Université de Montréal

Le topos des types et le topos des filtres en logique catégorique

par

François Magnan

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Philosophiæ Doctor (Ph.D.)
en Mathématiques

Orientation mathématiques fondamentales

octobre 1999

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée

Le topos des types et le topos des filtres en logique catégorique

présentée par

François Magnan

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Pierre Berthiaume
(président-rapporteur)

Gonzalo E. Reyes
(directeur de recherche)

Gert Sabidussi
(membre du jury)

Anders Kock
(examinateur externe)

Véronique Hussin
(représentante du doyen)

Thèse acceptée le :

24 janvier 2000

SOMMAIRE

Nous abordons dans la présente thèse deux constructions analogues de logique catégorique. Nous étudions tout d'abord ces constructions dans le contexte de doctrines propositionnelles.

La première que nous étudions portes dans le contexte propositionnel, le nom de : "double dual". Nous la retrouvons principalement exposée dans l'article de Makkai et Reyes **[25]**. La deuxième construction qui nous intéresse est celle du locale des filtres ; étudiée par Pitts dans **[29]**. Ces deux constructions ont, déjà au niveau propositionnel, des propriétés remarquables. Nous explorons, dans les deux premiers chapitres, le portrait global à propos de ces deux constructions propositionnelles. Nous les regardons individuellement en étalant leurs propriétés de base ; dont leur(s) propriété(s) universelle(s) ou quasi-universelle. Puis, nous les comparons et donnons des conditions pour quelles coïncident. Finalement, nous démontrons que les foncteurs de ces deux constructions réfléchissent les isomorphismes et nous donnons une application intéressante du double dual. Pour arriver à nos fins, nous utilisons la théorie des treillis, la théorie des locales, la théorie des catégories et même la théorie des monades comme outils d'exploration.

La deuxième facette de cette thèse, quant à elle, est une exploration d'un niveau de complexité supérieur. Nous y retrouvons encore une fois les deux mêmes constructions mais, cette fois-ci, dans le contexte de la logique du premier ordre. Nous généralisons les résultats importants des premiers chapitres à ce nouveau contexte. Dans le chapitre 3 nous étudions la catégorie des filtres et construisons avec cette notion le topos des filtres (en suivant **[31]**). Nous démontrons une propriété quasi-universelle du topos des filtres parmis les f-modèles (notion analogue à la notion de p-modèle) dans un topos complètement distributif. Dans le chapitre 4 nous étudions le topos des types. Nous démontrons une propriété universelle pour cette construction plus générale que celle originalement donnée dans Makkai dans **[23]**. Dans le chapitre 5 nous comparons le topos des types et le topos des filtres et généralisons ainsi des résultats du chapitre 2. Puis, nous comparons le topos des filtres au topos classifiant et donnons des conditions pour que ces deux coïncident. Finalement, nous démontrons que les foncteurs sous-jacents au topos des types et au topos des filtres réfléchissent les isomorphismes commme dans le cas propositionnel. Nous utilisons principalement les outils de la théorie des topos et de la théorie des faisceaux pour accomplir notre exploration.

Table des matières

À Geneviève,
avec amour.

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier du plus profond de mon cœur mon directeur de recherche Gonzalo E. Reyes qui a coordonné mon apprentissage ; canalisé mes efforts. Il a su me poser les bonnes questions aux bons moments. Gonzalo, je vous remercie sincèrement de m'avoir donné accès à toute cette beauté dans les mathématiques. Tout ce travail aurait été impossible sans vous. Je sais que bien peu d'étudiants peuvent se compter aussi choyés que moi. Vous m'avez montré à sauter dans la cage aux lions au lieu de simplement me balader dans le zoo. Vous serez toujours un exemple pour me diriger dans ma vie.

Merci à Marie La Palme Reyes pour toutes les généreuses attentions. Merci à Houman qui m'a montré une autre facette de la théorie et avec qui j'ai eu quelques discussions déterminantes au début de ma formation.

Un merci profond à ma famille, qui m'ont supporté dans mes efforts toutes ces années. Ils m'ont encouragé dans toutes mes décisions et m'ont donné accès à ces connaissances. Jacques, Réjane et Marie-Josée merci !

Je tiens aussi à remercier particulièrement certains professeurs qui m'ont permis d'atteindre le niveau nécessaire pour créer cet ouvrage. Merci à Diane Paquin du CEGEP Édouard-Montpetit qui m'a donné confiance en moi et m'a donné une base mathématique très solide pour affronter le monde universitaire. Merci amical à André Giroux qui m'a fait suer dans ma première année de bac ; assez pour que j'aie les reins assez solides pour la suite. Il m'a suivi tout au long de mes études comme un compagnon ; merci André. Merci à Hidemitsu Sayeki qui m'a donné une perspective unique et profonde sur les mathématiques avec ses cours merveilleusement construits. Merci à Michael Makkai pour m'avoir enseigné des cours d'une pureté inégalable et d'un niveau supérieur. Ses commentaires m'ont toujours encouragé à poursuivre dans ma recherche sur ses travaux. Je tiens aussi à remercier Yvon Gauthier pour ses encouragements et ses séminaires endiablés.

Je tiens également à remercier mes collaborateurs dans ce travail. Premièrement, je tiens tout particulièrement à souligner l'aide que Bill Boshuck m'a offerte dans le cadre de tous ces séminaires auquels nous avons participés ensembles. Je veux aussi remercier sincèrement Carsten Butz pour son aide très appréciée à divers endroits dans cette thèse. Je voudrais également souligner l'aide de Richard Squire qui m'a supervisé habilement et m'a bâti une banque d'articles fondamentaux de théorie des topos. Ses encouragements ont étés appréciés de tout cœur. Je veux également remercier Sylvio Ghilardi, Richard Wood et Anders Kock. Ils m'ont communiqué de façon admirable leurs résultats, que j'ai intégrés à la présente thèse.

Finalement, je tiens à remercier le CRSNG pour m'avoir supporté tout au long de mes études graduées et durant les étés de mon baccalauréat. Je tiens aussi à remercier le gouvernement du Canada pour m'avoir accordé une bourse durant mes études de premier cycle. Je veux également remercier l'Université de Montréal, plus particulièrement la Faculté des études supérieures, pour m'avoir accordé une bourse m'aidant à terminer mes études doctorales. Je remercie également Gonzalo E. Reyes pour m'avoir accordé un support financier puisé de ses propres subventions.

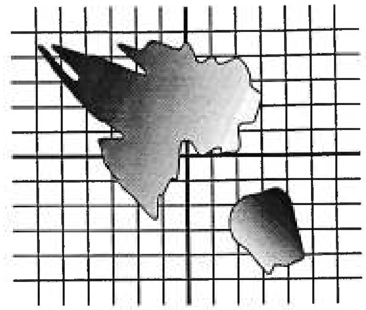
AVANT-PROPOS

La logique catégorique : une introduction

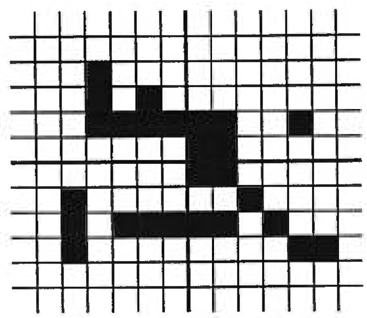
Derrière la toile que tisse les résultats de la présente thèse ; nous retrouvons une structure organisatrice à laquelle la toile vient s'arrimer : c'est la logique catégorique. Cette théorie origine d'idées de Lawvere, qui remarqua le premier que les opérateurs logiques de base peuvent être vus comme étant adjoints à des foncteurs connus. La notion de foncteur adjoint est en effet centrale en logique catégorique.

La définition de foncteur adjoint semble souvent ardue pour le (la) novice en la matière. Le corps de cette thèse assume une familiarité implacable avec cette notion. Le concept derrière cette définition peut pourtant être illustré par des exemples simples et accessibles. Pour le soin de cet avant-propos, je vais ainsi essayer de maintenir la discussion à un niveau plutôt informel ; en essayant de créer des images mentales du concept chez le lecteur. La précision de cette image dépendra simplement de l'effort que le lecteur investira dans sa compréhension de l'exposé. De cette façon, je vais donner à tous le goût de lire un peu plus loin et d'en tirer une petite méditation intellectuelle personnelle.

Essayons tout d'abord de comprendre la notion de foncteur adjoint dans un contexte simple. Considérons une feuille de papier qui est couverte d'une grille. Nous allons représenter graphiquement des portions de la feuille en les coloriant comme le montre la figure suivante :



Nous notons par $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ l'ensemble de toutes les parties possibles de la feuille. Considérons maintenant une sous-classe de parties bien particulière : les parties formées de blocs pleins dans le quadrillé. La figure suivante montre un exemple d'une telle partie :



Nous noterons par $\mathcal{P}_{\blacksquare}(\mathbb{R}^2)$ les parties ainsi formées de blocs et nous les nommerons les *parties granulaires*. Les parties granulaires se plongent dans l'ensemble de toutes les parties de notre feuille $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$. Nous avons donc une fonction inclusion :

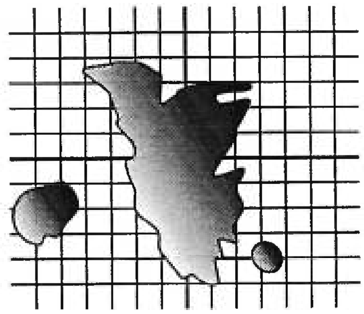
$$\mathcal{P}_{\blacksquare}(\mathbb{R}^2) \xhookrightarrow{\text{inclusion}} \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$$

qui prend une partie granulaire et la regarde simplement comme une partie quelconque ; en faisant abstraction du fait qu'elle est granulaire. La problématique qui engendre la notion de foncteur adjoint se pose très simplement dans le contexte que nous venons de déployer.

En effet, une question naturelle qu'on peut se demander est la suivante. Si on se donne une partie quelconque de la feuille, est-ce qu'on peut lui associer une partie granulaire de façon évidente ? Autrement dit, est-ce que l'inclusion décrite ci-dessus possède une espèce de pseudo-inverse ; qui prend une partie quelconque et lui associe une partie granulaire :

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \xrightarrow{\ ?\ } \mathcal{P}_{\blacksquare}(\mathbb{R}^2)$$

Donnons-nous par exemple la partie $A \subseteq \mathbb{R}^2$ suivante :



Comment pouvons-nous lui associer une partie granulaire ? Le lecteur remarquera peut-être avec surprise qu'un périphérique bien connu des ordinateurs modernes donne une solution à ce problème. En effet, les numériseurs d'images sont des appareils qui prennent en entrée une image sur une feuille de papier et l'approximent avec des pixels rectangulaires qui couvrent la feuille en un quadrillage très fin. Sans entrer dans les détails du procédé de numérisation d'image, nous voyons facilement qu'il y a deux façons canoniques d'associer à une partie quelconque de notre feuille une partie granulaire. Nous pouvons associer à la partie la partie A la partie granulaire formée des granules suivants :

L➠ On prend tous les granules couverts par A (qui contiennent au moins un point de A). Mathématiquement, on écrit cela comme :

$$\mathbf{L}(A) \equiv \bigcap \{\mathrm{g} \in \mathcal{P}_{\blacksquare}(\mathbb{R}^2) \mid A \subseteq \mathrm{g}\}$$

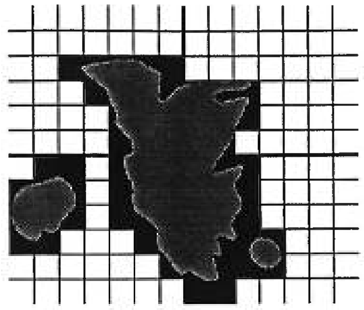
C'est la plus petite partie granulaire qui contient A.

R➠ On prend tous les granules qui sont complètement couverts par A. Mathématiquement, on écrit cela comme :

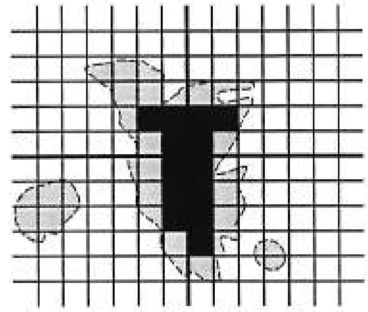
$$\mathbf{R}(A) \equiv \bigcup \{\mathrm{g} \in \mathcal{P}_{\blacksquare}(\mathbb{R}^2) \mid \mathrm{g} \subseteq A\}$$

C'est la plus grande partie granulaire contenue dans A.

La figure suivante illustre ces deux méthodes de granulation pour le A que nous avons dessiné plus haut (Je laisse d'ailleurs ce A en fantôme pour qu'on voit bien le processus) :



L



R

Ces deux fonctions $\mathbf{L}$ et $\mathbf{R}$ sont deux solutions canoniques au problème de trouver un inverse à l'inclusion. Nous avons donc obtenu deux pseudo-inverses pour l'inclusion :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}_{\blacksquare}(\mathbb{R}^2) \arrow[r, hook, "\text{inclusion}"] & \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \arrow[l, bend right, "\mathbf{L}"'] \arrow[l, bend left, "\mathbf{R}"] \end{tikzcd}$$

Nous appelons $\mathbf{L}$ l'adjoint à gauche. Il satisfait la règle suivante : A est contenu dans une partie granulaire $\mathbf{g} \in \mathcal{P}_{\blacksquare}(\mathbb{R}^2)$ si et seulement si la partie granulaire $\mathbf{L}(A)$ est contenue dans $\mathbf{g}$. La fonction $\mathbf{R}$, l'adjoint à droite, satisfait une règle symétrique à la précédente : une partie granulaire $\mathbf{g}$ est contenue dans A si et seulement si elle est contenue dans $\mathbf{R}(A)$. Nous utiliserons la notation suivante pour décrire ces propriétés (ici nous écrivons i pour l'inclusion) :

$$\frac{A \subseteq i(\mathbf{g})}{\mathbf{L}(A) \subseteq \mathbf{g}} \qquad\qquad \frac{i(\mathbf{g}) \subseteq A}{\mathbf{g} \subseteq \mathbf{R}(A)}$$

C'est justement dans cette notation que nous voyons clairement pourquoi $\mathbf{L}$ est l'adjoint "à gauche" et $\mathbf{R}$ celui "à droite". Pour le lecteur, le but de cet exemple est de saisir la notion de pseudo-inverse à gauche et à droite à travers ces dessins et de s'en former une image mentale. Imaginez diverses régions A et calculez les parties granulées associées $\mathbf{L}(A)$ et $\mathbf{R}(A)$ dans chaque cas. Une fois que vous vous sentez à l'aise avec ce processus, continuez votre lecture.

Voyons maintenant comment Lawvere a appliqué le concept des foncteurs adjoints à la logique. Dans notre exemple précédent, nous avons considéré les adjoints de la fonction inclusion. Cette fonction agit entre deux ensembles sur lesquels il y a une relation d'ordre : l'inclusion des parties. Nous appelons ce genre d'ensembles : ensembles partiellements ordonnés. Pour étudier la logique, au lieu de considérer l'ensemble des parties d'une feuille, nous allons considérer l'ensemble des propositions dans un langage donné ; une théorie. Pour rester à un niveau informel, nous allons considérer par exemple la théorie des propositions en zoologie. Voici quelques exemples de propositions dans ce langage :

$$\varphi = \textit{"Un pinson est un oiseau."}$$
$$\psi = \textit{"Un chien est un mammifère."}$$

La relation d'ordre qui nous intéresse entre les formules est la relation de déductibilité. Nous considérerons qu'une proposition φ est "plus petite ou égale" à une proposition ψ si nous pouvons dans la théorie en question déduire la proposition ψ comme conséquence de la proposition φ dans la zoologie. Dans ce cas, nous noterons ce fait comme suit : $\varphi \vdash \psi$. Par exemple si on pose

$$\varphi = \textit{"Fido est un chien"}$$
$$\psi = \textit{"Fido est un mammifère."}$$

On a bien $\varphi \vdash \psi$ car si Fido est un chien, alors on peut déduire par la zoologie que Fido est un mammifère donc, ψ est bien une conséquence de φ i.e. $\varphi \vdash \psi$. Voyons maintenant comment nous pouvons construire tous les opérateurs logiques de base avec la notion d'adjoints.

Donnons nous une théorie quelconque pour laquelle on désignera par L l'ensemble partiellement ordonné des formules de la théorie. Imaginons d'autre part une théorie spéciale : *la théorie qui ne parle de rien* . Cette théorie n'a qu'une seule formule : la formule qui ne dit rien ε. Notons par $\mathbf{1} = \{\varepsilon\}$ l'ensemble partiellement ordonné de(s) formule(s) de cette théorie. Nous avons clairement une (unique) fonction

$$L \xrightarrow{!} \mathbf{1}$$

Cette fonction envoie simplement toutes les formules de L sur la formule qui ne dit rien (qui est l'unique formule de $\mathbf{1}$). On peut voir cette fonction comme une traduction d'une théorie dans une autre théorie. Cette traduction est la trivialisation de la théorie L. En effet, dans la théorie $\mathbf{1}$ la logique est triviale : le faux et le vrai coïncident i.e. $\mathbf{1}$ est une théorie contradictoire. Qu'on puisse interpréter toute théorie dans une théorie contradictoire ne cause aucun problème épistémologique car dans ces dernières tout est vrai et tout est faux ! Mais pourquoi est-ce que je vous parle de cette trivialité ? C'est que de cette trivialité émergent les deux pôles fondamentaux de la logique : $\top$ ="le vrai" et $\bot$ ="le faux". En effet, accepter ces formules spéciales dans la théorie équivaut à accepter l'existence d'adjoints à gauche et à droite pour la fonction ! que nous avons décrite ci-dessus. Nous avons que $\bot_L$ est adjoint à gauche de ! et $\top_L$ est adjoint à droite comme le montre le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "!" description] & \mathbf{1} \arrow[l, bend right, swap, "\bot_L"] \arrow[l, bend left, "\top_L"] \end{tikzcd}$$

En effet, ces adjonctions veulent dire la même chose que les équivalences logiques suivantes qui résument les propriétés déductives du vrai et du faux :

$$\frac{\bot_L(\varepsilon) \vdash_L \varphi}{\varepsilon \vdash_{\mathbf{1}} !(\varphi) = \varepsilon} \qquad\qquad \frac{\varphi \vdash_L \top_L(\varepsilon)}{\varepsilon = !(\varphi) \vdash_{\mathbf{1}} \varepsilon}$$

On voit facilement que les deux lignes du bas sont des tautologies donc les deux lignes du haut sont toujours vraies quelle que soit la proposition φ que nous considérons dans la théorie L. Celle en haut à gauche dit que la formule $\bot_L(\varepsilon)$ a comme conséquence logique toutes les formules de L. Nous reconnaissons bien la propriété fondamentale du faux en logique classique qui se trouve ici à jaillir de l'existence d'un adjoint à gauche pour l'interprétation triviale de L dans la théorie triviale $\mathbf{1}$. Nous avons clairement le même phénomène qui se produit avec $\top_L(\varepsilon)$ qui est une conséquence logique de toutes les formules $\varphi \in L$. C'est bien la propriété du "vrai" en logique classique. Voilà donc devant nous l'idée fondamentale de la logique catégorique : poser comme essence du "vrai" et du "faux" l'existence respective de ces adjoints pour $L \xrightarrow{!} \mathbf{1}$. La logique catégorique vient donc donner des réponses éclairantes à des questions fondamentales que la logique mathématique classique avait évacuées : Qu'est-ce que le *vrai* et le *faux* ?

Avec ce genre de considérations, nous pouvons clairement construire les deux opérateurs les plus élémentaires de la logique propositionelle classique : la disjonction '$\vee$' et la conjonction '$\wedge$'. La disjonction '$\vee$' est le *ou* logique courant comme dans

"Toto est menteur." ou "Il pleut dehors."

La conjonction '$\wedge$' est le *et* logique courant. Comment pouvons-nous voir ces opérateurs comme des adjoints à une fonction évidente ? Il faut clairement considérer une théorie produit $L \times L$ dont les propositions sont des paires de propositions de L : (φ, ψ), où $\varphi, \psi \in L$. La relation de conséquence logique sera celle qui est induite par celle dans L sur chaque composante (c'est l'ordre ponctuel sur $L \times L$). Il y a un morphisme canonique bien connu qui se présente inévitablement : c'est le morphisme diagonal

$$L \xrightarrow{\Delta_L} L \times L$$

qui envoie simplement une formule $\varphi \in L$ sur la paire de formules (φ, φ). Il est encore une fois facile de voir que Δ_L possède un adjoint à gauche (resp. à droite) si et seulement si L possède des disjonctions (resp. des conjontions) de formules binaires. Nous exprimons ces résultats par le diagramme suivant et les règles d'adjonctions correspondantes :

$$
\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\Delta_L"] & L \times L \arrow[l, bend right, "\vee_L"'] \arrow[l, bend left, "\wedge_L"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{array}{c}
\varphi_1 \vee \varphi_2 \vdash_L \psi \\ \hline
\vee_L(\varphi_1, \varphi_2) \vdash_L \psi \\ \hline
(\varphi_1, \varphi_2) \vdash_{L \times L} \Delta_L(\psi) \\ \hline
(\varphi_1, \varphi_2) \vdash_{L \times L} (\psi, \psi) \\ \hline
\varphi_1 \vdash_L \psi \text{ et } \varphi_2 \vdash_L \psi
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\psi \vdash_L \varphi_1 \wedge \varphi_2 \\ \hline
\psi \vdash_L \wedge_L(\varphi_1, \varphi_2) \\ \hline
\Delta_L(\psi) \vdash_{L \times L} (\varphi_1, \varphi_2) \\ \hline
(\psi, \psi) \vdash_{L \times L} (\varphi_1, \varphi_2) \\ \hline
\psi \vdash \varphi_1 \text{ et } \psi \vdash \varphi_2
\end{array}
$$

On voit encore ici clairement que ces règles d'adjonction caractérisent entièrement les notions logiques correspondantes de disjonction et de conjonction de propositions.

Nous voyons que la logique catégorique nous permet de donner un sens très précis à des concepts aussi généraux que la notion disjonction et de conjonction de propositions. Encore mieux, la logique catégorique nous présente ces concepts de base comme des solutions à des problèmes universels naturels. Ceci constitue une différence marquante avec la logique classique dans cet aspect particulier. En effet, en logique classique, ces notions de "vrai", "faux", "conjonction" et "disjonction" sont introduites de façon *ad hoc* comme faisant parties des connecteurs de base intéressants à étudier. La logique catégorique vient donc combler agilement cette lacune conceptuelle. La logique catégorique nous force effectivement à expliquer ce que nous entendons par ces concepts en nous obligeant à suivre ses règles de construction strictes.

À mesure que nous découvrons l'existence de nouveaux adjoints pour une théorie L nous pouvons utiliser ces nouvelles fonctions pour définir d'autres adjoints et ainsi créer une théorie encore plus riche en complexité. Cette hiérarchie est celle des *doctrines* logiques (voir [17]). Dans la présente thèse nous considérons comme doctrine la plus élémentaire la doctrine propositionnelle que nous venons de décrire plus haut : la doctrine propositionnelle cohérente, que nous noterons brièvement par CPL (pour *Coherent propositionnal logic*). C'est tout simplement l'ensemble des théories propositionnelles exprimables dans le langage ayant les connecteurs logiques suivants :

$$\perp, \top, \vee \text{ et } \wedge$$

avec les lois de déduction évidentes (dont la distributivité du $\wedge$ sur le $\vee$). C'est le fragment cohérent de la logique classique. Dans la présente thèse, ces théories seront représentées par des treillis distributifs bornés. Au niveau des doctrines du premier ordre, l'équivalent sera les catégories cohérentes.

Sur cette dernière doctrine, nous pouvons bâtir une doctrine ayant un connecteur logique '$\to$' qui est classiquement un opérateur très étudié. En effet, pour une théorie L donnée, on considère pour chaque $\varphi \in L$ l'interprétation Δ_L :

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "(\cdot)\wedge\varphi"] & L \arrow[l, bend left, "\varphi\to(\cdot)"] \end{tikzcd}$$

pour laquelle on note l'adjoint à droite $\varphi \to (\cdot)$ lorsqu'il existe. Cet adjoint doit satisfaire la règle suivante :

$$\frac{\vartheta \vdash_L \varphi \to \psi}{\vartheta \wedge \varphi \vdash_L \psi}$$

qu'on peut voir comme une forme du théorème de déduction de Herbrand. Sans entrer dans les détails, ce connecteur est tout simplement l'implication intuitionniste. Ainsi, la première instance d'un connecteur de type "implication" nous donne le connecteur intuitionniste et non le connecteur classique. Ceci ne limite pourtant pas la logique catégorique aux logiques constructives. Nous rencontrerons ces doctrines en tant qu'algèbres de Heyting dans cette thèse. Au niveau du premier ordre ces doctrines prendront la forme de catégories de Heyting.

Pour terminer, nous introduisons une dernière doctrine qui est duale à la dernière que nous avons introduite. Au lieu de demander l'existence d'un adjoint à droite pour $(\cdot) \wedge \varphi$; nous demanderons l'existence d'un ajoint à gauche pour $\varphi \vee (\cdot)$ comme on le note dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\varphi\vee(\cdot)"'] & L \arrow[l, bend right, "(\cdot)\backslash\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Cet adjoint à gauche donne un connecteur qui satisfait la règle :

$$\frac{\psi \setminus \varphi \vdash_L \vartheta}{\psi \vdash_L \varphi \vee \vartheta}$$

Nous recontrerons ces doctrines propositionnelles sous l'aspect d'algèbres de co-Heyting dans la présente thèse.

Où en apprendre plus

Que ce soit pour le lecteur dont la curiosité a été piquée dans cette première section et qui désire en savoir plus au sujet de ces idées ou, pour celui qui désire étudier la thèse dans ses moindres détails. La présente section a été créée en guise de guide vers la littérature sur le sujet. Elle complète efficacement la tâche de cet avant-propos. En effet, la première section nous a servi à situer la problématique de la thèse dans le domaine de recherche qui l'englobe. La présente section nous servira à son tour pour décrire les préalables à une compréhension détaillée de ce travail.

La principale difficulté qui se présente pour un(e) étudiant(e) qui désire se plonger dans le domaine de la logique catégorique, est que ce domaine requiert d'avance une bonne perception globale des mathématiques. Ceci peut difficilement se faire hors du cadre très serré d'un baccalauréat en mathématiques. En effet, les impératifs du sujet demandent une certaine maturité mathématique. Malgré cela, et c'est là la beauté des mathématiques, tout penseur ayant un intérêt quelconque envers ce domaine peut se mettre à travailler et atteindre, dans un temps relatif à chacun, la bulle conceptuelle dans laquelle nous voulons voyager dans la présente thèse. L'étape 1 est déjà annoncée : faire l'équivalent d'un baccalauréat en mathématiques pour se familiariser avec la pensée mathématique ; plus particulièrement avec les concepts de preuve et de système axiomatique. À partir de ce point, un chemin minimal dans la littérature se dessine.

Pour combler ses lacunes en théorie des ensembles, langage à la base même de (presque) tout le discours mathématique moderne, je conseille au lecteur de lire l'excellent condensé **[11]**. Ensuite, pour appendre la base de la logique algébrique, je dirige le lecteur vers **[34]** et **[35]**. Pour comprendre ces derniers, le lecteur devra sûrement se familiariser avec la théorie des treillis. Je lui conseille l'approche moderne développée dans **[5]** pour les informaticiens ainsi que le plus classique : **[10]**.

Ensuite, le gros du travail est de s'introduire à la pensée catégorique. Il y a heureusement plusieurs sources de disponibles pour diriger le lecteur dans cet apprentissage. Je me contente de mentionner **[22]** et **[9]** dont le premier est destiné à un public non formé de mathématiciens. Ces deux livres introduisent les techniques de théorie des catégories qui seront omniprésentes dans cette thèse. La barre doit être montée un peu plus haute pour une compréhension complète.

Pour passer à l'autre cran, il y a heureusement l'excellent [19] qui introduit le lecteur à la notion de topos de pré-faisceaux ; notion centrale dans notre étude. Ce dernier livre unique prépare admirablement à la lecture de [21] qui présente la théorie des topos de faisceaux sur des sites ainsi que ses applications à la logique catégorique. Ces deux volumes sont en effet, venus récemment combler un réel manque dans la pédagogie du domaine qui nous intéresse.

Avec cette base assez solide, le lecteur peut certainement suivre sans difficulté la présente thèse ainsi que la littérature l'entourant directement. Pour terminer cette section, je mentionnerai simplement les sources documentaires sur lesquelles se fonde la problématique exacte de la thèse. Il y a premièrement "la bible" de la logique catégorique : [27]. Ensuite, il y a l'article de Makkai et Reyes [25] qui développe toutes les idées entourant la construction du double dual et sa version dans la logique du premier ordre. Ce dernier a comme préalable inévitable l'article de Makkai [23] qui donne pour la première fois la construction du topos des types ; construction centrale dans la thèse. Finalement, il y a les aricles de Pitts [29], [31], [30] et [28] qui introduisent l'autre grande construction qui nous tiendra en haleine tout au long de notre étude ainsi que d'autres résultats très intéressants de logique catégorique.

Chapitre 1

LE DOUBLE DUAL ET LE LOCALE DES FILTRES POUR LES TREILLIS DISTRIBUTIFS

1.1. INTRODUCTION

Le présent chapitre a pour but d'introduire, dans le contexte des treillis distributifs, la construction du double dual de Makkai/Reyes (voir [25]) et celle du locale des filtres de Pitts (voir [29]). Nous y étudions les versions propositionnelles des constructions qui nous suivront tout au long de la thèse. Le lecteur pourra ainsi se familiariser avec ces concepts à un niveau plus élémentaire avant de passer au niveau des topos. Nous allons donc d'abord étudier la construction du double dual et en décrire les principales propriétés. Ensuite, nous regarderons la construction de Pitts en essayant d'exposer ses propriétés analogues à celles du double dual.

Beaucoup de résultats du présent chapitre ont étés démontrés ou du moins énoncés dans [25] et [29]. J'ai pourtant décidé de regrouper et démontrer ces résultats dans le présent chapitre pour rendre l'exposé plus complet. Ceci a l'avantage de donner une base solide pour les développements des chapitres ultérieurs et de rendre le tout plus accessible aux lecteurs qui ne sont pas assez familiers avec le domaine pour plonger directement dans les articles phares ; plus particulièrement pour [25] qui est un article monumental très dense. Le désagrément causé par l'alongement de la thèse se verra rapidement compensé par ces qualités. En effet, la modernité du sujet nous impose une restructuration continuelle de ses éléments qui se doit de converger vers une présentation optimale du sujet. Franchissons ensembles, dès maintenant, les premières étapes de ces constructions.

1.2. La construction du double dual : éléments de base

Considérons, étape par étape, la construction du double dual de Makkai et Reyes telle qu'on la retrouve dans **[25]**. La structure algébrique la plus élémentaire que nous allons adopter comme témoin rend compte de la logique cohérente dans sa version propositionnelle. C'est la notion de treillis distributif borné. Nous notons par $\mathbb{D}\mathbb{I}$ la catégorie des treillis distributifs bornés. Ses morphismes sont des morphismes de treillis préservant le plus petit et le plus grand élément. De façon concise, on dit simplement que les morphismes doivent préserver les supréma et infima finis. Comme l'ensemble vide fait partie des sous-ensembles finis d'un ensemble donné, on a bien préservation des bornes.

Une autre catégorie qui nous sera indipensable est la catégorie des ensembles partiellement ordonnés que nous notrerons par $\mathbb{P}\mathbb{O}$. Les morphismes de cette catégorie sont des fonctions préservant l'ordre.

L'origine de la construction du double dual émerge d'une dualité entre ces deux catégories. L'objet dualisant est 2, qui existe en tant qu'ensemble partiellement ordonné (c'est l'ensemble partiellement ordonné à deux éléments $\{0, 1\}$ avec la relation d'ordre naturelle : $0 \leq 1$) et auquel on peut adjoindre la structure d'un treillis distributif de façon évidente. C'est un objet schizophrène qui vit dans nos deux catégories et sa "maladie" lui permet d'induire la dualité cherchée.

Pour un treillis distributif borné $D \in |\mathbb{D}\mathbb{I}|$ nous pouvons définir une structure naturelle d'ensemble partiellement ordonné sur $\mathbf{Hom}_{\mathbb{D}\mathbb{I}}(D, 2)$ en prenant tout simplement l'ordre défini ponctuellement i.e. si $p, q \in \mathbf{Hom}_{\mathbb{D}\mathbb{I}}(D, 2)$, on pose

$$p \leq q \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall d \in D \;\; p(d) \leq_2 q(D)$$

et clairement, avec cette relation, $\mathbf{Hom}_{\mathbb{D}\mathbb{I}}(D, 2)$ devient un ensemble patiellement ordonné. De plus, si on a un morphisme de treillis bornés $D \xrightarrow{\alpha} D'$, alors on obtient par composition avec α un morphisme d'ensembles partiellement ordonnés

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Hom}_{\mathbb{D}\mathbb{I}}(D', 2) & \xrightarrow{\mathbf{Hom}_{\mathbb{D}\mathbb{I}}(\alpha, 2)} & \mathbf{Hom}_{\mathbb{D}\mathbb{I}}(D, 2) \\ p & \longmapsto & p \circ \alpha \end{array}$$

Il est aisé de montrer que $\mathbf{Hom}_{\mathbb{Dl}}(-,2)$ est avec ces définitions un foncteur contravariant de $\mathbb{Dl}$ dans $\mathbb{Po}$ i.e. on a un foncteur covariant :

$$\mathbf{Hom}_{\mathbb{Dl}}(-,2) : \mathbb{Dl} \longrightarrow \mathbb{Po}^{op}$$

étant

En procédant de la même façon, donné un ensemble partiellement ordonné P, l'ensemble $\mathbf{Hom}_{\mathbb{Po}}(P,2)$ peut être muni d'une structure de treillis distributif borné en utilisant celle de 2 ponctuellement. De plus, $\mathbf{Hom}_{\mathbb{Po}}(-,2)$ peut agir par composition sur les morphismes d'ensembles partiellement ordonnés de façon à nous donner un foncteur (covariant) :

$$\mathbf{Hom}_{\mathbb{Po}}(-,2) : \mathbb{Po}^{op} \longrightarrow \mathbb{Dl}$$

La proposition suivante énonce enfin la dualité annoncée.

PROPOSITION 1.2.1 **(Dualité entre $\mathbb{Dl}$ et $\mathbb{Po}$)** *Nous avons la dualité suivante entre la catégorie des treillis distributifs et la catégorie des ensembles partiellement ordonnés :*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Po}^{op} \arrow[r, bend right, "\mathbf{Hom}_{\mathbb{Po}}(-,2)"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbb{Dl} \arrow[l, bend right, "\mathbf{Hom}_{\mathbb{Dl}}(-,2)"'] \end{tikzcd}$$

PREUVE: Un résultat beaucoup plus général aurait pû être formulé et le présent résultat n'en serait qu'un cas particulier. J'ai toutefois crû bon de donner une preuve explicite pour ce cas, car il est le point de départ de tout ce qui suivra dans cette thèse. Commençons par décrire la correspondance des morphismes par l'adjonction. Supposons que $D \in |\mathbb{Dl}|$ et $P \in |\mathbb{Po}|$. On définit premièrement la correspondance suivante :

$$\begin{array}{c} \mathbf{Hom}_{\mathbb{Dl}}(D,2) \xrightarrow{f} P \in \mathbb{Po}^{op} \\ \hline P \xrightarrow{f} \mathbf{Hom}_{\mathbb{Dl}}(D,2) \in \mathbb{Po} \\ \hline D \xrightarrow{\bar{f}} \mathbf{Hom}_{\mathbb{Po}}(P,2) \in \mathbb{Dl} \end{array} \downarrow$$

en posant pour $d \in D$

$$\bar{f}(d)(\cdot) \equiv f(\cdot)(d) : P \longrightarrow 2$$

Il est clair que $\bar{f}(d)$ est un morphisme d'ensembles partiellement ordonnés, car si $p, p' \in P$ et $p \leq_P p'$, on a $f(p) \leq_{\mathbf{Hom}_{\mathbb{Dl}}(D,2)} f(p')$, d'où en particulier on a $f(p)(d) \leq_2 f(p')(d)$ i.e. $\bar{f}(d)(p) \leq_2 \bar{f}(d)(p')$.

De la même façon, nous définissons l'autre correspondance qui entre en jeu :

$$\begin{array}{c} D \xrightarrow{\alpha} \mathbf{Hom}_{\mathbb{P}\mathbb{o}}(P,2) \in \mathbb{D}\mathbb{l} \\ \hline P \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \mathbf{Hom}_{\mathbb{D}\mathbb{l}}(D,2) \in \mathbb{P}\mathbb{o} \\ \hline \mathbf{Hom}_{\mathbb{D}\mathbb{l}}(D,2) \xrightarrow{\tilde{\alpha}} P \in \mathbb{P}\mathbb{o}^{\mathrm{op}} \end{array} \downarrow$$

en posant cette fois pour $p \in P$:

$$\tilde{\alpha}(p)(\cdot) \equiv \alpha(\cdot)(p) : D \longrightarrow 2$$

Il est facile de voir que $\tilde{\alpha}(p)$ ainsi défini est un morphisme de treillis bornés. Montrons par exemple que $\tilde{\alpha}(p)$ préserve les infima binaires :

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(p)(d_1 \wedge_D d_2) &= \alpha(d_1 \wedge_D d_2)(p) \\ &= \left[\alpha(d_1) \wedge_{\mathbf{Hom}_{\mathbb{P}\mathbb{o}}(P,2)} \alpha(d_2)\right](p) \\ &= \alpha(d_1)(p) \wedge_2 \alpha(d_2)(p) \\ &= \tilde{\alpha}(p)(d_1) \wedge_2 \tilde{\alpha}(p)(d_2) \end{aligned}$$

On démontre aussi facilement que $\tilde{\alpha}(p)$ préserve les supréma binaires et les bornes.

Montrons maintenant la naturalité à droite. On suppose que $D \in |\mathbb{D}\mathbb{l}|$, $\mathbf{Hom}_{\mathbb{D}\mathbb{l}}(D,2) \xrightarrow{f} P \in \mathbb{P}\mathbb{o}^{\mathrm{op}}$ et $P \xrightarrow{g} Q \in \mathbb{P}\mathbb{o}^{\mathrm{op}}$ de telle sorte que

$$
\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dd, "g"] \\
\mathbf{Hom}_{\mathbb{Dl}}(D,2) \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] \arrow[r, phantom, "\circ"] & \\
 & Q
\end{tikzcd}
\quad \in \mathbb{Po}^{\mathrm{op}}
$$

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[dr, "f"] & \\
\arrow[r, phantom, "\circ"] & \mathbf{Hom}_{\mathbb{Dl}}(D,2) \\
Q \arrow[uu, "g"] \arrow[ur, "f\circ g"'] &
\end{tikzcd}
\quad \in \mathbb{Po}
$$

$$\downarrow$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Hom}_{\mathbb{Po}}(P,2) \arrow[dd, "\mathbf{Hom}_{\mathbb{Po}}(g,2)"] \\
D \arrow[ur, "\bar{f}"] \arrow[dr, "\overline{f\circ g}"'] \arrow[r, phantom, "?"] & \\
 & \mathbf{Hom}_{\mathbb{Po}}(Q,2)
\end{tikzcd}
\quad \in \mathbb{Dl}
$$

Nous devons donc démontrer la commutativité du dernier triangle. Soit $d \in D$, on a

$$
\begin{aligned}
\left[\mathbf{Hom}_{\mathbb{Po}}(g,2) \circ \bar{f}\right](d) &= \mathbf{Hom}_{\mathbb{Po}}(g,2)\left(\bar{f}(d)\right) \\
&= \bar{f}(d) \circ g \\
&\stackrel{?}{=} \overline{f \circ g}(d)
\end{aligned}
$$

et, pour justifier cette dernière égalité entre deux morphismes d'ensembles partiellement ordonnés de type $Q \longrightarrow 2$, on prend $q \in Q$ quelconque et on calcule :

$$
\begin{aligned}
\left[\bar{f}(d) \circ g\right](q) &= \bar{f}(d)\,(g(q)) \\
&= [f\,(g(q))]\,(d) \\
&= [(f \circ g)(q)]\,(d) \\
&= \left[\overline{f \circ g}(d)\right](q)
\end{aligned}
$$

La naturalité à gauche se démontre de façon similaire. Maintenant que la construction est explicite, je laisse au lecteur le soin de vérifier les détails manquants. ∎

Essayons dès maintenant d'interpréter l'action de ces deux foncteurs en des termes plus familiers. Rappelons nous quelques définitions de base de la théorie des treillis qui jouent un rôle fondamental dans le cas qui se présente devant nous.

DÉFINITION 1.2.1 **(Filtre, filtre propre, filtre premier)** *Soit L un treillis*

- *Un filtre sur L est un sous-ensemble non-vide $f \subseteq L$ tel que $\forall x, y \in L$ on a*
$$\frac{x \wedge y \in f}{x \in f \text{ et } y \in f}$$
Un filtre est dit propre si $f \subsetneq L$.
- *Un filtre propre $p \subseteq L$ est dit premier s'il satisfait en plus :*
$$\frac{x \vee y \in p}{x \in f \text{ ou } y \in f}$$
Nous noterons par $\mathcal{P}_{\mathrm{r}}(L)$ l'ensemble des filtres premiers sur L partiellement ordonné par l'inclusion. Nous allons également utiliser la notation très concise : L^* pour cet ensemble partiellement ordonné.

La proposition suivante identifie la construction $(-)^*$ avec le foncteur
$$\mathbf{Hom}_{\mathbb{D}\mathbb{l}}(-, 2)$$
que nous avons défini précédemment.

PROPOSITION 1.2.2 **(Représentation pour $\mathbf{Hom}_{\mathbb{D}\mathbb{l}}(-, 2)$)** *L'application $(-)^*$ est un foncteur de $\mathbb{D}\mathbb{l}$ dans $\mathbb{P}\mathbb{o}^{\mathrm{op}}$ naturellement isomorphe à $\mathbf{Hom}_{\mathbb{D}\mathbb{l}}(-, 2)$.*

PREUVE: Je me contenterai de donner l'isomorphisme d'ensembles partiellement ordonnés en question. Donné un morphisme de treillis $D \xrightarrow{\alpha} 2$, nous pouvons lui associer le sous-ensemble $p \equiv \alpha^{-1}(1) \subseteq D$
$$p \equiv \{d \in D \mid \alpha(d) = 1\}$$
Il est facile de vérifier que p est un filtre premier sur D. Inversement, donné un filtre premier $p \in D^*$, nous pouvons facilement construire un morphisme de treillis $\alpha : D \longrightarrow 2$ en posant :
$$\alpha(d) \equiv \begin{cases} 1 & \text{si } d \in p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
Il est clair que ces deux traductions sont inverses l'une de l'autre. En posant pour $\alpha : D \longrightarrow D' \in \mathbb{D}\mathbb{l}$
$$\begin{array}{c} D'^* \xrightarrow{\alpha^*} D^* \\ p \longmapsto \alpha^{-1}(p) \end{array}$$

(qui est clairement un morphisme d'ensembles partiellement ordonnés), nous pouvons voir que $(-)^*$ est un foncteur $\mathbb{D}\mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{P}\mathbb{O}^{\mathrm{op}}$. Avec les isomorphismes décrits plus haut il est facile de montrer que $(-)^*$ est naturellement isomorphe à $\mathbf{Hom}_{\mathbb{D}\mathbb{I}}(-, 2)$. ∎

Regardons maintenant à quoi correspond l'autre foncteur qui entre en jeu dans la dualité.

DÉFINITION 1.2.2 **(Sous-ensembles fermés supérieurement d'un $\mathbb{P}\mathbb{O}$)** *Soit $P \in \mathbb{P}\mathbb{O}$ un ensemble partiellement ordonné. Un sous-ensemble $X \subseteq P$ est dit fermé supérieurement si*

$$\forall x, y \in P \ (x \leq y \ , \ x \in X \Longrightarrow y \in X)$$

En ordonnant ces sous-ensembles avec l'inclusion nous obtenons un ensemble partiellement ordonné sur lequel on peut facilement définir des opérateurs pour les infima et suprema binaires (qui sont simplement l'intersection et la réunion binaire). Nous noterons par $\mathcal{P}_{\uparrow}(P)$ le treillis distributif (et borné) des parties fermées supérieurement de l'ensemble partiellement ordonné P. La notation $P^{\#}$ sera aussi utilisée pour ce treillis distributif.

PROPOSITION 1.2.3 **(Représentation pour $\mathbf{Hom}_{\mathbb{P}\mathbb{O}}(-, 2)$)** *$(-)^{\#}$ est un foncteur, de $\mathbb{P}\mathbb{O}^{\mathrm{op}}$ dans $\mathbb{D}\mathbb{I}$, naturellement isomorphe à $\mathbf{Hom}_{\mathbb{P}\mathbb{O}}(-, 2)$.*

PREUVE: La correspondance est la même que celle du résultat précédent. La preuve est un sous-ensemble de cette preuve. ∎

Les treillis de la forme $P^{\#}$, pour un ensemble partiellement ordonné $P \in |\mathbb{P}\mathbb{O}|$, sont représentatifs pour une classe intéressante de treillis : les treillis engendrés par leurs éléments premiers. La proposition suivante en témoigne, mais rappelons tout d'abord ce qu'on entend par treillis engendré par ses éléments premiers.

DÉFINITION 1.2.3 **(Treillis engendrés par leurs éléments premiers : $\mathbb{P}\mathrm{g}$)** *Soit L un treillis complet. Un élément $p \in L$ est dit complètement premier s'il est complètement $\bigvee$-irréductible i.e. pour toute famille $\{x_i\}_{i\in I} \subseteq L$ on a*

$$p \leq \bigvee_{i\in I} x_i \Longrightarrow \exists i \in I \;\; p \leq x_i$$

Un treillis complet L est dit engendré par ses éléments premiers si l'ensemble des ses éléments complètement premiers est $\bigvee$-dense dans L i.e. si tout élément de L est le suprémum des éléments premiers sous cet élément :

$$x = \bigvee \{p \mid p \leq x \text{ et } p \text{ est complètement premier}\}$$

Nous noterons l'ensemble partiellement ordonné des éléments complètement premiers de L par $\mathfrak{Irr}(L)$. De plus, nous noterons par $\mathbb{P}\mathrm{g}$ la catégorie des treillis complets engendrés par leurs éléments complètement premiers. Les morphismes de cette catégorie sont des morphismes de treillis complets : préservant les suprema et infima quelconques.

PROPOSITION 1.2.4 **(Représentation pour $\mathbb{P}\mathrm{g}$)** *Un treillis complet L est engendré par ses éléments premiers si et seulement si il est de la forme $P^\#$ pour un certain ensemble partiellement ordonné P. De plus, si $P \xrightarrow{f} Q \in \mathbb{P}\mathrm{o}$, alors $Q^\# \xrightarrow{f^\#} P^\#$ est un morphisme de treillis complets. En fait, le foncteur $(\cdot)^\#$ se restreint à une équivalence de catégories :*

$$\mathbb{P}\mathrm{o}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{(\cdot)^\#} \mathbb{P}\mathrm{g}$$

PREUVE: Supposons que L est engendré par ses éléments premiers. On pose pour P l'ensemble partiellement ordonné des éléments complètements premiers de L, ordonnés par l'ordre inverse à celui induit par L. On obtient clairement un isomorphisme de treillis complets :

$$P^\# \xrightarrow{\bigvee} L$$

dont l'inverse associe à $x \in L$ quelconque l'ensemble des éléments complètement premiers de L qui sont plus petits ou égal au sens de l'ordre dans L, à x (qui est clairement un sous-ensemble fermé supérieurement de P, car l'ordre dans P est l'ordre opposée à celui de L).

Inversement, il est clair qu'un treillis de la forme $L \equiv P^\#$ est engendré par ses éléments premiers. En effet, $P^\#$ est complet car la réunion et l'intersection de parties fermées supérieurement donnent des parties fermées supérieurement et ces deux opérateurs sont des opérateurs de suprema et d'infima pour l'inclusion. De plus, pour un $p \in |P|$ quelconque on a que

$$\uparrow\! p \equiv \{q \in P \mid p \leq_P q\} \in P^\#$$

est complètement premier et cette famille est suffisante pour engendrer $P^\#$ avec la réunion. Donc L est engendré par ses éléments premiers. Il est aussi très facile de voir que dans $P^\#$, les éléments complètement premiers sont exactement de la forme $\uparrow p$ pour $p \in P$, car si X est complètement premier, alors

$$X \subseteq \bigcup_{p \in X} \uparrow p$$

d'où il doit exister un $p \in X$ tel que $X \subseteq \uparrow p$ i.e. $X = \uparrow p$.

Si $P \xrightarrow{f} Q \in \mathbb{P}\mathrm{o}$, alors $Q^\# \xrightarrow{f^\#} P^\#$ est un morphisme de treillis complets. Ceci est clair, car $f^\#$ se calcule comme une image inverse le long de f. On a :

$$\begin{aligned} p \in f^\#\left(\bigcup_{i \in I} Y_i\right) &\iff f(p) \in \bigcup_{i \in I} Y_i \\ &\iff \exists i \in I \;\; f(p) \in Y_i \\ &\iff \exists i \in I \;\; p \in f^\#(Y_i) \\ &\iff p \in \bigcup_{i \in I} f^\#(Y_i) \end{aligned}$$

et clairement, on peut faire le même type de raisonnement pour les intersections ; donc $f^\# \in \mathbb{P}\mathrm{g}$.

Pour montrer que $(\cdot)^\#$ est plein, on se donne pour $P, Q \in \mathbb{P}\mathrm{o}$ un morphisme

$$Q^\# \xrightarrow{\theta} P^\# \in \mathbb{P}\mathrm{g}$$

Nous cherchons ainsi un $P \xrightarrow{Q} \in \mathbb{P}\mathrm{o}$ tel que $f^\# = \theta$. Comme θ est un morphisme de treillis complets, il préserve les infima. Il possède donc un adjoint à gauche $\theta_! \dashv \theta$:

$$P^\# \xrightarrow{\theta_!} Q^\#$$

Cet adjoint à gauche envoie les éléments complètement premiers de $P^\#$ sur des éléments complètement premiers de $Q^\#$, car si $p \in P$ et $\{Y_i\}_{i \in I} \subseteq Q^\#$, alors

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\theta_!(\uparrow p) \subseteq \bigcup_{i\in I} Y_i}{\uparrow p \subseteq \theta\left(\bigcup_{i\in I} Y_i\right)}}{\uparrow p \subseteq \bigcup_{i\in I} \theta(Y_i)}}{\exists i \in I \;\; \uparrow p \subseteq \theta(Y_i)}}{\exists i \in I \;\; \theta_!(\uparrow p) \subseteq Y_i}$$

Comme nous l'avons vu plus haut, puisque $\theta_!(\uparrow p)$ est complètement premier, il est de la forme $\uparrow q$ pour un certain $q \in Q$. Nous avons ainsi construit une application $f : P \longrightarrow Q$ qui envoie un $p \in P$ sur

$$f(p) \equiv \min \theta_!(\uparrow p)$$

On voit facilement que f préserve l'ordre car :

$$\begin{aligned} p \leq p' &\Longrightarrow \uparrow p' \subseteq \uparrow p \\ &\Longrightarrow \theta_!(\uparrow p') \subseteq \theta_!(\uparrow p) \\ &\Longrightarrow \min \theta_!(\uparrow p) \leq \min \theta_!(\uparrow p') \end{aligned}$$

Finalement, on a bien que $f^{\#} = \theta$ comme voulu, car

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{p \in f^{\#}(Y)}{f(p) \in Y}}{\min \theta_!(\uparrow p) \in Y}}{\theta_!(\uparrow p) \subseteq Y}}{\uparrow p \subseteq \theta(Y)}}{p \in \theta(Y)}$$

∎

Les treillis engendrés par leurs éléments premiers sont intéressants au point de vue logique, car ils sont des algèbres de bi-Heyting complètes comme le témoigne la proposition suivante.

PROPOSITION 1.2.5 **(Les $\mathbb{P}\mathrm{g}$ sont des algèbres de bi-Heyting complètes)** *Soit P un ensemble partiellement ordonné. $P^{\#}$ est une algèbre de bi-Heyting complète. Ainsi, tout ensemble engendré par ses éléments premiers est une algèbre de bi-Heyting complète.*

PREUVE: Nous savons que $P^{\#}$ est un treillis complet engendré par ses éléments premiers. Pour le lecteur non-familier avec les algèbres de bi-Heyting, définissons d'abord une algèbre de Heyting comme étant un treillis dans lequel on peut définir un opérateur d'implication $\rightarrow$ qui satisfait la règle suivante :

$$\frac{z \leq x \to y}{z \wedge x \leq y}$$

Dualement, un treillis est une algèbre de co-Heyting si on peut y définir un opérateur de différence (ou co-implication) $\setminus$ qui satisfait la règle d'adjonction duale à celle énoncée ci-dessus soit :

$$\frac{x \setminus y \leq z}{x \leq y \vee z}$$

Une algèbre de bi-Heyting est simplement un treillis qui est à la fois une algèbre de Heyting et de co-Heyting.

Pour montrer que $P^{\#}$ est une algèbre de bi-Heyting, je me contenterai de définir l'implication et la co-implication dans ce contexte. Soient $X, Y \in P^{\#}$ on pose :

$$X \to Y \equiv \{p \in P \mid \forall q \geq p \;\; q \in X \Longrightarrow q \in Y\}$$
$$X \setminus Y \equiv \{p \in P \mid \exists q \leq p \;\; q \in X \text{ mais } q \notin Y\}$$

qui satisfont clairement les règles d'adjonction :

$$\frac{Z \subseteq X \to Y}{Z \cap X \subseteq Y} \qquad\qquad \frac{X \setminus Y \subseteq Z}{X \subseteq Y \cup Z}$$

∎

Les treillis engendrés par leurs éléments premiers ont la particularité de nous permettre d'y raisonner avec des éléments comme si les éléments de L étaient des sous-ensembles d'un ensemble donné.C'est pour cette raison que les propriétés de ces treillis sont analogues à celles des treillis engendrés par leurs éléments premiers "classiques" :

$$\left(\mathcal{P}(X), \subseteq, \bigcap, \bigcup\right)$$

des parties d'un ensemble X quelconque. En effet, dans un treillis engendré par ses éléments premiers, il nous suffit toujours de vérifier les inégalités à démontrer au niveau des éléments complètement premiers. Ceci équivaut, par la proposition 1.2.4, à étudier les éléments des ensembles partiellement ordonnés des premiers inférieurs à chaque membre de l'inégalité et, à les comparer en termes d'éléments.

Maintenant que nous avons traduit la dualité construite en des termes bien connus, essayons d'en exploiter les bénéfices qui en découlent gratuitement. Commençons par réécrire la dualité de la proposition 1.2.1 dans notre nouvelle notation.

COROLLAIRE 1.2.1 **(Dualité pour $(\cdot)^*$ et $(\cdot)^\#$)** *La dualité de la proposition 1.2.1 peut se présenter comme :*

$$\mathbb{P}\mathbb{O}^{op} \underset{(-)^\#}{\overset{(-)^*}{\rightleftarrows}} \mathbb{D}\mathbb{I} \qquad (1.2.1)$$

L'adjonction de la dualité donnée au corollaire précédent possède une unité et une co-unité. À quoi ressemble l'unité dans le contexte que nous venons de définir ? La proposition suivante répond à cette question. Pour alléger le texte, nous donnons une définition préalable.

DÉFINITION 1.2.4 **(Définition de l'évaluation e_D)** *Soit D un treillis. On definit la fonction suivante :*

$$\begin{aligned} D &\xrightarrow{e_D} D^{*\#} \\ d &\longmapsto \{p \in D^* \mid d \in p\} \end{aligned}$$

On appelle e_D l'évaluation pour D dans son double dual.

PROPOSITION 1.2.6 **(Naturalité de e_D)** *Soit D un treillis distributif borné. La fonction e_D donne un morphisme de treillis bornés. De plus, $e_{(-)}$ est une transformation naturelle de*

$$\mathbf{1}_{\mathbb{D}\mathbb{I}} \xrightarrow{e_{(-)}} (\cdot)^{*\#}$$

entre ces deux endofoncteurs de $\mathbb{D}\mathbb{I}$.

PREUVE: Si on considère l'adjonction 1.2.1, on sait qu'elle possède une unité. Est-ce que cette unité agit exactement comme le e_D de la définition 1.2.4 ? Oui ; donné $d \in |D|$, si on revient à la preuve de la proposition 1.2.1, on se rapelle que la correspondance naturelle se faisait comme suit :

$$\dfrac{\dfrac{\mathbf{Hom}_{\mathbb{D}\mathbb{I}}(D,2) \xrightarrow{1} \mathbf{Hom}_{\mathbb{D}\mathbb{I}}(D,2) \in \mathbb{P}\mathbb{O}^{op}}{\mathbf{Hom}_{\mathbb{D}\mathbb{I}}(D,2) \xrightarrow{1} \mathbf{Hom}_{\mathbb{D}\mathbb{I}}(D,2) \in \mathbb{P}\mathbb{O}}}{D \xrightarrow{\eta_D \equiv \bar{1}} \mathbf{Hom}_{\mathbb{P}\mathbb{O}}(\mathbf{Hom}_{\mathbb{D}\mathbb{I}}(D,2),2) \in \mathbb{D}\mathbb{I}} \downarrow$$

où $\eta_D(d) : \mathbf{Hom}_{\mathbb{D}\mathbb{I}}(D,2) \longrightarrow 2$ envoie α sur $1(\alpha)(d) = \alpha(d)$. Si on regarde $\eta_D(d)$ comme un élément de $D^{*\#}$, alors il correspond à l'ensemble des filtres premiers $p \in D^*$ pour lequels la fonction caratéristique donne 1 lorsqu'on l'applique à d i.e. on prend :

$$\begin{aligned} [\eta_D(d)]\,(\alpha) &= \{p \in D^* \mid \chi_p(d) = 1\} \\ &= \{p \in D^* \mid d \in p\} \end{aligned}$$

L'évaluation est donc l'unité de l'adjonction énoncée au corollaire 1.2.1. C'est donc trivialement un morphisme de treillis bornés et $e_{(-)}$ définit une transformation naturelle de $\mathbf{1}_{\mathbb{D}}$ vers le foncteur double-dual $(\cdot)^{*\#}$ comme c'est en général le cas pour l'unité d'une adjonction. ∎

Comme nous l'avons vu dans la preuve du résultat précédent, l'évaluation e_D est l'unité pour l'adjonction 1.2.1. Toute unité d'adjonction satisfait une propriété universelle. Regardons à quoi elle correspond pour e_D.

PROPOSITION 1.2.7 **(Propriété universelle du double dual)** *Soit D un treillis distributif borné, L un treillis complet engendré par ses éléments premiers et $D \xrightarrow{h} L$ un morphisme de treillis bornés. Il existe un unique morphisme de treillis complets $\bar{h} : D^{*\#} \longrightarrow L$ tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "e_D"] \arrow[dr, "h"'] & D^{*\#} \arrow[d, dashed, "\bar{h}"] \\ & L \end{tikzcd}$$

On dit ainsi que e_D est universel parmis les morphisme de D dans un treillis engendré par ses éléments premiers.

PREUVE: Nous avons vu que e_D est l'unité de l'adjonction de la ligne 1.2.1. Ainsi, e_D est universel parmis les morphismes de treillis de D dans $P^{\#}$ pour un ensemble partiellement ordonné $P \in |\mathbb{P}_0|$. Plus précisément, cela veut dire que quel que soit $P \in |\mathbb{P}_0|$ et quel que soit le morphisme de treillis $h : D \longrightarrow P^{\#}$, la transposée de h :

$$D^* \xrightarrow{\tilde{h}} P$$

est l'unique morphisme auquel on peut appliquer $(\cdot)^{\#}$ pour faire commuter :

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "e_D"] \arrow[dr, "h"'] & D^{*\#} \arrow[d, dashed, "\tilde{h}^{\#}"] \\ & P^{\#} \end{tikzcd}$$

Comme nous l'avons vu dans la proposition 1.2.4, un treillis est engendré par ses éléments premiers si et seulement si il est de la forme $P^{\#}$ pour un certain P. Ainsi, on voit clairement apparaître la propriété universelle voulue. Il suffit donc de poser $\bar{h} \equiv \tilde{h}^{\#}$ qui est un morphisme de treillis complets (voir la proposition 1.2.4). ∎

Nous avons donc obtenu une propriété universelle pour le double-dual. Nous verrons plus loin comment nous pouvons rafiner ce résultat pour le rendre optimal. Essayons maintenant de voir d'autres propriétés fondamentales de cette construction.

1.3. Double dual : propriétés élémentaires

Une de ces propriétés qui est centrale pour les applications à la logique nous dit que le morphisme évaluation : e_D est un monomorphisme. Cette propriété est équivalente au théorème de complétude pour la logique cohérente propositionnelle. La preuve du résultat est non-constructive et utilise le théorème d'existence des filtres premiers. Formulons tour d'abord ce résultat préliminaire bien connu. Notons qu'un idéal sur un treillis D est un filtre sur D^{op} (i.e. la notion d'idéal est duale à celle de filtre).

Proposition 1.3.1 **(Théorème d'existence des filtres premiers)** *Soit D un treillis distributif borné, f un filtre sur D et I un idéal sur D. Si $f \cap I = \emptyset$, alors il existe un filtre premier p sur D tel que $f \subseteq p$ et $p \cap I = \emptyset$.*

Le lecteur trouvera une preuve de ce résultat (formulé différemment mais trivialement équivalent) à la page 188 de [5]. Contentons-nous de rappeler que cette preuve utilise le lemme de Zorn (i.e. l'axiome du choix) et qu'elle n'est pas constructive. Remarquons que le théorème d'existence des filtres premiers est un énoncé plus faible que l'axiome du choix.

Donnons dès maintenant une application directe du théorème d'existence des filtres premiers à la construction du double dual. Nous désignons ce résultat comme étant le "théorème de complétude pour la logique cohérente propositionelle" ($\mathrm{C_{oherent}P_{ropositional}L_{ogic}}$). Ce résultat est en effet équivalent à un théorème de complétude pour cette logique lorsqu'on le formule dans la théorie des modèles.

Proposition 1.3.2 **(Théorème de complétude pour CPL)** *Soit D un treillis distributif borné. L'évaluation $D \overset{e_D}{\rightarrowtail} D^{*\#}$ pour le double-dual est un monomorphisme de treillis.*

Preuve: Nous savons déjà que e_D est un morphisme de treillis. Montrons qu'il est mono. Pour cela, il suffit de montrer que e_D réfléchit l'ordre de $D^{*\#}$

dans l'ordre de D i.e.

$$\forall x, y \in D \ (e_D(x) \leq_{D^{*\#}} e_D(y) \Longrightarrow x \leq_D y)$$

Nous montrons la contraposée de cette dernière. Supposons que $x \not\leq_D y$. On pose $f \equiv \uparrow x$ et $I \equiv \downarrow y$. Clairement, f est un filtre sur D et I est un idéal sur D. De plus, $f \cap I = \emptyset$ car $y \notin f$ (si $y \in f$, alors, par définition, on aurait $x \leq_D y$; une contradiction) et $z \in I$ veut dire la même chose que $z \leq_D y$ et donc $z \notin f$ (car sinon $z \in f$ et $z \leq_D y$ nous donnerait $y \in f$). Ainsi par le théorème d'existence des filtre premiers, il existe un filtre premier $p \in D^*$ pour lequel $f \subseteq p$ et $p \cap I = \emptyset$. Puisque $f \subseteq p$, on a $x \in p$ d'où $p \in e_D(x)$. D'autre part, $p \cap I = \emptyset$ nous donne que $y \notin p$ d'où $p \notin e_D(y)$. On voit ainsi clairement que $e_D(x) \not\subseteq e_D(y)$ (p en témoigne). ∎

Nous voyons maintenant avec une perspective plus claire la contruction du double-dual. Elle prend un treillis distributif borné D et le plonge dans un treillis engendré par ses éléments premiers de façon universelle. Le double-dual de D est donc l'enveloppe de D (comme l'enveloppe convexe d'un sous-ensemble d'un espace vectoriel) dans les treillis engendrés par leurs éléments premiers.

La liste des bonnes propriétés de cette construction est loin de s'arrêter ici. En fait, il se produit un phénomène assez étrange avec ce double dual. À mesure qu'on enrichit la structure de treillis distributif en ajoutant de nouveaux opérateurs satisfaisant certaines règles, alors ces opérateurs se voient matérialisés dans le double dual et l'évaluation les préserve. Nous ne connaissons pas de résultat général décrivant le phénomène, mais plusieurs cas particuliers sont remarquables. On retrouve une collection impressionnante de résultats de ce type dans [8]. Le résultat suivant en est un exemple. Il dit que e_D préserve toutes les implications (l'opérateur spécifique aux algèbres de Heyting) qui existent dans D. Nous savons par la proposition 1.2.5 que le double dual $D^{*\#}$ est toujours une algèbre de bi-Heyting. Il est donc naturel de se demander si e_D préserve les implications lorsqu'elles existent dans D.

DÉFINITION 1.3.1 **(Conditionnellement Heyting)** *Soit $D \xrightarrow{\alpha} D'$ un morphisme de treillis. On dit que α est conditionnellement Heyting si pour chaque $x \to y$ qui existe dans D on a que $\alpha(x) \to \alpha(y)$ existe dans D' et en fait*

$$\alpha(x) \to \alpha(y) = \alpha(x \to y)$$

La proposition a été démontrée dans sa version du premier ordre par Joyal. Nous lui attribuons tout de même cette version élémentaire.

PROPOSITION 1.3.3 **(Théorème de Joyal)** *Le morphisme e_D est conditionnellement Heyting.*

PREUVE: Soient $x, y \in D$ tels que $x \to y \in D$ existe. Nous voulons montrer que $e_D(x \to y)$ satisfait la règle d'adjonction pour $e_D(x) \to e_D(y)$ dans $D^{*\#}$. Comme c'est souvent le cas, une des deux inégalités est triviale :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{e_D(x \to y) \subseteq e_D(x) \to e_D(y)}{e_D(x \to y) \cap e_D(x) \subseteq e_D(y)}}{e_D\left((x \to y) \wedge x\right) \subseteq e_D(y)}}{(x \to y) \wedge x \leq y}}{x \to y \leq x \to y}$$

Remarquons que l'équivalence entre la troisième et la quatrième ligne est due au fait que e_D préserve l'ordre et la réfléchit (étant un mono).

Montrons maintenant l'autre inégalité :

$$e_D(x) \to e_D(y) \overset{?}{\subseteq} e_D(x \to y)$$

Nous avons pour $W \in D^{*\#}$ quelconque

$$\dfrac{\dfrac{W \subseteq e_D(x) \to e_D(y)}{W \cap e_D(x) \subseteq e_D(y)}}{W \subseteq e_D(x \to y)} \downarrow(*)$$

Pour montrer $(*)$ nous passons par la contraposée. On a en effet

$$\begin{aligned} W \not\subseteq e_D(x \to y) &\Longrightarrow \exists q \in W \quad q \notin e_D(x \to y) \\ &\Longrightarrow \exists q \in W \quad q \notin e_D(y) \ \text{ car } y \leq x \to y \\ &\Longrightarrow \exists q \in W \quad y \notin q \end{aligned}$$

Pour arriver à notre but, nous cherchons un filtre $p \in W \cap e_D(x)$ tel que $p \notin e_D(y)$. Le filtre q est dans W et satisfait la deuxième condition, mais n'est pas nécessairement dans $e_D(x)$. Pour construire le p en question nous allons utiliser le théorème d'existence des filtre premiers. Considérons

$$f \equiv \langle q \cup \{x\} \rangle \equiv \{d \in D \mid \exists c \in q \ \ c \wedge x \leq d\}$$

qui est le filtre engendré par q et $\{x\}$. C'est une extension de q qui contient x. Notons que $y \notin f$. En effet,

$$\begin{aligned} y \in f &\Longrightarrow \exists c \in q \;\; c \wedge x \leq y \\ &\Longrightarrow \exists c \in q \;\; c \leq x \to y \\ &\Longrightarrow x \to y \in q \end{aligned}$$

C'est impossible car dans cette situation $q \in e_D(x \to y)$ et nous avons supposé que ce n'est pas le cas. On pose ainsi naturellement $I \equiv \downarrow\! y$ et on a clairement $f \cap I = \emptyset$ et donc, par le théorème d'existence des filtre premiers, il existe un filtre premier $p \in D^*$ tel que $f \subseteq p$ et $p \cap I = \emptyset$. Nous avons bien trouvé en p le candidat cherché. En effet, $p \in W$ (car $q \subseteq f \subseteq p$ et W est une partie fermée supérieurement de D^*), $p \in e_D(x)$ (car $x \in f \subseteq p$), mais $p \notin e_D(y)$ (car $y \in I$ et $p \cap I = \emptyset$ d'où $y \notin p$). ∎

Nous avons également que l'évaluation est conditionnellement co-Heyting. Nous pouvons obtenir ce résulat par dualité en utilisant le résultat précédent et le lemme suivant :

LEMME 1.3.1 **(Isomorphisme entre $(D^{\mathrm{op}})^{*\#}$ et $D^{*\#^{\mathrm{op}}}$)** *Soit D un treillis distributif. Il existe un unique isomorphisme de treillis complètement distributifs $I : D^{\mathrm{op}*\#} \xrightarrow{\simeq} D^{*\#^{\mathrm{op}}}$ faisant commuter :*

$$\begin{tikzcd} D^{\mathrm{op}} \arrow[r, "e_{D^{\mathrm{op}}}"] \arrow[dr, "e_D^{\mathrm{op}}"'] & D^{\mathrm{op}*\#} \arrow[d, "I"] \\ & D^{*\#^{\mathrm{op}}} \end{tikzcd}$$

PREUVE: Je me contente de dire que cet isomorphisme découle directement du fait que $2^{\mathrm{op}} \simeq 2$; que l'on considère 2 comme un treillis ou comme un ordre partiel. En effet, en composant un morphisme de treillis $p : D \longrightarrow 2$ avec cet isomorphisme on obtient un morphisme $D \longrightarrow 2^{\mathrm{op}}$ dont la fonction sous-jacente peut être aussi vue comme un morphisme de treillis $D^{\mathrm{op}} \longrightarrow 2$. Cette association est un isomorphisme d'ensembles partiellement ordonnés de $D^{*\mathrm{op}}$ dans $D^{\mathrm{op}*}$. Avec l'interprétation en termes de filtres premiers, on obtient une description simple de cet isomorphisme. En effet, en posant :

$$\begin{aligned} D^{*\mathrm{op}} &\longrightarrow D^{\mathrm{op}*} \\ p &\longmapsto D \setminus p \end{aligned}$$

on prend un filtre premier $p \in D^*$ et on l'envoie sur son complément (vu comme sous-ensemble de D) qui est naturellement un idéal premier sur D et donc un filtre premier sur D^{op} comme voulu. Cette application est clairement une bijection. De plus, c'est un morphisme d'ensembles partiellement ordonnés car

$$\begin{aligned} p \leq_{D^{*\mathrm{op}}} q &\iff q \subseteq p \\ &\iff D \setminus p \subseteq D \setminus q \\ &\iff D \setminus p \leq_{D^{\mathrm{op}*}} D \setminus q \end{aligned}$$

De la même façon, donné un ensemble partiellement ordonné P, il est facile de construire un isomorphisme

$$P^{\#\mathrm{op}} \xrightarrow{\simeq} P^{\mathrm{op}\#}$$

En appliquant $(\cdot)^{\#}$ au premier isomorphisme et en composant avec ce deuxième isomorphisme nous obtenons facilement l'isomorphisme recherché. ∎

Nous obtenons donc le résultat annoncé soit que l'évaluation préserve aussi les co-implications.

COROLLAIRE 1.3.1 **(L'évaluation e_D est co-Heyting)** *Soit D un treillis distributif borné. L'évaluation $D \xrightarrow{e_D} D^{*\#}$ est conditionellement co-Heyting.*

PREUVE: Le lemme précédent nous a donné un isomorphisme de treillis complets : I (qui est donc en particulier un isomorphisme d'algèbres de Heyting). Ainsi, puisque $e_{D^{\mathrm{op}}}$ est conditionellement Heyting, on obtient que

$$e_D^{\mathrm{op}} = I \circ e_{D^{\mathrm{op}}}$$

est conditionellement Heyting donc e_D est conditionellement co-Heyting. ∎

Les résultats de la présente section nous indiquent un peu comment le double dual peut servir pour démontrer des théorèmes de complétude pour certaines logiques propositionnelles. Nous ne désirons pas nous attarder à ce genre d'applications du double dual car elles sont traitées en détail dans des articles comme [8]. Contentons nous de terminer cette section en mentionnant les remarques suivantes. Le résultat de base pour ce genre de considérations est la proposition 1.3.2, qui donne le théorème de complétude pour la logique cohérente propositionnelle. Le théorème de Joyal (la proposition 1.3.3), quant à lui, donne un théorème de complétude pour la logique propositionnelle intuitionniste. Cette logique a en effet un opérateur de plus que la logique cohérente propositionnelle : l'implication. Le simple fait que l'évaluation préserve cet opérateur (c'est en effet l'essentiel du contenu du théorème de Joyal) nous permet d'étendre le théorème de complétude de la logique cohérente à la logique intuitionniste. De la même façon, le théorème de complétude pour la logique co-intuitionniste se démontre en montrant que e_D préserve les co-implications qui existent dans D (voir corollaire 1.3.1). Nous appercevons donc (vaguement) pourquoi les propriétés sémantiques de plusieurs théories propositionnelles cohérentes peuvent se déduire à partir de propriétés algébriques du morphisme e_D dans le double dual.

1.4. Propriétés de fonctorialité du double dual

Nous avons vu à la proposition 1.2.6 que $e_{(-)} : \mathbf{1}_{\mathbb{DI}} \longrightarrow (\cdot)^{*\#}$ est une transformation naturelle. Ceci veut dire que quel que soit le morphisme de treillis bornés $C \xrightarrow{\alpha} D \in \mathbb{DI}$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, tail, "e_D"] & D^{*\#} \\ C \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, tail, "e_C"'] \arrow[ur, phantom, "\circ"] & C^{*\#} \arrow[u, "\alpha^{*\#}"'] \end{tikzcd}$$

Mais $\alpha^{*\#}$ est un morphisme de treillis complets et possède donc des adjoints à droite et à gauche que nous noterons respectivement R_α et L_α. Une question naturelle que nous pouvons nous demander est la suivante. Si α a un adjoint à droite ρ est-ce que cet adjoint à droite commute avec R_α comme dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, tail, "e_D"] \arrow[d, "\rho"'] \arrow[dr, phantom, "\circ"] & D^{*\#} \arrow[d, "R_\alpha"] \\ C \arrow[r, tail, "e_C"'] & C^{*\#} \end{tikzcd}$$

De la même façon, si α a un adjoint à gauche λ ; commute-t-il avec L_α ? Nous allons montrer dans la présente section que nous pouvons répondre par l'affirmative à ces deux questions.

La proposition suivante nous indique comment on peut calculer L_α et R_α au niveau des filtres premiers.

PROPOSITION 1.4.1 **(Calcul des adjoints de $\alpha^{*\#}$)** *Soit $C \xrightarrow{\alpha} D \in \mathbb{D}\mathbb{l}$ un morphisme de treillis bornés. Pour $p \in C^*$ et $Y \in D^{*\#}$ quelconques, on a*

$$p \in R_\alpha(Y) \iff \forall q \in D^* \left(\alpha^*(q) \supseteq p \Rightarrow q \in Y\right)$$
$$p \in L_\alpha(Y) \iff \exists q \in D^* \left(\alpha^*(q) \subseteq p \;\;\&\;\; q \in Y\right)$$

PREUVE: Nous utilisons les formules bien connues pour les adjoints à gauche et à droite d'un morphisme de treillis complets. Soient $Y \in D^{*\#}$ et $p \in C^*$ quelconques. On a,

$$\begin{array}{c}
p \in R_\alpha Y \\ \hline
p \in \bigcup\{X \in C^{*\#} \mid \alpha^{*\#}(X) \subseteq Y\} \\ \hline
\exists X \in C^{*\#} \;\left[\alpha^{*\#}(X) \subseteq Y \;\;\&\;\; p \in X\right] \\ \hline
\exists X \in C^{*\#} \;\left[\forall q \in D^* \;\left(q \in \alpha^{*\#}(X) \Rightarrow q \in Y\right) \;\;\&\;\; p \in X\right] \\ \hline
\exists X \in C^{*\#} \;\left[\forall q \in D^* \;\left(\alpha^*(q) \in X \Rightarrow q \in Y\right) \;\;\&\;\; p \in X\right] \\ \hline
\forall q \in D^* \;\left[\alpha^*(q) \supseteq p \Rightarrow q \in Y\right]
\end{array} \; (*)$$

et $(*)$ se démontre comme suit. Pour la direction $(\downarrow)$, on prend $q \in D^*$ tel que $\alpha^*(q) \supseteq p$. Par hypothèse, on a que $p \in X$ donc $\alpha^*(q) \in X$ car X est fermée supérieurement. Ainsi, notre hypothèse nous permet de conclure que $q \in Y$ comme voulu. Pour la direction $(\uparrow)$, on pose $X \equiv \uparrow p$ et on voit que le reste suit sans peine.

