})}\big)_{\theta=0} \\ =& \, 0. \end{aligned}$$

Il en résulte que $\left(e^{i\theta}\frac{f'(e^{i\theta})}{f(e^{i\theta})}\right)_{\theta=0}$ est réel, donc $f'(1)$ est réel. Le fait que $|f'(1)| \geq 1$ nous donne $f'(1) \geq 1$ ou $f'(1) \leq -1$. On va démontrer que le cas négatif mène à une contradiction. Si $f'(1) \leq -1$, alors on a $arg f'(1) = \pi$. Mais, puisque $f'(1)$ existe, alors f sera conforme, et par la suite, elle conserve les angles. Considérons deux courbes L_1 et L_2 dans D coincidant en $z = 1$ et faisant entre elles un angle θ. L'angle entre $f(L_1)$ et $f(L_2)$ est $\theta + arg f'(1) = \theta + \pi$. Par conséquent, $f(L_1)$ et $f(L_2)$ sont deux courbes qui coincident en $z = 1$ et font entre elles un angle supérieur à π. Donc, deux cas sont possibles : $|f(z)| > 1$ pour $z \in L_1$ ou pour $z \in L_2$. Ce qui contredit le fait que $|f(z)| \leq 1$.

ii) Par hypothèse, on peut écrire $f(z) = z^n f_1(z)$. On a $|f_1(z)| \leq 1$ et $f_1(1) = 1$. Si f_1 est constante, il n'y a rien à dire. Supposons maintenant que f_1 n'est pas constante; alors $|a_n| < 1$ (si $|a_n| = 1$, f_1 sera constante). Définissons :

$$f_2(z) = \frac{f_1(z) - a_n}{1 - \overline{a_n} f_1(z)} \frac{1 - \overline{a_n}}{1 - a_n}.$$

Il est facile de vérifier que $f_2(0) = 0$, $f_2(1) = 1$ et $|f_2(z)| < 1$. Il résulte de i) que $f_2'(1) \geq 1$. D'autre part, en calculant la dérivée de f_2, nous obtenons :

$$f_2'(z) = \frac{1 - |a_n|^2}{(1 - \overline{a_n} f_1(z))^2} \frac{1 - \overline{a_n}}{1 - a_n} f_1'(z).$$

Plus spécifiquement, pour $z = 1$, on a $f_2'(1) = \frac{1-|a_n|^2}{|1-a_n|^2} f_1'(1) \geq 1$; cette dernière implique que $f_1'(1) \geq \frac{|1-a_n|^2}{1-|a_n|^2}$. Vu que $f'(z) = n f_1(z) + z^n f_1'(z)$, alors

$$\begin{aligned} f'(1) &= n f_1(1) + f_1'(1) \\ &= n + f_1'(1) \\ &\geq n + \frac{|1 - a_n|^2}{1 - |a_n|^2} \\ &> n. \end{aligned}$$

Si on a l'égalité $f'(1) = n$, alors $f_1'(1) = 0$, c'est-à-dire que $f_1(z)$ doit être une constante égale à 1, et par la suite, $f(z) = z^n$. $\square$

Maintenant, nous allons terminer la section par la démonstration du théorème de Julia. Pour ce faire, nous allons commencer par la notion de convergence d'une suite de disques non-euclidiens. Ensuite, nous présenterons le lemme de Julia. Enfin viendra la fameuse démonsration du théorème de Julia.

Pour cela, soit z_n une suite dans D tel que $z_n \to 1$ et $\frac{1-|z_n|}{1-R_n} \to k$, avec $0 < R_n < 1$ et soit k une constante réelle non nulle. Soit $K_n = K(z_n, R_n)$, et $K_\infty = \{z : \frac{|1-z|^2}{1-|z|^2} < k\}$. Alors nous avons les faits suivants :

1) K_∞ est un disque euclidien de centre $\frac{1}{1+k}$ et de rayon $\frac{k}{1+k}$. En effet :

$$\begin{aligned}\frac{|1-z|^2}{1-|z|^2} < k &\Leftrightarrow 1 - 2Rez + |z|^2 < k - k|z|^2 \\ &\Leftrightarrow 1 - k - 2Rez + (1+k)|z|^2 < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1-k}{1+k} - 2\frac{Rez}{1+k} + |z|^2 < 0 \\ &\Leftrightarrow |z - \frac{1}{1+k}|^2 + \frac{1-k}{1+k} - \frac{1}{(1+k)^2} < 0 \\ &\Leftrightarrow |z - \frac{1}{1+k}| < \frac{1-k}{1+k}.\end{aligned}$$

2) Montrons que si $z \in K_n$ pour une infinité de n, alors $z \in \overline{K}_\infty$, la fermeture de K_∞. En effet :

$$\begin{aligned}z \in K_n &\Leftrightarrow |\frac{z - z_n}{1 - \overline{z_n}z}| < R_n \\ &\Leftrightarrow |\frac{z - z_n}{1 - \overline{z_n}z}|^2 < {R_n}^2 \\ &\Leftrightarrow 1 - {R_n}^2 < \frac{(1-|z|^2)(1-|z_n|)^2)}{|1-\overline{z_n}z|^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{|1-\overline{z_n}z|^2}{1-|z|^2} < \frac{1-|z_n|^2}{1-{R_n}^2} = \frac{1-|z_n|}{1-R_n}\frac{1+|z_n|}{1+R_n}.\end{aligned}$$

Si cela est valide pour une infinité d'indices n, alors on peut passer à la limite lorsque n tend vers l'infini dans l'inégalité précédente, et ainsi on aura :

$$\frac{|1-z|^2}{1-|z|^2} \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1-|z_n|}{1-R_n}\frac{1+|z_n|}{1+R_n} = k.$$

Ce qui montre bien que $z \in \overline{K}_\infty$.

3) Si $z \in K_\infty$, alors $z \in K_n$ pour tout n assez grand. Ainsi :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|1-\overline{z_n}z|^2}{1-|z|^2} = \frac{|1-z|^2}{1-|z|^2} < k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-|z_n|^2}{1-{R_n}^2}.$$

Et par conséquent, si n est assez grand :

$$\frac{|1-\overline{z_n}z|^2}{1-|z|^2} < \frac{1-|z_n|^2}{1-{R_n}^2},$$

ceci équivaut à dire que $z \in K_n$.

Remarque : Si 2) et 3) sont valides, on dit que $K_n \to K$.

Lemme 1.2.6. *(de Julia). Soit $f \in S$. Supposons qu'il existe une suite $\{z_n\} \subseteq D$ telle que $z_n \to 1$, $f(z_n) \to 1$ et $\frac{1-|f(z_n)|}{1-|z_n|} \to \alpha \neq 0, \infty$. Alors $\frac{|1-f(z)|^2}{1-|f(z)|^2} < \alpha\frac{|1-z|^2}{1-|z|^2}$, $z \in D$.*

Preuve

Soit $k > 0$; choisissons $0 < R_n < 1$ de telle sorte que $\frac{1-|z_n|}{1-R_n} = k$ (il faut que $1-|z_n| < k$). Avec les mêmes notations que le paragraphe précédent, soit $K_n = K(z_n, R_n)$; montrons que $f(K_n) \subseteq K'_n = K(f(z_n), R_n)$. Cela équivaut à dire que :

$$\left|\frac{z-z_n}{1-\overline{z_n}z}\right| < R_n \Rightarrow \left|\frac{f(z)-f(z_n)}{1-\overline{f(z_n)}f(z)}\right| < R_n.$$

Cette dernière assertion est vérifiée par le lemme de Pick-Schwarz :

$$\left|\frac{f(z)-f(z_n)}{1-\overline{f(z_n)}f(z)}\right| < \left|\frac{z-z_n}{1-\overline{z_n}z}\right|.$$

Supposons que $\frac{|1-z|^2}{1-|z|^2} < k$, autrement dit que $z \in K_\infty$; alors $z \in K_n$ pour n assez grand. Ceci implique que $f(z) \in K'_n$ pour n assez grand, c'est-à-dire que $\left|\frac{f(z)-f(z_n)}{1-\overline{f(z_n)}f(z)}\right| < R_n$. D'autre part :

$$\begin{aligned}\frac{|1-\overline{f(z_n)}f(z)|^2}{1-|f(z)|^2} < \frac{1-|f(z_n)|^2}{1-R_n^2} &= \frac{1-|f(z_n)|^2}{1-|z_n|^2}\frac{1-|z_n|^2}{1-R_n^2} \\ &= k\frac{1-|f(z_n)|}{1-|z_n|}\frac{1+|f(z_n)|}{1+|z_n|}\frac{1+z_n|}{1+R_n}.\end{aligned}$$

Et par la suite :

$$\frac{|1-f(z)|^2}{1-|f(z)|^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{|1-\overline{f(z_n)}f(z)|^2}{1-|f(z)|^2} \leq k\alpha.$$

Finalement, nous avons démontré que si $z \in K_\infty$, alors $\frac{|1-f(z)|^2}{1-|f(z)|^2} < k\alpha$. Si maintenant $z \in \overline{K}_\infty$, alors par continuité, on aura :

$$\frac{|1-z|^2}{1-|z|^2} \leq k \Rightarrow \frac{|1-f(z)|^2}{1-|f(z)|^2} \leq k\alpha.$$

Puisque k est arbitraire, on peut prendre $k = \frac{|1-z|^2}{1-|z|^2}$. Ce qui prouve bien le lemme. $\square$

Passons maintenant au théorème de Julia. La preuve de ce théorème est assez longue.

Pour cela, on va débuter par la version radiale du théorème, et ensuite on va généraliser notre résultat à un secteur.

Théorème 1.2.1. *Soit* $f \in S$ *et soit* $B := sup_{z\in D}\frac{|1-f(z)|^2}{1-|f(z)|^2}/\frac{|1-z|^2}{1-|z|^2}$. *Alors,*

$$\lim_{z\to 1, 0<z<1}\left|\frac{1-f(z)}{1-z}\right| = \lim_{z\to 1, 0<z<1}\frac{1-|f(z)|}{|1-z|} = \lim_{z\to 1, 0<z<1}\frac{1-f(z)}{1-z} = B.$$

Preuve

Il est évident que $0 < B$. Supposons maintenant que $B < \infty$, et soit z_n une suite, $0 < z_n < 1$, qui converge vers 1. Par la définition de B, on a :

$$|1-f(z_n)|^2 \leq B(1-|f(z_n)|^2)\frac{1-z_n}{1+z_n}.$$

Il résulte de cette dernière inégalité que $f(z_n)$ converge vers 1. En outre :

$$\begin{aligned} B \geq \frac{|1-f(z_n)|^2}{1-|f(z_n)|^2}\frac{1-z_n}{1+z_n} &= \frac{1+z_n}{1+|f(z_n)|}\left|\frac{1-f(z_n)}{1-z_n}\right|\frac{|1-f(z_n)|}{1-|f(z_n)|} \\ &\geq \frac{1+z_n}{1+|f(z_n)|}\left|\frac{1-f(z_n)}{1-z_n}\right| \\ &\geq \frac{1+z_n}{1+|f(z_n)|}\frac{1-|f(z_n)|}{1-z_n}. \qquad (1) \end{aligned}$$

Supposons maintenant que α est un point d'accumulation de la suite :

$$\{\frac{1-|f(z_n)|}{1-z_n} : 0 < z_n < 1\}.$$

Donc il existe une suite z_n dans D qui converge vers 1 et $\frac{1-|f(z_n)|}{1-z_n} \longrightarrow \alpha$. Ainsi par l'inégalité (1), on aura :

$$B \geq \lim_{n\to\infty}\frac{1+z_n}{1+|f(z_n)|}\frac{1-|f(z_n)|}{1-z_n} = \alpha.$$

Or par le lemme de Julia, on a démontré que $\frac{|1-f(z)|^2}{1-|f(z)|^2} \leq \alpha\frac{|1-z|^2}{1-|z|^2}$, c'est-à-dire que $B \leq \alpha$; donc $B = \alpha$.

En passant à la limite dans l'inégalité (1), il résulte que :

$$\alpha = B \geq \lim_{n\to\infty}\frac{1+z_n}{1+|f(z_n)|}\left|\frac{1-f(z_n)}{1-z_n}\right| \geq \lim_{n\to\infty}\frac{1+z_n}{1+|f(z_n)|}\frac{1-|f(z_n)|}{1-z_n} = \alpha.$$

Cette dernière égalité implique que :

$$\alpha = B = \lim_{n\to\infty}\frac{1+z_n}{1+|f(z_n)|}\left|\frac{1-f(z_n)}{1-z_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1-f(z_n)}{1-z_n}.$$

Et puisque α est arbitraire, alors :

$$B = \lim_{x \to 1,\, 0<x<1} \left| \frac{1 - f(x)}{1 - x} \right|.$$

De plus, pour $0 < x < 1$, on a :

$$\begin{aligned} |f(x)|^2 &= |1 - f(x)|^2 + 1 - 2|1 - f(x)| \cos \arg(1 - f(x)) \\ &\Leftrightarrow |1 - f(x)| + \frac{1 - |f(x)|}{|1 - f(x)|}(1 + |f(x)|) - 2\cos\arg(1 - f(x)) = 0. \end{aligned}$$

En passant à la limite lorsque x tend vers 1, $0 < x < 1$, dans cette dernière identité, on tire que $\arg(1 - f(x)) \to 0$. Et puisque :

$$\frac{1 - f(x)}{1 - x} = \left|\frac{1 - f(x)}{1 - x}\right| e^{i \arg(\frac{1-f(x)}{1-x})} = \left|\frac{1 - f(x)}{1 - x}\right| e^{i \arg(1 - f(x))},$$

on en déduit que :

$$B = \lim_{x \to 1, 0<x<1} \left|\frac{1 - f(x)}{1 - x}\right| = \lim_{x \to 1, 0<x<1} \frac{1 - |f(x)|}{1 - x},$$

ceci étant valide dans le cas où $B \neq \infty$.

Si $B = \infty$, alors $\alpha = \infty$, et l'ensemble $\{\frac{1-|f(z_n)|}{1-z_n} : z_n \to 1\,, 0 < z_n < 1\}$ aura un seul point d'accumulation qui est l'infini, c'est-à-dire que :

$$\lim_{z \to 1, 0<z<1} \left|\frac{1 - f(z)}{1 - z}\right| = \lim_{z \to 1, 0<z<1} \frac{1 - |f(z)|}{1 - z} = \infty. \qquad \square$$

Afin de démontrer la version finale du théorème de Julia, étudions la signification de $|1 - z| \leq M(1 - |z|)$; autrement dit, caractérisons l'ensemble $\Gamma = \{z \in D : \frac{|1-z|}{1-|z|} < M\}$. Il est clair que $M \geq 1$. Pour cela, posons que $z = 1 + \rho e^{i\theta}$ et nous aurons :

$$\begin{aligned} \rho \leq M(1 - |1 + \rho e^{i\theta}|) &\Leftrightarrow \frac{\rho}{M} \leq 1 - |1 + \rho e^{i\theta}| \\ &\Leftrightarrow |1 + \rho e^{i\theta}|^2 \leq (1 - \frac{\rho}{M})^2 \\ &\Leftrightarrow 1 + 2\rho\cos\theta + \rho^2 \leq \frac{-1}{M} + \frac{\rho}{2M^2} = \frac{1}{M}\big[-1 + \frac{\rho}{2M}\big] \\ &\Leftrightarrow \cos\theta \leq \frac{-\rho}{2} + \frac{1}{M}\big[-1 + \frac{\rho}{2M}\big]. \end{aligned}$$

Or pour un ρ assez petit, on a $\frac{-\rho}{2} + \frac{1}{M}\big[-1 + \frac{\rho}{2M}\big] < 0$. Cela signifie qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \theta < \pi$. Ce qui veut dire que z est à l'intérieur d'un secteur inclus dans D et de sommet 1. Désormais, on va noter par $\lim_{z \to 1,\, z \in \Gamma}$, la limite lorsque z tend vers 1, avec $z \in \{z \in D : \frac{|1-z|}{1-|z|} < M\}$.

