

Université de Montréal

Paramétrisation de la vitesse de propagation  
d'une flamme turbulente via l'équation G

par

Rony Touma

Département de mathématiques et de statistique  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de  
Maître ès sciences (M.Sc.)  
en Mathématiques

Décembre 2001



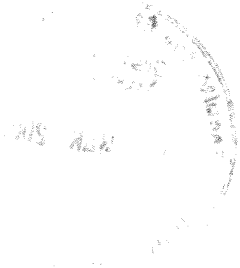
QA

3

U54

2002

v. 009



**Université de Montréal**

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**Paramétrisation de la vitesse de propagation  
d'une flamme turbulente via l'équation G**

présenté par

**Rony Touma**

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

*Robert Brunet*

---

(président-rapporteur)

*Anne Bourlioux*

---

(directeur de recherche)

*Jacques Bélair*

---

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

*17 Janvier 2002*

---

## Résumé

Dans ce mémoire, on analyse le phénomène de la combustion turbulente prémélangée. On s'intéresse à la vitesse de combustion de la flamme dans le cadre d'un régime d'écoulement du type cisaillement non stationnaire. On essaye de paramétriser cette vitesse de combustion en fonction des variables physiques du problème. On formule le problème en se servant de la théorie du modèle de l'équation  $G$  introduite dans [12].

Le comportement non stationnaire de l'écoulement provoque un changement de la forme du front de la flamme et par la suite une variation de sa vitesse de propagation. On sait que plus l'intensité de ce cisaillement est grande, plus la vitesse de propagation est grande. Les auteurs de [4] ont étudié le même problème en appliquant le modèle de flamme de la théorie rigoureuse dans [14] et ont démontré asymptotiquement la similarité de l'augmentation de la vitesse normalisée ainsi que les régimes par lesquels elle passe. Notre objectif est de comparer ces résultats à ceux obtenus avec le modèle de l'équation  $G$ . La comparaison est basée sur un grand nombre de résultats numériques pour l'augmentation de la vitesse normalisée et sur une étude asymptotique des solutions de l'équation  $G$ .

Pour les simulations, on applique un schéma numérique essentiellement non oscillatoire ("ENO") [1]. On traite tout d'abord le cas d'un écoulement de type cisaillement stationnaire afin de valider la méthode en comparant la solution numérique avec la solution analytique. On applique ensuite le même code pour un écoulement non stationnaire, les solutions ainsi obtenues permettent de déterminer l'augmentation de la vitesse normalisée. On valide nos résultats en changeant la résolution du maillage et en modifiant les paramètres. Une analyse asymptotique permet de prédire le comportement de l'augmentation de la vitesse normalisée et de déterminer les régimes par lesquels elle passe. On retrouve ainsi certaines des propriétés

qui avaient été identifiées dans [4] mais aussi des différences.

## Mots clés

- Analyse numérique
- Combustion prémélangée
- Flammelettes
- Hamilton-Jacobi
- Théorie de combustion

## Abstract

The topic of this Masters project is the analysis of the turbulent premixed combustion phenomena. We study the burning speed of the flame front once it is distorted by a time-modulated shear. We parameterize this burning speed based on the problem's physical parameters. We apply the theory of the G-equation introduced in [12] to formulate the problem mathematically.

The variation of the combustion speed is a result of the distortion of the flame front by an unsteady small-scale shear. One knows that the larger the shear intensity is, the larger the combustion speed will be. The authors of [4] studied the same problem except that they applied the non-linear rigorous theory of [14]. They analyzed the behavior of the enhancement speed combustion. Our goal is to compare those results with the ones obtained for the G-equation. This comparison is based on an asymptotic study and many numerical results. For the simulations, we apply an essentially non-oscillatory numerical scheme. First, we solve the problem in the case of a steady shear. We compare the numerical solution with the analytic one to validate the scheme. The same code is applied in the case of an unsteady shear. We modify the grid resolution to validate our numerical results. We use the solutions to evaluate the normalized enhancement speed. An asymptotic analysis predicts the behavior of this normalized enhancement speed and its several regimes. Hence, some properties presented in [4] are verified, others are not.

## Keywords

Combustion, flame, G-equation, laminar, turbulent, normalized enhancement speed, pre-mixed, shear.

## Liste des sigles et des abbréviations

$ \cdot $	norme euclidienne d'un vecteur
$\alpha$	exposant entre 0 et 1 caractérisant une échelle intermédiaire $\varepsilon < \varepsilon^\alpha < 1$
$\alpha_x(u^+, u^-)$	fonction du schéma numérique
$\alpha_{kl}$	constante du schéma numérique
$\beta$	exposant de la correction
$\beta_{kl}$	constante du schéma numérique
$\Delta t$	pas temporel
$\Delta y$	pas spatial
$\epsilon$	terme non-dimensionnel des expansions asymptotiques $\epsilon = 1/\tilde{t}$
$\phi^n$	solution numérique à l'instant $n\Delta t$
$\lambda$	intensité du cisaillement
$\psi$	fonction $G$ non-dimensionnée
$\omega$	fréquence du cisaillement
$\sigma$	correction par rapport à la limite stationnaire
$\tau$	temps non-dimensionnel
$A(h)$	solution numérique obtenue avec un pas de taille $h$
$E(h)$	erreur obtenue avec un pas de taille $h$
$G$	fonction d'iso-surface
$\tilde{G}$	fonction $G$ non-dimensionnée
$\tilde{H}$	Hamiltonien
$H$	fonction du schéma numérique



$\hat{H}^{RF}$	flux numérique
$i, j$	indices indiquant la position dans un maillage
$K$	constante dans la correction du deuxième ordre
$\vec{n}$	vecteur normal au front de la flamme
$P$	période spatiale
$P_{j+1/2}^{f,1}(x)$	polynôme d'interpolation
$S_e$	augmentation de la vitesse $S_e = S_T - S_L$
$S_{e_0}$	limite stationnaire de l'augmentation de la vitesse
$S_{e_N}$	augmentation de la vitesse normalisée $S_{e_N} = S_e/S_{e_0}$
$S_{e_N, lent}$	augmentation de la vitesse normalisée, régime asymptotique lent
$S_{e_N, rapide}$	augmentation de la vitesse normalisée, régime asymptotique rapide
$S_L$	vitesse laminaire
$S_T$	vitesse turbulente
$\tilde{t}$	terme non-dimensionnel mesurant l'importance des effets instationnaires
$t$	temps
$T$	Température
$T_{ref}$	temps de plissement
$u_i^\pm$	dérivée du polynôme d'interpolation
$u(y, t)$	champ de vitesse du mélange air-fuel
$X(t)$	coordonnée spatiale $X(t) = (x(t), y(t))$
$x, y$	coordonnées spatiales
$Z$	logarithme du profil de la température dans le modèle asymptotique

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Objectifs du travail</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation . . . . .	1
1.2	Formulation mathématique du problème . . . . .	3
1.3	Résumé des résultats connus . . . . .	8
1.4	Objectif principal de ce mémoire et stratégie détaillée . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Outils Numériques</b>	<b>16</b>
2.1	Généralités sur les méthodes numériques pour les équations d'Hamilton-Jacobi	18
2.2	Méthode basée sur l'interpolation ENO . . . . .	19
2.2.1	Construction du schéma . . . . .	20
2.3	Validation de la méthode . . . . .	26
2.3.1	Comparaison avec la solution analytique dans le cas stationnaire (ordre de convergence dans l'espace) . . . . .	27
2.3.2	Étude de convergence pour un cas non stationnaire - ordre de conver- gence dans l'espace-temps . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Interprétation des résultats numériques</b>	<b>41</b>
3.1	Résumé des résultats avec le modèle asymptotique rigoureux . . . . .	43
3.2	Calcul du temps de référence de déformation de la flamme . . . . .	46
3.3	Approche théorique et analyse asymptotique . . . . .	49
3.3.1	Analyse asymptotique pour les grandes fréquences $\omega$ -régime rapide . . . . .	49
3.3.2	Analyse asymptotique pour les petites fréquences $\omega$ - régime lent . . . . .	54
3.4	Comparaison des prédictions asymptotiques avec les résultats numériques pour chacun des deux régimes de l'augmentation de la vitesse . . . . .	57
3.4.1	Augmentation de la vitesse normalisée avec des grandes fréquences $\omega$ - Régime rapide . . . . .	60
3.4.2	Augmentation de la vitesse normalisée avec des petites fréquences $\omega$ et des petites valeurs de $\lambda$ - Régime lent . . . . .	62
3.4.3	Explication du régime lent avec des grandes valeurs de $\lambda$ . . . . .	66
3.4.4	Comparaison avec les résultats obtenus pour le modèle rigoureux de Majda-Souganidis . . . . .	71

# Liste des tableaux

2.1	Méthode TVD Runge-Kutta . . . . .	25
2.2	Ordre numérique spatial du schéma du second ordre (après apparition des singularités) ( $\omega = 0$ et $\lambda = 2$ ) . . . . .	34
2.3	Ordre numérique spatial du schéma du second ordre (avant apparition des singularités) ( $\omega = 0$ et $\lambda = 2$ ) . . . . .	34
2.4	Ordre numérique spatial du schéma du troisième ordre (avant l'apparition des singularités) ( $\omega = 0$ et $\lambda = 2$ ) . . . . .	35
2.5	Ordre numérique spatial du schéma du troisième ordre (après l'apparition des singularités) ( $\omega = 0$ et $\lambda = 2$ ) . . . . .	36
2.6	Ordre numérique de la vitesse de propagation, $\omega = 0$ et $\lambda = 2$ . . . . .	36
2.7	Ordre dans le temps du schéma du second ordre cas d'un cisaillement non stationnaire ( $\omega = \pi/10$ et $\lambda = 0.1$ ) . . . . .	37
2.8	Ordre dans le temps du schéma du troisième ordre cas d'un cisaillement non stationnaire ( $\omega = \pi/10$ et $\lambda = 0.1$ ) . . . . .	37
2.9	Ordre dans l'espace du schéma du second ordre cas d'un cisaillement non stationnaire ( $\omega = \pi/6$ et $\lambda = 2$ ) . . . . .	38
2.10	Ordre dans l'espace du schéma du troisième ordre cas d'un cisaillement non stationnaire, ( $\omega = \pi/10$ et $\lambda = 2$ ) . . . . .	38
2.11	Ordre numérique de la vitesse de propagation, ( $\omega = \pi/5$ et $\lambda = 0.1$ ) . . . . .	40
3.1	L'exposant $\beta$ . . . . .	64
3.2	Synthèse des résultats . . . . .	73

# Table des figures

1.1	Turbine à gaz [22] . . . . .	2
1.2	Différents niveaux de la fonction G ; le niveau zéro est en ligne pleine	4
1.3	Point de rebroussement . . . . .	7
2.1	Condition initiale du système et champ de vitesse . . . . .	27
2.2	Les différentes étapes des solutions de l'équation G. ( $\lambda = 1, S = 1$ ) .	30
2.3	La solution numérique est représentée en 'o' et la solution analytique en ligne plein . . . . .	30
2.4	Convergence de la vitesse $S_T$ vers $\lambda + S_L$ pour deux valeurs différentes de $\lambda$ . . . . .	31
2.5	Graphe de l'erreur entre la solution exacte et la solution numérique	35
2.6	Graphe de la vitesse instantanée de la propagation du front de la flamme, cas d'un écoulement non stationnaire, on voit aussi la vitesse moyenne . . . . .	39
2.7	Graphe de la vitesse moyenne de la propagation du front de la flamme, cas d'un écoulement non stationnaire, on voit aussi deux solutions périodiques centrées évaluées aux instants $t$ et $t+T$ , $T$ est la période de l'écoulement. . . . .	40
3.1	Déformation du front de la flamme . . . . .	46
3.2	Temps de référence $T_{ref}$ pour un cisaillement d'intensité $\lambda$ (normalisé par $S$ ) agissant sur une flamme initialement plane : valeurs numériques et diverses approximations asymptotiques. . . . .	48
3.3	Forme inacceptable pour un point de rebroussement qui devance la flamme . . . . .	52
3.4	Graphe de $S_{eN}(\frac{\omega}{\sqrt{\lambda}})$ pour divers valeurs de $\omega$ et de $\lambda$ (les points $\frac{\omega}{\sqrt{\lambda}}$ sont du domaine $(\omega, \lambda) \in [0.01; 1500] \times [0.1; 20]$ ) . . . . .	60
3.5	Un complet accord entre les résultats numériques et le modèle asymptotique rapide quand $\omega/\sqrt{\lambda} \gg 1$ . . . . .	61
3.6	Un complet accord entre les résultats numériques et la limite stationnaire lent . . . . .	62
3.7	Graphe de $\sigma(\frac{\omega}{\sqrt{\lambda}})$ pour divers valeurs de $\omega$ et des faibles intensités de cisaillement $\lambda$ (les points $\frac{\omega}{\sqrt{\lambda}}$ sont du domaine $(\omega, \lambda) \in [0.1; 100] \times [0.01; 2]$ ) . . . . .	63
3.8	Graphe de $\sigma(\frac{\omega}{\sqrt{\lambda}})$ et de $1 - S_{eN}$ pour diverses valeurs de $\omega$ et de $\lambda$ dans le régime lent, faible intensité de turbulence. . . . .	65

3.9	Les quatre valeurs de $\lambda$ qui ne couvrent pas les deux régimes du temps de références $T_{ref}$ . . . . .	66
3.10	Graphe de $1 - S_{e_N}$ en fonction du terme non-dimensionnel $\omega/\sqrt{\lambda}$ . . . . .	67
3.11	Graphe de $S_{e_N}$ en fonction du terme non-dimensionnel $\omega/\sqrt{\lambda}$ , régime lent, grande intensité de turbulence. . . . .	68
3.12	Graphe de $1 - S_{e_N}$ en fonction du terme non-dimensionnel $\omega^*T_{ref}(\lambda)$ . . . . .	69
3.13	Graphe de $1 - S_{e_N}$ en fonction de la fréquence $\omega$ . . . . .	70
3.14	Graphe de $S_{e_N}(\omega, \sqrt{\lambda})$ pour divers valeurs de $\omega$ mais de faibles valeurs de $\lambda$ . . . . .	71
3.15	Comparaison entre les résultats numériques de $S_{e_N}(\omega, \sqrt{\lambda})$ pour des grandes valeurs de $\lambda$ avec les données de la théorie rigoureuse . . . . .	72

2

Marcelle et Georges

# Remerciements

A tout ceux qui ont aidé ou participé a accomplir ce mémoire, voila, c'est le moment de vous dire MERCI!

Principalement, c'est ma directrice de recherche, Prof. Anne Bourlioux, que je remercie. Anne, c'est grâce a votre support le long de mon travail, vos précieux conseils et remarques que j'ai réussi ce diplôme.

Je remercie tous les professeurs du "DMS", le corps administratif, et bien sûr les amis au département.

Je remercie tous les amis CERCA, tout particulièrement les collègues du "476"! Boualem tes conseils et suggestions professionnels m'ont aidé beaucoup. Oleg, toi aussi, en plus de tes suggestions, ta profonde connaissance du plan informatique a facilité ma job et m'a appris tant de choses.

A vous tous un Grand Merci.

# Chapitre 1

## Objectifs du travail

### 1.1 Motivation

Nous simulons le phénomène de la combustion turbulente afin de mieux prédire le comportement des flammes, leur apport énergétique et la pollution qui en résulte. On modélise le mécanisme de la propagation du front de la flamme avec un mélange (combustible et air) dans un champ d'écoulement donné. Le régime de flammelettes est caractérisé par le fait que l'épaisseur de la flamme est très petite par rapport aux échelles représentatives de la turbulence. Ainsi le front de la flamme peut être représenté par une interface séparant les gaz brûlés et les gaz non-brûlés. La principale conséquence d'une perturbation de l'écoulement est le plissement du front de la flamme, ce qui provoque une augmentation de la vitesse de combustion. Une explication qualitative de cette augmentation est que la flamme plissée a une zone de réaction plus grande. Dans le modèle d'une flamme infiniment mince, le front turbulent de la flamme apparaît comme étant une combinaison de portions de flammes laminaires attenant les unes aux autres.



On trouve les flammes prémélangées entre autre dans les brûleurs à gaz domestiques. Le gaz se mélange avec l'air à l'intérieur du poêle et dû à la pression dans les tubes, le mélange sort à la surface où la combustion prend place. Quand l'écoulement est laminaire, la flamme est lisse, elle conserve une certaine forme le long du phénomène et se stabilise à cause de la compensation entre sa vitesse de propagation et celle de l'écoulement du mélange air-gaz. La figure 1.1 est un exemple d'une turbine à gaz. Il est très similaire au principe du poêle à gaz domestique, les deux gaz (combustible et air) sont injectés dans la zone de pré-mélange où la turbulence de l'écoulement favorise le mélange avant l'arrivée à la zone de combustion.

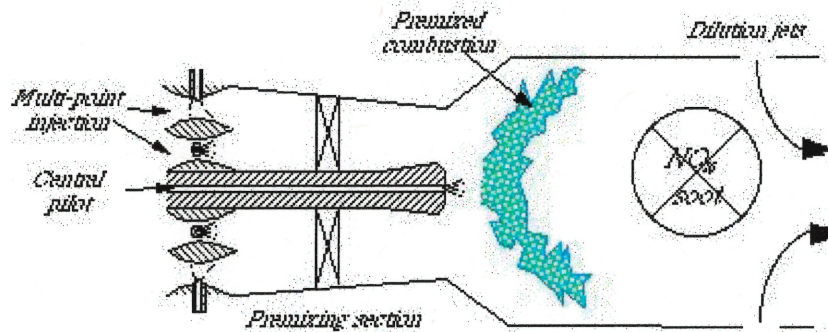


Figure 1.1 – Turbine à gaz [22]

Les moteurs à allumage par étincelle constituent un autre exemple. Le fuel et l'oxydant sont mélangés par la turbulence provoquée par l'injection du fuel dans le cylindre, les deux substances sont mélangées bien avant qu'une étincelle amorce la combustion.

## 1.2 Formulation mathématique du problème

Dans ce mémoire, on modélise numériquement le phénomène de la combustion prémélangée. On essaie de trouver des modèles pour le comportement de l'augmentation de la vitesse de combustion causée par les plissements du front dûs à la turbulence de l'écoulement. Cette vitesse de combustion turbulente est une quantité très importante pour modéliser correctement le comportement de la flamme.

Dans le modèle de l'équation  $G$ , la vitesse de propagation d'une flamme se calcule en fonction de la surface de son front. Ceci est difficile à calculer avec précision à cause des plissements qui résultent de la dynamique du front aux petites échelles.

Voyons en détails la présentation de la fonction  $G$  qui modélise la propagation et l'advection du front de la flamme.

En deux dimensions, le front de la flamme est une courbe plane. La méthode des iso-surfaces nous permet de le suivre numériquement en l'identifiant au temps  $t$  comme étant la courbe de niveau zéro d'une fonction  $G(x, y, t)$ . Au temps initial, il faut spécifier  $G_0 = G(x, y, t = 0)$  : un choix possible est celui de la distance signée entre un point  $P(x, y)$  et le front de la flamme en  $t = 0$ , (par exemple dans le cas d'une flamme, prendre  $G$  positif du côté des gaz brûlés, négatif de l'autre côté). Le front est alors donné par :

$$\xi = \{(x, y) \text{ tel que } G(x, y, t) = 0\} \quad (1.1)$$

La fonction  $G$  la plus simple est obtenue en considérant la distance horizontale. Avec un écoulement de la forme  $\vec{V} = (u(y, t) = \lambda \sin \frac{2\pi y}{P} \cos \omega t, 0)$ , on s'attend à ce que le front soit

le graphe d'une fonction de  $y$  ce qui permet de spécifier la fonction  $G$  sous la forme :

$$G(x, y, t) = -x + G_1(y, t) \quad (1.2)$$

où  $G_1(y, t)$  une fonction périodique en  $y$ . En tenant compte du fait que le front de la flamme est le niveau zéro de la fonction  $G$ , il sera représenté alors par l'équation :

$$x = G_1(y, t) \quad (1.3)$$

La figure 1.2 représente les divers niveaux de la fonction d'iso-surface  $G$ .

