Université de Montréal

Généralisation de résultats sur l'enlacement local en théorie des points critiques

par

Frédéric Picard

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

Orientation mathématiques fondamentales

août 1999

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Généralisation de résultats sur l'enlacement local en théorie des points critique

présenté par

Frédéric Picard

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Richard Duncan
(président-rapporteur)

Marlène Frigon
(directeur de recherche)

Christiane Rousseau
(membre du jury)

Mémoire accepté le :

5 janvier 2000

SOMMAIRE

Le but de ce mémoire est la généralisation de résultats d'existence en théorie des points critiques. Les fonctionnelles étudiées sont continûment différentiables et satisfont soit la condition de Palais–Smale, soit la condition de Palais–Smale étoile. Les preuves reposeront sur les lemmes de déformations et la notion d'enlacement.

Le premier chapitre est consacré aux préliminaires. Nous rappelons les définitions et les résultats de base en théorie des points critiques et nous faisons de même pour le degré de Brouwer et les espaces de Sobolev $H_0^1(\Omega)$.

Dans le second, nous rappelons la notion d'enlacement telle qu'introduite par Frigon **[11]**. Nous donnons des exemples de situations d'enlacement et un théorème sur les enlacements qui fournit l'existence de points critiques pour les fonctionnelles continûment différentiables et satisfaisant la propriété de Palais–Smale et des inégalités relatives aux enlacements. Ensuite nous présentons un théorème qui généralise le fait que 0 est un point critique de toute fonctionnelle f différentiable possédant un enlacement local en 0. Nous terminons ce chapitre par une théorème sur l'existence de deux points critiques d'une fonctionnelle f lorsque $-f$ est coercive et que f satisfait aux hypothèses du théorème qui généralise la notion d'enlacement local.

Le chapitre trois est entièrement consacré à un théorème portant sur l'existence de trois points critiques d'une fonctionnelle bornée inférieurement et satisfaisant aux hypothèses du théorème généralisant la notion d'enlacement local présentée au chapitre deux.

Dans le chapitre quatre, nous généralisons les théorèmes présentés plus tôt dans le mémoire. Nous introduisons la condition de Palais–Smale étoile et nous nous en servons pour affaiblir certaines hypothèses du théorème portant sur la généralisation de la notion d'enlacement local. Nous faisons de même avec le théorème portant sur l'existence de deux points critiques du chapitre deux et pour le théorème du chapitre trois.

Dans le chapitre cinq, nous illustrons l'utilité des théorèmes prouvés dans ce mémoire en donnant une application à un problème aux limites elliptique. Les solutions du problèmes correspondent aux points critiques d'une certaine fonctionnelle continûment différentiable. Ainsi en appliquant la version généralisée du théorème portant sur l'existence de deux points critiques nous obtiendrons l'existence de deux solutions pour le problème aux limites.

REMERCIEMENTS

Je voudrais d'abord remercier ma directrice de recherche, Marlène Frigon, pour sa disponiblité, ses explications claires et judicieuses, le sujet de recherche intéressant et ses encouragements.

Je remercie aussi Nicolas pour m'avoir aidé dans l'apprentissage des outils informatiques nécessaires à la rédaction de ce mémoire.

Et finalement, je remercie mes parents pour m'avoir toujours encouragé dans la poursuite de mes études.

Table des matières

INTRODUCTION

La théorie des points critiques est l'étude des points où la dérivée d'une fonctionnelle s'annulle. Plus précisément, on a un espace de Banach E, une fonctionnelle $f : E \to \mathbb{R}$ continûment différentiable et on cherche de l'information sur les points $u \in E$ tels que $f'(u) = 0$. En général, il est impossible de trouver explicitement les points critiques. En conséquence, on essaie plutôt d'avoir des résultats sur l'existence et sur la multiplicité des points critiques.

Ce mémoire porte sur la généralisation de théorèmes d'existence de points critiques de fonctionnelles continûment différentiables qui possèdent un enlacement local en 0. Nous en donnons donc la définition.

Définition 0.1. Soit $E = E_1 \oplus E_2$ un espace de Banach et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle continûment différentiable. On dit que f a un enlacement local en 0 s'il existe $r > 0$ tel que

$$f(u) \geq 0 \text{ si } u \in E_1 \text{ et } \|u\| \leq r;$$

$$f(u) \leq 0 \text{ si } u \in E_2 \text{ et } \|u\| \leq r.$$

On peut alors montrer que 0 est un point critique de f. La notion d'enlacement locale a été introduite en 1984 par Liu et Li **[14]** de façon légèrement moins générale puisque que l'inégalité stricte

$$\inf_{\substack{u \in E_1 \\ \|u\| = r}} f(u) > 0$$

était requise. La définition que nous avons donnée est celle utilisée par Li et Willem [**13**].

Cette notion d'enlacement local peut être affaiblie lorsque $\dim E_2 < \infty$ et que la fonctionnelle satisfait à la condition de Palais–Smale (cette condition sera définie au chapitre 1). En effet, Marino, Micheletti et Pistoia [**15**] ont montré le théorème suivant.

Théorème 0.2. *Soit* $E = E_1 \oplus E_2$ *un espace de Banach tel que* $\dim E_2 < \infty$. *Soit* $f : E \to \mathbb{R}$ *une fonctionnelle continûment différentiable et satisfaisant à la condition de Palais–Smale. Supposons qu'il existe* $r, R > 0$ *tels que*

$$\sup_{\substack{u \in E_2 \\ \|u\| = R}} f(u) < \inf_{\substack{u \in E_1 \\ \|u\| \leq r}} f(u) \leq \sup_{\substack{u \in E_2 \\ \|u\| \leq R}} f(u) < \inf_{\substack{u \in E_1 \\ \|u\| = r}} f(u).$$

Alors f *possède au moins un point critique.*

Il est clair que ce théorème généralise le fait qu'une fonctionnelle ayant un enlacement local en 0 possède un point critique en 0. Dans ce mémoire, nous avons prouvé une version de ce théorème où $\dim E_2$ est possiblement égale à ∞ lorsque l'on remplace la condition de Palais–Smale par la condition plus forte de Palais–Smale étoile.

En théorie des points critiques, la notion d'enlacement est très importante. Il en existe plusieurs définitions dans la littérature, par exemple [**3, 14, 16, 18, 20**]. M. Frigon a donné dans [**11**] une définition de l'enlacement permettant de d'unifier et de généraliser plusieurs définitions retrouvées dans la littérature. Cela permet entre autre de considérer l'enlacement local et sa généralisation comme un cas particulier de la théorie sur les enlacements.

En 1991, reprenant des idées introduites par Chang , Li et Liu [**6, 14**], Brézis et Nirenberg [**5**] ont montré que lorsque $\dim E_2 < \infty$, une fonctionnelle f bornée inférieurement satisfaisant à la condition de Palais–Smale et ayant un enlacement local en 0 possède au moins trois points critiques. En 1995, Li et Willem **[13]** ont prouvé ce théorème avec $\dim E_2 = \infty$ en remplaçant la condition de Palais–Smale par la condition plus forte de Palais–Smale étoile et en supposant que f envoie les bornés dans les bornés. Ils l'ont nommé théorème des trois points critiques. Ils ont aussi prouvé un théorème d'existence de deux points critiques d'une fonctionnelle f possédant un enlacement local en 0 et telle que $-f$ satisfait à une condition de coercivité. Ils l'ont nommé théorème des deux points critiques.

