Université de Montréal

Étude de l'endroit et de l'instant de premier passage de certains processus de diffusion

par

Mohamed Akhbi

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Philosophiæ Doctor (Ph.D.)
en Mathématiques

décembre 2001

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée

Étude de l'endroit et de l'instant de premier passage de certains processus de diffusion

présentée par

Mohamed Akhbi

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Monsieur Anatole Joffe
(président-rapporteur)

Monsieur Mario Lefebvre
(directeur de recherche)

Monsieur Richard Duncan
(membre du jury)

Monsieur René Ferland
(examinateur externe)

Monsieur Alain Vinet
(représentant du doyen)

Thèse acceptée le:
Le 6 décembre 2001

SUMMARY

In this study, two functionals were considered for a number of diffusion processes in order to determine the time and position of first passage across the boundary of the domain in which the given processes evolve.

This study was done from the differential stochastic equation of the considered process in order to first obtain a partial differential equation by using the method of differential equations, and then an ordinary differential equation using the method of similarity solutions.

In the first chapter, we gave an introduction to the basic necessary notions to understand this work. In the second chapter, we studied the time of first passage for a number of diffusion processes; more specifically we determined the moment generating function of the time of first passage for these processes. In the third chapter, we studied the position of first passage for certain diffusion processes.

Finally, in the fourth chapter, we were interested in the place of first passage of the integrated Bessel process and of the generalized Bessel process.

SOMMAIRE

Dans cette étude, deux fonctionnelles ont été traitées pour un certain nombre de processus de diffusion pour déterminer l'instant de premier passage et l'endroit de premier passage du processus de diffusion considéré par la frontière du domaine dans lequel il évolue.

L'étude est faite à partir de l'équation différentielle stochastique du processus en question, pour passer, dans une première étape à une équation différentielle aux dérivées partielles moyennant la méthode des équations différentielles et ensuite à une équation différentielle ordinaire en utilisant la méthode des similitudes.

Dans le premier chapitre, on a donné un aperçu sur les notions de base nécessaires à la compréhension de ce travail. Dans le deuxième chapitre, on a étudié l'instant de premier passage pour un certain nombre de processus de diffusion; plus précisement on a déterminé la fonction génératrice des moments de l'instant de premier passage pour ces processus. Dans le troisième chapitre, on a étudié l'endroit de premier passage pour certains processus de diffusion. Finalement, dans le quatrième chapitre, on s'est intéressé à l'endroit de premier passage du processus de Bessel intégré et du processus de Bessel généralisé.

REMERCIEMENTS

J'aime exprimer mes remerciements et ma reconnaissance pour Monsieur Mario Lefebvre, mon directeur de recherche, pour sa grande disponibilité, son implication exemplaire, sa patience avec moi ... et son appui financier.

Je remercie également Monsieur Anatole Joffe pour sa grande disponibilité, son amabilité et aussi son soutien financier.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur Daniel Dufresne, à Monsieur I. Fleischer pour leurs disponibilité ainsi qu'à l'ensemble des professeurs qui m'ont enseigné durant mes études à l'Université de Montréal, particulièrement Messieurs A. Joffe, R. Duncan, A. Giroux et M. Goldstein.

Je remercie aussi Monsieur A. Girouard et l'ensemble du corps administratif du département de mathématiques et de statistique pour les divers services que j'ai reçus de leur part et pour leur appui et coopération.

Merci également à la faculté des études supérieures pour leur appui financier important.

Table des matières

KEY WORDS

Diffusion processes, sochastique differential equation, first hitting time, first hitting place, moment generating function, Brownian motion, Bessel process, method of similarity solutions, partial differential equation.

MOTS-CLEFS

Processus de diffusion, équation différentielle sochastique, fonction génératrice des moments, premier instant de passage, premier endroit de passage, mouvement brownien, processus de Bessel, méthode des similitudes, équation différentielle au dérivées patielles.

INTRODUCTION

Un phénomène **aléatoire** est un phénomène dont on ne peut prévoir l'issue de façon certaine avant qu'il ne soit survenu, autrement, il est dit **déterministe**. On peut remarquer, en passant, que l'incapacité de prévoir l'issue finale est due seulement à notre manque d'information concernant le phénomène en question.

Par exemple dans le cas d'un dé, si on connaissait parfaitement les lois de la mécanique, la position et la vitesse initiales, les conditions atmosphériques, la forme et les dimensions du dé, alors l'issue finale serait déterminée.

On peut donc dire que l'objet de la théorie des probabilités est, en quelque sorte, de tirer le maximum de l'information dont on dispose au sujet du phénomène étudié. C'est le cas des équations différentielles stochastiques qu'on a développées pour trouver des solutions optimales, c'est-à-dire qui soient les plus proches possibles des solutions réelles aux problèmes de domaines divers tels que la physique, la chimie, l'ingénierie,... où intervient une part de "hasard" ou "bruit".

Le calcul différentiel a été introduit pour la première fois, séparément, par Isaac Newton et Gottfried Leibnitz au XVIIIe siècle. Newton l'avait utilisé pour construire des modèles pour certains systèmes physiques détérministes, au moyen d'équations différentielles.

Tout en restant dans les modèles déterministes, si un système est défini par un certain vecteur $X(t)$ (dans $\mathbb{R}^n$) et si le système est soumis à une perturbation extérieure déterministe $Z(t)$, continûment différentiable, on constate alors que, après un intervalle de temps $[s,t]$ on a:

$$X(t) = X(s) + \int_s^t f(u,X(u))\,du + \int_s^t g(u,X(u))\,dZ(u) \tag{0.0.1}$$

Donc quand on connaît $Z(t)$, on peut résoudre le problème. Cependant, cette modélisation déterministe est loin de recouvrir les problèmes rencontrés dans la pratique. En effet, le passage d'un problème physique à sa modélisation sous forme d'équations mathématiques n'est jamais parfait. Ceci est dû à une combinaison d'incertitudes dans les calculs, de complexités et d'une part d'ignorance qui, inévitablement, embrouillent notre modélisation.

Dans le but d'en tenir compte, la théorie des équations différentielles stochastiques offre une approche naturelle et rationnelle. Il convient ainsi, de considérer des systèmes tels que (0.0.1) où $Z(t)$ est aléatoire.
Ceci a conduit les physiciens et ingénieurs, et ce pour des raisons valables, à être intéressés particulièrement à une modélisation des perturbations ΔZ ayant des propriétés mathématiques convenables, mais sans pour autant être physiquement réalisables: il s'agit de ce qu'on appelle le "bruit blanc".

Ceci a conduit à prendre pour $Z(t)$, un mouvement brownien. Dans ce cas, la deuxième intégrale intervenant dans l'équation (0.0.1) ne peut pas être une intégrale de Stieltjes. Nous sommes ainsi amenés à étendre cette intégrale au cas où $Z(t)$ est un mouvement brownien (ou plus généralement une martingale). Ceci conduit à la notion d'intégrale stochastique.

Quand un processus stochastique vérifie l'équation (0.0.1), on dit qu'il admet la différentielle stochastique:

$$dX(t) = f(t,X(t))dt + g(t,X(t))dZ(t) \tag{0.0.2}$$

Le point central dans ce travail est l'étude d'un côté particulier de l'approche stochastique au moyen de système d'équations différentielles stochastiques. Plus précisément, c'est l'étude du premier endroit (et (ou) du premier instant) de passage de certains processus stochastiques définis par un système de n équations différentielles stochastiques.

Il s'agit de déterminer le premier endroit (et (ou) le premier instant) où le processus en question rencontre pour la première fois un domaine D de $\mathbb{R}^n$ connaissant la position de départ du processus, c'est-à-dire sa position à l'instant $t = 0$.

L'étude des valeurs extrêmes et particulièrement, la moyenne du premier temps de passage est d'une grande importance dans une large variété de problèmes en physique, en chimie et en ingénierie. En physique, un exemple est le problème d'évaluation du temps moyen nécessaire à un système donné pour échapper, à cause de perturbations exterieures, d'un état stable. Ce problème est souvent désigné par "le problème de Cramers" ; il apparaît dans plusieurs phénomènes physiques et a été considéré pour la première fois par Cramers en 1940.

Un exemple en ingénierie est le temps requis pour qu'une structure mécanique (ex. les ponts) atteigne pour la première fois une amplitude critique dépassant le seuil de stabilité, après quoi, elle va s'écrouler, et ceci pour des causes diverses telles que les vents, les tremblements de terre, les ondes océaniques etc ...

Le problème de premier temps de passage n'est pas encore résolu sous des conditions générales. Cette étude est faite pour des processus de diffusion de dimension 1. Cependant, pour les processus de dimensions supérieures, l'évaluation des premiers temps de passage et des premiers temps de sortie s'avère extrêmement difficile et à ma connaissance, il n'y a pas, à ce jour, une étude analytique exacte même dans les cas les plus simples.

Le problème en dimension 1 du type suivant:

$$dX(t) = f(X(t))dt + [2u(X(t))]^{1/2}dW(t)$$

a été considéré et résolu par Capocelli et Ricciardi (voir **[15]**). Le problème en deux dimensions du type suivant:

$$\begin{aligned} dX(t) &= f(X(t))dt + [2u(X(t))]^{1/2}dW(t) \\ dY(t) &= [2v(X(t))]^{1/2}dB(t) \end{aligned}$$

a été considéré et résolu par M. Lefebvre (voir **[13]**).

Dans cette étude, on va considérer des systèmes ayant un nombre quelconque d'équations et dont les équations ont des formes plus générales.

Dans le premier chapitre de cette étude, on rappelera des notions de base qui seront utiles à savoir. Dans le deuxième chapitre, on considère un système d'équations différentielles particulier définissant un processus stochastique (dans $\mathbb{R}^n$) dont on déterminera la fonction génératrice des moments du temps où le processus rencontre un domaine de $\mathbb{R}^n$ donné pour la première fois. On donnera ensuite une illustration par deux exemples. Dans le troisième chapitre, on considérera un processus stochastique $Z(t)$ de dimension 1 avec $Z(0) = z$ et admettant la différentielle stochastique :

$$dZ(t) = f[Z(t)]dt + v^{1/2}[Z(t)]dW(t).$$

L'étude consistera à trouver la moyenne de $X(\tau(z))$ et celle de $Y(\tau(z))$ en supposant que $\ddot{X}(t) = Z(t)$ et $\dot{Y}(t) = Z(t)$ ce qui revient à dire que $X(t)$ est l'intégrale double d'un processus de dimension 1 et $Y(t)$ est l'intégrale simple d'un processus de dimension 1.

Dans la section 2, il sera démontré que l'espérance mathématique $E[X^k(\tau(z))]$ peut être obtenue en résolvant une équation differentielle ordinaire, assujettie à une condition au bord appropriée. La moyenne de $X[\tau(z)]$ sera calculée explicitement dans la section 3 pour certains processus de diffusion importants $Z(t)$, tels que le processus de Wiener et le processus de Bessel. La section 4 sera consacrée au calcul de la fonction caractéristique de $X[\tau(y,z)]$ quand $\dot{X}(t) = \phi(Y(t),Z(t))$ et $\dot{Y}(t) = \psi(Y(t),Z(t))$, où $\tau(y,z)$ est le premier instant où le processus $(Y(t),Z(t))$ rencontre un certain domaine D de $\mathbb{R}^2$. Dans la section 5, le problème initial sera généralisé au cas où $\dfrac{d^nZ(t)}{dt^n} = Z(t)$.
Finalement, on conclura par des remarques dans la section 6.

Dans cette étude, on utilisera la méthode des équations différentielles qui consiste à passer d'un système d'équation différentielles stochastiques à une équation différentielle aux dérivées partielles (E.D.P.) pour déterminer une certaine grandeur caractérisant le processus étudié. Dans une deuxième étape, on utilisera la méthode des similitudes pour passer d'une E.D.P. à une équation différentielle ordinaire (E.D.O.).

Chapitre 1

PRÉLIMINAIRES

Ce chapitre sera consacré à certaines notions, définitions de base et théorèmes concernant les processus stochastiques et les équations différentielles stochastiques.

1.1. Processus stochastiques

Définition 1.1.1. Processus stochastique

On se donne un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},P)$ *et un intervalle* $\mathcal{T} = [0,T]$ *de* $\mathbb{R}$ *(ou* $\mathcal{T} = [0,\infty)$*) qu'on munit de sa tribu borélienne* $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}$.
Un processus stochastique peut être défini comme étant une famille paramétrisée $\{X_t, t \in \mathcal{T}\}$ *de variables (ou vecteurs) aléatoires* X_t *sur* $(\Omega,\mathcal{F},P)$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$ *ou dans* $\mathbb{C}^n$*, telle que l'application:*

$$(\mathcal{T} \times \Omega, \mathcal{B}_{\mathcal{T}} \bigotimes \mathcal{F}) \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad (ou \quad \mathbb{C}^n)$$
$$(t,\omega) \longmapsto X_t(\omega)$$

soit mesurable.
$\mathcal{B}_{\mathcal{T}}$ *étant la tribu des boréliens de* $\mathcal{T}$.
$X(t,\omega)$ *peut être vue de deux manières possibles:*
$X(t,\omega) = X_t(\omega)$*: pour* t *fixé est alors une variable aléatoire.*
$X(t,\omega) = X_\omega(t)$*: pour* ω *fixé est une trajectoire.*
On dira que le processus X *est* **continu** *si toutes ses trajectoires sont continues.*

1.2. Filtration

Définition 1.2.1. Filtration de $(\Omega,\mathcal{F})$

On appelle ainsi toute famille $(\mathcal{F}_t)$ *croissante de sous-tribus de* $\mathcal{F}$ *c'est -à- dire telle que* $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ *pour* $s \leq t$*, où* s *et* t *sont dans l'intervalle* $[0,T]$*. On pose* $\mathcal{F}_{t^+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$*, la famille* $(\mathcal{F}_t)$ *est dite continue à droite si* $\mathcal{F}_{t^+} = \mathcal{F}_t, \forall t$*.*

Un processus stochastique X *est adapté à la filtration* $(\mathcal{F}_t)$*, si pour tout* t, X_t *est* $\mathcal{F}_t$ *mesurable.*

1.2.1. Temps d'arrêt

Définition 1.2.2. Temps d'arrêt

Soit $(\mathcal{F}_t)$ *une filtration de* $(\Omega,\mathcal{F})$ *.*

On dit qu'une variable aléatoire S *sur* Ω*, à valeurs dans* $\mathbb{R}_+ \bigcup\{\infty\}$*, est un temps d'arrêt* $\big($ *de la filtration* $(\mathcal{F}_t, t \in [0,T])\big)$ *si* $\forall t \in [0,T]$, $\{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

1.3. Processus du mouvement brownien

Définition 1.3.1. *Un mouvement brownien est un processus stochastique* $X(t), t \geq 0$ *tel que:*

(i) $X(0) = 0$*;*

(ii) pour tout $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$*, les variables* $X(t_k) - X(t_{k-1})$ *sont indépendantes;*

(iii) $X(t) - X(s)$ *est normalement distribuée avec*

$$E[X(t) - X(s)] = (t-s)\mu, \quad E[X(t) - X(s)]^2 = (t-s)\sigma^2$$

où μ *,*σ *sont des constantes réelles,* $\sigma \neq 0$.

μ *s'appelle la dérive et* σ^2 *la variance ou coefficient de diffusion.*

1.4. Processus markovien

Soit $X(t)$ un processus stochastique; on désignera par $(\mathcal{F}_t, t \in J)$ la tribu engendrée par $X(u), u \in J$; J étant un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 1.4.1. *Soit* $p(s,x,t,A)$ *une fonction non négative définie pour* $0 \leq s < t < \infty, x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathcal{B}_n$ *(*$\mathcal{B}_n$ *désignant la tribu des boréliens de* $\mathbb{R}^n$*) et telle que:*

(i) $p(s,x,t,A)$ est mesurable par rapport à x, pour s,t,A fixés;

(ii) $p(s,x,t,A)$ est une mesure de probabilité par rapport à A, pour s,t,x fixés;

(iii) p vérifie l'équation de Chapman-Kolmogorov:

$$p(s,x,t,A) = \int_{\mathbb{R}^n} p(s,x,u,dy)p(u,y,t,A) \quad \textit{pour tout} \quad s < u < t.$$

p est alors appelée fonction de transition markovienne ou simplement fonction de transition.

Définition 1.4.2. *La fonction de transition $p(s,x,t,A)$ d'un processus markovien est dite stationnaire si:*

$$p(s,x,t,A) = p(0,x,t-s,A) \; \textit{pour} \, s,t \; \textit{tels que} \; s < t.$$

Un processus markovien dont la fonction de transition est stationnaire est dit **homogène** *dans le temps.*

Remarque 1.4.1. *Un processus stochastique solution d'une équation différentielle stochastique du type:*

$$dX(t) = b(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t)$$

c'est -à- dire dont la dérive et la matrice de diffusion sont indépendantes du temps est un processus homogène. Tout les processus qu'on va considérer dans cette étude seront de ce type.

Théorème 1.4.1. *Soit p une fonction de transition. Alors pour tout $s \geq 0$ et pour toute distribution de probabilité $\pi(dx)$ sur $\mathbb{R}^n$, il existe un processus stochastique n-dimensionnel $X(t)$, $\quad s \leq t < \infty$ tel que:*

$$P[X(s) \in A] = \pi(A)$$

$$P[X(s) \in A | \mathcal{F}(X(u), s \leq u \leq \bar{s})] = p(\bar{s},X(\bar{s}),t,A) \qquad p.s. \quad (s \leq \bar{s} < t)$$

1.5. Equations différentielles stochastiques

Etant donné un mouvement brownien $W(t)$, on désignera par $(\mathcal{F}_t)$ la filtration constituée par la famille des $\mathcal{F}_t$ telles que $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}(W(s), 0 \leq s \leq t)$, c'est-à-dire que $\mathcal{F}_t$ est la tribu engendrée par les $W(s), 0 \leq s \leq t$. Pour la définition de l'intégrale stochastique $\int_s^t f(u,X(u))\,du + \int_s^t g(u,X(u))\,dW(u)$, on peut se référer à ([**3**]).

Soit $M_W^2[\,s,t]$ l'ensemble des processus stochastiques $X(t)$ adaptés à la filtration $(\,\mathcal{F}_t\,)$ tels que:

$$E\int_s^t |X(u)|^2\,dW(u) < \infty. \tag{1.5.1}$$

Soient les fonctions:

$$b(x,t) = (b_1(x,t),\ldots,b_n(x,t))$$

et

$$\sigma(x,t) = (\sigma_{ij})_{i,j=1}^n.$$

On suppose que les fonctions $b_i(x,t), \sigma_{ij}$ sont mesurables dans $\mathbb{R}^n \times [0,T]$.

