Université de Montréal

Jeux de soustraction et pseudo-base d'énumération

par

Daniel Audet

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Maître ès sciences (M.Sc.)
en Combinatoire

31 août 2001

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Jeux de soustraction et pseudo-base d'énumération

présenté par

Daniel Audet

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Ivo Rosenberg
(président-rapporteur)

Jean Turgeon
(directeur de recherche)

Mathieu Dufour
(membre du jury)

Mémoire accepté le:
21 décembre 2001

SOMMAIRE

Ce travail consiste en une étude des jeux de soustraction qui constituent une généralisation du célèbre jeu de Nim. On obtient un tel jeu à partir d'un ensemble d'entiers positifs appelé l'ensemble de soustraction du jeu. Nous en présentons d'abord la définition en introduction ainsi que la notion de position gagnantes et perdantes.

Le premier chapitre débute en montrant comment on peut, avec l'aide de la théorie de Grundy, associer à chaque ensemble de soustraction une suite de nombres qu'on appelle la suite des valeurs de Grundy du jeu. Puis on expose la plupart des propriétés connues de ces suites. Toutefois on comprend mal le lien entre l'ensemble de soustraction et la suite qu'il génère, et toute la motivation de ce travail réside dans l'investigation de ce lien.

Le deuxième chapitre développe un outil, les pseudo-bases infinies, qui permet d'obtenir des résultats originaux concernant les suites de valeurs de Grundy.

Le troisième chapitre développe un autre outil, les pseudo-bases qui permet d'obtenir des résultats analogues à ceux du deuxième chapitre.

Le quatrième chapitre montre comment on peut combiner plusieurs jeux de soustraction pour en former un nouveau. Ce nouveau jeu est tel que, pour le résoudre, il suffit de résoudre ses constituants. Ce dernier résultat est aussi original.

SUMMARY

We present here a study of substraction games, witch are a generalisation of the famous Nim game. A substraction game is made of a set of positive numbers, called the *substraction set*, and a natural number, the initial *position*. In the introduction we define this game and we introduce the concepts of *winning* and *loosing position*.

The first chapter begins by using Grundy's theory to associate to each substraction set a sequence of natural numbers called Grundy's values. Then we present some known properties of these sequences. The problem is that we don't really understant the relation between the substraction set and the sequence it generate, and all the present work is dedicated in the study of this link.

In the second chapter we develop a tool, called *infinite pseudo-bases*, witch will be usefull in analysing Grundy's sequence of values.

In the third chapter we develop another tool, pseudo-bases, witch can be use to obtain some original results.

In the forth chapter we show how we can combine several substraction games into one. To solve this new game it suffices to solve the original components.

Key words list: Combinatoric, game, Grundy, Nim, substraction game, pseudo-base.

REMERCIEMENTS

Je remercie Samuel Bernard pour son support informatique, Yanick Delbecque pour son oreille attentive, Jonathan Dumas pour son soutient moral ainsi que mon directeur Jean Turgeon pour m'avoir permis d'étudier ce sujet.

Table des matières

INTRODUCTION

0.1. Définition des jeux de soustraction

Commençons d'abord par la définition d'un jeu de soustraction.

Définition 0.1.1. *À partir de $n \in \mathbb{N}$ et $S \subseteq \mathbb{N}^+$ on définit un jeu où deux joueurs jouent en alternance un coup légal et le premier qui ne dispose plus d'un coup légal perd. Un coup légal consiste à soustraire de n un élément de S pourvu que cette différence reste non négative. L'ensemble S est appelé* l'ensemble de soustraction *et le nombre n la* position.

Remarquons d'abord qu'un jeu de soustraction se termine toujours après un nombre fini de coups.

Exemple 0.1.1. *Prenons $S = \{1,2\}$ et $n = 6$. Appelons le premier joueur A et le deuxième joueur B. Examinons maintenant une joute entre ces deux joueurs.*

$$6 \to^A 5 \to^B 3 \to^A 1 \to^B 0$$

Ce qui signifie que le joueur A a commencé la partie en soustrayant 1 de 6 ce qui a réduit la pile à une hauteur de 5. Puis le joueur B lui a répondu en soustrayant $2 \in S$. Ainsi de suite jusqu'à ce que ce soit au joueur A de jouer sans qu'il ne puisse le faire puisque la pile est à zéro. C'est pourquoi le joueur B est le gagnant de cette joute.

Mais examinons un peu comment le joueur B s'y est pris pour gagner. On remarque que quand le premier joueur soustrait la valeur 1, il répond en soustrayant la valeur 2 et quand le premier joueur soustrait la valeur 2, il répond en soustrayant la valeur 1. De cette façon le second joueur peut s'assurer de gagner quand $S = \{1,2\}$ et $n = 6$. On remarque que cette stratégie lui assure aussi la victoire quand $S = \{1,2\}$ et n est un multiple de trois.

Cet exemple nous montre qu'il y a parfois des positions à partir desquelles le premier joueur ne peut que mettre son adversaire en bonne position. Nous dirons de ces positions qu'elles sont *perdantes* et des autres qu'elles sont *gagnantes.*

Définition 0.1.2. *(1) Une position d'un jeu de soustraction est* perdante *si tous ses coups légaux mènent à une position gagnante.*

(2) Une position d'un jeu de soustraction est gagnante *si elle possède un coup légal qui mène à une position perdante.*

Dans cette définition nous adoptons le point de vue du premier joueur. En effet puisqu'une position est gagnante si, et seulement si, le premier joueur peut, s'il joue correctement, s'assurer la victoire à partir de cette position. Remarquons qu'une position d'un jeu de soustraction est toujours gagnante ou perdante mais jamais les deux.

Chapitre 1

JEUX DE SOUSTRACTION

1.1. Propriétés des jeux de soustraction

Il existe un raffinement de la notion de gagnant dans la théorie de Grundy qui est utile lorsqu'on joue plusieurs jeux en parallèle. Cette notion classe les positions gagnantes en leur attribuant une valeur entière strictement positive et attribue à toutes les positions perdantes la valeur 0. Cette valeur est appelée la valeur de Grundy d'une position. Nous montrerons dans ce qui suit comment calculer cette valeur pour les jeux de soustraction sans toutefois montrer comment cette information est utile lorsqu'on joue plusieurs jeux en parallèle. Pour plus d'informations sur la théorie de Grundy voir Berlakamp, Conway et Guy **[1]** ou Conway **[2]**.

Définition 1.1.1. *Soit* $A \subseteq \mathbb{N}$ *tel que* $A \neq \mathbb{N}$. *On définit* $\operatorname{mex}(A)$ *comme étant le minimum de* $\mathbb{N} \setminus A$.

Ainsi, $\operatorname{mex}(\emptyset) = 0$, $\operatorname{mex}\{0\} = 1$, $\operatorname{mex}\{1\} = 0$, $\operatorname{mex}\{0,1\} = 2$, $\operatorname{mex}\{0,2\} = 1$. Énonçons maintenant sans preuve quelques propriétés du mex.

Proposition 1.1.1. *Soit* $A,B \subseteq \mathbb{N}$ *tels que* $A,B \neq \mathbb{N}$. *On a alors:*

(1) $\operatorname{mex}(A) \leq |A|$ *quel que soit* A *fini, et on a l'égalité si, et seulement si,* A *est de la forme* $\{0,1,\dots,n\}$*;*

(2) si $A \subseteq B$ *alors* $\operatorname{mex}(A) \leq \operatorname{mex}(B)$*;*

(3) si $\operatorname{mex}(A) < \operatorname{mex}(B)$ *alors il existe* $x \in B$ *tel que* $\operatorname{mex}(A) = x$

(4) si $a \neq \operatorname{mex}(A)$ *alors* $\operatorname{mex}(A) = \operatorname{mex}(A \cup \{a\})$

Définition 1.1.2. *Soit $S \subseteq \mathbb{N}^+$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit récursivement $\varphi_S(0) = 0$ et*

$$\varphi_S(n) = \text{mex}\{\varphi_S(n-s) \mid s \in S \textit{ et } n \geq s\}$$

qui représente la valeur de Grundy *de la position n du jeu de soustraction avec ensemble de soustraction S.*

Remarquons d'abord que $\varphi_S(n)$ est nulle si et seulement si la position n du jeu de soustraction avec ensemble de soustraction S est perdante. En effet si $\varphi_S(n) > 0$, alors il existe $s \in S$ tel que $\varphi_S(n-s) = 0$ et si $\varphi_S(n) = 0$, alors pour tout $s \in S$ on a $\varphi_S(n-s) \neq 0$.

On a donc toujours $\varphi_\emptyset(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus on remarque que $\varphi_S(n) \leq |S|$ quand S est fini.

Exemple 1.1.1. *Prenons $S = \{1{,}4\}$ et posons*

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \textit{si } n \equiv 0 \textit{ ou } 2 \pmod 5 \\ 1 & \textit{si } n \equiv 1 \textit{ ou } 3 \pmod 5 \\ 2 & \textit{si } n \equiv 4 \pmod 5 \end{cases}$$

alors f possède les propriétés suivantes:

(I) $s \in S$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geq s$ implique $f(n) \neq f(n-s)$;

(II) $f(m) > f(n)$ implique qu'il existe $s \in S$ et $s \leq m$ tel que $f(m-s) = f(n)$.

En effet (I) se vérifie cas par cas et pour (II) on sépare les cas suivants:

(1) si $f(m) = 1$ et $f(n) = 0$ on prend $s = 1$;

(2) si $f(m) = 2$ et $f(n) = 0$ on prend $s = 4$;

(3) si $f(m) = 2$ et $f(n) = 1$ on prend $s = 1$.

Puis avec (I) et (II) on en déduit que $f = \varphi_S$. Remarquons qu'on a bien $\varphi_S(n) \leq 2 = \mid \{1{,}4\} \mid$.

Le lemme suivant nous aidera à démontrer que, lorsque S est fini, φ_S devient toujours périodique au delà d'une certaine valeur.

Lemme 1.1.1. *Soit $S \subseteq \mathbb{N}^+$, $p \in \mathbb{N}^+$, $q \in \mathbb{N}$ tels que $\varphi_S(n+q) = \varphi_S(n+p+q)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq n < \max(S)$, alors $\varphi_S(n+q) = \varphi_S(n+p+q)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

DÉMONSTRATION. Montrons par induction sur n que

$$\varphi_S(n+q) = \varphi_S(n+p+q)$$

On sait déjà que c'est vrai pour $0 \leq n < \max(S)$. Supposons que ce soit vrai pour $0 \leq n < k$ avec $k \geq \max(S)$. On a donc,

$$\begin{aligned} \varphi_S(k+q) &= \operatorname{mex}\{\varphi_S(k-s+q) | s \in S\} \\ &= \operatorname{mex}\{\varphi_S(k-s+p+q) | s \in S\} \qquad \text{(par hypothèse)} \\ &= \varphi_S(k+p+q) \end{aligned}$$

ce qui complète l'induction. □

Théorème 1.1.1. *Soit $S \subseteq \mathbb{N}^+$, alors φ_S devient périodique au-delà d'une certaine valeur.*

DÉMONSTRATION. Comme $\varphi_S(n) \leq |S|$, il y a au plus un nombre fini de valeurs que

$$(\varphi_S(n), \varphi_S(n+1), \ldots, \varphi_S(n + \max S - 1))$$

peut prendre. Mais comme il y a une infinité de ces intervalles, par le principe des tiroirs il existe n_1 et n_2 tels que $(\varphi_S(n_1), \varphi_S(n_1+1), \ldots, \varphi_S(n_1 + \max S - 1)) = (\varphi_S(n_2), \varphi_S(n_2+1), \ldots, \varphi_S(n_2 + \max S - 1))$. Puis par le lemme précédent on a le résultat. □

Comme le travail qui suit porte surtout sur les fonctions φ_S purement périodiques, nous dirons qu'une fonction est *périodique* pour dire qu'elle est purement périodique.

Le théorème précédent nous assure que φ_S devient toujours périodique au-delà d'une certaine valeur. Toutefois, on connaît mal la relation entre la valeur de S et la période pour un ensemble quelconque. Le théorème suivant qui nous donne la période pour une famille bien particulière d'ensembles est un cas particulier d'un résultat obtenu par Fraenkel et Kotzig [3].

Théorème 1.1.2. *Soit $S \subseteq \mathbb{N}^+$, s'il existe un entier positif $c \in \mathbb{N}^+$ tel que $c - x \in S$ pour tout $x \in S$, alors φ_S est périodique et c est une période de φ_S.*

DÉMONSTRATION. Montrons par induction sur n que

$$\varphi_S(n+c) = \varphi_S(n) \tag{P}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$,

$$\begin{aligned}
\varphi_S(c) &= \operatorname{mex}\{\varphi_S(c-x)|x \in S\} \\
&= \operatorname{mex}(\varphi_S\{c-x|x \in S\}) \\
&= \operatorname{mex}\{\varphi_S(y)|y \in S\} \\
&= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad (\text{ puisque } \varphi_S(y) > 0) \\
&= \varphi_S(0)
\end{aligned}$$

Supposons que (P) soit vrai jusqu'à $n = k - 1 \geq 0$ et montrons que (P) est vrai pour $n = k$. Premierement $\varphi_S(k) \leq \varphi_S(k+c)$ puisque,

$$\begin{aligned}
\{\varphi_S(k-s)|s \in S \text{ et } k \geq s\} &= \{\varphi_S(k-s+c)|s \in S \text{ et } k \geq s\} \quad (\text{par hypothèse}) \\
&\subseteq \{\varphi_S(k-s+c)|s \in S\}
\end{aligned}$$

Maintenant supposons par l'absurde que

$$\varphi_S(k) < \varphi_S(k+c)$$

Dans ce cas il existe $x \in S$ tel que $\varphi_S(k+c-x) = \varphi_S(k)$ mais comme pour x il existe $y \in S$ tel que $x + y = c$ on a $\varphi_S(k+y) = \varphi_S(k)$ ce qui implique $\varphi_S(k) \neq \varphi_S(k)$ une absurdité. Donc on a bien $\varphi_S(k) = \varphi_S(k+c)$ et (P) est donc vrai pour $n = k$ ce qui complète l'induction. □

Par exemple le théorème précédent nous donne que $a+b$ est une période de l'ensemble $\{a,b\}$.

Voyons maintenant une formule explicite pour calculer φ_S quand S est de la forme $\{1,2,\dots,k\}$.