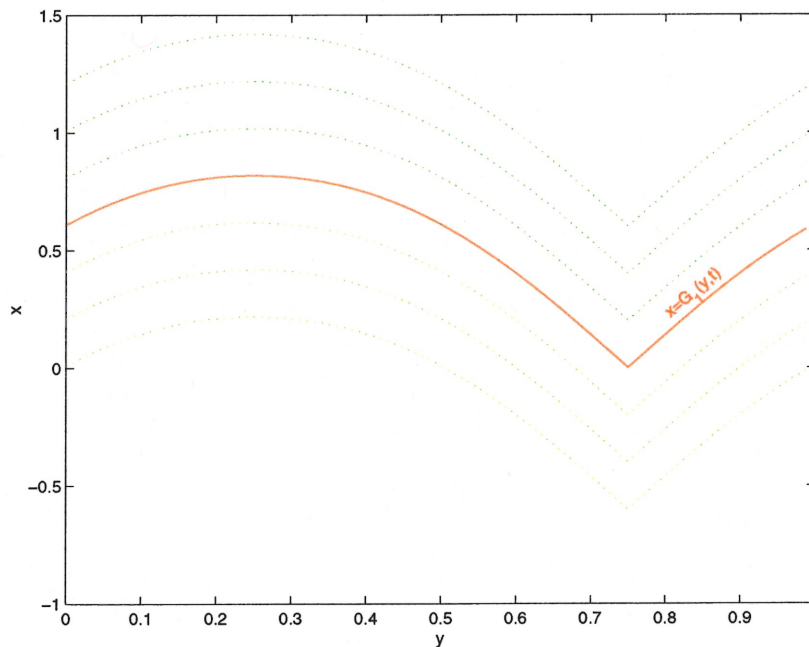


Figure 1.2 – Différents niveaux de la fonction  $G$  ; le niveau zéro est en ligne pleine

En partant de l'hypothèse que la propagation de la flamme est due à la réaction chimique

et à l'advection par le champ de vitesse, Williams et al. [21] ont démontré que le front de la flamme obéit au principe de Huygens. Plus précisément, ils ont montré par un développement asymptotique formel que le front de la flamme aux grandes échelles peut être considéré comme étant le niveau zéro de la solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$G_t + \vec{V} \cdot \nabla G = S_L |\nabla G| \quad (1.4)$$

avec  $\vec{V}$  le champ de vitesse de l'écoulement et  $S_L$  la vitesse de combustion laminaire. Cette équation (1.4) sera connue par la suite sous le nom de l'équation G.

Ainsi l'onde de combustion se propage normalement à elle-même avec la vitesse  $S_L \vec{n} - \vec{V}$ , où  $\vec{n} = \frac{\nabla G}{|\nabla G|}$  est le vecteur unitaire normal au front de la flamme. Cette méthode est connue sous le nom de la méthode des iso-surfaces ("level set method"). La méthode des iso-surfaces peut aussi servir à résoudre le problème de croissance de cristaux ou celui du mouvement des bulles du savon. Elle est particulièrement adaptée dans les cas où la position de la frontière mobile se déforme de façon complexe. La caractéristique principale des problèmes de propagation des fronts est que la position instantanée de la frontière influence l'évolution du processus. Ainsi il est fondamental de connaître la position du front à chaque instant. Cette approche est robuste même lorsque le front de la flamme change de topologie.

L'équation différentielle qui modélise la dynamique du front de la flamme décrit l'influence des mécanismes suivants :

- l'advection due à l'écoulement du mélange air-fuel.
- la diffusion et la réaction chimique, ces deux mécanismes combinés entraînent une propa-

gation du front normalement à lui même avec une vitesse  $S_L$ .

Considérons tout d'abord l'advection due à l'écoulement  $\vec{V}$ . Pour un point quelconque  $(x_o, y_o)$  de la courbe de niveau  $G(x, y, t) = C$ , soit  $X(t) = (x(t), y(t))$  la trajectoire qui suit l'écoulement  $\vec{V}$ . Ainsi, pour tout  $t$  on a  $G(X(t), t) = C$ .

Par différenciation, on obtient :

$$DG(X(t), t) = DC = 0 = G_t + \nabla G \cdot \frac{\partial X}{\partial t} \quad (1.5)$$

Puisque la trajectoire  $X(t)$  du point  $(x_o, y_o)$  suit l'écoulement, ceci entraîne

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \vec{V} \quad (1.6)$$

Ainsi l'équation différentielle décrivant l'advection due à l'écoulement sera :

$$G_t + \vec{V} \cdot \nabla G = 0 \quad (1.7)$$

Dans le cas de la combustion, le front se propage dans la direction du vecteur

$$\vec{n} = \frac{-\nabla G}{|\nabla G|} \quad (1.8)$$

normal à sa surface, avec une vitesse laminaire  $S_L$ .

Soit encore  $X(t) = (x(t), y(t))$  la trajectoire d'un point  $(x, y)$  de la courbe de niveau  $G(X(t), t) = C$  et subissant la propagation selon la normale  $\vec{n}$  avec une vitesse  $S_L$ .

La vitesse suivant la normale doit être de valeur  $S_L$  :

$$\frac{\partial X}{\partial t} = S_L \vec{n} = S_L \frac{-\nabla G}{|\nabla G|} \quad (1.9)$$

Par substitution dans l'équation (1.7) et en ajoutant le terme d'advection, on obtient [20] l'équation de niveau  $G$  dont le niveau zéro modélise le front de la flamme.

$$G_t + \vec{V} \cdot \nabla G = S_L |\nabla G| \quad (1.10)$$

Malgré l'apparence très simple de cette équation (1.10), sa résolution numérique sous un régime turbulent est un problème difficile. En effet, la solution  $G$  n'est pas lisse, des points de rebroussement ("cusps", voir figure 1.3) peuvent apparaître sur les courbes de niveaux, en d'autres termes, des singularités pour  $\nabla G$  ! De plus, le champ de vitesse  $\vec{V}$  peut être très complexe et contenir un grand nombre d'échelles.

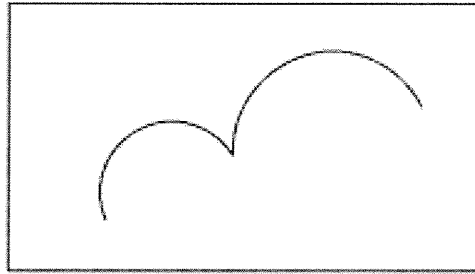


Figure 1.3 – Point de rebroussement

### 1.3 Résumé des résultats connus

L'étude du phénomène de la combustion a été l'objet de travaux de recherche depuis pas mal de temps : la modélisation du phénomène, l'interprétation de chacun de ses aspects dans leurs moindres détails restent des questions essentielles si on veut arriver à améliorer le rendement de la combustion en terme d'énergie et à minimiser la pollution qui en résulte.

Nous nous intéressons en particulier à deux études faites dans le même esprit que ce mémoire [4], [14]. Voici un résumé des principaux résultats de ces deux études.

Les auteurs de [4] ont étudié le comportement d'une flamme très mince soumise à un cisaillement modulé dans le temps, dans la direction normale à son front :

$$u(x, y, t) = (\lambda \cos \omega t \sin(2\pi y/P), 0) \quad (1.11)$$

où  $\lambda > 0$  est l'intensité du cisaillement et  $\omega$  est la fréquence de la modulation dans le temps. Soumise à un tel cisaillement, la flamme se déforme et à cause du plissement, sa vitesse globale  $S_T$  est plus grande que sa vitesse laminaire  $S_L$ . L'augmentation de la vitesse de combustion  $S_e$  est la différence entre la vitesse globale  $S_T$  et la vitesse de propagation laminaire  $S_L$  :

$$S_e = S_T - S_L \quad (1.12)$$

À la limite des petites fréquences  $\omega$ , l'expression de cette augmentation de vitesse  $S_{e_0}$  est connue. L'augmentation de la vitesse normalisée  $S_{e_N}$  sera définie comme étant le quotient  $S_{e_N} = S_e/S_{e_0}$ . L'étude dans [4] a identifié deux régimes pour  $S_{e_N}$  en fonction du nombre

sans dimension  $\frac{1}{\pi} \frac{P}{S_L} \frac{\omega/(2\pi)}{\sqrt{\lambda/S_L}}$ .

En prenant  $P = 1$  et  $S_L = 1$ , le terme sans dimension devient, à une constante près,  $\frac{\omega}{\sqrt{\lambda}}$ .

Le modèle utilisé pour le front de la flamme dans [4] est celui de la théorie rigoureuse de Majda et Souganidis [13], d'Embid et al. [15]. Ce modèle suppose que le nombre de Lewis est égal à un et que la chaleur libérée est faible. Ceci permet de décrire la propagation du front par une seule équation de réaction-diffusion-advection pour la température :

$$T_t + V \cdot \nabla T = \varepsilon \kappa \Delta T + \varepsilon^{-1} f(T) \quad (1.13)$$

L'épaisseur de la flamme est de l'ordre  $\varepsilon$ , elle résulte de la balance entre la faible diffusion d'ordre  $\varepsilon$  et la réaction rapide d'ordre  $\varepsilon^{-1}$ . La température est normalisée de sorte que  $T = 0$  dans la région non brûlée et  $T = 1$  de l'autre côté. Le terme de réaction  $f(T)$  doit répondre aux conditions KPP de Kolmogorov, Petrovski et Piskonov :

$$f \geq 0 \quad \forall x \in (0, 1) \quad f \leq 0 \quad \forall x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$$

$f(T) = KT(1-T)$  avec  $K \geq 0$  est un exemple de réaction qui vérifie les conditions ci-dessus.

La théorie non linéaire de Majda et Soudanidis explique l'évolution du front de la flamme à la limite où  $\varepsilon \rightarrow 0$  et lorsque le champ de vitesse dépend de deux échelles différentes.

$$V = \bar{V}(x, t) + u(x/\varepsilon^\alpha, t/\varepsilon^\alpha) \quad (1.14)$$

avec  $0 < \alpha < 1$ .



Les auteurs de [4] ont appliqué cette théorie au cas du champ d'écoulement de (1.11). Ils ont confirmé à l'aide d'une étude asymptotique l'observation que cette augmentation de vitesse passe par deux régimes distincts et ceci dépendamment de la fréquence  $\omega$  et de l'intensité  $\lambda$ . Les résultats numériques qu'ils ont obtenus sont en bon accord avec les régimes de leur étude asymptotique.

La seconde étude que nous résumons est celle d'Embid, Majda et Souganidis [14]. Les auteurs de cet article ont étudié la vitesse de propagation d'une flamme mince sous l'effet d'un cisaillement stationnaire et ont comparé les prédictions du modèle rigoureux avec celles de l'équation  $G$ , entre autre en fonction de l'angle entre la normale au front moyen et la direction du cisaillement.

Le problème est formulé comme suit. On suppose un champ d'écoulement de la forme :

$$V = \bar{\lambda}\bar{u} + \lambda(v(x_2/\varepsilon^\alpha), 0) \quad (1.15)$$

avec  $\bar{u} = (\cos \bar{\theta}, \sin \bar{\theta})$  la vitesse moyenne et  $v(y_2)$  une fonction de période un qui représente un champ de cisaillement à petite échelle aligné avec l'axe des ordonnées.  $\bar{\lambda}$  est l'intensité de l'écoulement moyen,  $\lambda$  est l'intensité de l'écoulement turbulent et  $\bar{\theta}$  est l'angle que fait l'écoulement moyen avec le cisaillement. Les auteurs ont cherché une solution  $G$  sous la forme d'une expansion asymptotique :

$$G = G^0(x, t) + \varepsilon^\alpha G^1(x, x/\varepsilon^\alpha, t) + \dots \quad (1.16)$$

ceci nous ramène à un problème de valeur propre non-linéaire similaire à celui discuté dans [13] et [20]. L'équation effective de la moyenne non-linéaire de l'équation  $G$  est :

$$G_t^0 + U(\nabla_x G^0, x) = 0. \quad (1.17)$$

Dans la limite où  $\varepsilon \rightarrow 0$ , des équations algébriques explicites pour la vitesse effective  $U(n)$  de la flamme ont été obtenues en fonction de la direction de la normale au front  $n = (\cos \theta, \sin \theta)$ . Il n'existe pas de solution analytique explicite pour  $U$  mais cette vitesse peut être calculée facilement avec des outils numériques classiques comme la recherche des zéros d'une fonction algébrique et la méthode de quadrature pour l'intégration numérique. Sur la base de ces résultats, une étude a été complétée pour l'augmentation de la vitesse de la flamme en fonction de l'angle  $\theta$  comparé au cas où  $\lambda = 0$  calculée suivant :

$$U_e = U - 1 - \bar{\lambda} \cos(\theta - \bar{\theta}) \quad (1.18)$$

La comparaison des prédictions de la théorie non-linéaire rigoureuse [13] avec celles obtenues à partir de l'équation  $G$  pour un champ d'écoulement du type (1.15) est présentée dans [14]. Avant de résumer les résultats de cette comparaison, on donne un aperçu de la théorie non-linéaire [13].

Cette théorie a pour but de calculer l'augmentation de vitesse à partir de l'équation d'advection-réaction-diffusion (1.13) en utilisant les méthodes asymptotiques. Cette analyse nous mène à une équation aux dérivées partielles non-linéaire de type Hamilton-Jacobi avec une valeur

propre  $H$  (le hamiltonien effectif). La vitesse de propagation est obtenue en minimisant une fonction de  $H$ . Résoudre le problème de valeur propre non linéaire est un défi numérique [4].

Substituant le champ de vitesse (1.15) dans l'équation (1.13), on obtient :

$$T_t + V(x, y, \frac{x}{\varepsilon^\alpha}, \frac{y}{\varepsilon^\alpha}) \cdot \nabla T - \varepsilon D\Delta T = \varepsilon^{-1} f(T) \quad (1.19)$$

La fonction  $f$  est supposée du type "KPP". Les auteurs de [13] proposent la substitution  $T = e^{\frac{Z^\varepsilon}{\varepsilon}}$  ce qui donne :

$$Z_t^\varepsilon + V(x, y, \frac{x}{\varepsilon^\alpha}, \frac{y}{\varepsilon^\alpha}) \cdot \nabla Z^\varepsilon - \varepsilon D\Delta Z^\varepsilon - D|\nabla Z^\varepsilon|^2 = T^{-1} f(T) \quad (1.20)$$

Dans la limite où  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la linéarisation du terme de réaction ainsi que les techniques asymptotiques des méthodes de viscosité donnent une inégalité variationnelle :

$$\max(Z_t^\varepsilon - H(\nabla Z^\varepsilon, x, y, t) - f'(0), Z^\varepsilon) = 0 \quad (1.21)$$

où  $H$  est l'unique valeur propre pour laquelle on peut résoudre :

$$D|\nabla Z + \nabla \omega|^2 - (V_1 + \lambda v(y/\varepsilon^\alpha), V_2) \cdot (\nabla Z + \nabla \omega) = H(\nabla Z, x, y, t) \quad (1.22)$$

avec  $Z^\varepsilon = Z + \omega$ ,  $Z$  étant la moyenne et  $\omega$  une fonction bi-périodique de moyenne nulle.

Le front de la flamme est la frontière de l'ensemble

$$\{\xi = (x, y) \text{ tel que } Z(x, y, t) < 0\}$$

Sous certaines hypothèses sur l'écoulement moyen, le front obéit à un principe de Huygens. On prend alors  $\nabla Z = (P_1, P_2) = -r(\cos(\theta), \sin(\theta))$ , où  $\theta$  est l'angle de la normale avec l'axe des abscisses et  $r$  est un réel positif qui est déterminé lors du calcul de la vitesse du front suivant la formule ([14], [20]) :

$$S = \min_{r>0} \left( \frac{f'(0) + H(-r(\cos(\theta), \sin(\theta)), x, y)}{r} \right) \quad (1.23)$$

Ceci nous permet de déduire l'augmentation de la vitesse due à la perturbation :

$$S_e = S - (V_1, V_2) \cdot (\cos(\theta), \sin(\theta)) - S_L \quad (1.24)$$

Les résultats de la comparaison entre les deux modèles sont les suivants.

Dans tous les cas, la théorie du front moyen de l'équation G sous-estime la vitesse de la flamme obtenue comparé à la théorie non-linéaire rigoureuse.

Quand la composante transversale de la moyenne relative au cisaillement est inférieure à l'unité, la différence entre les prédictions est minime ; on a un bon accord qualitatif entre les prédictions.

Par contre, quand la composante transversale moyenne est plus grande que un, la différence relative entre les prédictions peut être très significative.

## 1.4 Objectif principal de ce mémoire et stratégie détaillée

Le but de ce mémoire est l'étude du comportement de l'augmentation de la vitesse normalisée du front de la flamme modélisé par la courbe de niveau zéro d'une équation du type

Hamilton-Jacobi connue sous le nom de l'équation  $G$  et ceci dans le cas d'un écoulement modulé dans le temps du type cisaillement non stationnaire.

Il s'agit donc de généraliser au cas d'un cisaillement non stationnaire la comparaison faite dans [14] pour le cas stationnaire en se limitant au cas où le front est perpendiculaire au cisaillement. On compare donc les prédictions de l'équation  $G$  avec celles obtenues pour le modèle rigoureux [4]. Cette comparaison sera faite sur la base de résultats numériques et sur la base d'une analyse asymptotique formelle.

La stratégie qu'on a suivie au cours du travail est la suivante.

Au second chapitre du mémoire, on met au point une méthode numérique pour générer les données dont nous aurons besoin pour la comparaison. Il s'agit d'un schéma essentiellement non-oscillatoire [1] d'ordre élevé pour résoudre le système différentiel du type Hamilton-Jacobi. La connaissance de la solution dans le cas d'un cisaillement du type stationnaire sera utile pour la validation du schéma en comparant la solution numérique et la solution analytique exacte. Une autre validation par raffinement du maillage sera faite pour le calcul de l'ordre du schéma dans le cas non stationnaire.

Au troisième chapitre, on produit des résultats numériques à partir des solutions du système différentiel. On calcule tout d'abord le temps de référence basé sur le problème de valeur initiale dans le cas d'un écoulement stationnaire. On calcule ensuite l'augmentation de la vitesse normalisée, dans le cas d'un écoulement non stationnaire et on vérifie les différents régimes par rapport aux variables physiques du problème.

Un développement asymptotique est alors présenté dans le but de valider chacun des régimes pour les valeurs extrêmes de la période  $\omega$  (dans les limites de la fréquence  $\omega$  très grande ou très petite).

Sur la base de ces résultats numériques et asymptotiques nous comparons en détail les prédictions du modèle rigoureux et celui de l'équation  $G$  en ce qui concerne l'augmentation de la vitesse normalisée : limite stationnaire, similarité et régimes distincts.

## Chapitre 2

# Outils Numériques

Dans ce deuxième chapitre, nous présentons un schéma aux différences finies d'ordre élevé, de type non-oscillatoire, permettant le calcul des solutions de l'équation G :

$$G_t + \vec{V} \cdot \nabla G = S_t |\nabla G| \quad (2.1)$$

Les solutions de cette équation nous permettent de suivre la propagation du front de la flamme. Le front est identifié comme étant le niveau zéro de la fonction G. À part la forme du front de la flamme, on pourra à partir des solutions de l'équation (2.1), calculer la vitesse de propagation normale du front (voir chapitre trois).

