Université de Montréal

L'indépendance du théorème de Kanamori-McAloon relative à l'arithmétique de Peano

par

Philippe Delage

Département de mathématiques et de statistiques

Faculté des arts et sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

mars 2000

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

L'indépendance du théorème de Kanamori-McAloon relative à l'arithmétique de Peano

présenté par

Philippe Delage

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Gonzalo Reyes
(président-rapporteur)

Hidemitsu Sayeki
(directeur de recherche)

Pierre Berthiaume
(membre du jury)

Mémoire accepté le :

24 mai 2000

SOMMAIRE

Dans ce mémoire, nous allons étudier l'incomplétude de la théorie de l'arithmétique de Peano. Cette théorie de la logique du premier ordre donne une axiomatisation de l'arithmétique des nombres naturels. On sait, cependant, par les travaux de Kurt Gödel, que cette théorie possède des énoncés indécidables.

Pour ce faire, nous allons utiliser l'énoncé de Kanamori-McALoon. L'objectif est de montrer que cet énoncé ne peut pas être démontré à l'aide des axiomes de Peano.

L'essentiel de ce travail sera donc de donner deux preuves de l'indépendance de l'énoncé de Kanamori-McAloon. Dans la première, nous allons construire un modèle de l'arithmétique de Peano qui ne satisfait pas l'énoncé. Dans la deuxième, nous allons associer une fonction à l'énoncé, pour ensuite montrer que cette fonction a une croissance trop rapide pour être bien définie à l'intérieur de l'arithmétique de Peano.

TABLES DES MATIÈRES

INTRODUCTION

L'objectif de ce mémoire est de présenter deux preuves de l'indépendance de l'énoncé de Kanamori-McAloon. Afin d'introduire ce sujet, nous allons faire un bref rappel de l'histoire des résultats d'indépendance en arithmétique.

Guiseppe Peano a donné en 1889 une axiomatisation de l'arithmétique. En gros, cet ensemble d'axiomes permet de définir les opérations d'addition et de multiplication, ainsi que le principe d'induction sur un ensemble infini muni d'un plus petit élément "0".

L'arithmétique de Peano a pris une importance considérable avec les résultats de Kurt Gödel. Suite à la découverte du paradoxe de Russell, plusieurs mathématiciens ont tenté de créer des systèmes qui pourraient servir de fondement aux mathématiques en espérant pouvoir ensuite démontrer la consistance de ce système. Les difficultés rencontrées par ces différentes approches ont finalement conduit Gödel aux résultats suivants. Premièrement, que l'arithmétique n'est pas une théorie complète. Ceci a pour conséquence qu'il existe des énoncés vrais concernant l'arithmétique qui ne sont pas démontrables à partir des axiomes de Peano. Deuxièmement, que pour démontrer la consistance de l'arithmétique de Peano on doit utiliser une théorie capable de reproduire l'arithmétique de Peano.

Dans la preuve d'un de ses théorème, Gödel donne le premier exemple d'énoncé qui est indépendant des axiomes de Peano. Cependant, en dehors de la preuve de Gödel cet énoncé ne possède pas d'utilisation en mathématiques. La question était, donc, de savoir s'il existe des énoncés indépendants qui sont utilisés en arithmétique, ou du moins au niveau de la recherche en arithmétique.

Le premier exemple de ce type d'énoncé fut le théorème de Paris-Harrington [9]. Cet énoncé est une variation du théorème de Ramsey fini. Une des premières méthodes qui a été utilisée pour démontrer l'indépendance de l'énoncé est la méthode des indicatrices. Cette méthode permet de construire un modèle de l'arithmétique de Peano qui ne satisfait pas un énoncé donné. Les principaux dévelopements de cette méthode ainsi que différentes applications sont présentés dans les articles de L. Kirby et J. Paris [6],[7],[10] et [11].

Une autre méthode a été ensuite développée par Jussi Ketonen et Robert Solovay [5]. Dans cette méthode, on associe une fonction à l'énoncé. On étudie ensuite la croissance de la fonction pour finalement conclure que sa croissance est trop rapide pour que l'énoncé soit démontrable dans l'arithmétique de Peano.

Dans ce mémoire, nous allons étudier le théorème de Kanamori-McAloon. Nous allons montrer que cet énoncé est une conséquence d'un théorème de Paul Erdos et R. Rado. Ceci signifie que le théorème de Kanamori-McAloon est un énoncé vrai de l'arithmétique. Cependant, nous allons montrer qu'aucune preuve de ce théorème ne peut être reproduite à l'intérieur de l'arithmétique de Peano.

Dans leur article, Akihiro Kanamori et Kenneth McAloon [3] ont d'abord établi la preuve de l'indépendance en construisant un modèle de l'arithmétique de Peano qui ne satisfait pas l'énoncé. Ensuite, ils ont expliqué comment adapter la méthode de Ketonen-Solovay à leur énoncé et ont donné la première moitié de la preuve.

Ce mémoire sera donc divisé de la façon suivante: Le chapitre 1 présente l'arithmétique de Peano. Entre autres, nous démontrons que les axiomes de Peano sont capables de démontrer tous les énoncés Σ_1 qui sont vrais pour l'arithmétique. Le chapitre 2 présente l'énoncé de Kanamori-McAloon ainsi que quelques notions de combinatoire. Dans le chapitre 3, nous donnons la première preuve de l'indépendance en utilisant les modèles non-standards et faisons le lien avec les indicatrices. Le chapitre 4 est constitué en majeure partie des résultats provenant de l'article d'Akihiro Kanamori et Kenneth McAloon [3] pour adapter la méthode de Ketonen-Solovay à leur énoncé. Dans le chapitre 5, nous définissons une variante de la hiérarchie de Wainer et démontrons une série de propriétés. Finalement, dans le chapitre 6, nous complètons la preuve de l'indépendance par la méthode de Ketonen-Solovay.

Dans ce mémoire, les résultats auxquels nous sommes nous-mêmes parvenus sont: les lemmes 4.8 et 6.4, les théorèmes 6.2 et 6.11 ainsi que le corollaire 3.6. De plus, nous avons obtenu les théorèmes 4.9, 6.9 et 6.10 en adaptant les résultats 1.8, 3.4 et 3.5 de l'article de Jussi Ketonen et Robert Solovay à l'énoncé de Kanamori-McAloon.

CHAPITRE 1: L'arithmétique de Peano

On note PA, l'arithmétique de Peano. Cette théorie de la logique du premier ordre donne une formalisation de l'arithmétique des nombres naturels. Elle est constituée du langage:

$$L = \{ 0, 1, <, +, \cdot \}$$

des axiomes suivants:

1) $\forall x \ \neg(x + 1 = 0)$

2) $\forall x, y \left(x + 1 = y + 1 \rightarrow x = y \right)$

3) $\forall x \left(x + 0 = x \wedge x \cdot 0 = 0 \right)$

4) $\forall x, y \left(x + (y + 1) = (x + y) + 1 \wedge x \cdot (y + 1) = x \cdot y + x \right)$

5) $\forall x, y \left(x < y \leftrightarrow \exists z (x + z = y \wedge \neg(z = 0)) \right)$

et du schéma d'induction:

(PI) Pour toute L-formule $\varphi(x)$ (possiblement avec paramètres):

$$(\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(x + 1)) \rightarrow \forall x\varphi(x)$$

On note PA^-, la L-théorie constituée des axiomes 1 à 5 seulement. Le principe du bon-ordre est donné par le schéma d'axiome:

(BO) Pour toute L-formule $\varphi(x)$:

$$\exists x\varphi(x) \rightarrow \exists z(\varphi(z) \wedge \forall w(w < z \rightarrow \neg\varphi(w)))$$

Nous allons maintenant montrer que l'on peut remplacer PI par

BO dans l'arithmétique de Peano.

Proposition 1.1: $PA^- \vdash PI \leftrightarrow BO$

Preuve:

1) $PA^- \vdash BO \rightarrow PI$

Soit M une L-structure telle que $M \models PA^-$, $M \models BO$ et

$$M \models \varphi(0) \quad \wedge \quad \forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(x+1)) \qquad (*)$$

Si on avait $M \models \exists x \neg\varphi(x)$, alors par le principe du bon-ordre dans M, il existerait un plus petit $z \in M$ tel que $M \models \exists z \neg\varphi(z)$. Par * on obtient $z \neq 0$ et donc il existe y tel que $y + 1 = z$ et que $M \models \varphi(y)$. À l'aide de * on obtient $M \models \varphi(z)$, ce qui est contradictoire. Donc $M \models \forall x\ \varphi(x)$.

2) $PA^- \vdash PI \rightarrow BO$

Soit M une L-structure telle que $M \models PA^-$, $M \models PI$ et $M \models \exists x\varphi(x)$. Supposons que $M \models \neg\exists z(\varphi(z) \wedge \forall w(w<z \rightarrow \neg\varphi(w))$ alors

$$M \models \forall z(\varphi(z) \rightarrow \exists w(w < z \wedge \varphi(w))) \qquad (**)$$

Pour obtenir une contradiction, nous allons utiliser la formule auxiliaire $\theta(x)$ définie par: "$\forall z(z < x \rightarrow \neg\varphi(z))$". À l'aide des axiomes 1 et 5, on obtient que 0 est le plus petit élément de M et donc $M \models \theta(0)$. Supposons que $M \models \theta(x)$. Nous allons montrer que $M \models \theta(x+1)$. Si $z < x+1$ alors $z < x$ ou $z = x$.

Si $z < x$ alors par $\theta(x)$ on a $M \models \neg\varphi(z)$

Si $z = x$ alors par ** on a $M \models \neg\varphi(z)$

Donc $M \models \theta(x + 1)$ et par PI dans M, $M \models \forall x\theta(x)$ donc $M \models \forall x\neg\varphi(x)$, ce qui contredit le fait $M \models \exists x\varphi(x)$.

Les symboles 2, 3, 4, 5, ... ne font pas partie du langage L. On peut cependant les utiliser en posant la convention que n est une abréviation de 1+1+1+...+1 (n fois).

Le modèle standard de l'arithmétique de Peano est l'ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$. On montre facilement en utilisant le théorème de compacité que cette théorie possède également des modèles non-isomorphes à $\mathbb{N}$, ces modèles sont donc non-standards. Si M est un modèle non-standard de PA alors la fonction $h:\mathbb{N}\rightarrow M: n \mapsto n^M$ est un homomorphisme injectif (où $n^M = 1^M +^M 1^M +^M 1^M +^M ... +^M 1^M$ (n fois)). On peut donc identifier $\mathbb{N}$ avec l'image de h dans M et considérer $\mathbb{N}$ comme une sous-structure de tous les modèles de PA. Pour cette raison, on écrit n au lieu de n^M, $<$ au lieu de $<^M$, $+$ au lieu de $+^M$, etc.

À partir des axiomes, on peut montrer que $<$ est un ordre linéaire sur M, que 0 est le plus petit élément de M et que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$M \models \forall x (x < k \rightarrow (x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2 \vee \ldots \vee x = k - 1))$$

Cette dernière propriété nous dit qu'aucun nouvel élément n'a été ajouté entre les nombres naturels, i.e. que tous les nombres non-standards sont infinis. Pour cette raison, on utilise les notations suivantes: $M > \mathbb{N}$ signifie que M est un modèle non-standard et $a > \mathbb{N}$ signifie que a est un nombre non-standard.

Ces dernières considérations nous amènent à nous poser la question suivante: "Existe-t-il une formule qui permet de définir dans M, le sous-ensemble $\mathbb{N}$?". La réponse est "non", car s'il existait une L-formule $\varphi(x)$ (possiblement avec des paramètres $\bar{a} \in M^n$) telle que:

$$\mathbb{N} = \{ b \in M \mid M \models \varphi\ (b) \}$$

alors $M \models \varphi(0)$ (car $0 \in \mathbb{N}$)

et $M \models \forall x\ (\varphi(x) \to \varphi(x+1))$ (car $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x+1 \in \mathbb{N}$)

donc $M \models \forall x\ \varphi(x)$ (car $M \models PI$)

et donc $\mathbb{N} = M$, ce qui contredit le fait que M est non-standard.

Le prochain théorème est simplement une reformulation de ceci.

<u>Théorème 1.2</u>: (Principe de débordement)

Si M est un modèle non-standard de PA, $\bar{a} \in M^k$ et $M \models \varphi(n, \bar{a})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors il existe $c > \mathbb{N}$ dans M tel que $M \models \varphi(c, \bar{a})$.

Définition: Soient $M \models PA$ et I une sous-structure de M, on dit que I est un *segment initial* de M (on note $I \subseteq_e M$) si pour tout $x \in I$ et $y \in M$: $M \models y < x$ implique $y \in I$.

Par exemple, par une remarque précédente si $M \models PA$ alors $\mathbb{N} \subseteq_e M$. Nous allons également étudier les segments initiaux $I \subseteq_e M$ qui se situent entre $\mathbb{N}$ et M.

$$\{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N} \subseteq_e I \subseteq_e M$$

Notations:

1) Soit $\varphi(x, \overline{y})$ une L-formule. $\forall_{x<z}\varphi(x, \overline{y})$ est une abréviation de $\forall x\, (x < z \rightarrow \varphi(x, \overline{y}))$ et $\exists_{x<z}\varphi(x, \overline{y})$ est une abréviation de $\exists x\, (x < z \wedge \varphi(x, \overline{y}))$. Les quantificateurs $\forall_{x<z}$ et $\exists_{x<z}$ sont appelés quantificateurs bornés.
2) Δ_0 dénote la classe des L-formules dont tous les quantificateurs sont bornés.
3) Σ_1 dénote la classe des L-formules de la forme: $\exists \overline{x}\ \theta(\overline{x}, \overline{y})$ où $\theta(\overline{x}, \overline{y}) \in \Delta_0$.
4) Π_1 dénote la classe des L-formules de la forme: $\forall \overline{x}\ \theta(\overline{x}, \overline{y})$ où $\theta(\overline{x}, \overline{y}) \in \Delta_0$.
5) On note $M_1 \prec M_2$ si M_1 est une sous-structure élémentaire de M_2, i.e. si $M_1 \subset M_2$ et que pour tout $\overline{a} \in M_1^n$ et pour toute L-formule $\varphi(\overline{x})$ on a: $M_1 \models \varphi(\overline{a})$ si et seulement si $M_2 \models \varphi(\overline{a})$.

6) On note $N \prec_{\Delta_0} M$ si N est une sous-structure Δ_0-élémentaire de M, i.e. si $N \subset M$ et que pour tout $\bar{a} \in N^n$ et pour toute L-formule $\varphi(\bar{x}) \in \Delta_0$ on a: $N \models \varphi(\bar{a})$ ssi $M \models \varphi(\bar{a})$.

Nous allons maintenant démontrer un résultat positif concernant l'arithmétique de Peano. C'est-à-dire que PA est capable de démontrer tous les énoncés vrais de l'arithmétique de la classe Σ_1.

<u>Lemme 1.2</u>: $N \subseteq_e M \Rightarrow N \prec_{\Delta_0} M$

<u>Preuve</u>: On procède par induction sur la complexité des Δ_0-formules, i.e sur le nombre de symboles $\neg$, $\wedge$ et $\forall_{z<t}$ dans la formule. Les cas de $\neg$ et $\wedge$ sont des conséquences de $N \subseteq M$. Pour le cas de $\forall_{z<t}$, il suffit de remarquer que si $N \subseteq_e M$ et $t \in N$ alors:

$$\{ z \in N \mid N \models z < t \} = \{ z \in M \mid M \models z < t \}$$

<u>Corollaire 1.3</u>: Si $N \subseteq_e M$ et $\varphi(\bar{x}) \in \Sigma_1$, alors pour tout $\bar{a} \in N$ on a: $N \models \varphi(\bar{a}) \Rightarrow M \models \varphi(\bar{a})$.

<u>Corollaire 1.4</u>: $PA \vdash \Sigma_1 \cap TH(\mathbb{N})$

CHAPITRE 2: Le théorème de Kanamori-McAloon

Dans ce chapitre, nous allons énoncer la proposition de Kanamori-McAloon. Pour ce faire, nous devons développer quelques notions de combinatoire. Premièrement, nous allons adopter les notations suivantes:

$\mathbb{N}$ dénote l'ensemble des nombres naturels ou un ensemble de la même cardinalité.

$[m,n]$ dénote l'ensemble $\{m,m+1,m+2,\dots,n-1,n\}$.

Les constantes comme "n" peuvent être utilisées pour représenter le nombre n ou un ensemble de cardinalité n.

Si $M \models PA$ et $X \subseteq M$ alors $[X]^n$ dénote la classe des sous-ensembles de X de cardinalité n, de plus si $\{x_1,x_2,...,x_n\} \in [X]^n$ on suppose toujours que $x_1 < x_2 < .... < x_n$.

Soient $X,Y \subset \mathbb{N}$ et $f:[X]^n \to Y$. Pour simplifier les démonstrations, nous allons utiliser la notation suivante:

$$f(x_1,x_2,...,x_n) \text{ signifie } f(\{x_1,x_2,...,x_n\})$$

De plus nous allons utiliser la notation vectorielle $\overline{x}$ pour denoter $\{x_1,x_2,...,x_n\}$.

Définition: Soit $X, Y \subset \mathbb{N}$. On dit qu'un sous-ensemble $H \subseteq X$ est *homogène* pour une fonction $f:[X]^n \to Y$ si la restriction de f à $[H]^n$ est une fonction constante.

La notation suivante est utile pour énoncer les théorèmes de Ramsey:

Soit $c \in \mathbb{N}$. $X \to (k)^n_c$ signifie que pour toute fonction $f:[X]^n \to c$, il existe $H \subseteq X$ homogène pour f tel que $|H| = k$.