Théorème 1.1.3. *Si $S=\{1,2,\dots,k\}$ alors $\varphi_S(n)$ est le reste de la division de n par $k+1$.*

DÉMONSTRATION. Montrons par induction sur n que

$$\varphi_S(n) \text{ est le reste de la division de } n \text{ par } k+1.$$

Pour $n=0$ on a bien le résultat. Maintenant supposons qu'on a le résultat pour tout $0 \leq n < m$. Alors,

$$\varphi_S(m) = \operatorname{mex}\{\varphi_S(m-s) \mid s \in S \text{ et } m \geq s\}$$

mais par hypothèse d'induction on a

$$\{\varphi_S(m-s) \mid s \in S \text{ et } m \geq s\} \supseteq \{0,1,\dots,r-1\}$$

où r est le reste de la division de m par $k+1$. Puis comme

$$r \notin \{\varphi_S(m-s) \mid s \in S \text{ et } m \geq s\}$$

on a bien

$$r = \operatorname{mex}\{\varphi_S(m-s) \mid s \in S \text{ et } m \geq s\}$$

ce qui complète l'induction. □

Le théorèmes suivant nous montre que dans certains cas on peut augmenter l'ensemble de soustraction S sans changer la fonction φ_S.

Théorème 1.1.4. *Soit $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \mathbb{N}^+$ alors*

$$\varphi_{S_1} = \varphi_{S_2} \Leftrightarrow \varphi_{S_1}(k+n) \neq \varphi_{S_1}(n) \textit{ pour tout } n \in \mathbb{N},\ k \in S_2.$$

DÉMONSTRATION. ($\Leftarrow$)

Montrons par induction sur n que

$$\varphi_{S_1}(n) = \varphi_{S_2}(n)$$

Pour $n = 0$ on a le résultat. Supposons maintenant que $\varphi_{S_1}(n) = \varphi_{S_2}(n)$ pour $0 \leq n < m$. Alors,

$$\begin{aligned}
\varphi_{S_2}(m) &= \operatorname{mex}\{\varphi_{S_2}(m - s_2) \mid m \geq s_2 \text{ et } s_2 \in S_2\} \\
&\geq \operatorname{mex}\{\varphi_{S_2}(m - s_1) \mid m \geq s_1 \text{ et } s_1 \in S_1\} && (\text{ comme } S_1 \subseteq S_2) \\
&\geq \operatorname{mex}\{\varphi_{S_1}(m - s_1) \mid m \geq s_1 \text{ et } s_1 \in S_1\} && (\text{ par hypothèse}) \\
&\geq \varphi_{S_1}(m)
\end{aligned}$$

Maintenant si $\varphi_{S_2}(m) > \varphi_{S_1}(m)$ par la proposition 1.1.1 (3) il existe $s_2 \in S_2$ tel que

$$\begin{aligned}
\varphi_{S_1}(m) &= \varphi_{S_2}(m - s_2) \\
&= \varphi_{S_1}(m - s_2) && \text{par hypothese d'induction}
\end{aligned}$$

cette dernière est impossible puisque

$$S_2 \subseteq \{k \mid \varphi_{S_1}(k + n) \neq \varphi_{S_1}(n) \text{ pour tout n } \in \mathbb{N}\}$$

Donc on a bien $\varphi_{S_1}(m) = \varphi_{S_2}(m)$ ce qui complète l'induction.

($\Rightarrow$)

Maintenant supposons par l'absurde que

$$\varphi_{S_1} \neq \varphi_{S_2}$$

Soit n le plus petit entier positif tel que $\varphi_{S_1}(n) \neq \varphi_{S_2}(n)$. Comme $S_1 \subseteq S_2$ on a,

$$\varphi_{S_1}(n) < \varphi_{S_2}(n)$$

Puis par la proposition 1.1.1 (3) il existe $s_2 \in S_2$ tel que

$$\begin{aligned} \varphi_{S_1}(n) &= \varphi_{S_2}(n - s_2) \\ &= \varphi_{S_1}(n - s_2) && \text{par la minimalite de } n. \end{aligned}$$

Cette dernière est impossible puisque

$$S_2 \subseteq \{k \mid \varphi_{S_1}(k+n) \neq \varphi_{S_1}(n) \text{ pour tout n } \in \mathbb{N}\}$$

Donc on a bien $\varphi_{S_1} = \varphi_{S_2}$.

□

Corollaire 1.1.1. *Soit $S \subseteq \mathbb{N}^+$ tel que $p \in \mathbb{N}^+$ est une période de φ_S alors,*

(1) $\varphi_S = \varphi_{S+p\mathbb{N}}$

(2) $\varphi_S = \varphi_{S\setminus(S+p\mathbb{N}^+)}$

DÉMONSTRATION. (1)

$$\begin{aligned} \varphi_S(n+s+lp) &= \varphi_S(n+s) && \text{puisque } p \text{ est une période de } \varphi_S \\ &\neq \varphi_S(n) && \text{quand } s \in S \end{aligned}$$

On vient donc de montrer l'inclusion suivante,

$$S + p\mathbb{N} \subseteq \{k \mid \varphi_S(k+n) \neq \varphi_S(n) \text{ pour tout n } \in \mathbb{N}\}$$

Comme $S \subseteq S + p\mathbb{N}$ par le théorème 1.1.4 on a donc,

$$\varphi_S = \varphi_{S+p\mathbb{N}}$$

(2) Supposons que

$$\varphi_{S\setminus(S+p\mathbb{N}^+)} \neq \varphi_S$$

Soit n le plus petit entier tel que

$$\varphi_{S\setminus(S+p\mathbb{N}^+)}(n) \neq \varphi_S(n) \tag{I}$$

Comme $S \setminus (S + p\mathbb{N}^+) \subseteq S$ on a,

$$\varphi_{S\setminus(S+p\mathbb{N}^+)}(n) < \varphi_S(n)$$

Donc il existe $s \in S$ tel que $n \geq s$ et,

$$\varphi_{S\setminus(S+p\mathbb{N}^+)}(n) = \varphi_S(n-s)$$

Comme n est minimal pour (I) on doit avoir,

$$\varphi_{S\setminus(S+p\mathbb{N}^+)}(n) = \varphi_{S\setminus(S+p\mathbb{N}^+)}(n-s) \tag{E}$$

Donc $s \notin S \setminus (S+p\mathbb{N}^+)$. Puis comme $s \in S$, on a donc $s \in (S+p\mathbb{N}^+)$ c'est-à-dire

$$s = t + pl. \text{ où } t \in S \setminus (S+p\mathbb{N}^+)$$

et ainsi donc,

$$\begin{aligned}
\varphi_{S\setminus(S+p\mathbb{N}^+)}(n-s) &= \varphi_S(n-s) && \text{comme } n \text{ est minimal pour (I)} \\
&= \varphi_S(n-t) && \text{comme } p \text{ est une période de } \varphi \\
&= \varphi_{S\setminus(S+p\mathbb{N}^+)}(n-t) && \text{comme } n \text{ est minimal pour (I)}
\end{aligned}$$

Ce qui nous permet de subtituer le member de droite de (E),

$$\varphi_{S\setminus(S+p\mathbb{N}^+)}(n) = \varphi_{S\setminus(S+p\mathbb{N}^+)}(n-t)$$

ce qui est impossible puisque $t \in S \setminus (S+p\mathbb{N}^+)$. Donc on a bien,

$$\varphi_{S\setminus(S+p\mathbb{N}^+)} = \varphi_S$$

ce qui complète la preuve.

$\square$

Chapitre 2

LES PSEUDO-BASES INFINIES

2.1. Définitions et propriétés

Dans le but d'étudier les fonctions φ_S de la définition 1.1.2 nous aurons besoin du concept de pseudo-base infinie qui sera notre sujet d'étude pour cette section.

Définition 2.1.1. *On appelle* pseudo-base infinie *une suite croissante non bornée de nombre entiers positifs* $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$ *telle que* $\beta_0 = 1$ *et* $\beta_i | \beta_{i+1}$ *pour tout* $i \geq 0$. *On notera* $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots,)$ *pour désigner la suite appelée* β *dont les élements sont dans l'ordre* $\beta_0 = 1, \beta_1, \beta_2, \ldots$

Les pseudo-bases infinies sont une extension du concept de base de numération des nombres entiers comme la base binaire ou la base décimale. Quant aux bases de numération ce sont les pseudo-bases infinies ou $\beta_i = b^i$ pour un entier $b > 1$. Toutefois les pseudo-bases infinies sont une famille plus restreinte que celle des système de numération où on a pas la condition $\beta_i | \beta_{i+1}$ qui assure que les pseudo-bases infinies ont en gros les mêmes propriétés que les bases de numération. Cette dernière condition ne nous assure toutefois pas que la suite β_i est croissante puisque,

$$\beta = (1,0,0,\ldots)$$

satisfait $\beta_i | \beta_{i+1}$. Cette dernière étant indésirable elle est éliminée puisque la définition exige que la suite soit croissante.

Une autre chose indésirable serait que la suite β soit bornée mais cette éventualitee est éliminée en spécifiant dans la définition qu'une pseudo-base est une suite non bornée.

Voici maintenant quelques exemples de pseudo-bases infinies.

$$\beta = (1,2,4,8,\dots,2^i,\dots)$$

$$\beta = (1,3,6,12,\dots,3\cdot 2^i,\dots)$$

$$\beta = (1,1,2,2,4,4,8,8,\dots,2^i,2^i,\dots)$$

Définition 2.1.2. *Soit $\beta = (\beta_0,\beta_1,\beta_2,\dots)$ une pseudo-base infinie. Pour n, $i \in \mathbb{N}$ et on définit:*

$$\mathrm{coeff}^i_\beta(n) = \textit{le reste de la division de } \lfloor n/\beta_i \rfloor \textit{ par } \beta_{i+1}/\beta_i$$

$$\mathrm{spectre}_\beta(i) = \{0,1,\dots,\beta_{i+1}/\beta_i - 1\}$$

Ici une mise en garde s'impose puisque la notation peut porter à confusion. En effet, le i de $\mathrm{coeff}^i_\beta(n)$ n'est pas un exposant mais bien un indice.

$\mathrm{spectre}_\beta(i)$ est l'ensemble des valeurs que $\mathrm{coeff}^i_\beta(n)$ peut prendre.

$\mathrm{coeff}^i_\beta(n)$ sera le coefficient de β_i lorsqu'on le développera dans la pseudo-base infinie β, comme l'affirme le théorème suivant. Mais remarquons d'abord que lorsque $\beta_i = \beta_{i+1}$ on a que $\mathrm{coeff}^i_\beta(n) = 0$ quel que soit $n \geq 0$.

Théorème 2.1.1. *Soit $\beta = (\beta_0,\beta_1,\beta_2,\dots)$ une pseudo-base infinie. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a,*

(1) $0 \leq \mathrm{coeff}^i_\beta(n) < \beta_{i+1}/\beta_i$ *pour tout* $i \geq 0$

ou autrement dit $\mathrm{coeff}^i_\beta(n) \in \mathrm{spectre}_\beta(i)$.

(2) $n = \sum_{i\geq 0} \mathrm{coeff}^i_\beta(n)\beta_i$

comme prévu, n se décompose sur β

(3) si $n = \sum_{i=0}^{k} c_i\beta_i$ *avec* $c_i \in \mathrm{spectre}_\beta(i)$ *pour tout* $0 \leq i \leq k$ *alors* $c_i = \mathrm{coeff}^i_\beta(n)$ *pour tout* $0 \leq i \leq k$.

C'est-à-dire la décomposition de n sur β est unique.

DÉMONSTRATION. (1) $0 \leq \mathrm{coeff}^i_\beta(n) < \beta_{i+1}/\beta_i$ puisque $\mathrm{coeff}^i_\beta(n)$ est le reste d'une division par β_{i+1}/β_i.

(2) Montrons par induction sur j que

$$n \equiv \sum_{i \geq 0} \mathrm{coeff}_\beta^i(n)\beta_i \pmod{\beta_j}$$

pour tout $j \geq 0$. Pour $j = 0$ ça va. Supposons que ce soit vrai pour j.

$$\begin{aligned} n &\equiv \sum_{i \geq 0} \mathrm{coeff}_\beta^i(n)\beta_i && \pmod{\beta_j} \\ &\equiv \sum_{0 \leq i < j} \mathrm{coeff}_\beta^i(n)\beta_i && \pmod{\beta_j} \end{aligned}$$

Donc n est de la forme $n = \sum_{0 \leq i < j} \mathrm{coeff}_\beta^i(n)\beta_i + k\ \beta_j$ et $\lfloor n/\beta_j \rfloor = k$. Puis par la définition de $\mathrm{coeff}_\beta^j(n)$ on a $k = \mathrm{coeff}_\beta^j(n) + q(\beta_{j+1}/\beta_j)$. Ce qui nous donne

$$\begin{aligned} n &= \sum_{0 \leq i < j} \mathrm{coeff}_\beta^i(n)\beta_i + (\mathrm{coeff}_\beta^j(n) + q(\beta_{j+1}/\beta_j))\beta_j \\ &= \sum_{0 \leq i < j+1} \mathrm{coeff}_\beta^i(n)\beta_i + q\beta_{j+1} \\ &\equiv \sum_{0 \leq i < j+1} \mathrm{coeff}_\beta^i(n)\beta_i && \pmod{\beta_{j+1}} \end{aligned}$$

ce qui complète l'induction. Puis comme la suite β_j est non bornée on a bien le résultat.

(3) Montrons par induction que $\mathrm{coeff}_\beta^j(n) = c_j$ sur $0 \leq j \leq k$. Pour $j = 0$ on a,

$$\begin{aligned} c_0 &\equiv n && \pmod{\beta_1} \\ &\equiv \mathrm{coeff}_\beta^i(n) && \pmod{\beta_1} \end{aligned}$$

et comme par hypothèse $0 \leq c_0 < \beta_1$ on a donc $c_0 = \mathrm{coeff}^0_\beta(n)$. Supposons maintenant que $\mathrm{coeff}^i_\beta(n) = c_i$ pour $0 \leq i < j \leq k$.

$$\begin{aligned}
\sum_{0\leq i\leq j} c_i\beta_i &\equiv \sum_{0\leq i\leq j} \mathrm{coeff}^i_\beta(n)\beta_i && \pmod{\beta_{j+1}}\\
c_j\beta_j + \sum_{0\leq i<j} c_i\beta_i &\equiv \mathrm{coeff}^j_\beta(n)\beta_j + \sum_{0\leq i<j} \mathrm{coeff}^i_\beta(n)\beta_i && \pmod{\beta_{j+1}}\\
c_j\beta_j &\equiv \mathrm{coeff}^j_\beta(n)\beta_j && \pmod{\beta_{j+1}}\\
c_j &\equiv \mathrm{coeff}^j_\beta(n) && \pmod{\beta_{j+1}/\beta_j}
\end{aligned}$$

et comme par hypothèse $0 \leq c_j < \beta_{j+1}/\beta_j$ on a donc $c_j = \mathrm{coeff}^j_\beta(n)$. Ce qui complète l'induction et donne le résultat.

□

2.2. LES FONCTIONS τ, δ ET σ

Voici maintenant quelques fonctions qui nous seront utiles pour l'étude des jeux de soustraction.