Démontrons maintenant la deuxième formule. En procédant de façon analogue, on a :

$$\begin{array}{c}
p \in L_\alpha Y \\ \hline
p \in \bigcap\{X \in C^{*\#} \mid Y \subseteq \alpha^{*\#}(X)\} \\ \hline
\forall X \in C^{*\#} \;\left[Y \subseteq \alpha^{*\#}(X) \Rightarrow p \in X\right] \\ \hline
\forall X \in C^{*\#} \;\left[\forall q \in D^* \left(q \in Y \Rightarrow q \in \alpha^{*\#}(X)\right) \Rightarrow p \in X\right] \\ \hline
\forall X \in C^{*\#} \;\left[\neg\forall q \in D^* \left(q \in Y \Rightarrow q \in \alpha^{*\#}(X)\right) \vee p \in X\right] \\ \hline
\forall X \in C^{*\#} \;\left[\exists q \in D^* \neg\left(q \notin Y \vee q \in \alpha^{*\#}(X)\right) \vee p \in X\right] \\ \hline
\forall X \in C^{*\#} \;\left[\exists q \in D^* \;\left(q \in Y \;\;\&\;\; q \notin \alpha^{*\#}(X)\right) \vee p \in X\right] \\ \hline
\forall X \in C^{*\#} \;\left[\exists q \in D^* \;\left(q \in Y \;\;\&\;\; \alpha^*(q) \notin X\right) \vee p \in X\right] \\ \hline
\exists q \in D^* \;\left[\alpha^*(q) \subseteq p \;\;\&\;\; q \in Y\right]
\end{array} \; (**)$$

Montrons $(**)$. Pour $(\downarrow)$ on pose

$$X \equiv \{p' \in C^* \mid p' \not\subseteq p\}$$

Clairement, X est une partie fermée supérieurement de C^*. De plus, comme on a évidemment $p \notin X$ on peut conclure par hypothèse qu'il existe $q \in D^*$ tel que $q \in Y$ et $\alpha^*(q) \notin X$ i.e. $\alpha^*(q) \subseteq p$; comme voulu. Pour $(\uparrow)$ on prend $X \in C^{*\#}$ quelconque. Si $p \in X$ on a terminé. Si $p \notin X$, alors nous devons montrer

$$\exists q \in D^* \ [q \in Y \ \ \& \ \ \alpha^*(q) \notin X]$$

Prenons le $q \in D^*$ qui nous est donné par hypothèse. On a bien $q \in Y$ et, comme $\alpha^*(q) \subseteq p$ et $p \notin X$, on doit avoir $\alpha^*(q) \notin X$ comme espéré. ∎

Maintenant que nous savons comment calculer les adjoints de $\alpha^{*\#}$ nous sommes prêts à démontrer les propriétés de fonctorialité annoncées plus haut. Nous allons tout d'abord démontrer le résultat pour les adjoints à droite puis, nous allons utiliser un argument de symétrie pour déduire le résultat pour les adjoints à gauche.

PROPOSITION 1.4.2 **(Fonctorialité des adjoints à droite pour $D^{*\#}$)** *Soit $C \xrightarrow{\alpha} D \in \mathbb{D}\mathbb{l}$ un morphisme de treillis bornés ayant un adjoint à droite $D \xrightarrow{\rho} C$. Alors les deux rectangles évidents du diagramme suivant commutent :*

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, hook, "e_D"] \arrow[d, shift left, "\rho"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft\circlearrowright"] & D^{*\#} \arrow[d, shift left, "R_\alpha"] \\
C \arrow[u, shift left, "\alpha"] \arrow[u, phantom, "\dashv"] \arrow[r, hook, "e_C"'] & C^{*\#} \arrow[u, shift left, "\alpha^{*\#}"] \arrow[u, phantom, "\dashv"]
\end{tikzcd}$$

PREUVE: Une des deux commutativités a déjà été démontrée comme nous l'avons indiqué au début de la présente section. La nouvelle commutativité qui est démontrée ici est celle faisant intervenir ρ et R_α. J'ai quand même décidé de mettre α et $\alpha^{*\#}$ dans le diagramme pour bien montrer les relations d'adjonction. Soit $d \in D$ quelconque. Comme il en est coutume, un des deux sens est évident. En effet,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{e_C(\rho d) \subseteq R_\alpha\left(e_D(d)\right)}{\alpha^{*\#}\left(e_C(\rho d)\right) \subseteq e_D(d)}}{e_D\left(\alpha(\rho d)\right) \subseteq e_D(d)}}{\alpha(\rho d) \leq d}}{\rho d \leq \rho d}$$

où l'avant dernier passage se justifie par le fait que e_D est un monomorphisme et donc réfléchit l'ordre.

Pour l'autre direction, nous procéderons comme suit. Pour $p \in C^*$ quelconque on a, en utilisant la formule de la proposition 1.4.1, que

$$\begin{array}{c}
p \in R_\alpha\left(e_D(d)\right) \\ \hline
\forall q \in D^* \; [\alpha^*(q) \supseteq p \Rightarrow q \in e_D(d)] \\ \hline
\forall q \in D^* \; [\alpha^*(q) \supseteq p \Rightarrow d \in q] \\ \hline
\rho d \in p \\ \hline
p \in e_C(\rho d)
\end{array} \; \downarrow(*)$$

et nous montrons $(*)$ par contraposition. Supposons que $\rho d \notin p$. Nous cherchons un $q \in D^*$ tel que $\alpha^*(q) \supseteq p$, mais avec $d \notin q$. Considérons le filtre engendré par l'image de p le long de α i.e.

$$f \equiv \langle \alpha(p) \rangle$$

On remarque que $d \notin f$ car

$$\begin{aligned}
d \in f &\Longleftrightarrow \exists c \in p \;\; \alpha c \leq d \\
&\Longleftrightarrow \exists c \in p \;\; c \leq \rho d \\
&\Longrightarrow \rho d \in p
\end{aligned}$$

Ce qui n'est pas le cas par hypothèse. Ainsi on a bien $d \notin f$. En utilisant le théorème d'existence des filtres premiers on peut trouver $q \in D^*$ tel que $f \subseteq q$ et $d \notin q$. Pour vérifier que ce q est bien le candidat recherché, il ne nous reste qu'à voir que $\alpha^*(q) \supseteq p$. Ceci est clair car :

$$\begin{aligned}
c \in p &\Longrightarrow \alpha c \in \alpha p \subseteq f \subseteq q \\
&\Longrightarrow \alpha c \in q \\
&\Longrightarrow c \in \alpha^*(q)
\end{aligned}$$

∎

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat analogue pour les adjoints à gauche.

PROPOSITION 1.4.3 **(Fonctorialité des adjoints à gauche pour $D^{*\#}$)** *Soit $C \xrightarrow{\alpha} D \in \mathbb{DL}$ un morphisme de treillis bornés ayant un adjoint à gauche $D \xrightarrow{\lambda} C$. Alors les deux rectangles évidents du diagramme suivant commutent :*

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, tail, "e_D"] \arrow[d, bend right, "\lambda"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \arrow[rd, phantom, "\circ\circ"] & D^{*\#} \arrow[d, bend right, "L_\alpha"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
C \arrow[u, "\alpha"'] \arrow[r, tail, "e_C"'] & C^{*\#} \arrow[u, "\alpha^{*\#}"']
\end{tikzcd}$$

PREUVE: Comme dans le cas de la proposition précédente nous ne nous intéressons qu'à la commutativité faisant intervenir λ et L_α ; l'autre ayant déjà été démontrée. Nous utiliserons l'isomorphisme décrit au lemme 1.3.1. Nous ajouterons respectivement les indices I_C et I_D pour différencier les deux isomorphismes. Le lecteur expérimenté verra que le résultat suit immédiatement de la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
D^{\mathrm{op}} \arrow[r, tail, "e_{D^{\mathrm{op}}}"] \arrow[rr, bend left, "e_D^{\mathrm{op}}"] \arrow[d, bend left, "\lambda^{\mathrm{op}}"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \arrow[rd, phantom, "\circ\circ"] & D^{\mathrm{op}*\#} \arrow[r, "I_D"] \arrow[d, bend left, "R_{\alpha^{\mathrm{op}}}"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \arrow[rd, phantom, "\circ\circ"] & D^{*\#\mathrm{op}} \arrow[d, bend left, "L_\alpha^{\mathrm{op}}"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
C^{\mathrm{op}} \arrow[u, "\alpha^{\mathrm{op}}"] \arrow[r, tail, "e_{C^{\mathrm{op}}}"'] \arrow[rr, bend right, "e_C^{\mathrm{op}}"'] & C^{\mathrm{op}*\#} \arrow[u, "\alpha^{\mathrm{op}*\#}"] \arrow[r, "I_C"'] & C^{*\#\mathrm{op}} \arrow[u, "\alpha^{*\#\mathrm{op}}"]
\end{tikzcd}$$

En effet, le rectangle gauche commute car $\alpha^{\mathrm{op}} \dashv \lambda^{\mathrm{op}}$ et cela nous ramène au cas de la proposition précédente : le cas des adjoints à droite. Le rectangle de droite, quant à lui, commute car I_D et I_C sont des isomorphismes et par les relations d'adjonctions existantes. Finalement, on en déduit que l'extérieur de ce diagramme commute. En enlevant les $(\cdot)^{\mathrm{op}}$ on retombe sur le diagramme dont on voulait originalement démontrer la commutativité. ∎

Les résultats de la présente section servent aussi à étudier certaines logiques propositionnelles : les logiques modales pré-$S4$ et bi-$S4$ (voir **[25]**). Ces résultats sont tout simplement des résultats de préservations de certains opérateurs modaux définissables dans notre contexte.

1.5. UNE CARACTÉRISATION DU DOUBLE DUAL

La proposition suivante donne encore quelques propriétés de l'évaluation. Le lecteur remarquera probablement que nous y répétons des propriétés déjà connues. Nous verrons plus loin que ces propriétés caractérisent l'évaluation à isomorphisme près. C'est pour cette raison que nous allons les énoncer ensembles.

PROPOSITION 1.5.1 **(Propriétés caractéristiques de e_D)** *Soit D un treillis distributif borné. L'évaluation e_D satisfait les propriétés suivantes :*

1. $D^{*\#} \in |\mathbb{P}\mathbb{g}|$
2. $e_D \in \mathbb{L}\mathbb{o}\mathbb{t}$
3. $\forall X \in D^{*\#} \left[X \in \mathfrak{Irr}(D^{*\#}) \Longrightarrow X = \bigwedge_{\{d \in D \mid X \leq e_D(d)\}} e_D(d)\right]$
4. $\forall d \in D \ \forall \{d_i\}_{i \in I} \subseteq D \ \left[\bigwedge_{i \in I} e_D(d_i) \leq e_D(d) \Longrightarrow \exists I'_{\text{fini}} \subseteq I \ \bigwedge_{i \in I'} d_i \leq d\right]$
5. *Soit $X \in D^{*\#}$ tel que*
$$X = \bigwedge_{i \in I} e_D(x_i)$$
pour une certaine famille d'éléments de D : $\{x_i\}_{i \in I}$. Si X satisfait la propriété suivante :
$$\forall n \in \mathbb{N} \ \forall \{d_j\}_{i=1}^{n} \subseteq D \ \left[X \leq \bigvee_{j=1}^{n} e_D(d_j) \Longrightarrow \exists 1 \leq j_0 \leq n \ \ X \leq e_D(d_{j_0})\right]$$
alors X est complètement premier dans $D^{*\#}$ i.e. $X \in \mathfrak{Irr}\left(D^{*\#}\right)$.

PREUVE: Les énoncés 1 et 2 ont été démontrés préalablement. Démontrons l'énoncé 3. Nous avons vu dans la preuve de la proposition 1.2.4 que les éléments complètement premiers de $P^{\#}$ (pour un certain $P \in |\mathbb{P}\mathbb{o}|$) sont de la forme $\uparrow p$ ($p \in P$). Ainsi, $X \in \mathfrak{Irr}\left(D^{*\#}\right)$ si et seulement si il existe un $p \in D^*$ tel que

$X = \uparrow p$. On a ainsi :

$$\begin{aligned}
&\bigwedge \{e_D(d) \mid d \in D \text{ et } X \leq e_D(d)\} \\
&\qquad = \bigcap \{e_D(d) \mid d \in D \text{ et } \uparrow p \subseteq \{q \in D^* \mid d \in q\}\} \\
&\qquad = \bigcap \{e_D(d) \mid d \in D \text{ et } d \in p\} \\
&\qquad = \bigcap_{d \in p} \{q \in D^* \mid d \in q\} \\
&\qquad = \{q \in D^* \mid p \subseteq q\} \\
&\qquad = \uparrow p \\
&\qquad = X
\end{aligned}$$

Démontrons l'énoncé 4. Soit $\{d_i\}_{i \in I}$ une famille d'éléments de D et $d \in D$ tels que

$$\bigwedge_{i \in I} e_D(d_i) \leq e_D(d)$$

Supposons le contraire de la conclusion cherchée c'est à dire

$$\forall I'_{\text{fini}} \subseteq I \quad \bigwedge_{i \in I'} d_i \not\leq d$$

On pose alors

$$f \equiv \left\{ d \in D \mid \exists I'_{\text{fini}} \subseteq I \quad \bigwedge_{i \in I'} d_i \leq d \right\} = \langle \{d_i\}_{i \in I} \rangle$$

On voit que par hypothèse $d \notin f$ d'où, par le théorème d'existence des filtres premiers,

$$\exists p \in D^* \quad f \subseteq p \text{ et } d \notin p$$

On a ainsi trouvé $p \in D^*$ tel que $p \notin e_D(d)$ mais pourtant

$$\forall i \in I \quad d_i \in p$$

d'où $p \in \bigcap_{i \in I} e_D(d_i)$. Nous obtenons donc une contradiction avec notre première hypothèse.

Démontrons maintenant l'énoncé 5. Supposons que nous ayons affaire à un X dans $D^{*\#}$ de la forme $X = \bigcap_{i \in I} e_D(x_i)$ qui satisfait la condition énoncée. Nous désirons montrer qu'il existe un $p \in D^*$ pour lequel $X = \uparrow p$. Posons

$$f \equiv \langle \{x_i\}_{i \in I} \rangle$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned} q \in X &\iff q \in \bigcap_{i\in I} e_D(x_i) \\ &\iff \forall i \in I \;\; q \in e_D(x_i) \\ &\iff \forall i \in I \;\; x_i \in q \\ &\iff f \subseteq q \end{aligned}$$

On voit ainsi que

$$X = \uparrow f \equiv \{q \in D^* \mid f \subseteq q\}$$

Il suffit donc de montrer que f est un filtre premier. Soient $d_1, d_2 \in D$ on a

$$\begin{aligned} d_1 \vee d_2 \in f &\Longrightarrow \forall q \in D^* \;\; [f \subseteq q \Rightarrow q \in e_D(d_1 \vee d_2) = e_D(d_1) \vee e_D(d_2)] \\ &\Longrightarrow \uparrow f = X \leq e_D(d_1) \vee e_D(d_2) \\ &\Longrightarrow X \leq e_D(d_1) \;\text{ ou }\; X \leq e_D(d_2) \\ &\Longrightarrow \uparrow f \leq e_D(d_1) \;\text{ ou }\; \uparrow f \leq e_D(d_2) \\ &\Longrightarrow \forall q \in D^* [f \subseteq q \Rightarrow q \in e_D(d_1)] \quad \text{ou} \quad \forall q \in D^* [f \subseteq q \Rightarrow q \in e_D(d_2)] \\ &\Longrightarrow \forall q \in D^* [f \subseteq q \Rightarrow d_1 \in q] \quad \text{ou} \quad \forall q \in D^* [f \subseteq q \Rightarrow d_2 \in q] \\ &\Longrightarrow d_1 \in f \;\text{ ou }\; d_2 \in f \end{aligned}$$

où la dernière ligne se justifie en notant que f peut toujours s'écrire comme l'intersection de tous les filtres premiers qui le contiennent. Lorsque tous les filtres premiers qui contiennent f ont d_1 comme élément, on est contraint d'avoir $d_1 \in f$ (même chose pour d_2). Nous avons donc bien montré que f est un filtre premier. ∎

Le lecteur remarquera que la propriété 4 de la proposition précédente est une généralisation de la proposition 1.3.2 (i.e. la proposition 1.3.2 est un conséquence immédiate de 4). De plus, nous avons le corollaire suivant qui nous donne une représentation canonique pour les éléments de $D^{*\#}$ en termes d'éléments provenant de D.

COROLLAIRE 1.5.1 **(Représentation des éléments de $D^{*\#}$)** *Soit D un treillis distributif borné et $X \in D^{*\#}$ quelconque. On a la représentation suivante de X en termes des éléments provenant de D :*

$$X = \bigvee_{p\in X} \bigwedge_{d\in p} e_D(d)$$

PREUVE: Comme $D^{*\#}$ est engendré par ses éléments premiers (qui sont tous de la forme $\uparrow p$ pour $p \in D^*$), on peut écrire X comme le suprema des éléments complètement premiers qui lui sont inférieurs. Toutefois,

$$\uparrow p \leq X \iff \uparrow p \subseteq X \iff p \in X$$

de telle sorte que

$$X = \bigvee_{\uparrow p \leq X} \uparrow p = \bigvee_{p \in X} \uparrow p = \bigvee_{p \in X} \bigwedge_{d \in p} e_D(d)$$

où cette dernière égalité a été démontrée lors de la preuve de l'énoncé 3 de la proposition précédente. ∎

Comme nous l'avons déjà mentionné, les cinq propriétés de la proposition 1.5.1 n'ont pas été énoncées ensembles par hasard. Ces propriétés caractérisent l'évaluation de Makkai/Reyes à isomorphisme près. Nous verrons en effet dans la proposition suivante que si un morphisme $\dot{\cdot} : D \longrightarrow \hat{D}$ satisfait les mêmes propriétés que l'évaluation dans la proposition 1.5.1 i.e. :

1. $\hat{D} \in |\mathbb{P}\mathrm{g}|$
2. $\dot{()} \in \mathbb{L}\mathrm{at}$
3. $\forall X \in \hat{D} \ \left[X \in \mathfrak{Irr}(\hat{D}) \Longrightarrow X = \bigwedge_{\{d \in D \mid X \leq \dot{d}\}} \dot{d}\right]$
4. $\forall d \in D \, \forall \{d_i\}_{i \in I} \subseteq D \ \left[\bigwedge_{i \in I} \dot{d_i} \leq \dot{d} \Longrightarrow \exists I'_{\text{fini}} \subseteq I \ \ \bigwedge_{i \in I'} d_i \leq d\right]$
5. Soit $X \in \hat{D}$ tel que
$$X = \bigwedge_{i \in I} \dot{x}_i$$
pour une certaine famille d'éléments de D : $\{x_i\}_{i \in I}$. Si X satisfait la propriété suivante :
$$\forall n \in \mathbb{N} \, \forall \{d_j\}_{i=1}^{n} \subseteq D \ \left[X \leq \bigvee_{j=1}^{n} \dot{d}_j \Longrightarrow \exists\, 1 \leq j_0 \leq n \ \ X \leq \dot{d}_{j_0}\right]$$
alors X est complètement premier dans $\hat{D}$ i.e. $X \in \mathfrak{Irr}\left(\hat{D}\right)$.

alors '$\dot{\cdot}$' est essentiellement l'évaluation. Ces propriétés nous donnent donc une sorte d'axiomatique pour déduire des propriétés de l'évaluation. Cette caractérisation de l'évaluation se trouve originalement dans **[25]** (p.36). Une légère erreur de formulation y est cachée dans la dernière propriété. Elle nous a été signalée par Makkai avec les ajustements nécessaires. Voici donc le résultat annoncé.

PROPOSITION 1.5.2 **(Conditions suffisantes pour l'universalité)** *Soit D un treillis distributif borné et $\hat{D}$ un treillis complet. Si une application $\cdot : D \longrightarrow \hat{D}$ satisfait les conditions de la page 27, alors $\dot{()}$ satisfait la propriété universelle de $D^{*\#}$ i.e. si $L \in |\mathbb{P}\mathrm{g}|$ et $D \xrightarrow{h} L \in \mathbb{L}\mathrm{at}$, alors il existe un unique morphisme de treillis complets : $\hat{D} \xrightarrow{\bar{h}} L$ qui fait commuter*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\dot{()}"] \arrow[dr, "h"'] & \hat{D} \arrow[d, dashed, "\bar{h}"] \\ & L \end{tikzcd}$$

PREUVE: Le lecteur trouvera cette preuve dans l'article original de Makkai/Reyes [25] qui est juste malgré le fait qu'une hypothèse manquait. Nous voyons dans cette preuve que cette hypothèse est vérifiée. ∎

COROLLAIRE 1.5.2 **(Caractérisation de l'évaluation)** *Si $\cdot : D \longrightarrow \hat{D}$ satisfait les propriétés 1 à 5 de la page 27 alors il existe un unique isomorphisme $\overline{e_D} : \hat{D} \longrightarrow D^{*\#}$ tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\dot{()}"] \arrow[dr, "e_D"'] & \hat{D} \arrow[d, "\overline{e_D}"] \\ & D^{*\#} \end{tikzcd}$$

PREUVE: Il suffit d'appliquer les deux propriétés universelles tour à tour. Pour voir que les deux morphismes qu'elles induisent sont inverses l'un par rapport à l'autre, il suffit de voir que l'identité peut jouer le rôle de leur composition dans un diagramme adéquat. ∎

Ainsi, non seulement nous avons donné des propriétés de e_D, mais nous en avons assez données pour que e_D soit essentiellement uniquement déterminé par ces propriétés.

1.6. Rafinement de la propriété universelle du double dual

Nous avons jusqu'à maintenant établi une propriété universelle pour la construction du double dual et nous avons même donné des propriétés caractérisant cette propriété universelle à isomorphisme près. Il est naturel de se demander à ce moment si cette propriété universelle est optimale. Expliquons ce que nous voulons dire par "optimale". L'évaluation allant de D dans le double dual $D^{*\#}$, comme nous l'avons vu, est universelle parmis les morphismes ayant D comme domaine et des treillis engendrés par leurs éléments premiers $L \in \mathbb{P}\mathrm{g}$. Pouvons-nous étendre cette classe $\mathbb{P}\mathrm{g}$ à une classe plus grande de treillis ? Une propriété universelle sera optimale si elle est décrite dans la plus grande classe possible de treillis pour laquelle on a l'universalité. Dans notre cas particulier, $\mathbb{P}\mathrm{g}$ est déjà une classe très vaste de treillis, mais nous pouvons faire mieux. Voici une classe de treillis encore plus grande pour laquelle on a l'universalité de l'évaluation.

Définition 1.6.1 **(Treillis complètement distributifs)** *Soit L un treillis complet. On dit que L est complètement distributif s'il satisfait l'une des deux lois équivalentes de distributivité infinie suivantes. Pour une famille quelconque d'éléments $\{x_{ij}\}_{i\in I\,,\,j\in J_i} \subseteq L$:*

1. $$\bigvee_{i\in I}\bigwedge_{j\in J_i} x_{ij} = \bigwedge_{\vec{\jmath}\in\prod_{i\in I} J_i}\bigvee_{i\in I} x_{i\vec{\jmath}(i)}$$

2. $$\bigwedge_{i\in I}\bigvee_{j\in J_i} x_{ij} = \bigvee_{\vec{\jmath}\in\prod_{i\in I} J_i}\bigwedge_{i\in I} x_{i\vec{\jmath}(i)}$$

Les morphismes entre des treillis complètement distributifs sont les morphismes de treillis complets (préservant les suprema et infima quelconques). On note par $\mathbb{C}\mathrm{d}$ la catégorie des treillis complètement distributifs.

Pour obtenir plus de détails sur cette notion je réfère le lecteur aux articles de Raney dont **[32]** et **[33]** où on trouvera la preuve de l'équivalence entre ces deux lois duales de distributivité infinie. Cette preuve utilise l'axiome du choix et ne peut donc pas se reproduire dans tous les topos. L'étude des treillis complètement distributifs avec une approche constructive a été faite de façon exhaustive par Wood *et al* dans une longue série d'articles voir par exemple

[7] pour une introduction. Leur approche à la distributivité complète dans les topos définis sur des topos de base arbitraires est très intéressante et simplifie grandement le traitement de certains résultats classiques dont le théorème de Raney. Il serait très intéressant de trouver une ou plusieurs versions constructives de la construction du double dual de Makkai/Reyes. Bien sûr, ces versions devraient s'écraser en une seule lorsque le topos de base est booléen comme c'est le cas dans le cadre de cette thèse.

La catégorie des treillis complètement distributifs contient une sous-catégorie pleine bien connue que nous avons abordée soit : la catégorie $\mathbb{P}\mathbb{g}$ des treillis engendrés par leurs éléments complètement premiers. En effet, nous avons vu à la proposition 1.2.4 que cette dernière catégorie est équivalente à la catégorie $\mathbb{P}\mathbb{o}^{\mathrm{op}}$ via le foncteur $(\cdot)^{\#}$. Cependant, si $P \in |\mathbb{P}\mathbb{o}|$, alors $P^{\#}$ est un treillis complètement distributif car c'est un sous-treillis complet de l'algèbre de Boole complète des sous-ensembles de $|P|$: $\mathcal{P}(P)$ (qui est bien connue comme étant complètement distributive dans la théorie des ensembles avec l'axiome du choix). Comme tous les objets de $\mathbb{P}\mathbb{g}$ sont de cette forme, on a démontré que :

PROPOSITION 1.6.1 **($\mathbb{C}\mathbb{d}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathbb{P}\mathbb{g}$)** *La catégorie des treillis engendrés par leurs éléments complètement premiers $\mathbb{P}\mathbb{g}$ est une sous-catégorie pleine de la catégorie des treillis complètement distributifs $\mathbb{C}\mathbb{d}$.*

Les treillis engendrés par leurs éléments premiers sont des treillis dans lesquels nous pouvons raisonner avec des éléments (les premiers) comme dans les anneaux d'ensembles (les sous-treillis complets de $\mathcal{P}(X)$ pour un ensemble X). Il n'est donc pas du tout étonnant que ces treillis soient complètement distributifs, car les suprema et infima dans ces structures sont essentiellement la réunion et l'intersection.

La proposition suivante élargit la portée de la propriété universelle du double dual à la classe des treillis complètement distributifs comme nous l'avons annoncé plus haut.

PROPOSITION 1.6.2 **(Propriété universelle étendue du double dual)** *Soit D un treillis distributif borné, L un treillis complètement distributif et $D \xrightarrow{h} L$ un morphisme de treillis bornés. Il existe un unique morphisme de treillis complets $D^{*\#} \xrightarrow{\bar{h}} L$ tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "e_D"] \arrow[dr, "h"'] & D^{*\#} \arrow[d, dotted, "\bar{h}"] \\ & L \end{tikzcd}$$

On dit ainsi que e_D est universel parmis les morphismes de D dans les treillis complètement distributifs.

PREUVE: Je donne ici une preuve due a Ghilardi et Meloni qui n'est pas publiée. Comme nous l'avons vu au corollaire 1.5.1, un élément $X \in D^{*\#}$ peut toujours s'écrire comme :

$$X = \bigvee_{p \in X} \bigwedge_{d \in p} e_D(d)$$

On a ainsi directement l'unicité de $\bar{h}$, car puisque $\bar{h}$ doit préserver tous les suprema et infima et doit faire commuter le diagramme dessiné plus haut ; on a

$$\begin{aligned} \bar{h}(X) &= \bar{h}\left(\bigvee_{p \in X} \bigwedge_{d \in p} e_D(d)\right) \\ &= \bigvee_{p \in X} \bigwedge_{d \in p} \bar{h}\left(e_D(d)\right) \\ &= \bigvee_{p \in X} \bigwedge_{d \in p} h(d) \end{aligned}$$

Ainsi, l'unicité de $\bar{h}$ est assurée par les propriétés que nous lui imposons. Il ne nous reste donc qu'à montrer que $\bar{h}$ préserve les suprema et infima quelconques. La préservation des suprema est facile à démontrer. Commençons par cela. On suppose qu'on a une famille $\{X_i\}_{i\in I}$ d'éléments de $D^{*\#}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\bar{h}\left(\bigvee_{i\in I} X_i\right) &= \bar{h}\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right)\\
&= \bigvee_{p\in \bigcup_{i\in I} X_i} \bigwedge_{d\in p} h(d)\\
&\overset{(*)}{=} \bigvee_{i\in I} \bigvee_{p\in X_i} \bigwedge_{d\in p} h(d)\\
&= \bigvee_{i\in I} \bar{h}(X_i)
\end{aligned}$$

où $(*)$ se justifie facilement en notant les deux évidences suivantes :

$$\begin{array}{ll}
(\leq) & \forall p \in \bigcup_{i\in I} X_i \quad \bigwedge_{d\in p} h(d) \leq \bigvee_{i\in I} \bigvee_{p\in X_i} \bigwedge_{d\in p} h(d) \\
(\geq) & \forall i \in I\ \forall p \in X_i \quad \bigwedge_{d\in p} h(d) \leq \bigvee_{p\in \bigcup_{i\in I} X_i} \bigwedge_{d\in p} h(d)
\end{array}$$

Nous devrons être plus délicats avec la préservation des infima. Notons tout d'abord que, puisque $\bar{h}$ préserve les suprema quelconques, il préserve automatiquement l'ordre (i.e. $\bar{h}$ est monotone). En effet, tout morphisme préservant les suprema binaires préserve automatiquement l'ordre ; c'est déjà suffisant à ce niveau. Ceci nous permet de démontrer une des deux inégalités requises. En effet, on a alors :

$$\cfrac{\bar{h}\left(\bigwedge_{j\in I} X_j\right) \leq \bigwedge_{i\in I} \bar{h}(X_i)}{\cfrac{\forall i \in I\ \ \bar{h}\left(\bigcap_{j\in I} X_j\right) \leq \bar{h}(X_i)}{\forall i \in I\ \ \bigcap_{j\in I} X_j \subseteq X_i} \ \uparrow}$$

Pour démontrer l'autre direction, nous appliquons les deux lois de distributivité infinie, une pour chaque côté de l'inégalité :

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\bigwedge_{i\in I}\bar{h}(X_i) \leq \bar{h}\left(\bigwedge_{j\in I} X_j\right)}{\bigwedge_{i\in I}\bigvee_{p\in X_i}\bigwedge_{d\in p} h(d) \leq \bigvee_{p\in\bigcap_{j\in I}X_j}\bigwedge_{d\in p} h(d)}}{\bigvee_{\vec{p}\in\prod_{i\in I}X_i}\bigwedge_{i\in I}\bigwedge_{d\in\vec{p}(i)} h(d) \leq \bigwedge_{\vec{d}\in\prod_{p\in\bigcap_{j\in I}X_j} p}\ \bigvee_{p\in\bigcap_{j\in I}X_j} h\left(\vec{d}(p)\right)}}{\forall\vec{p}\in\prod_{i\in I}X_i\ \forall\vec{d}\in\prod_{p\in\bigcap_{j\in I}X_j} p\ \bigwedge_{i\in I}\bigwedge_{d\in\vec{p}(i)} h(d) \leq \bigvee_{p\in\bigcap_{j\in I}X_j} h\left(\vec{d}(p)\right)}$$

Prenons

$$\vec{p}\in\prod_{i\in I}X_i \qquad \vec{d}\in\prod_{p\in\bigcap_{j\in I}X_j} p$$

quelconques. Pour démontrer cette dernière ligne, on considère

$$f \equiv \left\langle \bigcup_{i\in I}\vec{p}(i)\right\rangle \qquad I \equiv \left\langle \left\{\vec{d}(p)\right\}_{p\in\bigcap_{j\in I}X_j}\right\rangle$$

où les crochets veulent dire respectivement "filtre engendré par" et "idéal engendré par". On a que f et I ont une intersection non-vide. En effet, si on avait au contraire que $f \cap I = \emptyset$, alors, par le théorème d'existence des filtres premiers, on aurait l'existence d'un filtre premier $q \in D^*$ tel que $q \cap I = \emptyset$ et $f \subseteq q$. Mais puisque pour chaque i on a $\vec{p}(i) \in X_i$ et $\vec{p}(i) \subseteq f \subseteq q$, on a que $q \in \bigcap_{i\in I} X_i$. Ceci est impossible, car dans ce cas

$$\vec{d}(q) \in I \quad \text{et} \quad \vec{d}(q) \in q$$

et ceci entre en contradiction avec le fait que q et I soient disjoints. Ainsi, nous avons montré que f et I sont non-disjoints. Soit $d_0 \in f \cap I$. Par définition de f et I on a qu'il existe $i_1, \ldots, i_n \in I$ avec des

$$d_{i_1} \in \vec{p}(i_1), \ldots, d_{i_n} \in \vec{p}(i_n)$$

associés et il doit exister

$$p_1, \ldots, p_m \in \bigcap_{i\in I} X_i$$

tels que

$$d_{i_1} \wedge \cdots \wedge d_{i_n} \leq d_0 \leq \vec{d}(p_1) \vee \cdots \vee \vec{d}(p_m)$$

En appliquant h à ces inégalités on obtient :

$$\begin{aligned}\bigwedge_{i\in I}\bigwedge_{d\in\vec{p}(i)} h(d) &\leq h(d_{i_1})\wedge\cdots\wedge h(d_{i_n})\\ &\leq h(d_0)\\ &\leq h\left(\vec{d}(p_1)\right)\vee\cdots\vee h\left(\vec{d}(p_m)\right)\\ &\leq \bigvee_{p\in\bigcap_{j\in I}X_j} h\left(\vec{d}(p)\right)\end{aligned}$$

et c'est justement ce que nous voulions démontrer. ∎

Nous savons maintenant que l'évaluation dans le double dual est universelle parmis les morphismes de treillis dans un treillis complètement distributif. Avons-nous vraiment fait un pas en avant ? Connaissons-nous un exemple de treillis complètement distributif qui n'est pas engendré par ses éléments complètement premiers ? La réponse est oui et cet exemple est bien plus proche de notre intuition qu'on le croit :

$$L \equiv ([0,1], \leq, \inf, \sup)$$

est l'ensemble des nombres réels entre 0 et 1 (bornes incluses) ordonnés avec l'ordre linéaire habituel. La propriété de complétude des nombres réels nous assure l'existence du suprema et de l'infima de tout sous-ensemble non-vide de $\emptyset \neq A \subseteq [0,1]$. De plus, on a trivialement $\sup\emptyset = 0$ et $\inf\emptyset = 1$. Donc L est un treillis complet. De plus, il est facile de voir que tout ordre complet linéaire est un treillis complètement distributif (voir [7]). Notre L est donc complètement distributif. Pour montrer que L n'est pas engendré par ses éléments premiers on montre que L ne possède aucun élément complètement premier. En effet, donné $x \in [0,1]$ quelconque on a toujours

$$x \leq \sup\{a \in [0,1] \mid a < x\}$$

C'est en fait toujours une égalité ! Mais pourtant,

$$\forall a \in \{a \in [0,1] \mid a < x\} \quad x \nleq a$$

d'où x n'est pas complètement $\bigvee$-irréductible (x n'est pas complètement premier). Donc L n'est pas engendré par ses éléments premiers.

Nous voyons que la propriété universelle du double dual s'applique maintenant à une classe plus grande de treillis : la classe des treillis complètement distributifs. Comment pouvons-nous nous assurer que cette classe est la meilleure possible ? La théorie des monades vient ici à notre rescousse pour résoudre cette question.

Avant de s'attaquer au résultat principal de cette section nous devons définir un foncteur qui est une version covariante du foncteur contravariant préalablement défini $(\cdot)^{\#}$.

DÉFINITION 1.6.2 **(Le foncteur $\mathcal{P}_{\uparrow}(\cdot)$)** *On définit le foncteur*

$$\mathcal{P}_{\uparrow}(\cdot) : \mathbb{P}\mathrm{o} \longrightarrow \mathbb{P}\mathrm{o}$$

en posant pour $L \in |\mathbb{P}\mathrm{o}|$:

$$\mathcal{P}_{\uparrow}(L) \equiv L^{\#}$$

et pour $L \xrightarrow{f} M \in \mathbb{P}\mathrm{o}$ on définit $\mathcal{P}_{\uparrow}(f) : \mathcal{P}_{\uparrow}(L) \longrightarrow \mathcal{P}_{\uparrow}(M)$ en posant

$$\mathcal{P}_{\uparrow}(f)(X) \equiv \{m \in M \mid \exists l \in X \;\; f(l) \leq m\}$$

pour $X \in \mathcal{P}_{\uparrow}(L)$. De plus, nous avons un (mono)morphisme d'ensembles partiellement ordonnés

$$L \xrightarrow{\uparrow_L} \mathcal{P}_{\uparrow}(L)$$

qui envoie un élément de L sur l'ensemble des éléments de L qui sont plus grand ou égal à cet élément i.e. pour $l_0 \in L$ on a

$$\uparrow_L l_0 \equiv \{l \in L \mid l_0 \leq l\}$$

Clairement, $\mathcal{P}_{\uparrow}(\cdot)$ est un foncteur. On remarque immédiatement que les ensembles partiellement ordonnés de la forme $\mathcal{P}_{\uparrow}(L)$ sont complets et que pour un morphisme $L \xrightarrow{M} \in \mathbb{P}\mathrm{o}$ on a $\mathcal{P}_{\uparrow}(f) \dashv f^{\#}$. Ce foncteur possède de bonnes propriétés que nous résumons dans le lemme suivant. La preuve est élémentaire. Je laisse au lecteur le soin d'en vérifier la validité.

Lemme 1.6.1 **(Propriétés de $\mathcal{P}_{\uparrow}(\cdot)$)**

1. *Soit $L \in |\mathbb{P}\mathrm{o}|$. On a que L est complet si et seulement si $L \xrightarrow{\uparrow_L} \mathcal{P}_{\uparrow}(L)$ possède un adjoint à gauche. Cet adjoint à gauche sera noté*
$$\mathcal{P}_{\uparrow}(L) \xrightarrow{\bigwedge_L} L$$
et se calcule en prenant l'infimum.
2. *Pour $L, M \in |\mathbb{P}\mathrm{o}|$ deux ordres partiels complets et $L \xrightarrow{f} M \in \mathbb{P}\mathrm{o}$ on a que f préserve les infima si et seulement si le diagramme suivant commute dans $\mathbb{P}\mathrm{o}$:*
$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}_{\uparrow}(L) \arrow[r, "\mathcal{P}_{\uparrow}(f)"] \arrow[d, "\bigwedge_L"'] \arrow[dr, phantom, "\circ"] & \mathcal{P}_{\uparrow}(M) \arrow[d, "\bigwedge_M"] \\ L \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd}$$
3. *L'application $\uparrow_{(\cdot)}$ est une transformation naturelle*
$$\uparrow_{(\cdot)} : \mathbf{1}_{\mathbb{P}\mathrm{o}} \longrightarrow \mathcal{P}_{\uparrow}$$

Remarquons que l'on peut voir la dernière définition et le lemme qui la suit sous une forme duale. En effet, en appliquant l'endofoncteur $(\cdot)^{\mathrm{op}}$ (qui renverse l'ordre d'un ensemble partiellement ordonné) avant d'appliquer $\mathcal{P}_{\uparrow}$, on obtient un foncteur
$$\mathcal{P}_{\downarrow} : \mathbb{P}\mathrm{o} \longrightarrow \mathbb{P}\mathrm{o}$$
et une transformation naturelle
$$\downarrow_{(\cdot)} : \mathbf{1}_{\mathbb{P}\mathrm{o}} \longrightarrow \mathcal{P}_{\downarrow}$$
ayant des propriétés duales. Ainsi, $L \in |\mathbb{P}\mathrm{o}|$ sera complet si et seulement si $\downarrow_L : L \longrightarrow \mathcal{P}_{\downarrow}(L)$ possède un adjoint à gauche $\bigvee_L$. Un morphisme $L \xrightarrow{f} M \in \mathbb{P}\mathrm{o}$ entre deux ensembles partiellement ordonnés complets préservera les infima si et seulement si le diagramme suivant commute dans $\mathbb{P}\mathrm{o}$:
$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}_{\downarrow}(L) \arrow[r, "\mathcal{P}_{\downarrow}(f)"] \arrow[d, "\bigvee_L"'] \arrow[dr, phantom, "\circ"] & \mathcal{P}_{\downarrow}(M) \arrow[d, "\bigvee_M"] \\ L \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd}$$

Le lemme suivant nous donne une propriété des co-égalisateurs dans $\mathbb{P}\mathrm{o}$. C'est un résultat formulé en termes de théorie des catégories enrichies. Sans entrer dans les détails, nous pouvons simplement remarquer que la théorie des catégories enrichies étudie des catégories sur lequelles les ensembles de morphismes entre deux objets $\mathbf{Hom}(C, D)$ peuvent être munis de structures. Par exemple, une $\mathbb{P}\mathrm{o}$-catégorie est une catégorie pour laquelle $\mathbf{Hom}(C, D)$ est un ensemble partiellement ordonné. Il y a aussi des notions de $\mathbb{P}\mathrm{o}$-limites et

$\mathbb{P}\mathrm{o}$-co-limites. Comme ces notions ne jouent qu'un rôle très mineur dans la présente thèse, je n'y définirai pas ces concepts en me contentant de référer le lecteur à [**28**]. Énonçons maintenant le lemme mentionné.

LEMME 1.6.2 *Les co-égalisateurs dans $\mathbb{P}\mathrm{o}$ sont aussi des $\mathbb{P}\mathrm{o}$-co-égalisateurs.*

Nous avons maintenant tous les outils pour formuler et démontrer le résultat principal qui nous a été signalé par Anders Kock.

PROPOSITION 1.6.3 **(Monadicité du double dual)** *Le foncteur oubliant $U : \mathbb{C}\mathrm{d} \longrightarrow \mathbb{D}\mathrm{l}$ est monadique.*

PREUVE: Cette preuve nous a été transmise par Richard Wood. Nous utilisons le théorème de Beck pour la monadicité. Le lecteur trouvera ce théorème dans tout livre discutant de la théorie des monades (la terminologie "triples" est aussi utilisée pour les monades). Voir par exemple : [**1**], [**20**] ou [**21**]. Le théorème de monadicité de Beck dit qu'un foncteur $U : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{C}$ est monadique si et seulement les conditions suivantes sont satisfaites :

1. U a un adjoint à gauche,
2. U réfléchit les isomorphismes et
3. Si une paire parallèle de $\mathbb{B}$ est U-contractile et réflexive, alors cette paire possède un co-égalisateur dans $\mathbb{B}$ et U préserve ce co-égalisateur.

Dans notre cas particulier, U possède bien un adjoint à gauche : c'est le foncteur double-dual $(\cdot)^{*\#}$. Il est aussi clair que U réfléchit les isomorphismes, car un morphisme dans $\mathbb{C}\mathrm{d}$ qui est un isomorphisme de treillis est automatiquement un isomorphisme de treillis complètement distributifs (en fait un isomorphisme d'ensembles partiellement ordonnés entre deux treillis complètement distributifs est déjà un isomorphisme dans $\mathbb{C}\mathrm{d}$). La seule propriété non-triviale est la dernière. Pour la démontrer il suffit de montrer que si on prend une paire parallèle dans $\mathbb{C}\mathrm{d}$ qui possède un co-égalisateur absolu quand on la transporte dans $\mathbb{D}\mathrm{l}$, alors ce co-égalisateur est aussi un co-égalisateur dans $\mathbb{C}\mathrm{d}$. En effet, par définition, une paire parallèle est U-contractile si U l'envoie sur une paire dans $\mathbb{D}\mathrm{l}$ qui possède un co-égalisateur contractile et donc en particulier un co-égalisateur absolu. Si on montre que ce co-égalisateur absolu dans $\mathbb{D}\mathrm{l}$ vit réellement dans la catégorie $\mathbb{C}\mathrm{d}$, alors la paire originale aura bien son co-égalisateur et trivialement U le préservera. Montrons donc qu'un co-égalisateur absolu dans $\mathbb{D}\mathrm{l}$ d'une paire provenant de $\mathbb{C}\mathrm{d}$ est un co-égalisateur dans $\mathbb{C}\mathrm{d}$.

Supposons qu'on ait une paire parallèle

$$L \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} M \in \mathbb{C}\mathrm{d}$$

qui possède un co-égalisateur absolu dans la catégorie des treillis distributifs $\mathbb{D}\mathrm{l}$. Supposons que q soit ce co-égalisateur comme dans le diagramme suivant :

$$L \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} M \overset{q}{\twoheadrightarrow} Q$$

En appliquant le foncteur oubliant qui va de $\mathbb{D}\mathrm{l}$ dans $\mathbb{P}\mathrm{o}$ on obtient un co-égalisateur absolu dans la catégorie des ensembles partiellements ordonnés et ; comme l'indique le lemme 1.6.2, ces co-égalisateurs sont aussi des $\mathbb{P}\mathrm{o}$-co-égalisateurs. Considérons maintenant le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_\downarrow(L) \arrow[r, shift left, "\mathcal{P}_\downarrow(f)"] \arrow[r, shift right, "\mathcal{P}_\downarrow(g)"'] \arrow[d, bend right=40, "\bigvee_L"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & \mathcal{P}_\downarrow(M) \arrow[r, two heads, "\mathcal{P}_\downarrow(q)"] \arrow[d, bend right=40, "\bigvee_M"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & \mathcal{P}_\downarrow(Q) \arrow[d, dotted, bend right=40, "s"'] \\
L \arrow[u, shift right=2, "\downarrow_L"'] \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & M \arrow[u, shift right=2, "\downarrow_M"'] \arrow[r, two heads, "q"'] & Q \arrow[u, shift right=2, "\downarrow_Q"']
\end{tikzcd} \tag{1.6.1}$$

dans lequel nous avons appliqué le foncteur $\mathcal{P}_\downarrow(\cdot)$ à notre co-égalisateur absolu (nous obtenons donc encore un co-égalisateur). De plus, nous avons ajouté les plongements naturels de chaque ensemble partiellement ordonné dans l'ensemble de ses parties fermées supérieurement : $\downarrow_L$, $\downarrow_M$ et $\downarrow_Q$ ainsi que les adjoints à gauche pour $\downarrow_L$ et $\downarrow_M$ qui existent car L et M sont complets (voir le commentaire suivant le lemme 1.6.1). Le s qui apparait dans le diagramme est quant à lui donné par la propriété universelle du co-égalisateur $\mathcal{P}_\downarrow(q)$ commé étant l'unique morphisme allant de $\mathcal{P}_\downarrow(Q)$ vers Q tel que $s \circ \mathcal{P}_\downarrow(q) = q \circ \bigvee_M$. On remarque également que tous les rectangles intéressants de la partie de gauche commutent. Plus précisément, on a :

$$\mathcal{P}_\downarrow(f) \circ \downarrow_L = \downarrow_M \circ f \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_\downarrow(g) \circ \downarrow_L = \downarrow_M \circ g$$

par la naturalité de $\downarrow_{(\cdot)}$ énoncée après le lemme 1.6.1. De plus, la même chose se produit avec les $\bigvee$:

$$f \circ \bigvee_L = \bigvee_M \circ \mathcal{P}_\downarrow(f) \quad \text{et} \quad g \circ \bigvee_L = \bigvee_M \circ \mathcal{P}_\downarrow(g)$$

car f,g,$\mathcal{P}_\downarrow(f)$ et $\mathcal{P}_\downarrow(g)$ sont tous des morphismes de treillis complets et donc préservent les suprema.

Montrons que s est adjoint à gauche pour $\downarrow_Q$ ceci montrera que Q est complet. En suivant dans le diagramme on remarque que

$$\begin{aligned} s \circ \downarrow_Q \circ q &= s \circ \mathcal{P}_{\downarrow}(q) \circ \downarrow_M \\ &= q \circ \bigvee_M \circ \downarrow_M \\ &= q \circ 1_M \\ &= q \\ &= 1_Q \circ q \end{aligned}$$

et comme q est épi (et donc simplifiable à droite), on en conclut que

$$s \circ \downarrow_Q = 1_Q$$

Pour démontrer qu'on a bien la relation d'adjonction annoncée, il ne nous reste qu'à vérifier que

$$1_{\mathcal{P}_{\downarrow}(Q)} \overset{(?)}{\leq} \downarrow_Q \circ s$$

On remarque premièrement que comme la ligne supérieure du diagramme 1.6.1 est un $\mathbb{P}\mathrm{o}$-co-égalisateur, on a que le diagramme suivant est un égalisateur dans $\mathbb{P}\mathrm{o}$:

$$\mathbf{Hom}_{\mathbb{P}\mathrm{o}}\left(\mathcal{P}_{\downarrow}(Q), \mathcal{P}_{\downarrow}(Q)\right) \xrightarrow{(\cdot)\circ\mathcal{P}_{\downarrow}(q)} \mathbf{Hom}_{\mathbb{P}\mathrm{o}}\left(\mathcal{P}_{\downarrow}(M), \mathcal{P}_{\downarrow}(Q)\right) \underset{(\cdot)\circ\mathcal{P}_{\downarrow}(g)}{\overset{(\cdot)\circ\mathcal{P}_{\downarrow}(f)}{\rightrightarrows}} \mathbf{Hom}_{\mathbb{P}\mathrm{o}}\left(\mathcal{P}_{\downarrow}(L), \mathcal{P}_{\downarrow}(Q)\right)$$

et on a que

$$\begin{array}{c|l} \forall X \in \mathcal{P}_{\downarrow}(M)\ \forall m \in X \ \ m \leq \bigvee_M X & \\ \hline \forall X \in \mathcal{P}_{\downarrow}(M)\ \forall m \in X \ \ q(m) \leq q\left(\bigvee_M X\right) & \downarrow \\ \hline \forall X \in \mathcal{P}_{\downarrow}(M)\ \forall m \in X \ \ \mathcal{P}_{\downarrow}(q)(X) \subseteq \downarrow_Q\left(q\left(\bigvee_M X\right)\right) & \downarrow \\ \hline \mathcal{P}_{\downarrow}(q) \leq \downarrow_Q \circ q \circ \bigvee_M & \\ \hline \mathcal{P}_{\downarrow}(q) \leq \downarrow_Q \circ s \circ \mathcal{P}_{\downarrow}(q) & \\ \hline \left(1_{\mathcal{P}_{\downarrow}(Q)}\right) \circ \mathcal{P}_{\downarrow}(q) \leq \left(\downarrow_Q \circ s\right) \circ \mathcal{P}_{\downarrow}(q) & \\ \hline 1_{\mathcal{P}_{\downarrow}(Q)} \leq \downarrow_Q \circ s & \end{array}$$

et l'équivalence de la dernière ligne se justifie justement par le fait que $(\cdot)\circ\mathcal{P}_{\downarrow}(q)$ est un monomorphisme. On a donc montré que $s \dashv \downarrow_Q$, donc Q est complet et s se calcule en prenant le suprema de la partie fermée supérieurement. Comme le diagramme de droite avec s et $\bigvee_M$ commute, on a que q préserve les suprema.

Nous pouvons répéter les mêmes étapes que ci-dessus avec le foncteur $\mathcal{P}_{\uparrow}(\cdot)$ et nous pourrions montrer que q préseve aussi les infima. Je laisse ces détails au lecteur car ils sont tout à fait symétriques à ceux présentés ci-dessus.

Nous voyons donc que Q est l'image par q (un morphisme de $\mathbb{P}\mathrm{o}$ préservant tous les infima et suprema) de $M \in |\mathbb{C}\mathrm{d}|$; on en conclut que $Q \in |\mathbb{C}\mathrm{d}|$ (voir le théorème 13 dans [7]) d'où $M \xrightarrow{q} Q \in \mathbb{C}\mathrm{d}$. Dirigeons maintenant nos efforts vers la propriété universelle de q en tant que co-égalisateur dans $\mathbb{C}\mathrm{d}$. Supposons qu'on ait affaire à $M \xrightarrow{h} T \in \mathbb{C}\mathrm{d}$ tel que $h \circ f = h \circ g$. Si on transporte le tout dans $\mathbb{P}\mathrm{o}$ on obtient encore une fois l'existence d'un unique $Q \xrightarrow{k} T \in \mathbb{P}\mathrm{o}$ tel que $k \circ q = h$; comme dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & M \arrow[r, two heads, "q"] \arrow[dr, "h"'] & Q \arrow[d, dashed, "k"] \arrow[dl, phantom, "\circ"] \\
 & & T
\end{tikzcd}$$

Nous désirons montrer que k préserve les suprema et infima arbitraires. Nous utiliserons encore la même technique. Appliquons le foncteur $\mathcal{P}_{\downarrow}(\cdot)$ au triangle de droite de façon à obtenir le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{P}_{\downarrow}(M) \arrow[r, two heads, "\mathcal{P}_{\downarrow}(q)"] \arrow[dl, bend right, "\bigvee_M"'] \arrow[drr, "\mathcal{P}_{\downarrow}(h)" near end] & & \mathcal{P}_{\downarrow}(Q) \arrow[dll, bend right, "\bigvee_Q"'] \arrow[d, "\mathcal{P}_{\downarrow}(k)"] \\
M \arrow[ur, "\downarrow_M"'] \arrow[r, two heads, "q"] \arrow[dr, "h"'] & Q \arrow[urr, "\downarrow_Q"'] \arrow[d, "k"] & & \mathcal{P}_{\downarrow}(T) \arrow[dll, bend right, "\bigvee_T"'] \\
 & T \arrow[urr, "\downarrow_T"'] & &
\end{tikzcd}$$

dans lequel on remarque que toutes les faces commutent pour des raisons déjà mentionnées sauf le rectangle de droite formé avec les $\bigvee$ dont la commutativité est équivalente à la préservation des suprema par h. Comme nous voulons précisément montrer que h préserve les supréma, nous montrons que ce rectangle commute :

$$\begin{aligned}
\bigvee_T \circ \mathcal{P}_{\downarrow}(k) \circ \mathcal{P}_{\downarrow}(q) &= \bigvee_T \circ \mathcal{P}_{\downarrow}(h) \\
&= h \circ \bigvee_M \\
&= k \circ q \circ \bigvee_M \\
&= k \circ \bigvee_Q \circ \mathcal{P}_{\downarrow}(q)
\end{aligned}$$

Ainsi, on peut conclure que

$$\bigvee_T \circ \mathcal{P}_{\downarrow}(k) = k \circ \bigvee_Q$$

car $\mathcal{P}_{\downarrow}(q)$ est épi et donc simplifiable à droite. Donc, toujours par le commentaire suivant le lemme 1.6.1, ceci veut dire que k préserve les suprema et en répétant le raisonnement avec le foncteur $\mathcal{P}_{\uparrow}(\cdot)$, on obtient que k préserve les infima. Nous avons donc démontré la propriété universelle de q dans $\mathbb{Cd}$. Ainsi q est le co-égalisateur de f et g dans $\mathbb{Cd}$. ∎

La monadicité du foncteur oubliant $U : \mathbb{Cd} \longrightarrow \mathbb{Dl}$ nous assure l'optimalité de la propriété universelle du double dual associée. En effet, nous avons jusqu'à maintenant rencontré deux propriétés universelles pour le double dual. Ces propriétés universelles correspondent respectivement aux paires de foncteurs adjoints suivantes :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Pg} \arrow[r, shift right, "U"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbb{Dl} \arrow[l, shift right, "(\cdot)^{*\#}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{Cd} \arrow[r, shift right, "U"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbb{Dl} \arrow[l, shift right, "(\cdot)^{*\#}"'] \end{tikzcd}$$

Ces deux paires d'adjoints donnent lieu au même monade. Si on considère la catégorie des paires d'adjoints donnant lieu à ce monade : dont les objets sont des paires de foncteurs adjoints

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, shift right, "U_{\mathbb{C}}"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbb{Dl} \arrow[l, shift right, "L_{\mathbb{C}}"'] \end{tikzcd}$$

tels que $U_{\mathbb{C}} \circ F = (\cdot)^{*\#}$ et les morphismes sont des triangles du type :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[dd, "F"'] \arrow[dr, shift right, "U_{\mathbb{C}}"'] & \\ & \mathbb{Dl} \arrow[ul, shift right, "L_{\mathbb{C}}"'] \arrow[dl, shift right, "L_{\mathbb{D}}"'] \\ \mathbb{D} \arrow[ur, shift right, "U_{\mathbb{D}}"'] & \end{tikzcd}$$

où $F \circ L_{\mathbb{C}} = L_{\mathbb{D}}$ et $U_{\mathbb{D}} \circ F = U_{\mathbb{C}}$. Il est bien connu que si $\mathbb{C}$ est la catégorie de Eilenberg-Moore et $U_{\mathbb{C}}$ est le foncteur oubliant canonique pour cette catégorie, alors on obtient un objet terminal dans cette catégorie. Le fait que notre foncteur oubliant de $\mathbb{Cd}$ dans $\mathbb{Dl}$ soit monadique dit simplement que l'unique morphisme dans l'objet terminal est une équivalence de catégories. Donc notre adjonction est optimale et nous pouvons en dire autant de la propriété universelle correspondante.

Au point où nous en sommes, le double dual est cerné de toute part. En effet, nous en avons donné une construction à partir de principes généraux et avons obtenus une première propriété universelle. L'unité de cette propriété universelle est e_D. Nous avons ensuite trouvé des propriétés de e_D qui la caractérisent à isomorphisme près. Finalement, nous avons étendu à la classe la plus large possible le domaine du foncteur oubliant dont $(\cdot)^{*\#}$ est l'adjoint à gauche. Ainsi, les propriétés algébriques essentielles et les propriétés catégoriques optimales ont été présentées. Loin de nous est l'idée que nous ayons épuisé la source. Mais du moins, l'essentiel de ce que nous allons utiliser ultérieurement pour le soin de notre discussion a été présenté. Nous sommes maintenant prêts à regarder la construction analogue du locale des filtres d'un treillis distributif.

1.7. Le locale des idéaux de filtres

Dans son article sur l'amalgamation dans la catégorie des algèbres de Heyting [29], Pitts fait une construction similaire à celle du double dual sur plusieurs points. Il utilise cette construction pour démontrer une propriété d'amalgamation forte dans la catégorie des algèbres de Heyting et en déduit le théorème d'interpolation de Craig pour la logique intuitionniste. Nous verrons plus loin comment nous pouvons aussi utiliser le double dual pour démontrer ce même résultat d'amalgamation forte (et plus). Nous survolerons dans cette section les détails de la construction de Pitts au niveau propositionnel.

Définition 1.7.1 **(Les treillis $\mathfrak{I}(D)$ et $\mathfrak{F}(D)$)** *Soit D un treillis distributif. On note par $\mathfrak{I}(D)$ le treillis des idéaux de D (ordonné par l'inclusion) et par $\mathfrak{F}(D)$ le treillis des filtres sur D (ordonné par l'inclusion inversée). Ces deux treillis sont distributifs et complets. Nous définissons également deux applications :*

$$\downarrow_D : D \longrightarrow \mathfrak{I}(D) \quad \uparrow_D : D \longrightarrow \mathfrak{F}(D)$$

envoyant respectivement un élément $d \in D$ vers le filtre principal ou l'idéal principal engendré par $\{d\}$.

Nous avons les propositions suivantes concernant les notions que nous venons d'introduire. Une preuve de la proposition 1.7.1 peut être trouvée dans

[13]. Les autres preuves sont élémentaires et leur démonstration est laissée à la discrétion du lecteur.

PROPOSITION 1.7.1 **(Les idéaux forment un cadre/locale)** *Pour tout treillis distributif D, $\mathfrak{I}(D)$ est un cadre.*

Notons que $\mathfrak{I}(D)$ n'est pas un co-cadre en général. On remarque par-contre que cette dernière proposition entraîne que $\mathfrak{F}(D)$ est un co-cadre (mais pas un cadre en général) car $\mathfrak{F}(D) \simeq (\mathfrak{I}(D^{op}))^{op}$.

Donnons justement un exemple de treillis distributif D pour lequel $\mathfrak{F}(D)$ n'est pas un cadre. Cet exemple est dû à Butz [2]. On prend pour D le treillis distributif (qui est en fait une algèbre de Boole) :

$$D \equiv (\mathcal{P}\mathbb{N}, \subseteq, \cap, \cup)$$

et on considère :

$$f_n \equiv \{A \in \mathcal{P}\mathbb{N} \mid n \in A\} \qquad (n \in \mathbb{N})$$
$$f \equiv \{A \in \mathcal{P}\mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus A \text{ est fini}\}$$

Clairement, les f_n et f sont des filtres sur D. De plus,

$$\bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f_n = \{\mathbb{N}\}$$

et ce filtre est l'élément le plus grand de $\mathfrak{F}(D)$ (car l'ordre dans les filtres est opposée à l'inclusion). Ainsi,

$$f \wedge \bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n = f \wedge \{\mathbb{N}\} = f$$

D'autre part, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on a

$$f \wedge f_n = \langle f \cup f_n \rangle = \{A \in \mathcal{P}\mathbb{N} \mid \exists B \in f \; \exists C \in f_n \;\; B \cap C \subseteq A\} = \mathcal{P}\mathbb{N}$$

car $\mathbb{N} \setminus \{n\} \in f$, $\{n\} \in f_n$ et $\mathbb{N} \setminus \{n\} \cap \{n\} = \emptyset$ donc n'importe quel élément de $\mathcal{P}\mathbb{N}$ est dans $f \wedge f_n$. Ainsi,

$$\bigvee_{n\in\mathbb{N}} f \wedge f_n = \mathcal{P}\mathbb{N}$$

Nous voyons bien que

$$f \wedge \bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n \neq \bigvee_{n\in\mathbb{N}} f \wedge f_n$$

donc $\mathfrak{F}(D)$ n'est pas un cadre.

PROPOSITION 1.7.2 **(Propriétés de $\downarrow$ et $\uparrow$)** *L'application $\downarrow_D$ est un morphisme de treillis conditionnellement Heyting qui préserve les infima arbitraires. L'application $\uparrow_D$ est un morphisme de treillis conditionnellement Heyting qui préserve les suprema arbitraires.*

La proposition précédente nous permet de donner la définition suivante, finalisant la construction du locale des filtres.

DÉFINITION 1.7.2 **(Le locale des filtres de D : $\phi(D)$)** *Nous notons $\phi(D) \equiv \mathfrak{I}(\mathfrak{F}(D))$ et $i_D \equiv \downarrow_{\mathfrak{F}(D)} \circ \uparrow_D$ ainsi on a défini un morphisme de treillis conditionnellement Heyting :*

$$D \rightarrowtail^{i_D} \phi(D)$$

On remarque que i_D est conservatif (i.e. c'est un monomorphisme) car clairement $\downarrow_{\mathfrak{F}(D)}$ et $\uparrow_D$ le sont. De plus $\phi(D)$ est un cadre car $\mathfrak{I}$ transforme tout treillis distributif en cadre.

PROPOSITION 1.7.3 **(Représentation des éléments de $\phi(D)$)** *Soit $J \in \phi(D)$. Alors,*

$$J = \bigvee_{f \in J} \bigwedge_{d \in f} i_D(d)$$

De plus, $\phi(\cdot)$ peut être considéré comme un foncteur $\phi(\cdot) : \mathbb{DI} \longrightarrow \mathbb{Frm}$. En effet, si $h : A \longrightarrow B \in \mathbb{DI}$, alors on pose pour $I \in \mathfrak{I}(A)$

$$\mathfrak{I}(h)(I) \equiv \{b \in B \mid \exists a \in I \;\; b \leq h(a)\} \in \mathfrak{I}(B)$$

et il est facile de vérifier que $\mathfrak{I}(h) : \mathfrak{I}(A) \longrightarrow \mathfrak{I}(B)$ est un morphisme de cadres. On pose également pour $f \in \mathfrak{F}(A)$

$$\mathfrak{F}(h)(f) \equiv \{b \in B \mid \exists a \in f \;\; h(a) \leq b\} \in \mathfrak{F}(B)$$

qui est un morphisme de co-cadres (par dualité) et donc en particulier un morphisme de treillis distributifs.

PROPOSITION 1.7.4 **(Naturalité de $i_{(\cdot)}$)** *L'assignation $i_D : D \longrightarrow \phi(D)$ pour un treillis distributif D est naturelle en D i.e. elle définit une transformation naturelle $i_{(\cdot)} : Id \longrightarrow \phi$. Autrement dit, quel que soit le morphisme de treillis distributifs $f : A \longrightarrow B$ le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "i_A"] \arrow[d, "f"'] & \phi(A) \arrow[d, "\phi(f)"] \\ B \arrow[r, tail, "i_B"'] & \phi(B) \end{tikzcd}$$

LEMME 1.7.1 **(Adjoint à droite naturel de $\mathfrak{I}(\alpha)$)** *Si $D' \xrightarrow{\alpha} D \in \mathbb{D}\mathbb{l}$ un morphisme de treillis distributifs alors $\mathfrak{I}(\alpha)$ possède un adjoint à droite α^{-1}.*

PREUVE:

$$\cfrac{\mathfrak{I}(\alpha)(J) \leq I}{\cfrac{\{d \in D \mid \exists d' \in J\ d \leq \alpha(d')\} \subseteq I}{\cfrac{[\exists d' \in J\ d \leq \alpha(d')] \Longrightarrow d \in I}{\cfrac{d'' \in J \Longrightarrow \alpha(d'') \in I}{\cfrac{J \subseteq \{d'' \in D' \mid \alpha(d'') \in I\}}{J \leq \alpha^{-1}(I)}}}}} \quad (*)$$

Le passage $(*)$ se justifie facilement comme suit. ($\Downarrow$) Soit $d'' \in J$. Par hypothèse, puisqu'il existe un $d' \equiv d'' \in J$ tel que $\alpha(d'') \leq \alpha(d') \equiv \alpha(d'')$, on peut conclure que $d \equiv d''$ est dans I comme il est requis. ($\Uparrow$) Supposons qu'il existe $d' \in J$ pour lequel $d \leq \alpha(d')$. Par hypothèse, tous les éléments de J sont envoyés dans I par α ; en particulier d'. Mais comme $d \leq \alpha(d')$ et que $\alpha(d') \in I$, on doit avoir $d \in I$ car I est un idéal. ∎

LEMME 1.7.2 **(Adjoint à gauche conditionnel de $\mathfrak{I}(\alpha)$)** *Si $D' \xrightarrow{\alpha} D \in \mathbb{D}\mathbb{l}$ possède un adjoint à gauche $\lambda : D \longrightarrow D'$ ($\lambda \dashv \alpha$), alors $\mathfrak{I}(\alpha)$ possède lui aussi un adjoint à gauche et en fait $\mathfrak{I}(\lambda) \dashv \mathfrak{I}(\alpha)$*

PREUVE:

$$\cfrac{\mathfrak{I}(\gamma)(I) \leq J}{\cfrac{\{d' \in D' \mid \exists d \in I\ d' \leq \gamma(d)\} \subseteq J}{\cfrac{[\exists d \in I\ d' \leq \gamma(d)] \Longrightarrow d' \in J}{\cfrac{e \in I \Longrightarrow \exists d'' \in J\ e \leq \alpha(d'')}{\cfrac{I \subseteq \{e \in D \mid \exists d'' \in J\ e \leq \alpha(d'')\}}{I \leq \mathfrak{I}(\alpha)(J)}}}}} \quad (**)$$

Le passage $(**)$ se justifie comme suit. ($\Downarrow$) Soit $e \in I$ quelconque. On cherche $d'' \in J$ pour lequel $e \leq \alpha(d'')$. Mais $e \leq \alpha(d'')$ revient à dire que $\gamma(e) \leq d''$. Ainsi, on pose $d'' \equiv \gamma(e)$. Par hypothèse, puisque trivialement $d'' \equiv \gamma(e) \leq \gamma(e)$ et $e \in I$, on peut conclure que $d'' \in J$. De plus,

$$\cfrac{e \leq \alpha(d'')}{\cfrac{e \leq \alpha(\gamma(e))}{\gamma(e) \leq \gamma(e)}}$$

($\Uparrow$) Soit $d' \in D'$ tel que $\exists d \in I\ d' \leq \gamma(d)$. Nous voulons montrer que $d' \in J$. Mais par hypothèse, pour tout élément $e \in I$, on a $\exists d'' \in J\ e \leq \alpha(d'')$. En particulier, pour $d \in I$, on a $\exists d'' \in J\ d \leq \alpha(d'')$ i.e. $\gamma(d) \leq d''$. Nous pouvons ainsi conclure comme voulu que $d' \in J$, car $d' \leq \gamma(d) \leq d'' \in J$ et J est un idéal. ∎

PROPOSITION 1.7.5 **(Adjoints naturels de $\phi(\alpha)$)** *Si $D' \xrightarrow{\alpha} D \in \mathbb{D}\mathbb{l}$ est un morphisme de treillis distributifs, alors $\phi(\alpha) : \phi(D') \longrightarrow \phi(D)$ a un adjoint à gauche et à droite. En fait, $\mathfrak{I}(\alpha^{-1}) \dashv \phi(\alpha) \dashv \mathfrak{F}(\alpha)^{-1}$.*

PREUVE: Soit $D' \xrightarrow{\alpha} D \in \mathbb{D}\mathbb{l}$ un morpshisme de treillis quelconque. Par le lemme 1.7.1, puisque $\mathfrak{F}(\alpha)$ est un morphisme de treillis distributifs, on a que $\mathfrak{I}(\mathfrak{F}(\alpha)) = \phi(\alpha)$ possède un adjoint à droite qui est $\mathfrak{F}(f)^{-1}$.

Ensuite, par dualité nous pouvons conclure que $\mathfrak{F}(\alpha)$ possède un adjoint à gauche α^{-1}. En effet,

$$\mathfrak{F}(\alpha) = \mathfrak{I}(\alpha^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} : \mathfrak{I}(D'^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathfrak{I}(D^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}$$

et on a vu au lemme 1.7.1 que $\mathfrak{I}(\alpha^{\mathrm{op}}) \dashv (\alpha^{\mathrm{op}})^{-1}$ et lorsqu'on applique le foncteur $(\cdot)^{\mathrm{op}}$ aux morphismes dans cette dernière adjonction, le rôle des adjoints se trouve inversé (l'adjoint à gauche devient adjoint à droite et *vice versa*). Ainsi, $\alpha^{-1} \dashv \mathfrak{F}(\alpha)$.

Finalement, par le lemme 1.7.2, $\phi(\alpha)$ possède donc lui aussi un adjoint à gauche qui est $\mathfrak{I}(\alpha^{-1})$. ∎

La proposition suivante n'a pas été étudiée dans l'article de Pitts. Elle s'inspire des propositions 1.4.2 et 1.4.3.

PROPOSITION 1.7.6 **(Fonctorialité à gauche et à droite pour ϕ)** *Soit $f : A \longrightarrow B$ un morphisme de treillis distributifs. Si f a un adjoint à gauche λ et un adjoint à droite ρ, alors tous les rectangles (sensés) du diagramme suivant commutent*

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, tail, "i_B"] \arrow[d, bend right=60, "\lambda"'] \arrow[d, bend left=60, "\rho"] \arrow[dr, phantom, "\circ\circ\circ"] & \phi(B) \arrow[d, bend right=60, "l"'] \arrow[d, bend left=60, "r"] \\
A \arrow[u, "f"] \arrow[r, tail, "i_A"'] & \phi(A) \arrow[u, "\phi f"]
\end{tikzcd}$$

où r et l sont respectivement les adjoints à droite et à gauche de $\phi(f)$ comme nous les avons définis dans la proposition 1.7.5.

PREUVE: Commençons par regarder le rectangle formé par ρ et λ (et les i). En utilisant la proposition 1.7.4, on a par simple jeu d'adjoints :

$$
\begin{array}{c}
q \in r(i_B(b)) \\ \hline
q \in \mathfrak{F}(f)^{-1}(i_B(b)) \\ \hline
\mathfrak{F}(f)(q) \in i_B(b) \\ \hline
\mathfrak{F}(f)(q) \in \downarrow\uparrow b \\ \hline
\mathfrak{F}(f)(q) \leq \uparrow b \\ \hline
\uparrow b \subseteq \mathfrak{F}(f)(q) \\ \hline
b \in \mathfrak{F}(f)(q) \\ \hline
b \in \{b' \in B \mid \exists a \in q \; f(a) \leq b'\} \\ \hline
\exists a \in q \; f(a) \leq b \\ \hline
\exists a \in q \; a \leq \rho(b) \\ \hline
\rho(b) \in q \\ \hline
\uparrow\rho(b) \subseteq q \\ \hline
q \leq \uparrow\rho(b) \\ \hline
q \in \downarrow\uparrow\rho(b) \\ \hline
q \in i_A(\rho(b))
\end{array}
$$

Regardons maintenant la commutativité du rectangle formé par λ et l.

$$
\begin{array}{c}
p \in i_A(\lambda b) \\ \hline
p \in \downarrow\uparrow\lambda b \\ \hline
p \leq \uparrow\lambda b \\ \hline
\uparrow\lambda b \subseteq p \\ \hline
\lambda b \in p \\ \hline
\forall a \in A \; \lambda b \leq a \Longrightarrow a \in P \\ \hline
\forall a \in A \; b \leq fa \Longrightarrow a \in P \\ \hline
\forall a \in A \; fa \in \uparrow b \Longrightarrow a \in P \\ \hline
\exists h \in \mathfrak{F}(B) \; b \in h \text{ et } \{a \in A \mid f(a) \in h\} \subseteq p \\ \hline
\exists h \in i_B(b) \; \{a \in A \mid f(a) \in h\} \subseteq p \\ \hline
\exists h \in i_B(b) \; f^{-1}(h) \subseteq p \\ \hline
\exists h \in i_B(b) \; p \leq f^{-1}(h) \\ \hline
p \in \{g \in \mathfrak{F}(A) \mid \exists h \in i_B(b) \; g \leq f^{-1}(h)\} \\ \hline
p \in \mathfrak{I}(f^{-1})(i_B(b)) \\ \hline
p \in l(i_B(b))
\end{array}
$$

∎

Finalement, nous regardons la propriété principale du locale des filtres pour les applications que Pitts en fait. Nous démontrerons que le double dual a exactement la même propriété à la fin du chapitre 2.

PROPOSITION 1.7.7 **(Action de $\phi(\cdot)$ sur les morphismes d'algèbre de Heyting)** *Soit $h : H \longrightarrow K \in \mathbb{H}_0$ un morphisme d'algèbres de Heyting. Alors $\phi(h) : \phi(H) \longrightarrow \phi(K)$ est un morphisme de locales ouvert.*

Cette dernière proposition devient beaucoup plus claire si on note que dire que le morphisme de locale $\phi(h)$ est ouvert équivaut à dire que l'adjoint à gauche de $\phi(h)$: $\phi(h)_!$ satisfait la condition de Frobenius :

$$\phi(h)_!(y \wedge \phi(h)(x)) = \phi(h)_!(y) \wedge x$$

pour $x \in H$ et $y \in K$ quelconques. On voit aussi assez aisément que cette dernière condition équivaut à dire que $\phi(h)$ préserve les implications '$\to$'. Donc la dernière proposition ne disait simplement que $\phi(\cdot)$ envoie les morphismes d'algèbre de Heyting sur les morphismes de locales qui sont Heyting.

1.8. CONCLUSION

Au point où nous en sommes, nous avons présenté assez de résultats sur le double dual pour en sentir l'importance dans la théorie. De plus, nous sommes maintenant conscients de l'existence d'une construction parrallèle ; utilisée dans la théorie à des fins simillaires : le locale des filtres. La source cognitive de cette thèse se trouve ici : dans l'espace des questions et problèmes pertinents qui se posent naturellement dans ce contexte mathématique bien défini que nous avons déployé. Cette source origine à son tour de l'unique question : "Qu'est-ce que l'analogue exact du double dual pour la logique des prédicats ?" que Gonzalo Reyes m'a demandée au tout début de mes études supérieures. Puis, à l'automne 1997, alors que je présentais l'article de Pitts dans un séminaire à l'Université de Montréal ; nous avons abordé cette brèche qui allait se montrer fructifiante pour notre compréhension de la théorie.