Dans ce mémoire nous allons généraliser ces théorèmes en remplaçant l'hypothèse d'enlacement local par sa généralisation. Plus précisément par une condition plus générale que celle apparaissant dans le théorème 0.2 .

La théorie des points critiques est motivée par la résolution de problèmes aux limites pour des équations aux dérivées partielles. Parfois il y a correspondance entre les solutions d'un problème aux limites et les points critiques d'une fonctionnelle. Dans **[13]**, Li et Willem appliquent le théorème des deux points critiques au problème aux limites suivant:

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -\Delta u(x) + a(x)u(x) = g(x,u) & \text{dans } \Omega \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ dont la frontière $\partial\Omega$ est lisse; on supposait aussi que $a \in L^\infty(\Omega), g \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ ainsi que plusieurs autres conditions sur g de façon à ce que la fonctionnelle $f : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(u) = \int_\Omega \left(\frac{|\nabla u|^2}{2} + au^2 + \int_0^u g(x,t)dt \right) dx$$

soit continûment différentiable et satisfasse les hypothèses du théorème des deux points critiques (et donc possède un enlacement local en 0) . Il y alors correspondance entre les solutions du problème $(\mathcal{P})$ et les points critiques de la fonctionnelle

f. Ainsi, grâce au théorème des deux points critiques on sait que le problème $(\mathcal{P})$ possède au moins deux solutions.

La version généralisée du théorème des deux points critiques présentée dans ce mémoire permet de modifier légèrement le problème $(\mathcal{P})$ en ajoutant une petite perturbation dans le membre de droite. Dans le but de d'éviter les complications techniques, nous supposerons que $g(x,u) = u|u|^{s-1} + h(x)$ avec $1 < s < (N+2)(N-2)$ (avec $N \geq 3$), où $h(x)$ sera la perturbation. Ainsi nous simplifierons les preuves tout en gardant les éléments essentiels. Le problème que nous étudierons sera donc de la forme

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -\triangle u + a(x)u = u|u|^{s-1} + h(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où $h \in L^2(\Omega)$ et $\|h\|_{L^2(\Omega)}$ pourra être choisi suffisamment petit. On supposera aussi que 0 n'est pas une valeur propre de $u \longmapsto (-\triangle u + au)$. En général, en ajoutant cette petite perturbation, 0 n'est pas solution du problème, ce qui nous permet de voir aisément que la fonctionnelle associée ne possède plus l'enlacement local en 0. On montrera par contre que si la perturbation est suffisamment petite, alors f satisfait aux hypothèses de la version généralisée du théorème des deux points critiques .

Chapitre 1

PRÉLIMINAIRES

Nous rappelons quelques définitions et résultats de base qui seront utilisés dans ce mémoire. Dorénavant, E désignera un espace de Banach.

1.1. Points critiques

Nous commençons par quelques définitions relatives aux points critiques. Le lecteur intéressé à plus de détails pourra consulter [**18**].

Définition 1.1 (Dérivée). Soit $f : E \to \mathbb{R}$. On dit que f est *différentiable* (au sens de Fréchet) au point $x \in E$ s'il existe $l \in E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ (l'ensemble des fonctionnelles linéaires continues sur E) telle que

$$\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x) - < l, (y - x) >}{\|y - x\|} = 0.$$

On dit que l est la *dérivée* de f au point x. Puisque l dépend de x, on pose $l = f'(x)$.

Définition 1.2. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle différentiable en tout point $x \in E$. On dit f est *continûment différentiable* (ou de classe C^1) si la fonction de E dans E' qui à $x \in E$ associe $f'(x)$ est continue. (On écrira parfois que $f \in C^1(E, \mathbb{R})$).

Définition 1.3 (Point critique). Soit $f : E \to \mathbb{R}$. On dit que $x \in E$ est un *point critique* de f si f est différentiable au point x et $f'(x) = 0$.

Définition 1.4 (Valeur critique). Soient $f : E \to \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$, on dit que c est une *valeur critique* de f s'il existe $u \in E$, un point critique de f, tel que $f(u) = c$. On note

$$K : = \{u \in E : f'(u) = 0\}, \qquad K_c : = \{u \in E : f'(u) = 0 \text{ et } f(u) = c\}.$$

Définition 1.5. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe C^1. On dit que f satisfait à la *condition de Palais-Smale* (notée (PS)) si pour toute suite $\{x_n\}$ de E telle que $\{f(x_n)\}$ est bornée et $\lim_{n\to\infty} f'(x_n) = 0$, on a que $\{x_n\}$ possède une sous-suite convergente.

Définition 1.6. Soient $c \in \mathbb{R}$ et $f \in C^1(E, \mathbb{R})$. On dit que f satisfait à la condition de *Palais-Smale au niveau c* (notée $(PS)_c$), si toute suite $\{x_n\}$ telle que $f(x_n) \to\ c$ et $\lim_{n\to\infty} f'(x_n) = 0$ possède une sous-suite convergente.

Remarque 1.7. On remarque que la condition (PS) implique la condition $(PS)_c$ pout tout $c \in \mathbb{R}$ et réciproquement si f satisfait à $(PS)_c$ pour tout $c \in \mathbb{R}$ alors f satisfait à (PS).

1.2. LEMMES DE DÉFORMATION

Il y a deux méthodes de recherche de points critiques. Une méthode consiste en la théorie de Morse. Nous n'utiliserons pas cette méthode dans ce mémoire. L'autre méthode est celle du minimax. C'est donc cette méthode que nous utiliserons. Les lemmes de déformation sont un outil principal pour cette méthode. Nous en énonçons deux que nous utiliserons le long de ce mémoire. Le lecteur intéressé aux preuves pourra consulter [**7, 9, 17, 18**].

Théorème 1.8 (Lemme de déformation). *Soient $c \in \mathbb{R}$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe C^1 vérifiant $(PS)_c$. Alors pour tout voisinage $\mathcal{U}$ de K_c, $\overline{\epsilon} > 0$, $\lambda > 0$, il existe $\epsilon > 0$ et $\eta : E \times [0,1] \to E$ continue tels que pour tout $u \in E$ et pour tout $t \in [0,1]$, on a que*

(a) $\|\eta(u,t) - u\| \leq \lambda t$;

(b) $f(\eta(u,t)) \leq f(u)$;

(c) $\eta(u,t) = u$ *si* $f(u) \notin]c - \overline{\epsilon}, c + \overline{\epsilon}[$;

(d) $f(\eta(u,1)) \leq c - \epsilon$ *si* $f(u) \in [c - \epsilon, c + \epsilon]$ *et* $u \notin \mathcal{U}$.

Voici un deuxième lemme de déformation appelé théorème de l'intervalle non critique.

Théorème 1.9 (Intervalle non critique). *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tels que $a < b$. Soit $f \in C^1(E, \mathbb{R})$ vérifiant $(PS)_c$ pour tout $c \in [a, b[$. Supposons que $[a, b]$ ne contienne aucune valeur critique (i.e $K_c = \emptyset$ $\forall c \in [a, b]$). Alors il existe $\eta : E \times [0,1] \to E$ continue telle que pour tout $u \in E$ et $t \in [0,1]$ on a*

(a) $\eta(u,0) = u$;

(b) $f(\eta(u,t)) \leq f(u)$;

(c) $\eta(u,t) = u$ *si* $f(u) \leq a$;

(d) $f(\eta(u,1)) \leq a$ *si* $f(u) \leq b$.