Théorème 1.2.2. *(de Julia). Soit f une fonction analytique telle que $|f(z)| < 1$ pour $z \in D$. Soit $B := sup_{z\in D}\frac{|1-f(z)|^2}{1-|f(z)|^2}/\frac{|1-z|^2}{1-|z|^2}$. Alors,*

$$\lim_{z\to 1,\, z\in\Gamma} \frac{1-|f(z)|}{1-|z|} = B.$$

Si B est fini, on aura aussi :

$$\lim_{z\to 1, z\in\Gamma} f'(z) = B.$$

Preuve

D'abord, supposons que $B = \infty$. En appliquant le même raisonnement qu'au théorème précédent, on peut démontrer que :

$$\lim_{z\to 1} \frac{1-|f(z)|}{1-|z|} = B = \infty.$$

Mais si $z \to 1$, avec $|1-z| \leq M(1-|z|)$, nous obtenons que :

$$\frac{1-|f(z)|}{1-|z|} \leq \frac{|1-f(z)|}{1-|z|} \leq \frac{1}{M}\left|\frac{1-f(z)}{1-z}\right|,$$

et ainsi :

$$\lim_{z\to 1, z\in\Gamma} \frac{1-f(z)}{1-z} = \infty.$$

Dans ce cas, la limite angulaire est ∞ . Supposons maintenant que B est fini. Alors on aura :

$$Re\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \leq B Re\left(\frac{1+f(z)}{1-f(z)}\right),$$

et ceci d'après la définition de B.

Alors la fonction F définie par :

$$B\frac{1+f}{1-f} - \frac{1+z}{1-z} = \frac{1+F}{1-F} \qquad (2)$$

satisfait à $Re\left(\frac{1+F}{1-F}\right) > 0$, et ainsi $|F(z)| < 1$ si $|z| < 1$. De plus, on a :

$$Re\left(\frac{1+F}{1-F}\right) = \frac{1-|F|^2}{|1-F|^2} = Re\left[B\frac{1+f}{1-f} - \frac{1+z}{1-z}\right] \geq 0.$$

Ce qui entraîne :

$$\frac{1-|F|^2}{|1-F|^2} = B\frac{1-|f|^2}{|1-f|^2} - \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}.$$

En divisant les deux membres par $\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$, il s'en suit que :

$$\frac{1-|F|^2}{|1-F|^2}\frac{|1-z|^2}{1-|z|^2} = \frac{1-|f|^2}{|1-f|^2}\frac{|1-z|^2}{1-|z|^2}\left[B - \frac{|1-f|^2}{1-|f|^2}\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}\right].$$

Notons B' comme étant la limite angulaire de la fonction F. Puisque $B > 0$ et vu la dernière identité, il découle que $B' = \infty$; et par conséquent :

$$\lim_{z\to 1, z\in\Gamma} \frac{1-F(z)}{1-z} = \infty.$$

Mais comme

$$\frac{1+F}{1-F} = B\frac{1+f}{1-f} - \frac{1+z}{1-z},$$

il en résulte que :

$$(1+F)\frac{1-z}{1-F} = B(1+f)\frac{1-z}{1-f} - (1+z).$$

Ainsi en passant à la limite lorsque $\lim_{z\to 1 z\in\Gamma}$, on obtient :

$$\lim_{z\to 1, z\in\Gamma} B(1+f)\frac{1-z}{1-f} = 2.$$

Cela signifie que $\lim_{z\to 1, z\in\Gamma} f(z) = 1$ et que $\lim_{z\to 1, z\in\Gamma} \frac{1-f(z)}{1-z} = B$.

En dérivant l'équation (2), nous aurons :

$$Bf'(1-f)^{-2} - (1-z)^{-2} = F'(1-F)^{-2}.$$

Ceci nous donne :

$$\begin{aligned}
\left|Bf'(z)\left(\frac{1-z}{1-f(z)}\right)^2 - 1\right| &= |1-z|^2 \frac{|F'(z)|}{|1-F(z)|^2} \\
&\leq |1-z|^2 \frac{|F'(z)|}{(1-|F(z)|)^2} \\
&\leq |1-z|^2 \frac{1-|F(z)|^2}{1-|z|^2} \frac{1}{(1-|F(z)|)^2} \quad \text{(lemme de Pick-Schwarz)} \\
&\leq M^2 \frac{(1-|z|)^2}{1-|z|^2} \frac{1-|F(z)|^2}{(1-|F(z)|)^2} \quad \text{car } |1-z| < M(1-|z|) \\
&= \frac{1+|F(z)|}{1+|z|} \frac{1-|z|}{1-|F(z)|} \\
&\leq 2\frac{1-|z|}{1-|F(z)|}.
\end{aligned}$$

Et par la suite :

$$\lim_{z\to 1, z\in\Gamma} \left|Bf'(z)\left(\frac{1-z}{1-f(z)}\right)^2 - 1\right| \leq \lim_{z\to 1, z\in\Gamma} 2\frac{1-|z|}{1-|F(z)|} = 0,$$

ce qui donne :

$$\lim_{z\to 1, z\in\Gamma} Bf'(z)\left(\frac{1-z}{1-f(z)}\right)^2 - 1 = 0$$

Autrement dit, $\lim_{z \to 1, z \in \Gamma} f'(z) = B$.

1.3. Produit de Blaschke

Définition 1.3.1. *Un produit de Blaschke fini est une fonction de la forme* $B(z) = e^{i\varphi} \prod_{j=1}^{n} (\frac{z - z_j}{1 - \overline{z_j} z})$, $|z_j| < 1$ *avec* φ *réel.*

Remarques :

1) Pour tout $j = 1, ..., n$, on a $1 - \overline{z_j} z = 0$ pour $z = \frac{1}{\overline{z_j}}$ qui n 'appartient pas au disque unité. Donc $B(z)$ n'a pas de zéro sur ∂D et $B(z)$ est analytique dans le disque unité fermé.

2) Sur $\partial D, |B(z)| = |e^{i\varphi}| \prod_{j=1}^{n} (\frac{|z - z_j|}{|1 - z_j z|}) = 1$.

3) B admet un nombre fini de zéros dans D.

Notons que le degré d'un produit de Blaschke est égal au nombre de ses zéros dans D, et qu'un produit de Blaschke de degré zéro est une constante de module 1. Réciproquement, toute fonction analytique pour $|z| < 1$, continue pour$|z| \leq 1$ et dont le module vaut 1 sur la frontière est un produit de Blaschke fini . En effet, f n'a pas de zéro sur le cercle $|z| = 1$, donc elle n'a qu'un nombre fini de zéros à l'intérieur du disque, car si elle admet un nombre infini de zéros, alors il existe sur D un point d'accumulation de zéros de f et, par la suite, la fonction f sera identiquement nulle, ce qui n'est pas le cas. Soit $z_1, ..., z_n$ ces n zéros comptés avec leurs multiplicités. Considérons maintenant :

$$G(z) = \frac{f(z)}{\prod_{j=1}^{n} \frac{z - z_j}{1 - \overline{z_j} z}}.$$

On a que G est analytique dans D, continue pour $|z| \leq 1$ et $|G(e^{i\theta})| = 1$. En appliquant le principe du maximum à G, il résulte que $|G(z)| \leq 1$, pour tout $z \in D$. De même, G ne s'annule pas à l'intérieur du D ou sur ∂D, il résulte que $\frac{1}{G(z)}$ est continue pour $|z| \leq 1$. De plus, G est analytique dans D avec un module 1 sur la frontière, encore une fois par le principe du maximum $\frac{1}{|G(z)|} \leq 1$ pour tout z dans D. Donc G admet un module maximum et un module minimum égaux à 1 et, par la suite, elle est constante de module 1. Donc on peut écrire $F(z) = e^{i\varphi} \prod_{j=1}^{n} (\frac{z - z_j}{1 - \overline{z_j} z})$; ce qui prouve bien que c'est un produit de Blaschke fini.

Théorème 1.3.1. *(de Carathéodory). Soit $f \in S$. Alors il existe une suite de produits de Blaschke finis qui converge simplement vers f.*

Preuve

Pour démontrer ce théorème, on va procéder par induction pour construire un produit de Blaschke de degré tout au plus égal à n, et dont les n premiers coefficients sont égaux à ceux de f, c'est-à-dire que si $f(z) = c_0 + c_1 z + ... + c_{n-1}z^{n-1} + c_n z^n ...$, alors on va trouver un

$$B_n = c_0 + c_1 z + ... + c_{n-1}z^{n-1} + d_n z^n + ...$$

Si $n = 0$, on a $|f(0)| = |c_0| \leq 1$, on peut prendre

$$B_0 = \frac{z + c_0}{1 + \overline{c_0}z} = c_0 + (1 - |\overline{c_0}|^2)z + ...$$

Supposons que pour chaque $g \in B$, nous avons construit $B_{n-1}(z)$. Alors fixons

$$g(z) = \frac{1}{z}\frac{f(z) - f(0)}{1 - \overline{f(0)}f(z)},$$

et soit B_{n-1} un produit de Blaschke de degré tout au plus égal à $n - 1$, tel que $g - B_{n-1}$ admet un zéro d'ordre $n - 1$ en $z = 0$ (ceci est équivalent au fait que g et B_{n-1} aient les premiers $(n - 1)$ coefficients égaux). Soit $B_n(z) = \frac{zB_{n-1}(z)+f(0)}{1+\overline{f(0)}zB_{n-1}(z)}$; on peut remarquer que $1 + \overline{f(0)}zB_{n-1}(z)$ ne s'annule pas dans le disque unité fermé, donc $B_n(z)$ est continu jusqu'à la frontière.

De plus, $B_n(z)$ est analytique sur le disque unité et $|B_n(z)| = 1$ sur la frontière ; ce qui donne que $B_n(z)$ est un produit de Blaschke. Or le fait que le nombre de zéros de $B_n(z)$ est égal à celui de zB_{n-1}, qui est à son tour $\leq n$, fait de B_n un produit de Blaschke de degré $\leq n$. Il nous reste à démontrer que $f - B_n$ admet un zéro d'ordre n en $z = 0$. En effet, nous avons :

$$\begin{aligned} f(z) - B_n(z) &= \frac{zg(z) + f(0)}{1 + \overline{f(0)}zg(z)} - \frac{zB_{n-1}(z) + f(0)}{1 + \overline{f(0)}zB_{n-1}(z)} \\ &= \frac{(1 - |f(0)|^2)z(g(z) - B_{n-1}(z))}{(1 + \overline{f(0)}zg(z))(1 + \overline{f(0)}zB_{n-1}(z)}. \end{aligned}$$

En regardant les deux membres de cette équation, on tire que le nombre de zéros de $f - B_n$ est égal à celui de $z(g - B_{n-1})$, donc égal à n. Ainsi on a démontré que la propriété est vraie pour n, ce qui achève la preuve. $\square$

Notons que les coefficients $c_0,...c_n$ des fonctions dans S ont été caractérisés par Schur (1917). Soit $z_1...z_n$ un ensemble fini de points dans D. Pick (1916) a déterminé les $w_1,...w_n$, pour lesquels l'interpolation $f(z_j) = w_j$, $j = 1, 2, ...n$ admet une solution $f \in S$. Dans ce qui suit, on va présenter un théorème qui donne la condition nécessaire et suffisante pour que l'interpolation précédente admette une solution.

Théorème 1.3.2. *(de Pick) : L'interpolation $f(z_j) = w_j$, j= 1,...n, a une solution $f \in S$ si et seulement si la forme quadratique*

$$Q_n(t_1, ...t_n) = \sum_{j=1,k=1}^{n,n} \frac{1 - w_j\overline{w_k}}{1 - z_j\overline{z_k}} t_j\overline{t_k}$$

est semi-définie positive. De plus, si $Q_n \geq 0$, alors il existe un produit de Blaschke qui résout l'interpolation et dont le degré est tout au plus égal à n.

Preuve

La preuve de ce théorème nécessite l'induction sur n. Pour $n = 1$, on considère f la transformation de Moebius qui est une bijection de D sur lui-même, donc l'interpolation possède une solution. Supposons que $n > 1$ et que notre interpolation a une solution $f \in S$, alors on a directement $|w_n| \leq 1$ puisque $f \in S$. Si on a $|w_n| = 1$, alors la fonction f atteint son maximum à l'intérieur du D et elle sera constante et, par la suite, $w_j = w_n$ pour $1 \leq j \leq n-1$. Supposons maintenant que $|w_n| < 1$ et envoyons z_n et w_n à l'origine par ces transformations :

$$z'_j = \frac{z_j - z_n}{1 - \overline{z_n}z_j},$$

$$w'_j = \frac{w_j - w_n}{1 - \overline{w_n}w_j},$$

et ceci pour $1 \leq j \leq n-1$.

Alors, l'interpolation admet une solution $f \in S$ si et seulement si la fonction g définie par :

$$g = \frac{f(\frac{z+z_n}{1+\overline{z_n}z}) - w_n}{1 - \overline{w_n}f(\frac{z+z_n}{1+\overline{z_n}z})}$$

est dans S et vérifie les équations $g(z'_j) = w'_j$, pour $1 \leq j \leq n$. Remarquons que f est un produit de Blaschke de degré n si et seulement si g est un produit de Blaschke de degré n. La forme quadratique Q'_n, qui correspond à $\{z'_1, ...z'_{n-1}, 0\}$ et $\{w'_1, ...w'_{n-1}, 0\}$, est liée directement à la forme quadratique Q_n. En effet, posons :

$$\frac{1-z'_j\overline{z'_k}}{1-z_j\overline{z_k}} = \frac{1-|z_n|^2}{(1-\overline{z_n}z_j(1-z_n\overline{z_k})} = \alpha_j\overline{\alpha_k}$$

et

$$\frac{1-w'_j\overline{w'_k}}{1-w_j\overline{w_k}} = \frac{1-|w_n|^2}{(1-\overline{w_n}w_j)(1-w_n\overline{w_k})} = \beta_j\overline{\beta_k};$$

nous obtenons :

$$\frac{1-w'_j\overline{w'_k}}{1-\overline{z'_k z'_j}}t_j t_k = \frac{1-w_j\overline{w_k}}{1-z_j\overline{z_k}}(\frac{\beta_j t_j}{\alpha_j})\overline{(\frac{\beta_k t_k}{\alpha_k})}$$

Il résulte de cette dernière équation que $Q'_n(t_1,...t_n) = Q_n(\frac{\beta_1 t_1}{\alpha_1},...,\frac{\beta_n t_n}{\alpha_n})$ et $Q'_n \geq 0$ si et seulement si $Q_n \geq 0$. Ainsi, notre problème peut se réduire au cas où $w_n = z_n = 0$. Maintenant supposons que $z_n = 0$, alors il existe $f \in S$ tel que $f(0) = 0$ et $f(z_j) = w_j$, $1 \leq j \leq n-1$ si et seulement si il existe un $g(z) = \frac{f(z)}{z} \in S$ tel que :

$$g(z_j) = \frac{w_j}{z_j},\ 1 \leq j \leq n-1. \qquad (*)$$

De plus, f est un produit de Blaschke de degré d si et seulement si g est un produit de Blaschke de degré $d-1$ et, par la suite, en appliquant l'hypothèse d'induction, l'interpolation (*) admet une solution si et seulement si la forme quadratique

$$\widetilde{Q}_{n-1}(s_1,...s_{n-1}) = \sum_{j=1,k=1}^{n-1,n-1}(1-\frac{w_j}{z_j}\overline{\frac{w_k}{z_k}})s_j\overline{s_k}$$

est positive. Enfin, la preuve du théorème se réduit à prouver que $Q_n \geq 0 \Leftrightarrow \widetilde{Q}_{n-1} \geq 0$ avec $w_n = z_n = 0$. En développant $Q_n(t_1,...t_n)$, on obtient :

$$Q_n(t_1,...t_n) = |t_n|^2 + 2Re\sum_{j=1}^{n-1}\overline{t_j}t_n + \sum_{j=1,k=1}^{n-1}(\frac{1-w_j\overline{w_k}}{1-z_j\overline{z_k}}-1)t_j\overline{t_k}.$$

Or le fait que

$$\frac{1-w_j\overline{w_k}}{1-z_j\overline{z_k}} - 1 = \frac{z_j\overline{z_k}-w_j\overline{w_k}}{1-z_j\overline{z_k}} = (\frac{1-\frac{w_j}{w_k}\frac{\overline{w_k}}{z_k}}{1-z_j\overline{z_k}})z_j z_k$$

implique que $Q_n(t_1,...,t_n) = |\sum_{j=1}^n t_j|^2 + \widetilde{Q}_{n-1}(z_1t_1,...,z_{n-1}t_{n-1})$.

