

2m11.3011.12

Université de Montréal

Bifurcations et chaos dans le système de Lorenz

par

Jean-Philippe Lessard

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en Mathématiques

juillet 2002



Q A
3
1154
2002
10.019



Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Bifurcations et chaos dans le système de Lorenz

présenté par

Jean-Philippe Lessard

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Marlène Frigon

(président-rapporteur)

Christiane Rousseau

(directeur de recherche)

Dana Schlomiuk

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

4 novembre 2002

RÉSUMÉ

Le système de Lorenz est un système d'équations différentielles dépendant de trois paramètres. Lorsque l'on fixe deux des paramètres du système et que l'on fait varier le dernier, il se produit une suite de bifurcations qui nous mène d'un système parfaitement prévisible à un système chaotique. Pour l'étude de quelques une de ces bifurcations, nous ferons appel au théorème de Shil'nikov, à la définition formelle de chaos et aux formes normales. Plus particulièrement, pour étudier les bifurcations homocliniques, nous démontrerons le théorème de Shil'nikov dans un cas générique. Pour ce faire, nous nous servirons du théorème de linéarisation en classe C^1 de Hartman. Pour conclure cette étude, nous présenterons certains résultats généraux sur la naissance de cycles limites dans le système de Lorenz.

Mots clefs : Systèmes dynamiques, Bifurcation, Chaos, Cycle limite, Système de Lorenz.

ABSTRACT

The Lorenz system is a differential equation system depending on three parameters. When one fixes two of the parameters of the system and that one varies the last, there is a succession of bifurcations which carries out us of a system perfectly foreseeable with a chaotic system. For the study of some one of these bifurcations, we will call upon the Shil'nikov theorem, the formal definition of chaos and the normal forms. More particularly, to study the homoclinic bifurcations, we will prove the theorem of Shil'nikov in a generic case. For this purpose, we will make use of the theorem of linearization in class C^1 of Hartman. To conclude this study, we will present certain general results on the birth of limit cycles in the Lorenz system.

Key words : Dynamical systems, Bifurcations, Chaos, Limit Cycles, Lorenz system.

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement ma directrice Christiane pour sa grande disponibilité, son efficacité, sa rigueur et sa patience. Par son appui soutenu et ses remarques pertinentes, elle a su relever les faiblesses des nombreux comptes-rendus mathématiques que je lui soumettais, et ce avec beaucoup de diplomatie et de professionnalisme.

Je tiens également à remercier ma famille, mes amis et ma copine pour le soutien et les encouragements qu'ils m'ont apportés. Je remercie grandement le gouvernement du Québec pour l'aide financière qu'il m'a apporté et ce, par l'intermédiaire de son organisme FCAR d'aide à la recherche.

Finalement, je remercie la vie pour avoir fait naître en moi une si belle et fascinante passion que sont les mathématiques.

Table des matières

Résumé	iii
Abstract	iv
Remerciements	v
Table des figures	viii
Introduction	1
Chapitre 1. Théorème de Shil'nikov	3
1.1. Préliminaires.....	3
1.2. Théorème de Shil'nikov.....	5
1.3. Théorème de Hartman.....	17
Chapitre 2. Chaos et conjugaison topologique	19
2.1. Définitions et exemple.....	19
2.2. Chaos et conjugaison topologique.....	21
Chapitre 3. Le système de Lorenz	25
3.1. Généralités sur le système de Lorenz.....	25
3.2. Application de Lorenz.....	29
3.3. Bifurcations dans le système de Lorenz.....	31
3.3.1. Bifurcation de la fourche (en $\rho = 1$).....	31
3.3.2. Bifurcation homoclinique (en $\rho \cong 13.926$).....	33

3.3.3. Bifurcation d'apparition du chaos (en $\rho \cong 24.06$)	34
3.3.4. Bifurcation de Hopf (en $\rho \cong 24.74$)	46
Chapitre 4. Naissance et mort de cycles limites dans le système de Lorenz	55
4.1. Naissance et mort de cycles limites pour $\rho > \frac{470}{19}$	55
Remarques et Conclusion	61
Annexe A.	62
Annexe B.	66
Bibliographie	73

Table des figures

1.1.1	Orbites sur $W_{loc}^s(X_0)$ approchant X_0 le long de l'espace propre qui correspond à l'axe des y	4
1.1.2	Retour d'une boucle homoclinique le long de la variété locale stable en X_0	5
1.1.3	Boucle homoclinique simple (a) et avec torsion (b)	6
1.2.1	Bifurcation de Shil'nikov autour d'une boucle homoclinique simple ...	7
1.2.2	Bifurcation de Shil'nikov autour d'une boucle homoclinique avec torsion	8
1.2.3	L'application de Dulac $\Delta_\varepsilon : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$	8
1.2.4	Le difféomorphisme $R_\varepsilon : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1$	9
1.2.5	Voisinage de la boucle homoclinique Γ_0 lorsque $d_0 = 0$	12
1.2.6	Boucle simple ($d_0 > 0$) et avec torsion ($d_0 < 0$).....	15
2.1.1	Cycle de période 3	20
2.2.1	Distance entre deux points θ et ψ dans S^1	21
2.2.2	Dépendance sensible de $g : S^1 \rightarrow S^1$	22
2.2.3	Cycle de g de période 3	23
2.2.4	Deux applications f et g qui commutent	23
3.2.1	Feuilletage invariant intersectant Σ	31
3.2.2	Construction de l'application de Lorenz	32
3.3.1	Bifurcation de la fourche	33
3.3.2	Système de Lorenz (a) et graphe de l'application de Lorenz (b) pour $\rho \in (1, 13.926)$	33

3.3.3	Système de Lorenz (a) et graphe de l'application de Lorenz (b) pour $\rho \in (13.926, 24.06)$	35
3.3.4	Bifurcation homoclinique dans le système de Lorenz autour de boucles simples	36
3.3.5	Graphe de l'application de Lorenz pour $\rho \cong 24.06$	37
3.3.6	Équivalence topologique de $\mathcal{L} : J \rightarrow J$ et de $f : I \rightarrow I$	37
3.3.7	Application de Baker	38
3.3.8	Itérations de $\frac{1}{2}$ par f_0^{-1} et f_1^{-1}	43
3.3.9	Diagrammes commutatifs	46
3.3.10	Trajectoires de (3.3.17) sur l'ensemble E_ρ	53
3.3.11	Bifurcation de Hopf au point p_+ dans le système de Lorenz	54
4.1.1	Situation qui engendre la naissance d'un cycle limite dans un voisinage d'une boucle homoclinique simple (ou avec torsion) en $\rho = \rho_0 > \frac{470}{19}$..	56
4.1.2	Boucle homoclinique	57
4.1.3	Situation qui engendre la disparition d'un cycle limite dans un voisinage d'une boucle homoclinique simple (ou avec torsion) en $\rho = \rho_0 > \frac{470}{19}$..	58

INTRODUCTION

L'être humain, par ses mythes religieux, ses observations, ses techniques ou ses sciences, n'a jamais cessé de tenter d'expliquer la météo. Dans cette optique, les physiciens et les mathématiciens ont personnellement utilisé les équations différentielles pour essayer de prévoir les fluctuations météorologiques. Ces derniers, par leurs tentatives acharnées, étaient peut-être loin de se douter que leurs recherches allaient les mener à découvrir l'existence du chaos déterministe.

Le système de Lorenz

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz \\ \dot{z} &= -\beta z + xy \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (x, y, z) &\in \mathbb{R}^3 \\ \sigma, \rho, \beta &> 0, \end{aligned}$$

un système d'équations différentielles dépendant de trois paramètres modélisant les mouvements des gaz entre certaines couches atmosphériques, a participé à cette naissance, choquante et angoissante pour le déterminisme en général. Dans ce mémoire, nous allons suivre en quelque sorte le cheminement qu'a jadis emprunté Edward Lorenz en fixant deux des paramètres de son système ($\sigma = 10$ et $\beta = \frac{8}{3}$) et en faisant varier le dernier (ρ). Au fur et à mesure que le paramètre ρ augmentera, il se produira une suite de bifurcations qui nous mènera d'un système parfaitement prévisible à un système chaotique.

La première bifurcation qui retiendra notre attention sera la bifurcation homoclinique qui se produit pour ρ très près de 13.926. Pour nous permettre de bien comprendre cette bifurcation et de prévoir l'apparition de cycles limites dans le

système, nous allons énoncer et démontrer le théorème de Shil'nikov, qui est une généralisation de notre cas spécifique de bifurcation homoclinique. La démonstration du théorème de Shil'nikov que nous ferons ici est moderne et nouvelle dans la littérature. Cette preuve fera entre autre appel au théorème de linéarisation en classe C^1 de Hartman.

Par la suite, nous allons nous pencher sur la fameuse bifurcation d'apparition du chaos qui survient pour $\rho \cong 24.06$. Pour ce faire, nous allons tout d'abord définir rigoureusement la notion de système dynamique chaotique discret. Pour appliquer cette définition, nous allons discrétiser le flot du système à cette valeur spécifique de ρ ce qui nous conduira à l'introduction de l'application de Lorenz. Ensuite, nous ferons la démonstration que l'application de Lorenz est chaotique. Cette preuve est nouvelle et nous ne savons pas s'il existe d'autres démonstrations de ce type dans la littérature.

Finalement, notre route nous mènera à la bifurcation de Hopf en $\rho = \frac{470}{19} \cong 24.74$. Pour bien comprendre cette bifurcation, nous calculerons une approximation de la variété centre en un point d'équilibre pour éventuellement conclure sur sa stabilité. Ainsi se terminera le cheminement classique de l'étude des bifurcations dans le système de Lorenz.

Pour conclure, nous consacrerons le chapitre 4 aux résultats que nous avons obtenus sur l'apparition et la disparition de cycles limites dans le système de Lorenz lorsque $\rho > \frac{470}{19}$. Pour ce faire, nous appliquerons une fois de plus le théorème de Shil'nikov.

Chapitre 1

THÉORÈME DE SHIL'NIKOV

Avant de débiter notre étude du système de Lorenz, nous allons énoncer et démontrer un théorème concernant certains types de bifurcations homocliniques pour un point de selle de \mathbb{R}^3 ayant 3 valeurs propres réelles. Pour ce faire, nous allons tout d'abord introduire quelques notions élémentaires.

1.1. PRÉLIMINAIRES

Soit X_0 un point d'équilibre du champ de vecteurs

$$\dot{X} = F(X), \quad \text{où } X \in \mathbb{R}^3, \quad F \in C^1 \text{ et } A = \frac{\partial F}{\partial X}(X_0) \in M_3(\mathbb{R}). \quad (1.1.1)$$

Supposons que la variété instable $W^u(X_0)$ est de dimension un et que la variété stable $W^s(X_0)$ est de dimension deux. Supposons également que les trois valeurs propres de A sont réelles et telles que $\lambda_1 > 0 > \lambda_2 > \lambda_3$.

Définition 1.1.1. *La valeur propre de A la plus près de 0 est appelée la valeur propre principale. L'espace propre correspondant à la valeur propre principale est appelé l'espace propre principal. Notons qu'il est possible que $|\lambda_1| = |\lambda_2|$. Dans ce cas, il y aura deux valeurs propres principales et l'espace propre principal sera de dimension deux.*

Définition 1.1.2. *Soit X_0 un point de selle hyperbolique du système (1.1.1). La quantité de selle du point X_0 est : $\sigma = \lambda_1 + \lambda_2$.*

Exemple 1.1.1. *Considérons à nouveau le système (1.1.1). Posons $X_0 = 0$ et $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ tel que $\sigma = \lambda_1 + \lambda_2 > 0$. Ainsi, la valeur propre principale est λ_2 . On remarque alors que presque toutes les orbites sur $W_{loc}^s(X_0)$ (variété locale stable en X_0) approchent X_0 le long de l'espace propre principal qui correspond à l'axe des y (voir la figure 1.1.1).*

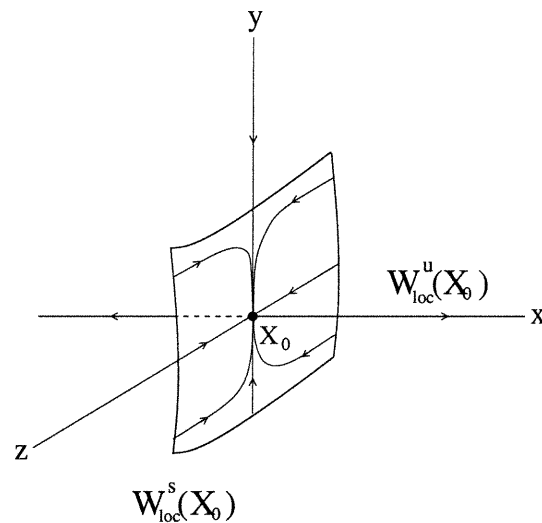


FIG. 1.1.1. Orbites sur $W_{loc}^s(X_0)$ approchant X_0 le long de l'espace propre qui correspond à l'axe des y

Toujours dans le contexte de l'exemple précédent, supposons que le système (1.1.1) possède une boucle homoclinique Γ_0 qui revient de manière tangente à l'axe des y (voir la figure 1.1.2) et regardons les différentes configurations possibles de la variété stable $W^s(X_0)$ dans un voisinage de Γ_0 . Notons qu'en prenant les points de la variété locale stable $W_{loc}^s(X_0)$ comme conditions initiales et en prenant l'union de toutes les trajectoires de tous ces points, nous obtiendrons un objet global, toujours appelé variété, mais qui n'est plus une variété au sens propre du terme, en raison des auto-intersections.

Tout d'abord, considérons un petit voisinage tubulaire U_0 de $\Gamma_0 \cup \{X_0\}$. La boucle homoclinique Γ_0 appartient entièrement à la variété stable $W^s(X_0)$. De plus, génériquement, l'ensemble $M := W^s(X_0) \cap U_0$ s'intersecte lui-même près du point de selle X_0 le long des deux orbites exceptionnelles sur $W^s(X_0)$ qui approchent le point de selle tangentiellement à l'espace propre non principal (voir

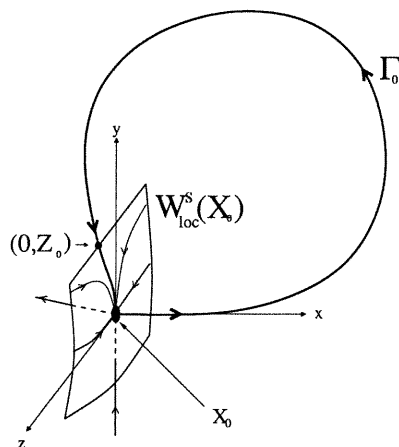


FIG. 1.1.2. Retour d'une boucle homoclinique le long de la variété locale stable en X_0

la figure 1.1.3). Ainsi, l'ensemble M qui contient la boucle homoclinique Γ_0 est (génériquement) une variété non différentiable de dimension deux. Pour plus de détails, voir dans [K].

Définition 1.1.3. *Si M est topologiquement équivalent à un simple ruban, Γ_0 est une boucle homoclinique simple ou sans torsion. Si M est topologiquement équivalent à un ruban de Möbius, Γ_0 est une boucle homoclinique avec torsion.*

Nous sommes maintenant prêts à la formulation du théorème de Shil'nikov.

1.2. THÉORÈME DE SHIL'NIKOV

Théorème 1.2.1. [K] *Considérons le champ de vecteurs suivant :*

$$\dot{X} = f(X, \varepsilon), \quad X \in \mathbb{R}^3, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad (1.2.1)$$

où f est une fonction de classe C^1 , possédant en $\varepsilon = 0$ un point d'équilibre de selle X_0 avec trois valeurs propres $\lambda_1(0) > 0 > \lambda_2(0) > \lambda_3(0)$ et une boucle homoclinique Γ_0 . Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :

(H.1) $\sigma_0 = \lambda_1(0) + \lambda_2(0) > 0$;

(H.2) Γ_0 revient en X_0 le long de l'espace propre principal ;

(H.3) Γ_0 est simple ou avec torsion.

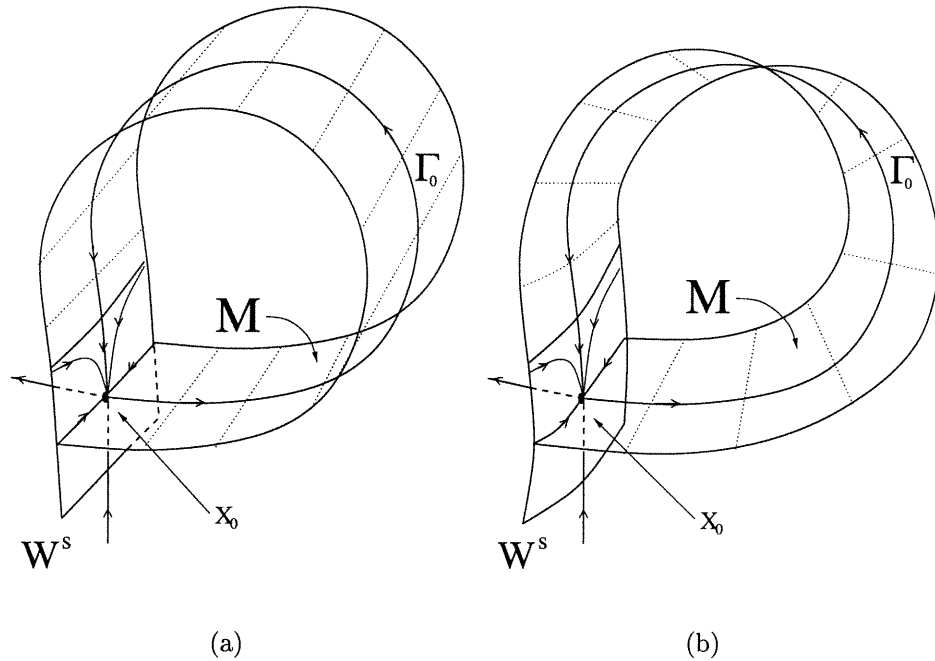


FIG. 1.1.3. Boucle homoclinique simple (a) et avec torsion (b)

Alors, dans un voisinage tubulaire de Γ_0 pour ε dans un petit voisinage de $\varepsilon = 0$, le système a au plus un cycle limite. De plus, dans la preuve, on définira un paramètre $\beta(\varepsilon)$ qui mesure la “distance entre $W^u(X_0)$ et $W^s(X_0)$ ” (en particulier, on aura $\beta = 0$ pour la boucle homoclinique). Pour cette définition, on aura que le système a exactement un cycle limite si $\beta < 0$ (resp. $\beta > 0$) dans le cas de la boucle homoclinique simple (resp. avec torsion) et aucun si $\beta > 0$ (resp. $\beta < 0$) (voir les figures 1.2.1 et 1.2.2). En particulier, si

(H.4) $\beta'(\varepsilon) \neq 0$, pour tout $\varepsilon \neq 0$

alors on a la disparition ou l'apparition d'un cycle limite lorsque le système par la boucle homoclinique.

Pour mettre en lumière les idées, nous ferons une preuve rigoureuse moderne dans le cas générique où le système vérifie l'hypothèse

(H.5) Le système (1.2.1) peut se ramener, par un difféomorphisme de classe C^1 (dans les variables (X, ε)) dans un petit voisinage V de X_0 , au système linéaire

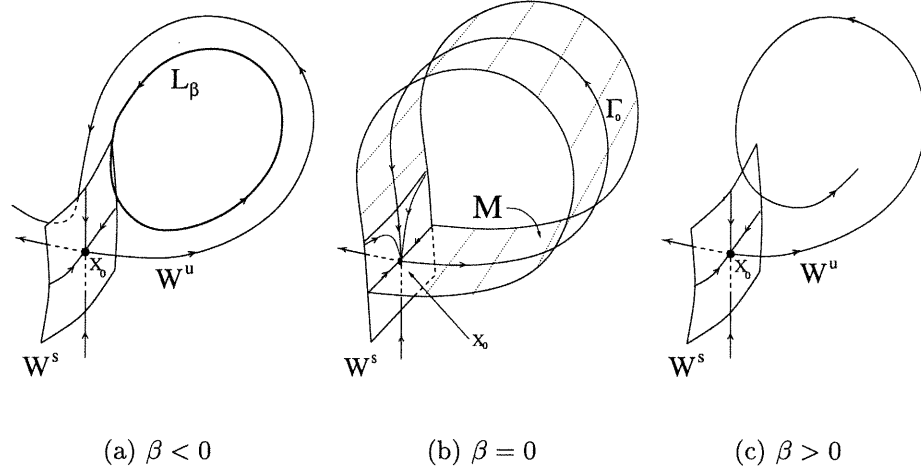


FIG. 1.2.1. Bifurcation de Shil'nikov autour d'une boucle homoclinique simple

suisant :

$$\dot{X} = AX, \quad A = \frac{\partial f}{\partial X}(X_0, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \lambda_1(\varepsilon) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(\varepsilon) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(\varepsilon) \end{pmatrix}. \quad (1.2.2)$$

Notons que les cas non couverts sont des cas particuliers extrêmement rares.

DÉMONSTRATION DU CAS GÉNÉRIQUE. Sans perte de généralité, supposons que $X_0 = 0$. Ainsi, le flot du système (1.2.2) est le suivant :

$$\varphi(t, X) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(\varepsilon)t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2(\varepsilon)t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3(\varepsilon)t} \end{pmatrix} X, \quad X \in \mathbb{R}^3. \quad (1.2.3)$$

Notons que $\lambda_1(\varepsilon) > 0 > \lambda_2(\varepsilon) > \lambda_3(\varepsilon)$ pour un ε assez petit, par continuité. Considérons l'application de Dulac $\Delta_\varepsilon : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$, où $\Sigma_1 = \{(x, \tilde{y}, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\} \cap V$ et $\Sigma_2 = \{(\tilde{x}, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} \cap V$ (voir la figure 1.2.3). Trouvons explicitement la forme générale de l'application de Dulac. Tout d'abord, pour simplifier la notation, on peut par un changement d'échelle, poser $\tilde{x} = 1$ et $\tilde{y} = 1$. Ainsi, pour $(x_0, 1, z_0) \in \Sigma_1$, on veut trouver y_1 et z_1 tel que $\Delta_\varepsilon(x_0, 1, z_0) = (1, y_1, z_1) \in \Sigma_2$.

