

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

L'indice de Conley

par

Julie Santerre

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures

En vue de l'obtention du grade de

Maître ès sciences (M. Sc.)
en mathématiques .

Décembre 1999

© Julie Santerre, 1999



2011.2781.4

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

QA
3
U54
2000
v.010

L'indice de Conier

Julie Sauter

Expériences de mathématiques et de statistiques
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Maîtrise en sciences (M.Sc.)
en mathématiques

December 1999

© Julie Sauter, 1999



Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

L'indice de Conley

présenté par

Julie Santerre

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Christiane Rousseau
(président-rapporteur)

Marlène Frigon
(directeur de recherche)

Jacques Bélair
(membre du jury)

Mémoire accepté le :

6 mars 2000

SOMMAIRE

Ce mémoire se veut une introduction à l'indice de Conley, un indice associé aux ensembles invariants d'un système dynamique. Nous désirons donner au lecteur une intuition géométrique de l'indice de Conley. Nous présentons l'indice de Conley d'homotopie et l'indice de Conley d'homologie. Ce dernier nous permet d'utiliser la théorie de l'homologie pour détecter les orbites connectant les diverses composantes d'un ensemble invariant isolé, comme les points stationnaires et les cycles.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je tiens à remercier tout spécialement ma directrice Marlène Frigon pour son intérêt, sa générosité, sa rigueur et sa disponibilité. Je la remercie surtout pour l'énergie qu'elle a su investir dans nos rencontres hebdomadaires (et bi-annuelles par la suite...).

Je désire également remercier Alexandre pour son précieux support, autant informatique et linguistique que moral. Finalement, je remercie sincèrement ma famille pour m'avoir encouragée et supportée.

Table des matières

Sommaire	3
Remerciements	4
Introduction	7
Chapitre 1. Préliminaires	10
1. Quelques notions de topologie générale.....	10
2. Quelques notions d'homologie.....	14
3. Définition d'un flot	17
Chapitre 2. Définition de l'indice de Conley	19
1. Les ensembles invariants.....	19
2. Les paires-indices.....	21
3. Définition de l'indice de Conley.....	23

Chapitre 3. Existence de paires-indices	28
Chapitre 4. Indépendance du choix des paires-indices.....	41
Chapitre 5. Paire répulseur-attracteur.....	51
1. Décomposition en paire répulseur-attracteur	51
2. Homomorphisme de connection	56
Chapitre 6. Décomposition de Morse.....	61
1. Décomposition de Morse.....	61
2. Tresse-indice.....	65
Conclusion	75
Bibliographie.....	78

INTRODUCTION

La plupart des phénomènes naturels peuvent se modéliser par des systèmes dynamiques. Les systèmes dynamiques sont régis par une application continue qu'on appelle un flot. L'indice de Conley contribue à décrire ce flot. Par exemple, l'indice de Conley peut détecter les ensembles invariants associés au flot, tels les points stationnaires et les cycles. Plus précisément, un ensemble invariant est un ensemble contenant toute la trajectoire de ses éléments. Charles Conley avait la profonde conviction que les ensembles invariants sont essentiels à la compréhension des phénomènes naturels.

Ce fut Ura et Kimura [23, 24] qui introduirent pour la première fois, en 1960, le concept d'ensemble invariant. Par la suite, cette idée a été reprise par Conley. C'est en 1967 que l'on put lire la première publication sur le sujet associée à Conley. En effet, cette année là, un étudiant de Conley, Robert Easton, déposa sa thèse de doctorat traitant des ensembles invariants. Dès lors et jusqu'à sa mort, en 1984, Conley travailla très étroitement avec ses étudiants sur ce sujet. Chacun d'eux apporta sa contribution à un moment ou à un autre à l'élaboration de la théorie de l'indice de Conley. Citons, en addition à Robert Easton, John Montgomery, Henry Kurland, Robert Franzosa et Konstantin Mischaikow.

En 1978, Conley [2] publia un ouvrage basé sur une conférence donnée en 1976 à Boulder au Colorado. Selon Mischaikow, ce document décrivait le plus fidèlement la vision des systèmes dynamiques de Charles Conley. Il est à noter que

les preuves de certains théorèmes centraux, bien que sommairement présentées dans ce document, n'y ont pas été produites formellement. Les preuves complètes ne furent disponibles qu'en 1983 dans Kurland [11, 12, 13] et en 1984 dans Conley et Zehnder [4] et Franzosa [6].

En 1985, Salomon [22], avec une toute nouvelle approche, simplifia les démonstrations de certains théorèmes jusque-là laborieusement démontrés. Le lecteur pourra trouver une comparaison des deux approches dans Kurland [14]. Puis, autour des années 90, Rybakowski [21] et Benci [1] introduirent la généralisation de l'indice de Conley aux espaces non-compacts.

Ce mémoire se veut une introduction à l'indice de Conley. Dans son élaboration, nous avons opté pour la simplicité. Nous désirons donner au lecteur une idée intuitive de l'indice de Conley, sans pour autant le perdre dans les détails d'une présentation plus approfondie. La théorie de l'indice de Conley nous amène à des résultats élégants et très visuels. C'est sur cet aspect que nous avons voulu mettre l'accent. Par conséquent, plusieurs graphiques sont présentés dans le but de donner au lecteur une intuition géométrique de l'indice de Conley et de ses applications.

Par ailleurs, on ne peut trouver dans la littérature un texte regroupant tous les résultats présentés dans ce mémoire. Ainsi, nous avons réuni ces résultats dans le but de présenter la théorie de l'indice de Conley d'une manière claire et consistante.

Ce mémoire se divise en six chapitres. Le premier chapitre introduit les notions de base de la topologie générale et de l'homologie, des outils indispensables à la présentation de l'indice de Conley. Puis, la définition d'un flot est donnée.

Le deuxième chapitre nous amène à la définition de l'indice de Conley. L'indice de Conley étant un indice associé aux ensembles invariants, nous donnons la définitions de ces ensembles. Nous devons ensuite introduire les paires-indices, objet servant à définir l'indice de Conley.

Les troisième et quatrième chapitres établissent l'existence et l'unicité de l'indice de Conley. L'existence de l'indice de Conley découle de l'existence d'une paire-indice pour tout ensemble invariant. On démontre l'unicité de l'indice de Conley par l'indépendance du choix des paires-indices. Pour ce faire, nous montrons qu'à deux paires-indices correspondant à un même ensemble invariant, on associe le même indice de Conley.

Finalement, les cinquième et sixième chapitres présentent la décomposition d'un ensemble invariant en sous-ensembles invariants qui ont eux-même un indice de Conley. À l'aide d'outils homologiques, nous obtenons des informations concernant la structure d'un ensemble invariant, comme l'existence d'orbites connectant les divers sous-ensembles invariants de la décomposition. Le cinquième chapitre présente une décomposition simple, la décomposition en paire répulseur-attracteur, tandis que le sixième chapitre donne une généralisation de cette décomposition, la décomposition de Morse.

Chapitre 1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous ferons un survol des notations, définitions et théorèmes utilisés dans ce mémoire.

1. QUELQUES NOTIONS DE TOPOLOGIE GÉNÉRALE

Tout d'abord précisons le concept de voisinage. Soit X un espace topologique. Bien qu'habituellement un voisinage soit un ensemble ouvert, nous entendrons par voisinage de $E \subset X$ un ensemble $V \subset X$ tel que $E \subset \text{int } V$. Les voisinages seront tantôt ouverts, tantôt compacts.

Lorsque nous parlerons d'une paire d'espaces topologiques (X, Y) , nous supposons que Y est un sous-espace de X et pour un triplet d'espaces topologiques (X, Y, Z) nous supposons aussi que Z est un sous-espace de Y . Rappelons qu'un espace pointé est une paire d'espaces (X, Y) avec $Y = \{x_0\}$. Nous désignerons par $f : (X, Y) \rightarrow (E, F)$ une application $f : X \rightarrow E$ telle que $f(Y) \subset F$ et similairement pour une application entre les triplets (X, Y, Z) et (E, F, G) .

Rappelons maintenant la définition d'un espace de Hausdorff.

Définition 1.1. Un espace topologique X est appelé un *espace de Hausdorff* si pour toute paire de points x_1, x_2 dans X tels que $x_1 \neq x_2$, il existe des voisinages ouverts U_1 et U_2 de x_1 et x_2 respectivement tels que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Théorème 1.2. Soit Γ un espace compact de Hausdorff. Si $A \subset \Gamma$ est un ensemble fermé et U un voisinage ouvert de A , alors il existe un ouvert V tel que

$$A \subset V \subset \bar{V} \subset U.$$

Théorème 1.3. Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction bijective et continue. Si X et Y sont des espaces topologiques compacts alors f est un homéomorphisme.

Tout au long de ce mémoire, ces deux propriétés seront primordiales, d'où la nécessité de travailler dans Γ , un espace topologique compact de Hausdorff. Pour la démonstration de ces résultats, nous référons le lecteur à Munkres [19].

Un autre concept important sera celui du quotient de deux espaces. Le lecteur pourra consulter Conley [2] pour plus de détails.

Définition 1.4. Soit (X, Y) une paire d'espaces et soit

$$X' = \{ \{x\} : x \in X \setminus Y \} \cup \{Y\}.$$

Un ensemble $B \subset X'$ est ouvert si la réunion de tous ses membres est un ouvert dans X . Le *quotient des espaces X et Y* noté X/Y est l'espace pointé $(X', \{x_0\})$ où $\{x_0\} = Y$.

Définition 1.5. On définit l'*application quotient* $q : X \rightarrow X'$ par

$$q(x) = [x] = \begin{cases} \{x\}, & \text{si } x \notin Y; \\ Y, & \text{si } x \in Y. \end{cases}$$

On remarque que la fonction q est continue. De plus, si \tilde{U} est un ouvert dans X alors $q(\tilde{U}) = U$ est un ouvert dans X' . Notons que le quotient de deux espaces compacts est compact.

Les derniers concepts discutés dans cette section sont ceux d'homotopie et d'équivalence homotopique.

Définition 1.6. *On dit de deux fonctions continues*

$$f : (X, Y) \rightarrow (E, F) \quad \text{et} \quad g : (X, Y) \rightarrow (E, F)$$

qu'elles sont homotopes s'il existe une fonction continue

$$H : (X \times [0, 1], Y \times [0, 1]) \rightarrow (E, F)$$

telle que $H(x, 0) = f(x)$ et $H(x, 1) = g(x)$ pour tout x dans E . La fonction H est alors appelée une homotopie.

Définition 1.7. *On dit que la paire d'espaces (X, Y) est homotopiquement équivalente à la paire (E, F) , et on écrit $(X, Y) \sim (E, F)$, s'il existe deux fonctions*

$$f : (X, Y) \rightarrow (E, F) \quad \text{et} \quad g : (E, F) \rightarrow (X, Y)$$

*telles que $g \circ f$ est homotope à $\text{id}|_{(X, Y)}$ et que $f \circ g$ est homotope à $\text{id}|_{(E, F)}$, les applications identité sur (X, Y) et (E, F) respectivement. Les fonctions f et g sont alors des *équivalences homotopiques* et chacune d'elles est l'inverse homotopique de l'autre. On dit aussi que (X, Y) et (E, F) sont du même *type d'homotopie*.*

Il est possible de montrer que la relation \sim est une relation d'équivalence. Puisque certains types d'homotopie seront utilisés à quelques reprises dans ce mémoire, nous utilisons des notations particulières pour y faire référence. Le type d'homotopie du cercle pointé est noté Σ^1 et celui de la sphère pointée est noté Σ^2 .

Nous énonçons maintenant un résultat concernant les équivalences homotopiques. Pour plus de détails, consulter Conley [2].

Lemme 1.8. *Soient (X_i, A_i) , $i = 1, 2, 3, 4$ des paires d'espaces. Soit la suite*

$$(X_1, A_1) \xrightarrow{f_{21}} (X_2, A_2) \xrightarrow{f_{32}} (X_3, A_3) \xrightarrow{f_{43}} (X_4, A_4)$$

telle que $f_{32} \circ f_{21}$ et $f_{43} \circ f_{32}$ sont des équivalences homotopiques. Alors f_{21} , f_{32} et f_{43} en sont aussi.

Démonstration. Soit

$$f_{13} : (X_3, A_3) \rightarrow (X_1, A_1) \quad \text{et} \quad f_{24} : (X_4, A_4) \rightarrow (X_2, A_2)$$

les inverses homotopiques de $f_{32} \circ f_{21}$ et $f_{43} \circ f_{32}$ respectivement. Ainsi

$$(f_{13} \circ f_{32}) \circ f_{21} = f_{13} \circ (f_{32} \circ f_{21})$$

est homotope à $\text{id}|_{(X_1, A_1)}$, l'application identité sur (X_1, A_1) . Aussi,

$$f_{21} \circ (f_{13} \circ f_{32})$$

est homotope à

$$(f_{24} \circ f_{43} \circ f_{32}) \circ (f_{21} \circ f_{13} \circ f_{32})$$

$$= (f_{24} \circ f_{43}) \circ (f_{32} \circ f_{21} \circ f_{13}) \circ f_{32}$$

qui est homotope à $\text{id}|_{(X_2, A_2)}$, l'application identité sur (X_2, A_2) . Donc f_{21} est une équivalence homotopique. La démonstration pour f_{32} et f_{43} est similaire.

□

2. QUELQUES NOTIONS D'HOMOLOGIE

Un outil très utilisé dans l'étude de l'indice de Conley est l'homologie. Pour simplifier cette section, nous opterons pour une présentation axiomatique. Nous ne rappellerons que les définitions et les résultats dont nous aurons besoin. On pourra trouver une définition plus complète de l'homologie ainsi que les preuves des différents résultats de cette section dans Wallace [25].

Soit (E, F) une paire d'espaces topologiques. On lui associe, pour chaque entier $p \geq 0$, un groupe abélien $H_p(E, F)$, le groupe d'homologie, et à chaque application continue

$$f : (E, F) \rightarrow (E', F'),$$

un homomorphisme

$$f_* : H_p(E, F) \rightarrow H_p(E', F'),$$

l'homomorphisme induit. La suite $\{H_p(E, F)\}_{p=0}^{\infty}$ est appelée le groupe d'homologie gradué.

Remarque. Les groupes d'homologie gradués $H_p(E, F)$ et $H_p(E/F)$ sont isomorphes.

Définition 1.9. Soit

$$\dots \xrightarrow{\phi_{i-1}} G_i \xrightarrow{\phi_i} G_{i+1} \xrightarrow{\phi_{i+1}} \dots$$

une suite de groupes et d'homomorphismes telle que le noyau de ϕ_i est égal à l'image de ϕ_{i-1} pour tous les i . On dit alors que cette suite est *exacte*.

Définition 1.10. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & B \\ \downarrow k & & \downarrow h \\ C & \xrightarrow{j} & D \end{array}$$

est dit *commutatif* si $h \circ i = j \circ k$.

Voici quelques unes des propriétés importantes de l'homologie.

Proposition 1.11. Soit $f \circ g$ la composition d'applications continues. Alors

$$(f \circ g)_* = f_* \circ g_*.$$

Proposition 1.12. Soit f l'application identité sur (E, F) . Alors f_* est l'homomorphisme identité sur $H_p(E, F)$.

Proposition 1.13. Soient $G \subset F \subset E$ et soient i_* et j_* les homomorphismes induits par les inclusions

$$i : (F, G) \hookrightarrow (E, G) \quad \text{et} \quad j : (E, G) \hookrightarrow (E, F) \quad \text{respectivement.}$$

Alors il existe un homomorphisme

$$\partial_* : H_p(E, F) \longrightarrow H_{p-1}(F, G),$$

appelé l'homomorphisme de bord, tel que la suite

$$\dots \longrightarrow H_p(F, G) \xrightarrow{i_*} H_p(E, G) \xrightarrow{j_*} H_p(E, F) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(F, G) \longrightarrow \dots$$

soit exacte.

Proposition 1.14. Soient (X, Y, Z) et (E, F, G) deux triplets d'espaces et soit $f : (X, Y, Z) \rightarrow (E, F, G)$ une application continue. Soient ∂_* et $\hat{\partial}_*$ les homomorphismes de bord associés aux triplets (X, Y, Z) et (E, F, G) respectivement, et soit

f_* l'homomorphisme induit. Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_p(X, Y) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{p-1}(Y, Z) \\ \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ H_p(E, F) & \xrightarrow{\hat{\partial}_*} & H_{p-1}(F, G) \end{array}$$

est commutatif.