1.3. Existence d'un minimum et coercivité

Voici deux résultats de base en théorie des points critiques. Ils concernent l'existence d'un minimum et la coercivité d'une fonctionnelle bornée inférieurement.

Théorème 1.10. *Soit $f \in C^1(E, \mathbb{R})$ une fonctionnelle bornée inférieurement satisfaisant à $(PS)_d$ où $d = \inf f(E)$, alors f atteint son minimum en un point critique.*

DÉMONSTRATION. Supposons que d ne soit pas une valeur critique, c'est-à-dire que $K_d = \emptyset$. On a donc que $\emptyset$ est un voisinage de K_d et on peut appliquer le lemme de déformation (théorème (1.8)) avec $\bar{\epsilon} = 1$, $\lambda = 1$ et $\mathcal{U} = \emptyset$. Il s'ensuit l'existence d'un $\epsilon \in]0, \bar{\epsilon}[$ et d'une déformation continue $\eta : E \times [0,1] \to E$ tels que $f(\eta(u,1)) \leq d - \epsilon$ lorsque $f(u) \in [d - \epsilon, d + \epsilon]$. Ce qui est une contradiction avec la définition de d. □

Rappelons la définition d'une fonctionnelle coercive

Définition 1.11. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle. On dit que f est *coercive* si

$$\lim_{||u|| \to \infty} f(u) = \infty.$$

Théorème 1.12. *Soit $f \in C^1(E, \mathbb{R})$ une fonctionnelle bornée inférieurement satisfaisant à (PS), alors f est coercive.*

DÉMONSTRATION. Pour $s \in \mathbb{R}$, notons $f^s : = \{u \in E : f(u) \leq s\}$. Supposons que f soit ne soit pas coercive, alors $c : = \sup\{t \in \mathbb{R} : f^t \text{ est borné}\}$ est finie. L'ensemble K_c est borné (sinon f ne satisferait pas à $(PS)_c$), on peut donc choisir $R > 0$ tel

$$K_c \subset B(0, R).$$

En appliquant le théorème 1.8, on sait qu'il existe ϵ et $\eta : E \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continue tels que pour tout

$$u \in (E \setminus B(0,R)) \cap f^{c+\epsilon}$$

on a $||\eta(u,t) - u|| \leq t$ et $\eta(u,1) \in f^{c-\epsilon}$. Comme $f^{c+\epsilon}$ n'est pas borné, pour chaque $M > R$ il existe $u_M \in f^{c+\epsilon}$ tel que $||u_M|| \geq M + 1$ et comme $||\eta(u_M, 1) - u_M|| \leq 1$, on a que $\|\eta(u_M,1)\| \geq M$. Comme $\eta(u_M,1) \in f^{c-\epsilon}$, on en déduit que $f^{c-\epsilon}$ n'est pas borné. C'est une contradiction avec la définition de f^c.

□

1.4. Degré de Brouwer

Lors de la démonstration de certains résultats en théorie des points critiques, nous aurons besoin du degré de Brouwer. Nous en rappelons la définition et les propriétés de base. Pour un traitement plus complet voir **[10]** et **[22]**.

Définition 1.13 (Degré de Brouwer). Soient $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et $b \in \mathbb{R}^N$. Alors un degré (qui dépend de $\mathcal{O}$ et b) est une fonction $deg(\cdot,\mathcal{O},b)$, à valeurs entières nonnégatives, définie pour tout $\phi \in C(\overline{\mathcal{O}},\mathbb{R})$, telle que $b \notin \phi(\partial\mathcal{O})$ et qui satisfait aux propriétes suivantes:

(1) $deg(\mathrm{id},\mathcal{O},b) = \begin{cases} 1 & \text{si } b \in \mathcal{O}, \\ 0 & \text{si } b \notin \overline{\mathcal{O}}; \end{cases}$

(2) $deg(\phi,\mathcal{O},b) \neq 0$ implique qu'il exite $x \in \mathcal{O}$ tel que $\phi(x) = b$;

(3) $deg(\phi,\mathcal{O},b) = 0$ si $b \notin \phi(\mathcal{O})$.

(4) (additivité-excision): si $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}$ sont des ouverts tels que $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$ et $b \notin \phi(\overline{\mathcal{O}} \setminus (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2))$, alors $deg(\phi,\mathcal{O},b) = deg(\phi,\mathcal{O}_1,b) + deg(\phi,\mathcal{O}_2,b)$;

(5) (continuité en ϕ): $d(\psi,\mathcal{O},b) = d(\phi,\mathcal{O},b)$ pour ψ proche ϕ (ici proche est dans le sens de voisinage défini par la *norme sup* sur $C(\overline{\mathcal{O}},\mathbb{R})$).

Évidemment on peut se demander si une telle fonction existe et dans ce cas si elle est unique. La réponse est fournie dans le théorème suivant:

Théorème 1.14. *Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et $b \in \mathbb{R}^N$. Alors il existe un unique degré $deg(\cdot,\mathcal{O},b)$.*

Ce degré est appelé *degré topologique de Brouwer*. Les conséquences qui nous serons les plus importantes sont les résultats suivants:

Proposition 1.15. *Si* $H \in C([0,1] \times \overline{\mathcal{O}}, \mathbb{R}^n)$ *et* $b \notin H([0,1] \times \partial\mathcal{O})$*, alors* $deg(H(t,\cdot), \mathcal{O}, b) \equiv \text{constante}$ *pour* $t \in [0,1]$.

Corollaire 1.16. *Si* $\phi, \psi \in C(\overline{\mathcal{O}}, \mathbb{R}^N), \phi = \psi$ *sur* $\partial\mathcal{O}$, *et* $b \in \mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\mathcal{O})$*, alors* $deg(\phi, \mathcal{O}, b) = deg(\psi, \mathcal{O}, b)$.

Le théorème suivant est un cas particulier du théorème 14.C dans **[22]**.

Théorème 1.17. *Soit* $H \in C([0,1] \times \overline{\mathcal{O}}, \mathbb{R}^n)$. *Supposons que*

(a) $b \notin H([0,1] \times \partial\mathcal{O})$;

(b) $deg(H(0), \mathcal{O}, b) \neq 0$.

Alors il existe un continuum $\mathcal{C} \subset [0,1] \times \mathcal{O}$ *tel que pour tout* $(x,t) \in \mathcal{C}, H(x,t) = b$ *et pour tout* $t \in [0,1]$, *il existe* $x \in \mathcal{O}$ *tel que* $(x,t) \in \mathcal{C}$.

Remarque 1.18. Souvent nous étudierons le degré autour du point 0. Pour simplifier la notation nous noterons $deg(\phi, \mathcal{O})$ au lieu de $deg(\phi, \mathcal{O}, 0)$. Parfois, même si F n'est pas un ouvert, nous noterons $deg(\phi, F, b)$ au lieu de $deg(\phi, \mathring{F}, b)$.

1.5. Espaces de Sobolev

Nous rappelons quelques éléments de la théorie des espaces de Sobolev; pour plus de détails, le lecteur pourra consulter **[2, 4]**.