On considère l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dX(t) = b(X(t),t)dt + \sigma(X(t),t)dW(t) \tag{1.5.2}$$

$$\text{avec condition initiale:}\quad X(0) = X_0 \tag{1.5.3}$$

Théorème 1.5.1. *On suppose que $b_i(x,t)$ et σ_{ij} vérifient les conditions suivantes:*

(i) $b_i(x,t)$ *et* $\sigma_{ij}(x,t)$ *sont définies et continues dans* $\mathbb{R}^n \times [0,T]$

(ii) Il existe $K > 0$ *tel que:* $\left|b(x,t)\right|^2 + \left|\sigma(x,t)\right|^2 \leq K(1+x^2)$

(iii) $\left|b(x,t) - b(x',t)\right| \leq K\left|x - x'\right|$ *et*

$$\left|\sigma(x,t) - \sigma(x',t)\right| \leq K\left|x - x'\right| \quad si \quad 0 \leq t \leq K \text{ et } x \in \mathbb{R}^n.$$

Sous ces conditions, l'équation différentielle stochastique (1.5.2) admet une solution unique dans $M_W^2[0,T]$ pourvu que X_0 soit indépendante de $\mathcal{F}(W(t),\quad t \geq 0)$ et $E\left|X_0\right|^2 < \infty$.

De même, pour $0 < s < T$ quelconque, il existe une solution unique $X(t)$ pour le même système avec les conditions initiales: $X(s) = X_s$, pourvu que X_s soit indépendante de $\mathcal{F}(W(t+s) - W(s),\quad t \geq 0)$ et $E\left|X_s\right|^2 < \infty$. Si x est un élément de $\mathbb{R}^n$, on notera la solution du système (1.5.2) avec la condition initiale $X_s = x$ p.s. par $X_{x,s}(t)$.

Soit A un borélien de $\mathbb{R}^n$ et $t > s$. Soit:

$$p(s,x,t,A) = P[X_{x,s}(t) \in A]$$

On a le résultat suivant:

Théorème 1.5.2. *Supposons que les conditions du théorème (1.5.1) soient vérifiées, que X_0 soit indépendante de $(\mathcal{F}(W(t)), t \geq 0)$ (en particulier si X_0 est constante) et que $E|X_0|^2 < \infty$. Soit $\mathcal{F}_t$ la tribu engendrée par X_0 et $w(s)$, $0 \leq s \leq t$. Alors la solution unique de (1.5.2) vérifie:*

$$\begin{aligned} P[X(t) \in A|\mathcal{F}_s] &= P[X(t) \in A|X_s = x] \\ &= p(s,x,t,A) \qquad p.s. \end{aligned}$$

De plus, $p(s,x,t,A)$ est fonction de probabilité de transition.

On montre en fait, que sous les conditions du théorème 1.5.1, la solution $X(t)$ est un processus continu et markovien.

1.6. Processus de diffusion

Définition 1.6.1. *Un processus markovien n-dimensionnel continu ayant une probabilité de transition $p(s,x,t,A)$ est un processus de diffusion si:*

(i) pour tout $\epsilon > 0, t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h} \int_{|y-x|>\epsilon} p(t,x,t+h,dy) = 0;$$

(ii) il existe un n-vecteur $b(x,t)$ et une matrice $n \times n$, $a(x,t)$, tels que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x|<\epsilon} (y_i - x_i) p(t,x,t+h,dy) = b_i(x,t),$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x|<\epsilon} (y_i - x_i)(y_j - x_j) p(t,x,t+h,dy) = a_{ij}(x,t)$$

où $b = (b_1, \ldots, b_n)$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$. Le vecteur b est appelé la dérive et la matrice a est la matrice de diffusion (coefficient de diffusion dans le cas $n = 1$).

Théorème 1.6.1. *Soient $b(x,t) = (b_1(x,t), \ldots, b_n(x,t))$ et $\sigma(x,t) = (\sigma_{ij})_{i,j=1}^n$.*

On suppose que les fonctions $b_i(x,t)$, σ_{ij} sont continues dans $\mathbb{R}^n \times [0,T]$ et vérifient les conditions du théorème 1.5.1. Alors le processus qui est solution de l'équation différentielle stochastique:

$$dX(t) = b(X(t),t)dt + \sigma(X(t),t)dW(t)$$

avec condition initiale: $X(0) = x_0$, est un processus de diffusion ayant pour dérive $b_i(x,t)$ et pour matrice de diffusion $a(x,t) = \sigma(x,t)\sigma^*(x,t)$, où $\sigma^*(x,t)$ est la transposée de $\sigma(x,t)$.

1.7. Formule d'Ito

Théorème 1.7.1. *Soit $X(t)$ un processus stochastique admettant la différentielle stochastique:*

$$dX(t) = b(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t),$$

et soit $u(t,x)$ une fonction non aléatoire définie pour $t \in [a,c]$, $x \in \mathbb{R}$, continue et possédant des dérivées continues $u_t(t,x)$,$u_x(t,x)$,$u_{xx}(t,x)$. Alors le processus $Y(t) = u(t,X(t))$ admet aussi une différentielle stochastique et l'on a le résultat suivant appelé formule d'Ito:

$$\begin{aligned} dY(t) = {} & [u_t(t,X(t)) + u_x(t,X(t))b(X(t)) + \frac{1}{2}u_{xx}(t,X(t))\sigma^2(X(t))]dt \\ & + u_x(t,X(t))\sigma(X(t))dW(t) \end{aligned}$$

1.7.1. Forme générale de la formule d'Ito

Théorème 1.7.2. *Si des processus $X_1(t)$,$X_2(t)$,$\ldots$,$X_n(t)$ admettent des différentielles stochastiques sur $[a,c]$:*

$$dX_i(t) = a_i(X(t))dt + \sum_{k=1}^{m} b_{ki}(X_i(t))dW_k(t),$$

et si une fonction $u(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)$ est continue possédant des dérivées continues $\frac{\partial u(x)}{\partial t}$, $\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}$ pour $k = 1,\ldots,n$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x)$, pour $i,j = 1,\ldots,n$, alors, en posant:

$$Lu(t,x) = \sum_{k=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_i \partial x_j} \sum_{k=1}^{m} b_{ki}(x)b_{kj}(x)$$

pour $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$, *le processus* $X(t) = u(t,X_1(t),X_2(t),\ldots,X_n(t))$ *possède aussi une différentielle stochastique:*

$$\begin{aligned} du(X(t)) = [(&\frac{\partial u}{\partial t}(t,X_1(t),X_2(t),\ldots,X_n(t))(t,X_1(t),X_2(t),\ldots,X_n(t))) \\ &+ Lu(t,X_1(t),X_2(t),\ldots,X_n(t))]dt \\ &+ \sum_{j=1}^{m}(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}(t,X_1(t),X_2(t),\ldots,X_n(t))b_{kj}(t))dW_j(t). \end{aligned}$$

Chapitre 2

CALCUL DE PREMIER TEMPS DE PASSAGE

2.1. Introduction

Considérons le système de deux équations différentielles stochastiques suivant:

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= f_1(X_1(t))dt + dW_1(t), \\ dX_2(t) &= f_2(X_2(t))dt + dW_2(t) \end{aligned}$$

Le problème de la détermination de la fonction génératrice des moments du premier temps de passage du processus qui est défini par ce système d'équations différentielles stochastiques a été considéré par M. Lefebvre et R. Labib (voir [**11**]). Dans ce chapitre, on va trouver des solutions explicites pour un problème plus général.

L'objet de cette étude est de déterminer la fonction génératrice du premier temps de passage d'un processus qui est donné par son système d'équations différentielles stochastiques. A cette fin, on va énoncer un théorème dont on fera la démonstration (ce théorème se trouve dans [**1**]). En plus de nous permettre de poser l'équation différentielle aux dérivées partielles (EDP) constituant le point de départ de notre étude, ce théorème va nous permettre également de montrer l'unicité de la solution, ce qui va nous permettre d'être certains que la solution qu'on va trouver est la bonne.

La démarche qu'on va suivre est la suivante: après avoir posé la forme générale du système différentiel qui nous intéresse, on va sélectionner au fur et à mesure les coefficients d'un tel système, de sorte que l'EDP associée puisse se ramener à une équation différentielle ordinaire (EDO) au moyen de la méthode des similitudes (voir [**12**]).

2.2. Position du problème

On va considérer des processus stochastiques définis par des systèmes d'équations différentielles stochastiques du type suivant:

$$dX_i(t) = f_i(X_i(t))dt + l_i X_i^{m_i}(t)dW_i(t), \ i = 1,\dots,n \tag{2.2.1}$$

où les W_i sont des mouvements browniens standards indépendants. Soit D une partie de $\mathbb{R}^n$ que l'on va supposer ouverte et bornée et soit x un élément de D. Soit:

$$T_(x_1,\dots,x_n) = \inf\{t \geq 0 : \ (X_1(t),\dots,X_n(t)) \in \partial D | (X_1(0),\dots,X_n(0)) = (x_1,\dots,x_n)\} \tag{2.2.2}$$

le premier instant où le processus $X(t) = (X_1(t),\dots,X_n(t))$ frappe la frontière du domaine D. En supposant les conditions du théorème 1.5.1 vérifiées sur les $f_i, X(t)$ est un processus de diffusion.

Soit $a > 0$, on pose:

$$M(x;a) := E(e^{-aT}) \text{ où } x = (x_1,x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

$M(x;a)$ est la fonction génératrice des moments de T. On va d'abord montrer que $M(x;a)$ vérifie l'équation suivante:

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{n} \{ \frac{1}{2} c_i {x_i}^{k_i} M_{x_i x_i} + f_i(x_i) M_{x_i} \} = aM \\ \text{avec:} \quad M(x;a) = 1 \quad \textit{pour} \quad x \in \partial D \end{gathered} \tag{2.2.3}$$

où $c_i = {l_i}^2$ et $k_i = 2m_i$, qui est une équation aux dérivées partielles d'ordre 2.

On considére l'opérateur:

$$\mathcal{L}u = \sum_{k=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + c(x)u. \tag{2.2.4}$$

$\mathcal{L}$ est dit elliptique en $x \in \mathbb{R}^n$ si pour tout $y \in \mathbb{R}^n, y \neq 0$ on a:

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x)y_i y_j > 0.$$

Il est dit elliptique sur D s'il est elliptique en tout $x \in D$. $\mathcal{L}$ est dit uniformément elliptique s'il existe un nombre $\delta > 0$ tel que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n, y \neq 0$

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x)y_i y_j \geq \delta ||y||^2$$

Etant donné un opérateur elliptique sur un domaine ouvert D de $\mathbb{R}^n$ et des fonctions continues $f : \bar{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\psi : \partial D \longrightarrow \mathbb{R}$ où $\bar{D}$ est l'adhérence de D. Le probème de Dirichlet est de trouver une fonction une fonction continue $u : \bar{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que u soit de classe $C^2(D)$ et vérifie l'équation elliptique $\mathcal{L}u = f$ ainsi que la condition à la frontière $u(x) = \psi(x)$ pour $x \in \partial D$.

Dans le cas qui nous intéresse, la fonction f est nulle et $c(x) = -\lambda$ où λ est une constante positive, donc $c(x) \leq 0$ et $f = 0$ (et D est ouvert et borné). Pour les problèmes de Dirichlet imliquant de tels opérateurs, la définition des points réguliers, ainsi que les critères permettant de les identifier sont les mêmes que pour les problèmes de Dirichlet impliquant les opérateurs de Laplace (voir[**16**] page 105).

On dispose de deux définitions, l'une est analytique (voir [**16**] page 103) et l'autre est probabiliste (voir [**18**] page 51). Dans Dynkin [**18**](page 59) et Karatzas [**17**] (page 250), on trouve aussi le critère de régularité suivant:

critère 1

Un point a de ∂D est régulier s'il est le sommet d'un cône qui est contenu à l'extérieur de D.

Ceci montre en particulier, que si ∂D est de classe C^2, alors tout point de ∂D est régulier.

On trouve un autre critère de régularité dans Friedman **[3]** (page 134) et dans **[17]** (page 365):

critère 2

Un point a de ∂D est régulier s'il existe une boule ouverte B_a telle que $\bar{B}_a \cap D = \emptyset$ et $\bar{B}_a \cap \partial D = \{a\}$. On constate là aussi que si ∂D est de classe C^2, alors tout point de ∂D vérifie ce critère.

Lemme 2.2.1. *On considère le système d'équations différentielles stochastiques dont on suppose l'existence et l'unicité de la solution:*

$$dX_i(t) = a_i(X(t))dt + \sum_{k=1}^{m} b_{ki}(X(t))dW_k(t), \quad i = 1, \ldots, n, \qquad \text{avec} \quad X_i(0) = x_i. \tag{2.2.5}$$

Soit $X(t)$ la solution unique de ce système et soit T_x l'instant de première sortie de $X(t)$ du domaine D défini par (2.2.2). On suppose que pour un certain $1 \leq l \leq n$, on a: $\min_{x\in\bar{D}} b_{ll}(x) > 0$. Alors $E(T_x) < \infty$.

Pour une démonstration, voir **[17]** page 365 ou **[3]** page 145 et 146.

Remarque 2.2.1. • *La condition $\min_{x\in\bar{D}} b_{ll}(x) > 0$ implique en particulier que l'opérateur $\mathcal{L}$ est elliptique.*

• *$E(T_x) < \infty$ implique que $T_x < \infty$ presque sûrement, car $T_x \geq 0$.*

On a le théorème suivant(voir **[1]** page 488):

2.3. Théorème de base

Théorème 2.3.1. *Considérons un système d'équations différentielles stochastiques:*

$$dX_i(t) = a_i(X(t))dt + \sum_{k=1}^{m} b_{ki}(X(t))dW_k(t), \quad i = 1, \ldots, n, \qquad \text{avec} \quad X_i(0) = x_i. \tag{2.3.1}$$

On suppose que D est un ouvert borné, ∂D est de classe C^2, les coefficients a_i et b_{ki} sont de classe C^2 et qu'il existe $1 \leq l \leq n$ tel que $\min_{x\in\bar{D}} b_{ll}(x) > 0$. Posons $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et supposons que ce système possède une solution unique $X(t)$ qui soit continue. (Ceci est réalisé, en particulier, si les coefficients a_i et b_{ij} vérifient *les conditions du théorème 1.5.1.) On va désigner cette solution unique qui part de x à l'instant 0, par X_x, x étant supposé dans D.*

Considérons l'opérateur différentiel:

$$Lu(x) = \sum_{k=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j}\sum_{k=1}^{m} b_{ki}(x)b_{kj}(x) \tag{2.3.2}$$

défini pour toute fonction u deux fois continûment différentiable et bornée. Soit $\lambda \geq 0$ et ψ une fonction deux fois continûment différentiable sur $\mathbb{R}^n$. On pose: $v_\lambda(x) = E[e^{-\lambda T_x}\psi(X_x(T_x))]$ où T_x est définie par (2.2.2).

Soit $u(x)$ une fonction définie, continue et bornée sur l'adhérence de D, deux fois continûment différentiable sur D et solution de l'équation suivante:

$$Lu = \lambda u \tag{2.3.3}$$

Si $u(x) = \psi(x)$ pour $x \in \partial D$ où ∂D est le le bord de D, alors:

$$u(x) = E[e^{-\lambda T_x}\psi(X_x(T_x))]. \tag{2.3.4}$$

Remarque 2.3.1. *L'équation (2.3.3) est un cas particulier de l'équation elliptique de second degré de la forme:*

$$\sum_{k=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + c(x)u = f(x). \tag{2.3.5}$$

Dans notre cas, on a: $c(x) = -\lambda \leq 0$ et $f(x) = 0$. On montre dans pareil cas que le problème de Dirichlet défini par l'équation (2.3.5) et une condition de Dirichlet sur le bord ∂D admet une solution unique si D est un ouvert borné, ∂D est de classe C^2 et si les coefficients $a_i(x)$ et $b_{ij}(x)$ sont de classe C^2.
(Voir **[16]** *page 83 et 104).*

Remarque 2.3.2. *Dans ce théorème, $\psi(x)$ est une fonction à valeurs réelles, mais il est facile de montrer que si on la suppose à valeurs complexes, le résultat reste valable (il suffit d'appliquer le résultat précédent aux parties réelle et imaginaire de $\psi(x)$).*

Preuve du théorème

On a d'après les hypothèses du théorème que $T_x < \infty$ presque sûrement et que la solution u du problème de Dirichlet existe et est unique. D'autre part, soit l'opérateur:

$$Lu(x) = \sum_{k=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j}\sum_{k=1}^{m} b_{ki}(x)b_{kj}(x) \tag{2.3.6}$$

En appliquant la formule d'Ito à la fonction $v(t,x) = u(x)e^{-\lambda t}$, on trouve pour $t < T_x$:

$$\begin{aligned} dv(X(t)) = {} & [\frac{\partial v}{\partial t}(t,X_1(t),X_2(t),\ldots,X_n(t)) \\ & + Lv(t,X_1(t),X_2(t),\ldots,X_n(t))]dt \\ & + \sum_{j=1}^{m}(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial v(x)}{\partial x_k}(t,X_1(t),X_2(t),\ldots,X_n(t))b_{kj}(t))dW_j(t) \end{aligned}$$

mais étant donné que $Lu = \lambda u$, on a aussi $Lv = \lambda v$ car t n'intervient pas dans l'expression de L.

D'autre part, on a:

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,X(t)) = -\lambda v(t,X(t)),$$

on arrive donc à conclure que:

$$[\frac{\partial v}{\partial t}(t,X_1(t),X_2(t),\ldots,X_n(t))] + Lv(t,X_1(t),X_2(t),\ldots,X_n(t)) = 0.$$

Donc,

$$E[v(t,X(t))] - u(x) = 0,$$

c'est-à-dire:

$$E[u(X(t))e^{-\lambda t}] = u(x). \tag{2.3.7}$$

relation qui est donc vraie pour tout $t < T_x$.

Lemme 2.3.1. *Soit U un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, alors U peut s'écrire sous la forme: $U = \cup_m K_m$ où K_m est une suite croissante de compacts.*

Preuve

Soit B_k la boule ouverte centrée à l'origine et de rayon k et soit:

$$U_m^k = \{x \in E_k | d(x, {E_k}^c) \geq \frac{1}{m}\} \tag{2.3.8}$$

où:

- $E_k = U \cap B_k$,
- ${E_k}^c$ est le complémentaire de U_k qui est donc un fermé de $\mathbb{R}^n$,
- $d(x, {E_k}^c)$ est la distance de x à ${E_k}^c$ qui est définie pour tout fermé F de $\mathbb{R}^n$

par $d(x,F) = \inf_{y \in F} d(x,y)$. Il faut noter que la fonction

$$D \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto d(x,F)$$

est une fonction continue; en effet:

Soit x_m une suite d'éléments de D qui converge vers $x \in D$ et soit $\epsilon > 0$, il existe N tel que $d(x, x_m) < \epsilon$ dès que $m > N$. Alors d'après l'inégalité triangulaire on a pour tout $y \in F$:

$$d(x_m, y) \leq d(x_m, x) + d(x, y)$$
$$d(y, x) \leq d(y, x_m) + d(x_m, x),$$

donc pour $m > N$ on a:

$$d(x_m, y) \leq \epsilon + d(x, y)$$
$$d(y, x) \leq d(y, x_m) + \epsilon.$$

Donc:

$$\inf_{y \in F} d(x_m, y) \leq \epsilon + \inf_{y \in F} d(x, y)$$
$$\inf_{y \in F} d(y, x) \leq \inf_{y \in F} d(y, x_m) + \epsilon,$$

c'est-à-dire:

$$d(x_m, F) \leq \epsilon + d(x, F)$$
$$d(x, F) \leq d(x_m, F) + \epsilon.$$

Ainsi pour $m > N$: $|d(x_m,F) - d(x,F)| \leq \epsilon$, ce qui montre que $d(x_m,F)$ converge vers $d(x,F)$ quand m tend vers l'infini; la fonction $x \longmapsto d(x,F)$ est donc continue. Il en résulte que U_m^k est un fermé de $\mathbb{R}^n$ qui est de plus borné (c'est une partie de B_m), donc U_m^k est un compact. Alors $E_k = \cup_{m\geq 1} U_m^k$ et $U = \cup_{k\geq 1} E_k$, donc $U = \cup_{m,k\geq 1} U_m^k$.