Dans la première section on présente une brève description des équations de type Hamilton-Jacobi. Dans la deuxième section, on présente la méthode d'interpolation (ENO) permettant d'obtenir l'ordre élevé dans l'espace de la solution ceci en calculant le polynôme d'interpolation d'ordre correspondant à l'aide d'un stencil optimisé. Dans la troisième section on présente un schéma de type TVD Runge-Kutta assurant une solution d'ordre élevé dans le

temps, pour plus tard le combiner avec la procédure (ENO) et obtenir un schéma d'ordre élevé dans l'espace et dans le temps.

On présentera un algorithme applicable dans le cas où la solution du système différentiel admet des points de rebroussement ("cusps" en anglais, là où la dérivée est discontinue).

On note que [1] suggère un second algorithme applicable lorsque les points de rebroussement sont absents. Ce second algorithme est moins coûteux sur le plan calcul. Pour les problèmes qui nous concernent, c'est le premier algorithme qui nous intéresse le plus car le front de la flamme possède fréquemment des points de rebroussement.

Finalement, dans la troisième partie, on applique le schéma numérique à l'équation  $G$ , on suit graphiquement l'évolution du front de la flamme pour un écoulement de type cisaillement stationnaire et un autre non stationnaire. On présente la validation de la méthode. Pour le cas stationnaire, la comparaison de la solution numérique avec la solution analytique permet de vérifier l'ordre de convergence de la solution numérique pour  $G$  et ensuite la convergence de la vitesse de propagation.

On refait le même travail pour le cas non stationnaire sauf que dans ce cas on ne connaît pas la solution analytique, on vérifie l'ordre de convergence (espace-temps) de la solution et on vérifie aussi la convergence de la vitesse de propagation en calculant la vitesse instantanée et la vitesse moyenne le long d'une période de temps du cisaillement de l'écoulement.



## 2.1 Généralités sur les méthodes numériques pour les équations d'Hamilton-Jacobi

L'équation (2.1) s'écrit sous la forme :

$$\phi_t + H(\phi_{x_1}, \dots, \phi_{x_d}) = 0, \quad \phi(x, 0) = \phi_0(x) \quad (2.2)$$

où  $\phi = \phi(x_1, \dots, x_d, t)$  est définie sur  $\mathbb{R}^d \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$

et les  $\phi_{x_i}$  pour  $i = 1, \dots, d$  désignent les dérivées partielles spatiales.

Les solutions de (2.2) sont continues mais leurs dérivées peuvent être discontinues même si on part avec une condition initiale  $\phi_0(x)$  de classe  $C^\infty$ .

Une classe de méthodes numériques pour résoudre (2.2) est celle des schémas monotones présentée par Crandall et Lions [6]. De tels schémas monotones convergent vers la solution de viscosité. Malheureusement, les schémas monotones sont au plus d'ordre un. Les méthodes traditionnelles d'ordre élevé, ne conviennent pas avec ce genre de problème car on voit paraître des oscillations là où les dérivées sont discontinues.

L'équation (2.2) est similaire à la loi de conservation hyperbolique

$$u_t + \sum_{i=1}^d f_i(u)_{x_i} = 0 \text{ avec } u(x, 0) = u_0(x) \quad (2.3)$$

En fait, pour le cas unidimensionnel  $d = 1$ , (2.2) est équivalent à (2.3) en prenant  $u = \phi_x$ .

Pour le cas multi-dimensionnel, on perd cette correspondance mais on continue à sentir que

(2.2) est une intégration de (2.3). Ainsi, les schémas numériques pour les lois de conservation hyperboliques, doivent aussi être applicables aux équations du type Hamilton-Jacobi.

Les schémas (ENO) essentiellement non oscillatoires sont de bons outils pour résoudre les problèmes avec lois de conservation hyperboliques (2.3) ([7], [8], [9] et [10]). L'idée est d'appliquer une interpolation adaptative en prenant automatiquement les informations des régions locales les plus lisses et en calculant des approximations essentiellement non oscillatoires d'ordre élevé pour des fonctions lisses par parties.

## 2.2 Méthode basée sur l'interpolation ENO

Voici ci-dessous en résumé la description de de la procédure d'interpolation ENO.

Étant données les valeurs  $f(x_j), j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  d'une fonction (lisse par partie) aux points discrets  $x_j$ , on associe alors à chaque intervalle  $[x_j, x_{j+1}]$  le polynôme  $P_{j+1/2}^{f,r}(x)$  de degré  $r$ , construit par induction comme suit :

$$P_{j+1/2}^{f,1}(x) = f[x_j] + f[x_j, x_{j+1}](x - x_j), \quad k_{min}^1 = j; \quad (1)$$

$$\text{si } k_{min}^{l-1} \text{ et } P_{j+1/2}^{f,l-1}(x) \text{ sont tous les deux définies, alors on pose} \quad (2)$$

$$a^{(l)} = f[x_{k_{min}^{l-1}}, \dots, x_{k_{min}^{l-1}+l}] \quad (2.4)$$

$$b^{(l)} = f[x_{k_{min}^{l-1}-1}, \dots, x_{k_{min}^{l-1}+l-1}] \quad (2.5)$$

et,

$$\text{si } \|a^{(l)}\| \geq \|b^{(l)}\|, \text{ on pose } c^{(l)} = b^{(l)} \text{ et } k_{min}^l = k_{min}^{l-1} - 1, \quad (i)$$

sinon

$$c^{(l)} = a^{(l)}, k_{min}^l = k_{min}^{(l-1)}$$

$$P_{j+1/2}^{(f,l)}(x) = P_{j+1/2}^{(f,l-1)}(x) + c(l) \prod_{i=k_{min}^{(l-1)}+l-1}^{k_{min}^{(l-1)}+l-1} (x - x_i) \quad (\text{ii})$$

Le terme  $f[., \dots, .]$  de la procédure ci-dessus n'est autre que la différence divisée de Newton.

On note qu'on peut à partir d'un point  $x_j$  construire un polynôme  $P_j^{f,r}(x)$  moyennant cette même procédure. On rappelle que le calcul des  $f[., \dots, .]$  se fait comme suit :

$$\begin{aligned} f[x_i] &= f(x_i) \\ f[x_{i-1}, x_i] &= \frac{f[x_{i-1}] - f[x_i]}{x_{i-1} - x_i} \\ f[x_0, x_1, \dots, x_n] &= \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \end{aligned}$$

### 2.2.1 Construction du schéma

Pour simplifier la présentation du schéma, on considère le cas  $d = 1$  dans (2.2) et on considère juste la variable spatiale  $y$  à la place des  $x_i$  :

$$\phi_t + H(\phi_y) = 0, \quad \phi(y, 0) = \phi_0(y) \quad (2.6)$$

Pour des pas spatial et temporel respectifs  $\Delta y$  et  $\Delta t$ ,  $\phi_i^n$  représente la solution  $\phi(i\Delta y, n\Delta t)$  de (2.6). On utilise aussi des notations standards comme

$$\lambda_y = \frac{\Delta t}{\Delta y}, \quad \Delta_{\pm}^y = \pm(\phi_{i\pm 1} - \phi_i).$$

Le schéma monotone de premier ordre est donné par :

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \Delta t \hat{H} \left( \frac{\Delta_y^+ \phi_i^n}{\Delta y}, \frac{\Delta_y^- \phi_i^n}{\Delta y} \right) \quad (2.7)$$

où  $\hat{H}$  est un flux Lipschitzien continue, monotone et consistant avec  $H$  :

$$\hat{H}(u, u) = H(u)$$

La monotonie ici signifie que  $\hat{H}$  est décroissant en sa première composante et croissante en sa deuxième. Symboliquement,  $\hat{H}(\downarrow, \uparrow)$ . Un des flux remplissant les conditions ci-dessus est celui de Roe avec la correction d'entropie de Lax Friedrichs [10] :

$$\hat{H}^{\text{RF}}(u^+, u^-) = \begin{cases} H(u^*) & \text{si } H_1(u) \text{ ne change pas de signe} \\ & \text{pour } u \in I(u^-, u^+),^1 \\ \hat{H}^{\text{LLF}}(u^+, u^-) & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.8)$$

Où

$$u^* = \begin{cases} u^+ & \text{si } H_1(u) \leq 0,^2 \\ u^- & \text{si } H_1(u) \geq 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

Le flux local de Lax Friedrichs est donné par :

$$\hat{H}^{\text{LLF}}(u^+, u^-) = H \left( \frac{u^+ + u^-}{2} \right) - \frac{1}{2} \alpha^y(u^+, u^-) (u^+ - u^-) \quad (2.10)$$

---

<sup>1</sup> $I(a, b)$  représente l'intervalle  $[\min(a, b), \max(a, b)]$

<sup>2</sup> $H_i = \frac{\partial H}{\partial x_i}$  représente la dérivée de  $H$  par rapport à la  $i^{\text{ème}}$  composante spatiale

avec

$$\alpha^y(u^+, u^-) = \max_{u \in I(u^-, u^+)} |H_1(u)| \quad (2.11)$$

On rappelle que l'ordre supérieur dans l'espace est obtenu par la procédure d'interpolation ENO présentée précédemment.

Pour l'ordre élevé dans le temps, on applique une procédure de discrétisation temporelle de type TVD Runge-Kutta [9]. On donne dans la suite un algorithme assurant un schéma essentiellement non oscillatoire d'ordre élevé pour la solution des équations du type Hamilton-Jacobi. Mais avant, voici quelques exemples de flux monotones  $\hat{H}$  en deux dimensions :

(1) Lax-Friedrichs [6] :

$$\hat{H}^{LF}(u^+, u^-, v^+, v^-) = H\left(\frac{u^+ + u^-}{2}, \frac{v^+ + v^-}{2}\right) - \frac{1}{2}\alpha^x(u^+ - u^-) - \frac{1}{2}\alpha^y(v^+ - v^-) \quad (2.12)$$

où

$$\alpha^x = \max_{\substack{A \leq u \leq B \\ C \leq v \leq D}} |H_1(u, v)| \quad \alpha^y = \max_{\substack{A \leq u \leq B \\ C \leq v \leq D}} |H_2(u, v)| \quad (2.13)$$

Ici  $H_i(u, v)$  est la dérivée partielle de  $H$  par rapport à la  $i^{eme}$  composante. Le flux  $\hat{H}^{LF}$  est monotone pour  $A \leq u^\pm \leq B$ ,  $C \leq v^\pm \leq D$ .

(2) Godunov [11] :

$$\hat{H}^G(u^+, u^-, v^+, v^-) = \text{ext}_{u \in I(u^+, u^-)} \text{ext}_{v \in I(v^+, v^-)} H(u, v) \quad (2.14)$$

où

$$I(a, b) = [\min(a, b), \max(a, b)] \quad (2.15)$$

et la fonction “ext” est définie par :

$$\text{ext}_{u \in I(a,b)} \begin{cases} \min_{a \leq u \leq b} & \text{si } a \leq b \\ \max_{b \leq u \leq a} & \text{si } b > a \end{cases} \quad (2.16)$$

Généralement,  $\min_u \max_v H(u, v) \neq \max_u \min_v H(u, v)$ , ainsi on va obtenir différentes versions de flux  $\hat{H}^G$  du type Gudonov en changeant l'ordre de min et max. On a unicité du flux  $\hat{H}^G$  quand par exemple  $H(u, v) = H^1(u) + H^2(v)$ , et dans plusieurs autres cas. Ainsi, d'après [11],  $-t\hat{H}^G(u, v)$  est la solution exacte du problème de Riemann de (2.6), en d'autres termes, c'est la solution de viscosité de (2.6) pour

$$\phi_o(x, y) = xu_o(x) + yv_o(y)$$

$$u_o(x) = \begin{cases} u^+ & \text{si } x \geq 0 \\ u^- & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad v_o(y) = \begin{cases} v^+ & \text{si } y \geq 0 \\ v^- & \text{si } y < 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

calculée au point  $(x, y) = (0, 0)$  et  $t > 0$ .

Ainsi, tout flux monotone pourra être considéré comme une approximation du solveur de Riemann dans ce sens.

(3) Flux local de Lax-friedrichs [10] :

$$\hat{H}^{LLF}(u^+, u^-, v^+, v^-) = H\left(\frac{u^+ + u^-}{2}, \frac{v^+ + v^-}{2}\right) - \frac{1}{2}\alpha^x(u^+, u^-)(u^+ - u^-) - \frac{1}{2}\alpha^y(v^+, v^-)(v^+ - v^-) \quad (2.18)$$

où

$$\alpha^x(u^+, u^-) = \max_{\substack{u \in I(u^-, u^+) \\ C \leq v \leq D}} |H_1(u, v)| \quad \alpha^y = \max_{\substack{v \in I(v^-, v^+) \\ A \leq u \leq B}} |H_2(u, v)| \quad (2.19)$$

La monotonie de  $\hat{H}^{LLF}$  est démontrée dans [6] pour  $A \leq u^\pm \leq B$ ,  $C \leq v^\pm \leq D$ ; On note que  $\hat{H}^{LLF}$  est de plus petite dissipation que  $\hat{H}^{LF}$ .

L'algorithme qu'on va construire dans la suite fait appel au le flux  $\hat{H}^{RF}$  de Roe avec la correction d'entropie de Lax-Friedrichs.

### Algorithme I

(1) Pour tous les points  $y_i$  et moyennant la procédure d'interpolation ENO présentée à la section 2.2, on calcule

$$u_i^\pm = \frac{d}{dy} P_{i\pm 1/2}^{\phi, r}(x_i) \quad (2.20)$$

On pose ensuite

$$L_i = -\Delta t \hat{H}(u_i^+, u_i^-) \quad (2.21)$$

(2) On calcule  $\phi^{n+1}$  à partir de  $\phi^n$  via la procédure :

$$\phi_i^{(k)} = \sum_{l=0}^{k-1} [\alpha_{kl} \phi_i^{(l)} + \beta_{kl} L_i^{(l)}], \quad k = 1, \dots, \bar{r}, \quad (2.22)$$

$$\phi_i^{(0)} = \phi_i^n, \quad \phi_i^{\bar{r}} = \phi_i^{n+1}. \quad (2.23)$$

En prenant  $r = \bar{r}$  et  $\alpha_{kl}$  et  $\beta_{kl}$  (tableau 2.1) positifs on peut atteindre l'ordre trois. Le schéma

(2.22)-(2.23) est TVD sous la condition CFL :

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta y} \leq C_r \lambda_0 \quad (2.24)$$

Ceci est vérifié si la version d'Euler de (2.21) est TVD sous la condition CFL :

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta y} \leq \lambda_0 \quad (2.25)$$

L'algorithme qu'on vient de présenter est de degré  $r$  dans le temps et l'espace là où la solution est lisse. Le tableau 2.1 donne les valeurs respectives de  $\alpha_{kl}$  et  $\beta_{kl}$  pour chacun des schémas d'ordre deux, trois et quatre.

Ordre	$\alpha_{kl}$	$\beta_{kl}$	$C_r$
2	$\begin{matrix} 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{matrix}$	1
3	$\begin{matrix} 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{matrix}$	1
4	$\begin{matrix} 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \end{matrix}$	$\frac{2}{3}$

Tableau 2.1 – Méthode TVD Runge-Kutta



## 2.3 Validation de la méthode

Nous appliquons maintenant le schéma numérique présenté dans la section 2.2.1 pour déterminer les solutions de l'équation  $G$  dans le cas unidimensionnel. Dans ce cas, on utilise la forme  $G(x, y, t) = -x + G_1(y, t)$  (voir (1.3)). En substituant dans l'équation  $G$ , on obtient une équation pour  $G_1$ . Pour simplifier la notation on remplace  $G_1$  par  $G$  et on obtient l'équation :

$$G_t - u(y, t) = S\sqrt{1 + G_y^2} \quad (2.26)$$

$G$  (anciennement  $G_1$ ) est donc fonction uniquement de la variable spatiale  $y$  et de la variable temporelle  $t$ .

$S = S_L$  est la vitesse laminaire de l'écoulement. Dans le reste de ce mémoire, on normalise pour que  $S = 1$ .

$u(y, t) = \lambda \cos(\omega t) \sin(\frac{2\pi y}{P})$  représente le cisaillement du mélange air-fuel, il est périodique dans l'espace et dans le temps de périodes respectives  $P = 1$  et  $\frac{2\pi}{\omega}$ ;  $\lambda$  est l'intensité maximale du cisaillement,  $\omega$  sa fréquence dans le temps. Le terme  $\cos \omega t$  rend l'écoulement non stationnaire. Pour le cas d'une turbulence avec un spectre déterminé, on pouvait envisager une dépendance de  $\lambda$  par rapport à  $\omega$ . Dans ce mémoire, chacune de ces variables varie indépendamment de l'autre, ainsi leur effet sur la vitesse de combustion sera identifié d'une manière systématique.

L'écoulement de type cisaillement stationnaire est observé lorsque  $\omega = 0$ . Les solutions de l'équation  $G$  dans de telles circonstances sont caractérisées par leur front stationnaire, autrement dit, la flamme prend une certaine forme et se déplace dans l'espace en conservant une même allure, on peut dire que son déplacement consiste en une translation linéaire par

rapport au temps  $t$ .

La condition initiale du système n'a pas d'influence sur la forme de la solution finale lorsque la convergence est établie. Son unique effet est sur la durée de la simulation avant que la première phase de convergence ait lieu. Plus nous partons avec une condition initiale similaire à la forme stationnaire, plus cette durée de convergence est petite. La figure 2.1 représente la condition initiale du système.

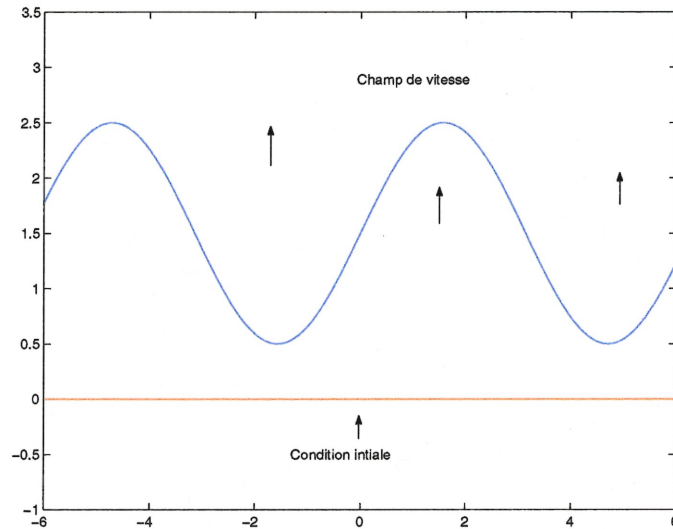


Figure 2.1 – Condition initiale du système et champ de vitesse

La condition initiale utilisée ( $G(y, 0) = G_0(y) = 0 \forall y$ ) est tout simplement un front linéaire orthogonal à la direction du cisaillement. On impose des conditions périodiques en  $y$ .

### 2.3.1 Comparaison avec la solution analytique dans le cas stationnaire (ordre de convergence dans l'espace)

Pour le cas stationnaire,  $\omega = 0$ , les simulations numériques montrent que la solution de l'équation  $G$  converge vers une fonction de la forme  $G(y, t) = S_T t + G_o(y)$  avec  $G_o(y)$  une

fonction périodique (par rapport à  $y$ ) de période un, de moyenne nulle et qui caractérise la forme du front de la flamme et  $S_T$  est la vitesse globale de propagation due à la combustion, l'advection moyenne de l'écoulement et l'augmentation de la vitesse causée par l'effet global des perturbations du cisaillement.