Définition 1.19. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert. L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini comme étant l'ensemble des fonctions $u \in L^2(\Omega)$ telles qu'il existe $g_1, \ldots, g_N \in L^2(\Omega)$ satisfaisant à

$$\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \phi \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, \ldots, N.$$

Pour $u \in H^1(\Omega)$ on note

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \qquad \text{et} \qquad \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right).$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$(u, v)_* = \int_\Omega uv + \nabla u \cdot \nabla v dx$$

et de la norme associée

$$\|u\|_* = \left(\int_\Omega u^2 + |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Théorème 1.20. *L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

En vue de la définition suivante, observons que $C_c^1(\Omega)$ l'espace des fonctions continûment différentiables à support compact est un sous-espace de $H^1(\Omega)$.

Définition 1.21. L'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ désigne la fermeture de $C_c^1(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

Corollaire 1.22. *L'espace $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

Théorème 1.23 (Inégalité de Poincaré). *Soit Ω un ouvert borné. Alors il existe une constante C (qui ne dépend que de Ω) telle que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \textit{ pour tout } u \in H_0^1(\Omega).$$

Une conséquence importante de ce théorème est que sur $H_0^1(\Omega)$, les normes $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ et $\|u\|_*$ sont équivalentes. Nous utiliserons donc $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} := \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ comme norme et

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx$$

comme produit scalaire.

Nous rappelons la définition d'une transformation linéaire compacte.

Définition 1.24. Soit E et F deux espaces de Banach et $T : E \to F$ est une transformation linéaire. On dit que T est *compacte* si l'image de tout borné de E est relativement compacte dans F.

Théorème 1.25 (Rellich). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné. Si $1 \leq q < \frac{2N}{N-2}$ alors $H_0^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$. De plus, l'inclusion est compacte et continue.*

Le résultat suivant sur les espaces $L^p(\Omega)$ est une conséquence directe de l'inégalité de Hölder.

Théorème 1.26. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné. Si $1 \leq p \leq q \leq \infty$ alors $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, et pour tout $f \in L^q(\Omega)$ on a*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq K\|f\|_{L^q(\Omega)}.$$

où K est une constante indépendante de f.

Chapitre 2

ENLACEMENT

Il existe plusieurs définitions d'enlacement en théorie des points critiques **[3, 8, 18]**. Elles sont importantes car elles conduisent à de nombreux résultats d'existence lorsque nous utilisons la méthode du minimax. La méthode du minimax consiste à trouver des valeurs critiques de la forme

$$c = \inf_{A \in S} \quad \sup_{u \in A} f(u)$$

où S est une certaine classe d'ensembles. La théorie sur les enlacements sert à la recherche de classes S appropriées.

Récemment, M. Frigon **[11]** a introduit une définition qui englobe tous les cas d'enlacement rencontrés dans ce mémoire. C'est donc cette définition que nous utiliserons dans la suite.

2.1. Définition et situations d'enlacement

Soit $A \subset E$, on définit

$$\mathcal{N}(A) : = \{\eta \in C(E \times [0,1], E) : \eta(x,t) = x \quad \forall (x,t) \in E \times \{0\} \cup A \times [0,1]\}.$$

Autrement dit, $\mathcal{N}(A)$ est l'ensemble des déformations de E qui laissent A fixe.

Définition 2.1 (Enlacement). Soient $A \subset B \subset E$ et $P \subset Q \subset E$ tels que $B \cap Q \neq \emptyset, \quad A \cap Q = \emptyset, \quad B \cap P = \emptyset$. On dit que (B,A) *enlace* (Q,P) si pour tout $\eta \in \mathcal{N}(A)$ au moins un des deux énoncés suivants est vérifié:

(1) $\eta(B,1) \cap Q \neq \emptyset$;

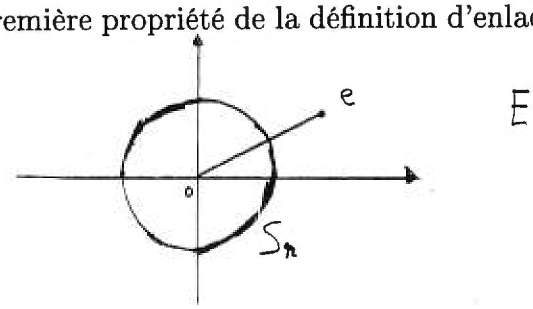
(2) $\eta(B,]0,1[) \cap P \neq \emptyset$.

Il est à noter que dans les autres définitions d'enlacement rencontrées dans la littérature, $P = \emptyset$ et $A \neq \emptyset$.

Nous donnons maintenant quelques cas particuliers d'enlacement.

Proposition 2.2. *Soient $e \in E \setminus \{0\}$, $0 < r < \|e\|$ et soit $S_r = \{x \in E : \|x\| = r\}$. Alors on a que $([0,e], \{0,e\})$ enlace $(S_r, \emptyset)$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\eta \in \mathcal{N}(\{0,e\})$. Comme $\|\eta(\cdot,1)\|$ est continue et que $[0,e]$ est connexe, il est clair que $\|\eta([0,e],1)\|$ est connexe. Comme $\|\eta(0,1)\| = 0$ et $\|\eta(e,1)\| = \|e\| > r$, il existe $x \in [0,e]$ tel que $\|\eta(x,1)\| = r$, c'est-à-dire $\eta([0,e]) \cap S_r \neq \emptyset$. Et donc la première propriété de la définition d'enlacement est satisfaite.



$\square$

Dans la cas où E est de la forme $E = E_1 \oplus E_2$, nous notons:

$$B_{1,r} : = \{x \in E_1 : \|x\| \leq r\}, \qquad S_{1,r} : = \{x \in E_1 : \|x\| = r\},$$

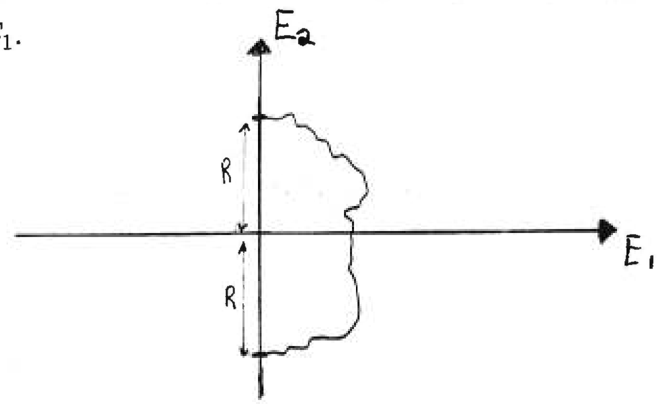
$$B_{2,r} : = \{x \in E_2 : \|x\| \leq r\}, \qquad S_{2,r} : = \{x \in E_2 : \|x\| = r\}.$$

Proposition 2.3. *Soit* $E = E_1 \oplus E_2$ *tel que* $\dim E_2 < \infty$ *et* $R > 0$, *alors on a que* $(B_{2,R}, S_{2,R})$ *enlace* $(E_1, \emptyset)$.