D'autre part: $E_k \subset E_{k+1}$ donc ${E_{k+1}}^c \subset {E_k}^c$ donc si $x \in E_k$ alors $d(x,{E_k}^c) \leq d(x,{E_{k+1}}^c)$ et donc $U_m^k \subset U_m^{k+1}$. De plus $U_m^k \subset U_{m+1}^k$ car $\frac{1}{m+1} \leq \frac{1}{m}$. Il en résulte que si $m < k$ alors $U_m^k \subset {U_k}^k$ et si $m > k$ alors $U_m^k \subset {U_m}^m$ et $U_k^k \subset U_{k+1}^k \subset U_{k+1}^{k+1}$ donc $U = \cup_{k\geq 1} U_k^k$. En posant: $U_k^k = K_k$ on obtient donc: $U = \cup_k K_k$.

Remarque 2.3.3. *Le lemme précédent se généralise facilement au cas où U est un ouvert non borné.*

On peut donc écrire D sous la forme: $D = \cup_m K_m$ où K_m est une suite croissante de compacts contenant x et l'on désigne par T_x^m le premier instant de sortie du processus $X(t)$ de l'ensemble K_m.

$$T_x^m(\omega) \leq T_x^{m+1}(\omega)$$

et

$$T_x^m(\omega) \leq T_x(\omega).$$

On pose: $\tau_x(\omega) = \sup_{m\geq 1} T_x^m(\omega)$. Alors $\tau_x(\omega) < \infty$, (car si $\tau_x(\omega) = \infty$ on a aussi $T_x(\omega) = \infty$, puisque $T_x^m(\omega) \leq T_x(\omega)$,$\forall m$) alors au bout du temps $\tau_x(\omega)$, $X(\tau_x(\omega))$ est en dehors de tout compact K_m et par conséquent en dehors de D et est donc sur ∂D. Ceci montre que $\tau_x(\omega) = T_x(\omega)$. La relation $T_x(\omega) = \sup_{m\geq 1} T_x^m(\omega)$ est donc vraie pour tout ω. Par conséquent: $T_x^m(\omega) \longrightarrow T_x(\omega)$ quand $m \to \infty$.

Soit T un nombre réel positif. D'aprés l'équation (2.3.7), on a:

$$E[u(X(T_x^m \wedge T))e^{-\lambda(T_x^m \wedge T)}] = u(x), \tag{2.3.9}$$

car $(T_x^m \wedge T)(\omega) < T_x(\omega)$ pour tout ω. Donc quand on fait tendre m vers l'infini, on obtient:

$$E[u(X(T_x \wedge T))e^{-\lambda(T_x \wedge T)}] = u(x). \tag{2.3.10}$$

Si maintenant, dans l'équation (2.3.10) on fait tendre T vers l'infini, on obtient:

$$E[u(X(T_x))e^{-\lambda T_x}] = u(x), \tag{2.3.11}$$

Or $u(X(T_x)) = \psi(X(T_x)), (\text{car}\, X(T_x)) \in \partial D)$, donc, $E[\psi(X(T_x))e^{-\lambda T_x}] = u(x)$. $\square$

Remarque 2.3.4. *D étant un ouvert, le premier temps de passage T_x de $X(t)$ par ∂D est aussi le premier temps de sortie de D. On démontre sans difficulté dans ce cas (et dans le cas où D est un fermé) que T_x est un temps d'arrêt (relativement à la filtration $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}\big(W(s), 0 \leq s \leq t\big)$ engendrée par les $W(s), 0 \leq s \leq t$)(voir* [**1**] *pages 382 et 383 et* [**3**] *page 26).*

Par application de ce théorème, en prenant $\psi(x) = 1$ et

$$Lu = \sum_{i=1}^{n} \{\frac{1}{2} c_i {x_i}^{k_i} u_{x_i x_i} + f_i u_{x_i}\} \tag{2.3.12}$$

et, une fois la solution $u(x)$ de l'équation (2.3.3) vérifiant la condition au bord:

$$u(x) = 1 \,\text{pour}\, x \in \partial D \tag{2.3.13}$$

trouvée, on aura nécessairement:

$$u(x) = M(x; \lambda).$$

<u>En conclusion:</u>

si on trouve une solution $u(x)$ de l'équation (2.3.18)) qui vérifie $u(x) = 1$ pour tout $x \in \partial D$, alors $u(x) = M(x; a)$

Ceci prouve en particulier l'unicité de la solution de l'équation (2.3.18). On va résoudre cette équation par la méthode des similitudes qui consiste à ramener l'équation (2.3.18) à une équation ordinaire. Pour cela, on pose:

$$z = z(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(x_1) + \cdots + \varphi_n(x_n),$$

où chaque φ_i est fonction de la seule variable x_i. On va chercher ensuite les solutions de l'équation (2.3.19) qui sont de la forme $N(z,a)$ en posant:

$$u(x_1, \ldots, x_n, a) = N(z,a),$$

où $N(z,a)$ est une fonction de z et de a. Donc,

$$u_{x_i} = N^{'}(z,a)\varphi_i^{'}(x_i),$$

où u_{x_i} désigne la dérivée partielle de u par rapport à la variable x_i.

$$u_{x_ix_i} = N^{''}(z,a)\varphi_i^{'}(x_i)^2 + N^{'}(z,a)\varphi_i^{''}(x_i).$$

Donc,

$$\frac{1}{2}[\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^{k_i}\varphi_i^{'}(x_i)^2]N^{''}(z,a) + \{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^{k_i}\varphi_i^{''}(x_i) + \sum_{i}^{n} f_i(x_i)\varphi_i^{'}(x_i)\}N^{'}(z,a) = aN(z,a). \tag{2.3.14}$$

L'étape suivante est l'écriture de $[\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^{k_i}\varphi_i^{'}(x_i)^2]$ et de $\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^{k_i}\varphi_i^{''}(x_i) + \sum_{i}^{n} f_i(x_i)\varphi_i^{'}(x_i)\}$ comme fonctions de z. On pose alors:

$$\lambda(z) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^{k_i}\varphi_i^{'}(x_i)^2 \tag{2.3.15}$$

et

$$\mu(z) = \{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^{k_i}\varphi_i^{''}(x_i) + \sum_{i} f_i(x_i)\varphi_i^{'}(x_i)\}. \tag{2.3.16}$$

<u>Etude de $\lambda(z)$</u>

Pour un i fixé, en dérivant par rapport à x_i, on obtient:

$$k_i c_i x_i^{k_i-1}\varphi_i^{'}(x_i)^2 + 2c_i x_i^{k_i}\varphi_i^{'}(x_i)\varphi_i^{''}(x_i) = 2\lambda^{'}(z)\varphi_i^{'}(x_i);$$

si $\varphi_i^{'}(x_i) \neq 0$ on peut écrire:

$$k_i c_i x_i^{k_i-1}\varphi_i^{'}(x_i) + 2c_i x_i^{k_i}\varphi_i^{''}(x_i) = 2\lambda^{'}(z) \tag{2.3.17}$$

et ceci $\forall i = 1,\ldots,n$, donc,

$$\lambda^{'}(z) = \text{constante} = \alpha.$$

En effet: fixons i et j , $i \neq j$, alors, l'égalité (2.3.17) ayant lieu pour i et j, on a:

$$k_i c_i x_i^{k_i-1}\varphi_i^{'}(x_i) + 2c_i x_i^{k_i}\varphi_i^{''}(x_i) = 2\lambda^{'}(z) \tag{2.3.18}$$

$$k_j c_j x_j^{k_j-1}\varphi_j^{'}(x_j) + 2c_j x_j^{k_j}\varphi_j^{''}(x_j) = 2\lambda^{'}(z). \tag{2.3.19}$$

Si maintenant on fixe i et on fait varier j, alors $2\lambda^{'}(z)$ est fixé d'après (2.3.18) bien que x_j varie dans l'équation (2.3.19). Ceci prouve que $\lambda^{'}(z)$ ne dépend pas des valeurs de x_j et pour la même raison $\lambda^{'}(z)$ ne dépend pas des valeurs de x_i.

On pose alors:

$$\lambda(z) = \alpha z + \alpha^{'}. \tag{2.3.20}$$

L'équation (2.3.17) est de la forme:

$$Ax^r y^{'}(x) + Bx^{r+1}y^{''}(x) = c.$$

Si $k_i \neq 2$, on a:

$$\varphi_i(x_i) = \frac{2\alpha}{(2-k_i)^2 c_i} x_i^{2-k_i} + \frac{2\alpha_i}{2-k_i} x_i^{1-\frac{k_i}{2}} \tag{2.3.21}$$

(en prenant la constante d'intégration nulle),

$\varphi_i^{'}(x_i) = \frac{2\alpha}{(2-k_i)c_i} x_i^{1-k_i} + \alpha_i x_i^{\frac{-k_i}{2}}$

$\varphi_i^{''}(x_i) = \frac{2\alpha(1-k_i)}{(2-k_i)c_i} x_i^{-k_i} - \frac{\alpha_i k_i}{2} x_i^{\frac{-k_i}{2}-1}.$

Si $k_i = 2$, l'équation (2.3.17) est de la forme:

$xy^{'}(x) + x^2 y^{''}(x) = c = \frac{\lambda^{'}(z)}{c_i}$

$\Rightarrow \varphi_i(x_i) = d_i \ln(x_i) + \frac{\alpha}{2c_i}(\ln(x_i))^2,$

d_i est une constante (on prend la constante d'intégration nulle).

$$\Rightarrow \varphi_i^{'}(x_i) = \frac{d_i}{x_i} + \alpha \frac{ln(x_i)}{c_i x_i}$$

$$\Rightarrow \varphi_i^{''}(x_i) = -\frac{d_i}{x_i^2} + \frac{\alpha}{c_i x_i^2} - \frac{\alpha}{c_i}\frac{\ln(x_i)}{x_i^2}.$$

Etude de $\mu(z)$

Etant donné que:

$$\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^{k_i} \varphi_i^{''}(x_i) + \sum_i f_i \varphi_i^{'}(x_i)\} = \mu(z),$$

en dérivant par rapport à x_i, on obtient:

$$[c_i x_i^{k_i} \varphi_i^{''}(x_i)]^{'} + 2[f_i(x_i)\varphi_i^{'}(x_i)]^{'} = 2\mu^{'}(z)\varphi_i^{'}(x_i). \tag{2.3.22}$$

Donc, si $\varphi_i^{'}(x_i) \neq 0$, on voit que: $\mu^{'}(z) = k =$ constante. En effet, d'après (2.3.22) on a:

$$\frac{[c_i x_i^{k_i} \varphi_i^{''}(x_i)]^{'} + 2[f_i(x_i)\varphi_i^{'}(x_i)]^{'}}{\varphi_i^{'}(x_i)} = 2\mu^{'}(z), \tag{2.3.23}$$

donc en gardant à chaque fois un i fixé et en faisant varier les autres indices, $z = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i)$ varie et $\mu^{'}(z)$ reste le même. Ceci prouve que $\mu^{'}(z)$ est constante par rapport à chaque $\varphi_i(x_i)$ et donc par rapport à z. $\mu(z)$ est donc de la forme $\mu(z) = kz + H$. On peut donc écrire:

$$2[f_i(x_i)\varphi_i^{'}(x_i)]^{'} = 2k\varphi_i^{'}(x_i) - [c_i x_i^{k_i} \varphi_i^{''}(x_i)]^{'}.$$

Donc,

$$2f_i(x_i)\varphi_i^{'}(x_i) = 2k\varphi_i(x_i) - c_i x_i^{k_i} \varphi_i^{''}(x_i) + \delta_i, \tag{2.3.24}$$

δ_i constante.

D'où:

$$2f_i(x_i) = \frac{2k\varphi_i(x_i) - c_i x_i^{k_i} \varphi_i^{''}(x_i) + \delta_i}{\varphi_i^{'}(x_i)}. \tag{2.3.25}$$

On a donc:

si $k_i \neq 2$:

$$f_i(x_i) = \frac{8k\alpha {x_i}^{2-k_i} + 8k\alpha_i c_i(2-k_i){x_i}^{1-\frac{k_i}{2}} + \alpha_i k_i {c_i}^2(2-k_i)^2 {x_i}^{\frac{k_i}{2}-1} + \Gamma_i}{8\alpha(2-k_i){x_i}^{1-k_i} + 4\alpha_i c_i(2-k_i)^2 {x_i}^{-\frac{k_i}{2}}} \tag{2.3.26}$$

où

$$\Gamma_i = 2\delta_i(2-k_i)^2 c_i - 4\alpha c_i(1-k_i)(2-k_i). \tag{2.3.27}$$

Si $k_i = 2$:

$$f_i(x_i) = \frac{2kc_i d_i x_i \ln(x_i) + k\alpha x_i(\ln(x_i))^2 + c_i\alpha x_i \ln(x_i) + (d_i {c_i}^2 - \alpha c_i)x_i + \delta_i x_i c_i}{2c_i d_i + 2\alpha \ln(x_i)}. \tag{2.3.28}$$

On a donc:

$$f_i(x_i) = \frac{(2kc_i d_i + c_i\alpha)x_i \ln(x_i) + k\alpha x_i(\ln(x_i))^2 + (d_i {c_i}^2 - \alpha c_i + \delta_i c_i)x_i}{2c_i d_i + 2\alpha \ln(x_i)}.$$

Relation entre α' et les α_i

$$\lambda(z) = \alpha z + \alpha' = \frac{1}{2}\sum_i c_i {x_i}^{k_i} \varphi_i'(x_i)^2.$$

Il s'ensuit que $\alpha' = \sum_i \beta_i$ où β_i est tel que $\frac{1}{2} c_i {x_i}^{k_i} \varphi_i'(x_i)^2 = \alpha\varphi_i(x_i) + \beta_i$.

Si $k_i \neq 2$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} c_i {x_i}^{k_i} \varphi_i'(x_i)^2 &= \left(\frac{2\alpha}{(2-k_i)c_i} {x_i}^{1-\frac{k_i}{2}} + \alpha_i\right)^2 \frac{1}{2} c_i \\
&= \alpha\varphi_i(x_i) + \beta_i \\
&= \alpha\left[\frac{2\alpha}{(2-k_i)^2 c_i} {x_i}^{2-k_i} + \frac{2\alpha_i}{2-k_i} {x_i}^{1-\frac{k_i}{2}}\right] + \beta_i.
\end{aligned}$$

On a donc:

$$\beta_i = \frac{1}{2} c_i \alpha_i^2.$$

Si $k_i = 2$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} c_i x_i^2 \varphi_i'(x_i)^2 &= \frac{1}{2c_i}\Big(c_i d_i + \alpha \ln(x_i)\Big)^2 \\
&= \alpha\left[d_i \ln(x_i) + \frac{\alpha}{2c_i}(\ln(x_i))^2\right] + \beta_i.
\end{aligned}$$

Donc:

$$\beta_i = \frac{1}{2} c_i {d_i}^2,$$

d'où:

$$\alpha^{'} = \frac{1}{2}\sum_{k_i\neq 2} c_i\alpha_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{k_i=2} c_i {d_i}^2. \tag{2.3.29}$$

Calcul du paramètre H

On a: $\mu(z) = kz + H$ et $\mu(z) = \sum_i \frac{1}{2}c_i {x_i}^{k_i}\varphi_i^{''}(x_i) + f_i(x_i)\varphi_i^{'}(x_i)$; donc $H = \sum_i H_i$ où pour tout i on a:

$$\frac{1}{2}c_i {x_i}^{k_i}\varphi_i^{''}(x_i) + f_i(x_i)\varphi_i^{'}(x_i) = k\varphi_i(x_i) + H_i.$$

Or pour chaque i on a:

$$f_i(x_i)\varphi_i^{'}(x_i) = k\varphi_i(x_i) - \frac{1}{2}c_i {x_i}^{k_i}\varphi_i^{''}(x_i) + \frac{1}{2}\delta_i,$$

ceci d'après l'équation (2.3.25). Il s'ensuit que $H_i = \frac{1}{2}\delta_i$. D'où: $H = \sum_i \frac{1}{2}\delta_i$

L'équation (2.3.14) est donc:

$$(\alpha z + \alpha')N''(z,a) + (kz + H)N'(z,a) = aN(z,a), \tag{2.3.30}$$

où α' et H sont décrits précédemment, et les constantes α et k sont déterminées par le choix des φ_i et f_i. La solution générale de cette équation est:

si $k \neq 0$:

$$N(z) = c_1 N_1(z) + c_2[-k(\frac{\alpha z + \alpha'}{\alpha^2})]^{-\frac{a}{k}} N_2(z) \tag{2.3.31}$$

$$\text{où} \quad N_1(z) = hypergeom(-\frac{a}{k}, \frac{\alpha H - \alpha' k}{\alpha^2}, -\frac{k(\alpha z + \alpha')}{\alpha^2})$$
$$\text{et} \quad N_2(z) = hypergeom(-\frac{a}{k}, \frac{k\alpha^2 - \alpha^2 a - k\alpha H + \alpha' k^2}{k\alpha^2}, \frac{\alpha^2}{k(\alpha z + \alpha')}).$$

Si $k = 0$:

$$N(z) = c_1[\frac{\alpha z + \alpha'}{\alpha^2}]^{\frac{\alpha - H}{2\alpha}} M_1(z) + c_2[\frac{\alpha z + \alpha'}{\alpha^2}]^{\frac{\alpha - H}{2\alpha}} M_2(z) \tag{2.3.32}$$

$$\text{où} \quad M_1(z) = BesselY(\frac{\alpha - H}{\alpha}, 2\sqrt{-a}[\frac{\alpha z + \alpha'}{\alpha^2}]^{\frac{1}{2}})$$
$$\text{et} \quad M_2(z) = BesselJ(\frac{\alpha - H}{\alpha}, 2\sqrt{-a}[\frac{\alpha z + \alpha'}{\alpha^2}]^{\frac{1}{2}}).$$

Remarque 2.3.5. *Pour les valeurs trouvées pour f_i, k_i, $c_i, \ldots$, il faut bien sûr vérifier que les conditions du théorème 1.5.1 sont satisfaites. Il se peut qu'elles ne s'appliquent pas sur $\mathbb{R}^n$ tout entier; dans ce cas, il faut réduire le domaine du processus en question (ce qui revient à rendre sa frontière absorbante), ou parfois s'assurer que le processus reste dans un domaine convenable avec une probabilité égale à 1, comme c'est le cas dans les deux exemples qui vont suivre.*

2.4. Exemples d'application

2.4.1. Exemple 1

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= [-\beta X_1(t) + \frac{(\gamma_1 - 1)}{2X_1(t)}]dt + dW_1(t), \\ dX_2(t) &= [-\beta X_2(t) + \frac{(\gamma_2 - 1)}{2X_2(t)}]dt + dW_2(t), \\ dX_3(t) &= [-\beta X_3(t) + \frac{(\gamma_3 - 1)}{2X_3(t)}]dt + dW_3(t). \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Avec la condition initiale: $(X_1(0),X_2(0),X_3(0)) = (x_1,x_2,x_3)$.