Chapitre 2

COMPARAISON ENTRE LE DOUBLE DUAL ET LE LOCALE DES FILTRES ET AUTRES PROPRIÉTÉS

2.1. INTRODUCTION

Nous avons, dans le premier chapitre, étalé plusieurs propriétés du double dual et nous avons été introduits au locale des filtres avec ses propriétés de base. Du moment où l'on est exposé à cette construction de Pitts, nous sommes amenés inévitablement à faire le parallèle suivant :

double dual	**locale des filtres**
$D \overset{e_D}{\rightarrowtail} D^{*\#}$	$D \overset{i_D}{\rightarrowtail} \phi(D)$
$D^{*\#} \in \mathbb{Pg}$	$\phi(D) \in \mathbb{Frm}$
e_D cond. bi-Heyting	i_D cond. Heyting
D^* (filtres premiers)	$\mathfrak{F}(D)$ (filtres)
non-constructif	constructif
$X = \bigvee_{p\in X} \bigwedge_{d\in p} e_D(d)$	$I = \bigvee_{f\in I} \bigwedge_{d\in f} i_D(d)$
$\begin{tikzcd} D \arrow[r, tail, "e_D"] \arrow[d, bend right=60, "\lambda"'] \arrow[d, bend left=60, "\rho"] \arrow[dr, phantom, "\circ\circ\circ"] & D^{*\#} \arrow[d, bend right=60, "L"'] \arrow[d, bend left=60, "R"] \\ C \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, tail, "e_C"'] & C^{*\#} \arrow[u, "\alpha^{*\#}"] \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} B \arrow[r, tail, "i_B"] \arrow[d, bend right=60, "\lambda"'] \arrow[d, bend left=60, "\rho"] \arrow[dr, phantom, "\circ\circ\circ"] & \phi(B) \arrow[d, bend right=60, "l"'] \arrow[d, bend left=60, "r"] \\ A \arrow[u, "f"] \arrow[r, tail, "i_A"'] & \phi(A) \arrow[u, "\phi f"] \end{tikzcd}$

Nous voyons ainsi que les rapprochements entre les deux constructions sont remarquables et certaines différences semblent déjà marquantes. Dans le présent chapitre, nous allons approfondir cette étude.

En tout premier lieu, nous allons nous intéresser à trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour que le locale des filtres soit engendré par ses éléments premiers comme le double dual. Nous verrons entre autres que c'est la seule propriété manquant à $\phi(D)$ pour qu'il coïncide avec $D^{*\#}$. Nous allons ensuite démontrer dans la section 3 une propriété quasi-universelle pour le locale des filtres qui ressemble à s'y méprendre à celle que nous avons donné pour le double dual au chapitre précédent. Nous utiliserons ensuite cette propriété quasi-universelle pour construire des morphismes de comparaison entre les deux constructions et en déduire que le double dual est un sous-locale ouvert dense du locale des filtres. Nous y donnons aussi une liste de conditions équivalentes pour que les deux constructions coïncident. Dans la section 4, nous démontrerons une version propositionnelle du théorème de complétude conceptuelle et nous utiliserons ce résultat pour montrer que nos deux constructions réfléchissent les isomorphismes. Finalement, dans la dernière section, nous donnons une application jolie du double dual pour démontrer des propriétés d'amalgamation forte dans certaines catégories d'algèbres.

2.2. Distinctions entre le double dual et le locale des filtres

On se rappelle que la construction du double dual nous donne un cadre engendré par ses éléments premiers libre (ou le treillis complètement distributif libre) sur un treillis distributif donné. La construction du locale des filtres nous donne aussi un cadre $\phi(D)$ mais ce cadre n'est en général pas engendré par ses éléments premiers. Nous montrons cela dans le présente section et nous donnons aussi une condition nécessaire et suffisante pour qu'il le soit. Commençons par voir que sont les éléments premiers de $\phi(D)$. Les lemmes suivants nous aideront à calculer les supréma de certains éléments de $\phi(D)$.

Lemme 2.2.1 **(Représentation pour les éléments de $\phi(D)$)** *Si $J \in \phi(D)$ alors*

$$J = \bigvee_{f \in J} \downarrow f$$

PREUVE: Soit $f \in \mathfrak{F}(D)$ quelconque. On a ainsi,

$$\begin{aligned}\bigwedge_{d\in f} \uparrow d &= \bigvee \{\alpha \in \mathfrak{F}(D) \mid \forall d \in f \;\; \alpha \leq \uparrow d\} \\ &= \bigcap \{\alpha \in \mathfrak{F}(D) \mid \forall d \in f \;\; \uparrow d \subseteq \alpha\} \\ &= \bigcap \{\alpha \in \mathfrak{F}(D) \mid f \subseteq \alpha\} \\ &= f\end{aligned}$$

Mais puisque $\downarrow$ préserve les infima arbitraires on a :

$$\downarrow f = \downarrow \left(\bigwedge_{d\in f} \uparrow d\right) = \bigwedge_{d\in f} \downarrow\uparrow d = \bigwedge_{d\in f} i_D(d)$$

Ainsi, par la proposition 1.7.3 on a le résultat. Remarquons qu'avec le calcul précédent on peut facilement redémontrer la proposition 1.7.3. En effet,

$$\begin{aligned}\bigvee_{f\in J} \downarrow f &= \bigcap \{I \in \mathfrak{I}(\mathfrak{F}(D)) \mid \forall f \in J \downarrow f \subseteq I\} \\ &= \bigcap \{I \in \mathfrak{I}(\mathfrak{F}(D)) \mid J \subseteq I\} \\ &= J\end{aligned}$$

∎

LEMME 2.2.2 **(Calcul des supréma d'idéaux principaux dans $\phi(D)$)** *Soient $f_i \in \mathfrak{F}(D)$ avec $i \in I$. On a*

$$\bigvee_{i\in I} \downarrow f_i = \downarrow \{f_{i_1} \vee f_{i_2} \vee \ldots \vee f_{i_n} \mid n \in \mathbb{N} \;\; i_1, i_2, \ldots, i_n \in I\}$$

PREUVE: Clairement, quel que soit $j \in I$ on a

$$\downarrow f_j \subseteq \bigvee_{i\in I} \downarrow f_i$$

de telle sorte que

$$f_j \in \bigvee_{i\in I} \downarrow f_i$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous les $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$ on a

$$f_{i_1} \vee f_{i_2} \vee \ldots \vee f_{i_n} \in \bigvee_{i\in I} \downarrow f_i$$

car $\bigvee_{i\in I}\downarrow f_i$ est un idéal. Mais puisque $\bigvee_{i\in I}\downarrow f_i$, comme tout idéal, est fermé inférieurement, on a que

$$\downarrow(f_{i_1} \vee f_{i_2} \vee \ldots \vee f_{i_n}) \subseteq \bigvee_{i\in I}\downarrow f_i$$

et finalement

$$\downarrow\{f_{i_1} \vee f_{i_2} \vee \ldots \vee f_{i_n} \mid n \in \mathbb{N} \;\; i_1, i_2, \ldots, i_n \in I\} \subseteq \bigvee_{i\in I}\downarrow f_i$$

Pour l'inclusion inverse on remarque que

$$J = \downarrow\{f_{i_1} \vee f_{i_2} \vee \ldots \vee f_{i_n} \mid n \in \mathbb{N} \;\; i_1, i_2, \ldots, i_n \in I\}$$

est clairement un idéal et que quel que soit $i \in I$ on a $f_i \in J$. En utilisant ce fait on a :

$$\begin{aligned} f \in \bigvee_{i\in I}\downarrow f_i &\iff f \in \bigcap\{J' \in \mathfrak{I}(\mathfrak{F}(D)) \mid \forall i \in I \;\; f_i \in J'\} \\ &\iff \forall i \in I \;\; f_i \in J' \Longrightarrow f \in J' \\ &\Longrightarrow f \in J \end{aligned}$$

∎

La proposition suivante décrit les éléments premiers (complètement premiers) du cadre $\phi(D)$. On se rappelle que $\mathcal{P}_r(D)$ représente les filtres premiers sur D.

PROPOSITION 2.2.1 **(Caractérisation de $\mathfrak{Irr}\,(\phi(D))$)** *Soit D un treillis distributif. Pour $J \in \phi(D)$*

$$J \text{ est complètement premier} \iff J = \downarrow p \quad \text{où} \quad p \in \mathcal{P}_r(D)$$

PREUVE: ($\Longrightarrow$) Soit $J \in \phi(D)$ un idéal. Si J est complètement premier, alors par le lemme 2.2.1 on a

$$J = \bigvee_{f\in J}\downarrow f$$

donc il doit exister un $f \in J$ tel que $J \leq \downarrow f$. Ainsi, $J = \downarrow f$ pour ce filtre f. Il ne reste qu'à montrer que ce f est un filtre premier. Ceci est clair car :

$$\begin{aligned}
d_1 \vee d_2 \in f &\iff \uparrow(d_1 \vee d_2) \subseteq f \\
&\iff \uparrow d_1 \vee \uparrow d_2 \subseteq f \\
&\iff f \leq \uparrow d_1 \vee \uparrow d_2 \\
&\iff \downarrow f \leq \downarrow\uparrow d_1 \vee \downarrow\uparrow d_2 \\
&\implies \downarrow f \leq \downarrow\uparrow d_1 \text{ ou } \downarrow f \leq \downarrow\uparrow d_2 \\
&\iff f \leq \uparrow d_1 \text{ ou } f \leq \uparrow d_2 \\
&\iff \uparrow d_1 \subseteq f \text{ ou } \uparrow d_2 \subseteq f \\
&\iff d_1 \in f \text{ ou } d_2 \in f
\end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) Soit $p \in \mathcal{P}_r(D)$ un filtre premier sur D. On veut montrer que $\downarrow p$ est un idéal complètement premier. Supposons donc que

$$\downarrow p \leq \bigvee_{i \in I} J_i$$

par le lemme 2.2.1, on peut écrire chaque J_i comme

$$J_i = \bigvee_{f_{ij'} \in J_i} \downarrow f_{ij'}$$

Ainsi, si on pose (afin de transformer le double suprémum

$$\bigvee_{i \in I} J_i = \bigvee_{i \in I} \bigvee_{f_{ij'} \in J_i} \downarrow f_{ij'}$$

en un suprémum simple)

$$J \equiv \bigcup_{i \in I} J_i$$

et que nous utilisons la notation $f_j \equiv f_{ij}$ (car pour tout $f \in J$ il y a un $i \in I$ et un $f_{ij} \in J_i$ tel que $f_{ij} = f$), alors

$$\downarrow p \leq \bigvee_{i \in I} J_i = \bigvee_{j \in J} \downarrow f_j = \downarrow \{ f_{j_1} \vee f_{j_2} \vee \ldots \vee f_{j_n} \mid n \in \mathbb{N} \;\; j_1, j_2, \ldots, j_n \in J \}$$

et cette dernière égalité nous est donnée par le lemme 2.2.2. Ceci implique qu'il y a un $n \in \mathbb{N}$ et des indices $j_1, j_2, \ldots, j_n \in J$ tels que

$$p \leq f_{j_1} \vee f_{j_2} \vee \ldots \vee f_{j_n} = \{ d_1 \vee d_2 \vee \ldots \vee d_n \mid d_i \in f_{j_i} \;\; i = 1, 2, \ldots, n \}$$

i.e.

$$\{d_1 \vee d_2 \vee \ldots \vee d_n \mid d_i \in f_{j_i} \;\; i = 1, 2, \ldots, n\} \subseteq p$$

Nous pouvons conclure de cette dernière affirmation qu'un des f_{j_i} ($i = 1, \ldots n$) est inclus dans p. En effet, si au contraire il existait un $b_i \in f_{j_i}$ qui n'est pas dans p pour chaque $i = 1, \ldots n$, alors le suprémum des b_i serait dans p par ce que nous avons calculé ci-dessus. Mais ceci est impossible car puisque p est premier, à chaque fois qu'un suprémum fini d'éléments tombe dans p, alors il doit y avoir au moins un de ces élément déjà dans p. Mais on a supposé que $b_i \notin p$ ce qui nous donne une contradiction. Ainsi, il doit exister un $f_{j_i} \subseteq p$ i.e. $p \leq f_{j_i}$ d'où finalement on tire

$$\downarrow p \leq \downarrow f_{j_i} \leq \bigvee_{j \in J_i} \downarrow f_j = J_i$$

Donc, $\downarrow p$ est bien complètement premier. ∎

Nous sommes maintenant prêts à comparer le locale des filtres avec le double dual. Rappelons nous tout d'abord que le double dual possède une propriété universelle. En effet, si D est un treillis distributif, le double dual $D^{*\#}$ est le treillis engendré par ses éléments premiers libre sur D. En fait, nous avons vu au corollaire 1.5.2 une caractérisation de l'évaluation en terme de cinq propriétés. Si une application $\hat{\cdot} : D \longrightarrow \hat{D}$ satisfait ces cinq propriétés, alors le morphisme donné par la propriété universelle de $D^{*\#}$ citée plus haut doit être un isomorphisme. Autrement dit, tout morphisme ayant D comme domaine satisfaisant ces cinq propriétés est essentiellement identique à e_D. Dans l'esprit de cette caractérisation, il semble légitime de se demander si l'évaluation de Pitts $i_D : D \longrightarrow \phi(D)$ satisfait aussi ces quatre propriétés. Si c'était le cas, le locale des filtres serait isomorphe au double dual via un isomorphisme de treillis complets canonique. La proposition suivante nous montre que presque toutes ces conditions sont satisfaites par le locale des filtres. En fait, une seule est fausse en général : $\phi(D)$ n'est pas engendré par ses éléments premiers.

Cette proposition nous a été présentée par Bill Boschuck. À l'époque, il croyait avoir trouvé une preuve que $\phi(D)$ était isomorphe à $D^{*\#}$, car il croyait avoir vérifié toutes les proprétés caractéristiques du double dual. La seule partie qui était fausse était la preuve que $\phi(D)$ est engendré par ses éléments premiers. Nous verrons plus loin où était la faille et comment Bill et moi sommes revenus la semaine suivante avec la même condition nécessaire sur D pour que la magie ait lieu.

PROPOSITION 2.2.2 **(Propriétés caractéristiques du locale des filtres)** *Le morphisme* $i_D : D \longrightarrow \phi(D)$ *satisfait les propriétés suivantes :*

1. $i_D : D \longrightarrow \phi(D)$ *est un morphisme de treillis.*
2. *Tout élément premier* J *de* $\phi(D)$ *peut s'écrire*
$$J = \bigwedge\{i_D(x) \mid x \in D,\ J \leq i_D(x)\}$$
3. *Si pour* $x_i, x \in D$ *on a*
$$\bigwedge_{i \in I} i_D(x_i) \leq i_D(x)$$
alors
$$\bigwedge_{i \in I'} x_i \leq x$$
pour un certain sous-ensemble fini $I' \subseteq I$.
4. *Si* $J \in \phi(D)$ *peut s'écrire de la forme* $J = \bigwedge_{l \in L} i_D(x_l)$ *et satisfait*
$$\forall I \text{ fini } \ J \leq \bigvee_{i \in I} i_D(x_i) \Longrightarrow \exists i \in I \ \ J \leq i_D(x_i)$$
alors J *est (complètement) premier.*

PREUVE: La première propriété est déjà démontrée. Pour la seconde, on se rappelle que par la proposition 2.2.1 un élément $J \in \phi(D)$ est complètement premier si et seulement si il est de la forme $J = \downarrow p$ où p est un filtre premier sur D. De plus, dans ces conditions,

$$\begin{aligned}
J \leq i_D(x) &\iff \downarrow p \leq i_D(x)\\
&\iff p \in i_D(x)\\
&\iff p \in \downarrow\uparrow x\\
&\iff p \leq \uparrow x\\
&\iff \uparrow x \subseteq p\\
&\iff x \in p
\end{aligned}$$

En traduisant la propriété 2 à l'aide du calcul précédent nous voyons que le résultat que nous voulons démontrer devient :

$$\downarrow p = \bigwedge_{x \in p} i_D(x)$$

Nous le démontrons comme suit :

$$\begin{array}{c}
K \leq \bigwedge_{x \in p} i_D(x) \\ \hline
\forall x \in p \;\; K \leq i_D(x) \\ \hline
\forall x \in p \;\; K \leq {\downarrow}{\uparrow} x \\ \hline
\forall x \in p \, \forall g \in K \;\; g \leq {\uparrow} x \\ \hline
\forall x \in p \, \forall g \in K \;\; {\uparrow} x \subseteq g \\ \hline
\forall x \in p \, \forall g \in K \;\; x \in g \\ \hline
\forall g \in K \;\; p \subseteq g \\ \hline
\forall g \in K \;\; g \leq p \\ \hline
K \leq {\downarrow} p
\end{array}$$

La troisième propriété se démontre comme suit :

$$\begin{array}{c}
\bigwedge_{i \in I} i_D(x_i) \leq i_D(x) \\ \hline
\bigwedge_{i \in I} {\downarrow}{\uparrow} x_i \leq {\downarrow}{\uparrow} x \\ \hline
{\downarrow} \left(\bigwedge_{i \in I} {\uparrow} x_i \right) \leq {\downarrow}({\uparrow} x) \\ \hline
\bigwedge_{i \in I} {\uparrow} x_i \leq {\uparrow} x \\ \hline
{\uparrow} x \subseteq \bigwedge_{i \in I} {\uparrow} x_i \\ \hline
x \in \bigwedge_{i \in I} {\uparrow} x_i \\ \hline
x \in {\uparrow} \{ x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \ldots \wedge x_{i_n} \mid n \in \mathbb{N} \;\; i_1, \ldots, i_n \in I \} \\ \hline
\exists n \in \mathbb{N} \; \exists i_1, \ldots, i_n \in I \;\; x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \ldots \wedge x_{i_n} \leq x \\ \hline
\exists I' \subseteq I \;\; \text{fini} \;\; \bigwedge_{i \in I'} x_i \leq x
\end{array}$$

Remarquons que nous avons utilisé une formule pour l'infimum de filtres principaux vers la fin de cette série de déductions. Le dual de cette formule a déjà été démontrée pour les idéaux dans le lemme 2.2.2 et la démonstration pour les filtres découle immédiatement si on se rappelle que $\mathfrak{F}(D) \simeq (\mathfrak{I}(D^{op}))^{op}$.

Regardons maintenant la dernière propriété. On suppose que J peut s'écrire sous la forme

$$J = \bigwedge_{l \in L} i_D(x_l) = \bigwedge_{l \in L} {\downarrow}({\uparrow} x_l) = {\downarrow} \left(\bigwedge_{l \in L} {\uparrow} x_l \right)$$

Ainsi, J est un idéal principal. Si on note $f \equiv \bigwedge_{l \in L} {\uparrow} x_l$, alors $J = {\downarrow} f$. Nous désirons montrer que J est complètement premier sous les hypothèses données. Comme les éléments complètement premiers de $\phi(D)$ sont tous de la forme ${\downarrow} p$ où p est un filtre premier sur D, il nous suffit de montrer que f est un filtre premier sur D.

$$
\begin{aligned}
d_1 \vee d_2 \in f &\iff \uparrow(d_1 \vee d_2) \subseteq f \\
&\iff f \leq \uparrow d_1 \vee \uparrow d_2 \\
&\iff \downarrow f \leq \downarrow\uparrow d_1 \vee \downarrow\uparrow d_2 \\
&\iff J \leq i_D(d_1) \vee i_D(d_2) \\
&\Longrightarrow J \leq i_D(d_1) \text{ ou } J \leq i_D(d_2) \\
&\iff \downarrow f \leq i_D(d_1) \text{ ou } \downarrow f \leq i_D(d_2) \\
&\iff \downarrow f \leq \downarrow(\uparrow d_1) \text{ ou } \downarrow f \leq \downarrow(\uparrow d_2) \\
&\iff f \leq \uparrow d_1 \text{ ou } f \leq \uparrow d_2 \\
&\iff \uparrow d_1 \subseteq f \text{ ou } \uparrow d_2 \subseteq f \\
&\iff d_1 \in f \text{ ou } d_2 \in f
\end{aligned}
$$

∎

Nous voyons bien que le locale des filtres est tombé bien près d'être isomorphe au double dual. Si c'était le cas le double dual perdrait beaucoup de valeur à nos yeux. En effet, la nature constructive du locale des filtres serait un avantage déloyal de ce dernier. Lorsque j'ai réalisé, en même temps que Bill Boschuck, que ce n'était pas le cas, j'ai bien senti que ça ne s'arrêterait pas là. En effet, la semaine suivante, nous arrivâmes avec une même condition sur D pour que le locale des filtres soit engendré par ses éléments premiers. Regardons dès maintenant quelle est cette condition.

PROPOSITION 2.2.3 **(Condition pour que $\phi(D) \in \mathbb{Pg}$)** *Le cadre $\phi(D)$ est engendré par ses éléments premiers si et seulement si tous les filtres f sur D peuvent s'écrire comme une intersection finie de filtres premiers sur D.*

PREUVE: On remarque tout d'abord que

$$\downarrow f \leq \bigvee_{p \leq f} \downarrow p$$

$$
\begin{array}{c}
\hline
\downarrow f \leq \downarrow\{p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n \mid n \in \mathbb{N}\ \ p_i \text{ premier et } p_i \leq f\} \\
\hline
\exists n \in \mathbb{N}\ \exists p_1, p_2, \ldots, p_n \supseteq f\ \ p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n \subseteq f \\
\hline
\exists n \in \mathbb{N}\ \exists p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathcal{P}_r(D)\ \ f = p_1 \vee \ldots \vee p_n \\
\hline
\exists n \in \mathbb{N}\ \exists p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathcal{P}_r(D)\ \ f = p_1 \cap \ldots \cap p_n
\end{array}
$$

($\Rightarrow$) Soit f un filtre quelconque sur D. Puisque $\phi(D)$ est engendré par ses éléments premiers on a que pour une famille de filtres premiers sur D, disons

$\{p_i\}_{i\in I}$, on a : $\downarrow f = \bigvee_{i\in I} \downarrow p_i$ car les éléments premiers de D sont de la forme $\downarrow p_i$. De plus, puisque le suprémum des $\downarrow p_i$ est en particulier inférieur ou égal à $\downarrow f$; pour chaque $i \in I$ on a $p_i \leq f$. Avec ceci, nous pouvons réécrire le suprémum comme :

$$\downarrow f = \bigvee_{i\in I} \downarrow p_i = \bigvee_{p\leq f} \downarrow p$$

(où les p sont des filtres premiers sur D). En effet, en prenant le suprémum sur tous les $p \leq f$ on croirait obtenir quelque chose de plus grand qu'en prenant seulement les p_i (qui sont aussi inférieurs ou égal à f) mais en fait :

$$\bigvee_{p\leq f} \downarrow p \leq \bigvee_{i\in I} \downarrow p_i = \downarrow f \iff \forall p \leq f \ \ \downarrow p \leq \downarrow f$$

La remarque faite au début de la preuve nous donne précisément la conclusion voulue.

($\Leftarrow$) Soit J un élément quelconque de $\phi(D)$. Nous savons par le lemme 2.2.1 que J peut s'écrire comme

$$J = \bigvee_{f\in J} \downarrow f$$

En utilisant la remarque faite au début de la preuve et l'hypothèse, on obtient que chaque $\downarrow f$ peut s'écrire comme un suprémum de filtres premiers car cette remarque nous dit que si f peut s'écrire comme un suprémum fini de filtres premiers, alors $\downarrow f \leq \bigvee_{p\leq f} \downarrow p$ mais clairement on a aussi $\bigvee_{p\leq f} \downarrow p \leq \downarrow f$. Ainsi, tous les idéaux principaux $\downarrow f$ peuvent s'écrire comme un suprémum d'éléments premiers de $\phi(D)$. Comme nous l'avons vu plus haut tout élément J de $\phi(D)$ est décomposable en un suprémum d'idéaux principaux, donc tous les éléments de $\phi(D)$ peuvent s'écrire comme un suprémum d'éléments premiers. Ainsi, $\phi(D)$ est engendré par ses éléments premiers. ∎

Nous savons par le théorème d'existence des filtres premiers que tout filtre f sur D peut s'écrire comme l'intersection de tous les filtres premiers qui le contiennent. En général, cette intersection n'est pas finie. Ainsi, le cadre $\phi(D)$ n'est pas engendré par ses éléments premiers. Dans le cas où D est une algèbre de Boole, on peut en dire un peu plus comme le montre la proposition suivante :

PROPOSITION 2.2.4 **(Condition restreinte aux algèbres de Boole)** *Soit B une algèbre de Boole. Le cadre $\phi(B)$ est engendré par ses éléments premiers si et seulement si B est finie.*

PREUVE: La direction ($\Leftarrow$) est évidente en vertu du théorème d'existence des filtres premiers. En effet, puisque B est finie on a un nombre fini de filtres premiers sur B et comme tout filtre peut s'écrire comme l'intersection des filtres premiers le contenant, cette intersection sera toujours finie ; d'où $\phi(B)$ est engendré par ses éléments premiers (en vertu de la proposition précédente).

Regardons l'autre direction. Soit f un filtre sur B. Puisque par hypothèse $\phi(B)$ est engendré par ses éléments premiers, supposons donc (selon la proposition 2.2.3) que $f = p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$ avec les p_i des ultrafiltres (c'est ainsi qu'on appelle les filtres premiers sur une algèbre de Boole) sur B. Soit p un ultrafiltre quelconque sur B. Si $p \leq f \leq p_1 \vee \ldots \vee p_n$ on peut déduire qu'il existe un $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $p \leq p_i$ (c'est en effet un raisonnement que nous avons déjà fait dans la preuve de la proposition 2.2.1). Mais comme les utrafiltres d'une algèbre de Boole sont ordonnés de façon discrète, on obtient que $p = p_i$. Ainsi, on a montré que l'ensemble des utrafiltres $p \leq f$ (qui équivaut à $f \subseteq p$) est fini car il est inclus dans $\{p_1, \ldots, p_n\}$. Ainsi, tout filtre n'a qu'un nombre fini d'ultrafiltres qui le contiennent. En particulier, si on considère le filtre $f = \uparrow 1$ on peut dire qu'il n'y a qu'un nombre fini d'ultrafiltres qui le contiennent. Mais tous les ultrafiltres sur B le contiennent donc il n'y a qu'un nombre fini d'ultrafiltres sur B. Puisque $e_B : B \longrightarrow 2^{|B^*|}$ est un monomorphisme et que comme nous venons de le voir B^* est fini ; nous sommes forcés de conclure que B est finie. ∎

Nous sommes maintenant en mesure de donner un exemple explicite de treillis distributif D pour lequel $\phi(D)$ n'est pas engendré par ses éléments premiers. Ainsi, en prenant $D \equiv \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $f \equiv \uparrow\{[n, \infty) \mid n \in \mathbb{N}\}$ (le filtre de Fréchet) on obtient un exemple de filtre ayant une infinité de filtres premiers sous lui. La proposition suivante nous montre que dans ce contexte f ne peut pas être décomposé en un suprémum fini de filtres premiers et donc (par ce qui a été fait plus haut) $\phi(D)$ n'est pas engendré par ses éléments premier pour ce D particulier.

Comme la proposition précédente nous l'indique, la condition donnée par la proposition 2.2.3 n'est vérifiée que pour les algèbres de Boole finies. Pour un treillis distributif quelconque, on ne peut pas réduire cette condition à la simple finitude. Il existe des treillis distributifs D qui sont infinis et dans lesquels tout filtre peut s'écrire comme une intersection finie de filtres premiers. Un exemple trivial est une chaîne infinie comme $|D| \equiv \{1\} \cup \{1 - 1/n \mid n =$

$1, 2, \ldots\}$ ordonnée avec l'ordre habituel dans les réels. Dans ce treillis distributif, tout filtre est principal et premier. On peut donc trivialement écrire tout filtre comme une intersection finie (triviale car elle ne contient que le filtre lui-même) de filtres premiers. Nous ne possédons encore aucune caractérisation de la classe des treillis distributifs satisfaisant cette condition.

2.3. Morphismes de comparaison entre les deux constructions

Maintenant que nous avons exprimé une différence fondamentale entre les contructions de Pitts et Makkai/Reyes, nous allons donner certains liens les unissant.

Nous ne connaissons pas de propriété universelle pour la construction de Pitts comme c'est le cas pour la construction du double dual. Nous pouvons toutefois donner une propriété qui est presque identique à celle du double dual. En fait, chaque étape de la construction de Pitts satisfait une propriété universelle et même plusieurs propriétés universelles. Ces résultats classiques (voir proposition 2.3.1, 2.3.2 et leurs corollaires 2.3.1,2.3.2) nous ont étés signalés par Carsten Butz et feront l'objet des quatre prochains résultats.

Nous allons premièrement étudier les deux étapes individuellement. Le fait qu'elles soient dualement opposées nous simplifiera la tâche grandement, car chaque résultat concernant la construction des filtres aura son corollaire mirroir au niveau de la contruction des idéaux. Ensuite, nous allons unifier ces propriétés de façon a créer une propriété quasi-universelle pour le locale des filtres. Mais avant d'entrer dans le cœur du sujet, fixons la notation pour certaines catégories d'ensembles partiellement ordonnés.

DÉFINITION 2.3.1 **($\wedge - \mathbb{SI}$, $\bigwedge - \mathbb{SI}$, $\vee - \mathbb{SI}$, $\bigvee - \mathbb{SI}$, $\mathbb{Frm}$ et $\mathbb{co} - \mathbb{Frm}$)** *Nous noterons par*

- $\wedge - \mathbb{SI}$ *: La catégorie des $\wedge$-semi-treillis avec les morphismes qui préservent les infima binaires.*
- $\bigwedge - \mathbb{SI}$ *: La catégorie des $\bigwedge$-semi-treillis avec les morphismes qui préservent tous les infima.*
- $\vee - \mathbb{SI}$ *: La catégorie des $\vee$-semi-treillis avec les morphismes qui préservent les suprema binaires.*
- $\bigvee - \mathbb{SI}$ *: La catégorie des $\bigvee$-semi-treillis avec les morphismes qui préservent tous les suprema.*
- $\mathbb{Frm}$ *: La catégorie des cadres avec les morphismes de cadres (qui préservent tous les suprema et les infima binaires).*
- $\mathbb{co} - \mathbb{Frm}$ *: La catégorie des co-cadres avec les morphismes de co-cadres (qui préservent tous les infima et les suprema binaires).*

Regardons dès maintenant quelle propriété universelle possède le treillis des filtres.

PROPOSITION 2.3.1 **(Propriété universelle de $\mathfrak{F}(D)$ parmis les $\bigwedge - \mathbb{SI}$)** *Nous avons la propriété universelle suivante pour la construction du treillis des filtres. $\forall D \in |\wedge - \mathbb{SI}|\ \forall L \in |\bigwedge - \mathbb{SI}|\ \forall \alpha : D \longrightarrow L \in \wedge - \mathbb{SI}\ \exists! \hat{\alpha} : \mathfrak{F}(D) \longrightarrow L \in \bigwedge - \mathbb{SI}$ tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\uparrow_D(\cdot)"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \mathfrak{F}D \arrow[d, dotted, "\hat{\alpha}"] \\ & L \end{tikzcd}$$

PREUVE: Clairement, chaque filtre $f \in \mathfrak{F}D$ peut s'écrire comme :

$$\bigwedge_{a \in f} \uparrow_D(a) = \left\langle \bigcup_{a \in f} \uparrow_D(a) \right\rangle = f$$

Ainsi, pour que $\hat{\alpha}$ préserve les infima quelconques on est forcé de poser :

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}(f) &= \hat{\alpha}\left(\bigwedge_{a \in f} \uparrow_D(a)\right) \\ &= \bigwedge_{a \in f} \hat{\alpha}\left(\uparrow_D(a)\right) \\ &= \bigwedge_{a \in f} \alpha(a) \end{aligned}$$

De cette façon, nous voyons que l'unicité de $\hat{\alpha}$ est assurée. De plus, $\hat{\alpha}$ fait clairement commuter le diagramme comme voulu. Il ne nous reste donc qu'à montrer que $\hat{\alpha}$ préserve les infima arbitraires. Soit $\{f_i\}_{i\in I}$ une famille quelconque d'éléments de $\mathfrak{F}D$. On a :

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}\left(\bigwedge_{i\in I} f_i\right) &= \hat{\alpha}\left(\left\langle \bigcup_{i\in I} f_i \right\rangle\right) \\
&= \hat{\alpha}\big(\{d \in D \mid \exists n \in \mathbb{N} \exists i_1, \ldots, i_n \in I \\
&\qquad\qquad \exists x_{i_1} \in f_{i_1} \ldots \exists x_{i_n} \in f_{i_n} \;\; d \geq x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_n}\}\big) \\
&= \bigwedge \{\alpha(d) \mid \exists n \in \mathbb{N} \exists i_1, \ldots, i_n \in I \\
&\qquad\qquad \exists x_{i_1} \in f_{i_1} \ldots \exists x_{i_n} \in f_{i_n} \;\; d \geq x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_n}\} \\
&\overset{(*)}{=} \bigwedge_{i\in I} \bigwedge_{d\in f_i} \alpha(d) \\
&= \bigwedge_{i\in I} \hat{\alpha}(f_i)
\end{aligned}$$

Il ne nous reste qu'à montrer l'égalité $(*)$. Claiment, si $d \in f_i$ pour un certain $i \in I$, alors d satisfait trivialement la condition pour être dans le filtre engendré par la réunion des f_i. Inversement, si pour un certain $d \in D$ il existe une famille finie $x_{i_1} \in fi_1, \ldots, x_{i_n} \in fi_n$ telle que $d \geq x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_n}$ alors on aura

$$\alpha(d) \geq \alpha(x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_n}) = \alpha(x_{i_1}) \wedge \cdots \wedge \alpha(x_{i_n}) \geq \bigwedge_{i\in I} \bigwedge_{d\in f_i} \alpha(d)$$

Ce qui montre bien l'autre direction. ∎

Nous obtenons gratuitement la propriété pour la construction duale du treillis des idéaux.

COROLLAIRE 2.3.1 **(Propriété universelle de $\mathfrak{I}(D)$ parmis les $\bigvee -\mathbb{SL}$)** *Nous avons la propriété universelle suivante pour la construction du treillis des idéaux.* $\forall D \in |\vee -\mathbb{SL}|$ $\forall L \in |\bigvee -\mathbb{SL}|$ $\forall \alpha : D \longrightarrow L \in \vee - \mathbb{SL}$ $\exists! \hat{\alpha} : \mathfrak{I}(D) \longrightarrow L \in \bigvee -\mathbb{SL}$ *tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc}
D & \xrightarrow{\downarrow_D(\cdot)} & \mathfrak{I}D \\
& {\scriptstyle\alpha}\searrow & \vdots\,{\scriptstyle\hat{\alpha}} \\
& & L
\end{array}$$

PREUVE: Il suffit de considérer la proposition précédente avec des $(\cdot)^{\mathrm{op}}$ partout. ∎

La construction des filtres (dualement, la construction des idéaux) satisfait une propriété universelle à un autre niveau. En effet, si D est un treillis et si L est un co-cadre, alors, lorsque α préserve aussi les suprema binaires, on a que $\hat{\alpha}$ les préserve lui aussi.

PROPOSITION 2.3.2 **(Propriété universelle de $\mathfrak{F}(D)$ parmis les $\mathbb{co}-\mathbb{Frm}$)** *Nous avons la propriété universelle suivante pour la construction du treillis des filtres.* $\forall D \in |\mathbb{Lat}|\ \forall L \in |\mathbb{co}-\mathbb{Frm}|\ \forall \alpha : D \longrightarrow L \in \mathbb{Lat}\ \exists! \hat{\alpha} : \mathfrak{F}D \longrightarrow L \in \mathbb{co}-\mathbb{Frm}$ *tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, tail, "\uparrow_D(\cdot)"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \mathfrak{F}D \arrow[d, dotted, "\hat{\alpha}"] \\ & L \end{tikzcd}$$

PREUVE: Comme tout treillis est en particulier un $\wedge$-semi-treillis et tout co-cadre est en particulier un $\bigwedge$-semi-treillis l'existence et l'unicité de $\hat{\alpha}$ sont assurées. Il nous reste donc tout simplement à vérifier que $\hat{\alpha}$ préserve les suprema binaires. Soient $f_1, f_2 \in \mathfrak{F}D$, on a :

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}(f_1) \vee \hat{\alpha}(f_2) &= \bigwedge_{d_1 \in f_1} \alpha(d_1) \vee \bigwedge_{d_2 \in f_2} \alpha(d_2) \\
&= \bigwedge_{d_1 \in f_1} \left[\alpha(d_1) \vee \bigwedge_{d_2 \in f_2} \alpha(d_2) \right] \\
&= \bigwedge_{d_1 \in f_1} \bigwedge_{d_2 \in f_2} [\alpha(d_1) \vee \alpha(d_2)] \\
&= \bigwedge_{d_1 \in f_1} \bigwedge_{d_2 \in f_2} \alpha(d_1 \vee d_2) \\
&\overset{(*)}{=} \bigwedge_{d \in f_1 \cap f_2} \alpha(d) \\
&= \hat{\alpha}(f_1 \cap f_2) \\
&= \hat{\alpha}(f_2 \vee f_2)
\end{aligned}$$

Il ne nous reste donc qu'à vérifier $(*)$. Supposons que $d_1 \in f_1$ et $d_2 \in f_2$. Comme $d_1 \leq d_1 \vee d_2$ et $d_2 \leq d_1 \vee d_2$, on a que $d_1 \vee d_2 \in f_1 \cap f_2$. Ainsi, on a que

$$\bigwedge_{d \in f_1 \cap f_2} \alpha(d) \leq \alpha(d_1 \vee d_2)$$

Finalement, nous avons donc

$$\bigwedge_{d \in f_1 \cap f_2} \alpha(d) \leq \bigwedge_{d_1 \in f_1} \bigwedge_{d_2 \in f_2} \alpha(d_1 \vee d_2)$$

L'autre direction est triviale. En effet,

$$\frac{\displaystyle\bigwedge_{d_1 \in f_1} \bigwedge_{d_2 \in f_2} \alpha(d_1 \vee d_2) \leq \bigwedge_{d \in f_1 \cap f_2} \alpha(d)}{\displaystyle\forall d \in f_1 \cap f_2 \quad \bigwedge_{d_1 \in f_1} \bigwedge_{d_2 \in f_2} \alpha(d_1 \vee d_2) \leq \alpha(d)}$$

On voit facilement ce fait en remarquant que nous sommes libres de prendre trivialement $d_1 = d_2 = d$. ∎

On a encore ici un corollaire immédiat.

COROLLAIRE 2.3.2 **(Propriété universelle de $\mathfrak{I}(D)$ parmis les $\mathbb{Frm}$)** *Nous avons la propriété universelle suivante pour la construction du treillis des idéaux.* $\forall D \in |\mathbb{Lat}|\ \forall L \in |\mathbb{Frm}|\ \forall \alpha : D \longrightarrow L \in \mathbb{Lat}\ \exists! \check{\alpha} : \mathfrak{I}D \longrightarrow L \in \mathbb{Frm}$ *tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\downarrow_D(\cdot)"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \mathfrak{I}D \arrow[d, dotted, "\check{\alpha}"] \\ & L \end{tikzcd}$$

Avec ces deux outils, nous sommes prêts à discuter l'existence d'une propriété universelle pour la construction du locale des filtres. Supposons qu'on ait un treillis $D \in |\mathbb{Lat}|$. Si L est un co-cadre et $\alpha D \longrightarrow L$ un morphisme de treillis, nous avons vu à la proposition 2.3.2 que l'on peut factoriser α par le plongement canonique $\uparrow_D D \rightarrowtail \mathfrak{F}D$ et un certain morphisme de co-cadres uniquement déterminé $\hat{\alpha}$. Il est alors naturel de se demander sous quelles conditions nous pouvons à son tour factoriser $\hat{\alpha}$ par la deuxième partie de la construction de Pitts ; comme l'indique le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, tail, "\uparrow_D(\cdot)"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \mathfrak{F}D \arrow[r, tail, "\downarrow_{\mathfrak{F}D}(\cdot)"] \arrow[d, dotted, "\hat{\alpha}"] & \mathfrak{I}\mathfrak{F}D \arrow[dl, dotted, "\hat{\check{\alpha}}"] \\ & L & \end{tikzcd}$$

Pour pouvoir utiliser la propriété universelle de la construction du treillis des idéaux, nous devons avoir que L est un cadre et $\hat{\alpha}$ un morphisme de treillis. Ainsi, si L est à la fois un cadre et un co-cadre et si α est un morphisme de treillis, alors $\hat{\alpha} : \mathfrak{F}D \longrightarrow L$ sera un morphime de co-cadres donc en particulier un morphisme de treillis et donc par la proposition 2.3.2, on obtient un morphisme de cadres : $\hat{\check{\alpha}} : \mathfrak{I}\mathfrak{F}D \longrightarrow L$ faisant commuter la partie de droite du diagramme présenté ci-dessus. La commutativité des deux triangles nous donne bien sûr la commutativité du grand triangle extérieur. Nous avons donc réussi à factoriser de façon canonique tout morphisme de D dans un cadre/co-cadre. Pouvons-nous en demander plus ? Il est naturel de se demander si on peut, en imposant une condition additionnelle sur L, obtenir que $\hat{\check{\alpha}}$ préserve non-seulement les suprema quelconques (c'est un morphisme de cadres comme nous l'avons vu) mais aussi les infima quelconques. Nous avons vu dans la proposition 2.3.2 que, pour que $\hat{\alpha}$ préserve les suprema binaires, il fallait demander à L d'être un co-cadre i.e. il fallait demander que ces suprema fini se distribuent sur les infima quelconques que la construction des filtres ajoute à D. Dualement, pour que le $\check{\alpha}$ du corollaire 2.3.2 préserve les infima binaires, il fallait imposer à L d'être un cadre i.e. imposer à L la distributivité des infima binaires sur ses suprema quelconques.

Il est donc naturel de penser que pour exiger que $\hat{\check{\alpha}}$ préserve les infima quelconques on doit s'attendre à devoir imposer à L une loi de distributivité d'ordre supérieur. Le théorème suivant clarifie ce point.

THÉORÈME 2.3.1 **(Propriété quasi-universelle de $\phi(C)$)** *Nous avons la propriété quasi-universelle suivante pour la construction de Pitts.* $\forall D \in |\mathbb{Lat}|\ \forall L \in |\mathbb{Cd}|\ \forall \alpha : D \longrightarrow L \in \mathbb{Lat}\ \exists! \bar{\alpha} : \phi D \longrightarrow L \in \mathbb{Cd}$ *tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, tail, "i_D"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \phi D \arrow[d, dotted, "\bar{\alpha}"] \\ & L \end{tikzcd}$$

PREUVE: Nous avons vu dans la discussion préliminaire qu'en posant $\bar{\alpha} \equiv \check{\hat{\alpha}}$ on obtient bien un morphisme de cadres $\phi D \longrightarrow L$ adéquat. Il ne nous reste qu'à vérifier que sous l'hypothèse additionnelle que L est complètement distributif on a bien que $\bar{\alpha}$ préserve les infima quelconques. Il suffit de remarquer que si $\{I_j\}_{j\in J}$ est une famille d'éléments de ϕD, alors

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha}\left(\bigwedge_{j\in J} I_j\right) &= \check{\hat{\alpha}}\left(\bigcap_{j\in J} I_j\right)\\
&= \bigvee_{f\in\bigwedge_{j\in J} I_j} \hat{\alpha}(f)\\
&= \bigvee_{f\in\bigcap_{j\in J} I_j} \hat{\alpha}(f)
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\bigwedge_{j\in J} \bar{\alpha}(I_j) &= \bigwedge_{j\in J} \check{\hat{\alpha}}(I_j)\\
&= \bigwedge_{j\in J}\bigvee_{f\in I_j} \hat{\alpha}(f)\\
&= \bigvee_{\vec{f}\in\prod_{j\in J} I_j}\bigwedge_{j\in J} \hat{\alpha}\left(\vec{f}(j)\right)\\
&= \bigvee_{\vec{f}\in\prod_{j\in J} I_j} \hat{\alpha}\left(\bigwedge_{j\in J} \vec{f}(j)\right)
\end{aligned}$$

car L est complètement distributif et $\hat{\alpha}$ préserve les infima quelconques.

Pour voir que ces deux suprema donnent lieu au même élément de L nous montrons que

$$f \in \bigcap_{j\in J} I_j \overset{?}{\Longleftrightarrow} \exists \vec{f} \in \prod_{j\in J} I_j \;\; f = \bigcap_{j\in J} \vec{f}(j)$$

Supposons en effet que $f \in \bigcap_{j\in J} I_j$ alors il suffit de poser $\vec{f}(j) \equiv f$ pour $j \in J$ quelconque. Inversement, si $f = \bigcap_{j\in J} \vec{f}(j)$ pour un certain $\vec{f} \in \prod_{j\in J} I_j$, alors quel que soit $j_0 \in J$ on a clairement

$$\bigcap_{j\in J} \vec{f}(j) \leq \vec{f}(j_0) \in I_{j_0}$$

et comme un idéal est en particulier une partie fermée inférieurement on a que $f = \bigcap_{j\in J} \vec{f}(j)$ est dans I_{j_0}. Comme j_0 est quelconque on a bien que

$$f = \bigcap_{j\in J} \vec{f}(j) \in \bigcap_{j\in J} I_j$$

comme voulu. ∎

Remarquons que la démonstration précédente s'applique en fait à un résultat plus général concernant la construction des idéaux. Nous avons en fait montré le corollaire suivant :

COROLLAIRE 2.3.3 *Soit $D \in |\mathbb{D}\mathbb{L}|$ un treillis distributif borné ayant des infima arbitraires. Si $L \in |\mathbb{C}\mathbb{d}|$ est un treillis complètement distributif et $D \xrightarrow{\alpha} L$ est un morphisme de treillis préservant les infima quelconques, alors l'unique morphisme de cadres $\bar{\alpha}$ faisant commuter :*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, tail, "\downarrow_D(\cdot)"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \mathfrak{I}D \arrow[d, dotted, "\bar{\alpha}"] \\ & L \end{tikzcd}$$

donné par le corollaire 2.3.2 préserve également les infima arbitraires.

La proposition 2.3.1 parle d'une propriété quasi-universelle pour la construction de Pitts. Nous utilisons cette terminologie dans le sens suivant. La construction de Pitts $\phi(D)$ ne donne pas un treillis complètement distributif. Nous avons vu en effet que ce n'est en général même pas un co-cadre en général. Ainsi, le morphisme $\bar{\alpha}$ ne vit pas réellement dans la catégorie des treillis complètement distributifs, car son domaine ne s'y trouve pas. C'est pour cette raison que le dernier théorème n'est pas vraiment une propriété universelle. Nous pouvons toutefois utiliser cette propriété pour construire des morphismes de comparaison entre le locale des filtres et le double dual. En effet, il est naturel de prendre pour α l'évaluation $D \xrightarrow{e_D} D^{*\#}$ car $D^{*\#}$ est toujours complètement distributif, comme nous l'avons vu précédemment. En utilisant la proposition 2.3.1 nous obtenons ainsi un morphisme de treillis complètement distributifs uniquement déterminé $\overline{e_D}$ faisant commuter :

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, tail, "i_D"] \arrow[dr, "e_D"'] & \phi D \arrow[d, dotted, "\overline{e_D}"] \\ & D^{*\#} \end{tikzcd}$$

Calculons l'action de $\overline{e_D}$ sur un idéal de filtres $J \in \phi D$. On se rappelle que $\hat{\alpha} : \mathfrak{F}D \longrightarrow L$ se calcule comme l'infima des $\alpha(d)$ pour les d dans le filtre donné. Dualement, $\check{\alpha} : \mathfrak{I}D \longrightarrow L$ se calcule comme un supremum. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\overline{e_D}(J) &= \check{\hat{e_D}}(J) \\
&= \bigvee_{f \in J} \hat{e_D}(f) \\
&= \bigvee_{f \in J} \bigwedge_{d \in f} e_D(d) \\
&= \bigcup_{f \in J} \bigcap_{d \in f} \{p \in D^* \mid d \in p\} \\
&= \bigcup_{f \in J} \{p \in D^* \mid \forall d \in f \;\; d \in p\} \\
&= \bigcup_{f \in J} \{p \in D^* \mid f \subseteq p\} \\
&= \bigcup_{f \in J} \{p \in D^* \mid p \leq f\} \\
&= \{p \in D^* \mid p \in J\}
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité se justifie facilement comme suit. Si $p \in D^*$ est dans J, alors $p \leq p$ et on peut donc prendre $f \equiv p$ pour obtenir que

$$p \in \bigcup_{f \in J} \{p \in D^* \mid p \leq f\}$$

Inversement, si $p \in \bigcup f \in J\{p \in D^* \mid p \leq f\}$, alors il existe un $f \in J$ tel que $p \leq f$. Mais comme J est un idéal on doit avoit $p \in I$.

Le morphisme de treillis complètement distributifs $\overline{e_D}$ a donc une action très simple. Il prend un idéal de filtres et en extrait les filtres premiers. On obtient bien une partie fermée supérieurement de l'ensemble partiellement ordonné des filtres premiers car J est un idéal de filtres ; donc en particulier un sous-ensemble fermé inférieurement du treillis des filtres sur D et les filtres sont ordonnés par inclusion inverse dans le treillis des filtres donc les filtres premiers de ce sous-ensemble forment une partie fermée supérieurement dans D^* (car dans D^* l'ordre est l'inclusion). Fixons dès maitenant la notation pour $\overline{e_D}$ et ses adjoints.

DÉFINITION 2.3.2 **(Morphismes de comparaison)**

1. $(\cdot)_{\mathcal{P}} : \phi(D) \longrightarrow D^{*\#}$ *prend un idéal* $J \in \phi(D)$ *et l'envoie sur*
$$(J)_{\mathcal{P}} \equiv J \cap \mathcal{P}_r(D) \equiv \{p \in D^* \mid p \in J\}$$
2. $(\cdot)^{\bar{\wedge}} : D^{*\#} \longrightarrow \phi(D)$ *prend une partie fermée supérieurement de* D^*, *disons* $X \in D^{*\#}$, *et l'envoie sur*
$$X^{\bar{\wedge}} \equiv \bigvee_{p \in X} {\downarrow} p$$
3. $(\cdot)^{\underline{\vee}} : D^{*\#} \longrightarrow \phi(D)$ *prend une partie fermée supérieurement de* D^*, *disons* $X \in D^{*\#}$, *et l'envoie sur*
$$X^{\underline{\vee}} \equiv \bigvee \{J \mid (J)_{\mathcal{P}} \subseteq X\}$$

PROPOSITION 2.3.3 **(Morphismes de comparaison)** *Nous avons les adjoints suivants entre les deux contructions :*

$$\begin{tikzcd}
\phi(D) \arrow[rr, two heads, "(\cdot)_{\mathcal{P}}"] & & D^{*\#} \arrow[ll, bend right, "(\cdot)^{\bar{\wedge}}"'] \arrow[ll, bend left, "(\cdot)^{\underline{\vee}}"]
\end{tikzcd}$$

où $(\cdot)^{\bar{\wedge}} \dashv (\cdot)_{\mathcal{P}} \dashv (\cdot)^{\underline{\vee}}$

PREUVE: Soient $X \in D^{*\#}$, $J \in \phi(D)$ on a :

$$\begin{array}{c}
X^{\bar{\wedge}} \leq J \\ \hline
X \subseteq J \\ \hline
X \subseteq J \cap \mathcal{P}_r(D) \\ \hline
X \leq (J)_{\mathcal{P}}
\end{array}
\begin{array}{l} \\ (1) \\ (2) \\ \\ \end{array}$$

où le passage (1) se justifie par le fait que J est un idéal et que X n'est qu'une partie fermée inférieurement. Le passage (2) se justifie en remarquant que $X \subseteq \mathcal{P}_r(D)$. Ainsi, nous avons montré que $(\cdot)^{\bar{\wedge}} \dashv (\cdot)_{\mathcal{P}}$.

Pour vérifier l'autre adjonction, il suffit de montrer que $(\cdot)_{\mathcal{P}}$ préserve les suprêma arbitraires.

$$
\begin{array}{cl}
f \in \left(\bigvee_{i\in I} J_i\right)_{\mathcal{P}} & \\ \hline
f \in \bigvee_{i\in I} J_i \cap \mathcal{P}_r(D) & \\ \hline
f \in \mathcal{P}_r(D) \text{ et } f \in \bigvee_{i\in I} J_i & \\ \hline
f \in \mathcal{P}_r(D) \text{ et } {\downarrow} f \leq \bigvee_{i\in I} J_i & \\ \hline
f \in \mathcal{P}_r(D) \text{ et } \exists i \in I \ {\downarrow} f \leq J_i & (1) \\ \hline
f \in \mathcal{P}_r(D) \text{ et } \exists i \in I \ f \in J_i & \\ \hline
\exists i \in I \ f \in J_i \cap \mathcal{P}_r(D) & \\ \hline
\exists i \in I \ {\downarrow} f \leq J_i \cap \mathcal{P}_r(D) & \\ \hline
{\downarrow} f \leq \bigvee_{i\in I} J_i \cap \mathcal{P}_r(D) & \downarrow \\ \hline
f \in \bigvee_{i\in I} J_i \cap \mathcal{P}_r(D) & \\ \hline
f \in \bigvee_{i\in I} (J_i)_{\mathcal{P}} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cl}
\bigvee_{i\in I} (J_i)_{\mathcal{P}} \leq \left(\bigvee_{i\in I} J_i\right)_{\mathcal{P}} & \\ \hline
\forall i \in I \ \ (J_i)_{\mathcal{P}} \leq \left(\bigvee_{i\in I} J_i\right)_{\mathcal{P}} & \uparrow(2) \\ \hline
\forall i \in I \ \ J_i \leq \bigvee_{i\in I} J_i &
\end{array}
$$

Dans cette preuve, l'étape (1) se justifie par le fait que lorsque f est un filtre premier, ${\downarrow} f$ est un élément complètement premier de $\phi(D)$ tandis que l'étape (2) se justifie par le fait que $(\cdot)_{\mathcal{P}}$ préserve clairement la relation d'ordre.

L'adjonction suit ainsi facilement :

$$
\begin{array}{cl}
I \leq X^{\veebar} & \\ \hline
I \leq \bigvee \{J \mid J_{\mathcal{P}} \leq X\} & \downarrow \\ \hline
I_{\mathcal{P}} \leq \left(\bigvee \{J \mid J_{\mathcal{P}} \leq X\}\right)_{\mathcal{P}} & \\ \hline
I_{\mathcal{P}} \leq \bigvee \{J_{\mathcal{P}} \mid J_{\mathcal{P}} \leq X\} & \\ \hline
I_{\mathcal{P}} \leq X &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cl}
I_{\mathcal{P}} \leq X & \\ \hline
I \leq \bigvee \{J \mid J_{\mathcal{P}} \leq X\} & \downarrow \\ \hline
I \leq X^{\veebar} &
\end{array}
$$

■

La proposition suivante nous donne un peu plus de détails liant les deux constructions.

THÉORÈME 2.3.2 **(Relation fondamentale entre $\phi(D)$ et $D^{*\#}$)** *Soit D un treillis distributif. $D^{*\#}$ est un sous-locale ouvert dense de $\phi(D)$.*

PREUVE: On remarque tout d'abord que $(\cdot)_{\mathcal{P}} \circ (\cdot)^{\veebar} = Id$. En effet, par l'adjonction on a

$$\frac{(X^{\underline{\vee}})_{\mathcal{P}} \leq X}{\check{X} \leq \check{X}}$$

De plus,

$$\begin{aligned} (\check{X})_{\mathcal{P}} &= \left(\bigvee \{J \mid J_{\mathcal{P}} \subseteq X\}\right)_{\mathcal{P}} \\ &= \bigvee \{J_{\mathcal{P}} \mid J_{\mathcal{P}} \subseteq X\} \\ &\leq X \end{aligned}$$

car $(\cdot)_{\mathcal{P}}$ préserve les supréma arbitraires. Ainsi, $(\cdot)^{\underline{\vee}}$ est un monomorphisme d'ordre car il possède un inverse à gauche. On remarque aussi que $j \equiv (\cdot)^{\underline{\vee}} \circ (\cdot)_{\mathcal{P}}$ est un noyau sur $\phi(D)$ car clairement j préserve les infima binaires, $I \leq j(I)$ et $j(j(I)) = I$ (par ce que nous venons de démontrer). Donc $D^{*\#}$ est un sous locale de $\phi(D)$.

Pour montrer que $D^{*\#}$ est dense, il suffit de prendre $J \in \phi(D)$ non-vide et pour $f \in J$ quelconque on peut trouver, par le théorème d'existence des filtres premiers, $p \leq f \in J$ d'où $J_{\mathcal{P}} \neq \emptyset$. Nous avons bien montré que $D^{*\#}$ est dense selon **[13]** (p.50). En effet, nous avons montré que

$$J_{\mathcal{P}} = \emptyset \Longrightarrow J = \emptyset$$

Montrons finalement que c'est un sous-locale ouvert. Pour cela nous devons montrer la loi de Frobenius qui dit dans le contexte que $X^{\bar{\wedge}} \wedge J = (X \cap J_{\mathcal{P}})^{\bar{\wedge}}$

$$\begin{array}{c} (X \cap J_{\mathcal{P}})^{\bar{\wedge}} \leq X^{\bar{\wedge}} \wedge J \\ \hline X \cap J_{\mathcal{P}} \leq (X^{\bar{\wedge}} \wedge J)_{\mathcal{P}} \\ \hline X \cap J_{\mathcal{P}} \leq (X^{\bar{\wedge}})_{\mathcal{P}} \cap J_{\mathcal{P}} \\ \hline X \leq (X^{\bar{\wedge}})_{\mathcal{P}} \\ \hline X^{\bar{\wedge}} \leq X^{\bar{\wedge}} \end{array} \uparrow$$

$$\begin{array}{c}
J_{\mathfrak{P}} \subseteq X \Longrightarrow J_{\mathfrak{P}} \cap (\downarrow f)_{\mathfrak{P}} \subseteq X \cap (\downarrow f)_{\mathfrak{P}} \\ \hline
J_{\mathfrak{P}} \subseteq X \Longrightarrow (J \wedge \downarrow f)_{\mathfrak{P}} \subseteq X \cap (\downarrow f)_{\mathfrak{P}} \\ \hline
J_{\mathfrak{P}} \subseteq X \Longrightarrow J \wedge \downarrow f \leq \bigvee \{K \mid K_{\mathfrak{P}} \subseteq X \cap (\downarrow f)_{\mathfrak{P}}\} \quad \downarrow \\ \hline
X^{\bar{\wedge}} \wedge \downarrow f \leq (X \cap (\downarrow f)_{\mathfrak{P}})^{\bar{\wedge}} \quad \downarrow \\ \hline
\displaystyle\bigvee_{f \in J} X^{\bar{\wedge}} \wedge \downarrow f \leq \bigvee_{f \in J} (X \cap (\downarrow f)_{\mathfrak{P}})^{\bar{\wedge}} \\ \hline
\displaystyle X^{\bar{\wedge}} \wedge \bigvee_{f \in J} \downarrow f \leq \left(X \wedge \left(\bigvee_{f \in J} \downarrow f \right)_{\mathfrak{P}} \right)^{\bar{\wedge}} \\ \hline
X^{\bar{\wedge}} \wedge J \leq (X \wedge J_{\mathfrak{P}})^{\bar{\wedge}}
\end{array}$$

∎

On se rappelle que le double dual $(\cdot)^{*\#}$ peut être considéré comme un foncteur $(\cdot)^{*\#} : \mathbb{DL} \longrightarrow \mathbb{C}\mathbb{d}$ allant de la catégorie des treillis distributifs dans la catégorie des treillis complètement distributifs. De la même façon, $\phi(\cdot)$ peut être considéré comme un foncteur $\phi(\cdot) : \mathbb{DL} \longrightarrow \mathbb{F}\mathrm{rm}$ comme nous l'avons Mais si on aggrandit la catégorie d'arrivée du foncteur $(\cdot)^{*\#}$ à la catégorie des cadres, on aura affaire à deux foncteurs allant de la catégorie des treillis distributifs à la catégorie des cadres. De plus, pour chaque treillis distributif D on a un unique morphisme de cadres $(\cdot)^{D}_{\mathfrak{P}} : \phi(D) \longrightarrow D^{*\#}$. La question que nous pouvons nous demander dans cette optique est : Est-ce que $(\cdot)_{\mathfrak{P}}$ nous donne une transformation naturelle entre les deux foncteurs ? La proposition suivante répond par l'affirmative à cette question. Mais avant, nous avons besoin d'un lemme qui nous aidera à calculer avec $\phi(\cdot)$.

LEMME 2.3.1 **(Calcul de $\phi(h)$)** *Soit $A \xrightarrow{h} B \in \mathbb{DL}$. Si $I \in \phi(A)$, alors*

$$\phi(h)(I) = \{f \in \mathfrak{F}(B) \mid \exists g \in I \; \forall b \in B \; [\exists a \in g \;\; h(a) \leq b \Rightarrow b \in f]\}$$

PREUVE: Selon les définitions données dans la section 1.7, on a que pour $I \in \phi(A)$:

$$\begin{aligned}
\phi(h)(I) &\equiv \mathfrak{I}\,(\mathfrak{F}(h))\,(I) \\
&= \{f \in \mathfrak{F}(B) \mid \exists g \in I \;\; f \leq \mathfrak{F}(h)(g)\} \\
&= \{f \in \mathfrak{F}(B) \mid \exists g \in I \;\; \mathfrak{F}(h)(g) \subseteq f\} \\
&= \{f \in \mathfrak{F}(B) \mid \exists g \in I \;\; \{b \in B \mid \exists a \in g \;\; h(a) \leq b\} \subseteq f\} \\
&= \{f \in \mathfrak{F}(B) \mid \exists g \in I \; \forall b \in B \; [\exists a \in g \;\; h(a) \leq b \Rightarrow b \in f]\} \in \phi(B)
\end{aligned}$$

∎

PROPOSITION 2.3.4 **(Naturalité de $(\cdot)_{\mathcal{P}}$)** *L'association $(\cdot)^{D}_{\mathcal{P}}$ pour un treillis distributif D donne une transformation naturelle de $\phi(\cdot)$ vers $(\cdot)^{*\#}$ i.e. si $h : A \longrightarrow B \in \mathbb{DL}$, alors le diagramme suivant dans la catégorie des cadres $\mathfrak{Frm}$*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "h"'] & \phi(A) \arrow[r, "(\cdot)^{A}_{\mathcal{P}}"] \arrow[d, "\phi(h)"'] & A^{*\#} \arrow[d, "h^{*\#}"] \\ B & \phi(B) \arrow[r, "(\cdot)^{B}_{\mathcal{P}}"'] & B^{*\#} \end{tikzcd}$$

commute.

PREUVE: Soient $I \in \phi(A)$, $q \in \mathcal{P}_r(B)$. On a

$$\begin{array}{c} q \in h^{*\#}\left(I^{A}_{\mathcal{P}}\right) \\ \hline q \in h^{*\#}\left(I \cap \mathcal{P}_r(A)\right) \\ \hline h^{*}(q) \in I \cap \mathcal{P}_r(A) \\ \hline h^{*}(q) \in I \\ \hline \exists g \in I \; \forall b \in B \; [\exists a \in g \;\; h(a) \leq b \Rightarrow b \in q] \\ \hline q \in \phi(h)(I) \\ \hline q \in \left(\phi(h)(I)\right)^{B}_{\mathcal{P}} \end{array} \quad (*)$$

La preuve de $(*)$ se fera en deux étapes.

$(\Downarrow)$ Posons $g \equiv h^{*}(q) \in I$. Soit $b \in B$ quelconque. On suppose qu'il existe $a \in g = h^{*}(q)$ tel que $h(a) \leq b$. Mais $a \in h^{*}(q)$ veut dire que $h(a) \in q$ et puisque $h(a) \leq b$ et que q est un filtre, on doit avoir $b \in q$ comme il fallait.

$(\Uparrow)$ Supposons maintenant qu'il existe un $g \in I$ pour lequel

$$\forall b \in B \;\; [\exists a \in g \;\; h(a) \leq b \Rightarrow b \in q]$$

Nous voulons montrer que $h^{*}(q) \in I$. Pour cela, il suffit de montrer que $h^{*}(q) \leq g$ (car $g \in I$ et I est un idéal). Mais comme l'ordre dans $\mathfrak{F}(A)$ est l'inclusion inversée, ceci revient à dire que $g \subseteq h^{*}(q)$. Cette dernière inclusion est vraie car, quel que soit $x \in g$, on a $h(x) \in B$ et trivialement $h(x) \leq h(x)$; d'où $\exists a \in g$ tel que $h(a) \leq h(x)$ ce qui entraîne par hypothèse que $h(x) \in q$ i.e. $x \in h^{*}(q)$. ∎

Nous terminons la présente section en donnant des conditions nécessaires et suffisantes pour que le morphisme de comparaison entre le double dual et le locale des filtres donne un isomorphisme. Nous atteignons donc un point culminant dans notre compréhension de la relation qui existe entre ces deux constructions propositionnelles.

THÉORÈME 2.3.3 **(Conditions d'équivalence entre $\phi(D)$ et $D^{*\#}$)** *Soit $D \in |\mathbb{D}|$ un treillis distributif. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le morphisme de comparaison $(\cdot)_{\mathcal{P}} : \phi(D) \longrightarrow D^{*\#}$ est un isomorphisme de treillis complets.*
2. *Il y a un isomorphisme de cadres $\phi(D) \simeq D^{*\#}$.*
3. *Tous les filtres f sur D peuvent s'écrire comme une intersection finie de filtres premiers sur D.*
4. *$\phi(D)$ est engendré par ses éléments premiers.*
5. *$\phi(D)$ est complètement distributif.*

PREUVE: Clairement, $1 \Rightarrow 2$. Si $\phi(D) \simeq D^{*\#}$, alors $\phi(D)$ est engendré par ses éléments premiers et ainsi, par la proposition 2.2.3, on obtient la conclusion voulue ; donc $2 \Rightarrow 3$. On a aussi démontré que $3 \Rightarrow 4$ et $4 \Rightarrow 5$.

Finalement, si on suppose 5, alors nous pouvons appliquer la propriété universelle étendue du double dual au modèle canonique du locale des filtres, et réciproquement, nous pouvons appliquer la propriété quasi-universelle du locale des filtres (qui est ici une vraie propriété universelle ici car $\phi(D) \in |\mathbb{C}\mathbb{d}|$). Nous obtenons donc les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd}
 & D^{*\#} \arrow[d, "\overline{i_D}"'] \arrow[dd, bend left=60, "1_{D^{*\#}}"] \\
D \arrow[ur, "e_D"] \arrow[r, "i_D"'] \arrow[dr, "e_D"'] & \phi D \arrow[d, "(\cdot)_{\mathcal{P}}"'] \\
 & D^{*\#}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \phi D \arrow[d, "(\cdot)_{\mathcal{P}}"'] \arrow[dd, bend left=60, "1_{\phi D}"] \\
D \arrow[ur, "i_D"] \arrow[r, "e_D"'] \arrow[dr, "i_D"'] & D^{*\#} \arrow[d, "\overline{i_D}"'] \\
 & \phi D
\end{tikzcd}$$

Donc on a bien montré que $\overline{i_D}$ est un inverse pour le morphisme de comparaison. ∎

Cette section nous a permis de comprendre de façon détaillée la relation entre les deux constructions que nous avons étudiées jusqu'à maintenant. Nous avons de plus obtenu une propriété quasi-universelle pour la construction de Pitts qui ressemble en tout point à celle du double-dual. Ce sont surtout ces résultats que nous chercherons plus tard à relever en traitant le cas de la logique du premier ordre.

2.4. RÉFLEXION DES ISOMORPHISMES ET COMPLÉTUDE CONCEPTUELLE

Nous allons donner dans la présente section la réponse à des questions naturelles qui concernent à la fois le double dual et la construction des filtres. Supposons qu'on ait affaire à deux treillis distributifs $C, D \in |\mathbb{D}\mathbb{l}|$. Si on a un isomorphisme de treillis complets $C^{*\#} \simeq D^{*\#}$, peut-on conclure que $C \simeq D$? Malheureusement, hormis le cas ou C et D sont finis, la réponse à cette question est négative. En effet, on se rappelle que dans une algèbre de Boole B, les filtres premiers (ou ultrafiltres) sont ordonnés de façon discrète (la relation d'ordre est l'égalité). Ainsi, pour construire un contre-exemple, il suffit d'imaginer deux algèbres de boole non-isomorphes infinies ayant le même nombre d'ultrafiltres (ayant la même cardinalité pour les ensembles d'ultrafiltres associés). Cet obstacle ne nous laisse pourtant pas sans recours. En effet, nous retrouvons dans Makkai/Reyes **[27]** un théorème de complétude conceptuelle pour la logique cohérente du premier ordre. Si nous spécialisons ce résultat à la logique cohérente propositionnelle il prend la forme suivante.

PROPOSITION 2.4.1 **(Théorème de complétude conceptuelle : version propositionnelle)** *Soit $C \xrightarrow{\alpha} D \in \mathbb{D}\mathbb{l}$ un morphisme de treillis distributifs bornés tel que $D^* \xrightarrow{\alpha^*} C^*$ est un isomorphisme d'ensembles partiellement ordonnés, alors α est un isomorphisme.*

La preuve sera décomposée en deux lemmes plus élémentaires. Nous appellerons morphisme *conservatif* un morphisme qui réfléchit l'ordre.

LEMME 2.4.1 *Soit $C \xrightarrow{\alpha} D \in \mathbb{D}\mathbb{l}$ un morphisme de treillis distributifs bornés. Alors α est conservatif si et seulement si $D^* \xrightarrow{\alpha^*} C^*$ est surjectif.*

PREUVE: (⇒) On montre que α^* est surjectif. Soit $p \in C^*$. On pose :

$$g \equiv \{d \in D \mid \exists c \in p \ \ \alpha(c) \leq d\}$$
$$J \equiv \{d \in D \mid \exists c \in C \setminus p \ \ d \leq \alpha(c)\}$$

Clairement, g est un filtre et J est un idéal. De plus, $g \cap J = \emptyset$ car si $d \in g \cap J$, on a par définition qu'il existe $c \in p$ et $c' \in C \setminus p$ tels que

$$\alpha(c) \leq d \leq \alpha(c')$$

mais comme α réfléchit l'ordre ; on en déduit que $c \leq c'$. Ceci est clairement une contradiction car $c \in p$ et $c' \notin p$. Mais p doit pourtant être fermé supérieurement, car c'est un filtre. Ainsi, par le théorème d'existence des filtre premiers, il existe $q \in D^*$ tel que $g \subseteq q$ et $q \cap J = \emptyset$. Vérifions que q est le candidat recherché i.e. que $\alpha^*(q) = p$. Si $c \in p$, alors $\alpha(c) \in g \subseteq q$, donc $c \in \alpha^*(q)$. Si $c \in \alpha^*(q)$, alors $\alpha(c) \in q$; d'où $\alpha(c) \notin J$ (car q et J sont disjoints) donc $c \in p$, car si $c \notin p$ alors $\alpha(c) \in J$.

($\Leftarrow$) On montre que α réfléchit l'ordre. Supposons au contraire qu'il y ait $c_1, c_2 \in C$ tels que $c_1 \not\leq c_2$. On considère alors

$$f \equiv \uparrow c_1$$
$$I \equiv \downarrow c_2$$

Clairement, $f \cap I = \emptyset$ donc, par le théorème d'existence des filtres premiers, il existe $p \in C^*$ tel que $f \subseteq p$ et $p \cap I = \emptyset$. Mais, puisque par hypothèse α^* est épi, on peut trouver $q \in D^*$ tel que $\alpha^*(q) = p$. On a donc $\alpha(c_1) \in q$ (car $c_1 \in p = \alpha^*(q)$) mais $\alpha(c_2) \notin q$ (car sinon $c_2 \in \alpha^*(q) = p$ mais $c_2 \in I$ et $p \cap I = \emptyset$). Ainsi, on en conclut que $\alpha(c_1) \not\leq \alpha(c_2)$ comme voulu. Nous avons ainsi montré la contraposée de la formule qui dit que α réfléchit l'ordre. ∎

LEMME 2.4.2 *Soit $C \xrightarrow{\alpha} D \in \mathbb{DL}$ un morphisme de treillis distributifs bornés. Alors α est un épimorphisme si et seulement si $D^* \xrightarrow{\alpha^*} C^*$ est conservatif.*

PREUVE: ($\Rightarrow$) On suppose que α est épi. Soient $q_1, q_2 \in D^*$ tels que $\alpha^*(q_1) \subseteq \alpha^*(q_2)$. Nous voulons montrer que $q_1 \subseteq q_2$. Soit $d \in q_1$. Comme α est épi, il existe $c \in C$ tel que $\alpha(c) = d$. On a en conséquence que $c \in \alpha^*(q_1)$, car $\alpha(c) = d \in q_1$, et donc $c \in \alpha^*(q_2)$ par hypothèse. On en conclut que $d = \alpha(c) \in q_2$ comme voulu.

($\Leftarrow$) Supposons au contraire qu'il existe $d_0 \in D$ tel que, quel que soit $c \in C$, on a toujours $\alpha(c) \neq d_0$. On considère alors

$$g \equiv \uparrow d_0$$
$$J \equiv \{d \in D \mid \exists c \in C \;\; d \leq \alpha(c) \leq d_0\}$$

Clairement, g est un filtre. Montrons que J est un idéal.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{d, d' \in J}{\exists c \in C \; \exists c' \in C \;\; d \leq \alpha(c) \leq d_0 \;\;\; d' \leq \alpha(c') \leq d_0}}{\exists c'' \in C \;\; d \vee d' \leq \alpha(c'') \leq d_0}}{d \vee d' \in J}$$

Le passage de la deuxième ligne à la troisième se fait en posant $c'' \equiv c \vee c'$. Comme $d \leq \alpha(c)$ et $d' \leq \alpha(c')$ on a

$$d \vee d' \leq \alpha(c) \vee \alpha(c') = \alpha(c \vee c')$$

et comme $\alpha(c), \alpha(c') \leq d_0$ on a bien, $\alpha(c \vee c') \leq d_0$. Le chemin inverse se fait évidemment en posant $c = c' \equiv c''$. Donc J est bien un idéal.

Montrons maintenant que $g \cap J = \emptyset$. Si $d \in g \cap J$ alors il existe $c \in C$ tel que $d_0 \leq d \leq \alpha(c) \leq d_0$ d'où l'on aurait que $\alpha(c) = d_0$; une contradiction. Ainsi, par le théorème d'existence des filtres premiers, il existe $q \in D^*$ tel que $g \subseteq q$ et $q \cap J = \emptyset$. Considérons maintenant :

$$g' \equiv \{d \in D \mid \exists c \in \alpha^*(q) \;\; \alpha(c) \leq d\}$$
$$J' \equiv {\downarrow} d_0$$

Clairement, J' est un idéal. Montrons que g' est un filtre.

$$\begin{array}{c}
d, d' \in g' \\
\hline
\exists c \in \alpha^*(q)\ \exists c' \in \alpha^*(q) \;\; \alpha(c) \leq d \;\; \alpha(c') \leq d' \\
\hline
\exists c'' \in \alpha^*(q) \;\; \alpha(c'') \leq d \wedge d' \\
\hline
d \wedge d' \in g'
\end{array}$$

où le passage de la deuxième ligne à la troisième se fait naturellement en posant $c'' \equiv c \wedge c'$ (comme $\alpha^*(q)$ est un filtre, on a précisément que $c \wedge c' \in \alpha^*(q)$ si et seulement si $c, c' \in \alpha^*(q)$).

On a encore une fois que $g' \cap J' = \emptyset$. En effet, si au contraire on pouvait trouver $d \in g' \cap J'$, alors il existerait un $c \in \alpha^*(q)$ tel que $\alpha(c) \leq d \leq d_0$. Mais dans ce cas, on aurait $\alpha(c) \in q \cap J$; ce qui est impossible. Ainsi, par le théorème d'existence des filtres premiers, il existe $q' \in D^*$ tel que $g' \subseteq q'$ et $q' \cap J' = \emptyset$.

Nous avons enfin atteint notre but car $\alpha^*(q) \subseteq \alpha^*(q')$. En effet,

$$\begin{array}{cl}
c \in \alpha^*(q) & \\
\cline{1-1}
\alpha(c) \in g' & \downarrow \\
\cline{1-1}
\alpha(c) \in q' & \downarrow \\
\cline{1-1}
c \in \alpha^*(q') &
\end{array}$$

mais on a pourtant que $q \nsubseteq q'$ car $d_0 \in q$, mais $d_0 \notin q'$, car $d_0 \in J'$ et J' est disjoint de q'. Ainsi, on a montré que α^* n'est pas conservatif. ∎

Nous sommes maintenant prêts à regarder le résultat principal de la présente section. En effet, le théorème de complétude conceptuelle va nous permettre de démontrer que nos deux constructions réfléchissent les isomorphismes. Nous obtenons même plus :

THÉORÈME 2.4.1 **(Réflexion des isomorphismes)** *Soit $C \xrightarrow{\alpha} D \in \mathbb{D}\mathrm{l}$ un morphisme de treillis distributifs bornés. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$C^{*\#} \xrightarrow{\alpha^{*\#}} D^{*\#}$ est un isomorphisme de treillis complètement distributifs.*
2. *$\phi(C) \xrightarrow{\phi(\alpha)} \phi(D)$ est un isomorphisme de treillis complets.*
3. *$D^{*} \xrightarrow{\alpha^{*}} C^{*}$ est un isomorphisme d'ensembles partiellement ordonnés.*
4. *$C \xrightarrow{\alpha} D$ est un isomorphisme de treillis distributifs.*

PREUVE: Cette preuve élégante m'a été communiquée par Gonzalo E. Reyes. Le théorème de complétude conceptuelle énoncé à la proposition 2.4.1 nous donne que $3 \Rightarrow 4$. De plus, $4 \Rightarrow 1$, $4 \Rightarrow 2$, $4 \Rightarrow 3$ et $3 \Rightarrow 1$ car tout foncteur préserve les isomorphismes. Il ne nous reste qu'à démontrer que $1 \Rightarrow 3$ et $2 \Rightarrow 3$. Ces deux preuves se font de façon identique. Elles utilisent la propriété (quasi-)universelle de la construction qui entre en jeu.