Définition 2.2.1. *Soit $\beta = (\beta_0,\beta_1,\beta_2,\dots)$ une pseudo-base infinie. Pour $n,i \in \mathbb{N}$ on définit:*

$$\tau^i_\beta(n) = \sum_{0\leq j<i} \mathrm{coeff}^j_\beta(n)\beta_j$$

$$\delta^i_\beta(x,y) = \begin{cases} 1 & si\ \tau^i_\beta(x) < \tau^i_\beta(y) \\ 0 & si\ \tau^i_\beta(x) \geq \tau^i_\beta(y) \end{cases}$$

Ici aussi une mise en garde s'impose puisque le i de $\tau^i_\beta(n)$ et de $\delta^i_\beta(x,y)$ n'est pas un exposant mais bien un indice.

On remarque que $\tau^i_\beta(n)$ n'est rien d'autre que le reste de la division de n par β_i. Aussi $\tau^i_\beta(n)$ dépend de $\mathrm{coeff}^j_\beta(n)$ pour $0 \leq j < i$ et donc ne dépend pas de $\mathrm{coeff}^i_\beta(n)$. De même $\delta^i_\beta(x,y)$ ne dépend pas de $\mathrm{coeff}^i_\beta(n)$. En fait $\delta^i_\beta(x,y)$ prend la valeur 1 lorsque en effectuant la soustraction $x - y$ dans la pseudo-base infinie

β il faut faire un emprunt dans la colonne i. Comme le montre la proposition suivante.

Proposition 2.2.1. *Soit* $\beta = (\beta_0,\beta_1,\beta_2,\dots)$ *une pseudo-base infinie* x, $y \in \mathbb{N}$ *avec* $x \geq y$ *alors*

$$\mathrm{coeff}^i_\beta(x-y) \equiv \mathrm{coeff}^i_\beta(x) - \mathrm{coeff}^i_\beta(y) - \delta^i_\beta(x,y) \pmod{\beta_{i+1}/\beta_i}$$

DÉMONSTRATION. Soulignons d'abord que pour deux nombre A, $B \in \mathbb{R}$ tels que $0 \leq A < 1$ et $0 \leq B < 1$ on a,

$$\lfloor A - B \rfloor = \begin{cases} -1, & \text{si } A < B; \\ 0, & \text{si } A \geq B. \end{cases}$$

Ainsi donc on a,

$$\begin{aligned}
\lfloor \frac{x-y}{\beta_i} \rfloor &= \lfloor x/\beta_i - y/\beta_i \rfloor \\
&= \lfloor x/\beta_i - \lfloor x/\beta_i \rfloor - (y/\beta_i - \lfloor y/\beta_i \rfloor) + \lfloor x/\beta_i \rfloor - \lfloor y/\beta_i \rfloor \rfloor \\
&= \lfloor x/\beta_i - \lfloor x/\beta_i \rfloor - (y/\beta_i - \lfloor y/\beta_i \rfloor) \rfloor + \lfloor x/\beta_i \rfloor - \lfloor y/\beta_i \rfloor \\
&= \lfloor x/\beta_i \rfloor - \lfloor y/\beta_i \rfloor - \begin{cases} 1, & \text{si } x/\beta_i - \lfloor x/\beta_i \rfloor < y/\beta_i - \lfloor y/\beta_i \rfloor \\ 0, & \text{si } x/\beta_i - \lfloor x/\beta_i \rfloor \geq y/\beta_i - \lfloor y/\beta_i \rfloor \end{cases} \\
&= \lfloor x/\beta_i \rfloor - \lfloor y/\beta_i \rfloor - \begin{cases} 1, & \text{si } x - \beta_i \lfloor x/\beta_i \rfloor < y - \beta_i \lfloor y/\beta_i \rfloor \\ 0, & \text{si } x - \beta_i \lfloor x/\beta_i \rfloor \geq y - \beta_i \lfloor y/\beta_i \rfloor \end{cases} \\
&= \lfloor x/\beta_i \rfloor - \lfloor y/\beta_i \rfloor - \begin{cases} 1, & \text{si } \tau^i_\beta(x) < \tau^i_\beta(y); \\ 0, & \text{si } \tau^i_\beta(x) \geq \tau^i_\beta(y) \end{cases} \\
&= \lfloor x/\beta_i \rfloor - \lfloor y/\beta_i \rfloor - \delta^i_\beta(x,y)
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\operatorname{coeff}^i_\beta(x-y) &\equiv \lfloor (x-y)/\beta_i \rfloor && \pmod{\beta_{i+1}/\beta_i}\\
&\equiv \lfloor x/\beta_i \rfloor - \lfloor y/\beta_i \rfloor - \delta^i_\beta(x,y) && \pmod{\beta_{i+1}/\beta_i}\\
&\equiv \operatorname{coeff}^i_\beta(x) - \operatorname{coeff}^i_\beta(y) - \delta^i_\beta(x,y) && \pmod{\beta_{i+1}/\beta_i}
\end{aligned}$$

C.Q.F.D. □

Définition 2.2.2. *Soit $\alpha = (\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_k)$, $\beta = (\beta_0,\beta_1,\dots,\beta_k)$ deux pseudo-bases infinies quelconques. On dira que $\alpha|\beta$ si*

$$\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} \mid \frac{\beta_{i+1}}{\beta_i} \qquad \textit{pour tout } i \geq 0$$

et $\beta/\alpha = (\beta_0,\beta_0\alpha_1,\dots,\beta_i,\beta_i\alpha_{i+1}/\alpha_i,\dots)$ qui est bien une pseudo-base infinie. On a aussi $\operatorname{spectre}_{\beta/\alpha}(2i) = \operatorname{spectre}_\alpha(i)$.

Avant d'utiliser ce dernier concept introduisons une fonction qui fait un lien entre deux pseudo-bases infinies quelconques.

Définition 2.2.3. *Soit $\alpha = (\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\dots)$, $\beta = (\beta_0,\beta_1,\beta_2,\dots)$ deux pseudo-bases infinies. Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit,*

$$\sigma^\alpha_\beta(n) = \sum_{i\geq 0} c^i_\beta(n)\alpha_i$$

où $c^i_\beta(n)$ est le reste de la division de $\operatorname{coeff}^i_\beta(n)$ *par α_{i+1}/α_i.*

Maintenant on peut faire un lien entre les deux définitions précédentes et la proposition suivante.

Proposition 2.2.2. *Soit $\alpha = (\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\dots)$, $\beta = (\beta_0,\beta_1,\alpha_2,\dots)$ deux pseudo-bases infinies avec $\alpha|\beta$. Alors,*

$$\sigma^\alpha_\beta(n) = \sum_{i\geq 0} \operatorname{coeff}^{2i}_{\beta/\alpha}(n)\alpha_i$$

ou autrement dit $\operatorname{coeff}^i_\alpha(\sigma^\alpha_\beta(n)) = \operatorname{coeff}^{2i}_{\beta/\alpha}(n)$.

DÉMONSTRATION. Comme n se décompose de la façon suivante,

$$n = \sum_{i=0}^{k} \operatorname{coeff}^i_\beta(n)\beta_i$$

Maintenant chaque $\mathrm{coeff}^i_\beta(n)$ se décompose de la façon suivante,

$$\mathrm{coeff}^i_\beta(n) = q_i \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} + c^i_\beta$$

où $0 \leq q_i < (\beta_{i+1}/\beta_i)/(\alpha_{i+1}/\alpha_i)$ et $0 \leq c^i_\beta < \alpha_{i+1}/\alpha_i$ et c^i_β est bel et bien le reste de la division de $\mathrm{coeff}^i_\beta(n)$ tel que $\sigma^\alpha_\beta(n) = \sum_{i\geq 0} c^i_\beta(n)\alpha_i$. Donc,

$$\begin{aligned} n &= \sum_{i=0}^{k} (q_i \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} + c^i_\beta)\beta_i \\ &= \sum_{i=0}^{k} (c^i_\beta \beta_i + q_i(\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}\beta_i)) \end{aligned}$$

ce qu'on a l'a est bel et bien le développement de n dans la pseudo-base infinie β/α. Ce qui nous donne,

$$c^i_\beta = \mathrm{coeff}^{2i}_{\beta/\alpha}(n)$$

C.Q.F.D. □

Corollaire 2.2.1. *Soit $\alpha = (\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\ldots)$, $\beta = (\beta_0,\beta_1,\beta_2,\ldots)$ deux pseudo-bases infinies avec $\alpha \mid \beta$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a,*

$$\sigma^\alpha_\beta(n - \sigma^\beta_\alpha(\sigma^\alpha_\beta(n))) = 0$$

Démonstration. Avant d'appliquer σ^α_β développons $n - \sigma^\beta_\alpha(\sigma^\alpha_\beta(n))$ dans la pseudo-base infinie β/α.

$$\begin{aligned} n - \sigma^\beta_\alpha(\sigma^\alpha_\beta(n)) &= \sum_{i\geq 0} \mathrm{coeff}^i_\beta(n)\beta_i - \sigma^\beta_\alpha(\sum_{i\geq 0} \mathrm{coeff}^{2i}_{\beta/\alpha}(n)\alpha_i) \\ &= \sum_{i\geq 0} (\mathrm{coeff}^{2i}_{\beta/\alpha}(n) + \mathrm{coeff}^{2i+1}_{\beta/\alpha}(n)\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i})\beta_i - \sum_{i\geq 0} \mathrm{coeff}^{2i}_{\beta/\alpha}(n)\beta_i \\ &= \sum_{i\geq 0} \mathrm{coeff}^{2i+1}_{\beta/\alpha}(n)\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}\beta_i \end{aligned}$$

Donc on a bien $\sigma^\alpha_\beta(n - \sigma^\beta_\alpha(\sigma^\alpha_\beta(n))) = 0$ □

Théorème 2.2.1. *Soit $\alpha = (\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\ldots)$, $\beta = (\beta_0,\beta_1,\beta_2,\ldots)$ deux pseudo-bases infinies avec $\alpha \mid \beta$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe une unique décomposition*

$n = x + y$ où x est dans l'image de σ_α^β et y est dans le noyau de σ_β^α.(C'est-à-dire $\sigma_\beta^\alpha(y) = 0$)

DÉMONSTRATION. Prenons $x = \sigma_\alpha^\beta(\sigma_\beta^\alpha(n))$ alors x est bien dans l'image de σ_α^β. Puis prenons $y = n - \sigma_\alpha^\beta(\sigma_\beta^\alpha(n))$ alors y est bel et bien dans le noyau de σ_β^α.

On a l'unicité grâce a l'unicité de la décomposition de n sur la pseudo-base infinie β/α. □

Proposition 2.2.3. *Soit $\alpha = (\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\ldots)$, $\beta = (\beta_0,\beta_1,\beta_2,\ldots)$ deux pseudo-bases infinies telles que $\alpha \mid \beta$ alors:*

(1) σ_α^β est croissante;

(2) $\sigma_\beta^\alpha(\sigma_\alpha^\beta(n)) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;

(3) $\sigma_\alpha^\beta(\sigma_\beta^\alpha(n)) \leq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;

(4) $\sigma_\beta^\alpha(n) \neq \sigma_\beta^\alpha(n - \sigma_\alpha^\beta(s_1))$ pourvu que $n \geq \sigma_\alpha^\beta(s_1)$ et $s_1 > 0$.

DÉMONSTRATION. (1) puisque $\mathrm{coeff}_\alpha^i(n) = \mathrm{coeff}_\beta^i(\sigma_\alpha^\beta(n))$ et que $\alpha_i \leq \beta_i$ on a le résultat. (2)

$$\begin{aligned}\mathrm{coeff}_\alpha^i(\sigma_\beta^\alpha(\sigma_\alpha^\beta(n)) &= \mathrm{coeff}_\beta^i(\sigma_\alpha^\beta(n))\\ &= \mathrm{coeff}_\alpha^i(n)\end{aligned}$$

(3) Comme $\sigma_\alpha^\beta(\sigma_\beta^\alpha(n)) = \sum_{i\geq 0} \mathrm{coeff}_{\beta/\alpha}^{2i}(n)\beta_i \leq n$.

(4) Supposons que $\sigma_\beta^\alpha(n) = \sigma_\beta^\alpha(n - \sigma_\alpha^\beta(s_1))$. Montrons par induction sur i que $\mathrm{coeff}_{\beta/\alpha}^{2i}(\sigma_\alpha^\beta(s_1)) \equiv 0 \pmod{\alpha_{i+1}/\alpha_i}$. Pour $i = 0$ on a que

$$\begin{aligned}\mathrm{coeff}_{\beta/\alpha}^{0}(n) &\equiv \mathrm{coeff}_{\beta/\alpha}^{0}(n - \sigma_\alpha^\beta(s_1)) \pmod{\alpha_1}\\ &\equiv \mathrm{coeff}_{\beta/\alpha}^{0}(n) - \mathrm{coeff}_{\beta/\alpha}^{0}(\sigma_\alpha^\beta(s_1)) \pmod{\alpha_1}\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{coeff}_{\beta/\alpha}^{0}(\sigma_\alpha^\beta(s_1)) \equiv 0 \pmod{\alpha_1}$.

Supposons maintenant que $\mathrm{coeff}_{\beta/\alpha}^{2i}(\sigma_\alpha^\beta(s_1)) \equiv 0 \pmod{\alpha_{i+1}/\alpha_i}$ pour $0 \leq i < j$. Alors,

$$\begin{aligned}\mathrm{coeff}_{\beta/\alpha}^{2j}(n) &\equiv \mathrm{coeff}_{\beta/\alpha}^{2j}(n - \sigma_\alpha^\beta(s_1)) && \pmod{\alpha_{j+1}/\alpha_j}\\ &\equiv \mathrm{coeff}_{\beta/\alpha}^{2j}(n) - \mathrm{coeff}_{\beta/\alpha}^{2j}(\sigma_\alpha^\beta(s_1)) && \pmod{\alpha_{j+1}/\alpha_j}\end{aligned}$$

Puisque $\delta^{2i}_{\beta/\alpha}(n,\sigma^{\beta}_{\alpha}(s_1)) = 0$. Donc on a $\text{coeff}^{2j}_{\beta/\alpha}(\sigma^{\beta}_{\alpha}(s_1)) \equiv 0 \pmod{\alpha_{j+1}/\alpha_j}$. Ce qui complète l'induction et implique que $\sigma^{\beta}_{\alpha}(s_1) = 0$ impossible quand $s_1 > 0$. Donc on a bien le résultat. □

Proposition 2.2.4. *Soit $\alpha = (\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\dots)$, $\beta = (\beta_0,\beta_1,\beta_2,\dots)$ et $\gamma = (\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2,\dots)$ trois pseudo-bases infinies telles que $\gamma \mid \alpha$ et $\gamma \mid \beta$, alors*

$$\sigma^{\alpha}_{\gamma}(\sigma^{\gamma}_{\beta}(n)) = \sigma^{\alpha}_{\beta}(n)$$

DÉMONSTRATION.

$$\sigma^{\beta}_{\gamma}(\sigma^{\gamma}_{\alpha}(n)) = \sigma^{\beta}_{\gamma}(\sum_{i\geq 0} c^{i}_{\alpha}(n)\gamma_i)$$

ou $c^i_\alpha =$ le reste de la division de coeff^i_α par γ_{i+1}/γ_i.