Dans ces équations on supposera que $\beta > 0,\gamma_i < 1$ ou $\beta < 0,\gamma_i > 1$. On suppose de plus que $X_i(0) \neq 0$ pour tout i. Dans chacune des équations, la dérive $[-\beta X_i(t) + \frac{(\gamma_i-1)}{2X_i(t)}]$ présente une singularité à l'origine.

On va s'assurer, qu'en fait, le processus $X_i(t)$ atteint l'origine avec une probabilité nulle. Considérons l'équation différentielle stochastique:

$$dX(t) = [-\beta X(t) + \frac{(\gamma - 1)}{2X(t)}]dt + dW(t) \tag{2.4.2}$$

avec condition initiale $X(0) = x, x > 0$. Soit: $I = [a,c]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $0 < a \leq c < \infty$. Sur l'intervalle I, la dérive et le coefficient de diffusion vérifient les conditions du théorème 1.5.1, donc il existe un unique processus continu (et adapté à la filtration) dont les trajectoires sont contenues dans I et qu'on va désigner aussi par $X(t)$ et est tel que $X(0) = x$. Soit τ_I le premier temps de sortie de $X(t)$ de l'intervalle I, c'est-à-dire:

$\tau_I = \inf\{t \geq 0 : \quad X(t) \in I^c\}$ où I^c est le complémentaire de I.

On va montrer que $\tau_I \uparrow \infty$ quand $a \downarrow 0$ et $c \uparrow \infty$. Il en résultera alors que

$$X(\cdot) = \lim_{c \uparrow \infty} \lim_{a \downarrow 0} X(\cdot \wedge \tau_I)$$

est la solution unique de l'équation (2.4.2). On va montrer d'abord que $E(\tau_I) < \infty$.

D'après l'équation (2.4.2), on peut écrire:

$$X(t \wedge \tau_I) - X(0) = \int_0^{t \wedge \tau_I} [-\beta X(t) + \frac{(\gamma - 1)}{2X(t)}]dt + \int_0^{t \wedge \tau_I} dW(t). \qquad (2.4.3)$$

Et puisque $E[\int_0^{t \wedge \tau_I} dW(t)] = 0$, on a l'égalité suivante:

$$E[X(t \wedge \tau_I) - x] = E[\int_0^{t \wedge \tau_I} [-\beta X(t) + \frac{(\gamma - 1)}{2X(t)}]dt]. \qquad (2.4.4)$$

■ **1er cas:** $\beta > 0$ et $\gamma < 1$.

Posons: $f(y) = -\beta y + \frac{\gamma - 1}{2y}$ et soit $g(y) = |f(y)|$, donc, $g(y) = \beta y + \frac{1-\gamma}{2y}$. Alors: $g'(y) = \beta + \frac{1-\gamma}{2y^2}$. On en déduit que $g(y)$ atteint un minimum absolu au point $y = \sqrt{\frac{1-\gamma}{2\beta}}$, et ce minimum est $m = \sqrt{2\beta(1-\gamma)}$.

■ **2ième cas:** $\beta < 0$ et $\gamma > 1$.

Dans ce cas: $g(y) = -\beta y + \frac{(\gamma-1)}{2y}$ et $g'(y) = -\beta + \frac{(\gamma-1)}{2y^2}$; donc $g'(y) > 0$ et $g(y)$ atteint donc un minimum absolu au point a. On pose alors $m = g(a)$. Ensuite, on obtient à partir de (2.4.4) en majorant le premier membre et en minorant le second:

$$2c \geq mE(t \wedge \tau_I)$$

$$\text{et donc} \quad \frac{2c}{m} \geq E(t \wedge \tau_I).$$

Maintenant, si on fait tendre $t \to \infty$ on obtient: $\frac{2c}{m} \geq E(\tau_I)$. Donc:

$$E(\tau_I) < \infty.$$

En vue d'appliquer la formule d'Ito, on va chercher une solution de l'équation différentielle suivante:

$$[-\beta y + \frac{\gamma - 1}{2y}]h'(y) + \frac{1}{2}h''(y) = 0. \qquad (2.4.5)$$

Une solution de cette équation est:

$$h(y) = \int_1^y \exp(-\frac{1}{2}At^2)t^{-B}dt, \tag{2.4.6}$$

où $A = -2\beta$ et $B = \gamma - 1$. Alors par application de la formule d'Ito, on a: $E[h(X(t \wedge \tau_I)) - h(x)] = 0$.

En effet, la fonction h étant indépendante de t, la formule d'Ito donne:

$$dh(X(t)) = [h^{'}(X(t))(-\beta X(t) + \frac{\gamma - 1}{2X(t)}) + \frac{1}{2}h^{''}(X(t))1^2]dt. + h^{''}(X(t))dW(t)$$

Donc, puisque $h^{'}(y)[-\beta y + \frac{\gamma-1}{2y}] + \frac{1}{2}h^{''}(y) = 0, \forall y$, en passant à la forme intégrale on obtient:

$$h(X(t)) - h(X(0)) = \int_0^t h^{''}(X(s))dW(s).$$

Ensuite, en passant aux espérances et en remplacant t par $t \wedge \tau_I$ (où $x \wedge y$ est l'infinimum de x et y), on obtient:

$$E[h(X(t \wedge \tau_I)) - h(x)] = 0,$$

ou encore:

$$E[h(X(t \wedge \tau_I))] = h(x)$$

pour tout $t \geq 0$; en particulier on a $|E[h(X(t \wedge \tau_I))]| \leq |h(x)|$. Alors, puisque $\tau_I < \infty$ on a $t \wedge \tau_I \to \tau_I$ quand $t \to \infty$, donc par convergence dominée on a:

$$E[h(X(\tau_I))] = h(x). \tag{2.4.7}$$

On pose ensuite: $\tau_y = \inf\{t \geq 0 : X(t) = y\}$ pour chaque y dans $\mathbb{R}$. On a donc, d'après l'équation (2.4.7):

$$P(\tau_a < \tau_c)h(a) + P(\tau_c < \tau_a)h(c) = h(x) \tag{2.4.8}$$

et en tenant compte du fait que $P(\tau_I < \infty)$ p.s., on a:

$$P(\tau_a < \tau_c) + P(\tau_c < \tau_a) = 1. \tag{2.4.9}$$

Donc:

$$P(\tau_c < \tau_a) = \frac{h(x) - h(a)}{h(c) - h(a)}; \tag{2.4.10}$$

c'est-à-dire:

$$P(\tau_c < \tau_a) = \frac{\int_1^x \exp(-\frac{1}{2}As^2)s^{-B}ds - \int_1^a \exp(-\frac{1}{2}As^2)s^{-B}ds}{\int_1^c \exp(-\frac{1}{2}As^2)s^{-B}ds - \int_1^a \exp(-\frac{1}{2}As^2)s^{-B}ds}. \tag{2.4.11}$$

Donc:

$$P(\tau_c < \tau_a) = \frac{\int_a^x \exp(-\frac{1}{2}As^2)s^{-B}ds}{\int_a^c \exp(-\frac{1}{2}As^2)s^{-B}ds}. \tag{2.4.12}$$

Conclusion:

Etant donné que $\exp(-\frac{1}{2}As^2)$ est bornée et non nulle, alors de deux choses l'une:

■ **ou bien** $B > 1$, dans ce cas $\int_a^c \exp(-\frac{1}{2}As^2)s^{-B}ds \to \infty$ et par suite: $\lim_{a\to 0} P[\tau_c < \tau_a] = 1$.

■ **Ou bien** $B \leq 1$ et dans ce cas $\int_a^c \exp(-\frac{1}{2}As^2)s^{-B}ds$ tend vers une limite finie lorsque $a \longrightarrow 0$ et de plus $\int_c^x \exp(-\frac{1}{2}As^2)s^{-B}ds < 0$ est fini, donc $P(\tau_c < \tau_a) < 1$. On est donc conduit à supposer $B > 1$, c'est-à-dire: $\gamma > 2$. Dans ce cas le théorème 2.3.1 s'applique et les résultats des calculs sont valables.

Remarque 2.4.1. • *1. Dans le cas où $\beta > 0$ et $\gamma > 1$ ou bien $\beta < 0$ et $\gamma < 1$, alors $g(y)$ s'annule au point $y = \sqrt{\frac{\gamma-1}{2\beta}}$ et le raisonnement fait précédemment ne s'applique pas, car $g(y)$ n'admet pas un minimum absolu non nul.*

• *2. Si $\beta = 0$, $g(y) = \frac{\gamma-1}{2y}$ (en supposant $\gamma > 1$), dans ce cas $g(y)$ admet un minimum absolu non nul qui est $g(c) = \frac{\gamma-1}{2c}$; le raisonnement fait précédemment s'applique donc et le problème admet donc une solution unique si on suppose que $\gamma > 2$.*

On passe maintenant au:

Calcul des paramètres

En ce qui concerne le système (2.4.1), on a les données suivantes:

$$f_i(X_i(t)) = -\beta X_i(t) + \frac{(\gamma_i - 1)}{2X_i(t)},$$

$$c_i = 1, \quad k_i = 0,$$

$$\varphi_i(X_i(t)) = \frac{2\alpha}{(2-0)^2}X_i^{2-0}(t) + \frac{2\alpha_i}{2-k_i}X_i^{1-0}(t).$$

On peut donc faire le choix suivant des φ_i:

$$\varphi_i(X_i(t)) = X_i^2(t), \tag{2.4.13}$$

ce qui revient à prendre: $\alpha = 2, \alpha_i = 0 \quad$ pour $\quad i = 1,2,3, \quad$ et donc $\quad \alpha' = 0$.
Donc,

$$\begin{aligned}
\varphi_i'(x_i) &= 2x_i, \quad c_i = 1, \quad k_i = 0,\\
\lambda(z) &= \frac{1}{2}\sum_i 4x_i^2\\
&= 2\sum_i x_i^2.
\end{aligned}$$

On a d'autre part: $\quad f_i(x_i)\varphi_i'(x_i) = -\,2\beta x_i^2 + \gamma_i - 1,$

et d'après (2.3.24) : $\quad f_i(x_i)\varphi_i'(x_i) = k\varphi_i(x_i) - \frac{1}{2}c_i x_i^{k_i}\varphi_i''(x_i) + \frac{1}{2}\delta_i$

$$= kx_i^2 - 1 + \frac{1}{2}\delta_i.$$

D'où: $k = -2\beta$ et $\delta_i = 2\gamma_i$. Donc:

$$\begin{aligned}
H &= \sum_i \frac{1}{2}\delta_i\\
&= \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3.
\end{aligned}$$

L'équation (2.3.14) est donc:

$$2zN''(z,a) + (-2\beta z + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)N'(z,a) = aN(z,a). \tag{2.4.14}$$

Sa solution générale est:

$$N(z;a)) = c_1\overline{N}_1(z;a) + c_2\overline{N}_2(z;a), \tag{2.4.15}$$

où:

$$\overline{N}_1(z;a) = hypergeom(\frac{a}{2\beta}, \frac{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}{2}, \beta z)$$

et $\quad \overline{N}_2(z;a) = (\beta z)^{-\frac{a}{2\beta}} hypergeom(\frac{a}{2\beta}, \frac{-2\beta - a + \beta(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)}{-2\beta}, [\ldots], -\frac{1}{\beta z}).$

Soit:

$$\mathcal{C}_1 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r_1^2\},$$

$$\mathcal{C}_2 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r_2^2\} \quad \text{et}$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2.$$

On a les conditions suivantes:

$$N({r_1}^2,a) = 1,$$

$$N({r_2}^2,a) = 1,$$

$$r_1 < r_2,$$

et $\quad X_1(0) = x_0\,, X_2(0) = y_0\,, X_3(0) = z_0,$

On a aussi:

$$T_(x_1,x_2,x_3) = \inf\{t \geq 0 : (X_1(t),X_2(t),X_3(t)) \in \mathcal{C} | (X_1(0),X_2(0),X_3(0)) = (x_0,y_0,z_0)\}.$$

La solution du problème est donc,

$$N(z;a)) = c_1\overline{N}_1(z;a) + c_2\overline{N}_2(z;a),$$

où:

$$c_1 = \frac{b_2 - b_1}{b_2a_1 - b_1a_2}\,, c_2 = \frac{a_1 - a_2}{b_2a_1 - b_1a_2},$$

$$a_1 = hypergeom(\frac{a}{2\beta},\frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}{2},\beta r_1^2),$$

$$b_1 = (\beta r_1^2)^{-\frac{a}{2\beta}} hypergeom(\frac{a}{2\beta},\frac{-2\beta - a + \beta H}{-2\beta},[\ldots], -\frac{1}{\beta r_1^2}),$$

$$a_2 = hypergeom(\frac{a}{2\beta},\frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}{2},\beta r_2^2) \quad \text{et}$$

et $\quad b_2 = (\beta r_2^2)^{-\frac{a}{2\beta}} hyp(\frac{a}{2\beta},\frac{-2\beta - a + \beta H}{-2\beta},[\ldots], -\frac{1}{\beta r_2^2}).$

2.4.2. Exemple 2

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= \sqrt{\frac{1}{2}}dW_1(t), \\ dX_2(t) &= \sqrt{\frac{1}{2}}dW_2(t), \\ dX_3(t) &= \mu dt + \sqrt{2X_3(t)}dW_3(t),\ \ \mu > 0. \end{aligned} \tag{2.4.16}$$

Ici, seulement la troisième équation pose problème, du fait qu'on n'est pas sûr, a priori, que le processus $X(t)$ ne va pas changer de signe. Il faut s'assurer que cela arrive avec une probabilité nulle. On va supposer que $X_3(0) > 0$. On va suivre le même raisonnement que dans le premier exemple. On trouve, en abrégeant et en utilisant les mêmes notations, que:

$$X_3(t \wedge (\tau_I)) - X_3(0) = \mu \int_0^{t\wedge\tau_I} ds + \int_0^{t\wedge\tau_I} \sqrt{2X_3(s)}dW_3(s). \tag{2.4.17}$$

Donc:

$$E[X_3(t \wedge \tau_I) - X_3(0)] = \mu E[\int_0^{t\wedge\tau_I} ds]. \tag{2.4.18}$$

Ainsi, en majorant le premier membre de l'équation précédente on obtient: $c \geq \mu E(t \wedge \tau_I)$ et donc en faisant tendre t vers ∞, on obtient: $c \geq \mu E(\tau_I)$. Il s'ensuit que: $\frac{c}{\mu} \geq E(t \wedge \tau_I)$, ce qui montre que $E(\tau_I) < \infty$. Pour appliquer la formule d'Ito, on est amené à résoudre l'équation différentielle suivante:

$$h^{'}(y) + \frac{1}{2}2yh^{''}(y) = 0, \tag{2.4.19}$$

ou encore:

$$h^{'}(y) + yh^{''}(y) = 0. \tag{2.4.20}$$

Une solution est $h(y) = \ln(y)$.

En suivant le même raisonnement que dans le premier exemple, on touve:

$$P(\tau_c < \tau_a) = \frac{h(x) - h(a)}{h(c) - h(a)} \tag{2.4.21}$$

et donc:

$$P(\tau_c < \tau_a) = \frac{\ln(x) - \ln(a)}{\ln(c) - \ln(a)}. \tag{2.4.22}$$

D'où: $\lim_{a \downarrow 0} P(\tau_c < \tau_a) = 1$.

On peut donc conclure que le système (2.4.16) admet une solution unique. On passe maintenant au calcul de $N(z)$. On a les données suivantes qui sont déduites du système (2.4.16) et des calculs ultérieurs:

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= 0, \quad c_1 = \frac{1}{2}, \quad k_1 = 0 \\ f_2(x_2) &= 0, \quad c_2 = \frac{1}{2}, \quad k_2 = 0 \\ f_3(x_3) &= \mu, c_3 = 2, \quad k_3 = 1 \end{aligned} \tag{2.4.23}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1) &= \alpha X_1^2 + \alpha_1 X_1, \\ \varphi_2(x_2) &= \alpha X_2^2 + \alpha_2 X_2, \\ \varphi_3(x_3) &= \alpha X_3 + 2\alpha_3 X_3^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{2.4.24}$$

<u>Cacul des paramètres</u>

Dans les équations (2.4.24), on fait le choix suivant:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1) &= x_1^2, \\ \varphi_2(x_2) &= x_2^2, \\ \varphi_3(x_3) &= x_3. \end{aligned}$$

Ceci revient à prendre: $\alpha = 1, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$, et donc $\alpha' = 0$, puisque $\alpha' = \frac{1}{2}\sum_{k_i \neq 2} c_i \alpha_i^2$. On se rappelle les relations (2.3.21) et (2.3.24) (on s'intéresse ici au cas: $k_i \neq 2$).

On a:

$$\begin{aligned} 2f_i(x_i)\varphi_i'(x_i) &= 2k\varphi_i(x_i) - c_i x_i^{k_i} \varphi_i''(x_i) + \delta_i \\ &= \frac{4k\alpha x_i^{2-k_i}}{(2-k_i)^2} - \frac{2\alpha(1-k_i)}{2-k_i} + \delta_i. \end{aligned}$$

Donc en considérant le cas $i = 1$ dans ces relations, on s'aperçoit que $k = 0$.

Maintenant, revenons à l'équation (2.3.26), qui est la suivante:

$$f_i(x_i) = \frac{8k\alpha {x_i}^{2-k_i} + 8k\alpha_i c_i(2-k_i){x_i}^{1-\frac{k_i}{2}} + \alpha_i k_i {c_i}^2(2-k_i)^2 {x_i}^{\frac{k_i}{2}-1} + \Gamma_i}{8\alpha(2-k_i){x_i}^{1-k_i} + 4\alpha_i c_i(2-k_i)^2 {x_i}^{-\frac{k_i}{2}}}.$$

Etant donné que: $f_i(X_3) = 0 \quad \text{pour} \quad i = 1,2$

$k = 0 \quad \text{et} \quad \alpha_i = 0,$

on a: $\Gamma_i = 0 \quad \text{pour} \quad i = 1,2.$

D'autre part comme: $f_3(x_3) = \mu$ et $k_3 = 1$, on a: $\Gamma_3 = 8\mu$.

donc: $\delta_3 = 2\mu$.