Prédire cette solution est un cas spécial du problème de valeur propre non-linéaire ("the flame cell problem") présenté dans [7]. La solution exacte de l'équation différentielle

$$G_t - u(y) = S\sqrt{1 + G_y^2} \quad (2.27)$$

se calcule analytiquement. On pose en premier lieu :

$$G = S_T t + \phi(y) \quad (2.28)$$

Par substitution dans (2.27) on obtient :

$$S_T - u(y) = S\sqrt{1 + \phi_y^2} \quad (2.29)$$

En tenant compte que  $u(y) = \lambda \sin \frac{2\pi y}{P}$ , on obtient :

$$S_T \geq S + \lambda \quad (2.30)$$

On résout le problème pour  $S_T = S + \lambda$ . Alors la solution doit être obtenue par (2.31). Si on trouve une solution pour  $\phi(y)$ ,  $S_T = S + \lambda$  est la solution cherchée.

$$\Phi(y) = \pm \int \sqrt{\left(1 + \frac{\lambda}{S} \left(1 - \sin \frac{2\pi y}{P}\right)\right)^2 - 1} dy \quad (2.31)$$

Le signe est négatif pour  $\frac{1}{4} \leq y/P \leq \frac{3}{4}$  et il est positif pour les autres valeurs de  $y$  de l'intervalle  $[0,1]$ . Le signe est choisi pour respecter les règles sur les solutions de viscosité.

$$\Phi(y) = \pm \frac{P}{\pi} (1 + \lambda/S) \left( \nu(y) \sqrt{1 - \nu(y)^2} + \arcsin(\nu(y)) \right) \quad (2.32)$$

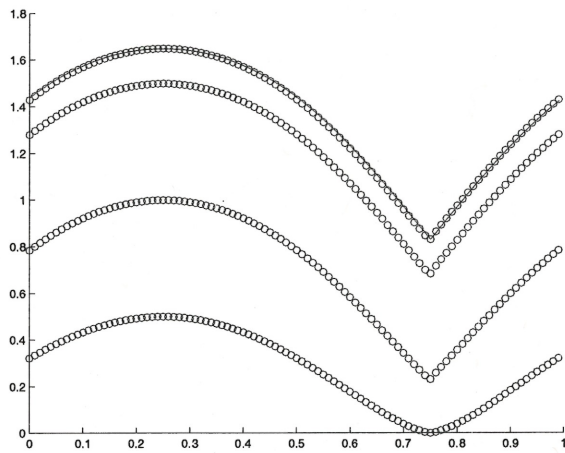
avec

$$\nu(y) = \frac{\cos\left(\frac{\pi(y-P/4)}{P}\right)}{\sqrt{\frac{1+\lambda/S}{\lambda/S}}} \quad (2.33)$$

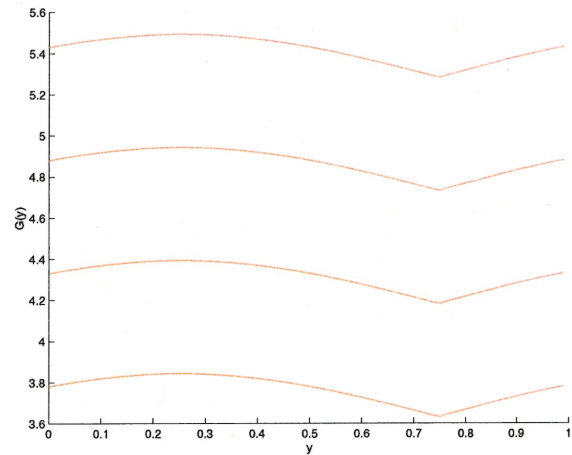
Les solutions de l'équation G dépendent du temps à cause du terme  $S_T t$ . Une fois que la convergence numérique est établie, les solutions successives deviennent les translatées les unes des autres suivant la vitesse turbulente. On note que la vitesse de propagation, dans le cas stationnaire, converge vers la somme de la vitesse laminaire  $S_L = S$  et de  $\lambda$  :  $S_T = S + \lambda$  [3].

Ainsi la position instantanée du front de la flamme sera déterminée en fonction du temps via la formule :

$$G(y, t) = G_o(y) + S_T t \quad (2.34)$$



(a) Les solutions avant convergence



(b) Solutions stationnaires

Figure 2.2 – Les différentes étapes des solutions de l'équation G. ( $\lambda = 1, S = 1$ )

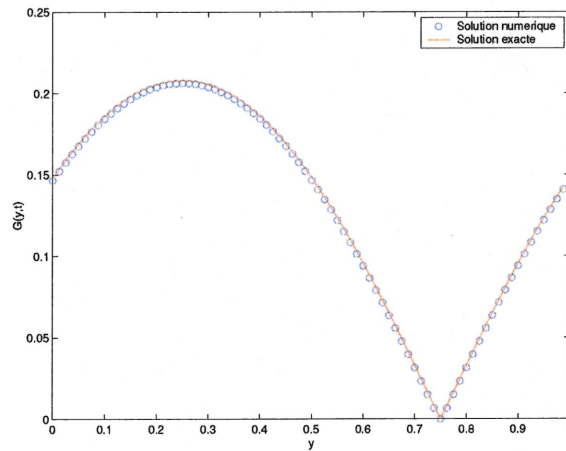


Figure 2.3 – La solution numérique est représentée en 'o' et la solution analytique en ligne plein

Les différentes étapes par lesquelles passent les solutions, en partant de la condition initiale plane jusqu'à convergence vers la solution analytique exacte, sont présentées par les figures

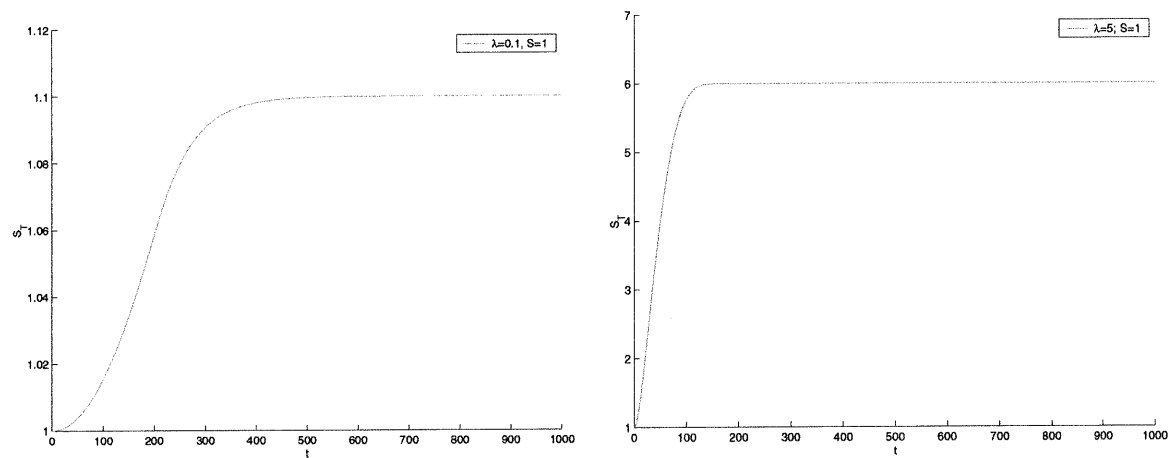
2.2 et 2.3.

La convergence de la vitesse de propagation numérique vers  $S_T$  est vérifiée par les figures 2.4 pour deux valeurs distinctes de  $\lambda$ .

On note que  $S_T$  se calcule numériquement à partir des solutions successives de l'équation (2.27) comme suit :

$$S_T = \frac{\langle G(y, t + \Delta t) \rangle - \langle G(y, t) \rangle}{\Delta t} \quad (2.35)$$

$\langle . \rangle$  est la moyenne par rapport à la variable spatiale  $y$  le long d'une période  $P$ ,  $G(y, t)$  et  $G(y, t + \Delta t)$  sont deux solutions successives. La figure 2.4 montre bien la convergence de la vitesse instantanée.



(a) Vitesse instantanée avec  $\lambda = 0.1$

(b) Vitesse instantanée avec  $\lambda = 5$

Figure 2.4 – Convergence de la vitesse  $S_T$  vers  $\lambda + S_L$  pour deux valeurs différentes de  $\lambda$

## Validation : convergence de la solution, convergence de la vitesse de propagation

L'étude de la convergence de la solution du système différentiel (2.6) sous le régime de flammelette avec écoulement turbulent et non stationnaire est réduite à la vérification numérique suivant une stratégie qui nous permet d'évaluer l'ordre de convergence de la solution quand on ignore la solution analytique du système différentiel ! Voici ci-dessous en résumé un aperçu de cette stratégie.

Cette stratégie est basée sur l'expansion asymptotique de l'erreur. Elle teste non seulement si l'erreur tend vers zéro quand le pas de discrétisation  $h$  tend vers zéro, mais si cette convergence se réalise précisément avec l'ordre prévu par la théorie.

Si  $A(h)$  est une approximation d'une certaine quantité  $A$  et fonction de la taille du pas (spatial ou temporel)  $h$ , l'erreur est  $E(h) = |A(h) - A|$ .

Une expansion asymptotique de l'erreur en terme des exposants de  $h$  est de la forme :

$$A(h) \approx A + h^{p_1} A_1 + h^{p_2} A_2 + \dots \quad \text{avec } p_1 < p_2 < p_3 \dots$$

et pour  $E(h)$

$$E(h) \approx h^{p_1} A_1 + h^{p_2} A_2 + \dots$$

Deux cas sont envisagés. Lorsqu'on connaît la solution exacte  $A$ , bien sûr on n'a pas besoin d'un code pour calculer numériquement cette solution, mais on peut cependant appliquer le code à ce problème dont la solution exacte est connue pour valider le code.

Si  $A$  est connue, on fait donc tourner le code avec des pas de taille  $h$  et  $2h$ , ce qui nous donne  $A(h)$  et  $A(2h)$ . On pourra donc déterminer les erreurs :

$$E(h) = |A(h) - A| \cong A_1 h^{p_1} + A_2 h^{p_2} + \dots$$

$$E(2h) = |A(2h) - A| \cong 2^{p_1} A_1 h^{p_1} + 2^{p_2} A_2 h^{p_2} + \dots$$

si le code est correct.  $E(h)$  est dominé par  $A_1 h^{p_1}$  de sorte que le quotient est approximativement :

$$R(h) = \frac{E(2h)}{E(h)} \cong 2^{p_1} \quad (2.36)$$

le nombre  $p_1$  désigne l'ordre de convergence de la solution.

Cette analyse de convergence s'applique aussi, même si la solution exacte  $A$  n'est pas connue. Dans ce cas, on aura besoin de trois approximations  $A(h)$ ,  $A(2h)$  et  $A(4h)$ . Encore une fois, on suppose l'existence d'une expansion asymptotique de la solution, on obtient alors pour les petites valeurs de  $h$  :

$$R'(h) = \frac{A(4h) - A(2h)}{A(2h) - A(h)} \cong 2^{p_1} \quad (2.37)$$

Nous avons fait les calculs de l'ordre en utilisant les norme  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$ , et  $\|\cdot\|_\infty$  ; On rappelle que si  $x \in R^n$ ,  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ ,  $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$  et  $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

Les résultats obtenus pour les schémas d'ordre deux et trois par rapport au pas spatial  $\Delta y$ , sont présentés dans les tableaux 2.2 et 2.3.

- Pour le calcul de l'ordre moyennant la solution exacte et des solutions numériques obtenues à partir de divers maillages, l'ordre supérieur n'est pas obtenu ici (tableau 2.2) à cause de la discontinuité de la dérivée de la solution. L'ordre est approximativement 1. Ceci n'est pas surprenant parce que on s'attend à cet ordre en présence de discontinuités [18].



Norme	$\ G_{exacte} - G(2h)\ _p$	$\ G_{exacte} - G(h)\ _p$	Ordre $\alpha$
$\ \cdot\ _1$	9.3992e-03	4.6959e-03	1.0011e+00
$\ \cdot\ _2$	5.1482e-03	2.5968e-03	9.8734e-01
$\ \cdot\ _\infty$	5.1081e-03	2.5869e-03	9.8155e-01

Tableau 2.2 – **Ordre numérique spatial du schéma du second ordre (après apparition des singularités)** ( $\omega = 0$  et  $\lambda = 2$ )

Par contre en calculant l'ordre avec des solutions numériques obtenues avant que les points de rebroussement apparaissent, l'ordre supérieur est obtenu comme prévu par la théorie.

Norme	$\ G_{4h} - G(2h)\ _p$	$\ G_{2h} - G(h)\ _p$	Ordre $\alpha$
$\ \cdot\ _1$	1.9453e-05	4.8850e-06	1.99363
$\ \cdot\ _2$	2.7749e-06	7.0259e-07	1.98169
$\ \cdot\ _\infty$	6.6558e-07	1.6769e-07	1.98879

Tableau 2.3 – **Ordre numérique spatial du schéma du second ordre (avant apparition des singularités)** ( $\omega = 0$  et  $\lambda = 2$ )

La figure 2.5 de l'erreur de la solution numérique par rapport à la solution exacte montre que la réduction de l'ordre numérique est bien due aux données des points voisins du point de rebroussement en  $y = \frac{3P}{4}$ .

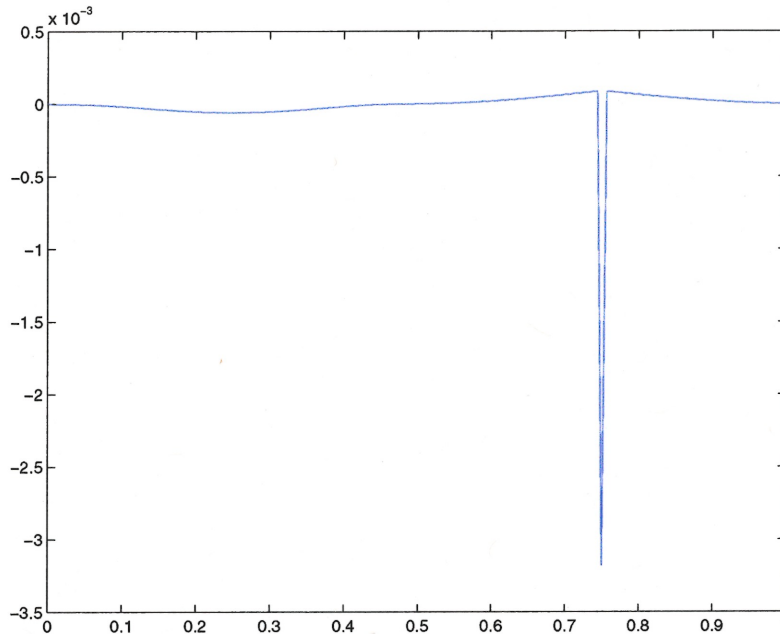


Figure 2.5 – **Graphe de l’erreur entre la solution exacte et la solution numérique**

Pour le schéma d’ordre trois, on observe à nouveau une réduction de l’ordre due à la présence du point de rebroussement.

En calculant l’ordre avec des solutions obtenues avant la formation des points de rebroussement, l’ordre supérieur est obtenu, les résultats que nous avons obtenus sont dans le tableau 2.4.

Norme	$\ G_{exacte} - G(2h)\ _p$	$\ G_{exacte} - G(h)\ _p$	Ordre $\alpha$
$\ \cdot\ _1$	4.7312e-08	5.9007e-09	3.00324e+00
$\ \cdot\ _2$	5.8702e-09	7.3334e-10	3.00086e+00
$\ \cdot\ _\infty$	9.5600e-10	1.1769e-10	3.02192e+00

Tableau 2.4 – **Ordre numérique spatial du schéma du troisième ordre (avant l’apparition des singularités) ( $\omega = 0$  et  $\lambda = 2$ )**

Les erreurs sont nettement plus petites qu’avec la méthode du deuxième ordre (tableau 2.2).

En utilisant la solution exacte pour le calcul de l’ordre (les points de rebroussement sont

présents dans ce cas!) l'ordre supérieur (tableau 2.5) se trouve réduit :

Norme	$\ G_{exacte} - G(2h)\ _p$	$\ G_{exacte} - G(h)\ _p$	Ordre $\alpha$
$\ \cdot\ _1$	4.5471e-03	2.2130e-03	1.03893e+00
$\ \cdot\ _2$	4.2973e-03	2.1506e-03	9.98671e-01
$\ \cdot\ _\infty$	4.2972e-03	2.1506e-03	9.98635e-01

Tableau 2.5 – **Ordre numérique spatial du schéma du troisième ordre (après l'apparition des singularités)** ( $\omega = 0$  et  $\lambda = 2$ )

Pour la convergence de la vitesse dans l'espace, les résultats correspondants sont résumés dans le tableau 2.6.

	Ordre dans l'espace
Schéma d'ordre deux	2.267
Schéma d'ordre trois	3.855

Tableau 2.6 – **Ordre numérique de la vitesse de propagation**,  $\omega = 0$  et  $\lambda = 2$

La vitesse est obtenue à partir de la moyenne de la solution pour  $G$ . On s'attend à ce que dans le pire des cas, l'ordre de la vitesse soit le même que l'ordre de  $G$ . Cependant, il se peut qu'il y ait une cancellation et que l'ordre de la vitesse soit plus élevé, ce qui est observé ici.

### 2.3.2 Étude de convergence pour un cas non stationnaire - ordre de convergence dans l'espace-temps

Contrairement à la section 2.3.1 où on a utilisé la solution exacte pour calculer l'ordre du schéma numérique, dans cette section on applique la méthode qui ne fait pas appel à la solution exacte, on utilise juste des solutions numériques obtenus à partir de différents maillages.

$$R'(h) = \frac{A(4h) - A(2h)}{A(2h) - A(h)} \approx 2^{p_1} \quad (2.38)$$

## Convergence de la solution

Les tableaux suivants présentent l'ordre de convergence dans le temps et dans l'espace des schémas numériques d'ordre deux et trois. Le calcul de l'ordre est fait en un instant avant que la discontinuité se forme.

Pour le calcul de l'ordre dans le temps des solutions obtenues à partir des schémas numériques d'ordre respectif deux et trois, on fixe le pas dans l'espace  $\Delta y$  et on calcule des solutions avec des pas temporels  $h = \Delta t, 2h = 2\Delta t$  et  $4h = 4\Delta t$ . Les résultats qu'on a obtenus se trouvent dans les tableaux 2.7 et 2.8.

Ordre deux dans le temps :

Norme	$\ G(4h) - G(2h)\ _p$	$\ G(2h) - G(h)\ _p$	Ordre $\alpha$
$\ \cdot\ _1$	1.0079e-05	2.5195e-06	2.0001e+00
$\ \cdot\ _2$	1.3794e-06	3.4483e-07	2.0001e+00
$\ \cdot\ _\infty$	2.5092e-07	6.2723e-08	2.0001e+00

Tableau 2.7 – **Ordre dans le temps du schéma du second ordre cas d'un cisaillement non stationnaire** ( $\omega = \pi/10$  et  $\lambda = 0.1$ )

Ordre trois dans le temps :

Norme	$\ G(4h) - G(2h)\ _p$	$\ G(2h) - G(h)\ _p$	Ordre $\alpha$
$\ \cdot\ _1$	2.7018e-16	2.5153e-17	3.425107
$\ \cdot\ _2$	3.5545e-17	3.4422e-18	3.368268
$\ \cdot\ _\infty$	6.5052e-18	8.6736e-19	2.996897

Tableau 2.8 – **Ordre dans le temps du schéma du troisième ordre cas d'un cisaillement non stationnaire** ( $\omega = \pi/10$  et  $\lambda = 0.1$ )

D'une façon similaire, pour calculer l'ordre dans l'espace des schémas d'ordre respectif deux et trois, on fixe le pas dans le temps  $\Delta t$  et on calcule trois solutions avec des pas dans l'espace  $h = \Delta y, 2h = 2\Delta y$  et  $4h = 4\Delta y$ . Les tableaux 2.9 et 2.10 résument les résultats que nous avons obtenus.