Ramsey à démontré en 1930 les deux théorèmes suivants [12]:

Théorème de Ramsey infini: $\forall\ n, c \in \mathbb{N}\ \mathbb{N} \to (\mathbb{N})^n_c$

Théorème de Ramsey fini: $\forall\ n, c, k \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ m \to (k)^n_c$

La version finie du théorème peut être exprimée dans le langage L. Ce n'est, cependant, pas le cas pour la version infinie qui est un théorème du deuxième-ordre. Il s'avère que le théorème de Ramsey fini est démontrable dans PA; nous allons donc considérer un renforcement de ce théorème qui n'est pas démontrable dans PA.

Dans leur article, Erdös et Rado [1] ont donné une généralisation du théorème de Ramsey infini. Cette généralisation permet de remplacer le nombre c par un ensemble infini. Pour énoncer ce théorème, nous aurons besoin de la définition suivante.

Définition:

Soit une fonction $f:[\mathbb{N}]^n \to \mathbb{N}$, un sous-ensemble $H \subseteq X$ est *canonique* pour f, s'il existe $v \subseteq n$ tel que pour tous $\overline{x}, \overline{y} \in [H]^n$:

$$f(x_0,\ldots,x_{n-1}) = f(y_0,\ldots,y_{n-1}) \Leftrightarrow x_i = y_i \text{ pour tout } i \in v$$

Théorème: (Erdös et Rado)

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $f:[\mathbb{N}]^n \to \mathbb{N}$, il existe un ensemble infini $H \subseteq \mathbb{N}$ qui est canonique pour f.

On voit facilement que le théorème de Ramsey infini peut être démontré à partir de ce théorème, car si l`image de la fonction f est un ensemble fini, alors on doit avoir $v = \varnothing$ et donc H est un ensemble homogène pour f.

Nous allons maintenant énoncer des définitions qui sont reliées au théorème de Kanamori-McAloon.

Définitions:

1) Une fonction $f:[X]^n \to \mathbb{N}$ est dite *régressive* si pour tous $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1}$ provenant de X avec $x_0 \neq 0$, on a $f(x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}) < x_0$.

2) Un sous-ensemble $S \subseteq X$ est *min-homogène* pour f si pour tous

$x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1}$ et $x_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1}$ provenant de S, on a $f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(x_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ (i.e. dans S, f dépend uniquement de la première variable).

La notation suivante sera utilisée pour énoncer le théorème de Kanamori-McAloon.

$X \to (k)^n_{reg}$ signifie que pour toute fonction régressive $f: [X]^n \to \mathbb{N}$ il existe $S \subseteq X$ min-homogène pour f tel que $|S| = k$.

Le prochain théorème est une conséquence du théorème de Erdös et Rado.

<u>Théorème</u>: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \to (\mathbb{N})^n_{reg}$

<u>Preuve</u>: Le cas de $n = 1$ est trivial. On suppose donc que $n > 1$. Soit $f: [\mathbb{N}]^n \to \mathbb{N}$ une fonction régressive, par le théorème de Erdös et Rado, il existe un ensemble infini $H \subseteq \mathbb{N}$ et un ensemble $v \subseteq n$ tel que pour tous $\overline{x}, \overline{y} \in [H]^n$:

$$f(x_0, \ldots, x_{n-1}) = f(y_0, \ldots, y_{n-1}) \Leftrightarrow x_i = y_i \text{ pour tout } i \in v$$

Nous allons montrer que $v = \emptyset$ ou $v = \{0\}$. Supposons le contraire, i.e. que v contient un élément $i \neq 0$. Soit h le plus petit élément non-nul de H. On peut former une infinité de n-tuples qui ont h comme premier élément et qui sont différents pour les indices $i \in v$. Les images de ces n-tuples doivent être à la fois toutes différentes et inférieures à h. Ce qui est contradictoire.

Ceci montre donc que $v = \emptyset$ ou $v = \{0\}$. Dans le cas où $v = \emptyset$, f doit être homogène sur $[H]^n$ et donc par conséquence min-homogène. Dans le cas où $v = \{0\}$, cela signifie précisément que f est min-homogène sur $[H]^n$.

Nous allons maintenant démontrer le théorème de Kanamori-McAloon. On peut voir ce théorème comme une variation du théorème de Ramsey fini.

Théorème de Kanamori-McAloon: $\forall n,k \in \mathbb{N}\ \exists\, m \in \mathbb{N}\ \ m \rightarrow (k)^n_{reg}$

Preuve:

Les cas de $n = 1$, de $n = k$ et de $n = k + 1$ sont triviaux. On suppose donc que $n \geq 2$ et que $k > n + 1$. Nous allons procéder par contradiction. Si le théorème du Kanamori-McAloon est faux, alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe une fonction $f_m:[\mathbb{N}]^n \rightarrow \mathbb{N}$ qui ne possède pas d'ensemble min-homogène de cardinalité k. On considère la fonction suivante:

$$f:[\mathbb{N}]^{n+1} \rightarrow \mathbb{N} \ : \ (x_0,\dots,x_n) \mapsto f_{x_n}(x_0,\dots,x_{n-1})$$

Par le théorème précèdent, il existe un ensemble infini $H \subseteq \mathbb{N}$ qui est min-homogène pour f. Soit $S \in [H]^k$ et h un élément de H supérieur au plus grand élément de S. Comme S ne peut pas être min-homogène pour f_{s_n}, il doit y avoir $s_0, s_1, \dots, s_n \in S$ et $t_1, \dots, t_{n-1} \in S$ tel que: $f(s_0, s_1, \dots, s_n) = f_{s_n}(s_0, s_1, \dots, s_{n-1}) \neq f_{s_n}(s_0, t_1, \dots, t_{n-1}) = f(s_0, t_1, \dots, t_{n-1}, s_n)$. Mais ceci contredit le fait que H soit min-homogène pour f.

Cette proposition peut être exprimée dans le langage L, nous allons la noter (KM). On vient de démontrer que (KM) est une conséquence du théorème de Erdös et Rado et donc que (KM) est un énoncé vrai de l'arithmétique. Cependant, cet argument ne peut pas être reproduit à l'intérieur de PA, car le théorème de Erdös et Rado est un théorème deuxième ordre et ne peut pas être exprimé dans langage L. L'objet de ce mémoire est de montrer qu'aucune preuve de (KM) ne peut être reproduite à l'intérieur de PA.

On termine ce chapitre avec les propriétés suivantes:

<u>Propriétés</u>:

1) Si $m \to (k)^n_c$, $m' \geq m$, $k' \leq k$, $n' \leq n$ et $c' \leq c$ alors $m' \to (k')^{n'}_{c'}$.

2) Si $m \to (k)^n_{reg}$, $m' \geq m$, $k' \leq k$ et $n' \leq n$ alors $m' \to (k')^{n'}_{reg}$.

La preuve de ces propriétés est évidente.

CHAPITRE 3: Preuve de l'indépendance par la méthode des modèles non-standards

Dans ce chapitre nous allons construire un modèle de l'arithmétique de Peano qui ne satisfait pas l'énoncé de Kanamori-McAloon. En théorie des modèles, un des outils de base pour construire un modèle ayant une certaine propriété est la notion d'indiscernables. De plus, pour démontrer qu'il existe un modèle muni d'un ensemble d'indiscernables on doit utiliser le théorème de Ramsey infini. Nous, nous allons utiliser une notion légèrement différente qui est reliée à l'énoncé de Kanamori-McAloon.

<u>Définition</u>: Soit $M \models PA$ et $\Psi(x_0,\ldots,x_n)$ une L-formule. L'ensemble $H \subseteq M$ est un ensemble *d'indiscernables diagonaux* pour la formule Ψ dans M si pour toutes suites $c_0 < c_1 < \ldots < c_n$ et $c_0 < d_1 < \ldots < d_n$ d'éléments de H et pour tout $p < c_0$ dans M on a:

$$M \models \Psi(p,c_1,\ldots,c_n) \leftrightarrow \Psi(p,d_1,\ldots,d_n)$$

Dans le lemme suivant, nous allons montrer comment on peut obtenir un ensemble d'indiscernables diagonaux.

<u>Lemme 3.1</u>: Soit M un modèle non-standard de PA. S'il existe a, w $\in$ M et b, e $\in$ M-$\mathbb{N}$ tels que M satisfasse:

$$[a, b] \rightarrow (w)^{2e+1}_{reg} \quad \text{et} \quad w \rightarrow (3e + 1)^{2e+1}_{e+2}$$

Alors, il existe un ensemble infini $H \in [[a, b]]^{2e+1}$ d'indiscernables diagonaux pour les Δ_0-formules.

<u>Preuve</u>: On doit utiliser un codage de Gödel pour les Δ_0-formules, i.e. une énumération $\Delta_0 = \{\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, ...\}$ qui peut être définie à l'intérieur de PA. Sans perte de généralité, on peut supposer que Ψ_k possède au plus k + 1 variables libres. Comme le codage est défini à l'intérieur de PA, la fonction $k \mapsto \Psi_k$ est également définie pour les nombres non-standards $m \in M - \mathbb{N}$.

Nous allons définir deux fonctions f et i. Soit donnés $a \leq x_0 <...< x_{2e} \leq b$. S'il existe $i \leq e$ et $p < x_0$ tels que $\Psi_i(p, x_1, ..., x_e)$ et $\Psi_i(p, x_{e+1}, ..., x_{2e})$ aient des valeurs de vérité différentes dans M, alors $f(x_0,...,x_{2e})$ est ce plus petit p et $i(x_0,...,x_{2e})$ ce plus petit i. Sinon, on pose $f(x_0,...,x_{2e}) = 0$ et $i(x_0,...,x_{2e}) = e+1$. On remarque que f est une fonction régressive de $[[a, b]]^{2e+1}$ dans $\mathbb{N}$ et donc par hypothèse il existe $H_0 \in [[a, b]]^w$ min-homogène pour f. Maintenant, la restriction de i à H_0 est une fonction de $[H_0]^{2e+1}$ dans e+2 et donc, il existe $H_1 = \{z_0, ..., z_{3e+1}\} \subseteq H_0$ et $i \leq e+1$ tels que $i=i(x_0,...,x_{2e})$ pour tout $\{x_0,...,x_{2e}\} \in [H_1]^{2e+1}$.

Nous allons montrer que l'on doit avoir i = e+1. Supposons que l'on ait $i \leq e$. Par la min-homogénéité de H_0, il existe $p < x_0$ tel que:

$p = f(z_0, z_1, \ldots, z_{2e}) = f(z_0, z_1, \ldots, z_e, z_{2e+1}, \ldots, z_{3e}) = f(z_0, z_{e+1}, \ldots, z_{3e})$

Mais,

$f(z_0, z_1, \ldots, z_{2e}) = p$ signifie que $\psi_i(p, z_1, \ldots, z_e)$ et $\psi_i(p, z_{e+1}, \ldots, z_{2e})$ ont des valeurs de vérité différentes.

$f(z_0, z_1, \ldots, z_e, z_{2e+1}, \ldots, z_{3e}) = p$ signifie que $\psi_i(p, z_1, \ldots, z_e)$ et $\psi_i(p, z_{2e+1}, \ldots, z_{3e})$ ont des valeurs de vérité différentes.

$f(z_0, z_{e+1}, \ldots, z_{3e}) = p$ signifie que $\psi_i(p, z_{e+1}, \ldots, z_{2e})$ et $\psi_i(p, z_{2e+1}, \ldots, z_{3e})$ ont des valeurs de vérité différentes.

Ce qui est imposible, car au moins deux de ces formules doivent avoir la même valeur de vérité. On a donc $i = e+1$.

Montrons que $H = \{z_0, \ldots, z_{2e}\}$ est un ensemble d'indiscernables diagonaux pour les Δ_0-formules. Soit Ψ_k une Δ_0-formule. Comme e est un nombre non-standard, on doit avoir $k < e$. Supposons que $c_0 < c_1 < \ldots < c_e$ et $c_0 < d_1 < \ldots < d_e$ soient des éléments de H, alors pour tout $p < c_0$, on a:

$$M \models \psi_k(p, c_1, \ldots, c_e) \quad \leftrightarrow \quad \psi_k(p, z_1, \ldots, z_e)$$

et

$$M \models \psi_k(p, d_1, \ldots, d_e) \quad \leftrightarrow \quad \psi_k(p, z_1, \ldots, z_e)$$

donc $M \models \psi_k(p, c_1, \ldots, c_e) \quad \leftrightarrow \quad \psi_k(p, d_1, \ldots, d_e)$.

Dans le lemme précédent, la raison pour laquelle on s'est limité aux Δ_0-formules, est pour s'assurer que l'on puisse reproduire la preuve à l'intérieur de PA. En effet, par un théorème de Tarski [13] on ne peut pas définir la relation de satisfaction $M \models \psi(\bar{a})$ à l'intérieur de PA et donc on ne peut pas exprimer la notion d'indiscernable pour une formule quelconque $\psi(\bar{x})$. On peut, cependant, définir la relation de satisfaction si on se limite aux Δ_0-formules.

<u>Théorème 3.2</u>: Soit M un modèle non-standard de PA, $a \in M$ et $b,c \in M - \mathbb{N}$ tel que M satisfasse:

$$[a, b] \to (2c)^{c}_{reg} \ .$$

Alors, il existe $I \subseteq_e M$ tel que $a \in I < b$ et $I \models PA$.

<u>Preuve</u>: Par le théorème de Ramsey fini dans $\mathbb{N}$, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $w_n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{N} \models w_n \to (3n+1)^{2n+1}_{n+2}$ donc $M \models w_n \to (3n+1)^{2n+1}_{n+2}$ (car $\mathbb{N} \subseteq_e M$ et $w_n \to (3n+1)^{2n+1}_{n+2}$ est une Σ_1-formule). Comme $2n+1 < w_n < c$, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$M \models \exists w_n \left(([a, b] \to (w_n)^{2n+1}_{reg}) \wedge (w_n \to (3n+1)^{2n+1}_{n+2})\right)$$

On utilise maintenant le principe de débordement pour obtenir

$e \in M - \mathbb{N}$ tel que:

$$M \models \exists w_e \left(([a, b] \to (w_e)^{2e+1}_{reg}) \wedge (w_e \to (3e + 1)^{2e+1}_{e+2}) \right)$$

Par lemme 3.1, ceci signifie qu'il existe une suite infinie

$$a \leq c_0 < c_1 < c_2 < \ldots . < c_{2e} \leq b$$

d'indiscernables diagonaux pour les Δ_0-formules. Nous allons prendre le segment initial $I = \{x \in M : x < c_i$ pour un $i \in \mathbb{N}\}$. On commence par montrer que I est une sous-structure de M.

<u>I est fermé pour l'addition</u>:

Il suffit de montrer que $i_0 < i_1 < i_2$ implique $c_{i_0} + c_{i_1} \leq c_{i_2}$. Supposons $i_0 < i_1 < i_2$, si on avait $p + c_{i_1} = c_{i_2}$ pour un $p < c_{i_0}$, alors par l'indiscernabilité diagonale on aurait $p + c_{i_1} = c_j$ pour tout $j > i_2$. Ce qui contredit que les c_i soient distincts, donc $c_{i_0} + c_{i_1} \leq c_{i_2}$.

<u>I est fermé pour la multiplication</u>:

Il suffit de montrer que $i_0 < i_1 < i_2$ implique $c_{i_0} \cdot c_{i_1} \leq c_{i_2}$. Soit $i_0 < i_1 < i_2$. Supposons que l'on ait $p \cdot c_{i_1} < c_{i_2} \leq (p + 1) \cdot c_{i_1}$ pour un $p < c_{i_0}$, nous allons déduire une contradiction.

De $p \cdot c_{i_1} < c_{i_2}$ on obtient $(p + 1) c_{i_1} < c_{i_1} + c_{i_2}$. De plus, par le dernier paragraphe on a $c_{i_1} + c_{i_2} \leq c_j$ pour tout $j > i_2$, donc $(p + 1) c_{i_1} < c_j$ pour tout $j > i_2$.

De $c_{i_2} \leq (p + 1) c_{i_1}$ et de l'indiscernabilité diagonale on obtient $c_j \leq (p + 1) c_{i_1}$ pour tout $j > i_2$. Ceci est contradictoire et donc $c_{i_0} \cdot c_{i_1} \leq c_{i_2}$.

$\underline{I \models PA^-}$:

On sait maintenant que I est une sous-structure de M et donc que $I \prec_{\Delta_0} M$. Du fait que $M \models PA^-$ et que tous les axiomes de PA^- soient de la forme: "$\forall \bar{x}\ \tau(\bar{x})$" avec $\tau(\bar{x})$ sans quantificateur on obtient $I \models PA^-$.

$\underline{I \models PI}$:

Nous allons procéder en trois étapes. Tout d'abord, nous montrerons que dans I toute L-formule avec un paramètre p peut être remplacée par une Δ_0-formule.

Toute L - formule avec une variable libre y peut être écrite dans la forme: $\exists x_1\ \forall x_2 \ldots Q x_n\ \psi(y, x_1, \ldots, x_n)$ où ψ est une formule sans quantificateur et Q dénote le quantificateur $\exists$ ou $\forall$.