Proposition 1.15 (Propriété d'excision). Soient A et B deux sous-espaces de X . L'application

$$i : (A, A \cap B) \hookrightarrow (A \cup B, B)$$

induit un isomorphisme

$$i_* : H_p(A, A \cap B) \rightarrow H_p(A \cup B, B).$$

Proposition 1.16. Soient (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) deux paires d'espaces disjoints. Alors

$$H_p(X_1 \cup X_2, Y_1 \cup Y_2) = H_p(X_1, Y_1) \oplus H_p(X_2, Y_2).$$

Proposition 1.17. Si deux paires d'espaces (X, Y) et (E, F) sont homotopiquement équivalentes alors

$$H_p(X, Y) = H_p(E, F) \quad \text{pour tout entier } p \geq 0.$$

Nous énonçons maintenant quelques résultats concernant le calcul des groupes d'homologie que nous pouvons retrouver dans Conley [2].

$$H_p(\Sigma^1) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } p = 1, \\ 0, & \text{sinon;} \end{cases} \quad H_p(\Sigma^2) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } p = 2, \\ 0, & \text{sinon;} \end{cases}$$

$$H_p(\{*\}, \emptyset) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } p = 0, \\ 0, & \text{sinon;} \end{cases} \quad H_p(\{*\}, \{*\}) = 0 \quad \text{pour tout } p \geq 0.$$

3. DÉFINITION D'UN FLOT

Les systèmes dynamiques sont régis par une fonction continue, appelée flot, dont voici la définition.

Définition 1.18. Soit Γ un espace topologique compact de Hausdorff. On appelle un *flot* une application continue de $\Gamma \times \mathbb{R}$ dans Γ qui sera notée $\phi(\gamma, t)$ où $\gamma \cdot t$ est telle que

- (i) $\phi(\gamma, 0) = \gamma$ (ou $\gamma \cdot 0 = \gamma$),
- (ii) $\phi(\gamma, t + s) = \phi(\phi(\gamma, t), s)$ (ou $\gamma \cdot (t + s) = (\gamma \cdot t) \cdot s$).

Énonçons un résultat d'existence et d'unicité de solutions pour un système d'équations différentielles. Tout d'abord donnons la définition d'une fonction lipschitzienne. Le lecteur pourra consulter Rouché et Mawhin [20] pour plus de détails.

Définition 1.19. On dit que la fonction $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est lipschitzienne dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ par rapport à la première variable s'il existe un nombre réel positif k tel

que pour chaque (x_1, t) et (x_2, t) dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$

$$|\psi(x_1, t) - \psi(x_2, t)| \leq k|x_1 - x_2|.$$

Théorème 1.20. Soit $\psi(x, t)$ une fonction continue et lipschitzienne dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ par rapport à la première variable. Alors le problème

$$x'(t) = \psi(x(t), t), \quad x(t_0) = x_0 \tag{1.1}$$

a une unique solution $x(t) = \eta(t, t_0, x_0)$ sur \mathbb{R}^n .

Remarquons que $\phi(\gamma, t) = \eta(t, 0, \gamma)$ où η est la solution du problème (1.1), les conditions du théorème 1.20 étant vérifiées, est un exemple de flot. En effet, la solution est continue et les propriétés (i) et (ii) de la définition 1.18 découlent de l'unicité de la solution.

Exemple 1.21.

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y, \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

La solution de ce système, $\eta(t, 0, (x_0, y_0)) := (x_0 e^t, y_0 e^{-t}) = (x(t, x_0), y(t, y_0))$, est un flot.

Nous supposons dès maintenant et pour l'ensemble de ce mémoire qu'un flot ϕ nous a été donné. De plus, nous conviendrons que $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ et que $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0]$.

Chapitre 2

DÉFINITION DE L'INDICE DE CONLEY

Lors de l'étude de systèmes dynamiques, il est naturel de s'intéresser aux ensembles invariants, c'est-à-dire, les ensembles qui contiennent toute la trajectoire de leurs éléments. Nous tâcherons donc de qualifier ces ensembles.

Pour un système dynamique arbitraire, il est en général impossible de connaître précisément ses ensembles invariants. Nous associerons un indice à ces ensembles invariants afin d'obtenir des renseignements sur leur nature topologique. Nous appellerons cet indice, l'indice de Conley.

À la section 1, nous nous familiariserons avec les ensembles invariants. Nous introduirons ensuite, à la section 2, la notion de paire-indice, qui conduira à la définition de l'indice de Conley. Finalement, à la section 3, nous définirons l'indice de Conley d'homotopie et l'indice de Conley d'homologie. Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter Salomon [22] et Mischaikow [17].

1. LES ENSEMBLES INVARIANTS

Nous définissons les ensembles invariants ainsi que quelques uns des termes relatifs à ces ensembles. Ces définitions reposent sur le concept de flot.

Définition 2.1. Un ensemble $S \subset \Gamma$ est *invariant* si $S \cdot \mathbb{R} = S$.

La figure 2.1 donne quelques exemples d'ensembles invariants.

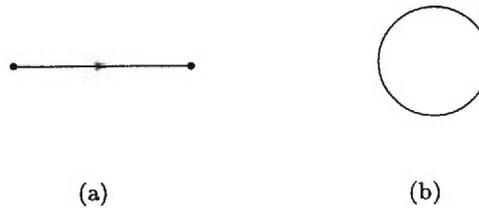


FIG. 2.1.

Définition 2.2. Soit $N \subset \Gamma$. L'ensemble $I(N) = \{\gamma \in \Gamma : \gamma \cdot \mathbb{R} \subset N\}$ est le *sous-ensemble invariant maximal* contenu dans N .

Définition 2.3. Un *voisinage isolant* est un ensemble compact $N \subset \Gamma$ tel que $I(N) \subset \text{int}(N)$. Un ensemble $S \subset \Gamma$ est un *ensemble invariant isolé* si $S = I(N)$ pour N un voisinage isolant.

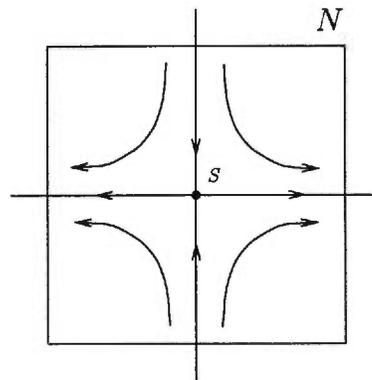


FIG. 2.2.

Exemple 2.4. La figure 2.2 représente le portrait de phase de la solution du système d'équations différentielles de l'exemple 1.21. On peut voir que N est un voisinage isolant et $S = I(N)$ est un ensemble invariant isolé.

La proposition suivante découle directement des définitions.

Proposition 2.5. *Soient N_1 et N_2 deux voisinages isolants inclus dans Γ tels que $I(N_1) = S_1$ et $I(N_2) = S_2$. Alors*

$$(i) I(N_1 \cap N_2) = S_1 \cap S_2,$$

$$(ii) \text{ si } N_1 \text{ et } N_2 \text{ sont disjoints, alors } I(N_1 \cup N_2) = S_1 \cup S_2.$$

La figure 2.3 illustre la seconde partie de cette proposition. En (a), $I(N_1 \cup N_2) = S_1 \cup S_2$. Par contre, en (b), la condition $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ est violée et $I(N_1 \cup N_2) \supset S_1 \cup S_2$.

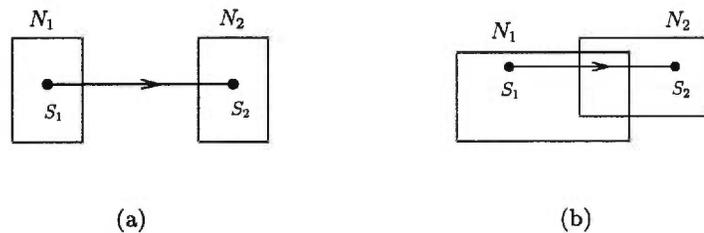


FIG. 2.3.

2. LES PAIRES-INDICES

Présentons d'abord deux notions essentielles à la définition de paire-indice.

Définition 2.6. Soit N un sous-ensemble compact de Γ . Un ensemble $K \subset N$ est dit *positivement invariant* relativement à N si on a

$$\gamma \in K, t \geq 0, \gamma \cdot [0, t] \subset N \Rightarrow \gamma \cdot [0, t] \subset K.$$

En fait, cette définition signifie que si γ est dans l'ensemble K alors sa trajectoire ne peut sortir de l'ensemble K tout en demeurant dans l'ensemble N . La

figure 2.4 illustre ce concept. En (a), K est positivement invariant relativement à N . Par contre, en (b) il ne l'est pas.

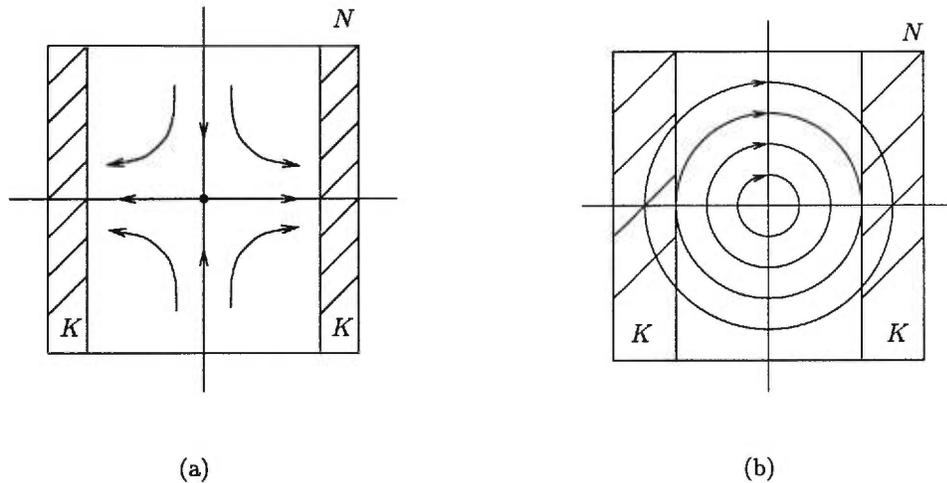


FIG. 2.4.

Définition 2.7. Soient N_1 et N_2 deux sous-ensembles compacts de Γ tels que $N_2 \subset N_1$. L'ensemble N_2 est un *ensemble de sortie* pour N_1 si on a :

$$\gamma \in N_1, \quad \gamma \cdot [0, +\infty) \not\subset N_1 \Rightarrow \exists t \geq 0 \quad \text{tel que} \quad \gamma \cdot [0, t] \subset N_1 \quad \text{et} \quad \gamma \cdot t \in N_2.$$

En d'autres termes, si γ a une trajectoire qui sort de l'ensemble N_1 , elle doit nécessairement passer par l'ensemble N_2 . En (a) de la figure 2.4, l'ensemble K est un ensemble de sortie pour N .

Nous sommes maintenant prêts à définir une paire-indice.

Définition 2.8. Soit $S \subset \Gamma$ un ensemble invariant isolé. Une paire de sous-ensembles compacts (N_1, N_2) de Γ est dite une *paire-indice* pour S si

- (i) $N_1 \setminus N_2$ est un voisinage de S dans Γ et $S = I(\text{cl}(N_1 \setminus N_2))$,
- (ii) N_2 est positivement invariant relativement à N_1 ,

(iii) N_2 est un ensemble de sortie pour N_1 .

Exemple 2.9. À la figure 2.5, on retrouve le portrait de phase du système de l'exemple 1.21. En (a), (N_1, N_2) est une paire-indice pour l'ensemble invariant isolé S . Mais, en (b), (N_1, N_2) n'est pas une paire-indice pour S puisque N_2 n'est pas positivement invariant relativement à N_1 . En effet, $\gamma \in N_2$ et $\gamma \cdot]0, +\infty[\subset N_1 \setminus N_2$.

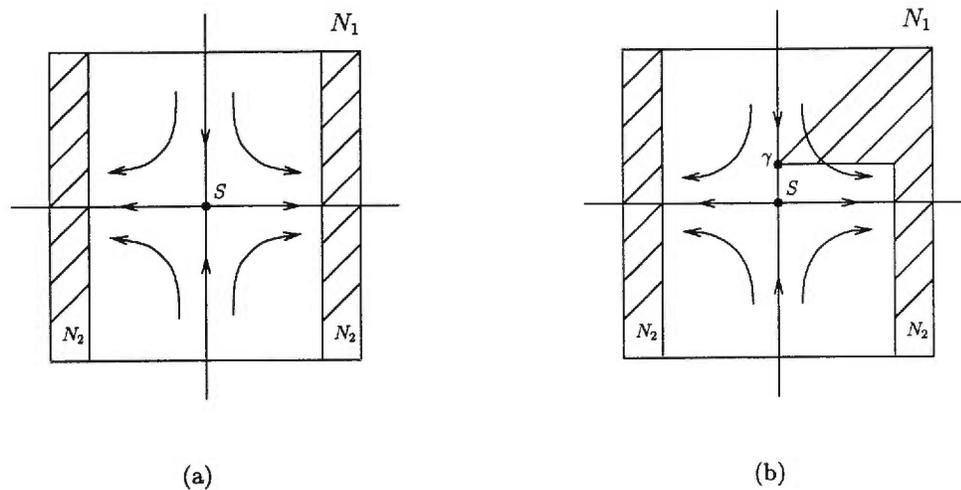


FIG. 2.5.

3. DÉFINITION DE L'INDICE DE CONLEY

Nous définissons maintenant l'indice de Conley. Nous pouvons le définir de deux façons: l'indice de Conley d'homotopie et l'indice de Conley d'homologie. Le premier, le plus simple, nous aidera à visualiser ce que représente cet indice. Le

deuxième nous permettra, dans les derniers chapitres de ce mémoire, d'appliquer différents concepts de l'homologie à la théorie de l'indice de Conley.

Définition 2.10. Soit $S \subset \Gamma$ un ensemble invariant isolé. L'indice de Conley d'homotopie de S , noté $h(S)$, est défini par:

$$h(S) = [N_1/N_2]$$

où (N_1, N_2) est une paire-indice pour S et $[N_1/N_2]$ est le type d'homotopie de N_1/N_2 le quotient des espaces N_1 et N_2 .

Afin d'établir la validité de la définition précédente, nous établirons au chapitre 3 l'existence d'une paire-indice pour S . Ensuite, nous verrons au chapitre 4 que si (N_1, N_2) et (\hat{N}_1, \hat{N}_2) sont deux paires-indices pour S , elles définissent le même indice de Conley d'homotopie de S . Donnons quelques exemples de l'indice de Conley d'homotopie.

Exemple 2.11. À la figure 2.6, nous obtenons l'indice de Conley d'homotopie de S , l'ensemble invariant isolé de la figure 2.5(a). L'indice de Conley d'homotopie est alors celui du cercle pointé Σ^1 .

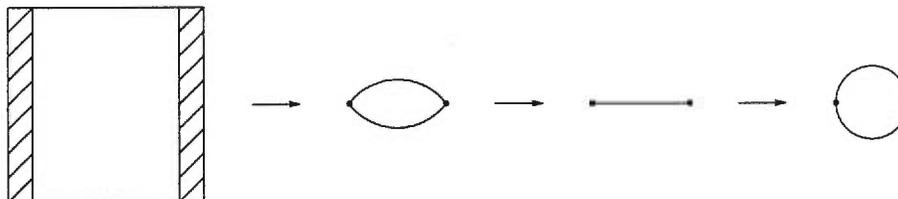


FIG. 2.6.

Exemple 2.12. Considérons (N_1, N_2) une paire-indice pour le système dynamique de la figure 2.7. On peut voir à la figure 2.8, qu'en identifiant N_2 à un

point, il s'ensuit que l'indice de Conley d'homotopie est celui de la sphère pointée Σ^2 .

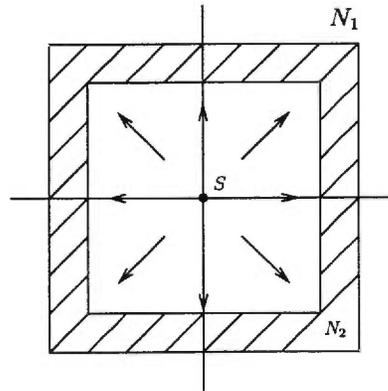


FIG. 2.7.

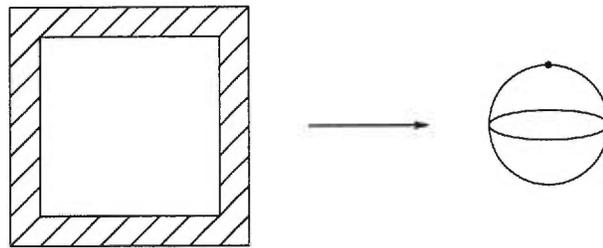


FIG. 2.8.

Définissons maintenant l'indice de Conley d'homologie.