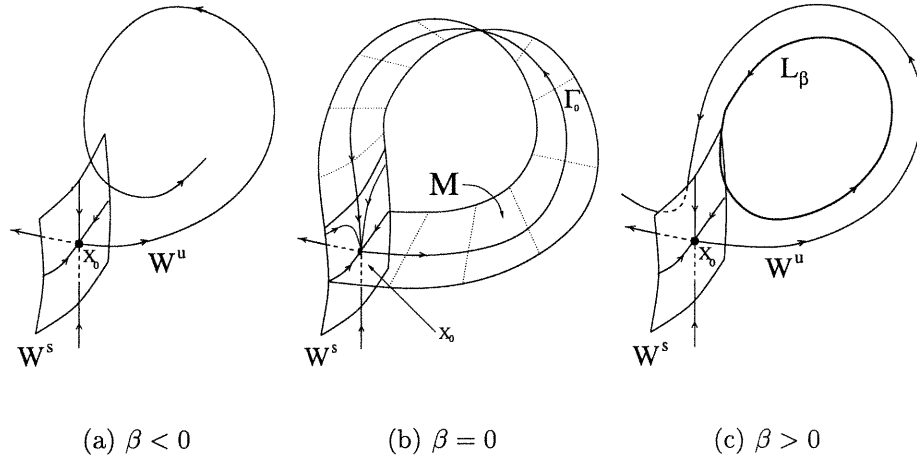


FIG. 1.2.2. Bifurcation de Shil'nikov autour d'une boucle homoclinique avec torsion

Or, en utilisant le flot (1.2.3), on peut poser

$$\Delta_\varepsilon \begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(\varepsilon)t} x_0 \\ e^{\lambda_2(\varepsilon)t} \\ e^{\lambda_3(\varepsilon)t} z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $e^{\lambda_1(\varepsilon)t} x_0 = 1 \Rightarrow \lambda_1(\varepsilon)t = \ln \frac{1}{x_0} = -\ln x_0 \Rightarrow t = -\frac{1}{\lambda_1(\varepsilon)} \ln x_0 \Rightarrow y_1 = e^{\lambda_2(\varepsilon)t} = e^{\lambda_2(\varepsilon) \cdot (-\frac{1}{\lambda_1(\varepsilon)} \ln x_0)} = (e^{\ln x_0})^{-\frac{\lambda_2(\varepsilon)}{\lambda_1(\varepsilon)}} = x_0^{-\frac{\lambda_2(\varepsilon)}{\lambda_1(\varepsilon)}}$. De plus, $z_1 = e^{\lambda_3(\varepsilon)t} z_0 = e^{\lambda_3(\varepsilon) \cdot (-\frac{1}{\lambda_1(\varepsilon)} \ln x_0)} z_0 = x_0^{-\frac{\lambda_3(\varepsilon)}{\lambda_1(\varepsilon)}} z_0$.

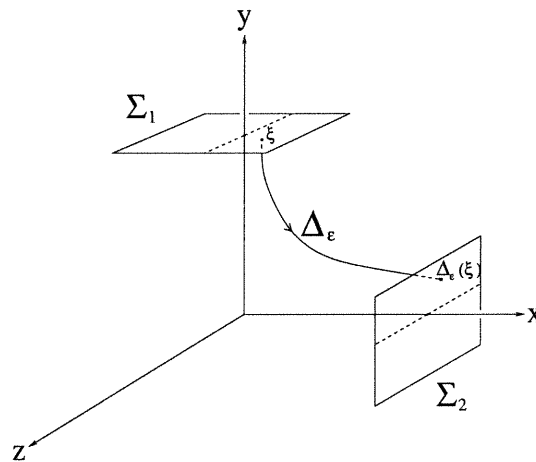


FIG. 1.2.3. L'application de Dulac $\Delta_\varepsilon : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$

On trouve donc la forme générale de l'application de Dulac

$$\Delta_\varepsilon : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2 : \begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \\ z_0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ x_0^{-\frac{\lambda_2(\varepsilon)}{\lambda_1(\varepsilon)}} \\ x_0^{-\frac{\lambda_3(\varepsilon)}{\lambda_1(\varepsilon)}} z_0 \end{pmatrix}$$

qui peut se ramener à

$$\Delta_\varepsilon : \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{-\frac{\lambda_2(\varepsilon)}{\lambda_1(\varepsilon)}} \\ x^{-\frac{\lambda_3(\varepsilon)}{\lambda_1(\varepsilon)}} z \end{pmatrix}. \quad (1.2.4)$$

Or, notons que nous travaillons dans un petit voisinage de $\varepsilon = 0$, c'est-à-dire sur un système proche d'un système possédant une boucle homoclinique Γ_0 (voir figure 1.1.2). Ainsi, par continuité du système, nous pouvons considérer l'application $R_\varepsilon : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1$ (voir figure 1.2.4).

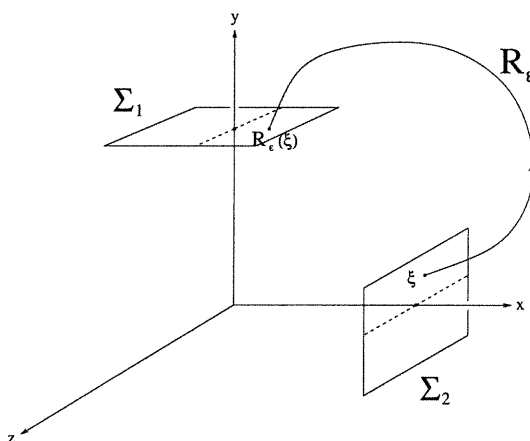


FIG. 1.2.4. Le difféomorphisme $R_\varepsilon : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1$

Maintenant, comme le système (1.2.1) peut se ramener au système (1.2.2) par un difféomorphisme de classe C^1 (par l'hypothèse (H.5)), cela implique que l'application R_ε est un difféomorphisme de classe C^1 . Remarquons qu'en $\varepsilon = 0$, $R_0(0, 0) = (0, Z_0)$, car cela correspond à la boucle homoclinique Γ_0 (voir la figure 1.1.2). Cependant, par un changement de variable de classe C^1 , on peut poser

$Z_0 = 0$. En effet, au voisinage de l'origine, le système a la forme

$$\dot{x} = \lambda_1(\varepsilon)x$$

$$\dot{y} = \lambda_2(\varepsilon)y$$

$$\dot{z} = \lambda_3(\varepsilon)z$$

et à priori, on sait seulement que la boucle homoclinique Γ_0 coupe $y = \tilde{y} = 1$ en $(x = 0, z = Z_0)$. Dans le plan $\{x = 0\}$, ce point fait donc partie de la trajectoire

$$z = Cy^{\frac{\lambda_3(\varepsilon)}{\lambda_2(\varepsilon)}}, \text{ où } Z_0 = C\tilde{y}^{\frac{\lambda_3(\varepsilon)}{\lambda_2(\varepsilon)}} = C.$$

On fait le changement de variables de classe C^1

$$\bar{z} = z - Z_0y^{\frac{\lambda_3(\varepsilon)}{\lambda_2(\varepsilon)}}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}} &= \dot{z} - Z_0 \frac{\lambda_3(\varepsilon)}{\lambda_2(\varepsilon)} y^{\frac{\lambda_3(\varepsilon)}{\lambda_2(\varepsilon)} - 1} \dot{y} \\ &= \lambda_3(\varepsilon)z - \lambda_2(\varepsilon)Z_0 \frac{\lambda_3(\varepsilon)}{\lambda_2(\varepsilon)} y^{\frac{\lambda_3(\varepsilon)}{\lambda_2(\varepsilon)}} \\ &= \lambda_3(\varepsilon)(\bar{z} + Z_0y^{\frac{\lambda_3(\varepsilon)}{\lambda_2(\varepsilon)}}) - \lambda_3(\varepsilon)Z_0y^{\frac{\lambda_3(\varepsilon)}{\lambda_2(\varepsilon)}} \\ &= \lambda_3(\varepsilon)\bar{z}. \end{aligned}$$

Ainsi, en faisant ce changement de variables (de classe C^1), on obtient que la boucle homoclinique coupe $y = \tilde{y} = 1$ en $(x = 0, \bar{z} = 0)$. À partir de maintenant, on peut supposer $Z_0 = 0$. Donc, le problème de chercher des solutions périodiques du système dans un voisinage de la boucle homoclinique Γ_0 pour ε petit se ramène à chercher les points fixes de l'application de premier retour $P_\varepsilon = R_\varepsilon \circ \Delta_\varepsilon$, où $P_\varepsilon : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1$. Nous cherchons donc les points $\xi \in \mathbb{R}^3$ tel que $P_\varepsilon(\xi) = \xi = (R_\varepsilon \circ \Delta_\varepsilon)(\xi)$.

Une autre manière de formuler le problème est de considérer l'inverse de R_ε et de chercher les $\xi \in \mathbb{R}^3$ tel que $\Delta_\varepsilon(\xi) = R_\varepsilon^{-1}(\xi)$. Or, R_ε est un difféomorphisme de classe C^1 ce qui implique que R_ε^{-1} est un difféomorphisme de classe C^1 . Si on était en classe C^2 , la formule de Taylor nous donnerait

$$R_\varepsilon^{-1}(\xi) = R_\varepsilon^{-1}(0) + \frac{\partial R_\varepsilon^{-1}}{\partial \xi}(0) \xi + o(|\xi|),$$

pour ξ près de $(x_0, z_0) = (0, 0)$. Nous montrerons dans le lemme 1.2.1 que cette formule est encore vraie en classe C^1 .

Donc, posons

$$R_\varepsilon^{-1}(0) = \begin{pmatrix} \beta_1(\varepsilon) \\ \beta_2(\varepsilon) \end{pmatrix} \text{ et } \frac{\partial R_\varepsilon^{-1}}{\partial \xi}(0) = \begin{pmatrix} a_\varepsilon & b_\varepsilon \\ c_\varepsilon & d_\varepsilon \end{pmatrix}.$$

On peut supposer $\det[\frac{\partial R_\varepsilon^{-1}}{\partial \xi}(0)] = a_\varepsilon d_\varepsilon - b_\varepsilon c_\varepsilon > 0$ (car R_ε^{-1} préserve l'orientation) et $d_\varepsilon \neq 0$, car $d_0 \neq 0$ par l'hypothèse (H.3). En effet, étudions le cas $d_0 = 0$. Tout d'abord, soit $\varepsilon = 0$. Donc,

$$R_0^{-1}(\xi) = R_0^{-1}(0) + \frac{\partial R_0^{-1}}{\partial \xi}(0)\xi + o(|\xi|).$$

Or, $R_0^{-1}(0)$ correspond à la boucle homoclinique. Ainsi $R_0^{-1}(0) = 0$ d'où

$$R_0^{-1}(\xi) = \frac{\partial R_0^{-1}}{\partial \xi}(0)\xi + o(|\xi|).$$

Près de $\xi = 0$, on a donc que

$$R_0^{-1}(\xi) \cong \frac{\partial R_0^{-1}}{\partial \xi}(0)\xi = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix} \xi. \quad (1.2.5)$$

Soit $\{e_1, e_3\}$ les vecteurs de la base propre correspondant aux valeurs propres λ_1 et λ_3 . Ainsi,

$$R_0^{-1}(e_3) = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix} e_3 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ k_0 \end{pmatrix} = k_0 \begin{pmatrix} b_0 \\ d_0 \end{pmatrix} = k_0 \begin{pmatrix} b_0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

où $k_0 > 0$ est très petit. Géométriquement, lorsque $b_0 > 0$ et $b_0 < 0$, on obtient deux schémas différents que l'on présente à la figure 1.2.5. On voit qu'aucun des deux ne correspond à l'hypothèse (H.3) ce qui implique que $d_0 \neq 0$.

Maintenant, par (1.2.4), on a

$$R_\varepsilon^{-1}(\xi) = \Delta_\varepsilon(\xi) \text{ si et seulement si}$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1(\varepsilon) \\ \beta_2(\varepsilon) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_\varepsilon & b_\varepsilon \\ c_\varepsilon & d_\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(x, z) \\ o(x, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{-\frac{\lambda_2(\varepsilon)}{\lambda_1(\varepsilon)}} \\ x^{-\frac{\lambda_3(\varepsilon)}{\lambda_1(\varepsilon)}} z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}. \quad (1.2.6)$$

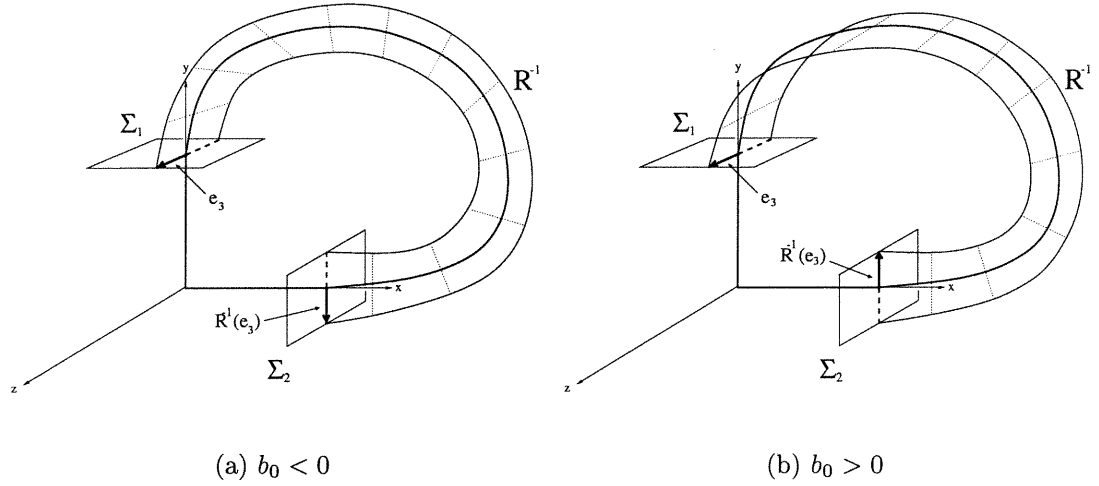


FIG. 1.2.5. Voisinage de la boucle homoclinique Γ_0 lorsque $d_0 = 0$

Cela conduit aux deux équations suivantes :

$$\beta_1(\varepsilon) + a_\varepsilon x + b_\varepsilon z + o(x, z) = x^{-\frac{\lambda_2(\varepsilon)}{\lambda_1(\varepsilon)}} \quad (1.2.7)$$

$$\beta_2(\varepsilon) + c_\varepsilon x + d_\varepsilon z + o(x, z) = x^{-\frac{\lambda_3(\varepsilon)}{\lambda_1(\varepsilon)}} z. \quad (1.2.8)$$

Tout d'abord, on sait par l'hypothèse (H.1) que $\lambda_1(0) + \lambda_2(0) > 0$. Cela reste vrai dans un voisinage de $\varepsilon = 0$, c'est-à-dire que $\lambda_1(\varepsilon) + \lambda_2(\varepsilon) > 0$ pour un ε assez petit. Ainsi, on a que $\lambda_1(\varepsilon) > -\lambda_2(\varepsilon) > 0$ ce qui implique que $0 < -\frac{\lambda_2(\varepsilon)}{\lambda_1(\varepsilon)} < 1$. Posons $r(\varepsilon) = -\frac{\lambda_2(\varepsilon)}{\lambda_1(\varepsilon)} \in]0, 1[$. Or, l'équation (1.2.8) peut se réécrire comme suit :

$$G(x, z, \varepsilon) := \beta_2(\varepsilon) + c_\varepsilon x + d_\varepsilon z + o(x, z) - x^{-\frac{\lambda_3(\varepsilon)}{\lambda_1(\varepsilon)}} z = 0.$$

On a donc que

$$\frac{\partial G}{\partial z}(x, z, \varepsilon) = d_\varepsilon - x^{-\frac{\lambda_3(\varepsilon)}{\lambda_1(\varepsilon)}} + O(x^2, z).$$

De plus, on a que $\lambda_1(\varepsilon), -\lambda_3(\varepsilon) > 0$ ce qui implique que $-\frac{\lambda_3(\varepsilon)}{\lambda_1(\varepsilon)} > 0$, et alors $\frac{\partial G}{\partial z}(0, 0, \varepsilon) = d_\varepsilon \neq 0$. Donc, par le théorème des fonctions implicites, $G(x, z, \varepsilon) = 0$ peut s'écrire

$$z = h(x, \varepsilon) = \delta(\varepsilon) + \gamma(\varepsilon)x + o(x), \text{ pour } x, \varepsilon \text{ petits} \quad (1.2.9)$$

où $\delta(\varepsilon)$ est du même signe que $-\frac{\beta_2(\varepsilon)}{d_\varepsilon}$, $\gamma(0) = -\frac{c_0}{d_0}$ et h est de classe C^1 . Par conséquent, l'équation (1.2.7) peut se réécrire ainsi :

$$F(x, \varepsilon) := \beta_1(\varepsilon) + a_\varepsilon x + b_\varepsilon h(x, \varepsilon) - x^{r(\varepsilon)} + o(x) = 0.$$

En utilisant (1.2.9), on obtient l'équation suivante près de $x = 0$

$$\begin{aligned} F(x, \varepsilon) &= \beta_1(\varepsilon) + a_\varepsilon x + b_\varepsilon[\gamma(\varepsilon)x + \delta(\varepsilon)] - x^{r(\varepsilon)} + o(x) = 0 \iff \\ F(x, \varepsilon) &= [\beta_1(\varepsilon) + b_\varepsilon\delta(\varepsilon)] + [a_\varepsilon + b_\varepsilon\gamma(\varepsilon)]x - x^{r(\varepsilon)} + o(x) = 0. \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

Ainsi, nous obtenons que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, \varepsilon) = [a_\varepsilon + b_\varepsilon\gamma(\varepsilon)] - \frac{r(\varepsilon)}{x^{1-r(\varepsilon)}} + O(x) \neq 0 \quad (1.2.11)$$

et ce, pour (x, ε) très près de $(0, 0)$. En effet, pour x près de 0, $O(x)$ est très petit et $r(\varepsilon) \in]0, 1[$ ce qui implique que $\frac{r(\varepsilon)}{x^{1-r(\varepsilon)}}$ est très grand. Supposons maintenant qu'il existe x_1, x_2 tel que $F(x_1, \varepsilon) = F(x_2, \varepsilon) = 0$. Par le théorème de Rolle, cela implique qu'il existe $x_3 \in]x_1, x_2[$ tel que $\frac{\partial F}{\partial x}(x_3, \varepsilon) = 0$. Contradiction avec (1.2.11) pour (x, ε) près de $(0, 0)$. Ainsi, $F(x, \varepsilon)$ possède au plus une racine dans un petit voisinage de $(0, 0)$ d'où le fait que le système (1.2.1) possède au plus un cycle limite dans un voisinage de la boucle homoclinique pour ε petit.

Regardons maintenant où va apparaître le cycle limite dépendamment d'une certaine valeur $\beta(\varepsilon)$ que nous allons déterminer. Par (1.2.10), on obtient que

$$F(x, \varepsilon) = 0 \iff x^{r(\varepsilon)}[1 - (a_\varepsilon + b_\varepsilon\gamma(\varepsilon))x^{1-r(\varepsilon)} + o(x^{1-r(\varepsilon)})] = \beta_1(\varepsilon) + b_\varepsilon\delta(\varepsilon).$$

Cependant, près de $x = 0$, on a

$$1 - (a_\varepsilon + b_\varepsilon\gamma(\varepsilon))x^{1-r(\varepsilon)} + o(x^{1-r(\varepsilon)}) \cong 1.$$

Donc, $F(x, \varepsilon) = 0$ n'a de solution que si $\beta_1(\varepsilon) + b_\varepsilon\delta(\varepsilon) \geq 0$. En effet, on peut écrire

$$x [1 - (a_\varepsilon + b_\varepsilon\gamma(\varepsilon))x^{1-r(\varepsilon)} + o(x^{1-r(\varepsilon)})]^{\frac{1}{r(\varepsilon)}} = [\beta_1(\varepsilon) + b_\varepsilon\delta(\varepsilon)]^{\frac{1}{r(\varepsilon)}}. \quad (1.2.12)$$

seulement si $\beta_1(\varepsilon) + b_\varepsilon\delta(\varepsilon) \geq 0$. L'équation (1.2.12) a une solution unique par le théorème des fonctions implicites car

$$H(x, \varepsilon) := x [1 - (a_\varepsilon + b_\varepsilon\gamma(\varepsilon))x^{1-r(\varepsilon)} + o(x^{1-r(\varepsilon)})]^{1/r(\varepsilon)} - [\beta_1(\varepsilon) + b_\varepsilon\delta(\varepsilon)]^{1/r(\varepsilon)} = 0$$

est telle que

$$\frac{\partial H}{\partial x}(0, 0) = 1 \neq 0.$$

Par conséquent, $F(x, \varepsilon) = 0$ possède une unique solution $x = x(\varepsilon)$ lorsque $\beta_1(\varepsilon) + b_\varepsilon\delta(\varepsilon) \geq 0$ est assez petit. Maintenant, posons

$$\beta(\varepsilon) := -d_\varepsilon[\beta_1(\varepsilon) + b_\varepsilon\delta(\varepsilon)].$$

Notons que ce paramètre est celui introduit dans la preuve de l'énoncé. Par l'équation (1.2.12), on voit que $x = 0$ si et seulement si $\beta(\varepsilon) = 0$ ce qui implique qu'on a une boucle homoclinique si et seulement si $\beta(\varepsilon) = 0$. Or, par l'hypothèse (H.4), la boucle homoclinique ne peut exister pour $\varepsilon \neq 0$.

Donc, $\beta(0) = 0$ est la condition géométrique de l'existence d'une boucle homoclinique. Les deux inégalités $\beta(\varepsilon) < 0$ et $\beta(\varepsilon) > 0$ correspondent aux deux positions de la variété instable par rapport à la variété stable (voir les figures 1.2.1 et 1.2.2).

Maintenant, faisons la distinction entre le cas de la boucle simple et celui de la boucle avec torsion. Notons que la distinction se fera par le signe du paramètre d_0 de la matrice

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix}.$$

Rappelons tout d'abord l'équation (1.2.5) et soit

$$R_0^{-1}(e_3) = k_0 \begin{pmatrix} b_0 \\ d_0 \end{pmatrix}. \quad (1.2.13)$$

(1) Cas simple

Dans le cas de la boucle homoclinique simple (sans torsion), on a que d_0 est strictement positif : ceci est géométriquement évident sur la figure

1.2.6 et ce, en considérant (1.2.13). On sait également que le cycle limite va apparaître si et seulement si $\beta_1(\varepsilon) + b_\varepsilon\delta(\varepsilon) > 0$. Donc, comme $d_0 > 0$ implique que $d_\varepsilon > 0$ pour ε petit, alors le cycle limite va apparaître si et seulement si

$$\beta(\varepsilon) = -d_\varepsilon[\beta_1(\varepsilon) + b_\varepsilon\delta(\varepsilon)] < 0$$

(voir la figure 1.2.1).