Ordre deux dans l'espace :

Norme	$\ G(4) - G(2h)\ _p$	$\ G(2h) - G(h)\ _p$	Ordre $\alpha$
$\ \cdot\ _1$	2.4980e-06	6.1975e-07	2.0110
$\ \cdot\ _2$	3.5694e-07	8.9029e-08	2.0033
$\ \cdot\ _\infty$	8.2621e-08	2.1178e-08	1.9638

Tableau 2.9 – **Ordre dans l'espace du schéma du second ordre cas d'un cisaillement non stationnaire** ( $\omega = \pi/6$  et  $\lambda = 2$ )

Ordre trois dans l'espace :

Norme	$\ G(4) - G(2h)\ _p$	$\ G(2h) - G(h)\ _p$	Ordre $\alpha$
$\ \cdot\ _1$	5.0796e-06	6.3351e-07	3.00327e+00
$\ \cdot\ _2$	5.6231e-07	7.0264e-08	3.00049e+00
$\ \cdot\ _\infty$	8.3233e-08	1.0303e-08	3.01400e+00

Tableau 2.10 – **Ordre dans l'espace du schéma du troisième ordre cas d'un cisaillement non stationnaire**, ( $\omega = \pi/10$  et  $\lambda = 2$ )

### Convergence de la vitesse de propagation

La vitesse de propagation du front de la flamme dans le cas d'un écoulement non stationnaire est une quantité d'importance majeure. Il est nécessaire de s'assurer de sa convergence pour plus tard essayer de trouver une interprétation de son comportement. Dans ce cas d'écoulement non stationnaire, la vitesse instantanée du front n'est plus primordiale, on s'intéresse plutôt à la vitesse moyenne le long d'une période de temps.

Comme pour le cas de combustion sous un écoulement stationnaire, on a vérifié la convergence de la vitesse de propagation sous un régime d'écoulement non stationnaire. La vitesse instantanée du front de la flamme est périodique par contre la vitesse moyenne du front le long d'une période tend vers une constante.

Les figures 2.6 et 2.7 montrent la convergence de la vitesse instantanée et de la vitesse moyenne le long d'une période  $P = \frac{2\pi}{\omega}$ .

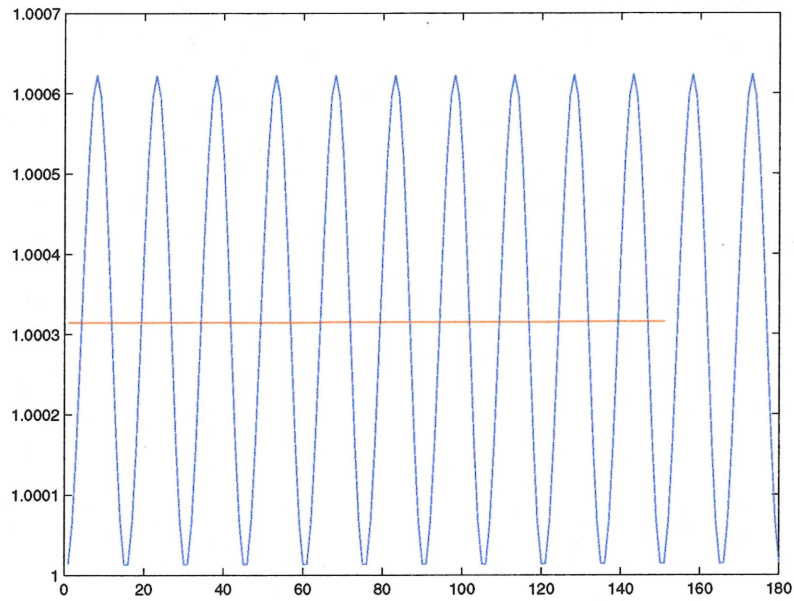


Figure 2.6 – Graphe de la vitesse instantanée de la propagation du front de la flamme, cas d'un écoulement non stationnaire, on voit aussi la vitesse moyenne

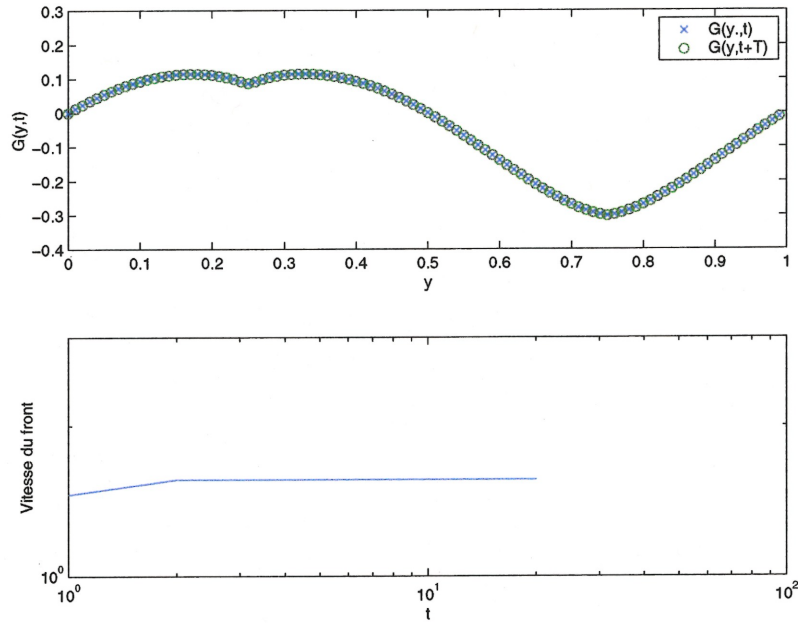


Figure 2.7 – Graphe de la vitesse moyenne de la propagation du front de la flamme, cas d'un écoulement non stationnaire, on voit aussi deux solutions périodiques centrées évaluées aux instants  $t$  et  $t + T$ ,  $T$  est la période de l'écoulement.

Nous avons calculé l'ordre de convergence de la vitesse de combustion à partir des solutions numériques  $S_T$ . Les résultats sont résumés dans le tableau 2.11 :

	Ordre dans le temps	Ordre dans l'espace
Schéma d'ordre deux	2.000	2.266
Schéma d'ordre trois	3.024	3.551

Tableau 2.11 – **Ordre numérique de la vitesse de propagation**, ( $\omega = \pi/5$  et  $\lambda = 0.1$ )

Comme il n'existe pas d'expression analytique de la vitesse moyenne, l'étude de la convergence a été effectuée selon la deuxième stratégie, en utilisant trois raffinements de maillages.

À nouveau, l'ordre pour la vitesse est légèrement supérieur à celui de la solution pour  $G$ , ce à quoi on s'attend.

# Chapitre 3

## Interprétation des résultats numériques

Dans ce troisième chapitre, nous effectuons la comparaison détaillée avec les prédictions de [4] pour le modèle rigoureux. Les données pour la comparaison sont générées à l'aide des outils numériques développés au chapitre 2 ainsi que d'une étude asymptotique formelle. Les prédictions de [4] pour le modèle rigoureux sont résumés dans la première section.

Dans la section suivante, on étudie le temps de référence  $T_{ref}$  défini comme étant la durée nécessaire pour déformer complètement une flamme initialement plane dans le cas d'un cisaillement stationnaire. Cette quantité avait joué un rôle important comme échelle de temps pour les phénomènes instationnaires dans [4] ce qui laisse présager qu'il pourrait en être de même pour l'équation G. Ensuite, avant de passer à la présentation des résultats numériques, nous suivons la démarche asymptotique de [4] en l'adaptant au cas de l'équation G. Nous commençons par le cas le plus simple qui correspond aux cas des "grandes" (après normalisation) fréquences, qui définissent le régime dit "rapide" pour l'augmentation de



vitesse, et ensuite le cas plus difficile des petites fréquences, qui définissent le régime "lent". Les résultats numériques sont alors présentés et interprétés en se servant des prédictions asymptotiques comme ligne directrice. En conclusion, nous récapitulons, régime par régime, la comparaison détaillée entre les résultats obtenus avec l'équation G et les prédictions de la théorie rigoureuse.

### 3.1 Résumé des résultats avec le modèle asymptotique rigoureux

L'étude faite dans ce mémoire est inspirée de celle de [4] sauf que nous manipulons d'un autre type d'équation, l'équation  $G$ . Comme dans [4], notre but est d'étudier l'augmentation de vitesse de propagation de la flamme. Les quatre résultats principaux de [4] sont les suivants :

- **Premier résultat :**

À la limite de la fréquence nulle ( $\omega \rightarrow 0$ ), l'expression de l'augmentation de la vitesse de combustion tend vers une constante donnée par :

$$S_{e_0} = \lim_{\omega \rightarrow 0} S_e = \frac{2\lambda}{\pi} \quad (3.1)$$

Cette limite stationnaire  $S_{e_0}$  sert à normaliser l'augmentation de vitesse dans le cas instationnaire :  $S_{e_N} = S_e/S_{e_0}$ .

- **Deuxième résultat :**

L'augmentation de vitesse normalisée  $S_{e_N}$  dépend exclusivement du terme non-dimensionnel  $\tilde{t} = \frac{\omega}{\sqrt{\lambda}}$ . En effet, il est démontré dans [4] que la vitesse globale de combustion est déterminée par la minimisation :

$$S_{e_N} = \inf_{\rho > 0} \frac{f'(0) + \tilde{H}(\rho)}{\rho} - 1 \quad (3.2)$$

Dans cette expression, le Hamiltonien normalisé  $\tilde{H}$  est obtenu comme la valeur propre dans l'équation non-dimensionnelle :

$$\frac{2}{\tilde{t}} \tilde{\psi}_\tau - \frac{2}{\pi^2} \rho \tilde{\psi}_y^2 + \sin(2\pi\tilde{y}) \cos(2\pi\tau) = -\tilde{H} \quad (3.3)$$

dont le seul paramètre est  $\tilde{t}$ .

• **Troisième résultat :**

L'augmentation de vitesse normalisée  $S_{e_N} = S_{e_N}(\tilde{t})$  passe par deux régimes distincts en fonction de  $\tilde{t} = \frac{\omega}{\sqrt{\lambda}}$ . Le premier régime, "lent", est déterminé en effectuant une expansion en terme de  $\epsilon = 1/\tilde{t}$  de  $\psi$  et  $H$  pour les grande valeur de  $\tilde{t}$  (c'est-à-dire pour des valeurs de  $\omega$  relativement petites à  $\lambda$  fixé ou bien pour des intensités  $\lambda$  grandes pour  $\omega$  fixé). Pour ce régime lent on obtient pour  $S_{e_N}$  l'expression suivante :

$$S_{e_{N,lent}} = 1 - \alpha \left( \frac{\omega}{\sqrt{\lambda}} \right) \quad (3.4)$$

Sous ce régime de flammelette,  $S_{e_N}$  est vue comme une correction qu'on retranche de l'unité et qui dépend linéairement du terme  $\frac{\omega}{\sqrt{\lambda}}$ . D'une manière similaire, pour les grandes valeurs de  $1/\tilde{t}$ , on effectue une expansion en terme de  $\tilde{t}$  pour les fonctions  $\psi$  et  $H$ . L'expression de  $S_{e_N}$  pour ce régime rapide sera :

$$S_{e_{N,rapide}} = K \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{\omega} \right)^2 \quad (3.5)$$

Ainsi, pour ce régime, l'augmentation de la vitesse normalisée dépend d'une manière quadratique du terme  $\sqrt{\lambda}/\omega$ .

• **Quatrième résultat :**

Le temps  $\tilde{t}$  peut être vu comme étant un temps non-dimensionnel qui compare la période du forçage  $T = 2\pi/\omega$  au temps de référence  $T_{ref} = 2/(\pi\sqrt{\lambda})$ . Ce temps de référence n'avait

jamais été identifié auparavant ; les auteurs de [4] en donnent une interprétation physique. Il s'agit du temps nécessaire pour qu'un cisaillement stationnaire d'amplitude  $\lambda$  (normalisée par la vitesse de la flamme  $S = 1$ ) et de période  $P = 1$  déforme complètement une flamme initialement plane. Ceci permet d'expliquer alors l'existence des deux régimes : quand la fréquence est lente de telle sorte que l'échelle de temps du forçage est grande par rapport au temps de déformation de référence, alors la flamme s'ajuste complètement au cisaillement instantané : c'est le régime lent avec les grandes augmentations de vitesse normalisées. Par contre, si la période de la modulation du cisaillement est très courte, la flamme n'a pas le temps de s'ajuster, la déformation sera faible et l'augmentation de vitesse aussi : c'est le régime rapide avec les faibles augmentations de vitesse normalisées.

Le but de ce mémoire est de généraliser cette étude à l'équation  $G$  en étudiant le comportement de la vitesse à partir de l'équation :

$$G_t - \lambda \sin\left(\frac{2\pi y}{P}\right) \cos(\omega t) = S \sqrt{1 + G_y^2} \quad (3.6)$$

Il serait intéressant de savoir si les résultats résumés dans cette section pour le modèle rigoureux s'appliquent également à l'équation  $G$ , en particulier : la limite stationnaire, la similarité en fonction de  $\omega/\sqrt{\lambda}$  et l'interprétation physique de ce paramètre, l'existence des deux régimes.

## 3.2 Calcul du temps de référence de déformation de la flamme

Il s'agit de calculer le temps nécessaire pour qu'un cisaillement stationnaire déforme complètement une flamme initialement plane. Cette durée servira d'échelle de temps de référence et sera notée  $T_{ref}$ .

Analytiquement, la déformation maximale s'évalue à partir de la solution exacte en calculant la différence entre ces valeurs extrêmes,  $\max(G(y, t))$  et  $\min(G(y, t))$ , c'est-à-dire aux points  $y = P/4$  et  $3P/4$ .

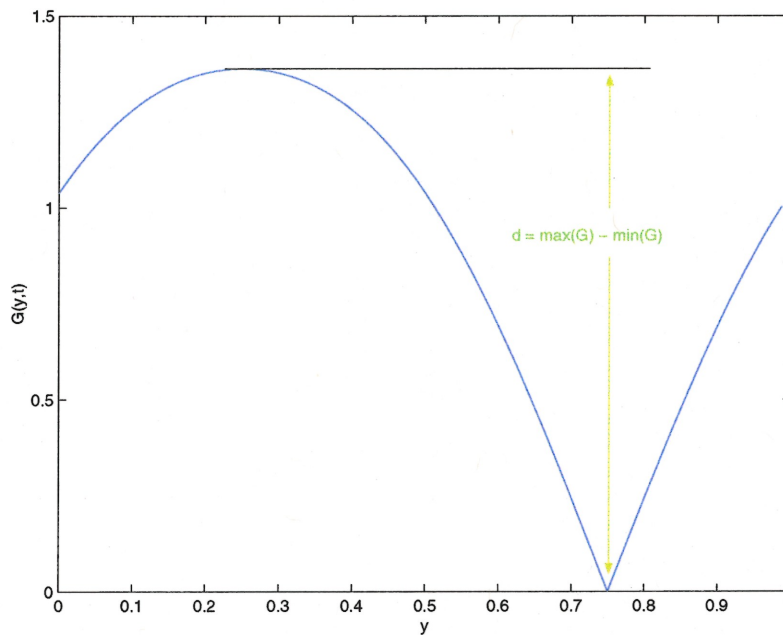


Figure 3.1 – Déformation du front de la flamme

Ainsi

$$\begin{aligned}
 d &= G(P/4) - G(3P/4) = - \int_{P/4}^{3P/4} G_y(y) dy \\
 &= \frac{P}{\pi} \left( \sqrt{\lambda/S} + (1 + \lambda/S) \arcsin \sqrt{\frac{\lambda/S}{1 + \lambda/S}} \right) \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

Une estimation de  $T_{ref}$  pour une flamme initialement plane ( $G(y, t = 0) = 0, \forall y$ ) est présentée dans [3], en se basant sur une approximation linéaire de l'évolution de la déformation :

$$T_{ref} = d/\lambda = \frac{(P/S)}{\pi} \left( 1/\sqrt{\lambda/S} + \left( 1 + \frac{1}{\lambda/S} \right) \arcsin \sqrt{\frac{\lambda/S}{1 + \lambda/S}} \right) \quad (3.8)$$

Pour les petites valeurs de  $\lambda/S$ , on a l'expression simplifiée du temps de référence

$$T_{ref} = (P/S) \frac{2}{\pi \sqrt{\lambda/S}} \quad (3.9)$$

et pour les grandes valeurs de  $\lambda/S$ ,  $T_{ref}$  se réduit à

$$T_{ref} = \frac{P}{2S} \quad (3.10)$$

Ces deux régimes asymptotiques peuvent être couplés en une seule expression définissant la durée nécessaire pour aboutir à la déformation maximale

$$T_{ref} = (P/S) f(\lambda/S) \quad (3.11)$$

où  $f(\alpha) = \max(\frac{1}{2}, \frac{2}{\pi \sqrt{\alpha}})$ . La figure 3.2 présente ces estimations de  $T_{ref}$  ainsi que les valeurs numériques correspondantes obtenues par résolution numérique du problème, en enregistrant la durée nécessaire pour que la flamme atteigne 99.9% de sa vitesse de propagation régulière prévue ( $S_T = S_L + \lambda$ ).

Un bon accord est observé entre les valeurs de  $T_{ref}$  estimées, les deux régimes asymptotiques et les résultats numériques obtenus.

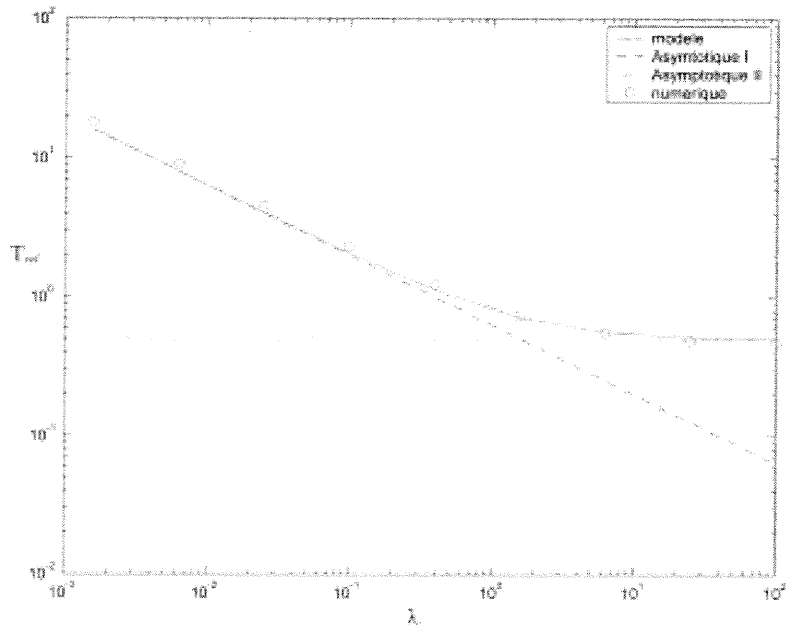


Figure 3.2 – Temps de référence  $T_{ref}$  pour un cisaillement d'intensité  $\lambda$  (normalisé par  $S$ ) agissant sur une flamme initialement plane : valeurs numériques et diverses approximations asymptotiques.

On peut maintenant comparer ces résultats avec ce qui avait été obtenu pour le modèle rigoureux (résultat 4). Dans le modèle rigoureux, il n'y avait qu'un seul régime et l'expression unique pour le temps de référence correspond exactement à l'expression 3.9. Quand  $P = S = 1$  qui est la normalisation supposée pour le reste de ce travail, cette expression se réduit à  $T_{ref} = 2/(\pi\sqrt{\lambda})$  ( $P$  et  $S$  avaient été conservés tout au long de cette section pour bien convaincre le lecteur que l'expression est dimensionnellement correcte). Les prédictions de l'équation G et du modèle rigoureux coïncident donc dans le cas de faibles intensités de la turbulence uniquement.