Ceci d'après la relation (2.3.27). Quant au paramètre H, on peut utiliser la relation $H = \sum_i \frac{1}{2}\delta_i$, ce qui donne $H = \mu$. Ces résultats nous permettent de poser l'équation:

$$zN''(z,a) + \mu N'(z,a) = aN(z,a). \tag{2.4.25}$$

La solution générale de cette équation est:

$$N(z;a) = C_1 B_1(z;a) + C_2 B_2(z;a), \tag{2.4.26}$$

où:

$$B_1(z;a) = z^{(1/2-1/2\mu)} BesselY(-1+\mu, 2(-a)^{1/2} z^{1/2})$$

$$B_2(z;a) = z^{(1/2-1/2\mu)} BesselJ(-1+\mu, 2(-a)^{1/2} z^{1/2}).$$

On pose:

$$\mathcal{C}_1 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3 = R_1\}$$

$$\mathcal{C}_2 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3 = R_2\}$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2.$$

Ici le domaine D est l'ensemble ouvert compris entre $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et le plan (xoy) et

$$T_{(x_1,x_2,x_3)} = \inf\{t \geq 0 : (X_1(t),X_2(t),X_3(t)) \in \mathcal{C} | X_1(0) = x_1, X_2(0) = x_2, X_3(0) = x_3\},$$

$z_0 > 0$.

On a les conditions:

$$N(R_1,a) = N(R_2,a) = 1$$

La solution du problème est alors $N(z,a)$ donnée par (2.4.26) où

$$c_1 = \frac{b_2 - b_1}{b_2 a_1 - b_1 a_2},$$
$$c_2 = \frac{a_1 - a_2}{b_2 a_1 - b_1 a_2},$$

où

$$\begin{aligned}
a_1 &= R_1^{(1/2-1/2\mu)} BesselY(-1+\mu, 2(-a)^{1/2} z^{1/2}) \\
b_1 &= R_1^{(1/2-1/2\mu)} BesselJ(-1+\mu, 2(-a)^{1/2} z^{1/2}) \\
a_2 &= R_2^{(1/2-1/2\mu)} BesselY(-1+\mu, 2(-a)^{1/2} z^{1/2}) \\
b_2 &= R_2^{(1/2-1/2\mu)} BesselJ(-1+\mu, 2(-a)^{1/2} z^{1/2}).
\end{aligned}$$

Conclusion

On a pu déterminer la fonction génératrice des moments $M(x,a) = E[e^{-aT}]$ d'un processus stochastique admettant une différentielle stochastique du type (2.2.1).
L'étude faite nous permet de conclure que $M(x,a)$ est donnée par (2.3.31) dans le cas où $k \neq 0$ et par (2.3.32) si $k = 0$.

Ces résultats sont valables chaque fois que les f_i sont, d'une part, soit de la forme (2.3.26) (ce qui correspond à $k_i \neq 2$) soit de la forme (2.3.28) (ce qui correspond à $k_i = 2$) et d'autre part telles que l'équation (2.2.1) admette une solution unique afin que le théorème 2.3.1 puisse s'appliquer. Ceci est réalisé, en particulier, si les conditions du théorème 1.5.1 sont vérifiées par les coefficients $f_i(x_i)$ et $l_i x_i^{m_i}$ de la différentielle stochastique (2.2.1).

Il faut observer aussi que le domaine D doit pouvoir être complètement décrit en fonction de $z = z(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(x_1) + \cdots + \varphi_n(x_n)$ comme c'est le cas dans les exemples 1 et 2. Dans les cas exemples étudiés la frontière (ou le bord) du domaine dans lequel évolue le processus stochastique étudié était assez simple. Il faut adapter la variable de similitudes dans chaque cas, à la définition de la frontière du domaine.

Chapitre 3

CALCUL DE LA POSITION MOYENNE DE PREMIER PASSAGE

3.1. Introduction

Etant donné un processus $Z(t)$ ayant la différentielle stochastique:

$$dZ(t) = f[Z(t)]dt + v^{1/2}[Z(t)]dW(t) \tag{3.1.1}$$

où $W(t)$ est un mouvement brownien standard et $f(\cdot)$ et $v(\cdot)$ sont tels que $Z(t)$ soit un processus de diffusion. Soit:

$$\tau(z) := \inf\{t \geq 0 : Z(t) = d_1 \text{ ou } d_2 | Z(0) = z\}$$

$(z \in [d_1, d_2]), 0 < d_1 < d_2$. On va supposer qu'il existe $K > 0$ tel que $E[\tau(z)] < K$ et $\dfrac{\partial E[\tau(z)]}{\partial z} < K$.

On se propose de calculer les moments de $X[\tau(z)]$ où $X(t)$ est tel que $\ddot{X}(t) = Z(t)$. C'est-à-dire que $X(t)$ est maintenant l'intégrale double d'un processus de diffusion de dimension 1. On a donc le système:

$$\begin{aligned} dX(t) &= Y(t)dt, \\ dY(t) &= Z(t)dt, \\ dZ(t) &= f[Z(t)]dt + v^{1/2}[Z(t)]dW(t). \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Dans la section 2, on montrera que $E\{X^k(\tau(z))\}$ peut être obtenue en résolvant une équation différentielle ordinaire, assujettie à une condition au bord appropriée.

La moyenne de $X(\tau(z))$ est calculée explicitement dans la section 3 pour certains processus de diffusion importants $Z(t)$, tels que le processus de Wiener et le processus de Bessel.

La section 4 sera consacrée au calcul de la fonction caractéristique de $X[\tau(y,z)]$ quand $\dot{X}(t) = \phi(Y(t),Z(t))$ et $\dot{Y}(t) = \psi(Y(t),Z(t))$, où la variable aléatoire $\tau(y,z)$ est le premier temps de passage pour le processus $(Y(t),Z(t))$.

Dans la section 5, le problème initial est généralisé au cas où $\frac{d^n X(t)}{dt^n} = Z(t)$. Finalement, on conclura par des remarques dans la section 6.

3.2. Espérance de $X^k(\tau(z))$

On considère le système d'équations différentielles stochastiques (3.1.2). Soit $m(x,y,z) = E[X(\tau(z))]$. $m(x,y,z)$ vérifie alors l'équation suivante:

$$\begin{aligned} &\frac{v}{2} m_{zz} + f m_z + z m_y + y m_x = 0, \\ \text{avec:}\quad & m(x,y,z) = x \quad \text{si} \quad z = d_1 \quad \text{ou} \quad d_2. \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

En effet, l'instant de premier passage $\tau(z)$ du processus stochastique $Z(t)$ peut être considéré comme étant l'instant de premier passage du processus stochastique $(X(t),Y(t),Z(t))$ où le domaine D est $\mathbb{R}^2 \times [d_1,d_2]$ et $\partial D = \mathbb{R}^2 \times \{d_1,d_2\}$; ensuite, pour appliquer le théorème (2.3.1) on peut prendre $\psi((x,y,z)) = x$ et $\lambda = 0$. On obtient:

$$\begin{aligned} & \psi(x,y,d_k) = x \quad \text{pour} \quad k = 1,2 \\ \text{et} \quad & v_0(x,y,z) = E[\psi(X(\tau(x)),Y(\tau(y)),Z(\tau(z)))] \\ & \qquad = E[X(\tau(x))]. \end{aligned}$$

D'autre part, considérons l'EDP $-Lu(x) = 0$, où:

$$Lu(x) = \sum_{k=1}^{m} a_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} \sum_{k=1}^{m} b_{ki}(x) b_{kj}(x), \tag{3.2.2}$$

avec $m = 3$.

Ici on a:

$$\begin{aligned} & a_1(t) = Y(t), \\ & a_2(t) = Z(t), \\ & a_3(t) = f(Z(t)), \\ & b_{1i} = 0 \quad \text{et} \quad b_{2i} = 0 \quad \text{pour} \quad i = 1,2,3 \\ & b_{31} = b_{32} = 0, \\ & b_{33} = v^{\frac{1}{2}} Z(t). \end{aligned}$$

Alors, d'après le théorème (2.3.1), si $u(x)$ est une fonction définie, continue et bornée sur l'adhérence de D et de classe C^2 sur D et est solution de l'équation (3.2.1), qui n'est autre que: $-Lu(x) = 0$, et si: $u(x,y,z) = x$ pour $x = d_1$ ou d_2, alors $u(x) = E[X(\tau(x))]$, c'est-à-dire $u(x) = m(x,y,z)$.

Remarque 3.2.1. *Dans la démonstration précédente, si on remplace $m(x,y,z;a)$ et $\psi(x,y,z)$ respectivement par:*

$$m^k(x,y,z;a) := E_{(x,y,z)}[X^k(\tau(z))]$$

$$\text{et} \qquad \psi(x,y,z) = x^k,$$

on arrivera à la conclusion:

$$\frac{v}{2}{m^k}_{zz} + f{m^k}_z + z{m^k}_y + y{m^k}_x = 0 \tag{3.2.3}$$

avec condition au bord:

$$m^k(x,y,z) = x^k \quad si\ z = d_1 ou\ d_2.$$

Il résulte du système (3.1.2) que:

$$\begin{aligned} X(t) &= x + \int_0^t Y(s)\,ds = x + \int_0^t \left[y + \int_0^s Z(\sigma)\,d\sigma\right] ds \\ &= x + yt + \int_0^t \int_0^s Z(\sigma)\,d\sigma ds, \end{aligned}$$

de telle sorte que:

$$X(\tau(z)) = x + y\tau(z) + \int_0^{\tau(z)} \int_0^s Z(\sigma)\,d\sigma ds.$$

Puisque $\tau(z)$ ne dépend ni de x ni de y, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} m_x &= 1 \\ \text{et} \quad m_y &= E(\tau(z)). \end{aligned}$$

Il faut observer que cela a un sens seulement si $E(\tau(z)) < \infty$.

On a donc la proposition suivante:

Proposition 3.2.1. *Si l'on suppose que les moments de $X(\tau(z))$ existent, alors la moyenne $m(x,y,z)$ de $X(\tau(z))$ peut être obtenue en résolvant l'équation différentielle ordinaire (E.D.O.)*

$$\frac{v}{2}m_{zz} + fm_z + zE(\tau(z)) + y = 0, \tag{3.2.4}$$

assujettie aux conditions au bord:

$$m(x,y,z) = x \quad si \quad z = d_1 \quad ou \quad d_2. \tag{3.2.5}$$

Remarque 3.2.2. *1. On suppose que l'espérance $E[\tau(z)]$ existe. Cela est réalisé s'il existe une constante $\epsilon > 0$ tel que $f(z) \geq \epsilon$ ou $f(z) \leq -\epsilon$ pour tout z.*
En effet:

$$Z(t \wedge \tau_I)) - Z(0) = \int_0^{t\wedge\tau} f(Z(s))\,ds + \int_0^{t\wedge\tau} v^{1/2}[Z(s)]\,dW(s). \tag{3.2.6}$$

Donc du fait que pour deux nombres réels quelconques a et b, on peut écrire:

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

$$|a+b| \geq |a| - |b|,$$

donc, en prenant:

$$a = \int_0^{t\wedge\tau} f(Z(s))\,ds$$

et

$$b = \int_0^{t\wedge\tau} v^{1/2} Z(s)\,dW(s)$$

et en remarquant que:

$$E[\int_0^{t\wedge\tau} v^{1/2} Z(s)\,dW(s)] = 0,$$

on a:

$$E[|Z(t\wedge\tau)-Z(0)|]=E[|\int_0^{t\wedge\tau} f(Z(s))\,ds|].$$

De plus $|Z(t\wedge\tau)-Z(0)|\leq|d_2-d_1|$*; donc:* $|d_2-d_1|\geq\epsilon E(t\wedge\tau)$ *et ainsi en faisant tendre* $t\to\infty$ *on obtient:* $|d_2-d_1|\geq\epsilon E(\tau)$*. Ce qui montre bien que* $E(\tau)<\infty$*.*

2. La variable y *est constante dans l'E.D.O. (3.2.4).*

3. La condition au bord (3.2.5) s'ensuit immédiatement du fait que

$$\tau(z)=0 \quad si \quad z=d_1 \quad ou \quad d_2.$$

On considère maintenant

$$m^k(x,y,z):=E[X^k(\tau(z))] \qquad \text{pour} \quad k=1,2,\ldots$$

On a:

$$m^k(x,y,z)=E\left[\left\{x+y\tau(z)+\int_0^{\tau(z)}\int_0^s Z(\sigma)\,d\sigma ds\right\}^k\right].$$

De plus on peut interchanger l'espérance et la dérivation par rapport à x et par rapport à y. Pour le voir, considérons d'abord la dérivation par rapport à x: $m^k(x,y,z)$ peut être exprimée, après avoir développé la puissance $k$ième $\{\ldots\}^k$ et utilisé la linéarité de l'espérance, comme un polynôme en x, les termes $y\tau(z)$ et $\int_0^{\tau(z)}\int_0^s Z(\sigma)$ étant indépendants de x.

Le même raisonnement se fait pour la dérivation par rapport à y. On a donc:

$$m_x^2=2m^1=2m \quad \text{et} \quad m_y^2=2E[\tau(z)X(\tau(z))].$$

De façon générale, on a:

$$m_x^k=km^{k-1} \quad \text{et} \quad m_y^k=kE[\tau(z)X^{k-1}\tau(z)]$$

pour $k = 1, 2, \ldots$. On peut maintenant énoncer la proposition suivante:

Proposition 3.2.2. *Si $E[X^k(\tau(z))]$ et $E(\tau(z))$ existent pour $k = 1, 2, \ldots$, alors $m^k(x,y,z) := E[X^k(\tau(z))]$ est solution de l'E.D.O.:*

$$\frac{v}{2} m^k_{zz} + f m^k_z + kzE[\tau(z)X^{k-1}(\tau(z))] + kym^{k-1} = 0, \tag{3.2.7}$$

assujettie à la condition au bord:

$$m^k(x,y,z) = x^k \quad si\ z = d_1 \quad ou \quad d_2, \quad pour \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3.2.8}$$

Remarque 3.2.3. *Du fait que $m^k_x = km^{k-1}$, l'équation (3.2.3) devient:*

$$\frac{v}{2} m^k_{zz} + f m^k_z + z m^k_y + kym^{k-1} = 0, \tag{3.2.9}$$

avec les mêmes conditions au bord. Ceci ramène donc l'équation (3.2.3) à une E.D.P. à deux variables et donc plus facile à résoudre.

Les variables aléatoires $X^{k-1}(\tau(z))$ et $\tau(z)$ n'étant pas indépendantes, on est conduit à résoudre l'équation (3.2.9) et utiliser la solution $m^k(x,y,z)$ pour trouver $m^{k+1}(x,y,z)$ pour $k = 1, 2, \ldots$; ceci, bien sûr, après avoir calculé $E[\tau(z)]$.

Dans la prochaine section, la moyenne de $X(\tau(z))$ est calculée explicitement dans des cas importants.

3.3. Cas particuliers

Pour obtenir la moyenne de $X(\tau(z))$ en utilisant la proposition 3.2.1, il faut connaître la valeur de $E(\tau(z))$. La fonction $e(z) := E(\tau(z))$ satisfait l'E.D.O.: $\frac{v}{2}e''(z) + fe'(z) = -1$ assujettie à la condition au bord: $e(d_1) = e(d_2) = 0$. En effet, la fonction $M((x,y,z); a) := E[e^{-a\tau(z)}]$ satisfait à l'équation: $Lu = au$.

Ici:

$$Lu = yu_x + zu_y + f(z)u_z + \frac{1}{2}v(z)u_{x_i x_i}.$$

On a donc:

$$yu_x + zu_y + f(z)u_z + \frac{1}{2}v(z)u_{x_i x_i} = au. \tag{3.3.1}$$

Etant donné que M ne dépend ni de x ni de y, on a $M_x = 0$ et $M_y = 0$.

Donc l'équation (3.3.1) devient l'équation suivante lorsque u vérifie aussi les conditions $u_x = 0$ et $u_y = 0$:

$$\frac{1}{2}v(z)u_{x_i x_i} + f(z)u_z - au = 0. \tag{3.3.2}$$

On vérifie facilement que cette dernière équation admet une solution qui, avec les conditions au bord n'est autre que $M(z;a)$ (d'après le théorème (2.3.1)). On a ainsi:

$$\frac{1}{2}v(z)M_{x_i x_i} + f(z)M_z - aM = 0.$$

Dérivons cette expression par rapport à a.

On a d'une part:

$$\frac{\partial(LM)}{\partial a} = L\frac{\partial M}{\partial a}$$

et d'autre part

$$\frac{\partial M}{\partial a} = E(-\tau(z)e^{-a\tau(z)}).$$

Donc:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(aM)}{\partial a} &= \frac{\partial LM}{\partial a} \\
&= L\frac{\partial M}{\partial a} \\
&= L[E(-\tau(z)e^{-a\tau(z)})],
\end{aligned}$$

et par suite:

$$E(e^{-a\tau(z)}) + aE[-\tau(z)e^{-a\tau(z)}] = L(E[-\tau(z)e^{-a\tau(z)}]).$$

Donc si on prend $a = 0$ dans cette dernière expression, on obtient:

$$\begin{aligned} 1 &= -L[E(\tau(z))] \\ \text{ou encore} \quad L[E(\tau(z))] &= -1. \\ \text{c'est-à-dire} \quad ye_x + ze_y + f(z)e_z + \frac{1}{2}v(z)e_{zz} &= -1 \end{aligned}$$

Mais étant donné que $e(z) = E(\tau(z))$ ne dépend ni de x ni de y, on a l'équation:

$$\frac{v}{2}e''(z) + fe'(z) = -1,$$

assujettie à la condition au bord:

$$e(d_1) = e(d_2) = 0.$$

Application

■ Cas où $Z(t)$ est un processus de Wiener

Alors $v(z) \equiv \sigma^2$ et $f(z) \equiv \mu$. On résout l'E.D.O. :

$$\frac{\sigma^2}{2}e''(z) + \mu e'(z) = -1 \tag{3.3.3}$$

assujettie à :

$$e(d_1) = e(d_2) = 0. \tag{3.3.4}$$

On trouve que:

$$e(z) = -\frac{z}{\mu} + \frac{d_2 e^{2\mu d_2/\sigma^2} - d_1 e^{2\mu d_1/\sigma^2} - (d_2 - d_1)e^{2\mu(d_1+d_2-z)/\sigma^2}}{\mu(e^{2\mu d_2/\sigma^2} - e^{2\mu d_1/\sigma^2})} \tag{3.3.5}$$

pour $d_1 \le z \le d_2$.