(2) Cas avec torsion

Dans le cas de la boucle homoclinique avec torsion, on a que d_0 est strictement négatif : ceci est géométriquement évident sur la figure 1.2.6 et ce, en considérant (1.2.13). On sait également que le cycle limite va apparaître si et seulement si $\beta_1(\varepsilon) + b_\varepsilon\delta(\varepsilon) > 0$. Donc, comme $d_0 < 0$ implique que $d_\varepsilon < 0$ pour ε petit, alors le cycle limite va apparaître si et seulement si

$$\beta(\varepsilon) = -d_\varepsilon[\beta_1(\varepsilon) + b_\varepsilon\delta(\varepsilon)] > 0$$

(voir la figure 1.2.2).

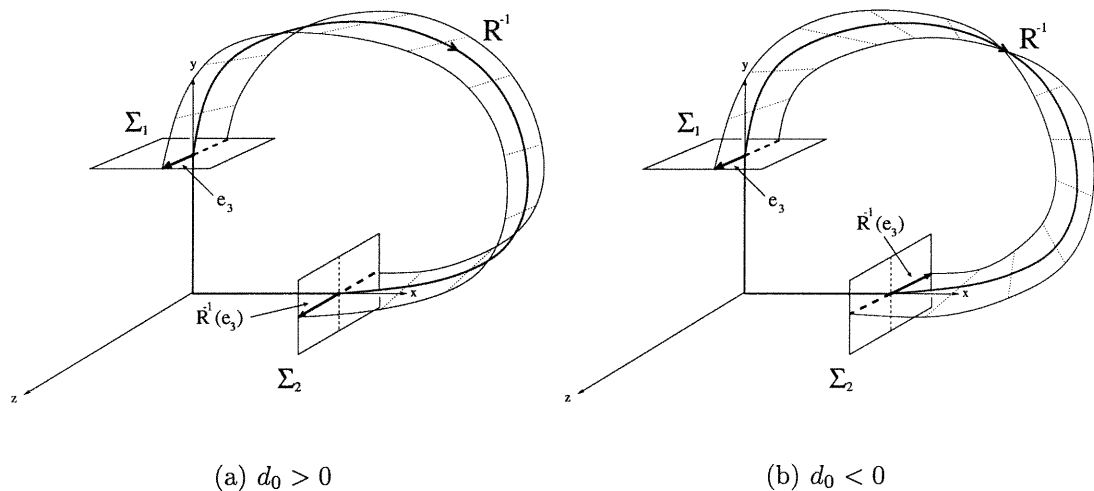


FIG. 1.2.6. Boucle simple ($d_0 > 0$) et avec torsion ($d_0 < 0$)

□

Lemme 1.2.1. Soit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un difféomorphisme de classe C^1 . Alors, pour X près de $(x_1, x_2) = (0, 0)$, F peut s'écrire comme suit :

$$F(X) = F(0) + \frac{\partial F}{\partial X}(0)X + o(|X|).$$

DÉMONSTRATION. En effet, posons

$$F(X) := (F_1(X), F_2(X)),$$

où $X = (X_1, X_2)$ et $F_1, F_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$ sont différentiables avec $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un voisinage ouvert de 0 dans \mathbb{R}^2 . Soient $\xi, \zeta \in U$. Alors, par le théorème de la moyenne, il existe $z_1, z_2 \in U$ sur le segment reliant ξ et ζ tels que

$$F_1(\zeta) - F_1(\xi) = \nabla F_1(z_1) \cdot (\zeta - \xi)$$

$$F_2(\zeta) - F_2(\xi) = \nabla F_2(z_2) \cdot (\zeta - \xi).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} F(\zeta) - F(\xi) - \frac{\partial F}{\partial X}(\xi) (\zeta - \xi) &= \begin{pmatrix} \nabla F_1(z_1) \cdot (\zeta - \xi) \\ \nabla F_2(z_2) \cdot (\zeta - \xi) \end{pmatrix} - \frac{\partial F}{\partial X}(\xi) (\zeta - \xi) \\ &= \left[\begin{pmatrix} \nabla F_1(z_1) \\ \nabla F_2(z_2) \end{pmatrix} - \frac{\partial F}{\partial X}(\xi) \right] (\zeta - \xi) \\ &= \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1}(z_1) & \frac{\partial F_1}{\partial X_2}(z_1) \\ \frac{\partial F_2}{\partial X_1}(z_2) & \frac{\partial F_2}{\partial X_2}(z_2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1}(\xi) & \frac{\partial F_1}{\partial X_2}(\xi) \\ \frac{\partial F_2}{\partial X_1}(\xi) & \frac{\partial F_2}{\partial X_2}(\xi) \end{pmatrix} \right] (\zeta - \xi). \end{aligned}$$

Comme z_1 et z_2 sont sur le segment reliant ξ et ζ , alors $z_1, z_2 \xrightarrow{\zeta \rightarrow \xi} \xi$. Or, $\frac{\partial F_i}{\partial X_j}$ sont continues ($\forall i, j = 1, 2$) ce qui implique que $\frac{\partial F_i}{\partial X_j}(z_i) \xrightarrow{\zeta \rightarrow \xi} \frac{\partial F_i}{\partial X_j}(\xi)$ ($\forall i, j = 1, 2$).

Donc,

$$\begin{pmatrix} \nabla F_1(z_1) \\ \nabla F_2(z_2) \end{pmatrix} - \frac{\partial F}{\partial X}(\xi) \xrightarrow{\zeta \rightarrow \xi} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où le fait que

$$F(\zeta) - F(\xi) - \frac{\partial F}{\partial X}(\xi) (\zeta - \xi) = o(|\zeta - \xi|).$$

Posons $\zeta = X$ et $\xi = 0$. Ainsi

$$F(X) = F(0) + \frac{\partial F}{\partial X}(0)X + o(|X|).$$

□

1.3. THÉORÈME DE HARTMAN

Maintenant, comment pouvons-nous nous assurer de pouvoir réaliser l'hypothèse (H.5) à l'intérieur de la preuve du théorème de Shil'nikov à savoir la linéarisation du système au voisinage de l'origine par un difféomorphisme de classe C^1 ? Une condition suffisante à la réalisation de cette hypothèse sera fournie par le théorème de Hartman [H] que nous énonçons ci-après. Pour l'énoncé du théorème, nous avons tout d'abord besoin de définir la notion de résonance. Nous regardons ici des systèmes dans \mathbb{R}^d .

Définition 1.3.1. *Une collection de valeurs propres $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d)$ est résonante si ces valeurs sont reliées par une relation de la forme*

$$\lambda_k = \sum_{i=1}^d m_i \lambda_i$$

pour un $\lambda_k \in \Lambda$, où $m = (m_1, m_2, \dots, m_d) \in \mathbb{N}_0^d = \{\mathbb{N} \cup \{0\}\}^d$ et $\sum_{i=1}^d m_i \geq 2$. Cette relation est appelée résonance et le nombre $|m| = \sum_{i=1}^d m_i$ l'ordre de la résonance.

Exemple 1.3.1. *La relation $\lambda_1 = 2\lambda_2$ est une résonance d'ordre 2, $2\lambda_1 = 3\lambda_2$ n'est pas une résonance, $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ est une résonance d'ordre 3, car cette relation entraîne les résonances $\lambda_1 = 2\lambda_1 + \lambda_2$ et $\lambda_2 = \lambda_1 + 2\lambda_2$ toutes deux d'ordre 3.*

Nous sommes maintenant prêts à énoncer le théorème de Hartman. Notons que ce théorème sera encore vrai si on rajoute des paramètres.

Théorème 1.3.1. [H] *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\Gamma \in M_d(\mathbb{R})$ une matrice non singulière. Alors, il existe un entier $N = N(n) \geq 2$ avec la propriété suivante : Pour tout système d'équations différentielles*

$$\dot{x} = \Gamma x + \Xi(x) \tag{1.3.1}$$

avec $x \in \mathbb{R}^d$ tel que :

- $\Xi(0) = \frac{\partial \Xi}{\partial x}(0) = 0$,
- les valeurs propres de Γ ne satisfont aucune relation de résonance d'ordre $\leq N$,
- Ξ est un difféomorphisme de classe C^N pour $|x|$ petit,

il existe un changement $y = R(x)$, où R est un difféomorphisme local de classe C^n , ramenant le système (1.3.1) au système linéaire

$$\dot{y} = \Gamma y.$$

LA CONSTRUCTION DE $N(n)$

La preuve du théorème précédent fournit un choix de $N(n)$ ou, de manière équivalente, de $\lambda = \lambda(n) = N(n) - n$. Nous allons fournir ici, fidèlement à la preuve de Hartman, la manière de trouver un $\lambda \in \mathbb{N}$ suffisamment élevé pour la linéarisation du système (1.3.1). Notons que le "suffisamment élevé" implique que cette façon de trouver le λ n'est probablement pas la meilleure. Voici donc cette manière :

Soient $\{\lambda_1, \dots, \lambda_d\}$ l'ensemble des valeurs propres de Γ tel que $Re\lambda_i \neq 0$ ($\forall i = 1, \dots, d$), posons

$$\gamma_k = e^{\lambda_k} \tag{1.3.2}$$

et soient $a, \alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$0 < \alpha < \min_{k=1, \dots, d} \left\{ |\gamma_k|, \frac{1}{|\gamma_k|} \right\} < a < 1.$$

Alors, λ peut être posé comme étant

$$\lambda = \lambda(n) = \min \left\{ \delta \in \mathbb{N} \mid \frac{A_{n,d} \cdot d^2 \cdot a^\delta}{\alpha^{n+2}} < 1 \right\},$$

où on pose

$$A_{n,d} = \frac{(d+n-1)!}{n!(d-1)!} \tag{1.3.3}$$

qui est le nombre de dérivées partielles d'ordre n d'une fonction à d variables. On pose ainsi

$$N(n) = \lambda(n) + n. \tag{1.3.4}$$

Chapitre 2

CHAOS ET CONJUGAISON TOPOLOGIQUE

Le grand mathématicien Stephen Smale a dit : « La théorie du chaos a frappé d'un coup mortel le déterminisme, celle-ci établissant l'omniprésence de l'imprévisibilité comme trait fondamental de l'expérience ». Dans cette optique, les scientifiques et plus particulièrement les mathématiciens, ont dû essayer de confronter cette théorie anti-déterministe en la définissant de manière rigoureuse.

Dans ce chapitre, nous allons définir de manière rigoureuse la notion de chaos et nous fournirons un critère d'équivalence entre les dynamiques de certains systèmes. Par le fait même, nous pourrons donner une évidence de la présence du chaos dans le système de Lorenz lors de la bifurcation d'apparition du chaos (voir la section 3.3.3).

2.1. DÉFINITIONS ET EXEMPLE

Nous allons maintenant introduire la notion de dynamique discrète qui est à la base de la définition rigoureuse de chaos. Tout d'abord, considérons une application $f : X \rightarrow X$ et un point $x_0 \in X$.

Notation : Nous utiliserons la notation $f^n(x_0)$ qui signifiera que nous appliquerons f n fois au point x_0 c'est-à-dire $f^n(x_0) = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}(x_0)$.

Définition 2.1.1. *L'orbite du point x_0 sous l'application f est défini par la suite de points $\{x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1) = f^2(x_0), \dots, x_n = f^n(x_0), \dots\}$. Comme on applique f à temps discrets, on parle ainsi d'un système dynamique discret. Le*

point x_0 est un point périodique s'il existe un $m \in \mathbb{N}$ (appelé période de x_0) tel que $f^m(x_0) = x_0$. L'orbite du point périodique x_0 de période m $\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0), f^m(x_0) = x_0, f(x_0), \dots\}$ est appelé un cycle de période m .

Exemple 2.1.1. Considérons l'application $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1$. On remarque que $f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 0$. Ainsi, les points 0, 1 et 2 sont trois points périodiques de période 3 (voir la figure 2.1.1).

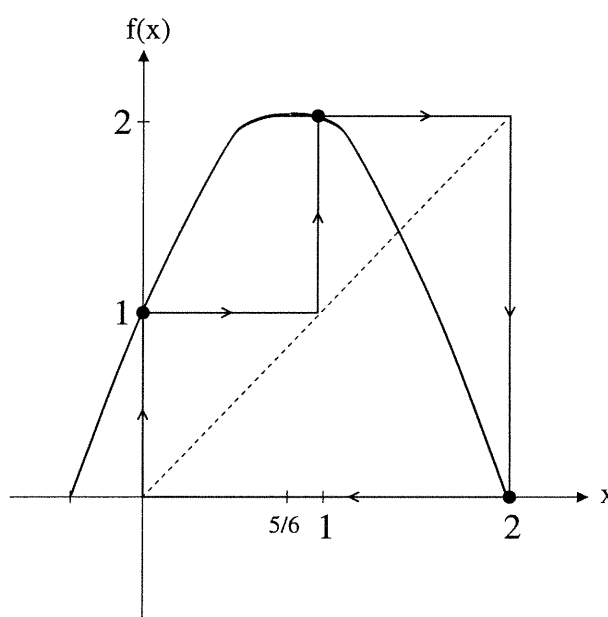


FIG. 2.1.1. Cycle de période 3

Définition 2.1.2. Soit X un espace métrique. On dit qu'une application $f : X \rightarrow X$ a une dépendance sensible aux conditions initiales s'il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in X$ et pour tout voisinage N de x , il existe un $y \in N$ et un $m \in \mathbb{N}$ tel que $d[f^m(x), f^m(y)] > \delta$.

Définition 2.1.3. On dit qu'une application $f : X \rightarrow X$ est topologiquement transitive si pour toute paire d'ensembles ouverts $U, V \subset X$, il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

2.2. CHAOS ET CONJUGAISON TOPOLOGIQUE

Nous allons maintenant introduire la notion de système dynamique chaotique. Il existe plusieurs définitions de chaos dans un système dynamique discret, certaines étant plus fortes et d'autres moins. Nous choisissons la définition suivante, car elle s'applique à une grande classe de fonctions et elle est assez facile à vérifier. Pour plus de détails, voir dans [D].

Définition 2.2.1. *On dit que l'application $f : X \rightarrow X$ est chaotique sur X si :*

- 1) *f a une dépendance sensible aux conditions initiales ;*
- 2) *f est topologiquement transitive ;*
- 3) *Les points périodiques de f sont denses dans X .*

Exemple 2.2.1. *L'application $g : S^1 \rightarrow S^1 : \theta \mapsto 2\theta$ est chaotique.*

DÉMONSTRATION. Pour la démonstration, nous allons vérifier les trois conditions de la définition précédente. Tout d'abord, notons que nous représenterons un point de S^1 par son angle en radian. Donc, un point est représenté par tout angle de la forme $\theta + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$. Considérons la distance entre deux points $\theta, \psi \in S^1$ comme étant $d_{S^1}(\theta, \psi) :=$ l'angle du plus petit arc qui joint θ et ψ dans S^1 (voir la figure 2.2.1). Notons que pour tout $\theta, \psi \in S^1$, $d_{S^1}(\theta, \psi) \in [0, \pi]$.

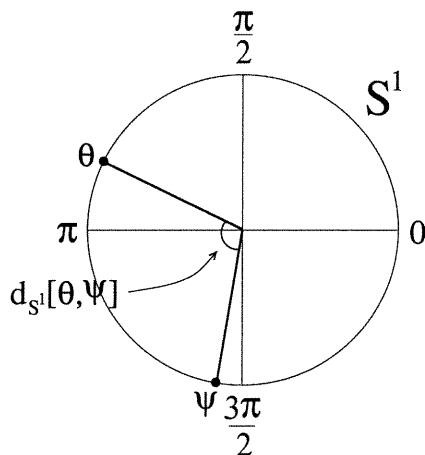


FIG. 2.2.1. Distance entre deux points θ et ψ dans S^1

Fixons $\delta = \frac{\pi}{4}$. Soient $\theta \in [0, 2\pi)$, $\varepsilon > 0$ et $\psi \in [0, 2\pi)$ tels que $d_{S^1}(\theta, \psi) < \varepsilon < \frac{\pi}{8}$. Or,

$$d_{S^1}[g(\theta), g(\psi)] = d_{S^1}[2\theta, 2\psi] = 2d_{S^1}(\theta, \psi) < \frac{\pi}{4}$$

ce qui implique qu'il existe un $n > 1$ tel que

$$d_{S^1}[g^n(\theta), g^n(\psi)] = 2^n d_{S^1}(\theta, \psi) > \frac{\pi}{4} = \delta.$$

Ainsi, g a une dépendance sensible sur les conditions initiales (voir la figure 2.2.2).

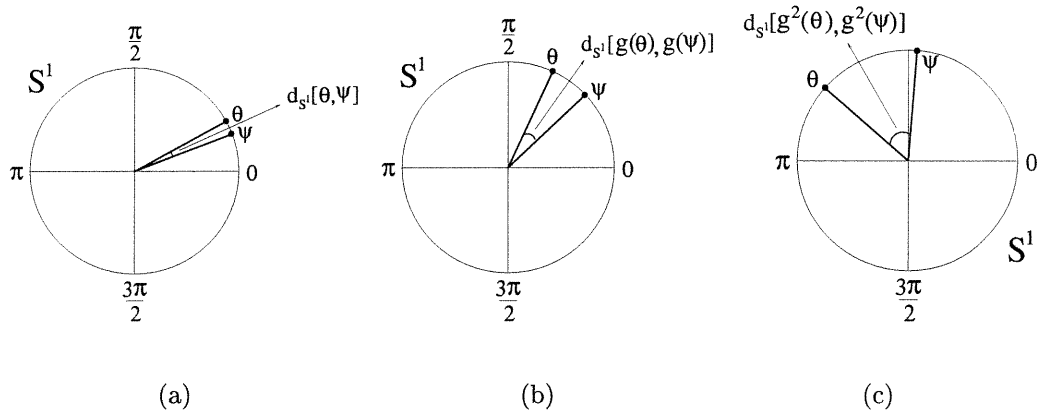


FIG. 2.2.2. Dépendance sensible de $g : S^1 \rightarrow S^1$

Maintenant, soient U et V deux sous-ensembles ouverts de S^1 . Or il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $g^k(U) = S^1$. En particulier,

$$g^k(U) \cap V \neq \emptyset$$

et donc, g est topologiquement transitive.

Trouvons finalement l'ensemble des points périodiques de g que nous allons noter $Per\{g\}$. Soit $\theta \in S^1$ un point périodique de g de période n c'est-à-dire que

$$g^n(\theta) = 2^n \theta = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi, on obtient que

$$\theta = \frac{2k\pi}{2^n - 1}, \quad \text{où } k \in \{0, 1, \dots, 2^n - 2\}.$$

Par exemple, tous les points périodiques de période 3 de l'application $g : S^1 \rightarrow S^1$ font partie de l'ensemble suivant :

$$\left\{0, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}, \frac{8\pi}{7}, \frac{10\pi}{7}, \frac{12\pi}{7}\right\}.$$

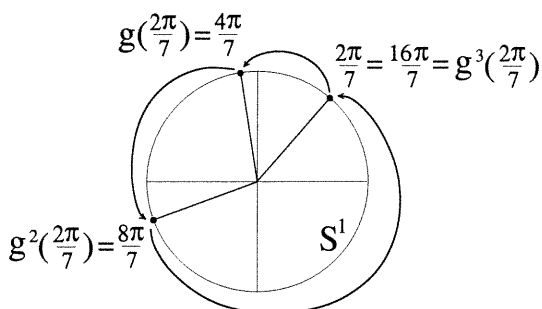


FIG. 2.2.3. Cycle de g de période 3

Donc,

$$\text{Per}\{g\} = \bigcup_{n \geq 1} \left\{ \frac{2k\pi}{2^n - 1} \mid k = 0, 1, \dots, 2^n - 2 \right\}.$$

Or, $\overline{\text{Per}\{g\}} = S^1$ d'où le fait que les points périodiques de g sont denses dans S^1 .

Par conséquent, $g : S^1 \rightarrow S^1$ est chaotique □

Définition 2.2.2. Soient $f : X \rightarrow X$ et $g : Y \rightarrow Y$ deux applications. f et g sont topologiquement conjuguées s'il existe un homéomorphisme $h : X \rightarrow Y$ tel que $h \circ f = g \circ h$ c'est-à-dire que le diagramme suivant commute :

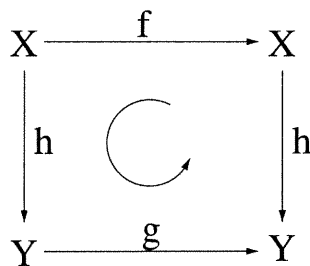


FIG. 2.2.4. Deux applications f et g qui commutent

Proposition 2.2.1. *Soient f et g deux applications topologiquement conjuguées via l'homéomorphisme h . Alors f et g ont exactement les mêmes propriétés dynamiques.*

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION. Nous n'allons présenter ici que certaines propriétés invariantes. Supposons que x_0 est un point fixe de f . Alors $h[f(x_0)] = h[x_0] = g[h(x_0)]$ et donc $h(x_0)$ est un point fixe de g . Par conséquent, les points fixes sont préservés. Maintenant, soit y_0 un point périodique de période m de l'application f . Comme $h \circ f = g \circ h$, il est facile (par récurrence) de démontrer que $h \circ f^n = g^n \circ h$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ainsi, $f^m(y_0) = y_0$ implique que $h[f^m(y_0)] = h[y_0] = g^m[h(y_0)]$ et donc $h(y_0)$ est un point périodique de période m de g . Posons $per(y_0) :=$ période minimale du point périodique y_0 . Ainsi, $per(h(y_0)) \leq per(y_0)$ et par symétrie, $per(h(y_0)) \geq per(y_0)$. Par conséquent, les points périodiques sont préservés. \square

Définition 2.2.3. *Soient $f : X \rightarrow X$ et $g : Y \rightarrow Y$ deux applications. f et g sont semi-conjuguées s'il existe une surjection $h : X \rightarrow Y$ tel que $h \circ f = g \circ h$.*

Notons ainsi que dans ce cas, la complexité de la dynamique de $g : Y \rightarrow Y$ fournit une borne inférieure pour la complexité de la dynamique de $f : X \rightarrow X$. Donc, si $g : Y \rightarrow Y$ est chaotique, alors $f : X \rightarrow X$ sera également «chaotique» dans le sens où il existera un sous-ensemble $A \subset X$ tel que la restriction $f|_A$ sera chaotique sur A .