Soit $p < c_{i_0}$, on a:

$I \models \exists x_1\ \forall x_2 \ldots Q x_n\ \psi(p, x_1, \ldots, x_n)$

$\Leftrightarrow$

$\exists i_1 > i_0 \ I \models \exists x_1 < c_{i_1} \ \forall x_2 \ldots Q x_n \ \psi(p, x_1, \ldots, x_n)$

$\Leftrightarrow$

$\exists i_1>i_0 \ \forall i_2>i_1 \ldots \ Q i_n>i_{n-1} \ I \models \exists x_1<c_{i_1} \forall x_2<c_{i_2} \ldots Q x_n<c_{i_n} \ \psi(p, x_1, \ldots, x_n)$

$\Leftrightarrow$

$\exists i_1>i_0 \ \forall i_2>i_1 \ldots \ Q i_n>i_{n-1} \ M \models \exists x_1<c_{i_1} \forall x_2<c_{i_2} \ldots Q x_n<c_{i_n} \ \psi(p, x_1, \ldots, x_n)$

$\Leftrightarrow$[1]

$M \models \exists x_1 < c_{i_0+1} \ \forall x_2 < c_{i_0+2} \ldots Q x_n < c_{i_0+n} \ \psi(p, x_1, \ldots, x_n)$

$\Leftrightarrow$

$I \models \exists x_1 < c_{i_0+1} \ \forall x_2 < c_{i_0+2} \ldots Q x_n < c_{i_0+n} \ \psi(p, x_1, \ldots, x_n)$

Ensuite, nous allons montrer que I satisfait BO pour toutes les L-formules avec un paramètre p. Supposons que:

$I \models \exists x \psi(p, x)$ (où $\psi(p, x) \in \Delta_0$)

$\Rightarrow I \models \exists x \psi(p, x) \wedge x<c_{i_0}$ pour un certain c_{i_0}

$\Rightarrow M \models \exists x \psi(p, x) \wedge x<c_{i_0}$ (car $I \prec_{\Delta_0} M$)

Soit x' ce plus petit x dans M, on a:

$I \models \psi(p, x') \wedge x' < c_{i_0}$

---

[1]On considère la formule $\varphi(p, c_{i_1}, \ldots, c_{i_n})$ donnée par $\exists x_1 < c_{i_1} \ \forall x_2 < c_{i_2} \ldots Q x_n < c_{i_n} \ \psi(p, x_1, \ldots, x_n)$. Par l'indiscernabilité diagonale on a $M \models \varphi(p, c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}) \leftrightarrow \varphi(p, c_{i_0+1}, \ldots, c_{i_0+n})$.

$\Rightarrow \quad I \models \psi(p, x') \quad \wedge \quad x' \quad < \quad c_{i_0} \quad$ (car $I \prec_{\Delta_0} M$ et $x' \in I$)

$\Rightarrow \quad M \models \psi(p, x')$

De plus x' doit être ce plus petit x dans I, car sinon il existerait x'' tel que :

$I \models \psi(p, x'') \quad \wedge \quad x'' \quad < \quad x'$

$\Rightarrow M \models \psi(p, x'') \quad \wedge \quad x'' \quad < \quad x'$

Ce qui contredit la minimalité de x' dans M.

Enfin, Il reste à montrer que I satisfait BO pour les autres L - formules. Si la formule ne possède pas de paramètre p, alors il suffit de la remplacer par la formule équivalente $\psi(x) \quad \wedge \quad p = p$. Dans le cas où la formule possède plusieurs paramètres $p_1, \ldots, p_n$, on peut définir une fonction $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ et montrer que cette fonction est une bijection en utilisant uniquement les axiomes de PA^- et le schéma d'induction pour les L - formules sans paramètre. Supposons donc que $\psi'(p, x)$ soit la formule:

$$\psi(p_1, \ldots, p_n, x) \quad \wedge \quad < p_1, \ldots, p_n > \quad = \quad p$$

On a: $I \models \psi(p_1, \ldots, p_n, x) \quad \leftrightarrow \quad \psi'(p, x)$.

Donc I satisfait BO pour la formule $\psi(p_1, \ldots, p_n, x)$.

Nous allons maintenant donner la première preuve de l'indépendance de l'énoncé de Kanamori-McAloon.

Corollaire 3.3: PA $\nvdash$ (KM)

Preuve:

On doit montrer que PA $\nvdash \forall x,n,k\ \exists y\ [x,y] \to (k)^n_{reg}$. Soit M $\models$ PA un modèle non-standard et a $\in$ M - $\mathbb{N}$. On peut supposer qu'il existe b $\in$ M tel que:

$$M \models [a,b] \to (2a)^a_{reg}$$

car sinon la preuve du corollaire est terminée. Par le principe du bon-ordre, on peut également supposer que b est le plus petit élément de M ayant cette propriété. Par le théorème 3.2, il existe donc I $\subseteq_e$ M tel que a $\in$ I < b et I $\models$ PA. Maintenant, I ne peut pas satisfaire (KM), car sinon il existerait y $\in$ I tel que:

$$I \models [a,y] \to (2a)^a_{reg}.$$

Finalement, comme I $\subseteq_e$ M et que $[a,y] \to (2a)^a_{reg}$ est une Σ_1-formule, par le corollaire 1.3 on obtient:

$$M \models [a,y] \to (2a)^a_{reg} \wedge y < b$$

ce qui contredit le fait que b soit le plus petit élément de M tel que:

$$M \models [a,b] \to (2a)^a_{reg}$$

Pour terminer ce chapitre, nous allons faire le lien avec la méthode des indicatrices. Cette méthode permet de savoir si un segment initial I est un modèle de PA.

<u>Définition</u>: Soit M un modèle non-standard de PA. Une fonction $Y:M^2 \to M$ est une *indicatrice* pour la propriété P d'un segment initial de M si:

i) $Y(x,y) = z$ est une Σ_1-formule

ii) $Y(a,b) > \mathbb{N}$ si et seulement s'il existe $I \subseteq_e M$ avec $a \in I < b$ tel que $I \models P$.

Par exemple, la fonction $Y(x, y) = \begin{cases} y - x \text{ si } y \geq x \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$ est une indicatrice pour la propriété "être fermé pour la fonction successeur $x \mapsto x+1$", car si $Y(a, b) > \mathbb{N}$ alors $b - a$ est infini. On a donc $b - a > n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $b > a + n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut donc prendre le segment initial $I = \{x \in M : x < a+n$ pour un $n \in \mathbb{N}\}$.

Une indicatrice de PA est une indicatrice pour la propriété "satisfaire tous les axiomes de PA". Les prochains théorèmes montrent comment les indicatrices sont reliées aux résultats d'indépendance.

Théorème 3.4: Si $Y(x,y)$ est une indicatrice de PA, alors:

$$PA \nvdash \forall x, z\ \exists y\ Y(x, y) \geq z$$

Preuve: Soit M un modèle non-standard de PA et $a,c \in M - \mathbb{N}$ tels que $c < a$. On peut supposer que $M \models \exists y\ Y(a, y) \geq c$, car sinon la preuve est terminée. On utilise le principe du bon-ordre dans M. Soit b le plus petit élément de M tel que $M \models Y(a, b) \geq c$. Comme $c > \mathbb{N}$, il existe $I \subseteq_e M$ avec $a \in I < b$ tel que $I \models PA$. Il reste donc à montrer que $I \models \neg\exists y\ Y(a, y) \geq c$. S'il existait $d \in I$ avec $I \models Y(a, d) \geq c$ alors on aurait $d < b$ (car $I < b$) et $M \models Y(a, d) \geq c$ (car $I \subseteq_e M$ et $Y(a, d) \geq c$ est une Σ_1-formule). Mais ceci contredit le fait que b est le plus petit élément de M tel que $M \models Y(a, b) \geq c$.

Le prochain théorème à été démontré par MacDowell et Specker en 1961 [8].

Théorème (MacDowell-Specker): Pour tout $M \models PA$, il existe M' tel que :

1) $M \prec M'$
2) $M \subseteq_e M'$
3) $M \neq M'$

Théorème 3.5: Soit $Y(x,y)$ une indicatrice de PA alors

$$\mathbb{N} \models \forall x, z\, \exists y\; Y(x, y) \geq z$$

Preuve: Soit M un modèle non-standard de PA. Par le théorème de MacDowell-Specker, M possède une extension élémentaire M', telle que $M \subseteq_e M'$. Pour tous $a \in M$ et $b \in M' - M$, on a donc $Y(a, b) > \mathbb{N}$ et pour tout nombre naturel n:

$$\begin{aligned} M' \models \exists y\; Y(a, y) \geq n \quad & \Rightarrow M \models \exists y\; Y(a, y) \geq n \quad (\text{car } M \prec M') \\ & \Rightarrow M \models \forall x\, \exists y\; Y(x, y) \geq n \\ & \Rightarrow PA \vdash \forall x\, \exists y\; Y(x, y) \geq n \\ & \Rightarrow \mathbb{N} \models \forall x\, \exists y\; Y(x, y) \geq n \\ & \Rightarrow \mathbb{N} \models \forall x, z\, \exists y\; Y(x, y) \geq z \end{aligned}$$

Corollaire 3.6: La fonction:

$$Y(a,b) = \text{le plus petit } e \text{ tel que: } [a,b] \rightarrow (2e)^{e}_{reg}$$

est une indicatrice de PA.

Preuve: On doit montrer que $Y(a,b) > \mathbb{N}$ si et seulement s'il existe $I \subseteq_e M$ tel que $a \in I < b$ et $I \models PA$.

$(\Rightarrow)$ Cette partie est une conséquence directe du théorème 3.2.

$(\Leftarrow)$ Si $Y(a,b) = e \in \mathbb{N}$ et qu'il existe $I \subseteq_e M$ tel que $a \in I < b$ alors par le théorème de Kanamori-McAloon dans $\mathbb{N}$ il existe un plus petit $m \in \mathbf{N}$ tel que:

$$m \rightarrow (2e)^{e}_{reg}$$

$\Rightarrow$ $b - a \leq m$

$\Rightarrow$ $b \leq a + m$

$\Rightarrow$ $a + m \notin \mathbf{N}$

$\Rightarrow$ I n'est pas fermé pour l'addition

$\Rightarrow$ I n'est pas un modèle de PA

CHAPITRE 4: Les fonctions régressives

Dans ce chapitre, nous allons démontrer plusieurs résultats concernant les fonctions régressives. La majeure partie des théorèmes de ce chapitre sont des adaptations des résultats du premier chapitre de l'article de Ketonen-Solovay aux fonctions régressives.

Dans certains théorèmes, on doit utiliser plusieurs fonctions régressives et plusieurs fonctions non-régressives simultanément. Pour cette raison, il est utile d'avoir les définitions suivantes:

<u>Définitions</u>:

1) L'ensemble $H \subseteq X$ *convient* à la fonction $f:[X]^n \to c$ si H est homogène pour f.

2) Pour une fonction régressive $f:[X]^n \to \mathbb{N}$ on dit que $H \subseteq X$ *convient* à f si H est min-homogène pour f.

3) On dit que l'ensemble de fonctions $f_1, \ldots f_n$ *simule* l'ensemble de fonctions $g_1, \ldots, g_n$ si chaque ensemble qui convient à $f_1, \ldots f_n$ convient aussi à $g_1, \ldots, g_m$. (Dans cette définition certaines fonctions f_i et g_i peuvent être régressives)

Nous allons maintenant démontrer plusieurs lemmes et théorèmes qui permettent d'obtenir un ensemble de fonctions $g_1,\ldots,g_n$ qui simule un autre ensemble de fonctions $f_1,\ldots,f_n$.

<u>Lemme 4.1</u>:

a) Soit une fonction $\varphi:[N]^n \to c$, il existe une fonction $\varphi':[N]^{n+1}\to c$ telle que si H est homogène pour φ', alors $H - \{\max(H)\}$ est homogène pour φ.

b) Soit une fonction régressive $\varphi:[N]^n \to N$, il existe une fonction régressive $\varphi':[N]^{n+1} \to N$ telle que si H est min-homogène pour φ', alors $H - \{\max(H)\}$ est min-homogène pour φ.

<u>Preuve</u>:

Dans les deux cas, on prend la fonction $\varphi':(x_1,\ldots,x_{n+1}) \mapsto \varphi(x_1,\ldots,x_n)$. Pour tout $\overline{x} \in H - \{\max(H)\}$ on a $\varphi(x_1,\ldots,x_n) = \varphi'(x_1,\ldots,x_n,\max(H))$ ce qui montre que φ' simule φ.

<u>Lemme 4.2</u>: Soient deux fonctions $f_1:[N]^n \to c$ et $f_2:[N]^n \to d$, il existe une fonction $f:[N]^n \to cd$ qui simule f_1 et f_2.

<u>Preuve</u>: On prend $f:(x_1,\ldots,x_n) \mapsto (f_1(x_1,\ldots,x_n),f_2(x_1,\ldots,x_n))$. On voit directement que si H est homogène pour f alors H est homogène pour f_1 et f_2.

<u>Lemme 4.3</u>: Soit une fonction régressive $f:[N]^n \to N$. $H \subseteq N$ est min-homogène pour f si et seulement si tous les sous-ensembles $U \subseteq H$ de cardinalité n+1 sont min-homogènes pour f.

<u>Preuve</u>:

($\Rightarrow$) Si H est min-homogène alors il est évident que chaque sous-ensemble de H est aussi min-homogène.

($\Leftarrow$) Supposons maintenant que H ne soit pas min-homogène. Il existe donc deux séquences $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ et $x_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ d'éléments de H telles que $f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \neq f(x_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$. Supposons maintenant que ces séquences soient ordonnées selon l'ordre lexicographique. Nous allons utiliser le principe du bon-ordre à trois reprises. Premièrement $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ est la première séquence pour laquelle il existe $y_1, \ldots, y_{n-1}$ satisfaisant cette inégalité. Deuxièmement parmi ces séquences $y_1, \ldots, y_{n-1}$ choisissons la première. Finalement, soit i le plus petit indice tel que $x_i \neq y_i$. On doit avoir:

$$\begin{aligned}
x_i < y_i \quad &\Rightarrow \quad (x_0, \ldots, x_i, y_i, y_{i+1}, \ldots, y_{n-2}) < (x_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \\
&\Rightarrow \quad f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(x_0, \ldots, x_i, y_i, y_{i+1}, \ldots, y_{n-2}) \\
&\Rightarrow \quad f(x_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \neq f(x_0, \ldots, x_i, y_i, y_{i+1}, \ldots, y_{n-2}) \\
&\Rightarrow \quad f(x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, \ldots, y_{n-1}) \neq f(x_0, \ldots, x_i, y_i, y_{i+1}, \ldots, y_{n-2})
\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité indique que l'ensemble $U = \{x_0, \ldots, x_i, y_i, y_{i+1}, \ldots, y_{n-1}\}$ n'est pas min-homogène pour la fonction f.

Définition: On définit la fonction "le plus petit entier supérieur ou égal au logarithme de x en base 2" de la façon suivante:

$$\log(x) = \text{le plus petit } d \in \mathbb{N} \text{ tel que } x \leq 2^d$$

Lemme 4.4: Si $x \geq 7$ alors $2\log(x)+1 \leq x$

Preuve: On remarque que $2\log(7)+1 \leq 7$. Il suffit donc de vérifier que pour tout $x \geq 7$, la croissance de la fonction $2\log(x) + 1$ est inférieure à celle de x.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(2\log(x) + 1) &\leq \frac{d}{dx}(2(\log_2(x) + 1) + 1) \\
&\leq \frac{d}{dx}(2\log_2(x) + 3) \\
&= \frac{2\log_2(e)}{x} \\
&< \frac{4}{x} \\
&< 1 \quad \text{pour tout } x \geq 7 \\
&= \frac{d}{dx}(x)
\end{aligned}$$

Le lemme suivant est utilisé pour minimiser les valeurs d'une fonction régressive.

Lemme 4.5: Soit $f:[N]^n \to N$ une fonction régressive. Il existe une fonction régressive $\overline{f}:[N]^{n+1} \to N$ telle que:

a) $\overline{f}(s) < 2\log(\min(s)) + 1$

b) Si $\overline{H}$ est min-homogène pour $\overline{f}$, alors $H = \overline{H} - (7 \cup \{\max(\overline{H})\})$ est min-homogène pour f.

Preuve: Premièrement remarquons que lorsqu'on écrit un nombre n en notation binaire alors cette notation contient au plus log(n+1) chiffres binaires. Comme $f(s) + 1 \leq \min(s)$, on peut donc écrire f(s) dans la notation suivante: $f(s) = (y_0,\ldots,y_{\log(\min(s))-1})_2$, où chaque y_i est un chiffre binaire[1]. Ensuite, on définit la fonction $\overline{f}:[N]^{n+1} \to N$ de la façon suivante:

Si $x_0 < 7$ ou si $\{x_0,\ldots,x_n\}$ est min-homogène pour f, alors on pose $\overline{f}(x_0,\ldots,x_n) = 0$.

Sinon on pose $\overline{f}(x_0,\ldots,x_n) = 2i + y_i(x_0,\ldots,x_{n-1}) + 1$, où $i < \log(x_0)$ est le plus petit indice pour lequel $\{x_0,\ldots,x_n\}$ n'est pas min-homogène pour y_i.

Montrons que $\overline{f}$ satisfait a):

[1] $(a_0,\ldots,a_n)_2 = a_0 + 2a_1 + \ldots + 2^n a_n$ où $a_i \in \{0, 1\}$ $(i=0,\ldots,n)$

$$
\begin{aligned}
\overline{f}(s) &= 2i + y_i + 1 \\
&\leq 2i + 1 + 1 \\
&= i + i + 2 \\
&< \log(\min(s)) + i + 2
\end{aligned}
$$

donc,

$$
\begin{aligned}
\overline{f}(s) &\leq \log(\min(s)) + i + 1 \\
&< \log(\min(s)) + \log(\min(s)) + 1 \\
&= 2\log(\min(s)) + 1
\end{aligned}
$$

Maintenant, le fait que $\overline{f}$ soit régressive est une simple conséquence du lemme précédent.