($1 \Rightarrow 3$) Nous avons une chaîne d'isomorphismes :

$$\begin{tikzcd}
D^{*} \arrow[r, "\chi_{(\cdot)}"] \arrow[d, dotted, "\alpha^{*}"'] & \mathbf{Hom}_{\mathbb{D}\mathrm{l}}(D,2) \arrow[r, "\overline{(\cdot)}"] & \mathbf{Hom}_{\mathbb{C}\mathrm{d}}(D^{*\#},2) \arrow[d, "(\cdot)\circ\alpha^{*\#}"] \\
C^{*} & \mathbf{Hom}_{\mathbb{D}\mathrm{l}}(C,2) \arrow[l, "(\cdot)^{-1}(1)"] & \mathbf{Hom}_{\mathbb{C}\mathrm{d}}(C^{*\#},2) \arrow[l, "(\cdot)\circ e_C"]
\end{tikzcd}$$

et nous pouvons vérifier facilement que la composition de tous ces isomorphismes donne α^{*} en prenant $q \in D^{*}$ et en observant le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, hook, "e_C"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\circ"] & C^{*\#} \arrow[d, "\simeq"', "\alpha^{*\#}"] \\
D \arrow[r, hook, "e_D"] \arrow[dr, "\chi_q"'] \arrow[dr, phantom, "\circ", near start, shift left=3] & D^{*\#} \arrow[d, "\overline{\chi_q}"] \\
 & 2
\end{tikzcd}$$

Ainsi, on voit que $\overline{\chi_q} \circ \alpha^{*\#} \circ e_C = \chi_q \circ \alpha$ et

$$\begin{aligned}(\chi_q \circ \alpha)(c) = 1 &\iff \alpha(c) \in q \\ &\iff c \in \alpha^*(q)\end{aligned}$$

donc on a bien le résultat voulu soit :

$$(\overline{\chi_q} \circ \alpha^{*\#} \circ e_C)^{-1}(1) = \alpha^*(q)$$

Ceci termine la preuve de $3 \Rightarrow 1$.

La preuve pour le cas de la construction des filtres (i.e. $3 \Rightarrow 2$) est identique car nous avons dans ce cas une propriété quasi-universelle. ∎

Le résultat suivant est aussi dû à Gonzalo E. Reyes. Il dit que si on a un isomorphisme entre deux doubles duaux ou deux locales de filtres alors on a un isomorphisme entre les deux ensembles partiellement ordonnés des filtres premiers des treillis distributifs de départ. On a vu au début de la présente section qu'on ne peut pas en dire beaucoup plus.

THÉORÈME 2.4.2 **(Réflexion faible des isomorphismes)** *Soient $C, D \in |\mathbb{D}\mathbb{l}|$ des treillis distributifs. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il y a un isomorphisme de treillis complets $C^{*\#} \simeq D^{*\#}$.*
2. *Il y a un isomorphisme de cadres $\phi(C) \simeq \phi(D)$.*
3. *Il y a un isomorphisme d'ensembles partiellement ordonnés $C^* \simeq D^*$*

PREUVE: Il suffit de regarder le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{Hom}_{\mathbb{C}\mathrm{d}}(C^{*\#}, 2) & \text{———} & \mathbf{Hom}_{\mathbb{C}\mathrm{d}}(D^{*\#}, 2) \\
\Vert & & \Vert \\
\mathbf{Hom}_{\mathbb{D}\mathbb{l}}(C, 2) & \text{———} & \mathbf{Hom}_{\mathbb{D}\mathbb{l}}(D, 2) \\
\Vert & & \Vert \\
\mathbf{Hom}_{\mathbb{C}\mathrm{d}}(\Phi C, 2) & \text{———} & \mathbf{Hom}_{\mathbb{C}\mathrm{d}}(\phi D, 2)
\end{array}$$

dans lequel tous les morphismes verticaux sont des isomorphismes (ils sont donnés par les propriétés universelles respectives des deux constructions). Notons que nous avons utilisé la notation '$\mathbf{Hom}_{\mathbb{C}\mathrm{d}}(\phi C, 2)$' dans ce diagramme pour parler de l'ensemble partiellement ordonné des morphismes de treillis complets de ϕC dans 2 (même chose pour D). Ceci est bien sûr un abus de notation car $\phi C \notin |\mathbb{C}\mathrm{d}|$ en général. Nous voyons que chaque condition de l'énoncé correspond à déclarer qu'un certain morphisme horizontal est un isomorphisme. Il est clair que dès qu'on a un tel isomorphisme, nous pouvons, par composition, définir les deux autres morphismes horizontaux de façon à ce qu'ils soient iso et fassent commuter le diagramme. Ceci implique clairement le résultat. ∎

La réflexion des isomorphismes est une propriété structurelle très souhaitable. Elle est un indice de la fidélité du modèle. Par exemple, la construction du groupe fondamental en topologie algébrique ne jouit pas de cette propriété. Il est en effet possible que le foncteur "groupe fondamental" (π) envoie une fonction continue entre deux espaces topologiques sur un isomorphisme de groupes sans pour autant que les espaces soient homéomorphes. La théorie des groupes, en ce sens, ne s'adapte en effet pas aussi bien à la topologie que ce que fait la théorie des treillis avec la logique.

2.5. Amalgamation forte et double dual

Dans la présente section, nous allons étudier une application jolie du double dual. Elle établit des propriétés d'amalgamation forte dans la catégorie des algèbres de Heyting ($\mathbb{H}\mathrm{a}$), de co-Heyting ($\mathrm{co}\mathbb{H}\mathrm{a}$) et de bi-Heyting ($\mathrm{bi}\mathbb{H}\mathrm{a}$). Concrètement, cela veut dire que la somme amalgamée (push-out) d'un monomorphisme le long d'un morphisme quelconque de ces catégories donne toujours un monomorphisme. Dans le cas particulier des algèbres de Heyting, ce résultat est équivalent au fameux *théorème d'interpolation de Craig* qui a certainement sa place dans la thèse d'un étudiant d'un étudiant de Craig !

La preuve de la stabilité des monos par somme amalgamée reproduit le raisonnement de **[24]** et l'adapte au cas des algèbres de co-Heyting et de bi-Heyting. Nous commençons par donner une série de lemmes qui seront utiles à la preuve.

Lemme 2.5.1

1. *Si $f : A \longrightarrow B$ est Heyting alors $f^* : B^* \longrightarrow A^*$ est surjectif vers le haut.*
2. *Si $f : A \longrightarrow B$ est co-Heyting alors $f^* : B^* \longrightarrow A^*$ est surjectif vers le bas.*

PREUVE: Soit $p \in A^*$ tel que $\exists q \in B^*\ f^*(q) \leq p$. On cherche un $q' \in B^*$ tel que $q \leq q'$ et $f^*(q') = p$. Soient

$$F \equiv \langle q \cup \exists_f(p) \rangle = \{b \in B \mid \exists b' \in q \exists a \in p\ b \geq b' \wedge f(a)\}$$

$$I \equiv \langle \{f(a) \mid a \notin p\} \rangle = \{b \in B \mid \exists a' \in A\ b \leq f(a')\ ,\ a' \notin p\}$$

On a $F \cap I = \emptyset$. En effet, si $b \in F \cap I$ alors par définition de F et I on aurait :

$$\exists b' \in q \exists a \in p \exists a' \in A\ a' \notin p\ ,\ b' \wedge f(a) \leq b \leq f(a')$$

D'où $b' \leq f(a) \to f(a') = f(a \to a')$ (car f est Heyting) et, puisque $b' \in q$, on en déduit que $f(a \to a') \in q$ i.e. $a \to a' \in f^*(q) \subseteq p$. Ainsi, $a \in p$ et $a \to a' \in p$, donc $a \wedge a \to a' \in p$; ce qui est impossible car $a \wedge a \to a' \leq a'$, et $a' \notin p$ par hypothèse. Ainsi, F et I sont bien disjoints. Donc, par le théorème d'existence des filtres premiers, il existe un filtre premier $q' \in B^*$ contenant F et tel que $q' \cap I = \emptyset$. Vérifions que ce q' est bien le candidat recherché. On a premièrement que $q \subseteq F \subseteq q'$ donc q' étend bien q. De plus, si $a \in p$, alors par définition de F on a $f(a) \in F \subseteq q'$. D'où $a \in f^*(q')$ et on en conclut que $p \subseteq f^*(q')$. Mais en fait $p = f^*(q')$ car si $a \notin p$ alors $f(a) \notin q'$ car sinon on aurait $f(a) \in q' \cap I$ (ce qui est impossible). D'où $a \notin f^*(q')$. On en conclut que $f^*(q') \subseteq p$. On a ainsi montré que f^* est surjective vers le haut.

Montrons maintenant que pour un f co-Heyting le morphisme f^* est surjectif vers le bas. Soit $p \in A^*$ tel que $\exists q \in B^*\ p \leq f^*(q)$. On cherche un $q' \in B^*$ tel que $q' \leq q$ et $f^*(q') = p$. Soient

$$F \equiv \langle \exists_f(p) \rangle = \{b \in B \mid \exists a \in p\ b \geq f(a)\}$$

$$I \equiv \left\langle \{f(a) \mid a \notin p\} \cup q^{\mathrm{c}} \right\rangle = \{b \in B \mid \exists a' \in A \exists b' \in B\ b \leq f(a') \vee b'\ ,\ a' \notin p\ ,\ b' \notin q\}$$

On a $F \cap I = \emptyset$. En effet, si $b \in F \cap I$ alors par définition de F et I on aurait :

$$\exists b' \in B \exists a \in p \exists a' \in A\ a' \notin p\ ,\ b' \notin q\ ,\ f(a) \leq b \leq f(a') \vee b'$$

D'où $f(a \setminus a') = f(a) \setminus f(a') \leq b'$ (car f est co-Heyting) et puisque $b' \notin q$, on en déduit que $f(a \setminus a') \notin q$ i.e. $a \setminus a' \notin f^*(q)$ et $a \setminus a' \notin p$ car $p \subseteq f^*(q)$. Ainsi, $a' \notin p$ et $a \setminus a' \notin p$, donc $a' \vee a \setminus a' \notin p$ (car p est premier) ; ce qui est impossible car $a \leq a' \vee a \setminus a'$, mais $a \in p$ par hypothèse. Ainsi, F et I sont bien disjoints. Donc, par le théorème d'existence des filtres premiers, il existe un filtre premier $q' \in B^*$ contenant F et tel que $q' \cap I = \emptyset$. Vérifions que ce q' est bien le candidat recherché. On a premièrement que $q' \subseteq q$. Car si $b \notin q$, alors $b \in I$ d'où $b \notin q'$ car $q' \cap I = \emptyset$. De plus, si $a \in p$, alors par définition de F on a $f(a) \in F \subseteq q'$ d'où $a \in f^*(q')$ et on en conclut que $p \subseteq f^*(q')$. Mais en fait $p = f^*(q')$ car si $a \notin p$, alors $f(a) \notin q'$, car sinon on aurait $f(a) \in q' \cap I$ (ce qui est impossible).

D'où $a \notin f^*(q')$. On en conclut que $f^*(q') \subseteq p$. On a ainsi montré que f^* est surjective vers le bas. ∎

LEMME 2.5.2 *Considérons le diagramme suivant dans les treillis distributifs :*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

Si on pose $P \equiv \{(a,b) \in A \times B \mid f(a) = g(b)\}$ considéré comme un sous-treillis de $A \times B$, $\pi_A(a,b) \equiv a$ et $\pi_B(a,b) \equiv b$, alors le diagramme suivant est un produit fibré (pull-back) dans la catégorie des treillis distributifs :

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\pi_A"] \arrow[d, "\pi_B"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

PREUVE: La preuve est évidente et est laissée au lecteur. ∎

LEMME 2.5.3 *Considérons le produit fibré suivant dans la catégorie des treillis distributifs :*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\pi_A"] \arrow[d, "\pi_B"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

Si f est surjective vers le haut, alors π_B l'est aussi. Si f est surjective vers le bas, alors π_B l'est aussi.

PREUVE: Supposons que pour $b \in B$ il existe un $p \in P$ pour lequel $\pi_B(p) \leq b$. On cherche un $p' \in P$ tel que $p \leq p'$ et $\pi_B(p') = b$. Mais

$$\begin{aligned} \pi_B(p) \leq b &\implies g(\pi_B(p)) \leq g(b) \\ &\implies f(\pi_A(p)) \leq g(b) \\ &\implies \exists a \in A \ \pi_A(p) \leq a \ , \ f(a) = g(b) \end{aligned}$$

Notez que cette dernière implication provient du fait que f est surjective vers le haut. Si on choisit la forme donnée dans le lemme 2.5.2 pour P, π_A et π_B ; on peut poser $p' \equiv (a,b) \in P$. Vérifions que ce p' est bien le candidat recherché.

Puisque $p = (\pi_A(p), \pi_B(p)) \leq (a,b) = p'$ et $\pi_B(p') = \pi_B(a,b) = b$ c'est bien le cas.

Regardons maintenant le deuxième résultat. Supposons que pour $b \in B$ il existe un $p \in P$ pour lequel $b \leq \pi_B(p)$. On cherche un $p' \in P$ tel que $p' \leq p$ et $\pi_B(p') = b$. Mais

$$\begin{aligned} b \leq \pi_B(p) &\Longrightarrow g(b) \leq g(\pi_B(p)) \\ &\Longrightarrow g(b) \leq f(\pi_A(p)) \\ &\Longrightarrow \exists a \in A \ a \leq \pi_A(p)\ ,\ f(a) = g(b) \end{aligned}$$

et cette dernière implication provient du fait que f est surjective vers le bas. Si on choisit la forme donnée dans le lemme 2.5.2 pour P, π_A et π_B ; on peut poser $p' \equiv (a,b) \in P$. Vérifions que ce p' est bien le candidat recherché. Puisque $p = (\pi_A(p), \pi_B(p)) \geq (a,b) = p'$ et $\pi_B(p') = \pi_B(a,b) = b$ c'est bien le cas. ∎

LEMME 2.5.4 *Soient P et Q des ordres partiels et $f : P \longrightarrow Q$ un morphisme d'ordres, alors*

1. *Si $f : P \longrightarrow Q$ est surjectif vers le haut, alors $f^{\#} : 2^Q \longrightarrow 2^P$ est Heyting.*
2. *Si $f : P \longrightarrow Q$ est surjectif vers le bas, alors $f^{\#} : 2^Q \longrightarrow 2^P$ est co-Heyting.*

PREUVE: Nous utilisons dans ce qui suit les formules données dans 1.4.1 pour l'implication et la co-implication dans des treillis de la forme 2^P.

Clairement, $f^{\#}(X \to Y) \leq f^{\#}(X) \to f^{\#}(Y)$. Pour l'autre direction,

$$\begin{array}{c} p \in f^{\#}(X) \to f^{\#}(Y) \\ \hline \forall p' \geq p \ p' \in f^{\#}(X) \Longrightarrow p' \in f^{\#}(Y) \\ \hline \forall p' \geq p \ f(p') \in X \Longrightarrow f(p') \in Y \\ \hline \forall q \geq f(p) \ q \in X \Longrightarrow q \in Y \\ \hline f(p) \in X \to Y \\ \hline p \in f^{\#}(X \to Y) \end{array} \quad \downarrow(*)$$

Pour justifier l'étape $(*)$ on prend un $q \geq f(p)$ quelconque. Puisque f est surjective vers le haut, il existe un $p' \geq p$ pour lequel $f(p') = q$. Mais pour tous les $p' \geq p$ on a que $q = f(p') \in X$ implique que $q = f(p') \in Y$.

Regardons maintenant la deuxième partie. Clairement, $f^{\#}(X \backslash Y) \geq f^{\#}(X) \backslash f^{\#}(Y)$. Pour l'autre direction,

$$
\begin{array}{c}
p \in f^{\#}(X) \setminus f^{\#}(Y) \\ \hline
\exists p' \leq p \; p' \in f^{\#}(X) \;,\; p' \notin f^{\#}(Y) \\ \hline
\exists p' \leq p \; f(p') \in X \;,\; f(p') \notin Y \\ \hline
\exists q \leq f(p) \; q \in X \;,\; q \notin Y \\ \hline
f(p) \in X \setminus Y \\ \hline
p \in f^{\#}(X \setminus Y)
\end{array}
\quad \begin{array}{c} \\ \\ \\ \uparrow(**) \\ \\ \\ \end{array}
$$

Pour justifier l'étape $(**)$ on considère $q \leq f(p)$ et puisque f est surjective vers le bas, il existe un $p' \leq p$ pour lequel $f(p') = q$. Mais $f(p') = q \in X$ et $f(p') = q \notin Y$. ∎

LEMME 2.5.5 **(Le foncteur $(\cdot)^*$ préserve les produits fibrés)** *Si*

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "k"] & P \\
C \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] & B \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}
$$

est une somme amalgamée (push-out) dans la catégorie des treillis distributifs alors

$$
\begin{tikzcd}
A^* \arrow[d, "f^*"'] & P^* \arrow[l, "k^*"'] \arrow[d, "h^*"] \\
C^* & B^* \arrow[l, "g^*"]
\end{tikzcd}
$$

est un produit fibré dans la catégorie des ordres partiels.

PROPOSITION 2.5.1 **(Amalgamation forte pour $\mathbb{Ha}$, $\mathbb{coHa}$ et $\mathbb{biHa}$)** *Les monomorphismes sont stables par somme amalgamée (push-out) dans les catégories suivantes : $\mathbb{Ha}$, $\mathbb{coHa}$ et $\mathbb{biHa}$.*

PREUVE: Nous allons traiter les trois cas en même temps, en spécifiant chaque fois où c'est nécessaire quelles propriétés sont requises pour la catégorie spécifique. Prenons tout d'abord un diagramme dans une de ces trois catégories (que nous nommerons catégorie de départ dans ce qui suit) :

$$
\begin{tikzcd}
A & \\
C \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}
$$

On commence par prendre sa somme amalgamée dans la catégorie des treillis distributifs :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "k"] & P \\ C \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] & B \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

Par le lemme 2.5.5, on a que le diagramme suivant est un produit fibré dans la catégorie des ordres partiels :

$$\begin{tikzcd} A^* \arrow[d, "f^*"'] & P^* \arrow[l, "k^*"'] \arrow[d, "h^*"] \\ C^* & B^* \arrow[l, "g^*"] \end{tikzcd}$$

De plus, nous savons en vertu du lemme 2.5.1 que

1. si f est Heyting, alors h^* est surjectif vers le haut et donc $h^{*\#}$ est Heyting (par le lemme 2.5.4).
2. si f est co-Heyting, alors h^* est surjectif vers le bas et donc $h^{*\#}$ est co-Heyting (par le lemme 2.5.4).
3. si f est bi-Heyting, alors h^* est bidirectionellement surjectif et donc $h^{*\#}$ est bi-Heyting (par le lemme 2.5.4).

Ainsi, dans les trois cas $h^{*\#}$ est dans la catégorie de départ.

Maintenant, si on considère le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} B^{*\#} \arrow[r, "h^{*\#}"] & P^{*\#} \\ B \arrow[u, "e_B"] \arrow[r, "h"'] & P \arrow[u, "e_P"'] \end{tikzcd}$$

qui commute par la naturalité de l'évaluation (voir proposition 1.2.6), on remarque que $e_P \circ h$ est Heyting, co-Heyting ou bi-Heyting selon la catégorie de départ. En effet, $e_P \circ h = h^{*\#} \circ e_B$ où e_B est conditionellement bi-Heyting (voir proposition 1.3.3 et corollaire 1.3.1) et $h^{*\#}$ est soit Heyting, co-Heyting ou bi-Heyting selon la catégorie de départ. Prenons maintenant la somme amalgamée de notre diagramme original dans sa catégorie de départ :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g'"] & P' \\ C \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] & B \arrow[u, "f'"'] \end{tikzcd}$$

Plaçons maintenant dans ce dernier diagramme la somme amalgamée du début de la preuve (prise dans la catégorie des treillis distributifs) ainsi que l'évaluation pour P :

$$\begin{tikzcd}
& & & P^{*\#} \\
& & P' \arrow[ur, "e_P"] & \\
A \arrow[r, "g'"] \arrow[urr, bend left, "k"] & P' & & \\
C \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] & B \arrow[u, "f'"'] \arrow[uur, bend right, "h"'] & &
\end{tikzcd}$$

Comme nous l'avons vu, $e_P \circ h$ est dans la catégorie de départ. Il est de même pour $e_P \circ k$ par symétrie. De plus, puisque $(e_P \circ h) \circ g = (e_P \circ k) \circ f$ on a, par la propriété universelle de la somme amalgamée P', qu'il existe un unique morphisme $i : P' \longrightarrow P^{*\#}$ de la catégorie de départ faisant commuter :

$$\begin{tikzcd}
& & P^{*\#} \\
A \arrow[r, "g'"] \arrow[urr, bend left, "e_P \circ k"] & P' \arrow[ur, dotted, "i"] & \\
C \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] & B \arrow[u, "f'"'] \arrow[uur, bend right, "e_P \circ h"'] &
\end{tikzcd}$$

Maintenant, si on suppose que f est mono, alors h doit l'être aussi car h est le push-out de f dans la catégorie des treillis distributifs et, dans cette catégorie, les monomorphismes sont stables par push-out. Ainsi nous pouvons en conclure que f' est mono car $i \circ f' = e_P \circ h$ et e_P est aussi mono. ∎

Voici donc un exemple d'application des propriétés catégoriques du double dual comme outil pour démontrer des propriétés algébriques de certaines catégories d'algèbres. De plus, cette application nous donne par extension une propriété de la logique intuitionniste propositionnelle : le théorème d'interpolation de Craig. Cet exemple montre aussi que le double dual peut jouer le rôle du locale des filtres pour démontrer, comme Pitts le fait dans **[29]**, des résultats d'amalgamation. Il joue en effet mieux son rôle qu'on ne pourrait l'espérer : il montre le résultat pour d'autres catégories que les algèbres de Heyting.

2.6. Conclusion

Nous avons maintenant en tête des images bien précises à propos de ces deux constructions qui nous ont intéressées jusqu'à présent. La structure du locale des filtres s'est avérée être moins subtile que celle du double dual. En effet, la brutalité avec laquelle le locale des filtres complète le treillis distributif de base se fait en deux étapes symétriques dans lesquelles à chaque étape on obtient "un peu trop" de richesse. On n'obtient pas les lois de distributivité complètes précisément en raison de ce déséquilibre. Le locale des filtres est trop orienté "cadre" pour qu'on puisse en dégager les propriétés duales à ses propriétés naturelles. Ces étapes sont constructives et par le fait même pas assez coriaces, pour supporter toute la subtilité de notre topos de base : la catégorie des ensembles $\mathfrak{Ens}$. Le double dual comble ce manque de finesse avec brio en nous donnant un sous-locale ouvert dense du locale des filtres. Remémorons nous en effet le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\phi(D) \arrow[r, two heads, "(\cdot)_{\mathcal{P}}"] & D^{*\#} \arrow[l, hook', bend right=50, "(\cdot)^{\bar{\wedge}}"'] \arrow[l, hook, bend left=50, "(\cdot)^{\underline{\vee}}"]
\end{tikzcd}$$

dans lequel tout s'écrase dès que $\phi(D)$ est engendré par ses éléments premiers ou est complètement distributif. Nous avons aussi déterminé une condition précise sur D pour que $\phi(D)$ soit engendré par ses éléments premiers. Finalement, si on regarde la propriété quasi-universelle du locale des filtres, on voit que double dual vient combler la lacune 'quasi' de façon optimale.

Nous constatons donc qu'avec l'aide de la subtilité de l'axiome du choix qui lui est implanté de façon interne, le double dual nous donne le quotient *parfait* du locale des filtres. Le double dual crée, par identification (ou quotient), les liens logiques qui manquaient dans le cadre $\phi(D)$ pour qu'il devienne complètement distributif. Toute la puissance de l'outil vient bien sûr de la nature des filtres *premiers* et de leur existence.

Dans les prochains chapitres, nous grimpons une marche dans la complexité. Nous étudions les constructions vues jusqu'ici dans le contexte des théories du premier ordre.

Chapitre 3

LE TOPOS DES FILTRES

3.1. Introduction

Avec l'intérêt suscité par les deux premiers chapitres autour de ces deux constructions de nature propositionnelles, nous sommes forcément tentés d'explorer la ramification des théories du premier ordre et y découvrir si l'analogue du double dual et l'analogue du locale des filtres y existent. Abordons dès maintenant cette question aussi doucement qu'il nous l'est possible dans notre cadre.

Les structures les plus élémentaires que nous allons aborder, qui représentent l'analogue des treillis distributifs bornés seront les catégories cohérentes. Résumons les propriétés d'une catégorie cohérente $\mathbb{C}$:

1. $\mathbb{C}$ possède des limites finies : $\mathbf{1}_{\mathbb{C}}$ + produits fibrés.
2. $\mathbb{C}$ possède des supréma finis dans ses treillis de sous-objets.
3. Ces supréma finis sont stables par produits fibrés i.e. si $\alpha : C \longrightarrow D \in \mathbb{C}$, le morphisme "image inverse le long de α" :
$$\alpha^* : \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(D) \longrightarrow \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(C)$$
préserve les suprema finis.
4. Pour chaque $\alpha : C \longrightarrow D \in \mathbb{C}$ le morphisme de treillis :
$$\alpha^* : \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(D) \longrightarrow \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(C)$$
possède un ajoint à gauche :
$$\exists_\alpha : \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(C) \longrightarrow \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(D)$$
i.e. $\exists_\alpha \dashv \alpha^*$. On appelle naturellement cet adjoint à gauche : "l'image le long de α".

5. Ces morphismes image $\exists_\alpha$ doivent satisfaire la condition de Beck-Chevalley qui dit que les images sont stables par produit fibré. Plus précisément, si le diagramme suivant est un produit fibré dans $\mathbb{C}$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] & B \\ A' \arrow[u, "\beta'"] \arrow[r, "\alpha'"'] \arrow[ur, phantom, "\square"] & B' \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

alors le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(A) \arrow[r, "\exists_\alpha"] \arrow[d, "\beta'^*"'] \arrow[dr, phantom, "\circ"] & \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(B) \arrow[d, "\beta^*"] \\ \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(A') \arrow[r, "\exists_{\alpha'}"'] & \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(B') \end{tikzcd}$$

Nous voyons que nous pouvons facilement déduire des propriétés précédentes que l'ensemble partiellement ordonné des sous-objets d'un objet $X \in |\mathbb{C}|$: $\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(X)$ est un treillis distributif borné. Ainsi, la structure de base que nous étudions dans les premiers chapitres se voit réflétée dans le treillis des sous-objets de chaque objet de $\mathbb{C}$.

Le présent chapitre introduit la construction du topos des filtres de Pitts (voir **[30]** et **[31]**) sur les catégories cohérentes. Ainsi, l'équivalent du locale des filtre, pour la logique des prédicats, est un topos.

Comme vous le constatez, j'ai décidé de traiter le cas du topos des filtres en premier. En effet, sa construction est plus simple mais comme dans le cas propositionnel, elle est plus grossière et ne permet pas autant de souplesses que le double dual.

Dans les sections qui suivent, nous allons construire une catégorie $\Lambda\mathbb{C}$ des filtres de $\mathbb{C}$ et nous allons trouver les principales propriétés de cette construction. Ensuite, nous allons regarder la définition du topos des filtres et en découvrir les principales propriétés de fonctorialité. Finalement, nous démontrons une propriété quasi universelle pour le topos des filtres qui est clairement la généralisation de la situation propositionnelle préalablement établie.

3.2. La catégorie des filtres $\Lambda\mathbb{C}$

Le topos de Pitts peut être vu sous l'angle de deux constructions différentes. Dans l'article [**30**], Pitts construit son topos comme une catégorie de faisceaux internes dans une catégorie donnée. Nous suivrons plutôt l'autre voie, qui s'apparente plus avec le topos de Makkai soit comme un topos de Grothendieck sur un site donné et qui est donnée dans Pitts [**31**]. Ce chemin aura l'avantage de faciliter la tâche de la comparaison entre les deux topos. En effet, les comparaisons aux niveaux de descriptions topologiques des topos nous offrent des techniques avancées pour décrire des topos en termes de faisceaux sur des sites.

Donnons nous une catégorie cohérente $\mathbb{C}$. Le site que nous allons construire à l'aide de $\mathbb{C}$ a comme catégorie de base une catégorie des filtres sur $\mathbb{C}$. La catégorie des filtres est une construction naturelle qui permet de plonger de façon canonique une catégorie donnée dans une catégorie possédant des intersections quelconques au niveau des sous-objets. Regardons dès maintenant comment nous la construisons.

Définition 3.2.1 **(La catégorie des filtres)** *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie cohérente (on pourrait supposer simplement que $\mathbb{C}$ est régulière). La catégorie des filtres : $\Lambda\mathbb{C}$ a comme objets des paires (X, f) où $X \in |\mathbb{C}|$ et f est un filtre sur $S_{\mathbb{C}}(X)$. Donnons-nous maintenant deux objets dans $\Lambda\mathbb{C}$: (X, f) et (Y, g) et définissons ce qu'est un morphisme de $(X, f) \longrightarrow (Y, g)$ dans la catégorie $\Lambda\mathbb{C}$. Premièment, pour $A \in f$ nous dirons qu'un morphisme $\alpha : A \longrightarrow Y$ de $\mathbb{C}$ est admissible comme morphisme de (X, f) vers (Y, g) si*

$$\forall B \in S_{\mathbb{C}}(Y) \ \ B \in g \Longrightarrow \alpha^*(B) \in f$$

où α^* est simplement le pull-back le long de α. Soient $A, A' \in f$, $\alpha : A \longrightarrow Y$ et $\alpha' : A' \longrightarrow Y$ deux morphismes admissibles de (X, f) vers (Y, g). On dit que α et α' sont équivalents si il existe un $A'' \in f$ tel que $A'' \leq A \wedge A'$ et $\alpha|A'' = \alpha'|A''$. Un morphisme de $\Lambda\mathbb{C}$ est un classe d'équivalence de morphismes admissibles. Si $A \in f$ et $\alpha : A \longrightarrow Y$ est admissible de (X, f) vers (Y, g), nous noterons par

$$[\alpha] : (X, f) \longrightarrow (Y, g)$$

la classe d'équivalence de α.

Pour compléter la construction, nous devons définir les morphismes identité et la loi de composition des morphismes. Si $(X, f) \in |\Lambda\mathbb{C}|$, on définit le morphisme identité sur (X, f) comme étant :

$$(X, f) \xrightarrow{[1_X]} (X, f)$$

i.e. $1_{(X,f)} \equiv [1_X] : (X, f) \longrightarrow (X, f)$. Soient $(X, f) \xrightarrow{[k]} (Y, g)$ et $(Y, g) \xrightarrow{[l]} (Z, h)$ des morphismes de $\Lambda\mathbb{C}$. Disons que $k : A \longrightarrow Y$ (où $A \in f$) et $l : B \longrightarrow Z$ (où $B \in g$). On définit la composition $[l] \circ [k]$ comme étant la classe d'équivalence du morphisme $l \circ k'$ dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
k^*B \arrow[r, "k'"] \arrow[d, tail, "i'_B"'] & B \arrow[r, "l"] \arrow[d, tail, "i_B"] & Z \\
A \arrow[r, "k"'] \arrow[d, tail, "i_A"'] & Y & \\
X & &
\end{tikzcd}$$

où k^*B est le produit fibré de B le long de k.

Vérifions dès maintenant que cette définition a du sens ; que $\Lambda\mathbb{C}$ jouit bien de la propriété d'être une catégorie, malgré la définition de ses morphismes qui peut paraître inhabituelle au premier coup d'œil.

PROPOSITION 3.2.1 **($\Lambda\mathbb{C}$ est une catégorie)** *La catégorie des filtres $\Lambda\mathbb{C}$ d'une catégorie cohérente $\mathbb{C}$, telle que définie ci-dessus, est effectivement une catégorie.*

PREUVE: Montrons tout d'abord que la composition des morphismes, telle que définie, a du sens. Nous devons montrer que le représentant définissant la composition est admissible et que la composition est indépendante du choix des représentants. Montrons tout d'abord que le morphisme $l \circ k'$ est admissible comme morphisme allant de (X, f) vers (Z, h). On voit bien ce fait en observant le diagramme suivant :

$$
\begin{tikzcd}
k^*(l^*C) \arrow[r, "k''"] \arrow[d, "c''"'] \arrow[dr, phantom, "\boxed{\mathrm{a}}"] & l^*C \arrow[r, "l'"] \arrow[d, "c'"'] \arrow[dr, phantom, "\boxed{\mathrm{b}}"] & C \arrow[d, "c"] \\
k^*B \arrow[r, "k'"] \arrow[d, "b'"'] \arrow[dr, phantom, "\boxed{\mathrm{c}}"] & B \arrow[r, "l"] \arrow[d, "b"] & Z \\
A \arrow[r, "k"'] \arrow[d, "a"'] & Y & \\
X & &
\end{tikzcd}
$$

En effet, si on considère que $C \xrightarrow{c} Z \in h$, alors, comme l est admissible, nous pouvons prendre le produit fibré $\boxed{\mathrm{b}}$ et on a que $l^*C \xrightarrow{b \circ c'} Y \in g$. Nous devons ensuite prendre la fibre de $l^*C \xrightarrow{b \circ c'} Y$ le long de k. Mais ceci est équivalent, par le lemme des produit-fibrés, à prendre le produit fibré $\boxed{\mathrm{c}}$ suivi du $\boxed{\mathrm{a}}$. On sait que la fibre de $l^*C \xrightarrow{b \circ c'} Y$ le long de k, soit $k^*(l^*C) \xrightarrow{a \circ b' \circ c''} X$, est dans f. Finalement, on voit que le rectangle $\boxed{\mathrm{a}} - \boxed{\mathrm{b}}$ est également un produit fibré car $\boxed{\mathrm{a}}$ en est un et $\boxed{\mathrm{b}}$ aussi.

Montrons maintenant que la composition est indépendante du choix des représentants. Supposons que $[k]$ soit représenté par $A_1 \xrightarrow{k_1} Y$ et $A_2 \xrightarrow{k_2} Y$. On a $k_1 \sim k_2$ donc il existe $C \in f$ tel que $C \leq A_1 \wedge A_2$ et $k_1|C = k_2|C$. Supposons également que $[l]$ soit représenté par $B_1 \xrightarrow{l_1} Z$ et $B_2 \xrightarrow{l_2} Z$. On a $l_1 \sim l_2$ donc il existe $D \in g$ tel que $D \leq B_1 \wedge B_2$ et $l_1|D = l_2|D$. On a alors le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & k_1'^*D \arrow[d, "d_1'"'] \arrow[dr, "k_1''"] & & \\
 & & k_1^*B_1 \arrow[d, "a_1"'] \arrow[dr, "k_1'"] & D \arrow[d, "d_1"] & \\
 & & A_1 \arrow[dr, "k_1"] & B_1 \arrow[d, "b_1"] \arrow[dr, "l_1"] & \\
k_1^*D \wedge k_2^*D \wedge C \arrow[r, "i_c"] \arrow[uuurr, "i_1"] \arrow[dddrr, "i_2"'] & C \arrow[ur, "c_1"] \arrow[dr, "c_2"'] & & Y & Z \\
 & & A_2 \arrow[ur, "k_2"'] & B_2 \arrow[u, "b_2"'] \arrow[ur, "l_2"'] & \\
 & & k_2^*B_2 \arrow[u, "a_2"] \arrow[ur, "k_2'"'] & D \arrow[u, "d_2"'] & \\
 & & k_2'^*D \arrow[u, "d_2'"] \arrow[ur, "k_2''"'] & &
\end{tikzcd}$$

Dans lequel on montre que

$$l_1 \circ k_1' \circ d_1' = l_2 \circ k_2' \circ d_2' \circ i_2$$

Premièrement, on remarque que

$$l_1 \circ k_1' \circ d_1' = l_1 \circ d_1 \circ k_1'' \circ i_1 \quad \text{et} \quad l_2 \circ k_2' \circ d_2' = l_2 \circ d_2 \circ k_2'' \circ i_2$$

De plus, $k_1'' \circ i_1 = k_2'' \circ i_2$ car

$$\begin{aligned}
b_1 \circ d_1 \circ k_1'' \circ i_1 &= k_1 \circ a_1 \circ d_1' \circ i_1 \\
&= k_1 \circ c_1 \circ i_c \\
&= k_2 \circ c_2 \circ i_c \qquad\qquad \text{car } k_1|C = k_2|C \\
&= k_2 \circ a_2 \circ d_2' \circ i_2 \\
&= b_2 \circ d_2 \circ k_2'' \circ i_2
\end{aligned}$$

Mais $b_1 \circ d_1 = b_2 \circ d_2$ (car $D \leq B_1 \wedge B_2$) et est un monomorphisme donc $k_1'' \circ i_1 = k_2'' \circ i_2$. Finalement, puisque $l_1|D = l_2|D$ on a :

$$\begin{aligned} l_1 \circ d_1 \circ k_1'' \circ i_1 &= l_2 \circ d_2 \circ k_1'' \circ i_1 \\ &= l_2 \circ d_2 \circ k_2'' \circ i_2 \end{aligned}$$

Ainsi, la définition de composition donnée est indépendante du choix des repésentants. Vérifions maintenant les règles ayant rapport aux morphismes identité. Clairement, 1_X est admissible de (X, f) vers lui-même donc la définition du morphisme identité pour un objet donné a du sens. On voit bien avec le diagramme suivant que $1_{(Y,g)} \circ [k] = [k]$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "k"] \arrow[d, "1_A"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[r, "1_Y"] \arrow[d, "1_Y"] & Y \\ A \arrow[r, "k"'] \arrow[d, "a"'] & Y & \\ X & & \end{tikzcd}$$

De la même façon, on montre avec le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & A \arrow[r, "k"] \arrow[d, "a"] & Y \\ X \arrow[r, "1_X"'] \arrow[d, "1_X"'] & X & \\ X & & \end{tikzcd}$$

que $[k] \circ 1_{(X,f)} = [k]$.

Il ne nous reste qu'à vérifier que la composition est associative. Il est aisé de voir ce fait en observant le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
j'^*(k^*C) \arrow[r, "j''"] \arrow[d, tail, "c''"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & k^*C \arrow[r, "k'"] \arrow[d, tail, "c'"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & C \arrow[r, "l"] \arrow[d, tail, "c"] & Z \\
j^*B \arrow[r, "j'"] \arrow[d, tail, "b'"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & B \arrow[r, "k"'] \arrow[d, tail, "b"] & Y & \\
A \arrow[r, "j"'] \arrow[d, tail, "a"'] & X & & \\
W & & &
\end{tikzcd}$$

∎

La catégorie que nous venons de définir joue un rôle central dans la suite de cette thèse. Nous allons donc porter une attention particulière aux propriétés de cette construction. Nous découvrons dans la prochaine section quelle est la généralisation de la construction du treillis des filtres des deux premiers chapitres.

3.3. Propriétés de base de $\Lambda\mathbb{C}$

La proposition suivante va grandement nous simplifier la tâche en ce qui concerne la notation.

Proposition 3.3.1 **(Choix de représentants totaux)** *Soient $(X, f) \in |\Lambda\mathbb{C}|$ et $A \overset{m}{\rightarrowtail} X$ tel que $A \in f$. Si on pose*

$$f|A \equiv \left\{ B \overset{b}{\rightarrowtail} A \mid B \overset{mob}{\rightarrowtail} X \in f \right\}$$

alors $(A, f|A) \xrightarrow{[m]} (X, f)$ est un isomorphisme dans $\Lambda\mathbb{C}$.

Preuve: Clairement $f|A$ est un filtre. Le morphisme $A \overset{m}{\rightarrowtail} X$ est admissible de $(A, f|A)$ vers (X, f). En effet, si $A' \overset{n}{\rightarrowtail} X \in f$, alors on a le produit fibré suivant :

$$\begin{tikzcd}
A \wedge A' \arrow[r, tail, "m'"] \arrow[d, tail, "n'"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & A' \arrow[d, tail, "n"] \\
A \arrow[r, tail, "m"'] & X
\end{tikzcd}$$

On voit que $A \wedge A' \overset{n'}{\rightarrowtail} A \in f|A$ car, par la propriété de fermeture sous les intersections finies des filtres, $A \wedge A' \overset{mon'}{\rightarrowtail} X \in f$.

Montrons maintenant que $[m]$ a un inverse à gauche :

$$\begin{tikzcd} (X,f) \arrow[r, "{[1_A]}"] \arrow[rr, bend left, "1_{(X,f)}"] & (A,f|A) \arrow[r, "{[m]}"] & (X,f) \end{tikzcd}$$

On voit dans le diagramme suivant le calcul du représentant pour le morphisme composé :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "1_A"'] & A \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d, "1_A"] & X \\ A \arrow[r, "1_A"'] \arrow[d, tail, "m"'] & A & \\ X & & \end{tikzcd}$$

Mais $m \circ 1_A = m \sim 1_X$ comme morphisme de (X, f) vers lui-même car

$$f \ni A = A \wedge X \quad \text{et} \quad 1_X|A = m = m|A$$

De la même façon, on montre que $[1_A]$ est aussi inverse à droite pour $[m]$:

$$\begin{tikzcd} (A,f|A) \arrow[r, "{[m]}"] \arrow[rr, bend left, "1_{(A,f|A)}"] & (X,f) \arrow[r, "{[1_A]}"] & (A,f|A) \end{tikzcd}$$

En effet, le diagramme suivant montre le calcul du représentant pour le morphisme composé :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "1_A"'] & A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, tail, "m"] & X \\ A \arrow[r, tail, "m"'] \arrow[d, "1_A"'] & A & \\ X & & \end{tikzcd}$$

et par définition, $[1_A]$ est l'identité sur $(A, f|A)$. ∎

On voit qu'à l'aide de cette dernière proposition nous allons pouvoir supposer qu'un morphisme $(Y, g) \xrightarrow{[\alpha]} (X, f)$ est représenté par un morphisme ayant

Y en entier comme domaine au lieu d'un sous-objet de Y. En effet, si α n'est qu'un morphisme partiel, alors nous pouvons précomposer $[\alpha]$ avec l'isomorphisme décrit dans la proposition précédente de façon à obtenir un morphisme total. Ainsi, nous n'aurons plus besoin (ou presque) de spécifier le domaine des représentants des morphismes. Nous pouvons même faire ce genre de supposition dans des situations plus générales, où plusieurs morphismes ont le même domaine, comme l'exprime la proposition suivante :

PROPOSITION 3.3.2 **(Représentants totaux simultanés pour une famille finie)** *Si on a une famille finie de morphismes $[\alpha_i] : (X, f) \longrightarrow (Y_i, g_i)$ avec $i = 1, 2, \ldots, n$, alors nous pouvons supposer que les représentants α_i de ces morphismes ont tous le même domaine : X en entier i.e. $X \xrightarrow{\alpha_i} Y_i$.*

PREUVE: Si les représentants sont $A_i \xrightarrow{\alpha_i} Y_i$ où $A_i \in f$, alors on a $\bigwedge_{i=1}^{n} A_i \in f$ et par la proposition 3.3.1 on a que

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i, f|_{\bigwedge_{i=1}^{n} A_i} \right) \simeq (X, f)$$

En précomposant chacun des morphismes originaux avec cet isomorphisme, nous obtenons des morphismes de $\Lambda\mathbb{C}$ représentés par des morphismes de C ayant tous le même domaine. On voit facilement que tout fonctionne comme prévu. ∎

Définissons maintenant un foncteur allant de $\mathbb{C}$ vers $\Lambda\mathbb{C}$. Il nous permettra de plonger $\mathbb{C}$ dans sa catégorie des filtres.

DÉFINITION 3.3.1 **(Plongement canonique pour $\Lambda\mathbb{C}$)** *On définit l'application :*

$$\mathbb{C} \xrightarrow{[\cdot]} \Lambda\mathbb{C}$$

en posant pour un objet $X \in |\mathbb{C}|$:

$$[X] \equiv (X, \{1_X\})$$

et pour un morphisme $X \xrightarrow{f} Y \in \mathbb{C}$ on pose

$$[X \xrightarrow{f} Y] \equiv (X, \{1_X\}) \xrightarrow{[f]} (Y, \{1_Y\})$$

PROPOSITION 3.3.3 **(Fonctorialité de $[\cdot]$)** *L'application $[\cdot]$ telle que définie ci-dessus est un foncteur.*

PREUVE: Clairement f est admissible de $[X]$ vers $[Y]$ car $f^*(1_Y) = 1_X$. De plus, $[1_X] = 1_{(X,\{1_X\})} = 1_{[X]}$ et $[g \circ f] = [g] \circ [f]$ est aussi trivialement vérifié ici. ■

La catégorie $\Lambda\mathbb{C}$ possède des limites finies. Les deux propositions qui suivent donnent des constructions de ces limites. Il est suffisant de construire dans $\Lambda\mathbb{C}$ un objet terminal ainsi que tous les produits fibrés de paires de morphismes ayant un co-domaine commun. Regardons comment les objets terminaux se manifestent dans $\Lambda\mathbb{C}$.

PROPOSITION 3.3.4 **(Objets terminaux de $\Lambda\mathbb{C}$)** *Si $\mathbf{1}_\mathbb{C}$ est un objet terminal dans $\mathbb{C}$, alors $[\mathbf{1}_\mathbb{C}]$ est un objet terminal de $\Lambda\mathbb{C}$.*

PREUVE: Soit $(X, f) \in |\mathbb{C}|$. L'unique morphisme $X \xrightarrow{\alpha} \mathbf{1}_\mathbb{C}$ est clairement admissible de (X, f) vers $[\mathbf{1}_\mathbb{C}] = (\mathbf{1}_\mathbb{C}, \{1_{\mathbf{1}_\mathbb{C}}\})$. De plus, si $[\beta] : (X, f) \longrightarrow [\mathbf{1}_\mathbb{C}]$ où $\beta : A \longrightarrow \mathbf{1}_\mathbb{C}$, alors la commutativité forcée de

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & \mathbf{1}_\mathbb{C} \\ X \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

dans $\Lambda\mathbb{C}$ nous donne que $\beta|A = \alpha|A$ i.e. $\alpha \sim \beta$. ■

Voyons maintenant si on peut faire aussi bien avec les produits fibrés.

PROPOSITION 3.3.5 **(Caratérisation des produits fibrés dans $\Lambda\mathbb{C}$)** *Soient $[\alpha] : (Y, g) \longrightarrow (X, f)$ et $[\beta] : (Z, h) \longrightarrow (X, f)$ des morphismes de $\Lambda\mathbb{C}$ ayant le même co-domaine et tels que leurs représentants α et β sont totaux (nous pouvons toujours supposer cela comme nous l'avons vu auparavant). Si le diagramme suivant est un produit fibré dans $\mathbb{C}$:*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "\alpha'"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d, "\alpha"] \\ Z \arrow[r, "\beta"'] & X \end{tikzcd}$$

et si on pose

$$\pi \equiv \mathfrak{F}\left(\alpha'^{*}\right)(h) \wedge \mathfrak{F}\left(\beta'^{*}\right)(g)$$

(où "$\wedge$" est l'infimum dans le treillis des filtres sur P), alors

$$\begin{tikzcd} (P, \pi) \arrow[r, "{[\beta']}"] \arrow[d, "{[\alpha']}"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & (Y, g) \arrow[d, "{[\alpha]}"] \\ (Z, h) \arrow[r, "{[\beta]}"'] & (X, f) \end{tikzcd}$$

est un produit fibré dans $\Lambda\mathbb{C}$.

PREUVE: On se rappelle que dans le treillis des filtres sur P l'ordre est l'inclusion inverse. Ainsi, l'infimum de deux filtres donnés se calcule en prenant le filtre engendré par la réunion des deux filtres donnés. Ainsi,

$$\pi \equiv \mathfrak{F}\left(\alpha'^{*}\right)(h) \wedge \mathfrak{F}\left(\beta'^{*}\right)(g) = \left\langle \mathfrak{F}\left(\alpha'^{*}\right)(h) \cup \mathfrak{F}\left(\beta'^{*}\right)(g)\right\rangle$$

On voit bien que, par la construction même de π, α' est un morphisme admissible de (P, π) vers (Z, h). En effet, si $C \in h$ on a clairement :

$$\alpha'^{*}(C) \in \mathfrak{F}\left(\alpha'^{*}\right)(h) \subseteq \left\langle \mathfrak{F}\left(\alpha'^{*}\right)(h) \cup \mathfrak{F}\left(\beta'^{*}\right)(g)\right\rangle = \pi$$

De façon symétrique, β' est admissible. Maintenant, la commutativité de

$$\begin{tikzcd} (P, \pi) \arrow[r, "{[\beta']}"] \arrow[d, "{[\alpha']}"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & (Y, g) \arrow[d, "{[\alpha]}"] \\ (Z, h) \arrow[r, "{[\beta]}"'] & (X, f) \end{tikzcd}$$

est automatique par la commutativité des représentants sous-jacents dans $\mathbb{C}$. Il nous reste à véfifier la propriété universelle du produit fibré. Donnons-nous le diagramme suivant dans $\Lambda\mathbb{C}$

$$\begin{tikzcd}
(W,\delta) \arrow[drr, bend left, "{[s]}"] \arrow[ddr, bend right, "{[t]}"'] & & \\
& (P,\pi) \arrow[r, "{[\beta']}"] \arrow[d, "{[\alpha']}"'] & (Y,g) \arrow[d, "{[\alpha]}"] \\
& (Z,h) \arrow[r, "{[\beta]}"'] & (X,f)
\end{tikzcd}$$

Par la proposition 3.3.2 on peut supposer que s et t sont totaux et ont tous deux W comme domaine. Ainsi, par la propriété universelle du produit fibré dans $\mathbb{C}$, on obtient l'existence d'un unique morphisme $W \xrightarrow{u} P$ faisant commuter :

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[drr, bend left, "s"] \arrow[ddr, bend right, "t"'] \arrow[dr, dotted, "u"] & & \\
& P \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "\alpha'"'] & Y \arrow[d, "\alpha"] \\
& Z \arrow[r, "\beta"'] & X
\end{tikzcd}$$

Montrons que u est admissible de (W,δ) vers (P,π). On a

$$\begin{aligned}
\pi &= \left\langle \mathfrak{F}\left(\alpha'^*\right)(h) \cup \mathfrak{F}\left(\beta'^*\right)(g) \right\rangle \\
&= \left\{ D \in \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(P) \mid \exists C' \in \mathfrak{F}\left(\alpha'^*\right)(h)\ \exists C'' \in \mathfrak{F}\left(\beta'^*\right)(g)\ \ D \geq C' \wedge C'' \right\}
\end{aligned}$$

car le filtre engendré par une réunion de deux filtres est formé précisément des éléments supérieurs à des infima d'éléments provenant respectivement de chacun des deux filtres donnés.

Si on se donne $C \in \pi$, on a

$$\exists C' \in \mathfrak{F}\left(\alpha'^*\right)(h)\ \exists C'' \in \mathfrak{F}\left(\beta'^*\right)(g)\ \ D \geq C' \wedge C''$$

Ainsi, par définition de $\mathfrak{F}(\alpha'^*)(h)$ et $\mathfrak{F}(\beta'^*)(g)$:

$$\exists D' \in h\ \exists D'' \in g\ \ C \geq \alpha'^*(D') \wedge \beta'^*(D'')$$

Donc

$$\begin{aligned}
u^*(C) &\geq u^*\left(\alpha'^*(D') \wedge \beta'^*(D'')\right) \\
&= u^*\left(\alpha'^*(D')\right) \wedge u^*\left(\beta'^*(D'')\right) \\
&= t^*(D') \wedge s^*(D'')
\end{aligned}$$

et comme s et t sont admissibles on a que $t^*(D') \in \delta$ et $s^*(D'') \in \delta$ (car $D' \in h$ et $D'' \in g$) d'où $u^*(C) \in \delta$.

Nous avons ainsi la commutativité de

$$\begin{tikzcd}
(W,\delta) \arrow[dr, dotted, "{[u]}"] \arrow[drr, bend left, "{[s]}"] \arrow[ddr, bend right, "{[t]}"'] & & \\
& (P,\pi) \arrow[r, "{[\beta']}"] \arrow[d, "{[\alpha']}"'] & (Y,g) \arrow[d, "{[\alpha]}"] \\
& (Z,h) \arrow[r, "{[\beta]}"'] & (X,f)
\end{tikzcd}$$

Examinons maintenant l'unicité de $[u]$. Supposons qu'on ait affaire à un autre morphisme $(W,\delta)\xrightarrow{[u']}(P,\pi)$ faisant lui aussi commuter le diagramme comme $[u]$. Ceci veut dire, en supposant que le domaine de u' est $E \overset{i}{\rightarrowtail} W \in \delta$, i.e. $E \xrightarrow{u'} P$, que

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "u'"] \arrow[d] & P \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, phantom, "\sim"] & Y \\
W \arrow[urr, bend right, "s"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "u'"] \arrow[d] & P \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, phantom, "\sim"] & Y \\
W \arrow[urr, bend right, "t"'] & &
\end{tikzcd}$$

i.e. qu'il existe $E', E'' \in \delta$ tels que

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[r, tail] \arrow[dr] & E \arrow[r, "u'"] & P \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, phantom, "\circ"] & Y \\
& W \arrow[urr, bend right, "s"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
E'' \arrow[r, tail] \arrow[dr] & E \arrow[r, "u'"] & P \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, phantom, "\circ"] & Y \\
& W \arrow[urr, bend right, "t"'] & &
\end{tikzcd}$$

commutent. En prenant l'infimum de E et E' on obtient la commutativité de :

$$\begin{tikzcd}
E' \wedge E'' \arrow[r, tail, "j"] \arrow[dr, "j'"'] & E \arrow[r, "u'"] & P \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, phantom, "\circ"] & Y \\
& W \arrow[urr, bend right, "s"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
E' \wedge E'' \arrow[r, tail, "j"] \arrow[dr, "j'"'] & E \arrow[r, "u'"] & P \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, phantom, "\circ"] & Y \\
& W \arrow[urr, bend right, "t"'] & &
\end{tikzcd}$$

De plus, on remarque que l'extérieur de

$$\begin{tikzcd}
E' \wedge E'' \arrow[drr, bend left, "s \circ j'"] \arrow[ddr, bend right, "t \circ j'"'] & & \\
& P \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "\alpha'"'] & Y \arrow[d, "\alpha"] \\
& Z \arrow[r, "\beta"'] & X
\end{tikzcd}$$

commute, car

$$\begin{aligned}
\alpha \circ (s \circ j') &= \alpha \circ (\beta' \circ u' \circ j) \\
&= (\alpha \circ \beta') \circ u' \circ j \\
&= \beta \circ (\alpha' \circ u' \circ j) \\
&= \beta \circ (t \circ j')
\end{aligned}$$

Ainsi, par la propriété universelle du produit fibré dans $\mathbb{C}$, on a qu'il existe un unique morphisme θ faisant commuter :

$$\begin{tikzcd}
E' \wedge E'' \arrow[drr, bend left, "s \circ j'"] \arrow[ddr, bend right, "t \circ j'"'] \arrow[dr, dotted, "\theta"] & & \\
& P \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "\alpha'"'] & Y \arrow[d, "\alpha"] \\
& Z \arrow[r, "\beta"'] & X
\end{tikzcd}$$

Mais rappelons-nous notre objectif. Nous voulons montrer que $u \sim u'$. Pour cela, il nous suffit de montrer que $u|_{E' \wedge E''} = u'|_{E' \wedge E''}$ i.e. $u \circ i \circ j = u' \circ j$. On remarque simplement que ces deux morphismes peuvent jouer le rôle de θ car ils font commuter :

$$\begin{tikzcd}
E' \wedge E'' \arrow[drr, bend left, "s \circ j'"] \arrow[ddr, bend right, "t \circ j'"'] \arrow[dr, shift left, "u \circ i \circ j"] \arrow[dr, shift right, "u' \circ j"'] & & \\
& P \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "\alpha'"'] & Y \arrow[d, "\alpha"] \\
& Z \arrow[r, "\beta"'] & X
\end{tikzcd}$$

d'où nous pouvons conclure qu'ils sont égaux par l'unicité de θ. ∎

Cette description des produits fibrés dans $\Lambda\mathbb{C}$ est simple et nous nous en servirons énormément dans le reste de cette thèse. Elle est toutefois peu pratique pour étudier le transfert des propriétés de $\mathbb{C}$ dans $\Lambda\mathbb{C}$ (dans certains cas précis) car le filtre π n'y est pas décrit avec des générateurs assez précis. Par exemple, pour caractériser les monomorphismes de $\Lambda\mathbb{C}$, nous avons besoin de trouver des générateurs plus fins pour π. La proposition suivante nous donne un tel résultat mais nous devons préalablement fixer la notation.

Donnons-nous une paire de morphismes dans $\Lambda\mathbb{C}$ ayant un co-domaine commun (on suppose comme toujours qu'ils sont totaux) :

$$(X,f)\xrightarrow{[\alpha]}(Y,g)\xleftarrow{[\beta]}(Z,h)$$

Si on prend $B \in g$, $A \in f$ et $D \in h$ tels que $A \leq \alpha^*(B)$ et $D \leq \beta^*(B)$, alors nous avons les produits fibrés suivants :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & \alpha^*B \arrow[r] \arrow[d, tail] & B \arrow[d, tail] & \beta^*B \arrow[l] \arrow[d, tail] & D \arrow[l, tail] \arrow[d, equal] \\
A \arrow[r, tail] & X \arrow[r, "\alpha"'] & Y & Z \arrow[l, "\beta"] & D \arrow[l, tail]
\end{tikzcd}$$

Nous allons noter le morphisme allant de A vers B par $\alpha|_A^B$ et celui de D vers B par $\beta|_D^B$. Clairement, si on prend le produit fibré de ces deux morphismes dans $\mathbb{C}$ on obtient un sous-objet du produit fibré de α et β : $X \times_Y Z$. Nous noterons ce sous-objet par $A \times_B D$. La proposition suivante nous dit que ces sous-objets $A \times_B D$ engendrent le π de la proposition précédente.

PROPOSITION 3.3.6 **(Base de filtre pour les produits fibrés)** *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie cohérente. On considère dans $\Lambda\mathbb{C}$ la paire de morphismes suivants :*

$$(X,f)\xrightarrow{[\alpha]}(Y,g)\xleftarrow{[\beta]}(Z,h)$$

dont on suppose que les représentants α et β sont des morphismes totaux. La famille suivante de sous-objets de $X \times_Y Z$:

$$\pi_0 \equiv \{A \times_B D \mid \exists B \in g\ \exists A \in f\ \exists D \in h \quad A \leq \alpha^* B \ \text{ et } \ D \leq \beta^* D\}$$

est une base pour le filtre

$$\pi \equiv \mathfrak{F}(\alpha'^*)(h) \wedge \mathfrak{F}(\beta'^*)(f)$$

donné par la proposition 3.3.5.

PREUVE: Soient $A \in f$, $B \in g$ et $D \in h$ quelconques. On considère le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[rr] & & X \arrow[rr, "\alpha"] & & Y \\
A' \arrow[ur] \arrow[rr] & & \alpha^* B \arrow[ur] \arrow[rr] & & B' \arrow[ur] & \\
& \beta'^* A \arrow[uu] \arrow[rr] & & P \arrow[uu, "\beta'"'] \arrow[rr, "\alpha'"] & & Z \arrow[uu, "\beta"'] \\
\beta'^* A' \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[rr] & & \beta'^*(\alpha^* B) \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[rr] & & \beta^* B \arrow[uu] \arrow[ur] & \\
& \beta'^* A \wedge \alpha'^* D \arrow[uu] \arrow[rr] & & \alpha'^* D \arrow[uu] \arrow[rr] & & D \arrow[uu] \\
A' \times_B D' \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[rr] & & \alpha'^* D' \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[rr] & & D' \arrow[uu] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Pour simplifier le diagramme, nous avons posé

$$A' \equiv A \wedge \alpha^* B \in f \quad \text{et} D' \equiv D \wedge \beta^* B \in h$$

On voit clairement que tous les rectangles appropriés de ce diagramme sont des produits fibrés. Il suffit en effet d'appliquer le lemme des produits fibrés autant de fois qu'on en a besoin.

Ce diagramme nous montre ainsi que

$$A' \times_B D' = \beta'^* A' \wedge \alpha'^* D'$$

Ainsi, si $A \in f$ et $D \in h$ sont tels que $A \leq \alpha^* B$ et $D \leq \beta^* B$, alors $A' = A$ et $D' = D$. On en conclut que

$$A \times_B D = \beta'^* A \wedge \alpha'^* D \in \pi$$

car $A \in f$ et $D \in h$ (c'est précisément un générateur dans la définition originale de π).

D'autre part, les générateurs dans π_0 sont de la forme $A' \times_B D'$ où

$$f \ni A' \leq \alpha^* B \quad \text{et} \quad h \ni D' \leq \beta^* B$$

pour un certain $B \in g$. Mais donné $A \in f$ et $D \in h$ quelconques on a défini plus haut pour chaque $B \in g$:

$$A' \equiv A \wedge \alpha^* B \leq \alpha^* B \quad \text{et} \quad D' \equiv D \wedge \beta^* B \leq \beta^* B$$

D'où $A' \times_B D' \in \pi_0$ et on voit bien dans le diagramme plus haut que

$$A' \times_B D' \leq_{\mathbf{Sc}(P)} \beta'^* A \wedge \alpha'^* D$$

donc $\beta'^* A \wedge \alpha'^* D$ est dans le filtre engendré par π_0. ∎

Nous sommes maintenant prêts à étudier les treillis de sous-objets dans $\Lambda\mathbb{C}$. Nous allons procéder en deux étapes : premièrement nous étudierons le treillis des sous-objets d'objets provenant de $\mathbb{C}$ via le foncteur $[\cdot]$ et deuxièmement, nous allons étudier le treillis des sous-objets d'un objet quelconque. Nous devons toutefois commencer par donner une caractérisation des monomorphismes dans $\Lambda\mathbb{C}$. On peut retrouver cette preuve dans **[18]**, mais elle n'est pas constructive. Voici une preuve constructive qui nous a été présentée par Bill Boshuck.

PROPOSITION 3.3.7 **(Caractérisation des monos dans $\Lambda\mathbb{C}$)** *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie cohérente. Un morphisme*

$$(X,f)\xrightarrow{[\alpha]}(Y,g) \in \Lambda\mathbb{C}$$

est un monomorphisme si et seulement si il existe un $A \in f$ tel que $\alpha|_A$ est un monomorphisme dans $\mathbb{C}$.

PREUVE: On peut supposer que α est total comme à l'habitude. Supposons que $[\alpha]$ est mono. Alors si on considère sa paire noyau :

$$(X,f) \underset{(Y,g)}{\times} (X,f) \overset{[\pi_1]}{\underset{[\pi_2]}{\rightrightarrows}} (X,f) \overset{[\alpha]}{\rightarrowtail} (Y,g)$$

on a $[\pi_1] = [\pi_2]$, donc par le lemme précédent, il existe $B \in g$, $A, A' \in f$ tels que $A, A' \leq \alpha^* B$ et

$$\pi_1|_{A\times_B A'} = \pi_1|_{A\times_B A'}$$

Clairement, nous pouvons prendre $A = A'$, car sinon il suffit de considérer $A \wedge A' \in f$ et on a bien $A \wedge A' \leq \alpha^* B$ et comme

$$A \wedge A' \times_B A \wedge A' \leq A \times_B A'$$

on aura aussi la même conclusion : π_1 et π_2 coïncident aussi sur ce voisinage plus petit.

Nous avons vu dans la preuve de la proposition précédente qu'on avait le diagramme suivant dans $\mathbb{C}$ (nous avons simplement réduit le gros diagramme de la preuve précédente) :

$$
\begin{tikzcd}
& X \arrow[rr, "\alpha"] & & Y \\
A \arrow[ur, "a"] \arrow[rr, "\alpha|^B_A"] & & B \arrow[ur, "b"] & \\
& P \arrow[uu, "\pi_2"'] \arrow[rr, "\pi_1"'] & & X \arrow[uu, "\alpha"'] \\
A \times_B A \arrow[uu, "p_2"] \arrow[ur, "i"] \arrow[rr, "p_1"'] & & A \arrow[uu, "\alpha|^B_A"'] \arrow[ur, "a"'] &
\end{tikzcd}
$$

Ainsi nous voyons que

$$a \circ p_1 = \pi_1 \circ i = \pi_2 \circ i = a \circ p_2$$

mais, comme a est mono, on a que $p_1 = p_2$. Mais la paire (p_1, p_2) est la paire noyau de $\alpha|^B_A$, donc $\alpha|^B_A$ est mono. Finalement, comme $\alpha \circ a = b \circ \alpha|^B_A$ on en conclut que $\alpha|A = \alpha \circ a$ est mono.

L'autre direction est triviale. ∎

Regardons maintenant de quoi a l'air la structure des treillis de sous-objets dans $\Lambda\mathbb{C}$ en relation avec la structure de ces treillis dans $\mathbb{C}$. Nous regardons premièrement le treillis des sous-objets de $[X]$ pour $X \in |\mathbb{C}|$.

LEMME 3.3.1 **(Structure des sous-objets dans $\Lambda\mathbb{C}$)** *Si $(X, f) \in |\Lambda\mathbb{C}|$, alors $(X, f) \xrightarrow{[1_X]} [X]$ est un monomorphisme. Si on dénote par $\lambda_X(f)$ le sous-objet de $[X]$ correspondant, alors on a défini une application :*

$$\lambda_X : \mathfrak{F}\,(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(X)) \longrightarrow \mathbf{S}_{\Lambda\mathbb{C}}\,([X])$$

qui envoie un filtre f sur le sous-objet $\lambda_X(f)$. Cette application est un isomorphisme d'ordres-partiels naturel en X i.e. si $X \xrightarrow{\alpha} Y \in \mathbb{C}$, alors le diagramme suivant commute :

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{F}\,(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(X)) \arrow[r, "\lambda_X"] & \mathbf{S}_{\Lambda\mathbb{C}}\,([X]) \\
\mathfrak{F}\,(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(Y)) \arrow[u, "\mathfrak{F}(\alpha^*)"] \arrow[r, "\lambda_Y"'] & \mathbf{S}_{\Lambda\mathbb{C}}\,([Y]) \arrow[u, "{[\alpha]^*}"']
\end{tikzcd}
$$

PREUVE: Clairement, 1_X est admissible de (X, f) vers $[X]$. De plus, $(X, f) \xrightarrow{[1_X]} [X]$ est un monomorphisme car si on a un diagramme du type

$$\begin{tikzcd}
(Y,g) \arrow[dr, "{[\alpha]}"] & & \\
& (X,f) \arrow[r, "{[1_X]}"] & {[X]} \\
(Y,g) \arrow[ur, "{[\beta]}"'] & &
\end{tikzcd}$$

dans lequel $[1_X] \circ [\alpha] = [1_X] \circ [\beta]$, alors, en supposant que α et β sont totaux, on a

$$\alpha = 1_X \circ \alpha = 1_X \circ \beta = \beta$$

d'où $[\alpha] = [\beta]$. Donc, $[1_X]$ est mono.

Montrons maintenant que λ_X est un morphisme d'ordres-partiels. Si f et g sont deux filtres sur X, on se rappelle que l'ordre sur le treillis des filtres prescrit que $f \leq g$ si et seulement si $g \subseteq f$. Ainsi, si $f \leq g$, on a que 1_X est admissible de (X,f) vers (Y,g) et fait commuter :

$$\begin{tikzcd}
(X,f) \arrow[rr, tail, "\lambda_X(f)={[1_X]}"] \arrow[dr, "{[1_X]}"'] & & {[X]} \\
& (X,g) \arrow[ur, tail, "\lambda_X(g)=1_X"'] &
\end{tikzcd}$$

Donc, $\lambda_X(f) \leq \lambda_X(g)$, comme voulu.

Inversement, pour montrer que λ_X est mono, on suppose que $\lambda_X(f) \leq \lambda_X(g)$ ce qui nous donne l'existence d'un $[\alpha]$ faisant commuter :

$$\begin{tikzcd}
(X,f) \arrow[rr, tail, "\lambda_X(f)={[1_X]}"] \arrow[dr, "{[\alpha]}"'] & & {[X]} \\
& (X,g) \arrow[ur, tail, "\lambda_X(g)=1_X"'] &
\end{tikzcd}$$

Mais si on suppose que $A \xrightarrow{\alpha} X$ où $A \overset{i}{\rightarrowtail} X$, alors on obtient que $\alpha \sim i$ i.e. il existe un $A' \in f$ tel que $A' \leq A$ et $\alpha|_{A'} = i|_{A'}$. On voit facilement que cela implique que $1_X|_{A'} = \alpha_{A'}$ d'où $1_X \sim \alpha$. Ainsi, 1_X est admissible de (X,f) dans (X,g) d'où $g \subseteq f$ i.e. $f \leq g$.

Pour montrer que λ_X est un épimorphisme on suppose qu'on a un sous-objet de $[X]$ représenté par le monomorphisme suivant :

$$(Y,g) \overset{[\alpha]}{\rightarrowtail} [X]$$

et on pose

$$\alpha(g) \equiv \{A \in \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(X) \mid \alpha^*(A) \in g\}$$

et on voit facilement que α est admissible de (Y,g) vers $(X,\alpha(g))$ et fait commuter :

$$\begin{tikzcd}
(Y,g) \arrow[rr, tail, "{[\alpha]}"] \arrow[dr, "{[\alpha]}"'] & & {[X]} \\
& (X,\alpha(g)) \arrow[ur, "{[1_X]}"'] &
\end{tikzcd}$$

D'autre part 1_Y est admissible de $(X,\alpha(g))$ vers (Y,g) (car si $B \overset{b}{\rightarrowtail} Y \in g$, alors $1_Y^*(b) = b$ et vu comme sous-objet de X il devient $B \overset{\alpha\circ b}{\rightarrowtail} X$ et ce dernier est bien dans $\alpha(g)$ car $\alpha^*(\alpha \circ b) = b \in g$) et fait commuter :

$$\begin{tikzcd}
(Y,g) \arrow[rr, tail, "{[\alpha]}"] & & {[X]} \\
& (X,\alpha(g)) \arrow[ul, "{[1_Y]}"] \arrow[ur, "{[1_x]}"'] &
\end{tikzcd}$$

Ainsi, on voit que $\lambda_X(\alpha(g))$ est équivalent au sous-objet représenté par $(Y,g) \overset{[\alpha]}{\rightarrowtail} [X]$.

Regardons maintenant la naturalité de λ. Soit $g \in \mathfrak{F}(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(Y))$. Nous voulons montrer que

$$\lambda_X\left(\mathfrak{F}(\alpha^*)(g)\right) \overset{?}{=} [\alpha]^*\left(\lambda_Y(g)\right) \tag{3.3.1}$$

Mais par la proposition 3.3.5, on a que le diagramme suivant est un produit fibré dans $\Lambda\mathbb{C}$:

$$\begin{tikzcd}
(X,\mathfrak{F}(\alpha^*)(g)) \arrow[r, tail, "{[1_X]}"] \arrow[d, "{[\alpha]}"'] & {[X]} \arrow[d, "{[\alpha]}"] \\
(Y,g) \arrow[r, tail, "{\lambda_Y(g)=[1_Y]}"'] & {[Y]}
\end{tikzcd}$$

car le π intervenant dans cette proposition se calcule comme suit :

$$\begin{aligned}\pi &= \mathfrak{F}(\alpha^*)(g) \wedge \mathfrak{F}(1_Y^*)(\{1_X\}) \\ &= \mathfrak{F}(\alpha^*)(g) \wedge \{1_X\} \\ &= \mathfrak{F}(\alpha^*)(g)\end{aligned}$$

Ainsi nous avons bien montré l'équation 3.3.1. ∎

Nous pouvons clairement poursuivre notre étude pour l'étendre à une représentation concrète pour le treillis des sous-objets d'un objet quelconque de $\Lambda\mathbb{C}$. C'est ce que fait le lemme suivant.

LEMME 3.3.2 **(Représentation générale pour les treillis dans $\Lambda\mathbb{C}$)** *Soit $(X, f) \in |\Lambda\mathbb{C}|$. La composition avec $(X, f) \overset{\lambda_X(f)}{\rightarrowtail} [X]$ induit un monomorphisme*

$$\mathbf{S}_{\Lambda\mathbb{C}}(X, f) \rightarrowtail \mathbf{S}_{\Lambda\mathbb{C}}([X])$$

dont l'image est la même que celle de $\downarrow f \equiv \{g \mid g \leq f\}$ via l'isomorphisme λ_X. Il y a donc un isomorphisme $\mathbf{S}_{\Lambda\mathbb{C}}(X, f) \simeq \downarrow f$. De plus, si $(X, f) \xrightarrow{[\alpha]} (Y, g) \in \Lambda\mathbb{C}$ avec $X \xrightarrow{\alpha} Y$ un morphisme total de $\mathbb{C}$, alors

$$\mathbf{S}_{\Lambda\mathbb{C}}(Y, g) \xrightarrow{[\alpha]^*} \mathbf{S}_{\Lambda\mathbb{C}}(X, f)$$

peut être considéré comme allant de $\downarrow g$ vers $\downarrow f$ et envoie un filtre $g' \leq g$ sur

$$[\alpha]^*(g') \equiv \mathfrak{F}(\alpha^*)(g') \wedge f$$

PREUVE: Clairement le morphisme induit par la composition avec $\lambda_X(f)$ est un monomorphisme car $\lambda_X(f) = [1_X]$. Prenons $f' \in \downarrow f$ i.e. $f' \leq f$. On a que 1_X est admissible de (X, f') vers (X, f) et donc le sous-objet représenté par $\lambda_X(f')$ peut être vu comme une composition avec $\lambda_X(f)$ soit :

$$\lambda_X(f) \circ [1_X] = \lambda_X(f')$$

D'autre part, si on a un sous-objet de $(Y, g) \xrightarrow{[\alpha]} (X, f)$ représenté par $Y \overset{\alpha}{\rightarrowtail} X$, alors, comme nous l'avons vu auparavant (au cours de la preuve du lemme précédent), $\alpha(g)$ est un filtre sur X pour lequel $(X, \alpha(g)) \overset{[1_X]}{\rightarrowtail} [X]$ et $(Y, g) \overset{[\alpha]}{\rightarrowtail} [X]$ donnent lieux au même sous-objet de $[X]$. De plus, $\alpha(g) \leq f$ car $A \in f$ implique que $\alpha^*(A) \in g$ (par l'admissibilité de α) d'où $A \in \alpha(g)$. Ainsi, nous avons bien montré que le sous-objet de $[X]$ obtenu par composition avec $\lambda_X(f)$ peut être vu comme provenant de $\downarrow f$ via λ_X.

Donnons-nous maintenant $(X, f) \xrightarrow{[\alpha]} (Y, g) \in \Lambda\mathbb{C}$ et $g' \leq g$. Si on suppose que α est total i.e. $X \xrightarrow{\alpha} Y$, alors on a que le diagramme suivant est un produit fibré dans $\Lambda\mathbb{C}$:

$$\begin{tikzcd} (X, f) \arrow[r, "{[\alpha]}"] & (Y, g) \\ (X, \pi) \arrow[u, tail, "{[1_X]}"] \arrow[r, "{[\alpha]}"'] & (Y, g') \arrow[u, tail, "{[1_Y]}"'] \end{tikzcd}$$

lorsque

$$\begin{aligned} \pi &\equiv \mathfrak{F}(1_X^*)(f) \wedge \mathfrak{F}(\alpha^*)(g') \\ &= f \wedge \mathfrak{F}(\alpha^*)(g') \end{aligned}$$

donc on a bien la formule annoncée pour $[\alpha]^*$. ∎

Ce lemme nous permet donc de voir la structure interne de la catégorie des filtres. Ainsi, les sous-objets d'un objet $(X, f) \in |\Lambda\mathbb{C}|$ forment un treillis isomorphe au treillis $\downarrow f \subseteq \mathfrak{F}(\mathbf{S}_\mathbb{C} X)$. À l'aide de cette caractérisation nous pouvons facilement démontrer que la structure de la catégorie des filtres est très intéressante.