Définition 2.13. Soit $S \subset \Gamma$ un ensemble invariant isolé. L'indice de Conley d'homologie de S , noté $H(S)$, est défini par:

$$H(S) = \{H_p(N_1, N_2)\}_{p=0}^{\infty}$$

le groupe d'homologie gradué de (N_1, N_2) une paire-indice pour S .

Remarque. Remarquons qu'il y a cohérence entre les deux définitions de l'indice de Conley puisque les groupes d'homologie de paires d'espaces homotopiquement équivalents sont les mêmes.

Exemple 2.14. Donnons l'indice de Conley d'homologie des exemples 2.11 et 2.12. Dans l'exemple 2.11, nous avons $H(S) = \{H_p(N_1, N_2)\}_{p=0}^\infty$ où

$$H_p(N_1, N_2) \simeq H_p(N_1/N_2) = H_p(\Sigma^1) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } p = 1; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans l'exemple 2.12 nous avons $H(S) = \{H_p(N_1, N_2)\}_{p=0}^\infty$ où

$$H_p(N_1, N_2) \simeq H_p(N_1/N_2) = H_p(\Sigma^2) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } p = 2; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme nous l'avons déjà mentionné, nous possédons souvent peu d'informations sur les ensembles invariants d'un système dynamique. Par conséquent, nous désirons obtenir des résultats concernant l'existence de ces derniers. Énonçons un résultat important qu'on appelle la propriété de Wazewski.

Théorème 2.15. *Si $H(S) \neq 0$ alors $S \neq \emptyset$.*

L'indice de Conley nous renseigne non seulement sur l'existence mais aussi sur la robustesse de l'ensemble invariant. En effet, comme le montre l'exemple suivant, il est possible que $H(S) = 0$ et que $S \neq \emptyset$.

Exemple 2.16. À la figure 2.9, (N_1, N_2) est une paire-indice pour les ensembles invariants isolés S (fig. 2.9(a)) et $\hat{S} = \emptyset$ (fig. 2.9(b)). Puisque (N_1, N_2) est homotopiquement équivalente à $(*, *)$, $H(S) = H(\hat{S}) = \{H_p(N_1, N_2)\}_{p=0}^\infty = \{H_p(*, *)\}_{p=0}^\infty = 0$.

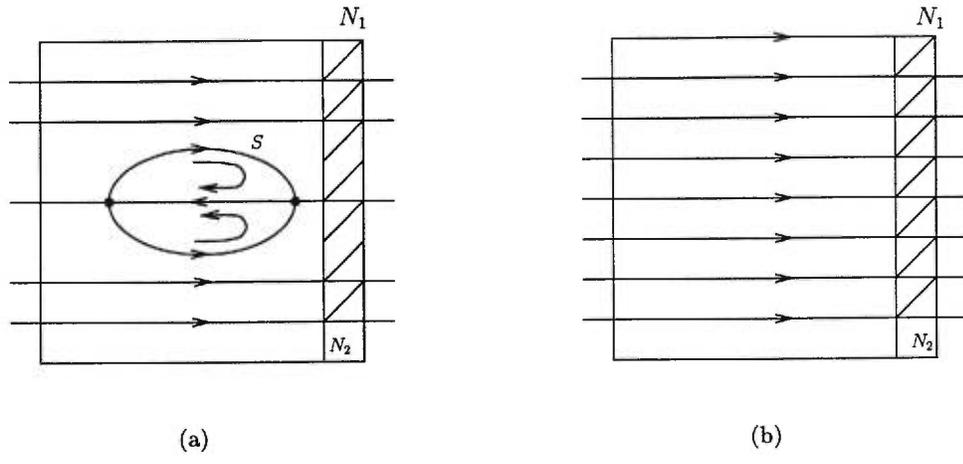


FIG. 2.9.

Chapitre 3

EXISTENCE DE PAIRES-INDICES

Dans ce chapitre, nous établissons l'existence de paires-indices pour les ensembles invariants isolés et ainsi l'existence de l'indice de Conley. Le lecteur pourra trouver les preuves du théorème et des différents lemmes dans Conley [2].

Théorème 3.1. *Soient N un voisinage isolant pour S un ensemble invariant isolé, et W un voisinage ouvert de S . Alors il existe (N_1, N_2) une paire-indice pour S telle que N_1 et N_2 sont inclus dans N et positivement invariant relativement à N . De plus, on a $cl(N_1 \setminus N_2) \subset W$.*

Pour en faire la démonstration, nous devons tout d'abord introduire quelques notations.

Notation: $A^+(N) = \{\gamma : \gamma \cdot \mathbb{R}^+ \subset N\}$ et $A^-(N) = \{\gamma : \gamma \cdot \mathbb{R}^- \subset N\}$.

Remarque. Si on note $\gamma \cdot t = \phi(\gamma, t) = \phi_t(\gamma)$ alors

$$A^+(N) = \bigcap_{t \in [0, +\infty)} \phi_t^{-1}(N).$$

Donc $A^+(N)$ est un ensemble fermé inclus dans N un ensemble compact. Ainsi, $A^+(N)$ est compact. De la même manière, $A^-(N)$ est compact. Le sous-ensemble

invariant maximal de N étant l'intersection des ensembles $A^+(N)$ et $A^-(N)$, il est alors lui-même compact.

Lemme 3.2. *Si K est un ensemble compact inclus dans N un voisinage isolant et s'il est disjoint de l'ensemble $A^+(N)$ (respectivement $A^-(N)$) alors il existe $\bar{t} \in \mathbb{R}^+$ tel que*

$$\gamma \in K \Rightarrow \gamma \cdot [0, \bar{t}] \not\subset N \quad (\text{respectivement } \gamma \cdot [-\bar{t}, 0] \not\subset N).$$

Démonstration. Prenons $\gamma \in K$. Puisque $K \cap A^+(N) = \emptyset$, il existe $t_\gamma \in \mathbb{R}^+$ tel que $\gamma \cdot t_\gamma \in \Gamma \setminus N$, qui est un ouvert. Nous pouvons alors choisir un voisinage ouvert U_γ de γ tel que $U_\gamma \cdot t_\gamma \subset \Gamma \setminus N$, par continuité du flot.

À l'aide de ces voisinages, nous pouvons former un recouvrement ouvert $\{U_\gamma : \gamma \in K\}$ de l'ensemble K . Puisque K est un ensemble compact, il existe un sous-recouvrement fini $U_{\gamma_1}, U_{\gamma_2}, \dots, U_{\gamma_n}$. Soit

$$\bar{t} = \max_{i=1, \dots, n} t_{\gamma_i}.$$

Nous pouvons alors dire que $\gamma \cdot [0, \bar{t}] \not\subset N$. La démonstration de l'autre cas se fait de manière similaire.

□

Soit Z un ensemble compact inclu dans N un voisinage isolant. Nous noterons $P(Z, N)$ l'intersection de tous les ensembles compacts inclus dans N , contenant Z et positivement invariants relativement à N . L'ensemble $P(Z, N)$ sera crucial

dans la démonstration du théorème 3.1. Les résultats suivants établissent quelques propriétés de $P(Z, N)$.

Lemme 3.3. *Si $Z \subset N$ est un ensemble non vide, alors $P(Z, N)$ est compact, contient Z et est positivement invariant relativement à N . De plus, c'est le plus petit ensemble compact ayant ces propriétés.*

Démonstration. L'ensemble N est compact, contient Z et est positivement invariant relativement à N . Ceci implique que $P(Z, N)$ contient Z . Ainsi, $P(Z, N)$ est un ensemble fermé inclu dans N un ensemble compact. Il est donc lui-même un ensemble compact.

Il ne reste qu'à démontrer que $P(Z, N)$ est positivement invariant relativement à N . Prenons γ dans $P(Z, N)$ tel que $\gamma \cdot [0, t] \subset N$. Nous savons que

$$P(Z, N) = \bigcap_{\eta \in I} K_\eta$$

où K_η est positivement invariant relativement à N . Nous avons alors la suite d'implications suivantes:

$$\gamma \in K_\eta \quad \forall \eta \in I \Rightarrow \gamma \cdot [0, t] \subset K_\eta \quad \forall \eta \in I \Rightarrow \gamma \cdot [0, t] \subset P(Z, N).$$

Ainsi, $P(Z, N)$ est positivement invariant relativement à N .

□

Soit Z un sous-ensemble compact de N . Notons

$$Q(Z, N) = \{\gamma \in N : \exists t' \geq 0 \text{ tel que } \gamma \cdot [-t', 0] \subset N \text{ et } \gamma \cdot -t' \in Z\}.$$

Lemme 3.4. *Soit Z un ensemble compact inclus dans N . Si pour tout $\mu \in N \setminus Q(Z, N)$ on a*

$$\sup\{t : \mu \cdot [-t, 0] \subset N \text{ et } \exists \alpha \in Z \text{ tel que } \alpha \cdot [0, t] \subset N\} < +\infty,$$

alors $Q(Z, N) = P(Z, N)$.

Démonstration. Montrons que $Q(Z, N)$ est positivement invariant relativement à N . Soit $\gamma \in Q(Z, N)$ tel que $\gamma \cdot [0, t] \subset N$ et soit $t' \geq 0$ tel que $\gamma \cdot [-t', 0] \subset N$ et $\gamma \cdot -t' \in Z$. En prenant un s quelconque dans l'intervalle $[0, t]$, nous pouvons écrire

$$(\gamma \cdot s) \cdot [-t' - s, 0] = \gamma \cdot [-t', 0] \cup \gamma \cdot [0, s] \subset N.$$

D'où $\gamma \cdot s \in Q(Z, N)$. Il s'ensuit que $\gamma \cdot [0, t] \subset Q(Z, N)$ et donc que $Q(Z, N)$ est positivement invariant relativement à N .

Montrons que $Q(Z, N) \subset P(Z, N)$. Supposons le contraire c'est-à-dire qu'il existe $\gamma \in Q(Z, N) \setminus P(Z, N)$. Ainsi il existe $t' \geq 0$ tel que

$$\gamma' = \gamma \cdot -t' \in Z \quad \text{et} \quad \gamma' \cdot [0, t'] = \gamma \cdot [-t', 0] \subset N.$$

Or, $\gamma' \in Z \subset P(Z, N)$. Nous pouvons alors conclure que $\gamma' \cdot [0, t'] \subset P(Z, N)$ puisque que $P(Z, N)$ est positivement invariant relativement à N . Nous obtenons alors une contradiction puisque $\gamma' \cdot t' = \gamma$ doit alors appartenir à $P(Z, N)$.

Montrons maintenant que $Q(Z, N)$ est fermé. Soit $\mu \in N \setminus Q(Z, N)$ et notons

$$t(\mu) = \sup\{t : \mu \cdot [-t, 0] \subset N \text{ et } \exists \alpha \in Z \text{ tel que } \alpha \cdot [0, t] \subset N\} < +\infty.$$

Puisque N est fermé, $\mu \cdot [-t(\mu), 0] \subset N$. Or, $\mu \notin Q(Z, N)$, ce qui implique que

$$\mu \cdot [-t(\mu), 0] \cap Z = \emptyset.$$

Puisque l'ensemble $N \setminus Z$ est ouvert relativement à N , nous pouvons choisir W un voisinage ouvert de $\mu \cdot [-t(\mu), 0]$ (théorème 1.2) tel que

$$\mu \cdot [-t(\mu), 0] \subset W \subset \overline{W} \subset N \setminus Z$$

et donc $W \cap Z = \emptyset$. Il est alors possible de trouver $\tilde{t} > t(\mu)$ et U_1 un voisinage ouvert de μ tel que $U_1 \cdot [-\tilde{t}, 0] \subset W$ (le flot étant une fonction continue) et donc

$$U_1 \cdot [-\tilde{t}, 0] \cap Z = \emptyset. \quad (3.1)$$

Par définition de $t(\mu)$, $\mu \cdot [-\tilde{t}, 0] \not\subset N$ ou $\alpha \cdot [0, \tilde{t}] \not\subset N$ pour tout $\alpha \in Z$. Nous traiterons ces deux cas séparément.

1^{er} cas: $\mu \cdot [-\tilde{t}, 0] \not\subset N$. Il est alors possible de trouver $t \in]t(\mu), \tilde{t}]$ tel que $\mu \cdot -t \notin N$. On peut alors choisir U_2 un voisinage ouvert de μ tel que $U_2 \cdot -t \cap N = \emptyset$ (théorème 1.2). Maintenant, posons $U = U_1 \cap U_2$ ce qui implique que

$$U \cdot [-\tilde{t}, 0] \cap Z = \emptyset \quad \text{et} \quad U \cdot -t \cap N = \emptyset. \quad (3.2)$$

Nous pouvons voir que $U \cap Q(Z, N) = \emptyset$. En effet, supposons qu'il existe $\gamma \in U \cap Q(Z, N)$, et soit $t' \geq 0$ tel que $\gamma \cdot [-t', 0] \subset N$ et $\gamma \cdot -t' \in Z$. De (3.2) on déduit que $t > t' > \tilde{t}$ ce qui est contradictoire.

2^{ième} cas: $\alpha \cdot [0, \tilde{t}] \not\subset N$ pour tout $\alpha \in Z$. Dans ce cas, $U_1 \cap Q(Z, N) = \emptyset$. En effet, supposons qu'il existe $\gamma \in U_1 \cap Q(Z, N)$, alors il existe $t' \geq 0$ tel que $\gamma \cdot [-t', 0] \subset N$ et $\gamma \cdot -t' \in Z$. D'où $t' < \tilde{t}$, ce qui contredit (3.1).

Nous pouvons alors conclure que $Q(Z, N)$ est un ensemble fermé dans N et donc compact. Nous avons déjà montré qu'il était positivement invariant relativement à N . D'où $P(Z, N) \subset Q(Z, N)$ et donc $P(Z, N) = Q(Z, N)$.

□

Proposition 3.5. *Soient Z un ensemble compact et N un voisinage isolant tel que $Z \subset N$. Si $Z \cap A^+(N) = \emptyset$ alors $P(Z, N) \cap A^+(N) = \emptyset$.*

Démonstration. En vertu du lemme 3.2 il existe

$$\bar{t} \in \mathbb{R}^+ \quad \text{tel que} \quad \gamma \cdot [0, \bar{t}] \not\subset N \quad \text{pour tout} \quad \gamma \in Z. \quad (3.3)$$

Ceci implique que pour tout $\mu \in N$,

$$\sup\{t : \mu \cdot [-t, 0] \subset N \text{ et } \exists \alpha \in Z \text{ tel que } \alpha \cdot [0, t] \subset N\} < +\infty$$

et donc que

$$P(Z, N) = Q(Z, N)$$

par le lemme précédent.

Conséquemment, si $\gamma \in P(Z, N)$, alors il existe $t' \geq 0$ tel que $\gamma \cdot [-t', 0] \subset N$ et $\gamma \cdot -t' \in Z$. De (3.3) on déduit que $\gamma \cdot -t' \cdot [0, \bar{t}] = \gamma \cdot [-t', \bar{t} - t'] \not\subset N$. Puisque $\gamma \cdot [-t', 0] \subset N$ et $t' < \bar{t}$ alors $\gamma \cdot [0, \bar{t} - t'] \not\subset N$. Donc, $\gamma \notin A^+(N)$. Nous pouvons alors conclure que $P(Z, N) \cap A^+(N) = \emptyset$.

□

Proposition 3.6. *Soient N un voisinage isolant et V un voisinage ouvert de $A^-(N)$ dans Γ . On peut choisir un voisinage compact Z de $A^-(N)$ dans N tel que $P(Z, N) \subset V$.*

Démonstration. Considérons $N \setminus V$ un ensemble compact inclu dans N . Par hypothèse nous avons

$$N \setminus V \cap A^-(N) = \emptyset.$$

Le lemme 3.2 nous permet de trouver un $\bar{t} \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\gamma \in N \setminus V \Rightarrow \gamma \cdot [-\bar{t}, 0] \not\subset N. \quad (3.4)$$

Prenons $\gamma \in A^-(N)$. Nous traiterons deux cas.

1^{er} cas: $\gamma \cdot [0, \bar{t}] \subset A^-(N) \subset V$. Nous pouvons alors trouver U_γ un voisinage ouvert de γ tel que $U_\gamma \cdot [0, \bar{t}] \subset V$.