Donc,

$$\begin{aligned}\sigma^{\beta}_{\gamma}(\sigma^{\gamma}_{\alpha}(n)) &= \sum_{i\geq 0} c^{i}_{\alpha}(n)\beta_i && \text{comme } \gamma \mid \beta\\ &= \sigma^{\alpha}_{\beta}(n)\end{aligned}$$

□

2.3. Pseudo-bases infinies et jeux de soustraction

Dans cette section nous verrons qu'on peut, quand S_1 et $S_2 = \sigma^{\beta}_{\alpha}(S_1)$ satisfont certaines propriétés factoriser la fonction φ_{S_2} par une autre fonction φ_{S_1} et σ^{α}_{β} pour obtenir,

$$\varphi_{S_2}(n) = \varphi_{S_1}(\sigma^{\alpha}_{\beta}(n)) \text{ quel que soit } n \geq 0$$

Ainsi nous pourrons déduire des propriétés de φ_{S_2} en étudiant φ_{S_1}. Un élément clé de cette démonstration sera que pour $s_1 \in S_1$ et $m \in \mathbb{N}$ il existe $s_2 \in S_2$ tel que

$$\sigma^{\alpha}_{\beta}(m) - s_1 = \sigma^{\alpha}_{\beta}(m - s_2)$$

Définissons maintenant le candidat qui jouera ce rôle.

Définition 2.3.1. *Soit* s_1, $m \in \mathbb{N}$ *et* $\alpha = (\alpha_0,\alpha_1,\beta_2,\dots)$, $\beta = (\beta_0,\beta_1,\beta_2,\dots)$ *deux pseudo-bases infinies telles que* $\alpha|\beta$ *et* $\sigma^\alpha_\beta(m) \geq s_1$ *alors on définit*

$$\chi^\alpha_\beta(m,s_1) = \sum_{i\geq 0} c_i\alpha_i$$

tel que $0 \leq c_i < \alpha_{i+1}/\alpha_i$ *et*

$$c_i \equiv \mathrm{coeff}^i_\alpha(s_1) + \delta^i_\alpha(\sigma^\alpha_\beta(m),s_1) - \delta^i_\beta(m,\sigma^\beta_\alpha(s_1)) \pmod{\alpha_{i+1}/\alpha_i}$$

Voici maintenant la preuve que $\chi^\alpha_\beta(m,s_1)$ remplit bien son rôle.

Théorème 2.3.1. *Soit* s_1, $m \in \mathbb{N}$ *et*

$\alpha = (\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\dots)$, $\beta = (\beta_0,\beta_1,\beta_2,\dots)$ *deux pseudo-bases infinies telles que* $\alpha|\beta$ *et* $\sigma^\alpha_\beta(m) \geq s_1 > 0$ *alors :*

(1) $\delta^i_\beta(m,\sigma^\beta_\alpha(\chi^\alpha_\beta(m,s_1))) = \delta^i_\beta(m,\sigma^\beta_\alpha(s_1))$ *et ainsi donc,*

$$\mathrm{coeff}^i_\alpha(\chi^\alpha_\beta(m,s_1)) \equiv \mathrm{coeff}^i_\alpha(s_1) + \delta^i_\alpha(\sigma^\alpha_\beta(m),s_1) - \delta^i_\beta(m,\sigma^\beta_\alpha(\chi^\alpha_\beta(m,s_1))) \pmod{\alpha_{i+1}/\alpha_i}$$

(2) $\sigma^\beta_\alpha(\chi^\alpha_\beta(m,s_1)) \leq m$

(3) $\sigma^\alpha_\beta(m) - s_1 = \sigma^\alpha_\beta(m - \sigma^\beta_\alpha(\chi^\alpha_\beta(m,s_1)))$

Démonstration. (1) Procédons par induction sur i. Pour $i = 0$ ça va. Supposons maintenant vrai pour $0 \leq i < j$ et montrons que c'est vrai pour $i = j$. Donc on a bien que

$$\mathrm{coeff}^i_\alpha(\chi^\alpha_\beta(m,s_1)) \equiv \mathrm{coeff}^i_\alpha(s_1) + \delta^i_\alpha(\sigma^\alpha_\beta(m),s_1) - \delta^i_\beta(\chi^\alpha_\beta(m,s_1),\sigma^\beta_\alpha(m))$$

$\pmod{\alpha_{i+1}/\alpha_i}$ pour $0 \leq i < j$. Ce qui implique que

$$\tau^j_\beta(\sigma^\beta_\alpha(\chi^\beta_\alpha(m,s_1))) = \tau^j_\beta(\sigma^\beta_\alpha(s_1))$$

et donc,

$$\delta^j_\beta(m,\sigma^\beta_\alpha(\chi^\beta_\alpha(m,s_1))) = \begin{cases} 1 \text{ si } \tau^j_\beta(m) < \tau^j_\beta(\sigma^\beta_\alpha(\chi^\beta_\alpha(m,s_1))) \\ 0 \text{ si } \tau^j_\beta(m) \geq \tau^j_\beta(\sigma^\beta_\alpha(\chi^\beta_\alpha(m,s_1))) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 \text{ si } \tau^j_\beta(m) < \tau^j_\beta(\sigma^\beta_\alpha(s_1)) \\ 0 \text{ si } \tau^j_\beta(m) \geq \tau^j_\beta(\sigma^\beta_\alpha(s_1)) \end{cases}$$

$$= \delta^j_\beta(m,\sigma^\beta_\alpha(s_1))$$

ce qui complète l'induction et nous donne le résultat. (2) Montrons que

$$\delta^i_\alpha(\sigma^\alpha_\beta(m),s_1) \geq \delta^i_\beta(m,\sigma^\beta_\alpha(s_1)) \tag{I}$$

En effet, si $\tau^i_\alpha(\sigma^\alpha_\beta(n)) \geq \tau^i_\alpha(s_1)$ alors il existe $0 \leq i_0 < i$ tel que pour tout j tel que $i_0 < j < i$

$$\begin{aligned} & \mathrm{coeff}^j_\alpha(\sigma^\alpha_\beta(m)) \geq \mathrm{coeff}^j_\alpha(s_1) \\ \Rightarrow \quad & \mathrm{coeff}^{2j}_{\beta/\alpha}(m) \geq \mathrm{coeff}^j_\alpha(s_1) \\ \Rightarrow \quad & \mathrm{coeff}^j_\beta(m) \geq \mathrm{coeff}^j_\beta(\sigma^\beta_\alpha(s_1)) \end{aligned}$$

Donc on a,

$$\tau^i_\beta(m) \geq \tau^i_\beta(\sigma^\beta_\alpha(s_1))$$

Ce qui montre (I). Maintenant comme $\sigma^\alpha_\beta(m) \geq s_1$,

$$\begin{aligned} & \delta^i_\alpha(\sigma^\alpha_\beta(m),s_1) \text{ est nulle au-delà d'une certaine valeur de } i \\ \Rightarrow \quad & \delta^i_\beta(m,\sigma^\beta_\alpha(s_1)) \text{ est nulle au-delà d'une certaine valeur de } i \\ \Rightarrow \quad & \delta^i_\beta(m,\sigma^\beta_\alpha(\chi^\beta_\alpha(m,s_1))) \text{ est nulle au-delà d'une certaine valeur de } i \\ \Rightarrow \quad & m \geq \sigma^\beta_\alpha(\chi^\beta_\alpha(m,s_1)) \end{aligned}$$

(3) Pour racourcir les équations nous écrirons dans la démonstration suivante, c pour coeff et χ pour $\chi_\alpha^\beta(m,s_1)$.

$$\begin{aligned}
c_\alpha^i(\sigma_\beta^\alpha(m - \sigma_\alpha^\beta(\chi))) &\equiv c_{\beta/\alpha}^{2i}(m - \sigma_\alpha^\beta(\chi)) && \pmod{\alpha_{i+1}/\alpha_i}\\
&\equiv c_{\beta/\alpha}^{2i}(m) - c_\alpha^i(\chi) - \delta_{\beta/\alpha}^{2i}(m,\sigma_\alpha^\beta(\chi)) && \pmod{\alpha_{i+1}/\alpha_i}\\
&\equiv c_{\beta/\alpha}^{2i}(m) - c_\alpha^i(\chi) - \delta_\beta^i(m,\sigma_\alpha^\beta(\chi)) && \pmod{\alpha_{i+1}/\alpha_i}\\
&\equiv c_{\beta/\alpha}^{2i}(m) - c_\alpha^i(s_1) - \delta_\alpha^i(\sigma_\beta^\alpha(m),s_1) && \pmod{\alpha_{i+1}/\alpha_i}\\
&\equiv c_\alpha^i(\sigma_\beta^\alpha(m)) - c_\alpha^i(s_1) - \delta_\alpha^i(\sigma_\beta^\alpha(m),s_1) && \pmod{\alpha_{i+1}/\alpha_i}\\
&\equiv c_\alpha^i(\sigma_\beta^\alpha(m) - s_1) && \pmod{\alpha_{i+1}/\alpha_i}
\end{aligned}$$

□

Maintenant définissons deux fonction qui seront en quelque sorte invariant par rapport à χ.

Définition 2.3.2. *Soit $\beta = (\beta_0,\beta_1,\beta_2,\dots)$ une pseudo-base infinie et $n \in \mathbb{N}$.*

$$\operatorname{ind}_\beta(n) = \textit{le plus petit } i \textit{ avec } \operatorname{coeff}_\beta^i(n) \textit{ non nul}$$

$$\operatorname{pcnn}_\beta(n) = \operatorname{coeff}_\beta^{\operatorname{ind}_\beta(n)}(n)$$

Remarquons que $\operatorname{pcnn}_\beta$ est le premier coefficient non nul de n dans la pseudo-base β.

Voici maintenant énoncé avec plus de précision la notion d'invariance ainsi que la démonstration.

Lemme 2.3.1. *Soit s_1, $m \in \mathbb{N}$ et*

$\alpha = (\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\dots)$, $\beta = (\beta_0,\beta_1,\beta_2,\dots)$ deux pseudo-bases infinies telles que $\alpha|\beta$ et $\sigma_\beta^\alpha(m) \geq s_1 > 0$ alors

(1) $\operatorname{ind}_\alpha(\chi_\beta^\alpha(m,s_1)) = \operatorname{ind}_\alpha(s_1)$

(2) $\operatorname{pcnn}_\alpha(\chi_\beta^\alpha(m,s_1)) = \operatorname{pcnn}_\alpha(s_1)$

DÉMONSTRATION. s_1 est de la forme

$$s_1 = \sum_{j \geq \operatorname{ind}_\alpha(s_1)} \operatorname{coeff}_\alpha^j(s_1)\alpha_j$$

donc $\delta^i_\alpha(\sigma^\alpha_\beta(m),s_1)$ et $\delta^i_\beta(m,\sigma^\beta_\alpha(s_1))$ sont nulle quand $0 \leq i \leq \mathrm{ind}_\alpha(s_1)$. Donc $\mathrm{coeff}^i_\alpha(\chi^\alpha_\beta(m,s_1)) = \mathrm{coeff}^i_\alpha(s_1)$ quand $0 \leq i \leq \mathrm{ind}_\alpha(s_1)$ ce qui montre (1) et (2). □

Lemme 2.3.2. *Soit s_1, $m \in \mathbb{N}$ et*

$\alpha = (\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\ldots)$, $\beta = (\beta_0,\beta_1,\beta_2,\ldots)$ *deux pseudo-bases infinies telles que $\alpha|\beta$ et $\sigma^\alpha_\beta(m) \geq s_1 > 0$ alors*

(1) $\mathrm{ind}_\alpha\left|\sigma^\alpha_\beta(m) - \sigma^\alpha_\beta(m - \sigma^\beta_\alpha(s_1))\right| = \mathrm{ind}_\alpha(s_1)$

(2) $\mathrm{pcnn}_\alpha\left|\sigma^\alpha_\beta(m) - \sigma^\alpha_\beta(m - \sigma^\beta_\alpha(s_1))\right| \equiv \pm\,\mathrm{pcnn}_\alpha(s_1) \pmod{\frac{\alpha_{\mathrm{ind}_\alpha(s_1)+1}}{\alpha_{\mathrm{ind}_\alpha(s_1)}}}$

Démonstration. Quand $0 \leq i < \mathrm{ind}_\alpha(s_1)$

$$\begin{aligned}
\mathrm{coeff}^i_\alpha(\sigma^\alpha_\beta(m - \sigma^\beta_\alpha(s_1))) &\equiv \mathrm{coeff}^{2i}_{\beta/\alpha}(m - \sigma^\beta_\alpha(s_1)) \\
&\equiv \mathrm{coeff}^{2i}_{\beta/\alpha}(m) - \mathrm{coeff}^{2i}_{\beta/\alpha}(\sigma^\beta_\alpha(s_1)) - \delta^{2i}_{\beta/\alpha}(m,\sigma^\beta_\alpha(s_1)) \\
&\equiv \mathrm{coeff}^i_\alpha(\sigma^\alpha_\beta(m)) - \delta^i_\beta(m,\sigma^\beta_\alpha(s_1)) \\
&\equiv \mathrm{coeff}^i_\alpha(\sigma^\alpha_\beta(m)) \pmod{\alpha_{i+1}/\alpha_i}
\end{aligned}$$

Quand $i = \mathrm{ind}_\alpha(s_1)$

$$\begin{aligned}
\mathrm{coeff}^i_\alpha(\sigma^\alpha_\beta(m - \sigma^\beta_\alpha(s_1))) &\equiv \mathrm{coeff}^{2i}_{\beta/\alpha}(m - \sigma^\beta_\alpha(s_1)) \\
&\equiv \mathrm{coeff}^{2i}_{\beta/\alpha}(m) - \mathrm{coeff}^{2i}_{\beta/\alpha}(\sigma^\beta_\alpha(s_1)) - \delta^{2i}_{\beta/\alpha}(m,\sigma^\beta_\alpha(s_1)) \\
&\equiv \mathrm{coeff}^i_\alpha(\sigma^\alpha_\beta(m)) - \mathrm{pcnn}_\alpha(s_1) - \delta^i_\beta(m,\sigma^\beta_\alpha(s_1)) \\
&\equiv \mathrm{coeff}^i_\alpha(\sigma^\alpha_\beta(m)) - \mathrm{pcnn}_\alpha(s_1) \pmod{\alpha_{i+1}/\alpha_i}
\end{aligned}$$

Donc on a bien (1) et (2). □

Nous sommes maintenant prêts à nous attaquer au théorème principal.