PROPOSITION 3.3.8 **($\Lambda\mathbb{C}$ est cohérente)** *Si $\mathbb{C}$ est une catégorie cohérente, alors $\Lambda\mathbb{C}$ en est aussi une.*

PREUVE: Nous devons vérifier que $\Lambda\mathbb{C}$ a des limites finies, des supréma finis au niveau des sous-objets qui sont stables par produit-fibré et qu'on a un ajoint à gauche pour $[\alpha]^*$: $\exists_{[\alpha]}$ qui satisfait la condition de Beck-Chevalley.

Nous avons vu auparavant que $\Lambda\mathbb{C}$ est complète pour les limites finies. De plus, nous avons vu que l'ensemble partiellement ordonné des sous-objets d'un objet (X, f) est isomorphe à $\downarrow f$ ainsi, les supréma se calculent comme des intersections i.e. si $f_1 \leq f$ et $f_2 \leq f$, alors

$$(X, f_1) \underset{\mathbf{S}_{\Lambda\mathbb{C}}(X,f)}{\vee} (X, f_2) \equiv (X, f_1 \cap f_2)$$

La stabilité des suprêma finis découle immédiatement de cette définition. En effet, si $g_1, g_2 \leq g$ et $(X,f)\xrightarrow{[\alpha]}(Y,g) \in \Lambda\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
[\alpha]^*(g_1 \vee g_2) &= [\alpha]^*(g_1 \cap g_2) \\
&= \mathfrak{F}(\alpha^*)(g_1 \cap g_2) \wedge f \\
&= (\mathfrak{F}(\alpha^*)(g_1) \cap \mathfrak{F}(\alpha^*)(g_2)) \wedge f \qquad (*) \\
&= (\mathfrak{F}(\alpha^*)(g_1) \vee \mathfrak{F}(\alpha^*)(g_2)) \wedge f \\
&= (\mathfrak{F}(\alpha^*)(g_1) \wedge f) \vee (\mathfrak{F}(\alpha^*)(g_2) \wedge f) \\
&= [\alpha]^*(g_1) \vee [\alpha]^*(g_2)
\end{aligned}$$

où le passage de la ligne $(*)$ se justifie comme suit :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \in \mathfrak{F}(\alpha^*)(g_1 \cap g_2)}{\exists B \in g_1 \cap g_2 \ \ \alpha^*(B) \leq A}}{\exists B \in g_1 \ \ \alpha^*(B) \leq A \quad \text{et} \quad \exists B \in g_2 \ \ \alpha^*(B) \leq A}}{A \in \mathfrak{F}(\alpha^*)(g_1) \cap \mathfrak{F}(\alpha^*)(g_2)} \downarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \in \mathfrak{F}(\alpha^*)(g_1) \cap \mathfrak{F}(\alpha^*)(g_2)}{\exists B \in g_1 \ \ \alpha^*(B) \leq A \quad \text{et} \quad \exists B' \in g_2 \ \ \alpha^*(B') \leq A}}{\exists B \in g_1 \ \exists B' \in g_2 \ \ B \vee B' \leq A}}{\exists B'' \equiv B \vee B' \in g_1 \cap g_2 \ \ B'' \leq A}}{A \in \mathfrak{F}(\alpha^*)(g_1 \cap g_2)} \downarrow$$

Définissons maintenant l'adjoint à gauche $\exists_{[\alpha]}$ pour $[\alpha]^*$. Si $f' \leq f$, on pose

$$\exists_{[\alpha]}(f') \equiv \alpha(f') = \{B \in \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(Y) \mid \alpha^* B \in f'\}$$

Clairement, comme α est admissible de (X,f) vers (Y,g) on a bien $\alpha(f') \leq g$ (car $g \subseteq \alpha(f) \subseteq \alpha(f')$). De plus, on a bien l'adjonction désirée : $\exists_{[\alpha]} \dashv [\alpha]^*$ car si $f' \leq f$ et $g' \leq g$, on a :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{f' \leq [\alpha]^*(g')}{f' \leq \mathfrak{F}(\alpha^*)(g') \wedge f}}{f' \leq \mathfrak{F}(\alpha^*)(g')}}{\alpha(f') \leq g'}}{\exists_{[\alpha]}(f') \leq g'}$$

où le passage entre la troisième et la quatrième ligne se justifie en montrant que

$$\mathfrak{F}(\alpha^*)(g') \subseteq f' \overset{?}{\iff} g' \subseteq \alpha(f')$$

($\Rightarrow$) Soit $B \in g'$, alors $\alpha^*(B) \in \mathfrak{F}(\alpha^*)(g')$ d'où $\alpha^*(B) \in f'$ (car $\mathfrak{F}(\alpha^*)(g') \subseteq f'$ par hypothèse). Mais on a donc $B \in \alpha(f')$.

($\Leftarrow$) Soit $A \in \mathfrak{F}(\alpha^*)(g')$. On a qu'il existe $B \in g'$ tel que $\alpha^*(B) \leq A$. Mais comme $g' \subseteq \alpha(f')$ on peut supposer que $B \in \alpha(f')$ et donc que $\alpha^*(B) \in f'$ et on est forcé de conclure que $A \in f'$ (car $A \geq \alpha^*(B)$).

Il ne nous reste qu'à vérifier la condition de Beck-Chevalley dans $\wedge\mathbb{C}$. Supposons que

$$\begin{tikzcd} (P,\pi) \arrow[r, "{[\beta']}"] \arrow[d, "{[\alpha']}"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & (Y,g) \arrow[d, "{[\alpha]}"] \\ (Z,h) \arrow[r, "{[\beta]}"'] & (X,f) \end{tikzcd}$$

soit un produit fibré dans $\wedge\mathbb{C}$. Ainsi,

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "\alpha'"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d, "\alpha"] \\ Z \arrow[r, "\beta"'] & X \end{tikzcd}$$

est un produit fibré dans $\mathbb{C}$ et $\pi = \mathfrak{F}(\alpha'^*)(h) \wedge \mathfrak{F}(\beta'^*)(g)$. Nous voulons montrer que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{S}_{\wedge\mathbb{C}}(P,\pi) \arrow[r, "\exists_{[\beta']}"] \arrow[dr, phantom, "\circ"] & \mathrm{S}_{\wedge\mathbb{C}}(Y,g) \\ \mathrm{S}_{\wedge\mathbb{C}}(Z,h) \arrow[r, "\exists_{[\beta]}"'] \arrow[u, "{[\alpha']^*}"] & \mathrm{S}_{\wedge\mathbb{C}}(X,f) \arrow[u, "{[\alpha]^*}"'] \end{tikzcd}$$

Nous procéderons comme nous l'avons fait jusqu'à maintenant, soit en calculant tout au niveau des filtres à l'aide de l'isomorphisme $\mathrm{S}_{\wedge\mathbb{C}}(X,f) \simeq \downarrow f$.

Soit $h' \in \downarrow h$. On a :

$$
\begin{aligned}
[\alpha]^*\left(\exists_{[\beta]}(h')\right) &= [\alpha]^*\left(\beta(h')\right) \\
&\overset{(1)}{=} [\alpha]^*\left(\mathfrak{F}(\exists_\beta)(h')\right) \\
&= \mathfrak{F}(\alpha^*)\left(\mathfrak{F}(\exists_\beta)(h')\right) \wedge g \\
&\overset{(2)}{=} \mathfrak{F}(\exists_{\beta'}))\left(\mathfrak{F}(\alpha'^*)(h') \wedge \pi\right) \\
&= \mathfrak{F}(\exists_{\beta'}))\left([\alpha']^*(h')\right) \\
&\overset{(1)}{=} \exists_{[\beta']}\left([\alpha']^*(h')\right)
\end{aligned}
$$

Preuve de (1) **:** On montre qu'en général, si $(X, f) \xrightarrow{[\alpha]} (Y, g) \in \Lambda\mathbb{C}$ et $f' \leq f$, alors $\exists_{[\alpha]}(f') \overset{?}{=} \mathfrak{F}(\exists_\alpha)(f')$. En effet, si $B \in \exists_{[\alpha]}(f')$, alors $B \in \alpha(f')$ d'où $\alpha^*(B) \in f'$. Mais on a donc $\exists_\alpha \alpha^* B \in \mathfrak{F}(\exists_\alpha)(f')$ d'où l'on tire finalement que $B \in \mathfrak{F}(\exists_\alpha)(f')$ car $\exists_\alpha \alpha^* B \leq B$.

D'autre part, si $B \in \mathfrak{F}(\exists_\alpha)(f')$, alors il existe un $A \in f'$ tel que $\exists_\alpha A \leq B$, mais alors $A \leq \alpha^* B$ et donc $\alpha^* B \in f'$ i.e. $B \in \alpha(f') = \exists_{[\alpha]}(f')$.

Preuve de (2) **:** On montre les deux inclusions séparément :

$$
\begin{array}{c|c}
B \in \mathfrak{F}(\alpha^*)\left(\mathfrak{F}(\exists_\beta)(h')\right) \wedge g & \\
\hline
\exists A \in g\ \exists A' \in \mathfrak{F}(\exists_\beta)(h')\ \ B \geq A \wedge \alpha^* A' & \\
\hline
\exists A \in g\ \exists C \in h'\ \ A' \geq \exists_\beta C\ \ B \geq A \wedge \alpha^* A' & \\
\hline
\exists A \in g\ \exists C \in h'\ \ B \geq A \wedge \alpha^*(\exists_\beta C) & \downarrow \\
\hline
\exists A \in g\ \exists C \in h'\ \ B \geq A \wedge \exists_{\beta'}(\alpha'^* C) & \\
\hline
\exists A \in g\ \exists C \in h'\ \ B \geq \exists_{\beta'}(\beta'^* A) \wedge \exists_{\beta'}(\alpha'^* C) & \downarrow \\
\hline
\exists A \in g\ \exists C \in h'\ \ B \geq \exists_{\beta'}(\beta'^* A \wedge \alpha'^* C) & \downarrow \\
\hline
B \in \mathfrak{F}(\exists_{\beta'})\left(\mathfrak{F}(\alpha'^*(h') \wedge \pi\right) & \downarrow
\end{array}
$$

et cette dernière étape se justifie par le fait que $\alpha'^* C \in \mathfrak{F}(\alpha'^*(h')$ et $\beta'^*(A) \in \mathfrak{F}(\beta'^*)(g) \subseteq \pi$.

$$
\begin{array}{cl}
B \in \mathfrak{F}(\exists_{\beta'})\,(\mathfrak{F}(\alpha'^*(h') \wedge \pi) & \\ \hline
\exists E \in \mathfrak{F}(\alpha'^*(h') \wedge \pi \quad B \geq \exists_{\beta'}(E) & \\ \hline
\exists C \in h'\ \exists D \in \pi \quad B \geq \exists_{\beta'}\,(\alpha'^* C \wedge D) & \downarrow \\ \hline
\exists C \in h'\ \exists D \in \mathfrak{F}(\alpha'^*)(h) \wedge \mathfrak{F}(\beta'^*)(g) \quad B \geq \exists_{\beta'}\,(\alpha'^* C \wedge D) & \\ \hline
\exists C \in h'\ \exists C' \in h \subseteq h'\ \exists D' \in g \quad B \geq \exists_{\beta'}\,(\alpha'^* C \wedge \alpha'^* C' \wedge \beta'^* D') & \downarrow \\ \hline
\exists C'' \equiv C \wedge C' \in h'\ \exists D' \in g \quad B \geq \exists_{\beta'}\,(\alpha'^* C'' \wedge \beta'^* D') & \downarrow \\ \hline
\exists C'' \in h'\ \exists D' \in g \quad B \geq D' \wedge \exists_{\beta'}(\alpha'^* C'') & \\ \hline
\exists C'' \in h'\ \exists D' \in g \quad B \geq D' \wedge \alpha^*(\exists_{\beta} C'') & \\ \hline
B \in \mathfrak{F}(\alpha^*)\,(\mathfrak{F}(\exists_{\beta})(h')) \wedge g &
\end{array}
$$

∎

PROPOSITION 3.3.9 *Le foncteur $\mathbb{C} \xrightarrow{[\cdot]} \Lambda\mathbb{C}$ est plein, fidèle et cohérent.*

PREUVE: Si on a un morphisme $[X] \xrightarrow{[\alpha]} [Y]$, alors, pour que α soit admissible, il doit être total, d'où $X \xrightarrow{\alpha} Y$ est bien envoyé sur $[X] \xrightarrow{[\alpha]} [Y]$ et on a montré que $[\cdot]$ est plein. La fidélité de $[\cdot]$ suit aussi trivialement car si

$$[X] \xrightarrow{[\alpha]=[\beta]} [Y]$$

alors on a vu que α et β sont totaux et on doit donc avoir $\alpha \sim \beta$, d'où $\alpha = \beta$ car le seul élément du filtre sur $[X]$ est 1_X.

Il est clair que $[\cdot]$ préserve les objets terminaux car c'est précisément de cette façon que nous avons construit les objets terminaux dans $\Lambda\mathbb{C}$. De plus, si on a le produit fibré suivant dans $\mathbb{C}$:

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "\alpha'"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d, "\alpha"] \\
Z \arrow[r, "\beta"'] & X
\end{tikzcd}
$$

alors le diagramme suivant est un produit fibré dans $\Lambda\mathbb{C}$:

$$
\begin{tikzcd}
(P, \{1_P\}) \arrow[r, "{[\beta']}"] \arrow[d, "{[\alpha']}"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & (Y, \{1_Y\}) \arrow[d, "{[\alpha]}"] \\
(Z, \{1_Z\}) \arrow[r, "{[\beta]}"'] & (X, \{1_X\})
\end{tikzcd}
$$

En effet, le filtre π devient trivial ici car :

$$
\begin{aligned}
\pi &\equiv \mathfrak{F}(\alpha'^*\,(1_Z) \wedge \mathfrak{F}(\beta'^*\,(1_Y) \\
&= \{1_P\} \wedge \{1_P\} \\
&= \{1_P\}
\end{aligned}
$$

Pour montrer que $[\cdot]$ préserve les supréma finis et les images, nous devons tout d'abord étudier l'action de $[\cdot]$ au niveau des sous-objets. Soit $X \in |\mathbb{C}|$. Le morphisme d'ordres partiels

$$\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(X) \xrightarrow{[\cdot]_X} \mathbf{S}_{\Lambda\mathbb{C}}([X]) \simeq \mathfrak{F}(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(X))$$

doit envoyer $A \overset{a}{\rightarrowtail} X$ sur $[A] \overset{[a]}{\rightarrowtail} [X]$, mais ce dernier, comme sous-objet de $[X]$, est équivalent à

$$(X, \uparrow A) \overset{[1_X]}{\rightarrowtail} [X]$$

(où $\uparrow A$ signifie le filtre principal engendré par A). Ainsi, si on considère que le codomaine de $[\cdot]_X$ est $\mathfrak{F}(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(X))$, alors on a $[A \overset{a}{\rightarrowtail} X]_X \equiv \uparrow A$.

Montrons maintenant que $[\cdot]$ préserve les supréma finis. Soit $X \in |\mathbb{C}|$ et $A \overset{a}{\rightarrowtail} X$ $B \overset{b}{\rightarrowtail} X$ deux sous-objets de X. On a alors :

$$\begin{aligned}
[A \vee B]_X &= \uparrow(A \vee B) \\
&= \uparrow A \cap \uparrow B \\
&= \uparrow A \vee \uparrow B \\
&= [A]_X \vee [B]_X
\end{aligned}$$

Finalement, pour montrer que $[\cdot]$ préserve les images, on prend $X \xrightarrow{\alpha} Y \in \mathbb{C}$ et on vérifie la commutativité de :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(X) \arrow[r, "\exists_\alpha"] \arrow[d, "{[\cdot]_X}"'] \arrow[dr, phantom, "\circ"] & \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(Y) \arrow[d, "{[\cdot]_Y}"] \\
\mathbf{S}_{\Lambda\mathbb{C}}([X]) \arrow[r, "\exists_{[\alpha]}"'] & \mathbf{S}_{\Lambda\mathbb{C}}([Y])
\end{tikzcd}$$

Soit $A \overset{a}{\rightarrowtail} X$, alors

$$\begin{aligned}
[\exists_\alpha A]_Y &= \uparrow(\exists_\alpha A) \\
&\overset{(*)}{=} \mathfrak{F}(\exists_\alpha)(\uparrow A) \\
&= \exists_{[\alpha]}([A]_X)
\end{aligned}$$

et l'étape $(*)$ se justifie comme suit. Si $B \geq \exists_\alpha A$, alors $\alpha^* B \geq A$ donc $\alpha^* B \in \uparrow A$, mais dans ce cas $B \in \alpha(\uparrow A) = \mathfrak{F}(\exists_\alpha)(\uparrow A)$. Inversement, si $B \in \alpha(\uparrow A)$, alors $\alpha^*(B) \geq A$, d'où $B \geq \exists_\alpha A$. ∎

Etudions maintenant les propriétés de fonctorialité de la consctruction de la catégorie des filtres. La définition suivante nous indique comment étendre un foncteur cohérent $\mathbb{C}\xrightarrow{F}\mathbb{D}$ à un foncteur $\Lambda\mathbb{C}\xrightarrow{\Lambda F}\Lambda\mathbb{D}$.

DÉFINITION 3.3.2 **(Action de Λ sur les foncteurs)** *Soit $\mathbb{C}\xrightarrow{F}\mathbb{D}$ un foncteur cohérent et $(X,f) \in |\Lambda\mathbb{C}|$. On pose*

$$F(f) \equiv \{B \in \mathrm{S}_{\mathbb{D}}(FX) \mid \exists A \in f \;\; B \geq FA\}$$

On a que $F(f)$ ainsi défini est un filtre sur FX. On peut ainsi définir une application $\Lambda F : \Lambda\mathbb{C} \longrightarrow \Lambda\mathbb{D}$ telle que

$$\Lambda F(X,f) \equiv (FX, Ff)$$

et si $(X,f)\xrightarrow{[\alpha]}(Y,g) \in \Lambda\mathbb{C}$, on pose

$$\Lambda F([\alpha]) \equiv [F\alpha]$$

La définition précédente a du sens car $F\alpha$ est admissible de (FX, Ff) vers (FY, Fg). En effet,

$$\begin{aligned}
B' \in Fg &\Longrightarrow \exists B \in g \;\; B' \geq FB \\
&\Longrightarrow \exists B \in g \;\; (F\alpha)^*B' \geq (F\alpha)^*FB \\
&\Longrightarrow \exists B \in g \;\; (F\alpha)^*B' \geq F(\alpha^*B) \\
&\Longrightarrow \exists A \equiv \alpha^*B \in f \;\; (F\alpha)^*B' \geq FA \\
&\Longrightarrow (F\alpha)^*B' \in Ff
\end{aligned}$$

De plus, il est aisé de voir que cette définition est indépendante du choix des représentants α et que l'application ΛF définit un foncteur. La proposition suivante résume les propriétés de fonctorialité de la consruction Λ que nous venons de compléter.

PROPOSITION 3.3.10 **(Fonctorialité de Λ)** *Si $\mathbb{C} \xrightarrow{F} \mathbb{D}$ est un foncteur cohérent, alors*

1. $\Lambda\mathbb{C} \xrightarrow{\Lambda F} \Lambda\mathbb{D}$ *est un foncteur cohérent qui préserve les infima arbitraires de sous-objets d'un objet donné.*
2. *Le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "{[\cdot]_{\mathbb{C}}}"] \arrow[d, "F"'] \arrow[dr, phantom, "\circ"] & \Lambda\mathbb{C} \arrow[d, "\Lambda F"] \\ \mathbb{D} \arrow[r, "{[\cdot]_{\mathbb{D}}}"'] & \Lambda\mathbb{D} \end{tikzcd}$$

3. $\Lambda(1_{\mathbb{C}}) = 1_{\Lambda\mathbb{C}}$
4. $\Lambda(G \circ F) = \Lambda G \circ \Lambda F$.

PREUVE: Clairement, ΛF préserve les objets terminaux. Montons qu'il préserve également les produits fibrés. Supposons qu'on ait le produit fibré suivant dans $\Lambda\mathbb{C}$:

$$\begin{tikzcd} (P,\pi) \arrow[r, "{[\beta']}"] \arrow[d, "{[\alpha']}"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & (Y,g) \arrow[d, "{[\alpha]}"] \\ (Z,h) \arrow[r, "{[\beta]}"'] & (X,f) \end{tikzcd}$$

où le diagramme suivant est un produit fibré dans $\mathbb{C}$:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "\alpha'"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d, "\alpha"] \\ Z \arrow[r, "\beta"'] & X \end{tikzcd}$$

et π est défini comme d'habitude. Comme F est cohérent, on a que le diagramme suivant est un produit fibré dans $\mathbb{D}$:

$$\begin{tikzcd} FP \arrow[r, "F\alpha'"] \arrow[d, "F\beta'"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & FZ \arrow[d, "F\beta"] \\ FY \arrow[r, "F\alpha"'] & FX \end{tikzcd}$$

Ainsi, pour voir que ΛF préserve les produits fibrés, il suffit de montrer que

$$F\pi \stackrel{?}{=} \mathfrak{F}\left((F\alpha')^*\right)(Fh) \wedge \mathfrak{F}\left((F\beta')^*\right)(Fg)$$

Nous démontrons ce fait en deux étapes.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \in F\pi}{\exists A \in \pi \;\; B \geq FA}}{\exists A \in \langle \mathfrak{F}(\alpha'^*)(h) \cup \mathfrak{F}(\beta'^*)(g) \rangle \quad B \geq FA}}{\exists C \in h \, \exists D \in g \quad B \geq F(\alpha'^* C \wedge \beta'^* D)} \downarrow}{\exists C \in h \, \exists D \in g \quad B \geq F(\alpha'^* C) \wedge F(\beta'^* D)}}{\exists C \in h \, \exists D \in g \quad B \geq (F\alpha')^*(FC) \wedge (F\beta')^*(FD)}}{B \in \mathfrak{F}((F\alpha')^*)(Fh) \wedge \mathfrak{F}((F\beta')^*)(Fg)} \downarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{B \in \mathfrak{F}((F\alpha')^*)(Fh) \wedge \mathfrak{F}((F\beta')^*)(Fg)}{\exists C \in h \, \exists D \in g \;\; B \geq (F\alpha')^* FC \wedge (F\beta')^*(FD)} \downarrow}{B \in F\pi} \downarrow$$

Montrons maintenant que ΛF préserve les supréma binaires. En effet, on a

$$\begin{aligned}
\Lambda F_{(X,f)}\,(f' \vee f'') &= \Lambda F_{(X,f)}\,(f' \cap f'') \\
&= F(f' \cap f'') \\
&\overset{(*)}{=} F(f') \cap F(f'') \\
&= F(f') \vee F(f'') \\
&= \Lambda F_{(X,f)}(f') \vee \Lambda F_{(X,f)}(f'')
\end{aligned}$$

où $(*)$ se justifie comme suit. Si $B \in F(f' \cap f'')$, alors cela veut dire qu'il existe un $A \in f' \cap f''$ tel que $B \geq F(A)$, mais dans ce cas on a évidemment $B \in F(f')$ et $B \in F(f'')$. Inversement, si $B \in F(f') \cap F(f'')$, alors il existe $A \in f'$ et $A' \in f''$ tels que $B \geq F(A)$ et $B \geq F(A')$, d'où

$$B \geq F(A) \vee F(A') = F(A \vee A')$$

et on peut conclure que $B \in F(f' \cap f'')$, car $A \vee A' \in f' \cap f''$.

Pour montrer que ΛF préserve les images, on prend $(X,f) \xrightarrow{[\alpha]} (Y,g) \in \Lambda\mathbb{C}$ et on montre que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{S}_{\Lambda\mathbb{C}}(X,f) \arrow[r, "\exists_{[\alpha]}"] \arrow[d, "\Lambda F_{(X,f)}"'] \arrow[dr, phantom, "?"] & \mathbf{S}_{\Lambda\mathbb{C}}(Y,g) \arrow[d, "\Lambda F_{(Y,g)}"] \\
\mathbf{S}_{\Lambda\mathbb{D}}(Fx, Ff) \arrow[r, "\exists_{[F\alpha]}"'] & \mathbf{S}_{\Lambda\mathbb{D}}(FY, Fg)
\end{tikzcd}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\Lambda F_{(Y,g)}\left(\exists_{[\alpha]}(f')\right) &= \Lambda F_{(Y,g)}\left(\mathfrak{F}(\exists_\alpha)(f')\right)\\
&= F\left(\mathfrak{F}(\exists_\alpha)(f')\right)\\
&\overset{(**)}{=} \mathfrak{F}\left(\exists_{F\alpha}\right)(Ff')\\
&= \exists_{[F\alpha]}(Ff')\\
&= \exists_{[F\alpha]}\left(\Lambda F_{(X,f)}(f')\right)
\end{aligned}$$

où l'égalité $(**)$ se justifie comme suit :

$$\cfrac{\cfrac{B \in F\left(\mathfrak{F}(\exists_\alpha)(f')\right)}{\exists A \in f' \;\; B \geq F(\exists_\alpha A)}\downarrow}{\cfrac{\exists A \in f' \;\; B \geq \exists_{F\alpha}(FA)}{B \in \mathfrak{F}(\exists_{F\alpha})(Ff')}\downarrow}$$

$$\cfrac{\cfrac{B \in \mathfrak{F}(\exists_{F\alpha})(Ff')}{\exists A \in f' \;\; B \geq \exists_{F\alpha}(FA) = F(\exists_\alpha A)}\downarrow}{B \in F\left(\mathfrak{F}(\exists_\alpha)(f')\right)}\downarrow$$

Vérifions que ΛF préserve les infima quelconques de sous-objets :

$$\begin{aligned}
F\left(\bigwedge_{i\in I} f_i\right) &= F\left(\left\langle \bigcup_{i\in I} f_i \right\rangle\right)\\
&\overset{(***)}{=} \left\langle \bigcup_{i\in I} Ff_i \right\rangle\\
&= \bigwedge_{i\in I} Ff_i
\end{aligned}$$

où l'égalité $(***)$ se justifie comme suit. Si $B \in F\left(\langle\bigcup_{i\in I} f_i\rangle\right)$ alors il existe $i_1, \dots, i_n \in I$ et il existe $A_{i_1} \in f_{i_1}, \dots, A_{i_n} \in f_{i_n}$ tels que

$$B \geq F(A_{i_1} \wedge \cdots \wedge A_{i_n}) = F(A_{i_1}) \wedge \cdots \wedge F(A_{i_n})$$

donc $B \in \langle\bigcup_{i\in I} Ff_i\rangle$. L'inclusion dans l'autre sens se fait aussi facilement.

Les autres propriétés sont très faciles à démontrer. ∎

Nous avons clairement réussi à extraire de la construction de la catégorie des filtres tous les ingrédients dont on a besoin pour compléter l'analogie avec la partie propositionnelle. Elle nous donne un plongement dans une catégorie dans laquelle les treillis des sous-objets $\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(X)$ sont devenus $\mathfrak{F}(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}X)$. La catégorie des filtres a comme treillis de sous-objets des co-cadres. Nous sommes prêts à regarder la deuxième partie de la construction du topos des filtres.

3.4. Le topos des filtres

Les idéaux sur un treillis distributif forment le locale classifiant de la théorie propositionnelle cohérente du treillis distributif. C'est un représentant universel pour les modèles de D. On se rappelle que dans le cas propositionnel, la deuxième étape de la construction du locale des filtres est de prendre les idéaux du résultat de la première étape : les filtres de D. La généralisation naturelle pour cette étape est donc le topos classifiant de la catégorie des filtres.

Définition 3.4.1 **(Le topos des filtres)** *La topologie de Pitts sur la catégorie des filtres est la topologie pré-canonique. Cette topologie bien répandue est celle qui est engendrée par les familles épimorphiques finies. Plus précisément, on dit que la famille*

$$\left\{(X_i, f_i) \xrightarrow{[\alpha_i]} (X, f)\right\}_{i \in I}$$

est un recouvrement basique (i.e. $\{[\alpha_i]\}_{i\in I} \in \mathcal{T}_{P0}$) si I est fini et

$$\bigvee_{i\in I} \exists_{[\alpha_i]}(1_{(X_i,f_i)}) = (X, f)$$

La topologie engendrée par cette base est la topologie pré-canonique sur la catégorie des filtres et nous noterons $(\Lambda\mathbb{C}, \mathcal{T}_P)$ le site en question. Le topos de Pitts est simplement le topos des faisceaux sur ce site i.e.

$$\Phi(\mathbb{C}) \equiv Sh(\Lambda\mathbb{C}, \mathcal{T}_P)$$

Nous désirons maintenant étudier les propriétés de fonctorialité de cette construction. Premièrement nous allons montrer la fonctorialité pour les foncteurs cohérents entre des catégories cohérentes. Ensuite, nous allons étudier le cas des foncteurs Heyting. Mais avant de commencer, regardons comment la catégorie de base $\mathbb{C}$ se plonge dans son topos des filtres $\Phi(\mathbb{C})$.

DÉFINITION 3.4.2 **(Le plongement $I_{\mathbb{C}}$)** *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie cohérente. Le foncteur*

$$I_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \longrightarrow \Phi(\mathbb{C})$$

se décompose commme suit :

$$\mathbb{C} \xrightarrow{[\cdot]_{\mathbb{C}}} \Lambda\mathbb{C} \xrightarrow{\mathcal{Y}_{\mathbb{C}}} \mathfrak{Ens}^{\mathbb{C}^{op}} \xrightarrow{\mathbf{a}_{\mathbb{C}}} \Phi(\mathbb{C}) \equiv Sh(\Lambda\mathbb{C}, \mathcal{T}_P)$$

PROPOSITION 3.4.1 **(Propriétés de $I_{\mathbb{C}}$)** *Le foncteur*

$$I_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \longrightarrow \Phi(\mathbb{C})$$

est cohérent, conditionellement Heyting, plein et fidèle.

PREUVE: Nous savons que $[\cdot]_{\mathbb{C}}$ et $\mathcal{Y}_{\mathbb{C}}$ sont pleins, fidèles et cohérents. De plus, la topologie sur $\Lambda\mathbb{C}$ est sous-canonique (voir [27]), donc les représentables sont des faisceaux, donc $\mathbf{a}_{\mathbb{C}}$ ne joue absolument aucun rôle dans le calcul de $I_{\mathbb{C}}$. Ainsi, $I_{\mathbb{C}}$ est plein fidèle et cohérent. Montrons maintenant que $I_{\mathbb{C}}$ est conditionnellement Heyting. Ceci est clair car $[\cdot]_{\mathbb{C}}$ est conditionellement Heyting (exercice) et $\mathcal{Y}_{\Lambda\mathbb{C}}$ l'est aussi ; clairement. ∎

On remarque que si $\mathbb{C}$ est une catégorie de Heyting, alors $\Lambda\mathbb{C}$ n'en est pas une en général mais possèdera des $\forall$ pour tous les morphismes dans l'image de $\mathbb{C}$ par $[\cdot]_{\mathbb{C}}$. On peut donc conclure que dans ce cas, $I_{\mathbb{C}}$ est un foncteur Heyting.

Donnons-nous maintenant un foncteur cohérent $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$. Nous désirons construire un morphisme géométrique

$$\Phi(F) : \Phi(\mathbb{D}) \longrightarrow \Phi(\mathbb{C})$$

Il suffit de remarquer que $\mathbf{a}_{\mathbb{D}} \circ \mathcal{Y}_{\mathbb{D}} \circ \Lambda(F) : \Lambda\mathbb{C} \longrightarrow \Phi(\mathbb{D})$ est lex et continu. Le fait qu'il soit lex est bien connu et la continuité ne dépend que de la continuité de $\Lambda(F)$, qui est équivalente au fait que $\Lambda(F)$ est cohérent. La continuité et l'exactitude de ce foncteur nous assure l'existence du morphisme géométrique $\Phi(F)$ cherché. Plus précisément, nous avons par la propriété universelle de $\epsilon_{\Lambda\mathbb{C}} \equiv \mathbf{a}_{\mathbb{C}} \circ \mathcal{Y}_{\mathbb{C}}$ que ce morphisme géométrique est l'unique à faire commuter :

$$\begin{tikzcd}
\Lambda\mathbb{C} \arrow[rr, hook, "\epsilon_{\Lambda\mathbb{C}}"] \arrow[dr, "\Lambda(F)"'] & & \Phi(\mathbb{C}) \arrow[dd, dashed, "\Phi(F)^*"] \\
& \Lambda\mathbb{D} \arrow[dr, hook, "\epsilon_{\Lambda\mathbb{D}}"'] & \\
& & \Phi(\mathbb{D})
\end{tikzcd}$$

de telle sorte que le diagramme suivant commute :

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[r, tail, "{[\cdot]_{\mathbb{C}}}"] \arrow[rr, bend left, "I_{\mathbb{C}}"] \arrow[d, "F"'] & \Lambda\mathbb{C} \arrow[r, tail, "\epsilon_{\Lambda\mathbb{C}}"] \arrow[d, "\Lambda(F)"] & \Phi(\mathbb{C}) \arrow[d, "\Phi(F)^{*}"] \\
\mathbb{D} \arrow[r, tail, "{[\cdot]_{\mathbb{D}}}"'] \arrow[rr, bend right, "I_{\mathbb{D}}"'] & \Lambda\mathbb{D} \arrow[r, tail, "\epsilon_{\Lambda\mathbb{D}}"'] & \Phi(\mathbb{D})
\end{tikzcd}
$$

Nous voyons donc clairement la fonctorialité de la construction de Pitts. Ainsi nous pouvons considérer la construction de Pitts comme un foncteur

$$\Phi : \mathfrak{Coh} \longrightarrow \mathfrak{Top}^{\mathrm{op}}$$

allant de la catégorie des (petites) catégories cohérentes vers la catégorie opposée des topos de Grothendieck avec morphismes géométriques.

Essayons maintenant de rendre explicite le lien entre la construction de Pitts au niveau de la logique propositionelle et celle de la logique du premier ordre. Nous allons en effet utiliser tous les résultats de la partie propositionnelle et les relever à la logique du premier ordre à l'aide du pont que nous allons construire dès maintenant.

Avant d'étudier notre cas particulier, nous avons besoin d'un résultat général concernant le topos classifiant d'une catégorie cohérente. Pitts énonce ce résultat dans **[31]**, mais ne le démontre pas. Comme je n'ai trouvé aucune démonstration dans la littérature, j'ai décidé d'en donner une. Nous avons toutefois besoin d'un lemme préliminaire.

LEMME 3.4.1 **(Fermeture de $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}$ sous la formation des images)** *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie cohérente sur laquelle on considère la topologie pré-canonique $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}$. Si S est un cribble $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}$-fermé sur $C \in |\mathbb{C}|$, alors*

$$\forall D \xrightarrow{f} C \in S \;\; \exists_f D \overset{m}{\rightarrowtail} C \in S$$

i.e. S est fermé sous la formation des images.

PREUVE: La preuve est triviale mais j'en profite tout de même pour rappeler les techniques de base avec les topologies de Grothendieck. On montre que $\exists_f D \overset{m}{\rightarrowtail} C$ est couvert par S i.e. que $m^*(S) \in \mathcal{T}_{\mathbb{C}}(\exists_f D)$. Considérons la factorisation épi-mono de f :

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q"'] & \arrow[d, phantom, "\circ"] & C \\ & \exists_f D \arrow[ur, "m"'] & \end{tikzcd}$$

Comme $m \circ q = f \in S$ on a que

$$q \in m^*(S) \equiv \{D' \xrightarrow{g} \exists_f D \mid m \circ g \in S\}$$

mais q est épi, donc $m^*(S) \in \mathcal{T}_{\mathbb{C}}(\exists_f D)$. On a ainsi que S couvre m et comme S est un cribble fermé, ceci implique que $m \in S$ comme voulu. ∎

La proposition suivante démontre que, dans que le topos classifiant, le treillis des sous-objets de représentables est isomorphe au treillis des idéaux des sous-objets (dans $\mathbb{C}$) de l'objet représenté. Ainsi les sous-objets d'un objet représentable $よ_{\mathbb{C}}(X)$ dans le topos classifiant est le locale classifiant du treillis distributif $\mathrm{S}_{\mathbb{C}}(X)$.

PROPOSITION 3.4.2 **(Représentation des sous-objets de représentables)** *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie cohérente sur laquelle on considère la topologie pré-canonique $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}$. Soit $\mathcal{E} \equiv Sh(\mathbb{C}, \mathcal{T}_{\mathbb{C}})$, c'est le topos classifiant de $\mathbb{C}$. Le plongement canonique de $\mathbb{C}$ dans $\mathcal{E}$ par Yoneda :*

$$\mathbb{C} \overset{よ_{\mathbb{C}}}{\hookrightarrow} \mathcal{E}$$

nous donne pour chaque $C \in |\mathbb{C}|$ une action au niveau des sous-objets :

$$\mathrm{S}_{\mathbb{C}}(C) \overset{よ_{\mathbb{C}C}}{\rightarrowtail} \mathrm{S}_{\mathcal{E}}(よ_{\mathbb{C}}C)$$

qui induit par la proposition 2.3.2 un morphisme de cadres $\check{よ}_{\mathbb{C}C}$ de $\mathfrak{I}(\mathrm{S}_{\mathbb{C}}(C))$ vers $\mathrm{S}_{\mathcal{E}}(よ_{\mathbb{C}}C)$ qui fait commuter

$$\begin{tikzcd} \mathrm{S}_{\mathbb{C}}(C) \arrow[r, tail, "\downarrow"] \arrow[dr, "よ_{\mathbb{C}C}"'] & \mathfrak{I}(\mathrm{S}_{\mathbb{C}}(C)) \arrow[d, dotted, "\check{よ}_{\mathbb{C}C}"] \\ & \mathrm{S}_{\mathcal{E}}(よ_{\mathbb{C}}C) \end{tikzcd}$$

En fait, $\check{よ}_{\mathbb{C}C}$ est un isomorphisme de cadres.

PREUVE: D'abord formulons deux remarques évidentes sur l'énoncé. Comme nous l'avons déjà mentionné, la topologie pré-canonique est une topologie sous-canonique, donc les représentables sont des faisceaux pour cette topologie. Ainsi, $\mathcal{Y}_{\mathbb{C}}$ a bien $\mathcal{E}$ comme co-domaine.

On se rappelle la correspondance bien connue

$$\frac{\dfrac{A \in \mathbf{S}_{\mathcal{E}}(\mathcal{Y}_{\mathbb{C}}C)}{\mathcal{Y}_{\mathbb{C}}C \xrightarrow{\chi_A} \Omega_{\mathcal{E}}}}{S_A \in \Omega_{\mathcal{E}}(C)}$$

entre les sous-objets de $\mathcal{Y}_{\mathbb{C}}C$ et les cribbles $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}$-fermés sur $C : \Omega_{\mathcal{E}}(C)$. En fait, si on munit l'ensemble des cribbles fermés sur C de l'ordre ensembliste (de l'inclusion '$\subseteq$'), on obtient un cadre dans lequel les infima se calculent comme des intersections et les suprema comme des fermetures de réunions. Cette structure de cadre sur $\Omega_{\mathcal{E}}(C)$ est isomorphe au cadre des sous-objets de $\mathcal{Y}_{\mathbb{C}}C$: $\mathbf{S}_{\mathcal{E}}(\mathcal{Y}_{\mathbb{C}}C)$.

Nous allons montrer dans ce qui suit que

$$(\Omega_{\mathcal{E}}(C), \subseteq) \simeq \mathfrak{I}\left(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(C)\right)$$

Il nous suffit de construire une bijection :

$$\Omega_{\mathcal{E}}(C) \underset{S_{(\cdot)}}{\overset{I_{(\cdot)}}{\rightleftarrows}} \mathfrak{I}(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}C)$$

Concrètement, donné un cribble sur $C \in |\mathbb{C}|$ qui est $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}$-fermé $S \in \Omega_{\mathcal{E}}(C)$, on pose

$$I_S \equiv \{\exists_f D \mid D \xrightarrow{f} C \in S\} \subseteq \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(C)$$

Inversement, donné un idéal sur $C : I \in \mathfrak{I}\left(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}C\right)$, on pose

$$S_I \equiv \{D \xrightarrow{f} C \mid \exists A \in I \;\; \exists_f D \leq A\}$$

Vérifions que ces définitions sont sensées. Montrons que I_S est un idéal sur C. On peut voir que I_S est fermé sous les supréma binaires en considérant les images respectives pour $D \xrightarrow{f} C, D' \xrightarrow{f'} C \in S$:

$$\exists_f D \overset{m}{\rightarrowtail} C, \exists_{f'} D'C \overset{m'}{\rightarrowtail} C \in I_S$$

qui sont les éléments typiques de I_S. Mais par le lemme précédent, $m, m' \in S$ car S est $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}$-fermé. Ainsi, puisque le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\exists_f D \arrow[dr, "s"] \arrow[drr, tail, "m"] & & \\
& \exists_f D \vee \exists_{f'} D' \arrow[r, tail, "n"] & C \\
\exists_{f'} D' \arrow[ur, "s'"] \arrow[urr, tail, "m'"'] & &
\end{tikzcd}$$

dans lequel on peut voir que $\{s, s'\} \subseteq n^*(S)$ car $n \circ s = m \in S$ et $n \circ s' = m' \in S$. Mais comme $\{s, s'\}$ est une famille épimorphique, on en conclut que S couvre n et donc $n \in S$ et on a bien $\exists_f D \vee \exists_{f'} D' \in I_S$.

L'autre propriété que nous devons vérifier pour montrer que I_S est un idéal est la suivante. Si $A \overset{a}{\rightarrowtail} C, B \overset{b}{\rightarrowtail} C \in \mathbb{S}_{\mathbb{C}}(C)$ sont tels que $A \vee B \overset{n}{\rightarrowtail} C \in I_S$, alors nous devons montrer que $A \in I_S$ et $B \in I_S$. Mais puisque $A \vee B \in I_S$ on a qu'il existe un $D \xrightarrow{f} C \in S$ tel que $\exists_f D \overset{m}{\rightarrowtail} C$ et $A \vee B \overset{n}{\rightarrowtail} C$ sont dans la même classe d'équivalence comme sous-objets de C donc nous pouvons trouver un diagramme commutatif de la forme suivante :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr] \arrow[drr, tail, "a"] & & \\
& A \vee B \simeq \exists_f D \arrow[r, tail, "m"] & C \\
B \arrow[ur] \arrow[urr, tail, "b"'] & &
\end{tikzcd}$$

qui exhibe le fait que $a, b \in S$ en les décomposant comme un morphisme $m \in S$ précomposé avec s_A et s_B. Les cribles ont justement cette propriété de fermeture par rapport à la précomposition. On a donc montré que I_S est un idéal.

Montrons maintenant que S_I est un crible sur C. Si $D \xrightarrow{f} C \in S_I$, alors quel que soit $D' \xrightarrow{h} D \in \mathbb{C}$ nous devons montrer que $f' \equiv f \circ h \in S_I$. Ceci est clair car comme $f \in S_I$ il existe par définition un $A \in I$ tel que $\exists_f D \leq A$ et on a alors :

$$\begin{aligned}
\exists_{f'} D' &= \exists_{f \circ h} D' \\
&= \exists_f (\exists_h D') \\
&\leq \exists_f D \\
&\leq A
\end{aligned}$$

Donc, on a bien $f' \in S_I$ comme voulu.

Montrons maintenant que S_I est un cribble $\mathcal{T}_{\mathbf{C}}$-fermé :

$$
\begin{array}{c}
S_I \text{ couvre } D \xrightarrow{f} C \\
\hline
f^*(S_I) \in \mathcal{T}_{\mathbf{C}}(D) \\
\hline
\exists \{E_i \xrightarrow{h_i} D\}_{i=1}^{n} \quad \{h_i\}_{i=1}^{n} \subseteq f^*(S_I) \;\; \& \;\; \bigvee_{i=1}^{n} \exists_{h_i} E_i = D \\
\hline
\exists \{E_i \xrightarrow{h_i} D\}_{i=1}^{n} \quad f \circ h_i \in S_I \;\; \& \;\; \bigvee_{i=1}^{n} \exists_{h_i} E_i = D \\
\hline
\exists \{E_i \xrightarrow{h_i} D\}_{i=1}^{n} \;\; \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \exists A_i \in I \;\; \exists_{f \circ h_i}(E_i) \leq A_i \;\; \& \;\; \bigvee_{i=1}^{n} \exists_{h_i} E_i = D
\end{array}
$$

Ainsi,

$$
\begin{aligned}
\exists_f D &= \exists_f \left(\bigvee_{i=1}^{n} \exists_{h_i} E_i \right) \\
&= \bigvee_{i=1}^{n} \exists_f \left(\exists_{h_i} E_i \right) \\
&= \bigvee_{i=1}^{n} \exists_{f \circ h_i} E_i \\
&\leq \bigvee_{i=1}^{n} A_i \in I
\end{aligned}
$$

car I est un idéal. Donc $f \in S_I$ et on a bien montré que S_I est un cribble $\mathcal{T}_{\mathbf{C}}$-fermé.

Montrons maintenant que les applications sont inverses. On a $S_{I_S} = S$ car trivialement $S \subseteq S_{I_S}$ et d'autre part donné $D \xrightarrow{f} C \in S_{I_S}$, alors il existe $A \in I_S$ tel que $\exists_f D \leq A$ d'où il existe $D' \xrightarrow{f'} C \in S$ tel que $\exists_f D \leq \exists_{f'} D'$ et nous avons donc le diagramme commutatif suivant :

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q"'] & \arrow[d, phantom, "\circ"] & C & \arrow[d, phantom, "\circ"] & D' \arrow[ll, "f'"'] \arrow[dl, "q'"] \\
& \exists_f D \arrow[ur, "m"] \arrow[rr, "n"'] & \circ & \exists_{f'} D' \arrow[ul, "m'"'] &
\end{tikzcd}
$$

dans lequel $m' \in S$ (car $f' \in S$ et on utilise le lemme). Ainsi,

$$f = m' \circ n \circ q \in S$$

car $m' \in S$ et S est un cribble.

On a aussi que $I_{S_I} = I$. En effet, soit $I \in \mathfrak{I}(S_{\mathbb{C}}C)$. On a :

$$\begin{array}{c}
A \in I_{S_I} \\ \hline
\exists D \xrightarrow{f} C \in S_I \ \ \exists_f D \leq A \\ \hline
\exists D \xrightarrow{f} C \in \mathbb{C}\ \exists A' \in I \ \ \exists_f D \leq A \ \ \& \ \ \exists_f(D) = A \\ \hline
A \in I
\end{array}$$

Nous avons donc la bijection annoncée. De plus, les deux applications que nous avons définies préservent l'ordre car

$$\begin{aligned}
I \subseteq J &\Longrightarrow \forall D \xrightarrow{f} C \in \mathbb{C}\, (\exists A \in I \ \ \exists_f D \leq A \Rightarrow \exists A \in J \ \ \exists_f D \leq A) \\
&\Longrightarrow S_I \subseteq S_J
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
S \subseteq R &\Longrightarrow \{\exists_f D \mid D \xrightarrow{f} C \in S\} \subseteq \{\exists_f D \mid D \xrightarrow{f} C \in R\} \\
&\Longrightarrow I_S \subseteq I_R
\end{aligned}$$

donc on a bien construit un isomorphisme d'ensembles partiellement ordonnés (en particulier un isomorphisme de cadres).

Pour terminer la preuve de la proposition nous devons montrer que l'isomorphisme que nous avons construit peut jouer le rôle de $(\mathcal{Y}_{\mathbb{C}C})^{\vee}$ dans l'énoncé. Soit $D \xrightarrow{f} C \in \mathcal{Y}_{\mathbb{C}}(C)(D)$ on a

$$\begin{array}{c}
f \in \overset{\vee}{\mathcal{Y}}_{\mathbb{C}C}(I) \\ \hline
f \in \left(\bigvee_{A \in I} \mathcal{Y}_{\mathbb{C}C} A \right)(D) \\ \hline
\{E \xrightarrow{g} D \mid \exists A \in I \ \ \mathcal{Y}_{\mathbb{C}}(C)(g)(f) \in \mathcal{Y}_{\mathbb{C}}(A)(E)\} \in \mathfrak{T}_{\mathbb{C}}(D) \\ \hline
\{E \xrightarrow{g} D \mid \exists A \in I \ \ f \circ g \in \mathcal{Y}_{\mathbb{C}}(A)(E)\} \in \mathfrak{T}_{\mathbb{C}}(D) \\ \hline
\left\{E \xrightarrow{g} D \mid \exists A \overset{a}{\rightarrowtail} C \in I\ \exists E \xrightarrow{h} A \in \mathbb{C} \ \ f \circ g = a \circ h \right\} \in \mathfrak{T}_{\mathbb{C}}(D) \\ \hline
\{E \xrightarrow{g} D \mid \exists A \in I \ \ \exists_{f \circ g} E \leq A\} \in \mathfrak{T}_{\mathbb{C}}(D) \\ \hline
\{E \xrightarrow{g} D \mid f \circ g \in S_I\} \in \mathfrak{T}_{\mathbb{C}}(D) \\ \hline
f^*(S_I) \in \mathfrak{T}_{\mathbb{C}}(D) \\ \hline
S_I \text{ couvre } f \\ \hline
f \in S_I
\end{array}$$

Ceci termine la démontration de la proposition. ∎

À l'aide de cette caractérisation, que nous pouvons combiner avec nos connaissances de la catégorie des filtres, nous sommes en mesure de caractériser les sous-objets d'objets dans $\Phi(\mathbb{C})$ qui proviennent de $\mathbb{C}$ par $I_{\mathbb{C}}$.

PROPOSITION 3.4.3 **(Représentation des sous-objets de $I_{\mathbb{C}}(X)$)** *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie cohérente et $X \in |\mathbb{C}|$. Nous définissons la fonction $\gamma_X : \phi\,(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(X)) \longrightarrow \mathbf{S}_{\Phi(\mathbb{C})}\,(I_{\mathbb{C}}(X))$ en posant pour I un idéal de filtres sur X :*

$$\gamma_X(I) \equiv \bigvee_{f \in I} \bigwedge_{A \in f} I_{\mathbb{C}}(A)$$

Avec cette définition γ_X est un isomorphisme de cadres.

PREUVE: Clairement, γ_X est la composition de deux isomorphismes bien connus. En effet, la proposition précédente nous indique que le treillis des sous-objets d'un représentable dans le topos des faisceaux sur un site muni de la topologie pré-canonique est isomorphe au treillis des idéaux du treillis des sous-objets de l'objet correspondant à ce représentable. Plus précisément, nous avons vu que l'on a un isomorphisme de cadres :

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{I}(\mathbf{S}_{\Lambda\mathbb{C}}([X]) & \xrightarrow{\simeq} & \mathbf{S}_{\Phi(\mathbb{C})}(\mathcal{Y}_{\Lambda\mathbb{C}}([X])) \\ I & \longmapsto & \bigvee_{f \in I} \mathcal{Y}_{\Lambda\mathbb{C}}(X, f) \end{array}$$

De plus, nous avons vu dans le lemme 3.3.1 qu'on a un isomorphisme de co-cadres :

$$\mathfrak{F}\,(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}X) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{S}_{\Lambda\mathbb{C}}\,([X])$$

mais comme tout filtre $f \in \mathfrak{F}\,(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}X)$ peut s'écrire comme un infima de filtres principaux :

$$f = \bigwedge_{A \in f} \uparrow A$$

on voit facilement qu'on peut décrire cet isomorphisme comme suit

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{F}(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(X)) & \xrightarrow{\simeq} & \mathbf{S}_{\Lambda\mathbb{C}}([X]) \\ f & \longmapsto & \bigwedge_{A \in f} [A] \end{array}$$

Il suffit en effet de voir que notre isomorphisme fait commuter :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(X) \arrow[r, tail, "\uparrow"] \arrow[dr, "{[\cdot]_X}"'] & \mathfrak{F}(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}X) \arrow[d, "\simeq"] \\ & \mathbf{S}_{\Lambda\mathbb{C}}([X]) \end{tikzcd}$$

Ainsi, en appliquant $\mathfrak{I}$ à ce dernier en en composant avec l'isomorphisme vu plus haut on obtient l'isomorphisme recherché :

$$\phi(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(X)) \equiv \mathfrak{I}\left(\mathfrak{F}\left(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(X)\right)\right) \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{I}\left(\mathbf{S}_{\Lambda\mathbb{C}}([X])\right) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{S}_{\Phi(\mathbb{C})}\left(\mathfrak{Y}_{\Lambda\mathbb{C}}\left([X]\right)\right) \equiv \mathbf{S}_{\Phi(\mathbb{C})}\left(I_{\mathbb{C}}(X)\right)$$

∎

Nous nous appercevons ainsi clairement que le topos des filtres est une généralisation du locale des filtres. En effet, nous avons vu dans la proposition précédente que l'essence de cette construction est de transformer chaque treillis de sous-objets $\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(X)$ dans $\mathbb{C}$ dans le locale des filtres $\phi(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}X)$ de ce treillis et de compléter l'ensemble de cette structure en harmonie de façon à ce qu'elle forme un topos.

3.5. Propriétés de fonctorialité pour les catégories de Heyting

Le résultat fondamental de Pitts dans son article [30] sur le topos des filtres est que si on a un foncteur Heyting

$$\mathbb{C} \xrightarrow{F} \mathbb{D}$$

alors le morphisme géométrique induit par Φ :

$$\begin{tikzcd} \Phi(\mathbb{C}) \arrow[r, shift left=1.5, "\Phi(F)^*"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \Phi(\mathbb{D}) \arrow[l, shift left=1.5, bend left, "\Phi(F)_*"] \end{tikzcd}$$

est ouvert. Nous démontrons ce résultat dans la présente section. Nous allons du même coup progresser dans notre apprentissage du transfert des propriétés propositionnelles aux constructions du premier ordre. En effet, nous verrons comment les propriétés d'une certaine classe d'objets de $\Phi(\mathbb{C})$ peut s'étendre à tous les autres objets.

Notons qu'une catégorie est de Heyting si elle est cohérente et possède en plus les propriétés suivantes.

1. Si $\alpha : C \longrightarrow D \in \mathbb{C}$, alors le morphisme de treillis

$$\alpha^* : \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(D) \longrightarrow \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(C)$$

   possède aussi un adjoint à droite $\forall_\alpha$. Ainsi, on a $\exists_\alpha \dashv \alpha^* \dashv \forall_\alpha$.

2. Ces ajoints à droite doivent satisfaire une condition identique à celle donnée pour les adjoints à gauche $\exists_\alpha$. C'est la condition de Beck-Chevalley pour les $\forall_\alpha$.

Il est facile de montrer que la condition de Beck-Chevalley pour les $\forall_\alpha$ est une conséquence de celle pour $\exists_\alpha$. Donc cette deuxième condition est superflue. La notion de foncteur Heyting est aussi évidente. On demandera simplement que le foncteur préserve les $\forall_\alpha$. Les catégories de Heyting sont clairement les modèles canoniques pour les théories intuitionnistes du premier ordre.

Nous allons à partir de maintenant adopter l'abus de notation suivant. Pour dénoter un objet dans $\Phi(\mathbb{C})$ provenant d'un objet $X \in |\mathbb{C}|$ nous allons ometre d'écrire le foncteur $I_{\mathbb{C}}$. Ceci ne causera pas de confusion car nous noterons les objets provenant de $\mathbb{C}$ par $X, Y, Z, \ldots$ et ceux qui ne proviennent pas necessairement ce $\mathbb{C}$ par $E, F, G, H, \ldots$. Nous allons ainsi alléger la notation de façon significative.

La proposition suivante relève la situation de la partie propositionnelle aux objets provenant de $\mathbb{C}$ en nous donnant une façon simple de nous représenter l'action de $\Phi(F)^*$ sur les treillis de sous-objets d'objets provenant de $\mathbb{C}$.

PROPOSITION 3.5.1 **(Action de $\Phi(F)^*$ au niveau des sous-objets)** *Soit $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$ un foncteur cohérent et $X \in |\mathbb{C}|$. On a que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{S}_{\Phi(\mathbb{C})}(X) \arrow[r, "\Phi(F)^*_X"] & \mathbf{S}_{\Phi(\mathbb{D})}(FX) \\
\phi(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(X)) \arrow[u, "\gamma_X"] \arrow[r, "\phi(F_X)"'] & \phi(\mathbf{S}_{\mathbb{D}}(FX)) \arrow[u, "\gamma_{FX}"']
\end{tikzcd}$$

PREUVE: Ceci est évident en vertu de la proposition 3.4.3 et du lemme 3.3.1. Je laisse au lecteur l'exercice de démontrer le résultat en observant le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{S}_{\Phi\mathbb{C}}(X) \arrow[rr, "(\Phi F)^*_X"] & & \mathbf{S}_{\Phi\mathbb{D}}(FX) \\
\mathbf{S}_{\Lambda\mathbb{C}}([X]) \arrow[ur, "\mathcal{y}_{\Lambda\mathbb{C}[X]}"] \arrow[rr, "\Lambda(F)_{[X]}"] & & \mathbf{S}_{\Lambda\mathbb{D}}([FX]) \arrow[ur, "\mathcal{y}_{\Lambda\mathbb{D}[FX]}"] & \\
 & \phi(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}X) \arrow[uu, "\gamma_X", "\simeq"'] \arrow[rr, "\phi(F_X)"'] & & \phi(\mathbf{S}_{\mathbb{D}}FX) \arrow[uu, "\simeq", "\gamma_{FX}"'] \\
\mathfrak{F}(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}X) \arrow[uu, "\lambda_X", "\simeq"'] \arrow[ur, "\downarrow_{\mathfrak{F}(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}X)}"'] \arrow[rr, "\mathfrak{F}(FX)"'] & & \mathfrak{F}(\mathbf{S}_{\mathbb{D}}FX) \arrow[uu, "\simeq", "\lambda_{FX}"'] \arrow[ur, "\downarrow_{\mathfrak{F}(\mathbf{S}_{\mathbb{D}}FX)}"'] &
\end{tikzcd}$$

dans lequel nous voulons démontrer que la face du fond commute. Pour cela, il suffit de montrer que les autres faces commutent. Nous avons déjà vu tous les éléments qui montrent cela. ∎

Nous avons maintenant tous les ingrédients nécessaires pour s'attaquer à la tâche de montrer que les foncteurs Heyting F donnent lieu à des morphismes géomériques $\Phi(F)$ qui sont ouverts. La preuve utilisera deux lemmes qui réduiront le résultat au cas propositionnel. Ces deux lemmes sont tirés de [2] et [3]. Le premier lemme réduit le problème aux représentables.

LEMME 3.5.1 **(Réduction du problème aux représentables)** *Soit $(\mathbb{C}, \mathfrak{T}_{\mathbb{C}})$ un site $\mathcal{F}$ un topos et $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{F}$ un foncteur continu et plat. Si on note par $\mathcal{E} \equiv Sh(\mathbb{C}, \mathfrak{T}_{\mathbb{C}})$, alors on sait que F induit un morphisme géométrique*

$$f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}$$

Ce morphisme est ouvert si et seulement si

a) $\forall X \in |\mathbb{C}|\quad f^*_X : \mathbf{S}_{\mathcal{E}}(X) \longrightarrow \mathbf{S}_{\mathcal{F}}(FX)$ possède un adjoint à gauche $f_{X!}$.

b) Ces adjoints sont naturels en X i.e. quel que soit $\alpha : X \longrightarrow Y \in \mathbb{C}$ le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{S}_{\mathcal{E}}(X) & \mathbf{S}_{\mathcal{F}}(FX) \arrow[l, "f_{X!}"'] \\
\mathbf{S}_{\mathcal{E}}(Y) \arrow[u, "\alpha^*"] & \mathbf{S}_{\mathcal{F}}(FY) \arrow[l, "f_{Y!}"] \arrow[u, "(F\alpha)^*"']
\end{tikzcd}$$

PREUVE: Si f est ouvert, alors il satisfait les deux conditions pour tous les objets dans $E \in \mathcal{E}$ par définition (voir [21]), donc en particulier pour les objets X provenant de $\mathbb{C}$.

Regardons maintenant la direction non-triviale. Pour cela il suffit de se rappeler la définition interne de morphisme géométrique ouvert (voir **[21]**) qui stipule que f est ouvert si et seulement si le morphisme de cadres internes

$$\Omega_{\mathcal{E}} \xrightarrow{\tau} f_*\Omega_{\mathcal{F}}$$

possède un adjoint à gauche interne. Nous devons donc construire une transformation naturelle

$$f_*\Omega_{\mathcal{F}} \xrightarrow{\lambda} \Omega_{\mathcal{E}}$$

qui formera un adjoint interne à gauche pour τ. Mais rappelons nous qu'à l'étage X

$$\Omega_{\mathcal{E}}(X) \simeq \mathbf{S}_{\mathcal{E}}(X) \qquad f_*\Omega\mathcal{F}(X) \simeq \mathbf{S}_{\mathcal{F}}(FX)$$

et le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \Omega_{\mathcal{E}}(X) \arrow[r, "\tau_X"] & (f_*\Omega_{\mathcal{F}})(X) \\ \mathbf{S}_{\mathcal{E}}(X) \arrow[u, "\simeq"] \arrow[r, "f_X^*"'] & \mathbf{S}_{\mathcal{F}}(FX) \arrow[u, "\simeq"'] \end{tikzcd}$$

i.e. τ agit comme f^*. L'hypothèse qui nous est donnée en premier lieu nous dit que les morphismes de treillis f_X^* ont des adjoints à gauche $f_{X!}$. Transportons ces adjoints à gauche via les isomorphismes décrits plus haut et nous obtenons une famille de fonctions

$$\{(f_*\Omega_{\mathcal{F}})\,(X) \xrightarrow{\lambda_X} \Omega_{\mathcal{E}}(X)\}_{X \in |\mathbb{C}|}$$

qui font individuellement commuter

$$\begin{tikzcd} \Omega_{\mathcal{E}}(X) & (f_*\Omega_{\mathcal{F}})(X) \arrow[l, "\lambda_C"'] \\ \mathbf{S}_{\mathcal{E}}(X) \arrow[u, "\simeq"] & \mathbf{S}_{\mathcal{F}}(FX) \arrow[u, "\simeq"'] \arrow[l, "f_{X!}"] \end{tikzcd}$$

Soit $X \xrightarrow{\alpha} Y \in \mathbb{C}$ et considérons maintenant le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
& \Omega_{\mathcal{E}}(Y) \arrow[dl, "\Omega_{\mathcal{E}}(\alpha)"'] & & (f_*\Omega_{\mathcal{F}})(Y) \arrow[ll, "\lambda_Y"'] \arrow[dl, "\Omega_{\mathcal{F}}(F\alpha)"'] \\
\Omega_{\mathcal{E}}(X) & & (f_*\Omega_{\mathcal{F}})(X) \arrow[ll, "\lambda_X"'] & \\
& \mathbf{S}_{\mathcal{E}}(Y) \arrow[uu, "\simeq"] \arrow[dl, "\alpha^*"'] & & \mathbf{S}_{\mathcal{F}}(FY) \arrow[ll, "f_{Y!}"] \arrow[uu, "\simeq"'] \arrow[dl, "(F\alpha)^*"] \\
\mathbf{S}_{\mathcal{E}}(X) \arrow[uu, "\simeq"] & & \mathbf{S}_{\mathcal{F}}(FX) \arrow[ll, "f_{X!}"] \arrow[uu, "\simeq"'] &
\end{tikzcd}$$

Il est clair que la face gauche de ce diagramme commute ; en effet l'action de $\Omega_{\mathcal{E}}(\alpha)$ se calcule comme l'image inverse le long de α. Pour la même raison la face de droite commute. Nous avons vu plus haut que les faces de devant et de derrière commutent. Finalement, la deuxième hypothèse nous garantit la commutativité de la base. Comme toutes les flèches verticales sont des isomorphismes nous pouvons conclure que la face du dessus commute. Mais cette dernière commutativité dit précisément que λ est une transformation naturelle. On a ainsi une tranformation naturelle λ qui est à chaque étage adjoint à gauche de τ i.e. nous avons un adjoint à gauche interne pour τ d'où f est ouvert. ∎

Le second lemme, quant à lui, réduit le problème de montrer la naturalité pour les représentables au cas particulier des représentable provenant de la catégorie de base $\mathbb{C}$.

LEMME 3.5.2 **(Reduction du problème au cas des objets qui proviennent de $\mathbb{C}$)** *On se place dans le même contexte que le lemme 3.5.1. Si $\mathbb{C}$ a une sous-catégorie $\mathbb{D}$ telle que*

1. $\forall C \in |\mathbb{C}|\ \exists D \in |\mathbb{D}|\ \exists C \overset{m_C}{\rightarrowtail} D \in \mathbb{C}$
2. $\forall C \xrightarrow{\alpha} C' \in \mathbb{C}\ \exists D \xrightarrow{\bar{\alpha}} D' \in \mathbb{D}$ *tel que*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\bar{\alpha}"] & D' \\ C \arrow[u, tail, "m_C"] \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[ur, phantom, "\circ"] & C' \arrow[u, tail, "m_{C'}"'] \end{tikzcd}$$

alors il est suffisant de démontrer la naturalité des ajoints à gauche pour les objets et morphismes de $\mathbb{D}$ i.e. f est ouvert si et seulement si

a) $\forall D \in |\mathbb{D}|\quad f_D^* : \mathbf{S}_{\mathcal{E}}(D) \longrightarrow \mathbf{S}_{\mathcal{F}}(FD)$ *possède un adjoint à gauche $f_{D!}$.*

b) Ces adjoints sont naturels en D i.e. quel que soit $\bar{\alpha} : D \longrightarrow D' \in \mathbb{D}$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{S}_{\mathcal{E}}(D) & \mathbf{S}_{\mathcal{F}}(FD) \arrow[l, "f_{D!}"'] \\ \mathbf{S}_{\mathcal{E}}(D') \arrow[u, "\bar{\alpha}^*"] & \mathbf{S}_{\mathcal{F}}(FD') \arrow[l, "f_{D'!}"] \arrow[u, "(F\bar{\alpha})^*"'] \end{tikzcd}$$

c) Ces ajoints à gauche satisfont la loi de Frobenius i.e. pour chaque $D \in |\mathbb{D}|$ et pour tous les $\varphi \in S_{\mathcal{E}}(D)$, $\vartheta \in S_{\mathcal{F}}(FD)$ on a

$$f_{D!}(\vartheta) \wedge \varphi = f_{D!}(\vartheta \wedge f_D^*(\varphi))$$

PREUVE: Seule une direction est non-triviale. Supposons qu'on ait les adjoints mentionnés pour les objets de $\mathbb{D}$ et qu'ils sont naturels pour les morphismes de $\mathbb{D}$. Par le lemme 3.5.1, il nous suffit de construire des adjoints à gauche $f_{C!}$ pour les objets de $\mathbb{C}$ et de montrer que ces adjoints sont naturels pour les morphismes de $\mathbb{C}$.

Soit $C \in |\mathbb{C}|$. Par hypothèse, nous pouvons trouver $D \in |\mathbb{D}|$ et un monomorphisme $C \overset{m}{\rightarrowtail} D$. L'idée naturelle pour construire $f_{C!}$ est de restreindre le $f_{D!}$ donné par hypothèse en suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{S}_{\mathcal{E}}(D) \arrow[d, "m^*"'] & \mathbf{S}_{\mathcal{F}}(FD) \arrow[l, "f_{D!}"'] \\ \mathbf{S}_{\mathcal{E}}(C) & \mathbf{S}_{\mathcal{F}}(FC) \arrow[l, dashed, "f_{C!}"] \arrow[u, "\exists_{Fm}"'] \end{tikzcd}$$

i.e. on pose pour $\varphi \in \mathbf{S}_{\mathcal{F}}(FC)$:

$$f_{C!}(\varphi) \equiv m^* f_{D!}\exists_{Fm}\varphi$$

Vérifions que nous avons bien défini un adjoint à gauche pour f_C^*. Pour cela, on prend $\varphi \in \mathbf{S}_{\mathcal{F}}(FC)$ et $\theta \in \mathbf{S}_{\mathcal{E}}(C)$ et on a :

$$\begin{array}{cl}
f_{C!}(\varphi) \leq_{\mathbf{S}_{\mathcal{E}}(C)} \vartheta & \\ \cline{1-1}
m^* f_{D!}\exists_{Fm}\varphi \leq_{\mathbf{S}_{\mathcal{E}}(C)} \vartheta & \\ \cline{1-1}
f_{D!}\exists_{Fm}\varphi \leq_{\mathbf{S}_{\mathcal{E}}(D)} \forall_m\vartheta & \\ \cline{1-1}
\exists_{Fm}\varphi \leq_{\mathbf{S}_{\mathcal{F}}(FD)} f_D^*\forall_m\vartheta & \\ \cline{1-1}
\varphi \leq_{\mathbf{S}_{\mathcal{F}}(FC)} (Fm)^*\left(f_D^*\forall_m\vartheta\right) & \\ \cline{1-1}
\varphi \leq_{\mathbf{S}_{\mathcal{F}}(FC)} f_C^*\left(m^*\forall_m\vartheta\right) & (1) \\ \cline{1-1}
\varphi \leq_{\mathbf{S}_{\mathcal{F}}(FC)} f_C^*\vartheta & (2)
\end{array}$$

Le résultat (1) provient du fait que f^* préserve les produits fibrés. En effet, en utilisant toujours l'abus de notation qui consiste à ometre les ϵ qui envoient les objets de $\mathbb{C}$ sur leur réflexion dans $\mathcal{E}$, on considère dans $\mathcal{E}$ le produit fibré suivant :

$$\begin{tikzcd}
\forall_m\vartheta \arrow[r, tail] & D \\
m^*\forall_m\vartheta \arrow[u] \arrow[r, tail] \arrow[ur, phantom, "\square"] & C \arrow[u, "m"']
\end{tikzcd}$$

auquel on applique f^* (en utilisant le fait que $f^*\circ\epsilon \simeq F$) pour obtenir le produit fibré suivant :

$$\begin{tikzcd}
f^*\left(\forall_m\vartheta\right) \arrow[r, tail] & FD \\
f^*\left(m^*\forall_m\vartheta\right) \arrow[u] \arrow[r, tail] \arrow[ur, phantom, "\square"] & FC \arrow[u, "Fm"']
\end{tikzcd}$$

qui montre explicitement que

$$(Fm)^*\left(f_D^*\forall_m\vartheta\right) \simeq f_C^*\left(m^*\forall_m\vartheta\right)$$

Le résultat (2), quant à lui, vient du fait que dans tout topos; si m est un mono, alors $m^*\forall_m\vartheta \simeq \vartheta$ pour tout ϑ.

Nous avons donc construit les adjoints en question. Il ne nous reste qu'à montrer qu'ils sont naturels. Pour cela, nous considérons le diagramme suivant :

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{S}_{\mathcal{E}}(C') \arrow[dl, "\alpha^*"'] & & \mathbf{S}_{\mathcal{F}}(FC') \arrow[ll, "f_{C'!}"'] \arrow[dl, "(F\alpha)^*"'] \\
\mathbf{S}_{\mathcal{E}}(C) & & \mathbf{S}_{\mathcal{F}}(FC) \arrow[ll, "f_{C!}"'] & \\
 & \mathbf{S}_{\mathcal{E}}(D') \arrow[uu, "m^*_{C'}"'] \arrow[dl, "\bar{\alpha}^*"] & & \mathbf{S}_{\mathcal{F}}(FD') \arrow[ll, "f_{D'!}"] \arrow[uu, "(Fm_{C'})^*"'] \arrow[dl, "(F\bar{\alpha})^*"] \\
\mathbf{S}_{\mathcal{E}}(D) \arrow[uu, "m^*_C"] & & \mathbf{S}_{\mathcal{F}}(FD) \arrow[ll, "f_{D!}"] \arrow[uu, "(Fm_C)^*"'] &
\end{tikzcd}
$$

dans lequel nous désirons montrer que la face du dessus commute. Par hypothèse, la base commute. On voit facilement que la face de gauche commute en appliquant $(\cdot)^*$ au diagramme de l'hypothèse 2. De la même façon, la face de droite commute ; cette fois, il faut appliquer $(\cdot)^* \circ F$ au diagramme de l'hypothèse 2. Montrons maintenant que la face de devant commute. Pour cela, nous considérons le diagramme suivant :

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{S}_{\mathcal{E}}(D) & \mathbf{S}_{\mathcal{F}}(FD) \arrow[l, "f_{D!}"'] \\
\mathbf{S}_{\mathcal{E}}(C) \arrow[u, "\exists_{m_C}"'] & \mathbf{S}_{\mathcal{F}}(FC) \arrow[l, "f_{C!}"'] \arrow[u, "\exists_{Fm_C}"] \\
\mathbf{S}_{\mathcal{E}}(D) \arrow[u, "m^*_C"'] \arrow[uu, bend left=60, "(\cdot)\wedge C"] & \mathbf{S}_{\mathcal{F}}(FD) \arrow[l, "f_{D!}"] \arrow[u, "(Fm_C)^*"] \arrow[uu, bend right=60, "(\cdot)\wedge FC"']
\end{tikzcd}
$$

La commutativité de l'extérieur de ce dernier diagramme est ce qu'on appelle la condition de Frobenius et est assurée par l'hypothèse c. Le rectangle du haut commute car si on prend tous les adjoints à droite des morphismes qui y interviennent on obtient un diagramme dont nous avons déjà montré la commutativité :

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{S}_{\mathcal{E}}(D) & \mathbf{S}_{\mathcal{F}}(FD) \arrow[l, "f_{D!}"'] \\
\mathbf{S}_{\mathcal{E}}(C) \arrow[u, "\exists_{m_C}"] & \mathbf{S}_{\mathcal{F}}(FC) \arrow[l, "f_{C!}"] \arrow[u, "\exists_{Fm_C}"']
\end{tikzcd}
\quad \dashv \quad
\begin{tikzcd}
\mathbf{S}_{\mathcal{E}}(D) \arrow[r, "f^*_D"] \arrow[d, "m^*_C"'] & \mathbf{S}_{\mathcal{F}}(FD) \arrow[d, "(Fm_C)^*"] \\
\mathbf{S}_{\mathcal{E}}(C) \arrow[r, "f^*_C"'] & \mathbf{S}_{\mathcal{F}}(FC)
\end{tikzcd}
$$

En effet, le diagramme de droite commute car f^* préserve les produits fibrés. Ainsi, si on retourne au diagramme précédent, on voit que l'extérieur et le rectangle du haut commutent. Mais comme les deux flèches verticales du haut sont des monomorphismes cela implique que le rectangle du bas commute.

On a donc finalement montré que la face de devant du parralélépipède commute. Par symétrie la face de derrière commute. Nous avons ainsi montré la commutativité de toutes les faces de ce parralélépipède sauf la base qui est le but de tous ces calculs. Le fait que toutes les flèches verticales dans ce parralélépipède soient des épimorphismes nous permet d'obtenir cette conclusion à partir des commutativités déjà démontrées. Ceci termine la preuve de la naturalité pour les $C \in |\mathbb{C}|$ et donc, la preuve du théorème. ∎

Nous sommes prêts à démontrer le résultat principal de la présente section. Vérifions que nous avons bien réussi à réduire ce problème de logique de 1er ordre au cas propositionnel.

PROPOSITION 3.5.2 **(Résultat de l'application de $\Phi(\cdot)$ sur les foncteurs Heyting)** *Si $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$ est un foncteur Heyting entre des catégories de Heyting, alors le morphisme géométrique $\Phi(F) : \Phi(\mathbb{D}) \longrightarrow \Phi(\mathbb{C})$ induit est ouvert.*

PREUVE: Nous appliquons le lemme 3.5.2 à notre situation particulière. Ici, le site est basé sur la catégorie des filtres $\Lambda\mathbb{C}$ muni de la topologie précanonique. Attention, il ne faut pas confondre le $\mathbb{C}$ donné dans les hypothèses du présent résultat avec le $\mathbb{C}$ du lemme 3.5.2 qui est $\Lambda\mathbb{C}$ ici. La sous-catégorie $\mathbb{D}$ du lemme 3.5.2 sera $\mathbb{C}$ elle-même (ou plutôt la copie de $\mathbb{C}$ dans $\Lambda\mathbb{C}$ transportée par le foncteur $[\cdot]_{\mathbb{C}}$). Nous avons vu en effet que tout objet $(X, f) \in |\Lambda\mathbb{C}|$ est un sous-objet de $[X]$. De plus, si on a un morphisme $(X, f) \xrightarrow{[\alpha]} (Y, g)$ dans $\Lambda\mathbb{C}$, alors le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
{[X]} \arrow[r, "{[\alpha]}"] & {[Y]} \\
(X, f) \arrow[u, "{[1_X]}"] \arrow[r, "{[\alpha]}"'] & (Y, g) \arrow[u, "{[1_Y]}"']
\end{tikzcd}$$

Nous sommes donc bien dans le contexte du lemme 3.5.2. Ainsi, il nous suffit de construire pour chaque $X \in |\mathbb{C}|$ des adjoints à gauche pour $\Phi(F)^*_X$, de montrer ensuite que ces adjoints à gauche sont naturels pour les morphismes qui proviennent de $\mathbb{C}$ et finalement, de montrer que ces adjoints satisfont la condition de Frobenius.