Montrons que $\overline{f}$ satisfait b). Soit $\overline{H}$ un ensemble min-homogène pour $\overline{f}$. Nous allons montrer que $\overline{f}\,|\,[H]^{n+1}$ est la fonction constante 0. Ceci montrera que tous les sous-ensembles de H de cardinalité n+1 sont min-homogènes pour f et donc par le lemme 4.3 que H est min-homogène pour f. Supposons qu'au contraire il existe une séquence $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ dans H telle que $\overline{f}(x_0,\ldots,x_n) = 2i + y_i(x_0,\ldots,x_{n-1}) + 1$. Soient $s, t \in \left[\{x_0, \ldots, x_n\}\right]^n$ avec $\min(s) = \min(t) = x_0$. Comme $\overline{H}$ est un ensemble min-homogène pour $\overline{f}$ on doit avoir $\overline{f}(s \cup \{\max(\overline{H})\}) = \overline{f}(x_0, \ldots, x_n) = \overline{f}(t \cup \{\max(\overline{H})\})$. Mais ceci prouve que $y_i(s) = y_i(t)$ et donc que $\{x_0, \ldots, x_n\}$ est min-homogène pour y_i. Ce qui contredit le fait que $\overline{f}(x_0, \ldots, x_n) = 2i + y_i(x_0, \ldots, x_{n-1}) + 1$.

Par le même type de preuve qu'on a donnée pour le lemme 4.4, on peut montrer que pour tout $e \in \mathbf{N}$, à partir d'un certain $x \in \mathbf{N}$, on a $(2\log(x) + 1)^{e+1} \leq x$. Ceci, nous permet de définir la fonction suivante:

<u>Définition</u>: La fonction $\wp: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ est définie par:

$$\wp(e) = \text{le plus petit } x \text{ tel que } (2\log(x) + 1)^{e+1} \leq x$$

<u>Proposition 4.6</u>:

Soit un ensemble de fonctions régressives $\{ f_i:[\mathbf{N}]^n \rightarrow \mathbf{N} \mid i \leq e \}$, il existe une fonction régressive $\rho:[\mathbf{N}]^{n+1} \rightarrow \mathbf{N}$ telle que si $\overline{H}$ est min-homogène pour ρ, alors $H = \overline{H} - (\wp(e)\cup\{\max(\overline{H})\})$ est min-homogène pour chaque f_i.

<u>Preuve</u>: Supposons que l'on ait un ensemble de fonctions régressives $\{ f_i:[\mathbf{N}]^n \rightarrow \mathbf{N} \mid i \leq e \}$. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on définit une fonction:

$$f_k: k^{e+1} \rightarrow \mathbf{N}: (x_0, \ldots, x_e) \mapsto \begin{cases} n & \begin{array}{l} (x_0, \ldots, x_n) \text{ étant le } (n+1)^{\text{ieme}} \\ \text{élément de } k^{e+1} \text{ en ordre} \\ \text{lexicographique} \end{array} \end{cases}$$

(Par exemple: $f_2(0,0) = 0$, $f_2(0,1) = 1$, $f_2(1,0) = 2$ et $f_2(1,1) = 3$)

Évidemment, pour tout $(x_0, \ldots, x_e) \in k^{e+1}$, on a: $f_k(x_0, \ldots, x_e) < k^{e+1}$.

Finalement, on définit la fonction $\rho : [\mathbf{N}]^{n+1} \to \mathbf{N}$ de la façon suivante:

$$\rho(s) = \begin{cases} f_{2\log(s_0)+1}(\overline{f}_0(s), \ldots, \overline{f}_e(s)) & \text{si } s_0 \geq \wp(e) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $s_0 = \min(s)$ et les fonctions $\overline{f}_i$ sont obtenues à l'aide du lemme 4.5. Maintenant si $s_0 \geq p(e)$, on doit avoir:

$$\rho(s) = f_{2\log(s_0)+1}(\overline{f}_0(s), \ldots, \overline{f}_e(s)) < (2\log(s_0) + 1)^{e+1} \leq s_0$$

donc la fonction ρ est régressive. Finalement, si $\overline{H}$ est min-homogène pour ρ alors $\min(H) > \wp(e)$ et donc:

$$\rho|H = f_{2\log(s_0)+1}(\overline{f}_0(s), \ldots, \overline{f}_e(s))$$

Ceci montre que H doit être min-homogène pour chaque $\overline{f}_i$ car $f_{2\log(s_0)+1}$ est défini à l'aide de l'ordre lexicographique et donc par le lemme précèdent, H est min-homogène pour chaque f_i.

<u>Définition</u>: Une fonction $f : [\mathbf{N}]^n \to \mathbf{N}$ est dite *min-croissante* sur un ensemble $X \subseteq \mathbf{N}$, si pour tous $\overline{s}$, $\overline{t} \in [X]^n$, $\min(\overline{s}) < \min(\overline{t})$ implique $f(\overline{s}) \leq f(\overline{t})$.

La notion de fonction min-croissante joue un rôle important dans la méthode de Ketonen-Solovay, c'est pourquoi dans la prochaine proposition nous allons montrer comment on procède pour rendre une fonction régressive min-croissante.

Proposition 4.7:

Pour toute fonction régressive $f:[\mathbb{N}]^n \to \mathbb{N}$, il existe une fonction régressive $\sigma_1:[\mathbb{N}]^{n+1} \to \mathbb{N}$ et une fonction $\sigma_2:[\mathbb{N}]^{n+1} \to 2$ telle que si $H \subseteq \mathbb{N}$ convient à σ_1 et à σ_2, alors f est min-homogène et min-croissante sur l'ensemble $\overline{H} = H - \{\max(H)\}$.

Preuve :

On définit les fonctions $\sigma_1:[\mathbb{N}]^{n+1} \to \mathbb{N}$ et $\sigma_2:[\mathbb{N}]^{n+1} \to 2$ par:

$\sigma_1(x_0,\ldots,x_n) = \min(f(x_0,\ldots,x_{n-1}),f(x_1,\ldots,x_n))$

$$\sigma_2(x_0,\ldots,x_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x_0,\ldots,x_{n-1}) \leq f(x_1,\ldots,x_n) \\ 1 & \text{sin on} \end{cases}$$

Supposons que $\sigma_2|[H]^{n+1}$ est la fonction constante 1. Si on prend une séquence $x_0 < \ldots < x_{n+1}$ dans H on doit donc avoir:

$$f(x_0,\ldots,x_{n-1}) > f(x_1,\ldots,x_n) > f(x_2,\ldots,x_{n+1})$$

Ceci nous donne:

$$\sigma_1(x_0,\ldots,x_n) = f(x_1,\ldots,x_n) \text{ et } \sigma_1(x_0,x_2,\ldots,x_{n+1}) = f(x_2,\ldots,x_{n+1})$$

Ce qui contredit le fait que H soit min-homogène pour σ_1. $\sigma_2|[H]^{n+1}$ doit donc être la fonction constante 0. Ceci prouve que

$$f(x_0,\ldots,x_{n-1}) = \sigma_1(x_0,\ldots,x_{n-1},\max(H))$$

est min-homogène pour $\overline{H}$. De plus, pour tous sous-ensembles $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}, \{y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}\} \subseteq \overline{H}$ avec $x_0 < y_0$ on doit avoir:

$$f(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = f(x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-2}) \leq f(y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}).$$

Donc pour tous $\overline{s}, \overline{t} \in [\overline{H}]^n$, $\min(\overline{s}) < \min(\overline{t}) \Rightarrow f(\overline{s}) \leq f(\overline{t})$.

<u>Lemme 4.8</u>: Soit $n \geq 8$. Il existe une fonction régressive $G_n : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$ telle que si $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$ est min-homogène pour G_n et que $|S| \geq n$ alors $s_4 \geq n$.

<u>Preuve</u>: On prend la fonction suivante:

$$G_n : (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 = 0 \text{ ou } x_1 = 1 \\ 1 & \text{si } x_1 = 2 \\ 0 & \text{si } x_1 > 2 \text{ et que } x_2 < \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \\ 1 & \text{si } x_1 > 2 \text{ et que } \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq x_2 < n \\ 2 & \text{si } x_1 > 2 \text{ et que } n \leq x_2 \end{cases}$$

où $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ dénote $\frac{n}{2}$ arrondit à l'entier supérieur.

Cette fonction est clairement régressive. Premièrement, remarquons que:

$$8 \leq n \Rightarrow n + 8 \leq 2n$$

$$\Rightarrow \left[\frac{n+8}{2}\right] \leq n$$

$$\Rightarrow \left[\frac{n}{2}\right] + 4 \leq n$$

on a donc:

$$s_{\left[\frac{n}{2}\right]+1} \geq \left[\frac{n}{2}\right] \Rightarrow G_n(s_3, s_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}) \geq 1$$

$$\Rightarrow G_n(s_3, s_4) \geq 1$$

$$\Rightarrow s_4 \geq \left[\frac{n}{2}\right]$$

$$\Rightarrow s_{4+\left[\frac{n}{2}\right]} \geq \left[\frac{n}{2}\right] + s_4 \geq 2\left[\frac{n}{2}\right] \geq n$$

$$\Rightarrow G_n(s_3, s_{4+\left[\frac{n}{2}\right]}) \geq 2$$

$$\Rightarrow G_n(s_3, s_4) \geq 2$$

$$\Rightarrow s_4 \geq n$$

<u>Définition</u>: On définit la notation $E_m(n)$ de la façon suivante:

$$E_m(n) = \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^n}}}}}_{m \text{ copies de } 2}$$

À l'aide de cette définition , on peut généraliser certains résultats concernant les fonctions régressives à d'autres types de fonctions. Par exemple, le prochain théorème est une généralisation du lemme 4.5.

Théorème 4.9: Soient $c \geq 1$ et $h:[\mathbb{N}]^n \to \mathbb{N}$ une fonction telle que $h(x_0,\ldots,x_{n-1}) < E_m(x_0^c)$. Il existe une fonction régressive $f:[\mathbb{N}]^{n+m+1} \to \mathbb{N}$, telle que si S convient à f alors h est min-homogène sur l'ensemble $S' = S - (\wp(c) \cup \{\max(S)\})$.

Preuve: Par induction sur m:

Cas $m = 0$ et $c = 1$: On doit avoir $h(x_0,\ldots,x_{n-1}) < E_0(x_0^1) = x_0$, il suffit donc de prendre $f(x_0,\ldots,x_n) = h(x_0,\ldots,x_{n-1})$.

Cas $m = 0$ et $c > 1$: On doit avoir $h(x_0,\ldots,x_{n-1}) < E_0(x_0^c) = x_0^c$. Pour tout $1 \leq i \leq c$, on définit la fonction $h_i(x_0,\ldots,x_{n-1})$ comme étant le $i^{\text{ième}}$ chiffre du nombre $h(x_0,\ldots,x_{n-1})$ écrit en base x_0. On a $h_i(x_0,\ldots,x_{n-1}) < x_0$. Donc par la proposition 4.6 , il existe une fonction régressive $f:[\omega]^{n+1} \to \omega$ telle que si S convient à f alors sur $S' = S - (\wp(c) \cup \{\max(S)\})$ toutes les fonctions h_i sont min-homogènes et donc h aussi.

On suppose le résultat pour m: On doit avoir $h(x_0,\ldots,x_{n-1}) < E_{m+1}(x_0^c)$. Nous allons utiliser le même raisonnement que dans la preuve du lemme 4.5. Lorsqu'on écrit le nombre $h(x_0,\ldots,x_{n-1}) < E_{m+1}(x_0^c)$ en notation binaire alors cette notation contient au plus $E_m(x_0^c)$ chiffres binaires. On peut donc écrire $h(\overline{x})$ dans la notation suivante: $h(s) = (y_0,\ldots,y_{E_m(x_0^c)-1})_2$, où chaque y_i est un chiffre binaire. Ensuite, on définit la fonction $\bar{h} : [\mathbf{N}]^{n+1} \to \mathbf{N}$ de la façon suivante:

Si $E_m(x_0^c) < 7$ ou si $\{x_0, \ldots, x_n\}$ est min-homogène pour h alors on pose $\bar{h}(x_0, \ldots, x_n) = 0$.

Sinon on pose $\bar{h}(x_0, \ldots, x_n) = 2i + y_i(x_0, \ldots, x_{n-1}) + 1$ où $i < E_m(x_0^c)$ est le plus petit indice pour lequel $\{x_0, \ldots, x_n\}$ n'est pas min-homogène pour y_i.

Si $\bar{h}(x_0, \ldots, x_n) \neq 0$, alors on obtient:

$$\begin{aligned} \bar{h}(\bar{x}) &= 2i + y_i + 1 \\ &\leq 2i + 1 + 1 \\ &= i + i + 2 \\ &< E_m(x_0^c) + i + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{donc, } \bar{h}(\bar{x}) &\leq E_m(x_0^c) + i + 1 \\ &< 2E_m(x_0^c) + 1 \\ &< E_m(x_0^c) \quad \text{(par le lemme 4.4).} \end{aligned}$$

Donc par l'hypothèse d'induction, il existe une fonction régressive $f : [\mathbf{N}]^{n+m+2} \to \mathbf{N}$ telle que si S convient à f alors $\bar{h}$ est min-homogène sur l'ensemble $S' = S - (\wp(c) \cup \{\max(S)\})$.

Soit S un ensemble qui convient à f. Nous allons montrer que $\overline{h} \mid [S']^{n+1}$ est la fonction constante 0. Par le lemme 4.3, ceci montrera que S' est min-homogène pour f. Supposons qu'au contraire il existe une séquence $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ dans S' telle que $\overline{h}(x_0, \ldots, x_n) = 2i + y_i(x_0, \ldots, x_{n-1}) + 1$. Soient $s, t \in \left[\left\{x_0, \ldots, x_n\right\}\right]^n$ avec $\min(s) = \min(t) = x_0$. Comme S est un ensemble min-homogène pour $\overline{h}$, on doit avoir $\overline{h}(s \cup \{\max(S)\}) = \overline{h}(x_0, \ldots, x_n) = \overline{h}(t \cup \{\max(S)\})$. Mais ceci prouve $y_i(s) = y_i(t)$ et donc que $\{x_0, \ldots, x_n\}$ est min-homogène pour y_i. Ce qui contredit le fait que $\overline{h}(x_0, \ldots, x_n) = 2i + y_i(x_0, \ldots, x_{n-1}) + 1$.

CHAPITRE 5: La hiérarchie de fonctions de Wainer

Nous allons maintenant définir la hiérarchie de fonctions de Wainer. Cette hiérarchie est utilisée pour étudier les fonctions récursives et dans le prochain chapitre elle va nous permettre de démontrer l'indépendance de l'énoncé de Kanamori-McAloon dans PA. À partir de maintenant, nous allons devoir travailler avec des ordinaux. Pour cette raison, nous allons utiliser la notation ω pour représenter l'ensemble des nombres naturels au lieu de la notation $\mathbb{N}$. De plus, ε_0 représente le plus petit ordinal α tel que $\alpha = \omega^\alpha$.

Premièrement, faisons un rappel sur la forme normale de Cantor. Si λ est un ordinal tel que $0 < \lambda < \varepsilon_0$, alors λ possède une représentation unique dans la forme:

$$\lambda = \omega^{\alpha_1} n_1 + \ldots + \omega^{\alpha_k} n_k$$

où $n_1, \ldots, n_k$ sont des entiers positifs et α_1, α_2, ..., α_k sont des ordinaux tels que $\varepsilon_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_k$. De plus, α_k peut être caractérisé comme étant le seul ordinal α pour lequel il existe un ordinal β tel que $\lambda = \omega^\alpha(\beta+1)$.

Maintenant pour chaque ordinal limite $\lambda \leq \varepsilon_0$, nous allons définir par induction une suite $\{\lambda\}(n)$ qui croit de façon strictement monotone vers λ.

<u>Cas 1</u>: Si $\lambda = 0$, on prend $\{0\}(n) = 0$

<u>Cas 2</u>: Si $\lambda = \beta + 1$, on prend $\{\beta + 1\}(n) = \beta$

<u>Cas 3</u>: Si λ est un ordinal limite de la forme $\lambda = \omega^{\alpha+1}(\beta+1)$, on prend $\{\lambda\}(n) = \omega^{\alpha+1}\beta + \omega^{\alpha}n$

<u>Cas 4</u>: Si λ est un ordinal limite de la forme $\lambda = \omega^{\gamma}(\beta+1)$ où γ est ordinal limite, on prend $\{\lambda\}(n) = \omega^{\gamma}\beta + \omega^{\{\gamma\}(n)}$

<u>Cas 5</u>: Si $\lambda = \varepsilon_0$, on prend $\{\varepsilon_0\}(0) = \omega$ et $\{\varepsilon_0\}(n+1) = \omega^{\{\varepsilon_0\}(n)}$

De cette façon, on a $\{\lambda\}(n) < \alpha$ si $0 < \lambda \leq \varepsilon_0$ et $\{\lambda\}(n) \leq \lambda$ si $0 \leq \lambda \leq \varepsilon_0$.

À l'aide de la suite $\{\lambda\}(n)$, on peut maintenant définir les fonctions de Wainer.

<u>Définition</u>: La hiérarchie de *fonctions de Wainer* $F_\gamma : \omega \to \omega$ est définie par induction sur les ordinaux $\gamma \leq \varepsilon_0$ de la façon suivante:

$F_0(x) = x + 1$

$F_{\gamma+1}(x) = F_\gamma^{x+1}(x)$ (où $F_\gamma^m(x) = \underbrace{F_\gamma(F_\gamma(\ldots(F_\gamma(x))\ldots))}_{\text{m itérations de } F_\gamma(x)}$)

Si γ est un ordinal limite alors $F_\gamma(n) = F_{\{\gamma\}(n)}(n)$

À titre d'exemple montrons que: $F_1(x) = 2x+1$ et $F_2(x) = 2^{x+1}(x+1)-1$

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= F_0^{x+1}(x) \\
&= \underbrace{F_0(F_0(\ldots(F_0(x))\ldots)}_{(x+1)\text{ fois}} \\
&= (x + \underbrace{1) + 1 + 1 + \ldots + 1}_{(x+1)\text{ fois}} \\
&= x + (x + 1) \\
&= 2x + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2(x) &= F_1^{x+1}(x) \\
&= \underbrace{F_1(F_1(\ldots(F_1(x))\ldots)}_{(x+1)\text{ fois}} \\
&= \underbrace{2(2(\ldots(2(2x + 1) + 1\ldots) + 1) + 1}_{(x+1)\text{ fois}} \\
&= 2^{x+1}x + 2^x + 2^{x-1} + \ldots + 2^2 + 2^1 + 1 \\
&= 2^{x+1}x + 2^{x+1} - 1 \\
&= 2^{x+1}(x + 1) - 1
\end{aligned}$$

De la même façon on peut montrer que $F_3(x) \approx 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^x}}}} \Big\}(x+1)$ copies de 2.