On tire de cette égalité le résultat suivant : si $\widetilde{Q}_{n-1} \geq 0$, alors $Q_n \geq 0$. Inversement, si $Q_n \geq 0$, alors il suffit de fixer $t_n = -\sum_{j=1}^{n-1} t_j$ et d'appliquer ceci à l'équation précédente. Donc on a bien démontré l' équivalence, ce qui prouve le théorème. $\square$

Chapitre 2

COURBURE DE GAUSS

Dans ce chapitre, nous allons voir la définition et les propriétés de la courbure d'une métrique sur un domaine D. Pour ce faire, nous allons débuter par la notion de métrique d'un domaine, en donnant quelques exemples. Nous étudierons particulièrement celle de Poincaré. Ensuite nous passerons à la deuxième section qui traitera la courbure, nous donnerons le lemme d'Ahlfors, et nous finirons par quelques applications.

2.1. MÉTRIQUES

Définition 2.1.1. *Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un domaine. Alors on appelle métrique sur U toute fonction $\rho(z) \geq 0$, $z \in U$, telle que ρ est continue sur U et deux fois continuement différentiable sur $\{z : \rho(z) > 0\}$. Ainsi pour $z \in U$ et $\xi \in \mathbb{C}$, on définit la longueur de ξ en z par rapport à la métrique ρ comme étant :*

$$||\xi||_{\rho,z} = \rho(z)|\xi|.$$

En général, toutes les métriques considérées sont strictement positives. Mais, on admettra parfois qu'une métrique ait un ensemble non-vide de zéros isolés.

Exemples

1) Soit U un domaine de $\mathbb{C}$. Définissons $\rho(z) \equiv 1$ pour $z \in U$. Alors la longueur d'un vecteur ξ en un point z dans U est donnée par :

$$||\xi||_{\rho,z} = \rho(z)|\xi| = |\xi|\,.$$

On remarque que la longueur de n'importe quel vecteur est égale à son module. Pour cette raison, cette métrique est appelée la métrique euclidienne.

2) Soit D le disque unité et soit $\rho(z) = \frac{1}{1-|z|^2}$. Alors la longueur d'un vecteur $\xi \in \mathbb{C}$, au point $z = \frac{1}{2}$, par rapport à cette métrique est :

$$||\xi||_{\rho,z} = \rho(z)|\xi| = \frac{4}{3}|\xi|\,.$$

Cette métrique est appelé métrique de Poincaré.

Définition 2.1.2. *Soient $U \subseteq \mathbb{C}$ un domaine, et ρ une métrique sur U. Si $\gamma : [a,b] \to U$ est une courbe continuement différentiable, alors on définit la longueur de la courbe γ par rapport à ρ comme étant :*

$$l_\rho(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)||_{\rho,\gamma(t)}dt = \int_a^b \rho(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt.$$

Remarquons que dans cette dernière définition, il y a beaucoup d'analogie avec la longueur d'une courbe au sens euclidien. À partir de cette longueur, on va définir la distance entre deux points P et Q de U. Pour cela, soit $C_U(P,Q)$ l'ensemble des fonctions continuement différentiables $\gamma : [0,1] \to U$ tel que $\gamma(0) = P$ et $\gamma(1) = Q$. Alors notre distance sera définie par :

$$d_\rho(P,Q) = \inf\{l_\rho(\gamma) : \gamma \in C_U(P,Q)\}\,.$$

À titre d'exemple, soit D le disque unité muni de la métrique de Poincaré. Soit la courbe $\gamma(t) = t$, $0 \leq t \leq 1-\varepsilon$. Alors la longueur de cette courbe est donnée par :

$$\begin{aligned} l_\rho(\gamma) &= \int_0^{1-\varepsilon} ||\gamma'(t)||_{\rho,\gamma(t)}dt \\ &= \int_0^{1-\varepsilon} \frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}dt \\ &= \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{1-t^2}dt = \frac{1}{2}\ln[\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}]\,. \end{aligned}$$

Définition 2.1.3. *Soit U et V deux domaines de $\mathbb{C}$ et soit ρ une métrique sur V. Si f est une fonction deux fois continuement différentiable de U dans V dont les zéros sont isolés, on définit le pullback de ρ sous l'action de f comme étant :*

$$f_*\rho(z) = \rho(f(z))|\frac{\partial f}{\partial z}|\,.$$

Dans le cas d' une fonction analytique, cette dernière définition sera équivalente à :

$$f_*\rho(z) = \rho(f(z))|f'(z)|.$$

Notons que le pullback d'une métrique sur V induit une métrique sur U.

Proposition 2.1.1. *Soit U_1, U_2, U_3 trois domaines de $\mathbb{C}$. Si $g : U_1 \longrightarrow U_2$ et $f : U_2 \longrightarrow U_3$ sont deux fonctions analytiques, alors $(fog)_* = g_* o f_*$. De plus, si f est conforme d'un domaine dans lui-même, on aura que $(f_*)^{-1} = (f^{-1})_*$.*

Preuve

Soit ρ une métrique sur U_3. Notons les éléments de U_1 par ω, les éléments de U_2 par ξ, et par z les éléments de U_3. Alors,

$$(fog)_*(\rho(\omega)) = \rho(fog(\omega))|f'(g(\omega))|.|g'(\omega)|.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}(g_* o f_*)(\rho(\omega)) &= [g_*(f_*\rho)](\omega)\\ &= f_*\rho(g(\omega)).|g'(\omega)|\\ &= \rho(f(g(\omega)))|f'(g(\omega))||g'(\omega)|.\end{aligned}$$

Donc nous avons

$$(fog)_*(\rho(z)) = (g_* o f_*)(\rho(z))$$

pour n'importe quelle métrique ρ sur U_3. Ce qui démontre que $(fog)_* = g_* o f_*$.

Si f est une application conforme, alors $(fof^{-1})_* = id_* = id$. En appliquant le résultat précédent, on déduit que $(f_*)^{-1} = (f^{-1})_*$.

Définition 2.1.4. *Soit U_1 et U_2 deux domaines de $\mathbb{C}$ munis des métriques ρ_1 et ρ_2 respectivement. Alors toute fonction f de U_1 dans U_2 bijective et deux fois continuement différentiable qui vérifie $f_*\rho_2(z) = \rho_1(z)$ est appelée une isométrie de (U_1, ρ_1) sur (U_2, ρ_2).*

La proposition suivante met en évidence quelques propriétés de l'isométrie.

Proposition 2.1.2. *Soit U_1 et U_2 deux domaines dans $\mathbb{C}$ où U_2 est muni d'une métrique ρ_2. Soit f une fonction holomorphe de U_1 dans U_2. Alors :*

1) Si $\gamma : [a,b] \longrightarrow U_1$ est une courbe continuement différentiable et l'on définit $f_*\gamma = fo\gamma$, alors

$$l_{f_*\rho_2}(\gamma) = l_{\rho_2}(f_*\gamma).$$

2) Si P et Q sont deux points dans U_1, alors

$$d_{\rho_2}(f(P), f(Q)) \leq d_{f_*\rho_2}(P, Q).$$

Si de plus f est biholomorphe, on a l'égalité.

3) Si U_1 est muni d'une métrique ρ_1 et f est en plus une isométrie, alors : dans 1) on a $l_{\rho_1}(\gamma) = l_{\rho_2}(f_*\gamma)$; dans 2) on a $d_{\rho_2}(f(P), f(Q)) = d_{\rho_1}(P, Q)$ et f^{-1} est une isométrie.

Preuve

En effet, en appliquant la définition de $l_{\rho_2}(f_*\gamma)$, nous obtenons que :

$$l_{\rho_2}(f_*\gamma) = \int_a^b ||(f_*\gamma)'(t)||_{\rho_2, f_*\gamma(t)} dt = \int_a^b ||f'(\gamma(t))\gamma'(t)||_{\rho_2, f_*\gamma(t)} dt.$$

En calculant la quantité à intégrer, nous aurons :

$$\begin{aligned} ||f'(\gamma(t))\gamma'(t)||_{\rho_2, f_*\gamma(t)} &= |\frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t))|.||\gamma'(t)||_{\rho_2, f_*\gamma(t)} \\ &= |\frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t))|.|\gamma'(t)|.\rho_2(f(\gamma(t))) \\ &= ||\gamma'(t)||_{f_*\rho_2, \gamma(t)}. \end{aligned}$$

Mais,

$$l_{f_*\rho_2}(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)||_{f_*\rho_2, \gamma(t)} dt = l_{\rho_2}(f_*\gamma),$$

ce qui prouve la partie 1) de cette proposition.

Soit

$$C_{U_1}(P, Q) = \{\gamma : \gamma \in C^1[a, b] \text{ telles que } \gamma(a) = P \text{ et } \gamma(b) = Q\}.$$

Soit de même

$$C_{U_2}(f(P), f(Q)) = \{\mu : \mu \in C^1[a, b] \text{ telles que } \mu(a) = f(P) \text{ et } \mu(b) = f(Q)\}.$$

Pour tout $\gamma \in C_{U_1}(P, Q)$, on a que $fo\gamma = f_*\gamma$ est une courbe continuement différentiable joignant $f(P)$ et $f(Q)$. Donc $\{fo\gamma : \gamma \in C_{U_1}(P, Q)\} \subseteq C_{U_2}(f(P), f(Q))$. Ceci nous donne que :

$$inf\{l_{\rho_2}(\mu) : \mu \in C_{U_2}(f(P), f(Q))\} \leq inf\{l_{\rho_2}(f_*\gamma) = l_{f_*\rho_2}(\gamma) : \gamma \in C_{U_1}(P, Q)\}.$$

Ceci équivaut à $d_{\rho_2}(f(P), f(Q)) \leq d_{f_*\rho_2}(P, Q)$. Si f est biholomorphe, alors f est bijective, et ensuite on aura que $\{fo\gamma : \gamma \in C_{U_1}(P, Q)\} = C_{U_2}(f(P), f(Q))$, ce qui donne l'égalité dans ce cas.

Si f est une isométrie, alors $f_*\rho_2 = \rho_1$. En écrivant 1) et 2) avec cette dernière égalité, nous aurons $l_{\rho_1}(\gamma) = l_{\rho_2}(f_*\gamma)$ et $d_{\rho_2}(f(P), f(Q)) = d_{\rho_1}(P, Q)$. En appliquant f_*^{-1} à $f_*\rho_2 = \rho_1$, nous obtenons que $\rho_2 = (f_*)^{-1}\rho_1 = (f^{-1})_*\rho_1$. Ceci prouve que f^{-1} est aussi une isométrie. $\square$

Métrique de Poincaré

On a déjà défini la métrique de Poincaré sur le disque unité par $\rho(z) = \frac{1}{1-|z|^2}$. L'importance de cette métrique est bien sûr qu'elle induit sur le disque unité la même topologie que la topologie usuelle, mais surtout qu'elle nous donne une autre version du lemme de Pick-Schwarz, et beaucoup d'autres propriétés dont nous allons traiter dans la deuxième section. Dès maintenant, on note par ρ la métrique de Poincaré.

Proposition 2.1.3. *Soit D le disque unité muni de la métrique ρ. Si $h : D \to D$ est une application conforme, alors h est une isométrie de (D, ρ) sur (D, ρ).*

Preuve

On va démontrer que $h_*\rho(z) = \rho(z)$ pout tout $z \in D$.

1) Si h est une rotation, alors $h(z) = cz$ avec c une constante de module 1. Ainsi,

$$h_*\rho(z) = \rho(h(z))|h'(z)| = \frac{1}{1-|cz|^2} = \rho(z)\,.$$

2) Si h est une transformation de Moebius, alors $h(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$. Ainsi, on aura :

$$\begin{aligned} h_*\rho(z) &= \rho(h(z))|h'(z)| \\ &= \rho(\frac{z-a}{1-\bar{a}z})\frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}z|^2} \\ &= \frac{1-|a|^2}{1-|z|^2-|a|^2+|a|^2|z|^2} \\ &= \frac{1}{1-|z|^2} \\ &= \rho(z)\,. \end{aligned}$$

Dans les deux cas, h est une isométrie. Si h est une application surjective conforme, alors elle est une composition de rotations et de transformations de Moebius. Donc h est encore une isométrie.

Proposition 2.1.4. *: Soit $f : D \to D$ un fonction holomorphe. Alors*

$$f_*\rho(z) \leq \rho(z)\,.$$

En outre, si $\gamma : [0,1] \to D$ est une courbe continuement différentiable, alors on peut exprimer cette dernière inégalité par $l_\rho(f_*\gamma) \leq l_\rho(\gamma)$. De plus, la fonction f est contractante par rapport *à la métrique ρ, c'est-à-dire que si P et Q sont deux points de D, alors*

$$d_\rho(f(P), f(Q)) \leq d_\rho(P, Q).$$

En effet, on a :

$$f_*\rho(z) = \rho(f(z))|f'(z)| = \frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2};$$

ceci étant vrai par le lemme de Pick-Schwarz, ce qui prouve la première inégalité. Les deux autres inégalités seront des conséquences immédiates. On remarque que ce lemme est une autre formulation du lemme de Pick-Schwarz. Dans la proposition qui suit, on va utiliser un résultat sans le démontrer. C'est que la distance induite par la métrique de Poincaré est donnée par

$$d_\rho(P, Q) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\left|\frac{P-Q}{1-\overline{P}Q}\right|}{1-\left|\frac{P-Q}{1-\overline{P}Q}\right|}\right).$$

Pour avoir une idée de la preuve, voir[3].

Proposition 2.1.5. *La topologie induite par la métrique du Poincaré et la topologie usuelle coincident sur D.*

Preuve

Montrons que les deux topologies ont la même base. Pour cela, considérons :

$$B(0, r) = \{z : d_\rho(0, z) < r\}.$$

$B(0, r)$ est un élement da la base de la topologie induite par la métrique du Poincaré. D'autre part $B(0, r) = \{z : |z| < \frac{e^{2r}-1}{e^{2r}+1}\}$ qui peut être vu comme un élement de base de la topologie usuelle. Or une base de la topologie euclidienne (resectivement non-euclidienne) est une réunion des disques euclidiens (respectivement non euclidiens). Donc autour de l'origine les deux topologies coincident. Si maintenant $a \neq 0$ est un point donné du D, alors on considére la transformation de Moebius $\phi : z \longrightarrow \frac{z+a}{1+\bar{a}z}$, qui envoie l'origine en a ; en tenant compte que la métrique de Poincaré est invariante sous les transformations de Moebius qui, à leur tour, envoient les cercles sur des cercles , on peut constater que les deux topologies coincident en chaque point du D.

2.2. Courbure de Gauss

Dans cette section, nous allons donner la définition de la courbure d'une surface et nous allons l'illustrer par quelques exemples. Ensuite, nous donnerons la preuve du lemme d'Ahlfors qui va jouer un rôle important dans l'estimation de la constante de Bloch dans le troisième chapitre.

Définition 2.2.1. *Soient U un domaine de $\mathbb{C}$ et σ une métrique sur U. Alors la courbure en un point z dans U est définie par :*

$$\kappa_{U,\sigma}(z) = \kappa(z) = -\frac{\Delta \log \sigma(z)}{\sigma(z)^2}.$$

Cette définition a bien un sens en chaque point où $\sigma(z) \neq 0$, puisque σ est deux fois continuement différentiable. Ainsi la courbure associe une quantité numérique à un tel point z de U. D'autre part, les zéros de σ sont les singularités de la courbure. Notons que toute métrique dont la courbure est $\leq -B$, $B > 0$ est appelée métrique hyperbolique. D'ailleurs, celle-ci possède beaucoup d'applications qui seront traitées plus tard.

Dans la proposition qui suit, on va démontrer que cette définition est invariante sous l'action des applications conformes.