Théorème 2.3.2. *Soit $\alpha = (\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\ldots)$, $\beta = (\beta_0,\beta_1,\beta_2,\ldots)$ deux pseudo-bases infinies et $E_i \subseteq \mathrm{spectre}_\alpha(i)$ une suite d'ensemble pour $i \geq 0$ et S_1, $S_2 \subseteq \mathbb{N}^+$ tels que:*

(1) $\alpha \mid \beta$;

(2) Pour tout $x \in E_i$ il existe $y \in E_i$ avec $(x + y)\ \alpha_i = \alpha_{i+1}$;

(3) $S_1 = \{x \in \mathbb{N}^+ | pcnn_\alpha(x) \in E_{\mathrm{ind}_\alpha(x)}\}$;

(4) $S_2 = \sigma_\alpha^\beta(S_1)$

alors $\varphi_{S_2}(n) = \varphi_{S_1}(\sigma_\beta^\alpha(n))$ *et* $\varphi_{S_2}(\sigma_\alpha^\beta(n)) = \varphi_{S_1}(n)$.

DÉMONSTRATION. Montrons par induction sur n que

$$\varphi_{S_2}(n) = \varphi_{S_1}(\sigma_\beta^\alpha(n)) \tag{P}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, comme $\varphi_{S_2}(0) = 0 = \varphi_{S_1}(0)$ on a le résultat. Supposons maintenant que (P) soit vrai jusqu'à $n = m - 1 \geq 0$ et montrons que (P) est vrai en $n = m$. Montrons d'abord que

$$\{\sigma_\beta^\alpha(m) - s_1 \mid s_1 \in S_1, s_1 \leq \sigma_\beta^\alpha(m)\} \subseteq \{\sigma_\beta^\alpha(m - s_2) \mid s_2 \in S_2, s_2 \leq m\} \tag{2.3.1}$$

Soit $\sigma_\beta^\alpha(m) - s_1$ un élement de l'ensemble de gauche de (2.3.1). Maintenant comme $\chi_\beta^\alpha(m,s_1) \in S_1$,voir lemme 2.3.1. Posons $s_2 = \sigma_\alpha^\beta(\chi_\beta^\alpha(m,s_1)) \in S_2$ ce qui nous donne par le théoreme 2.3.1 (3)

$$\sigma_\beta^\alpha(m) - s_1 = \sigma_\beta^\alpha(m - s_2)$$

Ce qui montre l'inclusion (2.3.1). Puis on applique φ_{S_1} de chaque côte de (2.3.1) et on utilise l'hypothèse d'induction suivante $\varphi_{S_2}(m - s_2) = \varphi_{S_1}(\sigma_\beta^\alpha(m - s_2))$ alors (2.3.1) devient

$$\{\varphi_{S_1}(\sigma_\beta^\alpha(m) - s_1) \mid s_1 \in S_1 \text{ et } s_1 \leq \sigma_\beta^\alpha(m)\} \subseteq \{\varphi_{S_2}(m - s_2) \mid s_2 \in S_2 \text{ et } s_2 \leq m\}$$

qui a son tour implique que

$$\varphi_{S_1}(\sigma_\beta^\alpha(m)) \leq \varphi_{S_2}(m) \tag{2.3.2}$$

Supposons maintenant que

$$\varphi_{S_1}(\sigma_\beta^\alpha(m)) < \varphi_{S_2}(m) \tag{I}$$

alors il existe $s_2 \in S_2$ tel que $\varphi_{S_1}(\sigma_\beta^\alpha(m)) = \varphi_{S_2}(m - s_2)$. Ce qui nous donne par hypothèse d'induction

$$\varphi_{S_1}(\sigma_\beta^\alpha(m)) = \varphi_{S_1}(\sigma_\beta^\alpha(m - s_2)) \tag{E}$$

Comme $\sigma_\beta^\alpha(m) = \sigma_\beta^\alpha(m - s_2)$ est impossible a cause de la proposition 2.2.3 (4) on doit avoir

$$\sigma_\beta^\alpha(m) \neq \sigma_\beta^\alpha(m - \sigma_\alpha^\beta(s_1))$$

Comme par le lemme 2.3.2 $|\sigma_\beta^\alpha(m) - \sigma_\beta^\alpha(m - \sigma_\alpha^\beta(s_1))|$ est élément de S_1. On a

$$\varphi_{S_1}(\sigma_\beta^\alpha(m)) \neq \varphi_{S_1}(\sigma_\beta^\alpha(m - s_2))$$

une contradiction avec (E). Donc (I) est faux et $\varphi_{S_1}(\sigma_\beta^\alpha(m)) \geq \varphi_{S_2}(m)$ qu'on combine avec (2.3.2) ce qui donne

$$\varphi_{S_1}(\sigma_\beta^\alpha(m)) = \varphi_{S_2}(m)$$

Ce qui montre que (P) est aussi vrai en $n = m$ et complète ainsi l'induction.

Finalement (P) implique

$$\begin{aligned}\varphi_{S_2}(\sigma_\alpha^\beta(n)) &= \varphi_{S_1}(\sigma_\beta^\alpha(\sigma_\alpha^\beta(n))) \\ &= \varphi_{S_1}(n)\end{aligned}$$

□

Ce dernier théorème est intéressant mais ce qui est embêtant c'est qu'il ne met en relation que des ensembles infinis même quand la suite E_i devient nulle au-delà d'une certaine valeur. Le prochain théorème remédie a cette situation.

Théorème 2.3.3. *Soit $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots)$ deux pseudo-bases infinies et $E_i \subseteq \mathrm{spectre}_\alpha(i)$ une suite d'ensemble pour $i \geq 0$ et S_1, $S_2 \subseteq \mathbb{N}^+$ tels que:*

(1) $\alpha \mid \beta$;

(2) Pour tout $x \in E_i$ il existe $y \in E_i$ avec $(x + y)\ \alpha_i = \alpha_{i+1}$;

(3) E_i est vide quand $i \geq k$;

(4) $S_1 = \{x \in \mathbb{N}^+ | pcnn_\alpha(x) \in E_{\mathrm{ind}_\alpha(x)}$ *et* $\mathrm{coeff}^i_\alpha(x) = 0$ *quand* $i \geq k\}$*;*

(5) $S_2 = \sigma^\beta_\alpha(S_1)$

alors

(1) φ_{S_1} *est périodique et* α_k *est une période;*

(2) φ_{S_2} *est périodique et* $\beta_{k-1}(\alpha_k/\alpha_{k-1})$ *est une période;*

(3) $\varphi_{S_2}(n) = \varphi_{S_1}(\sigma^\alpha_\beta(n))$ *et* $\varphi_{S_2}(\sigma^\beta_\alpha(n)) = \varphi_{S_1}(n)$*.*

DÉMONSTRATION. On a la conlusions (1) par le théorème 1.1.2.

Donc par le corollaire 1.1.1,

$$\begin{aligned}\varphi_{S_1} &= \varphi_{S_1+\alpha_k\mathbb{N}} \\ &= \varphi_{\widehat{S_1}}\end{aligned}$$

où

$$\widehat{S_1} = \{x \in \mathbb{N}^+ | pcnn_\alpha(x) \in E_{\mathrm{ind}_\alpha(x)}\}$$

Donc par le théorème 2.3.2,

$$\begin{aligned}\varphi_{\widehat{S_2}} &= \varphi_{\widehat{S_1}} \circ \sigma^\alpha_\beta \qquad \text{où } \widehat{S_2} = \sigma^\beta_\alpha(\widehat{S_1}) \\ &= \varphi_{S_1} \circ \sigma^\alpha_\beta\end{aligned}$$

Alors $\beta_{k-1}(\alpha_k/\alpha_{k-1})$ est une période de $\varphi_{\widehat{S_2}}$. De plus,

$$\begin{aligned}\varphi_{\widehat{S_2}} &= \varphi_{\widehat{S_2}\setminus(S_2+\beta_k\mathbb{N})} \qquad \text{par le corollaire1.1.1} \\ &= \varphi_{S_2}\end{aligned}$$

Donc,

$$\varphi_{S_2}(n) = \varphi_{S_1}(\sigma^\alpha_\beta(n))$$

et on a la conclusion (2). Ce qui implique

$$\begin{aligned}\varphi_{S_2} \circ \sigma^\beta_\alpha &= \varphi_{S_1} \circ \sigma^\beta_\alpha \circ \sigma^\alpha_\beta \\ &= \varphi_{S_1}\end{aligned}$$

et on a la conclusion (3). □

Avant d'aller plus loin définissons une notation pour unifier les théorème 2.3.2 et 2.3.3.

Définition 2.3.3. *Soit $\beta = (\beta_0,\beta_1,\dots)$ une pseudo-base infinie et $E_i \subseteq \mathrm{spectre}_\beta(i)$ une suite d'ensemble avec $i \geq 0$. On définit*

$$\langle E_i | i \geq 0 \rangle_\beta = \{x \in \mathbb{N}^+ | pcnn_\beta(x) \in E_{\mathrm{ind}_\beta(x)} \text{ et si } \mathrm{coeff}^i_\beta(x) > 0 \text{ alors il existe } j \geq i \text{ tel que } E_j \neq \emptyset\}$$

Théorème 2.3.4. *Soit $\alpha = (\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\dots)$, $\beta = (\beta_0,\beta_1,\beta_2,\dots)$ deux pseudo-bases infinies et $E_i \subseteq \mathrm{spectre}_\alpha(i)$ une suite d'ensemble pour $i \geq 0$ et S_1, $S_2 \subseteq \mathbb{N}^+$ tels que:*

(1) $\alpha \mid \beta$;

(2) Pour tout $x \in E_i$ il existe $y \in E_i$ avec $(x+y)\ \alpha_i = \alpha_{i+1}$;

(3) $S_1 = \langle E_i | i \geq 0 \rangle_\alpha$;

(4) $S_2 = \langle E_i | i \geq 0 \rangle_\beta$

alors,

(1) $\varphi_{S_2}(n) = \varphi_{S_1}(\sigma^\alpha_\beta(n))$ et $\varphi_{S_1}(n) = \varphi_{S_2}(\sigma^\beta_\alpha(n))$

(2) si $E_i = \emptyset$ quand $i \geq k$ alors α_k est une période de φ_{S_1} et $\beta_{k-1}(\alpha_k/\alpha_{k-1})$ est une période de φ_{S_2}.

Maintenant servons-nous du théorème 1.1.3 pour élargir la famille d'ensemble S pour laquelle nous avons une formule explicite pour φ_S.

Théorème 2.3.5. *Soit $\alpha = (\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\dots)$, $\beta = (\beta_0,\beta_1,\beta_2,\dots)$ deux pseudo-bases infinies et S_1, $S_2 \subseteq \mathbb{N}^+$ tels que:*

(1) $\alpha \mid \beta$;

(2) $S_1 = \{1,2,\dots,\alpha_k - 1\}$;

(3) $S_2 = \sigma^\beta_\alpha(S_1)$

alors $\varphi_{S_2}(n) = \tau^k_\alpha(\sigma^\alpha_\beta(n))$ et β_k est une période de $\varphi_{S_2}(n)$.

DÉMONSTRATION. On applique le theoreme 2.3.4 avec α, β et

$$E_i = \begin{cases} \{1,2,\ldots,\alpha_{i+1}/\alpha_i - 1\}, & \text{si } i < k \\ \emptyset, & \text{si } i \geq k \end{cases}$$

alors on a

$$\langle E_i | i \geq 0 \rangle_\alpha = S_1$$

et donc,

$$\begin{aligned} \varphi_{S_2}(n) &= \varphi_{S_1}(\sigma_\beta^\alpha(n)) \\ &= \tau_\alpha^k(\sigma_\beta^\alpha(n)) \qquad \varphi_{S_1} = \tau_\alpha^k \text{ voir théorème 1.1.3} \end{aligned}$$

$\square$

Exemple 2.3.1. *Par exemple prenons $\alpha_i = 2^i$, $\beta_i = 4^i$ pour $i \geq 0$ et $S_1 = \{1,2,3\}$ alors*

$$\begin{aligned} S_2 &= \sigma_\alpha^\beta(S_1) \\ &= \{1,4,5\} \end{aligned}$$

et donc par le théorème 2.3.5 on a que $\varphi_{S_2}(n) = \tau_\alpha^2(\sigma_\beta^\alpha(n))$ et $\beta_1(\alpha_2/\alpha_1) = 8$ est une période de $\varphi_{S_2}(n)$. Ce qui nous permet d'affirmer que pour calculer $\varphi_{S_2}(45)$ on développe 45 en pseudo-base β,

$$45 = (1)1 + (3)4 + (2)16$$

alors on calcule $\sigma_\beta^\alpha(n)$ en prenant le reste de la division par 2 des coefficients entre parenthèses et en remplaçant la pseudo-base β par α,

$$\sigma_\beta^\alpha(45) = (1)1 + (1)2 + (0)4$$

puis on applique τ_α^2 ce qui consiste à calculer le reste de la division par 8 de ce nombre. Donc on a $\varphi_{S_2}(45) = 3$. De même on calcule φ_{S_2}

$$\varphi_{S_2}(n) = \begin{cases} 0, & si\ n \equiv 0 \pmod 8 \\ 1, & si\ n \equiv 1 \pmod 8 \\ 0, & si\ n \equiv 2 \pmod 8 \\ 1, & si\ n \equiv 3 \pmod 8 \\ 2, & si\ n \equiv 4 \pmod 8 \\ 3, & si\ n \equiv 5 \pmod 8 \\ 2, & si\ n \equiv 6 \pmod 8 \\ 3, & si\ n \equiv 7 \pmod 8 \end{cases}$$

Plus généralement on peut prendre les mêmes α, S_1 et prendre

$$\beta = (1,2a,4a,8a,\ldots,2^i a,\ldots)\ .$$

Ce qui nous donne $S_2 = \{1,2a,2a+1\}$ et par le théorème 2.3.5 on a que

$$\varphi_{S_2}(n) = \tau_\alpha^2(\sigma_\beta^\alpha(n))$$

et $4a$ est une période de φ_{S_2}. La période de φ_{S_2} est donc de la forme,

$$\overbrace{0,1}^{a\ fois}\overbrace{2,3}^{a\ fois}$$

où l'accolade horizontale signifie que son bloc inférieur est répété a fois.