2^{ième} cas: $\gamma \cdot [0, \bar{t}] \not\subset A^-(N)$. Ceci implique qu'il existe s dans l'intervalle $[0, \bar{t}]$ tel que $\gamma \cdot s \notin A^-(N)$ et $\gamma \cdot [0, s] \subset V$. Nous pouvons ainsi trouver $t \in [0, s]$ tel que

$$(\gamma \cdot s) \cdot -t = \gamma \cdot (s - t) \notin N.$$

Notons $t_\gamma = s - t$. Nous avons

$$t_\gamma \in [0, \bar{t}], \quad \gamma \cdot [0, t_\gamma] \subset V \quad \text{et} \quad \gamma \cdot t_\gamma \notin N.$$

Nous pouvons choisir U_γ un voisinage ouvert de γ tel que

$$U_\gamma \cdot [0, t_\gamma] \subset V \quad \text{et} \quad U_\gamma \cdot t_\gamma \cap N = \emptyset. \quad (3.5)$$

De nouveau, pour tout $\gamma \in A^-(N)$, nous pouvons choisir V_γ un voisinage ouvert de γ tel que $V_\gamma \subset \overline{V}_\gamma \subset U_\gamma$ (théorème 1.2). Nous constatons alors que

$$A^-(N) \subset \bigcup_{\gamma \in A^-(N)} V_\gamma.$$

Puisque $A^-(N)$ est compact, nous pouvons alors trouver un sous-recouvrement fini. Ainsi

$$A^-(N) \subset \bigcup_{i=1}^n V_{\gamma_i} \subset \bigcup_{i=1}^n \bar{V}_{\gamma_i}.$$

Puisque $A^-(N)$ est inclus dans l'ensemble N , nous avons

$$A^-(N) \subset \bigcup_{i=1}^n \bar{V}_{\gamma_i} \cap N = \bigcup_{i=1}^n K_{\gamma_i} := Z.$$

Nous avons bien que Z est un voisinage compact de $A^-(N)$ dans N .

D'autre part, si $\mu \in N \setminus Q(Z, N)$ alors

$$\mu \notin A^-(N), \quad \text{c'est-à-dire} \quad \mu \cdot (-\infty, 0] \not\subset N.$$

Nous pouvons alors dire que

$$\sup\{t \mid \mu \cdot [-t, 0] \subset N \text{ et } \exists \alpha \in Z \text{ tel que } \alpha \cdot [0, t] \subset N\} < +\infty$$

et ainsi, par le lemme 3.4, affirmer que $Q(Z, N) = P(Z, N)$.

Montrons maintenant que l'ensemble $Q(Z, N)$ est inclus dans V . Soit $\gamma \in Q(Z, N)$ et soit $t' \geq 0$ tel que

$$\gamma \cdot [-t', 0] \subset N \quad \text{et} \quad \gamma \cdot -t' \in Z. \quad (3.6)$$

Nous traiterons deux cas.

1^{er} cas: si $t' \geq \bar{t}$, par (3.4), $\gamma \in V$.

2^{ième} cas: si $t' < \bar{t}$, par définition de Z , il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que

$$\gamma \cdot -t' \in \bar{V}_{\gamma_i} \subset U_{\gamma_i}. \quad (3.7)$$

Si $\gamma_i \cdot [0, \bar{t}] \subset A^-(N) \subset V$ alors $U_{\gamma_i} \cdot [0, \bar{t}] \subset V$, et puisque nous avons $t' < \bar{t}$, $\gamma \in V$. Si par contre $\gamma_i \cdot [0, \bar{t}] \not\subset A^-(N)$, alors en combinant (3.5), (3.6) et (3.7), on déduit que $t' < t_{\gamma_i}$. Il s'ensuit que

$$\gamma = (\gamma \cdot -t') \cdot t' \in U_{\gamma_i} \cdot [0, t_{\gamma_i}] \subset V.$$

Donc $P(Z, N) = Q(Z, N) \subset V$.

□

Nous sommes maintenant prêts à démontrer le théorème 3.1.

Démonstration du théorème 3.1. Par hypothèse, l'ensemble S est inclus dans l'ouvert $W \cap \text{int } N$. D'autre part, par le théorème 1.2, nous pouvons trouver O un ouvert tel que

$$S \subset O \subset \bar{O} \subset W \cap \text{int } N.$$

Soient U^+ un voisinage ouvert de $A^+(N)$ et V^- un voisinage ouvert de $A^-(N)$. Prenons V_1 un ouvert tel que

$$V_1 \subset \bar{V}_1 \subset V^- \setminus A^+(N) \quad \text{et} \quad A^-(N) \subset V_1 \cup O.$$

L'ensemble $U^+ \setminus \bar{V}_1$ est alors un ouvert contenant $A^+(N)$. Notons $U = U^+ \setminus \bar{V}_1$ et $V = V_1 \cup O$. Ainsi, $U \cap V \subset O$.

Conséquemment, U et V sont des voisinages ouverts de $A^+(N)$ et $A^-(N)$ respectivement tels que

$$\text{cl}(U \cap V) \subset \bar{O} \subset W \cap \text{int } N.$$

La proposition 3.6 nous permet de choisir Z un voisinage compact de $A^-(N)$ tel que $P(Z, N) \subset V$.

Posons $N_0 = P(Z, N)$, $N_2 = P(N \setminus U, N)$ et $N_1 = N_0 \cup N_2$. Nous avons donc que $N_2 \subset N_1 \subset N$ et que N_1 et N_2 sont des ensembles compacts positivement invariant relativement à N .

Vérifions que (N_1, N_2) est une paire-indice. D'une part, nous avons que

$$N_0 \subset V \Rightarrow N_0 \setminus N_2 \subset V.$$

D'autre part, nous avons que

$$N \setminus U \subset N_2 \Rightarrow N \setminus N_2 \subset U \Rightarrow N_0 \setminus N_2 \subset U.$$

Ceci implique donc que

$$N_0 \setminus N_2 = N_1 \setminus N_2 \subset U \cap V.$$

Il s'ensuit que

$$\text{cl}(N_1 \setminus N_2) \subset \text{cl}(U \cap V) \subset W \cap \text{int } N \subset W.$$

Puisque $N \setminus U$ est un ensemble compact inclus dans N et que

$$N \setminus U \cap A^+(N) = \emptyset,$$

nous pouvons appliquer la proposition 3.5. Ainsi $P(N \setminus U, N) \cap A^+(N) = \emptyset$. D'où $A^+(N) \subset N \setminus N_2$.

Par ailleurs, $A^-(N) \subset Z \subset N_0 \subset N_1$. Nous avons alors que

$$S = A^+(N) \cap A^-(N) \subset N \setminus N_2 \cap N_1 = N_1 \setminus N_2 \subset \text{cl}(N_1 \setminus N_2) \subset \text{int } N \subset N,$$

et donc que

$$I(\text{cl}(N_1 \setminus N_2)) = S.$$

La condition (i) de la définition 2.8 est alors vérifiée.

Vérifions maintenant que N_2 est positivement invariant relativement à N_1 . Nous savons que l'ensemble N_2 est positivement invariant relativement à N . Puisque $N_1 \subset N$, l'ensemble N_2 est aussi positivement invariant relativement à N_1 .

Finalement, vérifions que N_2 est un ensemble de sortie pour N_1 . Prenons $\gamma \in N_1$ et $t > 0$ tels que $\gamma \cdot t \notin N_1$. On définit

$$\bar{t} = \sup\{s \mid \gamma \cdot [0, s] \subset N_1 \setminus N_2\}.$$

Par définition de \bar{t} , et puisque $\text{cl}(N_1 \setminus N_2) \subset \text{int } N$, il existe $t' > \bar{t}$ tel que

$$\gamma \cdot [0, t'] \subset N \quad \text{et} \quad \gamma \cdot t' \notin N_1 \setminus N_2.$$

Mais $N_1 = N_0 \cup N_2$ est positivement invariant relativement à N , ce qui implique que $\gamma \cdot [0, t'] \subset N_1$ et donc que $\gamma \cdot t' \in N_2$. Le théorème est ainsi démontré.

□

Considérons le système dynamique représenté à la figure 3.1. Les figures 3.2 à 3.5 illustrent la construction d'une paire-indice pour l'ensemble invariant isolé S de ce système. Nous pouvons situer sur la figure 3.2 les ensembles $A^+(N)$ et $A^-(N)$ ainsi que les voisinages ouverts U et V . Nous voyons à la figure 3.3, l'ensemble $N_0 = P(Z, N) \subset V$ pour Z un voisinage compact de $A^-(N)$ et à la figure 3.4, l'ensemble $N_2 = P(N \setminus U, N)$. Finalement, à la figure 3.5, nous

obtenons, avec $N_1 = N_0 \cup N_2$, une paire-indice (N_1, N_2) pour l'ensemble invariant isolé S .

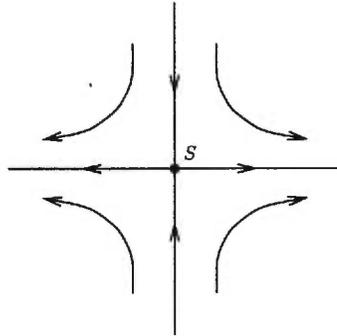


FIG. 3.1.

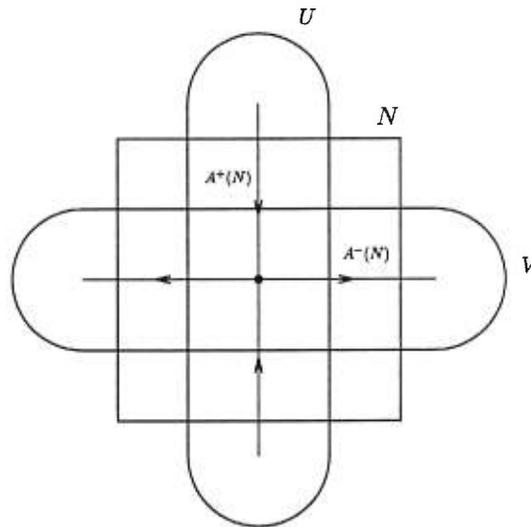


FIG. 3.2.

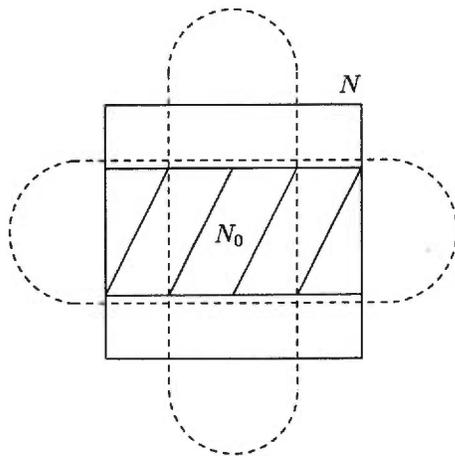


FIG. 3.3.

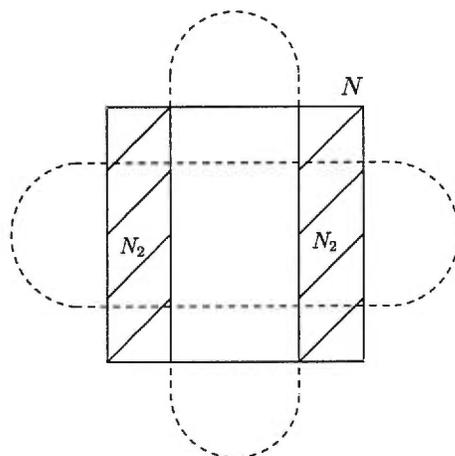


FIG. 3.4.

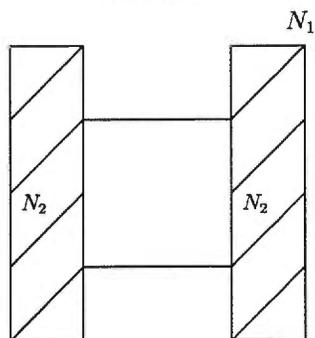


FIG. 3.5.

Chapitre 4

INDÉPENDANCE DU CHOIX DES PAIRES-INDICES

Dans ce chapitre nous verrons que l'indice de Conley d'homotopie d'un ensemble invariant isolé S est bien défini. En d'autres mots, nous montrerons que deux paires-indices différentes d'un même ensemble invariant isolé ont le même indice de Conley. Pour ce faire, nous montrons que deux paires-indices pour un même ensemble invariant isolé S sont homotopiquement équivalentes.

De plus, les groupes d'homologie de deux paires d'espaces homotopiquement équivalentes sont les mêmes. Par conséquent, l'indice de Conley d'homologie sera également bien défini. Le lecteur pourra retrouver l'ensemble des démonstrations de ce chapitre dans Conley [2] et dans Kurland [14].

Théorème 4.1. *Soient (N_1, N_2) et (\hat{N}_1, \hat{N}_2) deux paires-indices pour l'ensemble invariant isolé S . Alors N_1/N_2 est homotopiquement équivalent à \hat{N}_1/\hat{N}_2 .*

Pour faire la démonstration de ce théorème nous devons introduire certaines notations ainsi que différents lemmes.

Notation. Soit (N_1, N_2) une paire-indice pour S un ensemble invariant isolé.
Pour $t \in \mathbb{R}^+$,

$$N_1^t = \{\gamma : \exists \gamma' \in N_1 \text{ tel que } \gamma' \cdot [0, t] \subset N_1 \text{ et } \gamma' \cdot t = \gamma\} \quad \text{et}$$

$$N_2^{-t} = \{\gamma : \exists \gamma' \in N_2 \text{ et } t' \in [0, t] \text{ tel que } \gamma' \cdot [-t', 0] \subset N_1 \text{ et } \gamma' \cdot -t' = \gamma\}.$$

Lemme 4.2. Soit (N_1, N_2) une paire-indice et soit $t \in \mathbb{R}^+$. Alors l'inclusion $i : N_1^t/N_2 \hookrightarrow N_1/N_2$ est une équivalence homotopique et son inverse homotopique est donné par:

$$f : N_1/N_2 \longrightarrow N_1^t/N_2$$

$$[\gamma] \longmapsto \begin{cases} [\gamma \cdot t], & \text{si } \gamma \cdot [0, t] \subset N_1; \\ [N_2], & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. On définit la fonction suivante:

$$F : N_1/N_2 \times [0, 1] \longrightarrow N_1/N_2$$

$$([\gamma], \sigma) \longmapsto \begin{cases} [\gamma \cdot \sigma t], & \text{si } \gamma \cdot [0, \sigma t] \subset N_1; \\ [N_2], & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrons que la fonction F est bien définie. Si $\gamma \in N_2$ et $\gamma \cdot [0, \sigma t] \subset N_1$ alors $\gamma \cdot [0, \sigma t] \subset N_2$ puisque N_2 est positivement invariant relativement à N_1 . Ainsi,

$$F([N_2], \sigma) = F([\gamma], \sigma) = [N_2].$$

Montrons que la fonction F est une fonction continue. Soit U un ouvert dans N_1/N_2 . Montrons que $F^{-1}(U)$ est un ensemble ouvert dans $N_1/N_2 \times [0, 1]$. Posons $\tilde{U} = q^{-1}(U)$ un ouvert. Nous traiterons deux cas.

1^{er} cas: $[N_2] \notin U$. Prenons $([\gamma], \sigma) \in F^{-1}(U)$ ce qui veut dire que $F([\gamma], \sigma) \in U$ et donc que $F([\gamma], \sigma) \neq [N_2]$. Ceci implique que

$$\gamma \cdot [0, \sigma t] \subset N_1 \quad \text{et} \quad \gamma \cdot [0, \sigma t] \cap N_2 = \emptyset.$$

En effet, soit $s \in [0, \sigma t]$ et $\gamma \cdot s \in N_2$. Si $\gamma \cdot [0, \sigma t] \subset N_1$ alors

$$\gamma \cdot [s, \sigma t] \subset N_2 \quad \text{et} \quad F([\gamma], \sigma) = [N_2]$$

et on a alors une contradiction.

On choisit $\tilde{V} \subset N_1$ un voisinage de γ et $\epsilon_1 > 0$ tels que

$$\tilde{V} \cdot [0, (\sigma + \epsilon_1)t] \subset N_1 \quad \text{et} \quad \tilde{V} \cdot [0, (\sigma + \epsilon_1)t] \cap N_2 = \emptyset.$$

Par choix,

$$F([\gamma], \sigma) = [\gamma \cdot \sigma t] \in U \quad \text{et donc} \quad \gamma \cdot \sigma t \in \tilde{U}.$$

Puisque le flot est une fonction continue, on peut choisir \tilde{O} un voisinage de γ et $\epsilon_2 > 0$ tels que

$$\tilde{O} \cdot [(\sigma - \epsilon_2)t, (\sigma + \epsilon_2)t] \subset \tilde{U}.$$

Alors, avec $\tilde{W} = \tilde{V} \cap \tilde{O}$ et $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ on obtient

$$\tilde{W} \cdot [0, (\sigma + \epsilon)t] \subset N_1 \quad \text{et} \quad \tilde{W} \cdot [(\sigma - \epsilon)t, (\sigma + \epsilon)t] \subset \tilde{U}.$$

Ainsi, $W = q(\tilde{W})$ est un voisinage ouvert de $[\gamma]$ et $F(W \times (\sigma - \epsilon, \sigma + \epsilon)) \subset U$. D'où $F^{-1}(U)$ est un ensemble ouvert.