Les autres fonctions $F_\gamma(x)$ ont une croissance trop rapide pour être exprimées à l'aide des opérations arithmétiques élémentaires. Pour $n < \omega$, F_n est une fonction primitive récursive. La fonction F_ω est la première fonction de la hiérarchie qui n'est pas primitive récursive et à l'aide de la définition de la suite $\{\gamma\}(n)$ on obtient que $F_\omega(n) = F_n(n)$.

Définitions:

1) Une fonction $f(\overline{x})$ est *PA-récursive* si $f(\overline{x}) = y$ est une formule Σ_1 et que $PA \vdash \forall\overline{x}\exists y\ f(\overline{x}) = y$.

2) Pour deux fonctions $G:\omega \to \omega$ et $H:\omega \to \omega$, on dit que H domine G s'il existe $n \in \omega$, tel que pour tout $m > n$, $H(m) > G(m)$.

Nous allons maintenant énoncer le résultat fondamental pour la hiérarchie des fonctions F_γ. La preuve de ce résultat est donnée dans l'article de Wainer [14].

Théorème: (Wainer) La fonction F_{ε_0} n'est pas PA-récursive et elle domine toutes les fonctions PA-récursives.

Le restant de ce chapitre va être consacré à démontrer d'autres résultats concernant la hiérarchie de Wainer. En particulier, nous allons montrer que ces fonctions sont strictement monotones croissantes et que si $\alpha \leq \beta$ alors $F_\alpha(x) \leq F_\beta(x)$.

<u>Notation</u>: Soient deux ordinaux α et β tels que $\alpha < \beta \leq \varepsilon_0$. On note $\beta \underset{n}{\longrightarrow} \alpha$ s'il existe une séquence d'ordinaux $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_r$ telle que $\gamma_0 = \beta$, $\gamma_{i+1} = \{\gamma_i\}(n)$ pour tout $i < r$ et $\gamma_r = \alpha$.

<u>Lemme 5.1</u> Soient α, β et γ des ordinaux tels que $\alpha > \beta > \gamma$.

a) Si $\alpha \underset{n}{\longrightarrow} \beta$ et $\alpha \underset{n}{\longrightarrow} \gamma$ alors $\beta \underset{n}{\longrightarrow} \gamma$

b) Si $\alpha \underset{n}{\longrightarrow} \beta$ et $\beta \underset{n}{\longrightarrow} \gamma$ alors $\alpha \underset{n}{\longrightarrow} \gamma$

La preuve de ce dernier lemme est une application directe de la définition de $\underset{n}{\longrightarrow}$.

<u>Définition</u>: Soient α et β deux ordinaux ayant les formes normales de Cantor suivantes:

$$\alpha = \omega^{\alpha_1} n_1 + \ldots + \omega^{\alpha_k} n_k$$

$$\beta = \omega^{\beta_1} m_1 + \ldots + \omega^{\beta_p} m_p$$

on dit que α est <u>normalement supérieure</u> à β si $\alpha_k \geq \beta_1$.

Lemme 5.2: α est normalement supérieur à β si et seulement s'il existe deux ordinaux θ et δ tel que $\alpha = \omega^{\theta}\delta$ et $\beta < \omega^{\theta+1}$.

Preuve: Soient le formes normales de Cantor :

$$\alpha = \omega^{\alpha_1}n_1+\ldots+\omega^{\alpha_k}n_k$$

$$\beta = \omega^{\beta_1}m_1+\ldots+\omega^{\beta_p}m_p$$

($\Rightarrow$) Par la remarque sur la forme Cantor, il existe δ tel que $\alpha = \omega^{\alpha_k}(\delta + 1)$ de plus on doit avoir $\beta < \omega^{\beta_1+1} \leq \omega^{\alpha_k+1}$.

($\Leftarrow$) $\alpha = \omega^{\theta}\delta \Rightarrow \theta \leq \alpha_k$ et $\beta < \omega^{\theta+1} \Rightarrow \beta_1 \leq \theta$.

Lemme 5.3: Soient deux ordinaux α, $\beta < \varepsilon_0$. Si α est normalement supérieur à β alors $\{\alpha+\beta\}(n) = \alpha + \{\beta\}(n)$.

Preuve: De l'inégalité $\alpha_k \geq \beta_1$, on obtient deux choses.

Premièrement, cela implique que si β est un ordinal limite alors α est un ordinal limite et donc $\alpha + \beta$ est aussi un ordinal limite.

Deuxièmement, cela implique que la forme normale de Cantor de $\alpha + \beta$ est l'une des expressions suivantes:

$$\alpha + \beta = \omega^{\alpha_1}n_1+\ldots+\omega^{\alpha_k}n_k+ \omega^{\beta_1}m_1+\ldots+\omega^{\beta_p}m_p$$

ou

$$\alpha + \beta = \omega^{\alpha_1}n_1+\ldots+\omega^{\alpha_k}(n_k + m_1)+\ldots+\omega^{\beta_p}m_p$$

On peut donc écrire α, β et $\alpha + \beta$ dans les formes suivantes:

$$\alpha = \omega^{\alpha_k}(\delta_1 + 1) \ ,\beta = \omega^{\beta_p}(\delta_2 + 1) \text{ et } \alpha + \beta = \omega^{\beta_p}(\delta_3 + 1)$$

Maintenant, on dénote par α_k-β_p le plus petit ordinal γ tel que $\gamma + \beta_p = \alpha_k$,

$$\Rightarrow \alpha + \beta = \omega^{\alpha_k}(\delta_1 + 1) + \omega^{\beta_p}(\delta_2 + 1)$$

$$= \omega^{\beta_p}(\omega^{\alpha_k-\beta_p}(\delta_1 + 1) + \delta_2 + 1)$$

$$\Rightarrow \delta_3 = \omega^{\alpha_k-\beta_p}(\delta_1 + 1) + \delta_2 \text{ (car la représentation est unique)}$$

Maintenant il y a trois possibilités:

Cas 1: Si β est un ordinal limite et que β_p est un ordinal successeur alors on dénote l'ordinal qui précède β_p par β_p-1.

$$\{\alpha + \beta\}(n) = \omega^{\beta_p}\delta_3 + \omega^{\beta_p-1}n$$

$$= \omega^{\beta_p}((\omega^{\alpha_k-\beta_p})(\delta_1 + 1) + \delta_2) + \omega^{\beta_p-1}n$$

$$= \omega^{\alpha_k}(\delta_1 + 1) + \omega^{\beta_p}\delta_2 + \omega^{\beta_p-1}n$$

$$= \alpha + \{\beta\}(n)$$

Cas 2: Si β est un ordinal limite et que β_p est un ordinal limite.

$$\begin{aligned}\{\alpha + \beta\}(n) &= \omega^{\beta_p}\delta_3 + \omega^{\{\beta_p\}}n \\ &= \omega^{\beta_p}((\omega^{\alpha_k - \beta_p})(\delta_1 + 1) + \delta_2) + \omega^{\{\beta_p\}}n \\ &= \omega^{\alpha_k}(\delta_1 + 1) + \omega^{\beta_p}\delta_2 + \omega^{\{\beta_p\}}n \\ &= \alpha + \{\beta\}(n)\end{aligned}$$

Cas 3: Si β est un ordinal successeur alors $\alpha + \beta$ est aussi un ordinal successeur, soit $\alpha+\beta-1$ l'ordinal qui précède $\alpha + \beta$. On a $\{\alpha + \beta\}(n) = \alpha + \beta - 1 = \alpha + \{\beta\}(n)$

Lemme 5.4: Soient deux ordinaux α, $\beta < \varepsilon_0$ tels que α est normalement supérieur à β, si $\beta \underset{n}{\rightarrow} \kappa$ alors $(\alpha + \beta) \underset{n}{\rightarrow} (\alpha + \kappa)$.

Preuve:

Il existe une séquence d'ordinaux $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_r$ tels que $\gamma_0 = \beta$, $\gamma_{i+1} = \{\gamma_i\}(n)$ pour tout $i < r$ et $\gamma_r = \kappa$. À l'aide du lemme précédent on obtient les égalités suivantes:

$\alpha + \gamma_0 = \alpha + \beta$, $\alpha + \gamma_{i+1} = \alpha+\{\gamma_i\}(n) = \{\alpha+\gamma_i\}(n)$ et $\alpha+ \gamma_r = \alpha+\kappa$

donc $(\alpha + \beta) \underset{n}{\rightarrow} (\alpha + \kappa)$.

Lemme 5.5: Si $0 < \alpha \leq \varepsilon_0$ alors $\alpha \underset{n}{\rightarrow} 0$.

Preuve: On procède par induction sur α.

$\alpha = 1$ Si on prend $\gamma_0 = 1$ et $\gamma_1 = 0$, on a $\{1\}(n)=0$. Donc $1 \underset{n}{\rightarrow} 0$.

$\alpha = \beta + 1$ Par la transitivité de $\underset{n}{\rightarrow}$ (lemme 5.1), il suffit de montrer que $\beta+1 \underset{n}{\rightarrow} \beta$. Pour cela, il suffit de prendre la séquence $\gamma_0 = \beta+1$ et $\gamma_1 = \beta$.

α est un ordinal limite Comme $\alpha > 0$, on a $\{\alpha\}(n) < \alpha$ donc par l'hypothèse d'induction on a $\{\alpha\}(n) \underset{n}{\rightarrow} 0$. Finalement, par la transitivité de $\underset{n}{\rightarrow}$ il suffit de montrer que $\alpha \underset{n}{\rightarrow} \{\alpha\}(n)$. Pour cela, on prend la séquence $\gamma_0 = \alpha$ et $\gamma_1 = \{\alpha\}(n)$.

Lemme 5.6: Si k et p sont deux nombres naturels tels que $k < p$ et α est un ordinal inférieur à ε_0, alors $\omega^\alpha p \underset{n}{\rightarrow} \omega^\alpha k$.

Preuve: Par le lemme 5.5, on a: $\omega^\alpha(p-k) \underset{n}{\rightarrow} 0$. Ensuite, on utilise le lemme 5.4 pour obtenir: $\omega^\alpha p \underset{n}{\rightarrow} \omega^\beta k$.

Lemme 5.7: Si δ est un ordinal inférieur à ε_0, alors $\omega^{\delta+1} \underset{n}{\rightarrow} \omega^{\delta}$.

Preuve: $\omega^{\delta+1} \underset{n}{\rightarrow} \omega^{\delta}n$ (car $\{\omega^{\delta+1}\}(n) = \omega^{\delta}n$). De plus, par le lemme 5.6 on a $\omega^{\delta}n \underset{n}{\rightarrow} \omega^{\delta}$, donc par la transitivité $\omega^{\delta+1} \underset{n}{\rightarrow} \omega^{\delta}$.

Lemme 5.8: Si α est inférieur à ε_0 et que $\alpha \underset{n}{\rightarrow} \beta$, alors $\omega^{\alpha} \underset{n}{\rightarrow} \omega^{\beta}$.

Preuve: Par hypothèse, il existe une séquence d'ordinaux γ_0, $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ tels que $\gamma_0 = \alpha$, $\gamma_{i+1} = \{\gamma_i\}(n)$ pour tout $i < r$ et $\gamma_r = \beta$. On considère la séquence donnée par $\delta_i = \omega^{\gamma_i}$ pour $0 \leq i \leq r$. On doit montrer que $\delta_{i+1} = \{\delta_i\}(n)$ pour tout $i < r$.

Cas 1: Si γ_i est un ordinal limite alors:

$$\{\delta_i\}(n) = \{\omega^{\gamma_i}\}(n) = \omega^{\{\gamma_i\}(n)} = \omega^{\gamma_{i+1}} = \delta_{i+1}$$

Cas 2: Si $\gamma_i = \lambda + 1$ alors:

$$\{\delta_i\}(n) = \{\omega^{\lambda+1}\}(n) = \omega^{\lambda}n = \omega^{\{\gamma_i\}(n)} = \omega^{\gamma_{i+1}} = \delta_{i+1}$$

Théorème 5.9: Soient i, j deux nombres naturels et λ un ordinal limite. Si $i < j$ et $\lambda \leq \varepsilon_0$ alors $\{\lambda\}(j) \underset{1}{\rightarrow} \{\lambda\}(i)$.

Preuve: On procède par induction sur l'ordinal limite λ.

Cas 1: Si $\lambda = \omega^{\delta+1}$ (en particulier si $\lambda = \omega$) alors par le lemme 5.6 :

$$\{\lambda\}(j) = \{\omega^{\delta+1}\}(j) = \omega^{\delta} j \underset{1}{\rightarrow} \omega^{\delta} i = \{\omega^{\delta+1}\}(i) = \{\lambda\}(i)$$

Cas 2: Si $\lambda = \omega^{\delta}$ où δ est un ordinal limite. Alors par l'hypothèse d'induction $\{\delta\}(j) \underset{1}{\rightarrow} \{\delta\}(i)$ et donc par le lemme 5.8, on a $\{\lambda\}(j) = \{\omega^{\delta}\}(j) \underset{1}{\rightarrow} \{\omega^{\delta}\}(i) = \{\lambda\}(i)$

Cas 3: Si $\lambda = \omega^{\delta}(\beta + 1)$ avec $\beta > 0$ (ici δ peut être un ordinal limite ou successeur). Alors ω^{δ} doit être un ordinal limite. Donc par l'hypothèse d'induction, on doit avoir : $\{\omega^{\delta}\}(j) \underset{1}{\rightarrow} \{\omega^{\delta}\}(i)$ donc par le lemme 5.4 :

$$\{\lambda\}(j) = \omega^{\delta}\beta + \{\omega^{\delta}\}(j) \underset{1}{\rightarrow} \omega^{\delta}\beta + \{\omega^{\delta}\}(i) = \{\lambda\}(i)$$

Cas 4: Si $\lambda = \varepsilon_0$ alors :

$$\{\varepsilon_0\}(j) = \left.\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}\right\} (j + 1 \text{ fois}) \quad \text{et} \quad \{\varepsilon_0\}(i) = \left.\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}\right\} (i + 1 \text{ fois})$$

On montre facilement par induction que $\left\{\underbrace{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}}_{n \text{ fois}}\right\}(1) = \underbrace{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}}_{n-1 \text{ fois}}$.

Maintenant, on considère la séquence $\{ \gamma_k : 0 \leq k \leq j - i \}$ donnée par :

$$\gamma_k = \left.\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}\right\} (j - k \text{ fois})$$

On a $\gamma_0 = \{\varepsilon_0\}(j)$, $\gamma_{j-i} = \{\varepsilon_0\}(i)$ et pour tout $k < j - i$:

$$\{\gamma_k\}(1) = \left\{ \underbrace{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}}_{j-k \text{ fois}} \right\}(1) = \underbrace{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}}_{j-k-1 \text{ fois}} = \underbrace{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}}_{j-(k+1) \text{ fois}} = \gamma_{k+1}$$

donc $\{\varepsilon_0\}(j) \underset{1}{\rightarrow} \{\varepsilon_0\}(i)$.

<u>Corollaire 5.10</u> Soient $\beta < \alpha \leq \varepsilon_0$ et $i < n$. Si $\alpha \underset{i}{\rightarrow} \beta$ alors $\alpha \underset{n}{\rightarrow} \beta$.

<u>Preuve</u>: On procède par induction sur l'ordinal α.

<u>$\alpha = 1$</u> Si $\alpha = 1$ alors $\beta = 0$. Par le lemme 5.5, on a $\alpha \underset{n}{\rightarrow} 0$.

<u>$\alpha = \delta + 1$</u> On a $\delta + 1 \underset{i}{\rightarrow} \beta$ et $\delta + 1 \underset{i}{\rightarrow} \delta$

$\Rightarrow \delta \underset{i}{\rightarrow} \beta$ (par le lemme 5.1)

$\Rightarrow \delta \underset{n}{\rightarrow} \beta$ (par l'hypothèse d'induction)

$\Rightarrow \delta + 1 \underset{n}{\rightarrow} \beta$ (car $\delta + 1 \underset{n}{\rightarrow} \delta$ et par la transitivité)

<u>α est un ordinal limite</u> À l'aide du théorème 5.9, on obtient $\{\alpha\}(n) \underset{1}{\rightarrow} \{\alpha\}(i)$. En appliquant l'hypothèse d'induction pour $\{\alpha\}(n) < \alpha$ et $i = 1$, on obtient $\{\alpha\}(n) \underset{n}{\rightarrow} \{\alpha\}(i)$. Aussi, par hypothèse on

a $\alpha \underset{i}{\rightarrow} \beta$, ceci implique que $\{\alpha\}(i) \underset{i}{\rightarrow} \beta$ (ou $\{\alpha\}(i) = \beta$). En appliquant l'hypothèse d'induction pour $\{\alpha\}(i) < \alpha$, on obtient $\{\alpha\}(i) \underset{n}{\rightarrow} \beta$. On a donc : $\alpha \underset{n}{\rightarrow} \{\alpha\}(n) \underset{n}{\rightarrow} \{\alpha\}(i) \underset{n}{\rightarrow} \beta$ et donc par la transitivité $\alpha \underset{n}{\rightarrow} \beta$.