DÉMONSTRATION. Soit $\eta \in \mathcal{N}(S_{2,R})$. Nous allons montrer que η satisfait à la propriété (1) dans la définition d'enlacement. C'est-à-dire que $\eta(B_{2,R}, 1) \cap E_1 \neq \emptyset$. Soit $\eta = \eta_1 + \eta_2$ avec $\eta_1(E) \subset E_1$ et $\eta_2(E) \subset E_2$. Comme $\dim E_2 < \infty$, on peut appliquer le degré de Brouwer sur $B_{2,R}$. Comme $\eta_2(x,t) \neq 0$ pour tout $x \in S_{2,R}$ (la frontière de $B_{2,R}$) et pour tout $t \in [0,1]$, la proposition (1.15) implique que

$$deg(\eta_2(\cdot, 1), B_{2,R}) = deg(\eta_2(\cdot, 0), B_{2,R}).$$

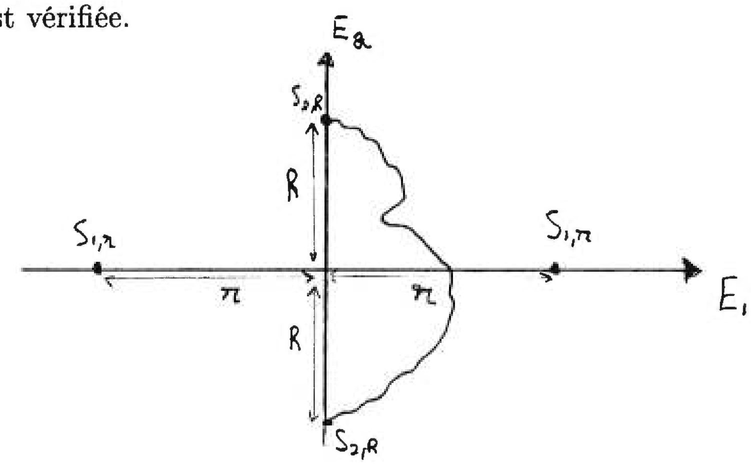
Étant donné que $\eta_2(\cdot, 0) = id$ et que $0 \in \overset{\circ}{B}_{2,R}$, on a $deg(\eta_2(\cdot, 0), B_{2,R}) = 1$, par définition (1.13). On en déduit qu'il existe $x_0 \in B_{2,R}$ tel que $\eta_2(x_0, 1) = 0$ et donc que $\eta(x_0, 1) \in E_1$. □



Proposition 2.4. *Soit* $E = E_1 \oplus E_2$ *tel que* $\dim E_2 < \infty$ *et soient* r, $R > 0$ *alors on a que* $(B_{2,R}, S_{2,R})$ *enlace* $(B_{1,r}, S_{1,r})$.

DÉMONSTRATION. Soit $\eta \in \mathcal{N}(S_{2,R})$. Clairement $0 \notin \eta([0,1] \times S_{2,R})$ et $deg(H(\cdot, 1), B_{2,R}) = deg(id, B_{2,R}) \neq 0$. Par le théorème 1.17, on peut alors choisir un continuum $\mathcal{C} \subset B_{2,R} \times [0,1]$ tel que pour tout $(x,t) \in \mathcal{C}, \eta(x,t) \in E_1$ et pour tout $t \in [0,1]$ il existe $x \in B_{2,R}$ tel que $(x,t) \in \mathcal{C}$. Comme $\eta(\cdot)$ est continue,

$\eta(\mathcal{C})$ est connexe. Si $\eta(\mathcal{C}) \subset B_{1,r}$ alors il est clair que la propriété (1) dans la définition d'enlacement est verifiée. Si au contraire il existe $(x,t) \in \mathcal{C}$ tel que $\|\eta(x,t)\| > r$, comme $\|\eta(y,0)\| \leq r$ pour $(y,0) \in \mathcal{C}$ alors par la connexité de $\eta(\mathcal{C})$, il existe $(x',t') \in \mathcal{C}$ tel que $\|\eta(x',t')\| = r$ et donc la propriété (2) de la définition d'enlacement est vérifiée. □



2.2. Théorème fondamental

Les enlacements sont étudiés dans le but de prouver l'existence de points critiques d'une fonctionnelle. Dans cette section, nous énonçons le théorème fondamental sur les enlacements qui nous fournit l'existence de points critiques.

Définition 2.5. Soient $A \subset E$ et $f : E \to \mathbb{R}$. On définit

$$\mathcal{N}_f(A) : = \{\eta \in \mathcal{N}(A) : f(\eta(x,t)) \leq f(x) \quad \forall (x,t) \in E \times [0,1]\}.$$

Pour la démonstration du prochain théorème, voir **[11]**. Par convention $\inf f(\emptyset) = \infty$ et $\sup f(\emptyset) = -\infty$.

Théorème 2.6 (théorème fondamental). *Soit $f \in C^1(E,\mathbb{R})$. Supposons que (B,A) enlace (Q,P), que*

$$\sup f(A) \leq \inf f(Q) \leq \sup f(B) < \inf f(P)$$

et que la première inégalité est stricte si $dist(A, Q) = 0$. *Soit*

$$c = \inf_{\eta \in \mathcal{N}_f(A)} \sup_{x \in B} f(\eta(x, 1)). \tag{2.1}$$

Si $c \in \mathbb{R}$ *et si* f *vérifie* $(PS)_c$, *alors* c *est une valeur critique. De plus, si* $c = \inf f(Q)$ *alors* $dist(K_c, Q) = 0$.

Remarque 2.7. Dans le théorème précédent on a que $\inf f(Q) \leq c \leq \sup f(B)$.

Le corollaire suivant du théorème fondamental nous sera utile.

Théorème 2.8. *Soit* $f \in C^1(E, \mathbb{R})$. *Supposons que* (B, A) *enlace* (Q, P), *que*

$$\sup f(A) \leq \inf f(Q) = a \leq \sup f(B) = b \leq \inf f(P).$$

Si $a, b \in \mathbb{R}$ *et* f *satisfait à* $(PS)_c$ *pour tout* $c \in [a, b]$, *alors* $K_c \neq \emptyset$ *pour un certain* $c \in [a, b]$. *De plus, soit* $c < \inf(P)$, *soit* $dist(K_c, B) = 0$.

Dans le cas où $P = \emptyset$, on peut remplacer $\mathcal{N}_f(A)$ par $\mathcal{N}(A)$ dans l'équation (2.1). Ceci correspond à ce que l'on retrouve dans la littérature **[8, 12]** .

Théorème 2.9. *Soit* $f \in C^1(E, \mathbb{R})$. *Supposons que* (B, A) *enlace* $(Q, \emptyset)$*et que*

$$\sup f(A) \leq \inf f(Q)$$

avec inégalité stricte si $dist(A, Q) = 0$. *Soit*

$$\hat{c} = \inf_{\eta \in \mathcal{N}(A)} \sup_{x \in B} f(\eta(x, 1)).$$

Si $\hat{c} \in \mathbb{R}$ *et* f *vérifie* $(PS)_{\hat{c}}$, *alors* $\hat{c}$ *est une valeur critique.*

Remarque 2.10. La valeur critique $\hat{c}$ peut être différente de c.

Comme conséquences directes du théorème précédent, nous obtenons les deux résultats classiques suivants.

