Université de Montréal

Théorie des points critiques pour une fonctionnelle multivoque invariante.

par

Nicolas Beauchemin

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

Orientation mathématiques fondamentales

décembre 1999

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Théorie des points critiques pour une fonctionnelle multivoque invariante

présenté par

Nicolas Beauchemin

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Richard Duncan
(président-rapporteur)

Marlène Frigon
(directeur de recherche)

Robert Brunet
(membre du jury)

Mémoire accepté le :

23 février 2000

SOMMAIRE

Le but de ce mémoire est de généraliser le théorème du col de la montagne invariant, présenté par Canino et Degiovanni [7], pour pouvoir l'appliquer aux fonctions multivoques. Nous montrerons donc un théorème de type minimax et nous obtiendrons une suite infinie de valeurs critiques pour une fonctionnelle multivoque invariante.

Au chapitre 2, nous présenterons la notion de *pente faible équivariante* qui nous permet d'étendre la notion de dérivée aux fonctionnelles multivoques à graphe fermé. Nous introduirons également un théorème de déformation qui nous permettra d'établir notre résultat principal.

Par la suite, au chapitre 3, nous présenterons la notion de *genre* qui nous permettra de classer les ensembles invariants et de former plus tard la suite de points critiques.

Au chapitre 4, nous énoncerons et prouverons le résultat principal de ce mémoire à savoir le théorème du col de la montagne généralisé et nous obtiendrons que, sous certaines conditions, la fonctionnelle invariante possède une suite non bornée de valeurs critiques.

Finalement, au chapitre 5, nous présenterons une application du théorème du col de la montagne généralisé à une inclusion aux dérivées partielles et nous obtiendrons un résultat d'existence et de multiplicité.

REMERCIEMENTS

Je voudrais tout d'abord remercier grandement ma directrice de recherche, Mme Marlène Frigon, pour son aide inestimable, pour son support financier et pour ses multiples sourires.

Merci également à ma conjointe bien-aimée Caroline pour son support moral et affectif, sans quoi le tout aurait été beaucoup moins facile.

Finalement, je voudrais remercier mes amis Arik Loinaz et Yanick Dupuis pour l'attention qu'ils ont portée lors de la lecture de ce mémoire.

Table des matières

INTRODUCTION

La théorie des points critiques a connu un essor considérable depuis la parution de l'article d'Ambrosetti et de Rabinowitz, en 1973, établissant le bien connu théorème du col de la montagne (voir [1]). Au départ, l'étude se penchait sur l'existence de points critiques pour une fonctionnelle continûment différentiable. Rappelons qu'un point critique de $f : E \to \mathbb{R}$ est un point ξ de l'espace de Banach E tel que la dérivée de f en ξ est nulle. Le point critique peut être un maximum, un minimum ou un point de selle.

La technique utilisée est celle des minimax. Cette technique consiste à caractériser une valeur critique c d'une fonctionnelle f comme le minimax sur une classe d'ensembles S bien choisie :

$$c = \inf_{A \in S} \max_{u \in A} f(u). \tag{0.1}$$

On arrive dans les preuves à une suite $c_n \to c$ et une suite (u_n) telle que $f(u_n) = c_n$ et $f'(u_n) \to 0$. Pour conclure à l'existence d'un point critique, il faut s'assurer que la suite (u_n) possède une sous-suite convergente. À cet effet, on impose une condition de compacité connue sous le nom de *condition de Palais-Smale*. Cette condition revient systématiquement au cours de l'étude des points critiques. Nous dirons que f satisfait la *condition de Palais-Smale* (que nous noterons (PS)) si toute suite $(u_m) \subset E$ pour laquelle $f(u_m)$ est bornée et $f'(u_m) \to 0$ quand $m \to \infty$, possède une sous-suite convergente. On remarque que, par cette condition, l'ensemble $K_c \equiv \{u \in E \,|\, f(u) = c \text{ et } f'(u) = 0\}$ est compact pour tout $c \in \mathbb{R}$. Comme nous le disions, le théorème du col de la montagne est un des pilliers de la théorie des points critiques. Rappelons-le.

Supposons que $\mathcal{O}_r$ dénote la boule ouverte de rayon r autour de 0 dans E et supposons que $\partial\mathcal{O}_r$ représente sa frontière.

Théorème 0.1 (Col de la montagne). *Soit E un espace de Banach réel et $f \in C^1(E, \mathbb{R})$. Supposons que f satisfait (PS), $f(0) = 0$,*

(1) *il existe des constantes $\rho, \alpha > 0$ telles que $f|_{\partial\mathcal{O}_\rho} \geq \alpha$ et*

(2) *il existe $e \in E \setminus \mathcal{O}_\rho$ tel que $f(e) \leq 0$.*

Alors f possède une valeur critique $c \geq \alpha$ qui peut être caractérisée par

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{u \in g[0,1]} f(u),$$

où

$$\Gamma = \{g \in C([0,1], E) \mid g(0) = 0, g(1) = e\}.$$

Les auteurs remarquent également qu'on peut appliquer le théorème du col de la montagne aux problèmes aux limites pour des équations aux dérivées partielles semi-linéaires elliptiques :

$$(P) \begin{cases} -\triangle u = p(x,u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné avec une frontière lisse. En effet, l'obtention d'un point critique d'une fonctionnelle appropriée définie sur l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ conduit à l'existence d'une solution de (P). D'autre part, ils montrent que sous certaines conditions de croissance, la fonctionnelle associée vérifie les hypothèses du théorème du col de la montagne et conséquemment, le problème (P) possède une solution non triviale.

En considérant par la suite des fonctionnelles dotées de symétries, Ambrosetti et Rabinowitz [1] ont réussi à obtenir un résultat de multiplicité qui est une variante du théorème du col de la montagne pour les fonctionnelles invariantes sous l'action de $\mathbb{Z}_2$. Ce théorème établit l'existence d'une suite croissante non-bornée de valeurs critiques. Pour classer les ensembles invariants, ils utilisent la notion de *genre* d'un ensemble A, noté $\gamma(A)$ qui a été introduite par Krasnoselski [15]. Ainsi, les points critiques obtenus sont les minimax sur une famille d'ensembles qui sont caractérisés par leur genre. Plusieurs autres résultats de multiplicité ont par la suite été obtenus. Le lecteur intéressé pourra consulter le livre de Rabinowitz [20].

Parallèlement à la théorie des points critiques, l'analyse non lisse s'est aussi développée considérablement. La notion de dérivée a été généralisée à celle de sous-différentielle [9]. Dans ce contexte, les fonctions semi-continues inférieurement ont fait l'objet d'une étude particulière notamment parce qu'elles apparaissent naturellement dans les problèmes avec contraintes. Il était donc naturel que plusieurs auteurs veuillent étendre la théorie des points critiques à divers contextes non-lisses [8, 10, 11, 22].

Nous retenons, entre autres, la notion de *pente faible* (notée $||df(u)||$) introduite par Degiovanni et Marzocchi [11]. La pente faible coïncide avec la dérivée dans le cas des fonctions C^1 et permet d'étendre la notion de dérivée aux fonctions continues et à certaines classes de fonctions semi-continues inférieurement. Grâce à cette notion, la *condition de Palais-Smale* a pu également être étendue. À l'aide de ces nouvelles notions, Corvellec, Degiovanni et Marzocchi [10] ont pu présenter une généralisation du théorème de déformation pour des fonctionnelles qui ne sont pas différentiables. Ce théorème fut le fer de lance qui permit de présenter plusieurs résultats dont un équivalent du théorème du col pour les fonctionnelles non différentiables.

Par la suite, Canino et Degiovanni [7] ont considéré les fonctionnelles invariantes sous l'action d'un groupe de Lie compact et ont introduit la notion de *pente faible équivariante* de f au point u (notée $|d_G f|(u)$) pour établir un théorème de déformation équivariant ainsi qu'un équivalent du théorème du col de la montagne invariant pour une fonction continue et invariante sous l'action de $\mathbb{Z}_2$.

Pour définir la pente faible d'une fonctionnelle semi-continue inférieurement, les auteurs précédents utilisent la pente faible de la fonction

$$\mathcal{G}_f : \text{epi}(f) \to \mathbb{R} \text{ définie par } \mathcal{G}_f(u, \xi) = \xi$$

où

$$\text{epi}(f) = \{(u, \xi) \in X \times \mathbb{R} \,|\, f(u) \leq \xi\}.$$

Plus précisement, ils posent

$$|df|(u) = \begin{cases} \frac{|d\mathcal{G}_f|(u,f(u))}{\left(1-|d\mathcal{G}_f|(u,f(u))^2\right)^{1/2}} & \text{si } |d\mathcal{G}_f|(u, f(u)) < 1, \\ +\infty & \text{si } |d\mathcal{G}_f|(u, f(u)) = 1. \end{cases}$$

Par ailleurs, le développement de l'analyse non lisse est lié à celui de l'analyse multivoque. Cette dernière s'est avérée être particulièrement utile dans l'étude des problèmes de contrôle et des inclusions différentielles. Considérant l'importante contribution de la théorie des points critiques au domaine des équations aux dérivées partielles, on comprend l'intérêt de développer une théorie des points critiques pour des fonctionnelles multivoques. Une telle théorie pourrait conduire à des développements importants en théorie du contrôle et des inclusions différentielles.

En 1997, Frigon [12] a commencé à développer une théorie des points critiques pour des fonctionnelles multivoques à graphe fermé. Pour ce faire, elle a introduit une notion de pente faible dans ce contexte, qui coïncide avec la pente faible de Degiovanni et Marzocchi lorsque la fonction est univoque et continue. De plus, celle-ci est définie sans avoir recours à la pente faible de la fonction graphe comme c'est le cas pour les fonctions semi-continues inférieurement. Elle obtient un résultat de type minimax avec une condition d'enlacement. Ce résultat est ensuite appliqué à un problème elliptique pour une inclusion aux dérivées partielles. À cet effet, elle montre que les points critiques d'une fonctionnelle bien choisie correspondent aux solutions faibles du problème.

Pour notre part , dans ce mémoire nous généralisons le théorème du col de la montagne invariant pour les fonctionnelles multivoques. Pour ce faire, nous introduisons une notion de *pente faible équivariante* pour les fonctionnelles multivoques à graphe fermé. Les fonctionnelles étudiées seront donc invariantes sous l'action d'un groupe de Lie compact, en particulier $\mathbb{Z}_2$. Afin d'établir des résultats d'existence et surtout de multiplicité des points critiques de nos fonctionnelles, nous prouvons également un théorème de déformation pour les fonctionnelles invariantes multivoques et nous étendons la notion de genre pour pouvoir choisir la famille d'ensembles sur laquelle nous effectuons le procédé de minimax. Étant donné que les ensembles que nous considérons sont dans le graphe de la fonctionnelle, nous avons dû utiliser une action sur $E \times \mathbb{R}$ en gardant l'invariance de la composante en $\mathbb{R}$. Cela a nécessité une modification assez importante du genre.

Au chapitre 4, nous établissons le résultat principal de ce mémoire à savoir le théorème du col de la montagne invariant généralisé. Nous optons pour une formulation avec une alternative qui conduit soit à l'existence d'une suite non bornée de valeurs critiques, soit à l'existence d'une valeur critique en 0.

Finalement, dans le chapitre 5, nous appliquons notre théorème pour trouver un résultat d'existence pour l'inclusion aux dérivées partielles

$$(P)\begin{cases} -\triangle\, y(t) \in G(y(t)) & \text{p.p. } t \in \Omega, \\ y(t) = 0 & \text{pour tout } t \in \partial\Omega, \end{cases}$$

où G est impaire. Une fonctionnelle multivoque $F : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ telle que les points critiques de F sont les solutions de (P) est introduite. En imposant certaines conditions de croissance sur G, on montre que 0 n'est pas un point critique de F avec valeur critique positive. Ainsi, nous obtenons l'existence d'une infinité de solutions distinctes.

Chapitre 1

PRÉLIMINAIRES

1.1. Notations et résultats préliminaires

Soit E un espace de Banach. Pour $x \in E \times \mathbb{R}$, nous noterons $\pi_E(x)$ la projection de x sur E. Tout au long du mémoire, B_ρ (respectivement $\mathcal{O}_\rho$) dénotera la boule fermée (respectivement ouverte) de rayon ρ centrée en 0 et $B_\rho(y)$ (respectivement $\mathcal{O}_\rho(y)$) la boule fermée (respectivement ouverte) de rayon ρ centrée en y.