### 3.3 Approche théorique et analyse asymptotique

#### 3.3.1 Analyse asymptotique pour les grandes fréquences $\omega$ -régime rapide

On s'intéresse en premier lieu au cas d'un écoulement non-stationnaire dont la fréquence du cisaillement est élevée ( $\omega \gg 1$ ). Dans ce but, on adapte à l'équation  $G$  les arguments asymptotiques développés dans [4] pour ce régime.

On considère le cas où la vitesse laminaire est  $S_L = 1$ , et la période spatiale  $P = 1$  du cisaillement. On traite alors l'équation :

$$G_t - \lambda \sin(2\pi y) \cos(\omega t) = \sqrt{1 + G_y^2} \quad (3.12)$$

On cherche une solution de la forme :

$$G(y, t) = S_T t + \tilde{G}(y, t) \quad (3.13)$$

où  $\tilde{G}$  est une fonction périodique en  $y$  et  $t$  et de moyenne nulle et  $S_T$  représente la vitesse globale de combustion.

En substituant dans l'équation (3.12), on obtient :

$$S_T + \tilde{G}_t - \lambda \sin(2\pi y) \cos(\omega t) = \sqrt{1 + \tilde{G}_y^2} \quad (3.14)$$

On effectue les changements suivants :



- Prendre la période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  comme échelle de temps.
- Définir  $\tau = \frac{t}{T}$ . L'équation (3.14) devient :

$$S_T + \frac{1}{T} \tilde{G}_\tau - \lambda \sin(2\pi y) \cos(2\pi\tau) = \sqrt{1 + \tilde{G}_y^2} \quad (3.15)$$

- Introduire l'augmentation de la vitesse normalisée  $S_{e_N}$  en fonction de la vitesse globale  $S_T$ , la vitesse laminaire  $S_L$  et  $S_{e_0}$ .

$$S_{e_N} = \frac{S_e}{S_{e_0}} = \frac{S_T - S_L}{2\lambda/\pi} \quad (3.16)$$

- Changer l'échelle de  $\tilde{G}$  (vu la solution dans le cas stationnaire cas où  $\omega \rightarrow 0$ ), on définit alors  $\psi(y, \tau) = \frac{\tilde{G}(y, \tau)}{\sqrt{\lambda}}$ . En tenant compte de (3.16), l'équation (3.15) devient :

$$\frac{2}{\pi} S_{e_N} + \frac{1}{T\sqrt{\lambda}} \psi_\tau - \sin(2\pi y) \cos(2\pi\tau) = \frac{\sqrt{1 + \lambda\psi_y^2} - 1}{\lambda} \quad (3.17)$$

En posant  $\epsilon = T\sqrt{\lambda}$ , on doit résoudre l'équation

$$\frac{2}{\pi} S_{e_N} + \frac{1}{\epsilon} \psi_\tau - \sin(2\pi y) \cos(2\pi\tau) = \frac{\sqrt{1 + \lambda\psi_y^2} - 1}{\lambda} \quad (3.18)$$

pour les très petites valeurs de  $\epsilon$  (on rappelle que  $\epsilon = T\sqrt{\lambda} = \frac{\pi}{2} \frac{T}{T_{ref}}$ , du moins pour les petites valeurs de  $\lambda$ ). Pour cela, on remplace les termes  $\frac{2}{\pi} S_{e_N}$  et  $\psi$  par leur expansion en

fonction de  $\epsilon$

$$\frac{2}{\pi} S_{e_N} = \frac{1}{\epsilon} F^{(-1)} + F^{(0)} + \epsilon F^{(1)} + \epsilon^2 F^{(2)} + \dots$$

$$\psi = \psi^{(0)} + \epsilon \psi^{(1)} + \epsilon^2 \psi^{(2)} + \dots$$

et on rassemble les termes en  $\frac{1}{\epsilon}$ ,  $\epsilon^{(0)}$ ,  $\epsilon^{(1)}$ ,  $\epsilon^{(2)}$ , etc...

• Termes en  $\frac{1}{\epsilon}$  :

$$F^{(-1)} + \psi_t^{(0)} = 0$$

On rappelle que  $\psi$  est de moyenne nulle par rapport à la variable  $\tau$ . En intégrant suivant  $\tau$ , le long d'une période, on obtient alors :

$$F^{(-1)} + \langle \psi_\tau^{(0)} \rangle_\tau = 0$$

La seule solution possible est :

$$F^{(-1)} = 0 \quad \text{et} \quad \psi^{(0)} = \psi^{(0)}(y)$$

• Termes en  $\epsilon^{(0)}$  :

$$F^{(0)} + \psi_\tau^{(1)} - \sin(2\pi y) \cos(2\pi\tau) = \frac{\sqrt{1 + \lambda \psi_y^{(0)2}} - 1}{\lambda}$$

Encore une fois, on intègre suivant  $\tau$  le long d'une période et en tenant compte que  $\psi^{(0)} = \psi^{(0)}(y)$  on obtient :

$$F^{(0)} = \langle \frac{\sqrt{1 + \lambda \psi_y^{(0)2}} - 1}{\lambda} \rangle_\tau = \frac{\sqrt{1 + \lambda \psi_y^{(0)2}} - 1}{\lambda}$$

La seule solution possible qui soit compatible avec la physique du problème est  $F^{(0)} = \psi_y^{(0)} = 0$  car si  $F^{(0)} \neq 0$ , alors on obtient  $\psi_y^0 = \pm k$  pour une constante  $k$ . Avec une telle forme de  $\psi_y^0$  le point de rebroussement va devancer le graphe de la fonction  $G$  et on obtient une

solution n'ayant pas de sens physique.

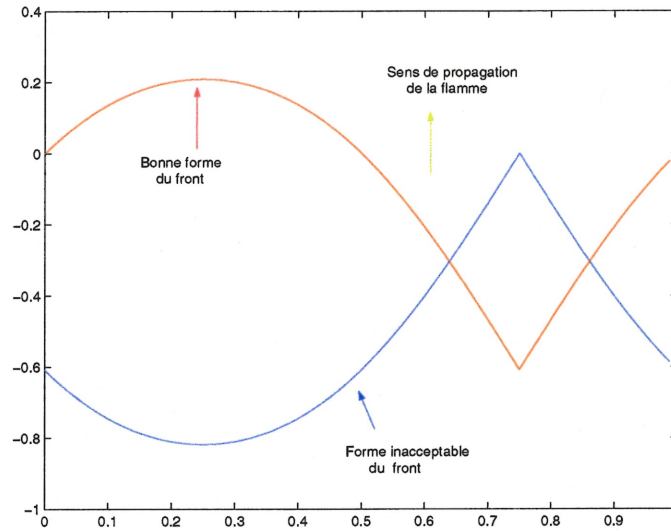


Figure 3.3 – **Forme inacceptable pour un point de rebroussement qui devance la flamme**

On prend alors  $\psi^{(0)}(y, t) = \psi^{(0)}(y) = 0$  et la solution de

$$\psi_{\tau}^{(1)} = \sin(2\pi y) \cos(2\pi\tau)$$

sera

$$\psi^{(1)} = \frac{\sin(2\pi y) \sin(2\pi\tau)}{2\pi} + f(y) \quad (3.19)$$

où  $f(y)$  sera déterminée plus tard.

• **Termes en  $\epsilon$  :**

L'expression correspondante est :

$$F^{(1)} + \psi_{\tau}^{(2)} = 0$$

En intégrant par rapport  $\tau$  le long d'une période et en tenant compte que  $\psi$  est de moyenne nulle, on déduit que  $F^1 = 0$  et  $\psi^{(2)}(y, \tau) = \psi^{(2)}(y)$

• Termes en  $\epsilon^{(2)}$  :

En considérant le développement de Taylor de l'expression  $\frac{\sqrt{1+\lambda\psi_y^2}-1}{\lambda}$ , pour les petites valeurs de  $\psi_y$  (on rappelle que cette dernière est de l'ordre  $\epsilon^{(2)}$  et  $\epsilon \ll 1$ ) on obtient alors l'équation :

$$F^{(2)} + \psi_\tau^{(3)} = \frac{1}{2}\psi_y^{(1)2}$$

En intégrant suivant  $\tau$  le long d'une période, en tenant compte que  $\psi$  est de moyenne nulle, et en se servant de (3.19) on obtient l'expression (tout calcul fait)

$$F^{(2)} = \frac{1}{8}(1 + \cos(4\pi y)) + \frac{1}{2}(f_y(y))^2 \quad (3.20)$$

(3.20) s'écrit sous la forme  $\frac{1}{2}(f_y(y))^2 = F^{(2)} - \frac{1}{8}(1 + \cos(4\pi y))$ . On résout cette équation comme pour le problème stationnaire (section IV de [4]), on obtient comme solution  $F^{(2)} = \frac{1}{4}$  et  $f_y(y)^2 = \frac{1}{4}(1 - \cos(4\pi y))$ .

Ainsi l'ordre dominant dans l'expansion de  $\frac{S_T-1}{\lambda}$  pour les petites valeurs de  $\epsilon$  est celui de  $\epsilon^2$  :

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi}S_{e_N} &= 0 + \epsilon \cdot 0 + \epsilon^2 \cdot F^{(2)} + \dots \\ &\simeq \frac{\epsilon^2}{4} \\ &\simeq \pi^2 \left( \frac{1}{\omega/\sqrt{\lambda}} \right)^2 \end{aligned}$$

Finalement, l'expression analytique de l'augmentation de vitesse normalisée pour les petites valeurs de  $\epsilon$  sera :

$$S_{e_N} = \frac{S_T - 1}{S_{e_0}} = \frac{\pi^3}{2} \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{\omega} \right)^2$$

Donc, dans ce régime rapide, on prédit donc que  $S_{e_N}$  est linéaire par rapport à  $\lambda$  et  $S_e = S_{e_N} \frac{2\lambda}{\pi}$  est quadratique en  $\lambda$ .

### 3.3.2 Analyse asymptotique pour les petites fréquences $\omega$ - régime lent

On reprend le travail sur l'équation :

$$\frac{S_T - 1}{\lambda} + \frac{1}{\epsilon} \psi_\tau - \sin(2\pi y) \cos(2\pi\tau) = \frac{\sqrt{1 + \lambda\psi_y^2} - 1}{\lambda} \quad (3.21)$$

Dans ce cas, on s'intéresse au comportement de  $\frac{S_T - 1}{\lambda}$  pour les très petite valeurs de  $\xi = 1/\epsilon$ .

$$\frac{S_T - 1}{\lambda} + \xi \psi_\tau - \sin(2\pi y) \cos(2\pi\tau) = \frac{\sqrt{1 + \lambda\psi_y^2} - 1}{\lambda} \quad (3.22)$$

- **Limite quasi-stationnaire :**

Dans la limite où  $\xi \rightarrow 0$  (ceci correspond pour  $\lambda$  fixé à considérer la limite de  $\omega \rightarrow 0$ ), on obtient la solution du problème en utilisant l'approximation que la solution est *quasi-stationnaire*. Cette approximation consiste à ignorer la dérivée temporelle dans l'équation (3.22) et à résoudre pour chaque temps  $\tau$  l'équation indépendamment de la solution aux autres temps. Ceci revient à résoudre un problème stationnaire avec un cisaillement d'intensité  $\tilde{\lambda} = \lambda |\cos(2\pi\tau)|$ . L'augmentation de vitesse correspondant à ce cisaillement est connue (voir chapitre 2) - elle correspond simplement à l'intensité du cisaillement :

$$S_e(\tau) = \lambda |\cos(2\pi\tau)|$$

L'augmentation de vitesse globale est alors simplement obtenue en prenant la moyenne de

$S_e(\tau)$  sur la période :

$$S_{e,0} = \frac{1}{T} \int_{\tau=0}^{\tau=T} \lambda |\cos(2\pi\tau)| d\tau = \frac{2}{\pi\lambda}$$

• **Correction à la limite stationnaire :**

Obtenir le terme suivant dans l'expansion asymptotique en terme de  $\xi$  est une question très difficile et ouverte (voir aussi commentaires à ce sujet dans [4]). Ici, nous nous contentons de répondre à la question de savoir si il se peut que la correction dépende uniquement du nombre non-dimensionnel  $\xi$  (qui est le seul paramètre physique à gauche dans l'équation (3.22)) ou bien si elle va dépendre également de  $\lambda$  qui apparaît à droite de l'équation (3.22). La réponse à cette question peut être résumée de la façon suivante :

1. **Si l'intensité  $\lambda$  est faible :** alors on s'attend que les perturbations du front soient faibles. En effet, au mieux, les perturbations seront comparables à celles dans le cas stationnaire, où elles dépendent de  $\sqrt{\lambda}$ . Si les perturbations sont faibles, alors on peut faire une expansion en série de Taylor pour le membre de droite de l'équation 3.22 et on obtient une équation qui dépend uniquement de  $\xi$ , en particulier,  $\lambda$  n'apparaît plus explicitement :

$$S_{e_N} + \xi\psi_\tau - \sin(2\pi y) \cos(2\pi\tau) = \frac{1}{2}\psi_y^2 \quad (3.23)$$

Donc, forcément, la correction à l'augmentation de vitesse  $S_{e_N}$  dépendra elle aussi uniquement de la combinaison  $\omega/\sqrt{\lambda}$  (même si nous ne sommes pas capables de préciser sa forme).

2. **Si l'intensité  $\lambda$  est grande :** alors l'expansion ci-dessus n'est pas justifiée. Il existe

des points  $y$  pour lesquels  $G_y^2$  sera grand, et d'autres où il sera nul. Il n'existe donc pas de simplification évidente de l'expression et on s'attend à ce que l'augmentation de vitesse  $(S_T - 1)/\lambda$  dépende à la fois du nombre sans dimension  $\omega/\sqrt{\lambda}$  et de  $\lambda$  lui-même.

En résumé, dans le régime "lent", on a obtenu le résultat que, au premier ordre, l'augmentation de vitesse est donnée par la limite quasi-stationnaire :

$$\frac{S_T - 1}{\lambda} \approx 2/\pi \quad (3.24)$$

Après non-dimensionalisation, l'expression pour  $S_{e_{N,lent}}$  devient :

$$S_{e_{N,lent}} = \frac{S_T - 1}{2\lambda/\pi} = 1 \quad (3.25)$$

On s'attend à ce que la correction à cette expression dépende uniquement de  $\omega/\sqrt{\lambda}$  quand l'intensité de la turbulence est faible mais que cette correction dépende à la fois de  $\omega$  et  $\lambda$  sans combinaison particulière quand l'intensité  $\lambda$  est grande. Dans la section suivante, nous allons comparer les résultats numériques avec ces prédictions asymptotiques.

### 3.4 Comparaison des prédictions asymptotiques avec les résultats numériques pour chacun des deux régimes de l'augmentation de la vitesse

À la lumière des prédictions asymptotiques des deux sections précédentes, on analyse maintenant les solutions numériques de l'équation :

$$G_t - \lambda \sin\left(\frac{2\pi y}{P}\right) \cos(\omega t) = S \sqrt{1 + G_y^2} \quad (3.26)$$

en particulier les prédictions numériques pour l'augmentation de vitesse de propagation du front de la flamme.

On rappelle que, à cause du cisaillement ( $\lambda \sin \frac{2\pi y}{P} \cos \omega t$ ), la flamme se déforme, une variation de la taille du front en résulte et par conséquent une variation de la vitesse de propagation qui va atteindre une valeur pour la vitesse globale  $S_T$  supérieure à la vitesse laminaire  $S_L$ . En plus, puisque le cisaillement de l'écoulement oscille dans le temps, la vitesse instantanée de combustion oscille aussi avec la même période. En général, on s'intéresse principalement au comportement à long terme, on calculera donc la moyenne de la vitesse globale de combustion le long d'une période de temps. En calculant  $S_e = S_T - S_L$ , on pourra déterminer l'augmentation de la vitesse moyenne de combustion par rapport à la vitesse laminaire.

La vitesse globale de combustion  $S_T$  le long d'une période de temps se calcule numériquement



de deux manières différentes. La première consiste à calculer la moyenne arithmétique des vitesses instantanées successives le long d'une période ( $\frac{2\pi}{\omega}$ ) de temps. Cette méthode est un peu risquée au niveau des erreurs d'arrondi parce qu'on doit soustraire des nombres très voisins (la vitesse instantanée est en effet le quotient de la moyenne de la différence entre deux solutions successives par le pas de temps  $\Delta t$ , voir l'équation (2.35) de la section 2.3.1 pour plus de détails).

La deuxième méthode est plus sécuritaire sur le plan calcul, elle consiste à diviser la moyenne de deux solutions éloignées d'une période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  de temps par cette période  $T$  suivant l'équation.

$$S_T = \frac{\langle G(y, t + T) \rangle - \langle G(y, t) \rangle}{T} \quad (3.27)$$

où  $\langle G(y, t) \rangle$  désigne la moyenne de la fonction par rapport à la variable spatiale  $y$ .

À la limite des petites fréquences ( $\omega \rightarrow 0$ ) l'expression de l'augmentation de la vitesse de combustion a été calculée analytiquement lors de l'analyse asymptotique de la section 3.3.2.

$$S_{e_0} = \lim_{\omega \rightarrow 0} S_e = \frac{2\lambda}{\pi} \quad (3.28)$$

On remarque pour ce cas que l'augmentation de la vitesse de combustion est linéaire par rapport à l'intensité du cisaillement  $\lambda$ . On se sert de cette limite pour calculer numériquement l'augmentation de vitesse normalisée  $S_{e_N}$  en utilisant l'équation (3.16).

On note ici que pour le calcul de l'augmentation de la vitesse normalisée, il faut s'assurer que la convergence de la vitesse soit établie avant qu'on ne calcule  $S_{e_N}$ . Le nombre de cycle qu'il faut faire avant de calculer la vitesse moyenne de propagation varie selon la taille de la

période  $\omega$ , il varie de 5 ou 6 cycles jusqu'à quelques centaines pour les grandes valeurs de  $\omega$  (voir Figure 2.6 et Figure 2.7). Les conditions initiales du système différentiel influencent le nombre de cycles qu'il faut faire avant que la convergence ait lieu, mais non pas la solution convergée du système. Ainsi, commencer avec une condition initiale similaire à la solution convergée, amène une convergence plus rapide.

### 3.4.1 Augmentation de la vitesse normalisée avec des grandes fréquences $\omega$ - Régime rapide

Lorsque la fréquence de l'écoulement est grande ( $\omega/\sqrt{\lambda} \gg 1$ ), le front de la flamme est très actif, il oscille d'une façon assez rapide, de sorte que la flamme n'a plus suffisamment de temps pour se déformer complètement puisqu'elle doit suivre l'écoulement.

L'analyse asymptotique qu'on a faite à la section 3.3.1 prédit le comportement de l'augmentation de la vitesse normalisée pour le régime rapide (grandes fréquences  $\omega$  pour un  $\lambda$  fixé).

Les prédictions asymptotiques sont que pour ce régime d'écoulement on a  $S_{e_N} = S_{e_N}(\omega/\sqrt{\lambda})$ .