Proposition 2.2.1. *: Soient U_1 et U_2 deux domaines de $\mathbb{C}$ et $h : U_1 \to U_2$ une application conforme. Si σ est une métrique sur U_2, alors*

$$\kappa_{U_1,h_*\sigma}(z) = \kappa_{U_2,\sigma}(h(z)), \ \forall z \in U_1.$$

Preuve

La démonstration consiste à calculer chacun des deux membres. En effet :

$$\begin{aligned}\kappa_{U_1,h_*\sigma}(z) &= -\frac{\Delta \log[\sigma(h(z))|h'(z)|]}{[\sigma(h(z))|h'(z)|]^2} \\ &= -\frac{\Delta \log[\sigma(h(z))]}{[\sigma(h(z))|h'(z)|^2]} - \frac{\Delta[\log|h'(z)|]}{[\sigma(h(z))|h'(z)|^2]}.\end{aligned}$$

Le numérateur du second terme s'annule parce que la fonction $\log|h'(z)|$ est harmonique sur U_1.

Pour faire les calculs du laplacien dans le premier terme, on va poser $\omega = h(z)$. Ainsi nous aurons $\Delta \log[\sigma(h(z))] = \Delta_\omega \log[\sigma(h(z))]|h'(z)|^2$, où $\Delta_\omega = 4\frac{\partial}{\partial\omega}\frac{\partial}{\partial\overline{\omega}}$. Il en résulte que :

$$\begin{aligned}-\frac{\Delta \log[\sigma(h(z))]}{[\sigma(h(z))|h'(z)|]^2} &= -\frac{\Delta_\omega \log[\sigma(\omega)]|h'(z)|^2}{[\sigma(\omega)|h'(z)|]^2} \\ &= -\frac{\Delta_\omega \log[\sigma(\omega)]}{\sigma(\omega)^2} \\ &= \kappa_{U_2,\sigma}(h(z)). \qquad \square\end{aligned}$$

En réalité, dans la preuve précédente, le fait que la fonction soit conforme nous a garanti que $|h'(z)|$ ne s'annule pas au dénominateur. Donc cette propositon reste vraie pour une fonction holomorphe qui n'est pas nécessairement bijective ; cela veut dire qu'on a :

$$\kappa_{U_1,h*\sigma}(z) = \kappa_{U_2,\sigma}(h(z))$$

en chaque point $z \in U_1$ où $h'(z) \neq 0$ et $\sigma(h(z)) \neq 0$.

Exemples

1) Soit U un domaine de $\mathbb{C}$ muni de la métrique euclidienne $\rho(z) \equiv 1$. La courbure de cette métrique $\kappa_{U,\rho}(z) = 0$.

2) Calculons la courbure de la métrique sphérique définie par $\sigma(z) = \frac{2}{1+|z|^2}$.

$$\begin{aligned}
\kappa_{\mathbb{C},\sigma}(z) &= -\frac{\Delta \log \sigma(z)}{\sigma(z)^2} \\
&= \frac{\Delta \log[1+|z|^2]}{\frac{4}{(1+|z|^2)^2}} \\
&= \frac{4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\log(1+z\bar{z}))}{\frac{4}{(1+|z|^2)^2}} \\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

Notons que la sphère est la seule surface de Riemann dont la courbure est positive.

3) Considérons le disque unité muni de la métrique de Poincaré. Alors $\kappa_{D,\rho}(z) = -4$. Pour le voir, il suffit juste de refaire des calculs semblables à ceux de l'exemple 2).

Dans le théorème qui suit, on va donner une version du lemme du Schwarz qui a été donnée par Ahlfors, et nous allons ensuite prouver le lemme d'Ahlfors. Mais avant de commencer, on a besoin de définir la notion de métrique ultrahyperbolique sur un domaine.

Définition 2.2.2. *Une métrique σ définie sur un domaine G est appelée ultrahyperbolique si elle vérifie les deux propriétés suivantes :*

1) $\sigma(z)$ est semi continue supérieurement.

2) Pour tout point z_0 de G, tel que $\sigma(z_0) > 0$, il existe un voisinage U de z_0 et une métrique σ_0 definie sur U tel que $\kappa_{\sigma_0,U}(z) \leq -4$, $\sigma_0(z_0) = \sigma(z_0)$ et $\sigma_0(z) \leq \sigma(z)$ $\forall z \in U$. La métrique σ_0 est appelée le support de σ.

Théorème 2.2.1. *Soit U un domaine muni d'une métrique σ dont la courbure est inférieure à -4. Soit D le disque unité muni de la métrique ρ de Poincaré. Supposons que $f : D \longrightarrow U$ est une application holomorphe. Alors :*

$$f_*\sigma(z) \leq \rho(z) \quad \forall z \in D\,.$$

Preuve

Pour $0 < r < 1$, définissons la métrique suivante sur le disque $D(0,r)$:

$$\rho_r(z) = \frac{r}{r^2 - |z|^2}.$$

Cette dernière métrique a une courbure égale à -4. En effet, c'est la métrique de Poincaré sur le disque $D(0,r)$. Soit

$$v(z) = \frac{f_*\sigma(z)}{\rho_r(z)}\,.$$

La fonction v est continue et positive sur $D(0,r)$. Or $f_*\sigma$ est une fonction continue sur D, donc bornée sur $\overline{D(0,r)}$. Puisque $\rho_r \longrightarrow \infty$ si $|z| \longrightarrow r$, cela entraîne que v tend vers zéro. Or $v \geq 0$, alors elle admet un module maximum de valeur M en un point z_0 à l'intérieur de $D(0,r)$. Montrons que $v \leq 1$ sur $D(0,r)$. Si $f_*\sigma(z_0) = 0$, on aura $v \equiv 0$, et dans ce cas, il n'y a rien à démontrer. Supposons maintenant que $f_*\sigma(z) > 0$. Alors $\kappa_{f_*\sigma}$ est définie en z_0. Ainsi on aura, par hypothèse, $\kappa_{f_*\sigma}(z_0) \leq -4$. Mais, $log\, v$ admet un maximum en z_0. Il résulte que :

$$\begin{aligned}
0 &\geq \Delta \log(v(z_0)) \\
&= \Delta \log f_*\sigma(z_0) - \Delta \log \rho_r(z_0) \\
&= -\kappa_{f_*\sigma}(z_0).(f_*\sigma(z_0))^2 + \kappa_{\log \rho_r}(z_0).\rho_r(z_0)^2 \\
&\geq 4(f_*\sigma(z_0))^2 - 4\rho_r(z_0)^2.
\end{aligned}$$

Enfin $\frac{(f_*\sigma(z_0))}{\rho_r(z_0)} \leq 1$, ce qui prouve que $M \leq 1$.

Remarquons que le lemme de Schwarz est une conséquence immédiate de ce lemme. En effet, soit f une fonction holomorphe de D dans lui-même tel que $f(0) = 0$. Alors si on munit le disque unité de la métrique de Poincaré ρ, il résulte, d'aprés la proposition précédente, que $f_*\rho(0) \leq \rho(0)$, ce qui équivaut à dire que $|f'(0)|\rho(f(0)) \leq \rho(0)$. Or $f(0) = 0$, ce qui nous donne $|f'(0)| \leq 1$.

Soit $D(0,\alpha)$ le disque de centre 0 et de rayon α. Pour $A > 0$, on définit la métrique suivante sur $D(0,\alpha)$:

$$\rho_\alpha^A(z) = \frac{2\alpha}{\sqrt{A}(\alpha^2 - |z|^2)}.$$

En faisant le calcul, on peut obtenir facilement que la courbure de cette métrique est égale à -A. Ainsi le théorème précédent peut se généraliser de la manière suivante.

Théorème 2.2.2. *Soit U un domaine muni d'une métrique σ dont la courbure est bornée supérieurement par -B, où B est une constante positive et soit $D(0,\alpha)$ muni de la métrique ρ_α^A. Si $f : D(0,\alpha) \to U$ est une application holomorphe, alors*

$$f_*\sigma(z) \le \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}\rho_\alpha^A(z) \quad \forall z \in D(0,\alpha).$$

La preuve de ce théorème est la même que celle déjà faite dans la proposition précédente .

Lemme 2.2.1. *(Ahlfors) : Soit λ une métrique ultrahyperbolique sur le disque unité. Alors $\lambda \le \rho$.*

Preuve

Supposons d'abord que λ a une extension continue et positive sur ∂D. Posons $u(z) = \log\lambda(z)$ et $v(z) = \log\rho$. Montrons que $u(z) \le v(z)$ pour tout $z \in D$. Puisque $\lim_{z\to\infty}(u(z) - v(z)) = -\infty$, et $\log\lambda(z) - \log\rho(z)$ est semi continue supérieurement, alors cette fonction atteint son maximum en un point z_0 du disque unité. Soit U un voisinage de z_0. La métrique λ étant ultrahyperbolique, elle admet un support hyperbolique λ_0 qui vérifie $\lambda_0(z_0) = \lambda(z_0)$ et $\lambda_0(z) \le \lambda(z), z \in U$. Soit $u_0(z) = \log\lambda_0(z)$. Montrons que le point z_0 est un maximum local pour la fonction $u_0(z) - v(z)$. En effet, pour $z \in U$, on a $u(z) - v(z) \le u(z_0) - v(z_0)$, car z_0 est un maximum global pour la fonction $u(z) - v(z)$. Il résulte que :

$$u_0(z) - v(z) \le u(z) - v(z) \le u(z_0) - v(z_0).$$

Ceci prouve bien que z_0 est un maximum local de $u_0(z) - v(z)$. Donc

$$\Delta(u_0(z) - v(z))\Big|_{z=z_0} \le 0, \;\; z \in U.$$

D'autre part, on a $\Delta\log\rho(z) = 4\rho(z)^2$, ce qui nous donne :

$$\Delta\log\lambda_0(z_0) \le \Delta\log\rho(z_0) = 4\rho(z_0)^2.$$

Mais λ_0 a une courbure inférieure à -4, ceci équivaut à dire que $\Delta \log \lambda_0(z_0) \geq 4\lambda_0(z_0)^2$. Ainsi nous obtenons :

$$4\lambda_0(z_0)^2 \leq \Delta \log \lambda_0(z_0) \leq 4\rho(z_0)^2.$$

De cette dernière égalité découle :

$$\log \lambda(z_0) - \log \rho(z_0) \leq 0.$$

Mais puisque z_0 est un maximum sur D pour la fonction $\log \lambda(z) - \log \rho(z)$, on en déduit que $\log \lambda(z) - \log \rho(z) \leq 0$, ce qui est équivalent à dire que $\lambda(z) \leq \rho(z)$.

Si maintenant la fonction n'est pas continue jusqu'à la frontière, on considére la métrique $\lambda(rz)$ avec $0 < r < 1$. On applique le résultat précédent et on fait tendre r vers 1.

2.3. Applications

Dans cette dernière section, nous allons donner quelques applications de la notion de courbure. Nous allons commencer par un critère qui donne la condition pour qu'une fonction holomorphe entre deux domaines soit constante. Après nous verrons le théorème de Liouville et le petit théorème de Picard comme des applications immédiates.

Théorème 2.3.1. *Soit $U \subseteq C$ un domaine muni d'une métrique $\sigma(z)$ dont la courbure vérifie*

$$\kappa_{\sigma(z)} \leq -B < 0,$$

où B est une constante positive. Alors chaque fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \to U$ est constante.

Preuve

Soit $\alpha > 0$. Considérons la fonction holomorphe :

$$f : D(0, \alpha) \to U,$$

avec $D(0, \alpha)$ muni de la métrique ρ_α^A. En appliquant le théorème 2.2.2, il résulte :

$$f_*\sigma(z) \leq \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}\rho_\alpha^A = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \frac{2\alpha}{\sqrt{A}(\alpha^2 - |z|^2)} \quad \forall z \in D(0, \alpha).$$

Or f est définie sur $\mathbb{C}$. Donc on peut laisser tendre α vers l'infini, et par la suite,

$$f_*\sigma(z) = \sigma(f(z))|f'(z)| \leq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Cette dernière équation nous donne $\sigma(f(z)) = 0$ où bien $|f'(z)| = 0$, et ce, pour tout $z \in \mathbb{C}$. Vu que les zéros de σ sont isolés, c'est-à-dire qu'il n'y a pas un point d'acccumulation de zéros dans $\mathbb{C}$, alors la fonction f' va s'annuler au moins sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Par la suite, f' sera nulle partout, ce qui nous donne que f est constante.

Corollaire 2.3.1. *(Théorème de Liouville) : Toute fonction entière et bornée est constante.*

Preuve

Soit f une fonction analytique telle que $|f(z)| \leq M$. Considérons la fonction $g(z) = \frac{f(z)}{M}$. La fonction g est entière et son image est dans le disque unité. Or le disque unité peut être muni de la métrique de Poincaré qui posséde une courbure égale à -4. Donc par le théorème précédent g est une fonction constante, et par suite, f le sera.

Théorème 2.3.2. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ tel que $\mathbb{C} \setminus U$ contienne au moins deux points. Alors U admet une métrique μ avec une courbure κ_μ telle que*

$$\kappa_\mu(z) \leq -B < 0,$$

où B est une constante positive.

Preuve

On peut supposer que les valeurs omises sont 0 et 1. En effet, si les valeurs omises sont a et b, on peut considérer une application conforme f qui envoie $U \setminus \{a, b\}$ sur $U \setminus \{0, 1\}$ tel que $\kappa_{U,f_*\rho}(z) = \kappa_{U,\rho}(z)$. Ainsi, on peut construire une métrique de courbure strictement négative sur $\mathbb{C}_{0,1} = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ en définissant :

$$\mu(z) = \left[\frac{(1 + |z|^{1/3})^{1/2}}{|z|^{5/6}}\right] \cdot \left[\frac{(1 + |z - 1|^{1/3})^{1/2}}{|z - 1|^{5/6}}\right].$$

Ainsi, la fonction μ est positive et lisse sur $\mathbb{C}_{0,1}$. Commençons par calculer la courbure de μ. Tout d'abord,

$$\Delta(\log|z|^{5/6}) = \frac{5}{12}\Delta(log|z|^2) = 0.$$

Alors,

$$\begin{aligned}\Delta \log\left[\frac{(1 + |z|^{1/3})^{1/2}}{|z|^{5/6}}\right] &= \frac{1}{2}\Delta \log(1 + |z|^{1/3}) \\ &= 2\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \log(1 + |z.\overline{z}|^{1/6}).\end{aligned}$$

Après un calcul direct, on aura :

$$\Delta \log\left[\frac{(1+|z|^{1/3})^{1/2}}{|z|^{5/6}}\right] = \frac{-1}{18}\frac{1}{|z|^{5/3}(1+|z|^{5/3})^2}.$$

Ainsi en remplaçant z par $z-1$, nous obtenons de même :

$$\Delta \log\left[\frac{(1+|z-1|^{1/3})^{1/2}}{|z-1|^{5/6}}\right] = \frac{-1}{18}\frac{1}{|z-1|^{5/3}(1+|z-1|^{5/3})^2}.$$

En appliquant la définition de la courbure, il s'en suit que :

$$\kappa_\mu = \frac{-1}{18}\left[\frac{|z-1|^{5/3}}{(1+|z|^{1/3})^3(1+|z-1|^{1/3})} + \frac{|z|^{5/3}}{(1+|z|^{1/3})^3(1+|z-1|^{1/3})}\right].$$

Cette dernière courbure est négative pour $z \in \mathbb{C}_{0,1}$. De plus,

$$\lim_{z\to 0}\kappa_\mu = \lim_{z\to 1}\kappa_\mu = \frac{-1}{36} \quad \text{et} \quad \lim_{z\to\infty}\kappa_\mu = -\infty.$$

Donc, on remarque que dans tous les cas, il existe une constante positive tel que $\kappa_\mu \leq -B$.

Notons que le petit théorème de Picard est une conséquence immédiate du théorème 2.3.2.

Chapitre 3

LE THÉORÈME ET LES FONCTIONS DE BLOCH

Notons d'abord que ce chapitre est le principal chapitre de ce mémoire. Nous commencerons par les théorèmes de Bloch et de Landau ; on donnera les démonstrations et quelques applications. Ensuite, on passera à l'étude des fonctions de Bloch et leurs propriétés. Enfin, nous terminerons avec la méthode d'Ahlfors concernant l'estimation de la constante de Bloch.