Nous énonçons maintenant quelques théorèmes qui nous serviront plus tard, mais qui sont indépendants de ceux des autres sections du chapitre.

Le premier de ces théorèmes donne une propriété fondamentale des fonctions KKM dont nous rappelons la définition. Ce résultat est dû à Granas et Lassonde [14].

Définition 1.1. Nous dirons qu'une fonction $K : X \subset E \to E$ est *KKM* si pour tous $x_1, \ldots, x_n \in X$, on a $\operatorname{conv}(x_1, \ldots, x_n) \subset \bigcup_{i=1}^{n} K(x_i)$ avec

$$\operatorname{conv}(x_1, \ldots, x_n) = \left\{ x \mid \text{il existe } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1], \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \text{ et } x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right\}.$$

Théorème 1.2 (Principe KKM élémentaire). *Soit E un espace de Hilbert, X un sous-ensemble non vide de E et $G : X \to E$, une fonction KKM à valeurs convexes et fermées. Supposons de plus qu'une des conditions suivantes est vérifée :*

(1) *X est borné ;*

(2) *tous les Gx sont bornés ;*

(3) *Gx_0 est borné pour un $x_0 \in X$.*

Alors l'intersection $\cap\{Gx \mid x \in X\}$ est non-vide.

Théorème 1.3 (Théorème de Borsuk-Ulam). *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$, ouvert borné, symétrique et contenant 0. Alors, pour toute fonction continue $f : \partial U \to \mathbb{R}^m$ avec $m < n$, on peut trouver $x \in \partial U$ tel que $f(x) = f(-x)$.*

Théorème 1.4 (Théorème de Tietze). *Soit X un espace normal et soit A un sous-ensemble fermé de X.*

(1) *Toute fonction continue de A dans l'intervalle fermé $[a, b] \subset \mathbb{R}$ peut être étendue à une fonction continue définie sur tout X vers $[a, b]$;*

(2) *toute fonction continue de A vers $\mathbb{R}$ peut être étendue à une fonction continue définie sur tout X vers $\mathbb{R}$.*

On peut trouver une preuve de ce théorème dans [18].

1.2. Espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$

Nous introduisons maintenant l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$. Pour plus de détails, consultez [4].

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, un ouvert. Nous noterons $H_0^1(\Omega)$ la complétion de $C_c^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions infiniment différentiables à support compact muni de la norme

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dt\right)^{1/2}.$$

L'espace $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert avec $(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dt$ comme produit scalaire.

Théorème 1.5. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ avec une frontière lisse et $N \geq 3$. Notons $2^* = \frac{2N}{N-2}$. On a alors que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, avec l'injection compacte pour tout $q < 2^*$ et continue pour $q \leq 2^*$.*

Théorème 1.6. *Il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n\geq 1}$ de $L^2(\Omega)$ et il existe une suite croissante $(\nu_n)_{n\geq 1}$ de réels avec $\nu_n > 0$ et $\nu_n \to \infty$ tels que*

$$e_n \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega),$$

$$-\triangle e_n = \nu_n e_n \qquad \textit{sur } \Omega.$$

On dit que les (ν_n) sont les valeurs propres de $-\triangle$ (avec condition de Dirichlet) et que les (e_n) sont les fonctions propres associées.

Lemme 1.7. *Soit $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Pour y_0 fixé dans $\mathbb{R}$, on pose*

$$v(x) = \int_{y_0}^{x} g(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Alors $v \in C(\mathbb{R})$.

Lemme 1.8. *Soit $\{f_n\}$ une suite convergente dans $L^p(\Omega), 1 \leq p < \infty$. Alors il existe $h \in L^p(\Omega)$ et une sous-suite $\{f_{n_k}\}$ telles que*

(1) *$f_{n_k}(t) \to f(t)$ presque partout dans Ω,*

(2) *$|f_{n_k}(t)| \leq h(t)$ presque partout dans Ω et pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

Ce lemme est prouvé dans [16].

1.3. Fonctions multivoques

Dans ce paragraphe, nous donnons quelques définitions et résultats sur les fonctions multivoques qui nous seront utiles au chapitre 5. Le lecteur pourra consulter [2] pour plus de détails. Soit $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction multivoque à valeurs fermées, non vides.

Définition 1.9. Nous dirons que $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *semi-continue supérieurement* si

$$\{t \in \mathbb{R} \,|\, G(t) \cap B \neq \emptyset\}$$

est fermé pour tout $B \subset \mathbb{R}$ fermé.

Lemme 1.10. *Si $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est semi-continue supérieurement à valeurs convexes compactes non vides, alors $G(x) = [\underline{g}(x), \overline{g}(x)]$ où $\underline{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est univoque semi-continue inférieurement et $\overline{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est univoque semi-continue supérieurement.*

Soit $A \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble mesurable et $G : A \to \mathbb{R}$ une fonction multivoque à valeur fermées, non-vides.

Définition 1.11. Nous dirons que $G : A \to \mathbb{R}$ est *mesurable* si $\{x \in A \,|\, G(x) \cap B \neq \emptyset\}$ est mesurable pour tout $B \subset \mathbb{R}$ fermé.

Nous avons de plus le théorème de sélection suivant qui fut présenté dans [17] :

Théorème 1.12 (Théorème de sélection mesurable de Ryll-Nardzewski). *Un fonction multivoque mesurable $G : A \to \mathbb{R}$ admet une sélection mesurable g, c'est-à-dire une fonction mesurable $g : A \to \mathbb{R}$ telle que $g(x) \in G(x)$ presque partout dans A.*

Théorème 1.13. *Si G est semi-continue supérieurement à valeurs convexes compactes, $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble mesurable et $y : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ est univoque mesurable, alors il existe $h : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ univoque mesurable telle que $h(t) \in G(y(t))$ p.p. $t \in \overline{\Omega}$.*

Définition 1.14. Soit $G : A \to \mathbb{R}$, une fonction multivoque mesurable. *L'intégrale de G* est définie par

$$\int_A G(t)\,dt = \max\left\{\int_A g(t)\,dt \,|\, g \text{ est une sélection intégrable de } G\right\}.$$

1.4. Théorème de déformation pour $f \in C(X)$ invariante

Voici un théorème de déformation applicable sur des fonctions univoques invariantes, qui a été présenté dans [7]. Nous aurons besoin au préalable de quelques définitions pour pouvoir énoncer le théorème.

Soit X un espace métrique sur lequel agit un groupe de Lie compact G par une transformation isométrique et soit d la métrique de X. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue invariante, c'est-à-dire que $f(gx) = f(x)$ pour tout $g \in G$ et pour tout $x \in X$. Nous dirons que $F : X \to X$ est *équivariante* si $F(gx) = gF(x)$ pour tout $g \in G$ et pour tout $x \in X$. Nous dirons que $A \subset X$ est *invariant* si $g(A) \subset A$ pour tout $g \in G$.

Définition 1.15. Pour tout $u \in X$, la *pente faible équivariante de f en u*, notée $|d_G f|(u)$, est le suprémum des $\sigma \in [0, +\infty[$ tels qu'il existe un voisinage invariant

U de u, $\delta > 0$ et une fonction continue $\mathcal{H} : U \times [0, \delta] \to X$ telle que

$$\forall v \in U, \forall t \in [0, \delta] : d(\mathcal{H}(v, t), v) \leq t;$$

$$\forall v \in U, \forall t \in [0, \delta] : f(\mathcal{H}(v, t)) \leq f(v) - \sigma t;$$

et telle que $\mathcal{H}(\cdot, t)$ est équivariante pour tout $t \in [0, \delta]$.

Nous noterons G-K_c l'ensemble des éléments de X de niveau c où la pente faible s'annule, c'est-à-dire $G\text{-}K_c = \{u \in X \mid f(u) = c \text{ et } |d_G f|(u) = 0\}$.

Définition 1.16. Nous dirons qu'une fonction f satisfait la *condition de Palais-Smale équivariante au niveau c* (notée G-$(PS)_c$) si pour toute suite (x_n) telle que $f(x_n) \to c$ avec $|d_G f|(x_n) \to 0$, on a une sous-suite convergente.

Théorème 1.17 (Théorème de déformation). *Soit $c \in \mathbb{R}$. Supposons que X est complet et que f satisfait G-$(PS)_c$. Alors, pour $\varepsilon_0 > 0$, U un voisinage invariant de G-K_c (U peut-être vide si G-K_c est vide) et $\lambda > 0$ donnés, il existe $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ et une fonction continue $\eta : X \times [0, 1] \to X$ tels que pour tous $u \in X$ et $t \in [0, 1]$, on a :*

(1) $d(\eta(u, t)) \leq \lambda t$;

(2) $f(\eta(u, t)) \leq f(u)$;

(3) $f(u) \notin \,]c - \varepsilon_0, c + \varepsilon_0[\implies \eta(u, t) = u$;

(4) $\eta(\{x \in X | f(x) \leq c + \varepsilon\} \setminus U, 1) \subseteq \{x \in X \mid f(x) \leq c - \varepsilon\}$;

(5) $\eta(\cdot, t)$ *est équivariante.*

Chapitre 2

DÉFINITIONS DE PENTE FAIBLE ET DE POINT CRITIQUE

Soit X un espace métrique sur lequel un groupe de Lie compact G agit par une transformation isométrique et soit d_X la métrique de X. Soit $F : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ une fonctionnelle multivoque. Le graphe de F est défini par

$$graphF = \{(u, b) | b \in F(u)\} \subset X \times \mathbb{R}.$$

Introduisons une métrique d sur $graphF$ en posant

$$d((u, c), (v, b)) = \sqrt{(d_X(u, v))^2 + \|c - b\|^2}.$$

Dans le cas où F est une fonction à graphe fermé, l'espace métrique $graphF$ est complet avec cette métrique. Définissons une action du groupe G sur $graphF$ par $g(u, c) = (gu, c)$.

Définition 2.1. Nous dirons qu'une fonctionnelle multivoque $F : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est *invariante* (sous l'action de G) si pour tout $(u, b) \in graphF$ et pour tout $g \in G$, on a $g(u, b) \in graphF$.

Définition 2.2. Soit $\phi : graphF \to Y$ où Y est un espace sur lequel G agit avec une action $*$. Nous dirons que ϕ est *équivariante* si $\phi(gx, c) = g * \phi(x, c)$ pour tout $g \in G$.

Définition 2.3. Soit $F : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, une fonctionnelle multivoque à graphe fermé, invariante sous l'action de G et soit $(u, c) \in graphF$. La *pente faible équivariante de F au point* (u, c), notée $|d_G F|(u, c)$, est le supremum des σ dans $[0, +\infty)$ tel qu'il existe un voisinage invariant U de (u, c) (dans $graphF$), $\delta > 0$ et une fonction continue $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) : U \times [0, \delta] \to graphF$ telle que pour tout $(v, b) \in U$ et pour tout $t \in [0, \delta]$, on a

(1) $d(\mathcal{H}((v, b), t), (v, b)) < t\sqrt{1 + \sigma^2}$;
(2) $\mathcal{H}_2((v, b), t) \leq b - \sigma t$;
(3) $\mathcal{H}(\cdot, t)$ est équivariante pour tout $t \in [0, \delta]$.

Définition 2.4. On dira que u est un *G-point critique de F au niveau c* si

$$c \in F(u) \text{ et } |d_G F|(u, c) = 0.$$

Nous noterons $G\text{-}K_c$ l'ensemble des G-points critiques de F au niveau c. Nous dirons que c est une *G-valeur critique de F* si $G\text{-}K_c \neq \emptyset$.

Définition 2.5. Soit $F : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, une fonctionnelle multivoque à graphe fermé et soit $c \in \mathbb{R}$. La fonction F satisfait la *condition de Palais-Smale équivariante au niveau c* (G-$(PS)_c$) si toute suite (u_n) dans X pour laquelle il existe $c_n \in F(u_n)$ avec $c_n \to c$ et $|d_G F|(u_n, c_n) \to 0$, possède une sous-suite convergente.

Présentons maintenant un théorème de déformation qui sera un des élément clés de la démonstration du théorème 4.1.