Comme prédit, les résultats numériques de  $S_{e_N}$  pour ce régime rapide sont effectivement tous décrits par une seule courbe fonction uniquement du terme non-dimensionnel  $\omega/\sqrt{\lambda}$ ,

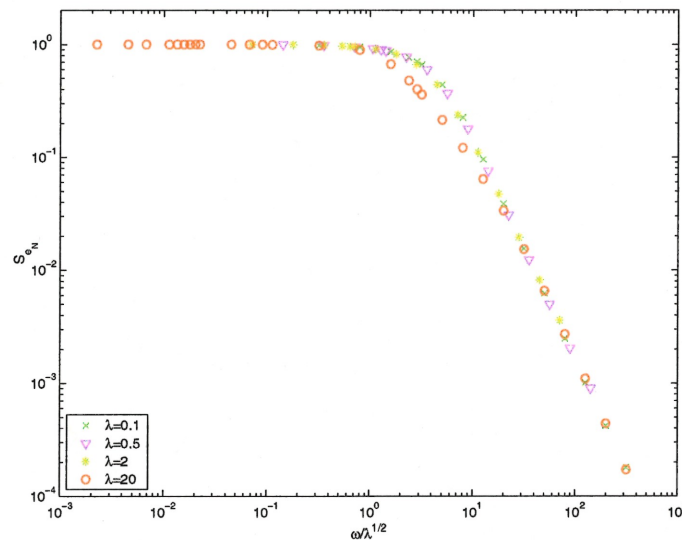


Figure 3.4 – Graphe de  $S_{e_N}(\frac{\omega}{\sqrt{\lambda}})$  pour divers valeurs de  $\omega$  et de  $\lambda$  (les points  $\frac{\omega}{\sqrt{\lambda}}$  sont du domaine  $(\omega, \lambda) \in [0.01; 1500] \times [0.1; 20]$ )

Conformément aux prédictions, la figure 3.4 montre que l'augmentation de la vitesse passe bien par deux régimes différents suivant la taille de  $\frac{\omega}{\sqrt{\lambda}}$ , il met en évidence en plus que toutes

les courbes coïncident pour  $S_{e_N}(\frac{\omega}{\sqrt{\lambda}})$  dans le régime rapide, indépendamment de la taille de  $\lambda$ . On compare ensuite ces résultats numériques de  $S_{e_N}$  avec le régime analytique du modèle asymptotique associée au cas d'écoulement rapide :

$$S_{e_N,rapide} = \frac{S_T - 1}{2\lambda/\pi} = \frac{\pi^3}{2} \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\omega}\right)^2$$

La figure 3.5 montre bien l'accord entre les prédictions asymptotiques et les résultats numériques pour les grandes fréquences.

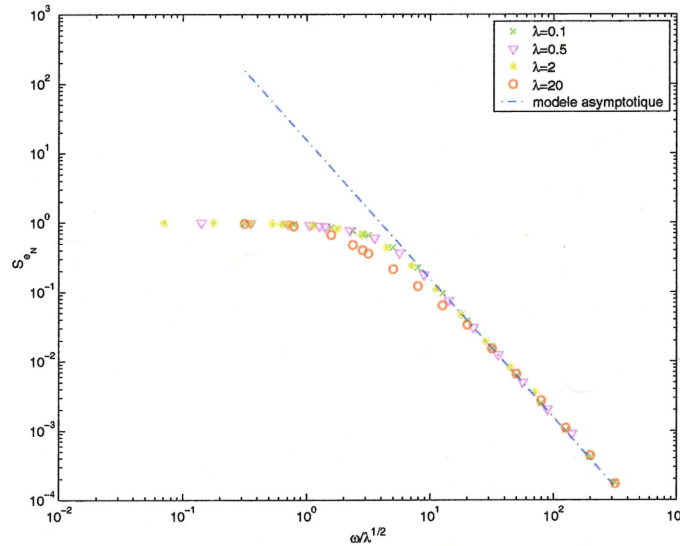


Figure 3.5 – Un complet accord entre les résultats numériques et le modèle asymptotique rapide quand  $\omega/\sqrt{\lambda} \gg 1$

On a analysé les données numériques et utilisé la méthode d'approximation des moindres carrés pour extraire que, la dépendance de  $S_{e_N}$  par rapport à  $\omega/\sqrt{\lambda}$  dans ce régime est donnée par

$$S_{e_N} = K \left(\frac{\omega}{\sqrt{\lambda}}\right)^{-\alpha} \quad (3.29)$$

avec  $\alpha = 1.96$  proche de la valeur 2 prédite asymptotiquement. Ceci est un très bon accord.

### 3.4.2 Augmentation de la vitesse normalisée avec des petites fréquences

#### $\omega$ et des petites valeurs de $\lambda$ - Régime lent

L'analyse asymptotique faite à la section 3.3.2 indique que pour les petites valeurs de  $\omega/\sqrt{\lambda}$  (régime lent), l'augmentation de la vitesse normalisée admet l'unité comme terme du premier ordre pour son expression analytique (limite stationnaire  $S_{e_N} = 1$ ). On voit dans la figure 3.6 qu'il y a un bon accord entre les résultats numériques de  $S_{e_N}$  et cette limite stationnaire.

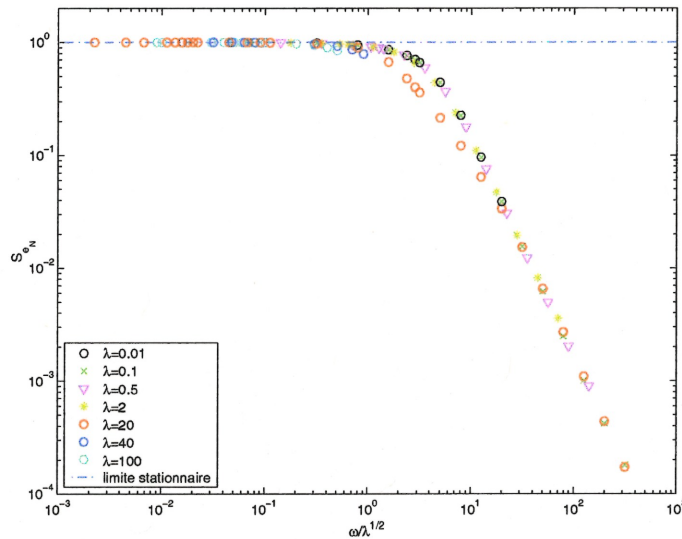


Figure 3.6 – **Un complet accord entre les résultats numériques et la limite stationnaire lent**

Avec la motivation des prédictions de la section 3.3.2, on s'est intéressé par la suite à déterminer numériquement l'expression de la correction du terme de premier ordre et ceci en fonction du terme non-dimensionnel  $\omega/\sqrt{\lambda}$ , du moins lorsque  $\lambda$  est suffisamment petit. On considère alors des petites fréquences  $\omega$  de telle sorte que  $\omega/\sqrt{\lambda}$  soit petit, pour demeurer dans le régime lent ou quasi-stationnaire. On rappelle que pour ce régime, dû au fait que la période de l'écoulement est très grande, on peut considérer ce régime comme étant une succession de solutions stationnaires correspondant au cisaillement d'intensité  $\lambda' = \lambda \cos(\omega t)$ .

Numériquement, l'augmentation de la vitesse normalisée se calcule à partir des solutions de l'équation  $G$  moyennant (3.27) et (3.16). On rappelle que pour ce régime lent, on s'attend à ce que l'augmentation de la vitesse de propagation normalisée soit égale à une petite correction qu'on retranche de l'unité. L'expression analytique cherchée est de la forme :

$$S_{e_N} = 1 - f(\omega, \lambda) = 1 - \sigma(\omega/\sqrt{\lambda}) = 1 - \alpha * (\omega/\sqrt{\lambda})^\beta \quad (3.30)$$

Le graphe de  $\sigma = 1 - S_{e_N}$  donne une meilleure idée de sa forme . Dans la suite on étudiera directement  $\sigma$  pour déterminer les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ .

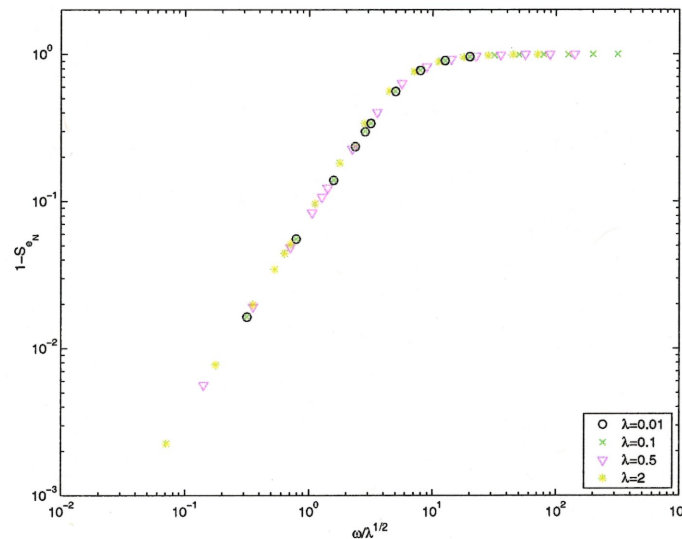


Figure 3.7 – Graphe de  $\sigma(\frac{\omega}{\sqrt{\lambda}})$  pour divers valeurs de  $\omega$  et des faibles intensités de cisaillement  $\lambda$  (les points  $\frac{\omega}{\sqrt{\lambda}}$  sont du domaine  $(\omega, \lambda) \in [0.1; 100] \times [0.01; 2]$ )

Il est évident qu'avec les petites valeurs de  $\lambda$  qu'on a utilisées pour les résultats de la figure 3.7, on retrouve que toutes les courbes  $\sigma(\omega/\sqrt{\lambda})$  coïncident pour constituer le même régime. Pour  $\lambda = 0.01$  et  $\lambda = 0.1$  l'augmentation de vitesse normalisée fut calculée pour les mêmes valeurs de  $\omega/\sqrt{\lambda}$ . La figure 3.7 nous permet de voir que les résultats correspondants de  $S_{e_N}$  sont les mêmes pour ces deux valeurs de  $\lambda$ . On verra dans la section suivante que pour des grandes valeurs  $\lambda$  la similarité du comportement ne sera plus respectée.

Figure 3.7 montre que sous une échelle logarithmique,  $\sigma(\omega/\sqrt{\lambda})$  est de dépendance linéaire par rapport au terme non-dimensionnel ce qui confirme la forme de l'expression analytique de  $\sigma$  dans (3.30). On rappelle ici que dans [4], pour le modèle asymptotique rigoureux, les auteurs avaient obtenus numériquement que  $\beta = 1$  pour tout  $\lambda$ .

En utilisant la fonction "polyfit" de MatLab, on a pu évaluer numériquement les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  de la formule 3.30. Le tableau 3.1 associe à chacune des valeurs de  $\lambda$  l'exposant  $\beta$  correspondant.

$\lambda$	2	0.5	0.1	0.01
$\beta$	1.3465	1.3002	1.2948	1.2937

Tableau 3.1 – L'exposant  $\beta$

On a vérifié numériquement que les valeurs obtenues pour  $\beta$  sont bien indépendantes de la résolution spatiale, du nombre de cycles avant l'évaluation de  $S_T$  etc. Ainsi, les valeurs de  $\beta$  calculées ci-dessus sont bien indépendantes des choix numériques du problème. Figure 3.8 montre l'accord entre les résultats numériques de  $1 - S_{e_N}$  et la correction d'équation  $\sigma(\frac{\omega}{\sqrt{\lambda}}) = \alpha * (\frac{\omega}{\sqrt{\lambda}})^{\beta=4/3}$  avec  $\alpha = 0.082$ .

Confirmer la valeur de cet exposant par une analyse asymptotique et réconcilier ce résultat avec celui observé pour le modèle rigoureux est une question ouverte, aussi bien pour l'équation  $G$  que pour le modèle rigoureux (voir [4] et la section conclusion).

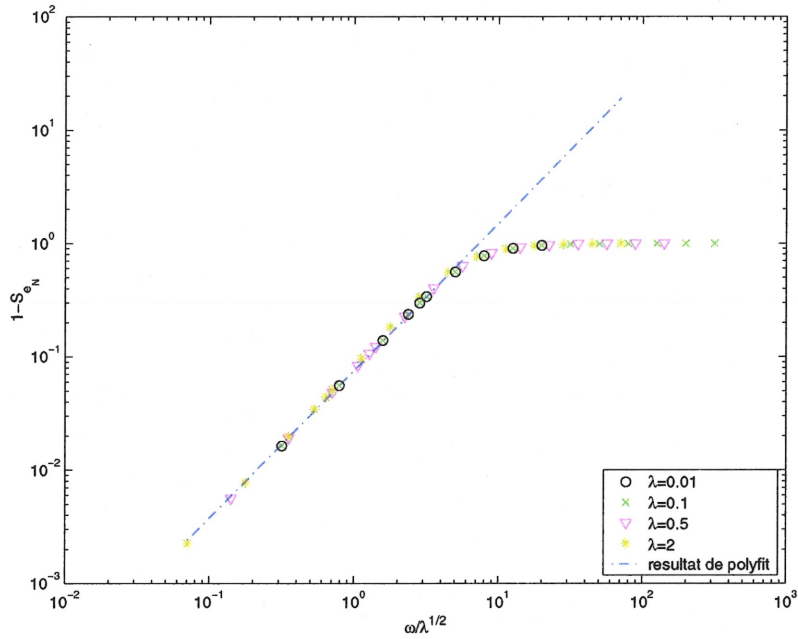


Figure 3.8 – Graphe de  $\sigma(\frac{\omega}{\sqrt{\lambda}})$  et de  $1 - S_{eN}$  pour diverses valeurs de  $\omega$  et de  $\lambda$  dans le régime lent, faible intensité de turbulence.

On verra dans la section suivante que la correction  $\sigma$  ne conservera plus la même expression quand  $\lambda$  devient de plus en plus grande. La similarité de la solution ne restera plus vérifiée (la correction  $\sigma$  n'est plus fonction de du terme non-dimensionnel  $\omega/\sqrt{\lambda}$  mais plutôt de couple  $(\omega, \lambda)$ ).



### 3.4.3 Explication du régime lent avec des grandes valeurs de $\lambda$

Nous savons déjà que le temps de référence du front de la flamme, qui est fonction de la taille du cisaillement  $\lambda$ , passe par deux régimes distincts. Comme on le constate dans la figure 3.9, les valeurs de  $\lambda$  qu'on a utilisées à la section 3.4.2 correspondent toutes à un seul des deux régimes de la fonction du temps de référence  $T_{ref}$  (branche asymptotique de gauche). Pour ces valeurs de  $\lambda$  l'augmentation de vitesse normalisée suit une similarité dans son comportement en fonction de  $\omega/\sqrt{\lambda}$ , autrement dit,  $S_{e_N} = S_{e_N}(\frac{\omega}{\sqrt{\lambda}})$ .

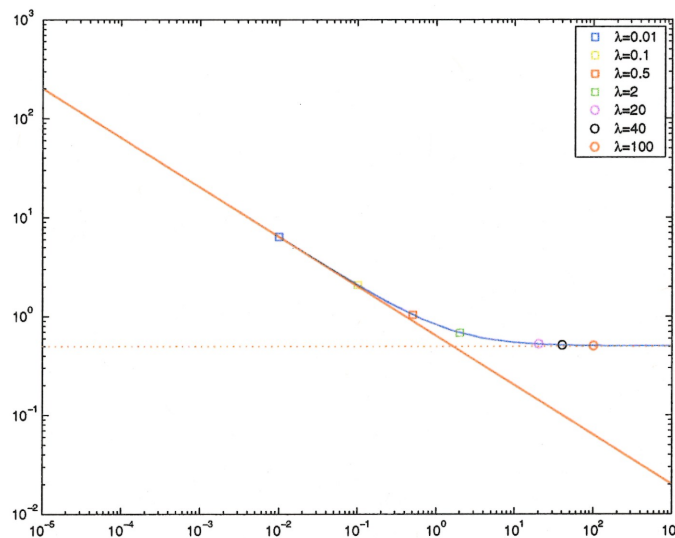


Figure 3.9 – Les quatre valeurs de  $\lambda$  qui ne couvrent pas les deux régimes du temps de références  $T_{ref}$

Il serait intéressant alors de considérer d'autres valeurs de  $\lambda$  qui couvrent l'autre régime de  $T_{ref}$ . Nous allons donc choisir les trois valeurs de  $\lambda = 20, 40$  et  $100$  pour mieux analyser le comportement de  $S_{e_N}$  dans ce régime.

Comme l'analyse asymptotique de la section 3.3.2 l'a suggéré, les résultats des calculs avec ces nouvelles valeurs de  $\lambda$  montrent une différence significative avec les résultats numériques déjà obtenus lorsque  $\lambda$  est petit. La similarité entre les graphiques de  $S_{e_N}$  ( $S_{e_N} \neq S_{e_N}(\frac{\omega}{\sqrt{\lambda}})$ )

n'est plus vérifiée, la zone de transition entre  $S_{e_N, \text{lent}}$  et  $S_{e_N, \text{rapide}}$  de l'augmentation de la vitesse normalisée n'est plus la même, autrement dit, l'exposant  $\beta$  de la correction qu'on cherchait à déterminer dans (3.30) varie beaucoup en fonction de  $\lambda$  comme illustré par le graphe de  $\sigma(\frac{\omega}{\sqrt{\lambda}})$  dans la figure 3.10 et par celui de  $S_{e_N}$  dans la figure 3.11.

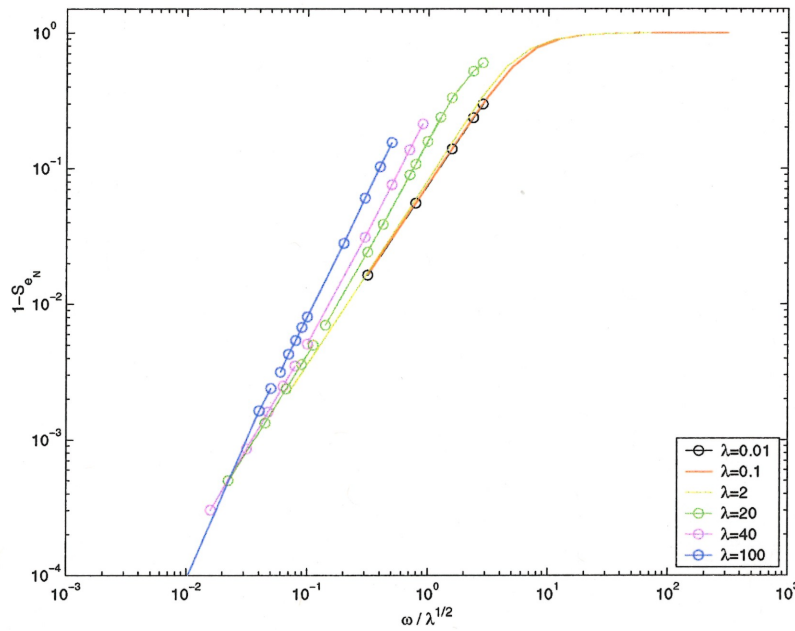


Figure 3.10 – Graphe de  $1 - S_{e_N}$  en fonction du terme non-dimensionnel  $\omega/\sqrt{\lambda}$

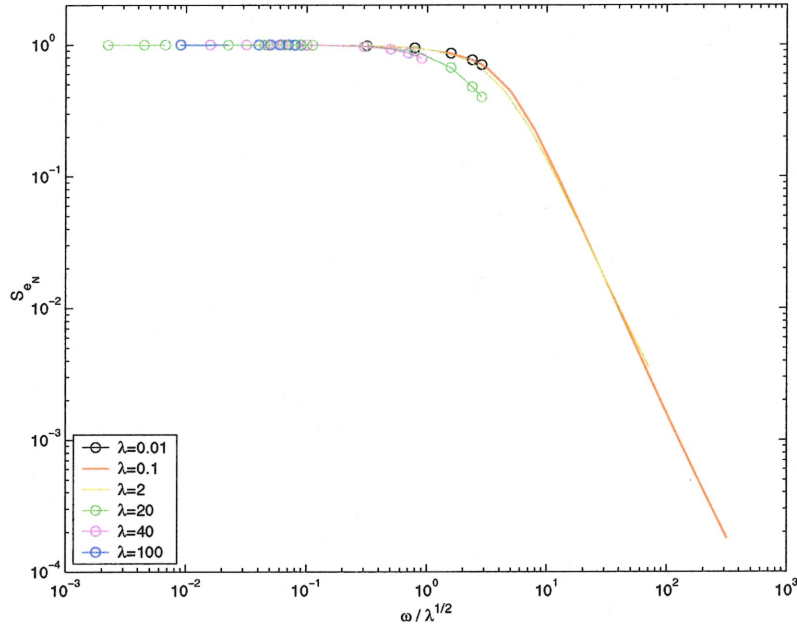


Figure 3.11 – Graphe de  $S_{e_N}$  en fonction du terme non-dimensionnel  $\omega/\sqrt{\lambda}$ , régime lent, grande intensité de turbulence.