3.1. Théorème de Bloch

Définition 3.1.1. *Soit f une fonction holomorphe définie sur un domaine U du plan complexe et soit $a \in U$. Alors un disque $D(f(a), r)$ est appelé un disque univalent s'il existe dans U un ouvert V contenant a, tel que la fonction $f|V : V \to D(f(a), r)$ est une bijection.*

D'après le théorème des applications inverses, on sait qu'un tel disque existe autour de l'image de n'importe quel point où la dérivée de la fonction holomorphe ne s'annule pas.

Soit $f \in H(D)$. Pour $a \in D$, on note par $r(a, f)$ le rayon du disque univalent le plus large centré en $f(a)$. C'est-à-dire que

$$r(a, f) = sup\{r : D(f(a), r)\,\text{est un disque univalent}\}.$$

Dans le cas où f ne possède pas un disque univalent centré en $f(a)$, $r(a, f)$ sera nul.
De plus, nous définissons

$$r(f) = \beta_f = sup\{r(a, f) : a \in U\}.$$

Définissons maintenant la constante de Bloch comme étant :

$$\beta = inf\{r(f) : f \in H(D), f'(0) = 1\}.$$

Bloch a d'abord démontré que β est strictement positive, mais sans donner une estimation numérique de sa constante.

Des estimés sur β furent donnés par L. Ahlfors et H. Grunsky dans les années 30. Les voici donc :

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \leq \beta \leq \frac{\Gamma(1/3)\Gamma(11/2)}{\Gamma(1/4)\sqrt{1+\sqrt{3}}}.$$

Notons que Ahlfors et Grunsky ont conjecturé que $\beta = \frac{\Gamma(1/3)\Gamma(11/2)}{\Gamma(1/4)\sqrt{1+\sqrt{3}}}$. En 1990, Bonk a démontré que $\sqrt{3}/4+10^{-14} < \beta$. En 1996, Chen et Gauthier ont démontré que $\sqrt{3}/4+2\cdot 10^{-4} < \beta$. Ainsi, le problème concernant la valeur exacte de β reste toujours ouvert .

Dans ce chapitre, on va donner l'estimation faite par Ahlfors et celle donnée par Bonk. De plus, nous allons présenter les grandes lignes de la preuve faite par Chen et Gauthier.

Dans ce qui suit, on va démontrer des théorèmes de Landau et Bloch, qui sont en réalité des théorèmes d'existence, ce qui signifie que ces théorèmes ne mentionnent pas le centre du plus grand disque univalent. Mais d'abord considérons des disques univalents centrés en 0.

Théorème 3.1.1. *(de Landau). Soit f une fonction holomorphe du disque unité D dans le disque D_M $(M \geq 1)$ tel que $f(0) = 0$ et $f'(0) = \alpha > 0$. Alors :*

i) f est injective sur D_{r_0} avec $r_0 = \frac{\alpha}{M+\sqrt{M^2-\alpha^2}} > \frac{\alpha}{2M}$.

ii) $\forall r \in (0, r_0]$, $f(D_r)$ contient le disque D_R, avec $R = M\frac{r(\alpha - Mr)}{M-\alpha r} \geq Mrr_0$.

Preuve

Supposons pour le moment que $M = 1$.

i) Si $\alpha = 1$, on a $|f(z)| \leq 1, \forall z \in D$ et $f(0) = 0$. Appliquons le lemme de Schwarz à la fonction f. Il résulte que $|f(z)| \leq |z|$. Or le fait que $|f'(0)| = 1$ donne $f(z) = cz$ avec $|c| = 1$, et par la suite, $f'(z) = \alpha = c = 1$. Enfin nous aurons $f(z) = z$ et, dans ce cas, le théorème sera évident.

Supposons maintenant que $0 < \alpha < 1$. Montrons que f est injective sur D_{r_0}, avec $r_0 = \frac{\alpha}{1+\sqrt{1-\alpha^2}}$. Pour cela, soient z_1 et z_2 deux points de D, $0 \leq |z_1| \leq |z_2| = \rho < 1$, tels que

$f(z_1) = f(z_2) = \omega_0$. Démontrons que $\rho \geq r_0$. Pour ce faire, considérons la fonction :

$$g(z) = \frac{f(z) - \omega_0}{1 - \overline{\omega_0} f(z)} \frac{1 - \overline{z_1} z}{z - z_1} \frac{1 - \overline{z_2} z}{z - z_2}.$$

Il est facile de voir que cette fonction est holomorphe sur le disque unité. De plus,

$$\overline{\lim}_{|z| \to 1} |g(z)| \leq 1.$$

Appliquons le principe du maximum à g. Il résulte que $|g(z)| \leq 1$ pour tout z $\in D$. Étudions le problème selon les valeurs de ω_0.

a) Si $\omega_0 = 0$, alors on aura $f(z_1) = f(z_2) = f(0) = 0$. Ainsi on peut prendre $z_1 = 0$, et $g(z)$ se simplifie comme suit : $g(z) = \frac{f(z)}{z} \frac{1 - \overline{z_2} z}{z - z_2}$. Cette dernière nous donne $|g(0)| = \frac{\alpha}{|z_2|} \leq 1$, ce qui implique que $\alpha \leq |z_2| = \rho$. Par conséquent, nous obtenons que $r_0 < \alpha \leq \rho$.

b) Si $\omega_0 \neq 0$, alors on a $|g(0)| = \frac{\omega_0}{z_1 z_2} \leq 1$, c'est-à-dire que $|w_0| \leq |z_1 z_2| \leq \rho^2$. Soit

$$h(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

La fonction h est holomorphe dans D. En appliquant le lemme de Pick-Schwarz à la fonction h en z_2 et en 0, il résulte que

$$\frac{|h(z_2) - h(0)|}{|1 - \overline{h(0)} h(z_2)|} \leq \frac{|z_2 - 0|}{|1 - \overline{z_2} 0|} = |z_2| = \rho.$$

Ceci donne que $\left| \frac{h(z_2) - \alpha}{1 - \alpha h(z_2)} \right| \leq \rho$. Cette dernière inégalité implique que $h(z_2) \in \overline{K(\alpha, \rho)}$.

Mais, on a déjà vu dans le premier chapitre que $K(\alpha, \rho)$ peut être vu comme un disque euclidien de diamètre $[\frac{\alpha - \rho}{1 - \alpha\rho}, \frac{\alpha + \rho}{1 + \alpha\rho}]$. Le fait que $h(z_2) \in \overline{K(\alpha, \rho)}$ ajouté au fait que $|w_0| \leq \rho^2$ nous donnent

$$\rho \geq \frac{|w_0|}{\rho} = \frac{|f(z_2)|}{|z_2|} = |h(z_2)| \geq \frac{\alpha - \rho}{1 - \alpha\rho}.$$

$$\Rightarrow \rho \geq \frac{1 - \sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha} = \frac{\alpha}{1 + \sqrt{1 - \alpha^2}} = r_0.$$

Finalement, si $f(z_1) = f(z_2)$ avec $0 \leq |z_1| \leq |z_2| = \rho$, alors ρ doit être supérieur à la valeur r_0 donnée précédement. Ainsi f sera injective sur $D(0, \frac{\alpha}{1 + \sqrt{1 - \alpha^2}})$. Ceci prouve la partie i) du théorème.

ii) Soit $0 < r \leq r_0$. Considérons de nouveau la fonction h déjà définie. Appliquons l'inégalité de Pick-Schwarz et nous obtenons

$$\frac{|h(re^{i\theta}) - \alpha|}{|1 - \alpha h(re^{i\theta})|} \leq |re^{i\theta}| = r.$$

Ainsi, avec un raisonnement analogue à celui présenté précédement, nous arriverons à $|h(re^{i\theta})| \geq \frac{\alpha - r}{1-\alpha r}$, et enfin

$$|f(re^{i\theta})| \geq r\frac{\alpha - r}{1 - \alpha r} = R \geq r\frac{\alpha - r_0}{1 - \alpha r_0} = rr_0.$$

Ceci démontre la partie ii).

Donc on a démontré i) et ii) avec la supposition que $M = 1$. Dans le cas où $M \neq 1$, on considère la fonction $l(z) = \frac{f(z)}{M}$ et on applique les résultats de i) et de ii) à la fonction l. $\square$

Du théorème de Landau découle un théorème très important qu'est le théorème de Bloch. Ce dernier donne une estimation sur le rayon du disque univalent contenu dans l'image d'une fonction holomorphe sur le disque unité.

Théorème 3.1.2. *(de Bloch). Soit f une fonction holomorphe sur D avec $f'(0) = 1$. Alors $f(D)$ contient un disque univalent de rayon $\frac{1}{14}$.*

Preuve

Supposons d'abord que f est holomorphe sur $\overline{D}$. Soit $z' \in D$ tel que

$$A = (1 - |z'|)|f'(z')| = max(1 - |z|)|f'(z)|), z \in D.$$

Ce maximum existe, car $(1 - |z|)|f'(z)| = 0$ sur ∂D. De plus, on a $A \geq 1$, qui est la valeur correspondante à 0. Pour $\xi \in D$, définissons

$$g(\xi) = \frac{2}{A}f(z' + \frac{1}{2}(1 - |z'|)\xi) - \frac{2}{A}f(z').$$

Cette fonction est bien définie, car

$$\begin{aligned}
|z' + \frac{1}{2}(1 - |z'|)\xi| &\leq |z'| + \frac{1}{2}(1 - |z'|)|\xi| \\
&< |z'| + \frac{1}{2}(1 - |z'|) \\
&< |z'| + (1 - |z'|) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

De plus, la fonction g vérifie

$$g(0)=0,\ |g'(0)|=\frac{1}{A}(1-|z'|)|f'(z')|=1.$$

Essayons de majorer $g'(\xi)$ pour appliquer le théorème précédent. Suite au calcul de la dérivée, nous obtenons

$$\begin{aligned}|g'(\xi)| &= \frac{1}{A}(1-|z'|)|f'(z'+(1-|z'|)\frac{\xi}{2})| \\ &= \frac{1-|z'|}{1-|z'+(1-|z'|)\frac{\xi}{2}|}\frac{(1-|z'+(1-|z'|)\frac{\xi}{2}|)|(f'(z'+(1-|z'|)\frac{\xi}{2})|}{A}.\end{aligned}$$

Or le fait que $z'+(1-|z'|)\frac{\xi}{2}$ soit un élément de D nous mène à

$$(1-|z'+(1-|z'|)\frac{\xi}{2}||f'(z'+(1-|z'|)\frac{\xi}{2})|\leq A.$$

Il en découle que

$$|g'(\xi)|\leq\frac{1-|z'|}{1-|z'+(1-|z'|)\frac{\xi}{2}|}\leq\frac{1-|z'|}{1-(|z'|+\frac{1-|z'|}{2})}=2\frac{1-|z'|}{1-|z'|}=2.$$

Par suite, $|g(\xi)|\leq\int_0^\xi|g'(z)||dz|\leq 2|\xi|\leq 2$. Appliquons maintenant le théorème de Landau, et nous obtenons que $g(D)$ contient un disque univalent de rayon $2/(2+\sqrt{3})^2$. Ceci équivaut à dire que pour $\xi\in D$, $f(z'+\frac{1}{2}(1-|z'|)\xi)\subseteq f(D)$ contient un disque univalent de rayon $\frac{2}{(2+\sqrt{3})^2}$ qui est supérieur à $1/14$.

Si f n'est pas holomorphe dans $\overline{D}$, alors en considérant la fonction $\frac{f(rz)}{r}$ avec $0<r<1$, nous pouvons conclure que $f(D)$ contient un disque univalent de rayon $r/(2+\sqrt{3})^2$. Si nous prenons $r=(2+\sqrt{3})^2/14$ avec le résultat précédent, nous aurons que $f(D)$ contient un disque univalent de rayon $1/14$. $\square$

En effet, il y a plusieurs preuves du théorème de Bloch. La preuve que nous avons présentée précédement, qui a été faite par Landau, est probablement la plus simple. De plus, nous pouvons modifier la preuve ci-haut pour obtenir un rayon plus grand que 1/14. Pour en être convaincu, soit $z' \in D$ tel que

$$A = (1 - |z'|^2)|f'(z')| = max(1 - |z|^2)|f'(z)|, z \in D.$$

On remarque que $A \geq 1$, le 1 étant la valeur correspondante à l'origine. Soit

$$g(\xi) = \frac{f(\varphi(\xi)) - f(z')}{A}.$$

En calculant la dérivée de g et en majorant, nous obtenons

$$\begin{aligned}
& g'(\xi) = \frac{f'(\varphi(\xi))\varphi'(\xi)}{A} \\
& \Rightarrow |g'(\xi)| = \frac{|f'(\varphi(\xi))||\varphi'(\xi)|}{A} = \frac{|f'(\varphi(\xi))|}{A}\frac{(1 - |\varphi(\xi)|^2)}{1 - |\xi|^2} \\
& \Rightarrow |g'(\xi)|(1 - |\xi|^2) = \frac{(1 - |\varphi(\xi)|^2)|f'(\varphi(\xi))|}{A} \leq 1.
\end{aligned}$$

De plus

$$|g'(0)| = \frac{f'(z')\varphi'(0)}{A} = \frac{(1 - |z'|^2)|f'(z')|}{A} = 1.$$

Soit $0 < r < 1$. Pour $\xi \in D_r$, on a $|g(\xi)| \leq \int_0^r |g'(z)|dz = \int_0^r \frac{1}{1-t^2}dt = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r} = M_r$. Soit $h(\omega) = g(r\omega)$. Par le théorème de Landau, on a que $h(D)$ contient un disque univalent de rayon

$$R_r = \frac{M_r r^2}{(M_r + \sqrt{{M_r}^2 - r^2})^2}.$$

Par suite, $f(D)$ va contenir un disque de même rayon. Si nous fixons $r = 0.6$, alors $R_r > 0.2306$ et $f(D)$ contient un disque univalent de rayon 0.2306.

Dans ce qui suit, nous allons donner des applications directes du théorème de Bloch. En fait, nous verrons le théorème de Valiron et une autre démonstration du petit théorème de Picard. Mais, tout d'abord, commençons avec un corollaire du théorème de Bloch. Ce théorème sera utilisé dans la démonstration du théorème de Valiron qui sera à son tour la clé du théorème de Picard.