Théorème 2.6 (Théorème de déformation). *Soient X un espace métrique complet, G un groupe de Lie compact, $F : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ une fonctionnelle multivoque à graphe fermé invariante sous l'action de G et soit $c \in \mathbb{R}$. Supposons que F satisfait G-$(PS)_c$. Alors, pour $\varepsilon_0 > 0$, $\mathcal{U} \subset E \times \mathbb{R}$ un voisinage invariant de $K_c \times \{c\}$ ($\mathcal{U}$ peut être vide si K_c est vide) et $\lambda > 0$ donnés, il existe $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ et une fonction continue $\eta = (\eta_1, \eta_2) : graphF \times [0,1] \to graphF$ tels que*

(1) $d(\eta((v,b),t),(v,b)) \leq \lambda t$;

(2) $\eta_2((v,b),t) \leq b$;

(3) *si* $(v,b) \in graphF \setminus (X \times (c-\varepsilon_0, c+\varepsilon_0))$, *alors* $\eta((v,b),t) = (v,b)$;

(4) $\eta((graphF \cap X \times (-\infty, c+\varepsilon]) \setminus \mathcal{U}, 1) \subset X \times (-\infty, c-\varepsilon]$;

(5) $\eta(\cdot, t)$ *est équivariante.*

DÉMONSTRATION. Considérons la fonction $\mathcal{G}_F : graphF \to \mathbb{R}$ définie par

$$\mathcal{G}_F(v,b) = b.$$

Cette fonction univoque est invariante sous l'action de G. En effet, pour tout $g \in G$ et pour tout $(v,b) \in graphF$, on a

$$\mathcal{G}_F(g(v,b)) = \mathcal{G}_F(gv,b) = b = \mathcal{G}_F(v,b).$$

Tout d'abord, rappelons qu'en vertu de la définition 1.15 la pente faible de $\mathcal{G}_F$, $|d_G\mathcal{G}_F|(v,b)$, est le suprémum des $\sigma \in [0,+\infty[$ tel qu'il existe un voisinage invariant U de (v,b) dans $graphF$, $\delta > 0$ et une fonction continue $\mathcal{H} : U \times [0,\delta] \to graphF$ telle que pour tout $(w,c) \in U$ et pour tout $t \in [0,\delta]$, on a

(1) $d(\mathcal{H}((w,c),t),(w,c)) \leq t$;

(2) $\mathcal{H}_2((w,c),t) \leq c - \sigma t$.

On a que $|d_G F|(v,b) = 0$ si et seulement si $|d_G \mathcal{G}_F|(v,b) = 0$. En effet, nous allons montrer que

$$|d_G F|(v,b) \geq |d_G \mathcal{G}_F|(v,b) \geq \frac{|d_G F|(v,b)}{\sqrt{1 + (|d_G F|(v,b))^2}}. \tag{2.1}$$

Premièrement, par la définition 2.3, on a clairement que

$$|d_G F|(v,b) \geq |d_G \mathcal{G}_F|(v,b).$$

D'autre part, si $|d_G F|(v,b) = 0$, l'équation (2.1) est clairement vérifiée. Supposons donc que $|d_G F|(v,b) \neq 0$. Nous aurons l'existence de $\sigma < |d_G F|(v,b)$, $\delta > 0$, d'un voisinage invariant $\mathcal{V}$ et d'une fonction $\mathcal{H}$ comme dans la définition 2.3. Considérons maintenant $\mathcal{K} : \mathcal{V} \times [0,\delta] \to graphF$ définie par

$$\mathcal{K}((u,c),t) = \mathcal{H}((u,c), \frac{t}{\sqrt{1+\sigma^2}}).$$

Premièrement, nous avons

$$d(\mathcal{K}((u,c),t),(u,c)) \leq \frac{t}{\sqrt{1+\sigma^2}}\sqrt{1+\sigma^2} = t.$$

Ensuite, on a bien que $\mathcal{K}_2((u,c),t) \leq c - \frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}}t$ et donc $|d_G \mathcal{G}_F|(v,b) \geq \frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}}$. D'où

$$|d_G \mathcal{G}_F|(v,b) \geq \frac{|d_G F|(v,b)}{\sqrt{1 + |d_G F|(v,b)^2}}.$$

Donc, $|d_G F|(v,b) = 0$ si et seulement si $|d_G \mathcal{G}_F|(v,b) = 0$.

On a donc que U est un voisinage de l'ensemble G-K_c pour la fonction $\mathcal{G}_F$. Puisque $\mathcal{G}_F(x,c)$ est une fonction univoque, on peut appliquer le théorème 1.17 avec U comme voisinage et avec λ et ε_0 donnés dans l'énoncé. Nous obtenons un $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ et une déformation $\eta : graphF \times [0,1] \to graphF$. Les conclusions (1)–(5) impliquent directement les conclusions du théorème. $\square$

Chapitre 3

LA NOTION DE GENRE POUR UN ENSEMBLE DE $E \times \mathbb{R}$

Soit E un espace de Banach. Dans ce qui suit, nous considérons une famille d'ensembles invariants sur lequel un indice topologique γ sera défini. Nous notons

$$\mathcal{E} = \Big\{A \in E \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \,|\, A \text{ fermé tel que } (x,b) \in A \Rightarrow (-x,b) \in A\Big\}.$$

Définition 3.1. Soit $A \in \mathcal{E}$. Le *genre* de A, noté $\gamma(A)$, est l'infimum des $n \in \mathbb{N}$ tels qu'il existe une application continue $\phi : A \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ vérifiant

$$\phi(-x,c) = -\phi(x,c), \tag{3.1}$$

c'est-à-dire que

$$\gamma(A) = \inf\Big\{n \mid \exists\, \phi : A \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ continue} \\ \text{et vérifiant l'équation (3.1)}, \forall (x,c) \in A\Big\}.$$

Par convention, $\gamma(\emptyset) = 0$.

Proposition 3.2. *Le genre γ vérifie, pour tous $A, B \in \mathcal{E}$, les propriétés suivantes:*

(1) $\gamma(\{(x,c)\} \cup \{(-x,c)\}) = 1$;

(2) *s'il existe une fonction $f \in C(A,B)$ équivariante, alors $\gamma(A) \leq \gamma(B)$;*

(3) *si $A \subseteq B$, alors $\gamma(A) \leq \gamma(B)$;*

(4) $\gamma(A \cup B) \leq \gamma(A) + \gamma(B)$;

(5) *si A est compact, alors $\gamma(A) = s < \infty$ et il existe $\delta > 0$ tel que $\gamma(B_\delta(A)) = s$.*

DÉMONSTRATION. (1) Considérons

$$\phi(v) = \begin{cases} 1, & \text{si } v = (x, c); \\ -1, & \text{si } v = (-x, c). \end{cases}$$

On a donc que $\gamma(\{x, c\} \cup \{-x, c\}) = 1$.

(2) Supposons que $\gamma(B) = n$. Alors il existe une fonction continue $\phi : B \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ telle que $\phi(-x, c) = -\phi(x, c)$. On a donc que $\phi \circ f : A \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ vérifie

$$\phi(f(-x, c)) = \phi(-f_1(x, c), f_2(x, c)) = -\phi(f(x, c)).$$

D'où $\gamma(A) \leq n$.

(3) Soient $A, B \in \mathcal{E}$ tels que $A \subseteq B$. L'inclusion $\iota : A \to B$ est équivariante. Par (2), on obtient que $\gamma(A) \leq \gamma(B)$.

(4) Supposons que $\gamma(A) = m$ et $\gamma(B) = n$. Il existe donc deux fonctions continues

$$\phi : A \to \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \quad \text{et} \quad \zeta : B \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

vérifiant (3.1) pour tout $(x, c) \in A$ et pour tout $(x, c) \in B$ respectivement. Puisque A et B sont fermés, on peut étendre ϕ et ζ sur $E \times \mathbb{R}$ par le théorème de Tietze (voir théorème 1.4), c'est-à-dire qu'il existe $\hat{\phi} \in C(E \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ et $\hat{\zeta} \in C(E \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ telles que

$$\hat{\phi}|_A = \phi \quad \text{et} \quad \hat{\zeta}|_B = \zeta.$$

On peut supposer que (3.1) est vérifiée pour tout $(x,c) \in E \times \mathbb{R}$. Sinon, on remplace $\hat{\phi}$ par

$$\frac{\hat{\phi}(x,c) - \hat{\phi}(-x,c)}{2}$$

qui vérifie (3.1) et coïncide avec ϕ sur A. De même pour $\hat{\zeta}$. Soit $f = (\hat{\phi}, \hat{\zeta})|_{A\cup B}$, alors $f \in C(A \cup B, \mathbb{R}^{m+n} \setminus \{0\})$ et $f(-x,c) = -f(x,c)$; d'où

$$\gamma(A \cup B) \leq m + n = \gamma(A) + \gamma(B).$$

(5) Soit $A \in \mathcal{E}$, un ensemble compact. Pour $u = (x,c) \in A$, posons $r(u) = \frac{1}{2}\|x\|_E$ et

$$\mathcal{V}_u = \mathcal{O}_{r(u)}(x,c) \cup \mathcal{O}_{r(u)}(-x,c),$$

où $\mathcal{O}_r(x,c)$ est la boule ouverte de rayon r centrée en (x,c). Puisque $\mathcal{V}_u$ est composé de deux ensembles disjoints, $\gamma(\overline{\mathcal{V}_u}) = 1$ pour tout $u \in A$.

Clairement, on a $A \subset \bigcup_{u\in A} \mathcal{V}_u$. Puisque A est compact, il existe un sous-recouvrement fini de A. On a donc

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{V}_{u_i} \subset \bigcup_{i=1}^{k} \overline{\mathcal{V}_{u_i}}.$$

Par (4), on a $\gamma(A) \leq \sum_{i=1}^{k} \gamma(\overline{\mathcal{V}_{u_i}}) = k < \infty$. Notons $s = \gamma(A)$. Il existe donc une fonction continue $\phi : A \to \mathbb{R}^s \setminus \{0\}$ vérifiant (3.1) pour tout $(x,c) \in A$. De nouveau, par le théorème de Tietze (voir théorème 1.4), ϕ peut être prolongée par une fonction continue $\hat{\phi} : E \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^s$ vérifiant (3.1) pour tout $(x,c) \in E \times \mathbb{R}$. Puisque A est compact, il existe un $\delta > 0$ tel que $\hat{\phi} \neq 0$ sur $B_\delta(A)$.

Sinon, il existe une suite (δ_i) de nombres positifs convergeant vers 0 et pour chaque $i \in \mathbb{N}$, il existe $u_i \in B_{\delta_i}(A)$ tel que $\hat{\phi}(u_i) = 0$. Pour tout i, il existe $v_i \in A$ tel que $\|u_i - v_i\| \leq \delta_i$. Puisque A est compact, la suite (v_i) possède une sous-suite convergeant vers un point $v \in A$. Par conséquent, $\|u_{i_k} - v\| \to 0$ et donc $u_{i_k} \to v$. Par continuité de $\hat{\phi}$, on a

$$0 = \lim_{k\to\infty} \hat{\phi}(u_{i_k}) = \hat{\phi}(\lim_{k\to\infty} u_{i_k}) = \hat{\phi}(v).$$

Il existe donc $v \in A$ tel que $\phi(v) = 0$. C'est une contradiction. On a donc $\gamma(B_\delta(A)) \leq s$. Puisque $A \subset B_\delta(A)$, par (3), on déduit que $\gamma(B_\delta(A)) = s$. □

Remarque 3.3. Si $\gamma(B) < \infty$, alors $\gamma(\overline{A \setminus B}) \geq \gamma(A) - \gamma(B)$. En effet, $A \subset \overline{A \setminus B} \cup B$ et donc par (3) et (4) de la proposition 3.2, $\gamma(A) \leq \gamma(\overline{A \setminus B}) + \gamma(B)$. Puisque $\gamma(B) < \infty$, on a la conclusion.

La proposition suivante nous permet d'évaluer le genre d'une famille d'ensembles qui nous seront utiles plus tard.

Proposition 3.4. *Soient $A \in \mathcal{E}$ et Ω un voisinage symétrique borné de 0 dans $\mathbb{R}^k$. Supposons qu'il existe $h \in C(A, \partial\Omega)$, un homéomorphisme vérifiant*

$$-h(x,d) = h(-x,d).$$

Alors, $\gamma(A) = k$.