2^{ième} cas: $[N_2] \in U$. Considérons

$$\tilde{W} = \{(\gamma, \sigma) \in N_1 \times [0, 1] : \gamma \cdot [0, \sigma t] \cap N_1^c \neq \emptyset \quad \text{ou} \quad \gamma \cdot \sigma t \in \tilde{U}\}.$$

Montrons que cet ensemble est ouvert. Si $\gamma \cdot [0, \sigma t] \cap N_1^c \neq \emptyset$ alors il existe $s \in (0, \sigma t]$ telle que $\gamma \cdot s \in N_1^c$. Nous pouvons ainsi choisir \tilde{O} un voisinage de γ et $\epsilon' > 0$ tels que $s - \epsilon' > 0$ et

$$\tilde{O} \cdot (s - \epsilon', s + \epsilon') \subset N_1^c.$$

Choisissons $\epsilon > 0$ tel que $s - \epsilon' < (\sigma - \epsilon)t$ ce qui assure que si $\beta \in (\sigma - \epsilon, \sigma + \epsilon)$ alors

$$\tilde{O} \cdot [0, \beta t] \cap N_1^c \neq \emptyset.$$

Si, par contre, $\gamma \cdot \sigma t \in \tilde{U}$, on choisit comme dans le premier cas \tilde{O} un voisinage de γ et $\epsilon > 0$ tel que

$$\tilde{O} \cdot [(\sigma - \epsilon)t, (\sigma + \epsilon)t] \subset \tilde{U}.$$

Montrons maintenant que

$$F([\gamma], \sigma) \in U \Leftrightarrow (\gamma, \sigma) \in \tilde{W}.$$

Supposons que $F([\gamma], \sigma) \in U$. Si $\gamma \cdot [0, \sigma t] \subset N_1$ alors $\gamma \cdot \sigma t \in \tilde{U}$ et donc $(\gamma, \sigma) \in \tilde{W}$. Si $\gamma \cdot [0, \sigma t] \not\subset N_1$ alors

$$\gamma \cdot [0, \sigma t] \cap N_1^c \neq \emptyset \quad \text{et} \quad (\gamma, \sigma) \in \tilde{W}.$$

Supposons maintenant que $(\gamma, \sigma) \in \tilde{W}$. Si $\gamma \cdot [0, \sigma t] \subset N_1$ alors $\gamma \cdot \sigma t \in \tilde{U}$ et ainsi

$$F([\gamma], \sigma) = [\gamma \cdot \sigma t] \in U.$$

Si $\gamma \cdot [0, \sigma t] \not\subset N_1$ alors $F([\gamma], \sigma) = [N_2] \in U$.

Ainsi, nous pouvons affirmer que $F^{-1}(U) = W = q(\tilde{W})$ est un ouvert, d'où la continuité de F .

Maintenant, remarquons que la fonction F est une homotopie entre $F_0(\cdot) = F(\cdot, 0) = \text{id}|_{N_1/N_2}$ et $F_1(\cdot) = F(\cdot, 1)$, où $\text{id}|_{N_1/N_2}$ est l'application identité sur N_1/N_2 . Aussi, remarquons que

$$F(N_1^t/N_2 \times [0, 1]) \subset N_1^t/N_2.$$

En effet, soit $([\gamma], \sigma) \in N_1^t/N_2 \times [0, 1]$. Si $\gamma \cdot [0, \sigma t] \subset N_1$ alors

$$F([\gamma], \sigma) = [\gamma \cdot \sigma t] \in N_1^t/N_2$$

car $\gamma \in N_1^t$ implique

$$\gamma \cdot \sigma t \cdot [-t, 0] = \gamma \cdot [-t + \sigma t, \sigma t] \subset N_1.$$

Si $\gamma \cdot [0, \sigma t] \not\subset N_1$ alors $F([\gamma], \sigma) = [N_2] \in N_1^t/N_2$. Ainsi,

$$F|_{N_1^t/N_2 \times [0, 1]} : N_1^t/N_2 \times [0, 1] \longrightarrow N_1^t/N_2$$

est une homotopie entre $\text{id}|_{N_1^t/N_2}$, l'application identité sur N_1^t/N_2 , et $F_1|_{N_1^t/N_2}$.

D'autre part, remarquons que

$$F_1(N_1/N_2) \subset N_1^t/N_2.$$

En effet, soit $[\gamma] \in N_1/N_2$. Si $F_1([\gamma]) = [N_2]$ alors $F_1([\gamma]) \in N_1^t/N_2$.

Si $F_1([\gamma]) \neq [N_2]$ alors

$$\gamma \cdot [0, t] \subset N_1 \setminus N_2 \quad \text{et} \quad F_1([\gamma]) = [\gamma \cdot t].$$

Alors, puisque $\gamma \in N_1$, on a $\gamma \cdot t \in N_1^t$ et ainsi $F_1([\gamma]) \in N_1^t/N_2$.

Nous pouvons maintenant considérer la suite

$$N_1^t/N_2 \xrightarrow{i} N_1/N_2 \xrightarrow{f} N_1^t/N_2 \xrightarrow{i} N_1/N_2$$

et remarquer que $f \circ i = F_1|_{N_1^t/N_2}$ est homotope à $\text{id}|_{N_1^t/N_2}$ et $i \circ f = F_1$ est homotope à $\text{id}|_{N_1/N_2}$. Ainsi, par définition, i et f sont des équivalences homotopiques et chacune d'elles est l'inverse homotopique de l'autre, ce qui termine la preuve de ce lemme.

□

Lemme 4.3. *Soit (N_1, N_2) une paire-indice et soit $t \in \mathbb{R}^+$. Alors l'inclusion $j : N_1/N_2 \hookrightarrow N_1/N_2^{-t}$ est une équivalence homotopique et son inverse homotopique est donné par $i \circ g$, où $i : N_1^t/N_2 \hookrightarrow N_1/N_2$ et*

$$g : N_1/N_2^{-t} \longrightarrow N_1^t/N_2$$

$$[\gamma] \longmapsto \begin{cases} [\gamma \cdot t], & \text{si } \gamma \cdot [0, t] \subset N_1 \setminus N_2; \\ [N_2], & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Montrons tout d'abord que la fonction g est bien définie. Si $\gamma \cdot [0, t] \subset N_1 \setminus N_2$, nous avons $\gamma \cdot t \in N_1^t$ et alors $g([\gamma]) = [\gamma \cdot t] \in N_1^t/N_2$. Si $\gamma \in N_2^{-t}$, nous avons $\gamma \cdot t' \in N_2$ pour $t' \in [0, t]$ et ainsi

$$\gamma \cdot [0, t] \not\subset N_1 \setminus N_2 \quad \text{et} \quad g([\gamma]) = [N_2].$$

Si $g([\gamma]) = [N_2]$, alors $\gamma \cdot [0, t] \not\subset N_1 \setminus N_2$ et $\gamma \cdot [0, t] \cap N_2 \neq \emptyset$. Ceci implique qu'il existe $t' \in [0, t]$ tel que

$$\gamma \cdot t' = \gamma' \quad \text{pour} \quad \gamma' \in N_2 \quad \text{et} \quad \gamma \cdot [0, t'] \subset N \quad \text{et donc} \quad \gamma \in N_2^{-t}.$$

D'où $g([N_2^{-t}]) = [N_2]$ et $[N_2^{-t}] = g^{-1}([N_2])$.

De plus, g est injective car si $[\gamma_1] = [N_2^{-t}] \neq [\gamma_2]$ alors

$$g([\gamma_1]) = [N_2] \neq g([\gamma_2])$$

et si $[\gamma_1], [\gamma_2] \neq [N_2^{-t}]$ et $[\gamma_1] \neq [\gamma_2]$ alors

$$\gamma_1 \cdot [0, t] \quad \text{et} \quad \gamma_2 \cdot [0, t] \subset N_1 \setminus N_2$$

et ainsi

$$g([\gamma_1]) = [\gamma_1 \cdot t] \neq [\gamma_2 \cdot t] = g([\gamma_2]).$$

D'autre part, si $\gamma \in N_1^t \setminus N_2$ il existe $\gamma' \in N_1$ tel que

$$\gamma' \cdot [0, t] \subset N_1 \setminus N_2 \quad \text{et} \quad \gamma' \cdot t = \gamma \quad \text{donc} \quad g([\gamma']) = [\gamma' \cdot t] = [\gamma],$$

ce qui nous permet de conclure que la fonction g est surjective, et donc bijective. On montre que la fonction g est continue de la même manière que nous l'avons fait pour la fonction f définie au lemme 4.2.

Enfin, puisque que N_1/N_2^{-t} et N_1^t/N_2 sont des espaces compacts et que g est une fonction bijective et continue, g est un homéomorphisme.

Considérons la suite

$$N_1/N_2 \xrightarrow{j} N_1/N_2^{-t} \xrightarrow{g} N_1^t/N_2 \xrightarrow{i} N_1/N_2.$$

Nous avons $g \circ j = f$ et donc $f \circ i = g \circ j \circ i$ est homotope à $\text{id}|_{N_1^t/N_2}$ (lemme 4.2).

Ceci et le fait que g soit un homéomorphisme nous permet de conclure que

$$j \circ i \circ g = g^{-1} \circ g \circ j \circ i \circ g = g^{-1} \circ f \circ i \circ g$$

est homotope à $\text{id}|_{N_1/N_2^{-t}}$. D'autre part,

$$i \circ g \circ j = i \circ f$$

est homotope à $\text{id}|_{N_1/N_2}$ (lemme 4.2). Donc, par définition, $i \circ g$ et j sont des équivalences homotopiques et chacune d'elles est l'inverse homotopique de l'autre.

□

Lemme 4.4. *Soit (N_1, N_2) une paire-indice de S . Alors pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, (N_1, N_2^{-t}) et (N_1^t, N_2) sont aussi des paires-indices de S .*

Démonstration. Puisque $S = I(\text{cl}(N_1 \setminus N_2))$ et $S \subset \text{int}(N_1 \setminus N_2)$, si $\gamma \in S$ alors

$$\gamma \cdot [0, \infty[\subset \text{int}(N_1 \setminus N_2) \quad \text{et donc} \quad \gamma \notin N_2^{-t}.$$

D'où $S \subset \text{int}(N_1 \setminus N_2^{-t})$ et $S = I(\text{cl}(N_1 \setminus N_2^{-t}))$.

D'autre part, il est évident que N_2^{-t} est positivement invariant relativement à N_1 et que N_2^{-t} est un ensemble de sortie pour N_1 car N_2 jouit de ces deux propriétés. D'où (N_1, N_2^{-t}) est une paire-indice pour S .

De même, on montre que (N_1^t, N_2) est une paire-indice de S .

□

Lemme 4.5. *Soient (N_1, N_2) et (\hat{N}_1, \hat{N}_2) deux paires-indices de S un ensemble invariant isolé. Alors il existe $t > 0$ tel que*

$$\begin{aligned} \gamma \cdot [-t, t] \subset N_1 \setminus N_2 &\Rightarrow \gamma \in \hat{N}_1 \setminus \hat{N}_2 \quad \text{et} \\ \gamma \cdot [-t, t] \subset \hat{N}_1 \setminus \hat{N}_2 &\Rightarrow \gamma \in N_1 \setminus N_2. \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $\gamma \in K = \overline{N_1 \setminus N_2} \setminus (\text{int}(\hat{N}_1 \setminus \hat{N}_2))$. Puisque $S \subset \text{int}(\hat{N}_1 \setminus \hat{N}_2)$, il existe $t_\gamma > 0$ tel que

$$\gamma \cdot t_\gamma \in \overline{\Gamma \setminus N_1 \setminus N_2} \quad \text{ou} \quad \gamma \cdot -t_\gamma \in \overline{\Gamma \setminus N_1 \setminus N_2},$$

sinon

$$\gamma \cdot [0, \infty[\subset \overline{N_1 \setminus N_2} \quad \text{et} \quad \gamma \cdot]-\infty, 0] \subset \overline{N_1 \setminus N_2},$$

c'est-à-dire $\gamma \in S$, ce qui est contradictoire.

Par continuité du flot et puisque $\Gamma \overline{N_1 \setminus N_2}$ est ouvert, il existe un voisinage U_γ de γ tel que

$$U_\gamma \cdot t_\gamma \subset \Gamma \overline{N_1 \setminus N_2} \quad \text{ou} \quad U_\gamma \cdot -t_\gamma \subset \Gamma \overline{N_1 \setminus N_2}$$

et donc $U_\gamma \cdot [-t_\gamma, t_\gamma] \not\subset \overline{N_1 \setminus N_2}$. Ainsi, $\{U_\gamma\}_{\gamma \in K}$ forme un recouvrement ouvert de K dont on peut extraire un sous-recouvrement fini $\{U_{\gamma_1}, U_{\gamma_2}, \dots, U_{\gamma_n}\}$. Posons

$$\bar{t} = \max\{t_{\gamma_1}, \dots, t_{\gamma_n}\} \geq 0.$$

On a donc que si $\gamma \cdot [-\bar{t}, \bar{t}] \subset N_1 \setminus N_2$, $\gamma \in \hat{N}_1 \setminus \hat{N}_2$. Similairement, on trouve $\hat{t} > 0$ tel que si

$$\gamma \cdot [-\hat{t}, \hat{t}] \subset \hat{N}_1 \setminus \hat{N}_2 \quad \text{on a} \quad \gamma \in N_1 \setminus N_2.$$

Finalement, $t = \max\{\bar{t}, \hat{t}\}$ est le t cherché.

□

Nous sommes maintenant prêts à démontrer le théorème 4.1.

Démonstration du théorème 4.1. Remarquons d'abord que $\gamma \in N_1^t \setminus N_2^{-t}$ si et seulement si $\gamma \cdot [-t, t] \subset N_1 \setminus N_2$.

D'autre part, en vertu du lemme 4.5, il existe $t > 0$ tel que

$$\gamma \cdot [-t, t] \subset N_1 \setminus N_2 \Rightarrow \gamma \in \hat{N}_1 \setminus \hat{N}_2 \quad \text{et}$$

$$\gamma \cdot [-t, t] \subset \hat{N}_1 \setminus \hat{N}_2 \Rightarrow \gamma \in N_1 \setminus N_2.$$

Nous avons donc les inclusions

$$i_1 : N_1^t / N_2^{-t} \longrightarrow \hat{N}_1 / \hat{N}_2 \quad \text{et}$$

$$i_2 : \hat{N}_1^t / \hat{N}_2^{-t} \longrightarrow N_1 / N_2.$$

Des lemmes 4.2, 4.3 et 4.4, on a les équivalences homotopiques suivantes:

$$\begin{aligned} f_t : N_1/N_2^{-t} &\longrightarrow N_1^t/N_2^{-t}, & \hat{f}_t : \hat{N}_1/\hat{N}_2^{-t} &\longrightarrow \hat{N}_1^t/\hat{N}_2^{-t}, \\ g_t : N_1^t/N_2^{-t} &\longrightarrow N_1^{2t}/N_2 & \text{et} & \hat{g}_t : \hat{N}_1^t/\hat{N}_2^{-t} &\longrightarrow \hat{N}_1^{2t}/\hat{N}_2. \end{aligned}$$

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & N_1^{2t}/N_2 & & \\ & \nearrow g_t & & \searrow i & \\ N_1^t/N_2^{-t} & \xleftarrow{f_t} & N_1/N_2^{-t} & \xleftarrow{j} & N_1/N_2 \\ \downarrow i_1 & & & & \uparrow i_2 \\ \hat{N}_1/\hat{N}_2 & \xrightarrow{j} & \hat{N}_1/\hat{N}_2^{-t} & \xrightarrow{\hat{f}_t} & \hat{N}_1^t/\hat{N}_2^{-t} \\ & \nwarrow i & & \nearrow \hat{g}_t & \\ & & \hat{N}_1^{2t}/\hat{N}_2 & & \end{array}$$

Montrons que $i_1 \circ f_t \circ j$ est une équivalence homotopique. Considérons la suite

$$N_1^t/\hat{N}_2^{-t} \xrightarrow{i_2} N_1/N_2 \xrightarrow{i_1 \circ f_t \circ j} \hat{N}_1/\hat{N}_2 \xrightarrow{i_2 \circ \hat{f}_t \circ \hat{j}} N_1/N_2.$$

Remarquons que

$$i_1 \circ f_t \circ j \circ i_2 = \hat{i} \circ \hat{g}_t$$

est une équivalence homotopique. D'autre part,

$$i_2 \circ \hat{f}_t \circ \hat{j} \circ i_1 \circ f_t \circ j = i \circ g_t \circ f_t \circ j$$

est aussi une équivalence homotopique. La conclusion découle du lemme 1.8.