Exemple 2.3.2. *On peut aussi prendre*

$$\alpha = (1,2,4,8,\ldots,2^i,\ldots)$$
$$\beta = (1,2a,4ab,8ab,\ldots,2^i ab,\ldots)$$

avec

$$S_1 = \{1,2,3,4,5,6,7\}$$
$$S_2 = \{1,2a,2a+1,4ab,4ab+1,4ab+2a,4ab+2a+1\}$$

Alors par le théorème 2.3.5 on a que

$$\varphi_{S_2}(n) = \tau_\alpha^k(\sigma_\beta^\alpha(n))$$

et $8ab$ *est une période de* φ_{S_2}. *La période de* φ_{S_2} *est donc de la forme,*

$$\overbrace{\overbrace{0,1}^{a\ fois}\overbrace{2,3}^{a\ fois}}^{b\ fois}\overbrace{\overbrace{4,5}^{a\ fois}\overbrace{6,7}^{a\ fois}}^{b\ fois}$$

Exemple 2.3.3. *Par ailleurs si on prend*

$$\alpha = (\alpha_0,\alpha_1 = 3,\alpha_2 = 3^2,\ldots,\alpha_i = 3^i,\ldots)$$

et

$$\beta = (\beta_0,\beta_1 = 3\cdot 2,\beta_1 = 3^2\cdot 2,\ldots,\alpha_i = 3^i\cdot 2,\ldots)$$

Prenons aussi

$$S_1 = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

et

$$S_2 = \{1,2,6,7,8,12,13,14\}$$

Alors par le théorème 2.3.5 on a que

$$\varphi_{S_2}(n) = \tau_\alpha^2(\sigma_\beta^\alpha(n))$$

et 18 *est une période de* φ_{S_2}. *La période de* φ_{S_2} *est donc de la forme,*

$$\overbrace{0,1,2}^{2\ fois}\overbrace{3,4,5}^{2\ fois}\overbrace{6,7,8}^{2\ fois}$$

Théorème 2.3.6. *Soit* $\alpha = (\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\ldots)$, $\beta = (\beta_0,\beta_1,\beta_2,\ldots)$ *deux pseudo-bases infinies et* S_1, $S_2 \subseteq \mathbb{N}^+$ *tels que:*

(1) $\alpha \mid \beta$;

(2) $S_1 = \mathbb{N}^+$;

(3) $S_2 = \sigma_\alpha^\beta(S_1)$

alors $\varphi_{S_2}(n) = \sigma^{\alpha}_{\beta}(n)$

DÉMONSTRATION. On applique le théorème 2.3.4 avec

$$E_i = \{1,2,\dots,\alpha_{i+1}/\alpha_i - 1\}$$

alors on a

$$\langle E_i | i \geq 0\rangle_\alpha = S_1$$

et donc,

$$\begin{aligned} \varphi_{S_2}(n) &= \varphi_{S_1}(\sigma^{\alpha}_{\beta}(n)) \\ &= \sigma^{\alpha}_{\beta}(n) \qquad\qquad \text{puisque } \varphi_{\mathbb{N}^+}(n) = n \end{aligned}$$

□

On vient de montrer dans la démonstration du théorème précédent la proposition suivante.

Proposition 2.3.1. *Soit* $\alpha = (\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\dots)$*,* $\beta = (\beta_0,\beta_1,\beta_2,\dots)$ *deux pseudo-bases infinies telles que* $\alpha \mid \beta$ *alors,*

$$\sigma^{\alpha}_{\beta} = \varphi_{\sigma^{\beta}_{\alpha}(\mathbb{N}^+)}$$

Pour terminer cette section nous donnons une extension du théorème 2.3.4 qui rajoutera un peu de symétrie dans les condition de ce théorème.

Théorème 2.3.7. *Soit* $\alpha = (\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\dots)$*,* $\beta = (\beta_0,\beta_1,\beta_2,\dots)$ *et* $\gamma = (\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2,\dots)$ *trois pseudo-bases infinies telles que* $\gamma \mid \beta$ *et* $\gamma \mid \alpha$*. Soit* $E_i \subseteq \text{spectre}_\gamma(i)$ *une suite d'ensemble pour* $i \geq 0$ *et* S_1*,* $S_2 \subseteq \mathbb{N}^+$ *telle que:*

(1) Pour tout $x \in E_i$ *il existe* $y \in E_i$ *avec* $(x + y)\ \gamma_i = \gamma_{i+1}$*;*

(2) $S_1 = \langle E_i | i \geq 0\rangle_\alpha$*;*

(3) $S_2 = \langle E_i | i \geq 0\rangle_\beta$

alors

(1) $\varphi_{S_2}(n) = \varphi_{S_1}(\sigma^{\alpha}_{\beta}(n))$

(2) si $E_i = \emptyset$ quand $i \geq k$ alors α_k est une période de φ_{S_1} et β_k est une période de φ_{S_2}.

DÉMONSTRATION. Comme $\gamma|\alpha$, $\gamma|\beta$ on a,

$$\begin{aligned}
\varphi_{S_2}(n) &= \varphi_{\widehat{S}}(\sigma_\beta^\gamma(n)) && \text{ou } \widehat{S} = \langle E_i | i \geq 0 \rangle_\gamma \\
&= \varphi_{S_1}(\sigma_\gamma^\alpha(\sigma_\beta^\gamma(n))) \\
&= \varphi_{S_1}(\sigma_\beta^\alpha(n)) && \text{voir la proposition 2.2.4}
\end{aligned}$$

□

Chapitre 3

PSEUDO-BASES ET JEUX DE SOUSTRACTION

3.1. Pseudo-bases finies et jeux de soustraction

Dans cette section nous utilisons le concept de pseudo-base fini pour obtenir une autre version du théorème 2.3.7.

Définition 3.1.1. *On appelle pseudo-base finie une suite croissante de nombres entiers positifs $\beta_0,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k$ telle que $\beta_i|\beta_{i+1}$ pour tout $0 \leq i < k$. On notera $\beta = (\beta_0,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k)$ pour désigner la suite appelée β dont les élements sont dans l'ordre $\beta_0,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k$.*

Voici maintenant quelques exemples de pseudo-bases finies.

$$\beta = (1,1)$$

$$\beta = (1,2,4,8,\ldots,2^k)$$

$$\beta = (1,3,6,12,\ldots,3\cdot 2^k)$$

$$\beta = (1,1,2,2,4,4,8,8,\ldots,2^k,2^k)$$

Définition 3.1.2. *Soit $\beta = (\beta_0,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k)$ une pseudo-base finie. Pour $n \geq 0$ et $0 \leq i \leq k$ on définit*

$$\mathrm{coeff}^i_\beta(n) = \begin{cases} \textit{le reste de la division de } \lfloor n/\beta_i \rfloor \textit{ par } \beta_{i+1}/\beta_i & \textit{si } 0 \leq i < k \\ \lfloor n/\beta_i \rfloor & \textit{si } i = k \end{cases}$$

$$\mathrm{spectre}_\beta(i) = \begin{cases} \{0,1,\ldots,\beta_{i+1}/\beta_i - 1\} & \textit{si } 0 \leq i < k \\ \mathbb{N} & \textit{si } i = k \end{cases}$$

Ici une mise en garde s'impose puisque la notation peut porter à confusion. En effet, le i de $\mathrm{coeff}^i_\beta(n)$ n'est pas un exposant mais bien un indice.

$\mathrm{spectre}_\beta(i)$ est l'ensemble des valeurs que $\mathrm{coeff}^i_\beta(n)$ peut prendre.

$\mathrm{coeff}^i_\beta(n)$ sera le coefficient de β_i lorsqu'on le développera dans la pseudo-base finie β comme l'affirme le théorème suivant. Lorsque $\beta_i = \beta_{i+1}$ on aura que $\mathrm{coeff}^i_\beta(n) = 0$ quel que soit $n \geq 0$.

Théorème 3.1.1. *Soit $\beta = (\beta_0,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k)$ une pseudo-base finie. Pour $n \geq 0$ on a,*

(1) $0 \leq \mathrm{coeff}^i_\beta(n) < \beta_{i+1}/\beta_i$ *pour tout* $0 \leq i < k$

ou autrement dit $\mathrm{coeff}^i_\beta(n) \in \mathrm{spectre}_\beta(i)$.

(2) $n = \sum_{i=0}^{k} \mathrm{coeff}^i_\beta(n)\beta_i$

comme prévu n se décompose sur β

(3) si $n = \sum_{i=0}^{j} c_i\beta_i$ *avec* $0 \leq j \leq k$ *et* $c_i \in \mathrm{spectre}_\beta(i)$ *pour tout* $0 \leq i \leq j$ *alors* $c_i = \mathrm{coeff}^i_\beta(n)$ *pour tout* $0 \leq i \leq j$.

C'est-à-dire la décomposition de n sur β est unique.

Démonstration. (1) On a ce résultat par la définition.

(2) Avec la pseudo-base finie β et n définissons,

$$\widetilde{\beta} = (\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_k,\beta_{k+1},\beta_{k+2},\ldots)$$

une pseudo-base infinie telle que $\beta_{k+1} > n$. On a alors que n se décompose sur $\widetilde{\beta}$, c'est-à-dire

$$n = \sum_{i \geq 0} \text{coeff}^{i}_{\widetilde{\beta}}(n) \widetilde{\beta}_i$$

avec

$$\text{coeff}^{i}_{\beta}(n) = \text{coeff}^{i}_{\widetilde{\beta}}(n) \text{ quand } 0 \leq i \leq k.$$

donc

$$n = \sum_{i=0}^{k} \text{coeff}^{i}_{\beta}(n) \beta_i$$

(3) Avec la pseudo-base finie β et n définissons,

$$\widetilde{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k, \beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \ldots)$$

une pseudo-base telle que $\beta_{k+1} > n$. On a alors que n se décompose sur $\widetilde{\beta}$, c'est-à-dire

$$n = \sum_{i \geq 0} \text{coeff}^{i}_{\widetilde{\beta}}(n) \widetilde{\beta}_i$$

mais comme on a l'unicité de la décomposition de n sur la pseudo-base $\widetilde{\beta}$ alors $\text{coeff}^{i}_{\widetilde{\beta}}(n) = c_i$ mais comme $\text{coeff}^{i}_{\widetilde{\beta}}(n) = \text{coeff}^{i}_{\beta}(n)$ on a le résultat.

□

Définition 3.1.3. *Soit $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$ une pseudo-base finie et $n \in \mathbb{N}$.*

$$\text{ind}_{\beta}(n) = \textit{le plus petit } i \textit{ avec } \text{coeff}^{i}_{\beta}(n) \textit{ non nul}$$

$$\text{pcnn}_{\beta}(n) = \text{coeff}^{\text{ind}_{\beta}(n)}_{\beta}(n)$$

Définition 3.1.4. *Soit $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$ une pseudo-bases finie et $E_i \subseteq \text{spectre}_{\beta}(i)$ une suite d'ensemble avec $0 \leq i \leq k$. On définit,*

$$\langle E_i | 0 \leq i \leq k \rangle_{\beta} = \{x \in \mathbb{N}^{+} | pcnn_{\beta}(x) \in E_{\text{ind}_{\beta}(x)} \textit{ et si } \text{coeff}^{i}_{\beta}(x) > 0 \textit{ alors il existe } j \geq i \textit{ tel que } E_j \neq \emptyset\}$$

Définition 3.1.5. *Soit* $\alpha = (\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k)$, $\beta = (\beta_0,\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_k)$ *deux pseudo-bases finies. On dira que* $\alpha|\beta$ *si*

$$\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} \mid \frac{\beta_{i+1}}{\beta_i} \qquad \textit{pour tout } 0 \leq i < k$$

Théorème 3.1.2. *Soit* $\alpha = (\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k)$, $\beta = (\beta_0,\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_k)$, $\gamma = (\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_k)$ *trois pseudo-bases finies telles que* $\gamma \mid \beta$ *et* $\gamma \mid \alpha$. *Soit* $E_i \subseteq \text{spectre}_\gamma(i)$ *une suite d'ensemble pour* $0 \leq i \leq k$ *et* S_1, $S_2 \subseteq \mathbb{N}^+$ *tels que:*

(1) pour tout $x \in E_i$ *il existe* $y \in E_i$ *avec* $(x+y)\ \gamma_i = \gamma_{i+1}$ *quand* $0 \leq i < k$

(2) $S_1 = \langle E_i | 0 \leq i \leq k \rangle_\alpha$

(3) $S_2 = \langle E_i | 0 \leq i \leq k \rangle_\beta$

alors $\varphi_{S_2}(n) = \varphi_{S_1}(\sigma_\beta^\alpha(n))$

Démonstration. Avec la pseudo-base finie α, γ, β et n définissons,

$$\widetilde{\alpha} = (\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_k,\alpha_{k+1},\alpha_{k+2},\dots)$$

$$\widetilde{\gamma} = (\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_k,\gamma_{k+1},\gamma_{k+2},\dots)$$

$$\widetilde{\beta} = (\beta_0,\beta_1,\dots,\beta_k,\beta_{k+1},\beta_{k+2},\dots)$$

trois pseudo-bases infinies telles que

$$\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} = \frac{\gamma_{i+1}}{\gamma_i} = \frac{\beta_{i+1}}{\beta_i} \text{ pour } i \geq k$$

et $\text{coeff}_\beta^k(n) \leq \frac{\beta_{k+1}}{2\beta_k}$. Soit $F_i = E_i$ si $0 \leq i < k$ une suite d'ensemble et

$$F_k = \{x \in E_k \mid x \leq \text{coeff}_\gamma^k(n)\} \cup \{\gamma_{k+1}/\gamma_k - x \mid x \in E_k \text{ et } x \leq \text{coeff}_\gamma^k(n)\}$$

et $F_i = \emptyset$ si $i > k$. Donc par le théorème on a 2.3.7

$$\varphi_{\widetilde{S_2}}(n) = \varphi_{\widetilde{S_1}}(\sigma_\beta^\alpha(n))$$

où $\widetilde{S_1} = \langle F_i | i \geq 0 \rangle_{\widetilde{\alpha}}$ et $\widetilde{S_2} = \langle F_i | i \geq 0 \rangle_{\widetilde{\beta}}$. Mais comme β_{k+1} est choisi assez grand on a que $\varphi_{\widetilde{S_2}}(n) = \varphi_{S_2}(n)$ et $\varphi_{\widetilde{S_1}}(\sigma_\beta^\alpha(n)) = \varphi_{S_1}(\sigma_\beta^\alpha(n))$. Donc on a

$$\varphi_{S_2}(n) = \varphi_{S_1}(\sigma_\beta^\alpha(n))$$

□

Corollaire 3.1.1. *Soit* S_1*,* $S_2 \subseteq \mathbb{N}^+$ *deux ensembles tels que* $S_2 = a \cdot S_1$ *alors,*

$$\varphi_{S_2} = \varphi_{S_1} \circ \sigma_{(1,a)}^{(1,1)}$$

DÉMONSTRATION. On applique le théorème 3.1.2 avec $\beta = (1,a)$, $\alpha = (1,1)$ et $E_0 = \emptyset$, $E_1 = S_1$. □

Exemple 3.1.1. *Si* $S_1 = \{1,4\}$ *et* $S_2 = 2 \cdot \{1,4\}$ *on a donc par le corollaire précédent que*

$$\varphi_{S_2}(n) = \begin{cases} \varphi_{S_1}(0), & si\ n = 0\ ou\ n = 1 \\ \varphi_{S_1}(1), & si\ n = 2\ ou\ n = 3 \\ \varphi_{S_1}(2), & si\ n = 4\ ou\ n = 4 \\ \varphi_{S_1}(3), & si\ n = 6\ ou\ n = 7 \\ \varphi_{S_1}(4), & si\ n = 8\ ou\ n = 9 \\ \dots \end{cases}$$

et comme on a déjà montré que

$$\varphi_{S_1}(n) = \begin{cases} 0 & si\ n \equiv 0 \pmod 5 \\ 1 & si\ n \equiv 1 \pmod 5 \\ 0 & si\ n \equiv 2 \pmod 5 \\ 1 & si\ n \equiv 3 \pmod 5 \\ 2 & si\ n \equiv 4 \pmod 5 \end{cases}$$

on a donc que

$$\varphi_{S_2}(n) = \begin{cases} 0 & si\ n \equiv 0 \pmod{10} \\ 0 & si\ n \equiv 1 \pmod{10} \\ 1 & si\ n \equiv 2 \pmod{10} \\ 1 & si\ n \equiv 3 \pmod{10} \\ 0 & si\ n \equiv 4 \pmod{10} \\ 0 & si\ n \equiv 5 \pmod{10} \\ 1 & si\ n \equiv 6 \pmod{10} \\ 1 & si\ n \equiv 7 \pmod{10} \\ 2 & si\ n \equiv 8 \pmod{10} \\ 2 & si\ n \equiv 9 \pmod{10} \end{cases}$$

3.2. Pseudo-bases et jeux de soustraction

Nous sommes maintenant prêts pour la définition qui unifiera la notation des théorèmes 2.3.7 et 3.1.2.