Corollaire 3.1.1. *Soit $R > 0$ et $f \in H(D(0,R))$. Alors $f(D(0,R))$ contient un disque univalent de rayon $\frac{R|f'(0)|}{14}$.*

Preuve

Supposons que $f'(0) \neq 0$, car sinon il n'y a rien à démontrer. Soit $g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie par $g(\xi) = \frac{f(R\xi)}{Rf'(0)}$. La fonction g est holomorphe sur D avec $g'(0) = 1$. Par le théorème de Bloch, nous obtenons que $g(D)$ contient un disque de rayon $\frac{1}{14}$. Mais comme $f(R\xi) = f'(0)Rg(\xi)$ pour $|\xi| < 1$, on constate que $f(D(0,R))$ contient un disque de rayon $\frac{R|f'(0)|}{14}$. □

Corollaire 3.1.2. *(Théorème de Valiron). Soit f une fonction entière non constante. Alors l'image $f(\mathbb{C})$ contient des disques univalents arbitrairement grands .*

Preuve

Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $f'(a) \neq 0$. Par le corollaire précédent, on a

$$f(\mathbb{C}) \supset f(D(a,R)), \ \forall R > 0.$$

Donc $f(\mathbb{C})$ contient des disques de rayons $R\frac{|f'(a)|}{14}$ qui sont arbitrairement grands. □

Avant de passer à la preuve du théorème de Picard, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 3.1.1. *Soit G un domaine simplement connexe et soit f une fonction holomorphe sur G qui omet les valeurs 0 et 1. Alors il existe une fonction holomorphe g sur G tel que*

$$f(z) = -exp(i\pi \cosh[2g(z)]), \ z \in G.$$

Preuve

Puisque f ne s'annule pas dans G, nous pouvons définir une branche logarithmique l de $\ln f$ sur G (on sait que ceci existe par le théorème de monodromie). Alors $e^l = f$. Soit $F(z) = (2\pi i)^{-1} l(z)$. Cette fonction omet les valeurs entières. En effet, si nous avons $F(a) = n$ pour un n donné, alors $f(a) = exp(2\pi i n) = 1$, ce qui n'est pas le cas. Plus particulièrement, $F(z)$ ne peut prendre la valeur 1 et, par la suite, on peut définir, encore une fois en vertu du théorème de monodromie, une branche

$$H(z) = \sqrt{F(z)} - \sqrt{F(z) - 1},$$

et une autre branche :

$$g(z) = \ln H(z).$$

Il nous reste à calculer

$$\begin{aligned}\cosh(2g) + 1 &= \frac{1}{2}(e^{2g} + e^{-2g}) + 1 \\ &= \frac{1}{2}(e^{g} + e^{-g})^2 \\ &= \frac{(H + H^{-1})^2}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{F} - \sqrt{F-1} + \sqrt{F} + \sqrt{F-1})^2}{2} \\ &= 2F.\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$f = e^{l} = exp[\pi i + \pi i \cosh 2g] = -exp[i\pi \cosh(2g)].$$

Corollaire 3.1.3. *(Le petit théorème de Picard). Une fonction entière qui omet deux valeurs de $\mathbb{C}$ est constante.*

Preuve

On peut supposer que f omet les valeurs 0 et 1 (si f omet deux valeurs a et b, on ramène le problème au 0 et au 1 par la fonction $(f-a)(b-a)^{-1}$ qui omet les valeurs 0 et 1). Alors par le lemme précédent, il existe une fonction g entière tel que $f(z) = -exp(i\pi \cosh(2g(z)))$. La fonction g omet les valeurs

$$\pm \ln(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) + \frac{ik\pi}{2},\ n \geq 1,\ k \in \mathbb{Z}.$$

En effet, supposons le cas contraire, alors il existe un a tel que

$$g(a) = \pm \ln(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) + \frac{ik\pi}{2}.$$

Après un simple calcul, on trouve que $i\pi \cosh(2g(a)) == i\pi(2n-1))$. Il en résulte que $f(a) = 1$, ce qui est absurde. Donc g ne prend pas les valeurs du réseau rectangulaire dont la hauteur de chaque rectangle est $\frac{\pi}{2}$ et dont la largeur est bornée car

$$\lim_{n\to\infty}[\ln(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})-\ln(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})]=\lim_{n\to\infty}\ln(\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}})=0.$$

Par suite, $g(\mathbb{C})$ ne contient pas de disques arbitrairement grands, par le théorème de Valiron g est constante, et il en est de même pour f.

3.2. Les fonctions et la constante de Bloch

Dans cette section, nous allons étudier le concept de fonctions de Bloch. Pour ce faire, nous les définirons et donnerons quelques exemples. Après, nous allons démontrer l'équivalence entre la constante de Bloch de la classe des fonctions holomorphes sur D et celle sur $\overline{D}$. Enfin, on terminera la section en donnant l'estimation de Bonk sur la constante de Bloch.

Définition 3.2.1. *Soit $f \in H(D)$. Alors la semi-norme de Bloch sera définie par*

$$||f||_B = sup_{|z|<1}\{(1-|z|^2)|f'(z)| : |z|<1\}.$$

Définition 3.2.2. *Une fonction est dite une fonction de Bloch si $||f||_B < \infty$.*

Soit $B = \{f : f$ est une fonction de Bloch sur D$\}$. Notons que B, muni de la norme $||f|| = ||f||_B + |f(0)|$, est un espace de Banach .

Exemples

1) La fonction définie par

$$f(z) = \frac{1}{2}\log(\frac{1+z}{1-z}), z \in D$$

est une fonction de Bloch. En effet,

$$f'(z) = \frac{1}{2}\frac{(\frac{1+z}{1-z})'}{(\frac{1+z}{1-z})} = \frac{2}{1-z^2}.$$

Ceci implique que

$$(1-|z|^2)|f'(z)| = (1-|z|^2))\frac{1}{|1-z^2|} \leq \frac{1-|z|^2}{1-|z|^2} = 1.$$

Finalement ,

$$||f||_B = sup_{z\in D}(1-|z|^2)|f'(z)| \leq 1.$$

Ceci prouve bien que f est une fonction de Bloch. Remarquons que le fait qu'une fonction soit de Bloch n'implique pas nécessairement qu'elle soit bornée (la fonction précédente est un exemple).

2) Soit $\alpha > 0$; alors la fonction définie par

$$f(z) = (\frac{1+z}{1-z})^{\alpha}$$

n'est pas une fonction de Bloch, puisque

$$\begin{aligned} ||f||_B = sup_{z \in D}(1-|z|^2)|f'(z)| &= sup_{z \in D} 2\alpha \frac{(1+z)^{\alpha-1}}{(1-z)^{\alpha+1}}(1-|z|^2) \\ &\geq lim_{x \to 1} \alpha \frac{(1+x)^{\alpha-1}}{(1-x)^{\alpha+1}}(1-|x|^2) \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Avant de démontrer que la constante de Bloch est la même pour les fonctions holomorphes sur D et celles sur $\overline{D}$, on va présenter les deux lemmes suivants :

Lemme 3.2.1. *Soit $\phi : D \to D$. Alors $r(fo\phi) \leq r(f)$.*

Preuve

Soit $D(fo\phi(z), r)$ un disque univalent de $f(D)$, et soit G un voisinage de z dans D tel que $fo\phi : G \to D(fo\phi(z), r)$ est une fonction biholomorphe. Alors la fonction $\phi : G \to D$ est injective (sinon $fo\phi$ ne le serait pas) et donc biholomorphe. Ceci nous donne que la fonction $f : \phi(G) \to D(fo\phi(z), r)$ est biholomorphe, et donc chaque disque univalent de $fo\phi$ est un disque univalent de f. Nous concluons que $r(fo\phi) \leq r(f)$.

Lemme 3.2.2. *Soit f une fonction holomorphe sur D, et soit ϕ_n une suite de fonctions de D dans D qui convergent vers la fonction identité. Alors nous aurons : $\beta_{fo\phi_n} \to \beta_f$.*

La preuve de ce lemme se base sur la semi continuité du rayon de Bloch. Un sujet que nous ne voulons pas traiter dans ce mémoire. Pour cela, nous allons l'admettre sans démonstration voir[4] .

Proposition 3.2.1. *: La constante de Bloch est la même pour la classe des fonctions holomorphes définies sur D ou bien sur $\overline{D}$, c'est-à-dire :*

$$\beta = inf\{\beta_f : f \in H(D), |f'(0)| = 1\} = inf\{\beta_f : f \in H(\overline{D}), |f'(0)| = 1\} = \overline{\beta}.$$

Preuve

Comme l'espace $H(\overline{D})$ est un sous-ensemble de l'espace $H(D)$, on obtient $\overline{\beta} \geq \beta$. Pour démontrer l'autre inégalité, il suffit de trouver une fonction g dans $H(\overline{D})$ avec $g'(0) = 1$, qui vérifie $\beta_g \leq \beta_f + \epsilon$, et ceci pour tout $\epsilon > 0$ avec $f \in H(D)$. Pour cela, définissons une fonction $g_r(z) = \frac{f(rz)}{r}$, avec $0 < r < 1$. Cette fonction est holomorphe sur $\overline{D}$. De plus, $g_r'(0) = 1$, donc $\beta_{g_r} = \frac{\beta_{f_r}}{r}$. Faisons tendre r vers 1, et nous aurons $\frac{\beta_{f_r}}{r} \longrightarrow \beta_f$; donc $\beta_{g_r} \leq \beta_f + \epsilon$, si r est près de 1. En passant à l'infimum des deux côtés, on aura $\overline{\beta} \leq \beta$. $\square$

Soit $B_1 = \{f \in B : f(0) = 0, f'(0) = 1, ||f||_B = 1\}$. Cette classe de fonctions est appelée la classe de fonctions de Bloch normalisées. Montrons maintenant que la constante de Bloch est la même pour la classe B_1.

Théorème 3.2.1. $\beta = inf\{r(f) : f \in B_1\}$.

Preuve

Soit f une fonction dans $H(\overline{D})$ avec $f'(0) = 1$. Alors la quantité $(1 - |z|^2)|f'(z)|$ admet un maximum en un point z_0 à l'intérieur de D. Supposons que cette valeur maximale C est supérieure à 1. Donc $z_0 \neq 0$. Soit $\phi(z) = \frac{z+z_0}{1+z_0 z}$ et $g(z) = \frac{1}{C}(f o \phi)(z), z \in D$. En utilisant la relation

$$(1 - |z|^2)|(f o \phi)'(z)| = (1 - |\phi(z)|^2)|f'(\phi(z))|,$$

nous tirons

$$(1 - |z|^2)|g'(z)| = \frac{1}{C}(1 - |\phi(z)|^2)|f'(\phi(z))|.$$

Il en résulte que $g \in B_1$. Or on sait que $r(g) = r(f o \phi) \leq r(f)$, ce qui implique

$$inf\{r(g) : g \in B_1\} \leq inf\{r(f) : f \in H(\overline{D}),\ f'(0) = 1\}.$$

L'autre inégalité découle du fait que B_1 est un sous-ensemble de $H(D)$. $\square$

Dans cette section, nous voulons donner quelques propriétés qui caractérisent les fonctions de B_1 et desquelles nous pouvons obtenir une estimation inférieure de la constante de Bloch. Pour cela, on va proposer un lemme qui donne une estimation sur les coefficients des séries de Taylor pour les fonctions de Bloch. Les estimations qui seront données sont dues à Bonk.

Lemme 3.2.3. *Soit $F \in B$ avec $F'(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ et $||F||_B \leq 1$. Alors,*

$$a_1 = 0,\ |a_2| \leq 1,\ |a_3| \leq 5 \ \textit{et} \sum_{n=4}^{\infty} |a_n||z^n| \leq 10|z|^4 \textit{pour } |z| \leq 1/10.$$

Preuve

Montrons d'abord que $a_1 = 0$. En effet, $||F||_B \leq 1$ entraîne que

$$|F'(z)|^2 \leq \left(\frac{1}{1-|z^2|}\right)^2,\ z \in D.$$

En effectuant le développement de Taylor des deux membres de l'inégalité précédente, nous obtenons que

$$|1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots|^2 \leq (1 + |z|^2 + |z|^4 + \ldots)^2.$$

Posons $z = re^{i\theta}$, $0 < r < 1$, $\theta \in \mathbb{R}$. Le développement de la dernière inégalité nous mène à

$$1 + 2Re(a_1 r e^{i\theta}) + \underbrace{(\text{termes en r d'ordre} \geq 2\ )} \leq 1 + 2r^2 + \underbrace{(\text{termes en r d'ordre} \geq 2)}.$$

Divisons par r les deux membres et faisons tendre r vers zéro. Il en résulte :

$$\lim_{r \to 0} 2Re(a_1 e^{i\theta}) \leq 0,\ \forall\theta \in \mathbb{R}.$$

Ceci nous donne $2Re(a_1 e^{i\theta}) = 0$. Si on écrit $a_1 = \rho e^{i\phi}$, alors $2Re(\rho e^{i\phi} e^{i\theta}) = 0$. Fixons $\theta = -\phi$; il en résulte que $\rho = 0$ et, par la suite, $a_1 = 0$.

En suivant les mêmes étapes que précédement, on arrive à $Re(a_2 e^{2i\theta}) \leq 1$, $\forall\theta \in \mathbb{R}$. Si on écrit $a_2 = |a_2|e^{i\phi}$, et on fixe $\theta = -\frac{\phi}{2}$, on tire que $|a_2| \leq 1$.

Démontrons maintenant que $|a_3| \leq 5$. Pour cela, soit $0 < r < 1$. Alors,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F'(re^{i\theta})|^2 d\theta &= 1 + |a_2|^2 r^4 + |a_3|^2 r^6 + ... \\ &= 1 + \sum_2^\infty |a_n|^2 r^{2n} \\ &\leq (\frac{1}{1-r^2})^2.\end{aligned}$$

Ceci nous mène, pour $n \geq 3$, à

$$|a_n|^2 \leq \frac{1}{r^{2n}}[(\frac{1}{1-r^2})^2 - 1]$$

$$\Rightarrow |a_n| \leq \frac{\sqrt{2-r^2}}{r^{n-1}(1-r^2)},\ n \geq 3.$$

Pour n=3 et $r = \sqrt{3/5}$, on aura immédiatement $|a_3| \leq 5$.
Pour $n \geq 4$, soit $r = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$. Considérons maintenant le fait suivant :

$$(\frac{n+1}{n-1})^{(n-1)/2} = (1 + \frac{2}{n-1})^{(n-1)/2} \leq e.$$

Cette équation étant vraie, car la fonction $(1 + 1/x)^x$ est croissante sur l'intervalle $[\frac{3}{2}, \infty)$ et tend vers e lorsque x tend vers l'infini. Ceci nous donne :

$$|a_n| \leq \frac{n+1}{2}(\frac{n+1}{n-1})^{(n-1)/2}\sqrt{\frac{n+3}{n+1}} \leq \sqrt{\frac{7}{5}}e\frac{n+1}{2}.$$

Si $|z| \leq 1/10$, alors

$$\begin{aligned}
\sum_4^\infty |a_n||z|^n &\leq \sum_4^\infty \sqrt{\frac{7}{5}}e\frac{n+1}{2}|z|^n \\
&= \frac{5}{2}\sqrt{\frac{7}{5}}e\sum_4^\infty \frac{n+1}{5}|z|^n \\
&= \frac{5}{2}\sqrt{\frac{7}{5}}e\sum_1^\infty \frac{n+4}{5}|z|^{n+3} \\
&\leq \frac{5}{2}\sqrt{\frac{7}{5}}e|z|^3\sum_1^\infty n|z|^n \\
&= \frac{5}{2}\sqrt{\frac{7}{5}}e\frac{|z|^4}{(1-|z|)^2} \\
&\leq \frac{5}{2}\sqrt{\frac{7}{5}}e(\frac{10}{9})^2|z|^4 \\
&\leq 10|z|^4.
\end{aligned}$$

Notons que la valeur 1 est la meilleure borne supérieure de $|a_2|$. En effet, cette borne supérieure est un maximum, et pour en être convaincu, considérons la fonction $\frac{1}{4}\ln\frac{1-z}{1+z}$, qui est bien une fonction de Bloch avec $|a_2| = 1$.

La borne supérieure de $|a_3|$ a eté améliorée par Chen et Gauthier en 1996. Ces derniers ont démontré que $|a_3| \leq 4.2$ (voir[6]), mais le problème de la meilleure borne reste encore ouvert.