Démonstration. Clairement, on a $\gamma(A) \leq k$. Supposons que $\gamma(A) = j < k$. Par la définition du genre, il existe une fonction $\phi \in C(A, \mathbb{R}^j \setminus \{0\})$ vérifiant (3.1). On a alors $\phi \circ h^{-1} \in C(\partial\Omega, \mathbb{R}^j \setminus \{0\})$. De plus, pour $x \in \partial\Omega$,

$$\phi(h^{-1}(-x)) = \phi(-y,d) = -\phi(y,d) = -\phi \circ h^{-1}(x),$$

où $x = h(y,d)$. On a donc une fonction continue impaire

$$\phi \circ h^{-1} : \partial\Omega \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^j \setminus \{0\}$$

avec Ω symétrique borné et $j < k$. On a une contradiction, car le théorème de Borsuk-Ulam (voir théorème 1.3) garantit qu'une telle fonction s'annule. On peut donc conclure que $\gamma(A) = k$.

$\square$

Théorème 3.5. *Soient $X \subset E$, un sous-espace de co-dimension k et $A \in \mathcal{E}$ avec $\gamma(A) > k$ et soit $Q \subset \mathbb{R}$ tel que $\pi_{\mathbb{R}}(A) \subset Q$. Alors $A \cap (X \times Q) \neq \emptyset$.*

DÉMONSTRATION. Soit V un complément de dimension k de X dans E et soit π_V la projection de E sur V. Considérons $h : V \to \mathbb{R}^k$ une fonction linéaire bijective. Si $A \cap (X \times Q) = \emptyset$, alors la fonction

$$\phi : A \longrightarrow \mathbb{R}^k \setminus \{0\} \text{ définie par } (x, c) \mapsto h(\pi_v(x))$$

est bien définie et continue. De plus, elle vérifie l'égalité (3.1) pour tout $(x, c) \in A$. Par la définition du genre, $\gamma(A) \leq k$; ce qui est contradictoire.

$\square$

Chapitre 4

THÉORÈME DU COL DE LA MONTAGNE GÉNÉRALISÉ

Dans ce chapitre, nous présenterons le résultat principal de ce mémoire. Il s'agit d'une généralisation du théorème du col de la montagne pour les fonctions invariantes sous l'action du groupe $\mathbb{Z}_2$ (voir [7]) aux fonctionnelles multivoques à graphe fermé et invariantes.

Théorème 4.1. *Soit E un espace de Banach de dimension infinie et soit $F : E \to \mathbb{R}$, une fonction multivoque à graphe fermé invariante sous l'action de $\mathbb{Z}_2$. Supposons que $E = V \oplus X$, où V est de dimension finie. Supposons également que F soit telle que les conditions suivantes soient vérifiées :*

(I1) *il existe $\alpha, \rho > 0$ tels que* $\inf F(\partial B_\rho \cap X) \geq \alpha$;

(I2) *il existe une famille d'homéomorphismes $\{\psi_m\}$ où $\psi_m : \mathbb{R}^m \to E_m = \psi_m(\mathbb{R}^m) \subset graphF$ satisfaisant*

(i) $\psi_m(\partial B_1^m) \subseteq (E \setminus B_\rho) \times \,]-\infty, 0]$;

(ii) $\pi_E(\psi_m(-x)) = -\pi_E(\psi_m(x))$, $\pi_{\mathbb{R}}(\psi_m(x)) = \pi_{\mathbb{R}}(\psi_m(-x))$;

où B_1^m est la boule fermée de rayon 1, centrée en 0 dans $\mathbb{R}^m$.

Supposons finalement que F satisfasse $\mathbb{Z}_2$-$(PS)_c$ pour tout $c \geq \alpha$. Alors il y a une des deux alternatives suivantes qui est vérifiée :

(a) *il existe $c \geq \alpha$ tel que $0 \in \mathbb{Z}_2$-K_c ;*

(b) *F possède une suite non bornée de $\mathbb{Z}_2$–valeurs critiques.*

La démonstration de ce théorème est une conséquence directe des cinq résultats suivants. Introduisons d'abord quelques notations.

Notons $k = \dim V$. Nous avons, pour chaque $m \in \mathbb{N}$, un homéomorphisme associé ψ_m et nous noterons par la suite

$$D_m = \psi_m(B_1^m);$$
$$S_m = \psi_m(S_1^m);$$

où, nous le rappelons, B_1^m est la boule fermée de rayon 1, centrée en 0, dans $\mathbb{R}^m$ et S_1^m est le bord de B_1^m dans $\mathbb{R}^m$. Posons

$$\Lambda_m = \Big\{h \in C(D_m, graphF) \mid h \text{ est équivariante, } h|_{S_m} = id \text{ et } h_2(x,c) \leq c\Big\};$$
$$\Gamma_j = \Big\{h(\overline{D_m \setminus Y}) \mid h \in \Lambda_m, m \geq j, Y \in \mathcal{E}, \gamma(Y) \leq m - j\Big\}.$$

Proposition 4.2. *La famille $\{\Gamma_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ définie plus haut possède les propriétés suivantes :*

(1) *$\Gamma_j \neq \emptyset$, pour tout $j \in \mathbb{N}$;*

(2) *$\Gamma_{j+1} \subset \Gamma_j$;*

(3) *si $\phi : graphF \to graphF$ est continue et équivariante, $\phi|_{S_m} = id$ pour tout $m \geq j$ et $\phi_2(x,c) \leq c$, alors $\phi : \Gamma_j \to \Gamma_j$;*

(4) *si $P \in \Gamma_j$, $Z \in \mathcal{E}$,$\gamma(Z) \leq s < j$, alors $\overline{P \setminus Z} \in \Gamma_{j-s}$.*

DÉMONSTRATION. (1) Clairement, $\Lambda_j \neq \emptyset$. En effet, $id \in \Lambda_j$ et ce pour tout $j \in \mathbb{N}$. De plus, on a toujours $\emptyset \in \mathcal{E}$ et $\gamma(\emptyset) = 0$. On a donc $\Gamma_j \neq \emptyset$.

(2) Si $P = h(\overline{D_m \setminus Y}) \in \Gamma_{j+1}$, alors $m \geq j+1 \geq j$, $h \in \Lambda_m$, $Y \in \mathcal{E}$ et $\gamma(Y) \leq m-(j+1) \leq m-j$. On a donc $P \in \Gamma_j$.

(3) Soit $P \in \Gamma_j$ avec $P = h(\overline{D_m \setminus Y})$ et soit $\phi \in C(graphF, graphF)$ vérifiant les hypothèses de (3). Alors $\phi \circ h \in C(D_m, graphF)$ est équivariante. De plus $\phi \circ h|_{S_m} = id$ et $(\phi \circ h)_2(x,c) \leq h_2(x,c) \leq c$. D'où $\phi \circ h \in \Lambda_m$ et $\phi \circ h(\overline{D_m \setminus Y}) = \phi(P) \in \Gamma_j$. Ce qui veut dire que $\phi : \Gamma_j \longrightarrow \Gamma_j$.

(4) Soit $P = h(\overline{D_m \setminus Y})$. Supposons tout d'abord que

$$\overline{P \setminus Z} = h(\overline{D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(Z))}). \tag{4.1}$$

L'ensemble $h^{-1}(Z) \in \mathcal{E}$. En effet, soit $(x,c) \in h^{-1}(Z)$. On a $h(x,c) \in Z$, d'où $(-h_1(x,c), h_2(x,c)) \in Z$ puisque $Z \in \mathcal{E}$. Puisque h est équivariante, $h(-x,c) \in Z$, c'est-à-dire que $(-x,c) \in h^{-1}(Z)$. Par la continuité de h et puisque Z est fermé, on a évidemment $h^{-1}(Z)$ fermé. D'autre part, puisque $Z \subset (E \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ et que h est équivariante, $h^{-1}(Z) \subset (E \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$. On a donc $h^{-1}(Z) \in \mathcal{E}$. Puisque $Y \in \mathcal{E}$, on a $Y \cup h^{-1}(Z) \in \mathcal{E}$. Par la proposition 3.2, on a

$$\begin{aligned} \gamma(Y \cup h^{-1}(Z)) &\leq \gamma(Y) + \gamma(h^{-1}(Z)) \\ &\leq \gamma(Y) + \gamma(Z) \\ &\leq m - j + s = m - (j - s). \end{aligned}$$

Ce résultat, combiné à l'équation (4.1), nous donne

$$\overline{P \setminus Z} \in \Gamma_{j-s}.$$

Il ne reste plus qu'à montrer que l'équation (4.1) est juste. On a

$$h(D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(Z))) = h(D_m \setminus Y) \setminus Z. \tag{4.2}$$

Donc

$$h(D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(Z))) = P \setminus Z \subseteq \overline{P \setminus Z} \tag{4.3}$$

et

$$P \setminus Z \subseteq h(\overline{D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(Z))}). \tag{4.4}$$

Puisque D_m est compact, on a que $h(\overline{D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(Z))})$ est compact. On a donc

$$\overline{P \setminus Z} \subseteq \overline{h(\overline{D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(Z))})} = h(\overline{D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(Z))}). \tag{4.5}$$

D'autre part, on peut déduire de l'équation (4.3)

$$\overline{P \setminus Z} \supseteq \overline{h(D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(Z)))} = h(\overline{D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(Z))}) \tag{4.6}$$

par la continuité de h et la compacité de D_m. On déduit finalement des équations (4.5) et (4.6) l'équation (4.1).

□

Nous avons le théorème d'intersection suivant qui nous permettra entre autre de borner inférieurement les valeurs critiques trouvées.

Proposition 4.3. *Pour tout $P \in \Gamma_j$, avec $j > k$, on a $P \cap ((\partial B_\rho \cap X) \times \mathbb{R}) \neq \emptyset$.*

DÉMONSTRATION. Soit $P \in \Gamma_j$. L'ensemble P s'écrit alors comme $h(\overline{D_m \setminus Y})$ pour un $m \geq j$ et un $Y \in \mathcal{E}$ tel que $\gamma(Y) \leq m - j$. Posons

$$\hat{O} = \{(x, c) \in D_m | h(x, c) \in B_\rho \times \mathbb{R}\}.$$

Par (I2)(ii) et les propriétés de h, il existe $b \leq c \in \mathbb{R}$ tels que $(0, c) \in D_m$ et $h(0, c) = (0, b) \in B_\rho \times \mathbb{R}$; d'où $\hat{O} \neq \emptyset$. Soit $\tilde{O} = \psi_m^{-1}(\hat{O})$ et soit O la composante de $\tilde{O}$ qui contient 0. Puisque l'ensemble D_m est borné, que ψ_m est un homéomorphisme et qu'il satisfait (I2)(ii), on a que O est un voisinage dans $\mathbb{R}^m$, symétrique et borné. De plus, $A = \psi_m(\partial O) \in \mathcal{E}$. Par la proposition 3.4, on trouve $\gamma(A) = m$. Supposons que

$$h(A) \subset \partial B_\rho \times \mathbb{R} \tag{4.7}$$

et posons $W = \{(x,c) \in D_m | h(x,c) \in \partial B_\rho \times \mathbb{R}\} \in \mathcal{E}$. L'équation (4.7) nous donne $A \subset W$. Par (3) de la proposition 3.2, on a $\gamma(W) \geq m$. De plus, puisque $\psi_m^{-1} : W \to \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ vérifie (3.1), par définition, $\gamma(W) \leq m$ et donc $\gamma(W) = m$. Par la remarque 3.3,

$$\gamma(\overline{W \setminus Y}) \geq \gamma(W) - \gamma(Y) = m - (m - j) = j > k.$$

Par la proposition 3.2(2), on a $\gamma(h(\overline{W \setminus Y})) > k$ et donc, par le théorème 3.5,

$$h(\overline{W \setminus Y}) \cap (X \times \mathbb{R}) \neq \emptyset.$$

Puisque $h(\overline{W \setminus Y}) \subset (P \cap (\partial B_\rho \times \mathbb{R}))$, on a

$$P \cap ((\partial B_\rho \cap X) \times \mathbb{R}) \neq \emptyset.$$

Il reste l'équation (4.7) à montrer. Par l'hypothèse (I2)(i), on a

$$\|x\| > \rho \text{ pour tout } x \text{ tel que } (x,c) \in S_m. \tag{4.8}$$

Supposons qu'il existe $(x,c) \in A$ tel que $h(x,c) \in \overset{\circ}{B}_\rho \times \mathbb{R}$. Si $\psi_m^{-1}(x,c) \in \overset{\circ}{B}{}_1^m$, il existe un voisinage N de $\psi_m^{-1}(x,c)$ tel que $h(\psi_m(N)) \subset \overset{\circ}{B}_\rho \times \mathbb{R}$. On a donc $N \subset \overset{\circ}{O}$ et, par conséquent, $(x,c) \notin A = \psi_m(\partial O)$. Donc nécessairement $\psi_m^{-1}(x,c) \in S_1^m$, c'est-à-dire que $(x,c) \in S_m$. Sur S_m, $h(x,c) = (x,c)$. Puisque $(x,c) \in S_m$ et $h(x,c) \in \overset{\circ}{B}_\rho \times \mathbb{R}$, on a $\|x\| = \|h_1(x,c)\| < \rho$, ce qui contredit l'équation (4.8). L'équation (4.7) est donc vérifiée. $\square$

Pour chaque $j \in \mathbb{N}$, posons

$$c_j = \inf_{P \in \Gamma_j} \max \pi_\mathbb{R}(P) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}. \tag{4.9}$$

Nous allons montrer que si $0 \notin \mathbb{Z}_2\text{-}K_c$ pour tout $c \geq \alpha$, on a que les c_j ainsi définis sont des $\mathbb{Z}_2$-valeurs critiques de F et que cette suite n'est pas bornée supérieurement. Du théorème d'intersection précédent, on obtient aisément une borne inférieure pour les c_j avec $j > k$.