Corollaire 2.11 (Théorème du col de la montagne). **[1]** *Soit* $f \in C^1(E, \mathbb{R})$. *Supposons qu'il existe* $e \in E \setminus \{0\}$ *et* $0 < r < \|e\|$ *tels que*

$$\max\{f(0), f(e)\} \leq \inf f(S_r).$$

Soit

$$\hat{c} = \inf_{\eta \in \mathcal{N}(\{0,e\})} \sup_{x \in [0,e]} f(\eta(x, 1).$$

Si f *vérifie* $(PS)_{\hat{c}}$ *alors* $\hat{c}$ *est une valeur critique.*

Corollaire 2.12 (Théorème du point de selle). **[19]** *Soit* $E = E_1 \oplus E_2$ *avec* $0 \neq \dim E_2 < \infty$ *et soit* $f \in C^1(E, \mathbb{R})$. *Supposons qu'il existe* $R > 0$ *tel que*

$$\sup f(S_{2,R}) \quad \leq \quad \inf f(E_1).$$

Soit

$$\hat{c} = \inf_{\eta \in \mathcal{N}(S_{2,R})} \sup_{x \in B_{2,R}} f(\eta(x, 1))$$

Si f *vérifie* $(PS)_{\hat{c}}$ *alors* $\hat{c}$ *est une valeur critique.*

2.3. Généralisation de la notion d'enlacement local

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la généralisation de la notion d'enlacement local lorsque $\dim E_2 < \infty$. Rappelons–en d'abord la définition.

Définition 2.13. Soit $E = E_1 \oplus E_2$ et $f \in C^1(E, \mathbb{R})$. Supposons qu'il existe $r > 0$ tel que

$$f(u) \geq 0 \text{ sur } B_{1,r} \quad \text{et} \quad f(u) \leq 0 \text{ sur } B_{2,r}. \tag{2.2}$$

On dit alors que f a un *enlacement local en* 0.

On peut montrer facilement la proposition suivante.

Proposition 2.14. *Si f possède un enlacement local en 0 alors 0 est un point critique de f.*

Cette proposition se généralise par le théorème suivant.

Théorème 2.15. *Soit $E = E_1 \oplus E_2$ avec $0 < \dim E_2 < \infty$ et soit $f \in C^1(E, \mathbb{R})$. Supposons qu'il existe $r, R > 0$ tels que*

$$\sup f(S_{2,R}) \leq \inf f(B_{1,r}) \leq \sup f(B_{2,R}) \leq \inf f(S_{1,r}).$$

Si f vérifie $(PS)_c$ pour tout $c \in [\inf f(B_{1,r}), \sup f(B_{2,R})]$, alors il existe une valeur critique $c \in [\inf f(B_{1,r}), \sup f(B_{2,R})]$. De plus, soit $c < \inf f(S_{1,r})$, soit $dist(K_c, B_{2,R}) = 0$.

DÉMONSTRATION. On sait d'après la proposition 2.4 que $(B_{2,R}, S_{2,R})$ enlace $(B_{1,r}, S_{1,r})$. Le résultat s'obtient alors directement en appliquant le théorème (2.8). $\square$

Il est clair qu'une fonctionnelle qui satisfait à la condition (PS) et qui possède un enlacement local en 0 satisfait aux hypothèses du théorème 2.15. Un théorème un peu moins général que le théorème 2.15 a déjà été obtenu par Marino, Micheletti et Pistoia **[15]**, mais l'approche était différente. En effet, la situation d'enlacement n'était pas relevée car la définition 2.1 n'était pas introduite à l'époque. Dans la suite, par simplicité, nous utiliserons la version suivante comme généralisation de l'enlacement local. Celle-ci découle directement du théorème fondamental 2.6.

Théorème 2.16. *Soit* $E = E_1 \oplus E_2$ *tel que* $0 < \dim(E_2) < \infty$ *et soit* $f \in C^1(E, \mathbb{R})$. *Supposons qu'il existe* $r, R > 0$ *tels que*

$$\sup f(S_{2,R}) \leq \inf f(B_{1,r}) \leq \sup f(B_{2,R}) < \inf f(S_{1,r}).$$

Soit

$$c = \inf_{\eta \in \mathcal{N}_f(S_{2,R})} \sup_{x \in B_{2,R}} f(\eta(x, 1)).$$

Si f *vérifie* $(PS)_c$ *alors* c *est une valeur critique. De plus si* $c = \inf(B_{1,r})$ *alors* $dist(K_c, B_{1,r}) = 0$.

2.4. Théorème des deux points critiques

Dans cette section, en plus de supposer que f satisfait aux conditions du théorème 2.16 qui généralise la notion d'enlacement local, nous supposerons que f envoie les bornés dans les bornés et que $-f$ est coercive. Ainsi nous obtiendrons l'existence d'un deuxième point critique. Le théorème énoncé ici est une version simplifiée du théorème des deux points critiques généralisé (théorème 4.6) présenté au chapitre 4. Ainsi, la compréhension de ce dernier en sera facilitée.

Théorème 2.17 (Théorème des deux points critiques). *Soit* $E = E_1 \oplus E_2$ *un espace de Banach tel que* $0 < dim(E_2) < \infty$ *et soit* $f \in C^1(E, \mathbb{R})$ *tel que*

(a) il existe $r, R > 0$ *tel que*

$$\sup f(S_{2,R}) \leq \inf f(B_{1,r}) \leq \sup f(B_{2,R}) < \inf f(S_{1,r});$$

(b) f *envoie les bornés dans les bornés;*

(c) f *vérifie* (PS)*;*

(d) $\lim_{\|u\| \to \infty} f(u) = -\infty$.

Alors f *admet au moins deux points critiques.*

DÉMONSTRATION. Par le théorème 2.16, on sait que f possède une valeur critique $c \in [\inf f(B_{1,r}), \sup f(B_{2,R})]$. En utilisant l'hypothèse (d), on sait qu'il existe $K > 0$ tel que $\|u\| > K$ implique que $f(u) \leq 0$ et grâce à l'hypothèse (b) on sait que $f(B(0, K))$ est bornée. On en déduit que f est bornée supérieurement. En appliquant le théorème 1.10 sur l'existence d'un minimum à $-f$ on voit que $\inf(-f(E))$ est une valeur critique de $-f$ et donc $\sup f(E)$ est une valeur critique de f. Évidemment $c \neq \sup f(E)$, donc f possède au moins deux points critiques.

$\square$

Chapitre 3

THÉORÈME DES TROIS POINTS CRITIQUES

Dans [**5**], Brezis et Nirenberg ont obtenu l'existence de trois points critiques d'une fonctionnelle bornée inférieurement ayant un enlacement local en 0 et satisfaisant à la condition de Palais–Smale. Dans ce chapitre, nous énonçons et démontrons une version plus forte de ce théorème. Au lieu d'exiger que f possède un enlacement local, nous supposons les hypothèses moins fortes du théorème 2.16 qui généralise la notion d'enlacement local.

Théorème 3.1. *Soit* $E = E_1 \oplus E_2$ *un espace de Banach tel que* $0 < \dim(E_2) < \infty$ *et soit* $f \in C^1(E, \mathbb{R})$ *tel que*

(a) il existe $r, R > 0$ *tels que*

$$\sup f(S_{2,R}) \leq \inf f(B_{1,r}) \leq \sup f(B_{2,R}) < \inf f(S_{1,r});$$

(b) f *est bornée inférieurement;*

(c) f *vérifie* (PS).

Alors f *admet au moins trois points critiques.*

DÉMONSTRATION. Soit $d = \inf f(E)$. Si $d = \sup f(S_{2,R})$ alors tout point de $S_{2,R}$ est un point où f atteint son minimum. On a donc au moins deux points critiques. En vertu du théorème 2.16,

$$c_1 := \inf_{\eta \in \mathcal{N}_f(S_{2,R})} \sup_{x \in B_{2,R}} f(\eta(x,1))$$

est une valeur critique. Si $c_1 > d$ on a évidemment un troisième point critique, et si $c_1 = d$ alors $c_1 = \inf f(B_{1,r})$ et d'après une conclusion du théorème 2.16, $\operatorname{dist}(K_{c_1}, B_{1,r}) = 0$ et donc on a encore un troisième point critique.