□

Chapitre 5

PAIRE RÉPULSEUR-ATTRACTEUR

Dans ce chapitre et le chapitre suivant, nous étudierons la structure d'un ensemble invariant. Un ensemble invariant peut contenir des points stationnaires ou des cycles. Ces derniers peuvent être reliés par des orbites appelées orbites connectantes. Nous voudrions les détecter.

Nous verrons à la section 1, la décomposition d'un ensemble invariant isolé en paire répulseur-attracteur. Puis, à la section 2, nous verrons l'homomorphisme de connection pour une paire répulseur-attracteur. Cet homomorphisme nous permettra de détecter les orbites connectantes. Le lecteur pourra consulter Mishaikow [17] et Franzosa [7] pour l'ensemble des définitions et démonstrations de ce chapitre.

1. DÉCOMPOSITION EN PAIRE RÉPULSEUR-ATTRACTEUR

Tout d'abord, nous introduisons certains concepts permettant de qualifier le comportement d'un ensemble à l'infini.

Définition 5.1. L'ensemble ω -limite d'un ensemble $Y \subset \Gamma$ est

$$\omega(Y) = I(\text{cl}(Y \cdot [0, +\infty))) = \bigcap_{t>0} \text{cl}(Y \cdot [t, +\infty)).$$

De manière similaire, l'ensemble ω^* -limite ou α -limite d'un ensemble $Y \subset \Gamma$ est

$$\omega^*(Y) = I(\text{cl}(Y \cdot (-\infty, 0])) = \bigcap_{t>0} \text{cl}(Y \cdot (-\infty, -t]).$$

Des exemples de ces ensembles sont donnés à la figure 5.1. En (a), $\omega(Y) = B$ et $\omega^*(Y) = A$, alors qu'en (b), $\omega(Y) = Y$ et $\omega^*(Y) = Y$.



FIG. 5.1.

Définition 5.2. Soit $S \subset \Gamma$ un ensemble compact invariant et soit $A \subset S$. S'il existe U un voisinage ouvert de A dans S tel que $A = \omega(U)$ alors A est un *attracteur* de S .

Définition 5.3. Soit $S \subset \Gamma$ un ensemble compact invariant et soit $R \subset S$. S'il existe V un voisinage ouvert de R dans S tel que $R = \omega^*(V)$ alors R est un *répulseur* de S .

Il est utile de visualiser graphiquement ces concepts à l'aide de la figure 5.2, où S est le segment RA .

Définition 5.4. Soit $S \subset \Gamma$ un ensemble compact invariant et A un attracteur de S . On définit

$$A^* = \{\gamma \in S : \omega(\gamma) \cap A = \emptyset\},$$

le *répulseur complémentaire* de A dans S .

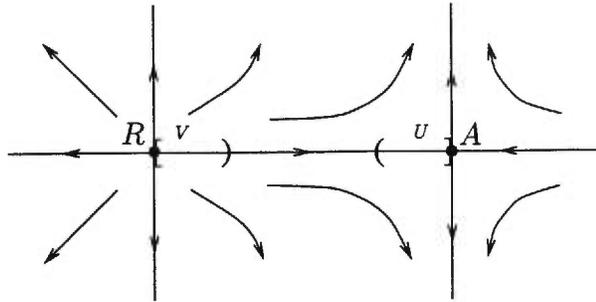


FIG. 5.2.

Définition 5.5. Soit $S \subset \Gamma$ un ensemble compact invariant, A un attracteur de S et A^* le répulseur complémentaire de A dans S . Alors $\{A^*, A\}$ est une *paire répulseur-attracteur* pour S et

$$C\{A^*, A\} = S \setminus (A^* \cup A)$$

est appelé l'*ensemble des orbites connectantes* de la paire $\{A^*, A\}$.

Nous pouvons nous convaincre aisément que si S est un ensemble invariant isolé, alors A^* et A le seront également. On a donc obtenu une partition simple d'un ensemble invariant isolé S en sous-ensembles invariants isolés. La paire $\{R, A\}$ de la figure 5.2 est un exemple d'une paire répulseur-attracteur.

Définition 5.6. Soit $\{R, A\}$ une décomposition en paire répulseur-attracteur de S un ensemble invariant isolé. Un triplet d'ensembles compacts (N_0, N_1, N_2) est appelé *triplet-indice* pour $\{R, A\}$ si

- a) (N_1, N_2) est une paire-indice pour A ,
- b) (N_0, N_1) est une paire-indice pour R ,
- c) (N_0, N_2) est une paire-indice pour S .

Exemple 5.7. La figure 5.3 montre un exemple d'un triplet-indice, où S est le segment RA .

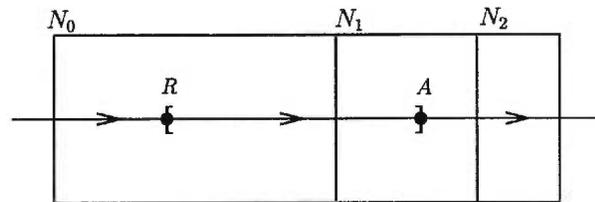


FIG. 5.3.

La proposition suivante établit l'existence d'un triplet-indice pour une décomposition en paire répulseur-attracteur d'un ensemble invariant isolé.

Théorème 5.8. *Si $\{R, A\}$ est une paire répulseur-attracteur de S , un ensemble invariant isolé, alors il existe un triplet-indice (N_0, N_1, N_2) pour cette décomposition.*

Démonstration. Par le théorème 3.1, il existe (N_0, N_2) une paire-indice pour l'ensemble invariant isolé S . En se basant sur une construction, que le lecteur pourra trouver dans Kurland [12], il est possible de trouver N_1 tel que (N_1, N_2) soit une paire-indice pour l'ensemble invariant isolé A . De plus, nous pouvons choisir N_0 et N_1 tels que $N_1 \subset N_0$. Nous montrons que (N_0, N_1) est une paire-indice pour R .

Vérifions que N_1 est positivement invariant relativement à N_0 . Prenons $\gamma \in N_1$ tel que $\gamma \cdot [0, t] \subset N_0$. Si $\gamma \cdot [0, t] \cap N_2 = \emptyset$ alors, puisque (N_1, N_2) est une paire-indice, on a

$$\gamma \cdot [0, t] \subset N_1.$$

Si par contre, $\gamma \cdot [0, t] \cap N_2 \neq \emptyset$, nous posons

$$t' = \min\{s > 0 : \gamma \cdot s \in N_2\}.$$

Or, (N_1, N_2) est une paire-indice et donc

$$\gamma \cdot [0, t'] \subset N_1.$$

D'autre part, (N_0, N_2) est aussi une paire-indice. Ainsi, le fait que

$$\gamma \cdot t' \in N_2 \quad \text{et} \quad \gamma \cdot [t', t] \subset N_0,$$

implique que

$$\gamma \cdot [t', t] \subset N_2 \subset N_1, \quad \text{et donc} \quad \gamma \cdot [0, t] \subset N_1.$$

D'où, N_1 est positivement invariant relativement à N_0 .

Vérifions que N_1 est un ensemble de sortie pour N_0 . Prenons $\gamma \in N_0$ tel que $\gamma \cdot [0, +\infty) \not\subset N_0$. Puisque (N_0, N_2) est une paire-indice, il existe $t \geq 0$ tel que

$$\gamma \cdot [0, t] \subset N_0 \quad \text{et} \quad \gamma \cdot t \in N_2 \subset N_1$$

et donc N_1 est un ensemble de sortie pour N_0 .

Finalement, vérifions la condition (i) de la définition 2.8. Remarquons que $R \cap N_1 = \emptyset$. En effet, si nous supposons le contraire et prenons $\gamma \in R \cap N_1$ nous obtenons

$$\gamma \cdot [0, +\infty) \subset R \subset S \subset N_0.$$

Or, N_1 est positivement invariant relativement à N_0 et donc $\gamma \cdot [0, +\infty) \subset N_1$.

Ainsi

$$\gamma \cdot [0, +\infty) \subset R \cap N_1 \quad \text{et} \quad \omega(\gamma) \subset R \cap N_1.$$

Mais $S \cap N_2 = \emptyset$ et donc $R \cap N_2 = \emptyset$. Conséquemment,

$$\omega(\gamma) \cap N_2 = \emptyset \quad \text{et} \quad \omega(\gamma) \subset N_1 \setminus N_2.$$

Mais A est l'ensemble invariant maximal dans $N_1 \setminus N_2$ et $\omega(\gamma) \cap A = \emptyset$. Nous avons alors une contradiction, et ainsi $R \cap N_1 = \emptyset$. Nous avons alors $R \subset N_0 \setminus N_1$ et donc que $N_0 \setminus N_1$ est un voisinage de R . De plus $A \subset \text{int } N_1$ implique

$$A \cap \text{cl}(N_0 \setminus N_1) = \emptyset.$$

Donc, puisque $R \subset N_0 \setminus N_1$, nous avons que $R = I(\text{cl}(N_0 \setminus N_1))$ et la proposition est ainsi démontrée.

□

2. HOMOMORPHISME DE CONNEXION

Nous avons vu à la section précédente la décomposition d'un ensemble invariant en paire répulseur-attracteur. Nous voulons maintenant définir des outils permettant l'étude des orbites connectantes de cette décomposition.

Nous savons, grâce à la proposition 1.13, qu'il existe une longue suite exacte associée au triplet-indice (N_0, N_1, N_2) ,

$$\cdots \longrightarrow H_p(N_1, N_2) \xrightarrow{i_*} H_p(N_0, N_2) \xrightarrow{j_*} H_p(N_0, N_1) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(N_1, N_2) \longrightarrow \cdots$$

Dans ce cadre, on appelle ∂^* l'*homomorphisme de connexion* pour la paire $\{R, A\}$.

Étudions le cas où l'ensemble invariant isolé $S = A \cup R$, $\{R, A\}$ étant une décomposition en paire répulseur-attracteur de S . Soit N un voisinage isolant tel que $I(N) = S$. Soient $U \subset N$ un voisinage isolant de A et $V \subset N$ un voisinage isolant de R tels que $U \cap V = \emptyset$, $I(U) = A$ et $I(V) = R$. Par le théorème 3.1, il

existe une paire-indice (N_1^A, N_2^A) pour A telle que $N_2^A \subset N_1^A \subset U$ et une paire-indice (N_0^R, N_2^R) pour R telle que $N_2^R \subset N_0^R \subset V$. La proposition suivante nous permet de choisir un triplet-indice particulier.

Proposition 5.9. *Si $\{R, A\}$ est une paire répulseur-attracteur pour un ensemble invariant isolé $S = A \cup R$ alors*

$$(N_0, N_1, N_2) = (N_1^A \cup N_0^R, N_1^A \cup N_2^R, N_2^A \cup N_2^R)$$

est un triplet-indice pour la paire répulseur-attracteur $\{R, A\}$.

Démonstration. Tout d'abord, remarquons que

$$N_2^A \cup N_2^R \subset N_1^A \cup N_2^R \subset N_1^A \cup N_0^R.$$

Montrons que $(N_1^A \cup N_0^R, N_2^A \cup N_2^R)$ est une paire-indice pour S . Vérifions la condition (i) de la définition 2.12. Nous avons

$$N_1^A \cup N_0^R \setminus N_2^A \cup N_2^R = N_1^A \setminus N_2^A \cup N_0^R \setminus N_2^R.$$

Puisque $N_1^A \setminus N_2^A$ est un voisinage de A et que $N_0^R \setminus N_2^R$ est un voisinage de R , $N_1^A \cup N_0^R \setminus N_2^A \cup N_2^R$ est un voisinage de $S = A \cup R$. De plus, $\text{cl}(N_1^A \setminus N_2^A) \cap \text{cl}(N_0^R \setminus N_2^R) = \emptyset$, et ainsi, par la proposition 2.1 (ii),

$$\begin{aligned} I(\text{cl}(N_1^A \cup N_0^R \setminus N_2^A \cup N_2^R)) &= I(\text{cl}(N_1^A \setminus N_2^A \cup N_0^R \setminus N_2^R)) \\ &= I(\text{cl}(N_1^A \setminus N_2^A)) \cup I(\text{cl}(N_0^R \setminus N_2^R)) \\ &= A \cup R = S. \end{aligned}$$

Vérifions que $N_2^A \cup N_2^R$ est positivement invariant relativement à $N_1^A \cup N_0^R$. Soit $\gamma \in N_2^A \cup N_2^R$ et $t \geq 0$ tel que $\gamma \cdot [0, t] \subset N_1^A \cup N_0^R$. Puisque N_1^A et N_0^R sont

disjoints, $\gamma \cdot [0, t] \subset N_1^A$ ou $\gamma \cdot [0, t] \subset N_0^R$ et donc

$$\gamma \cdot [0, t] \subset N_2^A \quad \text{ou} \quad \gamma \cdot [0, t] \subset N_2^R.$$

Vérifions que $N_2^A \cup N_2^R$ est un ensemble de sortie pour $N_1^A \cup N_0^R$. Soit $\gamma \in N_1^A \cup N_0^R$ tel que $\gamma \cdot [0, +\infty) \not\subset N_1^A \cup N_0^R$. Puisque N_1^A et N_0^R sont disjoints et que N_2^A et N_2^R sont des ensembles de sortie pour N_1^A et N_0^R respectivement, il existe $t \geq 0$ tel que $\gamma \cdot t \in N_2^A$ ou $\gamma \cdot t \in N_2^R$.

De même, on montre que $(N_1^A \cup N_2^R, N_2^A \cup N_2^R)$ et $(N_1^A \cup N_0^R, N_1^A \cup N_2^R)$ sont des paires-indices pour A et R respectivement.

□

Le théorème suivant donne une relation entre l'homomorphisme de connexion et les orbites connectantes.

Théorème 5.10. *Soit $\{R, A\}$ une décomposition en paire répulseur-attracteur d'un ensemble invariant isolé S . Si $S = A \cup R$ alors l'homomorphisme de connexion ∂^* associé est l'homomorphisme nul.*

Démonstration. Par la proposition 5.9, nous savons qu'il existe un triplet-indices (N_0, N_1, N_2) pour $\{R, A\}$ de la forme

$$(N_0, N_1, N_2) = (N_1^A \cup N_0^R, N_1^A \cup N_2^R, N_2^A \cup N_2^R).$$

Dans ce cas, la longue suite exacte associée sera

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow H_p(N_1^A \cup N_2^R, N_2^A \cup N_2^R) \xrightarrow{i_*} H_p(N_1^A \cup N_0^R, N_2^A \cup N_2^R) \\ \xrightarrow{j_*} H_p(N_1^A \cup N_0^R, N_1^A \cup N_2^R) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(N_1^A \cup N_2^R, N_2^A \cup N_2^R) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Les propositions 1.15 et 1.16 permettent d'obtenir les isomorphismes suivants, pour tout entier $p \geq 0$:

$$\begin{aligned} H_p(N_1^A \cup N_2^R, N_2^A \cup N_2^R) &\simeq H_p(N_1^A, N_2^A); \\ H_p(N_1^A \cup N_0^R, N_1^A \cup N_2^R) &\simeq H_p(N_0^R, N_2^R); \\ H_p(N_1^A \cup N_0^R, N_2^A \cup N_2^R) &\simeq H_p(N_1^A, N_2^A) \oplus H_p(N_0^R, N_2^R). \end{aligned}$$

Ainsi, la suite exacte est équivalente à

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow H_p(N_1^A, N_2^A) \xrightarrow{i_*} H_p(N_1^A, N_2^A) \oplus H_p(N_0^R, N_2^R) \\ \xrightarrow{j_*} H_p(N_0^R, N_2^R) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(N_1^A, N_2^A) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Remarquons que l'homomorphisme induit j_* est la projection de

$$H_p(N_1^A, N_2^A) \oplus H_p(N_0^R, N_2^R) \quad \text{sur} \quad H_p(N_0^R, N_2^R).$$

Ceci implique alors que

$$\text{im } j_* = H_p(N_0^R, N_2^R) = \ker \partial^*,$$

par exactitude. Ainsi nous obtenons que l'homomorphisme ∂^* est l'homomorphisme nul. \square

Le corollaire suivant illustre l'importance de l'homomorphisme de connection.

Corollaire 5.11. *Soit $\{R, A\}$ une décomposition en paire répulseur-attracteur d'un ensemble invariant isolé S . Si l'homomorphisme de connection ∂^* associé n'est pas l'homomorphisme nul alors $S \neq A \cup R$.*

En d'autres termes, ceci signifie que si l'homomorphisme de connection n'est pas nul, l'ensemble des orbites connectantes $C\{R, A\}$ n'est pas vide.