<u>Proposition 5.11</u> Soit $\alpha \leq \varepsilon_0$.

a) $F_\alpha(n) > n$

b) Si $n > m$, alors $F_\alpha(n) > F_\alpha(m)$

c) Si $\alpha = \beta + 1$, alors $F_\alpha(n) \geq F_\beta(n)$ et si de plus $n \geq 1$, alors $F_\alpha(n) > F_\beta(n)$

d) Si $\alpha \underset{n}{\rightarrow} \delta$, alors $F_\alpha(n) \geq F_\delta(n)$

<u>Preuve</u> : On procède par induction sur l'ordinal α.

<u>$\alpha = 0$ et $\alpha = 1$</u> Il suffit d'utiliser $F_0(x) = x + 1$ et $F_1(x) = 2x + 1$.

<u>$\alpha = \beta + 1$</u> En utilisant l'hypothèse d'induction pour β on obtient : $F_\alpha(n) = F_\beta^{n+1}(n) \geq F_\beta(n) > n$ et $F_\alpha(n) = F_\beta^{n+1}(n) > F_\beta(n)$ si $n \geq 1$. Ce qui prouve a) et c). Pour d), on a : $\alpha \underset{n}{\rightarrow} \beta$ et $\alpha \underset{n}{\rightarrow} \delta$

ce qui implique $\beta \underset{n}{\rightarrow} \delta$ par le lemme 5.1. Finalement par c) et par l'hypothèse d'induction on obtient : $F_\alpha(n) \geq F_\beta(n) \geq F_\delta(n)$. Pour b), l'hypothèse d'induction nous donne $F_\alpha(n) = F_\beta^{n+1}(n) \geq F_\beta^{m+1}(m) = F_\alpha(m)$.

<u>α est un ordinal limite</u> Pour a), on a $\{\alpha\}(n) < \alpha$ donc par l'hypothèse d'induction, on a $F_\alpha(n) = F_{\{\alpha\}(n)}(n) \geq n$. Pour d), $\alpha \underset{n}{\rightarrow} \delta$ implique $\{\alpha\}(n) \underset{n}{\rightarrow} \beta$ (ou $\{\alpha\}(n) = \beta$) donc par l'hypothèse d'induction, $F_\alpha(n) = F_{\{\alpha\}(n)}(n) \geq F_\beta(n)$. Pour b), à l'aide du théorème 5.9 et du corollaire 5.10, on obtient $\{\alpha\}(n) \underset{n}{\rightarrow} \{\alpha\}(m)$. Donc par l'hypothèse d'induction sur b) et d), on obtient $F_\alpha(n) = F_{\{\alpha\}(n)}(n) \geq F_{\{\alpha\}(m)}(n) \geq F_{\{\alpha\}(m)}(m) = F_\alpha(m)$.

<u>Lemme 5.12</u> Soient $\beta < \alpha \leq \varepsilon_0$, il existe un nombre naturel $n \in \omega$, tel que $\alpha \underset{n}{\rightarrow} \beta$.

<u>Preuve</u>: Par induction sur α. Les cas de $\alpha = 1$ et de $\alpha = \beta + 1$ sont triviaux. Supposons que α soit un ordinal limite. par la définition de la suite $\{\{\alpha\}(k) : k \in \omega\}$, il existe $m_1 \in \omega$ tel que $\beta < \{\alpha\}(m_1) < \alpha$. Par l'hypothèse d'induction, il existe

$m_2 \in \omega$ tel que $\{\alpha\}(m_1) \underset{m_2}{\rightarrow} \beta$. Soit $n = \max\{ m_1, m_2 \}$. Par le corollaire 5.10, on a : $\alpha \underset{n}{\rightarrow} \{\alpha\}(m_1) \underset{n}{\rightarrow} \beta$ donc par la transitivité on a : $\alpha \underset{n}{\rightarrow} \beta$.

<u>Lemme 5.13</u>:

Soient $n \geq 1$ et $\varepsilon_0 > \alpha > \beta+1$. Si $\alpha \underset{n}{\rightarrow} \beta$, alors $\alpha \underset{n+1}{\rightarrow} \beta+1$.

<u>Preuve</u> : On procède par induction sur α. Comme $\alpha \underset{n}{\rightarrow} \beta$, on doit avoir $\{\alpha\}(n) \geq \beta$. Maintenant si $\{\alpha\}(n) \geq \beta + 1$, on a $\alpha \underset{n}{\rightarrow} \{\alpha\}(n) \underset{n}{\rightarrow} \beta$ donc par l'hypothèse d'induction et le corollaire 5.10 $\alpha \underset{n+1}{\rightarrow} \{\alpha\}(n) \underset{n+1}{\rightarrow} \beta$. On peut donc supposer que $\{\alpha\}(n) = \beta$. De plus par lemme 5.4, on peut supposer que $\alpha = \omega^\delta$ pour $\delta \geq 1$.

<u>Cas 1 : $\delta = \kappa + 1$</u>

Dans ce cas $\beta = \omega^\kappa n$. Par le lemme 5.5 on a : $\omega^\kappa \underset{n}{\rightarrow} 0$, ce qui nous donne : $\omega^\kappa \underset{n+1}{\rightarrow} 1$ par l'hypothèse d'induction. Finalement comme $\omega^\kappa n$ est normalement supérieur à ω^κ, par le lemme 5.4, on obtient : $\{\alpha\}(n+1) = \omega^\kappa(n+1) = \omega^\kappa n + \omega^\kappa \underset{n+1}{\rightarrow} \omega^\kappa n + 1 = \beta + 1$

Cas 2 : δ est un ordinal limite inférieur à ε_0

À l'aide de l'hypothèse d'induction on obtient : $\delta \underset{n+1}{\rightarrow} \{\delta\}(n)+1$.

Ensuite, comme $\delta \underset{n+1}{\rightarrow} \{\delta\}(n+1)$ et $\{\delta\}(n+1) > \{\delta\}(n)+1$ le lemme 5.1 nous donne $\{\delta\}(n+1) \underset{n+1}{\rightarrow} \{\delta\}(n)+1$. Finalement, le lemme 5.8 nous donne $\omega^{\{\delta\}(n+1)} \underset{n+1}{\rightarrow} \omega^{\{\delta\}(n)+1}$.

Le lemme 5.7 nous donne $\omega^{\{\delta\}(n)+1} \underset{n}{\rightarrow} \omega^{\{\delta\}(n)}$ et donc par l'hypothèse d'induction $\omega^{\{\delta\}(n)+1} \underset{n+1}{\rightarrow} \omega^{\{\delta\}(n)} + 1$.

Pour terminer, par la transitivité de $\underset{n}{\rightarrow}$ on obtient :

$$\alpha \underset{n+1}{\rightarrow} \{\alpha\}(n+1) = \omega^{\{\delta\}(n+1)} \underset{n+1}{\rightarrow} \omega^{\{\delta\}(n)} + 1 = \beta + 1$$

$$\Rightarrow \alpha \underset{n+1}{\rightarrow} \beta + 1.$$

Cas 3 : $\alpha = \varepsilon_0$

Par le théorème 5.9, on obtient $\{\varepsilon_0\}(m) \underset{1}{\rightarrow} \{\varepsilon_0\}(n)$ pour tout $m > n$

$$\Rightarrow \{\varepsilon_0\}(n+1) \underset{1}{\rightarrow} \{\varepsilon_0\}(n)$$

$$\Rightarrow \{\varepsilon_0\}(n+1) \underset{2}{\rightarrow} \{\varepsilon_0\}(n) + 1 \text{ (par l'hypothèse d'induction)}$$

$$\Rightarrow \{\varepsilon_0\}(n+1) \underset{n+1}{\rightarrow} \{\varepsilon_0\}(n) + 1 = \beta + 1 \text{ (par } n \geq 1)$$

Proposition 5.14: Soient $\beta < \alpha \leq \varepsilon_0$. Si $\alpha \underset{n}{\rightarrow} \beta$ et $n \geq 1$, alors $F_\alpha(m) > F_\beta(m)$ pour tout $m > n$.

Preuve: Si $\alpha = \beta + 1$ alors par la proposition 5.11 c), $F_\alpha(m) > F_\beta(m)$ pour tout $m > n$. Autrement, $\alpha > \beta + 1$ et alors par le lemme 5.13, on a $\alpha \underset{n+1}{\rightarrow} \beta + 1$ et donc $\alpha \underset{m}{\rightarrow} \beta + 1$ pour tout $m > n$. Finalement, à l'aide de la proposition 5.11 c) et d), on obtient $F_\alpha(m) \geq F_{\beta+1}(m) > F_\beta(m)$ pour tout $m > n$.

Proposition 5.15: Si $\beta < \alpha \leq \varepsilon_0$, alors F_α domine F_β.

Preuve: Par le lemme 5.12 et la proposition 5.14.

CHAPITRE 6: Preuve de l'indépendance par la méthode de Ketonen-Solovay

Dans ce chapitre, nous allons rassembler les résultats développer dans les deux derniers chapitres afin de démontrer que la fonction :

$$v(n) = \text{le plus petit } y \text{ tel que } y \to (4n)^{2n+6}_{reg}$$

domine la fonction $F_{\varepsilon_0}(n)$.

Nous allons commencer par étudier la fonction F_ω. Pour cette partie nous n'avons pas besoin de la théorie sur les ordinaux développée dans le chapitre 5.

Théorème 6.1: Il existe trois fonctions:

$$\sigma_1 : [\omega]^2 \to \omega \text{ régressive}$$

$$\sigma_2 : [\omega]^2 \to \omega \text{ régressive}$$

$$\sigma_3 : [\omega]^2 \to 2$$

telles que si $H \subseteq \omega$ convient à σ_1, σ_2, σ_3 et que σ_1 est min-croissante sur H, alors pour tout $x,y \in H$

$$x < y \quad \Rightarrow \quad F_\omega(x) \leq y$$

Preuve: On prend:

$$\sigma_1(x, y) \to \begin{cases} 0 & \text{si } F_\omega(x) \leq y \\ e - 1 & \text{sinon, } e \text{ étant le plus petit nombre tel que } y < F_e(x) \end{cases}$$

$$\sigma_2(x, y) \to \begin{cases} 0 & \text{si } F_\omega(x) \leq y \\ k - 1 & \text{sinon, } k \text{ étant le nombre tel que } F^k_{\sigma_1(x,y)}(x) \leq y < F^{k+1}_{\sigma_1(x,y)}(x) \end{cases}$$

$$\sigma_3(x, y) \to \begin{cases} 0 & \text{si } F_\omega(x) \leq y \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Supposons que $y < F_\omega(x)$:

$$x < y \Rightarrow F_0(x) = x + 1 \leq y$$

$$\Rightarrow e > 0$$

donc $\sigma_1(x,y)$ est bien-définie. De plus:

$$y < F_e(x) \leq F_\omega(x) = F_x(x) \Rightarrow 0 < e \leq x$$

$$\Rightarrow \sigma_1(x,y) = e - 1 < x$$

donc $\sigma_1(x,y)$ est régressive. À l'aide de la définition des fonctions F_n, on vérifie que $0 < k \leq x$ et donc que σ_2 est aussi une fonction régressive bien définie.

Soient H qui satisfait l'hypothèse du théorème et $x < y < z$ des éléments de H. Afin d'obtenir une contradiction, nous allons, supposer que σ_3 prend la valeur 1 dans H.

Si $\sigma_1(x,y) = e-1$ et $\sigma_2(x,y) = k-1$, alors par la min-homogènéité de l'ensemble H on a: $\sigma_1(x,z) = e-1$ et $\sigma_2(x,z) = k-1$ et donc:

$$F^{k}_{e-1}(x) \leq y < z < F^{k+1}_{e-1}(x).$$

L'inégalité de gauche nous donne $F^{k+1}_{e-1}(x) \leq F_{e-1}(y)$ et par l'hypothèse du théorème on a: $e-1 \leq \sigma_1(y,z)$. En combinant tout ceci on obtient:

$$z < F^{k+1}_{e-1}(x) \leq F_{e-1}(y) \leq F_{\sigma_1(y,z)}(y) \leq z$$

Ce qui est contradictoire. Donc pour tout $x < y$ dans H, on a $\sigma_3(x,y) = 0$. Ce qui prouve le théorème.

Le prochain théorème n'est pas nécessaire pour démontrer le résultat final de ce mémoire. Cependant, il permet d'illustrer la méthode de Ketonen-Solovay dans un contexte plus simple.

Théorème 6.2: La fonction:

$$v'(n) = \text{le plus petit } y \text{ tel que } y \rightarrow$$

domine la fonction $F_\omega(n)$.

Dans la preuve de ce théorème, nous allons utiliser les théorèmes que nous avons démontrés dans le chapitre 4. Lorsqu'on passe d'un ensemble de fonctions à un autre ensemble de fonctions, on doit faire attention à ce que les ensembles homogènes et min-homogènes soient suffisament grands pour qu'on puisse enlever les éléments max(H) et l'ensemble $\wp(e)$ énoncé dans la proposition 4.6. Plus précisement, nous allons utiliser la proposition 4.6, la proposition 4.7 et le lemme 4.1 à trois reprises. Pour cela on devra enlever 5 éléments maximums. De plus, la proposition 4.6 est utilisée pour regrouper 3 fonctions régressives, pour cette raison on doit pouvoir retrancher l'ensemble $\wp(3)$, où $\wp(3)$ est le plus petit nombre naturel x tel que $(2\log(x) + 1)^4 \leq x$. On vérifie facilement que $2^{21} < \wp(3) < 2^{22}$.

Preuve: Soient

$$\sigma_1:[\omega]^2 \to \omega \text{ régressive}$$

$$\sigma_2:[\omega]^2 \to \omega \text{ régressive}$$

$$\sigma_3:[\omega]^2 \to 2$$

les 3 fonctions du théorème 6.1. Par le théorème de Ramsey fini, il existe r suffisament grand pour que $r \to (4)^3_4$. Nous allons montrer que pour tout $d \geq 2^{23}r$, on a $F_\omega(d) < v(d)$. Soient $d \geq 2^{23}r$ et

$$G_d:\omega^2 \to \omega \text{ régressive}$$

la fonction obtenue à l'aide du lemme 4.8. À l'aide de la proposition 4.7, on obtient 2 fonctions:

$$\tau_1:[\omega]^3 \to \omega \text{ régressive}$$

$$\tau_2:[\omega]^3 \to 2$$

qui simulent σ_1. Maintenant par le lemme 4.1, il existe 3 fonctions:

$$\tau_3:[\omega]^3 \to \omega \text{ régressive}$$

$$\tau_4:[\omega]^3 \to \omega \text{ régressive}$$

$$\tau_5:[\omega]^3 \to 2$$

qui simulent $\sigma_2(x)$, G_d et $\sigma_3(x)$.

Par la proposition 4.6, on obtient une fonction:

$$\varphi:[\omega]^4 \to \omega \text{ régressive}$$

qui simule τ_1, τ_3 et τ_4. Par le lemme 4.2, il existe une fonction:

$$\psi:[\omega]^3 \to 4$$

qui simule τ_2 et τ_5. On considère la fonction:

$$\varphi \,|\, [v'(d)]^4 \to \omega$$

Par définition, il existe $S = \{s_1, \ldots s_{2d}\} \subseteq v'(d)$ min-homogène pour φ. On considère l'ensemble $S' = \{s_4, \ldots s_{2d-5}\} - \wp(3)$ .Par la remarque qui précède la preuve, cet ensemble convient aux 4 fonctions initiales σ_1, σ_2, σ_3 et G_d. On doit uniquement s'assurer que la cardinalité de S' est suffisament grande.

$$\begin{aligned}
|S'| &\geq 2d - 2^{22} - 8 \\
&\geq 2d - 2^{23} \\
&= d + d - 2^{23} \\
&\geq d + 2^{23}r - 2^{23} \\
&= d + 2^{23}(r-1) \\
&\geq d \text{ (car } r \geq 1)
\end{aligned}$$

On considère maintenant la fonction:

$$\psi:[S']^3 \rightarrow 4$$

Le nombre $r < d$ a été choisit de manière à ce qu'il existe $H=\{h_1,h_2,h_3,h_4\} \subseteq S'$ homogène pour ψ. Comme $H \subseteq S'$ et que S' convient à G_d on a:

$d \leq s_4 \Rightarrow d \leq h_1$

$\Rightarrow d < h_2$

$\Rightarrow F_\omega(d) \leq F_\omega(h_2) \leq h_3 < h_4$ (car S' convient à σ_1, σ_2 et σ_3.)

$\Rightarrow F_\omega(d) < v'(d)$ (car $h_4 \in v'(d)$)

Nous allons maintenant passer à l'étude de la fonction $F_{\varepsilon_0}(n)$.

<u>Définition</u>: Soient k, $c \in \omega$. On définit la notation $\gamma_{k,c}$ par :

$$\gamma_{k,c} = \underbrace{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega^c}}}}}_{k \text{ copies de } \omega}$$

En particulier on doit donc avoir $\gamma_{0,c} = c$ et $\gamma_{k+1,c} = \omega^{\gamma_{k,c}}$.

Dans le prochain lemme, on voit déjà comment la hiérarchie de fonctions $\gamma_{n,c}$ peut être utilisée pour étudier la fonction $F_{\varepsilon_0}(n)$.

Lemme 6.3: Pour tout $n \in \omega$, $F_{\varepsilon_0}(n) = F_{\gamma_{n,n}}(n)$.

Preuve:

Premièrement, montrons par induction sur n que $\{\varepsilon_0\}(n) = \gamma_{n+1,1}$.

Cas n = 0 $\{\varepsilon_0\}(0) = \omega = \gamma_{1,1}$

On suppose le résultat pour n

$\{\varepsilon_0\}(n+1) = \omega^{\{\varepsilon_0\}(n)} = \omega^{\gamma_{n+1,1}} = \gamma_{n+2,1}$.

Deuxièmement on montre par induction sur k, que pour tout $k, n \in \omega$, on a $\{\gamma_{k+1,1}\}(n) = \gamma_{k,n}$.