Corollaire 4.4. *Si $j > k$, alors $c_j \geq \alpha > 0$.*

DÉMONSTRATION. Pour tout $P \in \Gamma_j$, avec $j > k$, on a $P \cap ((\partial B_\rho \cap X) \times \mathbb{R}) \neq \emptyset$, par la proposition précédente. D'où, par (I1),

$$\max \pi_{\mathbb{R}}(P) \geq \pi_{\mathbb{R}}(((\partial B_\rho \cap X) \times \mathbb{R}) \cap P) \geq \alpha.$$

On a donc $c_j = \inf_{P \in \Gamma_j} \max \pi_{\mathbb{R}}(P) \geq \alpha > 0$. □

Proposition 4.5. *Si $j > k$, $c_j = \ldots = c_{j+p} = c$ et $0 \notin \mathbb{Z}_2\text{-}K_c$, alors*

$$\gamma(\mathbb{Z}_2\text{-}K_c \times \{c\}) \geq p + 1.$$

DÉMONSTRATION. Par hypothèse, $0 \notin \mathbb{Z}_2\text{-}K_c$. Par $\mathbb{Z}_2\text{-}(PS)_c$, $\mathbb{Z}_2\text{-}K_c$ est compact. Par (5) de la proposition 3.2, on a que $\gamma(\mathbb{Z}_2\text{-}K_c \times \{c\})$ est fini. Supposons que $\gamma(\mathbb{Z}_2\text{-}K_c \times \{c\}) \leq p$. Il existe $\delta > 0$ tel que $\gamma(B_\delta(\mathbb{Z}_2\text{-}K_c \times \{c\})) \leq p$. Posons $O = \text{int}(B_\delta(\mathbb{Z}_2\text{-}K_c \times \{c\}))$ et $\varepsilon_0 = \frac{\alpha}{2}$. Par le théorème 2.6, nous obtenons un $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ et une fonction $\eta : graphF \times [0,1] \to graphF$ telle que $\eta(\cdot, 1)$ est équivariante et $\eta_2((x,c),1) \leq c$. Choisissons $P \in \Gamma_{j+p}$ tel que

$$\max \pi_{\mathbb{R}}(P) \leq c + \varepsilon.$$

Puisque $P \in \Gamma_{j+p}$ et que $\gamma(B_\delta(\mathbb{Z}_2\text{-}K_c \times \{c\})) \leq p < p + j$, par (4) de la proposition 4.2, on a $\overline{P \setminus O} \in \Gamma_j$. Par hypothèse, $\pi_{\mathbb{R}}(S_m) \leq 0$ et $c - \varepsilon_0 = c - \frac{\alpha}{2} > 0$. Par (3) du théorème 2.6, on a $\eta((x,b),1) = (x,b)$ pour tout $(x,b) \in S_m$.

La fonction $\eta(\cdot, 1)$ vérifie donc les hypothèses de la proposition 4.2(3) et donc, $\eta(\overline{P \setminus O}, 1) \in \Gamma_j$. D'où, par la définition de c_j,

$$c = c_j \leq \max \pi_{\mathbb{R}}(\eta(\overline{P \setminus O}, 1)). \tag{4.10}$$

D'autre part, par (4) du théorème 2.6, on a

$$\eta(\overline{P \setminus O}, 1) \subset \eta(graphF \cap (E \times (-\infty, c+\varepsilon]) \setminus O), 1) \subset E \times (-\infty, c-\varepsilon],$$

ce qui contredit (4.10). On a donc $\gamma(\mathbb{Z}_2\text{-}K_c \times \{c\}) \geq p+1$. □

Si $0 \notin \mathbb{Z}_2\text{-}K_c$ pour tout $c \geq \alpha$, nous obtenons une suite de valeurs critiques. De plus, en vertu de la proposition précédente, nous obtenons également l'existence d'une infinité de points critiques. Il ne reste plus qu'à montrer que cette suite est non bornée.

Proposition 4.6. *Si $0 \notin \mathbb{Z}_2\text{-}K_c$ pour tout $c \geq \alpha$, la suite (c_j) obtenue tend vers l'infini lorsque j tend vers l'infini.*

Démonstration. Par la proposition 4.2, $\Gamma_{j+1} \subseteq \Gamma_j$. Puisque

$$c_j = \inf_{P \in \Gamma_j} \max \pi_{\mathbb{R}}(P),$$

on a clairement $c_{j+1} \geq c_j$. Supposons que la suite soit bornée supérieurement. Elle est convergente, c'est-à-dire $c_j \xrightarrow[j\to\infty]{} \bar{c} \in [\alpha, \infty[$. Si $c_j = \bar{c}$ à partir d'un certain j assez grand, $\gamma(\mathbb{Z}_2\text{-}K_{\bar{c}}) = \infty$ par la proposition 4.5. Or, en vertu de $\mathbb{Z}_2\text{-}(PS)_{\bar{c}}$, $\mathbb{Z}_2\text{-}K_{\bar{c}}$ est compact et donc $\gamma(\mathbb{Z}_2\text{-}K_{\bar{c}} \times \{\bar{c}\}) < \infty$, contradiction. Par conséquent, on doit avoir $c_j < \bar{c}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Posons

$$\mathcal{K} = \{(u,b) \in graphF \mid c_{k+1} \leq b \leq \bar{c}, |d_{\mathbb{Z}_2}F|(u,b) = 0\}.$$

La condition de $\mathbb{Z}_2\text{-}(PS)_c$ implique que $\mathcal{K}$ est compact. Par hypothèse, $\mathcal{K} \subset E \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$, donc $\mathcal{K} \in \mathcal{E}$. Par la compacité de $\mathcal{K}$, $\gamma(\mathcal{K}) < \infty$. De plus, il existe un $\delta > 0$ tel que $\gamma(B_\delta(\mathcal{K})) = \gamma(\mathcal{K}) \equiv q$. Posons

$$s = \max\{q, k+1\}.$$

Si on pose $O = B_\delta(\mathcal{K})$, nous pouvons appliquer le théorème 2.6 avec l'ouvert $\overset{\circ}{O}$, $\varepsilon_0 = \bar{c} - c_s$ et $c = \bar{c}$. De la même façon que dans la preuve de la proposition 4.5, il existe une déformation η telle que

$$\eta(graphF \cap E \times (-\infty, \bar{c} + \varepsilon] \setminus O, 1) \subseteq E \times (-\infty, \bar{c} - \varepsilon].$$

Soit $j \in \mathbb{N}$ tel que $c_j > \bar{c} - \varepsilon$ et soit $P \in \Gamma_{j+s}$ tel que $\max \pi_{\mathbb{R}}(P) \leq \bar{c} + \varepsilon$. Puisque $P \in \Gamma_{j+s}$ et que $\gamma(O) = q \leq s < j + s$, on a de nouveau $\overline{P \setminus O} \in \Gamma_{j+s-s} = \Gamma_j$. Encore une fois, puisque $\bar{c} - \varepsilon_0 = c_s \geq c_{k+1} \geq \alpha > 0$ et que $\pi_{\mathbb{R}}(S_m) \leq 0$, on a que la déformation $\eta(\cdot, 1) = id$ sur S_m et donc $\eta(\overline{P \setminus O}, 1) \in \Gamma_j$ par (3) de la proposition 4.2. On a donc

$$c_j \leq \max \pi_{\mathbb{R}}(\eta(\overline{P \setminus O}, 1)) \leq \bar{c} - \varepsilon < c_j$$

qui est une contradiction. D'où $c_j \to \infty$. $\square$

Avec les hypothèses du théorème 4.1, soit il existe $c \geq \alpha$ tel que $0 \in \mathbb{Z}_2$-K_c ou alors, par les propositions 4.5 et 4.6, il existe une suite non bornée de valeurs critiques. Le théorème 4.1 est ainsi démontré.

Chapitre 5

APPLICATION

Dans ce chapitre, nous montrerons une application du théorème 4.1 aux inclusions aux dérivées partielles. Nous établirons un résultat d'existence pour le problème

$$\begin{cases} -\triangle y(t) \in G(y(t)) & \text{p.p. } t \in \Omega, \\ \quad y(t) = 0 & \text{pour tout } t \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ avec une frontière $\partial\Omega$ lisse, $n \geq 3$ et $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction multivoque.

Pour $n = 1$ ou 2, on pourrait affaiblir la condition (1) du théorème 5.1 (voir Rabinowitz [20] pour plus de détails).

Nous dirons que y est une solution faible de (P) s'il existe une fonction mesurable h telle que $h(t) \in G(y(t))$ p.p. $t \in \Omega$ et

$$\int_\Omega \nabla y \nabla w - hw \, dt = 0$$

pour tout $w \in H_0^1(\Omega)$.

Voici le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 5.1. *Soit $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction multivoque, semi-continue supérieurement à valeurs non-vides, compactes et convexes. Supposons que*

(1) *il existe $1 < \mu < (n+2)/(n-2)$ et des constantes a, b tels que*

$$|G(x)| = \max\{|z| : z \in G(x)\} \leq a + b|x|^{\mu} \quad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R};$$

(2) *il existe $\beta > 2$ et $R > 0$ tels que pour tout x tel que $|x| \geq R$,*

$$0 < \beta \int_0^x G(y)\, dy \leq \min(xG(x)) = \min\{xz : z \in G(x)\};$$

(3) *la fonction G est équivariante sous l'action de $\mathbb{Z}_2$.*

Alors le problème (P) possède une infinité de solutions distinctes.

Pour arriver à faire la preuve de ce théorème, nous aurons besoin de plusieurs lemmes. Tout d'abord, nous introduirons les notations et définitions suivantes qui seront utilisées tout au long du chapitre :

$$\mathcal{S}(G) = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, g \text{ équivariante sous l'action de } \mathbb{Z}_2, \\ \text{mesurable et } g(x) \in G(x) \text{ p.p. } x\};$$

$$\mathcal{S}(y) = \{h : \Omega \to \mathbb{R} \,|\, h \text{ mesurable et } h(t) \in G(y(t)) \text{ p.p. } t\}.$$

Les lemmes 1.12 et 1.13 impliquent que $\mathcal{S}(G)$ et $\mathcal{S}(y)$ sont non vides.

$$\underline{g}(x) = \min\{G(x)\} \quad \text{et} \quad \overline{g}(x) = \max\{G(x)\};$$

$$J_g(y) = \int_\Omega \left[\frac{|\nabla y|^2}{2} - \int_0^y g(x)dx\right] dt.$$

Considérons la fonction $F : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(y) = \{c |\text{ il existe } g \in \mathcal{S}(G) \text{ tel que } J_g(y) \leq c\}.$$

Lemme 5.2. *La fonction $J_g : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ est continue pour tout $g \in \mathcal{S}(G)$.*

DÉMONSTRATION. Premièrement, J_g est bien définie. En effet, on a que

$$J_g(y) = \frac{\|y\|^2}{2} - \int_\Omega \int_0^y g(x)\,dx\,dt.$$

On a bien que $\|y\| \in \mathbb{R}$. Par l'hypothèse (1), on a

$$\int_\Omega \int_0^y |g(x)|\,dx\,dt \leq \int_\Omega \hat{b}|y|^{\mu+1} + \hat{a}\,dt. \tag{5.1}$$

Puisque $\mu + 1 < (2n)/(n-2)$, on a que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\mu+1}(\Omega)$ et donc

$$\int_\Omega \hat{b}|y|^{\mu+1} + \hat{a}\,dt < \infty.$$

En combinant le tout avec l'équation (5.1), on obtient que $J_g(y) \in \mathbb{R}$.