Selon les graphes de  $S_{e_N}$  et surtout  $1 - S_{e_N}$  (Figure 3.11 et Figure 3.10), on voit que la zone de transition de l'augmentation de vitesse normalisée diffère suivant la taille de  $\lambda$ . Effectivement, on a vu dans l'analyse asymptotique qu'il n'y a aucune raison à ce que  $S_{e_N}(\omega/\sqrt{\lambda})$  ait un comportement unique pour le régime quasi-stationnaire à grande intensité.

On peut penser ainsi que le terme non-dimensionnel  $\omega/\sqrt{\lambda}$  n'est pas le terme qui va réunir les graphes de  $S_{e_N}$  sur une même courbe pour constituer le régime lent d'une manière similaire à celle du régime rapide avec les grandes fréquences  $\omega$  et indépendamment de la taille de  $\lambda$ . L'idée serait d'utiliser un autre terme non-dimensionnel dans le but si s'est possible de retrouver un même régime lent.

Une seconde approche pour étudier les graphes de  $S_{e_N}$  consiste à considérer le terme non-dimensionnel  $\omega * T_{ref}(\lambda)$ . Quand  $\lambda$  est petit,  $T_{ref} \sim 1/\sqrt{\lambda}$  et  $\omega * T_{ref} \sim \omega/\sqrt{\lambda}$  et donc

l'analyse à faible intensité de  $\lambda$  reste inchangée si on utilise ce nouveau nombre sans dimension. Par contre, ce nombre est différent de  $\omega/\sqrt{\lambda}$  à grande intensité de  $\lambda$ . On a refait les graphes de l'augmentation de la vitesse normalisée en fonction du nouveau terme non-dimensionnel  $\omega * Tref(\lambda)$ .

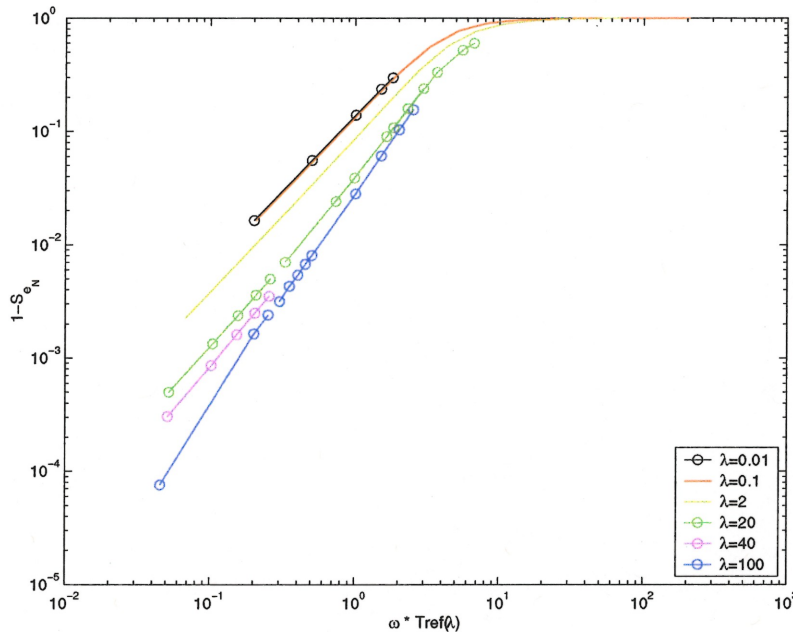


Figure 3.12 – **Graphe de  $1 - S_{e_N}$  en fonction du terme non-dimensionnel  $\omega * Tref(\lambda)$**

On voit encore une fois, que ce terme non-dimensionnel ne réussit pas à rapprocher les graphes de  $S_{e_N}$  (voir Figure 3.12) en une seule courbe, pour constituer un régime lent qui dépendrait d'un paramètre unique.

En faisant le graphe de la fonction  $\sigma(\frac{\omega}{\sqrt{\lambda}}) = 1 - S_{e_N}$  par rapport à la variable  $\omega$  (Figure 3.13), on remarque que pour les grandes valeurs de  $\lambda$  les courbes sont assez proches, on sait en plus que pour ces mêmes valeurs de  $\lambda$ , le temps de référence correspondant est le même puisqu'on se retrouve sur l'asymptote horizontale de la figure 3.9.

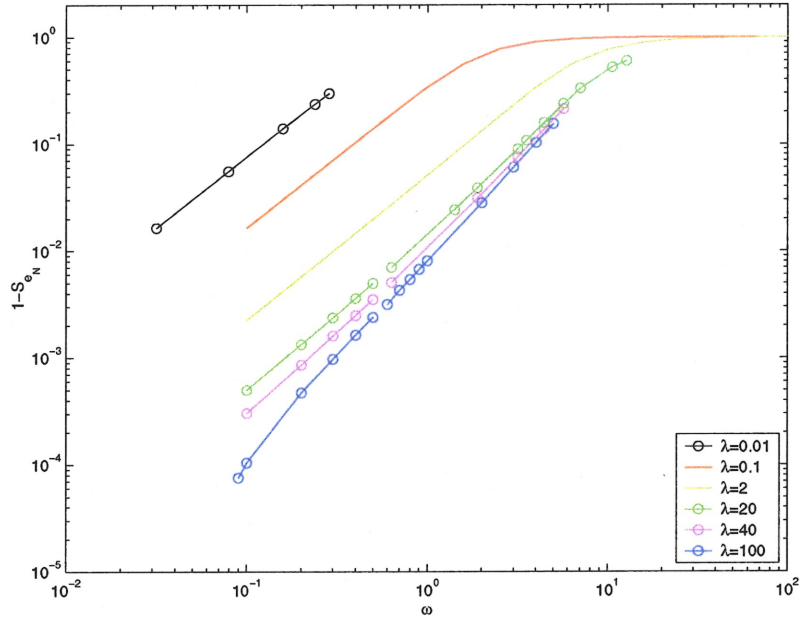


Figure 3.13 – Graphe de  $1 - S_{e_N}$  en fonction de la fréquence  $\omega$ .

Ceci explique d'une part la similarité entre les figures 3.12 et 3.13 pour  $\lambda$  grand et montre d'autre part la contribution de  $Tref(\lambda)$  pour rapprocher les courbes les unes des autres. Malheureusement cette contribution n'est pas suffisante pour former un seul régime.

### 3.4.4 Comparaison avec les résultats obtenus pour le modèle rigoureux de Majda-Souganidis

Dans cette dernière section, nous résumons l'analyse de l'augmentation de vitesse normalisée obtenue à partir du schéma numérique en la comparant avec les résultats obtenus par Khouider, Bourlioux et Majda [4] avec le modèle rigoureux de Majda et Souganidis [13].

On rappelle que dans le cas de [4], il s'agit d'un autre système qui modélise le mouvement de la flamme. Une description de cette théorie fut présentée à la section 1.3 du premier chapitre. Les données numériques relatives à cette étude nous ont été fournies par les auteurs de [4] pour qu'on puisse faire les comparaisons avec nos résultats numériques. Les données de la théorie rigoureuse et de nos résultats numériques sont représentés dans la figure 3.14.

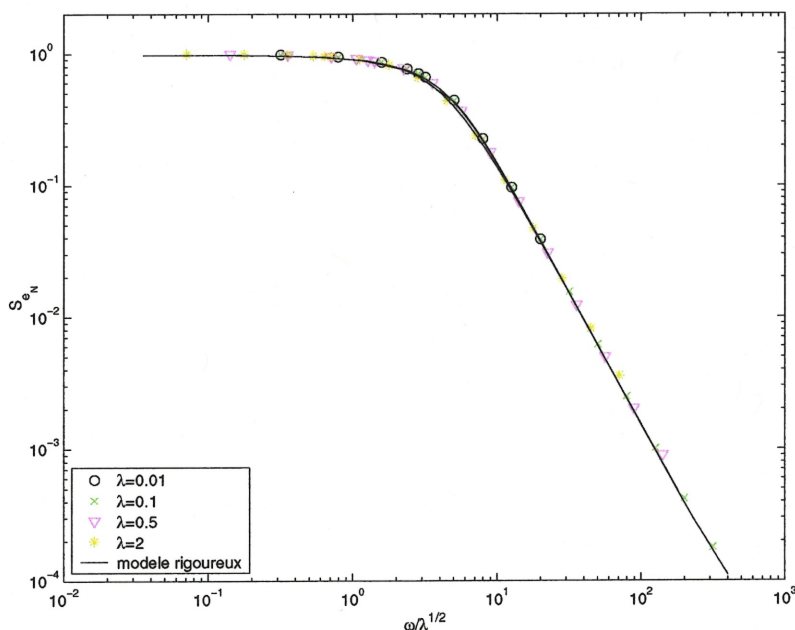


Figure 3.14 – Graphe de  $S_{e_N}(\omega, \sqrt{\lambda})$  pour divers valeurs de  $\omega$  mais de faibles valeurs de  $\lambda$ .

La figure 3.14 montre bien que les résultats numériques sont en accord avec leurs homologues

de la théorie rigoureuse et ceci pour les deux régimes “lent” et “rapide”. La justification de cet accord surtout pour le régime lent est la faible intensité de  $\lambda$ . Par contre lorsque les valeurs de  $\lambda$  sont grandes, on perd l'accord du comportement ( voir Figure 3.15) du moins pour les petites valeurs de  $\omega/\sqrt{\lambda}$ . On rappelle que le régime rapide reste valide indépendamment de la taille de  $\lambda$ , ce qui explique l'accord pour le régime rapide.

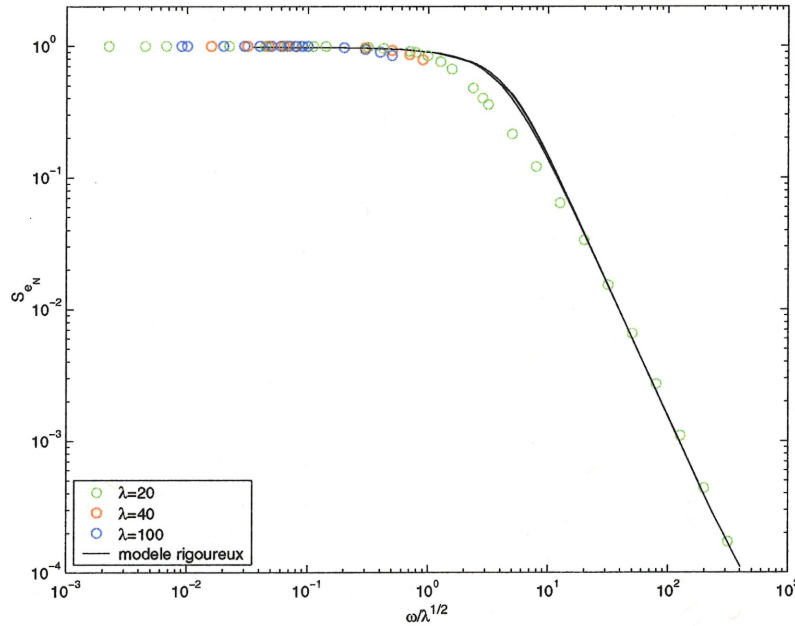


Figure 3.15 – Comparaison entre les résultats numériques de  $S_{e_N}(\omega, \sqrt{\lambda})$  pour des grandes valeurs de  $\lambda$  avec les données de la théorie rigoureuse

On conclut que pour les grandes intensités de cisaillement, l'augmentation de vitesse normalisée  $S_{e_N}$  obtenue à partir du modèle de l'équation  $G$  n'a pas le même comportement intermédiaire entre les régimes lent et rapide que celui du modèle de la théorie rigoureuse.

Le tableau 3.2 ci-dessous résume le comportement de  $S_{e_N}$  vis-à-vis les divers modèles asymptotiques (stationnaire et non stationnaire) ainsi que les résultats de la théorie rigoureuse. ( $\checkmark$ = accord,  $?$ = inconclusif et  $\mathbf{X}$ =désaccord).

Tableau 3.2 – Synthèse des résultats

	Similarité $S_{e_N} = S_{e_N}(\frac{\omega}{\sqrt{\lambda}})$	Limite-Stationnaire	Asymptotique-Rapide	Asymptotique-Lent	Rigoureux-Rapide	Rigoureux-Lent
$\omega \gg 1$ et $\forall \lambda$	✓		✓		✓	
$\omega \ll 1$ et $\lambda \ll 1$	✓	✓		?		✓
$\omega \ll 1$ et $\lambda \gg 1$	<b>X</b>	✓		<b>X</b>		<b>X</b>



# Conclusion

Deux principaux sujets ont été traités dans ce mémoire. La première question est le calcul d'une solution numérique d'ordre élevé d'un système différentiel du type Hamilton-Jacobi qui décrit le mouvement du front d'une flamme prémélangée sous différents régimes d'écoulements soit stationnaires ou non stationnaires.

La seconde question est l'analyse des résultats numériques dont l'interprétation physique est intéressante comme la notion du temps de référence et celle de l'augmentation de la vitesse de propagation du front.

La solution exacte de l'équation  $G$  étant connue dans le cas d'un cisaillement stationnaire, ceci nous permet de valider le schéma numérique en comparant la solution analytique et la solution numérique et en calculant l'ordre numérique du schéma. En plus, pour le cas stationnaire, un calcul numérique pour le temps de référence de la solution est fait, on a montré l'accord entre cette quantité numérique et son estimé analytique. On a vérifié en outre la convergence de la vitesse de propagation du front de la flamme vers la valeur propre du "cell problem" [3].

Ce même schéma fut appliqué pour les écoulements non stationnaires, la convergence de la solution est vérifiée en calculant numériquement l'ordre de l'erreur sur la solution obtenue.

On rappelle que la solution analytique exacte n'est pas connue dans ce cas.

L'augmentation de la vitesse de propagation du front de la flamme dans le cas non stationnaire est la principale question de la seconde partie du mémoire. Après l'avoir calculée numériquement, on a caractérisé la dépendance de cette quantité en fonction des variables physiques du système pour retrouver les différents régimes de dépendance. Un développement asymptotique nous permet de retrouver les régimes analytiques par lesquels passe l'augmentation de la vitesse normalisée. Nous avons comparé nos résultats numériques avec leurs homologues analytiques et nous avons vérifié l'accord entre eux. On a présenté en plus la dépendance de la zone de transition entre les deux régimes en fonction de la taille de l'intensité du cisaillement. Finalement, une comparaison avec les données du modèle rigoureux de la théorie de Majda-Souganidis fut présentée : pour les petites intensités de cisaillement, les résultats numériques sont en accord avec les données de la théorie rigoureuse pour les deux régimes. Par contre lorsque  $\lambda$  est grand, la zone de transition entre les deux régimes diffère de celle obtenue par la théorie de Majda et Souganidis. On rappelle ici que l'accord entre la théorie rigoureuse et celle des équations  $G$  n'est pas impératif, les auteurs de [14] ont eux aussi distingué des contraintes sur l'accord entre les deux théories. A cette étape on pose les questions ouvertes suivantes :

- Quelle est la valeur exacte de l'exposant  $\beta$  relatif à l'augmentation de la vitesse normalisée  $S_{e_N}$  pour les petites valeurs de  $\lambda$  lors du régime lent ?
- Pour ce même régime, y a-t-il un terme non-dimensionnel avec lequel on a similarité pour  $S_{e_N}$  pour les grandes valeurs de  $\lambda$  ?

Il est clair que la réponse à cette question nécessite une approche théorique beaucoup plus sophistiquée dont on ne dispose pas pour le moment mais on continue à travailler là dessus !

# Bibliographie

- [1] Osher and Shu 1991 High-order essentially nonoscillatory schemes for Hamilton-Jacobi equations *SIAM J. Numer. Anal.* **28** 907-922
- [2] Osher and Sethian 1988 Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations *J. Comput. Phys.* **79** 12-49
- [3] Bourlioux A 2000 Semi-analytical validation of a dynamic large-eddy simulation procedure for turbulent premixed flames via the G-equation *Combust. Theory Modelling* **4** 1-27
- [4] Khouider B, Bourlioux A and Majda A J 2001 Parametrizing turbulent flame speed - Part I : unsteady shears, flame residence time, and bending *Combust. Theory Modelling* **5** 295-318
- [5] Crandall M and Lions P 1983 Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations *Trans. Amer. Math. Soc.* **277** 1-42
- [6] Crandall M and Lions P 1984 Two approximations of solutions of Hamilton-Jacobi equations *Math. Comput.* **43** 1-19
- [7] Harten A and Osher S 1987 Uniformly high order accurate non-oscillatory schemes, I *SIAM J. Numer. Anal.* **24** 279-309

- [8] Harten A, Engquist B, Osher S, and Chakravarthy S 1987 Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes III *J. Comput. Phys.* **71** 231-303
- [9] Shu C W and Osher S 1988 Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes *J. Comput. Phys.* **77** 439-471
- [10] Shu C W and Osher S 1989 Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes II *J. Comput. Phys.* **83** 32-78
- [11] Osher S 1989 The nonconvex multi-dimensional Riemann problem for Hamilton-Jacobi equations *ICASE Report ICASE-NASA* Langley Research Center Hampton VA 89-53
- [12] Peters N 1992 A spectral closure for premixed turbulent combustion in the flamelet regime *SIAM, J. Fluid. Mech.* **28** 611-629
- [13] Majda A J and Souganidis P E 1994 Large scale front dynamics for turbulent reaction-diffusion equations with separated velocity scales *Nonlinearity* **7** (1) 1-30
- [14] Embid P F, Majda A J and Souganidis P E 1995 Comparison of turbulent flame speeds from complete averaging and G-equation *Phys. Fluids* **7** (8) 2052-2060
- [15] Embid P F, Majda A J and Souganidis P F 1994 Effective geometric front dynamics for premixed turbulent combustion with separated velocity scales *Combustion Science and Technology* **103** 85
- [16] Kerstein A R and Ashurst W T 1992 Propagation rate of growing interfaces in stirred fluids *Phys. Rev. Lett.* **68** 934
- [17] Kerstein A R and Ashurst W T 1994 Passage rates of propagating interfaces in randomly advected media and heterogeneous media *American Physical Society* **265** 132-148
- [18] Arminjon P 2000 *Cours gradué d'analyse numérique* Université de Montréal

- [19] Goodman J 1999 Basic numerical analysis *Course notes for scientific computing* Cour-  
rant Institute of Mathematical Sciences, New York University
- [20] Plante J 1997 Étude asymptotique et numérique des perturbations aux petites échelles  
d'un écoulement en combustion prémélangée *Mémoire de Maîtrise* Université de  
Montréal
- [21] Williams F A 1985 Combustion Theory, 2nd Ed., Addison-Wesley New York, 559-560
- [22] Department of mechanical Engineering University of Maryland (web page)  
[http://www.glue.umd.edu/~gs\\_jackso/gsjpremix.html](http://www.glue.umd.edu/~gs_jackso/gsjpremix.html)