Cas k = 0 $\{\gamma_{1,1}\}(n) = \{\omega\}(n) = n = \gamma_{0,n}$.

On suppose le résultat pour k-1

$$\{\gamma_{k+1,1}\}(n) = \omega^{\{\gamma_{k,1}\}(n)} = \omega^{\gamma_{k-1,n}} = \gamma_{k,n}.$$

En utilisant ces résultats, on obtient :

$$F_{\varepsilon_0}(n) = F_{\{\varepsilon_0\}(n)}(n) = F_{\{\gamma_{n+1,1}\}(n)}(n) = F_{\gamma_{n,n}}(n).$$

Définition: Soient $k, c, n \in \omega$. On définit la notation $T_{k,c,n}$ par : $T_{k,c,n} = \{ \alpha : \gamma_{k,c} \underset{n}{\rightarrow} \alpha \}$.

Le fait de savoir qu'un ordinal λ est un élément de $T_{k,c,n}$ nous donne de l'information sur la forme normale de Cantor de λ.

Lemme 6.4: Soient k, $n \geq 1$ et

$$\lambda = \omega^{\alpha_1}n_1 + \ldots + \omega^{\alpha_k}n_k$$

un ordinal différent de 0, écrit dans sa forme normale de Cantor. Si $\lambda \in T_{k+1,c,n}$, alors :

1. Pour tout $1 \leq i \leq k$, on a : $\alpha_i \in T_{k,c,n}$.
2. Pour tout $1 \leq i \leq k$, on a : $n_i \leq n$.

Preuve: Soit $\lambda \in T_{k+1,c,n} = \{ \alpha : \gamma_{k+1,c} \underset{n}{\rightarrow} \alpha \}$. Par définition, il existe une suite $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_r$ telle que $\lambda_0 = \gamma_{k+1,c}$, $\lambda_{i+1} = \{\lambda_i\}(n)$ et $\lambda_r = \lambda$. Montrons par induction sur i que pour tous $0 \leq i \leq r$, tous les exposants de la forme normale de Cantor de λ_i sont des éléments de $T_{k,c,n}$ et que les coefficients de la forme normale de Cantor de λ_i sont inférieures ou égales à n.

i = 0 Trivial, car $\lambda_0 = \gamma_{k+1,c} = \omega^{\gamma_{k,c}}$ et $\gamma_{k,c} \in T_{k,c,n}$.

On suppose le résultat pour i Il y a deux possibilités :

Cas 1 : La forme normale de Cantor de λ_i est $\omega^{\alpha_1}n_1 + \ldots + \omega^{\alpha_p+1}n_p$. On a alors:

$$\lambda_i = \omega^{\alpha_1}n_1 + \ldots + \omega^{\alpha_p+1}n_p = \omega^{\alpha_p+1}(\beta + 1) = \omega^{\alpha_p+1}\beta + \omega^{\alpha_p+1}$$

donc $\omega^{\alpha_p+1}\beta = \omega^{\alpha_1}n_1 + \ldots + \omega^{\alpha_p+1}(n_p - 1)$

et donc $\lambda_{i+1} = \{\lambda_i\}(n) = \omega^{\alpha_p+1}\beta + \omega^{\alpha_p}$

$$= \omega^{\alpha_1}n_1 + \ldots + \omega^{\alpha_p+1}(n_p - 1) + \omega^{\alpha_p}$$

Par l'hypothèse d'induction on a: $\alpha_1, \ldots, \alpha_p+1 \in T_{k,c,n}$, il suffit donc de remarquer que:

$$\alpha_p+1 \in T_{k,c,n} \Rightarrow \alpha_p \in T_{k,c,n}$$

<u>Cas 2</u> : La forme normale de Cantor de λ_i est $\omega^{\alpha_1}n_1 + \ldots + \omega^{\alpha_p}n_p$ où α_p est un ordinal limite. On a alors:

$$\lambda_i = \omega^{\alpha_1}n_1 + \ldots + \omega^{\alpha_p}n_p = \omega^{\alpha_p}(\beta + 1) = \omega^{\alpha_p}\beta + \omega^{\alpha_p}$$

donc $\omega^{\alpha_p}\beta = \omega^{\alpha_1}n_1 + \ldots + \omega^{\alpha_p}(n_p - 1)$

et donc $\lambda_{i+1} = \{\lambda_i\}(n) = \omega^{\alpha_p}\beta + \omega^{\{\alpha_p\}(n)}$

$$= \omega^{\alpha_1}n_1 + \ldots + \omega^{\alpha_p}(n_p - 1) + \omega^{\{\alpha_p\}(n)}$$

Cette fois ci, par l'hypothèse d'induction on a: $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in T_{k,c,n}$, il suffit donc de remarquer que:

$$\alpha_p \in T_{k,c,n} \Rightarrow \{\alpha_p\}(n) \in T_{k,c,n}$$

Lemme 6.5: Soient $\lambda = \omega^{\alpha_1} n_1 + \ldots + \omega^{\alpha_k} n_k$ et $\lambda' = \omega^{\beta_1} m_1 + \ldots + \omega^{\beta_p} m_p$ deux ordinaux tels que $\lambda > \lambda'$. Il existe $1 \leq i \leq k$ tel que :

1) Pour tous $j < i$ on a $\alpha_j = \beta_j$ et $m_j = n_j$

2) $\alpha_i \geq \beta_i$ ou bien β_i n'est pas défini (c'est à dire $p = i-1$) et si $\alpha_i = \beta_i$ alors $n_i > m_i$.

La preuve de ce lemme est évidente.

Lemme 6.6 Soit $c \geq 1$. La cardinalité de $T_{k,c,n}$ est inférieure ou égale à:

$$\underbrace{(n+1)^{(n+1)^{\cdot^{\cdot^{(n+1)^c}}}}}_{k \text{ copie de } n+1}$$

Preuve: On procède par induction sur k.

Cas $k = 0$

$T_{0,c,n} = \{ \alpha : c \underset{n}{\rightarrow} \alpha \} = \{ 0,1,2,\ldots,c-1 \}$

On suppose le résultat pour k

On considère l'ensemble:

$S = \{\alpha = \omega^{\alpha_1} n_1 + \ldots + \omega^{\alpha_k} n_k :$ Pour tout $1 \leq i \leq k$, on a $n_i < n$ et $\alpha_i \in T_{k,c,n}\}$

Par le lemme 6.4, on doit avoir $\{\gamma_{k,c}\}(n) \in S$. De plus, en utilisant le même argument que dans la preuve du lemme 6.4, on montre facilement que $\alpha \in S \Rightarrow \{\alpha\}(n) \in S$. À l'aide de ces deux remarques, on obtient que $T_{k,c,n} \subseteq S$ et donc:

$$|T_{k+1,c,n}| \leq |S| \leq (n+1)^{|T_{k,c,n}|} = \underbrace{(n+1)^{(n+1)^{\cdot^{\cdot^{(n+1)^c}}}}}_{k+1 \text{ copie de } n+1}$$

Proposition 6.7: Soient $c \geq 1$ et $n \geq 2$. La cardinalité de $T_{k,c,n}$ est inférieure ou égale à $E_{k-1}(n^{6c})$.

Preuve: Par le lemme 6.6, il suffit de montrer que:

$$\underbrace{(n+1)^{(n+1)^{\cdot^{\cdot^{(n+1)^{c}}}}}}_{k \text{ copies de } n+1} \leq \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^{n^{6c}}}}}}}_{k-1 \text{ copies } 2}$$

Afin de faciliter les explications, nous allons introduire la notation suivante: $E_0(c,m) = c$ et $E_{k+1}(c,m) = m^{E_k(c,m)}$. Ceci revient à dire que l'on doit démontrer que:

$$E_k(c,n+1) \leq E_{k-1}(n^{6c})$$

De plus, dans cette preuve $\log(x)$ dénote le logarithme de x en base 2 et $\log^k(x)$ dénote le logarithme en base 2 de x itéré k fois. Nous allons commencer par montrer par induction sur r, que pour tout $2 \leq r < k$ et $m \geq 3$ on a:

$$\text{(I)} \qquad \log^k E_k(c,m) \leq E_{k-r}(c,m)\log(m) + \log(\log^m(\sum_{i=0}^{r-2} 2^{-im}))$$

Cas r = 2

$$\log^2(E_k(c,m)) = \log(E_{k-1}(c,m)\log(m))$$
$$= \log(E_{k-1}(c,m)) + \log^2(m)$$
$$= E_{k-2}(c,m)\log(m) + \log^2(m)$$

On suppose le résultat pour $r - 1$ où $r \geq 3$

On a :

$$\log^{r-1}(E_k(c,m)) \leq E_{k-r+1}(c,m)\log(m) + \log(\log^m(\sum_{i=0}^{r-3} 2^{-im}))$$

En prenant le logaritme en base 2 de chaque coté et en faisant une mise en évidence à droite, on obtient:

$$\log^r(E_k(c,m)) \le \log(E_{k-r+1}(c,m)\log(m)[1 + (\log(\log(\sum_{i=0}^{r-3} 2^{-im}))/(E_{k-r+1}(c,m)\log(m))])$$

Et ensuite,

$$\begin{aligned}\log^r(E_k(c,m)) &\le E_{k-r+1}(c,m)\log(m) + \log(\log(m)) \\ &\quad + \log[1 + (\log(\log^m(\sum_{i=0}^{r-3} 2^{-im}))/(E_{k-r+1}(c,m)\log(m))] \\ &\le E_{k-r+1}(c,m)\log(m) + \log(\log(m)) \\ &\quad + \log[1 + (\log(\log(m))/\log(e))2^{-m}\sum_{i=0}^{r-3} 2^{-im}] \\ &\le E_{k-r}(c,m)\log(m) + \log(\log^m(\sum_{i=0}^{r-2} 2^{-im})),\end{aligned}$$

où la première inégalité est obtenue en utilisant les propriétés du logarithme sur la partie de droite, la deuxième inégalité est obtenue en utilisant le fait que $m > e$, $r < k$ et que $E_{k-r+1}(c,m) > 2^m$, et finalement la troisième inégalité est obtenue en utilisant le fait que $\log(1+x) = \ln(1+x)\log(e) < x\log(e)$.

Maintenant, on pose $r = k - 1$ dans (I), et on obtient:

$$\log^{k-1}E_k(c,m) \le E_1(c,m)\log(m) + \log(\log^m(\sum_{i=0}^{k-3} 2^{-im}))$$

Ensuite on prend le logarithme en base 2 de chaque côté de l'inéquation, on fait une mise en évidence dans la partie de droite et quelques simplifications, pour obtenir:

$$\log^k E_k(c,m) \leq c\log(m) + (1 + m^{-c}(\sum_{i=0}^{k-3} 2^{-im}))\log(\log(m))$$

$$\leq c(\log(m) + 2\log(\log(m))),$$

où la deuxième inégalité est obtenue en utilisant le fait que $m \geq 3$, $c \geq 1$ et que $\sum_{i=0}^{k-3} 2^{-im} < 2$. En posant $m = n + 1$ dans la dernière inéquations, on obtient:

(II) $\log^k E_k(c,n+1) \leq c(\log(n+1) + 2\log(\log(n+1)))$

Maintenant pour en arriver au résultat final, on doit faire les deux remarques suivantes:

$$n \geq 2 \Rightarrow n^2 \geq n + 1 \Rightarrow 2\log(n) \geq \log(n+1)$$

$$n > 0 \Rightarrow \log(n+1) \geq \log(\log(n+1))$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\log_k E_k(c,n+1) &\leq c(\log(n+1) + 2\log(\log(n+1))) \\ &\leq c(\log(n+1) + 2\log(n+1)) \\ &= 3c(\log(n+1)) \\ &\leq 6c(\log(n)) \\ &= \log(n^{6c}) \\ &= \log_k E_{k-1}(n^{6c})\end{aligned}$$

Finalement, cette dernière inégalité démontre que:

$$E_k(c,n+1) \leq E_{k-1}(n^{6c})$$

Lemme 6.8: Soit $g:[\omega]^n \to \varepsilon_0$ une fonction telle que $g(x_0,\ldots,x_{n-1}) \in T_{k,c,x_0}$ pour tout $\overline{x} \in [\omega]^n$. Il existe une fonction régressive $f:[\omega]^{n+k} \to \omega$ telle que si S convient à f alors g est min-homogène sur $S' = S - (\wp(6c) \cup \{\max(S)\})$.

Preuve: C'est une application directe du théorème 4.9 et de la proposition 6.7.

Les deux prochains théorèmes, sont des adaptations du lemme 3.4 et du théorème 3.5 de l'article [5] de Ketonen et Solovay à l'énoncé de Kanomori-McAloon.

Théorème 6.9: Soient $k \geq 1$, $c \geq 2$ et $g : [\omega]^n \to \varepsilon_0$ une fonction telle que $g(0,x_1,\ldots,x_{n-1}) \in T_{k,c,0}$ et que pour tout $x_0 \geq 1$ on a $g(x_0,\ldots,x_{n-1}) \in T_{k,c,x_0-1}$. Il existe une fonction régressive $g':\omega^{n+2k} \to \omega$ et une fonction $g'' : \omega^{n+1} \to 2^{c+1}$ telles que si S est un ensemble qui convient à g' et à g'' et tel que $\min(S) > \wp(6c)$ alors sur l'ensemble $S' = S - \{ x \mid x$ est un des $2k$ plus grands éléments de $S \}$, g est min-homogène et min-croissante.

Preuve : On procède par induction sur k.

Cas k = 1 Par les lemme 6.4, on a $g(\overline{x}) = \omega^{c-1}g_1(\overline{x}) + \ldots + \omega^0 g_c(\overline{x})$. De plus, pour tout $x_0 > 0$, on a $g(\overline{x}) \in T_{1,c,x_0-1}$ et donc $g_i(\overline{x}) \leq x_0 - 1 < x_0$ pour tout $1 \leq i \leq c$. Ceci implique que toutes les fonctions $g_i(\overline{x})$ sont régressives. Par la proposition 4.7, pour chaque $1 \leq i \leq c$, il existe une fonction régressive $g'_i : \omega^{n+1} \to \omega$ et une fonction $g''_i : \omega^{n+1} \to 2$ telles que si S convient à g'_i et à g''_i alors g_i est min-homogène et min-croissante sur $S - \{\max(S)\}$. Par le lemme 4.2, il existe une fonction $g'' : \omega^{n+1} \to 2^c$ qui simule chaque g''_i. De plus, par la proposition 4.6, il existe une fonction régressive $g' : \omega^{n+2} \to \omega$ telle que si S convient à g' alors $S - (\wp(c) \cup \{\max(S)\})$ convient à chaque g'_i.

On suppose le résultat pour k-1 Soient les fonctions :

$$h_1 : [\omega]^{n+1} \to \varepsilon_0 : (x_0, \ldots, x_n) \mapsto \begin{cases} 0, \text{ si } g(x_0, \ldots, x_{n-1}) \leq g(x_1, \ldots, x_n). \\ \\ \text{sinon, le plus grand exposant de la} \\ \text{forme normale de Cantor de } g(x_0, \ldots, x_{n-1}) \\ \text{pour lequel les coefficients de} \\ g(x_0, \ldots, x_{n-1}) \text{ et } g(x_1, \ldots, x_n) \\ \text{sont différents.} \end{cases}$$

$$h_2 : [\omega]^{n+1} \to \omega : (x_0, \ldots, x_n) \mapsto \begin{cases} 0, \text{ si } h_1(\bar{x}) \text{ n'est pas un exposant de la forme normale de Cantor de } g(x_0, \ldots, x_{n-1}). \\ \text{sinon, le coeficient de } \omega^{h_1(\bar{x})} \text{ dans la forme normale de Cantor de } g(x_0, \ldots, x_{n-1}). \end{cases}$$

$f_1 : [\omega]^{n+k+1} \to \omega$ la fonction régressive donné par le lemme 6.8 telle que si S convient à f_1 alors g est min-homogène sur $S' = S - (\wp(6c) \cup \{\max(S)\})$.

Par le lemme 6.4, on a : $h_1(x_0, \ldots, x_n) \in T_{k-1, c, x_0 - 1}$. Donc, par l'hypothèse d'induction, il existe une fonction régressive $h_3 : \omega^{n+2k-1} \to \omega$ et une fonction $h_4 : \omega^{n+2} \to 2^c$ telles que si S convient à h_3 et à h_4 et que $\min(S) > \wp(c)$, alors sur l'ensemble $S - \{ x \mid x \text{ est un des } 2k - 2 \text{ plus grands éléments de } S \}$, h_1 est min-homogène et min-croissante. De plus, par le lemme 6.4, $h_2(x_0, \ldots, x_n) \leq x_0 - 1 < x_0$, donc la fonction h_2 est régressive. Par la proposition 4.7, il existe une fonction régressive $h_5 : \omega^{n+2} \to \omega$ et une fonction $h_6 : \omega^{n+2} \to 2$ telle que si S convient à h_5 et à h_6 alors h_2 est min-homogène et min-croissante sur $S - \{\max(S)\}$. À l'aide du lemme 4.1, on obtient deux fonctionx régressives $h_7 : \omega^{n+2k-1} \to \omega$ et $f_2 : [\omega]^{n+2k-1} \to \omega$ telles que si S convient à h_7 et à f_2 alors l'ensemble S moins ses $2k - 3$ plus grands éléments convient à h_5 et l'ensemble S moins ses $2k - 2$ plus grands éléments convient à f_1. Par la proposition 4.6, on obtient une fonction régressive $h_8:\omega^{n + 2k} \to \omega$ telle que si S convient à h_8 alors $S - (\wp(3) \cup \{\max(S)\})$ convient à h_3, h_7 et à f_2. Une autre utilisation du lemme 4.1, nous donne une fonction régressive $g':\omega^{n + 2k + 1} \to \omega$ telle que si S convient à g' alors $S - \{\max(S)\}$ convient à h_8. Finalement par le lemme 4.2, il existe une fonction $g'':\omega^{n+2} \to 2^{c+1}$ qui simule h_4 et h_6.