Supposons maintenant que $d < \sup f(S_{2,r})$. Comme f satisfait à (PS), f atteint son minimum en un point critique que l'on note u_0. D'autre part, en vertu du théorème 2.16

$$c_1 : = \inf_{\eta \in \mathcal{N}_f(S_{2,R})} \sup_{x \in B_{2,R}} f(\eta(x,1))$$

est une valeur critique. Soit u_1 un élément de K_{c_1}. Il est évident que $u_0 \neq u_1$, puisque $d < c_1$. Supposons que f ait seulement deux points critiques, c'est-à-dire que

$$K = \{u_0, u_1\}.$$

On a alors que $u_1 \notin S_{2,R}$. En effet, si on avait que $u_1 \in S_{2,R}$ alors on aurait que $c_1 = \inf f(B_{1,r})$ et dans ce cas, par une conclusion du théorème 2.16 sur l'enlacement local, on aurait que $\operatorname{dist}(K_{c_1}, B_{1,r}) = 0$. On aurait donc un troisième point critique, ce qui est une contradiction. Donc $\operatorname{dist}(u_1, S_{2,R}) > 0$.

Notons $c = \sup f(S_{2,R})$. Soit $s > 0$ tel que $s < \min\{\|u_0 - u_1\|, d(u_1, S_{2,R})\}/2$ et tel que

$$\forall v \in B(u_0, s), \qquad f(v) < \frac{c+d}{2}. \tag{3.1}$$

En vertu du lemme de déformation (théorème 1.8), il existe $\epsilon_1 \in]0, (c-d)/2[$ et $\eta_1 : E \times [0,1] \to E$ continue tels que

$$\|\eta_1(u,t) - u\| \leq \frac{tR}{2}, \tag{3.2}$$

$$f(\eta_1(u,t)) \leq f(u) \tag{3.3}$$

et

$$f(\eta_1(u,1)) \leq c - \epsilon_1 \quad \forall u \notin B(K_c, s) \text{ tel que } f(u) \leq c + \epsilon_1. \tag{3.4}$$

En particulier,

$$f(\eta_1(u,1)) \leq c - \epsilon_1 \text{ pour tout } u \in S_{2,R}. \tag{3.5}$$

De nouveau, le lemme de déformation implique qu'il existe $\epsilon_2 \in]0, \epsilon_1[$ et $\eta_2 : E \times [0,1] \to E$ continue tels que $f(\eta_2(u,1)) \leq f(u)$ et $f(\eta_2(u,1)) \leq d - \epsilon_2$ pour tout u tel que $f(u) \leq d + \epsilon_2$ et $u \notin B(u_0, s)$. Puisque $d = \inf f(E)$, on déduit que

$$f^{-1}(-\infty, d + \epsilon_2) \subset B(u_0, s). \tag{3.6}$$

Le théorème de l'intervalle non critique (théorème 1.9) implique qu'il existe $\eta_3 : E \times [0,1] \to E$ continue telle que

$$\eta_3(u, 0) = u, f(\eta_3(u,t)) \leq f(u) \tag{3.7}$$

et

$$f(\eta_3(u,1)) \leq d + \epsilon_2 \quad \text{si } f(u) \leq c - \epsilon_2. \tag{3.8}$$

En combinant les équations de (3.1) à (3.8) , on déduit que pour tout $u \in S_{2,R}$ on a

$$\|\eta_1(u,t)\| > R/2,$$
$$f(\eta_3(\eta_1(u,1),t)) \leq c - \epsilon_2,$$
$$\eta_3(\eta_1(u,1),1) \in B(u_0,s) \subset f^{-1}\left[d, \frac{d+c}{2}\right].$$

Notons

$$\hat{B} = [0,1] \times B_{2,R} \qquad \hat{A} = \partial\hat{B} = \{0,1\} \times B_{2,R} \cup [0,1] \times S_{2,R}.$$

Définissons $\phi : \hat{A} \to E$ par

$$\phi(t,u) = \begin{cases} u, & \text{si } t = 0, \\ \eta_1(u, 2t), & \text{si } 0 < t \leq 1/2, \ \|u\| = R, \\ \eta_3(\eta_1(u,1), 2t-1)), & \text{si } 1/2 < t \leq 1, \|u\| = R, \\ (1 - \frac{\|u\|}{R})u_0 + \frac{\|u\|}{R}\eta_3(\eta_1(R\frac{u}{\|u\|}, 1), 1), & \text{si } t = 1, \|u\| > 0, \\ u_0, & \text{si } t = 1, u = 0. \end{cases}$$

On vérifie facilement que ϕ est une fonction continue sur $\hat{A}$ et que pour tout $(t, u) \in \hat{A}$ avec $t \neq 0$, $\quad f(\phi(t, u)) \leq \sup f(S_{2,R})$ et que

$$\phi(t, u) \notin B_{1,r}.$$

Soit $\Phi : \hat{B} \to E$ une extension continue de ϕ et soit $A = \Phi(\hat{A})$. Montrons que $(\Phi(\hat{B}), A)$ enlace $(S_{1,r}, \emptyset)$. Soit $\eta \in \mathcal{N}_f(A)$. Nous voulons montrer que $\eta(\Phi(\hat{B}), 1) \cap S_{1,r} \neq \emptyset$. Afin de simplifier la notation, définissons $\psi : E \to E$ par $\psi(u) = \eta(u, 1)$, le problème se ramène à montrer que $\psi(\Phi(\hat{B})) \cap S_{1,r} \neq \emptyset$. Posons $\psi = \psi_1 + \psi_2$ avec $\psi_1(E) \subset E_1, \quad \psi_2(E) \subset E_2$.

Définissons $H : \hat{B} \times [0, 1] \to \mathbb{R} \times E_2$ par

$$H((t, u), \lambda) = \left(\lambda\|\psi(\Phi(t, u))\|r + (1 - \lambda)(\frac{\|u\|r}{R} + 2tr) - r, \quad \psi_2(\phi(t, u))\right).$$

Remarquons que $H((t, u), 1) = (0, 0)$ est équivalent à $\psi(\phi(t, u)) \in S_{1,r}$. En appliquant le degré de Brouwer sur $\hat{B} \subset [0, 1] \times E_2$ (qui est de dimension finie), nous allons montrer qu'il existe $(t, u) \in \hat{B}$ tel que $H((t, u), 1) = (0, 0)$.