Remarque 3.3.1. *Cette solution est valide pour $\mu \neq 0$. Pour le cas où $\mu = 0$, la solution s'obtient en résolvant l'E.D.O. (voir (3.3.3)) :*

$$\frac{\sigma^2}{2} e''(z) = -1,$$

assujettie à la condition au bord (3.3.4), qui provient de l'équation (3.3.3). On trouve dans ce cas que:

$$e(z) = \frac{(d_1 - z)(z - d_2)}{\sigma^2}. \tag{3.3.6}$$

Ensuite, on doit résoudre l'E.D.O. (voir (3.2.4)):

$$\frac{\sigma^2}{2} m''(z) + \mu m'(z) + z e(z) + y = 0. \tag{3.3.7}$$

Dans le cas où $\mu \neq 0$, on trouve que cette équation prend la forme suivante:

$$\frac{\sigma^2}{2} m''(z) + \mu m'(z) - \frac{1}{\mu} z^2 + Dz + Kze^{-2\mu z/\sigma^2} + y = 0,$$

où

$$D := \frac{d_2 e^{2\mu d_2/\sigma^2} - d_1 e^{2\mu d_1/\sigma^2}}{\mu(e^{2\mu d_2/\sigma^2} - e^{2\mu d_1/\sigma^2})}$$

et

$$K := \frac{(d_1 - d_2) e^{2\mu(d_1 + d_2)/\sigma^2}}{\mu(e^{2\mu d_2/\sigma^2} - e^{2\mu d_1/\sigma^2})}.$$

Sa solution générale est la suivante:

$$\begin{aligned} m(z) = \frac{1}{6\mu^3}[3\mu(D + Ke^{-2\mu z/\sigma^2})(\sigma^2 - \mu z) + 4(\sigma^4/\mu) - 6\mu^2 y \\ - 3\sigma^2 z + 2\mu\sigma^2 z^2]z + c_1 e^{-2\mu z/\sigma^2} + c_2, \end{aligned}$$

où les constantes c_1 et c_2 sont déterminées de façon unique par la condition au bord (3.2.5).

Dans le cas spécial où $\mu = 0$, l'équation (3.3.7) prend la forme:

$$\frac{\sigma^2}{2}m''(z) - \frac{1}{\sigma^2}z^3 + \frac{(d_1+d_2)}{\sigma^2}z^2 - \frac{d_1 d_2}{\sigma^2}z + y = 0.$$

On trouve que:

$$\begin{aligned}
m(z) &= x + y\frac{(d_2 - z)(z - d_1)}{\sigma^2} \\
&+ \frac{1}{30\sigma^4}[d_1 d_2(-2d_1^3 + 3d_1^2 d_2 + 3d_1 d_2^2 - 2d_2^3) \\
&+ (2d_1^4 - 3d_1^3 d_2 - 3d_1^2 d_2^2 - 3d_1 d_2^3 + 2d_2^4)z \\
&+ 10 d_1 d_2 z^3 - 5(d_1 + d_2)z^4 + 3z^5].
\end{aligned}$$

Remarque 3.3.2. ■ *On a considéré m comme fonction de z seulement, ceci est pour alléger les notations en tenant compte du fait que la variable y se comporte comme une constante dans l'équation (3.2.4).*

■ *On peut considérer ensuite le cas où le processus de diffusion $Z(t)$ est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Malheureusement, il s'avère que la solution obtenue est très compliquée. Toutefois, on peut obtenir la valeur de la fonction $m(z)$, si besoin est, en résolvant les équation différentielles ordinaires appropriées en utilisant un des nombreux logiciels sur le marché.*

■ Cas où $Z(t)$ est un mouvement brownien géométrique

On suppose que $Z(t)$ est un mouvement brownien géométrique de paramètres infinitésimaux $\mu_z = z$ et $\sigma_z^2 = z^2$.

On aura à résoudre l'E.D.O. :

$$\frac{z^2}{2}e''(z) + ze'(z) = -1.$$

Remarque 3.3.3. *Le mouvement brownien géométrique $Z(t)$ peut être écrit sous la forme: $Z(t) = e^{B(t)}$, où $B(t)$ est un processus de Wiener.*

Si les paramèteres infinitésimaux de $B(t)$ sont μ et σ^2, on a ainsi (voir [4] *p.175):*

$$\mu_z = (\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)z \quad et \quad \sigma_z^2 = \sigma^2 z^2.$$

On considère alors le cas particulier où $\sigma^2 = 1$ et $\mu = 1/2$. De plus, la représentation $Z(t) = e^{B(t)}$ implique que l'origine est une frontière inaccessible pour le mouvement brownien géométrique. On doit donc supposer d_1 et d_2 strictement positifs. Ici, on supposera que $d_2 > d_1 > 0$.

En utilisant les conditions à la frontière (3.3.4), on obtient:

$$e(z) = \frac{2}{d_2 - d_1}\left[d_2 \ln(d_2) - d_1 \ln(d_1) + \frac{d_1 d_2}{z}(\ln(d_2) - \ln(d_1)) - (d_2 - d_1)\ln(z)\right].$$

Il s'ensuit que la fonction $m(z)$ satisfait à l' E.D.O.:

$$\frac{z^2}{2}m''(z) + zm'(z) - 2z\ln(z) + Kz + H = 0,$$

où

$$K := \frac{2}{d_2 - d_1}[d_2 \ln(d_2) - d_1 \ln(d_1)]$$

et

$$H := \frac{2}{d_2 - d_1} d_1 d_2 \ln(d_2/d_1) + y.$$

Sa solution générale est donnée par:

$$m(z) = 2\ln(z)(z - H) - (3 + K)z - \frac{c_1}{z} + c_2.$$

En appliquant la condition à la frontière (3.2.5), on obtient:

$$\begin{aligned} m(z) = x &+ (3 + K)[d_2 + d_1 - z + \frac{d_1 d_2}{z}] + 2\ln(z)(z - H) \\ &+ \frac{2d_1 \ln(d_1)(d_1 - H) - 2d_2 \ln(d_2)(d_2 - H)}{d_2 - d_1} \\ &+ \frac{2d_1 d_2(\ln(d_1)(d_1 - H) - \ln(d_2)(d_2 - H)}{(d_2 - d_1)z}. \end{aligned}$$

- Cas où $Z(t)$ est un processus de Bessel

On considère finalement le cas où $Z(t)$ est un processus de Bessel. L'équation différentielle stochastique (3.1.1) prend alors la forme:

$$dZ(t) = \frac{\alpha - 1}{2Z(t)}dt + dW(t), \tag{3.3.8}$$

où α est un paramètre non négatif.

Remarque 3.3.4. *D'après la remarque (2.4.1), si l'on suppose que $\alpha > 2$ et $Z(0) = z$ est non négatif, alors l'équation différentielle stochastique (3.3.8) admet une solution unique. Ici, on suppose que $d_2 > d_1 > 0$; donc, l'existence et l'unicité de la solution est garantie par le théorème (1.5.1). On peut donc prendre n'importe quel nombre réel $\alpha > 2$.*

En résolvant d'abord l'E.D.O.

$$e''(z) + \frac{\alpha - 1}{2z}e'(z) = -1,$$

avec

$$e(d_1) = e(d_2) = 0,$$

on obtient:

si $\alpha \neq 3$,

$$e(z) = -\frac{z^2}{\alpha+1} + \frac{(d_1 d_2)^{\alpha/2}(d_1^2 - d_2^2)}{\Delta} z^{(3-\alpha)/2} + \frac{(d_1 d_2)^{3/2}(d_2^{(1+\alpha)/2} - d_2^{(1+\alpha)/2})}{\Delta}$$
$$\text{où} \quad \Delta := (\alpha+1)(d_1^{3/2} d_2^{\alpha/2} - d_2^{3/2} d_1^{\alpha/2}).$$

Si $\alpha = 3$, on a:

$$e(z) = -\frac{z^2}{4} + \frac{(d_2^2 - d_1^2)}{\ln(d_2/d_1)} \frac{\ln(z)}{4} - \frac{d_2^2 \ln(d_1) - d_1^2 \ln(d_2)}{4\ln(d_2/d_1)}.$$

Ensuite, si $\alpha \neq 3$ on doit résoudre:

$$m''(z) + \frac{\alpha - 1}{2z} m'(z) - \frac{z^3}{\alpha + 1} + K(\alpha) z^B + H(\alpha) z + y = 0,$$

où

$$K(\alpha) := \frac{(d_1 d_2)^{\alpha/2}(d_1^2 - d_2^2)}{\Delta},$$

$$H(\alpha) := \frac{(d_1 d_2)^{3/2}(d_2^{(1+\alpha)/2} - d_1^{(1+\alpha)/2})}{\Delta}$$

et

$$B := 2 + \frac{1 - \alpha}{2}.$$

Si $\alpha \neq 9$, on trouve que:

$$\begin{aligned} m(z) = & -\frac{y}{1+\alpha} z^2 - \frac{2H(\alpha)}{3(3+\alpha)} z^3 + \frac{2}{5(1+\alpha)(7+\alpha)} z^5 \\ & - \frac{2K(\alpha)}{3(9-\alpha)} z^{B+2} + \frac{2c_1}{3-\alpha} z^{B-1} + c_2, \end{aligned}$$

tandis que si $\alpha = 9$ on obtient:

$$m(z) = -\frac{y}{10} z^2 - \frac{H(9)}{18} z^3 + \frac{1}{400} z^5 - \frac{K(9)}{3} \ln(z) - \frac{c_1}{3} z^{-3} + c_2.$$

Encore une fois, c_1 et c_2 sont tels que la condition à (3.2.5) est satisfaite.

Finalement, quand $\alpha = 3$ on a:

$$m''(z) + \frac{1}{z} m'(z) - \frac{1}{4} z^3 + Dz \ln(z) + Fz + y = 0,$$

où

$$D := \frac{d_2^2 - d_1^2}{4 \ln(d_2/d_1)}$$

et

$$F := \frac{d_1^2 \ln(d_2) - d_2^2 \ln(d_1)}{4 \ln(d_2/d_1)}.$$

On obtient:

$$m(z) = -\frac{y}{4}z^2 + \frac{(2D-3F)}{27}z^3 + \frac{1}{100}z^5 - \frac{D}{9}z^3\ln(z) + c_1\ln(z) + c_2$$

où c_1 et c_2 sont déterminés de manière unique à partir des conditions à la frontière (3.2.5).

3.4. Fonction caractéristique de $X[\tau(y,z)]$

Dans cette section, le système d'équations différentielles stochastiques (3.1.2) et la définition du premier temps de passage $\tau(z)$ seront généralisés, et le problème de la détermination de la fonction caractéristique de $X(\tau)$ sera considéré.

On suppose maintenant que le processus tridimensionnel $(X(t),Y(t),Z(t))$ est défini par le système d'équations différentielles stochastiques

$$\begin{aligned} dX(t) &= \phi(Y(t),Z(t))dt, \\ dY(t) &= \psi(Y(t),Z(t))dt, \\ dZ(t) &= f[Z(t)]dt + v[Z(t)]dW(t), \end{aligned}$$

où ψ ne dépend pas seulement de $Y(t)$.

D'autre part, soit:

$$\tau(y,z) := \inf\{t \geq 0 : (Y(t),Z(t)) \in \partial D | Y(0) = y, Z(0) = z\},$$

On va supposer qu'il existe $K > 0$ tel que $E[\tau(y,z)] < K$ et $\dfrac{\partial E[\tau(y,z)]}{\partial z} < K$ et que le sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$ est tel que le premier temps de passage τ est bien défini. On utilise la même notation $C(x,y,z;a)$ que dans la section 1 pour représenter l'espérance mathématique $E_{(x,y,z)}[e^{iaX(\tau(y,z))}]$.

La fonction caractéristique C satisfait maintenant à l'équation inverse de Kolmogorov:

$$\frac{v^2}{2}C_{zz} + fC_z + \psi C_y + \phi C_x = 0 \tag{3.4.1}$$

et est assujettie à la condition au bord:

$$C(x,y,z;a) = e^{iax} \quad \text{si} \quad (y,z) \in \partial D.$$

Preuve:

Par analogie avec ce qu'on a fait auparavant en vue de l'application du théorème (2.3.1) et de sa remarque, on peut procéder comme suit: l'instant de premier passage $\tau(z)$ du processus stochastique $(Y(t),Z(t))$ peut être considéré comme étant l'instant de premier passage du processus stochastique $(X(t),Y(t),Z(t))$ où le domaine G est:

$$G = \mathbb{R} \times D$$

et
$$\partial G = \{(x,y,z) | (y,z) \in \partial D\}.$$

Ensuite on prend $\psi((x,y,z)) = e^{iax}$ et $\lambda = 0$. On obtient que si $(x,y,z) \in \partial G$ alors:

$$\begin{aligned} \psi(x,y,z) &= e^{iax} \\ \text{et} \quad v_0(x,y,z) &= E[\psi(X(\tau(y,z)),Y(\tau(y,z)),Z(\tau(y,z)))] \\ &= E[e^{iaX(\tau(y,z))}] \\ &= e^{iax} \\ &= \psi(x,y,z). \end{aligned}$$

Donc le théorème (2.3.1) s'applique et $v_0(x,y,z) = C(x,y,z;a)$ est solution de l'équation :

$$Lu(x) = 0$$

où:

$$Lu(x) = \frac{v^2(z)}{2} u_{zz} + f(z)u_z + \psi(y,z)u_y + \phi(y,z)u_x.$$

D'où:

$$\frac{v^2(z)}{2} C_{zz} + f(z)C_z + \psi(y,z)C_y + \phi(y,z)C_x = 0. \tag{3.4.2}$$

Puisque

$$X[\tau(y,z)] = x + \int_0^{\tau(y,z)} \phi(Y(t),Z(t))\ dt,$$

on peut écrire que:

$$C(x,y,z;a) = e^{iax} N(y,z;a), \tag{3.4.3}$$

où

$$N(y,z;a) = E_{(x,y,z)}\left[\exp\left(ia\int_0^{\tau(y,z)} \phi(Y(t),Z(t))\,dt\right)\right]. \tag{3.4.4}$$

Il s'ensuit que $C_x = iaC$ et l'on peut énoncer le lemme suivant:

Lemme 3.4.1. *La fonction caractéristique $C(x,y,z;a)$ satisfait à l'équation aux dérivées partielles (E.D.P.)*

$$\frac{v^2}{2}C_{zz} + fC_z + \psi C_y + ia\phi C = 0.$$

De plus, la fonction $N(y,z;a)$ définie dans (3.4.4) satisfait à la même E.D.P., assujettie à la condition au bord

$$N(y,z;a) = 1 \quad si\ (y,z) \in \partial D.$$

3.5. Exemple

Dans cette section, on calculera explicitement la fonction $C(x,y,z;a)$ dans un cas particulier.

On considère le système:

$$\begin{aligned} dX(t) &= [Y(t)/Z(t)]^2 dt, \\ dY(t) &= [Y^2(t)/Z(t)]dt, \\ dZ(t) &= Z(t)dt + Z(t)dW(t). \end{aligned}$$

Notons que $Z(t)$ est un mouvement brownien géométrique, de sorte que $Z(t) \neq 0, \quad \forall t$. Soit:

$$\tau(y,z) := \inf\{t \geq 0 : Y(t) = 0 | Y(0) = y < 0, Z(0) = z > 0\}.$$

Donc pour obtenir la fonction $C(x,y,z;a)$, on doit d'abord résoudre l'E.D.P.

$$\frac{z^2}{2}N_{zz} + zN_z + \frac{y^2}{z}N_y + ia\frac{y^2}{z^2}N = 0, \tag{3.5.1}$$

assujettie à:

$$N(0,z;a) = 1 \quad \forall z > 0. \tag{3.5.2}$$

Maintenant, pour résoudre l'E.D.P. (3.5.1), assujettie à (3.5.2), on peut utiliser la méthode des similitudes. En effet, si on définit $w := y/z$ et si l'on suppose que $N(y,z;a) = H(w;a)$, on trouve que la fonction H satisfait à l'E.D.O.:

$$\frac{1}{2}H'' + H' + iaH = 0. \tag{3.5.3}$$

De plus, la condition au bord devient $H(0;a) = 1$.

La solution générale de l'équation (3.5.3) est:

$$H(w;a) = c_1 \exp[iw(i - (-1+2ai)^{\frac{1}{2}})] + c_2 \exp[iw(i + (-1+2ai)^{\frac{1}{2}})]. \quad (3.5.4)$$

Or $\qquad (-1+2ai)^{\frac{1}{2}} = \alpha + i\beta$

avec $\qquad \alpha = 2^{\frac{1}{2}} a[1 + (1+4a^2)^{\frac{1}{2}}]^{-\frac{1}{2}}$

et $\qquad \beta = 2^{-\frac{1}{2}}[1 + (1+4a^2)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}.$

Donc:

$$H(w;a) = c_1 \exp[w(-1 - i\alpha + \beta)] + c_2 \exp[w(-1 + i\alpha + \beta)]. \quad (3.5.5)$$

Afin que toutes les conditions du théorème (2.3.1) soient vérifiées, il faut que la solution cherchée soit bornée. Or $w \leq 0$ (car $y \leq 0$) et $\beta > 1$; donc $-1+\beta > 0$ et $-1-\beta < 0$. Ceci conduit donc à prendre: $c_1 = 1$ et $c_2 = 0$. Finalement on a:

$$C(x,y,z;a) = \exp[w(-1 + \beta + i(ax - \alpha))]. \quad (3.5.6)$$

On peut aussi calculer la fonction génératrice des moments:

$$M(x,y,z;a) := E_{(x,y,z)}[e^{-aX(\tau(y,z))}],$$

où l'on supposera que le paramètere a est réel non négatif. En procédant comme ci-dessus, on trouve que la fonction M peut s'écrire sous la forme:

$$M(x,y,z;a) := e^{-ax} L(y,z;a),$$

où L satisfait à l'E.D.P.:

$$\frac{z^2}{2} L_{zz} + z L_z + \frac{y^2}{z} L_y - a\frac{y^2}{z^2} L = 0 \quad (3.5.7)$$

avec la condition au bord:

$$L(0,z;a) = 1, \quad \forall z > 0. \tag{3.5.8}$$

Maintenant, pour résoudre l'E.D.P. (3.5.7), assujettie à (3.5.8), on peut utiliser la méthode des similitudes. Si on pose $w := y/z$ et si l'on suppose que $L(y,z;a) = H(w;a)$, on trouve que la fonction H satisfait à l'E.D.O.:

$$\frac{1}{2}H'' + H' - aH = 0. \tag{3.5.9}$$

De plus, la condition au bord devient $H(0;a) = 1$.

La solution générale de l'équation (3.5.9) est:

$$H(w;a) = c_1 e^{(\sqrt{1+2a}-1)w} + c_2 e^{(-\sqrt{1+2a}-1)w}. \tag{3.5.10}$$

Là aussi $H(w;a)$ doit être bornée, donc puisque $w \leq 0$, en utilisant la condition au bord $H(0;a) = 1$, on trouve que $c_1 = 1$ et $c_2 = 0$, c'est-à-dire:

$$H(w;a) = e^{(\sqrt{1+2a}-1)w}.$$

D'après ce qui précède, ceci implique que:

$$M(x,y,z;a) = e^{-ax} e^{(\sqrt{1+2a}-1)(y/z)}$$

pour $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $y < 0$ et $z > 0$.