De plus, si $g \in \mathcal{S}(G)$, on a $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. En effet, soit K un compact. Par l'hypothèse (1), on a

$$\int_K |g(x)|\,dx \leq \int_K a + b|x|^\mu\,dx < \infty.$$

Par le théorème 1.7, on a que la fonction $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$v(\hat{x}) = \int_0^{\hat{x}} g(x)\,dx$$

est continue.

Soit (y_n), une suite convergeant dans $H_0^1(\Omega)$ vers y. L'inclusion continue de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^{\mu+1}(\Omega)$ implique que $y_n \to y$ dans $L^{\mu+1}(\Omega)$ et nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que $y_n(t) \to y(t)$ presque partout dans Ω et qu'il existe $h \in L^{\mu+1}$ tel que $|y_n(t)| \leq h(t)$ presque partout dans Ω.

Par l'hypothèse (1), on a $|v(y_n(t))| \leq \hat{a} + b|y_n(t)|^{\mu+1} \leq \hat{a} + b|h(t)|^{\mu+1}$ presque partout dans Ω.

Par la continuité de v, $v(y_n(t)) \to v(y(t))$ presque partout. Par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue implique que

$$\int_\Omega v(y_n(t))\,dt \to \int_\Omega v(y(t))\,dt$$

et donc $J_g(y_n) \to J_g(y)$.

$\square$

Lemme 5.3. *La fonction F est à graphe fermé et $\mathbb{Z}_2$-invariante.*

DÉMONSTRATION. Premièrement, la fonction F est invariante sous l'action de $\mathbb{Z}_2$. En effet, soit $c \in F(y)$. Nous devons montrer que $c \in F(-y)$. Si $c \in F(y)$, c'est qu'il existe $g \in \mathcal{S}(G)$ tel que

$$J_g(y) = \int_\Omega \left[\frac{|\nabla y|^2}{2} - \int_0^y g(x)dx\right] dt \leq c.$$

On a aussi

$$\begin{aligned} J_g(-y) &= \int_\Omega \left[\frac{|\nabla y|^2}{2} - \int_0^{-y} g(x)dx\right] dt \\ &= \int_\Omega \left[\frac{|\nabla y|^2}{2} - \int_0^{y} -g(-x)dx\right] dt \\ &= \int_\Omega \left[\frac{|\nabla y|^2}{2} - \int_0^{y} g(x)dx\right] dt \end{aligned}$$

par l'équivariance de g et donc $J_g(-y) \leq c$, c'est-à-dire que $c \in F(-y)$.

Soit $\{(y_n, c_n)\} \in graphF$, une suite convergeant vers (y, c). Il existe donc $\{g_n\}$ dans $\mathcal{S}(G)$ telle que $J_{g_n}(y_n) \leq c_n$.

Puisque G est semi-continue supérieurement à valeurs compactes, on a que $G[-k, k]$ est compact pour tout $k > 0$. Fixons $r \in (1, \infty)$. Puisque (g_n) est borné dans $L^r([-k, k])$ pour tout $k > 0$, nous déduisons l'existence de $g \in L^r_{loc}(\mathbb{R})$

telle qu'il existe une sous-suite que nous continuerons à noter (g_n) qui converge faiblement vers $g \in L^r([-k,k])$ pour tout $k > 0$. De plus, nous avons

$$g(x) \in \overline{\text{conv}}\{g_n(x), g_{n+1}(x), \dots\} \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}.$$

Ceci avec le fait que $g_n \in \mathcal{S}(G)$ et que G est semi-continue supérieurement avec des valeurs compactes et convexes implique que $g(x) \in G(x)$ p.p. $x \in \mathbb{R}$.

Sans perte de généralité, supposons que $y_n(t) \to y(t)$ pour presque tout $t \in \Omega$. On a

$$\int_0^{y_n(t)} g_n(x)\,dx \to \int_0^{y(t)} g(x)\,dx \quad \text{p.p. } t \in \Omega.$$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue implique que

$$\int_\Omega \int_0^{y_n(t)} g_n(x)\,dx\,dt \to \int_\Omega \int_0^{y(t)} g(x)\,dx\,dt.$$

D'où

$$J_g(y) \leq \lim_{n\to\infty} J_{g_n}(y_n) \leq \lim_{n\to\infty} c_n = c,$$

c'est-à-dire que F est à graphe fermé.

$\square$

Pour $y \in H_0^1(\Omega)$, on définit

$$\mathcal{A}(y) = \Bigg\{ \alpha \in H^{-1}(\Omega) \quad | \quad \exists h \in \mathcal{S}(y) \text{ tel que}$$

$$\langle \alpha, w \rangle = \int_\Omega \nabla y \nabla w - h(t) w \; dt \quad \forall w \in H_0^1(\Omega) \Bigg\},$$

où $H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))^*$ est le dual topologique de $H_0^1(\Omega)$ et $\langle \alpha, w \rangle$ est le produit de dualité. Remarquons que y est une solution de (P) si $0 \in \mathcal{A}(y)$. De plus, on a toujours $\mathcal{A}(y) \neq \emptyset$. En effet, soit $h \in \mathcal{S}(y)$. Alors $L(w) = \int_\Omega \nabla y \nabla w - h(t) w \; dt$ est une application linéaire qui est bien définie. On a donc que $L(w) = \langle \alpha, w \rangle$ pour $\alpha \in H^{-1}(\Omega)$.

Lemme 5.4. *Soit $y \in H_0^1(\Omega)$. Alors il existe $\alpha \in \mathcal{A}(y)$ et $w \in H_0^1(\Omega)$ avec $\|w\| \leq 1$ tels que*

$$\|\alpha\|_{H^{-1}} = \langle \alpha, w \rangle \leq \langle \tilde{\alpha}, w \rangle$$

pour tout $\tilde{\alpha} \in \mathcal{A}(y)$.

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, par l'hypothèse (1), on a que $\mathcal{A}(y)$ est borné. De plus, puisque G est à valeurs convexes, $\mathcal{A}(y)$ est convexe. En effet, supposons $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{A}(y)$. On a alors que

$$\langle \lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2, w \rangle = \int_\Omega \nabla y \nabla w \, dt - \int_\Omega (\lambda h_1 + (1-\lambda)h_2) w \, dt$$

pour $\lambda \in [0,1]$. Puisque $\lambda h_1 + (1-\lambda)h_2 \in \mathcal{S}(y)$, on déduit que $\mathcal{A}(y)$ est convexe.

Définissons $K : \mathcal{A}(y) \times B_1 \to \mathcal{A}(y) \times B_1$ par

$$K(\tilde{\alpha}, \tilde{w}) = \{(\alpha, w) \in \mathcal{A}(y) \times B_1 \, : \, \langle \tilde{\alpha}, w \rangle - \langle \alpha, \tilde{w} \rangle \geq 0\},$$

où B_1 est la boule fermée de rayon 1, centrée en 0 dans $H_0^1(\Omega)$. Pour tout $(\tilde{\alpha}, \tilde{w}) \in \mathcal{A}(y) \times B_1$, l'ensemble $K(\tilde{\alpha}, \tilde{w})$ est fermé et convexe. En effet, soit une suite $(\alpha_m, w_m) \in K(\tilde{\alpha}, \tilde{w})$ convergeant vers (α, w). Par la continuité de $\tilde{\alpha}$, $\langle \tilde{\alpha}, w \rangle - \langle \alpha, \tilde{w} \rangle = \lim_{m\to\infty} \langle \tilde{\alpha}, w_m \rangle - \lim_{m\to\infty} \langle \alpha_m, \tilde{w} \rangle \geq 0$. Pour la convexité, soient $(\alpha_1, w_1), (\alpha_2, w_2) \in K(\tilde{\alpha}, \tilde{w})$ et $\lambda \in [0,1]$. On a alors

$$\langle \tilde{\alpha}, \lambda w_1 + (1-\lambda) w_2 \rangle - \langle \lambda \alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2, \tilde{w} \rangle =$$
$$\lambda(\langle \tilde{\alpha}, w_1 \rangle - \langle \alpha_1, \tilde{w} \rangle) + (1-\lambda)(\langle \tilde{\alpha}, w_2 \rangle - \langle \alpha_2, \tilde{w} \rangle) \geq 0.$$

La fonction K est KKM. En effet, sinon, il existe $(\tilde{\alpha_1}, \tilde{w_1}), \ldots, (\tilde{\alpha_n}, \tilde{w_n})$ tels que

$$\operatorname{conv}\{(\tilde{\alpha_1}, \tilde{w_1}), \ldots, (\tilde{\alpha_n}, \tilde{w_n})\} \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} K(\tilde{\alpha}_i, \tilde{w}_i),$$

ce qui veut dire qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ et

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\tilde{\alpha}_i, \tilde{w}_i) \notin K(\tilde{\alpha}_j, \tilde{w}_j) \qquad \text{pour } j = 1, \ldots, n.$$

D'où

$$\left\langle \tilde{\alpha}_j, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{w}_i \right\rangle - \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{\alpha}_i, \tilde{w}_j \right\rangle < 0 \qquad \text{pour } j = 1, \ldots, n.$$

Ceci implique que

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left[\left\langle \tilde{\alpha}_j, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{w}_i \right\rangle - \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{\alpha}_i, \tilde{w}_j \right\rangle \right] < 0,$$

ce qui est une contradiction.

Par le principe KKM élémentaire (voir lemme 1.2), il existe $(\alpha, w) \in K(\tilde{\alpha}, \tilde{w})$ pour tout $(\tilde{\alpha}, \tilde{w}) \in \mathcal{A}(y) \times B_1$. On a donc

$$\langle \tilde{\alpha}, w \rangle \geq \langle \alpha, \tilde{w} \rangle \qquad \text{pour tout } (\tilde{\alpha}, \tilde{w}) \in \mathcal{A}(y) \times B_1.$$

D'où

$$\langle \tilde{\alpha}, w \rangle \geq \langle \alpha, w \rangle = \|\alpha\|_{H^{-1}}.$$

□

Le lemme suivant montre que les points critiques de F correspondent aux solutions faibles de (P).

Lemme 5.5. *Soient $y \in H_0^1(\Omega)$ et $c \in F(y)$. Alors il existe $\alpha \in \mathcal{A}(y)$ tel que $\|\alpha\|_{H^{-1}} \leq |d_{\mathbb{Z}_2}F|(y, c)$.*

DÉMONSTRATION. Si $|d_{\mathbb{Z}_2}F|(y,c) = \infty$ ou si $0 \in \mathcal{A}(y)$, c'est clair. Supposons donc que $|d_{\mathbb{Z}_2}F|(y,c) \neq \infty$ et $0 \notin \mathcal{A}(y)$. Par le lemme 5.4, il existe $\alpha \in \mathcal{A}(y)$ et $\hat{w} \in H_0^1(\Omega)$ avec $\|\hat{w}\| \leq 1$ tels que

$$\|\alpha\| = \langle \alpha, \hat{w} \rangle \leq \langle \tilde{\alpha}, \hat{w} \rangle \quad \forall \tilde{\alpha} \in \mathcal{A}(y).$$

Soit $\varepsilon < \frac{\|\alpha\|_{H^{-1}}}{2}$. Il existe $w \in C_0^\infty(\Omega)$, $\|w\| \leq 1$ et $\|\hat{w} - w\|$ suffisamment petit tel que

$$\|\alpha\|_{H^{-1}} - \varepsilon < \langle \tilde{\alpha}, w \rangle = \int_\Omega \nabla y \nabla w - \tilde{h} w \; dt \qquad \forall \tilde{\alpha} \in \mathcal{A}(y). \tag{5.2}$$

De plus, il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $(v,b) \in (B_{\delta_1}(y,c) \cap graphF)$ et $s \in [0, \delta_1]$, on a

$$s \int_\Omega \nabla v \nabla w \; dt - \int_\Omega \int_{v-sw}^{v} g(x) dx dt \geq s(\|\alpha\|_{H^{-1}} - \varepsilon) \quad \forall g \in \mathcal{S}(G) \text{ avec } J_g(v) \leq b. \tag{5.3}$$