Exemple 2.2.2. *Considérons l'application de Baker*

$$B(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2x - 1 & \text{si } x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

et considérons l'application $\pi : I \rightarrow I/\{0, 1\} = S^1$ qui identifie les points 0 et 1. Alors, l'application π est surjective et est telle que $\pi \circ B = g \circ \pi$ où $g : S^1 \rightarrow S^1 : \theta \mapsto 2\theta$. Par conséquent, B et g sont semi-conjuguées.

Chapitre 3

LE SYSTÈME DE LORENZ

3.1. GÉNÉRALITÉS SUR LE SYSTÈME DE LORENZ

En 1963, Edward Lorenz, un météorologiste du MIT, a travaillé sur des équations qui allaient révolutionner à leur manière la philosophie des scientifiques et des mathématiciens pour des siècles à venir. Nous vous présentons ici ces fameuses équations et en étudions certaines propriétés.

Définition 3.1.1. *Le système de Lorenz est un système d'équations différentielles ordinaires dans \mathbb{R}^3 dépendant de trois paramètres σ , ρ et β représentant respectivement le nombre de Prandtl, le nombre de Rayleigh et un paramètre de proportion. Le voici :*

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz \\ \dot{z} &= -\beta z + xy \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (x, y, z) &\in \mathbb{R}^3 \\ \sigma, \rho, \beta &> 0. \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

Pour étudier (3.1.1) dans un voisinage de l'origine, on réécrit le système comme

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -xz \\ xy \end{pmatrix}. \quad (3.1.2)$$

Proposition 3.1.1. *Le système de Lorenz possède les quatre propriétés suivantes :*

i) Le système est symétrique sous la transformation $(x, y) \mapsto (-x, -y)$.

- ii) Pour $\rho < 1$, le système ne possède qu'un point critique qui est l'origine.
 iii) À $\rho = 1$, il se produit une bifurcation de la fourche (voir section 3.3.1)
 iv) Pour $\rho > 1$, deux nouveaux points singuliers non triviaux et symétriques apparaissent à savoir

$$p_{\pm} = (\pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1).$$

Maintenant, nous allons nous intéresser au cas où $\sigma = 10$ et $\beta = \frac{8}{3}$ pour ainsi obtenir le système suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -xz \\ xy \end{pmatrix} \quad (3.1.3)$$

qui ne dépend que du paramètre ρ . Pour nous permettre d'utiliser le théorème de Shil'nikov, nous devons tout d'abord nous mettre dans le contexte d'une bifurcation homoclinique. Nous connaissons numériquement l'existence d'une boucle homoclinique pour $\rho \cong 13.926$ et la non-existence de telles boucles pour $\rho < 13.926$. Cependant, nous devons également nous assurer qu'il est possible de linéariser (3.1.3) à l'origine et ce, par un difféomorphisme de classe C^1 . Une condition suffisante pour l'existence d'une telle linéarisation est l'absence de relations de résonance d'ordre inférieur à un certain nombre N , dont l'existence est donné par le théorème 1.3.1. Nous allons donc, fidèlement à la preuve du théorème 1.3.1, trouver le $N(1)$ dans le contexte de notre problème.

Proposition 3.1.2. *Pour tout $\rho > 13$ tel que $\rho \notin \mathcal{R}$, où*

$$\mathcal{R} := \left\{ \frac{81}{5}, \frac{154}{9}, \frac{126}{5}, \frac{1562}{45}, \frac{2684}{45} \right\} = \{ 16.2, 17.\bar{1}, 25.2, 34.7\bar{1}, 59.5\bar{4} \}, \quad (3.1.4)$$

il existe un difféomorphisme de classe C^1 ramenant le système (3.1.3) à son linéarisé à l'origine.

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, les valeurs propres du linéarisé à l'origine de (3.1.3) sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\lambda_1(\rho) &= \frac{1}{2}(-11 + \sqrt{81 + 40\rho}) \\ \lambda_2(\rho) &= -\frac{8}{3} \\ \lambda_3(\rho) &= \frac{1}{2}(-11 - \sqrt{81 + 40\rho})\end{aligned}\tag{3.1.5}$$

Soit $\rho > 1$. On remarque que

$$\lambda_1(\rho) > 0 > \lambda_2(\rho) > \lambda_3(\rho).$$

Par définition, posons $\gamma_k(\rho) = e^{\lambda_k(\rho)}$ pour $k = 1, 2, 3$. Ainsi,

$$\gamma_3(\rho) < \gamma_2(\rho) < 1 < \gamma_1(\rho) \implies \frac{1}{\gamma_1(\rho)} < 1 < \frac{1}{\gamma_2(\rho)} < \frac{1}{\gamma_3(\rho)}.$$

De plus,

$$\lambda_3(\rho) = -\frac{11}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{81 + 40\rho} < \frac{11}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{81 + 40\rho} = -\lambda_1(\rho)$$

ce qui implique que

$$\gamma_3(\rho) = e^{\lambda_3(\rho)} < e^{-\lambda_1(\rho)} = \frac{1}{\gamma_1(\rho)}.$$

Par conséquent,

$$\min_{k=1,2,3} \left\{ |\gamma_k(\rho)|, \frac{1}{|\gamma_k(\rho)|} \right\} = \gamma_3(\rho) = e^{-\frac{1}{2}(11 + \sqrt{81 + 40\rho})}.$$

Définissons a, α tel que

$$0 < \alpha < \gamma_3(\rho) < a < 1.$$

Rappelons que l'on cherche un difféomorphisme de classe C^1 dans un système à 3 variables. Ainsi, $A_{n,d} = A_{1,3} = \frac{(3+1-1)!}{1!(3-1)!} = 3$ (voir la formule (1.3.3)).

Donc $N(1) = \lambda(1) + 1$ où $\lambda(1) = \min\{\delta \in \mathbb{N} \mid \frac{A_{1,3} \cdot 3^2 \cdot a^\delta}{\alpha^3} < 1\}$. Or, on a

$$\frac{A_{1,3} \cdot 3^2 \cdot a^\delta}{\alpha^3} < 1 \iff \frac{27a^\delta}{\alpha^3} < 1 \iff \delta > \frac{3 \ln(\frac{3}{\alpha})}{-\ln a}.$$

On peut poser α et a très proche de $\gamma_3(\rho)$. À la limite, $\alpha = a = \gamma_3(\rho)$. Ainsi,

$$\delta > \frac{3 \ln\left(\frac{3}{\gamma_3(\rho)}\right)}{-\ln \gamma_3(\rho)} = 3 \cdot \left(1 + \frac{2 \ln 3}{11 + \sqrt{81 + 40\rho}}\right) \in]3, 4[.$$

Par conséquent, $\lambda(1) = 4$ et donc $N(1) = \lambda(1) + 1 = 5$. Ainsi, par le théorème 1.3.1, il existe un difféomorphisme de classe C^1 ramenant le système (3.1.3) à son linéarisé à l'origine s'il n'existe pas de relation de résonance d'ordre inférieure à $N = 5$ c'est-à-dire

$$\lambda_i(\rho) \neq m_1 \lambda_1(\rho) + m_2 \lambda_2(\rho) + m_3 \lambda_3(\rho)$$

pour $i = 1, 2, 3$ et $\forall (m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{N}_0^3$ tel que $2 \leq m_1 + m_2 + m_3 \leq 5$. À l'aide de Maple, nous avons trouvé 5 valeurs de $\rho > 13$ où il y a relation de résonance d'ordre $m \in \{2, 3, 4, 5\}$ à savoir $\rho \in \mathcal{R} = \left\{\frac{81}{5}, \frac{154}{9}, \frac{126}{5}, \frac{1562}{45}, \frac{2684}{45}\right\}$. Vous trouverez le programme qui a généré ces valeurs à l'annexe A. Voici donc ces résonances d'ordre inférieure ou égale à $N = 5$:

(1) **Cas $\rho_1 = \frac{81}{5} = 16.2$**

Dans ce cas, $\lambda_1(\rho_1) = 8$, $\lambda_2(\rho_1) = -\frac{8}{3}$ et $\lambda_3(\rho_1) = -19$. On obtient ainsi les relations de résonance d'ordre 5

$$\lambda_1 = 2\lambda_1 + 3\lambda_2$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 + 4\lambda_2$$

$$\lambda_3 = \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3$$

provenant toutes de $\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0$.

(2) **Cas $\rho_2 = \frac{154}{9} = 17.\bar{1}$**

Dans ce cas, $\lambda_1(\rho_2) = \frac{25}{3}$, $\lambda_2(\rho_2) = -\frac{8}{3}$ et $\lambda_3(\rho_2) = -\frac{58}{3}$. On obtient ainsi la relation de résonance d'ordre 3

$$\lambda_2 = 2\lambda_1 + \lambda_3$$

(3) **Cas $\rho_3 = \frac{126}{5} = 25.2$**

Dans ce cas, $\lambda_1(\rho_3) = 11$, $\lambda_2(\rho_3) = -\frac{8}{3}$ et $\lambda_3(\rho_3) = -22$. On obtient ainsi

les relations de résonance d'ordre 4

$$\lambda_1 = 3\lambda_1 + \lambda_3$$

$$\lambda_2 = 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

$$\lambda_3 = 2\lambda_1 + 2\lambda_3$$

provenant toutes de $2\lambda_1 + \lambda_3 = 0$.

(4) **Cas** $\rho_4 = \frac{1562}{45} = 34.7\bar{1}$

Dans ce cas, $\lambda_1(\rho_4) = \frac{41}{3}$, $\lambda_2(\rho_4) = -\frac{8}{3}$ et $\lambda_3(\rho_4) = -\frac{74}{3}$. On obtient ainsi les relations de résonance d'ordre 5

$$\lambda_1 = 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

$$\lambda_2 = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3$$

$$\lambda_3 = 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3$$

provenant toutes de $2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$.

(5) **Cas** $\rho_5 = \frac{2684}{45} = 59.6\bar{4}$

Dans ce cas, $\lambda_1(\rho_5) = \frac{58}{3}$, $\lambda_2(\rho_5) = -\frac{8}{3}$ et $\lambda_3(\rho_5) = -\frac{91}{3}$. On obtient ainsi la relation de résonance d'ordre 5

$$\lambda_2 = 3\lambda_1 + 2\lambda_3$$

□

Ainsi, on arrive à la conclusion que pour ρ en dehors des valeurs de l'ensemble \mathcal{R} de l'équation (3.1.4), notre preuve du théorème de Shil'nikov est valide s'il y a une boucle homoclinique. S'il y avait une bifurcation homoclinique pour une des valeurs de \mathcal{R} , le théorème s'appliquerait encore, mais la preuve serait plus compliquée et moins transparente.

3.2. APPLICATION DE LORENZ

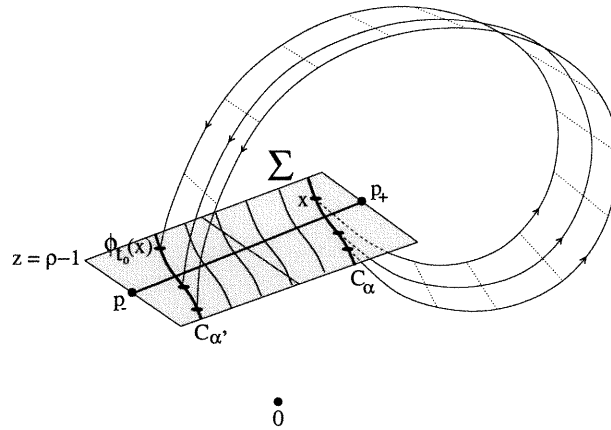
Avant de nous lancer dans l'étude des bifurcations du système de Lorenz, nous allons tout d'abord introduire une application qui nous permettra de conclure sur la nature chaotique de ce système.

Définissons tout d'abord le plan Σ comme étant le plan $z = \rho - 1$ contenant les deux points singuliers p_+ et p_- . Le plan Σ contient le segment $K = [p_-, p_+]$. On veut définir une application de premier retour du segment K dans lui-même. Nous appellerons cette application l'application de Lorenz. Cette dernière proviendra d'une projection adéquate sur le segment K d'une application de premier retour de Σ dans lui-même.

Notons que pour bien définir l'application de Lorenz, nous devrions considérer des feuilletages invariants pour la projection de l'application de premier retour dans une seule dimension. Pour ce faire, on commence par se donner un feuilletage "adéquat" de Σ , c'est-à-dire une partition de Σ en courbes disjointes $\{C_\alpha\}$ bien choisies, transversales au segment $[p_-, p_+]$. Par la suite, on se sert de ces courbes pour construire un feuilletage \mathcal{F} de l'espace, chaque feuille étant l'union de toutes les trajectoires ayant les conditions initiales sur une courbe C_α de Σ . À priori, si les courbes C_α sont quelconques, rien n'indique que le premier retour des feuilles intersecte Σ selon les courbes C_α .

La condition géométrique qui permet de se réduire à une application d'un espace de dimension un dans lui-même est l'existence du feuilletage \mathcal{F} intersectant Σ selon les courbes C_α . Plus précisément, $\mathcal{F} \cap \Sigma = \{C_\alpha \mid \alpha \in [p_-, p_+]\}$ tel que pour tout $C_\alpha \in \mathcal{F} \cap \Sigma$, il existe un $C_{\alpha'} \in \mathcal{F} \cap \Sigma$ tel que pour tout $x \in C_\alpha$, il existe un $t_0 \in \mathbb{R}^+$ (t_0 dépend de x) tel que $\phi_{t_0}(x) \in C_{\alpha'}$ et tel que $\phi_t(x) \notin \Sigma$, pour tout $t \in [0, t_0)$ (voir la figure 3.2.1).

Intuitivement, pour construire l'application de Lorenz, on considère l'application de premier retour de Σ dans Σ et on projette sur K le long des courbes du feuilletage. La fonction $\mathcal{L} : K \rightarrow K$ ainsi engendrée sera notre application de Lorenz (voir la figure 3.2.2). Notons que nous n'avons pas vu de preuve de l'existence d'un tel feuilletage. Le livre de [G-H] affirme sans preuve l'existence de cette application (dans la section 2.3) et s'en sert.

FIG. 3.2.1. Feuilletage invariant intersectant Σ

3.3. BIFURCATIONS DANS LE SYSTÈME DE LORENZ

Nous allons maintenant faire varier le paramètre ρ et étudier les différentes bifurcations du système de Lorenz au fur et à mesure que ρ augmente.

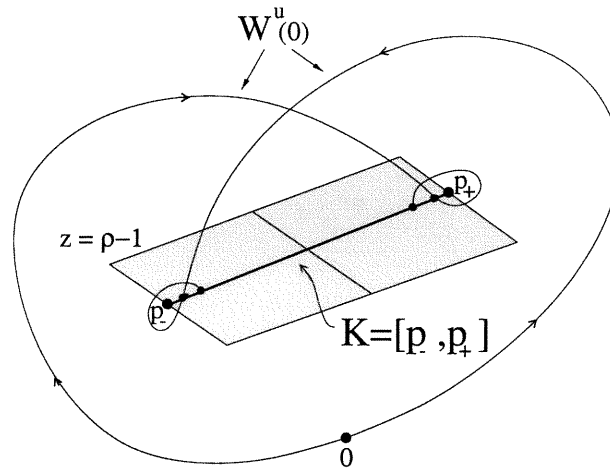
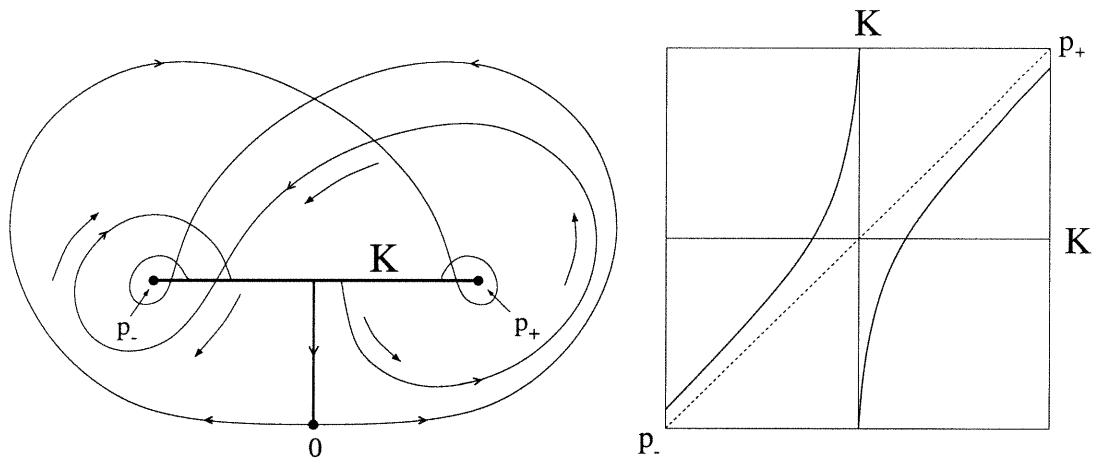
3.3.1. Bifurcation de la fourche (en $\rho = 1$)

Comme nous l'avons présenté à la proposition 3.1.1, il se produit une bifurcation à $\rho = 1$. Nous allons maintenant en étudier les propriétés. Tout d'abord, cherchons les points singuliers du système 3.1.1 en fixant $\sigma = 10$ et $\beta = \frac{8}{3}$. Pour ce faire, considérons la fonction

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} F_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) \\ F_3(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10(y - x) \\ \rho x - y - xz \\ -\frac{8}{3}z + xy \end{pmatrix}$$

et cherchons ses points singuliers dépendamment de ρ . On remarque d'emblée que $F_1(x, y, z) = 0$ si et seulement si $x = y$. Ainsi, $F_2(x, y, z) = \rho x - x - xz = x(\rho - 1 - z) = 0$ implique que $x = 0$ ou $z = \rho - 1$. Or, $F_3(x, y, z) = -\frac{8}{3}z + x^2 = 0$ si et seulement si $x^2 = \frac{8}{3}z$. On a donc deux cas à considérer :

- (1) Si $x = 0$, alors $y = 0$ et $z = 0$.
- (2) Si $z = \rho - 1$, alors $x^2 = \frac{8}{3}(\rho - 1)$. Pour l'existence d'autres points singuliers, il faut donc que $\rho > 1$. Dans ce cas, $x = y = \pm \sqrt{\frac{8}{3}(\rho - 1)}$.

(a) Orbite dans \mathbb{R}^3 

(b) Dessin schématique

(c) Application de Lorenz

FIG. 3.2.2. Construction de l'application de Lorenz

On obtient ainsi les points p_{\pm} de la proposition 3.1.1

$$p_+ = \left(\sqrt{\frac{8}{3}(\rho - 1)}, \sqrt{\frac{8}{3}(\rho - 1)}, \rho - 1 \right) \text{ et } p_- = \left(-\sqrt{\frac{8}{3}(\rho - 1)}, -\sqrt{\frac{8}{3}(\rho - 1)}, \rho - 1 \right).$$

L'appellation "bifurcation de la fourche" vient de l'apparition des deux nouveaux points d'équilibres p_+ et p_- symétriques par rapport à un certain axe dans le plan $z = \rho - 1$ (voir la figure 3.3.1).

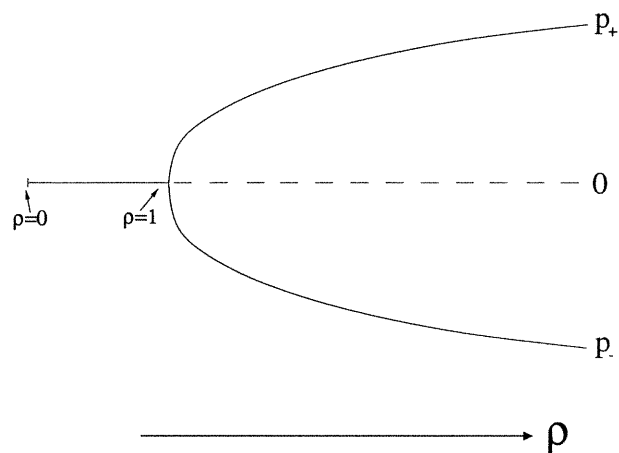
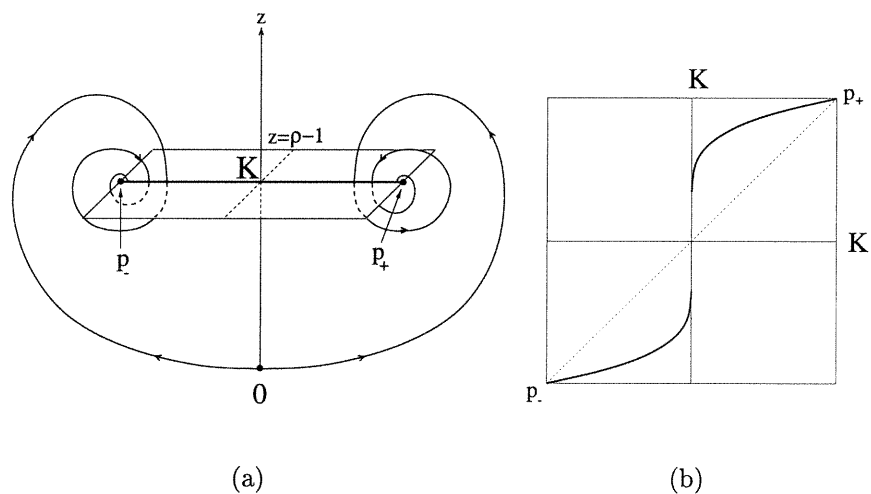


FIG. 3.3.1. Bifurcation de la fourche

FIG. 3.3.2. Système de Lorenz (a) et graphe de l'application de Lorenz (b) pour $\rho \in (1, 13.926)$

3.3.2. Bifurcation homoclinique (en $\rho \cong 13.926$)

Nous allons énoncer ici une proposition concernant l'apparition de cycles limites au moment de la bifurcation homoclinique.

Proposition 3.3.1. *Lorsque le paramètre ρ franchit 13.926, il y a apparition de deux nouveaux cycles limites.*

“DÉMONSTRATION”. Nous voulons appliquer le théorème de Shil’nikov, mais nous ne pouvons vérifier rigoureusement que (H.1) et (H.5). Les autres hypothèses doivent être vérifiées numériquement.