Nous avons vu dans la proposition 3.5.1 que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{S}_{\Phi(\mathbb{C})}(X) \arrow[r, "\Phi(F)^*_X"] & \mathbf{S}_{\Phi(\mathbb{D})}(FX) \\ \phi(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(X)) \arrow[u, "\gamma_X"] \arrow[r, "\phi(F_X)"'] & \phi(\mathbf{S}_{\mathbb{D}}(FX)) \arrow[u, "\gamma_{FX}"'] \end{tikzcd}$$

Ainsi, $\Phi(F)^*_X$ se calcule comme la construction de Pitts au niveau propositionnel $\phi(F_X)$. Mais ce dernier morphisme de treillis a toujours un adjoint à gauche (voir la proposition 1.7.5)

$$\mathfrak{I}\left(F_X^{-1}\right) \dashv \phi(F_X)$$

Donc l'existence des adjoints à gauche $\Phi(F)_{X!}$ est assurée pour les objets qui proviennent de $\mathbb{C}$. De plus, la partie propositionnelle (voir proposition 1.7.7) nous apprend que ces adjoints satisfont la condition de Frobenius. Il ne nous reste donc qu'à vérifier la naturalité de ces adjoints pour les morphismes qui proviennent de $\mathbb{C}$. Cette naturalité découle directement du fait que F est un foncteur Heyting. En effet, un foncteur cohérent $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$ est de Heyting si quel que soit $X \xrightarrow{\alpha} Y \in \mathbb{C}$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(X) \arrow[r, "F_X"] \arrow[d, "\forall_\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\circ"] & \mathbf{S}_{\mathbb{D}}(FX) \arrow[d, "\forall_{F\alpha}"] \\ \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(Y) \arrow[r, "F_Y"'] & \mathbf{S}_{\mathbb{D}}(FY) \end{tikzcd}$$

Mais en appliquant $\mathfrak{F}$ (la construction des filtres propositionnelle) à ce dernier diagramme et en prenant tous les adjoints à gauche, on obtient la paire de diagrammes commutatifs adjoints suivants :

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{F}(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(X)) \arrow[dr, phantom, "\circ"] & \mathfrak{F}(\mathbf{S}_{\mathbb{D}}(FX)) \arrow[l, "F_X^{-1}"'] \arrow[r, phantom, "\dashv"] & \mathfrak{F}(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(X)) \arrow[r, "\mathfrak{F}(F_X)"] \arrow[d, "\mathfrak{F}(\forall_\alpha)"'] \arrow[dr, phantom, "\circ"] & \mathfrak{F}(\mathbf{S}_{\mathbb{D}}(FX)) \arrow[d, "\mathfrak{F}(\forall_{F\alpha})"] \\ \mathfrak{F}(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(Y)) \arrow[u, "\mathfrak{F}(\alpha^*)"] & \mathfrak{F}(\mathbf{S}_{\mathbb{D}}(FY)) \arrow[l, "F_Y^{-1}"] \arrow[u, "\mathfrak{F}((F\alpha)^*)"'] & \mathfrak{F}(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(Y)) \arrow[r, "\mathfrak{F}(F_Y)"'] & \mathfrak{F}(\mathbf{S}_{\mathbb{D}}(FY)) \end{tikzcd}$$

Finalement, on applique $\mathfrak{I}$ au diagramme de gauche pour obtenir la commutativité de

$$\begin{tikzcd}
\phi(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(X)) & \phi(\mathbf{S}_{\mathbb{D}}(FX)) \arrow[l, "\mathfrak{I}(F_X^{-1})"'] \\
\phi(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(Y)) \arrow[u, "\phi(\alpha^*)"] \arrow[ur, phantom, "\circ"] & \phi(\mathbf{S}_{\mathbb{D}}(FY)) \arrow[l, "\mathfrak{I}(F_Y^{-1})"] \arrow[u, "\phi((F\alpha)^*)"']
\end{tikzcd}$$

qui est équivalente à la naturalité cherchée :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{S}_{\mathcal{E}}(X) & \mathbf{S}_{\mathcal{F}}(FX) \arrow[l, "\Phi(F)_{X!}"'] \\
\mathbf{S}_{\mathcal{E}}(Y) \arrow[u, "\alpha^*"] \arrow[ur, phantom, "\circ"] & \mathbf{S}_{\mathcal{F}}(FY) \arrow[l, "\Phi(F)_{Y!}"] \arrow[u, "(F\alpha)^*"']
\end{tikzcd}$$

via les isomorphismes discutés auparavant. ∎

Nous avons donc montré la propriété fondamentale du topos des filtres. Notons que la notion de morphisme géométrique ouvert est centrale dans l'étude de la logique intuitionniste du premier ordre. En effet, les morphismes géométriques ouverts sont précisément les morphismes géométriques dont la partie image inverse préserve toute la logique intuitionniste du premier ordre. Nous pouvons donc les considérer comme des foncteurs ultra-complets analogues aux morphismes de treillis complets des premiers chapitres.

En revisant la technique de la preuve déployée ci-dessus nous remarquons que nous avons là notre premier exemple fondamental de relèvement de la situation propositionnelle à la logique des prédicats. Nous aurons bien sûr l'occasion de faire encore plusieurs raisonnements de ce type pour démontrer à chaque fois que les morceaux s'emboîtent à merveille et que nous pouvons effectivement réduire la plupart des problèmes à leur analogue propositionnel.

3.6. La propriété quasi-universelle du topos des filtres

Nous relevons dans la présente section le résultat du théorème 2.3.1 à sa version toposophique. Pour les besoins de la cause, nous avons besoin de définir une nouvelle classe de topos. Nous ne croyons pas que cette définition existe ailleurs dans la littérature.

DÉFINITION 3.6.1 **(Topos complètement distributif)** *Un topos $\mathcal{E}$ est dit complètement distributif si pour chaque $E \in |\mathcal{E}|$ le treillis des sous-objets de E : $\mathbf{S}_{\mathcal{E}}(E)$ est complètement distributif.*

Nous avons aussi besoin de définir une classe de foncteurs cohérents qui s'apparente clairement à la notion de p-modèle introduite par Makkai dans [**23**]. Nous comparerons ces notions dans le chapitre 5.

DÉFINITION 3.6.2 **(f-modèle)** *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie cohérente, $\mathcal{F}$ une catégorie cohérente dans laquelle les treillis de sous-objets possèdent des infima arbitraires. Un foncteur cohérent $\mathbb{C} \xrightarrow{M} \mathcal{F}$ est un f-modèle si pour chaque $C \xrightarrow{\alpha} D \in \mathbb{C}$ et pour chaque filtre f sur $\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(C)$, on a que*

$$\exists_{M\alpha}\left(\bigwedge_{A\in f} M_C A\right) = \bigwedge_{A\in f} \exists_{M\alpha}\left(M_C A\right)$$

Notons qu'on pourrait remplacer "cohérente" par "régulière" dans cette définition pour ainsi obtenir la notion la plus générale possible.

Le résultat principal de la présente section, le théorème 3.6.1, nous montrera que le plongement de $\mathbb{C}$ dans son topos des filtres est quasi-universel parmis les f-modèles de $\mathbb{C}$ dans un topos complètement distributif. Pour le démontrer, nous allons nous servir du cas propositionnel pour raisonner au niveau des représentables pour ensuite relever la situation aux objets quelconques. L'essentiel du raisonnement tient dans les trois lemmes suivants dont le premier est la généralisation de la proposition 2.3.1, le deuxième est la généralisation de 2.3.2 et le troisième est la généralisation du corollaire 2.3.3.

Le lemme suivant énonce une propriété universelle pour la construction des filtres parmis les foncteurs lex dans les catégories $\bigwedge-\mathbb{L}\mathrm{ex}$ (catégories lex dont les treillis des sous-objets sont des $\bigwedge$-semi-treillis).

LEMME 3.6.1 **(Propriété universelle de $\Lambda\mathbb{C}$ parmis les $\bigwedge-\mathbb{L}\mathrm{ex}$)** *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie possédant des limites finies (lex), $\mathcal{F} \in |\bigwedge-\mathbb{L}\mathrm{ex}|$ une catégorie lex dans laquelle les treillis des sous-objets sont des $\bigwedge$-semi-treillis. Si $\mathbb{C}\xrightarrow{M}\mathcal{F}$ est lex alors il existe un unique foncteur lex $\Lambda\mathbb{C}\xrightarrow{\hat{M}}\mathcal{F}$ préservant les infima arbitraires de sous-objets tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, hook, "{[\cdot]_{\mathbb{C}}}"] \arrow[dr, "M"'] & \Lambda\mathbb{C} \arrow[d, "\hat{M}"] \\ & \mathcal{F} \end{tikzcd}$$

PREUVE: Donné $(X, f) \in |\Lambda\mathbb{C}|$. On se rappelle qu'il est un sous-objet de $[X]$ et que

$$(X, f) = \bigwedge_{A\in f} [A]$$

Ainsi, si on veut que $\hat{M}$ soit lex, préserve les infima arbitraires et fasse commuter le diagramme ci-dessus ; on est forcé de poser :

$$\begin{aligned} \hat{M}(X, f) &= \hat{M}\left(\bigwedge_{A\in f} [A]\right) \\ &= \bigwedge_{A\in f} \hat{M}[A] \\ &= \bigwedge_{A\in f} MA \end{aligned}$$

donc l'action de $\hat{M}$ sur les objets est uniquement déterminée.

D'autre part, donné un morphisme $(X, f)\xrightarrow{[\alpha]}(Y, g) \in \Lambda\mathbb{C}$. Nous pouvons toujours supposer que α est total et on considère ainsi le produit fibré suivant :

$$\begin{tikzcd} (M\alpha)^*\left(\bigwedge_{B\in g} MB\right) \arrow[r] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \bigwedge_{b\in g} MB \arrow[d, tail] \\ MX \arrow[r, "M\alpha"'] & MY \end{tikzcd}$$

Mais comme les infima commutent avec les produits fibrés et que M est lex, on a :

$$\begin{aligned}(M\alpha)^*\left(\bigwedge_{B\in g} MB\right) &= \bigwedge_{B\in g}(M\alpha)^*(MB)\\ &= \bigwedge_{B\in g} M(\alpha^*B)\end{aligned}$$

De plus, rappelons-nous que, par la définition de morphisme dans $\Lambda\mathbb{C}$, si $B \in g$, alors $\alpha^*(B) \in f$ donc

$$\bigwedge_{A\in f} MA \underset{\mathbf{S}_{\mathcal{F}}(MX)}{\leq} \bigwedge_{B\in g} M(\alpha^*B)$$

et le diagramme suivant nous permet de définir $\hat{M}[\alpha]$:

$$\begin{tikzcd}
\hat{M}(X,f) \arrow[rr, "{\hat{M}[\alpha]}"] \arrow[d, equal] \arrow[drr, phantom, "\equiv"] & & \hat{M}(Y,g) \arrow[d, equal] \\
\bigwedge_{A\in f} MA \arrow[r, tail] \arrow[dr, tail] \arrow[dr, phantom, "\circ"] & \bigwedge_{B\in g} M(\alpha^*B) \arrow[r] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \bigwedge_{B\in g} MB \arrow[d, tail] \\
& MX \arrow[r, "M\alpha"'] & MY
\end{tikzcd} \tag{3.6.1}$$

et ce choix est l'unique possible, car par l'admissibilité de α, on a toujours une décomposition en un diagramme comme suit dans $\Lambda\mathbb{C}$:

$$\begin{tikzcd}
(X,f) \arrow[r, tail, "{[1_X]}"] \arrow[dr, tail, "{[1_X]}"'] & (X,\mathfrak{F}(\alpha^*)(g)) \arrow[r, "{[\alpha]}"] \arrow[d, tail, "{[1_X]}"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & (Y,g) \arrow[d, tail, "{[1_Y]}"] \\
& {[X]} \arrow[r, "{[\alpha]}"'] & {[Y]}
\end{tikzcd}$$

et l'on voit ainsi clairement que tout foncteur lex préservant les infima de sous-objets enverra ce dernier diagramme précisément sur le diagramme que nous avons décrit pour définir l'action de $\hat{M}$ sur les morphismes. Nous avons donc prouvé l'unicité de $\hat{M}$.

Montrons que cet unique $\hat{M}$ est lex. Il est clair que $\hat{M}$ préserve les objets terminaux de $\Lambda\mathbb{C}$ car il sont tous de la forme $\mathbf{1}_{\Lambda\mathbb{C}} \simeq [1_{\mathbb{C}}]$ et donc :

$$\begin{aligned} \hat{M}(\mathbf{1}_{\Lambda\mathbb{C}}) &\simeq \hat{M}([\mathbf{1}_{\mathbb{C}}]) \\ &\simeq M(\mathbf{1}_{\mathbb{C}}) \\ &\simeq \mathbf{1}_{\mathcal{F}} \end{aligned}$$

car M est lex.

Pour montrer que $\hat{M}$ préserve les produits fibrés, nous prenons un produit fibré dans $\Lambda\mathbb{C}$:

$$\begin{tikzcd} (P,\pi) \arrow[r, "{[\alpha']}"] \arrow[d, "{[\beta']}"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & (Z,h) \arrow[d, "{[\beta]}"] \\ (X,f) \arrow[r, "{[\alpha]}"'] & (Y,g) \end{tikzcd} \tag{3.6.2}$$

dans lequel nous savons que nous pouvons supposer que les morphismes sont totaux, que

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\beta'"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Z \arrow[d, "\beta"] \\ X \arrow[r, "\alpha"'] & Y \end{tikzcd} \tag{3.6.3}$$

est un produit fibré dans $\mathbb{C}$ et que $\pi = \mathfrak{F}(\alpha'^*)(h) \wedge \mathfrak{F}(\beta'^*)(f)$.

Observons maintenant le diagramme suivant dans lequel j'affirme que tous les rectangles possibles sont des produits fibrés :

$$\begin{tikzcd}
\bigwedge\limits_{C\in\pi} MC \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] \arrow[rr, bend left, "\hat{M}[\alpha']"] \arrow[dd, bend right=60, "\hat{M}[\beta']"'] \arrow[dr, phantom, "❺"] & \bigwedge\limits_{D\in h} M\left(\alpha'^{*}D\right) \arrow[r] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "❹"] & \bigwedge\limits_{D\in h} MD \arrow[d, tail] \arrow[dd, bend left=60, "\hat{M}[\beta]"] & & \\
\bigwedge\limits_{A\in f} M\left(\beta'^{*}A\right) \arrow[r, tail] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "❸"] & \bigwedge\limits_{B\in g} M\left(\beta'^{*}(\alpha^{*}B)\right) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ddrr, dashed, tail] \arrow[dr, phantom, "❷"] & \bigwedge\limits_{B\in g} M\left(\beta^{*}B\right) \arrow[d] \arrow[ddrr, dashed, tail] & & \\
\bigwedge\limits_{A\in f} MA \arrow[r, tail] \arrow[rr, bend right, "\hat{M}[\alpha]"'] & \bigwedge\limits_{B\in g} M\left(\alpha^{*}B\right) \arrow[r] \arrow[ddrr, dashed, tail] & \bigwedge\limits_{B\in g} MB \arrow[ddrr, dashed, tail] & & \\
& & & MP \arrow[r, "M\alpha'"] \arrow[d, "M\beta'"'] \arrow[dr, phantom, "❶"] & MZ \arrow[d, "M\beta"] \\
& & & MX \arrow[r, "M\alpha"'] & MY
\end{tikzcd}$$

Remarquons premièrement le rectangle formé des flèches courbes. Nous voyons immédiatement que ce rectangle est l'image dans $\mathcal{F}$ par $\hat{M}$ de notre produit fibré 3.6.2 dans $\Lambda\mathbb{C}$. Comme nous voulons précisément montrer que ce rectangle arrondi est un produit fibré dans $\mathcal{F}$, nous allons procéder comme suit. Nous allons montrer que tous les rectangles numérotés sont des produits fibrés et que les flèches courbes sont formées précisément par composition de contour du grand rectangle :

❺	❹
❸	❷

et nous pourrons donc conclure par le lemme des produits fibrés que ce contour est aussi un produit fibré comme voulu. Voyons donc pourquoi ces rectangles sont des produits fibrés :

❶ Ce rectangle est l'image du rectangle 3.6.3 par M et comme M est lex, on a évidemment que le rectangle résultant est aussi un produit fibré.

❷ On considère tout d'abord ce rectangle sans les infima. Il est en effet suffisant de montrer que

$$\begin{tikzcd}
M\left(\alpha'^{*}(\beta^{*}B)\right) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & M(\beta^{*}B) \arrow[d] \\
M(\alpha^{*}B) \arrow[r] & M(B)
\end{tikzcd}$$

est un produit fibré car l'infima préserve les produits fibrés. Mais ceci est clair car chaque côté de ce rectangle est un produit fibré le long d'un côté du rectangle ❶ qui lui est parallèle. Nous pouvons bien voir ces quatre produits fibrés en trois dimensions dans le grand diagramme (on y voit les deux rectangles reliés par des piliers en pointillé). On voit bien que le coin supérieur gauche du rectangle ❷ pourrait clairement être remplacé par $M\left(\alpha'^*(\beta^* B)\right)$ lorsque cela est plus pratique (car le diagramme 3.6.3 commute).

❸ Comme nous l'avons vu, le côté gauche de ❷ est obtenu par produit fibré du côté gauche de ❶. Ainsi, si nous voulons calculer l'image inverse de

$$\bigwedge_{A \in f} MA$$

le long du côté gauche de de ❷, nous pouvons calculer cette image inverse au niveau de $M\beta'$. Ainsi, ❸ est bien un produit fibré.

❹ La preuve est symétrique à celle de ❸ sauf qu'on doit voir l'objet supérieur gauche de ❶ comme étant $M\left(\alpha'^*(\beta^* B)\right)$.

❺ Ce produit fibré doit se calculer comme l'intersection des deux sous-objets formant le coin inférieur droit. Nous devons donc montrer que :

$$\bigwedge_{C \in \pi} MC = \bigwedge_{A \in f} M\left(\beta'^* A\right) \wedge \bigwedge_{D \in h} M\left(\alpha'^* D\right)$$

Mais ceci est évident car

$$\begin{aligned}
\bigwedge_{A \in f} M\left(\beta'^* A\right) \wedge \bigwedge_{D \in h} M\left(\alpha'^* D\right) &= \bigwedge_{(A,D) \in f \times h} M\left(\beta'^* A\right) \wedge M\left(\alpha'^* D\right) \\
&= \bigwedge_{(A,D) \in f \times h} M\left(\beta'^* A \wedge \alpha'^* D\right)
\end{aligned}$$

et on a clairement le résultat en remarquant que

$$C \in \pi = \mathfrak{F}(\alpha'^*)(h) \wedge \mathfrak{F}(\beta'^*)(f) \iff \exists (A, D) \in f \times h \;\; \beta'^* A \wedge \alpha'^* D \leq C$$

Ceci montre que le grand rectangle est aussi un produit fibré. Suite à cette discussion, on voit facilement apparaître le contour de ce rectangle comme étant $\hat{M}$ appliqué au produit fibré original. Donc $\hat{M}$ est lex.

Pour montrer que $\hat{M}$ préserve les infima arbitraires de sous-objets nous montrons tout d'abord ce fait pour les objets de $\Lambda\mathbb{C}$ qui proviennent de $\mathbb{C}$. En effet, pour ces objets nous pouvons faire apparaître le diagramme suivant :

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{F}(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}X) \arrow[d, "\lambda_X", "\simeq"'] \arrow[dd, bend left=60, "\widehat{M_X}"] \\
\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(X) \arrow[ur, "\uparrow"] \arrow[r, tail, "{[\cdot]_{\mathbb{C}X}}"] \arrow[dr, "M_X"'] & \mathbf{S}_{\wedge\mathbb{C}}([X]) \arrow[d, "\hat{M}_{[X]}"] \\
 & \mathbf{S}_{\mathcal{F}}(MX)
\end{tikzcd}
$$

dans lequel la commutativité du triangle du haut vient du lemme 3.3.1 et celle du triangle du bas vient du fait que $\hat{M} \circ [\cdot]_{\mathbb{C}} = M$. Ainsi, la composition des deux morphismes verticaux fait commuter le grand triangle extérieur. Mais par la propriété universelle de la construction des filtres (voir lemme 2.3.1), comme M_X préserve les infima binaires (car M est lex) et $\mathbf{S}_{\mathcal{F}}(MX)$ est un $\bigwedge$-semi-treillis, on a qu'il existe un unique morphisme de $\bigwedge$-semi-treillis $\widehat{M_X}$ faisant commuter le triangle extérieur. Comme $\hat{M}_{[X]}$, composé avec l'isomorphisme λ_X, se calcule exactement comme $\widehat{M_X}$, on a bien que $\hat{M}_{[X]} = \widehat{M_X} \circ \lambda_X^{-1}$ préserve les infima.

Pour étendre le résultat aux objets quelconques de $\wedge\mathbb{C}$, il suffit de remarquer que par le lemme 3.3.2 on a le diagramme commutatif suivant :

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{F}(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}X) \arrow[r, two heads, "(\cdot)\wedge f"'] \arrow[d, "\lambda_X"', "\simeq"] & \downarrow f \arrow[l, bend right, "\text{incl.}"'] \arrow[d, "\lambda_X|_f", "\simeq"'] \\
\mathbf{S}_{\wedge\mathbb{C}}([X]) \arrow[r, two heads, "{[1_X]^*}"'] \arrow[d, "\hat{M}_{[X]}"'] & \mathbf{S}_{\wedge\mathbb{C}}(X,f) \arrow[l, bend right, "{[1_X]\circ(\cdot)}"'] \arrow[d, "\hat{M}_{(X,f)}"] \\
\mathbf{S}_{\mathcal{F}}(MX) \arrow[r, two heads, "{\left(\hat{M}([1_X])\right)^*}"'] & \mathbf{S}_{\mathcal{F}}\left(\hat{M}(X,f)\right) \arrow[l, bend right, "{\hat{M}([1_X])\circ(\cdot)}"']
\end{tikzcd}
$$

et donc clairement on obtient le résultat. ∎

Nous voyons que nous progressons vers la propriété universelle recherchée. Du moins, nous sommes déjà capable de factoriser tout foncteur lex M dans une catégorie $\mathcal{F} \in |\bigwedge-\mathbb{L}\mathbf{ex}|$ par le plongement de $\mathbb{C}$ dans sa catégorie des filtres. Si on suppose maintenant que M est un f-modèle et que $\mathcal{F}$ est un topos complètement distributif ; pouvons-nous démontrer que M se factorise par $\Phi(\mathbb{C})$? Le lemme précédent nous donne un chemin évident pour démontrer ce résultat. Il suffit en effet de montrer que sous nos hypothèses additionnelles, le foncteur $\hat{M}$ induit par M dans le lemme précédent est un foncteur cohérent. Le lemme suivant démontre ce fait.

LEMME 3.6.2 **(Propriété universelle de $\Lambda\mathbb{C}$ parmis le f-modèles)** *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie cohérente, $\mathcal{F} \in |\bigwedge-\mathfrak{Coh}|$ une catégorie cohérente dans laquelle les treillis des sous-objets sont des co-cadres. Si on se donne un f-modèle $\mathbb{C}\xrightarrow{M}\mathcal{F}$, alors il existe un unique foncteur cohérent $\Lambda\mathbb{C}\xrightarrow{\hat{M}}\mathcal{F}$ préservant les infima arbitraires de sous-objets tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, hook, "{[\cdot]_{\mathbb{C}}}"] \arrow[dr, "M"'] & \Lambda\mathbb{C} \arrow[d, "\hat{M}"] \\ & \mathcal{F} \end{tikzcd}$$

PREUVE: Si $M : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{F}$ est un f-modèle, alors c'est en particulier un foncteur lex et commme les treillis de sous-objets de $\mathcal{F}$ sont des co-cadres, ils sont aussi en particulier des $\bigwedge$-semi-treillis. Ainsi, nous pouvons appliquer le lemme précédent pour construire l'unique foncteur lex $\hat{M}$ qui préserve les infima arbitraires et qui fait commuter notre diagramme. Il nous reste à montrer que $\hat{M}$ est cohérent sous nos hypothèses particulières.

Nous savons que $\hat{M}$ est cohérent si et seulement si il envoie les familles épimorphiques finies de $\Lambda\mathbb{C}$ sur des familles épimorphiques de $\mathcal{F}$. Autrement dit, nous voulons montrer que $\hat{M}$ est continu pour les topologies pré-canoniques naturelles sur $\Lambda\mathbb{C}$ et $\mathcal{F}$.

Supposons donc qu'on a une famille épimorphique finie dans $\Lambda\mathbb{C}$:

$$\{(X_i, f_i)\xrightarrow{[\alpha_i]}(X, f)\}_{i=1}^{n}$$

En regardant le diagramme 3.6.1 à la page 142 on s'apperçoit que l'image d'un $\hat{M}[\alpha_i]$ se calcule le long le $M\alpha$ i.e.

$$\exists_{\hat{M}[\alpha_i]}\left(\hat{M}(X_i, f_i)\right) = \exists_{M\alpha_i}\left(\bigwedge_{B\in f_i} MB\right)$$

Mais puisque M est un f-modèle on a :

$$\begin{aligned}\exists_{\hat{M}[\alpha_i]}\left(\hat{M}(X_i,f_i)\right) &= \exists_{M\alpha_i}\left(\bigwedge_{B\in f_i} MB\right)\\ &= \bigwedge_{B\in f_i}\exists_{M\alpha_i}(MB)\\ &= \bigwedge_{B\in f_i} M\left(\exists_{\alpha_i}B\right)\\ &= \bigwedge_{A\in\mathfrak{F}(\exists_{\alpha_i})(f_i)} MA\end{aligned}$$

et cette dernière égalité se justifie par le fait que, par définition :

$$A\in\mathfrak{F}(\exists_{\alpha_i})(f_i) \iff \exists B\in f_i\ \exists_{\alpha_i}B\leq A$$

Ainsi, tous les MA qui interviennent dans la dernière ligne sont plus grands ou égaux à des $M\left(\exists_{\alpha_i}B\right)$ qui interviennent dans la ligne précédente. On en conclut facilement que ces deux infima sont égaux.

Avec cette formule pour les images des $\hat{M}[\alpha_i]$ nous pouvons montrer que la famille suivante

$$\left\{\hat{M}(X_i,f_i)\stackrel{\hat{M}[\alpha_i]}{\longrightarrow}\hat{M}(X,f)\right\}_{i=1}^{n}$$

est épimorphique dans $\mathcal{F}$. En effet,

$$\begin{aligned}\bigvee_{i=1}^{n}\exists_{\hat{M}[\alpha_i]}\left(\hat{M}(X_i,f_i)\right) &= \bigvee_{i=1}^{n}\bigwedge_{A\in\mathfrak{F}(\exists_{\alpha_i})(f_i)} MA\\ &= \bigwedge_{\vec{A}\in\prod_{i=1}^{n}\mathfrak{F}(\exists_{\alpha_i})(f_i)}\bigvee_{i=1}^{n} M\left(\vec{A}(i)\right)\\ &= \bigwedge_{\vec{A}\in\prod_{i=1}^{n}\mathfrak{F}(\exists_{\alpha_i})(f_i)} M\left(\bigvee_{i=1}^{n}\vec{A}(i)\right)\\ &\geq \bigwedge_{A\in f} MA\end{aligned}$$

où nous avons utilisé que les sous-objets d'un objet $\mathcal{F}$ forment un co-cadre et que M préserve les suprema car il est cohérent. L'inégalité de la dernière ligne, quant à elle, se voit aisément en remarquant que quel que soit

$$\vec{A} \in \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{F}(\exists_{\alpha_i})(f_i)$$

on a

$$\bigvee_{i=1}^{n} \vec{A}(i) \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{F}(\exists_{\alpha_i})(f_i) = f$$

car les $[\alpha_i]$ forment une famille épimorphique dans $\Lambda\mathbb{C}$. Ceci termine la démonstration du lemme. ∎

Notre dernier lemme, quant à lui, démontre que la propriété spécifique que $\hat{M}$ a de préserver les infima arbitraires se relève à M^*. Il est clairement la généralisation du corollaire 2.3.3.

LEMME 3.6.3 **(Propriété universelle du topos classifiant pour les $\mathbb{C} \in |\bigwedge -\mathfrak{Coh}|$)** *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie cohérente possédant des infima arbiraires de sous-objets i.e. $\mathbb{C} \in |\bigwedge -\mathfrak{Coh}|$. On note par $\mathcal{E}$ le topos classifiant de $\mathbb{C}$ (c'est le topos des faisceaux pour la topologie pré-canonique sur $\mathbb{C}$). Si $\mathcal{F}$ est un topos complètement distributif et $\mathbb{C} \xrightarrow{F} \mathcal{F}$ est un foncteur cohérent préservant les infima arbitraires, alors la propriété universelle du topos classifiant induit un unique morphisme géométrique $(F^*, F_*) : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}$ tel que :*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "y_C"] \arrow[dr, "F"'] & \mathcal{E} \arrow[d, "F^*"] \\ & \mathcal{F} \end{tikzcd}$$

commute. Sous ces conditions particulières, F^* préserve aussi les les infima arbitraires.

PREUVE: Comme nous l'avons vu précédemment, il suffit de montrer que F^* préserve les infima arbitraires au niveau des sous-objets de représentables. Soit $C \in |\mathbb{C}|$, on considère le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{I}(\mathrm{S}_{\mathbb{C}}C) \arrow[d, "\check{\mathsf{y}}_{\mathbb{C}C}", "\simeq"'] \arrow[dd, bend left=60, "\check{F}_C"] \\
\mathrm{S}_{\mathbb{C}}(C) \arrow[ur, "\downarrow"] \arrow[r, tail, "\mathsf{y}_{\mathbb{C}C}"] \arrow[dr, "F_C"'] & \mathrm{S}_{\mathcal{E}}(\mathsf{y}_{\mathbb{C}}C) \arrow[d, "F^*_{\mathsf{y}_{\mathbb{C}}C}"] \\
 & \mathrm{S}_{\mathcal{F}}(FC)
\end{tikzcd}$$

Le triangle du haut commute par la proposition 3.4.2 et celui du bas par la propriété universelle du topos classifiant. Ainsi, la composition des deux morphismes verticaux fait commuter le grand triangle extérieur. Mais ce morphisme est donc l'unique $(F_C)^\vee$ donné par la propriété universelle de la construction des idéaux et nous avons vu dans le corollaire 2.3.3 que lorsque le codomaine de $(F_C)^\vee$ est complètement distributif et que F_C préseverve les infima arbitraires, alors $(F_C)^\vee$ préserve aussi les infima arbitraires. Ceci implique clairement que $F^*_{\mathsf{y}_{\mathbb{C}}C}$ préserve les infima arbitraires car

$$F^*_{\mathsf{y}_{\mathbb{C}}C} = \check{F}_C \circ \left(\check{\mathsf{y}}_{\mathbb{C}C}\right)^{-1}$$

■

Avec ces trois lemmes en main, le chemin vers la propriété quasi-universelle du topos des filtres devrait maintenant nous sembler clair. Passons dès maintenant à l'action en démontrant ce résultat.

THÉORÈME 3.6.1 **(Propriété quasi-universelle du topos des filtres)** *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie cohérente. Soit $\mathcal{F}$ un topos complètement distributif et $M : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{F}$ un f-modèle, alors il existe un unique morphisme géométrique (à isomorphisme naturel près) $(M^*, M_*) : \mathcal{F} \longrightarrow \Phi(\mathbb{C})$ tel que le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[r, tail, "I_{\mathbb{C}}"] \arrow[dr, "M"'] & \Phi\mathbb{C} \arrow[d, "M^*"] \\
 & \mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

De plus, M^* préserve les infima arbiraires de sous-objets.

PREUVE: Donné un f-modèle M nous voyons bien que nous nous retrouvons dans le contexte du lemme 3.6.3 car un treillis complètement distributif est trivialement un co-cadre. Ainsi, par la propriété universelle du topos classifiant, l'unique foncteur cohérent $\hat{M}$ donné par le lemme induit un morphisme géométrique $(M^*, M_*) : \mathcal{F} \longrightarrow \Phi\mathbb{C}$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "{[\cdot]_{\mathbb{C}}}"] \arrow[dr, "M"'] & \Lambda\mathbb{C} \arrow[r, "y_{\Lambda\mathbb{C}}"] \arrow[d, "\hat{M}"] & \Phi\mathbb{C} \arrow[dl, "M^*"] \\ & \mathcal{F} & \end{tikzcd}$$

et comme $\hat{M}$ préserve les infima arbitraires on a par le lemme 3.6.3 que M^* les préserve aussi comme nous le voulions. ∎

Nous pouvons même donner une forme plus explicite pour ce dernier résultat. En effet, si on dénote par $\bigwedge -\mathsf{Geom}(\mathcal{F}, \Phi\mathbb{C})$ la catégorie des morphismes géométriques de $\mathcal{F}$ dans $\Phi(\mathbb{C})$ dont l'image inverse préserve les infima arbitraires et par $f - \mathsf{Mod}(\mathbb{C}, \mathcal{F})$ la catégorie des f-modèles de $\mathbb{C}$ dans $\mathcal{F}$, alors on a la formulation suivante pour notre propriété quasi-universelle.

COROLLAIRE 3.6.1 **(Forme plus explicite pour la propriété quasi-universelle de $\Phi\mathbb{C}$)** *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie cohérente. La composition avec $I_{\mathbb{C}}$ induit une équivalence de catégories :*

$$\bigwedge -\mathsf{Geom}(\mathcal{F}, \Phi\mathbb{C}) \xrightarrow{(\cdot)\circ I_{\mathbb{C}}} f - \mathsf{Mod}(\mathbb{C}, \mathcal{F})$$

PREUVE: La preuve est laissée en exercice au lecteur. On remarque que la formulation précédente de la propriété quasi-universelle nous donne que le foncteur de l'énoncé des essentiellement surjectif. Le reste de la preuve suit des propriétés générales des éléments intervenant dans la construction de la propriété universelle dans sa première forme. ∎

Nous avons ainsi généralisé la propriété quasi-universelle que nous avions démontrée dans le cas propositionnel pour le locale des filtres. Le lecteur remarquera que la classe des modèles pour lesquels le topos des filtres est universel est la classe réduite des f-modèles. Cette restriction n'existe pas dans le cas propositionnel car cette condition y est trivialement vérifiée pour tous les modèles. Dans la situation qui nous préoccupe, nous avons besoin de cette restriction pour factoriser M par la catégorie des filtres avec un foncteur continu $\hat{M}$ qui préserve les infima arbitraires. Nous verrons d'ailleurs dans le chapitre suivant que cette restriction n'est pas très contraignante.

3.7. Conclusion

Si on met côte à côte les résultats des sections 1.7 et 2.3 avec ceux du présent chapitre nous voyons immédiatement l'effet mirroir qui se présente :

logique propositionnelle	**logique du 1er ordre**
$\phi(D)$: cadre/locale	$\Phi(\mathbb{C})$: topos de Grothendieck
$D \overset{i_D}{\rightarrowtail} \phi(D)$ conditionellement Heyting conservatif	$\mathbb{C} \overset{I_\mathbb{C}}{\rightarrowtail} \Phi(\mathbb{C})$ conditionellement Heyting plein et fidèle
$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "i_A"] \arrow[d, "f"'] & \phi(A) \arrow[d, "\phi(f)"] \\ B \arrow[r, tail, "i_B"'] & \phi(B) \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, tail, "I_\mathbb{C}"] \arrow[d, "F"'] & \Phi(\mathbb{C}) \arrow[d, "\Phi(F)^*"] \\ \mathbb{D} \arrow[r, tail, "I_\mathbb{D}"'] & \Phi(\mathbb{D}) \end{tikzcd}$
(ci-dessus) Si $f \in \mathbb{H}\mathfrak{a}$, alors $\phi(f)$ est ouvert	(ci-dessus) Si $f \in \mathfrak{Hey}$, alors $(\Phi(F)^*, \Phi(F)_*)$ est ouvert
$\begin{tikzcd} D \arrow[r, tail, "\uparrow_D(\cdot)"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \mathfrak{F}D \arrow[d, dotted, "\hat{\alpha}"] \\ & L \end{tikzcd}$ $L \in \lvert \bigwedge - \mathbb{S}\mathbb{l} \rvert, \alpha \in \wedge - \mathbb{S}\mathbb{l}$ $\hat{\alpha} \in \bigwedge - \mathbb{S}\mathbb{l}$	$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, tail, "{[\cdot]_\mathbb{C}}"] \arrow[dr, "M"'] & \Lambda\mathbb{C} \arrow[d, "\hat{M}"] \\ & \mathcal{F} \end{tikzcd}$ $\mathcal{F} \in \lvert \bigwedge - \mathbb{L}\mathbb{ex} \rvert, M \in \mathbb{L}\mathbb{ex}$ $\hat{M} \in \bigwedge - \mathbb{L}\mathbb{ex}$
$\begin{tikzcd} D \arrow[r, tail, "\uparrow_D(\cdot)"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \mathfrak{F}D \arrow[d, dotted, "\hat{\alpha}"] \\ & L \end{tikzcd}$ $L \in \lvert \mathbb{co} - \mathbb{Frm} \rvert, \alpha \in \mathbb{Lat}$ $\hat{\alpha} \in \mathbb{co} - \mathbb{Frm}$	$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, tail, "{[\cdot]_\mathbb{C}}"] \arrow[dr, "M"'] & \Lambda\mathbb{C} \arrow[d, "\hat{M}"] \\ & \mathcal{F} \end{tikzcd}$ $\mathcal{F} \in \lvert \bigwedge - \mathfrak{Coh} \rvert, M \in f - \mathbb{Mod}(\mathbb{C}, \mathcal{F})$ $\hat{M} \in \bigwedge - \mathfrak{Coh}$

logique propositionnelle (*suite...*)	**logique du 1er ordre** (*suite...*)
$\begin{tikzcd} D \arrow[r, tail, "\downarrow_D(\cdot)"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \mathfrak{J}D \arrow[d, dotted, "\breve{\alpha}"] \\ & L \end{tikzcd}$ $L \in \lvert\mathbb{Frm}\rvert, \alpha \in \mathbb{Lat}$ $\hat{\alpha} \in \mathbb{Frm}$	$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, tail, "y_{\mathbb{C}}"] \arrow[dr, "M"'] & \mathcal{B}(\mathbb{C}) \arrow[d, "M^*"] \\ & \mathcal{F} \arrow[u, dotted, bend left, "M_*"] \end{tikzcd}$ $\mathcal{F} \in \lvert\mathfrak{Top}\rvert, M \in \mathfrak{Coh}$ $(M^*, M_*) \in \mathfrak{Geom}(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$
$\begin{tikzcd} D \arrow[r, tail, "\downarrow_D(\cdot)"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \mathfrak{J}D \arrow[d, dotted, "\breve{\alpha}"] \\ & L \end{tikzcd}$ $L \in \lvert\mathbb{Cd}\rvert, \alpha \in \mathbb{co} - \mathbb{Frm}$ $\hat{\alpha} \in \bigvee\bigwedge - \mathbb{Lat}$	$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, tail, "y_{\mathbb{C}}"] \arrow[dr, "M"'] & \mathcal{B}(\mathbb{C}) \arrow[d, "M^*"] \\ & \mathcal{F} \arrow[u, dotted, bend left, "M_*"] \end{tikzcd}$ $\mathcal{F} \in \lvert\mathbb{Cd} - \mathfrak{Top}\rvert, M \in \bigwedge - \mathfrak{Coh}$ $(M^*, M_*) \in \bigwedge - \mathfrak{Geom}(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$
$\begin{tikzcd} D \arrow[r, tail, "i_D"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \phi D \arrow[d, dotted, "\bar{\alpha}"] \\ & L \end{tikzcd}$ $L \in \lvert\mathbb{Cd}\rvert, \alpha \in \mathbb{Lat}$ $\hat{\alpha} \in \bigvee\bigwedge - \mathbb{Lat}$	$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, tail, "I_{\mathbb{C}}"] \arrow[dr, "M"'] & \Phi\mathbb{C} \arrow[d, "M^*"] \\ & \mathcal{F} \end{tikzcd}$ $\mathcal{F} \in \lvert\mathbb{Cd} - \mathfrak{Top}\rvert, M \in f - \mathbb{Mod}(\mathbb{C}, \mathcal{F})$ $(M^*, M_*) \in \bigwedge - \mathfrak{Geom}(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$

Il y a eu en effet un certain processus de généralisation qui semble avoir fonctionné jusqu'à présent avec la construction du topos des filtres. Pourrons-nous en faire autant avec la généralisation du double dual ? Posons ouvertement la question : Quelle est la construction analogue au double dual pour la logique du premier ordre ? La réponse à cette question ne semblait pas évidente avant que j'essaie de démontrer que le topos des types de Makkai [23] est un sous-topos ouvert dense du topos des filtres. Par cette raison, ainsi que par diverses autres que nous observerons dans les chapitres ultérieurs, nous verrons ce qui nous menât à penser que le candidat idéal pour la généralisation du double dual est le topos des types $\mathcal{T}(\mathbb{C})$. Le prochain chapitre est dédié à son étude.

Chapitre 4

LE TOPOS DES TYPES DE MAKKAI

4.1. Introduction

Le topos des types, introduit par Makkai dans **[23]**, est un topos de Grothendieck qui est un candidat idéal pour la généralisation de la situation qu'on retrouve dans le cas de la logique propositionnelle pour le double dual. Dans ce chapitre, nous allons introduire ce topos en suivant la construction originale de Makkai et nous nous contenterons de citer les résultats principaux qu'il démontre dans son article. En effet, contrairement au topos des filtres, les preuves détaillées de tous ces résultats sont incluses dans l'article **[23]**. Nous donnerons ensuite une autre construction pour ce topos qui est aussi suggérée par Makkai dans son article et que nous utiliserons subséquemment comme un outil pour raisonner sur le topos des types et en donner de nouvelles propriétés. L'avantage premier de cette autre construction est que le site qui l'engendre se définit sur $\Lambda\mathbb{C}$ et nous pourrons donc tirer le maximum de notre expérience avec $\Lambda\mathbb{C}$ pour raisonner avec le topos des types.

4.2. Construction du topos des types

La catégorie sur laquelle on définit le site dont résulte le topos des types est très semblable à la catégorie des filtres que nous avons utilisée pour définir le topos des filtres. Au lieu de considérer tous les filtres nous ne tenons compte que des filtres premiers.

DÉFINITION 4.2.1 **(La catégorie des types $\tau\mathbb{C}$)** *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie cohérente (on pourrait supposer simplement que $\mathbb{C}$ est régulière). La catégorie des types : $\tau\mathbb{C}$ a comme objets des paires (X,p) où $X \in |\mathbb{C}|$ et p est un filtre premier sur $\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(X)$. Donnons-nous maintenant deux objets dans $\tau\mathbb{C}$: (X,p) et (Y,q) et définissons ce qu'est un morphisme de $(X,p) \longrightarrow (Y,q)$ dans la catégorie $\tau\mathbb{C}$. Premièment, pour $A \in p$ nous dirons qu'un morphisme $\alpha : A \longrightarrow Y$ de $\mathbb{C}$ est admissible comme morphisme de (X,p) vers (Y,q) si*

$$\forall B \in \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(Y) \quad (B \in q \Longrightarrow \alpha^*(B) \in p)$$

où α^* est simplement le pull-back le long de α. Soient $A, A' \in p$, $\alpha : A \longrightarrow Y$ et $\alpha' : A' \longrightarrow Y$ deux morphismes admissibles de (X,p) vers (Y,q). On dit que α et α' sont équivalents si il existe un $A'' \in p$ tel que $A'' \leq A \wedge A'$ et $\alpha|A'' = \alpha'|A''$. Un morphisme de $\tau\mathbb{C}$ est une classe d'équivalence de morphismes admissibles. Si $A \in p$ et $\alpha : A \longrightarrow Y$ est admissible de (X,p) vers (Y,q), nous noterons par

$$[\alpha] : (X,p) \longrightarrow (Y,q)$$

la classe d'équivalence de α.

Notons que dans son article, Makkai note cette dernière catégorie $\mathcal{P}$ et la nomme "the category of prime filters of $\mathbb{C}$". Nous pouvons voir cette catégorie comme la catégorie des types de $\mathbb{C}$ (c'est justement ce qui justifie la notation $\tau\mathbb{C}$). Donné un modèle $M : \mathbb{C} \longrightarrow \mathfrak{Ens}$, $X \in |\mathbb{C}|$ et $x \in M(X)$ on appelle le type de x pour M l'ensemble de sous-objets de X suivant :

$$t_X(x,M) \equiv \{A \in \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(X) \mid x \in M_X(A)\}$$

C'est un filtre premier sur $\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(X)$. On voit ainsi pourquoi on appelle $\tau\mathbb{C}$ la catégorie des types de $\mathbb{C}$.

Sur cette catégorie des types, Makkai définit une base pour une topologie de Grothendieck. On remarque que la catégorie des types n'a pas de limites finies comme la catégorie des filtres. Ainsi, la notion de base pour une topologie de Grothendieck doit être adaptée en conséquence pour que la topologie engendrée soit simple à décrire. Donnons dès maintenant cette définition de base généralisée.

DÉFINITION 4.2.2 **(Base pour les topologies sur les sites sans limites finies)** *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie quelconque. Une base K pour une topologie de Grothendieck sur $\mathbb{C}$ est la donnée pour chaque $C \in |\mathbb{C}|$ d'une famille $K(C)$ de recouvrements de C (qui sont des ensembles de morphismes ayant comme co-domaine C déclarés comme couvrant) et ces déclarations doivent satisfaire les propriétés suivantes :*

i. $\{1_C : C \longrightarrow C\} \in K(C)$

ii. Si $\{C_i \xrightarrow{f_i} C\}_{i\in I} \in K(C)$ *et* $g : D \longrightarrow C$*, alors il existe une famille* $\{D_i \xrightarrow{g_i} D\}_{i\in I} \in K(D)$ *telle que pour tout* $i \in I$ *il existe un* $j \in I$ *et un morphisme* $h : D_i \longrightarrow C_j$ *tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} C_j \arrow[r, "f_j"] & C \\ D_i \arrow[u, dashed, "h"] \arrow[r, "g_i"'] & D \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

iii. Si $\{C_i \xrightarrow{f_i} C\}_{i\in I} \in K(C)$ *et si quel que soit* $i \in I$ *on a* $\{D_{ij} \xrightarrow{g_{ij}} C_i\}_{j\in J_i} \in K(C_i)$*, alors*

$$\{D_{ij} \xrightarrow{f_i \circ g_{ij}} C\}_{i\in I,\, j\in J_i} \in K(C)$$

Nous pouvons maintenant énoncer la topologie de Makkai sur la catégorie des types. La base que Makkai décrit est très simple : elle est formée des singletons couvrants. Pour les besoins de cette définition, si $[\alpha] : (X,p) \longrightarrow (Y,q) \in \tau\mathbb{C}$, nous allons réutiliser la notation pour les images :

$$\alpha(p) \equiv \{B \in \mathrm{S}_{\mathbb{C}}(Y) \mid \alpha^*(B) \in p\}$$

On remarque que si p est un filtre premier, alors $\alpha(p)$ en est aussi un.

DÉFINITION 4.2.3 **(Topologie de Makkai sur $\tau\mathbb{C}$)** *La topologie de Makkai sur $\tau\mathbb{C}$, par la suite notée $\mathcal{T}_{M_p}$, est donnée par la base suivante :*

i. $\emptyset \in \mathcal{T}_{M_p}(\mathbf{0}_{\tau\mathbb{C}})$ *(où $\mathbf{0}_{\tau\mathbb{C}}$ est l'objet initial de $\tau\mathbb{C}$).*

ii. Si $[\alpha] : (X,p) \longrightarrow (Y,q) \in \tau\mathbb{C}$ *satisfait* $\alpha(p) = q$*, alors* $\{[\alpha]\} \in \mathcal{T}_{M_p}$.

On appelle le site $(\tau\mathbb{C}, \mathcal{T}_{M_p})$ le site des types existentiels de Makkai. De plus, si nous voulons faire explicitement référence à un recouvrement basique, nous notons $\mathcal{T}_{M0}$ la base pour la topologie de Makkai.

Vérifions qu'on a bien défini une base au sens donné ci-dessus à la définition 4.2.2.

PROPOSITION 4.2.1 **($\mathcal{T}_{M0}$ est une base)** *La topologie de Makkai sur $\tau\mathbb{C}$, telle que définie ci-dessus, est une base pour une topologie de Grothendieck sur $\tau\mathbb{C}$.*

PREUVE: On vérifie que $\mathcal{T}_{M0}$ satisfait les propriétés de la définition 4.2.2.

(i) Clairement, puisque $1_X(p) = p$ on a que

$$\{(X,p) \xrightarrow{[1_X]} (X,p)\} \in \mathcal{T}_{M0}(X,p)$$

pour chaque $(X,p) \in |\tau\mathbb{C}|$.

(ii) Supposons que $\{(Y,q) \xrightarrow{[\alpha]} (X,p)\} \in \mathcal{T}_{M0}(X,p)$ (i.e. $\alpha(q) \subseteq p$) et que

$$(Z,r) \xrightarrow{[\beta]} (X,p) \in \tau\mathbb{C}$$

est un morphisme quelconque. On cherche un morphisme couvrant

$$\{(W,s) \xrightarrow{[\alpha']} (Z,r)\} \in \mathcal{T}_{M0}(X,p)$$

(i.e. on veut que $\alpha'(s) \subseteq r$) qui se factorise par α. Considérons le produit fibré suivant dans la catégorie des filtres $\Lambda\mathbb{C}$:

$$\begin{tikzcd}
(Y,q) \arrow[r, "{[\alpha]}"] & (X,p) \\
(P,\pi) \arrow[u, dotted, "{[\beta']}"] \arrow[r, "{[\alpha']}"'] & (Z,r) \arrow[u, "{[\beta]}"']
\end{tikzcd}$$

En effet, on se rappelle que la catégorie $\Lambda\mathbb{C}$ est cohérente et possède donc des produits fibrés. De plus, les images sont stables par produit fibré : c'est la condition de Beck-Chevalley. Donc, on a de bonnes raisons de penser que le $[\alpha']$ donné dans le diagramme précédent est aussi couvrant, comme voulu. Rappelons-nous la construction des produits fibrés dans $\Lambda\mathbb{C}$. Dans le diagramme, $P \equiv Y \times_X Z$ et

$$\pi \equiv \mathfrak{F}(\alpha'^*)(r) \wedge \mathfrak{F}(\beta'^*)(q)$$

Montrons que $\alpha'(\pi) \subseteq r$.

$$\begin{aligned}
C \in \alpha'(\pi) &\Longrightarrow \alpha'^*(C) \in \pi \\
&\Longrightarrow \exists R \in r \exists Q \in q \quad \alpha'^*(C) \geq \alpha'^*(R) \wedge \beta'^*(Q) \\
&\Longrightarrow \exists R \in r \exists Q \in q \quad C \geq \exists_{\alpha'} \left(\alpha'^*(R) \wedge \beta'^*(Q)\right) \\
&\Longrightarrow \exists R \in r \exists Q \in q \quad C \geq R \wedge \exists_{\alpha'} \left(\beta'^*(Q)\right) \\
&\Longrightarrow \exists R \in r \exists Q \in q \quad C \geq R \wedge \beta^* \left(\exists_\alpha(Q)\right) \qquad (*)
\end{aligned}$$

Remarquons que le passage de la ligne $(*)$ se justifie avec la condition de Beck-Chevalley qui prévaut dans $\mathbb{C}$ et qui nous donne la commutativité de

$$\begin{tikzcd} \mathbf{S}(Y) \arrow[r, "\exists_\alpha"] \arrow[d, "\beta'^*"'] & \mathbf{S}(X) \arrow[d, "\beta^*"] \\ \mathbf{S}(P) \arrow[r, "\exists_{\alpha'}"'] & \mathbf{S}(Z) \end{tikzcd}$$

Mais comme $Q \in q$ on a $\exists_\alpha(Q) \in p$ (en effet, $Q \leq \alpha^*(\exists_\alpha(Q))$, d'où $\exists_\alpha(Q) \in \alpha(q) \subseteq p$). Ainsi, $\beta^*(\exists_\alpha(Q)) \in r$ car β est admissible de $(Z, r) \xrightarrow{[\beta]} (X, p)$. Reprenons maintenant le cheminement que nous avions laissé à la ligne $(*)$. Nous avions vu que $C \geq R \wedge \beta^*(\exists_\alpha(Q))$. Ainsi, nous avons bien $C \in r$ car $R \in r$ et $\beta^*(\exists_\alpha(Q)) \in r$. Donc, $\alpha'(\pi) \subseteq r$.

Comme π n'est pas premier en général nous allons utiliser le théorème d'existence des filtres premiers pour l'étendre à un filtre premier tout en préservant sa propriété de couverture. On pose

$$I \equiv \downarrow \{\alpha'^*(C) \mid C \in \mathbf{S}(Z) \setminus r\}$$

I est un idéal sur $\mathbf{S}(P)$. En effet, I est clairement fermé inférieurement et en plus :

$$\begin{aligned} E, E' \in I &\Longrightarrow \exists C \in \mathbf{S}(Z) \setminus r \; \exists C' \in \mathbf{S}(Z) \setminus r \;\; E \leq \alpha'^*(C), E' \leq \alpha'^*(C') \\ &\Longrightarrow \exists C \in \mathbf{S}(Z) \setminus r \; \exists C' \in \mathbf{S}(Z) \setminus r \;\; E \vee E' \leq \alpha'^*(C) \vee \alpha'^*(C') \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \alpha'^*(C \vee C') \\ &\Longrightarrow E \vee E' \in I \end{aligned}$$

car les supréma sont stables sous les produits fibrés.

On a aussi $I \cap \pi = \emptyset$. En effet,

$$\begin{aligned} E \in I \cap \pi \iff & \exists R \in r \; \exists Q \in q \;\; \alpha'^*(R) \wedge \beta'^*(Q) \leq E \\ & \exists C \in \mathbf{S}(Z) \setminus r \;\; E \leq \alpha'^*(C) \end{aligned}$$

Mais on a alors :

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\alpha'^*(R) \wedge \beta'^*(Q) \leq \alpha'^*(C)}{\exists_{\alpha'}(\alpha'^*(R) \wedge \beta'^*(Q)) \leq C}}{R \wedge \exists_{\alpha'}(\beta'^*(Q)) \leq C}}{R \wedge \beta^*(\exists_\alpha(Q)) \leq C}$$

et comme nous l'avons vu précédamment ceci entraîne que $C \in r$, une contradiction.

Nous pouvons maintenant appliquer le théorème d'existence des filtres premiers qui nous dit qu'il existe un filtre premier $s \in \mathcal{P}_r(P)$ tel que $\pi \subseteq s$ et $s \cap I = \emptyset$. De plus, on a $\alpha'(s) \subseteq r$ car

$$\begin{array}{cl} C \in \alpha'(s) & \\ \hline \alpha'^*(C) \in s & \\ \hline \alpha'^*(C) \notin I & \downarrow \\ \hline C \ni \mathbf{S}(Z) \setminus r & \downarrow \\ \hline C \in r & \downarrow \end{array}$$

et on a donc bien montré que $[\alpha'] : (P, s) \longrightarrow (Z, r)$ est couvrant.

(iii) On suppose maintenant que $\{(Y, q) \xrightarrow{[\alpha]} (X, p)\} \in \mathfrak{T}_{Mo}(X, p)$ ainsi que

$$\{(Z, r) \xrightarrow{[\beta]} (Y, q)\} \in \mathfrak{T}_{Mo}(Y, q)$$

Montrons que

$$\{(Z, r) \xrightarrow{[\alpha]\circ[\beta]} (X, p)\} \in \mathfrak{T}_{Mo}(X, p)$$

On suppose que les deux morphismes sont totaux de telle sorte que $[\alpha] \circ [\beta] \equiv [\alpha \circ \beta]$. Nous montrons que $(\alpha \circ \beta)(r) \subseteq p$.

$$\begin{aligned} A \in (\alpha \circ \beta)(r) &\iff (\alpha \circ \beta)^*(A) \in r \\ &\iff \beta^* \left(\alpha^* A\right) \in r \\ &\iff \alpha^*(A) \in \beta(r) \\ &\iff \alpha^*(A) \in q && \text{car } \beta(r) = q \\ &\iff A \in \alpha(q) \\ &\iff A \in p && \text{car } \alpha(q) = p \end{aligned}$$

∎

Nous avons vu que la topologie de Makkai sur la catégorie $\tau\mathbb{C}$ est engendrée par les singletons couvrants. Nous verrons plus loin que cette topologie est induite par une topologie plus fine sur la catégorie des filtres en entier. Mais avant d'aborder cette autre topologie regardons les conséquences que Makkai tire de ces définitions. Tout d'abord, définissons formellement le topos des types de Makkai.

DÉFINITION 4.2.4 **(Le topos des types)** *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie cohérente. Le topos des types de $\mathbb{C}$: $\mathcal{T}(\mathbb{C})$ est le topos des faisceaux sur le site des types existentiels $\tau\mathbb{C}$ i.e. $\mathcal{T}(\mathbb{C}) \equiv Sh(\tau\mathbb{C}, \mathfrak{T}_{M_p})$*

Nous devons maintenant regarder comment $\mathbb{C}$ se plonge dans son topos des types. Regardons comment Makkai définit ce plongement.

DÉFINITION 4.2.5 **(Le plongement canonique $M_0^{\mathbb{C}}$)** *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie cohérente. Nous définissons le foncteur*

$$\mathbb{C} \xrightarrow{M_0^{\mathbb{C}}} \mathfrak{Ens}^{\tau\mathbb{C}^{op}}$$

en associant à $X \in |\mathbb{C}|$ le pré-faisceau :

$$M_0^{\mathbb{C}}(X) : (\tau\mathbb{C})^{op} \longrightarrow \mathfrak{Ens}$$

qui envoie (Y, q) sur l'ensemble des germes de morphisme de (Y, q) dans X i.e. :

$$M_0^{\mathbb{C}}(X)(Y, q) \equiv \{(Y, q) \xrightarrow{[\alpha]} X \mid B \xrightarrow{\alpha} X \in \mathbb{C} \;\; B \in q\}$$

et qui envoie $(Z, r) \xrightarrow{[\beta]} (Y, q)$ sur la fonction qui associe à un germe $(Y, q) \xrightarrow{[\alpha]} X$ le germe

$$[\alpha] \circ [\beta] : (Z, r) \longrightarrow X$$

De plus, étant donné $X \xrightarrow{f} X' \in \mathbb{C}$ nous définissons une transformation naturelle :

$$M_0^{\mathbb{C}}(X) \xrightarrow{M_0^{\mathbb{C}}(f)} M_0^{\mathbb{C}}(X')$$

en envoyant à l'étage (Y, q) un germe $(Y, q) \xrightarrow{[\alpha]} X$ sur $(Y, q) \xrightarrow{[f \circ \alpha]} X'$.

Notons qu'un germe de morphisme $(Y, q) \xrightarrow{\alpha} X$ est simplement une classe d'équivalence de morphismes $B \xrightarrow{\alpha} X \in \mathbb{C}$ (où $B \in q$) pour la relation d'équivalence préalablement définie pour les morphismes dans $\tau\mathbb{C}$. La seule différence avec la notion de morphisme est qu'on ne demande pas à α d'être admissible : nous prenons tous les α possibles en considération.

Le résultat principal de [23] est la propriété universelle du topos des types pour les p-modèles dans un topos engendré par ses éléments premiers. La notion de p-modèle est la même que celle de f-modèle (voir définition 3.6.2) sauf que la condition n'est imposée au modèle que pour les filtres premiers. Donnons donc cette définition.

DÉFINITION 4.2.6 **(p-modèle)** *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie cohérente, $\mathcal{F}$ une catégorie cohérente dans laquelle les treillis de sous-objets possèdent des infima arbitraires. Un foncteur cohérent $\mathbb{C} \xrightarrow{M} \mathcal{F}$ est un p-modèle si pour chaque $C \xrightarrow{\alpha} D \in \mathbb{C}$ et pour chaque filtre premier p sur $\mathrm{S}_{\mathbb{C}}(C)$, on a que*

$$\exists_{M\alpha}\left(\bigwedge_{A \in p} M_C A\right) = \bigwedge_{A \in p} \exists_{M\alpha}(M_C A)$$

La propriété fondamentale des p-modèles se résume dans la proposition suivante. Avant de l'énoncer, rappelons-nous le foncteur $\hat{M}$ des lemmes 3.6.1 et 3.6.2. On restreint ce foncteur à la catégorie $\tau\mathbb{C}$. On a alors la propriété suivante.

PROPOSITION 4.2.2 **(Propriété fondamentale des p-modèles)** *Un modèle $\mathbb{C} \xrightarrow{M} \mathcal{F}$ est un p-modèle si et seulement si*

$$\forall X \xrightarrow{\alpha} Y \in \mathbb{C}\ \forall p \in \mathcal{P}_{\mathrm{r}}(X)\ \ \widehat{M}\left((X,p) \xrightarrow{[\alpha]} (Y, \alpha(p))\right)$$

est un épimorphisme dans $\mathcal{F}$.

PREUVE: Soit $X \xrightarrow{\alpha} Y \in \mathbb{C}$ et $p \in \mathcal{P}_{\mathrm{r}}(X)$. Par définition de $\hat{M}$, l'image de

$$\widehat{M}\left((X,p) \xrightarrow{[\alpha]} (Y, \alpha(p))\right)$$

dans $\mathcal{F}$ est

$$\exists_{M\alpha}\left(\bigwedge_{A \in p} M_X A\right)$$

Ainsi, si M est un p-modèle on a que

$$\begin{aligned}
\exists_{M\alpha}\left(\bigwedge_{A \in p} M_X A\right) &= \bigwedge_{A \in p} \exists_{M\alpha}(M_X A) \\
&= \bigwedge_{A \in p} M_Y(\exists_\alpha A) \\
&= \bigwedge_{B \in \alpha(p)} M_Y B
\end{aligned}$$

car $\alpha(p)$ ne contient que des $B \geq \exists_\alpha A$. Ainsi on a bien montré que $\hat{M}[\alpha]$ est épi dans $\mathcal{F}$.

Inversement, si $\hat{M}[\alpha]$ est épi dans $\mathcal{F}$ pour tous les choix possibles de α et p, alors cela veut précisément dire par le calcul précédent que M est un p-modèle.
∎

Nous voyons que la notion de p-modèle vient jouer le même rôle que la notion de f-modèle a joué dans le chapitre 3 : elle sert à rendre le foncteur $\hat{M}$ continu.

Le foncteur $M_0^{\mathbb{C}}$ que nous avons défini plus haut nous donne notre premier exemple de p-modèle. La proposition suivante énonce ce fait.

PROPOSITION 4.2.3 **($M_0^{\mathbb{C}}$ est un p-modèle)** *Soit C une catégorie cohérente. Le foncteur $M_0^{\mathbb{C}}$ de la définition 4.2.5 envoie les objets de $\mathbb{C}$ sur des faisceaux dans $\mathfrak{Ens}^{\tau\mathbb{C}^{op}}$ pour la topologie $\mathfrak{T}_{M_p}$ sur $\tau\mathbb{C}$. Ainsi,*

$$M_0^{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{T}(\mathbb{C})$$

De plus, $M_0^{\mathbb{C}}$ est un p-modèle de $\mathbb{C}$.

Connaissons nous d'autres exemples de p-modèles ? Est-ce que cette restriction sur la classe des modèles de $\mathbb{C}$ est trop exigeante ? Makkai répond à cette question en considérant les modèles "classiques" de $\mathbb{C}$ dans le topos des ensembles. Il trouve une condition suffisante pour qu'un tel modèle soit un p-modèle. Voilà la proposition qu'il démontre.

PROPOSITION 4.2.4 **(Les modèles $\aleph_0$-saturés sont des p-modèles)** *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie cohérente. Si $M : \mathbb{C} \longrightarrow \mathfrak{Ens}$ est un modèle $\aleph_0$-saturé, alors M est un p-modèle.*

La notion classique de modèle $\aleph_0$-saturé se trouve dans [4]. Un modèle de $M : \mathbb{C} \longrightarrow \mathfrak{Ens}$ est simplement un foncteur cohérent. Mais Makkai/Reyes nous expliquent dans [27] comment ces modèles correspondent à des modèles classiques de $T_{\mathbb{C}}$: la théorie syntaxique de la catégorie $\mathbb{C}$. Donc, par définition, un modèle $M : \mathbb{C} \longrightarrow \mathfrak{Ens}$ sera $\aleph_0$-saturé si le modèle correspondant de $T_{\mathbb{C}}$ l'est.

Nous savons que la notion de modèle $\aleph_0$-saturé n'est pas une notion très restrictive car tout modèle de $\mathbb{C}$ peut être étendu à un modèle $\aleph_0$-saturé. Ainsi les notions de p-modèle et de f-modèle sont acceptables pour travailler sans trop de contraintes avec ces outils.

Avant d'énoncer le résultat principal de l'article de Makkai nous avons besoin de définir une classe de topos qui est analogue à la notion de treillis engendré par ses éléments complètement premiers : les topos engendrés par leurs éléments premiers. Donnons tout d'abord une définition d'objet premier sur un site.

DÉFINITION 4.2.7 **(Objet premier dans un site)** *Soit $(\mathbb{C}, \mathfrak{T}_{\mathbb{C}})$ un site. Un objet $X \in |\mathbb{C}|$ est dit premier si pour toute famille de morphismes*

$$\{X_i \xrightarrow{f_i} X\}_{i \in I}$$

telle que $\{f_i\}_{i \in I} \in \mathfrak{T}_{\mathbb{C}}$ il existe un $i \in I$ telle que le le singleton $\{X_i \xrightarrow{f_i} X\} \in \mathfrak{T}_{\mathbb{C}}$.

Dans un topos $\mathcal{E}$ nous avons toujours la topologie canonique (formée des familles épimorphiques). Dans ce contexte, un objet $E \in |\mathcal{E}|$ est premier si il est premier pour la topologie canonique. Un topos de Grothendieck est engendré par ses éléments premiers si il possède une famille de générateurs premiers.

Nous connaissons beaucoup d'exemples de topos engendrés par leurs éléments premiers. En particulier, tout topos de pré-faisceaux est engendré par ses éléments premiers. En effet, les représentables y sont complètement $\bigvee$-irréductibles et forment une famille de générateurs (voir **[19]**). Dans un topos engendré par ses éléments premiers, le treillis des sous-objets d'un objet est engendré par ses éléments complètement premiers. Le resultat suivant nous dit que le topos des types est un topos engendré par ses éléments premiers.

PROPOSITION 4.2.5 **(Le topos des types est engendré par ses éléments premiers)** *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie cohérente. Le topos des types de $\mathcal{T}(\mathbb{C})$ est engendré par ses éléments premiers.*

Énonçons maintenant le résultat principal de **[23]** qui est l'analogue du résultat propositionnel donné à la proposition 1.2.7.

THÉORÈME 4.2.1 **(Propriété universelle de $\mathcal{T}(\mathbb{C})$ parmis les p-modèles dans un topos engendré par ses éléments premiers)** *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie cohérente, $\mathcal{F}$ un topos engendré par ses éléments premiers. Pour tout p-modèle $M : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{F}$ il existe un unique morphisme géométrique*

$$(M^*, M_*) : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{T}(\mathbb{C})$$

préservant les infima arbitraires tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "M_0^{\mathbb{C}}"] \arrow[dr, "M"'] & \mathcal{T}(\mathbb{C}) \arrow[d, "M^*"] \\ & \mathcal{F} \end{tikzcd}$$

Nous donnons, comme nous l'avions fait pour la propriété quasi-universelle du topos des filtres, une forme un peu plus explicite pour ce dernier résultat.

COROLLAIRE 4.2.1 **(Forme plus explicite pour la propriété universelle de $\mathcal{T}(\mathbb{C})$)** *Si $\bigwedge -\mathsf{Geom}(\mathcal{F}, \mathcal{T}\mathbb{C})$ dénote la catégorie des morphismes géométriques pour lesquels la partie image inverse préserve les infima arbitraires et $p-\mathsf{Mod}(\mathbb{C}, \mathcal{F})$ dénote la catégorie des p-modèles de $\mathbb{C}$ dans $\mathcal{F}$, alors la composition avec $M_0^{\mathbb{C}}$ donne une équivalence de catégories :*

$$\bigwedge -\mathsf{Geom}(\mathcal{F}, \mathcal{T}\mathbb{C}) \xrightarrow{(\cdot)\circ M_0^{\mathbb{C}}} p-\mathsf{Mod}(\mathbb{C}, \mathcal{F})$$

Dans la prochaine section, nous allons étendre cette propriété universelle à une classe plus grande de topos, comme nous l'avons fait dans le cas propositionnel. Le théorème 4.2.1 deviendra un cas particulier de notre résultat.

4.3. UNE APPROCHE DIFFÉRENTE AU TOPOS DES TYPES

Nous étudions dans la présente section une autre construction pour le topos des types. Cette approche est suggérée par Makkai dans [**23**]. Nous allons dans ce qui suit donner une topologie sur $\Lambda\mathbb{C}$ qui donne lieu au même topos des types, introduit dans la section précédente.

Commençons par remarquer que la catégorie $\tau\mathbb{C}$ est une sous-catégorie pleine de $\Lambda\mathbb{C}$. En effet, ces deux catégories ont essentiellement les même morphismes et les objets de $\tau\mathbb{C}$ sont clairement les objets de $\Lambda\mathbb{C}$ pour lesquels les filtres sont premiers. Définissons maintenant la topologie de Makkai sur $\Lambda\mathbb{C}$:

DÉFINITION 4.3.1 **(La topologie $\mathfrak{T}_M$)** *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie cohérente. On déclare qu'une famille de morphismes de $\Lambda\mathbb{C}$ est couvrante pour la topologie de Makkai sur $\Lambda\mathbb{C}$: $\mathfrak{T}_M$ i.e.*

$$\{(X_i, f_i) \xrightarrow{[\alpha_i]} (X, f)\}_{i \in I} \in \mathfrak{T}_M(X, f)$$

si elle a la propriété suivante :

$$\forall p \in \mathcal{P}_\mathrm{r}(X) \;\; (p \leq f \Longrightarrow \exists i \in I \; \exists q_i \in \mathcal{P}_\mathrm{r}(X_i) \;\; q_i \leq f_i \;\; \& \;\; \alpha_i(q_i) = p)$$

À l'aide du théorème d'existence des filtres premiers, nous pouvons simplifier légèrement cette définition comme le montre la proposition suivante.

PROPOSITION 4.3.1 **(Caractérisation des recouvrements de $\mathfrak{T}_M$)** *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie cohérente et $\{[\alpha_i]\}_{i \in I}$ une famille de morphismes de $\Lambda\mathbb{C}$. On a alors*

$$\{(X_i, f_i) \xrightarrow{[\alpha_i]} (X, f)\}_{i \in I} \in \mathfrak{T}_M(X, f)$$

si et seulement si

$$\forall p \in \mathcal{P}_\mathrm{r}(X) \;\; (p \leq f \Longrightarrow \exists i \in I \;\; p \leq \alpha_i(f_i))$$

PREUVE: ($\Rightarrow$) Si on suppose que les $[\alpha_i]$ sont couvrants pour $\mathfrak{T}_M$, alors par définition on a que

$$\forall p \leq f \; \exists i \in I \; \exists q_i \leq f_i \;\; \alpha_i(q_i) = p$$

où $p \in \mathcal{P}_r(X)$ et $q_i \in \mathcal{P}_r(X_i)$. Mais comme $q_i \leq f_i$ on a aussi

$$p = \alpha_i(q_i) \leq \alpha_i(f_i)$$

d'où la conclusion.

($\Leftarrow$) Soit $p \leq f$ quelconque. Par hypothèse on a qu'il existe un $i \in I$ pour lequel $p \leq \alpha_i(f_i)$. Considérons le produit fibré suivant dans $\Lambda\mathbb{C}$:

$$\begin{tikzcd}
(X_i, f_i) \arrow[r, "{[\alpha_i]}"] & (X, f) \\
(X_i, \pi) \arrow[u, "{[1_{X_i}]}"] \arrow[r, "{[\alpha_i]}"'] \arrow[ur, phantom, "\square"] & (X, p) \arrow[u, "{[1_X]}"']
\end{tikzcd}$$

Montrons que $\alpha_i(\pi) = p$:

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{A \in \alpha_i(\pi)}{\alpha_i^*(A) \in \pi \equiv \mathfrak{F}(\alpha_i^*)(p) \wedge f_i}}{\exists A' \in p\, \exists B \in f_i \;\; \alpha_i^*(A') \wedge B \leq \alpha_i^*(A)}}{\exists A' \in p\, \exists B \in f_i \;\; \exists_{\alpha_i}(\alpha_i^*(A') \wedge B) \leq A}}{\exists A' \in p\, \exists B \in f_i \;\; A' \wedge \exists_{\alpha_i} B \leq A}}{A \in p}$$

Nous avons utilisé la condition de Beck-Chevalley dans $\mathbb{C}$ pour le passage entre la quatrième et cinquième ligne. De plus, le passage de l'avant dernière ligne à la dernière ligne se démontre en remarquant que si $B \in f_i$ alors,

$$\exists_{\alpha_i} B \in \alpha_i(f_i) \subseteq p$$

car $p \leq \alpha_i(f_i)$ par hypothèse. On a donc $A' \wedge \exists_{\alpha_i} B \in p$ et on a clairement la conclusion.

Ainsi, comme

$$(X_i, \pi) \xrightarrow{[\alpha_i]} (X, p)$$

est couvrant dans $\Lambda\mathbb{C}$, nous allons étendre π à un filtre premier q tout en préservant cette propriété de couverture et nous aurons le résultat. Pour arriver à cette fin posons :

$$I \equiv \{B \in \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(X_i) \mid \exists A \in \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(X) \setminus p \;\; B \leq \alpha_i^* A\}$$

clairement, I est un idéal. De plus, $\pi \cap I = \emptyset$ car $B \in \pi \cap I$ si et seulement si

$$\exists A \in p\, \exists B' \in f_i\, \exists A' \in \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(X) \setminus p \;\; \alpha_i^*(A) \wedge B' \leq B \leq \alpha_i^*(A')$$

mais cela est impossible car on aurait :

$$\dfrac{\dfrac{\alpha_i^*(A) \wedge B' \leq \alpha_i^*(A')}{\exists_{\alpha_i}(\alpha_i^*(A) \wedge B') \leq A'}}{A \wedge \exists_{\alpha_i} B' \leq A'}$$

et comme nous l'avons vu plus haut cela impliquerait que $A' \in p$ donc on obtiendrait une contradiction.

Ainsi, puisque $\pi \cap I = \emptyset$ on a par le théorème d'existence des filtres premiers qu'il existe un filtre premier $q \in \mathcal{P}_r(X_i)$ tel que $\pi \subseteq q$ et $q \cap I = \emptyset$. Ainsi, comme $\pi \subseteq q$ on a que $[1_{X_i}]$ est admissible de (X_i, q) vers (X_i, π) et en composant avec $[\alpha_i]$ on a la situation suivante :

$$\begin{tikzcd} (X_i, q) \arrow[r, tail, "{[1_{X_i}]}"'] \arrow[rr, bend left, "{[\alpha_i]}"] & (X_i, \pi) \arrow[r, "{[\alpha_i]}"'] & (X, p) \end{tikzcd}$$

De plus, $\alpha_i(q) = p$ car comme toujours $\alpha_i(q) \leq p$ et

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \in \alpha_i(q)}{\alpha_i^*(A) \in q}}{\alpha_i^*(A) \notin I}\downarrow}{A \in p}\downarrow$$

d'où $p \leq \alpha_i(q)$ et donc $\alpha_i(q) = p$. On a donc trouvé $q \in \mathcal{P}_r(X_i)$ tel que $q \leq \pi \leq f_i$ et $\alpha_i(q) = p$, comme voulu. ∎

Avec cette nouvelle caractérisation nous allons démontrer que les familles que nous avons déclarées couvrantes dans $\mathcal{T}_M$ forment bien une base pour une topologie de Grothendieck sur $\Lambda\mathbb{C}$. Comme la catégorie $\Lambda\mathbb{C}$ a des produits fibrés, la définition de base peut être simplifiée. La définition originale de base qu'on retrouve dans **[26]** (p.221) se donne d'ailleurs sur une catégorie ayant des produits fibrés.