Chapitre 6

DÉCOMPOSITION DE MORSE

Comme dans le cas d'une paire répulseur-attracteur, nous serons intéressés à étudier la structure d'un ensemble invariant via cette fois une décomposition plus fine de notre ensemble invariant, la décomposition de Morse. Nous pouvons voir la décomposition de Morse comme une généralisation de la décomposition d'un ensemble invariant en paire répulseur-attracteur.

Nous verrons à la première section, la décomposition de Morse. Par la suite, nous verrons à la section 2 les homomorphismes de connection associés à une décomposition de Morse et nous représentons les relations entre ces homomorphismes à l'aide d'un diagramme appelé tresse-indice.

1. DÉCOMPOSITION DE MORSE

Introduisons tout d'abord quelques définitions et notations concernant la décomposition de Morse. On pourra consulter Franzosa [7] pour plus de détails concernant cette section.

Définition 6.1. Soit $S \subset \Gamma$ un ensemble compact invariant. Alors une suite finie

$$\{M(\pi) : \pi \in P\}$$

d'ensembles compacts invariants dans S est une *décomposition de Morse* de S s'il existe une sélection ordonnée π_1, \dots, π_n de P telle que

$$\forall \gamma \in S \setminus \bigcup_{\pi \in P} M(\pi) \quad \exists i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \text{tels que } i < j,$$

$$\omega^*(\gamma) \subset M(\pi_i) \text{ et } \omega(\gamma) \subset M(\pi_j).$$

Toute sélection ordonnée de P avec cette propriété est dite *admissible*. Les ensembles $M(\pi)$ sont appelés *ensembles de Morse*.

Remarquons que chaque ensemble de Morse est lui-même un ensemble compact invariant. Voici quelques exemples de décomposition de Morse d'un ensemble invariant isolé.

Exemple 6.2. Soit S l'ensemble invariant isolé de la figure 6.1. L'ensemble

$$\{M(k) : k = 1, \dots, 4\}$$

est une décomposition de Morse de S .

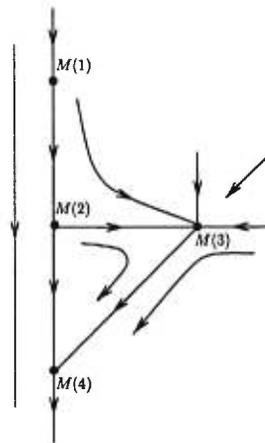


FIG. 6.1.

Exemple 6.3. Soit $S \subset \Gamma$ un ensemble compact invariant. Soit A un attracteur de S et A^* son répulseur complémentaire dans S . Alors $\{A^*, A\}$ est une décomposition de Morse.

Soit $S \subset \Gamma$ un ensemble invariant isolé et supposons qu'une décomposition de Morse de S

$$M = \{ M(\pi) : \pi \in P \}$$

avec sélection ordonnée $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ nous a été donnée.

Notation. Si $i < j$ alors

$$M(\pi_i \dots \pi_j) = \{ \gamma \in S : \omega(\gamma) \cup \omega^*(\gamma) \subset \bigcup_{k=i}^j M(\pi_k) \}.$$

Remarquons que $M(\pi_i \dots \pi_j)$ est un ensemble invariant isolé.

Définition 6.4. On définit l'ensemble des orbites connectantes de la paire $\{M(\pi_i), M(\pi_j)\}$, noté $C\{M(\pi_i), M(\pi_j)\}$, par

$$C\{M(\pi_i), M(\pi_j)\} = M(\pi_i \dots \pi_j) \setminus (M(\pi_i) \cup M(\pi_j)).$$

Définition 6.5. Une *filtration-indice* pour la décomposition de Morse de S

$$M = \{ M(\pi) : \pi \in P \}$$

avec sélection ordonnée $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ est une suite d'ensembles compacts, notée $N = \{N_k\}_{k=0}^n$, telle que (N_0, N_n) est une paire-indice pour S et (N_{i-1}, N_j) est une paire-indice pour $M(\pi_i \dots \pi_j)$ pour chaque i, j tels que $1 \leq i \leq j \leq n$.

Remarquons qu'un triplet-indice pour une décomposition en paire répulseur-attracteur est un cas particulier de filtration-indice. Nous énonçons maintenant

un théorème d'existence de filtration-indice. Ce théorème est une généralisation du théorème 5.8. Les démonstrations de ces deux théorèmes montrant plusieurs similitudes nous omettrons la démonstration de ce dernier; nous réferrons plutôt le lecteur à Franzosa [7].

Théorème 6.6. *Soit une décomposition de Morse M de $S \subset \Gamma$ un ensemble invariant isolé. Alors il existe une filtration-indice pour cette décomposition.*

Exemple 6.7. La figure 6.2 montre un exemple d'une filtration-indice.

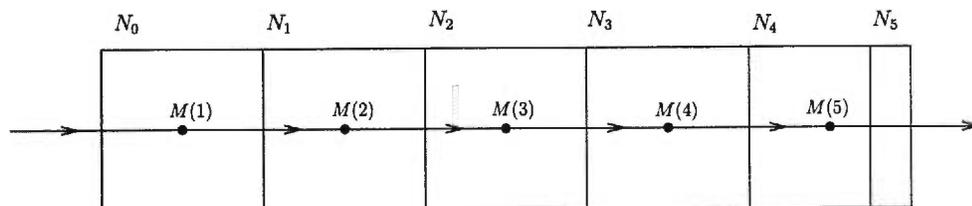


FIG. 6.2.

Exemple 6.8. Soit S l'ensemble invariant isolé de la figure 6.3 et $M = \{M(k); k = 1, \dots, 4\}$ une décomposition de Morse de S . Alors la suite d'ensembles compacts $N = \{N_k\}_{k=0}^4$ illustrée à la figure 6.4 est une filtration-indice pour la décomposition de Morse M .

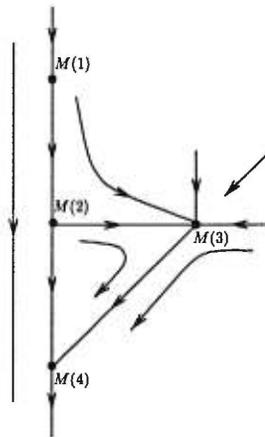


FIG. 6.3.

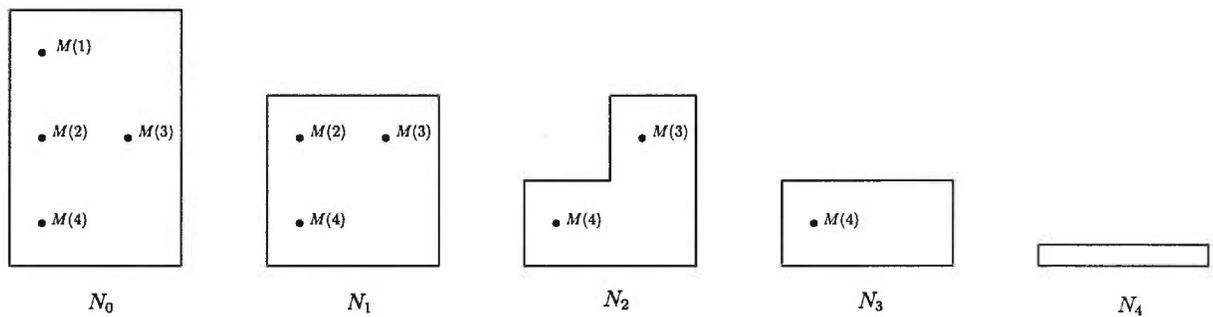


FIG. 6.4.

2. TRESSE-INDICE

Nous introduisons maintenant un outil fort utile pour synthétiser les informations contenues dans une décomposition de Morse.

Définition 6.9. Soient $S \subset \Gamma$ un ensemble invariant isolé et

$$M = \{ M(\pi) : \pi \in P \}$$

une décomposition de Morse de S avec sélection ordonnée $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$. Soit $N = \{N_i\}_{i=0}^n$ une filtration-indice pour cette décomposition. On appelle une

trousse-indexe d'homologie pour la décomposition M un ensemble de groupes d'homologie gradués et d'applications entre ces groupes d'homologie ayant comme propriétés:

- (i) à tout intervalle $I = \pi_i \dots \pi_j$, $1 \leq i \leq j \leq n$, on associe un groupe d'homologie gradué $H(I) = \{H_p(I)\}_{p=0}^{+\infty}$,
- (ii) pour tous intervalles

$$I = \pi_i \dots \pi_j, \quad J = \pi_{j+1} \dots \pi_k, \quad K = \pi_{k+1} \dots \pi_l,$$

avec $1 \leq i < j < k < l \leq n$, il existe des applications i_* , j_* et ∂_* telles que le diagramme

$$(D) \quad \begin{array}{ccccc} H_{p+1}(I) & & & & H_p(K) \\ & \searrow \partial_* & & \swarrow i_* & \downarrow i_* \\ & & H_p(JK) & & \\ & \swarrow j_* & & \searrow i_* & \downarrow i_* \\ H_p(J) & & & & H_p(IJK) \\ & \searrow i_* & & \swarrow j_* & \downarrow j_* \\ & & H_p(IJ) & & \\ & \swarrow \partial_* & & \searrow j_* & \downarrow j_* \\ H_{p-1}(K) & & & & H_p(I) \\ & \searrow i_* & & \swarrow \partial_* & \downarrow \partial_* \\ & & H_{p-1}(JK) & & \\ & \swarrow i_* & & \searrow j_* & \downarrow \partial_* \\ H_{p-1}(IJK) & & & & H_{p-1}(J) \end{array}$$

commute et que les suites

$$\begin{aligned}
& \cdots \rightarrow H_p(J) \xrightarrow{i_*} H_p(IJ) \xrightarrow{j_*} H_p(I) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(J) \xrightarrow{i_*} H_{p-1}(IJ) \xrightarrow{j_*} H_{p-1}(I) \rightarrow \cdots \\
& \cdots \rightarrow H_p(K) \xrightarrow{i_*} H_p(JK) \xrightarrow{j_*} H_p(J) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(K) \xrightarrow{i_*} H_{p-1}(JK) \xrightarrow{j_*} H_{p-1}(J) \rightarrow \cdots \\
& \cdots \rightarrow H_p(K) \xrightarrow{i_*} H_p(IJK) \xrightarrow{j_*} H_p(IJ) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(K) \xrightarrow{i_*} H_{p-1}(IJK) \xrightarrow{j_*} H_{p-1}(IJ) \rightarrow \cdots \\
& \cdots \rightarrow H_p(JK) \xrightarrow{i_*} H_p(IJK) \xrightarrow{j_*} H_p(I) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(JK) \xrightarrow{i_*} H_{p-1}(IJK) \xrightarrow{j_*} H_{p-1}(I) \rightarrow \cdots
\end{aligned}$$

issues du diagramme (D) soient des suites exactes,

où, pour tout intervalle $L = \pi_m \dots \pi_n$ avec $m \leq n$,

$$H_p(L) = H_p(M(L)) = H_p(N_{m-1}, N_n).$$

Énonçons maintenant un théorème d'existence et d'unicité d'une tresse-indice d'homologie.

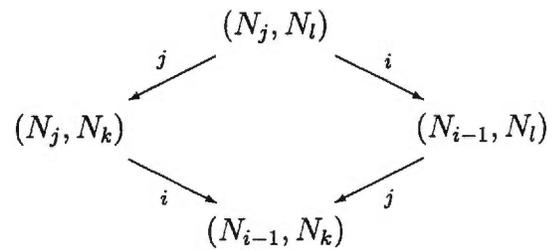
Théorème 6.10. *Soit M une décomposition de Morse d'un ensemble invariant isolé $S \subset \Gamma$. Alors il existe une tresse-indice d'homologie pour cette décomposition et elle ne dépend pas de la filtration-indice choisie.*

Démonstration. Soit $M = \{ M(\pi) : \pi \in P \}$ une décomposition de Morse de S avec sélection ordonnée $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$. Par le théorème 6.6, il existe $N = \{ N_i \}_{i=0}^n$, une filtration-indice pour M , et donc à tout intervalle $I = \pi_i \dots \pi_j$ on associe

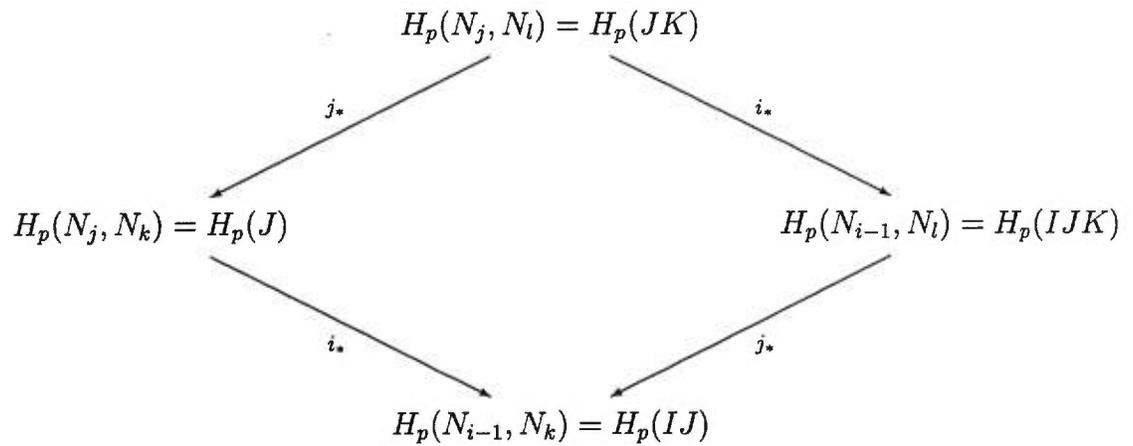
$$H(I) = \{ H_p(I) \}_{p=0}^{\infty} = \{ H_p(N_{i-1}, N_j) \}_{p=0}^{\infty}.$$

Posons $E = N_{i-1}$, $F = N_j$ et $G = N_k$. En vertu de la proposition 1.13, la première des suites écrites à la définition 6.9 est exacte. De la même manière, les autres suites le seront aussi.

Vérifions que le diagramme (D) est commutatif. Si nous considérons le diagramme commutatif



nous pouvons déduire par la proposition 1.11 que le diagramme suivant le sera aussi:



D'autre part, en considérant l'inclusion

$$i : (N_{i-1}, N_k, N_l) \hookrightarrow (N_{i-1}, N_j, N_l)$$

nous pouvons conclure, grâce à la proposition 1.14 que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 & H_p(N_{i-1}, N_k) = H_p(IJ) & \\
 \partial_* \swarrow & & \searrow j_* \\
 H_{p-1}(N_k, N_l) = H_{p-1}(K) & & H_p(N_{i-1}, N_j) = H_p(I) \\
 i_* \searrow & & \swarrow \hat{\partial}_* \\
 & H_{p-1}(N_j, N_l) = H_{p-1}(JK) &
 \end{array}$$

est commutatif où ∂_* et $\hat{\partial}_*$ sont les homomorphismes de connexion associés à chacun des deux triplets d'espaces.

De la même manière, l'inclusion $(N_{i-1}, N_j, N_l) \hookrightarrow (N_{i-1}, N_j, N_k)$ conduit au diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 & H_p(I) & \\
 \partial_* \swarrow & \downarrow \partial_* & \\
 H_{p-1}(JK) & & H_{p-1}(J) \\
 j_* \searrow & &
 \end{array}$$

La démonstration de la commutativité des autres parties du diagramme (D) est similaire aux preuves déjà faites.

Finalement, par le théorème 4.1, $H(I)$ est indépendant de la paire-indice et donc de la filtration-indice.

□

Nous avons l'équivalent du corollaire 5.11 pour la décomposition de Morse. Pour la démonstration du théorème suivant, le lecteur pourra consulter Franzosa [9].

Théorème 6.11. *Si l'homomorphisme de connection $\partial_* : H_p(I) \rightarrow H_{p-1}(J)$ du diagramme de la tresse-indice n'est pas nul alors*

$$C\{M(I), M(J)\} \neq \emptyset.$$

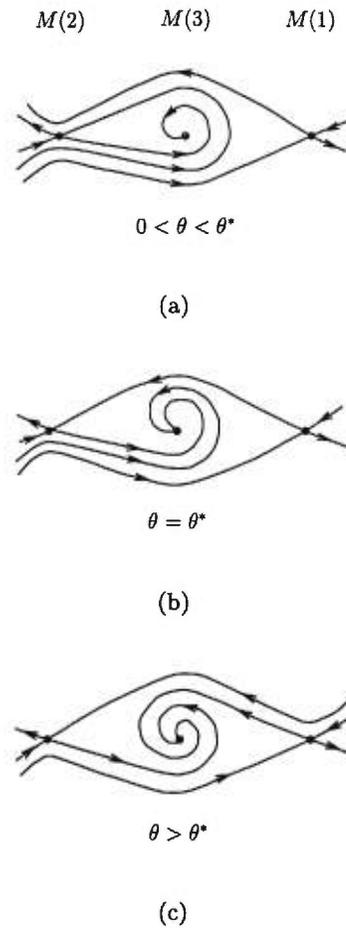


FIG. 6.5.