Donc, tout d’abord, on remarque que $13.926 \notin \mathcal{R}$, où \mathcal{R} est l’ensemble de l’équation (3.1.4). Alors, par la proposition 3.1.2, le système 3.1.3 peut se ramener, par un difféomorphisme de classe C^1 au système suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =: F_\rho(x, y, z).$$

Nous remarquons également que nous sommes, en posant $\varepsilon = \rho - 13.926$, sous les hypothèses du théorème 1.2.1. En effet, la fonction F_ρ est de classe C^1 , $\lambda_1(0) > 0 > \lambda_2(0) > \lambda_3(0)$, $\sigma_0 = \lambda_1(0) + \lambda_2(0) > 0$, Γ_0 est simple (se vérifie numériquement) et revient en 0 le long de l’espace propre principal (se vérifie numériquement). Notons que l’hypothèse (H.4) du théorème peut également se vérifier numériquement. Géométriquement, lorsque $\varepsilon > 0$ c’est-à-dire lorsque $\rho > 13.926$, alors $\beta(\varepsilon) > 0$. Ainsi, par le théorème de Shil’nikov, le cycle limite apparaît lorsque $\varepsilon > 0$. Par la symétrie du système de Lorenz, il y a naissance de deux nouveaux cycles limites (notés L_β^* et L_β) lorsque ρ traverse 13.926 (voir la figure 3.3.4).

Notons ici que nous n’avons pas une démonstration rigoureuse, mais seulement une justification numérique. □

Remarque 3.3.1. *Ces deux cycles limites se voient comme deux nouveaux points fixes r_- et r_+ de l’application de Lorenz (voir la figure 3.3.4(c)).*

3.3.3. Bifurcation d’apparition du chaos (en $\rho \cong 24.06$)

Nous allons maintenant montrer que lorsque le paramètre ρ franchit la valeur 24.06, le système de Lorenz devient chaotique. Cette bifurcation s’ajoute aux bifurcations de codimension 1 citées plus couramment. Pour démontrer la

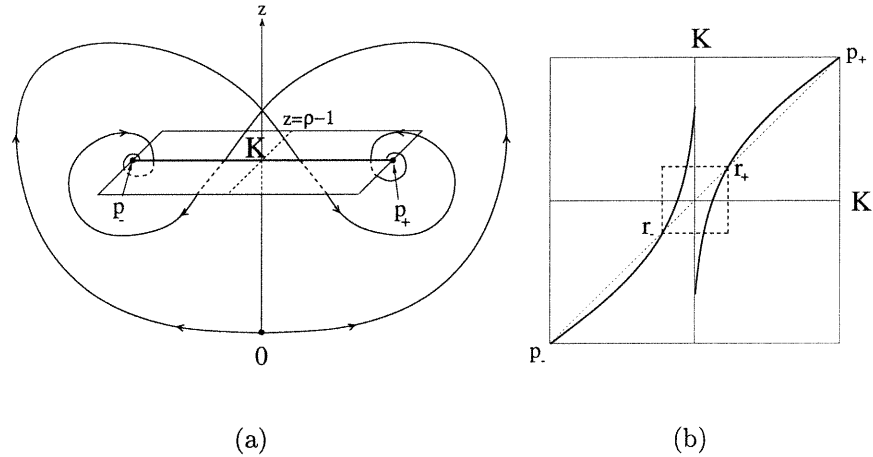


FIG. 3.3.3. Système de Lorenz (a) et graphe de l'application de Lorenz (b) pour $\rho \in (13.926, 24.06)$

présence du chaos dans ce système, nous allons étudier la dynamique discrète de l'application de Lorenz à cette valeur spécifique de ρ .

Ainsi, soit la figure 3.3.5(a) et considérons la restriction de l'application de Lorenz à l'ensemble $J = [r_-, r_+]$, où r_- et r_+ sont les deux points fixes de l'application de Lorenz pour $\rho > 13.926$. À cause de la symétrie $r_- = -r_+$, posons $\mathcal{L}(0) = r_+$ sans perte d'information sur la dynamique de \mathcal{L} . On obtient ainsi l'application $\mathcal{L} : J \rightarrow J$ que l'on peut voir à la figure 3.3.5(b). Notons que $\mathcal{L}_0 := \inf_{\xi \in J \setminus \{0\}} \{\mathcal{L}'(\xi)\} > 1$. Pour plus de détails sur les graphiques de l'application de Lorenz et sur la manière de les obtenir, voir dans [S].

La démonstration de la proposition suivante est propre à ce mémoire et nous ne savons pas s'il existe d'autre preuve dans la littérature.

Proposition 3.3.2. *L'application $\mathcal{L} : J \rightarrow J$ est chaotique.*

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, considérons l'homéomorphisme

$$\gamma : J \rightarrow I : x \mapsto \gamma(x) = \frac{x + r_+}{2r_+}, \text{ où } I = [0, 1]$$

et définissons une nouvelle application comme suit :

$$f : I \rightarrow I : x \mapsto \gamma \circ \mathcal{L} \circ \gamma^{-1}(x).$$

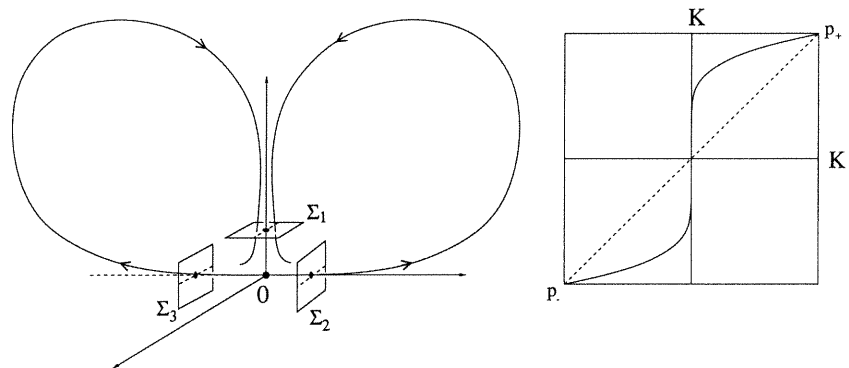
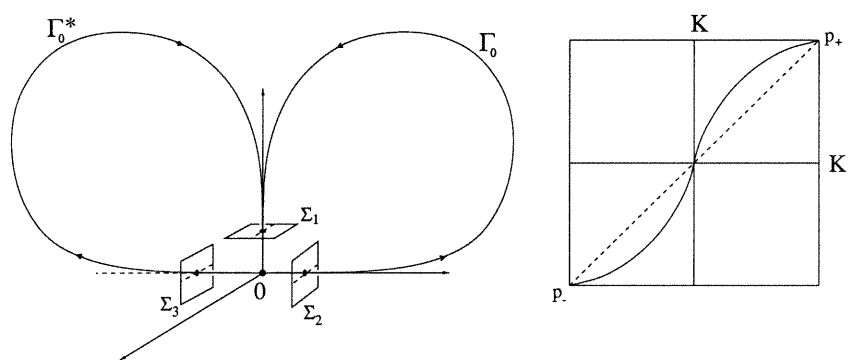
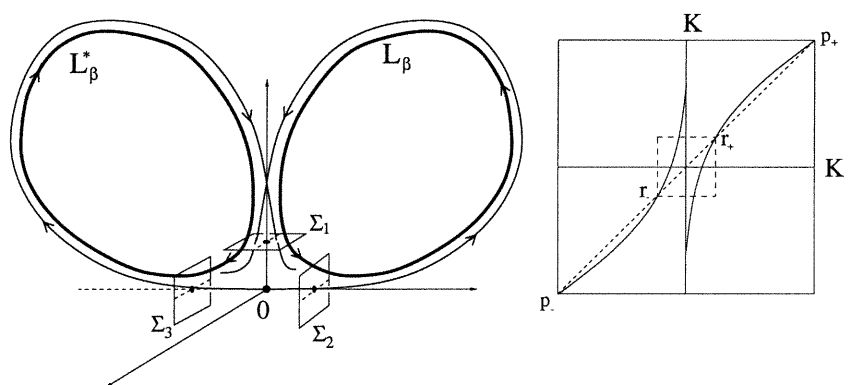
(a) $\rho < 13.926$ (b) $\rho \cong 13.926$ (c) $\rho > 13.926$

FIG. 3.3.4. Bifurcation homoclinique dans le système de Lorenz autour de boucles simples

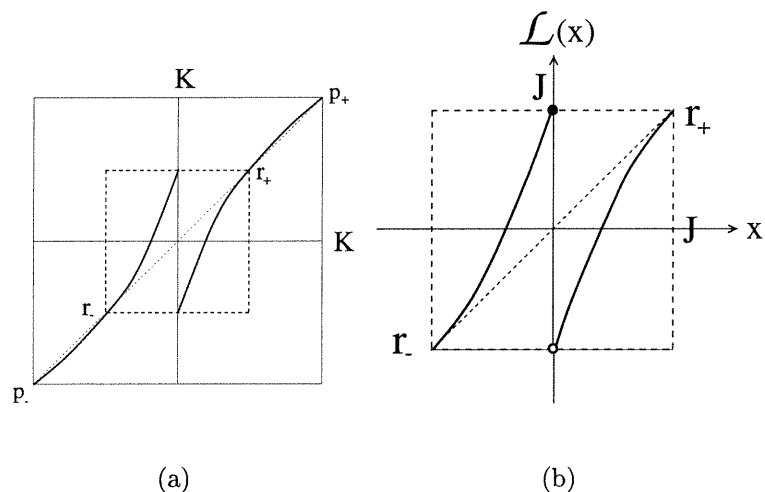


FIG. 3.3.5. Graphe de l'application de Lorenz pour $\rho \cong 24.06$

Par définition, les applications $\mathcal{L} : J \rightarrow J$ et $f : I \rightarrow I$ sont topologiquement conjuguées via l'homéomorphisme γ (voir la figure 3.3.6).

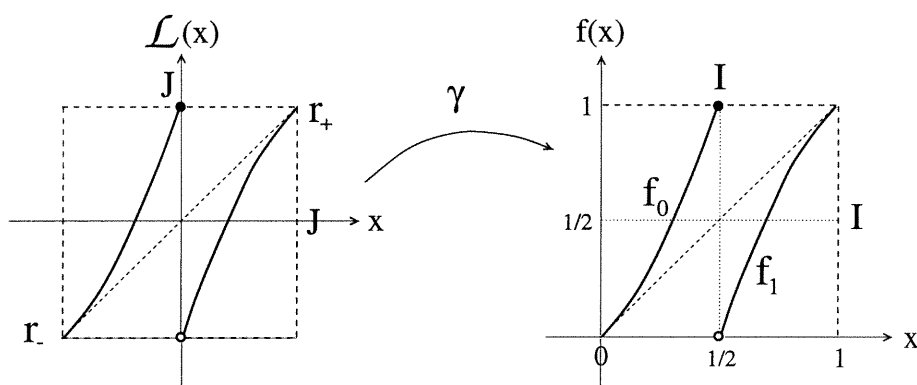


FIG. 3.3.6. Équivalence topologique de $\mathcal{L} : J \rightarrow J$ et de $f : I \rightarrow I$.

À partir de maintenant, nous allons travailler avec $f : I \rightarrow I$. Pour la démonstration, nous allons construire un homéomorphisme φ qui conjuguera topologiquement f et l'application de Baker

$$B(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2x - 1 & \text{si } x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \quad (3.3.1)$$

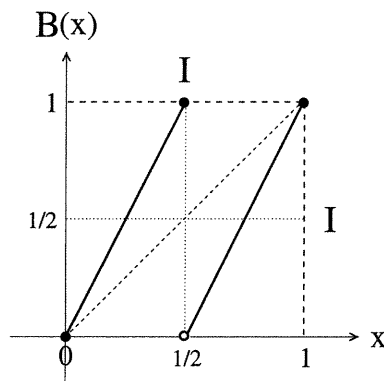


FIG. 3.3.7. Application de Baker

Posons $A_n = \{\frac{k}{2^n} \mid k = 1, 2, \dots, 2^n - 1\}$, pour tout $n \geq 1$. Alors, on obtient

$$A_1 = \{\frac{1}{2}\}$$

$$A_2 = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$$

$$A_3 = \{\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}\} \dots$$

1) CONSTRUCTION DE $\varphi : \bigcup_{n \geq 1} A_n \rightarrow \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(\frac{1}{2})$

On remarque que $\bigcup_{n \geq 1} A_n$ est dense dans $I = [0, 1]$ et que $A_n \subset A_{n+1}$. Nous allons nous servir de ces derniers faits pour construire une application $\varphi : \bigcup_{n \geq 1} A_n \rightarrow \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(\frac{1}{2})$ continue que nous pourrions prolonger sur tout l'ensemble I .

Nous allons définir φ sur tous les A_n par récurrence. Tout d'abord, remarquons que l'on peut séparer $f : I \rightarrow I$ en deux homéomorphismes $f_0 : I_0 \rightarrow I$ et $f_1 : I_1 \rightarrow (0, 1]$ où $I_0 = [0, \frac{1}{2}]$ et $I_1 = (\frac{1}{2}, 1]$ (voir le schéma de droite de la figure 3.3.6).

On définit ainsi

$$\varphi : A_1 \rightarrow f^0(\frac{1}{2}) = \{\frac{1}{2}\} : \frac{1}{2} \mapsto \frac{1}{2}$$

et

$$\varphi : A_2 \rightarrow f^0\left(\frac{1}{2}\right) \cup f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) : \begin{cases} \frac{1}{4} \mapsto f_0^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{2} \mapsto \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \mapsto f_1^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) . \end{cases}$$

Supposons maintenant que $\varphi : A_n \rightarrow I$ est bien défini et construisons $\varphi : A_{n+1} \rightarrow I$ sur la base de notre hypothèse. Nous allons procéder en deux étapes :

(1) Si $x \in A_{n+1} \cap I_0$, alors il existe un $k_x \in \{0, 1, \dots, 2^n\}$ tel que $x = \frac{k_x}{2^{n+1}}$.

Ainsi, on pose

$$\varphi(x) = \varphi\left(\frac{k_x}{2^{n+1}}\right) = f_0^{-1} \circ \varphi\left(\frac{k_x}{2^n}\right) = f_0^{-1} \circ \varphi \circ B(x). \quad (3.3.2)$$

Comme $\frac{k_x}{2^n} \in A_n$, on a que $\varphi : A_{n+1} \cap I_0$ est bien défini.

(2) Si $x \in A_{n+1} \cap I_1$, alors il existe un $k_x \in \{2^n + 1, \dots, 2^{n+1} - 1\}$ tel que $x = \frac{k_x}{2^{n+1}}$. Ainsi, on pose

$$\varphi(x) = \varphi\left(\frac{k_x}{2^{n+1}}\right) = f_1^{-1} \circ \varphi\left(\frac{k_x}{2^n} - 1\right) = f_1^{-1} \circ \varphi \circ B(x). \quad (3.3.3)$$

Comme $\frac{k_x}{2^n} \in A_n$, on a que $\varphi : A_{n+1} \cap I_1$ est bien défini.

Ainsi, pour tout $x \in \bigcup_{n \geq 0} A_n$, on a que $\varphi(x)$ est bien défini. On peut alors considérer la fonction

$$\varphi : \bigcup_{n \geq 1} A_n \rightarrow \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Exemple 3.3.1. Soit $\frac{5}{16} \in A_4 \cap I_0$. Ainsi,

$$\varphi\left(\frac{5}{16}\right) = f_0^{-1} \circ \varphi \circ B\left(\frac{5}{16}\right) = f_0^{-1} \circ \varphi\left(\frac{5}{8}\right).$$

Or, $\frac{5}{8} \in A_3 \cap I_1$ et donc

$$\varphi\left(\frac{5}{8}\right) = f_1^{-1} \circ \varphi \circ B\left(\frac{5}{8}\right) = f_1^{-1} \circ \varphi\left(\frac{1}{4}\right) = f_1^{-1}[f_0^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)]$$

ce qui implique que

$$\varphi\left(\frac{5}{16}\right) = f_0^{-1} \circ f_1^{-1} \circ f_0^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \in f^{-3}\left(\frac{1}{2}\right).$$

De manière générale, il est facile de démontrer que si $x \in A_n$, alors $\varphi(x) \in \bigcup_{k=0}^{n-1} f^{-k}(\frac{1}{2})$ ce qui implique que

$$\varphi\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) \subseteq \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}\left(\frac{1}{2}\right).$$

2) $\varphi : \bigcup_{n \geq 1} A_n \rightarrow \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(\frac{1}{2})$ EST STRICTEMENT CROISSANTE

On remarque tout d'abord que $f_0 : I_0 \rightarrow I$ et $f_1 : I_1 \rightarrow (0, 1]$ sont strictement croissantes ce qui implique que $f_0^{-1} : I \rightarrow I_0$ et $f_1^{-1} : (0, 1] \rightarrow I_1$ sont également strictement croissantes. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$x, y \in A_n \text{ tel que } x < y \implies \varphi(x) < \varphi(y). \quad (3.3.4)$$

En effet, (3.3.4) est vrai pour $n = 1$, car $\varphi(0) = 0 < \frac{1}{2} = \varphi(\frac{1}{2})$. Supposons maintenant que (3.3.4) est vrai pour $n = N$ et montrons que (3.3.4) est vrai pour $n = N + 1$. Pour ce faire, nous allons considérer trois cas.

(1) 1^{er} cas : $x, y \in I_0$

Alors, il existe $k_x, k_y \in \{0, 1, \dots, 2^N\}$ tels que $x = \frac{k_x}{2^{N+1}}$ et $y = \frac{k_y}{2^{N+1}}$, car $x, y \in A_{N+1}$. Par conséquent, par (3.3.2), on a que

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi\left(\frac{k_x}{2^{N+1}}\right) = f_0^{-1}\left[\varphi\left(\frac{k_x}{2^N}\right)\right] \\ \text{et } \varphi(y) &= \varphi\left(\frac{k_y}{2^{N+1}}\right) = f_0^{-1}\left[\varphi\left(\frac{k_y}{2^N}\right)\right]. \end{aligned}$$

Comme $x < y$, alors $\frac{k_x}{2^{N+1}} < \frac{k_y}{2^{N+1}}$. On remarque ainsi que $\frac{k_x}{2^N}, \frac{k_y}{2^N} \in A_N$ et que $\frac{k_x}{2^N} < \frac{k_y}{2^N}$ ce qui implique par l'hypothèse de récurrence que $\varphi(\frac{k_x}{2^N}) < \varphi(\frac{k_y}{2^N})$. Comme f_0^{-1} est strictement croissante, alors on obtient que

$$\varphi(x) = f_0^{-1}\left[\varphi\left(\frac{k_x}{2^N}\right)\right] < f_0^{-1}\left[\varphi\left(\frac{k_y}{2^N}\right)\right] = \varphi(y).$$

(2) 2^e cas : $x \in I_0$ et $y \in I_1$

Par (3.3.2), on a que $\varphi(x) = f_0^{-1}[\varphi \circ B(x)] \in I_0 = [0, \frac{1}{2}]$ et par (3.3.3), on a que $\varphi(y) = f_1^{-1}[\varphi \circ B(y)] \in I_1 = (\frac{1}{2}, 1]$ d'où le fait que $\varphi(x) < \varphi(y)$.

(3) 3^e cas : $x, y \in I_1$

Alors, il existe $k_x, k_y \in \{2^N + 1, \dots, 2^{N+1} - 1\}$ tels que $x = \frac{k_x}{2^{N+1}}$ et $y = \frac{k_y}{2^{N+1}}$, car $x, y \in A_{N+1}$. Par conséquent, par (3.3.3), on a que

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi\left(\frac{k_x}{2^{N+1}}\right) = f_1^{-1}\left[\varphi\left(\frac{k_x}{2^N} - 1\right)\right] \\ \text{et } \varphi(y) &= \varphi\left(\frac{k_y}{2^{N+1}}\right) = f_1^{-1}\left[\varphi\left(\frac{k_y}{2^N} - 1\right)\right].\end{aligned}$$

Comme $x < y$, alors $\frac{k_x}{2^{N+1}} < \frac{k_y}{2^{N+1}}$. On remarque ainsi que $\frac{k_x}{2^N} - 1, \frac{k_y}{2^N} - 1 \in A_N$ et que $\frac{k_x}{2^N} - 1 < \frac{k_y}{2^N} - 1$ ce qui implique par l'hypothèse de récurrence que $\varphi\left(\frac{k_x}{2^N} - 1\right) < \varphi\left(\frac{k_y}{2^N} - 1\right)$. Comme f_1^{-1} est strictement croissante, alors on obtient que

$$\varphi(x) = f_1^{-1}\left[\varphi\left(\frac{k_x}{2^N} - 1\right)\right] < f_1^{-1}\left[\varphi\left(\frac{k_y}{2^N} - 1\right)\right] = \varphi(y).$$

Ainsi, (3.3.4) s'avère vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que

$$x, y \in A_n = \bigcup_{k=1}^n A_k \text{ tels que } x < y \implies \varphi(x) < \varphi(y).$$

Maintenant, soient $x, y \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ tels que $x < y$. Alors il existe n_1, n_2 tels que $x \in A_{n_1}$ et $y \in A_{n_2}$. En posant $N = \max\{n_1, n_2\}$, on a que $x, y \in A_N$. Or, comme l'équation (3.3.4) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors en particulier, elle est vraie pour N ce qui implique que $\varphi(x) < \varphi(y)$. Par conséquent, $\varphi : \bigcup_{n \geq 1} A_n \rightarrow \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}\left(\frac{1}{2}\right)$ est une fonction strictement croissante.

3) $\varphi : \bigcup_{n \geq 1} A_n \rightarrow \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}\left(\frac{1}{2}\right)$ EST UNIFORMÉMENT CONTINUE

Tout d'abord, rappelons le fait que $\mathcal{L}_0 = \inf_{\xi \in \mathcal{J} \setminus \{0\}} \{\mathcal{L}'(\xi)\} > 1$ ce qui implique que

$$\sup_{\xi \in I} \{(f_0^{-1})'(\xi), (f_1^{-1})'(\xi)\} = \frac{1}{\mathcal{L}_0} < 1.$$

Notons également que l'on peut prolonger $f_1 : \left(\frac{1}{2}, 1\right] \rightarrow I$ sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ en posant $f_1\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ ce qui implique que $f_1^{-1}(0) = \frac{1}{2}$.