PROPOSITION 4.3.2 **($\mathcal{T}_M$ est une base)** *Les recouvements de $\mathcal{T}_M$ forment une base pour une topologie de Grothendieck sur $\Lambda\mathbb{C}$.*

PREUVE: Nous devons montrer les propriétés suivantes des bases sur les catégories ayant des produits fibrés :

1. $(X, f) \xrightarrow{[1x]} (X, f) \in \mathcal{T}_M(X, f)$
2. Si
$$\{(X_i, f_i) \xrightarrow{[\alpha_i]} (X, f)\}_{i \in I} \in \mathcal{T}_M(X, f)$$
et $(Y, g) \xrightarrow{[\beta]} (X, f) \in \Lambda\mathbb{C}$ alors
$$\{(P_i, \pi_i) \xrightarrow{[\alpha_i']} (Y, g)\}_{i \in I} \in \mathcal{T}_M(Y, g)$$

où cette dernière famille est obtenue en prenant les produits fibrés des $[\alpha_i]$ le long de $[\beta]$.

3. Si
$$\{(X_i, f_i) \xrightarrow{[\alpha_i]} (X, f)\}_{i \in I} \in \mathcal{T}_M(X, f)$$
et si pour chaque $i \in I$ on a
$$\{(X_{ij}, f_{ij}) \xrightarrow{[\alpha_{ij}]} (X_i, f_i)\}_{j \in J_i} \in \mathcal{T}_M(X_i, f_i)$$
alors
$$\{(X_{ij}, f_{ij}) \xrightarrow{[\alpha_i \circ \alpha_{ij}]} (X, f)\}_{\substack{i \in I \\ j \in J_i}} \in \mathcal{T}_M(X, f)$$

La première propriété est évidente. La troisième propriété est évidente selon la définition de $\mathcal{T}_M$. Montrons donc la deuxième propriété. Comme nous l'avons vu dans l'énoncé de cette propriété, nous devons considérer les produits fibrés suivants :

$$\begin{tikzcd}
(X_i, f_i) \arrow[r, "{[\alpha_i]}"] & (X, f) \\
(P_i, \pi_i) \arrow[u, "{[\beta'_i]}"] \arrow[r, "{[\alpha'_i]}"'] \arrow[ur, phantom, "\square"] & (Y, g) \arrow[u, "{[\beta]}"']
\end{tikzcd}$$

Par hypothèse les $[\alpha_i]$ sont dans $\mathcal{T}_M$. Ainsi on a
$$\forall p \leq f \ \exists i \in I \ \ p \leq \alpha_i(f_i)$$
où $p \in \mathcal{P}_{\mathrm{r}}(X)$. Nous voulons montrer que
$$\forall q \leq g \ \exists i \in I \ \ q \leq \alpha'_i(\pi_i)$$

Soit $q \leq g$ un filtre premier. On considère $\beta(q) \leq \beta(g) \leq f$ qui est un filtre premier sur X inférieur à f, donc par hypothèse il existe $i \in I$ pour lequel on a $\beta(q) \leq \alpha_i(f_i)$.

Montrons que cela implique que $q \leq \alpha'_i(\pi_i)$. En effet,

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \in \alpha'_i(\pi_i)}{\alpha'^*_i(B) \in \pi_i}}{\exists C \in f_i \ \exists B' \in g \ \ \alpha'^*_i(B') \wedge \beta'^*_i(C) \leq \alpha'^*_i(B)}}{\exists C \in f_i \ \exists B' \in g \ \ \exists_{\alpha'_i}(\alpha'^*_i(B') \wedge \beta'^*_i(C)) \leq B}}{\exists C \in f_i \ \exists B' \in g \ \ B' \wedge \exists_{\alpha'_i}(\beta'^*_i C) \leq B}$$

Mais puisque $\mathbb{C}$ est cohérente, le fait que

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "\alpha_i"] & X \\ P_i \arrow[u, "\beta'_i"] \arrow[r, "\alpha'_i"'] \arrow[ur, phantom, "\square"] & Y \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

soit un produit fibré dans $\mathbb{C}$ implique, par la condition de Beck-Chevalley, que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(X_i) \arrow[r, "\exists_{\alpha_i}"] \arrow[d, "\beta_i'^*"'] \arrow[dr, phantom, "\circ"] & \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(X) \arrow[d, "\beta^*"] \\ \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(P_i) \arrow[r, "\exists_{\alpha'_i}"'] & \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(Y) \end{tikzcd}$$

donc

$$\exists_{\alpha'_i}\left(\beta_i'^* C\right) = \beta^*\left(\exists_{\alpha_i} C\right)$$

mais comme $\exists_{\alpha_i} C \in \alpha_i(f_i)$ et nous avions vu que $\beta(q) \leq \alpha_i(f_i)$ on en conclut que $\exists_{\alpha_i} C \in \beta(q)$ d'où

$$\beta^*\left(\exists_{\alpha_i} C\right) \in q$$

Finalement, comme $B' \wedge \beta^*\left(\exists_{\alpha_i} C\right) \leq B$ on est forcé de conclure que $B \in q$ (car $B' \in g$ et $q \leq g$ d'où $B' \in q$). Ceci termine la démonstration du résultat. ∎

Nous aimerions maintenant comparer les topos de faisceaux engendrés par ces deux sites : le site original sur $\tau\mathbb{C}$ et le nouveau site sur $\Lambda\mathbb{C}$. Notre but est de démontrer que ces deux topos sont équivalents. Pour arriver à ce résultat nous devons étudier la topologie induite par $\mathcal{T}_M$ sur la sous-catégorie pleine $\tau\mathbb{C}$. Le résultat suivant démontre que cette topologie induite est précisément $\mathcal{T}_{M_p}$.

PROPOSITION 4.3.3 **(Topologie induite par $\mathcal{T}_M$ sur $\tau\mathbb{C}$)** *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie cohérente. On considère la topologie induite par le site $(\Lambda\mathbb{C}, \mathcal{T}_M)$ sur $\tau\mathbb{C} \subseteq \Lambda\mathbb{C}$. Alors cette topologie est équivalente à la topologie $\mathcal{T}_{M_p}$.*

PREUVE: Par définition de la topologie induite sur une sous-catégorie pleine d'un site nous devons montrer que pour un cribble quelconque

$$S = \{(X_i, p_i) \xrightarrow{[\alpha_i]} (X, p)\}_{i \in I}$$

on a $S \in \mathcal{T}_{M_p}(X, p)$ si et seulement si le cribble engendré par S dans $\Lambda\mathbb{C}$ est couvrant pour $\mathcal{T}_M$ i.e. $(S) \in \mathcal{T}_M$.

($\Rightarrow$) Si $S \in \mathfrak{T}_{M_p}(X,p)$, alors il existe $i_0 \in I$ pour lequel $\alpha_{i_0}(p_{i_0}) = p$. Ainsi, on a bien que

$$\forall q \leq p \, \exists i \in I \;\; q \leq \alpha_i(p_i)$$

car on peut toujours prendre $i \equiv i_0$. Donc, on a clairement $(S) \in \mathfrak{T}_M(X,p)$ (par la proposition précédente) car déjà dans S on peut trouver ce qu'il nous faut.

($\Leftarrow$) Si $(S) \in \mathfrak{T}_M(X,p)$, alors on a par la proposition précédente que

$$\forall q \leq p \, \exists (Y,g) \xrightarrow{[\alpha]} (X,p) \in (S) \;\; q \leq \alpha_i(p_i)$$

en particulier on peut prendre $q = p$ et nous pouvons supposer que le $[\alpha]$ correspondant est dans S. En effet, les morphismes de (S) sont les morphismes de $\Lambda\mathbb{C}$ qui se factorisent par un morphisme de S, donc leur image est toujours inférieure où égale à l'image des morphismes dans S. Ainsi, il existe $i_0 \in I$ tel que $p \leq \alpha_{i_0}(p_{i_0})$ donc $\alpha_{i_0}(p_{i_0}) = p$ et on en conclut que $S \in \mathfrak{T}_{M_p}$, comme nous le voulions. ∎

Le lemme de comparaison (c.f. **[21]** ou la référence originale **[26]**) nous dit précisément que si la topologie $\mathfrak{T}_M$ est sous-canonique, alors le foncteur restriction :

$$Sh(\Lambda\mathbb{C}, \mathfrak{T}_M) \longrightarrow Sh(\tau\mathbb{C}, \mathfrak{T}_{M_p})$$

est une équivalence. En fait, l'hypothèse sur la sous-canonicité de $\mathfrak{T}_M$ n'est pas nécessaire comme le montrent Kock et Moerdijk dans **[16]**. Donc, nous obtenons bien le resultat voulu :

COROLLAIRE 4.3.1 *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie cohérente. Le foncteur de restriction*

$$Sh(\Lambda\mathbb{C}, \mathfrak{T}_M) \longrightarrow Sh(\tau\mathbb{C}, \mathfrak{T}_{M_p})$$

est une équivalence de catégories. Ainsi, les deux présentations pour le topos des types sont équivalentes.

Même si nous n'avons pas eu besoin de l'hypothèse que la topologie $\mathfrak{T}_M$ est sous-canonique ; elle est tout de même vraie comme le démontre la proposition suivante.

PROPOSITION 4.3.4 **(Sous-canonicité de $\mathfrak{T}_M$)** *La topologie $\mathfrak{T}_M$ est moins fine que la topologie canonique i.e. $\mathfrak{T}_M$ est sous-canonique.*

PREUVE: Selon **[26]** (p.226) la topologie canonique est la topologie des familles épimorphiques stables et effectives. Nous savons déjà que les familles de $\mathcal{T}_M$ sont stables. Nous devons donc montrer que les familles de la base de $\mathcal{T}_M$ sont épimorphiques. Ceci est clair car si

$$\{(X_i, f_i) \xrightarrow{[\alpha_i]} (X, f)\}_{i \in I} \in \mathcal{T}_M(X, f)$$

alors

$$\begin{aligned}
\bigvee_{i \in I} \exists_{[\alpha_i]}(X_i, f_i) &= \bigvee_{i \in I} \mathfrak{F}(\exists_{\alpha_i})(f_i) \\
&= \bigvee_{i \in I} \alpha_i(f_i) \\
&= \bigcap_{i \in I} \alpha_i(f_i)
\end{aligned}$$

et clairement

$$\bigcap_{i \in I} \alpha_i(f_i) = \bigcap_{i \in I} \bigcap_{p \leq \alpha_i(f_i)} p \overset{(*)}{\geq} \bigcap_{p \leq f} p = f$$

où l'inégalité $(*)$ se justifie par le fait que puisque les $[\alpha_i]$ sont couvrants pour $\mathcal{T}_M$, chaque $p \leq f$ est aussi inférieur à un certain $\alpha_i(f_i)$. Donc, le suprema des images des $[\alpha_i]$ est (X, f). On a donc montré que les familles de $\mathcal{T}_M$ sont épimorphiques. Je laisse au lecteur le soin de vérifier quelle sont effectives. ∎

Ainsi, par ce dernier résultat, les foncteurs représentables sont des faisceaux dans $Sh(\Lambda\mathbb{C}, \mathcal{T}_M)$. Nous avons donc un foncteur plein et fidèle de $\mathbb{C}$ dans la nouvelle présentation du topos des types : $Sh(\Lambda\mathbb{C}, \mathcal{T}_M)$. En effet, ce foncteur est simplement $[\cdot]_{\mathbb{C}}$ suivi de Yoneda. Par pure analogie avec le cas propositionnel on baptise ce foncteur $E_{\mathbb{C}}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[r, hook, "{[\cdot]_{\mathbb{C}}}"'] \arrow[rr, bend left, "E_{\mathbb{C}}"] & \Lambda\mathbb{C} \arrow[r, hook, "y_{\Lambda\mathbb{C}}"'] & Sh(\Lambda\mathbb{C}, \mathcal{T}_M)
\end{tikzcd}$$

Il est donc naturel de ce demander à ce point-ci si ce E_C se compare avantageusement avec le $M_0^{\mathbb{C}}$ que Makkai a défini. La proposition suivante répond à cette question.

PROPOSITION 4.3.5 **(Comparaison entre $E_{\mathbb{C}}$ et $M_0^{\mathbb{C}}$)** *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie cohérente, le foncteur restriction fait commuter le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "E_{\mathbb{C}}"] \arrow[dr, "M_0^{\mathbb{C}}"'] & Sh(\Lambda\mathbb{C}, \mathfrak{T}_M) \arrow[d, "\simeq"] \\ & Sh(\tau\mathbb{C}, \mathfrak{T}_{M_p}) \end{tikzcd}$$

PREUVE: Le foncteur $E_{\mathbb{C}}$ envoie un objet $X \in |\mathbb{C}|$ sur

$$\mathcal{Y}_{\Lambda\mathbb{C}}([X]) = \mathbf{Hom}_{\Lambda\mathbb{C}}(-, [X])$$

qui envoie clairement un $(Y, g) \in |\Lambda\mathbb{C}|$ sur les germes de morphismes de (Y, g) dans $[X]$. En regardant la définition de $M_0^{\mathbb{C}}$ on s'apperçoit rapidement que la restriction de $\mathcal{Y}_{\Lambda\mathbb{C}}([X])$ à la sous-catégorie $\tau\mathbb{C} \subseteq \Lambda\mathbb{C}$ nous donne le même foncteur que $M_0^{\mathcal{C}}(X)$. De plus, les tranformations naturelles intervenant dans $M_0^{\mathbb{C}}$ sont clairement des restrictions d'éléments du contexte de Yoneda. $M_0^{\mathbb{C}}$ est en fait clairement un artifice utilisé pour imiter Yoneda et faire comme si l'objet X faisait partie de la catégorie $\tau\mathbb{C}$ (comme c'est le cas dans la plus complète $\Lambda\mathbb{C}$). Cette constatation démontre clairement le résultat. ∎

Nous avons maintenant assez de connexions de créées entre le topos des types et les résultats que nous avons démontrés jusqu'à maintenant pour tenter notre chance avec ces techniques et essayer de découvrir une propriété universelle étendue pour le topos des types. Cette propriété doit jouer le rôle de la proposition 1.6.2 dans le contexte de la logique du 1er ordre. Nous savons d'avance que la preuve devra être considérablement différente de celle du théorème 4.2.1 (comme il est démontré dans **[23]**). En effet, cette preuve utilise de façon intensive le fait que $\mathcal{F}$ est engendré par ses éléments premiers. Nous n'aurons malheureusement plus cette hypothèse dans nos tentatives d'extension de la propriété universelle aux topos complètement distributifs. Nous procéderons donc autrement; en suivant notre intuition du cas du topos des filtres.

4.4. EXTENSION DE LA PROPRIÉTÉ UNIVERSELLE DU TOPOS DES TYPES

Comme dans le cas du topos des filtres $\Phi\mathbb{C}$, nous sommes clairements intéressés par l'obtention d'une propriété universelle pour le topos des types $\mathcal{T}\mathbb{C}$. Mais comme la situation propositionnelle nous l'inspire, nous voudrions que le topos des types soit universel parmis les p-modèles dans les topos complètement distributifs. Il semble que cette classe de modèles soit trop vaste pour que le topos des types puisse tous les intégrer. Nous devons imposer, pour obtenir l'universalité, une condition supplémentaire sur les modèles.

DÉFINITION 4.4.1 **(m-modèle)** *Un modèle $M : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{F}$ est un m-modèle si il satisfait pour tout $X \in |\mathbb{C}|$ et tout filtre f sur X l'équation :*

$$\bigvee_{p \leq f} \bigwedge_{A \in p} M_X A = \bigwedge_{A \in f} M_X A$$

Dans bien des situations connues, se restreindre aux m-modèles n'est pas trop demander. Par exemple, lorsque le topos $\mathcal{F}$ est engendré par ses éléments premiers, cette exigence devient vide comme le démontre la proposition suivante.

PROPOSITION 4.4.1 **(m-modèles dans les topos engendrés par leurs éléments premiers)** *Si le topos $\mathcal{F}$ est engendré par ses éléments premiers, alors tout modèle*

$$\mathbb{C} \xrightarrow{M} \mathcal{F}$$

est un m-modèle.

PREUVE: Les topos engendré par leurs éléments premiers sont comme les treillis engendrés par leurs éléments premiers : nous pouvons y raisonner avec des éléments (les premiers). Pour $X \in |\mathbb{C}|$, considérons pour η un objet premier de $\mathcal{F}$ un η-élément de MX :

$$\eta \xrightarrow{\beta} MX \in \mathcal{F}$$

pour lequel on ait que

$$\beta \in \bigwedge_{A \in f} M_X A$$

c'est à dire qu'il existe un morphisme de η dans ce dernier infima qui fait commuter :

$$\begin{tikzcd} \eta \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, dotted, "\exists"'] & & MX \\ & \bigwedge_{A \in f} M_X A \arrow[ur] & \end{tikzcd} \tag{4.4.1}$$

On considère alors l'ensemble de sous-objets de X dans $\mathbb{C}$ suivant :

$$t(\beta) \equiv \left\{ A \in \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(X) : \begin{tikzcd} \eta \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, dotted, "\exists"'] & & MX \\ & M_X A \arrow[ur] & \end{tikzcd} \right\}$$

C'est ce qu'on appelle le type de l'élément β de MX. Clairement $t(\beta)$ est un filtre sur X. En effet,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A, B \in t(\beta)}{\exists_\beta \eta \leq M_X A \quad \exists_\beta \eta \leq M_X B}}{\exists_\beta \eta \leq M_X A \wedge M_X B = M_X(A \wedge B)}}{A \wedge B \in t(\beta)}$$

De plus,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vee B \in t(\beta)}{\exists_\beta \eta \leq M_X(A \vee B) = M_X A \vee M_X B}}{\exists_\beta \eta \leq M_X A \text{ ou } \exists_\beta \eta \leq M_X B}}{A \in t(\beta) \text{ ou } B \in t(\beta)} \downarrow$$

car l'image d'éléments premiers de $MX \in |\mathcal{F}|$ sont des éléments complètements premiers du treillis des sous-objets de MX et sont donc en particulier $\vee$-irréductibles. On a donc montré que $t(\beta)$ est un filtre premier sur X.

De plus, ce filtre premier contient f par le diagramme 4.4.1. Donc $t(\beta) \leq f$.

Ce filtre premier a la particularité que pour chacun de ses éléments A; l'élément β se factorise par $M_X A$. Ainsi β se factorise par

$$\widehat{M}(X, t(\beta)) \equiv \bigwedge_{A \in t(\beta)} M_X A$$

Nous avons ainsi montré que tout η-élément de $\bigwedge_{A \in f} M_X A$ est un η-élément de

$$\bigwedge_{A \in p} M_X A$$

pour un certain filtre premier $p \leq f$. Ainsi, tous les η-éléments de $\bigwedge_{A \in f} M_X A$ sont des η-éléments de

$$\bigvee_{p \leq f} \bigwedge_{A \in p} M_X A$$

L'inclusion inverse est toujours vérifiée, donc nous avons bien montré que M satisfait la condition d'un m-modèle. ∎

Si le topos $\mathcal{F}$ est engendré par ses éléments premiers, alors tout p-modèle est un m-modèle, donc cette restriction ne semble pas trop contraignante. En fait, elle nous permet d'oublier la notion de f-modèle vue dans le chapitre 3 pour la remplacer par la notion de p-modèle. La proposition suivante traite de cela.

PROPOSITION 4.4.2 **(Équivalence entre f-modèles et p-modèle sous m)** *Soit $\mathbb{C} \xrightarrow{M} \mathcal{F}$ un m-modèle alors*

$$M \;\text{ est un }\; p\text{-modèle} \iff M \;\text{ est un }\; f\text{-modèle}$$

PREUVE: Seule la direction ($\Rightarrow$) est non-triviale. Soit $X \in |\mathbb{C}|$, f un filtre sur X et $X \xrightarrow{\alpha} Y \in \mathbb{C}$. On considère le morphisme

$$(X, f) \xrightarrow{[\alpha]} (Y, \alpha(f)) \in \Lambda\mathbb{C}$$

Dire que M est un f-modèle équivaut à demander que $\hat{M}$ envoie ce dernier morphisme sur un épimorphisme dans $\mathcal{F}$. Pour démontrer ce fait on considère pour un $q \leq \alpha(f)$ premier le produit fibré suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & (X, f) \arrow[r, two heads, "{[\alpha]}"] & (Y, \alpha(f)) \\
(X, p_q) \arrow[ur] \arrow[r, tail] \arrow[rr, bend right, two heads, "{[\alpha]}"'] & (X, \pi) \arrow[u] \arrow[r, two heads, "{[\alpha]}"] \arrow[ur, phantom, "\square"] & (Y, q) \arrow[u, "{[1_Y]}"']
\end{tikzcd}$$

dans lequel on a étendu π à un filtre premier p_q tout en préservant la propriété de couverture de $[\alpha]$.

On remarque que par définition de p-modèle $\hat{M}$ envoie le morphisme courbe du bas sur un épimorphisme dans $\mathcal{F}$. De plus, comme M est un m-modèle, on a que la famille de tous les morphismes $[1_Y]$ à droite (pour tous les $q \leq \alpha(f)$) est envoyée sur une famille épimorphique dans $\mathcal{F}$.

Nous avons donc trouvé une famille épimorphique

$$\left\{\hat{M}(X,p_q)\xrightarrow{\hat{M}[\alpha]}\hat{M}(Y,\alpha(f))\right\}_{q\leq\alpha(f)}$$

dans $\mathcal{F}$ dans laquelle chaque morphisme se factorise à travers

$$\hat{M}(X,f)\xrightarrow{\hat{M}[\alpha]}\hat{M}(Y,\alpha(f))$$

donc ce dernier est un épimorphisme. ∎

La proposition suivante nous indique une propriété très pertinente dans notre situation pour les m-modèles. Nous verrons plus loin qu'elle explique la nécessité de la notion de m-modèle.

PROPOSITION 4.4.3 **(Nécessité de la condition m)** *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie cohérente et $\mathbb{C}\xrightarrow{M}\mathcal{F}$ un p-modèle de $\mathbb{C}$. Alors le foncteur $\hat{M}$ est continu pour la topologie $\mathcal{T}_M$ si et seulement si M est un m-modèle.*

PREUVE: (⇐) Soit

$$\{(X_i,f_i)\xrightarrow{[\alpha_i]}(X,f)\}_{i\in I}\in\mathcal{T}_M(X,f) \tag{4.4.2}$$

alors par définition cela veut dire que

$$\forall p\leq f\ \exists q_i\leq f_i\ \ \alpha_i(q_i)=p_i$$

c'est à dire qu'on a un diagramme commutatif de la forme :

$$\begin{tikzcd}
(X_i,f_i) \arrow[r, "{[\alpha_i]}"] & (X,f) \\
(X_i,q_i) \arrow[u, "{[1_{X_i}]}"] \arrow[r, two heads, "{[\alpha_i]}"'] \arrow[ur, phantom, "\circ"] & (X,p) \arrow[u, "{[1_X]}"']
\end{tikzcd}$$

qui est envoyé par $\hat{M}$ sur le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\hat{M}(X_i,f_i) \arrow[r, "{\hat{M}[\alpha_i]}"] & \hat{M}(X,f) \\
\hat{M}(X_i,q_i) \arrow[u, "{\hat{M}[1_{X_i}]}"] \arrow[r, two heads, "{\hat{M}[\alpha_i]}"'] \arrow[ur, phantom, "\circ"] & \hat{M}(X,p) \arrow[u, "{\hat{M}[1_X]}"']
\end{tikzcd} \tag{4.4.3}$$

et le morphisme du bas est demeuré épi car M est un p-modèle.

De plus, comme M est un m-modèle, on a que la famille suivante est envoyée sur une famille épimorphique par $\hat{M}$:

$$\{(X,p)\xrightarrow{[1x]}(X,f)\}_{p\leq f}$$

donc, pour chaque $p \leq f$ on trouve le q_i correspondant et la famille obtenue en composant les morphismes en bas et à droite dans le diagramme 4.4.3 nous donnera une famille épimorphique. Toujours en regardant le diagramme 4.4.3 on voit que les morphismes de cette denière famille se factorisent tous par les morphismes de la famille 4.4.2 transportée dans $\mathcal{F}$ par $\hat{M}$. Donc $\hat{M}$ envoie bien la famille 4.4.2 sur une famille épimorphique dans $\mathcal{F}$ i.e. $\hat{M}$ est continu pour la topologie $\mathcal{T}_M$.

($\Rightarrow$) On suppose maintenant que $\hat{M}$ est continu pour la topologie $\mathcal{T}_M$. Clairement, on a que la famille suivante est un recouvrement de $\mathcal{T}_M$:

$$\{(X,p)\xrightarrow{[1x]}(X,f)\}_{p\leq f} \in \mathcal{T}_M(X,f)$$

Ainsi, puisque $\hat{M}$ est continu on a par le calcul de la proposition 4.2.2 que

$$\bigvee_{p\leq f} \exists_{\hat{M}[\alpha]}\left(\hat{M}(X,p)\right) = \bigvee_{p\leq f}\bigwedge_{A\in p} M_X A = \bigwedge_{A\in f} M_X A$$

ce qui est clairement la définition de m-modèle. ∎

Comme nous l'avons fait dans le cas du topos des filtres nous sommes amenés à tenter de relever la situation propositionnelle à notre contexte plus général de la logique de premier ordre. Pour cela, nous devons caractériser les treillis des sous-objets d'objets qui proviennent de $\mathbb{C}$. Cette caractérisation ne se retrouve pas littéralement dans [23]. Nous utiliserons toutefois un lemme provenant directement de [23] :

LEMME 4.4.1 **(Propriétés des treillis de sous-objets dans $\mathcal{T}(\mathbb{C})$)** *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie cohérente, $C \in |\mathbb{C}|$. On a les propriétés suivantes pour le plongement $M_0^{\mathbb{C}}$ de $\mathbb{C}$ dans son topos des types :*

1. *Le treillis $\mathbf{S}_{\mathcal{T}\mathbb{C}}(M_0^{\mathbb{C}}C)$ est engendré par ses éléments complètement premiers qui sont tous de la forme $\mathcal{Y}_{\tau\mathbb{C}}(C,p)$ où $p \in \mathcal{P}_r(C)$.*
2. *Si $p \in \mathcal{P}_r(C)$, alors $\mathcal{Y}_{\tau\mathbb{C}}(C,p) = \bigwedge_{A\in p} M_0^{\mathbb{C}}{}_C A$*
3. *Si $A \in \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(C)$ et $p \in \mathcal{P}_r(C)$, alors*

$$\mathcal{Y}_{\tau\mathbb{C}}(C,p) \leq M_0^{\mathbb{C}}{}_C A \iff A \in p$$

Nous obtenons un corollaire immédiat de ce lemme.

COROLLAIRE 4.4.1 **(Transfert de l'ordre)** *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie cohérente, $C \in |\mathbb{C}|$ et $p, p' \in \mathcal{P}_\tau(C)$, alors*

$$\mathcal{Y}_{\tau\mathbb{C}}(C,p) \leq \mathcal{Y}_{\tau\mathbb{C}}(C,p') \iff p' \subseteq p$$

PREUVE: $(\Rightarrow)$

$$\begin{aligned} A \in p' &\Longrightarrow \mathcal{Y}_{\tau\mathbb{C}}(C,p') \leq M_0^{\mathbb{C}}{}_C A \\ &\Longrightarrow \mathcal{Y}_{\tau\mathbb{C}}(C,p) \leq M_0^{\mathbb{C}}{}_C A \\ &\Longrightarrow A \in p \end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$

$$p' \subseteq p \Longrightarrow \mathcal{Y}_{\tau\mathbb{C}}(C,p) = \bigwedge_{A \in p} M_0^{\mathbb{C}}{}_C A \leq \bigwedge_{A \in p'} M_0^{\mathbb{C}}{}_C A = \mathcal{Y}_{\tau\mathbb{C}}(C,p')$$

∎

Regardons maintenant la caractérisation des treillis de sous-objets d'objets provenant de $\mathbb{C}$.

PROPOSITION 4.4.4 **($\mathbf{S}_{\mathcal{T}\mathbb{C}}(M_0^{\mathbb{C}}C)$ est isomorphe à $\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(C)^{*\#}$)** *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie cohérente, $C \in |\mathbb{C}|$. Il existe un isomorphisme de treillis complets uniquement déterminé :*

$$\overline{M_0^{\mathbb{C}}} : \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(C)^{*\#} \longrightarrow \mathbf{S}_{\mathcal{T}\mathbb{C}}(M_0^{\mathbb{C}}C)$$

PREUVE: Comme $\mathbf{S}_{\mathcal{T}\mathbb{C}}(M_0^{\mathbb{C}}C)$ est engendré par ses éléments complètement premiers, il existe, par la propriété universelle du double dual, un unique morphisme de treillis complets $\overline{M_0^{\mathbb{C}}}$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(C) \arrow[r, tail, "e_{\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(C)}"] \arrow[dr, "M_0^{\mathbb{C}}{}_C"'] & \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(C)^{*\#} \arrow[d, "\overline{M_0^{\mathbb{C}}{}_C}"] \\ & \mathbf{S}_{\mathcal{T}\mathbb{C}}(M_0^{\mathbb{C}}C) \end{tikzcd}$$

On montre que $\overline{M_0^{\mathbb{C}}}$ est un isomorphisme de treillis complets. Nous avons vu dans le chapitre 1 comment $\overline{M_0^{\mathbb{C}}{}_C}$ se calcule. Alors, on a

$$\begin{aligned}\overline{M_0^{\mathbb{C}}{}_C}(X) &= \bigvee_{p\in X}\bigwedge_{A\in p} M_0^{\mathbb{C}}{}_C A \\ &= \bigvee_{p\in X} \mathcal{Y}_{\tau\mathbb{C}}(C,p)\end{aligned}$$

par le lemme précédent.

Notons par $W_X \rightarrowtail M_0^{\mathbb{C}}C$ ce sous-objet. Maintenant, donné $W \rightarrowtail M_0^{\mathbb{C}}C$ nous désirons trouver un $X_W \in \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(C)^{*\#}$ tel que les opérations :

$$\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(C)^{*\#} \underset{X_{(-)}}{\overset{W_{(-)}}{\rightleftarrows}} \mathbf{S}_{\mathcal{T}\mathbb{C}}(M_0^{\mathbb{C}}C)$$

soient inverses l'une de l'autre.

On pose bien-sûr

$$X_W \equiv \{p \in \mathcal{P}_{\mathrm{r}}(C) \mid \mathcal{Y}_{\tau\mathbb{C}}(C,p) \leq W\}$$

Clairement, X_W est une partie fermée supérieurement de $\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(C)^*$. En effet, si $p \in X_W$ et $p \leq p'$, alors par le corollaire précédent

$$\mathcal{Y}_{\tau\mathbb{C}}(C,p') \leq \mathcal{Y}_{\tau\mathbb{C}}(C,p) \leq W$$

donc $p' \in X_W$.

On a bien que $W_{X_W} = W$. En effet,

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_{\tau\mathbb{C}}(C,p) \leq W &\iff p \in X_W \\ &\iff \exists p' \in X_W \;\; p' \subseteq p \\ &\iff \exists p' \in X_W \;\; \mathcal{Y}_{\tau\mathbb{C}}(C,p) \leq \mathcal{Y}_{\tau\mathbb{C}}(C,p') \\ &\iff \mathcal{Y}_{\tau\mathbb{C}}(C,p) \leq \bigvee_{p'\in X_W} \mathcal{Y}_{\tau\mathbb{C}}(C,p') \\ &\iff \mathcal{Y}_{\tau\mathbb{C}}(C,p) \leq W_{X_W}\end{aligned}$$

Comme les $\mathcal{Y}_{\tau\mathbb{C}}(C,p)$ sont les éléments premiers de $\mathbf{S}_{\mathcal{T}\mathbb{C}}(M_0^{\mathbb{C}}C)$ on a le résultat.

On a aussi que $X_{W_X} = X$. En effet,

$$\begin{aligned}
p \in X_{W_X} &\iff \mathcal{Y}_{\mathcal{T}\mathbb{C}}(C,p) \leq W_X \\
&\iff \mathcal{Y}_{\mathcal{T}\mathbb{C}}(C,p) \leq \bigvee_{p' \in X} \mathcal{Y}_{\mathcal{T}\mathbb{C}}(C,p') \\
&\iff \exists p' \in X \;\; \mathcal{Y}_{\mathcal{T}\mathbb{C}}(C,p) \leq \mathcal{Y}_{\mathcal{T}\mathbb{C}}(C,p') \\
&\iff \exists p' \in X \;\; p' \subseteq p \\
&\iff p \in X
\end{aligned}$$

De plus, les deux applications préservent clairement l'ordre, donc on a bien affaire à un isomorphisme d'ensembles partiellement ordonnés et donc un isomorphisme de treillis complets. ∎

Nous sommes maintenant prêts à donner le résultat principal de ce chapitre soit la propriété universelle étendue du topos des types.

THÉORÈME 4.4.1 **(Propriété universelle élargie de $\mathcal{T}(\mathbb{C})$)** *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie cohérente, $\mathcal{F}$ un topos complètement distributif et $M : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{F}$ un p-modèle de $\mathbb{C}$ qui est aussi un m-modèle. Alors il existe un unique morphisme géométrique $(M^*, M_*) : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{T}(C)$ tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[r, "E_{\mathbb{C}}"] \arrow[dr, "M"'] & \mathcal{T}(\mathbb{C}) \arrow[d, "M^*"] \\
& \mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

De plus, M^* préserve les infima quelconques de sous-objets.

PREUVE: Puisque M est un p-modèle et un m-modèle on a par la proposition 4.4.3 que $\hat{M}$ est continu. Comme $\hat{M}$ est lex on a qu'il induit notre unique morphisme géométrique (M^*, M_*) faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[r, hook, "{[\cdot]_{\mathbb{C}}}"] \arrow[dr, "M"'] & \Lambda\mathbb{C} \arrow[r, hook, "\mathcal{Y}_{\Lambda\mathbb{C}}"] \arrow[d, "\hat{M}"] & \mathcal{T}(C) \arrow[dl, "M^*"] \\
& \mathcal{F} &
\end{tikzcd}$$

Nous voulons montrer que M^* préserve les infima arbitraires lorsqu'il agit sur les treillis de sous-objets. Pour montrer cela, il suffit de le faire pour les objets qui proviennent de $\mathbb{C}$ car tous les représentables sont des sous-objets d'objets qui proviennent de $\mathbb{C}$. Soit $C \in |\mathbb{C}|$ quelconque. Nous avons alors les actions suivantes des foncteurs entrant en jeu au niveau des sous-objets :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(C)^{*\#} \arrow[d, "\simeq"', "W_{(-)}=\overline{M^{\mathbb{C}}_{0}{}_C}"] \\
\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(C) \arrow[ur, "e_{\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(C)}"] \arrow[r, "M^{\mathbb{C}}_{0}{}_C"] \arrow[dr, "M_C"'] & \mathbf{S}_{\mathcal{T}\mathbb{C}}(M^{\mathbb{C}}_0 C) \arrow[d, "M^*_C"] \\
 & \mathbf{S}_{\mathcal{F}}(MC)
\end{tikzcd}$$

Nous avons vu que le triangle du haut commute à la proposition 4.4.4 et la discussion précédente nous montre bien que le triangle du bas commute.

Par la propriété universelle du double dual, puisque le treillis $\mathbf{S}_{\mathcal{F}}(MC)$ est complètement distributif, il y a un unique morphisme de treillis complets qui peut jouer le rôle de la composition des deux morphismes verticaux et ainsi faire commuter le triangle extérieur. Donc, pour montrer que la composée de ces deux morphismes préserve les infima arbitraires, il suffit de montrer qu'elle se calcule de la même façon que cet unique morphisme : $\overline{M_C}$.

On a en effet pour $X \in \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(C)^{*\#}$ que

$$\begin{aligned}
M_C^*\left(\overline{M_0^{\mathbb{C}}{}_C}(X)\right) &= M_C^*\left(\bigvee_{p\in X}\bigwedge_{A\in p} M_0^{\mathbb{C}}{}_C A\right)\\
&= \bigvee_{p\in X} M_C^*\left(\bigwedge_{A\in p} M_0^{\mathbb{C}}{}_C A\right)\\
&= \bigvee_{p\in X} M_C^*\left(\bigwedge_{A\in p} \mathfrak{y}_{\Lambda\mathbb{C}[C]}([A])\right)\\
&= \bigvee_{p\in X} M_C^*\mathfrak{y}_{\Lambda\mathbb{C}[C]}\left(\bigwedge_{A\in p}[A]\right)\\
&= \bigvee_{p\in X} M_C^*\mathfrak{y}_{\Lambda\mathbb{C}[C]}(C,p)\\
&= \bigvee_{p\in X} \widehat{M}_{[C]}(C,p)\\
&= \bigvee_{p\in X}\bigwedge_{A\in p} M_{\mathbb{C}C}A\\
&= \overline{M_{\mathbb{C}C}}(X)
\end{aligned}$$

Ainsi, la composition des deux morphismes verticaux nous donne l'unique $\overline{M_{\mathbb{C}C}}$ de la partie propositionnelle qui préserve les infima quelconques. Comme le morphisme vertical de la partie du haut est un isomorphisme de treillis complets, on en conclut que M_C^* en est un aussi. ∎

Remarquons que nous obtenons comme corollaire immédiat de ce résultat la propriété universelle originale du topos des types. En effet, sous l'hypothèse que $\mathcal{F}$ est engendré par ses éléments premiers la condition d'être un m-modèle devient automatiquement vérifiée. De plus, nous pouvons également formuler ce dernier résultat en termes d'équivalence de catégories de modèles ; comme nous l'avons fait jusqu'ici pour les autres propriétés universelles importantes.

COROLLAIRE 4.4.2 **(Autre formulation de la propriété universelle étendue)** *Si on dénote par $mp - \mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{C}, \mathcal{F})$ la catégorie des p-modèles qui sont aussi des m-modèles, alors la composition avec $E_{\mathbb{C}}$ induit une équivalence de catégories :*

$$\bigwedge -\mathbb{G}\mathrm{eom}(\mathcal{F}, \mathcal{T}\mathbb{C}) \xrightarrow{(\cdot)\circ E_{\mathbb{C}}} mp - \mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{C}, \mathcal{F})$$

PREUVE: La précomposition de la partie image inverse d'un morphisme géométrique M^* qui préserve les infima arbitraires avec un p-modèle donne un p-modèle. Le même phénomène se produit pour la notion de m-modèle. En effet, la définition de m-modèle fait intervenir des suprema et des infima de sous-objets et M^* préserve justement tous les infima et suprema. De façon plus précise, donnons-nous un morphisme géométrique $(M^*, M_*) : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{T}(\mathbb{C})$ puis prenons $X \in |\mathbb{C}|$ et $f \in \mathfrak{F}(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}X)$ quelconques. Si on pose $M \equiv M^* \circ E_{\mathbb{C}}$, on a alors :

$$\begin{aligned}
\bigvee_{p \leq f} \bigwedge_{A \in p} M_X(A) &= \bigvee_{p \leq f} \bigwedge_{A \in p} (M^* \circ E_{\mathbb{C}})_X(A) \\
&= \bigvee_{p \leq f} \bigwedge_{A \in p} M^*_{E_{\mathbb{C}}X}(E_{\mathbb{C}X}(A)) \\
&= M^*_{E_{\mathbb{C}}X}\left(\bigvee_{p \leq f} \bigwedge_{A \in p} E_{\mathbb{C}X}(A)\right) \\
&= M^*_{E_{\mathbb{C}}X}\left(\bigwedge_{A \in f} E_{\mathbb{C}X}(A)\right) \\
&= \bigwedge_{A \in f} (M^* \circ E_{\mathbb{C}})_X(A) \\
&= \bigwedge_{A \in f} M_X(A)
\end{aligned}$$

Donc $M = M^* \circ E_{\mathbb{C}}$ est un m-modèle. Nous avons clairement utilisé que $E_{\mathbb{C}}$ est un m-modèle (ceci est évident car $\mathcal{T}(\mathbb{C})$ est un topos engendré par ses éléments premiers).

La propriété universelle énoncée au théorème précédent nous donne que le morphisme de précomposition avec $E_{\mathbb{C}}$ de l'énoncé est essentiellement surjectif. Le fait qu'il est plein et fidèle provient de la correspondance du théorème de Diaconescu (voir **[21]** p.409 ou l'original **[6]**) qui dit que la précomposition avec $a_{\mathbb{C}} \circ \mathfrak{Y}_{\mathbb{C}}$ induit une équivalence de catégorie entre les morphismes géométriques de

$$\mathbb{G}\mathrm{eom}(\mathcal{F}, Sh(\mathbb{C}, \mathcal{T}_{\mathbb{C}}))$$

et les foncteurs lex et $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}$-continus de $\mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{F}$ où $(\mathbb{C}, \mathcal{T}_{\mathbb{C}})$ est un site quelconque. Les détails sont laissés à la discrétion du lecteur. ∎

Encore une fois surgit la question suivante : Avons-nous vraiment généralisé la propriété universelle du topos des types ? Autrement dit, connaissons-nous des exemples de topos complètement distributifs qui ne sont pas engendrés par leurs éléments premiers ? La réponse vient facilement lorsqu'on reconsidère l'exemple que nous avions donné d'un treillis complètement distributif L qui n'est pas engendré par ses éléments premiers (voir page 34). Il suffit en effet de considérer le topos des faisceaux sur ce L. Clairement $Sh(L)$ n'est pas engendré par ses éléments premiers car le treillis des sous-objets d'un objet terminal est $\mathrm{S}(\mathbb{1}_{Sh(L)}) \simeq L$; et L n'est pas engendré par ses éléments premiers comme nous l'avons choisi. De plus, il est facile de voir que $Sh(L)$ est un topos complètement distributif. En effet, ce topos est localique, donc il est engendré par les sous-objets d'un de ses objets terminaux. Nous avons justement vu que les sous-objets d'un objet terminal dans $Sh(L)$ est isomorphe à L qui est complètement distributif tel que choisi. Cette propriété des générateurs s'étend naturellement aux autres objets du topos. Nous avons donc bien exhibé un exemple de topos complètement distributif qui n'est pas engendré par ses éléments premiers. Ainsi, notre propriété universelle s'adresse bien à une classe plus grande de topos.

4.5. Conclusion

Ce chapitre nous a permis de mettre à l'épreuve autant notre intuition que les techniques de généralisation que nous avons développées jusqu'ici. Le test s'est passé avec succès. Nous avons réussi à exposer une approche alternative au topos des types qui nous a permis de raisonner avec ce topos ; un peu comme nous l'avons fait avec le topos des filtres. De cette façon, nous avons réussi à démontrer une propriété universelle étendue analogue à celle du double dual. Le topos des types est donc un candidat parfait pour être canonisé "généralisation du double dual" pour la logique du premier ordre. Le prochain chapitre mettra de l'avant plusieurs résultats qui confirmeront ces intuitions.

Chapitre 5

LIENS ENTRE LE TOPOS DES FILTRES ET LE TOPOS DES TYPES

5.1. INTRODUCTION

Dans le présent chapitre nous allons généraliser le travail de comparaison qui a été fait au niveau de la logique propositionnelle dans les sections 2.2, 2.3 et 2.4. On se rappelle que nous avions montré que le double dual est un sous-locale ouvert et dense du locale des filtres. Ici, nous allons montrer que le topos des types est un sous-topos ouvert dense du topos des filtres. De plus, nous allons généraliser le théorème 2.3.3 qui donne des conditions pour que le morphisme de comparaison entre le locale des filtres et le double dual soit un isomorphisme. Nous profitons aussi ce chapitre pour comparer le topos des filtres avec le topos classifiant. Finalement, nous démontrons que les deux constructions généralisées réflètent les isomorphismes.

Étant donné que le gros du travail est déjà fait. Le présent chapitre est un déploiement organisé des idées développées jusqu'ici. Le fait que ce chapitre soit le dernier n'indique nullement que nos possibilités soient arrivées à leurs limites extrêmes. À la fin de ce chapitre, nous devrons nous quitter ; et ce sera justement au moment où nous seront plus à l'aise que jamais dans ce petit monde.

5.2. UN MORPHISME GÉOMÉTRIQUE LIANT LES DEUX TOPOS

Dans la présente section nous allons nous intéresser à une comparaison des deux topos au niveau des sites. Ce fût la direction de mes premières tentatives.

Je l'ai laissée intacte ici même si, comme nous le verrons dans la prochaine section, nous pouvons utiliser la propriété quasi-universelle du topos des filtres pour donner immédiatement un foncteur de comparaison. Nous aurons donc une idée de la puissance de ces propriétés universelles.

PROPOSITION 5.2.1 **(Comparaison des sites)** *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie cohérente. La catégorie des types $\tau\mathbb{C}$ est une sous-catégorie pleine de la catégorie des filtres $\Lambda\mathbb{C}$ et le foncteur inclusion :*

$$\tau\mathbb{C} \xhookrightarrow{i} \Lambda\mathbb{C}$$

est continu et co-continu entre les sites $(\tau\mathbb{C}, \mathfrak{T}_M)$ et $(\Lambda\mathbb{C}, \mathfrak{T}_P)$.

PREUVE: Nous savions déjà que $\tau\mathbb{C}$ est une sous-catégorie pleine de $\Lambda\mathbb{C}$. Montrons maintenant que i est continue. Nous montrons que les recouvrements basiques de la topologie de Makkai sont aussi des recouvrements basiques pour la topologie de Pitts. Soit $\{(Y,q)\xrightarrow{\alpha}(X,p)\} \in \mathfrak{T}_{M0}(X,p)$. Par définition des recouvrements de base pour la topologie de Makkai, ceci entraîne que $\alpha(q) = p$ i.e. $\{(Y,q)\xrightarrow{\alpha}(X,p)\} \in \mathfrak{T}_{P0}(X,p)$. Donc i préserve les recouvrements.

Montrons maintenant la co-continuité de i. En observant la définition dans **[21]** (p.412) on voit bien notre objectif : prendre un recouvrement $S \in \mathfrak{T}_P\,(i(X,p))$ et le relever à un recouvrement $R \in \mathfrak{T}_M\,((X,p))$ de telle sorte que $i(R) \subseteq S$.

Ici, $i(X,p) = (X,p)$. Soit

$$S = \{(X_i, f_i)\xrightarrow{[\alpha_i]}(X,p)\}_{i\in I} \in \mathfrak{T}_P(X,p)$$

alors il existe $I' \subseteq I$ fini tel que

$$S = \{(X_i, f_i)\xrightarrow{[\alpha_i]}(X,p)\}_{i\in I'} \in \mathfrak{T}_{P0}(X,p)$$

Mais par définition de la base pour la topologie de Pitts (qui est la topologie pré-canonique) ceci veut dire que

$$\bigvee_{i\in I'} \exists_{[\alpha_i]}\left(1_{(X_i,f_i)}\right) = 1_{(X,p)}$$

et en se rappelant comment les images et les suprema au niveau des sous-objets cette dernière équation se ramène à :

$$\bigcap_{i\in I'} \alpha_i(f_i) = p \qquad (5.2.1)$$

Mais rappelons-nous qu'un filtre premier p peut s'écrire comme une intersection finie de filtres g_i si et seulement si un des g_i est p (ce résultat a été utilisé dans la preuve de la proposition 2.2.1). Ainsi, il existe un $i_0 \in I'$ pour lequel $\alpha_{i_0}(f_{i_0}) = p$. Pour trouver le cribble R recherché il nous suffit de trouver un recouvrement de base de Makkai de (X, p) qui soit contenu dans S. Jusqu'à maintenant, nous avons trouvé un morphisme de S soit $(X_{i_0}, f_{i_0}) \xrightarrow{[\alpha_{i_0}]} (X, p)$ tel que $\alpha_{i_0}(f_{i_0}) = p$. Pour obtenir un recouvrement de base de Makkai nous avons besoin de trouver dans S un morphisme du type $(Y, q) \xrightarrow{[\alpha]} (X, p)$ où $\alpha(q) = p$. L'idée est d'étendre f_{i_0} à un filtre premier q tout en préservant sa propriété fondamentale soit $\alpha_{i_0}(f_{i_0}) = p$.

Pour effectuer cette dernière étape, nous utiliserons le théorème d'existence des filtres premiers. Posons :

$$J \equiv \downarrow \left\{ \alpha^*_{i0}(A) \;\middle|\; A \in S(X) \setminus p \right\}$$

Clairement, J est un idéal. En effet, J est clairement une partie fermée inférieurement de $S(X_{i_0})$. De plus, si $B \leq \alpha^*_{i0}(A)$ et $B' \leq \alpha^*_{i0}(A')$, alors $B \vee B' \leq \alpha^*_{i0}(A \vee A')$ d'où $B \vee B' \in J$ (car $A \vee A' \in S(X) \setminus p$ puisque p est premier et la propriété distinctive des filtres premiers est que $A \vee A' \in p$ doit impliquer que $A \in p$ ou $A' \in p$, mais ni un ni l'autre ne tombe dans p). De plus, f_{i_0} et J sont disjoints car si $B \in f_{i_0} \cap J$, alors il existe un $A \in S(X) \setminus p$ tel que $B \leq \alpha^*_{i0}(A)$ mais ceci veut dire que $\alpha^*_{i0}(A) \in f_{i_0}$ (car $B \in f_{i_0}$) d'où $A \in \alpha(f_{i_0}) = p$ et nous avions supposé que $A \notin p$.

Ainsi, par le théorème d'existence des filtres premiers : il existe un filtre premier q tel que $f_{i_0} \subseteq q$ et $q \cap J = \emptyset$. Montrons maintenant que $\alpha_{i_0}(q) = p$. L'inclusion $p \subseteq \alpha_{i_0}(q)$ se démontre comme suit :

$$\begin{aligned} A \in p &\implies \alpha^*_{i0}(A) \in f_{i_0} \quad \text{car} \quad \alpha_{i_0}(f_{i_0}) = p \\ &\implies \alpha^*_{i0}(A) \in q \quad \text{car} \quad f_{i_0} \subseteq q \\ &\implies A \in \alpha_{i_0}(q) \end{aligned}$$

tandis que l'inclusion inverse comme suit :

$$\begin{aligned} A \in \alpha_{i_0}(q) &\implies \alpha^*_{i0}(A) \in q \\ &\implies \alpha^*_{i0}(A) \notin J \quad \text{car} \quad q \cap J = \emptyset \\ &\implies A \in p \end{aligned}$$

et cette dernière implication vient du fait que si $A \notin p$ alors par définition de J on aurait $\alpha^*_{i0}(A) \in J$ ce qui n'est pas le cas par hypothèse.

Ainsi, en composant les deux morphismes :

$$(X_{i_0}, q) \xrightarrow{[1_{X_{i_0}}]} (X_{i_0}, f_{i_0}) \xrightarrow{[\alpha_{i_0}]} (X, p) \tag{5.2.2}$$

on obtient bien un morphisme qui est en lui-même un recouvrement de base pour la topologie de Makkai :

$$R_0 \equiv \{(X_{i_0}, q) \xrightarrow{[\alpha_{i_0}]} (X, p)\} \in \mathfrak{T}_{MO}(X, p)$$

Ensuite, nous posons naturellement $R \equiv \langle R_0 \rangle$ (R est donc le cribble engendré par le singleton R_0). Il ne nous reste qu'à vérifier que $R \subseteq S$ (en effet, $i(R) = R$). Pour cela, il suffit de montrer que $R_0 \subseteq S$. La composition à la ligne 5.2.2 ci-dessus et le fait que

$$(X_{i_0}, f_{i_0}) \xrightarrow{[\alpha_{i_0}]} (X, p) \in S$$

nous donne immédiatement cela car S est un cribble et donc toute composition (à droite) avec un morphisme de S reste dans S. ∎

Le résultat suivant est classique. Le lecteur trouvera une preuve dans **[21]**. Il nous permet de construire facilement un morphisme géométrique entre nos deux topos.

LEMME 5.2.1 **(Morphisme géométrique induit par un foncteur co-continu)** *Soient $(\mathbb{C}, \mathfrak{T}_{\mathbb{C}})$, $(\mathbb{D}, \mathfrak{T}_{\mathbb{D}})$ deux sites et $\pi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ un foncteur co-continu. Alors π induit un morphisme géométrique $f : Sh(\mathbb{D}, \mathfrak{T}_{\mathbb{D}}) \longrightarrow Sh(\mathbb{C}, \mathfrak{T}_{\mathbb{C}})$ dont le foncteur image inverse satisfait : $f^*(F) \simeq \mathbf{a}_{\mathbb{D}}(F \circ \pi)$ pour $F \in Sh(\mathbb{C}, \mathfrak{T}_{\mathbb{C}})$.*

La preuve de la proposition suivante s'inspire de celle la proposition 1 de **[21]** (p.509). Comme nous n'avons pas les mêmes hypothèses nous devons adapter cette preuve à notre contexte.

PROPOSITION 5.2.2 **(Morphisme géométrique ouvert de comparaison)** *Le foncteur inclusion de la proposition 5.2.1 induit un morphisme géométrique ouvert :*

$$\begin{tikzcd} \Phi(\mathbb{C}) \arrow[r, two heads, "f^*"] & \mathcal{T}(\mathbb{C}) \arrow[l, bend left, "f_*"] \end{tikzcd}$$

PREUVE: La proposition 5.2.1 appliquée en prenant l'inclusion de la proposition 5.2.1 pour π nous donne le morphisme géométrique annoncé. Le restant de la preuve sera ainsi dédié à vérifier que ce morphisme géométrique est ouvert. Pour cela, nous devons construire pour chaque $E \in |\Phi\mathbb{C}|$ un adjoint à gauche pour le foncteur

$$f_E^* : \mathbf{S}_{\Phi\mathbb{C}}(E) \longrightarrow \mathbf{S}_{\mathcal{T}(\mathbb{C})}\left(f_E^*(E)\right)$$

qui est simplement f^* appliqué au niveau des sous-objets de E. On se rappelle que le treillis des sous-préfaisceaux fermés d'un préfaisceau donné E est isomorphe au treillis des sous-faisceaux de aE. Ainsi,

$$\mathbf{S}_{\mathcal{T}(\mathbb{C})}\left(f_E^*(E)\right) = \mathbf{S}_{\mathcal{T}(\mathbb{C})}\left(\mathbf{a}_{\mathcal{T}(\mathbb{C})}(E \circ i)\right) \simeq C - \mathbf{S}_{\mathbf{Ens}^{\tau\mathbb{C}^{\mathrm{op}}}}(E \circ i)$$

Nous allons montrer dans ce qui suit que si $B \subseteq E$ (B est un sous-faisceau du faisceau E), alors $B \circ i$ est un sous-préfaiceau fermé de $E \circ i$. Ainsi, nous pouvons calculer f_E^* en deux étapes :

$$\mathbf{S}_{\Phi\mathbb{C}}(E) \xrightarrow{(\cdot)\circ i} C - \mathbf{S}_{\mathbf{Ens}^{\tau\mathbb{C}^{\mathrm{op}}}}(E \circ i) \xrightarrow{\mathbf{a}} \mathbf{S}_{\mathcal{T}(\mathbb{C})}(f^*E)$$

Supposons donc que $B \subseteq E$ est un sous-faisceau et démontrons que $B \circ i$ est un sous-pré-faisceau fermé de $E \circ i$. Rappelons-nous la condition pour qu'un sous-pré-faisceau soit fermé (voir **[21]** p.509) : $B \circ i \subseteq E \circ i$ est fermé si et seulement si

$$\forall (X,p) \in \tau\mathbb{C}\ \forall x \in (E \circ i)(X,p) \quad \left(S_{x,B\circ i} \in \mathfrak{T}_M(X,p) \Longrightarrow x \in (B \circ i)(X,p)\right)$$

où $S_{x,B\circ i}$ est le cribble suivant :

$$S_{x,B\circ i} \equiv \{[\alpha] : (Y,q) \longrightarrow (X,p) \mid x \cdot [\alpha] \in (B \circ i)(Y,q)\}$$

Soient $(X,p) \in \tau\mathbb{C}$ et $x \in (E \circ i)(X,p) = E(X,p)$ quelconques, on suppose que $S_{x,B\circ i} \in \mathfrak{T}_M(X,p)$. Nous voulons montrer que $x \in (B \circ i)(X,p)$ i.e. $x \in B(X,p)$. Comme i est continue on a que $\langle i(S_{x,B\circ i})\rangle \in \mathfrak{T}_P(X,p)$. Mais les éléments de $i(S_{x,B\circ i})$ sont aussi des éléments de

$$S_{x,B} \equiv \{[\beta] : (Z,f) \longrightarrow (X,p) \mid x \cdot [\beta] \in B(Z,f)\}$$

En effet, si $[\alpha] : (Y,q) \longrightarrow (X,p) \in i(S_{x,B\circ i})$ alors on a

$$x \cdot [\alpha] \in (B \circ i)(Y,q) = B(Y,q)$$

par définition même.

Et comme $S_{x,B}$ contient $i(S_{x,B\circ i})$ et que ce dernier est un recouvrement on a que $S_{x,B}$ est aussi un cribble couvrant. De plus, comme B est un sous-faisceau de E c'est un sous-pré-faisceau fermé de E donc dire que $S_{x,B}$ est couvrant nous donne que $x \in B(X,p)$ par la condition de fermeture au niveau des cribbles. Ainsi, nous avons bien montré que $B \circ i$ est un sous-pré-faisceau fermé de $E \circ i$.

Jusqu'à maintenant, nous avons vu que pour étudier le morphisme d'ordres partiels f_E^* (et lui trouver un adjoint à gauche) il nous suffit d'étudier le morphisme d'ordres partiels

$$(\cdot) \circ i : \mathbf{S}_{\Phi\mathbb{C}}(E) \longrightarrow C - \mathbf{S}_{\mathbf{Ens}^{\tau\mathbb{C}^{op}}}(E \circ i)$$

Soit $Q \in C - \mathbf{S}_{\mathbf{Ens}^{\tau\mathbb{C}^{op}}}(E \circ i)$. Soient $(X, f) \in |\Lambda\mathbb{C}|$ et $x \in E(X, f)$. On pose :

$$T_x \equiv \left\langle \{(Y, q) \xrightarrow{[h]} (X, f) \mid (Y, q) \in |\tau\mathbb{C}| \,,\;\; x \cdot [h] \in Q(Y, q)\} \right\rangle$$

et

$$\widetilde{Q}(X, f) \equiv \{x \in E(X, f) \mid T_x \in \mathfrak{T}_P(X, f)\}$$

Le $\widetilde{Q}$ que nous venons de définir est (à isomorphisme près) l'adjoint recherché. Pour montrer cela nous procéderons en plusieurs étapes. Nous allons premièrement démontrer que $\widetilde{Q}$ est un sous-préfaisceau de E pour ensuite démontrer qu'il est fermé comme sous-faisceau. Ensuite, nous allons préciser la construction de l'adjoint à gauche de f_E^* puis nous terminerons en montrant sa naturalité.

Montrons que $\widetilde{Q}$ est un sous-préfaisceau de E. Soient $x \in \widetilde{Q}(X, f)$ et

$$(Z, g) \xrightarrow{[\alpha]} (X, f) \in \Lambda\mathbb{C}$$

Nous voulons montrer que $x \cdot [\alpha] \in \widetilde{Q}(Z, g)$. Comme $x \in \widetilde{Q}(X, f)$ on a que

$$T_x \equiv \left\langle \{(Y, q) \xrightarrow{[h]} (X, f) \mid (Y, q) \in |\tau\mathbb{C}| \,,\;\; x \cdot [h] \in Q(Y, q)\} \right\rangle \in \mathfrak{T}_P(X, f)$$

Pour montrer que $x \cdot [\alpha] \in \widetilde{Q}(Z, g)$ il faut montrer que

$$T_{x\cdot[\alpha]} \equiv \left\langle \{(W, r) \xrightarrow{[h']} (Z, g) \mid (W, r) \in |\tau\mathbb{C}| \,,\;\; (x \cdot [\alpha]) \cdot [h'] \in Q(W, r)\} \right\rangle \in \mathfrak{T}_P(Z, g)$$

Premièrement, on remarque que $T_x \in \mathfrak{T}_P(X, f)$ entraîne, par définition de la topologie de Pitts sur $\Lambda\mathbb{C}$, qu'il existe une sous-famille finie

$$R \equiv \{(Y_i, q_i) \xrightarrow{[h_i]} (X, f)\}_{i=1}^{n} \subseteq T_x$$

telle que $R \in \mathfrak{T}_{P0}(X, f)$ (en effet, nous pouvons choisir les $[h_i]$ parmis les générateurs de T_x). Considérons maintenant la famille des produits fibrés suivants dans $\Lambda\mathbb{C}$:

$$\begin{tikzcd}
(Y_i, q_i) \arrow[r, "{[h_i]}"] & (X, f) \\
(P_i, \pi_i) \arrow[u, "{[\alpha_i']}"] \arrow[r, "{[h_i']}"'] & (Z, g) \arrow[u, "{[\alpha]}"']
\end{tikzcd}$$

Essayons d'étendre chaque π_i à un filtre premier r_i tout en conservant intacte l'image de $[h_i']$. Pour cela, on pose

$$I \equiv \downarrow \{h_i'^*(B) \mid B \in \mathbf{S}(Z) \setminus h_i'(\pi_i)\}$$

Clairement, I est un idéal et $\pi_i \cap I = \emptyset$. Ainsi, par le théorème d'existence des filtres premiers il existe un filtre premier $r_i \supseteq \pi_i$ tel que $r_i \cap I = \emptyset$. Montrons que $h_i'(r_i) = h_i'(\pi_i)$. Comme $\pi_i \subseteq r_i$ on a trivialement $h_i'(\pi_i) \subseteq h_i'(r_i)$. De plus,

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{B \in h_i'(r_i)}{h_i'^*(B) \in r_i}}{h_i'^*(B) \notin I}}{B \in h_i'(\pi_i)} \downarrow$$

Nous avons donc construit pour chaque $i = 1, 2, \ldots, n$ le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
(Y_i, q_i) \arrow[r, "{[h_i]}"] & (X, f) \\
(P_i, r_i) \arrow[u, "{[\alpha_i']}"] \arrow[r, "{[h_i']}"'] & (Z, g) \arrow[u, "{[\alpha]}"']
\end{tikzcd}$$

et comme les $[h_i]$ forment un recouvrement de base de (X, f) et que les

$$(P_i, r_i) \xrightarrow{[h_i']} (Z, g)$$

du dernier diagramme ont la même image que les

$$(P_i, \pi_i) \xrightarrow{[h_i']} (Z, g)$$

l'avant dernier diagramme qui étaient obtenus en prenant le produit fibré des $[h_i]$ le long de $[\alpha]$ (et le produit fibré d'une famille couvrante donne aussi une famille couvrante) on a que

$$(P_i, r_i) \xrightarrow{[h_i']} (Z, g) \in \mathcal{T}_{P0}(Z, g)$$

Donc, si on réussit à montrer que ces $[h_i'] \subseteq T_{x \cdot [\alpha]}$ on a terminé car nous voulions précisément montrer que $T_{x \cdot [\alpha]} \in \mathcal{T}_P(Z, g)$. Prenons en effet un $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

quelconque. On a :

$$\begin{aligned}(x \cdot [\alpha]) \cdot [h'_i] &= x \cdot ([\alpha] \circ [h'_i]) \\ &= x \cdot ([h_i] \circ [\alpha'_i]) \\ &= (x \cdot [h_i]) \cdot [\alpha'_i]\end{aligned}$$

Mais les $[h_i]$ sont dans T_x donc $x \cdot [h_i] \in Q(Y_i, q_i)$ et comme Q est un sous-préfaisceau de $E \circ i$ (par hypothèse) ceci entraîne que

$$(x \cdot [h_i]) \cdot [\alpha'_i] \in Q(P_i, r_i)$$

Nous avons donc montré que $T_{x \cdot [\alpha]}$ contient les $[h'_i]$. Ceci termine la démonstration du fait que $\widetilde{Q}$ est un sous-préfaisceau de E.

Passons maintenant à la deuxième étape annoncée plus haut : $\widetilde{Q}$ est fermé. Nous utiliserons le même critère de fermeture que nous avons utilisé au début de la démonstration. Soient $(X, f) \in |\Lambda\mathbb{C}|$ et $x \in E(X, f)$. On suppose que

$$S_{x,\widetilde{Q}} \equiv \left\{[\beta] : (Z.g) \longrightarrow (X, f) \mid x \cdot [\beta] \in \widetilde{Q}(Z, g)\right\} \in \mathfrak{T}_P(X, f)$$

et on veut montrer que $x \in \widetilde{Q}(X, f)$. On se rappelle que

$$x \cdot [\beta] \in \widetilde{Q}(Z, g) \iff T_{x \cdot [\beta]} \in \mathfrak{T}_P(Z, g)$$

Ainsi,

$$S_{x,\widetilde{Q}} = \left\{[\beta] : (Z.g) \longrightarrow (X, f) \mid T_{x \cdot [\beta]} \in \mathfrak{T}_P(Z, g)\right\} \in \mathfrak{T}_P(X, f) \qquad (5.2.3)$$

Maintenant, considérons

$$T_x \equiv \left\langle \{(Y, q) \xrightarrow{[\alpha]} (X, f) \mid (Y, q) \in |\tau\mathbb{C}|\ ,\ \ x \cdot [\alpha] \in Q(Y, q)\} \right\rangle$$

Nous voulons montrer que $T_x \in \mathfrak{T}_P(X, f)$ i.e. $x \in \widetilde{Q}(X, f)$. Pour cela, nous allons montrer que

$$\forall [\beta] \in S_{x,\widetilde{Q}} \ \ [\beta]^*(T_x) \in \mathfrak{T}_P(Z, g)$$

cela suffit car par la propriété de transitivité des topologies de Grothendieck nous aurons $T_x \in \mathfrak{T}_P(X, f)$ i.e. $x \in \widetilde{Q}(X, f)$ comme voulu.

Si $[\beta] \in S_{x,\widetilde{Q}}$ on a vu (à la ligne 5.2.3) que cela veut dire que

$$T_{x \cdot [\beta]} \equiv \left\langle \{(P, r) \xrightarrow{[h]} (Z, g) \mid (P, r) \in |\tau\mathbb{C}|\ ,\ \ (x \cdot [\beta]) \cdot [h] \in Q(P, r)\} \right\rangle \in \mathfrak{T}_P(Z, g)$$

Nous montrons que $T_{x\cdot[\beta]} \subseteq [\beta]^*(T_x)$ et on aura fini car cela montrera que quel que soit $[\beta] \in S_{x,\widetilde{Q}}$ on a toujours $[\beta]^*(T_x) \in \mathfrak{T}_P(Z,g)$ comme voulu.

Soient $[\beta] \in S_{x,\widetilde{Q}}$ et $[h] \in T_{x\cdot[\beta]}$. On a

$$x \cdot ([\beta] \circ [h]) = (x \cdot [\beta]) \cdot [h] \in Q(P,r)$$

car $[h] \in T_{x\cdot[\beta]}$ Ainsi, $[\beta] \circ [h] \in T_x$ (par définition de T_x) et ceci veut précisément dire que $[h] \in [\beta]^*(T_x)$.

Nous avons donc montré que $\widetilde{Q}$ est fermé.

Nous sommes maintenant prêts à définir de façon explicite l'adjoint à gauche de f_E^*. Si $B \in \mathbf{S}_{\mathcal{T}(\mathbb{C})}(f^*E)$, alors on pose :

$$f_{E!} \equiv \mathbf{a}_{\Lambda\mathbb{C}}\left(\widetilde{\mathbf{i}_{\tau\mathbb{C}}B}\right)$$

Pour vérifier que nous avons bien défini un adjoint à gauche pour f_E^* il est suffisant de montrer que le morphisme

$$\widetilde{(\cdot)} : C - \mathbf{S}_{\mathbf{Ens}^{\tau\mathbb{C}^{\mathrm{op}}}}(E \circ i) \longrightarrow C - \mathbf{S}_{\mathbf{Ens}^{\Lambda\mathbb{C}^{\mathrm{op}}}}(\mathbf{i}_{\Lambda\mathbb{C}}E)$$

est adjoint à gauche pour le morphisme

$$(\cdot) \circ i : C - \mathbf{S}_{\mathbf{Ens}^{\Lambda\mathbb{C}^{\mathrm{op}}}}(\mathbf{i}_{\Lambda\mathbb{C}}E) \longrightarrow C - \mathbf{S}_{\mathbf{Ens}^{\tau\mathbb{C}^{\mathrm{op}}}}(E \circ i)$$

En effet, si $P \in C - \mathbf{S}_{\mathbf{Ens}^{\Lambda\mathbb{C}^{\mathrm{op}}}}(\mathbf{i}_{\Lambda\mathbb{C}}E)$ et $Q \in C - \mathbf{S}_{\mathbf{Ens}^{\tau\mathbb{C}^{\mathrm{op}}}}(E \circ i)$, alors on montre que

$$\frac{\widetilde{Q} \subseteq P}{Q \subseteq P \circ i}$$

en deux étapes.

($\downarrow$) Soient $(Y,q) \in |\tau\mathbb{C}$ et $y \in Q(Y,q)$, on veut montrer que $y \in P(Y,q)$. Pour cela, il suffit de montrer que $y \in \widetilde{Q}(Y,q)$ (par hypothèse) i.e.

$$T_y \equiv \left\langle \{(Z,r) \xrightarrow{[h]} (Y,q) \mid (Z,r) \in |\tau\mathbb{C}|\,,\ \ y \cdot [h] \in Q(Z,r)\} \right\rangle \in \mathfrak{T}_P(Y,q)$$

Mais comme $y \in Q(Y,q)$ et Q est un sous-pré-faisceau de $E \circ i$, quel que soit $(Z,r) \xrightarrow{[h]} (Y,q)$ on aura toujours $y \cdot [h] \in Q(Z,r)$ d'où T_y est le cribble maximal sur (Y,q) (qui est toujours couvrant). Donc, $y \in \widetilde{Q}(Y,q) \subseteq P(Y,q)$.

($\uparrow$) Supposons que $Q \subseteq P \circ i$ alors $\widetilde{Q} \subseteq \widetilde{P \circ i}$. On montre que $\widetilde{P \circ i} \subseteq P$. Soit $x \in E(X, f)$, Supposons que $x \in \widetilde{P \circ i}(X, f)$ i.e.

$$T_x \equiv \left\langle \{(Y, q) \xrightarrow{[h]} (X, f) \mid (Y, q) \in |{}_{\mathcal{T}}\mathbb{C}| \;,\;\; x \cdot [h] \in P(Y, q)\} \right\rangle \in \mathcal{T}_P(X, f)$$

Mais comme $P \in C - \mathbf{S}_{\mathbf{Ens}^{\Lambda\mathbb{C}^{op}}}(\mathbf{i}_{\Lambda\mathbb{C}}E)$ on a que P est un sous-pré-faisceau fermé de $\mathbf{i}_{\Lambda\mathbb{C}}E$ et puisque

$$S_{x,P} \equiv \left\langle \{(Z, e) \xrightarrow{[k]} (X, f) \mid (Z, e) \in |{}_{\mathcal{T}}\mathbb{C}| \;,\;\; x \cdot [k] \in Q(Z, e)\} \right\rangle$$

contient T_x on a $S_{x,P} \in \mathcal{T}_P(X, f)$ d'où $x \in P(X, f)$. On a ainsi montré que $\widetilde{P \circ i} \subseteq P$.

Pour terminer la preuve nous montrons la naturalité en E de $f_{E!}$. Ceci correspond à la commutativité du diagramme suivant dans lequel $E' \xrightarrow{\eta} E$ est une transformation naturelle de $\Phi\mathbb{C}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{S}_{\widetilde{P}}(f^*E) \arrow[r, "f_{E!}"] \arrow[d, "(f^*(\alpha))^*"'] & \mathbf{S}_{\Phi\mathbb{C}}(E) \arrow[d, "\alpha^*"] \\
\mathbf{S}_{\widetilde{P}}(f^*E') \arrow[r, "f_{E'!}"'] & \mathbf{S}_{\Phi\mathbb{C}}(E')
\end{tikzcd}$$

Dans notre contexte particulier, il nous suffit de montrer la naturalité de l'opérateur $\widetilde{(\cdot)}$ i.e. la commutativité de

$$\begin{tikzcd}
C - \mathbf{S}_{\mathbf{Ens}^{\mathcal{T}\mathbb{C}^{op}}}(E \circ i) \arrow[r, "\widetilde{(\cdot)}_E"] \arrow[d, "\alpha^* \circ i"'] & C - \mathbf{S}_{\mathbf{Ens}^{\Lambda\mathbb{C}^{op}}}(E) \arrow[d, "\alpha^*"] \\
C - \mathbf{S}_{\mathbf{Ens}^{\mathcal{T}\mathbb{C}^{op}}}(E' \circ i) \arrow[r, "\widetilde{(\cdot)}_{E'}"'] & C - \mathbf{S}_{\mathbf{Ens}^{\Lambda\mathbb{C}^{op}}}(E')
\end{tikzcd} \tag{5.2.4}$$

Remarquons que le $(f^*\alpha)^*$ s'est métamorphosé en $\alpha^* \circ i$. En effet, comme f^* est lex (étant l'adjoint à gauche dans le morphisme géométrique) on a pour $A \in \mathbf{S}_{\mathcal{T}(\mathbb{C})}(f^*E)$:

$$(f^*\alpha)^*(A) = f^*(\alpha^*A) = \mathbf{a}_{\mathcal{T}\mathbb{C}}(\alpha^*A \circ i)$$

Ainsi, si on veut calculer au niveau des sous-pré-faisceaux fermés, si $Q \in C - \mathbf{S}_{\mathbf{Ens}^{\mathcal{T}\mathbb{C}^{op}}}(E \circ i)$ on a affaire au simple morphisme $\alpha^*Q \circ i$.

La commutativité de 5.2.4 revient à montrer que

$$\alpha^*\left(\widetilde{A}\right) = \widetilde{\alpha^* A \circ i}$$

Soit $(X, f) \in |\Lambda\mathbb{C}|$ on a :

$$\begin{array}{c}
x \in \alpha^*\left(\widetilde{A}\right)(X,f) \\ \hline
\alpha_{(X,f)}(x) \in \widetilde{A}(X,f) \\ \hline
T_{\alpha_{(X,f)}(x),A} \in \mathfrak{T}_P(X,f) \\ \hline
\left\langle \left\{ (Y,q) \xrightarrow{[h]} (X,f) \mid \alpha_{(X,f)}(x)\cdot[h] \in A(Y,q) \right\} \right\rangle \in \mathfrak{T}_P(X,f) \\ \hline
\left\langle \left\{ (Y,q) \xrightarrow{[h]} (X,f) \mid E([h])\left(\alpha_{(X,f)}(x)\right) \in A(Y,q) \right\} \right\rangle \in \mathfrak{T}_P(X,f) \\ \hline
\left\langle \left\{ (Y,q) \xrightarrow{[h]} (X,f) \mid \alpha_{(Y,q)}\left(E'([h])(x)\right) \in A(Y,q) \right\} \right\rangle \in \mathfrak{T}_P(X,f) \\ \hline
\left\langle \left\{ (Y,q) \xrightarrow{[h]} (X,f) \mid E'([h])(x) \in \alpha^*_{(Y,q)}A(Y,q) \right\} \right\rangle \in \mathfrak{T}_P(X,f) \\ \hline
\left\langle \left\{ (Y,q) \xrightarrow{[h]} (X,f) \mid x\cdot[h] \in \alpha^*_{(Y,q)}A(Y,q) \right\} \right\rangle \in \mathfrak{T}_P(X,f) \\ \hline
T_{x,\alpha^*A\circ i} \in \mathfrak{T}_P(X,f) \\ \hline
x \in \widetilde{\alpha^* A \circ i}
\end{array}$$

$(*)$

où le passage $(*)$ se justifie par la commutativité de

$$\begin{tikzcd}
E'(X,f) \arrow[r, "\alpha_{(X,f)}"] \arrow[d, "E'[h]"'] & E(X,f) \arrow[d, "E[h]"] \\
E'(Y,q) \arrow[r, "\alpha_{(Y,q)}"'] & E(Y,q)
\end{tikzcd}$$

qui est due à la naturalité de α. ∎

La proposition suivante ajoute deux propriétés à notre morphisme géométrique de comparaison entre les deux topos : c'est un plongement et il est dense.