Remarque 3.5.1. *Un exemple intéressant est obtenu en considérant en même temps le système:*

$$\begin{aligned} dX(t) &= [Y(t)/Z(t)]dt \\ dY(t) &= Z(t)dt \\ dZ(t) &= Z(t)dt + \sqrt{2}Z(t)dW(t) \end{aligned} \tag{3.5.11}$$

et la même variable aléatoire $\tau(y,z)$ *comme ci-dessus. On obtient la fonction caractéristique* $C(x,y,z;a)$ *en écrivant*

$$C(x,y,z;a) = e^{iax}H(w;a),$$

où $w = y/z$. *D'après l'étude précédente, la fonction* H *doit satisfaire à l'E.D.O.*

$$w^2H'' + (w+1)H' + iawH = 0.$$

Alternativement, si on remplace le terme $\sqrt{2}Z(t)$ *par* $Z(t)$ *dans l'équation différentielle stochastique (3.5.11) qui définit* $Z(t)$, *on obtient l'E.D.O.:*

$$\frac{w^2}{2}H'' + H' + iawH = 0.$$

Cependant, il s'avère que ces deux E.D.O. sont trop difficiles à résoudre.

Dans la prochaine section, on généralisera le problème de départ considéré dans la section 2.

3.6. Le cas n-dimensionel

Supposons maintenant que $\dfrac{d^nX(t)}{dt^n} = Z(t)$, c'est-à-dire, en écrivant $X(t) = X_1(t)$, $Z(t) = X_n(t)$ et $\dfrac{dX_i(t)}{dt} = X_{i+1}(t)$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$, on a:

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= X_2(t)dt, \\ dX_2(t) &= X_3(t)dt, \\ \ldots &= \ldots \\ dX_{n-1}(t) &= X_n(t)dt \\ dX_n(t) &= f[X_n(t)]dt + v^{1/2}[X_n(t)]dW(t). \end{aligned}$$

Notons que le système (3.1.2) considéré dans la section 1 est le cas particulier où $n = 3$. On peut écrire:

$$\begin{aligned} X_1(t) &= X_1(0) + \int_0^t X_2(t_2)\,dt_2 \\ &= X_1(0) + tX_2(0) + \int_0^t \int_0^{t_2} X_3(t_3)\,dt_3dt_2, \\ &= \ldots \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} X_k(0)\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \int_0^t \int_0^{t_2} \cdots \int_0^{t_{n-1}} X_n(t_n)dt_n \ldots dt_2. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que:

$$X_1[\tau(x_n)] = \sum_{k=1}^{n-1} X_k(0)\frac{\tau^{k-1}(x_n)}{(k-1)!} + \int_0^{\tau(x_n)} \int_0^{t_2} \cdots \int_0^{t_{n-1}} X_n(t_n)dt_n \ldots dt_2$$

et

$$\begin{aligned} E\{X_1[\tau(x_n)]\} &= \sum_{k=1}^{n-1} X_k(0)\frac{E[\tau^{k-1}(x_n)]}{(k-1)!} \qquad (3.6.1) \\ &+ E\left[\int_0^{\tau(x_n)} \int_0^{t_2} \cdots \int_0^{t_{n-1}} X_n(t_n)dt_n \ldots dt_2\right], \end{aligned}$$

où

$$\tau(x_n) := \inf\{t \geq 0 : X_n(t) = d_1 \text{ ou } d_2 | X_n(0) = x_n \in [d_1,d_2]\}.$$

On pose pour chaque k : $X_k(0) = x_k$. Alors la fonction:

$$m(x_1,\ldots,x_n) := E[X_1(\tau(x_n))] \tag{3.6.2}$$

satisfait à l'équation inverse de Kolmogorov (si les moments de $X_1[\tau(x_n)]$ existent):

$$\frac{v(x_n)}{2} m_{x_n x_n} + f(x_n) m_{x_n} + x_n m_{x_{n-1}} + \cdots + x_2 m_{x_1} = 0 \tag{3.6.3}$$

où $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n) = (X_1(0),X_2(0),\ldots,X_n(0))$.

La fonction C satisfait à l'équation inverse de Kolmogorov:

$$\frac{v(x_n)}{2} C_{x_n x_n} + f(x_n) C_{x_n} + x_n C_{x_{n-1}} + \cdots + x_2 C_{x_1} = 0. \tag{3.6.4}$$

Comme preuve, on peut appliquer le théorème (2.3.1) là aussi. Pour cela, l'instant de premier passage $\tau(x_n)$ du processus stochastique $X_n(t)$ peut être considéré comme étant l'instant de premier passage du processus stochastique ($X_1(t),X_2(t),\ldots,X_n(t)$) où le domaine G est:

$$G = \mathbb{R}^{n-1} \times [\,d_1,d_2]$$

et

$$\partial G = \mathbb{R}^{n-1} \times \{d_1,d_2\}.$$

Ensuite on prend:

$$\psi(x_1,x_2,\ldots,x_n) = x_1 \quad \text{et} \quad \lambda = 0;$$

on a alors: $\psi(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},d_k) = x_1$ pour $k = 1,2$

et

$$\begin{aligned} v_0(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n) &= E[\psi(X_1(\tau(x_n)),X_2(\tau(x_n)),\ldots,X_n(\tau(x_n)))] \\ &= E[X_1(\tau(x_n))]. \end{aligned}$$

Le théorème (2.3.1) s'applique et $v_0(x_1,x_2,\ldots,x_n) = m(x_1,x_2,\ldots,x_n;a)$ est solution de l'équation: $-Lu(x) = 0$. Ici:

$$Lu(x) = \frac{v(x_n)}{2}u_{x_nx_n} + f(x_n)u_{x_n} + x_nu_{x_{n-1}} + \cdots + x_2u_{x_1}. \tag{3.6.5}$$

D'où:

$$\frac{v(x_n)}{2}m_{x_nx_n} + f(x_n)m_{x_n} + x_nm_{x_{n-1}} + \cdots + x_2m_{x_1} = 0. \tag{3.6.6}$$

Cette équation est assujettie à la condition au bord:

$$\begin{aligned} m(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},d_1) &= m(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},d_2) \\ &= x_1. \end{aligned} \tag{3.6.7}$$

Ensuite, on déduit de (3.6.1) que:

$$m_{x_k} = \frac{E[\tau^{k-1}(x_n)]}{(k-1)!} \quad \text{pour} \quad k = 1,\ldots,n-1. \tag{3.6.8}$$

En combinant (3.6.6) et (3.6.8), on peut énoncer la proposition:

Proposition 3.6.1. *Si les moments de $X_1[\tau(x_n)]$ existent, alors la fonction $m(x_1,\ldots,x_n)$ peut être obtenue en résolvant l' E.D.O.:*

$$\frac{v(x_n)}{2}m_{x_nx_n} + f(x_n)\frac{E[\tau^{n-1}(x_n)]}{(n-1)!} + \sum_{k=1}^{n-1} x_{k+1}\frac{E[\tau^{k-1}(x_n)]}{(k-1)!} = 0, \tag{3.6.9}$$

avec la condition au bord (3.6.7).

Notons que les variables $x_1,\ldots,x_{n-1}$ sont considérées comme des constantes dans l'équation (3.6.9).

D'après la section 1 du chapitre 2, en posant $M(x_n;a) = E[e^{-a\tau(x_n)}]$ et

$$Lu(x) = \frac{v(x_n)}{2}u_{x_n x_n} + f(x_n)u_{x_n} + x_n u_{x_{n-1}} + \cdots + x_2 u_{x_1}, \tag{3.6.10}$$

on a $LM = aM$. En posant: $e_k(x_n) := E[\tau^k(x_n)]$, on déduit de la dernière équation que:

$$Le_k(x_n) = -ke_{k-1}(x_n) \tag{3.6.11}$$

pour $k = 1,2,\ldots$

En effet, étant donné que:

$$LM(x_n;a) = aM,$$

on a:

$$L[E\{e^{-a\tau(x_n)}\}] = aE\{e^{-a\tau(x_n)}\}.$$

Alors si on dérive cette expression par rapport à a on obtient:

$$L[E\{-\tau(x_n)e^{-a\tau(x_n)}\}] = E\{e^{-a\tau(x_n)}\} + aE\{-\tau(x_n)e^{-a\tau(x_n)}\}.$$

On a alors la relation de récurrence suivante:

$$\begin{aligned} L[E\{(-1)^k\tau(x_n)^k e^{-a\tau(x_n)}\}] &= kE\{(-1)^{k-1}\tau(x_n)^{k-1}e^{-a\tau(x_n)}\} \\ &\quad + aE\{(-1)^k\tau(x_n)^k e^{-a\tau(x_n)}\} \end{aligned} \tag{3.6.12}$$

dont on vérifie la validité par une autre dérivation par rapport à a.

On obtient en effet, en dérivant l'expression précédente par rapport à a:

$$
\begin{aligned}
L[E\{(-1)^{k+1}\tau(x_n)^{k+1}e^{-a\tau(x_n)}\}] &= kE\{(-1)^k\tau(x_n)^k e^{-a\tau(x_n)}\} \\
&+ E[(-1)^k\tau(x_n)^k e^{a\tau(x_n)}] \\
&+ aE[(-1)^{k+1}\tau(x_n)^{k+1}e^{-a\tau(x_n)}] \\
&= (k+1)E[(-1)^k\tau(x_n)^k e^{-a\tau(x_n)}] \\
&+ aE[(-1)^{k+1}\tau(x_n)^{k+1}e^{-a\tau(x_n)}].
\end{aligned}
$$

Si maintenant, dans l'expression (3.6.12), on donne à a la valeur 0 on obtient:

$$L[E\{(-1)^k\tau(x_n)^k\}] = kE\{(-1)^{k-1}\tau(x_n)^{k-1}\} \tag{3.6.13}$$

et en simplifiant par $(-1)^k$, on obtient:

$$L[E\{\tau(x_n)^k\}] = -kE\{\tau(x_n)^{k-1}\}.$$

Pour conclure, on donnera une illustration de la proposition 3.6.1 en considérant le cas particulier $n = 4$: supposons que $X_n(t)$ est un mouvement brownien avec dérive $\mu = 0$ et variance σ^2. Supposons aussi que:

$$\tau(x_4) := \inf\{t \geq 0 : \; X_4(t) = 0 \text{ ou } d \,|X_4(0) = x_4 \in [0,d]\},$$

où $d > 0$. L'équation (3.6.6) devient:

$$\frac{\sigma^2}{2}m_{x_4x_4} + \sum_{k=1}^{3} x_{k+1}\frac{E[\tau^{k-1}(x_4)]}{(k-1)!} = 0. \tag{3.6.14}$$

Pour résoudre cette équation, on doit calculer les quantités: $e_k(x_4) := E[\tau^k(x_4)]$, pour $k = 1,2$. Or $e_k(x_4)$ ne dépend pas de $x_i : i = 1,2,3$. Donc: $L[e_k(x_4)] = \frac{\sigma^2}{2}e_k''(x_4)$, ceci d'après (3.6.10) et d'après (3.6.13); on a alors:

$$e_k''(x_4) = -\frac{2k}{\sigma^2}e_{k-1}(x_4) \quad \text{pour} \quad k = 1,2. \tag{3.6.15}$$

De plus, la fonction $e_k(x_4)$ est telle que :

$$e_k(0) = e_k(d) = 0. \tag{3.6.16}$$

En résolvant (3.6.15) assujettie à (3.6.16), on trouve d'abord que:

$$e_1''(x_4) = -\frac{2}{\sigma^2}, \tag{3.6.17}$$

avec les conditions au bord :

$$e_1(0) = e_1(d) = 0.$$

On obtient :

$$e_1(x_4) = \frac{x_4}{\sigma^2}(d - x_4).$$

De même :

$$e_2''(x_4) = -\frac{2k}{\sigma^2}e_1(x_4). \tag{3.6.18}$$

Avec les conditions au bord $e_2(0) = e_2(d) = 0$ on obtient:

$$e_2(x_4) = \frac{x_4}{6\sigma^4}(x_4^3 - 2dx_4^2 + d^3).$$

Finalement, on doit résoudre l' E.D.O.:

$$\frac{\sigma^2}{2}m_{x_4x_4} + \frac{x_4}{2!}\left[\frac{x_4}{6\sigma^4}({x_4}^3 - 2d{x_4}^2 + d^3)\right] + \frac{x_3}{1!}\left[\frac{x_4}{\sigma^2}(d - x_4)\right] + x_2 = 0.$$

En utilisant les conditions au bord :

$$m(x_1,x_2,x_3,0) = m(x_1,x_2,x_3,d) = x_1,$$

on trouve que:

$$\begin{aligned} m(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1 &+ \frac{x_2x_4}{\sigma^2}(x_4 - d) + \frac{x_3x_4}{6\sigma^4}[{x_4}^2(2d - x_4) - d^3] \\ &+ \frac{x_4}{18\sigma^6}\left[\frac{{x_4}^6}{14} - \frac{d{x_4}^5}{5} + \frac{d^3{x_4}^3}{4} - \frac{17d^6}{140}\right]. \end{aligned}$$

3.7. Conclusion

Dans le système (3.1.2) qu'on a étudié, le problème de la détermination de la distribution de $X[\tau(y)]$, où $X(t)$ est l'intégrale d'un processus de diffusion unidimensionel $Y(t)$ partant de $Y(0) = y$ et $\tau(y)$ est le premier temps de passage pour $Y(t)$, a été considéré par M. Lefebvre (voir **[6]**, **[7]**) et par Lachal (voir **[9]**,**[10]**) En **[7]** la moyenne de la variable $Y[\tau(z)]$ a été obenue dans le cas où $Z(t)$ est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. On a généralisé ce résultat en calculant les moments de $X[\tau(z)]$ où $X(t)$ est un processus stochastique tel que $\ddot{X}(t) = Z(t)$ et où $Z(t)$ est un processus de Wiener, un mouvement brownien géométrique ou un processus de Bessel.

Dans une autre étape, ce problème a été généralisé au cas où $X(t)$ est obtenu à partir d'un processus de diffusion $Z(t)$ en l'intégrant n fois.
On a pu obtenir explicitement les expressions de la moyenne de $X(\tau)$ quand $n = 3$ et $Z(t)$ est un processus de Wiener, un mouvement brownien géométrique ou un processus de Bessel.
On a aussi calculé dans la section précédente la moyenne de $X(\tau)$ quand $n = 4$ et $Z(t)$ est un processus de Wiener.

Dans la section 4, on a généralisé le modèle proposé dans la section 1 et on a calculé la fonction caractéristique C de $X(\tau)$ dans un cas particulier. On a utilisé la méthode des similitudes pour résoudre l'E.D.P. que C vérifie.

Il serait intéressant de calculer la fonction C dans le cas où $X(t)$ est (comme dans la section 3) l'intégrale double d'un processus de Wiener. Il semble que la méthode des similitudes ne fonctionnera pas dans ce cas particulier. On doit alors considérer d'autres techniques.

Finalement, on peut généraliser les résultats présentés ici en essayant de calculer les moments d'ordre supérieur de $X(\tau)$. Il serait assez direct d'obtenir $E[X^2(\tau)]$

et donc la variance de $X(\tau)$, par exemple; cependant, les calculs seront, bien sûr, plus laborieux.

Chapitre 4

ENDROIT DE PREMIER PASSAGE DU PROCESSUS DE BESSEL INTÉGRÉ ET DU PROCESSUS DE BESSEL GÉNÉRALISÉ

Dans les deuxième et troisième chapitres on a étudié **l'instant de premier passage** d'un processus stochastique à la frontière d'un certain domaine de $\mathbb{R}^n$. Dans le présent chapitre, on va s'intéresser à **l'endroit de premier passage** de certains processus stochastiques.

4.1. Endroit de premier passage d'un processus de Bessel intégré

Etant donné un mouvement brownien de dimension n:
$W(t) = (W_1(t), \ldots, W_n(t))$, (les $W_i(t)$ étant indépendants),
on pose:

$$B(t) = W_1^2(t) + \cdots + W_n^2(t). \tag{4.1.1}$$

C'est un processus dit, de Bessel de dimension n (voir **[14]**). Pour trouver sa différentielle stochastique, il suffit d'utiliser la formule d'Ito avec $g(t,x) = |x|$ ($|x|$ désignant la norme de x). Bien que cette fonction soit de classe C^2 seulement sur $\mathbb{R}^{n+1}$ privé de l'origine, on peut appliquer la formule d'Ito, car $W(t)$ s'annule avec une probabilité nulle quand $n \geq 2$.

On trouve que:

$$dB(t) = \frac{n-1}{2B}dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{W_i(t)}{B(t)} dW_i(t). \tag{4.1.2}$$

Considérons le système dynamique:

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= dW_1(t), \\ dX_2(t) &= dW_2(t), \\ \ldots &= \ldots \\ dX_n(t) &= dW_n(t), \end{aligned}$$

et soit:

$$D = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n,z) \in \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{tels que} \quad r_1^2 < x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) < r_2^2\}.$$

C'est donc l'espace compris entre deux "cylindres". Ainsi la frontière de D est

$$\partial D = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n,z) \in \mathbb{R}^{n+1} \text{tels que} \quad x_1^2 + \cdots + x_n^2 = r_1^2 \quad \text{ou} \quad r_2^2\},$$

ce qui est la réunion de deux "cylindres". Soit $(x_1,x_2,\ldots,x_n,z) \in D$; on pose:

$$T(x_1,\ldots,x_n) := \inf\{t \geq 0 : X_1^2(t) + \cdots + X_n^2(t) = r_1^2 \quad \text{ou} \quad r_2^2 \; | X_1(0) = x_1,\ldots,X_n(0) = x_n\}.$$

Soit maintenant

$$Z(t) = Z(0) + \int_0^t [X_1^2(s) + \cdots + X_n^2(s)]\, ds.$$

Quelle est alors la distribution de $Z(T(x_1,\ldots,x_n))$?