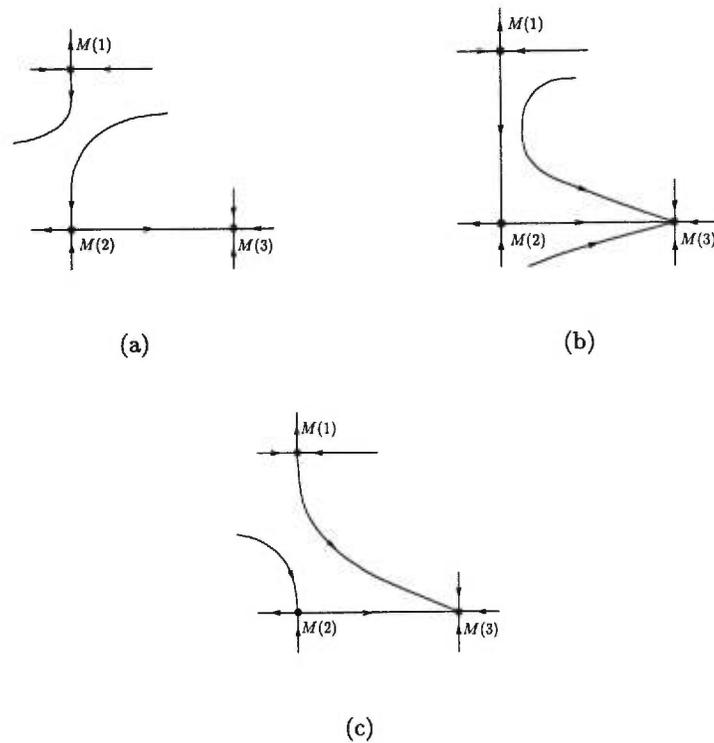


FIG. 6.6.

Nous sommes maintenant prêts à étudier un exemple pratique où nous tenterons de déterminer les orbites connectantes d'une décomposition de Morse.

Exemple 6.12. Considérons la famille de systèmes d'équations différentielles suivante paramétrisée par $\theta > 0$.

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = -\theta y + x(x - 1/3)(1 - x). \end{cases}$$

La figure 6.5 donne le portrait de phase de ce système pour différentes valeurs de θ . La suite $\{M(k)\}_{k=1}^3$ est une décomposition de Morse pour l'ensemble invariant isolé de chacun des trois systèmes dynamiques. De manière équivalente, ces

portraits de phase sont représentés à la figure 6.6. Ainsi, les ensembles représentés à la figure 6.7 forment une filtration-indice pour cette décomposition. Notons que cette filtration-indice est valable pour chacun des portraits de phase (a), (b) et (c).

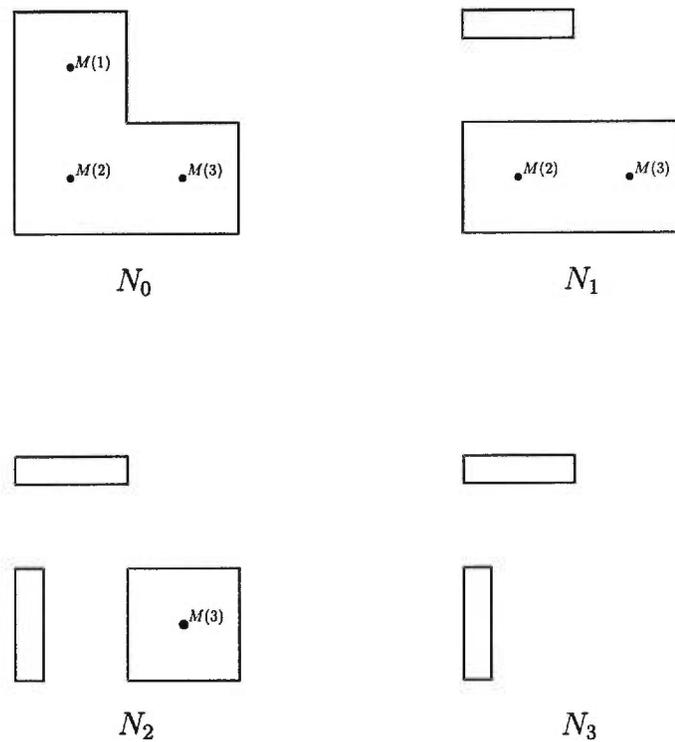


FIG. 6.7.

Nous considérons les intervalles $I = 1$, $J = 2$ et $K = 3$. Ainsi, à l'aide de la filtration-indice nous obtenons

$$H(I) = \{H_p(\Sigma^1)\}_{p=0}^\infty, \quad H(IJ) = \{H_p(\Sigma^1 \oplus \Sigma^1)\}_{p=0}^\infty,$$

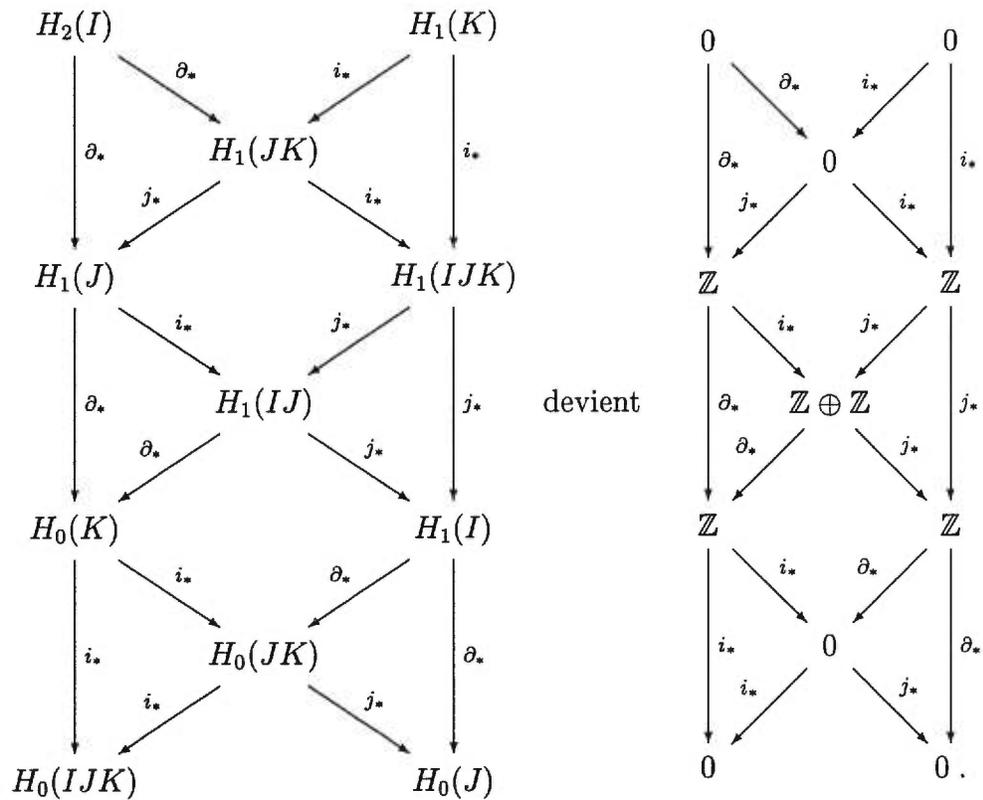
$$H(J) = \{H_p(\Sigma^1)\}_{p=0}^\infty, \quad H(JK) = \{H_p(\{*\}, \{*\})\}_{p=0}^\infty,$$

$$H(K) = \{H_p(\{*\}, [\emptyset])\}_{p=0}^\infty, \quad H(IJK) = \{H_p(\Sigma^1)\}_{p=0}^\infty.$$

Condensons maintenant ces informations dans un tableau.

	$H(I)$	$H(J)$	$H(K)$	$H(IJ)$	$H(JK)$	$H(IJK)$
$p = 0$	0	0	\mathbb{Z}	0	0	0
$p = 1$	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}	0	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}
$p > 1$	0	0	0	0	0	0

Ainsi le diagramme



Nous pouvons alors conclure que les deux seuls homomorphismes de connexions non nuls sont

$$\partial_* : H_1(J) \longrightarrow H_0(K) \quad \text{et} \quad \partial_* : H_1(IJ) \longrightarrow H_0(K)$$

et donc l'ensemble des orbites connectantes $C\{M(2), M(3)\}$ et $C\{M(1, 2), M(3)\}$ ne sont pas vides.

Remarque. Il est impossible de conclure à l'aide des homomorphismes de connexions que $C\{M(1), M(2)\}$ dans le cas $\theta = \theta^*$ et $C\{M(1), M(3)\}$ dans le cas $\theta > \theta^*$ ne sont pas vides. Ceci vient du fait que les seules orbites connectantes que nous pouvons détecter de cette manière sont celles qui subsistent aux perturbations.

CONCLUSION

En 1973, le principe de continuation est introduit par Montgomery [18]. Ce principe énonce que même si l'ensemble invariant d'un système dynamique change lorsque le système est soumis à de petites perturbations, les paires-indices associées ne changent pas. L'indice de Conley est donc stable aux petites perturbations du système. Kurland [13] et Franzosa [8] généralisent ce principe à une paire répulseur-attracteur et à une décomposition de Morse.

Remarquons que la filtration-indice choisie dans l'exemple 6.12 est valable pour chaque système dynamique associé à chaque valeur de $\theta > 0$. La tresse-indice est donc la même pour toutes ces valeurs. Ceci est un exemple de la stabilité de l'indice de Conley aux petites perturbations du système. Ainsi, l'orbite connectant $M(2)$ à $M(3)$, détectée à l'aide de la tresse-indice, demeure dans chacun des trois cas (a), (b) et (c).

Ainsi donc, comme l'explique McGehee [15], ce que nous pouvons déduire sur la structure d'un ensemble invariant à l'aide de l'indice de Conley demeure après perturbation. De plus, ce que nous ne pouvons pas déduire ne demeure pas forcément après perturbation. C'est pourquoi, dans l'exemple 6.12, nous ne pouvons pas détecter l'orbite connectant $M(1)$ à $M(2)$ pour $\theta = \theta^*$ ni celle connectant $M(1)$ à $M(3)$ pour $\theta > \theta^*$. Nous détectons seulement l'orbite connectant $M(2)$ à $M(3)$ puisque cette orbite est la seule à subsister après perturbation.

En 1984, les matrices de connection sont introduites par Franzosa [6]. Une matrice de connection, associée à une décomposition de Morse, est un simple résumé des informations incluses dans la tresse-indice. Les éléments de cette matrice sont les applications entre les groupes d'homologie associés à chaque ensemble de Morse. De la même manière que l'homomorphisme de connection détecte les orbites connectant le répulseur et l'attracteur d'une paire répulseur-attracteur, une matrice de connection détecte les orbites connectant chacun des ensembles de Morse d'une décomposition de Morse. Ainsi, la matrice de connection généralise l'homomorphisme de connection.

Une matrice de connection associée à une décomposition de Morse est donc obtenue à partir des informations incluses dans une tresse-indice. Ainsi, puisqu'une tresse-indice est stable aux petites perturbations du système, la matrice de connection le sera aussi. Par conséquent, le principe de continuation s'applique aussi aux matrices de connection. Ce principe permet d'affirmer, dans l'exemple 6.12, qu'il existe $\theta^* > 0$ tel que $C\{M(1), M(2)\}$ n'est pas vide, c'est-à-dire qu'il existe une orbite connectant $M(1)$ à $M(2)$. Le lecteur pourra trouver les détails de ce résultat dans Franzosa [8, 9].

Il est à noter que l'indice de point fixe et l'indice de Conley partagent certaines caractéristiques. L'un détecte les points fixes tandis que l'autre détecte les ensembles invariants. Si l'indice de point fixe est non nul alors l'application a au moins un point fixe. Si l'indice de Conley est non nul, l'ensemble invariant n'est pas vide: c'est la propriété de Wazewski.

Aussi, l'indice de point fixe est associé à une application définie sur un ouvert borné Ω inclu dans un espace de Banach, tel que l'application n'a pas de points

fixes sur la frontière de Ω . Pour sa part, l'indice de Conley est associé à un ensemble invariant qui est isolé, c'est-à-dire qui est inclus à l'intérieur d'un voisinage isolant.

Finalement, on sait que si une application varie continuellement en fonction d'un paramètre, l'indice de point fixe est constant: c'est la propriété d'homotopie. Parallèlement, le principe de continuation garantit la stabilité de l'indice de Conley aux petites perturbations du système dynamique auquel il est associé.

L'indice de point fixe est un des outils les plus utiles en analyse non linéaire. L'indice de Conley, ayant plusieurs similitudes avec l'indice de point fixe, pourrait être aussi utile dans l'étude des systèmes dynamiques. C'est ce que Mischaikow a démontré dans [17], par exemple.

Comme nous l'avons vu dans l'exemple 2.16, il est possible qu'un système ayant un ensemble invariant ait le même indice de Conley qu'un système n'ayant pas d'ensemble invariant. On peut se demander s'il serait possible de préciser l'indice de Conley de manière à discerner cette différence.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] V. Benci, *A new approach to the Morse-Conley theory and some applications*, Ann. Mat. Pura Appl., **158** (1991), 231–305.
- [2] C. Conley, *Isolated invariant sets and the Morse index*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math. **38**, 1980.
- [3] C. Conley et R. Easton, *Isolated invariants sets and isolating blocks*, Trans. Amer. Math. Soc., **158** (1971), 35–61.
- [4] C. Conley et R. Zehnder, *Morse type index theory for flows and periodic solutions for Hamiltonian systems*, Comm. Pure Appl. Math., **37** (1984).
- [5] E. N. Dancer et Y. H. Du, *Multiple solutions of some semilinear elliptic equations via the generalized Conley index*, J. Math. Anal. Appl., **189** (1995), 848–871.
- [6] R. Franzosa, *Index filtrations and connection matrices for partially ordered Morse decompositions*, Ph.D Thesis, University of Wisconsin-Madison, 1984.
- [7] R. Franzosa, *Index filtrations and the homology index braid for partially ordered Morse decompositions*, Trans. Amer. Math. Soc., **298** (1986), 193–213.
- [8] R. Franzosa, *The continuation theory for Morse decompositions and connection matrices*, Trans. Amer. Math. Soc., **310** (1988), 781–803.
- [9] R. Franzosa, *The connection matrix theory for Morse decompositions*, Trans. Amer. Math. Soc., **311** (1989), 561–592.
- [10] P. Hartman, *Ordinary differential equations*, John Wiley & sons, New York, 1964.
- [11] H. Kurland, *The Morse index of an isolated invariant set is a connected simple system*, J. Differential Equations, **42** (1981), 234–259.
- [12] H. Kurland, *Homotopy invariants of repeller-attractor pairs. I. The Puppe sequence of an R-A pair*, J. Differential Equations, **46** (1982), 1–31.

- [13] H. Kurland, *Homotopy invariants of repeller-attractor pairs. II. Continuation of an R-A pair*, J. Differential Equations, **49** (1983), 281–329.
- [14] H. Kurland, *On the two definitions of the Conley index*, Proc. Amer. Math. Soc., **106** (1989), 1117–1130.
- [15] R. McGehee, *Charles C. Conley, 1933-1984*, Ergodic Theory Dynamical Systems, **8** (1988), 1–7.
- [16] J. Milnor, *Morse theory*, Annals Study 51, Princeton Univ. Press, Princeton, 1963.
- [17] K. Mischaikow, *Conley index theory*, Dynamical systems, Lecture Notes in Math., 1609, Springer, Berlin, 1995, 119–207.
- [18] J. Montgomery, *Cohomology of isolated invariant sets under perturbation*, J. Differential Equations, **13** (1973), 257–299.
- [19] J. R. Munkres, *Topology, a first course*, Prentice-Hall, New York, 1975.
- [20] N. Rouché et J. Mawhin, *Équations différentielles ordinaires*, Masson, Paris, 1973.
- [21] K. P. Rybakowski, *The homotopy index and partial differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1987.
- [22] D. Salomon, *Connected simple systems and the Conley index of isolated invariant sets*, Trans. Amer. Math. Soc., **291** (1985), 1–41.
- [23] T. Ura, *On the flow outside a closed invariant set*, Contributions to Differential Equations, **3**, (1964), 249–294.
- [24] T. Ura et I. Kimura, *Sur le courant extérieur à une région invariante*, Comment. Math. Univ. St. Paul., **8** (1960), 23–29.
- [25] A. Wallace, *Algebraic Topology: Homology and cohomology*, W. A. Benjamin, New York, 1970.