Définition 3.2.1. *Pour unifier la notation nous aurons besoins du symbole* ∞ *muni des propriétés suivantes :*

(1) pour tout $n \in \mathbb{N}$ $n < \infty$, $\infty > n$ *et* $\infty \not< n$, $n \not> \infty$

(2) pour tout $n \in \mathbb{N}$ $n|\infty$, $n \nmid \infty$ *et* $\frac{\infty}{n} = \infty$

(3) $\infty|\infty$ *et* $\frac{\infty}{\infty} = 1$

(4) pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\infty \pm n = \infty$

(5) pour tout a, $b \in \mathbb{N}$ $a \equiv b \pmod{\infty}$ *si, et seulement si,* $a = b$.

(6) nous admettrons que ∞ *est une période de toute fonction* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Définition 3.2.2. *On appelle pseudo-base une suite croissante non bornée d'éléments de* $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$ *telle que* $\beta_i|\beta_{i+1}$ *pour tout* $i \geq 0$. *On notera* $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots)$ *pour désigner la suite appelée* β *dont les élements sont dans l'ordre* $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$

Remarquons que si une pseudo-base prend la valeur ∞ elle doit s'y maintenir. On a donc deux types de pseudo-bases: les pseudo-bases infinies et les pseudo-base finies qu'on complète par le symbole ∞. Soulignons que lorsque nous demandons que la suite β_i soit non bornée nous voulons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $\beta_i > n$.

Voici maintenant quelques exemples de pseudo-bases.

$$(1,\infty,\infty,\ldots)$$

$$(1,2,4,8,\infty,\infty,\ldots)$$

$$(1,2,4,8,\ldots,2^i,\ldots)$$

Définition 3.2.3. *Soit $\beta = (\beta_0,\beta_1,\beta_2,\ldots)$ une pseudo-base. Pour $n \geq 0$ et $0 \leq i \leq k$ on définit,*

$$\operatorname{coeff}^i_\beta(n) = \textit{le reste de la division de } \lfloor n/\beta_i \rfloor \textit{ par } \beta_{i+1}/\beta_i \qquad \textit{si } 0 \leq i < k$$

$$\operatorname{spectre}_\beta(i) = \{k \in \mathbb{N} \mid 0 \leq k < \beta_{i+1}/\beta_i\}$$

$\operatorname{spectre}_\beta(i)$ est l'ensemble des valeurs que $\operatorname{coeff}^i_\beta(n)$ peut prendre.

$\operatorname{coeff}^i_\beta(n)$ sera le coefficient de β_i lorsqu'on le développera dans la pseudo-base β comme l'affirme le théorème suivant.

Théorème 3.2.1. *Soit $\beta = (\beta_0,\beta_1,\beta_2,\ldots)$ une pseudo-base. Pour $n \geq 0$ on a,*

(1) $0 \leq \operatorname{coeff}^i_\beta(n) < \beta_{i+1}/\beta_i$ *pour tout* $i \geq 0$

ou autrement dit $\operatorname{coeff}^i_\beta(n) \in \operatorname{spectre}_\beta(i)$.

(2) $n = \sum_{i\geq 0} \operatorname{coeff}^i_\beta(n)\beta_i$

comme prévu n se décompose sur β

(3) si $n = \sum_{i=0}^{k} c_i\beta_i$ *et* $c_i \in \operatorname{spectre}_\beta(i)$ *pour tout* $i \geq 0$ *alors* $c_i = \operatorname{coeff}^i_\beta(n)$ *pour tout* $0 \leq i \leq k$.

C'est-à-dire la décomposition de n sur β est unique.

Définition 3.2.4. *Soit* $\beta = (\beta_0,\beta_1,\beta_2,\dots)$ *une pseudo-base et* $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathrm{ind}_\beta(n) = \textit{le plus petit } i \textit{ avec } \mathrm{coeff}^i_\beta(n) \textit{ non nul}$$

$$\mathrm{pcnn}_\beta(n) = \mathrm{coeff}^{\mathrm{ind}_\beta(n)}_\beta(n)$$

Définition 3.2.5. *Soit* $\beta = (\beta_0,\beta_1,\dots)$ *une pseudo-base et* $E_i \subseteq \mathrm{spectre}_\beta(i)$ *une suite d'ensemble pour* $i \geq 0$. *On définit,*

$$\langle E_i | i \geq 0\rangle_\beta = \{x \in \mathbb{N}^+ | pcnn_\beta(x) \in E_{\mathrm{ind}_\beta(x)} \textit{ et si } \mathrm{coeff}^i_\beta(x) > 0 \textit{ alors il existe } j \geq i \textit{ tel que } E_j \neq \emptyset\}$$

Définition 3.2.6. *Soit* $\alpha = (\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\dots)$, $\beta = (\beta_0,\beta_1,\beta_2,\dots)$ *deux pseudo-bases. On dira que* $\alpha|\beta$ *si*

$$\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} \mid \frac{\beta_{i+1}}{\beta_i} \qquad \textit{pour tout } i \geq 0$$

Théorème 3.2.2. *Soit* $\alpha = (\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\dots)$, $\beta = (\beta_0,\beta_1,\beta_2,\dots)$, $\gamma = (\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2,\dots)$ *trois pseudo-bases telles que* $\gamma \mid \beta$ *et* $\gamma \mid \alpha$. *Soit* $E_i \subseteq \mathrm{spectre}_\gamma(i)$ *une suite d'ensemble pour* $0 \leq i \leq k$ *et* S_1, $S_2 \subseteq \mathbb{N}^+$ *telle que:*

(1) pour tout $x \in E_i$ *si* $\gamma_{i+1} \neq \infty$ *alors il existe* $y \in E_i$ *avec* $(x+y)\ \gamma_i = \gamma_{i+1}$

(2) $S_1 = \langle E_i | i \geq 0\rangle_\alpha$

(3) $S_2 = \langle E_i | i \geq 0\rangle_\beta$

alors,

(1) $\varphi_{S_2}(n) = \varphi_{S_1}(\sigma^\alpha_\beta(n))$

(2) si $E_i = \emptyset$ *quand* $i \geq k$ *alors* α_k *est une période de* φ_{S_1} *et* β_k *est une période de* φ_{S_2}.

Chapitre 4

COMBINAISONS DE JEUX DE SOUSTRACTIONS

4.1. Définitions et théorème principal

Définition 4.1.1. *Soit* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *on définit,*

$$\overline{f}(n) = \begin{cases} 0, & si\ f(n) = 0 \\ 1, & si\ f(n) > 0 \end{cases}$$

et

$$\overline{n} = \begin{cases} 0, & si\ n = 0 \\ 1, & si\ n > 0 \end{cases}$$

Définition 4.1.2. *Soit* A_i *une suite d'ensembles de nombres entiers positifs. On définit,*

$$\bigoplus_i A_i = \left\{ \sum_{i \geq 0} \varepsilon_i a_i \in \mathbb{N}^+ \mid a_i \in A_i \ \ et\ \varepsilon_i \in \{0,1\} \right\}$$

Maintenant observons ensemble une propriété des fonction $\overline{\varphi_S}$. Si $S_0 = \{1,4,5,6,9\}$ on trouve que,

$$\overline{\varphi_{S_0}}(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \equiv 0 \pmod{10} \\ 1, & \text{si } n \equiv 1 \pmod{10} \\ 0, & \text{si } n \equiv 2 \pmod{10} \\ 1, & \text{si } n \equiv 3 \pmod{10} \\ 1, & \text{si } n \equiv 4 \pmod{10} \\ 1, & \text{si } n \equiv 5 \pmod{10} \\ 1, & \text{si } n \equiv 6 \pmod{10} \\ 1, & \text{si } n \equiv 7 \pmod{10} \\ 1, & \text{si } n \equiv 8 \pmod{10} \\ 1, & \text{si } n \equiv 9 \pmod{10} \end{cases}$$

et si $S_1 = \{1\}$ on sait que,

$$\overline{\varphi_{S_1}}(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \equiv 0 \pmod{2} \\ 1, & \text{si } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

Maintenant disposons la période de $\overline{\varphi_{S_1}}$ sur une ligne et sous chacune de ses valeur la période de $\overline{\varphi_{S_0}}$.

$$\overbrace{0,1,0,1,1,1,1,1,1,1}^{0},\overbrace{0,1,0,1,1,1,1,1,1,1}^{1}$$

Maintenant abaissons les valeurs de $\overline{\varphi_{S_1}}$ sur celle de $\overline{\varphi_{S_0}}$. C'est-à-dire que si x de $\overline{\varphi_{S_1}}$ rencontre y de $\overline{\varphi_{S_0}}$ on obtient $\overline{x+y}$.

$$\overbrace{0,1,0,1,1,1,1,1,1,1},\overbrace{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1}$$

Montrons que ceci est la période de $\overline{\varphi_S}$ où

$$\begin{aligned} S &= S_0 \oplus 10 \cdot S_1 \\ &= \{1,4,5,6,9\} \oplus 10 \cdot \{1\} \\ &= \{1,4,5,6,9,10,11,14,15,16,19\} \end{aligned}$$

C'est-à-dire que

$$\begin{aligned} \overline{\varphi_S}(n) = 0 &\Leftrightarrow n \in P = \{m \mid m \equiv 0{,}2 \pmod{20}\} \\ &\Leftrightarrow \overline{\varphi_{S_0}}(n) = 0 \text{ et } \overline{\varphi_{10\cdot S_1}}(n) = 0 \end{aligned}$$

que nous montrerons en deux étapes.

(I) $n \in P \Rightarrow \forall_{s\in S}\ n - s \notin P$

(II) $n \notin P \Rightarrow \exists_{s\in S}\ n - s \in P$

(I) Comme $n \in P$ on a que $\overline{\varphi_{S_0}}(n) = 0$, alors tout les éléments de S dans S_0 sont tels que $n - s \notin P$. Puis comme 10 est une période de $\overline{\varphi_{S_0}}$ il en va de même pour les élément de S dans $S_0 + 10$. Il ne reste que $10 \in S$ mais en soustrayant 10 de n on change forcément la valeur de $\overline{\varphi_{10\cdot S_1}}$, ce qui complète la partie (I).

(II) Pour $n \notin P$ on choisit $s_0 \in S_0 \cup \{0\}$ tel que $n \geq s_0$ et

$$\overline{\varphi_{S_0}}(n - s_0) = 0$$

et $s_1 \in 10 \cdot S_1 \cup \{0\}$ tel que $n \geq s_1$ et

$$\overline{\varphi_{10\cdot S_1}}(n - s_0 - s_1) = 0.$$

Puis on forme $s = s_0 + s_1 \in S$ et alors,

$$\begin{aligned} \overline{\varphi_{S_0}}(n - s) &= \overline{\varphi_{S_0}}(n - s_0 - s_1) \\ &= \overline{\varphi_{S_0}}(n - s_0) \qquad \text{comme } s_1 \text{ est une période de } \overline{\varphi_{S_0}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\overline{\varphi_{S_1}}(n - s) = 0$$

et donc $n - s \in P$. Ce qui complète (II) et donc

$$\overbrace{0,1,0,1,1,1,1,1,1,1}\,,\overbrace{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1}$$

ceci est bien la période de $\overline{\varphi_S}$ où $S = \{1,4,5,6,9,10,11,14,15,16,19\}$.

L'exemple précédent peut être généralisé et dans ce but nous aurons besoins de la définition suivante.

Théorème 4.1.1. *Soit $\beta = (\beta_0,\beta_1,\beta_2,\dots)$ une pseudo-base et S_i une suite d'ensembles de nombre entiers positifs tels que pour tout $i \geq 0$ β_{i+1}/β_i est une période de $\overline{\varphi_{S_i}}$*

alors si on pose $S = \bigoplus_i \beta_i \cdot S_i$ on a,

(1) $\varphi_S(n) = 0 \Leftrightarrow \forall_{i\geq 0}\ \varphi_{S_i}(\mathrm{coeff}^i_\beta(n)) = 0$

(2) s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $S_i = \emptyset$ pour tout $i \geq k$ alors β_k est une période de $\overline{\varphi_S}$

Démonstration. Nous montrerons (1) en deux étapes

(I) Pour tout $s \in S$, $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq s$ et $\forall_{i\geq 0}\ \varphi_{S_i}(\mathrm{coeff}^i_\beta(n)) = 0$ on a $\exists_{i\geq 0}$ $\varphi_{S_i}(\mathrm{coeff}^i_\beta(n-s)) = 1$

(II) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $\exists_{i\geq 0}\ \varphi_{S_i}(\mathrm{coeff}^i_\beta(n)) = 1$ il existe $s \in S$ tel que $\forall_{i\geq 0}$ $\varphi_{S_i}(\mathrm{coeff}^i_\beta(n-s)) = 0$.

(I)

On a (I) puisque lorsqu'on effectue la soustraction $n - s$ on doit nécessairement affecter la valeur de $\varphi_{S_j} \circ \mathrm{coeff}^j_\beta$ où j est le plus petit élément de $\mathbb{N}$ tel que $\mathrm{coeff}^j_\beta(s) \neq 0$. Autrement dit on a $\varphi_{S_j}(\mathrm{coeff}^j_\beta(n-s)) \neq \varphi_{S_j}(\mathrm{coeff}^j_\beta(n))$ pour ce j.