Pour répondre à cette question on va déterminer la fonction:

$$C^*(z,x_1,x_2,\ldots,x_n;b) := E_z[e^{ibZ(T)}] \quad \text{où} \quad z = Z(0).$$

On a alors le système dynamique suivant:

$$\begin{aligned}
dX_1(t) &= dW_1(t),\\
dX_2(t) &= dW_2(t),\\
\dots &= \dots\\
dX_n(t) &= dW_n(t),\\
dZ(t) &= (X_1^2(t) + X_2^2(t) + \dots + X_n^2(t))dt,
\end{aligned}$$

C^* vérifie alors l'équation:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} C^*_{x_i x_i} + (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n{}^2)C^*_z = 0. \tag{4.1.3}$$

Preuve:

En vue de l'application du théorème (2.3.1) et de sa remarque, on peut faire la remarque suivante: l'instant de premier passage $T(x_1,x_2,\dots,x_n)$ du processus stochastique $(X_1(t),\dots,X_n(t))$ peut être considéré comme étant l'instant de premier passage du processus stochastique $(X_1(t),\dots,X_n(t),Z(t))$. En posant $\psi(x_1,\dots,x_n,z) = e^{ibz}$ et en prenant $\lambda = 0$, alors pour chaque $(x_1,\dots,x_n,z) \in \partial D$ on a:

$$\begin{aligned}
&v_0(x_1,\dots,x_n,z;b)\\
&= E[\psi(X_1(T(x_1,\dots,x_n)),\dots,X_n(T(x_1,\dots,x_n)),Z(T(x_1,\dots,x_n))]\\
&= E[\psi(x_1,\dots,x_n,z)]\\
&= E[e^{ibz}]\\
&= e^{ibz}\\
&= \psi(x_1,\dots,x_n,z).
\end{aligned}$$

Donc le théorème (2.3.1) s'applique et $v_0(x_1,\dots,x_n,z;b) = C^*(z,x_1,\dots,x_n,;b)$ est solution de l'équation: $-Lu(x) = 0$, où:

$$Lu(x) = \sum_{k=1}^{n+1} a_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j}\sum_{k=1}^{n} b_{ki}(x)b_{kj}(x) \tag{4.1.4}$$

avec:

$$a_1(t) = 0, \quad a_2(t) = 0, \ldots, \quad a_n(t) = 0, \quad a_{n+1}(t) = X_1^2(t) + x_2^2(t) + \cdots + X_n^2(t))$$

$$b_{ij} = \delta_{ij} \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, \quad i = n \quad \text{et} \quad j = 1, \ldots, \quad n+1$$

$$b_{(n+1)j} = 0, \quad \forall j,$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'où:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} C^*_{x_i x_i} + (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n{}^2)C^*_z = 0. \tag{4.1.5}$$

On a:

$$Z[T(x_1, \ldots, x_n)] = Z(0) + [\int_0^{T(x_1,\ldots,x_n)} [X_1^2(s) + \cdots + X_n{}^2(s)]ds.$$

Donc:

$$\begin{aligned} C^*(z,w;b) &= E_z[e^{ibZ(T)}] \\ &= e^{ibz} E[e^{ibF(x_1,\ldots,x_n)}], \end{aligned}$$

où:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int_0^{T(x_1,\ldots,x_n)} [(X_1(s))^2 + \cdots + (X_n(s))^2]ds. \tag{4.1.6}$$

Donc:

$$C^*_z = ibe^{ibz} E[e^{ibF(x_1,\ldots,x_n)}].$$

En posant:

$$H^*(x_1, \ldots, x_n; b) := E[e^{ibF(x_1,\ldots,x_n)}],$$

on aura alors:

$$\begin{aligned} C^*(z,x_1,\dots,x_n;b) &= e^{ibz}H^*(x_1,\dots,x_n) \\ \text{et} \qquad C^*_z &= ibe^{ibz}H^*(x_1,\dots,x_n). \end{aligned}$$

L'équation (4.1.3) devient alors:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} H^*_{x_ix_i} + (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)ibH^* = 0. \tag{4.1.7}$$

Dans le but d'utiliser la méthode des similitudes, on pose:

$$w := x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$

On va chercher une solution de (4.1.7) de la forme:

$$H(z,w;b) = H^*(z,x_1^2,\dots,x_n^2;b) \tag{4.1.8}$$

s'il en existe une.

On a alors:

$$\begin{aligned} H_{x_i} &= H^*_{x_i} \\ &= H_w w_{x_i}, \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} H_{x_i} &= \frac{\partial H_w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_i} + H_w \frac{\partial^2 w}{\partial {x_i}^2} \\ &= \frac{\partial H_w}{\partial w}(\frac{\partial w}{\partial x_i})^2 + 2H_w. \end{aligned}$$

D'où:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} H^*_{x_ix_i} &= \frac{1}{2}[4H_{ww}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 + 2nH_w] \\ &= 2wH_{ww} + nH_w. \end{aligned}$$

L'équation (4.1.7) devient alors:

$$2wH_{ww} + nH_w + wibH(w) = 0.$$

La condition au bord est:

$$H(w) = 1 \quad \text{si} \quad w = r_1^2 \quad \text{ou} \quad w = r_2^2. \tag{4.1.9}$$

Cette équation a pour solution:

$$\begin{aligned} H(w) = C_1 w^{\frac{2-n}{4}} BesselJ(\frac{-2+n}{4}, \frac{1}{2}\sqrt{2ibw}) \\ + w^{\frac{2-n}{4}} C_2 BesselY(\frac{-2+n}{4}, \frac{1}{2}\sqrt{2ibw}). \end{aligned}$$

De l'expression de $H(w)$ on déduit la valeur de:

$$\begin{aligned} C^*(z,x_1,\ldots,x_n;b) &= E_z[e^{ibZ(T)}] \\ &= e^{ibz}H(w) \end{aligned}$$

qui est la fonction caractéristique de $Z(T)$. Son expression est donc:

$$\begin{aligned} H(w) = c_1 e^{ibz} w^{\frac{2-n}{4}} BesselJ(\frac{-2+n}{4}, \frac{1}{2}\sqrt{2ibw}) \\ + c_2 e^{ibz} w^{\frac{2-n}{4}} BesselY(\frac{-2+n}{4}, \frac{1}{2}\sqrt{2ibw}) \end{aligned}$$

où:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{b_2 - b_1}{b_2 a_1 - b_1 a_2}, c_2 = \frac{a_1 - a_2}{b_2 a_1 - b_1 a_2} \\ a_1 &= e^{ibz} r_1^{\frac{2-n}{2}} BesselJ(\frac{-2+n}{4}, \frac{1}{2}\sqrt{2ibr_1^2}) \\ b_1 &= e^{ibz} r_2^{\frac{2-n}{2}} BesselY(\frac{-2+n}{4}, \frac{1}{2}\sqrt{2ibr_2^2}), \\ a_2 &= e^{ibz} r_2^{\frac{2-n}{2}} BesselJ(\frac{-2+n}{4}, \frac{1}{2}\sqrt{2ibr_2^2})r \\ b_2 &= e^{ibz} r_2^{\frac{2-n}{2}} BesselY(\frac{-2+n}{4}, \frac{1}{2}\sqrt{2ibr_2^2}). \end{aligned}$$

Du théorème (2.3.1) découle l'unicité de la solution vérifiant la condition au bord (4.1.9), donc la solution trouvée par la méthode des similitudes est la bonne.

4.2. Endroit de premier passage du processus de Bessel généralisé

On reprend l'exemple 1 du chapitre 2 où on avait considéré le processus:

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= [-\beta X_1(t) + \frac{(\gamma_1 - 1)}{2X_1(t)}]dt + dW_1(t), \\ dX_2(t) &= [-\beta X_2(t) + \frac{(\gamma_2 - 1)}{2X_2(t)}]dt + dW_2(t), \\ dX_3(t) &= [-\beta X_3(t) + \frac{(\gamma_3 - 1)}{2X_3(t)}]dt + dW_3(t), \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

où les $W_i(t)$, $i = 1,2,3$ sont des mouvements browniens standards indépendants. On pose: $X(t) = (X_1(t),X_2(t),X_3(t))$. Soit $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$. On pose alors comme condition initiale pour le système (4.2.1):

$$X(0) = x. \tag{4.2.2}$$

Le système (4.2.1) avec la condition initiale (4.2.2) admet alors une solution unique qui sera notée X_x. On suppose ici que le domaine $D = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : r_1^2 < x_1^2 + x_2^2 + x_3 < r_2^2\}$. On a alors $\partial D = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ où $\mathcal{C}_i$ est la sphère centrée à l'origine et de rayon $r_i, i = 1$ ou 2. On a calculé le temps de premier passage pour ce processus et on se propose maintenant de calculer l'endroit du premier passage (endroit veut dire ici laquelle des deux sphères, $\mathcal{C}_1$ ou $\mathcal{C}_2$, va être atteinte en premier lieu).

D'après le théorème (2.3.1), si $\lambda \geq 0$ et $u(x)$ est une fonction définie, continue et bornée sur l'adhérence de D, deux fois continûment dérivable sur D et solution de l'équation suivante:

$$Lu = \lambda u,$$

et si $u(x) = \psi(x)$ pour $x \in \partial D$ ($x = (x_1,x_2,x_3)$), ∂D étant la frontière de D, alors:

$$u(x) = E[e^{-\lambda T_x} \psi(X_x(T_x))].$$

Soit $G(x;a) = E[e^{-a|X_x(T_x)|^2}]$. Avec ces données, on prend $\lambda = 0$ et $\psi(x) = e^{-a|x|^2}$ pour tout x dans $\mathbb{R}^3$, $a > 0$, et $|x|$ désignant la norme de x. Alors, si $u(x)$ est solution de $Lu = 0$ et si $u(x) = e^{-a|x|^2}$ pour tout $x \in \partial D$,
on a: $u(x) = G(x;a)$. D'où:

$$\sum_{k=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial G(x)}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 G(x)}{\partial x_i \partial x_j}\sum_{k=1}^{m} b_{ki}(x)b_{kj}(x) = 0.$$

L'utilisation de la méthode des similitudes se fait, ici, au moyen de la variable:

$$z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

En reprenant exactement les mêmes calculs, on arrive à l'équation:

$$2zG^{''}(z;a) + (-2\beta z + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)G^{'}(z;a) = 0,$$

avec les conditions au bord:
$G(z;a) = e^{-az}$ pour $z = r_1^2$ ou r_2^2.

La solution générale de cette équation est:

$$G(z;a) = C_1 + C_2\int_{r_1^2}^{z}\exp(\beta s)s^{-\frac{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}{2}}ds, \tag{4.2.3}$$

avec: $G(z;a) = e^{-az}$ pour $z = r_1^2$ ou r_2^2.

Il en résulte que:

$$C_1 = e^{-ar_1^2} \tag{4.2.4}$$

et

$$C_2 = (e^{-ar_2^2} - e^{-ar_1^2})\left(\int_{r_1^2}^{r_2^2}\exp(\beta s)s^{-\frac{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}{2}}ds\right)^{-1}. \tag{4.2.5}$$

Calcul des probabilités $P[X_x(T_x) = r_i]$

Comme application de ce qui précède, on va déterminer les probabilités:

$$P[X_x(T_x) = r_i], \quad i = 1 \quad \text{ou} \quad 2.$$

On a en effet:

$$E[e^{-a|X_x(T_x)|^2}] = P[X_x(T_x) = r_1]e^{-ar_1^2} + P[X_x(T_x) = r_2]e^{-ar_2^2}$$

et

$$P[X_x(T_x) = r_1] + P[X_x(T_x) = r_2] = 1.$$

Donc:

$$P[X_x(T_x) = r_1] = \frac{E[e^{-a|X_x(T_x)|^2}] - e^{-ar_2^2}}{e^{-ar_1^2} - e^{-ar_2^2}}$$

et

$$P[X_x(T_x) = r_2] = \frac{e^{-ar_1^2} - E[e^{-a|X_x(T_x)|^2}]}{e^{-ar_1^2} - e^{-ar_2^2}}.$$

La valeur de $E[e^{-a|X_x(T_x)|^2}]$ est donnée par les formules (4.2.3), (4.2.4) et (4.2.5).

Conclusion

Dans la section 1 du présent chapitre, on a considéré un processus de Bessel $B(t)$ défini par (4.1.1) et son intégrale $Z(t)$ partant de $z = Z(0)$. On a ensuite déterminé le premier endroit de passage de $Z(t)$ qu'on a noté $Z[T(x)]$ (où $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $T(x)$ est l'instant de premier passage de $B(t)$), c'est-à-dire l'endroit de $Z(t)$ lorsque $B(t)$ atteint pour la première fois la frontière de son domaine.

Dans la section 2, on a considéré un processus de Bessel généralisé, c'est-à-dire un processus de diffusion défini par un système d'équations différentielles stochastiques de la forme (4.2.1). On a d'abord calculé la fonction génératrice des moments de l'endroit de premier passage ((4.2.3), (4.2.4) et (4.2.5)), ensuite, on en a déduit la probabilité que l'endroit atteint pour la première fois soit sur $\mathcal{C}_i$ $i = 1, 2$.

CONCLUSION

Dans cette étude, on s'est intéressé à deux côtés importants de l'utilisation des équations différentielles stochastiques, à savoir la détermination du premier instant de passage et du premier endroit de passage d'un processus de diffusion par la frontière de son domaine. Pour ce faire, on s'est servi de la méthode des équations différentielles qui consiste à passer des équations différentielles stochastiques à des équations différentielles aux dérivées partielles (équations de Kolmogorov) qui permettent de déteminer les répartitions de certaines fonctionnelles des processus de diffusion. Dans les cas traités dans cette étude, on est passé de ces équations aux dérivées partielles à des équations dfférentielles ordinaires en utilisant la méthode des similitudes.

Dans le deuxième chapitre on a exposé une procédure systématique qui permet de donner une expression analytique de la fonction génératrice des moments de l'instant de premier passage d'un processus stochastique dont les coefficients de sa différentielle stochastique ont, chacun, une forme particulière, mais tout en étant assez générale pour couvrir un nombre important de processus de diffusion. Dans chaque cas, la méthode des équations différentielles nous a permis de passer d'une équation différentielle stochastique avec condition initiale (non aléatoire) à un problème de Dirichlet.

Dans le troisième chapitre, on s'est intéressé aux endroits de premier passage de certains processus de diffusion.

En premier lieu, on a considéré l'intégrale double d'un processus de diffusion, c'est-à-dire un processus stochastique dont la dérivée seconde est un processus de diffusion donné.

En deuxième lieu, on a étudié le premier endroit $X[\tau(y,z)]$ de passage d'un processus stochastique $X(t)$ défini par $\dot{X}(t) = \phi(Y(t),Z(t))$ et où $Y(t)$ est tel que $\dot{Y}(t) = \psi(Y(t),Z(t))$ et $Z(t)$ est processus de diffusion de dimension 1, donné par sa différentielle stochastique, ce qui donne une généralisation du premier problème.

En troisième lieu, on a donné une autre forme de généralisation du premier problème et on est ainsi passé de "l'intégrale double" à "l'intégrale n-uple" d'un processus de diffusion $Z(t)$ de dimension 1, c'est-à-dire un processus de diffusion $X(t)$ tel que $\dfrac{d^nX(t)}{dt^n} = Z(t)$.

Dans le quatrième chapitre, on a considéré le processus de Bessel intégré, dont on a déterminé le premier endroit de passage. Ensuite, on a considéré le processus de Bessel généralisé qu'on a vu dans l'exemple 1 du chapitre 2. On a calculé le premier endroit de passage pour ce processus.

Dans toute cette étude, on s'est appuyé sur le théorème (2.3.1) qui nous a permis, dans chaque cas, de poser l'équation différentielle appropriée (équation de Kolmogorov) et nous a permis aussi de prouver l'unicité de la solution. On s'est servi par la suite de la méthode des similitudes pour passer à des équations différentielles ordinaires.

Théoriquement, les applications de ce théorème prouvent que pour chaque processus de diffusion, les équations que ce théorème permet de poser, que cela soit pour le premier instant de passage ou pour le premier endroit de passage, admettent chacune une solution unique. Le problème qui reste est donc de résoudre ces équations différentielles aux dérivées partielles. Malheureusement, il n'est pas toujours facile de le faire. La méthode des similitudes permet alors de recueillir un certain nombre de cas qui se ramènent à des équations différentielles ordinaires, donc plus facile à résoudre.

Une alternative à la méthode des similitudes est la méthode de séparation des variables. On peut, en effet, à partir d'une équation différentielle aux dérivées partielles, se ramener, dans certains cas, à des équations différentielles ordinaires et ce, en séparant les variables, c'est-à-dire en écrivant par exemple une fonction à deux variable $u(x,t)$ comme étant $u(x,t) = U(x)T(t)$ et puis en remplaçant $u(x,t)$ dans l'équation différentielle aux dérivées partielles de départ par $U(x)T(t)$ et en effectuant les calculs qui s'ensuivent; ce qui nous ramène à des équations différentielles ordinaires. Ceci permettra alors de résoudre un certain nombre de problèmes comme on l'a fait avec la méthode des similitudes.

Une autre alternative est la méthode numérique utilisant des techniques comme la méthode des différences finies (voir par exemple [**5**]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] I. GHIKHMAN ET A. SKOROKHOD, *Introduction à la théorie des processus aléatoires*, Éditions Mir. Moscou. Traduc.fran. 1980.

[2] K.L. CHUNG ET R.J. WILLIAMS, *Introduction to Stochastic Integration*, Second Edition. Birkhäuser, Boston, 1990.

[3] A. FRIEDMAN, *Stochastic Differential Equations and Applications*, V.1 Academic Press, 1975.

[4] S. KARLIN AND H. TAYLOR, *A Second Course in Stochastic Processes.* Academic Press, New York, 1981.

[5] W.F. AMES, *Numerical methods for partial dfferential equations.* Academic Press, New York, 1977.

[6] M. LEFEBVRE, *First-passage densities of a two-dimensional process.* SIAM J. Appl. Math. 49 (1989)

[7] M. LEFEBVRE, *Moments generating function of a first hitting place for the integrated Ornstein-Uhlenbeck process.* Stochastic Process. Appl. 32 (1989), 281-287.

[8] M. LEFEBVRE, *First-passage problems involving processes with lognormal density functions.* Instit Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A 130 (1996), 63-78.

[9] A. LACHAL, *Sur l'intégrale du mouvement brownien.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 311 (1995), 461-464.

[10] A. LACHAL, *Quelques martingales associées à l'intégrale du processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Application à l'étude des premiers instants d'atteinte.* Stochastics Stochastics Rep. 58 (1996), 285-302.

[11] M. LEFEBVRE ET R. LABIB, *Hitting lines and circles with diffusion processes.* Austral. J. Statistic., 38 (1996), 213-222.

[12] L. DRESNER, *Similarity solutions of nonlinear partial differential equations.* Pitman Advanced Publishing Program, Boston, 1983.

[13] M. LEFEBVRE, *Construction de fonctions génératrice des moments d'instants de premier passage en deux dimensions.* Rev. Roum. Math. Pures Appli., 40 (1995),779-785.

[14] B. ØKSENDAL, *Stochastic differential equations.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, Second edition, 1989.

[15] R.M. CAPOCELLI ET L.M. RICCIARDI, *On the inverse of the first passage time probability problem.* J. Appl. Probab., 9 (1972), 270-287.

[16] YU. V. EGOROV ET M.A. SHUBIN, *Partial differential equations.* Springer-Verlag Berlin, 1992.

[17] I. KARATZAS ET S.E. SHREVE, *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Springer-Verlag Berlin, 1988.

[18] E.B. DYNKIN ET A.A. YUSHKEVICH, *Markov Processes, Theorems and Problems.* Plenum Press, New York, 1969.