En effet, sinon il existe $(v_n, b_n) \to (y,c)$, $s_n \to 0$, $g_n \in \mathcal{S}(G)$ tels que $J_{g_n}(v_n) \leq b_n$ et

$$\|\alpha\|_{H^{-1}} - \varepsilon > \int_\Omega \nabla v_n \nabla w \, dt - \frac{1}{s_n} \int_\Omega \int_{v_n - s_n w}^{v_n} g_n \; dx dt.$$

Sur $\{t \,|\, w(t) \geq 0\}$, on a

$$\int_{v_n(t) - s_n w(t)}^{v_n(t)} g_n(x) \; dx \leq \int_{v_n(t) - s_n w(t)}^{v_n(t)} \overline{g}(x) \; dx.$$

Sur $\{t \,|\, w(t) < 0\}$, on a

$$\int_{v_n(t) - s_n w(t)}^{v_n(t)} g_n(x) \; dx = - \int_{v_n(t)}^{v_n(t) - s_n w(t)} g_n(x) \; dx \leq \int_{v_n(t) - s_n w(t)}^{v_n(t)} \underline{g}(x) \; dx.$$

En combinant les trois dernières équations et (5.2), on obtient

$$
\begin{aligned}
\|\alpha\|_{H^{-1}} - \varepsilon > \int_\Omega \nabla v_n \nabla w \; dt - \frac{1}{s_n} \int_{\{t | w(t) \geq 0\}} \int_{v_n - s_n w}^{v_n} \overline{g}(x) \; dx \, dt \\
- \frac{1}{s_n} \int_{\{t \,|\, w(t) < 0\}} \int_{v_n - s_n w}^{v_n} \underline{g}(x) \; dx \, dt \\
\to \int_\Omega \nabla y \nabla w \, dt - \int_{\{t \,|\, w(t) \geq 0\}} \overline{g}(y) w \, dt - \int_{\{t \,|\, w(t) < 0\}} \underline{g}(y) w dt \\
= \int_\Omega \nabla y \nabla w \, dt - \int_\Omega \hat{h}(t) w dt \\
> \|\alpha\| - \varepsilon
\end{aligned}
$$

où

$$
\hat{h}(t) = \begin{cases} \overline{g}(y(t)), & \text{si } t \in \{w(t) \geq 0\}; \\ \underline{g}(y(t)), & \text{si } t \in \{w(t) < 0\}; \end{cases}
$$

ce qui est clairement une contradiction.

Soit $\delta = \min\{\delta_1, \frac{2\varepsilon}{\|w\|^2_{H^1_0}}\}$. Définissons

$$
H : B((y,c),\delta) \cap graphF \times [0,\delta] \to graphF
$$

par

$$
H((v,b),s) = (v - sw, b - s(\|\alpha\|_{H^{-1}} - 2\varepsilon)).
$$

La fonction H est bien définie. En effet, soit $g \in \mathcal{S}(G)$ tel que $J_g(v) \leq b$. Alors, par (5.3),

$$
\begin{aligned}
J_g(v - sw) = J_g(v) - \left[s \int \nabla v \nabla w \, dt - \int_\Omega \int_{v-sw}^{v} g \, dx dt \right] + \frac{s^2}{2} \int |\nabla w|^2 \, dt \\
\leq b - s(\|\alpha\|_{H^{-1}} - \varepsilon) + s\varepsilon.
\end{aligned}
$$

On a donc $H((v,b),s) \in graphF$.

Par la définition de la pente faible, on a donc que $\|\alpha\|_{H^{-1}} - 2\varepsilon \leq |d_{\mathbb{Z}_2}F|(y,c)$ pour $\varepsilon > 0$ aussi petit qu'on veut. D'où

$$\|\alpha\|_{H^{-1}} \leq |d_{\mathbb{Z}_2}F|(y,c).$$

□

Lemme 5.6. *La fonctionnelle F satisfait $\mathbb{Z}_2$-$(PS)_c$ pour tout $c \in \mathbb{R}$.*

DÉMONSTRATION. Soient $(y_n) \in H_0^1(\Omega)$ et $c_n \in F(y_n)$ tels que

$$c_n \to c \quad \text{et} \quad |d_{\mathbb{Z}_2}F|(y_n, c_n) \to 0.$$

Nous devons montrer qu'il existe une sous-suite (y_{n_k}) qui converge dans $H_0^1(\Omega)$. Par le lemme 5.5, il existe $\alpha_n \in \mathcal{A}(y_n)$ avec $\|\alpha_n\|_{H^{-1}} \leq |d_{\mathbb{Z}_2}F|(y_n, c_n)$ et

$$\langle \alpha_n, w \rangle = \int_\Omega \nabla y_n \nabla w \, dt - \int_\Omega h_n w \, dt \text{ pour tout } w \in H_0^1(\Omega).$$

Montrons tout d'abord que notre suite (y_n) est bornée. En effet,

$$\begin{aligned}
c_n &\geq J_{g_n}(y_n) \\
&= \int_\Omega \frac{|\nabla y_n|^2}{2} - \int_\Omega \int_0^{y_n} g_n(x)\, dxdt - \frac{1}{\beta}\langle \alpha_n, y_n \rangle + \frac{1}{\beta}\langle \alpha_n, y_n \rangle \\
&= (\frac{1}{2} - \frac{1}{\beta}) \int_\Omega |\nabla y_n|^2 dt + \frac{1}{\beta}\langle \alpha_n, y_n \rangle + \frac{1}{\beta}\int_\Omega h_n y_n dt - \int_\Omega \int_0^{y_n} g_n(x)\, dxdt \\
&= (\frac{1}{2} - \frac{1}{\beta}) \int_\Omega |\nabla y_n|^2 dt + \frac{1}{\beta}\langle \alpha_n, y_n \rangle + \int_{\{t|\, |y_n(t)| \leq R\}} \left(\frac{h_n y_n}{\beta} - \int_0^{y_n} g_n(x) dx \right) dt \\
&\qquad + \int_{\{t|\, |y_n(t)| > R\}} \left(\frac{h_n y_n}{\beta} - \int_0^{y_n} g_n(x) dx \right) dt.
\end{aligned}$$

Les deux derniers membres de l'addition sont bornés inférieurement. En effet, pour le premier terme, en vertu de l'hypothèse (1), G est borné sur $[-R, R]$. D'où

$$\int_{\{t|\,|y_n(t)|\le R\}} \left(\frac{h_n y_n}{\beta} - \int_0^{y_n} g_n(x)dx\right) dt > -\kappa. \tag{5.4}$$

D'autre part, en vertu de l'hypothèse (2),

$$\int_{\{t|\,|y_n(t)|>R\}} \left(\frac{h_n y_n}{\beta} - \int_0^{y_n} g_n(x)dx\right) dt$$
$$\ge \int_{\{t|\,|y_n(t)|>R\}} \left(\frac{h_n y_n}{\beta} - \frac{\min\{y_n G(y_n)\}}{\beta}dx\right) dt. \tag{5.5}$$

Or,

$$\min\{y_n G(y_n)\} = \begin{cases} y_n\underline{g}(y_n) & \text{si } y_n > 0\,; \\ y_n\overline{g}(y_n) & \text{si } y_n < 0. \end{cases}$$

Puisque $h_n \in \mathcal{S}(y_n)$, on a $\underline{g}(y_n) \le h_n \le \overline{g}(y_n)$ et donc

$$y_n(h_n - \min G(y_n)) \ge 0. \tag{5.6}$$

En combinant les équations (5.4), (5.5) et (5.6), on déduit que

$$c_n \ge (\frac{1}{2} - \frac{1}{\beta})\|y_n\|^2_{H_0^1} + \frac{\langle \alpha_n, y_n\rangle}{\beta} - \kappa$$

et donc,

$$c_n \ge (\frac{1}{2} - \frac{1}{\beta})\|y_n\|^2 - \frac{1}{\beta}\|\alpha_n\|_{H^{-1}}\|y_n\| - \kappa.$$

Puisque c_n converge vers c et que α_n tend vers 0, on a que la suite (y_n) est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ et donc, relativement compacte dans $L^{\mu+1}(\Omega)$, car $\mu+1 < 2^*$.

On a donc une sous-suite convergente dans $L^{\mu+1}(\Omega)$ que nous noterons encore (y_n). Posons q l'exposant conjugué de $\mu+1$, c'est-à-dire que $q = \frac{\mu+1}{\mu}$. On remarque qu'il existe une constante M telle que $\|h_n\|_{L^q} \le M$ pour tout n. En effet, par l'hypothèse (1), on a que

$$\int_\Omega |h_n|^q\, dt \le \int_\Omega \hat{b}|y_n|^{\mu q} + \hat{a}\, dt = \int_\Omega \hat{b}|y_n|^{\mu+1} + \hat{a}\, dt \le M < \infty$$

pour tout n puisque (y_n) converge dans $L^{\mu+1}$.

Montrons maintenant que cette sous-suite converge dans $H_0^1(\Omega)$.

$$\begin{aligned}
\|y_n - y_m\|^2 &= \int \nabla y_n(\nabla y_n - \nabla y_m) + \int \nabla y_m(\nabla y_m - \nabla y_n) \\
&= \langle \alpha_n, y_n - y_m \rangle + \int h_n(y_n - y_m) \\
&\qquad\qquad + \langle \alpha_m, y_m - y_n \rangle + \int h_m(y_m - y_n) \\
&\le \|\alpha_n\|_{H^{-1}} \|y_n - y_m\| + \|\alpha_m\|_{H^{-1}} \|y_n - y_m\| \\
&\qquad\qquad + M\|y_n - y_m\|_{L^{\mu+1}} + M\|y_n - y_m\|_{L^{\mu+1}} \\
&\le K(\|\alpha_n\|_{H^{-1}} + \|\alpha_m\|_{H^{-1}}) + 2M\|y_n - y_m\|_{L^{\mu+1}} \to 0.
\end{aligned}$$

□

Nous pouvons maintenant prouver le théorème 5.1.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5.1. Pour pouvoir appliquer le théorème 4.1, il nous faut vérifier les conditions (I1) et (I2) ainsi que la condition $\mathbb{Z}_2$-$(PS)_c$. Pour cette dernière, le lemme 5.6 nous donne le résultat. Il reste les conditions (I1) et (I2) à vérifier.

Par le théorème 1.6, il existe une base hilbertienne $(e_i)_{i\geq 1}$ de $L^2(\Omega)$ et il existe une suite croissante $(\nu_i)_{i\geq 1}$ de réels avec $\nu_i > 0$ et $\nu_i \to \infty$ tels que

$$e_i \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$$

et

$$-\bigtriangleup e_i = \nu_i e_i \quad \text{sur } \Omega.$$

Pour (I2), prenons les homéomorphismes $\psi_m : \mathbb{R}^m \longrightarrow \psi_m(\mathbb{R}^m) \subset graphF$ définis par

$$\psi_m(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = (\mu_m(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_m e_m), J_{g^*}(\mu_m(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_m e_m)))$$

où

$$g^*(x) = \begin{cases} \overline{g}(x) & \text{si } x \geq 0\,; \\ \underline{g}(x) & \text{si } x < 0\,; \end{cases}$$

et μ_m est une constante à déterminer. Montrons que ce sont bien des homéomorphismes. Pour la bijectivité, il n'y a qu'à montrer l'injectivité, la surjectivité allant de soi. Puisque (e_i) est une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ et que $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, il existe une représentation de chaque élément de $H_0^1(\Omega)$ de la forme $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n + \cdots$ et cette représentation est unique. Par conséquent, si $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_n^*)$, on aura $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n \neq \lambda_1^* e_1 + \ldots + \lambda_n^* e_n$.

Soit maintenant $(y, c) \in E_m = \psi_m(\mathbb{R}^m)$. On aura alors que y s'écrit de façon unique comme $\lambda_1 e_1 + \ldots \lambda_m e_m$. On a donc clairement la continuité de la fonction inverse de ψ_m.

D'un autre côté, par le lemme 5.2, on a que $J_{g^*}(x)$ est continue. On a donc clairement la continuité de ψ_m.