Soient $x, y \in \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}\left(\frac{1}{2}\right)$. Alors il existe un plus petit $N \in \mathbb{N}$ tel que $x, y \in A_N$. Supposons que $|x - y| < \frac{1}{2^{N-1}}$ ce qui implique qu'il existe un $k \in \{1, 2, \dots, 2^N - 2\}$

tel que $x = \frac{k}{2^N} := a_k$ et $y = \frac{k+1}{2^N} := a_{k+1}$. Posons

$$\varepsilon_N = \max_{k \in \{1, \dots, 2^N - 2\}} \left\{ \varphi\left(\frac{k+1}{2^N}\right) - \varphi\left(\frac{k}{2^N}\right) \right\}$$

et on remarque que $\varepsilon_N > 0$, car φ est strictement croissante. Montrons que $\varepsilon_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$. Soit $\varphi(a_{k+1}) - \varphi(a_k) = f_{s_0}^{-1}[\varphi \circ B(a_{k+1})] - f_{s_0}^{-1}[\varphi \circ B(a_k)]$, où $s_0 \in \{0, 1\}$ dépendamment de la position de y . Par le théorème de la moyenne, il existe $\xi_0 \in]a_k, a_{k+1}[$ tel que

$$\begin{aligned} \varphi(a_{k+1}) - \varphi(a_k) &= f_{s_0}^{-1}[\varphi \circ B(a_{k+1})] - f_{s_0}^{-1}[\varphi \circ B(a_k)] \\ &= (f_{s_0}^{-1})'(\xi_0) \cdot |\varphi(a_{k_1+1}^1) - \varphi(a_{k_1}^1)| \\ &< \frac{1}{\mathcal{L}_0} \cdot |\varphi(a_{k_1+1}^1) - \varphi(a_{k_1}^1)|, \end{aligned}$$

où $a_{k_1}^1 = B(a_k)$, $a_{k_1+1}^1 = B(a_{k+1}) \in A_{N-1}$. On recommence le même travail pour obtenir l'existence d'un $\xi_1 \in]a_{k_2}^2, a_{k_2+1}^2[$ tel que

$$\begin{aligned} \varphi(a_{k_1+1}^1) - \varphi(a_{k_1}^1) &= f_{s_1}^{-1}[\varphi \circ B(a_{k_1+1}^1)] - f_{s_1}^{-1}[\varphi \circ B(a_{k_1}^1)] \\ &= (f_{s_1}^{-1})'(\xi_1) \cdot |\varphi(a_{k_2+1}^2) - \varphi(a_{k_2}^2)| \\ &< \frac{1}{\mathcal{L}_0} \cdot |\varphi(a_{k_2+1}^2) - \varphi(a_{k_2}^2)|, \end{aligned}$$

où $a_{k_2}^2, a_{k_2+1}^2 \in A_{N-2}$. On obtient ainsi que

$$\varphi(a_{k+1}) - \varphi(a_k) < \frac{1}{\mathcal{L}_0^2} \cdot |\varphi(a_{k_2+1}^2) - \varphi(a_{k_2}^2)|.$$

On procède par récurrence pour obtenir le fait que

$$\varphi(a_{k+1}) - \varphi(a_k) < \frac{1}{\mathcal{L}_0^{N-1}} \cdot \left| \varphi\left(\frac{1}{2}\right) - \varphi(0) \right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mathcal{L}_0^{N-1}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Notons que nous n'avons pas considéré le cas où il existe un $m_0 \in \{1, 2, \dots, N-1\}$ tel que $a_{k_{m_0}}^{m_0} = \frac{1}{2}$ ou $a_{k_{m_0}+1}^{m_0} = \frac{1}{2}$. Dans ce cas, on se sert du fait que $f_0^{-1}(1) = f_1^{-1}(0) = \frac{1}{2}$, que $(f_0^{-1})^n(\frac{1}{2}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et que $(f_1^{-1})^n(\frac{1}{2}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ (voir la figure 3.3.8).

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \varphi(a_{k+1}) - \varphi(a_k) &< \frac{1}{\mathcal{L}_0^{m_0}} \cdot |(f_0^{-1})^{N-1-m_0}\left(\frac{1}{2}\right)| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \\ \text{ou } \varphi(a_{k+1}) - \varphi(a_k) &< \frac{1}{\mathcal{L}_0^{m_0}} \cdot |(f_1^{-1})^{N-1-m_0}\left(\frac{1}{2}\right) - 1| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

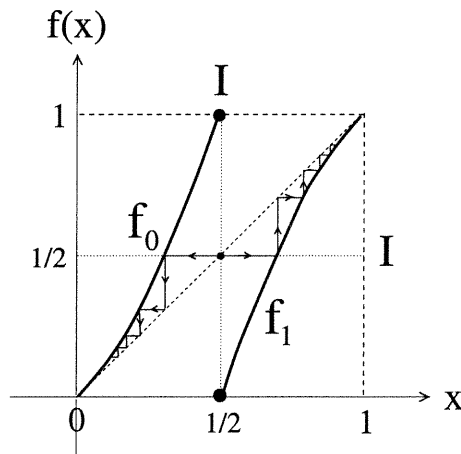


FIG. 3.3.8. Itérations de $\frac{1}{2}$ par f_0^{-1} et f_1^{-1}

Par conséquent,

$$\varepsilon_N = \max_{k \in \{1, \dots, 2^N - 2\}} \left\{ \varphi\left(\frac{k+1}{2^N}\right) - \varphi\left(\frac{k}{2^N}\right) \right\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Nous sommes maintenant prêt à démontrer que $\varphi : \bigcup_{n \geq 1} A_n \rightarrow \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(\frac{1}{2})$ est uniformément continue.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe un n_ε tel que $\varepsilon_{n_\varepsilon} < \varepsilon$. Posons $\delta_\varepsilon = \frac{1}{2^{n_\varepsilon+1}}$ et soient $x, y \in \bigcup_{n \geq 1} A_n$ tels que $|x - y| < \delta_\varepsilon = \frac{1}{2^{n_\varepsilon+1}}$. Ainsi, il existe $x_0, y_0 \in A_{n_\varepsilon}$ tels que $\frac{k_0}{2^{n_\varepsilon}} = x_0 \leq x < y \leq y_0 = \frac{k_0+1}{2^{n_\varepsilon}}$. Comme φ est strictement croissante, on obtient que $\varphi(\frac{k_0}{2^{n_\varepsilon}}) = \varphi(x_0) \leq \varphi(x) < \varphi(y) \leq \varphi(y_0) = \varphi(\frac{k_0+1}{2^{n_\varepsilon}})$ et donc

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \left| \varphi\left(\frac{k_0+1}{2^{n_\varepsilon}}\right) - \varphi\left(\frac{k_0}{2^{n_\varepsilon}}\right) \right| \leq \varepsilon_{n_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Ainsi, $\varphi : \bigcup_{n \geq 1} A_n \rightarrow \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(\frac{1}{2})$ est uniformément continue.

4) PROLONGEMENT DE φ EN UNE FONCTION CONTINUE SUR I

On veut maintenant prolonger φ en une fonction continue sur I . Tout d'abord, comme $\bigcup_{n \geq 1} A_n$ est dense dans I , si $y \in I$, alors il existe une suite $\{y_k\}_{k \geq 0}$ dans $\bigcup_{n \geq 1} A_n$ tel que $y_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y$. Or, comme $\varphi : \bigcup_{n \geq 1} A_n \rightarrow \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(\frac{1}{2})$ est uniformément continue, l'image par φ d'une suite de Cauchy est une suite de Cauchy. Supposons maintenant qu'il existe une autre suite $\{z_k\}_{k \geq 0}$ dans $\bigcup_{n \geq 1} A_n$ tel que

$z_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} y$. Alors, $\{y_k\}_{k \geq 0}$ et $\{z_k\}_{k \geq 0}$ sont des sous-suites de la suite $\{w_k\}_{k \geq 0} = \{y_1, z_1, y_2, z_2, \dots, y_k, z_k, \dots\}$ qui est de Cauchy. Donc, la suite $\{\varphi(w_k)\}_{k \geq 0}$ converge ce qui implique que $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(y_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(z_k)$.

Ainsi, on peut poser

$$\varphi(y) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(y_k)$$

ce qui implique que l'on peut prolonger φ sur I . De plus, on note que $\varphi(\bigcup_{n \geq 1} A_n)$ est dense dans I . En effet, soit $x \in [0, 1] = I$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_{k_n}, a_{k_n+1} \in A_n$ consécutifs tels que $\varphi(a_{k_n}) < x < \varphi(a_{k_n+1})$ ce qui implique que $\varphi(a_{k_n}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$. Nous sommes maintenant prêt à montrer que le prolongement $\varphi : I \rightarrow I$ est continue.

Supposons que φ n'est pas continue en $x_0 \in I$. Alors, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, il existe un $x \in I$ tel que $|x - x_0| < \frac{\delta}{3}$ et $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| > \varepsilon$. Pour ce ε , il existe δ_1 tel que pour tout $y, y' \in \bigcup_{n \geq 1} A_n$, $|y - y'| < \delta_1$ implique que $|\varphi(y) - \varphi(y')| < \frac{\varepsilon}{3}$, car $\varphi : \bigcup_{n \geq 1} A_n \rightarrow \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(\frac{1}{2})$ est uniformément continue.

Posons $\delta = \frac{\delta_1}{3}$. Par densité de $\bigcup_{n \geq 1} A_n$, il existe deux suites $\{u_k\}_{k \geq 0}$ et $\{v_k\}_{k \geq 0}$ dans $\bigcup_{n \geq 1} A_n$ telles que $u_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x$ et $v_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x_0$. On prend n_1 et n_2 assez grands pour que $|u_{n_1} - x|, |v_{n_2} - x_0| < \frac{\delta_1}{3}$ ce qui implique que

$$\begin{aligned} |u_{n_1} - v_{n_2}| &= |(u_{n_1} - x) + (x - x_0) + (-v_{n_2} + x_0)| \\ &\leq |u_{n_1} - x| + |x - x_0| + |v_{n_2} - x_0| \\ &< \frac{\delta_1}{3} + \frac{\delta_1}{3} + \frac{\delta_1}{3} = \delta_1. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} |\varphi(u_{n_1}) - \varphi(v_{n_2})| &= |[\varphi(u_{n_1}) - \varphi(x)] + [\varphi(x) - \varphi(x_0)] + [-\varphi(v_{n_2}) + \varphi(x_0)]| \\ &\geq |\varphi(x) - \varphi(x_0)| - |\varphi(u_{n_1}) - \varphi(x)| - |\varphi(v_{n_2}) - \varphi(x_0)| \\ &\geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Contradiction avec le fait que $\varphi : \bigcup_{n \geq 1} A_n \rightarrow \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(\frac{1}{2})$ est uniformément continue. Donc, $\varphi : I \rightarrow I$ est continue.

5) $\varphi : I \rightarrow I$ EST UN HOMÉOMORPHISME

Maintenant, soient $x, y \in I$ tels que $x < y$. Par densité de $\bigcup_{n \geq 1} A_n$, il existe $a_1, a_2 \in \bigcup_{n \geq 1} A_n$ tels que $x < a_1 < a_2 < y$ et il existe deux suites $\{x_n\}, \{y_n\} \subset \bigcup_{n \geq 0} A_n$ tels que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$ et $y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} y$. Ainsi, il existe un N tel que $x_n < a_1 < a_2 < y_n$ pour tout $n > N$ ce qui implique que pour tout $n > N$, on a que

$$\varphi(x_n) < \varphi(a_1) < \varphi(a_2) < \varphi(y_n).$$

En passant à la limite, on obtient que

$$\varphi(x) \leq \varphi(a_1) < \varphi(a_2) \leq \varphi(y)$$

ce qui implique que $\varphi(x) < \varphi(y)$. Par conséquent, l'extension $\varphi : I \rightarrow I$ est une fonction continue strictement croissante et donc, $\varphi : I \rightarrow I$ est un homéomorphisme.

6) f ET B SONT TOPOLOGIQUEMENT CONJUGUÉES

Rappelons que B représente l'application de Baker donnée par l'équation (3.3.1). Montrons maintenant que $f \circ \varphi = \varphi \circ B$. Pour ce faire, nous allons une fois de plus séparer les cas :

(1) 1^{er} cas : $x \in I_0$

On peut choisir une suite $\{x_n\} \subset \bigcup_{n \geq 1} A_n$ telle que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x \in I_0$ et telle que à partir d'un certain N , $x_n \in I_0$. Alors, pour tout $n > N$, $\varphi(x_n) = f_0^{-1} \circ \varphi \circ B(x_n)$. En passant à la limite de chaque côté, on obtient que $\varphi(x) = f_0^{-1} \circ \varphi \circ B(x)$

(2) 2^e cas : $x \in I_1$

On peut choisir une suite $\{x_n\} \subset \bigcup_{n \geq 1} A_n$ telle que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x \in I_1$ et telle que à partir d'un certain N , $x_n \in I_1$. Alors, pour tout $n > N$, $\varphi(x_n) = f_1^{-1} \circ \varphi \circ B(x_n)$. En passant à la limite de chaque côté, on obtient que $\varphi(x) = f_1^{-1} \circ \varphi \circ B(x)$

Comme cela fonctionne pour f_0^{-1} et pour f_1^{-1} , alors $f \circ \varphi(x) = \varphi \circ B(x)$ pour tout $x \in I$. Ainsi, $f : I \rightarrow I$ et $B : I \rightarrow I$ sont topologiquement conjugués.

7) \mathcal{L} EST CHAOTIQUE

Ainsi, on obtient plusieurs diagrammes commutatifs où γ et φ^{-1} sont des homéomorphismes et π est une projection surjective (voir la figure 3.3.9). Nous avons démontré au chapitre précédent que $g : S^1 \rightarrow S^1 : \theta \mapsto 2\theta$ est chaotique et que B et g sont semi-conjugués. Ainsi, $\mathcal{L} : J \rightarrow J$ est chaotique.

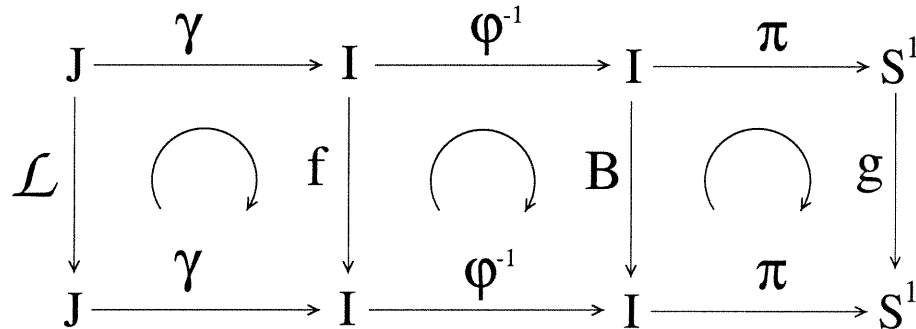


FIG. 3.3.9. Diagrammes commutatifs

□

Maintenant, comme $\mathcal{L} : J \rightarrow J$ est chaotique, alors $\mathcal{L} : K \rightarrow K$ est chaotique, où $K = [p_-, p_+]$. De plus, la projection effectuée à la figure 3.2.2 étant surjective, on peut ainsi conclure que le système de Lorenz est chaotique lorsque $\rho \cong 24.06$.

3.3.4. Bifurcation de Hopf (en $\rho \cong 24.74$)

Cette section est une étude du changement de la stabilité des points d'équilibres

$$p_{\pm} = (\pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1) = (\pm\sqrt{\frac{3608}{57}}, \pm\sqrt{\frac{3608}{57}}, \frac{451}{19})$$

lorsque deux valeurs propres du jacobien (évalué en p_- et p_+) traversent l'axe imaginaire. Il est facile de montrer qu'en $\rho = \frac{470}{19} \cong 24.74$, nous avons cette propriété. Durant cette étude, nous n'allons étudier que p_+ , étant donné la parfaite similitude de stabilité de p_+ et de p_- , due à la symétrie du système. Tout d'abord,

on translate le point singulier p_+ à l'origine en posant

$$W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3608}{57}} \\ \sqrt{\frac{3608}{57}} \\ \frac{451}{19} \end{pmatrix} = X - p_+.$$

Ainsi, en posant $\rho = \frac{470}{19}$ et $W = X - p_+$, le système (3.1.3) devient

$$\begin{pmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{w}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{\frac{3608}{57}} \\ \sqrt{\frac{3608}{57}} & \sqrt{\frac{3608}{57}} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -w_1 w_3 \\ w_1 w_2 \end{pmatrix}. \quad (3.3.5)$$

$$\text{Posons } A = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{\frac{3608}{57}} \\ \sqrt{\frac{3608}{57}} & \sqrt{\frac{3608}{57}} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{V} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -w_1 w_3 \\ w_1 w_2 \end{pmatrix} \text{ ce qui}$$

implique que le système (3.3.5) peut se réécrire comme suit :

$$\dot{W} = AW + \mathcal{V}(W).$$

Les trois valeurs propres de A sont $\lambda = \sqrt{\frac{1760}{19}}i$, $\bar{\lambda}$ et $\lambda_3 = -\frac{41}{3}$ de vecteurs propres

$$\text{respectifs } u = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 40\sqrt{\frac{60}{779}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{1760}{19}} \\ -22\sqrt{\frac{15}{41}} \end{pmatrix} i, \quad \bar{u} \text{ et } v = \begin{pmatrix} -\frac{30}{11} \\ 1 \\ \frac{328}{33}\sqrt{\frac{57}{3608}} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Posons } P = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -\frac{30}{11} \\ 10 & \sqrt{\frac{1760}{19}} & 1 \\ 40\sqrt{\frac{66}{779}} & -22\sqrt{\frac{15}{41}} & \frac{328}{33}\sqrt{\frac{57}{3608}} \end{pmatrix}.$$

$$\text{On peut ainsi vérifier que } B := \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{1760}{19}} & 0 \\ -\sqrt{\frac{1760}{19}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{41}{3} \end{pmatrix} = P^{-1}AP.$$

Faisons maintenant un autre changement de variable, à savoir $Y = P^{-1}W$, ce qui implique que

$$\begin{aligned}\dot{Y} &= P^{-1}\dot{W} = P^{-1}[AW + \mathcal{V}(W)] \\ &= P^{-1}[APY + \mathcal{V}(PY)] \\ &= (P^{-1}AP)Y + P^{-1}\mathcal{V}(PY) \\ &= BY + P^{-1}\mathcal{V}(PY).\end{aligned}$$

Nous avons calculé en Maple $P^{-1}\mathcal{V}(PY)$ (voir l'annexe B) pour obtenir

$$\begin{aligned}P^{-1}\mathcal{V}(PY) &= - \begin{pmatrix} \frac{15000}{1958939}\sqrt{51414} \\ \frac{760830}{1958939}\sqrt{615} \\ \frac{55000}{1958939}\sqrt{51414} \end{pmatrix} y_1^2 + \begin{pmatrix} \frac{630300}{1958939}\sqrt{615} \\ \frac{21560}{1958939}\sqrt{51414} \\ \frac{2311100}{1958939}\sqrt{615} \end{pmatrix} y_1 y_2 \\ &+ \begin{pmatrix} \frac{25320}{21548329}\sqrt{51414} \\ \frac{46534225}{711094857}\sqrt{615} \\ \frac{8440}{1958939}\sqrt{51414} \end{pmatrix} y_1 y_3 - \begin{pmatrix} \frac{171900}{1958939}\sqrt{615} \\ \frac{5880}{1958939}\sqrt{51414} \\ \frac{630300}{1958939}\sqrt{615} \end{pmatrix} y_2 y_3 \\ &+ \begin{pmatrix} \frac{1440}{5781259}\sqrt{51414} \\ \frac{702145}{63593849}\sqrt{615} \\ \frac{480}{525569}\sqrt{51414} \end{pmatrix} y_3^2 := \begin{pmatrix} \mathcal{S}_1(y_1, y_2, y_3) \\ \mathcal{S}_2(y_1, y_2, y_3) \\ \mathcal{S}_3(y_1, y_2, y_3) \end{pmatrix} := \mathcal{S}(Y).\end{aligned}$$

Rappelons que chercher à connaître la stabilité du point singulier p_+ pour le système (3.1.3) en $\rho = \frac{470}{19}$ se ramène à étudier la stabilité de l'origine pour le système

$$\dot{Y} = BY + \mathcal{S}(Y). \quad (3.3.6)$$

Or, comme deux des valeurs propres de la matrice B sont imaginaires pures conjuguées, alors nous allons devoir calculer une approximation de la variété centre à l'origine. Le théorème de la variété centre, dans notre contexte particulier, nous dit que cette variété est de la forme

$$y_3 = h(y_1, y_2) = ay_1^2 + by_1y_2 + cy_2^2 + o(|\bar{y}|) \quad (3.3.7)$$

et répond à l'équation

$$Dh(\bar{y})[C\bar{y} + \bar{S}(\bar{y}, h(\bar{y}))] + \frac{41}{3}h(\bar{y}) - \mathcal{S}_3(\bar{y}, h(\bar{y})) = 0 \quad (3.3.8)$$

$$\text{où } C := \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{1760}{19}} \\ -\sqrt{\frac{1760}{19}} & 0 \end{pmatrix}, \bar{S} := \begin{pmatrix} \mathcal{S}_1 \\ \mathcal{S}_2 \end{pmatrix} \text{ et } \bar{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

On obtient l'approximation quadratique de la variété centre, c'est-à-dire les coefficients a , b et c de l'équation (3.3.7), en identifiant les termes de degré deux dans (3.3.8). Pour plus de détails, voir dans [P]. Nous avons calculé avec Maple les valeurs de a , b et c . Le programme qui a généré ces valeurs est placé dans l'annexe B. Voici donc ces valeurs :

$$\begin{aligned} a &= \frac{6558783000}{7654082038201} \sqrt{51414} \\ b &= \frac{7056320700}{186684927761} \sqrt{615} \\ c &= -\frac{22283118000}{7654082038201} \sqrt{51414}. \end{aligned}$$

On peut donc remplacer ces trois valeurs dans l'équation (3.3.7) et le comportement du système (3.3.6) sur la variété centre peut se lire sur le comportement du système à deux dimensions

$$\dot{\bar{y}} = C\bar{y} + \bar{S}\bar{y}$$

ou plus particulièrement du système

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{1760}{19}} \\ -\sqrt{\frac{1760}{19}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{S}_1(y_1, y_2) \\ \mathcal{S}_2(y_1, y_2) \end{pmatrix}. \quad (3.3.9)$$

Notons que l'on a attraction vers la variété centre dans la troisième direction. Remarquons que

$$\begin{pmatrix} \mathcal{S}_1(y_1, y_2) \\ \mathcal{S}_2(y_1, y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i+j=2}^3 a_{ij} y_1^i y_2^j + o(|\bar{y}|^2) \\ \sum_{i+j=2}^3 b_{ij} y_1^i y_2^j + o(|\bar{y}|^2) \end{pmatrix}. \quad (3.3.10)$$

Notons que le système (3.3.9) peut se réécrire en coordonnées complexes conjuguées

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -i\sqrt{\frac{1760}{19}}z + o(|z, \bar{z}|) \\ \dot{\bar{z}} &= i\sqrt{\frac{1760}{19}}\bar{z} + o(|z, \bar{z}|). \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Ainsi, comme $\lambda + \bar{\lambda} = -i\sqrt{\frac{1760}{19}} + i\sqrt{\frac{1760}{19}} = 0$, alors la collection de valeurs propres $\{\lambda, \bar{\lambda}\}$ est résonante et engendre les résonances $\lambda = (n+1)\lambda + n\bar{\lambda}$ et $\bar{\lambda} = n\lambda + (n+1)\bar{\lambda}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Maintenant, pour étudier la stabilité du point singulier $(z, \bar{z}) = (0, 0)$, nous ferons appel à la théorie des formes normales. Pour ce faire, nous avons besoin de définir la notion de monôme résonant.