(II)

On choisit les coefficients de s dans la pseudo-base β de telle sorte que:

pour tout $i \geq 0$	$\mathrm{coeff}^i_\beta(s) \in S_i \cup \{0\}$
pour tout $i \geq 0$	$\mathrm{coeff}^i_\beta(n) > \mathrm{coeff}^i_\beta(s) \geq 0$
pour tout $i \geq 0$	$\varphi_{S_i}(\mathrm{coeff}^i_\beta(n) - \mathrm{coeff}^i_\beta(s)) = 0$

et ainsi donc nous aurons

$$\forall_{i\geq 0}\varphi_{S_i}(\mathrm{coeff}^i_\beta(n-s)) = 0.$$

La preuve de (I) et (II) étant complétée on a donc la conclusion (1) du théorème.

Puis on a le résultat en (2) en appliquant (1). □

4.2. Quelques exemples

Le dernier théorème nous dit que la connaissance des fonctions $\overline{\varphi_{S_i}}$ induit la connaissance de la fonction φ_S où $S = \bigoplus_i \beta_i \cdot S_i$. Observons-le maintenant en action avec un exemple.

Exemple 4.2.1. *Prenons,*

$$S_i = \begin{cases} \{1,4\}, & si\ i = 0 \\ \{1\}, & si\ i = 1 \\ \emptyset, & si\ i \geq 2 \end{cases}$$

Prenons aussi

$$\beta = (1,2,10,\infty,\infty,\dots)$$

et posons

$$\begin{aligned} S &= \{1,4\} \oplus 5 \cdot \{1\} \\ &= \{1,4,5,6,9\} \end{aligned}$$

alors par le théorème 4.1.1 on a que 10 *est une période de* $\overline{\varphi_S}$ *et comme*

$$\overline{\varphi_{\{1,4\}}}(n) = \begin{cases} 0, & si\ n \equiv 0 \pmod 5 \\ 1, & si\ n \equiv 1 \pmod 5 \\ 0, & si\ n \equiv 2 \pmod 5 \\ 1, & si\ n \equiv 3 \pmod 5 \\ 1, & si\ n \equiv 4 \pmod 5 \end{cases}$$

et

$$\overline{\varphi_{\{1\}}}(n) = \begin{cases} 0, & si\ n \equiv 0 \pmod 2 \\ 1, & si\ n \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

et donc,

n	$(\mathrm{coeff}^0_\beta(n), \mathrm{coeff}^1_\beta(n), \ldots)$	$(\overline{\varphi_{S_0}}(\mathrm{coeff}^0_\beta(n)), \overline{\varphi_{S_1}}(\mathrm{coeff}^1_\beta(n)), \ldots)$
0	$(0,0,0,\ldots)$	$(0,0,0,\ldots)$
1	$(1,0,0,\ldots)$	$(1,0,0,\ldots)$
2	$(2,0,0,\ldots)$	$(0,0,0,\ldots)$
3	$(3,0,0,\ldots)$	$(1,0,0,\ldots)$
4	$(4,0,0,\ldots)$	$(1,0,0,\ldots)$
5	$(0,1,0,\ldots)$	$(0,1,0,\ldots)$
6	$(1,1,0,\ldots)$	$(1,1,0,\ldots)$
7	$(2,1,0,\ldots)$	$(0,1,0,\ldots)$
8	$(3,1,0,\ldots)$	$(1,1,0,\ldots)$
9	$(4,1,0,\ldots)$	$(1,1,0,\ldots)$

alors toujours par le théorème 4.1.1 on a

$$\overline{\varphi_S}(n) = \begin{cases} 0, & si\ n \equiv 0 \pmod{10} \\ 1, & si\ n \equiv 1 \pmod{10} \\ 0, & si\ n \equiv 2 \pmod{10} \\ 1, & si\ n \equiv 3 \pmod{10} \\ 1, & si\ n \equiv 4 \pmod{10} \\ 1, & si\ n \equiv 0 \pmod{10} \\ 1, & si\ n \equiv 1 \pmod{10} \\ 1, & si\ n \equiv 2 \pmod{10} \\ 1, & si\ n \equiv 3 \pmod{10} \\ 1, & si\ n \equiv 4 \pmod{10} \end{cases}$$

Mais on aurait aussi bien pu prendre

$$\beta = (1{,}2a{,}10{,}\infty{,}\infty, \dots)$$

alors par le théorème 4.1.1 si on pose

$$\begin{aligned} S &= \{1{,}4\} \oplus 5a \cdot \{1\} \\ &= \{1{,}4{,}5a{,}5a+1{,}5a+4\} \end{aligned}$$

on a que $10a$ *est une période de* $\overline{\varphi_S}$ *et sa période est de la forme*

$$\overbrace{0{,}1{,}0{,}1{,}1}^{a\ fois}, \overbrace{1{,}1{,}1{,}1{,}1}^{a\ fois}.$$

Exemple 4.2.2. *Maintenant voyons un autre exemple, prenons*

$$S_i = \begin{cases} \{2{,}3\}, & si\ i = 0 \\ \{1{,}2\}, & si\ i = 1 \\ \{1\}, & si\ i = 2 \\ \emptyset, & si\ i \geq 3 \end{cases}$$

et

$$\beta = (1,5,15,30,\infty,\infty,\dots)$$

alors par le théorème 4.1.1 si on pose

$$\begin{aligned} S &= \{2,3\} \oplus 5 \cdot \{1,2\} \oplus 15 \cdot \{1\} \\ &= \{2,3,5,7,8,10,12,13,15,17,18,20,22,23,25,27,28\} \end{aligned}$$

on a que 30 *est une période de* $\overline{\varphi_S}$ *et comme*

$$\overline{\varphi_{\{2,3\}}}(n) = \begin{cases} 0, & si\ n \equiv 0 \pmod 5 \\ 0, & si\ n \equiv 1 \pmod 5 \\ 1, & si\ n \equiv 2 \pmod 5 \\ 1, & si\ n \equiv 3 \pmod 5 \\ 1, & si\ n \equiv 4 \pmod 5 \end{cases}$$

et

$$\overline{\varphi_{\{1,2\}}}(n) = \begin{cases} 0, & si\ n \equiv 0 \pmod 3 \\ 1, & si\ n \equiv 1 \pmod 3 \\ 1, & si\ n \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$$

et

$$\overline{\varphi_{\{1,2\}}}(n) = \begin{cases} 0, & si\ n \equiv 0 \pmod 2 \\ 1, & si\ n \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

et on calcule la période de $\overline{\varphi_S}$ *en écrivant d'abord la suite* $\overline{\varphi_{S_2}}$ *sur une longueur de* β_3/β_2. *Puis sous chaque valeurs de* $\overline{\varphi_{S_2}}$ *on écrit la suite* $\overline{\varphi_{S_1}}$ *sur une longueur de* β_2/β_1 *et nous faisons de même pour* $\overline{\varphi_{S_0}}$. *Ce qui, pour notre exemple donne,*

$$\overbrace{\overbrace{0,0,1,1,1}^{0},\overbrace{0,0,1,1,1}^{1},\overbrace{0,0,1,1,1}^{1}}^{0},\overbrace{\overbrace{0,0,1,1,1}^{0},\overbrace{0,0,1,1,1}^{1},\overbrace{0,0,1,1,1}^{1}}^{1}$$

Puis on abaisse les valeurs de l'étage de $\overline{\varphi_{S_2}}$ sur celui de $\overline{\varphi_{S_1}}$. C'est-à-dire si x de l'étage $\overline{\varphi_{S_2}}$ rencontre y de l'étage $\overline{\varphi_{S_1}}$ on y réécrit $\overline{x+y}$. Ce qui donne,

$$\overbrace{\overbrace{0,0,1,1,1}^{0},\overbrace{0,0,1,1,1}^{1},\overbrace{0,0,1,1,1}^{1}},\overbrace{\overbrace{0,0,1,1,1}^{1},\overbrace{0,0,1,1,1}^{1},\overbrace{0,0,1,1,1}^{1}}\ .$$

Puis on refait la même chose avec les deux étages restants. Ce qui donne,

$$\overbrace{\overbrace{0,0,1,1,1},\overbrace{1,1,1,1,1},\overbrace{1,1,1,1,1}},\overbrace{\overbrace{1,1,1,1,1},\overbrace{1,1,1,1,1},\overbrace{1,1,1,1,1}}$$

la forme de la période de $\overline{\varphi_S}$.

Exemple 4.2.3. *Comme prochain exemple prenons un cas où le dernier $\overline{\varphi_{S_i}}$ non vide possède une période infinie. Prenons,*

$$S_i = \begin{cases} \{1\}, & si\ i = 0 \\ \{1,6,9\}, & si\ i = 1 \\ \emptyset, & si\ i \geq 2 \end{cases}$$

et

$$\beta = (1,2,\infty,\infty,\dots)$$

On peut calculer que

$$\overline{\varphi_{S_1}}(n) = \begin{cases} 0, & si\ n = 0 \\ 1, & si\ n = 1 \\ 0, & si\ n = 2 \\ 1, & si\ n = 3 \\ 0, & si\ n = 4 \\ 1, & si\ n = 5 \\ 1, & si\ n = 6 \\ 0, & si\ n = 7 \\ 1, & si\ n = 8 \\ 1, & si\ n = 9 \\ 1, & si\ n > 9\ et\ n \equiv 0 \pmod 5 \\ 1, & si\ n > 9\ et\ n \equiv 1 \pmod 5 \\ 0, & si\ n > 9\ et\ n \equiv 2 \pmod 5 \\ 1, & si\ n > 9\ et\ n \equiv 3 \pmod 5 \\ 0, & si\ n > 9\ et\ n \equiv 4 \pmod 5 \end{cases}$$

Nous écrirons donc que la suite $\overline{\varphi_{S_1}}$ *est de la forme*

$$0,1,0,1,0,1,1,0,1,1,\overline{1,1,0,1,0}$$

où ici la barre au dessus de la fin de la suite signifie que c'est cette partie de la suite qui est répétée indéfiniment.

Calculons la période de la manière décrite précédemment. On écrit d'abord $\overline{\varphi_{S_1}}$ *et* $\overline{\varphi_{S_0}}$ *en étages de la façon suivante.*

$$\overbrace{0,1}^{0}\ \overbrace{0,1}^{1}\ \overbrace{0,1}^{0}\ \overbrace{0,1}^{1}\ \overbrace{0,1}^{0}\ \overbrace{0,1}^{1}\ \overbrace{0,1}^{1}\ \overbrace{0,1}^{0}\ \overbrace{0,1}^{1}\ \overbrace{0,1}^{1}\ \overline{\overbrace{0,1}^{1}\ \overbrace{0,1}^{1}\ \overbrace{0,1}^{0}\ \overbrace{0,1}^{1}\ \overbrace{0,1}^{0}}$$

Puis on abaisse les valeurs de $\overline{\varphi_{S_1}}$ sur $\overline{\varphi_{S_0}}$, ce qui donne

$$\overbrace{0{,}1}\ \overbrace{1{,}1}\ \overbrace{0{,}1}\ \overbrace{1{,}1}\ \overbrace{0{,}1}\ \overbrace{1{,}1}\ \overbrace{1{,}1}\ \overbrace{0{,}1}\ \overbrace{1{,}1}\ \overbrace{1{,}1}\ \overline{\overbrace{1{,}1}\ \overbrace{1{,}1}\ \overbrace{0{,}1}\ \overbrace{1{,}1}\ \overbrace{0{,}1}}$$

ce qui est donc par le théorème 4.1.1 la forme de la fonction $\overline{\varphi_S}$ où

$$\begin{aligned} S &= \{1\} \oplus 2 \cdot \{1{,}6{,}9\} \\ &= \{1{,}2{,}3{,}12{,}13{,}18{,}19\} \end{aligned}$$

Mais cette forme peut être simplifiée puisque la dernière valeur avant la partie périodique est égale à la dernière valeur de la partie périodique. Ce qui donne,

$$\overbrace{0{,}1}\,,\overbrace{1{,}1}\,,\overbrace{0{,}1}\,,\overbrace{1{,}1}\,,\overbrace{0{,}1}\,,\overbrace{1{,}1}\,,\overbrace{1{,}1}\,,\overbrace{0{,}1}\,,\overbrace{1{,}1}\,,\overline{1{,}1,\overbrace{1{,}1}\,,\overbrace{1{,}1}\,,\overbrace{0{,}1}\,,\overbrace{1{,}1}\,,0}$$

et donc la suite φ_S est périodique au delà de la valeur 18 et prend une période de longueur 10.

Exemple 4.2.4. *Comme dernier exemple prenons*

$$S_i = \begin{cases} \{a,b\}, & si\ i = 0 \\ \{c\}, & si\ i = 1 \\ \emptyset, & si\ i \geq 2 \end{cases}$$

et

$$\beta = (1, a+b, 2c(a+b), \infty, \infty, \dots)$$

Comme on sait que $a+b$ est une période de S_0 et $2c$ est une période de S_1, voir théorème 1.1.2, la suite S_i et la pseudo-base β satisfont les conditions du théorème 4.1.1. Comme on ne connaît pas la forme de la période de φ_{S_0}, il ne *nous est pas possible de connaître la forme de la période de* φ_S*, où*

$$\begin{aligned} S &= S_0 \oplus \beta_1 \cdot S_1 \\ &= \{a,b\} \oplus \{(a+b)c\} \\ &= \{a,b,(a+b)c,(a+b)c+a,(a+b)c+b\} \end{aligned}$$

seulement en utilisant le théorème 4.1.1. Toutefois ce théorème nous apprend que $\beta_2 = 2c(a+b)$ *est une période de* φ_S*.*

CONCLUSION

Il est intéressant de comparer les résultats obtenus dans le chapitre 2 et ceux obtenus dans le chapitre 4. Dans un premier temps on obtient des résultats concernant la fonction φ_S et ce, avec beaucoup d'efforts. Dans un deuxième temps on obtient des résultats différents concernant la fonction $\overline{\varphi_S}$ et ce, avec beaucoup moins d'efforts. Il serait intéressant d'essayer d'étendre les méthodes et les résultats du chapitre 4 au fonctions φ_S. Je soupçonne qu'une telle chose soit possible, mais en attendant il faut conclure que les pseudo-bases s'adaptent mieux aux fonctions $\overline{\varphi_S}$ qu'aux fonctions φ_S.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Berlakamp, E.R., Conway, J.H. et Guy, R.K. *Winning Ways*, Volumes 1 et 2, Academic Press, London, 1962.

[2] Conway, J.H., *On Numbers and Games*, Academic Press, London, 1982.

[3] Fraenkel, A.S. et Kotzig, A., *Partizan octal games: partizan substraction games*, International Journal of Games Theory, 16, 1987, pp. 152-154.