Lemme 3.2.4. *Soit $F \in B$ avec $F'(0) = 1$. Soit $\phi_0 = 2\arcsin(1/20)$ et $|z| \leq 1/1000$. Alors pour $\phi \in [-\pi, \pi] \setminus [-\phi_0, \phi_0]$, on a*

$$\frac{1}{2}Re[F'(z) + F'(e^{i\phi}z)] \geq \frac{1-\sqrt{3}|z|}{(1-\sqrt{1/3}|z|)^3} + \frac{1}{2}|z|^3.$$

Preuve

On sait que la série de Taylor de la fonction F' est donnée par

$$F'(z) = 1 + \sum_{n=2}^\infty a_n z^n.$$

Soit $|z| \leq \frac{1}{10}$ et $\phi \in [-\pi, \pi]$. Considérons :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}Re[F'(z) + F'(e^{i\phi}z)] - \frac{1-\sqrt{3}|z|}{(1-\sqrt{1/3}|z|)^3} &= \frac{1}{2}Re[1 + \sum_2^\infty a_n z^n + 1 + \sum_2^\infty a_n e^{in\phi} z^n] + (\sum_2^\infty \frac{n^2-1}{(\sqrt{3})^n}|z|^n - 1) \\
&= Re[\frac{1}{2}\sum_2^\infty (a_n z^n + a_n e^{in\phi} z^n)] + \sum_2^\infty \frac{n^2-1}{(\sqrt{3})^n}|z|^n \\
&\geq \frac{1}{2}Re[\frac{1}{2}(1+e^{2i\phi})a_2 z^2 + \frac{1}{2}(1+e^{3i\phi})a_3 z^3] + |z|^2 + \frac{8\sqrt{3}}{9}|z|^3 \\
&\quad + \frac{1}{2}Re[\sum_4^\infty a_n(1+e^{in\phi})z^n].
\end{aligned}$$

Minorons chaque terme de l'inégalité précédente. Puisque $|a_2| \leq 1$,

$$\begin{aligned}
Re[\frac{1}{2}(1+e^{2i\phi})a_2 z^2] &= \frac{1}{2}Re[e^{i\phi}(e^{i\phi} + e^{-i\phi})a_2 z^2] \\
&\geq -\frac{1}{2}|e^{i\phi}(e^{i\phi} + e^{-i\phi})a_2 z^2| \\
&= -|\frac{e^{i\phi}}{2} 2\cos(\phi) a_2 z^2| \\
&\geq -|\cos(\phi) z^2|.
\end{aligned}$$

De même, puisque $|a_3| \leq 5$,

$$\begin{aligned}
Re[\frac{1}{2}(1+e^{3i\phi})a_3 z^3] &= \frac{1}{2}Re[e^{3i\phi/2}(e^{-3i\phi/2} + e^{3i\phi/2})a_3 z^3] \\
&= \frac{1}{2}Re[e^{3i\phi/2} a_3 2\cos(3\phi/2) z^3] \\
&\geq -|e^{3i\phi/2} a_3 2\cos(3\phi/2) z^3| \\
&\geq -5|\cos(3\phi/2)||z|^3.
\end{aligned}$$

Continuons par le même principe :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}Re[\sum_4^\infty (a_n(1+e^{in\phi})z^n] &\geq -|\frac{1}{2}\sum_4^\infty (a_n(1+e^{in\phi})z^n| \\ &\geq -\frac{1}{2}\sum_4^\infty |a_n(1+e^{in\phi})||z|^n \\ &\geq -\sum_4^\infty |a_n||z|^n \geq -10|z|^4.\end{aligned}$$

Nous arrivons finalement à :

$$\frac{1}{2}Re[F'(z)+F'(e^{i\phi}z)]-\frac{1-\sqrt{3}|z|}{(1-\sqrt{1/3}|z|)^3} \geq (1-|\cos\phi|)|z|^2+(8\frac{\sqrt{3}}{9}-5|\cos(3\phi/2)|)|z|^3-10|z|^4. \ (*)$$

Prouvons maintenant que le membre de droite de l'inégalité précédente est supérieur à $\frac{1}{2}|z|^3$, et ceci pour toutes les valeurs de ϕ dans l 'intervalle

$$[-\pi,\pi]\setminus[-\phi_0,\phi_0] = [-\pi,-\pi+\phi_0]\cup[\pi-\phi_0,\pi]\cup[-\pi+\phi_0,-\phi_0]\cup[\phi_0,\pi-\phi_0].$$

1) Si $\phi \in [-\pi,-\pi+\phi_0]$ ou $[\pi-\phi_0,\pi]$, alors posons $\alpha = (\phi+\pi)/2$ ou $\alpha = (\pi-\phi)/2$ respectivement. Il en résulte que $\alpha \in [0,\phi_0/2]$, et par suite :

$$\begin{aligned}(8\frac{\sqrt{3}}{9}-5|\cos(3\phi/2)|)|z|^3-10|z|^4 &= (8\frac{\sqrt{3}}{9}-5\sin(3\alpha))|z|^3-10|z|^4 \\ &\geq (8\frac{\sqrt{3}}{9}-15\sin(\alpha))|z|^3-10|z|^4 \\ &\geq (8\frac{\sqrt{3}}{9}-\frac{3}{4})|z|^3-10|z|^4 \\ &\geq \frac{3}{4}|z|^3-10|z|^4.\end{aligned}$$

Notons que nous avons utilisé $sin(3\alpha) \leq 3sin(\alpha), \alpha \in [0, \arcsin 1/20]$ dans la dernière étape. Si maintenant $|z| \leq 1/1000$, on aura :

$$\frac{3}{4}|z|^3-10|z|^4 \geq \frac{1}{2}|z|^3.$$

Ceci prouve le lemme dans ce cas.

2) Si $\phi \in [-\pi+\phi_0,-\phi_0]\cup[\phi_0,\pi-\phi_0]$, alors une borne inférieure de $(*)$ sera :

$$(1-\cos\phi_0)|z|^2-4|z|^3-10|z|^4 \geq \frac{1}{200}|z|^2-4|z|^3-10|z|^4.$$

Si $|z| \leq 1/1000$, alors :

$$\frac{1}{200}|z|^2 - 4|z|^3 - 10|z|^4 \geq \frac{1}{2}|z|^3.$$

Donc dans les deux cas, on a démontré que :

$$\frac{1}{2}Re[F'(z) + F'(e^{i\phi}z)] - \frac{1-\sqrt{3}|z|}{(1-\sqrt{1/3}|z|)^3} \geq \frac{1}{2}|z|^3.$$

Ceci prouve le lemme.

Théorème 3.2.2. *: Soit $f \in B_1$. Alors,*

$$Ref'(z) \geq \frac{1-\sqrt{3}|z|}{(1-\frac{|z|}{\sqrt{3}})^3}, \quad |z| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{3.2.1}$$

Preuve

Supposons que ce théorème est vrai pour $z \in [0, 1/\sqrt{3}]$, c'est-à-dire que

$$Ref'(z) \geq \frac{1-\sqrt{3}|z|}{(1-\frac{|z|}{\sqrt{3}})^3}, \quad z \in [0, 1/\sqrt{3}].$$

Considérons maintenant la fonction $G(z) = e^{-i\phi}f(ze^{i\phi})$. Il est facile de voir que $G \in B_1$. Donc d'après notre supposition G vérifie que $ReG'(r) \geq \frac{1-\sqrt{3}|re^{i\phi}|}{(1-\frac{|re^{i\phi}|}{\sqrt{3}})^3}$, c'est-à-dire que $Ref'(re^{i\phi}) \geq \frac{1-\sqrt{3}|z|}{(1-\frac{|z|}{\sqrt{3}})^3}$, $r \in [0, 1/\sqrt{3}]$. Ainsi, le théorème sera vrai pour $|z| \leq 1/\sqrt{3}$. Donc il nous reste à démontrer que le théorème est vrai pour $z \in [0, 1/\sqrt{3}]$. Pour cela, considérons maintenant les fonctions

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1-\omega}{1-\frac{\omega}{3}},$$

et

$$h(\omega) = \frac{9}{4}\omega(1-\frac{\omega}{3})^2.$$

Alors, on peut vérifier facilement que $g(1) = 0$, $h(1) = 1$, $h'(1) = 0$. De plus, pour $|\omega| = 1$, on a

$$\begin{aligned}
|h(\omega)|(1-|g(\omega)|^2) &= \frac{3}{4}[3(1-\omega/3)(1-\overline{\omega}/3) - (1-\omega)(1-\overline{\omega})] \\
&= \frac{3}{4}[3(1-\omega/3-\overline{\omega}/3+|\omega|^2/9) - 1 - |\omega|^2 + \omega + \overline{\omega}] \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Considérons la fonction

$$q(\omega) = (\frac{f'(g(\omega))}{h(\omega)} - 1)\frac{\omega}{(1-\omega)^2}, \ \omega \in D.$$

La fonction $q(\omega)$ est bien définie sur le disque unité, car pour $\omega \in D$, on a que $|g(\omega)| < 1$. De plus, elle est holomorphe sur $\overline{D}$. En effet, la fonction $q(\omega)$ peut sécrire comme :

$$q(\omega) = \frac{4}{9}\frac{f'(g(\omega)) - h(\omega)}{(1-\frac{1}{3}\omega)^2(1-\omega)^2}.$$

Il est évident que le point 0 est une singularité artificielle. De plus, en remarquant que $f'(g(1)) - h(1) = 0$ et que $f''(g(1))g'(1) - h'(1) = 0$ (car $f''(0) = 0$), on déduit que le point 1 est un zéro double de $f'(g(\omega)) - h(\omega)$. Ceci nous donnne que le point 1 est encore une singularité artificielle. Ensuite, q sera holomorphe sur $\overline{D}$.

Puisque f est une fonction de Bloch, et $|g(\omega)| \leq 1$, $\omega \in D$, il en résulte que

$$|f'(g(\omega))|(1 - |g(\omega)|^2) \leq 1.$$

Cette dernière inégalité équivaut à

$$|\frac{f'(g(\omega))}{h(\omega)}| \leq \frac{1}{|h(\omega)|(1-|g(\omega)|^2)} = 1, \ |\omega| = 1.$$

De plus, pour $\omega \in \partial D \setminus \{1\}$, on a que $Re[\frac{\omega}{(1-\omega)^2}] = \frac{2(Re\omega - 1)}{|1-\omega|^4} \leq 0$, et $Im\frac{\omega}{(1-\omega)^2} = 0$. Ces deux faits impliquent que $Re(q(\omega)) \geq 0$ pour $\omega \in \partial D \setminus \{1\}$. Or $Re(q(\omega))$ est une fonction harmonique, et la fonction q a une singularité artificielle en $\omega = 1$. En appliquant le principe du minimum pour les fonctions harmoniques, on obtiendra :

$$Re(q(\omega)) \geq 0, \ |\omega| \leq 1.$$

En particulier, pour $0 < \omega < 1$, on aura :

$$Re[\frac{f'(g(\omega))}{h(\omega)} \geq 1 \Rightarrow Re[f'(g(\omega))] \geq h(\omega).$$

Fixons $z = g(\omega)$, autrement dit $\omega = \frac{\sqrt{3}z-1}{\frac{\sqrt{3}}{3}z-1}$. Si ω croit de 0 à 1, z décroît de $1/\sqrt{3}$ à 0. Ceci implique que z reste dans l'intervalle $[0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$. En utilisant le fait que $Re[f'(g(\omega))] \geq h(\omega)$, on tire finalement que pour $z \in [0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$,

$$\begin{aligned} Re(f'(z)) &\geq \frac{9}{4}\left(\frac{\sqrt{3}z-1}{\frac{\sqrt{3}}{3}z-1}\right)\left[1-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}z-1}{\frac{\sqrt{3}}{3}z-1}\right)\right]^2 \\ &= \frac{9}{4}\frac{(-\sqrt{3}z+1)}{(1-\frac{z}{\sqrt{3}})}\left[\frac{z}{(\sqrt{3}}-1)-\frac{1}{3}(\sqrt{3}z-1)\right]^2 \\ &= \frac{1-\sqrt{3}z}{(1-\frac{z}{\sqrt{3}})^3}. \end{aligned}$$

Ceci prouve le théorème.

Lemme 3.2.5. *Soit U un domaine convexe, et f une fonction holomorphe sur U avec $Ref'(z) > 0$. Alors f est injective sur U.*

Preuve

Soit z_1 et z_2 deux points différents de U. Montrons que $f(z_1)$ et $f(z_2)$ sont différents. Soit s le segment joignant z_1 et z_2, autrement dit $s = \{\xi : \xi = (1-t)z_1 + tz_2; 0 < t < 1\}$. Alors en intégrant f' sur s, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_s f'(\xi)d\xi = \int_0^1 f'[(1-t)z_1 + tz_2](z_2 - z_1)dt \\ &\Rightarrow f(z_2) - f(z_1) = (z_2 - z_1)\int_0^1 f'[(1-t)z_1 + tz_2]dt \\ &\Rightarrow \frac{f(z_2) - f(z_1)}{(z_2 - z_1)} = \int_0^1 f'[(1-t)z_1 + tz_2]dt \\ &\Rightarrow Re\left(\frac{f(z_2) - f(z_1)}{(z_2 - z_1)}\right) = Re\left(\int_0^1 f'[(1-t)z_1 + tz_2]dt\right) = \int_0^1 Re(f'[(1-t)z_1 + tz_2])dt > 0. \end{aligned}$$

Donc $f(z_1) \neq f(z_2)$, ce qui prouve que f est injective.

Corollaire 3.2.1. $\beta \geq \sqrt{3}/4$.

Preuve

Il suffit de prouver que $r(f) \geq \sqrt{3}/4$ pour tout $f \in B_1$. En effet, on va démontrer que $r(0, f) \geq \sqrt{3}/4$. Si $f \in B_1$, alors, par le théorème précédent, on a $Ref'(z) > 0$ pour $|z| < 1/\sqrt{3}$. Il en résulte que f est injective sur le disque $D_{1/\sqrt{3}}$. Ceci nous donne que f est biholomorphe du disque $D_{1/\sqrt{3}}$ dans un domaine U simplement connexe contenant l'origine.

De plus, la frontière de U est l'image par f du cercle $|z| = 1/\sqrt{3}$. Considérons un point frontière de U. Alors on peut l'écrire sous la forme $\omega = f(\frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\theta})$ avec $\theta \in [0, 2\pi]$. Calculons :

$$\begin{aligned}
|f(\frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\theta})| &= |e^{i\theta}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} f'(\rho e^{i\theta})d\rho| \\
&\geq \int_0^{e^{i\theta}\frac{1}{\sqrt{3}}} Ref'(\rho e^{i\theta})d\rho \\
&\geq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1-\sqrt{3}\rho}{(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\rho)^3}d\rho \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}.
\end{aligned}$$

On peut conclure que le disque $D_{\sqrt{3}/4}$ est contenu dans $f(D)$. On en déduit finalement que $r(0, f) \geq \sqrt{3}/4$. $\square$

Corollaire 3.2.2. $\beta \geq \sqrt{3}/4 + 10^{-14}$.

En effet, il suffit de prouver que si F est une fonction de Bloch avec $F'(0) = 1$, alors F couvre d'une façon univalente un disque de rayon $\sqrt{3}/4 + 10^{-14}$. Deux cas sont possibles.

Si $\min_{\phi\in[-\pi,+\pi]} Re[e^{-i\phi}F(\frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\phi})] \geq \sqrt{3}/4 + 10^{-12}$, on suit un raisonnement analogue à celui utilisé dans le corollaire précédent, et le résultat est prouvé.