Soit S un ensemble qui convient à g' et à g'' et tel que $\min(S) > \wp(6c)$. On vérifie facilement que l'ensemble $S' = S - \{x \mid x$ est un des $2k$ plus grands éléments de $S\}$ convient à h_1, h_2 et à f_1 et que g est min-homogène sur S'. Par exemple, pour passer de h_1 à g' on doit enlever les $2k - 2$ plus grands éléments de l'hypothèse d'induction et deux fois l'élément maximum, ce qui correspond précisément à enlever les $2k$ plus grands éléments de S. De plus comme S convient à g', $|S| > n + 2k + 1$ donc $|S'| > n + 1$.

Soient $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$ des éléments de S'. Supposons que $h_1|[S']^{n+1}$ est la fonction constante 0. Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$

$\in S'$ avec $x_1 < y_1$. Par la définition de h_1 et le fait que g est min-homogène sur S', on obtient :

$$g(x_1,x_2,\dots,x_n) = g(y_1,x_2,\dots,x_n) \le g(y_1,y_2,\dots,y_n)$$

donc g est aussi min-croissante sur S' et la preuve du théorème est terminée.

Maintenant, supposons que $h_1^{n+1}|[S']$ soit la fonction constante 1. Nous allons montrer que cela entraine une contradiction. On suppose ici, que tous les ordinaux sont écrits dans leur forme normale de Cantor.

$h_1(x_0, x_1, \dots, x_n)$ est le plus grand exposant de $g(x_0, \dots, x_{n-1})$ pour lequel les coefficients de $g(x_0,\dots,x_{n-1})$ et de $g(x_1, \dots, x_n)$ sont différents.

$h_1(x_0, x_2,\dots, x_{n+1})$ est le plus grand exposant de $g(x_0, x_2,\dots,x_n)$ pour lequel les coefficients de $g(x_0, x_2,\dots,x_n)$ et de $g(x_2, \dots,x_{n+1})$ sont différents.

$h_1(x_1, x_2,\dots, x_{n+1})$ est le plus grand exposant de $g(x_1, x_2,\dots,x_n)$ pour lequel les coefficients de $g(x_1, x_2,\dots,x_n)$ et $g(x_2, \dots,x_{n+1})$ sont différents.

Par la min-homogénéité, on a $h_1(x_0, x_1, \ldots, x_n) = h_1(x_0, x_2, \ldots, x_{n+1})$ et $g(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = g(x_0, x_2, \ldots, x_n)$. Donc, pour tous les exposants supérieurs à $h_1(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $g(x_1, \ldots, x_n)$ et $g(x_2, \ldots, x_{n+1})$ sont identiques. Ceci implique que $h_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \leq h_1(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Mais par la min-croissance de h_1, on doit également avoir $h_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \geq h_1(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ donc $h_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = h_1(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Par le lemme 6.5, cette dernière égalité implique que $h_2(x_0, x_1, \ldots, x_n) > h_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$, ce qui contredit la min-croissance de h_2.

Théorème 6.10: Soient $k \geq 1$ et $c \geq 5$, il existe une fonction régressive $h_1 : \omega^{2k+3} \to \omega$ et une fonction $h_2 : \omega^3 \to 3(2^{c+4})$ telle que si S convient à h_1 et à h_2, alors pour tous $x, y \in S' = S - \{ x : x$ est un des $2k + 3$ plus grand éléments de $S \}$, $x < y$ implique $F_{\gamma_{k,c}}(x) \leq y$.

Preuve: Soient les fonctions :

$$h : [\omega]^2 \to \varepsilon_0 : (x_0, x_1) \mapsto \begin{cases} \text{Le plus petit } \xi \in T_{k,c,0} \text{ tel que } F_\xi(0) \geq x_1, \text{ si } x_0 = 0. \\ \text{Le plus petit } \xi \in T_{k,c,x_0-1} \text{ tel que } F_\xi(x_0) \geq x_1, \text{ si } x_0 \geq 1. \\ 0, \text{ s'il n'existe pas de tel } \xi. \end{cases}$$

$$\overline{h}: [\omega]^2 \to \omega : (x_0, x_1) \mapsto \begin{cases} k - 1, \text{ si } h(x_0, x_1) = \delta + 1 \text{ et que } F_\delta^k(x_0) < x_1 \leq F_\delta^{k+1}(x_0). \\ 0, \text{ si } h(x_0, x_1) \neq \delta + 1. \end{cases}$$

$\overline{h}$ est une fonction bien définie car dans la définition de $F_\delta^k(x)$ on doit avoir $k \geq 1$. De plus $\overline{h}$ est une fonction régressive, car si $h(x_0,x_1) = \delta + 1$ et $\overline{h}(x_0,x_1) = k - 1$ alors :

$$x_1 \leq F_{\delta+1}(x_0) \text{ et } F_\delta^k(x_0) < x_1 \leq F_\delta^{k+1}(x_0) \Rightarrow F_\delta^k(x_0) < F_{\delta+1}(x_0) = F_\delta^{x_0+1}(x_0)$$

$$\Rightarrow k < x_0+1$$

$$\Rightarrow \overline{h}(x_0,x_1) = k - 1 < x_0$$

Soient $g' : \omega^{2k+2} \to \omega$ régressive et $g'' : \omega^3 \to 2^{c+1}$, les fonctions obtenues à l'aide du théorème 6.9 pour la fonction h.

Soit $g_1 : \omega^2 \to \omega$, la fonction obtenue à l'aide du lemme 4.8, telle que si $S = \{ s_0, s_1, \ldots, s_m \}$ convient à g_1 alors $s_3 \geq \wp(c)$.

Soient $\sigma_1 : \omega^2 \to \omega$ régressive, $\sigma_2 : \omega^2 \to \omega$ régressive et $\sigma_3 : \omega^2 \to 2$, les trois fonctions du théorème 6.1.

Soient $\sigma_4 : \omega^3 \to \omega$ régressive et $\sigma_5 : \omega^3 \to 2$, deux fonctions obtenues à l'aide de la proposition 4.7, telles que si S convient à σ_4 et à σ_5 alors sur $S - \{\max(S)\}$, σ_1 est min-homogène et min-croissante. Et finalement posons:

$$g_2 : \omega^2 \to 2 : (x_0, x_1) \mapsto \begin{cases} 0, \text{ si } F_{\gamma_{k,c}}(x_0) \leq x_1. \\ 1, \text{ sinon.} \end{cases}$$

Maintenant, on utilise le lemme 4.1, pour obtenir quatre fonctions régressives $\overline{h'} : \omega^{2k+2} \to \omega$, $g_1' : \omega^{2k+2} \to \omega$, $\sigma_2' : \omega^{2k+2} \to \omega$ et $\sigma_4' : \omega^{2k+2} \to \omega$ telles que si S convient à $\overline{h'}$, g_1', σ_2' et σ_4' alors $S - \{ x \mid x$ est un des $2k$ plus grand éléments de $S \}$ convient à $\overline{h}$, g_1, σ_2 et à σ_4. De même, par le lemme 4.1, il existe quatre fonctions $g''' : \omega^3 \to 2^{c+1}$, $\sigma_3' : \omega^3 \to 2$ et $g_2' : \omega^3 \to 3$ telles que si S convient à g''', σ_3' et g_2' alors $S - \{\max(S)\}$ convient à g'', σ_3 et g_2.

Par la proposition 4.6, il existe $h_1 : \omega^{2k+3} \to \omega$ régressive telle que si S convient à h_1 alors $S - (\wp(5) \cup \{\max(S)\})$ convient à g', $\overline{h'}$, g_1', σ_2' et σ_4'. Finalement, par le lemme 4.2, il existe $h_2 : \omega^3 \to 2^{c+4}$ qui simule g''', σ_3', g_2' et σ_5.

Soit S un ensemble qui convient à h_1 et à h_2. Si $g_2|[S']^2$ est la fonction constante 0, alors la preuve est terminée. Autrement, $h_1^{n+1}|[S']$ doit être la fonction constante 1. Nous allons montrer que ceci entrainerait une contradiction. Soient s_0, $s_1 \in S'$ et $\xi_0 = \{\gamma_{k,c}\}(s_0)$. On a $s_0 > \wp(c) > 2$, $\xi_0 \in T_{k,c,s_0-1}$ et $s_1 < F_{\gamma_{k,c}}(s_0) = F_{\xi_0}(s_0)$, donc $h(s_0,s_1)$ est le plus petit ordinal $\xi_1 \in T_{k,c,s_0-1}$ tel que $F_{\xi_1}(s_0) \geq s_1$.

$h(s_0,s_1) \neq 0$ car comme S' convient à σ_1, σ_2 et σ_3 on a :

$$x_1 \geq F_\omega(x_0) = F_{x_0}(x_0) \geq F_1(x_0) > F_0(x_0) \quad \forall x_0 \geq 2$$

$h(s_0,s_1)$ n'est pas un ordinal limite car sinon soit $\xi_2 = \{h(s_0,s_1)\}(s_0 - 1)$, on a : $\xi_2 < h(s_0,s_1)$, $\xi_2 \in T_{k,c,s_0-1}$ et $s_1 \leq F_{\xi_2}(s_0) = F_{h(s_0,s_1)}(s_0)$, ce qui contredit le fait que $h(s_0,s_1)$ soit le plus petit ordinal $\gamma \in T_{k,c,s_0-1}$ tel que $F_\gamma(s_0) \geq s_1$.

Donc $h(s_0,s_1)$ est un ordinal de la forme $\delta + 1$. Comme h est min-homogène et min-croissante sur S', on peut utiliser la notation $h(x_0,x_1) = \delta(x_0) + 1$ où $\delta(x_0)$ est une fonction croissante sur S'.

Soient $x < y < z$ trois éléments de S'. On a $h(x,y) = h(x,z) = \delta(x) + 1$ et donc la fonction $\overline{h}$ nous donne un nombre k tel que

$$F^{k}_{\delta(x)}(x) < y < z \leq F^{k+1}_{\delta(x)}(x)$$

Par l'inégalité de gauche, on obtient $F^{k+1}_{\delta(x)}(x) < F_{\delta(x)}(y)$. En combinant tout ceci on obtient :

$$z \leq F^{k+1}_{\delta(x)}(x) < F_{\delta(x)}(y) \leq F_{\delta(y)}(y) \leq F^{\bar{h}(y,z)+1}_{\delta(y)}(y) < z$$

Ce qui est contradictoire. Donc pour tout $x < y$ dans S', on a $g_2(x,y) = 0$. Ce qui prouve le théorème.

<u>Théorème 6.11</u>: La fonction :

$$v(n) = \text{le plus petit } y \text{ tel que } y \to (4n)^{2n+6}_{reg}$$

domine la fonction $F_{\varepsilon_0}(n)$.

<u>Preuve</u> : En posant $c = 5$, on obtient $2^{c+4} = 512$. Par le théorème de Ramsey fini dans $\mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \to (4)^3_{512}$. Nous allons montrer que pour tout $r \geq \max\{n, \wp(2)\}$, on a $F_{\varepsilon_0}(r) < v(r)$. Soit $r \geq \max\{n, \wp(2)\}$, en prenant $c = 5$ et $k = r + 1$ le théorème 6.10, nous donne une fonction régressive $h_1 : \omega^{2r+5} \to \omega$ et une fonction $h_2 : \omega^3 \to 512$ telle que si S convient à h_1 et à h_2 alors pour tout $x, y \in S' = S - \{ x : x \text{ est un des } 2r + 4 \text{ plus grand éléments de } S \}$, $x < y$ implique $F_{\gamma_{k,c}}(x) \leq y$. Soit $G_r : \omega^2 \to \omega$ la fonction régressive obtenue à l'aide du lemme 4.8, telle que

si $S = \{ s_1, s_2, \ldots , s_m \}$ convient à G_r et que $m \geq r$ alors $s_4 \geq r$. Par le lemme 4.1, il existe une fonction régressive $h_3 : \omega^{2r + 5} \rightarrow \omega$ qui simule G_r. Finalement, la proposition 4.6 nous donne une fonction régressive $h_4 : \omega^{2r + 6} \rightarrow \omega$ telle que si S convient à h_4 alors $S' = S - (\wp(2) \cup \{\max(S)\})$ convient à h_1 et à h_3. On considère la fonction :

$$h_4 \mid [v(r)]^{2r + 6} \rightarrow \omega$$

Soit $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_{4r}\}$ un ensemble qui convient à h_4. L'ensemble $S' = \{s_4, s_5, \ldots, s_{2r-5}\}$ convient aux fonctions h_1 et G_r. On considère la fonction :

$$h_2 \mid [S']^3 \rightarrow 512$$

Comme $|S'| > r$, il existe un ensemble $H = \{ h_1, h_2, h_3, h_4 \} \subseteq S'$ homogène pour la fonction h_2. Comme S' convient à G_r on a :

$$\begin{aligned} r \leq s_4 \quad & \Rightarrow \quad r \leq h_1 \\ & \Rightarrow \quad r < h_2 \\ & \Rightarrow \quad F_{\varepsilon_0}(r) = F_{\gamma_{r,r}}(r) \leq F_{\gamma_{r,r}}(h_2) \leq F_{\gamma_{r+1,a}}(h_2) \leq h_3 < h_4 < v(r) \end{aligned}$$

<u>Corollaire 6.12</u>: v(n) n'est pas une fonction PA-récursive.

<u>Preuve</u>: Par le théorème 6.11 et le théorème de Wainer.

Corollaire 6.13: PA $\nvdash$ (KM)

Preuve: En effet, supposons que PA $\vdash$ (KM)

$\Rightarrow$ PA $\vdash \forall n\ \exists y\ (y \to (4n)^{2n+6}_{reg})$

$\Rightarrow$ PA $\vdash \forall n\ \exists y\ (y \to (4n)^{2n+6}_{reg} \wedge \forall z < y\ \neg(z \to (4n)^{2n+6}_{reg}))$

$\Rightarrow$ PA $\vdash \forall n\ \exists y\ (\ v(n) = y\ )$

$\Rightarrow$ v(n) est PA-récursive

Ce qui contredit le corollaire 6.12.

CONCLUSION

En terminant, on peut effectuer une comparaison avec les preuves d'indépendance pour le théorème de Paris-Harrington. Premièrement, mentionnons que les notions de fonction régressive et d'ensemble min-homogène sont également utilisées dans les preuves pour le théorème de Paris-Harrington. Cependant, étant donné que ces notions ne sont pas directement reliées à leur théorème, elles doivent introduire des lemmes supplémentaires. Deuxièmement, les notions d'ensembles min-homogènes et d'indiscernables diagonaux sont très similaires. Ceci simplifie énormément le travail pour construire le modèle non-standard de la première preuve.

On peut également mentionner que la notion de fonction régressive joue un rôle important en théorie des ensembles. Akihiro Kanamori utilise cette notion dans son article [2] pour étudier des énoncés concernant les cardinaux.

REMERCIEMENT

Je tiens à remercier particulièrement mon directeur, Monsieur Hidemitsu Sayeki, pour m'avoir encouragé tout au long de mon travail et prodigué des conseils judicieux. Je me suis toujours senti le bienvenu dans son bureau lorsque j'avais besoin de conseils ou d'explications. Je tiens également à le remercier d'avoir patiemment révisé ce mémoire.

Finalement, je voudrais remercier mes parents Claude et Diane qui m'ont toujours apporté leur support.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Paul ERDOS et R. RADO, A combinatorial theorem, J. London Math. Soc. 25 (1950) 249-255.

[2] A.KANAMORI, Regressive partition relations, n-subtle cardinals, and Borel diagonalization, Annals of Pure and Applied Logic 52 (1991) 65-77.

[3] Akihiro KANAMORI et Kenneth McALOON,On Gödel incompleteness and finite combinatorics, Annals of Pure and Applied Logic 33 (1987) 23-41.

[4] Richard KAYE, Models of Peano Arithmetic, Oxford Logic Guides : 15, Clarendon Press, (Great Britain, Oxford, 1991).

[5] Jussi KETONEN et Robert SOLOVAY, Rapidly growing Ramsey functions, Annals of Mathematics, 113 (1981), 267-314.

[6]L. KIRBY et J. PARIS, Initial segments of models of Peano's axioms, dans: Set theory and hiearchy Theory, V. Bierutowice, Poland, (1976), Lecture notes in Mathematics, Vol. 619, 211-26.

[7]L. KIRBY et J. PARIS, Accessible independence results for Peano's Arithmetic, (1982) Bulletin of the London Mathematical Society, 14, 285-93.

[8] R. MACDOWELL et E. SPECKER, Modelle der Arithmetik. In Infinitistic methods. Proceeding of the symposium on fondations of mathematics, Pergamon Press, (Great Britain, Oxford, 1961).

[9] J. PARIS et L. HARRINGTON, A mathematical incompleteness in Peano arithmetic, dans: J.Barwise, ed. , Hanbook of Mathematical Logic, (North-Holland, Amsterdam, 1977), 1133-1142.

[10] J. PARIS, Some independence results for Peano aritmetic, (1978) Journal of Symbolic Logic, 43, 725-31.

[11] J. PARIS, A hierarchy of cuts in models of arithmetic, dans: Model theory of algebra and arithmetic, Lecture notes in Mathematics, Vol. 834, 312-37, (Springer-Verlag, Berlin, 1980).

[12] F. RAMSEY, On a problem of formal logic, Proc. London. Math. Soc. 30 (1930) 264-286.

[13] A. TARSKI, A. Mostowski et R. Robinson. Undecidable Theories, North-Holland Publishing Company. (North-Holland, Amsterdam, 1953).

[14] S.S. WAINER, A classification of the ordinal recursive functions, Arch. Math. Logik 13 (1970), 136-153.