Définition 3.3.1. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonale. Supposons que la collection des valeurs propres $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ de la matrice A soit résonante. Soient e_s un vecteur de la base propre, $\{x_1, \dots, x_n\}$ les coordonnées dans la base $\{e_1, \dots, e_n\}$, $m = (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}_0^n$ et $x^m = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$. Un monôme vectoriel $x^m e_s$ est un monôme résonant si $\lambda_s = \sum_{i=1}^n m_i \lambda_i$ et $|m| \geq 2$.

Exemple 3.3.2. Considérons le système (3.3.11) et remarquons que la matrice jacobienne évaluée à l'origine est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} -i\sqrt{\frac{1760}{19}} & 0 \\ 0 & i\sqrt{\frac{1760}{19}} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}).$$

Dans le contexte de notre problème, $x_1 = z$ et $x_2 = \bar{z}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les monômes vectoriels

$$\begin{pmatrix} z^{n+1} \bar{z}^n \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ z^n \bar{z}^{n+1} \end{pmatrix}$$

sont des monômes résonants.

Nous allons maintenant définir la notion de forme normale d'un système en énonçant un théorème de Poincaré.

Théorème 3.3.1. [A] *Considérons l'équation différentielle*

$$\dot{x} = Ax + G(x) \quad (3.3.12)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ et $\frac{\partial G}{\partial x}(0) = G(0) = 0$. Supposons que la collection des valeurs propres $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ de la matrice A soit résonante. Alors, il existe un changement formel de variable $y = h(x)$ ramenant le système (3.3.12) au système

$$\dot{y} = Ay + H(y) \quad (3.3.13)$$

où $H(y)$ est une série formelle composée des monômes résonants engendrés par les relations de résonance de la collection Λ .

Définition 3.3.2. *L'équation (3.3.13) ainsi obtenue est appelée la forme normale du système (3.3.12).*

Notons qu'à priori, la série $H(y)$ n'a aucune raison de converger. Ainsi, pour conclure sur la stabilité (sur la variété centre) d'un point singulier non hyperbolique, nous utilisons en général les monômes de bas degré de la forme normale du système. En effet, la preuve du théorème 3.3.1 dans [A] donne une façon de normaliser degré par degré et ce, par des changements de variables parfaitement analytiques. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et sous les hypothèses du théorème 3.3.1, on peut ramener (par un changement analytique de variables $y = \bar{h}(x)$ tel que \bar{h}^{-1} est polynomial) le système (3.3.12) au système

$$\dot{y} = Ay + \bar{H}(y) + o(|y|^n), \quad (3.3.14)$$

où $\bar{H}(y)$ est un polynôme contenant tous les monômes résonants d'ordre $\leq n$.

Revenons maintenant au système (3.3.11) et remarquons que l'on peut laisser la deuxième équation de côté (parce qu'elle est la conjuguée de la première) pour nous limiter à l'équation

$$\dot{z} = -i\sqrt{\frac{1760}{19}}z + o(|z, \bar{z}|). \quad (3.3.15)$$

Par le théorème 3.3.1 et les remarques qui le suivent, le système (3.3.15) peut se réécrire (par un changement de coordonnées analytique $Z = h(z) = z + o(|z|)$) comme suit :

$$\dot{Z} = -i\sqrt{\frac{1760}{19}}Z + c_1Z^2\bar{Z} + o(|Z|^3). \quad (3.3.16)$$

Ainsi, la stabilité de l'origine est entièrement donnée par le signe de la partie réelle du coefficient c_1 . Voici cette valeur, dépendamment des a_{ij} et b_{ij} de la formule (3.3.10) et fidèle à la formule dans [G-H] :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} c_1 &= \frac{1}{16} [6a_{30} + 2a_{12} + 2b_{21} + 6b_{03}] \\ &\quad - \frac{1}{16} \sqrt{\frac{19}{1760}} [2a_{11}(a_{20} + a_{02}) - 2b_{11}(b_{20} + b_{02}) - 4a_{20}b_{20} + 4a_{02}b_{02}]. \end{aligned}$$

Avec Maple, nous avons calculé cette valeur et le programme qui l'a généré est placé dans l'annexe B. Cette valeur est donc

$$\operatorname{Re} c_1 = \frac{7218859620}{186684927761} > 0$$

ce qui implique que sur la variété centre, l'origine est répulsive. Plus précisément, au moment de la bifurcation de Hopf, on a un foyer faible répulsif sur la variété centre. On peut ainsi conclure que lors de la bifurcation de Hopf, le point d'équilibre p_+ passe d'un point attractif à un point hyperbolique de type selle. Ceci implique le résultat suivant.

Proposition 3.3.3. *Lors de la bifurcation de Hopf, il y a disparition d'un cycle limite.*

DÉMONSTRATION. Comme le point p_+ est répulsif (sur la variété centre) au moment de la bifurcation de Hopf, cela implique que pour $\rho < \frac{470}{19}$ très près de $\frac{470}{19}$, les trajectoires s'éloignent globalement de p_+ sur la paroi extérieure d'un certain

ensemble E_ρ (voir la figure 3.3.10). Or, le point p_+ est localement asymptotiquement stable par le théorème de Hartman-Grobman (voir dans [P]) pour $\rho < \frac{470}{19}$. En effet, le jacobien du système

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= 10(y - x) \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz \\ \dot{z} &= -\frac{8}{3}z + xy \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (x, y, z) &\in \mathbb{R}^3 \\ 1 < \rho < \frac{470}{19} \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

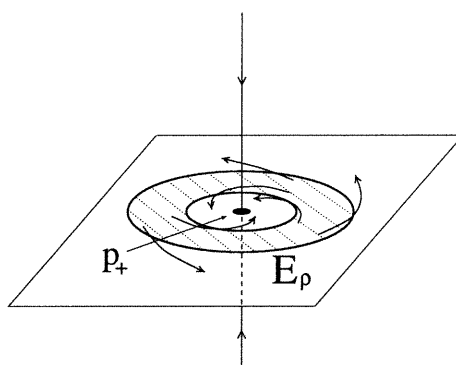


FIG. 3.3.10. Trajectoires de (3.3.17) sur l'ensemble E_ρ

au point $p_+ = (\sqrt{\frac{8}{3}(\rho - 1)}, \sqrt{\frac{8}{3}(\rho - 1)}, \rho - 1)$ est

$$J_\rho := \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{\frac{8}{3}(\rho - 1)} \\ \sqrt{\frac{8}{3}(\rho - 1)} & \sqrt{\frac{8}{3}(\rho - 1)} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

et il n'est pas très difficile de vérifier que les trois valeurs propres de J_ρ ont des parties réelles négatives pour tout $\rho \in]1, \frac{470}{19}[$. Ainsi, sur la paroi intérieure de l'ensemble E_ρ , les orbites convergent vers le point p_+ . Notons qu'on peut toujours choisir E_ρ qui répond à ces propriétés. Par conséquent, par le théorème d'existence et d'unicité des solutions (appliqué au système (3.3.17)), l'ensemble E_ρ doit absolument contenir un cycle limite que l'on note C_ρ (voir la figure 3.3.11). Or, lorsque ρ atteint $\frac{470}{19}$, le point p_+ devient globalement répulsif sur la variété

centre ce qui implique que le cycle C_ρ rapetisse au fur et à mesure que ρ tend vers $\frac{470}{19}$ pour finalement s'éteindre à la limite (voir la figure 3.3.11).

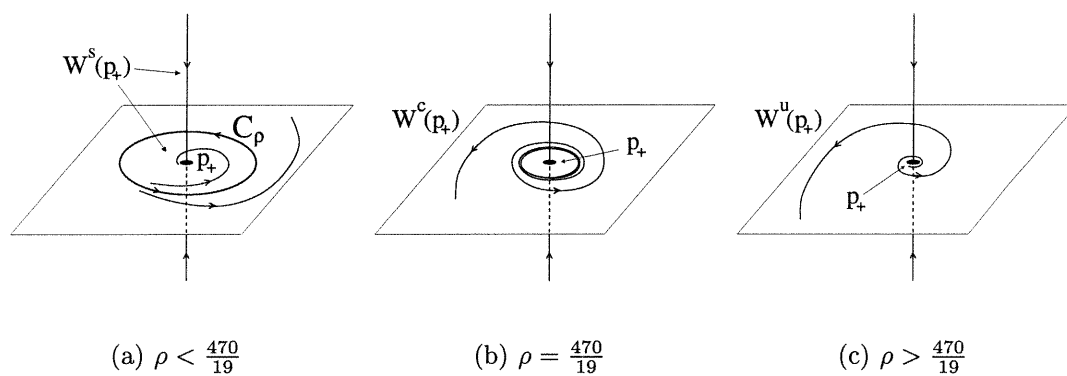


FIG. 3.3.11. Bifurcation de Hopf au point p_+ dans le système de Lorenz

□

Chapitre 4

NAISSANCE ET MORT DE CYCLES LIMITES DANS LE SYSTÈME DE LORENZ

4.1. NAISSANCE ET MORT DE CYCLES LIMITES POUR $\rho > \frac{470}{19}$

Nous allons maintenant terminer notre étude du système de Lorenz avec quelques résultats sur l'apparition de cycles limites dans ce système. Tout d'abord, remarquons que pour tout $\rho > \frac{470}{19}$ tel que $\rho \notin \mathcal{R}$ (où \mathcal{R} est l'ensemble donné par l'équation (3.1.4)), on a les caractéristiques suivantes :

- 1) $\sigma_\rho = \lambda_1(\rho) + \lambda_2(\rho) = -\frac{11}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{81 + 40\rho} - \frac{8}{3} > 0$;
- 2) Le système de Lorenz

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -xz \\ xy \end{pmatrix} \quad (4.1.1)$$

se ramène, par un difféomorphisme de classe C^1 au système linéaire

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

par la proposition 3.1.2.

Supposons que le système (4.1.1) possède une boucle homoclinique simple (ou avec torsion) en $\rho > \frac{470}{19}$ revenant à l'origine le long de l'axe des y . Supposons que cette boucle est équivalente (en terme de sa topologie) à la boucle homoclinique de la figure 4.1.2.

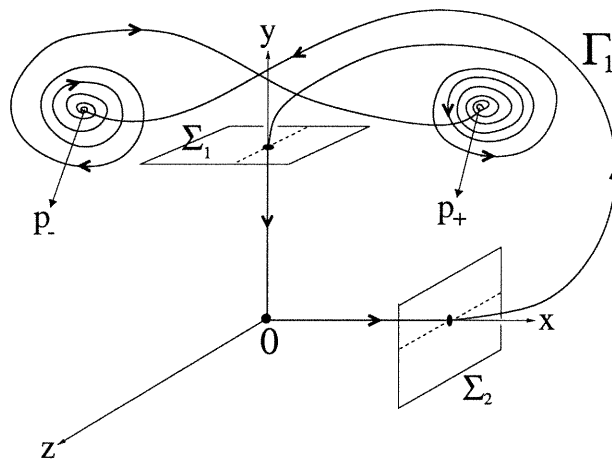
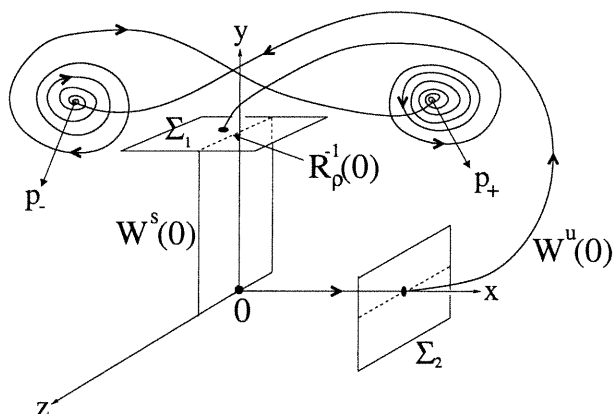
(a) $\rho = \rho_0$ (b) $\rho > \rho_0$

FIG. 4.1.1. Situation qui engendre la naissance d'un cycle limite dans un voisinage d'une boucle homoclinique simple (ou avec torsion) en $\rho = \rho_0 > \frac{470}{19}$

Par exemple, remarquons que les deux boucles homocliniques Γ_1 (figure 4.1.1(a)) et Γ_2 (figure 4.1.3(a)) sont parfaitement équivalentes, en terme de leur topologie,

à la boucle Γ_0 de la figure 4.1.2. Ainsi, sous réserve de vérifier numériquement les hypothèses (H.2), (H.3) et (H.5), on peut directement appliquer le théorème de Shil'nikov (théorème 1.2.1) pour obtenir les deux propositions suivantes :

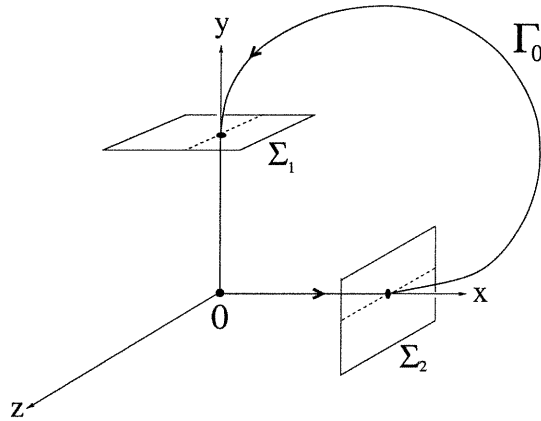


FIG. 4.1.2. Boucle homoclinique

Proposition 4.1.1. *Supposons qu'en ρ_0 , le système (4.1.1) possède une boucle homoclinique simple (ou avec torsion) Γ_1 (de la forme de celle de la figure 4.1.1(a)) et supposons que lorsque le paramètre ρ croît et passe par ρ_0 , la branche droite de la variété instable traverse la variété stable de droite à gauche c'est-à-dire que la première coordonnée de $R_p^{-1}(0)$ passe du signe positif à négatif (voir la figure 4.1.1). Alors, lorsque ρ franchit ρ_0 , il y a naissance d'un cycle limite. \square*

Proposition 4.1.2. *Supposons qu'en ρ_0 , le système (4.1.1) possède une boucle homoclinique simple (ou avec torsion) Γ_2 (de la forme de celle de la figure 4.1.3(a)) et supposons que lorsque le paramètre ρ croît et passe par ρ_0 , la branche droite de la variété instable traverse la variété stable de gauche à droite c'est-à-dire que la première coordonnée de $R_p^{-1}(0)$ passe du signe négatif à positif (voir la figure 4.1.3). Alors, lorsque ρ franchit ρ_0 , il y a disparition d'un cycle limite. \square*

Remarque 4.1.1. *En utilisant la symétrie du système, on observe donc la naissance (ou la disparition) de deux cycles limites symétriques (dépendamment du contexte dans lequel nous sommes).*

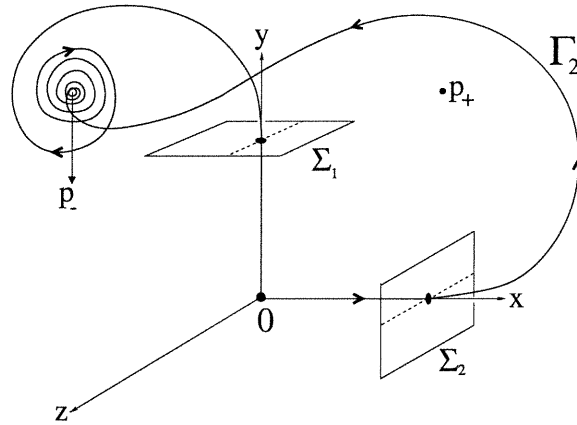
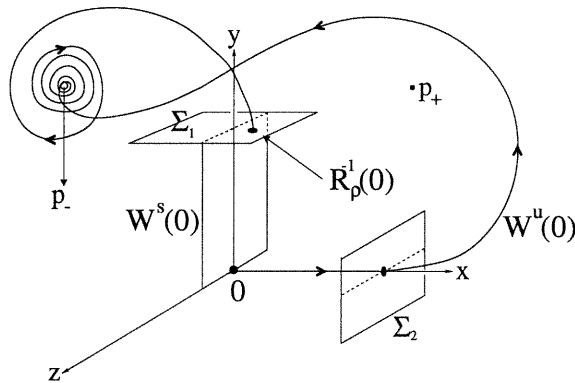
(a) $\rho = \rho_0$ (b) $\rho > \rho_0$

FIG. 4.1.3. Situation qui engendre la disparition d'un cycle limite dans un voisinage d'une boucle homoclinique simple (ou avec torsion) en $\rho = \rho_0 > \frac{470}{19}$

Remarquons que R_ρ^{-1} correspond au difféomorphisme $R_\varepsilon^{-1} : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ introduit dans la preuve du théorème 1.2.1 en posant $\varepsilon = \rho - \rho_0$, où $\rho_0 > \frac{470}{19}$ correspond à la valeur de ρ où une boucle homoclinique existe.

Notons que les propositions 4.1.1 et 4.1.2 concernent uniquement la naissance (ou la mort) de cycles limites de type selle. Ces propositions sont très pertinentes pour la structure du système de Lorenz dans le cas $\rho > \frac{470}{19}$. En effet, pour ces valeurs de ρ , le système de Lorenz ne peut présenter de cycles limites répulsifs.

Proposition 4.1.3. *Le système de Lorenz ne peut jamais avoir de cycles répulsifs.*

DÉMONSTRATION. Supposons que σ_ρ est un cycle limite répulsif du système (4.1.1). Pour arriver à une contradiction dans l'existence d'une telle boucle, nous allons devoir introduire la notion de divergence d'un champ de vecteurs.

Définition 4.1.1. *Soient $f \in C^1$ et $x \in \mathbb{R}^n$. On définit la divergence (notée $\text{DIV}(f)$) du champ de vecteurs $\dot{x} = f(x)$ comme étant la trace du jacobien c'est-à-dire la somme des éléments de la diagonale de la matrice jacobienne.*

Si le champ est de divergence partout négative, alors le flot du champ contracte les volumes. En effet, si D_0 est un domaine, ϕ^t est le flot du champ, $D^t := \phi^t(D_0)$ et VOL représente le volume, alors

$$\frac{d}{dt} \text{VOL}(D^t) = \iiint_{D^t} \text{DIV}(f) \, dx \, dy \, dz < 0 \quad (4.1.2)$$

Donc, si la divergence est strictement négative, alors le volume de tous les attracteurs du système sera nul. Dans le cas du champ de vecteurs (4.1.1), la divergence est donnée par

$$\frac{\partial}{\partial x}(-10x + 10y) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho x - y - xz) + \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{8}{3}z + xy\right) = -(10 + 1 + \frac{8}{3}) = -\frac{41}{3}.$$

Ainsi, l'équation (4.1.2), dans notre cas spécifique, devient

$$\frac{d}{dt} \text{VOL}(D^t) = - \iiint_{D^t} \frac{41}{3} \, dx \, dy \, dz = -\frac{41}{3} \text{VOL}(D^t)$$

ce qui implique que

$$\text{VOL}(D^t) = e^{-\frac{41}{3}t} \text{VOL}(D_0) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0.$$

Par conséquent, si le système (4.1.1) possède un cycle limite répulsif σ_ρ , alors le volume d'une région au voisinage du cycle σ_ρ va se dilater. Contradiction avec le fait que la divergence est négative. \square

Remarque 4.1.2. *Notons que dans une région chaotique, c'est-à-dire avec sensibilité aux conditions initiales, nous ne pouvons avoir de cycle attractif, car il n'y a pas de sensibilité aux conditions initiales au voisinage d'un tel cycle. Nous sommes donc presque assurés que pour $\rho > \frac{470}{19}$, les seuls cycles limites sont des cycles de type selle, c'est-à-dire des cycles pour lesquels l'application de premier retour de Poincaré a une valeur propre μ_1 de module $|\mu_1| > 1$ et une valeur propre μ_2 de module $|\mu_2| < 1$.*

Nous sommes donc quasiment certains que notre système n'aura pas de cycles limites semi-stables. Les chances que les hypothèses des propositions 4.1.1 et 4.1.2 se réalisent pour plusieurs valeurs de ρ sont très bonnes pour $\rho > \frac{470}{19}$. Donc, nous pourrions maintenant nous lancer dans l'étude numérique de l'apparition de cycles limites dans le système de Lorenz. Cependant, cette manière de procéder ne sera abordée dans ce mémoire.

REMARQUES ET CONCLUSION

À la lumière de ce fascinant parcours, il serait pertinent d'amener le lecteur à considérer certains points.

Tout d'abord, lors de la bifurcation de Hopf, un cycle limite disparaît. Il serait intéressant de montrer numériquement que ce cycle limite est celui qui apparaît lors de la bifurcation homoclinique (en $\rho \cong 13.926$).

De plus, pour démontrer la présence du chaos, nous nous sommes basé sur le modèle (pas parfaitement bien défini) provenant de la section 2.3 dans [G-H]. La première vraie preuve formelle de la présence du chaos dans le système de Lorenz a été réalisée par Mischaikow et Mrozek dans [M-M]. Ces derniers, avec l'aide de Szymczak, ont clarifié récemment cette preuve dans [M-M-S]. Cette preuve utilise un puissant outil de topologie algébrique (permettant entre autre de détecter les invariants de certains systèmes dynamiques) à savoir l'indice de Conley développé par Conley dans [C]. Dans leur démonstration, ils ont utilisé le caractère structurellement stable de l'indice de Conley pour détecter, à partir de données numériques, la présence d'une application chaotique à savoir le fer à cheval de Smale. Il serait peut-être intéressant de montrer la présence du chaos de la même manière, mais cette fois, en démontrant l'existence de l'application de Lorenz.