Montrons d'abord que (I2)(ii) est vérifiée. Prenons $x = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$. On aura alors

$$\pi_{H_0^1}(\psi_m(-x)) = \mu_m(-\lambda_1 e_1 - \ldots - \lambda_m e_m) = -\mu_m(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_m e_m) = -\pi_{H_0^1}(\psi_m(x)).$$

Par la suite,

$$\begin{aligned}
\pi_{\mathbb{R}}(\psi_m(-x)) &= \int_\Omega \frac{|\nabla(-x)|^2}{2} - \int_0^{-x} g^*(z)\; dz\, dt \\
&= \int_\Omega \frac{|\nabla x|^2}{2} - \int_0^{x} -g^*(-z)\, dz\, dt \\
&= \int_\Omega \frac{|\nabla x|^2}{2} - \int_0^{x} g^*(z)\, dz\, dt \\
&= \pi_{\mathbb{R}}(\psi_m(x))
\end{aligned}$$

par l'équivariance de g^*.

Montrons maintenant que (I2)(i) est vérifiée. Soit $\rho > 0$ qui sera déterminé plus loin et posons

$$\mathcal{L}_m = \{y \in H_1^0(\Omega) \quad | \quad y = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i \text{ avec } (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \partial B_1^m\}.$$

On remarque que l'hypothèse (2) implique qu'il existe des constantes $k, l > 0$ telles que pour tout $y \in \mathbb{R}$ et pour tout $g \in \mathcal{S}(G)$,

$$\int_0^y g(x) \geq k|y|^\beta - l. \tag{5.7}$$

En effet, si $y > R$,

$$0 < \beta \int_0^y G(x)dx \leq \min(yG(y)) = y \min(G(y)).$$

On a donc

$$\frac{\beta}{y} \leq \frac{\min(G(y))}{\int_0^y \min(G(x))dx}.$$

En intégrant de R à y, on obtient

$$\log\left(\frac{y}{R}\right)^\beta \leq \log\left(\frac{\int_0^y \min(G(x))dx}{\int_0^R \min(G(x))dx}\right).$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\overline{k}y^\beta = \left(\frac{y}{R}\right)^\beta \int_0^R \min(G(x))dx \\
\leq \int_0^y \min(G(x))dx \\
\leq \int_0^y g(x)dx.
\end{aligned}$$

De la même façon, si $y < -R$,

$$\overline{k}|y|^\beta \leq \int_0^y g(x)dx.$$

De l'équation (5.7), nous pouvons déduire que pour $y \in H_0^1(\Omega)$ et pour $g \in \mathcal{S}(G)$,

$$J_g(\theta y) \leq \int_\Omega \theta^2 \frac{|\nabla y(t)|^2}{2} - (k|\theta y(t)|^\beta - l)dt \to -\infty$$

quand $|\theta| \to \infty$. On peut donc choisir μ_m de façon à ce que

$$||\mu_m y|| > \rho \text{ et } J_{g^*}(\mu_m y) < 0$$

pour tout $y \in \mathcal{L}_m$, car $\mathcal{L}_m$ est compact.

Pour (I1), choisissons $V = \text{eng}\{e_1, \dots, e_k\}$, où k sera déterminé plus loin, et $X = V^\perp$. Par l'hypothèse (1), pour tout $y \in H_0^1(\Omega)$,

$$J_g(y) \geq \int_\Omega \frac{|\nabla y|^2}{2} dx - \zeta_1 \int_\Omega |y|^{\mu+1} dx - \zeta_2. \tag{5.8}$$

Par l'inégalité de Hölder, on a

$$\int_\Omega |y|^{\mu+1}\, dt \leq \left(\int_\Omega |y|^2\, dt\right)^{a/2} \left(\int_\Omega |y|^{2^*}\, dt\right)^{(\mu+1-a)/2^*}, \tag{5.9}$$

où $a > 0$ est défini par

$$\left(\frac{a}{2} + \frac{\mu + 1 - a}{2^*}\right) = 1$$

et $2^* = \frac{2n}{n-2}$.

Par la continuité de l'inclusion $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, on obtient

$$\int_\Omega |y|^{\mu+1}\, dt \leq \zeta \left(\int_\Omega |y|^2\, dt\right)^{a/2} ||y||^{\mu+1-a}. \tag{5.10}$$

De plus, puisque $y \in (\text{eng}(e_1, \dots, e_k))^\perp$, on aura

$$\int_\Omega y^2 dx \leq \nu_{k+1}^{-1} \int |\nabla y|^2 dx. \tag{5.11}$$

En combinant les équations (5.8), (5.9), (5.10) et (5.11), nous obtenons que

$$J_g(y) \geq \left(\frac{||y||^2}{2} - \zeta_3 \nu_{k+1}^{a/2} ||y||^{\mu+1}\right) - \zeta_4 \tag{5.12}$$

pour $y \in X$. Ainsi,

$$J_g(y) \geq \rho^2 \left(\frac{1}{2} - \zeta_3 \nu_{k+1}^{-a/2} \rho^{\mu-1} \right) - \zeta_4 \tag{5.13}$$

pour tout $y \in \partial B_\rho \cap X$. On peut choisir $\rho = \rho(k)$ de façon à avoir le coefficient de ρ^2 dans (5.13) égal à $\frac{1}{4}$. On obtient donc

$$J_g(y) \geq \frac{1}{4}\rho^2 - \zeta_4 \tag{5.14}$$

pour $y \in \partial B_\rho \cap X$. Puisque $\nu_k \to \infty$ quand $k \to \infty$, on a que $\rho(k) \to \infty$ quand $k \to \infty$. Choisissons donc k de façon à ce que $\frac{1}{4}\rho^2 - \zeta_4 > 0$. Par conséquent,

$$J_g(y) \geq \frac{1}{4}\rho^2 - \zeta_4 \equiv \alpha > 0 \quad \text{ pour tout } y \in \partial B_\rho \cap X$$

et donc (I1).

Si nous parvenons à montrer que pour tout $c \geq \alpha$, $0 \notin \mathbb{Z}_2$-K_c, nous aurons le résultat.

Tout d'abord, nous avons $J_g(0) = 0$ pour tout $g \in \mathcal{S}(G)$ d'où $(0, c) \in graphF$. Fixons $g \in \mathcal{S}(G)$, puisque J_g est continue, on a qu'il existe $\varepsilon > 0$ et un voisinage U de 0 dans $H_0^1(\Omega)$ tel que $J_g(U) < \varepsilon < \alpha$. On a donc que $U \times \left]c - \left(\frac{c-\varepsilon}{2}\right), c + \left(\frac{c-\varepsilon}{2}\right)\right[$ est un voisinage de $(0, c)$ dans $graphF$, où $c \geq \alpha$. Considérons la déformation

$$\mathcal{H} : (U \times]c - \frac{c-\varepsilon}{2}, c + \frac{c-\varepsilon}{2}[) \times [0, 1] \to graphF$$

définie par

$$\mathcal{H}((v, b), t) = \left(v, b - \frac{(c-\varepsilon)t}{2}\right).$$

On a bien que $c - \frac{c-\varepsilon}{2} - \frac{(c-\varepsilon)}{2} = \varepsilon$ et donc $(v, b - \frac{(c-\varepsilon)t}{2})$ est bien dans $graphF$. On a de plus que $\mathcal{H}_2((v, b), t) = b - \frac{(c-\varepsilon)t}{2}$ et $d((v, b), \mathcal{H}((v, b), t)) = \|\frac{(c-\varepsilon)t}{2}\|$. On a donc $|d_{\mathbb{Z}_2}F|(0, c) \geq \frac{c-\varepsilon}{2} > 0$. D'où $0 \notin \mathbb{Z}_2$–K_c pour tout $c \geq \alpha$.

On a donc que la deuxième alternative du théorème 4.1 est vérifiée et donc il existe une suite non-bornée de valeurs critiques. Par conséquent, il existe une infinité de solutions distinctes. □

CONCLUSION

Au cours de ce mémoire, nous avons présenté une généralisation du théorème du col de la montagne invariant aux fonctions multivoques. L'application aux inclusions aux dérivées partielles ainsi que le théorème principal sont cependant restreints à une action de $\mathbb{Z}_2$ sur notre espace. Nous pourrions pour l'avenir pousser plus loin l'étude pour étendre le théorème avec une action d'un groupe de Lie compact quelconque. La mise en place d'une telle étude nous permettrait d'avoir différentes symétries et d'obtenir probablement plus d'informations sur les fonctionnelles et leurs points critiques.

Nous avons choisi également de présenter une application relativement simple qui nous permettait de mettre en évidence l'application de la théorie. Cependant, nous pourrions développer également de ce côté et obtenir des résultats d'existence plus profonds.

De plus, nous pourrions également étudier l'effet d'une perturbation qui détruirait la symétrie de nos fonctionnelles dans une certaine mesure. Dans le cas univoque, certains théorèmes d'existence nous garantissent quand même l'existence d'une suite non bornée de valeurs critiques.

En ce qui a trait à la notion de *genre* introduite au chapitre 3, son utilisation est évidemment limitée aux actions de $\mathbb{Z}_2$. Le développement d'outils nous permettant de classer les ensembles dans $E \times \mathbb{R}$ pour une action plus générale reste encore ouvert.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Ambrosetti et P.H. Rabinowitz, Dual variational methods in critical point theory and applications. *J. Funct. Anal*, **vol. 14**, (1973), pp. 349–381.

[2] Y.G. Borisovitch, B. D. Gel'man, A. D. Myshkis et V. V. Obukhovskii, Multivalued mappings. *Itogi Nauk i Tekhniki, Ser. Mat. Anal*, **vol. 19**, (1982), pp. 127–230. (Russe) ; traduction : *J. Soviet Math.*, **vol. 24**(1982), pp. 719–791.

[3] G. Bredon, *Introduction to compact transformation groups.* Academic Press, New York, 1972.

[4] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications.* Masson, Paris, 1987.

[5] H. Brezis et L. Nirenberg, Remarks on finding critical points. *Comm. Pure Appl. Math.*, **vol. 44**, (1991), pp. 939–963.

[6] T. Bröcker et T. Dieck, *Representation of compact Lie groups*, Graduate texts in mathematics, vol. 98. Springer-Verlag, New York, 1985.

[7] A. Canino et M. Degiovanni, Nonsmooth critical point theory and quasilinear elliptic equations, *Topological methods in differential equations and inclusions*, NATO ASI series,Ser.C : Math. and Phys. Sci. 1995, pp. 1–50.

[8] K. C. Chang, Variational methods for non-differential functionals and their applications to partial differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, **vol. 80**, (1981), pp. 102–129.

[9] F.H. Clarke, *Optimisation and nonsmooth analysis.* Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advances Texts, John Wiley & Sons, New-York, 1983.

[10] J.-N. Corvellec, M. Degiovanni et M. Marzocchi, Deformation properties for continous functionals and critical point theory. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, **vol. 1**, (1993), pp. 151–171.

[11] M. Degiovanni et M. Marzocchi, A critical point theory for nonsmooth functionals. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, **vol. 167**, (1994), pp. 73–100.

[12] M. Frigon, On a critical point theory for multivalued functionals and application to partial differential inclusion. *Nonlinear Anal.*, **vol. 31**, (1998), pp. 735–753.

[13] N. Ghoussoub, Location, multiplicity and Morse indices of min-max critical points. *J. Reine Angew. Math.*, **vol. 417**, (1991), pp. 27–76.

[14] A. Granas et M. Lassonde, Some elementary general principles of convex analysis. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, **vol. 5**, no. 1, (1995), pp. 23–37.

[15] M.A. Krasnoselski, *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations.* MacMillan, New York, 1964.

[16] A. Kufner, O. John et S. Fučík, *Function Space.* Noordhoff International Publishing, Leyden, 1977.

[17] K. Kuratowski et C. Ryll-Nardzewski, A general theorem on selectors. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astr. Phys.*, **vol. 13**, (1965), pp. 397–403.

[18] J. Munkres, *Topology, a first course.* Prentice Hall, New Jersey, 1975.

[19] L. Nirenberg, On elliptic partial differential equations. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (3)*, **vol. 13**, (1959), pp. 115–162.

[20] P. H. Rabinowitz, *Minimax methods in critical point theory with appplications to differential equations.* No. 65 , Conference board of the mathematical sciences, American Mathematical Society, 1986.

[21] W. Rudin, *Real and complex analysis.* McGraw-Hill, troisième éd., 1987.

[22] A. Szulkin, Minimax principle for lower semi-continuous functions and application to nonlinear boundary value problems. *Ann. Inst. H. Poincaré. Anal. Non Linéaire*, **vol. 3**, (1986), pp. 77–109.

[23] M. Willem, *Minimax theorems*, Progress in nonlinear differential equations and their applications, vol. 24. Birkhäuser, Boston, 1996.

[24] N. Young, *An introduction to Hilbert space.* Cambridge University Press, 1988.