PROPOSITION 5.2.3 **($\mathcal{T}(\mathbb{C})$ est un sous-topos ouvert dense de $\Phi(\mathbb{C})$)** *Le morphisme géométrique de la proposition 5.2.2 est un plongement ouvert dense de topos.*

PREUVE: Pour montrer que f est un plongement, nous montrons que $f^* \circ f_* = Id$. Pour cela, nous utiliserons la formule pour f_* qui est :

$$f_*(G) \equiv \underset{((X,p),x)\in\int G}{\mathbf{colim}^{\Phi\mathbb{C}}} \mathcal{Y}_{\Phi\mathbb{C}}(X,p)$$

Comme f^* a un adjoint à droite (f_*) il préserve les colimites et on a :

$$\begin{aligned}
f^*(f_*G) &= f^*\left(\underset{((X,p),x)\in\int G}{\mathbf{colim}^{\Phi\mathbb{C}}} \mathcal{Y}_{\Phi\mathbb{C}}(X,p)\right) \\
&= \underset{((X,p),x)\in\int G}{\mathbf{colim}^{\mathcal{T}(\mathbb{C})}} f^*\left(\mathcal{Y}_{\Phi\mathbb{C}}(X,p)\right) \\
&\overset{(*)}{=} \underset{((X,p),x)\in\int G}{\mathbf{colim}^{\mathcal{T}(\mathbb{C})}} \mathcal{Y}_{\mathcal{T}(\mathbb{C})}(X,p) \\
&= G
\end{aligned}$$

La preuve de l'étape $(*)$ se fait comme suit :

$$\begin{aligned}
f^*\left(\mathcal{Y}_{\Phi\mathbb{C}}(X,p)\right) &= \mathbf{a}_{\tau\mathbb{C}}\left(\mathcal{Y}_{\Phi\mathbb{C}}(X,p)\circ i\right) \\
&= \mathbf{a}_{\tau\mathbb{C}}\left(\mathbf{Hom}_{\Lambda\mathbb{C}}\left(-,(X,p)\right)\circ i\right) \\
&= \mathbf{a}_{\tau\mathbb{C}}\left(\mathbf{Hom}_{\tau\mathbb{C}}\left(-,(X,p)\right)\right) \\
&= \mathbf{a}_{\tau\mathbb{C}}\left(\mathcal{Y}_{\tau\mathbb{C}}(X,p)\right) \\
&= \mathcal{Y}_{\tau\mathbb{C}}(X,p)
\end{aligned}$$

et cette dernière égalité vient du fait que la topologie de Makkai est sous-canonique.

Pour montrer que notre plongement f est dense nous montrons que f_* préserve l'objet initial. Remarquons que l'objet initial de $\mathcal{T}(\mathbb{C})$ est le foncteur suivant :

$$\mathbf{0}_{\mathcal{T}(\mathbb{C})} : \tau\mathbb{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Ens}$$

tel que

$$\mathbf{0}_{\mathcal{T}(\mathbb{C})}(X,p) \equiv \begin{cases} \{*\} & \text{si } (X,p) = \mathbf{0}_{\tau\mathbb{C}} \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

tandis que l'objet initial de $\Phi\mathbb{C}$ est le foncteur

$$\mathbf{0}_{\Phi\mathbb{C}} : \Lambda\mathbb{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Ens}$$

tel que

$$\mathbf{0}_{\Phi\mathbb{C}}(X,f) \equiv \begin{cases} \{*\} & \text{si } (X,f) = \mathbf{0}_{\Lambda\mathbb{C}} \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi, nous devons calculer

$$f_*(\mathbf{0}_{\mathcal{T}(\mathbb{C})})(X,f) = \left(\operatorname*{\mathbf{colim}^{\Phi\mathbb{C}}}_{((Y,q),y)\in\int \mathbf{0}_{\mathcal{T}(\mathbb{C})}} \mathcal{Y}_{\Phi\mathbb{C}}(Y,q)\right)(X,f)$$

Mais cette colimite ne contient qu'un seul élément et on a donc :

$$\begin{aligned}
f_*(\mathbf{0}_{\mathcal{T}(\mathbb{C})})(X,f) &= \left(\operatorname*{\mathbf{colim}^{\Phi\mathbb{C}}}_{((Y,q),y)\in\int \mathbf{0}_{\mathcal{T}(\mathbb{C})}} \mathcal{Y}_{\Phi\mathbb{C}}(Y,q)\right)(X,f) \\
&= \mathbf{a}_{\Lambda\mathbb{C}}\left(\mathcal{Y}_{\Phi\mathbb{C}}(\mathbf{0}_{\mathcal{T}(\mathbb{C})})\right)(X,f) \\
&= \mathcal{Y}_{\Phi\mathbb{C}}(\mathbf{0}_{\mathcal{T}(\mathbb{C})})(X,f) \\
&= \mathbf{Hom}_{\Lambda\mathbb{C}}\left(-,(\mathbf{0}_{\mathbb{C}},\{1_{\mathbf{0}_{\mathbb{C}}}\})\right)(X,f) \\
&= \mathbf{Hom}_{\Lambda\mathbb{C}}\left((X,f),(\mathbf{0}_{\mathbb{C}},\{1_{\mathbf{0}_{\mathbb{C}}}\})\right) \\
&\simeq \begin{cases} \{*\} & \text{si } (X,f) = \mathbf{0}_{\Lambda\mathbb{C}} \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \mathbf{0}_{\Phi\mathbb{C}}
\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons également montré que f est dense. ∎

5.3. Conditions pour l'équivalence de $\Phi(\mathbb{C})$ et $\mathcal{T}(\mathbb{C})$

La présente section a pour but de généraliser le théorème 2.3.3 autant que possible au contexte du premier ordre. Jusqu'à maintenant nous avons introduit le morphisme de comparaison entre le topos des filtres et le topos des types comme étant induit par une comparaison des sites sous-jacents. Nous avons aussi une autre façon de voir ce morphisme de comparaison : il provient de la propriété quasi-universelle du topos des filtres. En effet, comme le topos des types est engendré par ses éléments premiers on a qu'il est en particulier complètement distributif et puisque

$$\mathbb{C} \xrightarrow{E_{\mathbb{C}}} \mathcal{T}(\mathbb{C})$$

est un p-modèle c'est aussi un f-modèle par les propositions 4.4.1 et 4.4.2. Ainsi, nous pouvons appliquer la propriété quasi-universelle du topos des filtres pour obtenir un unique morphisme géométrique

$$(E_{\mathbb{C}}^*, E_{\mathbb{C}*}) : \mathcal{T}(\mathbb{C}) \longrightarrow \Phi(\mathbb{C})$$

tel que $E_{\mathbb{C}}^*$ préserve les infima arbitraires et fait commuter :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "I_{\mathbb{C}}"] \arrow[dr, "E_{\mathbb{C}}"'] & \Phi(\mathbb{C}) \arrow[d, "E^*_{\mathbb{C}}"] \\ & \mathcal{T}(\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

Cette nouvelle définition du morphisme de comparaison nous permet de calculer facilement l'action de $E^*_{\mathbb{C}}$ sur les sous-objets d'objets qui proviennent de $\mathbb{C}$. La proposition suivante nous montre comment.

PROPOSITION 5.3.1 **(Calcul du morphisme de comparaison)** *Selon les caratérisations des treillis des sous-objets provenant de $\mathbb{C}$ dans les topos des filtres et le topos des types. Le foncteur de comparaison*

$$\Phi(\mathbb{C}) \xrightarrow{E^*_{\mathbb{C}}} \mathcal{T}(\mathbb{C})$$

agit exactement comme le morphisme de comparaison entre le locale des filtres et le double dual dans le contexte propositionnel. C'est-à-dire que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{S}_{\Phi(\mathbb{C})}(I_{\mathbb{C}}C) \arrow[r, "E^*_{\mathbb{C}I_{\mathbb{C}}C}"] & \mathbf{S}_{\mathcal{T}(\mathbb{C})}(E_{\mathbb{C}}C) \\ \phi\,(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}C) \arrow[u, "\simeq"] \arrow[r, "(\cdot)^{\mathbf{S}_{\mathbb{C}}C}_{\mathcal{P}}"'] \arrow[ur, phantom, "\circ"] & \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(C)^{*\#} \arrow[u, "\simeq"'] \end{tikzcd}$$

PREUVE: Tout devient clair quand on regarde le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} \phi(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}C) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[rrr, bend left, "(\cdot)^{\mathbf{S}_{\mathbb{C}}C}_{\mathcal{P}}"] & \mathbf{S}_{\Phi\mathbb{C}}(I_{\mathbb{C}}C) \arrow[r, "E^*_{\mathbb{C}I_{\mathbb{C}}C}"] & \mathbf{S}_{\mathcal{T}\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}C) \arrow[r, "\simeq"] & \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(C)^{*\#} \\ \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(C) \arrow[u, "i_{\mathbf{S}_{\mathbb{C}}C}"] \arrow[ur, "I_{\mathbb{C}C}"] \arrow[urr, "E_{\mathbb{C}C}"] \arrow[urrr, "e_{\mathbf{S}_{\mathbb{C}}C}"'] & & & \end{tikzcd}$$

On obtient clairement le résultat en appliquant la propriété universelle de $\phi(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}C)$. ∎

La proposition précédente est surprenante par les images qu'elle génère en nous. Le morphisme géométrique de comparaison entre nos deux topos agit sur les treillis de sous-objets exactement comme le morphisme de comparaison des versions propositionnelles des contructions. Nous sommes donc encore face à un de ces résultats qui fait le pont entre la partie propositionnelle et la partie du premier ordre.

Avant de nous attaquer au résultat principal de la présente section, nous avons besoin d'un résultat général qui m'a été signalé par Gonzalo E. Reyes.

LEMME 5.3.1 *Supposons que nous avons un morphisme géométrique entre deux topos :*

$$f = (f^*, f_*) : \mathcal{F} \rightarrowtail \mathcal{E}$$

qui est une inclusion de topos. Supposons de plus qu'il y ait une famille de générateurs $\mathcal{E}_0$ dans $\mathcal{E}$ pour lesquels on a la condition suivante. Pour chaque générateur $C \in |\mathcal{E}_0|$ l'action de f^* sur les sous-objets de C :

$$f^*_C : \mathbf{S}_{\mathcal{E}}(C) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{S}_{\mathcal{F}}(f^*C)$$

est un isomorphisme de cadres. Alors f est une équivalence.

PREUVE: Comme f est une inclusion il suffit de montrer que f est une surjection et on aura bien que f est une équivalence (voir **[12]** p.103). Un morphisme géométrique est une surjection lorsque f^* est fidèle.

Nous allons premièrement montrer que l'isomorphisme induit par f^* sur les treillis de sous-objets de générateurs s'étend aux autres objets de $\mathcal{E}$. Soit $E \in |\mathcal{E}|$ un objet quelconque. On considère le morphisme de cadres

$$f^*_E : \mathbf{S}_{\mathcal{E}}(E) \longrightarrow \mathbf{S}_{\mathcal{F}}(f^*E)$$

Nous voulons montrer que f^*_E est une bijection. Pour montrer que f^*_E est injective on suppose qu'on a $A, B \in \mathbf{S}_{\mathcal{E}}(E)$ tels que

$$f^*_E(A) = f^*_E(B)$$

On peut supposer que $A \leq B$ (sinon on peut considérer $A \wedge B \leq B$ et on aura toujours

$$f^*_E(A \wedge B) = f^*_E(A) \wedge f^*_E(B) = f^*_E(A) = f^*_E(B)$$

et on se retrouve avec les mêmes conditions en posant $A' \equiv A \wedge B$). Pour un générateur $C \in |\mathcal{E}_0|$ on considère un C-élément de B : $C \xrightarrow{\beta} B$ et nous prenons le produit fibré suivant dans $\mathcal{E}$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail] & B \\ \beta^*A \arrow[u] \arrow[r, tail] \arrow[ur, phantom, "\square"] & C \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd} \quad (5.3.1)$$

auquel on applique f^* (qui est lex) pour obtenir :

$$\begin{tikzcd}
f^*A \arrow[r, tail, "\simeq"] & f^*B \\
f^*(\beta^*A) \arrow[u] \arrow[r, tail, "\therefore\simeq"'] \arrow[ur, phantom, "\square"] & f^*C \arrow[u, "f^*\beta"']
\end{tikzcd}$$

Ainsi on a que $f^*_C(\beta^*A) = f^*C$ mais comme par hypothèse

$$f^*_C : \mathbf{S}_{\mathcal{E}}(C) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{S}_{\mathcal{F}}(f^*C)$$

est un isomorphisme de cadres on a que $\beta^*A = C$. En retournant au diagramme 5.3.1 on voit que cela implique que β est un C-élément de A également. Ainsi, A et B ont les mêmes C-éléments donc ils représentent le même sous-objet de E i.e. $A = B$.

Montrons maintenant que f^*_E est surjective. Remarquons tout d'abord que puisque f est une inclusion on a par définition que la counité de l'adjonction $f^* \dashv f_*$ est un isomorphisme. Prenons $X \in \mathbf{S}_{\mathcal{F}}(f^*E)$ nous cherchons un sous-objet $A \in \mathbf{S}_{\mathcal{E}}(E)$ pour lequel on ait $f^*_E(A) = X$. Considérons pour cela le produit fibré du sous-objet $f_*X \rightarrowtail f_*f^*E$ le long de l'unité de f comme le montre le diagramme suivant qui définit le sous-objet A :

$$\begin{tikzcd}
f_*X \arrow[r, tail] & f_*f^*E \\
A \arrow[u] \arrow[r, tail] \arrow[ur, phantom, "\square"] & E \arrow[u, "\eta_E"']
\end{tikzcd}$$

Ainsi, si on applique f^* à ce produit fibré et qu'on ajoute dans le diagramme résultant des composantes appropriées de la counité on obtient :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail] & f^*E \\
f^*f_*X \arrow[u, "\epsilon_X", "\simeq"'] \arrow[r, tail] & f^*f_*f^*E \arrow[u, "\simeq", "\epsilon_{f^*E}"'] \\
f^*A \arrow[u] \arrow[r, tail] \arrow[ur, phantom, "\square"] & f^*E \arrow[u, "f^*\eta_{f^*E}"'] \arrow[uu, bend right=60, "1"']
\end{tikzcd} \tag{5.3.2}$$

dans lequel on voit que par la naturalité de l'adjonction on a

$$\epsilon_{f^*E} \circ f^*\eta_{f^*E} = 1_{f^*E}$$

car on a la correspondance suivante :

$$\frac{\begin{tikzcd} f_*f^*E \arrow[r, "1"] & f_*f^*E \\ E \arrow[u, "\eta_E"] \arrow[ur, "\eta_E"'] \arrow[u, phantom, shift left=4, "\circ"] \end{tikzcd}}{\begin{tikzcd} f^*f_*f^*E \arrow[r, "\epsilon_{f^*E}"] & f^*E \\ f^*E \arrow[u, "f^*\eta_E"] \arrow[ur, "1"'] \arrow[u, phantom, shift left=4, "\circ"] \end{tikzcd}}$$

Ainsi, la composition des deux morphismes verticaux à droite dans 5.3.2 nous donne le morphisme identité. Mais comme celui du haut est un isomorphisme on en déduit que celui du bas aussi est un isomorphisme. Donc $f^*\eta_{f^*E}$ est iso. On en déduit, toujours en regardant le diagramme 5.3.2, que le morphisme vertical en bas à gauche est aussi un iso donc $f^*A \simeq X$ i.e. $f_E^*(A) = X$ comme nous voulions justement montrer. Donc f^*E est surjectif.

Nous avons ainsi montré que pour tout objet $E \in |\mathcal{E}|$ le morphisme de cadres

$$f_E^* : \mathbf{S}_{\mathcal{E}}(E) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{S}_{\mathcal{F}}(f^*E)$$

est un isomorphisme. Montrons que cela implique que f^* est fidèle.

Supposons qu'on ait deux morphismes

$$E \overset{\delta_1}{\underset{\delta_2}{\rightrightarrows}} F \in \mathcal{E}$$

tels que $f^*(\delta_1) = f^*(\delta_2)$. Nous voulons montrer que $\delta_1 = \delta_2$. Pour cela, considérons les graphes de ces deux morphismes. Ce sont par définition les deux sous-objets suivants de $E \times F$:

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\mathfrak{g}\delta_1"] \arrow[ddl, bend right, "1_E"'] \arrow[ddr, bend left, "\delta_1"] & \\ & E \times F \arrow[dl, "\pi_E"] \arrow[dr, "\pi_F"'] & \\ E & & F \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\mathfrak{g}\delta_2"] \arrow[ddl, bend right, "1_E"'] \arrow[ddr, bend left, "\delta_2"] & \\ & E \times F \arrow[dl, "\pi_E"] \arrow[dr, "\pi_F"'] & \\ E & & F \end{tikzcd}$$

Mais comme $f^*(\delta_1) = f^*(\delta_2)$ on a que si on applique f^* à ces deux diagrammes on obtient par la préservation des limites finies de f^* que

$$f^*_{E\times F}(\mathfrak{g}\delta_1) = \mathfrak{g}(f^*\delta_1) = \mathfrak{g}(f^*\delta_2) = f^*_{E\times F}(\mathfrak{g}\delta_2)$$

mais comme $f^*_{E\times F}$ est un isomorphisme de cadres on obtient bien que $\mathfrak{g}(\delta_1) = \mathfrak{g}(\delta_2)$ et il est facile de voir que si le graphe de deux morphismes coïncident, alors les deux morphismes sont les mêmes (ceci découle directement de la définition de graphe donnée ci-dessus) donc $\delta_1 = \delta_2$. Nous avons donc bien montré que f^* est fidèle. ∎

Le lemme suivant nous montre comment étendre la propriété que l'action d'un foncteur sur le treillis des sous-objets d'un objet qui provient de C soit un isomorphisme à tous les treillis de sous-objets de représentables $\mathcal{Y}_{\Lambda\mathbb{C}}(C,f)$ qui vivent sous lui.

LEMME 5.3.2 **(Extension de l'équivalence aux représentables)** *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie cohérente, $C \in |\mathbb{C}|$. Si l'action du foncteur de comparaison (entre le topos des filtres et le topos des types) sur le treillis des sous-objets de $I_{\mathbb{C}}(C)$:*

$$E^*_{\mathbb{C}I_{\mathbb{C}}(C)} : \mathbf{S}_{\Phi\mathbb{C}}\left(\mathcal{Y}_{\Lambda\mathbb{C}}[C]\right) = \mathbf{S}_{\Phi\mathbb{C}}\left(I_{\mathbb{C}}C\right) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{S}_{\mathcal{T}\mathbb{C}}\left(E^*_{\mathbb{C}}(I_{\mathbb{C}}C)\right) = \mathbf{S}_{\mathcal{T}\mathbb{C}}\left(E_{\mathbb{C}}C\right)$$

est un isomorphisme de cadres, alors pour tout filtre $f \in \mathfrak{F}(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}C)$ on a que l'action du morphisme de comparaison sur le treillis des sous-objets de $\mathcal{Y}_{\Lambda\mathbb{C}}(C,f)$:

$$E^*_{\mathbb{C}\mathcal{Y}_{\Lambda\mathbb{C}}(C,f)} : \mathbf{S}_{\Phi\mathbb{C}}\left(\mathcal{Y}_{\Lambda\mathbb{C}}(C,f)\right) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{S}_{\mathcal{T}\mathbb{C}}\left(E^*_{\mathbb{C}}(\mathcal{Y}_{\Lambda\mathbb{C}}(C,f))\right) = \mathbf{S}_{\mathcal{T}\mathbb{C}}\left(\widehat{E_{\mathbb{C}}}(C,f)\right)$$

est un isomorphisme de cadres.

PREUVE: La preuve se bâtira autour du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{S}_{\Phi\mathbb{C}}\left(\mathcal{Y}_{\Lambda\mathbb{C}}(C,f)\right) \arrow[rr, two heads, "\simeq_4"] \arrow[dd, dashed, bend right] & & \mathbf{S}_{\mathcal{T}}\left(\widehat{E_{\mathcal{C}}}(C,f)\right) \arrow[dd, dashed, bend right] \\
\mathfrak{I}(\downarrow f) \arrow[ur, "\simeq"] \arrow[rr, two heads, "\simeq_3"] \arrow[dd, dashed, bend right] & & \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(C)^{*_f\#} \arrow[ur, "\simeq"] \arrow[dd, dashed, bend right] & \\
 & \mathbf{S}_{\Phi\mathbb{C}}\left(\mathcal{Y}_{\Lambda\mathbb{C}}[C]\right) \arrow[rr, two heads, "\simeq_1"] \arrow[uu] & & \mathbf{S}_{\mathcal{T}\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}C) \arrow[uu] \\
\phi(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}C) \arrow[ur, "\simeq"] \arrow[rr, two heads, "\simeq_2", "(\cdot)_{\mathcal{P}}"'] \arrow[uu] & & \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(C)^{*\#} \arrow[ur, "\simeq"'] \arrow[uu] &
\end{tikzcd} \qquad (5.3.3)$$

Nous y voyons en bas au fond l'isomorphisme $\simeq_1$ qu'on a par hypothèse. De plus, puisque (comme nous le verrons) les morphismes en bas de la face gauche et droite sont des isomorphismes donc nous pouvons déduire que le deuxième isomorphisme noté sur le dessin $\simeq_2$ est effectivement un isomorphisme. Ceci est donc devenu une propriété strictement propositionelle de $\mathbb{C}$.

Nous allons ensuite démontrer que cela implique que $\simeq_3$ est un isomorphisme et nous aurons donc finalement que $\simeq_4$ est un isomorphisme comme voulu.

Donnons premièrement les définitions de tous ces beaux morphismes. La face de gauche provient du diagramme étudié dans le chapitre 3 :

$$\begin{tikzcd}
{\downarrow f} \arrow[r, hook, shift left] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathfrak{F}(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}C) \arrow[l, bend left, "(\cdot)\wedge f", "\perp"'] \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathbf{S}_{\Lambda\mathbb{C}}(C,f) \arrow[r, hook, shift left] & \mathbf{S}_{\Lambda\mathbb{C}}([C]) \arrow[l, bend left, "(\cdot)\wedge(C,f)", "\perp"']
\end{tikzcd}$$

auquel on applique le foncteur $\mathfrak{I}(\cdot)$ de façon à obtenir (en complétant avec des isomorphismes connus) :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{I}(\downarrow f) \arrow[r, dashed, bend left, "\mathfrak{I}(\text{incl.})"] \arrow[r, dashed, bend right, "((\cdot)\wedge f)^{-1}"'] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathfrak{I}\mathfrak{F}(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}C) \arrow[l, two heads, "\mathfrak{I}((\cdot)\wedge f)"'] \arrow[d, "\simeq"] = \phi(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}C) \\
\mathfrak{I}\left(\mathbf{S}_{\Lambda\mathbb{C}}(C,f)\right) \arrow[r, dashed, bend left, "\mathfrak{I}(\text{incl.})"] \arrow[r, dashed, bend right, "((\cdot)\wedge(C,f))^{-1}"'] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathfrak{I}\left(\mathbf{S}_{\Lambda\mathbb{C}}[C]\right) \arrow[l, two heads, "\mathfrak{I}((\cdot)\wedge(C,f))"'] \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathbf{S}_{\Phi\mathbb{C}}\left(\mathfrak{Y}_{\Lambda\mathbb{C}}(C,f)\right) \arrow[r, dashed, bend left] \arrow[r, dashed, bend right] & \mathbf{S}_{\Phi\mathbb{C}}(\mathfrak{Y}_{\Lambda\mathbb{C}}[C]) = \mathbf{S}_{\Phi\mathbb{C}}\left(I_{\mathbb{C}}C\right) \arrow[l, two heads]
\end{tikzcd} \tag{5.3.4}$$

La face de droite, quant-à-elle, se construit en considérant le diagramme suivant dans la catégorie des ensembles partiellement ordonnés :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(C)^{*f} \arrow[r, hook] & \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(C)^{*} \\
\mathfrak{Irr}\left(\mathbf{S}_{\mathcal{T}\mathbb{C}}(\mathfrak{Y}_{\Lambda\mathbb{C}}(C,f))\right) \arrow[r, hook] \arrow[u, "\simeq"] & \mathfrak{Irr}\left(\mathbf{S}_{\mathcal{T}\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}C)\right) \arrow[u, "\simeq"']
\end{tikzcd}$$

où

$$\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(C)^{*f} \equiv \{p \in \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(C)^{*} \mid p \leq f\}$$

doit être considéré comme un sous-ensemble partiellement ordonné de $\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(C)^{*}$. L'inclusion du bas quant à elle est l'inclusion des éléments premiers de

$$\mathbf{S}_{\mathcal{T}\mathbb{C}}\left(\mathfrak{Y}_{\Lambda\mathbb{C}}(C,f)\right)$$

dans les éléments premiers de $\mathrm{S}_{\mathcal{T}\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}C)$ lorsqu'on voit ceux-ci comme étant inclus dans ceux-là. L'isomorphisme de gauche provient du fait que les éléments complètement premiers de $\mathrm{S}_{\mathcal{T}\mathbb{C}}\,(\mathfrak{Y}_{\Lambda\mathbb{C}}(C,f))$ sont précisément les éléments complètement premiers de $\mathrm{S}_{\mathcal{T}\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}C)$ soient les $\mathfrak{Y}_{\Lambda\mathbb{C}}(C,p)$ mais qui se factorisent par $\mathfrak{Y}_{\Lambda\mathbb{C}}(C,f)$. Ainsi les premiers de $\mathrm{S}_{\mathcal{T}\mathbb{C}}\,(\mathfrak{Y}_{\Lambda\mathbb{C}}(C,f))$ sont exactement les les $\mathfrak{Y}_{\Lambda\mathbb{C}}(C,p)$ avec $p \leq f$. C'est ce qui explique l'isomorphisme de gauche. Appliquons maintenant le foncteur $(\cdot)^{\#}$ à ce dernier diagramme de façon à ce qu'on obtienne :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{S}_{\mathbb{C}}(C)^{*f\#} \arrow[r, dashed, bend left] \arrow[r, dashed, bend right] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathrm{S}_{\mathbb{C}}(C)^{*\#} \arrow[l, two heads] \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathfrak{Irr}(\mathrm{S}_{\mathcal{T}\mathbb{C}}\,(\mathfrak{Y}_{\Lambda\mathbb{C}}(C,f)))^{\#} \arrow[r, dashed, bend left] \arrow[r, dashed, bend right] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathfrak{Irr}(\mathrm{S}_{\mathcal{T}\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}C))^{\#} \arrow[l, two heads] \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathrm{S}_{\mathcal{T}\mathbb{C}}(\mathfrak{Y}_{\Lambda\mathbb{C}}(C,f)) \arrow[r, dashed, bend left] \arrow[r, dashed, bend right] & \mathrm{S}_{\mathcal{T}\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}C) \arrow[l, two heads]
\end{tikzcd}$$

où les deux isomorphismes verticaux du bas sont les counité de l'équivalence de catégories vue au chapitre 1. Les adjoints en pointillé sont les adjoints naturels des morphismes obtenus en appliquant le foncteur $(\cdot)^{\#}$ à un morphisme d'ensembles partiellement ordonné.

Nous reconnaissons aussi le rectangle du dessous que nous avons étudié à la proposition 5.3.1. Ainsi, $\simeq_2$ est bien un isomorphisme.

Montrons que nous pouvons déduire que $\simeq_3$ est un isomorphisme. Pour cela, nous considérons la face de devant de 5.3.3. Il est aisé de voir que $\simeq_3$ est essentiellement la restriction de $(\cdot)_{\mathcal{P}}$ et fait commuter le rectangle formé des épimorphismes.

Étudions ce que veut dire que le morphisme $\simeq_2$ soit effectivement iso. Nous connaissons bien les adjoints de $(\cdot)_{\mathcal{P}}$ qui associent à $X \in \mathrm{S}_{\mathbb{C}}(C)^{*\#}$:

$$\hat{X} \equiv \bigvee_{p \in X} \downarrow p \qquad \check{X} \equiv \bigvee \{J \mid (J)_{\mathcal{P}} \subseteq X\}$$

où $\hat{(\cdot)} \dashv (\cdot)_{\mathcal{P}} \dashv \check{(\cdot)}$. Nous avons vu que si $\phi(\mathrm{S}_{\mathbb{C}}C)$ est engendré par ses éléments premiers, alors ses éléments premiers sont de la forme $\downarrow p$ et on voit clairement que les deux ajoints définis ci-dessus coïncident donc on a bien un isomorphisme. En fait, nous voyons clairement avec cette remarque que $\phi(\mathrm{S}_{\mathbb{C}}C)$ est engendré par ses éléments premiers si et seulement si ces deux adjoints coincident (et cela est aussi équivalent à dire que $(\cdot)_{\mathcal{P}}$ est un isomorphisme).

On remarque que la situation est la même avec les trois morphismes adjoints du haut de la face de devant de 5.3.3. En effet, comme nous l'avons dit, l'épimorphisme étiqueté $\simeq_3$ envoie un $J \in \mathfrak{I}(\downarrow f)$ sur

$$(\cdot)^f_{\mathcal{P}} \equiv \{p \in \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(C)^{*f} \mid p \in J\}$$

et ses deux adjoints sont donc les morphismes qui envoient $X \in \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(C)^{*f\#}$ sur :

$$\hat{X}_f \equiv \bigvee_{p \in X} \downarrow p \qquad \check{X}_f \equiv \bigvee \left\{ J \mid (J)^f_{\mathcal{P}} \subseteq X \right\}$$

où $\hat{(\cdot)}_f \dashv (\cdot)^f_{\mathcal{P}} \dashv \check{(\cdot)}_f$. Ainsi, nous voyons que la situation est identique donc pour montrer que $\simeq_3$ est iso il suffit de montrer que $\mathfrak{I}(\downarrow f)$ est engendré par ses éléments premiers. Mais ceci est évident si on revient au diagramme 5.3.4 dans lequel on a les adjoints suivants :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{I}(\downarrow f) \arrow[rr, bend left, dashed, tail, "\mathfrak{I}(\text{incl.})"] \arrow[rr, bend right, dashed, tail, "((\cdot)\wedge f)^{-1}"'] & & \phi(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}C) \arrow[ll, two heads, "\mathfrak{I}((\cdot)\wedge f)"']
\end{tikzcd}$$

où $\mathfrak{I}(\text{incl.} \dashv \mathfrak{I}((\cdot) \wedge f) \dashv ((\cdot) \wedge f)^{-1}$. En effet, $\mathfrak{I}(\text{incl.})$ est l'inclusion pure et simple car tout idéal sur les filtres inférieurs ou égals à f est aussi un idéal sur tous les filtres. De plus, lorsque $p \leq f$ on a que $\downarrow p \in \mathfrak{I}(\downarrow f)$ et ces éléments sont complètement premiers dans $\mathfrak{I}(\downarrow f)$ car si dans $\mathfrak{I}(\downarrow f)$ on a

$$\downarrow p \subseteq \bigvee_{i \in I} J_i$$

alors cette situation se transporte dans $\phi(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}C)$ avec l'inclusion (qui préserve les suprema car elle a un adjoint à droite) d'où on a que dans $\phi(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}C)$:

$$\downarrow p \subseteq \bigvee_{i \in I} J_i$$

et comme $\downarrow p$ est un élément complètement premier de $\phi(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}C)$ on en déduit que $\downarrow p \subseteq J_i$ pour un certain J_i. Ceci montre clairement que $\downarrow p$ est complètement premier dans $\mathfrak{I}(\downarrow f)$ car cette dernère inclusion se fait entre des objets dans $\phi(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}C)$ qui proviennent de $\mathfrak{I}(\downarrow f)$ donc elle est déjà une inclusion dans $\mathfrak{I}(\downarrow f)$ car le morphisme inclusion de $\mathfrak{I}(\downarrow f) \subseteq \phi(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}C)$ est mono. De plus, ces éléments sont suffisants pour engendrer $\mathfrak{I}(\downarrow f)$ car ils le font dans $\phi(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}C)$.

Ainsi, les deux adjoints de $(\cdot)^f_{\mathcal{P}}$ doivent coïncider et $\simeq_3$ est bien iso.

Finalement, nous utilisons les isomorphismes latéraux du dessus de 5.3.3 pour déduire enfin que $\simeq_4$ est iso. Nous avons donc suivi l'isomorphisme $\simeq_1$ autour du parralélépipède 5.3.3 jusqu'à ce qu'il se transporte en $\simeq_4$. Nous avons donc atteint le but cherché. ∎

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer le résultat principal de la présente section qui généralise le théorème 2.3.3 du chapitre 2.

THÉORÈME 5.3.1 **(Conditions pour l'équivalence entre $\Phi(\mathbb{C})$ et $\mathcal{T}(\mathbb{C})$)** *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie cohérente. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le foncteur de comparaison $E^*_{\mathbb{C}} : \Phi(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{T}(\mathbb{C})$ est une équivalence.*
2. *Pour tout objet $X \in |\mathbb{C}|$ on a que tout filtre $f \in \mathfrak{F}(\mathrm{S}_{\mathbb{C}}(X))$ peut s'écrire comme une intersection finie des filtres premiers sur $\mathrm{S}_{\mathbb{C}}(X)$.*
3. *Le topos $\Phi(\mathbb{C})$ est engendré par ses éléments premiers.*
4. *Le topos $\Phi(\mathbb{C})$ est complètement distributif.*

PREUVE: (1 ⇒ 2) Si $E^*_{\mathbb{C}}$ est une équivalence alors il induit des isophormorphismes de cadres au niveau de chaque treillis des sous-objets :

$$E^*_{\mathbb{C}F} : \mathrm{S}_{\Phi\mathbb{C}}(F) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{S}_{\mathcal{T}\mathbb{C}}(E^*_{\mathbb{C}}F)$$

et ce en particulier pour les objets qui proviennent de $\mathbb{C}$. Mais nous avons vu à la proposition 5.3.1 qu'au niveau d'objets provenant de $\mathbb{C}$, l'action de $E^*_{\mathbb{C}}$ est

$$\phi(\mathrm{S}_{\mathbb{C}}C) \xrightarrow{(\cdot)^{\mathrm{S}_{\mathbb{C}}C}_{\mathcal{P}}} \mathrm{S}_{\mathbb{C}}(C)^{*\#}$$

qui est le morphisme de comparaison entre les constructions du locale des filtres et du double dual sur le treillis distributif $\mathrm{S}_{\mathbb{C}}(C)$. Le théorème 2.3.3 nous donne clairement le résultat 2.

(2 ⇒ 3) Par la partie propositionelle, on a que pour tout $C \in |\mathbb{C}|$ le morphisme du bas de la proposition 5.3.1 est iso donc celui du haut l'est aussi. Mais par le lemme 5.3.2 cette propriété s'étend à tous les représentables $\mathbf{y}_{\Lambda\mathbb{C}}(C, f)$. Ainsi nous avons les hypothèses requises par le lemme 5.3.1 en prenant pour générateurs les représentables. Donc $E^*_{\mathbb{C}}$ est une équivalence de catégories. Ceci implique clairement que $\Phi(\mathbb{C})$ est engendré par ses éléments premiers car il est équivalent au topos des types qui est toujours engendré par ses éléments premiers.

(3 ⇒ 4) est évident. (4 ⇒ 2) est aussi évident car lorsque $\Phi(\mathbb{C})$ est complètement distributif alors

$$\mathrm{S}_{\Phi\mathbb{C}}(I_{\mathbb{C}}C) \simeq \phi\,(\mathrm{S}_{\mathbb{C}}C)$$

sont complètement distributifs et donc toujours par la partie propositionnelle cela veut dire qu'on a la condition 2.

(3 ⇒ 1) Ici, on peut appliquer la propriété universelle du topos des types à $I_{\mathbb{C}}$ car $\Phi\mathbb{C}$ est engendré par ses éléments premiers. Ainsi, le topos des types et le topos des filtres se trouvent tous les deux à être universels par rapport aux p-modèles (le topos des filtres est universel par rapport aux f-modèles mais le modèle $E_{\mathbb{C}}$ est toujours un f-modèle) donc ils sont équivalents.

Nous avons donc bien construit un chemin (formé de sens-uniques) qui nous permet d'aller et de revenir entre toutes ces conditions. ∎

En comparant avec le théorème 2.3.3 nous voyons que la ressemblance est frappante. Seule la condition 2 est disparue. Ceci n'est pas étonnant car elle n'est pas très catégorique.

5.4. Conditions pour l'équivalence avec $\mathcal{B}(\mathbb{C})$

Maintenant que nous avons vus nos outils en action pour nous aider à comparer le topos des types $\mathcal{T}(\mathbb{C})$ au topos des filtres $\Phi(\mathbb{C})$, il semble naturel d'étudier les conditions d'équivalence des ces deux dernières constructions avec une autre construction fondamentale de la logique catégorique : le topos classifiant de $\mathbb{C}$ que nous noterons par $\mathcal{B}(\mathbb{C})$.

Remarquons que nous avons souvent mentionné le topos classifiant sans pourtant en donner une définition. Contentons nous de dire que dans notre cas particulier, comme nous nous intéressons aux théories cohérentes, le topos classifiant de ces théories est bien connu et est décrit dans **[27]**. En effet,

$$\mathcal{B}(\mathbb{C}) \equiv Sh(\mathbb{C}, \mathfrak{T}_{\mathbb{C}})$$

où $\mathfrak{T}_{\mathbb{C}}$ est la topologie pré-canonique sur $\mathbb{C}$ (qui est engendrée par les familles épimorphiques finies) satisfait une propriété universelle remarquable. En effet, tout foncteur cohérent (ou modèle) $M : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{F}$ se factorise par le plongement canonique de $\mathbb{C}$ dans $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ comme le montre le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "\mathcal{Y}_{\mathbb{C}}"] \arrow[dr, "M"'] & \mathcal{B}(\mathbb{C}) \arrow[d, "M^*"] \\ & \mathcal{F} \arrow[u, dotted, bend left, "M_*"] \arrow[u, phantom, "\vdash"] \end{tikzcd}$$

La topologie pré-canonique est sous-canonique donc tous les représentables sont des faisceaux et Yoneda $\mathcal{Y}_{\mathbb{C}}$ nous donne un plongement plein et fidèle de $\mathbb{C}$ dans $\mathcal{B}(\mathbb{C})$. En fait, la composition avec Yoneda nous donne une équivalence de catégories :

$$\mathrm{Geom}\,(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{C})) \xrightarrow{(\cdot)\circ\mathcal{Y}_{\mathbb{C}}} \mathrm{Coh}\,(\mathbb{C}, \mathcal{F})$$

entre la catégorie des morphismes géométriques d'un topos de Grothendieck $\mathcal{F}$ dans le topos classifiant $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ et la catégorie des foncteurs cohérents (où modèles) de $\mathbb{C}$ dans $\mathcal{F}$.

La notion générale de topos classifiant intervient quand on cherche pour une catégorie $\mathbb{C}_{\mathbb{T}}$ d'une doctrine logique $\mathbb{T}$ quelconque un topos $\mathcal{B}_{\mathbb{T}}(\mathbb{C}_{\mathbb{T}})$ pour lequel on a une équivalence

$$\mathrm{Geom}\,(\mathcal{F}, \mathcal{B}_{\mathbb{T}}(\mathbb{C}_{\mathbb{T}})) \xrightarrow{(\cdot)\circ\mathcal{Y}_{\mathbb{C}_{\mathbb{T}}}} \mathbb{T} - \mathbf{Mod}\,(\mathbb{C}_{\mathbb{T}}, \mathcal{F})$$

Nous avons donné à la proposition 3.4.2 une représentation des treillis de sous-objets d'objets représentables dans le topos classifiant. Ce cadre est le locale classifiant de la théorie propositionnelle des propositions sur C. En voulant comparer le topos classifiant avec le topos de Pitts nous seront amenés naturellement à comparer le locale classifiant avec le locale des filtres.

Comment pouvons-nous en effet comparer ces deux topos ? Par la propriété universelle du topos classifiant, puisque $I_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \longrightarrow \Phi(\mathbb{C})$ est un foncteur cohérent il existe un unique morphisme géométrique $(p^*, p_*) : \Phi(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{C})$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "\mathcal{Y}_{\mathbb{C}}"] \arrow[dr, "I_{\mathbb{C}}"'] & \mathcal{B}(\mathbb{C}) \arrow[d, "p^*"] \\ & \Phi(\mathbb{C}) \arrow[u, dotted, bend left, "p_*"] \arrow[u, phantom, "\vdash"] \end{tikzcd}$$

La proposition suivante nous donne une condition nécessaire et suffisante pour que ce foncteur de comparaison entre le topos classifiant et le topos des filtres soit une équivalence. Énonçons d'abord un lemme qui vend la mèche sur les conditions pour qu'on ait équivalence.

LEMME 5.4.1 **(Condition d'équivalence entre $\mathbb{C}$ et $\Lambda\mathbb{C}$)** *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie cohérente. Le foncteur de plongement canonique de $\mathbb{C}$ dans $\Lambda\mathbb{C}$:*

$$\mathbb{C} \xrightarrow{[\cdot]_{\mathbb{C}}} \Lambda\mathbb{C}$$

est une équivalence si et seulement si tous les filtres sur $\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(C)$ sont principaux pour tout $C \in |\mathbb{C}|$.

PREUVE: Nous avons déjà montré que $[\cdot]_{\mathbb{C}}$ est plein et fidèle donc c'est une équivalence si et seulement si il est essentiellement surjectif et ceci est equivalent à dire que tous les filtres sur $\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(C)$ sont principaux pour tout $C \in |\mathbb{C}|$. En effet, si tous les filtres sont principaux alors $[\cdot]_{\mathbb{C}}$ est essentiellement surjectif car quel que soit $C \in |\mathbb{C}$ et $f \in \mathfrak{F}(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}C)$, on peut trouver $A \in f$ (car tous les filtres sont principaux) tel que

$$(C, f) = (C, \uparrow A) \simeq [A]$$

donc c'est une équivalence.

D'autre part, si $[\cdot]_{\mathbb{C}}$ est une équivalence, alors tous les morphismes du diagramme suivant sont des isomorphismes de treillis :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(C) \arrow[r, tail, "\uparrow_{\mathbf{S}_{\mathbb{C}}C}", "\simeq"'] \arrow[dr, "\simeq", "{[\cdot]_{\mathbb{C}_C}}"'] & \mathfrak{F}(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}C) \arrow[d, "\simeq"] \\
 & \mathbf{S}_{\Lambda\mathbb{C}}([C])
\end{tikzcd}$$

donc tout filtre sur $\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(C)$ est dans l'image de $\uparrow_{\mathbf{S}_{\mathbb{C}}C}$ i.e. tout filtre de $\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(C)$ est principal. ∎

La proposition suivante permet d'échanger l'équivalence entre les topos et les sites sous-jacents.

PROPOSITION 5.4.1 **(La comparaison des sites est suffisante)** *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie cohérente. Le foncteur de comparaison*

$$\mathcal{B}(\mathbb{C}) \xrightarrow{p^*} \Phi(\mathbb{C})$$

est une équivalence si et seulement si le plongement de $\mathbb{C}$ dans la catégories des filtres $\Lambda\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C} \xrightarrow{[\cdot]_{\mathbb{C}}} \Lambda\mathbb{C}$$

est une équivalence de catégories.

PREUVE:

Nous commençons par étudier certains diagrammes pertinents dans notre contexte. Nous verrons plus tard comment on démontre la proposition à partir de ces considérations. On considère pour chaque $C \in |\mathbb{C}|$ le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(C) \arrow[rr, tail, "y_{\mathbb{C}C}"] \arrow[dl, equal] \arrow[dd, "{[\cdot]_{\mathbb{C}C}}"'] & & \mathbf{S}_{\mathcal{B}\mathbb{C}}(\mathcal{Y}_{\mathbb{C}}C) \arrow[dd, "p^*_{y_{\mathbb{C}}C}"] \\
\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(C) \arrow[rr, tail, "\downarrow_{\mathbf{S}_{\mathbb{C}}C}" near end] \arrow[dd, "\uparrow_i \mathbf{S}_{\mathbb{C}}C"'] & & \mathfrak{I}(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}C) \arrow[ur, "\simeq"] \arrow[dd, "\beta_C" near start] & \\
& \mathbf{S}_{\Lambda\mathbb{C}}([C]) \arrow[rr, tail, "y_{\Lambda\mathbb{C}[C]}" near end] & & \mathbf{S}_{\Phi\mathbb{C}}(I_{\mathbb{C}}C) \\
\mathfrak{F}(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}C) \arrow[rr, tail, "\downarrow_{\mathfrak{F}(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}C)}"'] \arrow[ur, "\simeq"] & & \phi(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}C) \arrow[ur, "\simeq"'] &
\end{tikzcd} \tag{5.4.1}$$

Sa face gauche est bien connue, le lemme 3.3.1 nous donne l'isomorphisme du bas et il est clair que cet isomorphisme est donné par la propriété universelle de la proposition 2.3.2.

La face de droite, quant à elle, contient deux isomorphismes. Celui du haut est donné par la proposition 3.4.2. Celui du bas par la proposition 3.5.2. Le morphisme à droite est $p^*_{y_{\mathbb{C}}C}$ et celui de gauche est donné par la propriété universelle de la construction des idéaux (voir corollaire 2.3.2) lorsqu'on considère le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(C) \arrow[r, tail, "\downarrow_{\mathbf{S}_{\mathbb{C}}C}"] \arrow[d, "\uparrow_{\mathbf{S}_{\mathbb{C}}C}"'] \arrow[dr, "i_{\mathbf{S}_{\mathbb{C}}C}"'] & \mathfrak{I}(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}C) \arrow[d, dotted, "\beta_C"] \\
\mathfrak{F}(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}C) \arrow[r, tail, "\downarrow_{\mathfrak{F}(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}C)}"'] & \mathfrak{I}(\mathfrak{F}(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}C)) = \phi(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}C)
\end{tikzcd}$$

On se rapelle que ce morphisme se calcule comme suit. Il prend un idéal $J \in \mathfrak{I}(\mathbf{S_C}C)$ et l'envoie sur

$$\beta_C(J) \equiv \bigvee_{A \in J} i_{\mathbf{S_C}C}(A) = \bigvee_{A \in J} \downarrow_{\mathfrak{F}(\mathbf{S_C}C)} \uparrow_{\mathbf{S_C}C} A$$

Regardons maintenant comment on démontre la proposition. ($\Rightarrow$) Si le morphisme géométrique p^* est une équivalence, alors chaque $p^*_{\mathbf{y}_\mathbf{C}C}$ sera un isomorphisme de cadres. Ainsi, β_C est un isomorphisme de cadres. En particulier, il doit être surjectif donc quel que soit $f \in \mathfrak{F}(\mathbf{S_C}C)$ on peut toujours trouver un $J \in \mathfrak{I}(\mathbf{S_C}C)$ pour lequel on ait

$$\downarrow f = \beta_C(J) \equiv \bigvee_{A \in J} i_{\mathbf{S_C}C}(A) = \bigvee_{A \in J} \downarrow_{\mathfrak{F}(\mathbf{S_C}C)} \uparrow_{\mathbf{S_C}C} A$$

Mais par le lemme 2.2.2 ce dernier suprema se calcule comme :

$$\downarrow \{\uparrow A_1 \vee \uparrow A_2 \vee \ldots \vee \uparrow A_n \mid n \in \mathbb{N} \quad A_i \in J \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\}$$

Ainsi,

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\downarrow f = \bigvee_{A \in J} i_{\mathbf{S_C}C}(A)}{\downarrow f = \downarrow \{\uparrow A_1 \vee \ldots \vee \uparrow A_n \mid n \in \mathbb{N} \quad A_i \in J\}}}{\exists n \in \mathbb{N}\, \exists A_1, \ldots, A_n \in J \quad f = \uparrow A_1 \vee \ldots \vee \uparrow A_n}}{\exists n \in \mathbb{N}\, \exists A_1, \ldots, A_n \in J \quad f = \uparrow (A_1 \vee \ldots \vee A_n)}$$

Donc tout filtre sur $\mathbf{S_C}(C)$ est principal. Ainsi, $[\cdot]_\mathbf{C}$ est plein fidèle et essentiellement surjectif donc c'est une équivalence comme nous l'avons vu dans le lemme précédent.

($\Leftarrow$) Si $[\cdot]_\mathbf{C}$ est une équivalence alors par le lemme précédent tous les filtres sur $\mathbb{C}$ sont principaux donc les

$$\mathbf{S_C}(C) \xrightarrow{\uparrow_{\mathbf{S_C}C}} \mathfrak{F}(\mathbf{S_C}C)$$

sont des isomorphismes et en appliquant $\mathfrak{I}(\cdot)$ à cet isomorphisme on obtient β_C car ce morphisme est unique à faire commuter la face de devant du diagramme 5.4.1. Donc β_C est un isomorphisme et on a finalement que $p^*_{\mathbf{y}_\mathbf{C}C}$ est un isomorphisme pour chaque $C \in |\mathbb{C}|$.

Par le lemme 5.3.1 comme le topos classifiant est engendré par les représentables et que pour ces représentables les $p^*_{\mathbf{y}_\mathbf{C}C}$ sont tous des isomorphismes on a déduit que p^* est une équivalence. Nous devons aussi vérifier l'hypothèse que notre morphisme géométrique (p^*, p_*) est une inclusion de topos. Ceci est clair si on remarque que le site pré-canonique $(\mathbb{C}, \mathcal{T}_{\mathbb{C}})$ étant un sous-site de $(\Lambda\mathbb{C}, \mathcal{T}_P)$, alors les faisceaux pour ce premier seront plus nombreux que pour ce dernier. Autrement dit, le topos des filtres est un sous-topos du topos classifiant. Les morphismes géométriques induits ainsi par des comparaison de topologies sur une même catégorie sont toujours des inclusions de topos. Ceci démontre clairement notre résultat. ∎

Ce dernier résultat n'est pas étonnant. En effet, le topos des filtres est le topos classifiant de la catégorie des filtres $\Lambda\mathbb{C}$. En voulant comparer ce dernier avec le topos classifiant de $\mathbb{C}$ on peut s'attendre à ce que cette comparaison puisse être étudiée au niveau des sites seulement.

Résumons donc en un seul résultat les deux résultats précédents. Question de donner un résumé.

THÉORÈME 5.4.1 **(Conditions pour l'équivalence entre $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ et $\Phi(\mathbb{C})$)** *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie cohérente. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le morphisme géométrique $\mathcal{B}(\mathbb{C}) \xrightarrow{p^*} \Phi(\mathbb{C})$ est une équivalence.*
2. *Le plongement $\mathbb{C} \xrightarrow{[\cdot]_{\mathbb{C}}} \Lambda\mathbb{C}$ est une équivalence.*
3. *Tous les filtres sur $\mathrm{S}_{\mathbb{C}}(C)$ sont principaux pour tout $C \in |\mathbb{C}|$.*

Nous avons donc une caractérisation précise des catégories cohérentes pour lesquelles le topos classifiant coïncide avec le topos des filtres. Nous sommes clairement intéressés par un tel résultat pour le topos des types. Jusqu'à maintenant j'ai réussi à trouver des conditions nécessaires sur $\mathbb{C}$ pour que le topos des types coincide avec le topos classifiant. Ces conditions sont que tout filtre premier de $\mathbb{C}$ est principal et tout filtre principal de $\mathbb{C}$ peut s'écrire comme une intersection finie de filtres premiers (principaux). Pour l'instant, je n'arrive pas à démontrer que ces deux conditions sont suffisantes pour obtenir l'équivalence. Pour cette raison, j'ai décidé de ne pas traiter ces conditions dans la présente thèse et de laisser cette question ouverte pour le moment.

5.5. Réflexion des isomorphismes

La but de la présente section est de généraliser le résultat du théorème 2.4.2 aux constructions du premier ordre. Ce théorème affirme que le double dual et le locale des filtres sont des foncteurs qui réfléchissent les isomorphismes.

Pour faire cela, nous avons évidemment besoin de montrer préalablement que la construction du topos des types est fonctorielle. Donnons-nous un foncteur cohérent $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$. Nous voulons construire un morphisme géométrique $(\mathcal{T}F^*, \mathcal{T}F_*) : \mathcal{T}(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathcal{T}(\mathbb{C})$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, tail, "E_{\mathbb{C}}"] \arrow[d, "F"'] \arrow[dr, phantom, "\circ"] & \mathcal{T}(\mathbb{C}) \arrow[d, "(\mathcal{T}F)^*"] \\ \mathbb{D} \arrow[r, tail, "E_{\mathbb{D}}"'] & \mathcal{T}D \end{tikzcd}$$

La construction est évidemment la seule qui est naturelle. On commence en effet par trouver ΛF qui on sait fait commuter :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, tail, "{[\cdot]_{\mathbb{C}}}"] \arrow[d, "F"'] \arrow[dr, phantom, "\circ"] & \Lambda\mathbb{C} \arrow[d, "\Lambda F"] \\ \mathbb{D} \arrow[r, tail, "{[\cdot]_{\mathbb{D}}}"'] & \Lambda D \end{tikzcd}$$

On sait que ΛF est lex. Ainsi, si on montre que ΛF est continu pour la topologie $\mathfrak{T}_M$ sur $\Lambda\mathbb{C}$ nous pourrons effectivement étendre ΛF à un morphisme géométrique adéquat.

Soit

$$\{(X_i, f_i) \xrightarrow{[\alpha_i]} (X, f)\}_{i \in I} \in \mathfrak{T}_M^{\mathbb{C}}(X, f)$$

nous voulons montrer que

$$\{(FX_i, Ff_i) \xrightarrow{[F\alpha_i]} (FX, Ff)\}_{i \in I} \in \mathfrak{T}_M^{\mathbb{D}}(FX, Ff)$$

En effet, cette dernière famille est l'image de la famille originale dans $\Lambda\mathbb{C}$ par ΛF. Supposons que $q \leq Ff$ où q est un filtre premier sur FX. Considérons le morphisme de treillis :

$$\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(X) \xrightarrow{F_X} \mathbf{S}_{\mathbb{D}}(FX)$$

Alors

$$F_X^*(q) \equiv \{A \in \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(X) \mid F_X(A) \in q\}$$

est clairement un filtre premier sur X. De plus, ce filtre satisfait

$$F_X^*(q) \leq f$$

car

$$\begin{array}{c} q \leq Ff \\ \hline Ff \subseteq q \\ \hline \forall A \in \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(X)\ \ A \in f \Longrightarrow F_X(A) \in q \\ \hline \forall A \in \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(X)\ \ A \in f \Longrightarrow A \in F_X^*(q) \\ \hline f \subseteq F_X^*(q) \\ \hline F_X^*(q) \leq f \end{array} \downarrow$$

Ainsi, par hypothèse, puisque les $[\alpha_i]$ forment un recouvrement de (X, f) au sens de $\mathcal{T}_M^{\mathbb{C}}(X, f)$ on a (par la proposition 4.3.1) qu'il existe $i \in I$ pour lequel on ait

$$F_X^*(q) \leq \alpha_i(f_i)$$

Mais comme F est un foncteur cohérent on obtient que :

$$F(\alpha_i(f_i)) = F(\alpha_i)(Ff_i)$$

et donc $q \leq F(\alpha_i(f_i))$ car

$$\begin{array}{c} B \in F(\alpha_i(f_i)) \\ \hline \exists A \in \alpha_i(f_i)\ \ F_X(A) \leq B \\ \hline \exists A \in F_X^*(q)\ \ q \ni F_X(A) \leq B \\ \hline B \in q \end{array} \downarrow$$

On a donc trouvé un $i \in I$ tel que

$$q \leq F(\alpha_i)(Ff_i)$$

Ceci montre que les $[F\alpha_i]$ couvrent (FX, Ff) au sens de $\mathcal{T}_M^{\mathbb{D}}(FX, Ff)$. Ainsi, ΛF est un foncteur lex et continu entre les sites :

$$(\Lambda\mathbb{C}\mathcal{T}_M^{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\Lambda F} (\Lambda D, \mathcal{T}_M^{\mathbb{D}})$$

donc par le théorème 2 de [21] (p.411) ΛF induit un morphisme géométrique qui fait commuter :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[r, "{[\cdot]_{\mathbb{C}}}"] \arrow[d, "F"'] & \Lambda\mathbb{C} \arrow[r, "y_{\Lambda\mathbb{C}}"] \arrow[d, "\Lambda F"'] & \mathcal{T}(\mathbb{C}) \arrow[d, shift left, "(\Lambda F)^*"] \arrow[d, phantom, "\vdash"'] \\
\mathbb{D} \arrow[r, "{[\cdot]_{\mathbb{D}}}"'] & \Lambda D \arrow[r, "y_{\Lambda D}"'] & \mathcal{T}(\mathbb{D}) \arrow[u, bend left, "(\Lambda F)_*"]
\end{tikzcd}$$

Nous voyons clairement que le morphisme géométrique donné par la paire $((\Lambda F)^*, (\Lambda F)_*)$ est précisément le morphisme que nous cherchions. Remarquons que nous avons vu au chapitre 3 que ΛF préserve les infima arbitraires. Il est facile de voir que cette propriété s'étend aux représentables dans $\mathcal{T}(\mathbb{C})$ dans un sens évident. En effet, le foncteur $(\Lambda F)^*$ agit sur le treillis des sous-objets de chaque $E \in |\mathcal{T}(\mathbb{C})|$. Le fait que ΛF préserve les infima de sous-objets entraîne que $(\Lambda F)^*$ préserve les infima quelconques de sous-objets de représentables. Comme les représentables engendrent $\mathcal{T}(\mathbb{C})$ on obtient bien que $(\Lambda F)^*$ préserve les infima quelconque de sous-objets d'un objet arbitraire de $\mathcal{T}(\mathbb{C})$. Nous avons ainsi essentiellement montré le résultat suivant.

PROPOSITION 5.5.1 **(Fonctorialité de la construction du topos des types)** *L'applications associant à une catégorie cohérente $\mathbb{C}$ son topos des types $\mathcal{T}(\mathbb{C})$ peut être étendue à un foncteur allant de la catégorie des (petites) catégories cohérentes $\mathfrak{Coh}$ vers la catégorie des topos complètement distributifs $\mathfrak{Top}^{\mathrm{op}}_{\mathrm{Cd}}$:*

$$\mathfrak{Coh} \xrightarrow{\mathcal{T}} \mathfrak{Top}^{\mathrm{op}}_{\mathrm{Cd}}$$

De plus $E_{(\cdot)}$ définit alors une transformation naturelle :

$$\mathbf{1}_{\mathfrak{Coh}} \xrightarrow{E_{(\cdot)}} \mathcal{T}$$

La fonctorialité de la construction du topos des filtres, quant à elle, a déjà été étudiée en détail dans le chapitre 3. Considérant le parallèle qui existe, il est naturel de ce demander si ces deux foncteurs Φ et $\mathcal{T}$ réfléchissent les isomorphismes comme c'est le cas pour leur version propositionnelle. En regardant la preuve du théorème 2.4.2 on s'apperçoit que nous avons tous les ingrédients pour la généraliser aux versions du premier ordre de ces foncteurs. En fait, la seule difficulté réside dans le théorème suivant qui se retrouve essentiellement dans **[27]** comme un théorème d'une importance capitale. Si $\mathbb{C}$ est une catégorie cohérente nous noterons par

$$\mathbb{C}^* \equiv \mathbb{C}\mathrm{oh}(\mathbb{C}, \mathfrak{Ens})$$

la catégorie des foncteurs cohérents de $\mathbb{C}$ dans les ensembles (c'est la catégorie des modèles classiques de $\mathbb{C}$). De plus, si $I : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$ est un foncteur cohérent alors le foncteur restriction (le long de I) sera noté par

$$\mathbb{D}^* \xrightarrow{I^*} \mathbb{C}^*$$

Si on veut se restreindre aux p-modèles, nous noterons par $\mathbb{C}^{*_p}$ la catégorie des p-modèles de $\mathbb{C}$ et par I^{*_p} le foncteur restriction décrit ci-dessus pour les p-modèles.

THÉORÈME 5.5.1 **(Théorème de complétude conceptuelle pour les p-modèles)** *Si $\mathbb{C}$ est un prétopos, $\mathbb{D}$ est une catégorie cohérente et $I : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$ est un foncteur cohérent tel que*

$$I^{*_p} : \mathbb{D}^{*_p} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{C}^{*_p}$$

est une équivalence de catégories. Alors I est une équivalence de catégories.

PREUVE: La preuve est dans **[27]** dans les pages 193–204. La restriction aux p-modèles ne cause aucun problème car en lisant la preuve on s'apperçoit que l'on y utilise que les théorèmes habituels d'existence de modèles dans lesquels nous pouvons toujours supposer que les modèles sont $\aleph_0$-saturés i.e. que ce sont des p-modèles. ∎

Regardons maintenant comment on généralise le théorème 2.4.2 à notre contexte plus général.

Théorème 5.5.2 **(Réflexion des équivalences)** *Soit $\mathbb{C}$ un pré-topos et $\mathbb{C} \xrightarrow{I} \mathbb{D}$ un foncteur cohérent. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le foncteur $\mathcal{T}(I)^* : \mathcal{T}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{T}(\mathbb{D})$ est une équivalence.*
2. *Le foncteur $\Phi(I)^* : \Phi(\mathbb{C}) \xrightarrow{\simeq} \Phi(\mathbb{D})$ est une équivalence.*
3. *Le foncteur $I^* : \mathbb{D}^{*_p} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{C}^{*_p}$ est une équivalence.*
4. *Le foncteur I est une équivalence.*

Preuve: La preuve de $(1 \Rightarrow 3)$ et $(2 \Rightarrow 3)$ est identique à la version propositionnelle. En effet, si nous appliquons, par exemple, la propriétés universelle du topos des types (voir la proposition 4.2.1), on obtient le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[r, tail, "E_{\mathbb{C}}"] \arrow[d, "I"'] & \mathcal{T}(\mathbb{C}) \arrow[d, "(\mathcal{T}I)^*", "\simeq"'] \\
\mathbb{D} \arrow[r, tail, "E_{\mathbb{D}}"] \arrow[dr, "M"'] & \mathcal{T}(\mathbb{D}) \arrow[d, "M^*"] \\
 & \mathfrak{Ens}
\end{tikzcd}$$

dans lequel on voit bien qu'on a une équivalence entre les p-modèles de $\mathbb{D}$ et les p-modèles de $\mathbb{C}$ et que cette équivalence est donnée par la restriction le long de I. La preuve pour le topos des filtres est identique.

On a aussi clairement que $(4 \Rightarrow 1)$ et $(4 \Rightarrow 1)$ car tout foncteur préserve les isomorphismes.

Il ne nous reste ainsi qu'à vérifier que $(3 \Rightarrow 4)$. Ceci découle directement du théorème de complétude conceptuelle donc on a le résultat. ∎

5.6. Conclusion

Avec toutes ces pérégrinations entre les résultats de nature propositionnelle et les résultats de premier ordre, nous voyons bien que certains passages sont des autoroutes inévitables. Le développement de nos connaissances sur le sujet se doit de passer par une solidification de ces chemins (ou techniques). Il nous reste encore plusieurs questions à éclaircir dans la théorie. L'étude de ces questions mènera sûrement à un niveau de compréhension supérieur ; ouvrant des possibilités d'abstraction. Ce contexte étant propice aux généralisations et à l'émergence de résultats nouveaux nous ne pouvons que nous en trouver ravis.

ÉPILOGUE

Résumons les acquis obtenus dans l'ensemble de ce travail. Au niveau des propriétés universelles que les deux constructions possèdent, nous avons démontré trois paires de propriétés universelles comme le montre le tableau suivant :

Cas propositionnel	Cas 1er ordre
$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "e_D"] \arrow[dr, "h"'] & D^{*\#} \arrow[d, dashed, "\bar{h}"] \\ & L \end{tikzcd}$ $L \in \lvert\mathbb{Pg}\rvert$ $h \in \mathbb{Lat}$ $\bar{h} \in \mathbb{Pg}$	$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "E_{\mathbb{C}}"] \arrow[dr, "M"'] & \mathcal{T}(\mathbb{C}) \arrow[d, "M^*"] \\ & \mathcal{F} \end{tikzcd}$ $\mathcal{F} \in \lvert\mathfrak{Top}^{\mathbb{Pg}}\rvert$ $M \in p-\mathbb{Mod}(\mathbb{C}, \mathcal{F})$ $(M^*, M_*) \in \bigwedge -\mathbb{Geom}(\mathcal{F}, \mathcal{T}\mathbb{C})$
$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "e_D"] \arrow[dr, "h"'] & D^{*\#} \arrow[d, dashed, "\bar{h}"] \\ & L \end{tikzcd}$ $L \in \lvert\mathbb{Cd}\rvert$ $h \in \mathbb{Lat}$ $\bar{h} \in \mathbb{Cd}$	$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "E_{\mathbb{C}}"] \arrow[dr, "M"'] & \mathcal{T}(\mathbb{C}) \arrow[d, "M^*"] \\ & \mathcal{F} \end{tikzcd}$ $\mathcal{F} \in \lvert\mathfrak{Top}^{\mathbb{Cd}}\rvert$ $M \in p-\mathbb{Mod}(\mathbb{C}, \mathcal{F})$ $(M^*, M_*) \in \bigwedge -\mathbb{Geom}(\mathcal{F}, \mathcal{T}\mathbb{C})$
$\begin{tikzcd} D \arrow[r, tail, "i_D"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \phi D \arrow[d, dashed, "\bar{\alpha}"] \\ & L \end{tikzcd}$ $L \in \lvert\mathbb{Cd}\rvert$ $\alpha \in \mathbb{Lat}$ $\bar{\alpha} \in \bigvee \bigwedge -\mathbb{Lat}$	$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, tail, "I_{\mathbb{C}}"] \arrow[dr, "M"'] & \Phi\mathbb{C} \arrow[d, "M^*"] \\ & \mathcal{F} \end{tikzcd}$ $\mathcal{F} \in \lvert\mathfrak{Top}^{\mathbb{Cd}}\rvert$ $M \in f-\mathbb{Mod}(\mathbb{C}, \mathcal{F})$ $(M^*, M_*) \in \bigwedge -\mathbb{Geom}(\mathcal{F}, \Phi\mathbb{C})$

Ensuite, il y a le morphisme de comparaison propositionnel entre les deux constructions et son équivalent au 1er ordre : le foncteur de comparaison du topos des filtres dans le topos des types. Ces deux éléments se comparent avantageusement comme le démontre le diagramme suivant :

<table>
<tr><th>Cas propositionnel</th><th>Cas 1er ordre</th></tr>
<tr><td>

$$\begin{tikzcd} \phi(D) \arrow[rr, two heads, "(\cdot)_{\mathcal{P}}"] & & D^{*\#} \arrow[ll, bend right=50, hook', "(\cdot)^{\bar\wedge}"'] \arrow[ll, bend left=50, hook, "(\cdot)^{\underline{\vee}}"] \end{tikzcd}$$

</td><td>

$$\begin{tikzcd} \mathbf{S}_{\Phi\mathbb{C}}(I_{\mathbb{C}}C) \arrow[r, two heads] & \mathbf{S}_{\mathcal{T}\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}C) \arrow[l, bend right, hook'] \arrow[l, bend left, hook] \\ \phi(\mathbf{S}_{\mathbb{C}}C) \arrow[u, "\simeq"] \arrow[r, two heads] & \mathbf{S}_{\mathbb{C}}(C)^{*\#} \arrow[u, "\simeq"'] \arrow[l, bend right, hook'] \arrow[l, bend left, hook] \end{tikzcd}$$

</td></tr>
<tr><td>$D^{*\#}$ sous-locale
ouvert et dense
de $\phi(D)$</td><td>$\mathcal{T}\mathbb{C}$ sous-topos
ouvert et dense
de $\Phi(\mathbb{C})$</td></tr>
</table>

Nous y voyons que le morphisme de comparaison propositionnel apparaît comme l'action de $E^*_{\mathbb{C}}$ au niveau des sous-objets de $I_{\mathbb{C}}C$ pour chaque $C \in |\mathbb{C}|$.

De plus nous avons démontré des conditions d'équivalence pour les deux constructions autant dans le cas propositionnel que dans le cas du premier ordre. Le tableau suivant compare ces deux résultats :

<table>
<tr><th>Cas propositionnel</th><th>Cas 1er ordre</th></tr>
<tr><td>Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\phi(D) \xrightarrow{\simeq} D^{*\#}$
2. Tout filtre sur D peut s'écrire comme une intersection finie de filtres premiers.
3. $\phi(D) \in |\mathbb{P}\mathrm{g}|$
4. $\phi(D) \in |\mathbb{C}\mathrm{d}|$</td><td>Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\Phi(\mathbb{C}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{T}(\mathbb{C})$
2. Pout chaque $C \in |\mathbb{C}|$, tout filtre sur $\mathbf{S}_{\mathbb{C}}(C)$ peut s'écrire comme une intersection finie de filtres premiers.
3. $\Phi(\mathbb{C}) \in |\mathfrak{Top}^{\mathrm{Pg}}|$
4. $\Phi(\mathbb{C}) \in |\mathfrak{Top}^{\mathrm{Cd}}|$</td></tr>
</table>

Encore une fois, la comparaison est frappante.

Nous avons également montré que les foncteurs ϕ et $(\cdot)^{*\#}$ réfléchissent les isomorphismes et, au niveau du premier ordre, que les foncteurs Φ et $\mathcal{T}$

réfléchissent les isomorphismes lorsque le domaine du foncteur de départ est un prétopos.

Avec toutes ces considérations que nous avons étalées au long des chapitres de cette thèse, il nous semble maintenant clair que la généralisation du double dual est bien le topos des types ; comme nous l'avions toujours supposé dans nos investigations. En écrivant ces lignes, la preuve de nos intuitions m'est venue à l'idée. Rappelons-nous la définition originale du topos des types :

$$\mathcal{T}(\mathbb{C}) \equiv Sh(\tau\mathbb{C}, \mathfrak{T}_{M_p})$$

où $\mathfrak{T}_{M_p}$ est engendrée par les singletons couvrants.

La théorie des faisceaux sur un site donné par une base, a une réduction canonique dans le contexte propositionnel. En effet, comme Johnstone l'expose dans **[13]**, la notion habituelle de base pour une topologie de Grothendieck sur une catégorie $\mathbb{C} \in |\mathbb{L}\mathrm{ex}|$ se réduit à la notion de système de recouvrement sur un $\wedge$-semi-treillis S. Dans notre cas, la réduction de $\tau\mathbb{C}$ est clairement D^*. Mais D^* n'est qu'un ensemble partiellement ordonné. Ainsi, il faut comme dans le cas de la logique du premier ordre étendre la notion de système de recouvrements à des sites qui ne sont pas nécessairement des $\wedge$-semi-treillis. Comme nous avons déjà fait le travail pour les topologies de Grothendieck il suffit de regarder la définition 4.2.2 et de la réduire sous l'hypothèse que la catégorie est un ensemble partiellement ordonné.

Avec cet outil en tête, à quoi correspond la topologie $\mathfrak{T}_{M_p}$ dans le contexte propositionnel en termes de système de recouvrement généralisé C ? Clairement, la base des singletons couvrants $\mathfrak{T}_{M0}$ qui engendre $\mathfrak{T}_{M_p}$ se réduit à la topologie discrète comme système de recouvrement pour D^*. Les C-idéaux pour un système de recouvrement sont la réduction de la notion de faisceaux sur un site. Les C-idéaux pour un système de recouvrement C sont une famille spécifique de sous-ensembles fermés inférieurement de D^*. Dans notre cas, puisque la topologie est la topologie discrète, nous voyons que les C-idéaux nous donnent tous les sous-ensembles fermés inférieurement de D^*. En renversant l'ordre sur D^*, on obtient bien que

$$D^{*\#} \simeq C - Idl\,(D^{*\mathrm{op}})$$

ce qui montre que le double dual est bien la réduction du topos des types lorsqu'on le regarde sous cet angle.

Je crois qu'avec une petite clarification comme celle-ci pour couronner le tout, nous pouvons nous quitter tranquillement sur ces idées en gardant tout de même en tête que nous avons laissés derrière des problèmes non-résolus.

En effet, même au niveau propositionnel, le double dual reste avec un propriété mystérieuse de préservation automatique de toutes les structures (ou presque) que nous pouvons imposer sur un treillis distributif. De plus, nous aimerions comparer le topos des types avec le topos classifiant de façon plus précise. Finalement, un autre candidat intéressant à étudier est le topos de Joyal/Reyes qu'on retrouve dans **[15]**. Je sais que le topos des types est un sous-topos de ce dernier mais que peut-on dire de plus ? De plus, il est légitime de se demander si le topos des types satisfait la propriété fondamentale du topos de Joyal/Reyes démontrée dans **[15]**. De cette façon, nous pourrions affirmer que le topos des types peut jouer le rôle de toutes ces constructions pour démontrer les mêmes propriétés. Ainsi, le topos des types et le double dual seraient les constructions fondamentales de la logique catégorique sur les univers dont le topos de base est booléen. Nous laissons ces résultats pour de futures recherches.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Barr and C. Wells. *Toposes, Triples and Theories*, volume 278 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, New York, 1984.

[2] Carsten Butz. The filter construction revisited. Preprint : http ://www.brics.dk/~butz, 1999.

[3] Carsten Butz and Peter T. Johnstone. Classifying toposes for first order theories. *Ann. Pure Appl. Logic*, 91 :33–58, 1998.

[4] C. C. Chang and H. J. Keisler. *Model theory*, volume 73 of *Studies in logic and the foundations of mathematics*. North-Holland, New York, 1973.

[5] B.A. Davey and H.A. Priestley. *Introduction to Lattices and Order*. Cambridge Mathematical Textbooks. Cambridge University Press, first edition, 1992.

[6] R. Diaconescu. Change of base for toposes with generators. *J. Pure Appl. Alg.*, 6 :191–218, 1975.

[7] Barry Fawcett and Richard J. Wood. Constructive complete distributivity i. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 107 :81–89, 1990.

[8] Adriana Galli, Gonzalo E. Reyes, and Marta Sagastume. Completeness theorems via the double dual functor. *Studia Logica*, 1999. (sous presse).

[9] Robert Goldblatt. *Topoi : The Categorical Analysis of Logic*. North-Holland Publishing Company, New-York, 1979.

[10] Georges Grätzer. *General Lattice Theory*. Pure and Applied Mathematics. Academic Press, New York, 1978.

[11] Paul R. Halmos. *Naive Set Theory*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1960.

[12] P.T. Johnstone. *Topos theory*. Academic press, 1977.

[13] P.T. Johnstone. *Stone Spaces*. Cambridge University Press, 1982.

[14] André Joyal and MylesTierney. An extension of the Galois theory of Grothendieck. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 51(309) :1–71, September 1984.

[15] André Joyal and Gonzalo E. Reyes. Forcing and generic models in categorical logic. Non-publié, 1978.

[16] Anders Kock and Ieke Moerdijk. Representations of étendues. *Cahiers Top. Géom. Diff.*, 32(2) :145–164, 1991.

[17] Anders Kock and Gonzalo E. Reyes. Doctrines in categorical logic. In J. Barwise, editor, *Handbook of Mathematical Logic*, pages 283–313. North-Holland, 1977.

[18] Václav Koubek and Jan Reiterman. On the category of filters. *Commentationes MathematicæUniversitatis Carolinæ*, 11(1) :19–29, 1970.

[19] Marie La Palme Reyes and Gonzalo E. Reyes. Generic figures and their glueings. To appear., 1998.

[20] S. Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *GTM*. Springer-Verlag, New-York, 1975.

[21] Saunders Mac Lane and Ieke Moerdjik. *Sheaves in Geometry and Logic*. Universitex. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[22] François Magnan and Gonzalo E. Reyes. Category theory as a conceptual tool in the study of cognition. In John Macnamara and Gonzalo E. Reyes, editors, *The logical foundations of cognition*, volume Volume 4 of *Vancouver Studies in Cognitive Science*, pages 57–90. Oxford University Press, New York, 1994.

[23] Michael Makkai. The topos of types. In *Proc. Seminars and Conf. Math. Logic*, volume Logic year 1979-80, pages 157–201, Berlin, 1981. Univ. Connecticut, Springer.

[24] Michael Makkai. On Gabbay's proof of the Craig interpolation theorem for intuitionistic predicate logic. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 36(3) :364–381, Summer 1995.

[25] Michael Makkai and Gonzalo E. Reyes. Completeness results for intuitionistic and modal logic in a categorical setting. *Annals of Pure and Applied Logic*, 72(1) :25–101, 1995.

[26] J.L.Verdier M.Artin, A.Grothendieck. *Théorie des Topos et Cohomologie Étale (SGA4)*, volume 269. Springer Verlag (LNM), Berlin, 1972.

[27] Makkai Michael and Gonzalo E. Reyes. *First Order Categorical Logic*, volume 611. Springer-Verlag (LNM), New-York, 1977.

[28] A. M. Pitts. Applications of sup-lattice enriched category theory to sheaf theory. *Proc. London Math. Soc.*, 3(57) :433–480, 1988.

[29] A.M. Pitts. Amalgamation and interpolation in the category of Heyting algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 29 :155–165, 1983.

[30] A.M. Pitts. An application of open maps to categorical logic. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 29 :313–326, 1983.

[31] A.M. Pitts. Conceptual completeness for first-order intuitionistic logic : An application of categorical logic. *Annals of Pure and Applied Logic*, 41(1) :33–81, 1989.

[32] G. N. Raney. Completely distributive complete lattices. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 3 :677–680, 1952.

[33] G. N. Raney. A subdirect-union representation for completely distributive lattices. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 4 :518–522, 1953.

[34] Helena Rasiowa and Roman Sikorski. *The Mathematics of Metamatematics*. Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, Warszawa, third edition, 1970.

[35] Dirk van Dalen. *Logic and Structure*. Universitext. Springer-Verlag, New York, second edition, 1980.