Supposons maintenant que ce minimum est inférieur à $\sqrt{3}/4 + 10^{-12}$. Sans perte de généralité, supposons qu'il est atteint en $\phi = 0$, c'est-à-dire que

$$ReF(\frac{1}{\sqrt{3}}) \leq \sqrt{3}/4 + \frac{1}{13}10^{-12}. \quad (*)$$

Soit $\phi_0 = 2\arcsin(1/20)$. En utilisant le lemme (3.2.4) pour $\phi \in [-\pi, +\pi] \setminus [-\varphi_0, \varphi_0]$, il résulte que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}Re[F(\frac{1}{\sqrt{3}}) + e^{-i\phi}F(e^{i\phi}\frac{1}{\sqrt{3}})] &= \frac{1}{2}Re[\int_0^{1/\sqrt{3}}(F'(r) + F'(e^{i\phi}r))dr] \\
&= \int_0^{1/\sqrt{3}}\frac{1}{2}Re[F'(r) + F'(e^{i\phi}r)]dr \\
&= \int_0^{1/1000}\frac{1}{2}Re[F'(r) + F'(e^{i\phi}r)]dr + \int_{1/1000}^{1/\sqrt{3}}\frac{1}{2}Re[F'(r) + F'(e^{i\phi}r)]dr \\
&\geq \int_0^{1/1000}\frac{1}{2}r^3dr + \int_0^{1/1000}\frac{1-\sqrt{3}|z|}{(1-\frac{|z|}{\sqrt{3}})^3}dr + \int_{1/1000}^{1/\sqrt{3}}\frac{1}{2}Re[F'(r) + F'(e^{i\phi}r)]dr \\
&\geq \int_0^{1/1000}\frac{1}{2}r^3dr + \int_0^{1/1000}\frac{1-\sqrt{3}|z|}{(1-\frac{|z|}{\sqrt{3}})^3}dr + \int_{1/1000}^{1/\sqrt{3}}\frac{1-\sqrt{3}|z|}{(1-\frac{|z|}{\sqrt{3}})^3}dr \\
&= \sqrt{3}/4 + \frac{1}{8}10^{-12}. \quad (**)
\end{aligned}
$$

De (*) et (**), on tire que :

$$Re[e^{-i\phi}F(e^{i\phi}\frac{1}{\sqrt{3}})] > \sqrt{3}/4 + \frac{9}{52}10^{-12}.$$

Posons $z_0 := -\frac{5}{52}$ et $r_0 := \sqrt{3}/4 + \frac{1}{13}10^{-12}$. On devrait avoir :

$$\{z \in C : |z - z_0| < r - 0\} \cap F(\{z \in C : |z| = \sqrt{1/3}\}) = \emptyset.$$

En effet, deux cas sont possibles :

1) Si $\phi \in [-\pi, \pi] \setminus [-\phi_0, \phi_0]$, alors,

$$
\begin{aligned}
|F(\sqrt{1/3}) - z_0| &= |e^{-i\phi}F(\sqrt{1/3}e^{i\phi}) - e^{-i\phi}z_0| \\
&\geq Re[e^{-i\phi}F(\sqrt{1/3}e^{i\phi})] - |z_0| \\
&> \sqrt{3}/4 + \frac{9}{52}10^{-12} - \frac{5}{52}10^{-12} \\
&= r_0.
\end{aligned}
$$

2) Si $\phi \in [-\phi_0, \phi_0]$, alors d'après le lemme précédent, nous aurons $Re[e^{-i\phi}F(e^{i\phi}\frac{1}{\sqrt{3}})] \geq \sqrt{3}/4$,

et par suite

$$
\begin{aligned}
|F(\sqrt{1/3}e^{i\phi}) - z_0| &= |e^{-i\phi}F(\sqrt{1/3}e^{i\phi}) - e^{-i\phi}z_0| \\
&\geq Re[e^{-i\phi}F(\sqrt{1/3}e^{i\phi})] - |z_0| \\
&\geq \sqrt{3}/4 + \frac{9}{52}10^{-12}cos\phi \\
&> \sqrt{3}/4 + \frac{9}{52}10^{-12} - \frac{5}{52}10^{-12} \\
&= r_0.
\end{aligned}
$$

Donc dans tous les cas, F couvre le disque de rayon $r_0 = \sqrt{3}/4 + \frac{1}{13}10^{-12}$ d'une façon univalente. Ceci veut dire que $\beta_F \geq \sqrt{3}/4 + \frac{1}{13}10^{-12}$.

Rappelons que Chen et Gauthier ont démontré que la valeur de la constante β est supérieure à $\sqrt{3}/4 + 2 \cdot 10^{-4}$. Dans ce qui suit, nous allons présenter, sans démontrer, les lemmes utilisés dans la preuve.

Soit $f(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + ...$, une fonction holomorphe sur D avec la propriété suivante :

$$f(0) = 1, \quad |f(z)|(1 - |z|^2) \leq 1, \quad z \in D.$$

Alors avec ces dernières hypothèses, nous aurons les lemmes suivants :

Lemme 3.2.6. $a_1 = 0,\ |a_2| \leq 1,\ |a_3| \leq 4.2.$

Lemme 3.2.7. *Si $a_1, a_2, a_3...$ sont tous réels, alors :*

$$f(x) \geq \frac{1 - \sqrt{3}x}{(1 - \frac{x}{\sqrt{3}})^3}, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\int_0^{1/\sqrt{3}} f(x)dx \geq \frac{\sqrt{3}}{4} + 0 \cdot 0109(1 + a_2)^{3/2}.$$

Lemme 3.2.8. *Si $a_1, a_2, a_3...$ sont tous réels, alors pour $0 < r < 1$, nous avons :*

$$f(rx) \geq \frac{1 - \frac{q}{1+px} + p(R-1)x^2 + \frac{q}{1+p}Rx^3 - Rx^4}{1 - \frac{q}{1+p} + p(R^{-1} - 1)x^2 + \frac{q}{1+p}R^{-1}x^3 - r^{-1}x^4},$$

avec $0 \leq x < 1$, et

$$p = \frac{1 - r^2}{2 - r^2}a_2, \quad q = \frac{r(1 - r^2)}{2 - r^2}a_3, \quad R = \frac{1}{1 - r^2}.$$

Lemme 3.2.9. *Si $a_1, a_2, a_3...$ sont tous réels, alors :*

$$f(\sqrt{2/3}x) \geq \frac{1 - \frac{q}{1+px} + 2px^2 + \frac{3q}{1+p}x^3 - 3x^4}{1 - \frac{q}{1+p} + \frac{2}{3}px^2 + \frac{q}{3(1+p)}x^3 - \frac{1}{3}x^4}.$$

Lemme 3.2.10. *Soit*

$$G(x,p,q) = \frac{1 - \frac{q}{1+px} + 2px^2 + \frac{3q}{1+p}x^3 - 3x^4}{1 - \frac{q}{1+p} + 2/3px^2 + \frac{q}{3(1+p)}x^3 - 1/3x^4}$$

avec $0 \leq x \leq 1/\sqrt{2}, |p| \leq 1/4, |q| \leq 0 \cdot 86$. Alors

$$\int_0^{\sqrt{2}/4} \frac{\partial g}{\partial q}(p, -1/4, q)dx \leq 0 \cdot 0096, \quad pour \quad q < 0.$$

Lemme 3.2.11. *Si $a_1, a_2, a_3...$ sont tous réels et $a_3 \geq 0$, alors*

$$\int_0^{1/\sqrt{3}} f(x)dx \geq \sqrt{3}/4 + 0.005.$$

Lemme 3.2.12. *Si $a_1, a_2, a_3...$ sont tous réels et $a_3 \leq 0$, alors*

$$\int_0^{1/\sqrt{3}} f(x)dx \geq \sqrt{3}/4 + 0 \cdot 0016a_3 + 0 \cdot 0012.$$

Théorème 3.2.3. $\beta \geq \sqrt{3}/4 + 2 \cdot 10^{-4}$.

Pour la preuve de ces lemmes, voir[6].

3.3. Méthode d'Ahlfors

Dans ce qui suit, on va présenter la preuve d'Ahlfors qui est complétement différente de la preuve présentée ci-haut. Cette méthode se base sur les propriétés des métriques ultrahyperboliques utilisées dans le chapitre deux.

Pour cela, soit f une fonction holomorphe sur le disque unité tel que $|f'(0)| = 1$ et soit $\omega = f(z)$. Notons $r_\omega = r(z, f)$ le rayon du plus grand disque univalent, centré en ω, contenu dans la surface de Riemann de f. Alors avec ces hypothèses, on a le théorème suivant.

Théorème 3.3.1. $\beta \geq \sqrt{3}/4$.

Pour démontrer ce théorème, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 3.3.1. *Soit f une fonction injective sur un domaine G. Soit $D(f(z'),r)$ un disque univalent dans $f(G)$, tel que f applique un domaine $G' \subseteq G$, $z' \in G'$ sur $D(f(z'),r)$ d'une façon univalente. Alors il existe un point $\omega' \in \partial D(f(z'),r)$ tel que ${f'_G}^{-1}(\omega) \to \partial G$ quand ω tend vers ω' pour $\omega \in D(f(z'),r)$ avec $f_{G'}$ représentant la restriction de f sur G'.*

Preuve

On peut supposer que $\beta_f < \infty$. Définissons la fonction suivante sur la surface de Riemann W_f de f :

$$\widetilde{\mu} = \frac{A}{(r_\omega)^{1/2}[A^2 - r_\omega]}, \tag{3.3.1}$$

avec A une constante qui dépasse ${\beta_f}^{1/2}$. On remarque que cette fonction n'est pas définie pour les points où $r_\omega = 0$. Par contre le pullback de f induit sur D la métrique définie par :

$$\mu(z) = \widetilde{\mu}[f(z)]|f'(z)| = \frac{A|f'(z)|}{(r_\omega)^{1/2}[A^2 - r_\omega]}.$$

Ce qu'on vise à faire, c'est de démontrer que μ est ultrahyperbolique pour un choix convenable de A. Nous verrons que les points où $r_\omega = 0$ ne sont que des discontinuités apparentes.

Si z_0 est un point du disque ayant la propriété suivante :

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{k=n}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, c_n \neq 0, n > 1;$$

alors dans un voisinage de z_0, on aura $r_\omega = |f(z) - f(z_0)|$ et par suite,

$$\begin{aligned}\mu(z) &= \frac{A|nc_n(z-z_0)^{n-1} + \ldots|}{|c_n(z-z_0)^n + \ldots|^{1/2}(A^2 - |c_n(z-z_0)^n + \ldots|)} \\ &= |z - z_0|^{n/2-1} \frac{A|nc_n + \ldots|}{|c_n + \ldots|^{1/2}(A^2 - |c_n(z-z_0)^{n-1} + \ldots|)}.\end{aligned}$$

Si maintenant $n > 2$, alors μ est continue au voisinage de z_0. De plus, $\mu(z_0) = 0$, ce qui veut dire que μ n'a pas besoin de support en z_0.

Si $n = 2$, alors la métrique

$$\mu(z) = \frac{A|2c_2(z-z_0) + \ldots|}{|c_2(z-z_0)^2) + \ldots|^{1/2}(A^2 - |c_2(z-z_0)^2 + \ldots|)}$$

est aussi continue en z_0. De plus, elle est régulière en z_0. On remarque que $\Delta \log \mu = \mu^2$. En effet, en effectuant le changement de variable $t = A^{-1}[f(z) - f(z_0)]^{1/2}$, nous aurons que, près de z_0, μ est le pullback de $\frac{2}{1-|t|^2}$, qui est bien une métrique dont la courbure est égale à -1.

Il nous reste à trouver un support pour notre métrique en chaque point $\omega_0 = f(z_0)$ dans le cas où $|f'(z_0)| \neq 0$. Pour cela, notons par $\Delta'(\omega_0) = \{\omega \in W_f : |\omega - \omega_0| < r_{\omega_0}\}$ et par $D(z_0)$ son image inverse par f. D'après le lemme(3.3.1), la frontière de $D(z_0)$ va contenir des points $a \in D$ tel que $f'(a) = 0$, ou bien d'autres points qui sont en commun avec le cercle unité .

Si la frontière de $D(z_0)$ passe à travers un point donné a où la dérivée s'annule , alors nous obtenons que r_ω est continu sur W_f ; et pour ω_1 dans un voisinage de ω_0 , nous aurons, en posant $f(a) = b$ que $r_{\omega_1} \leq |\omega_1 - b|$.

Dans le second cas où la frontière rencontre le cercle unité en un point a, f ne sera pas définie en a, mais on va supposer qu'on peut la prolonger d'une façon continue sur le disque unité fermé. Ainsi, le point $b = f(a)$ sera un point frontière de W_f.

Soit $z_1 \in D(z_0)$ avec $\omega_1 = f(z_1) \in \Delta'(\omega_0)$. Alors, on a que $r_{\omega_1} \leq |\omega_1 - b|$. En effet, soit c le segment joignant ω_1 et b. Si $r_{\omega_1} > |\omega_1 - b|$, alors le point $b \in \Delta'(\omega_1)$. Par suite, $[\omega_1, b] \in \Delta'(\omega_1)$, mais $[\omega_1, b) \in \Delta'(\omega_0)$; il en résulte que $[\omega_1, b) \in \Delta'(\omega_1) \cap \Delta'(\omega_0)$. En appliquant f^{-1} aux deux membres, on aura que $f^{-1}[\omega_1, b) \in D(z_0) \cap D(z_1)$. Utilisons la continuité de f en a, nous aurons que $a \in D(z_1)$, ce qui est absurde. Donc on a que $r_{\omega_1} \leq |\omega_1 - b|$.

Définissons maintenant la métrique :

$$\mu_0(z) = \frac{A|f'(z)|}{|f(z) - b|^{1/2}[A^2 - |f(z) - b|]}.$$

En comparant maintenant les deux métriques $\mu(z)$ et $\mu(z_0)$ pour un z près de z_0, il résulte que :

a) $\mu_0(z_0) = \mu(z_0)$, et ceci vient du fait que $|f(z_0) - b| = r_{\omega_0}$.

b) $\mu_0(z) \leq \mu(z)$ dès que la fonction $t^{1/2}(A^2 - t)$ croît au voisinage de r_{ω_0}. En calculant la dérivée de cette dernière fonction, on remarque qu'elle change de signe en $t = A^2/3$.

c) En effectuant le même changement de variable que celui fait pour μ, on trouve que la courbure de μ_0 est égale à -1.

De a), b) et c), on tire que la métrique $\mu(z)$ est ultrahyperbolique pour $A^2/3 > \beta_f$. Finalement en appliquant le lemme d'Ahlfors en $z = 0$, il résulte que

$$\frac{A}{{\beta_f}^{1/2}(A^2 - \beta_f)} \leq \frac{A}{{r_{f(0)}}^{1/2}(A^2 - r_{f(0)})} \leq \frac{2}{1 - |0|^2} = 2.$$

Faisons tendre A vers $(3\beta_f)^{1/2}$ dans la dernière inégalité. On obtiendra que $\beta_f \geq \sqrt{3}/4$.

La valeur exacte de la constante de Bloch, qui demeure encore inconnue pour les fonctions holomorphes dans le plan complexe, a été trouvée pour les fonctions méromorphes dans le plan complexe. Bonk et Eremenko ont démontré en 2000 (voir[10]) que *toute fonction méromorphe non-constante* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ *couvre dans son image un disque univalent (un morceau de la sphère) dont le rayon égal à arctan*$\sqrt{8} \simeq 70^0 30'$.

Par contre, le théorème de Bloch n'est pas valable dans les dimensions supérieures. Comme contre-exemple, considérons la famille de fonctions $f_\lambda : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ définie par $f_\lambda(z_1, z_2) = (\lambda z_1, \frac{z_2}{\lambda})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction f_λ est holomorphe dans $\mathbb{C}^2$, avec un jacobien égal à 1, mais on remarque que si λ augmente infiniment, l'image de cette fonction ne peut pas contenir aucune boule univalente. Le problème ici consiste à trouver une nouvelle définition de la constante de Bloch dans les dimensions supérieures.

CONCLUSION

Le but principal de ce mémoire était d'illustrer des applications du lemme de Schwarz, en particulier de donner une estimation de la constante de Bloch. Eh bien, le but a été atteint à certains niveaux. D'une part, les théorèmes de Julia, de Carathéodory et de Pick sont des exemples d'applications du lemme de Schwarz. D'autre part, les théorèmes de Landau et de Bloch ont été démontrés, ainsi que leurs applications. Notons que nous avons démontré les estimations de Bonk et d'Ahlfors, et présenté celle de Chen et Gauthier.

Cependant, la valeur exacte de cette constante, qui est maintenant connue pour les fonctions méromorphes sur le plan complexe, demeure encore un problème ouvert dans le cas des fonctions holomorphes sur le disque unité.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Ahlfors, *An extension of Schwarz's lemma*, Trans. Amer. Math. Soc. 43(1938), 359-364.

[2] J B. Garnett, *Bounded Analytic Functions*, Academic Press, New-York, 1981.

[3] S G. Krantz, *Complex Analysis : The Geometric Viewpoint*, published by The Mathematical Association Of America.

[4] C. D. Minda, *Bloch constants*, J. Analyse. Math. 41 (1982), 54-84.

[5] H. Chen, On the Bloch constant. *Approximation, copmplex analysis, and potential theory (Montreal, Qc, 2000), 129-161, NATO Sci. Ser. Math II. Phys. Chem., 37, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001.* (Reviewer : Stephen M. Zemyan) 30D45

[6] H. Chen, P. M. Gauthier, *On Bloch's Constant*, J. Anal. Math. 69 (1969), no.4, 408-419.

[7] Ch. Pommerenke,*On Bloch functions*, J. London. Math. Soc.(2) 2 (1970), 689-695.

[8] M. Bonk, *Singular Surfaces And Meromorphic Functions*, Experimental Mathematics, volume 49, (2002) number 6, 647-657.

[9] M. Bonk, *On Bloch's constant*, Proc. Amer. Math. Soc. 110 (1990), 889-894.

[10] M. Bonk, A. Eremenko, *Covering properties of meromorphic functions, negative curvature and spherical geometry*, Ann. of Math. (2) 152 (2000), no. 270