Finalement, il serait intéressant de chercher numériquement la présence de boucles homocliniques pour $\rho > \frac{470}{19}$ dans le but d'appliquer la proposition 4.1.1 pour prévoir la mort ou la naissance de cycles limites.

Annexe A

On crée la forme générale des trois valeurs propres du système dépendamment du paramètre rho.

> L1:=(-11+sqrt(81+40*rho))/2;

$$L1 := -\frac{11}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{81 + 40\rho}$$

> L2:=-8/3;

$$L2 := \frac{-8}{3}$$

> L3:=(-11-sqrt(81+40*rho))/2;

$$L3 := -\frac{11}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{81 + 40\rho}$$

On résoud les trois relations de résonance pour chacuns des ordres 2, 3, 4 et 5 dépendamment du paramètre rho.

1) Résonance de la forme : $L1 = m1*L1+m2*L2+m3*L3$

```
> resL1
> :=proc(m1,m2,m3)
> if {solve((m1-1)*L1+m2*L2+m3*L3,rho)}={ } or
> solve((m1-1)*L1+m2*L2+m3*L3,rho) < 13 then { }
> else
> rho[m1,m2,m3]=solve( (m1-1)*L1+m2*L2+m3*L3,rho);
> fi;
> end;
```



```

> ens:={}:
> for k from 2 to 5
> do
> for m from 0 to k
> do
> for n from 0 to k-m
> do
> ens:=ens union {resL1(m,n,k-m-n)};
> od
> od
> od;
> ens minus {{}};
      { $\rho_{3,0,1} = \frac{126}{5}, \rho_{2,3,0} = \frac{81}{5}, \rho_{3,1,1} = \frac{1562}{45}$ }

> evalf(81/5);
      16.20000000

> evalf(126/5);
      25.20000000

> evalf(1562/45);
      34.71111111

```

2) Résonance de la forme : $L2 = m1*L1+m2*L2+m3*L3$

```

> resL2:=proc(m1,m2,m3)
> if {solve(m1*L1+(m2-1)*L2+m3*L3,rho)}={ } or
> solve(m1*L1+(m2-1)*L2+m3*L3,rho) < 13 then { }
> else
> rho[m1,m2,m3]=solve( m1*L1+(m2-1)*L2+m3*L3,rho);
> fi;
> end:

```

```

> ens:={}:
> for k from 2 to 5
> do
> for m from 0 to k
> do
> for n from 0 to k-m
> do
> ens:=ens union {resL2(m,n,k-m-n)};
> od
> od
> od;
> ens minus {{}};
{ $\rho_{2,1,1} = \frac{126}{5}$ ,  $\rho_{2,0,1} = \frac{154}{9}$ ,  $\rho_{3,0,2} = \frac{2684}{45}$ ,  $\rho_{2,2,1} = \frac{1562}{45}$ ,  $\rho_{1,4,0} = \frac{81}{5}$ }
> evalf(81/5);
16.20000000

> evalf(126/5);
25.20000000

> evalf(2684/45);
59.64444444

> evalf(1562/45);
34.71111111

> evalf(154/9);
17.11111111

```

3) Résonance de la forme : $L3 = m1*L1+m2*L2+m3*L3$

```

> resL3:=proc(m1,m2,m3)
> if {solve(m1*L1+m2*L2+(m3-1)*L3,rho)}={ } or
> solve(m1*L1+m2*L2+(m3-1)*L3,rho) < 13 then { }
> else
> rho[m1,m2,m3]=solve( m1*L1+m2*L2+(m3-1)*L3,rho);
> fi;
> end:

```

```

> ens:={}:
> for k from 2 to 5
> do
> for m from 0 to k
> do
> for n from 0 to k-m
> do
> ens:=ens union {resL3(m,n,k-m-n)};
> od
> od
> od;
> ens minus {};
       $\{\rho_{2,1,2} = \frac{1562}{45}, \rho_{1,3,1} = \frac{81}{5}, \rho_{2,0,2} = \frac{126}{5}\}$ 
> evalf(1562/45);
      34.71111111
> evalf(81/5);
      16.20000000
> evalf(126/5);
      25.20000000

```

Fin du programme

Annexe B

```
> A:=
> «-10,1,sqrt(3608/57)>|<10,-1,sqrt(3608/57)>|<0,-sqrt(3608/57),-8/3»;
```

$$A := \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & -\frac{2}{57}\sqrt{51414} \\ \frac{2}{57}\sqrt{51414} & \frac{2}{57}\sqrt{51414} & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

```
> P:=«10,10,40*sqrt(66/779)>|<0,sqrt(1760/19),-22*sqrt(15/41)>|<-30/11
> ,1,328/33*sqrt(57/3608)»;
```

$$P := \begin{bmatrix} 10 & 0 & -\frac{30}{11} \\ 10 & \frac{4}{19}\sqrt{2090} & 1 \\ \frac{40}{779}\sqrt{51414} & -\frac{22}{41}\sqrt{615} & \frac{2}{363}\sqrt{51414} \end{bmatrix}$$

```
> with(linalg):
> P_1:=<simplify(inverse(P),sqrt)>;
```

$$P_{-1} := \begin{bmatrix} \frac{13129}{477790} & \frac{1881}{47779} & \frac{6}{47779}\sqrt{418}\sqrt{123} \\ -\frac{53}{2627845}\sqrt{5}\sqrt{418} & \frac{2759}{2627845}\sqrt{5}\sqrt{418} & -\frac{779}{477790}\sqrt{5}\sqrt{123} \\ \frac{-12705}{47779} & \frac{6897}{47779} & \frac{22}{47779}\sqrt{418}\sqrt{123} \end{bmatrix}$$

$$B = P^{(-1)} * A * P$$

```
> with(LinearAlgebra):
> B:=<simplify(Multiply(<Multiply(P_1,A)>,P),sqrt)>;
```

$$B := \begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{19} \sqrt{5} \sqrt{418} & 0 \\ -\frac{4}{19} \sqrt{5} \sqrt{418} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-41}{3} \end{bmatrix}$$

> Y:=<y[1],y[2],y[3]>;

$$Y := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

> PY:=Multiply(P,Y);

$$PY := \begin{bmatrix} 10 y_1 - \frac{30}{11} y_3 \\ 10 y_1 + \frac{4}{19} \sqrt{2090} y_2 + y_3 \\ \frac{40}{779} \sqrt{51414} y_1 - \frac{22}{41} \sqrt{615} y_2 + \frac{2}{363} \sqrt{51414} y_3 \end{bmatrix}$$

> f_bar:=proc(V)

> <0,-V[1]*V[3],V[1]*V[2]>

> end:

> f_bar(PY);

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -(10 y_1 - \frac{30}{11} y_3) (\frac{40}{779} \sqrt{51414} y_1 - \frac{22}{41} \sqrt{615} y_2 + \frac{2}{363} \sqrt{51414} y_3) \\ (10 y_1 - \frac{30}{11} y_3) (10 y_1 + \frac{4}{19} \sqrt{2090} y_2 + y_3) \end{bmatrix}$$

On calcule ici la fonction S(Y)

> S:=simplify(Multiply(P_1,f_bar(PY)) , sqrt);

$$\begin{aligned}
S := & \left[-\frac{15000}{1958939} \sqrt{418} \sqrt{123} y_1^2 + \frac{630300}{1958939} y_1 \sqrt{5} \sqrt{123} y_2 + \frac{25320}{21548329} y_1 \sqrt{418} \sqrt{123} y_3 \right. \\
& \left. - \frac{171900}{1958939} y_3 \sqrt{5} \sqrt{123} y_2 + \frac{1440}{5781259} \sqrt{418} \sqrt{123} y_3^2 \right] \\
& \left[-\frac{760830}{1958939} \sqrt{5} \sqrt{123} y_1^2 + \frac{21560}{1958939} \sqrt{418} y_1 \sqrt{123} y_2 + \frac{46534225}{711094857} \sqrt{5} y_1 \sqrt{123} y_3 \right. \\
& \left. - \frac{5880}{1958939} \sqrt{418} y_3 \sqrt{123} y_2 + \frac{702145}{63593849} \sqrt{5} \sqrt{123} y_3^2 \right] \\
& \left[-\frac{55000}{1958939} \sqrt{418} \sqrt{123} y_1^2 + \frac{2311100}{1958939} y_1 \sqrt{5} \sqrt{123} y_2 + \frac{8440}{1958939} y_1 \sqrt{418} \sqrt{123} y_3 \right. \\
& \left. - \frac{630300}{1958939} y_3 \sqrt{5} \sqrt{123} y_2 + \frac{480}{525569} \sqrt{418} \sqrt{123} y_3^2 \right]
\end{aligned}$$

On crée la forme générale de l'approximation quadratique de la variété centre pour pouvoir calculer les coefficients a, b et c.

```

> h:=proc(y_1,y_2)
> a*(y_1)^2+b*(y_1)*(y_2)+c*(y_2)^2
> end:

```

```

> h(y[1],y[2]);

```

$$a y_1^2 + b y_1 y_2 + c y_2^2$$

On substitue l'équation de la variété centre $y[3]=h(y[1],y[2])$ dans $S(Y)$

```

> S:=subs( y[3]=h(y[1],y[2]) , S);

```

$$\begin{aligned}
S := & \left[-\frac{15000}{1958939} \sqrt{418} \sqrt{123} y_1^2 + \frac{630300}{1958939} y_1 \sqrt{5} \sqrt{123} y_2 \right. \\
& + \frac{25320}{21548329} y_1 \sqrt{418} \sqrt{123} \%1 - \frac{171900}{1958939} \%1 \sqrt{5} \sqrt{123} y_2 \\
& \left. + \frac{1440}{5781259} \sqrt{418} \sqrt{123} \%1^2 \right] \\
& \left[-\frac{760830}{1958939} \sqrt{5} \sqrt{123} y_1^2 + \frac{21560}{1958939} \sqrt{418} y_1 \sqrt{123} y_2 + \frac{46534225}{711094857} \sqrt{5} y_1 \sqrt{123} \%1 \right. \\
& \left. - \frac{5880}{1958939} \sqrt{418} \%1 \sqrt{123} y_2 + \frac{702145}{63593849} \sqrt{5} \sqrt{123} \%1^2 \right] \\
& \left[-\frac{55000}{1958939} \sqrt{418} \sqrt{123} y_1^2 + \frac{2311100}{1958939} y_1 \sqrt{5} \sqrt{123} y_2 + \frac{8440}{1958939} y_1 \sqrt{418} \sqrt{123} \%1 \right. \\
& \left. - \frac{630300}{1958939} \%1 \sqrt{5} \sqrt{123} y_2 + \frac{480}{525569} \sqrt{418} \sqrt{123} \%1^2 \right] \\
\%1 := & a y_1^2 + b y_1 y_2 + c y_2^2
\end{aligned}$$

> Dh := <<2*a*y[1]+b*y[2]> | <b*y[1]+2*c*y[2]>>;

$$Dh := \begin{bmatrix} 2 a y_1 + b y_2 & b y_1 + 2 c y_2 \end{bmatrix}$$

> C := <<0, -sqrt(1760/19)> | <sqrt(1760/19), 0>>;

$$C := \begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{19} \sqrt{2090} \\ -\frac{4}{19} \sqrt{2090} & 0 \end{bmatrix}$$

> M := simplify(Multiply(C, <y[1], y[2]>) + <S[1], S[2]>):

> T := simplify(Multiply(Dh, M)):

$$Pol := Dh [Cy + S(y, h(y))] + 41/3*h(y) - S[3]$$

> Pol := simplify(T[1]+41/3*h(y[1], y[2]) - S[3]);

$$\begin{aligned}
Pol := & \frac{55000}{1958939} \sqrt{418} \sqrt{123} y_1^2 - \frac{28080}{21548329} y_1^3 \sqrt{418} \sqrt{123} b y_2 a + \frac{41}{3} b y_1 y_2 + \frac{41}{3} c y_2^2 \\
& + \frac{41}{3} a y_1^2 - \frac{2311100}{1958939} y_1 \sqrt{5} \sqrt{123} y_2 + \frac{30960}{21548329} \sqrt{418} \sqrt{123} a^2 y_1^4 \\
& - \frac{38440}{1958939} \sqrt{418} \sqrt{123} a y_1^3 - \frac{149040}{21548329} \sqrt{418} \sqrt{123} c^2 y_2^4 \\
& + \frac{630300}{1958939} c y_2^3 \sqrt{5} \sqrt{123} + \frac{4}{19} b \sqrt{5} \sqrt{418} y_2^2 - \frac{4}{19} y_1^2 b \sqrt{5} \sqrt{418} \\
& - \frac{760830}{1958939} y_1^3 b \sqrt{5} \sqrt{123} + \frac{1404290}{63593849} y_2^5 c^3 \sqrt{5} \sqrt{123} \\
& + \frac{2880}{5781259} y_1^5 a^3 \sqrt{418} \sqrt{123} - \frac{2880}{525569} y_1^2 y_2^2 c \sqrt{418} \sqrt{123} a \\
& - \frac{1440}{525569} y_1^2 y_2^2 \sqrt{418} \sqrt{123} b^2 - \frac{1880}{1958939} y_1^2 y_2 \sqrt{418} \sqrt{123} b \\
& + \frac{1890900}{1958939} y_1^2 y_2 a \sqrt{5} \sqrt{123} - \frac{208080}{21548329} y_1 \sqrt{418} \sqrt{123} c y_2^3 b \\
& + \frac{34680}{1958939} y_1 y_2^2 \sqrt{418} \sqrt{123} c + \frac{1260600}{1958939} y_1 y_2^2 b \sqrt{5} \sqrt{123} \\
& + \frac{1404290}{63593849} y_1^4 y_2 c \sqrt{5} \sqrt{123} a^2 + \frac{1404290}{63593849} y_1^4 y_2 b^2 \sqrt{5} \sqrt{123} a \\
& + \frac{46534225}{711094857} y_1^4 \sqrt{5} \sqrt{123} b a + \frac{3510725}{63593849} y_1 y_2^4 c^2 \sqrt{5} \sqrt{123} b \\
& + \frac{2880}{5781259} y_1 y_2^4 b^2 \sqrt{418} \sqrt{123} c - \frac{343800}{1958939} y_1 y_2^3 c a \sqrt{5} \sqrt{123} \\
& + \frac{93068450}{711094857} y_1 y_2^3 c^2 \sqrt{5} \sqrt{123} + \frac{8}{19} y_1 y_2 a \sqrt{5} \sqrt{418} \\
& + \frac{1440}{5781259} y_2^5 b \sqrt{418} \sqrt{123} c^2 + \frac{7200}{5781259} y_1^4 y_2 a^2 \sqrt{418} \sqrt{123} b \\
& - \frac{8}{19} y_1 y_2 c \sqrt{5} \sqrt{418} + \frac{46534225}{237031619} y_1^2 y_2^2 \sqrt{5} \sqrt{123} c b \\
& - \frac{515700}{1958939} y_1^2 y_2^2 \sqrt{5} \sqrt{123} b a - \frac{1521660}{1958939} y_1^2 y_2 c \sqrt{5} \sqrt{123} \\
& + \frac{2880}{5781259} y_1 y_2^4 a \sqrt{418} \sqrt{123} c^2 - \frac{171900}{1958939} y_1 y_2^3 b^2 \sqrt{5} \sqrt{123} \\
& + \frac{4212870}{63593849} y_1^3 y_2^2 c \sqrt{5} \sqrt{123} b a + \frac{5760}{5781259} y_1^3 y_2^2 b^2 \sqrt{418} \sqrt{123} a \\
& + \frac{702145}{63593849} y_1^3 y_2^2 b^3 \sqrt{5} \sqrt{123} + \frac{5760}{5781259} y_1^3 y_2^2 \sqrt{418} \sqrt{123} a^2 c \\
& + \frac{93068450}{711094857} y_1^3 y_2 c a \sqrt{5} \sqrt{123} - \frac{343800}{1958939} y_1^3 y_2 a^2 \sqrt{5} \sqrt{123} \\
& + \frac{46534225}{711094857} y_1^3 y_2 b^2 \sqrt{5} \sqrt{123} + \frac{702145}{63593849} y_1^5 b \sqrt{5} \sqrt{123} a^2 \\
& - \frac{171900}{1958939} y_2^4 \sqrt{5} \sqrt{123} c b + \frac{2808580}{63593849} y_1^2 y_2^3 c^2 \sqrt{5} \sqrt{123} a \\
& + \frac{2808580}{63593849} y_1^2 y_2^3 b^2 \sqrt{5} \sqrt{123} c + \frac{8640}{5781259} y_1^2 y_2^3 a \sqrt{418} \sqrt{123} c b \\
& + \frac{1440}{5781259} y_1^2 y_2^3 \sqrt{418} \sqrt{123} b^3
\end{aligned}$$


```

> coef_exp:=proc(i,j);
> if i=0 then coeff( subs(y[1]=0,Pol),y[2]^j)
> elif j=0 then coeff( subs(y[2]=0,Pol),y[1]^i)
> else coeff(coeff(Pol,y[1]^i),y[2]^j)
> fi
> end:

> k[2,0]:=coef_exp(2,0); solve(k[2,0]);

$$k_{2,0} := \frac{55000}{1958939} \sqrt{418} \sqrt{123} + \frac{41}{3} a - \frac{4}{19} b \sqrt{5} \sqrt{418}$$


$$\{a = -\frac{165000}{80316499} \sqrt{418} \sqrt{123} + \frac{12}{779} b \sqrt{5} \sqrt{418}, b = b\}$$


> k[1,1]:=coef_exp(1,1); solve(k[1,1]);

$$k_{1,1} := \frac{41}{3} b - \frac{2311100}{1958939} \sqrt{5} \sqrt{123} + \frac{8}{19} a \sqrt{5} \sqrt{418} - \frac{8}{19} c \sqrt{5} \sqrt{418}$$


$$\{b = \frac{6933300}{80316499} \sqrt{5} \sqrt{123} - \frac{24}{779} a \sqrt{5} \sqrt{418} + \frac{24}{779} c \sqrt{5} \sqrt{418}, a = a, c = c\}$$


> k[0,2]:=coef_exp(0,2); solve(k[0,2]);

$$k_{0,2} := \frac{41}{3} c + \frac{4}{19} b \sqrt{5} \sqrt{418}$$


$$\{c = -\frac{12}{779} b \sqrt{5} \sqrt{418}, b = b\}$$


> eqn:={k[2,0],k[1,1],k[0,2]};

eqn := {  $\frac{55000}{1958939} \sqrt{418} \sqrt{123} + \frac{41}{3} a - \frac{4}{19} b \sqrt{5} \sqrt{418}$ ,
 $\frac{41}{3} b - \frac{2311100}{1958939} \sqrt{5} \sqrt{123} + \frac{8}{19} a \sqrt{5} \sqrt{418} - \frac{8}{19} c \sqrt{5} \sqrt{418}$ ,  $\frac{41}{3} c + \frac{4}{19} b \sqrt{5} \sqrt{418}$  }

> solve(eqn);


$$\{a = \frac{6558783000}{7654082038201} \sqrt{418} \sqrt{123}, b = \frac{7056320700}{186684927761} \sqrt{5} \sqrt{123},$$


$$c = -\frac{22283118000}{7654082038201} \sqrt{418} \sqrt{123}\}$$


> a := 6558783000/7654082038201*sqrt(418)*sqrt(123);
> b := 7056320700/186684927761*sqrt(5)*sqrt(123);
> c := -22283118000/7654082038201*sqrt(418)*sqrt(123);


$$a := \frac{6558783000}{7654082038201} \sqrt{418} \sqrt{123}$$


$$b := \frac{7056320700}{186684927761} \sqrt{5} \sqrt{123}$$


```

$$c := -\frac{22283118000}{7654082038201} \sqrt{418} \sqrt{123}$$

S1 correspond à f dans [G-H] (formule 3.4.10) - page 152.

```
> S1:=proc(i,j);
> if i=0 then coeff( subs(y[1]=0,S[1]),y[2]^j)
> elif j=0 then coeff( subs(y[2]=0,S[1]),y[1]^i)
> else coeff(coeff(S[1],y[1]^i),y[2]^j)
> fi
> end;
```

S2 correspond à g dans [G-H] (formule 3.4.10) - page 152.

```
> S2:=proc(i,j);
> if i=0 then coeff( subs(y[1]=0,S[2]),y[2]^j)
> elif j=0 then coeff( subs(y[2]=0,S[2]),y[1]^i)
> else coeff(coeff(S[2],y[1]^i),y[2]^j)
> fi
> end;
```

Re_c[1] correspond à "a" dans [G-H] (formule 3.4.11) - page 152.

```
> Re_c[1]:=simplify( 1/16*(
> 6*S1(3,0)+2*S1(1,2)+2*S2(2,1)+6*S2(0,3) ) -
> 1/16*sqrt(19/1760)*( 2*S1(1,1)*(S1(2,0)+S1(0,2)) -
> 2*S2(1,1)*(S2(2,0)+S2(0,2)) - 4*S1(2,0)*S2(2,0) + 4*S1(0,2)*S2(0,2)
> ) );
```

$$Re_c_1 := \frac{7218859620}{186684927761}$$

Comme $Re_c[1] > 0$, alors le point $P+$ est un point répulsif sur la variété centre. Ainsi, le point $P+$ est un point de selle.

BIBLIOGRAPHIE

- [A] V. ARNOLD, *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, Éditions Mir, Moscou, 1980.
- [C] C. CONLEY, *Isolated invariant sets and the Morse index*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 38. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1978.
- [D] R.L. DEVANEY, *An introduction to chaotic dynamical systems*, Addison-Wesley, Redwood City, 1987.
- [G-H] J. GUCKENHEIMER ET P. HOLMES, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, New-York, 1983.
- [H] P. HARTMAN, *Ordinary Differential Equations*, Birkhäuser, Boston, 1982.
- [K] Y.A. KUZNETSOV, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, New-York, 1995.
- [M-M] K. MISCHAIKOW ET M. MROZEK *Chaos in the Lorenz equations : a computer-assisted proof* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 32 (1995), no. 1, 66–72.
- [M-M-S] K. MISCHAIKOW, M. MROZEK ET A. SZYMCZAK *Chaos in the Lorenz equations : a computer-assisted proof. III*, J. Differential Equations, 169 (2001), no. 1, 17–56.
- [P] L. PERKO, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New-York, 1998.
- [S] C. SPARROW, *The Lorenz Equations : Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*, Springer-Verlag, New-York, 1982.