Montrons que

$$H((t, u), \lambda) \neq (0, 0) \text{ pour tout } (t, u) \in \hat{A}\ , \lambda \in [0, 1].$$

On a que

$$H((0, u), \lambda) = (0, 0) \Leftrightarrow (\lambda\|u\| + (1 - \lambda)\frac{\|u\|r}{R} - r, u) = (0, 0),$$

ce qui est impossible. Aussi, pour tout $(t,u) \in \hat{A}\backslash\{0\}\times B_{2,R}$, on a que $\psi_2(\phi(t,u)) = 0$ implique $\|\psi(\Phi(t,u))\| > r$ car $\psi(\Phi(t,u)) = \Phi(t,u) \notin B_{1,r}$. Donc $\lambda\|\psi(\Phi(t,u))\| + (1-\lambda)(\|u\|\frac{r}{R} + 2tr) - r > 0$ et donc que $H((t,u),\lambda) \neq (0,0)$. En conséquence, par la proposition 1.15

$$deg(H(\cdot,1),\hat{B}) = deg(H(\cdot,0),\hat{B}).$$

Soit $G((t,u),\lambda) : = (\|u\|\frac{r}{R} + 2tr - r, \lambda\psi_2(\phi(t,u)) + (1-\lambda)u)$. On voit que pour tout $(t,u) \in \hat{A}, \lambda \in [0,1]$, on a que $G((u,t),\lambda) \neq (0,0)$. On a donc que que

$$deg(G(\cdot,1),\hat{B}) = deg(G(\cdot,0),\hat{B}).$$

Et finalement, soit $K : \hat{B}\times[0,1] \to \mathbb{R}\times E_2$ définie par $K((t,u),\lambda) = \lambda G((t,u),0) + (1-\lambda)(t-1/2,u)$, on déduit que

$$deg(G(\cdot,1),\hat{B}) = deg(K(\cdot,0),\hat{B}) = 1$$

car $K(\cdot,0) = id - (1/2,0)$. On a donc que $deg(H(\cdot,1),\hat{B}) = 1$, ce qui implique l'existence de $(t,u) \in \hat{B}$ tel que $H((t,u),1) = (0,0)$. Nous avons donc montré que $(\phi(\hat{B}),A)$ enlace $(S_{1,r},\emptyset)$.

Aussi $\sup f(A) < \inf f(S_{1,r})$ et les autres inégalités du théorème fondamental des enlacements géneralisés (théorème 2.6) sont satisfaites trivialement. On obtient donc une valeur critique c_2 telle que $c_2 \geq \inf f(S_{1,r}) > c_1 > d$, donc on a un troisième point critique, ce qui est une contradiction avec la supposition que f a seulement deux points critiques.

$\square$

Chapitre 4

GÉNÉRALISATION DES THÉORÈMES DES DEUX ET TROIS POINTS CRITIQUES

Dans ce chapitre nous généralisons les théorèmes précédents relatifs à la notion d'enlacement local. L'espace de Banach dans lequel nous travaillerons sera de la forme $E = E_1 \oplus E_2$ où E_2 ne sera pas nécessairement de dimension finie. Or lorsque $\dim(E_2) = \infty$, il n'est plus vrai que $(B_{2,R}, S_{2,R})$ enlace $(B_{1,r}, S_{1,r})$. En conséquence, nous supposerons que E_1 et E_2 sont des unions de suites croissantes de sous–espaces de dimensions finies (sur lesquels nous pourrons appliquer la théorie vue précédemment) et nous utiliserons une condition plus forte que la condition de Palais–Smale qui tiendra compte des propriétés de la fonctionnelle f restreinte aux sous–espaces de dimensions finies. Nous présenterons ainsi une généralisation du théorème des deux points critiques et puis, du théorème des trois points critiques.

4.1. Condition Palais-Smale étoile

Dans ce chapitre, E sera un espace de Banach de la forme

$$E = E_1 \oplus E_2$$

tel que

$$E_j = \overline{\cup_{n=1}^{\infty} E_j^n}, \qquad j = 1, 2.$$

où $\{E_1^n\}_{n=1}^{\infty}$ et $\{E_2^n\}_{n=1}^{\infty}$ sont des suites croissantes de sous-espaces de dimensions finies. Plus précisément,

$$E_1^0 \subsetneq E_1^1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_1, \quad E_2^0 \subset E_2^1 \subset \cdots \subset E_2,$$

et

$$\dim(E_j^n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}, j = 1, 2.$$

On supposera que la norme sur E sera telle que

$$\|u_1 + u_2\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2, \qquad \text{quand } u_j \in E_j, j = 1, 2\,.$$

Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$, on dénote par E^{α} l'espace

$$E_1^{\alpha_1} \oplus E_2^{\alpha_2}.$$

Si $r > 0$, on dénote pour $i = 1, 2$,

$$B_{i,r} = \{x \in E_i : \|x\| \leq r\}, \qquad S_{i,r} = \{x \in E_i : \|x\| = r\},$$

$$B_{i,r}^{\alpha_i} = \{x \in E_i^{\alpha_i} : \|x\| \leq r\}, \qquad S_{i,r}^{\alpha_i} = \{x \in E_i^{\alpha_i} : \|x\| = r\}.$$

Pour tout $f : E \to \mathbb{R}$, f_{α} désigne la restriction de f à E^{α}.

On définit un ordre partiel sur $\mathbb{N}^2$:

$$\alpha \leq \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 \leq \beta_1, \alpha_2 \leq \beta_2.$$

Définition 4.1. Une suite $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}^2$ est *admissible* si, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^2$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq m, \quad \alpha_n \geq \alpha$.

Définition 4.2. Soit $f \in C^1(E, \mathbb{R})$. On dit que f satisfait à la *condition de Palais-Smale étoile* (notée $(PS)^*$) si toute suite $\{u_{\alpha_n}\}$ telle que $\{\alpha_n\}$ est admissible,

$$u_{\alpha_n} \in E^{\alpha_n}, \qquad \sup_{n \in \mathbb{N}} f(u_{\alpha_n}) < \infty \qquad \text{et} \qquad f'_{\alpha_n}(u_{\alpha_n}) \to 0,$$

contient une sous-suite qui converge vers un point critique de f.

Théorème 4.3. *Si $f \in C^1(E,\mathbb{R})$ et f satisfait $(PS)^*$ alors f satisfait (PS).*

DÉMONSTRATION. Soit $\{u_n\}$ une suite E telle que $\{f(u_n)\}$ est bornée et $f'(u_n) \to 0$. Nous voulons montrer que $\{u_n\}$ possède une sous-suite convergente. Par la continuité de f et f' et par la densité des sous-espaces de dimension finie, on peut choisir $\{a_{\alpha_n}\}$ telle que $\{\alpha_n\}$ est admissible, $a_{\alpha_n} \in E^{\alpha_n}$,

$$\|a_{\alpha_n} - u_n\| \leq \frac{1}{n}, |f(u_n) - f(a_n)| \leq 1 \text{ et } \|f'(a_{\alpha_n}) - f'(u_n)\| \leq \frac{1}{n}.$$

On voit que $\{f(a_{\alpha_n})\}$ est bornée et comme ,

$$0 \leq \|f'_{\alpha_n}(a_{\alpha_n})\| \leq \|f'(a_{\alpha_n})\| \to 0$$

on a $f'_{\alpha_n}(a_{\alpha_n}) \to 0$. Puisque f satisfait $(PS)^*$, $\{a_{\alpha_n}\}$ possède une sous-suite convergente et en conséquence $\{u_n\}$ aussi. □

Nous présentons une version généralisée du théorème 2.16. Comme $\dim(E_2)$ n'est pas nécessairement finie, nous avons dû remplacer la condition (PS) par $(PS)^*$.

Théorème 4.4. *Soit $f \in C^1(E,\mathbb{R})$ et supposons que :*

(a) il existe $r, R > 0$ tel que

$$\sup f(S_{2,R}) \leq \inf f(B_{1,r}) \leq \sup f(B_{2,R}) < \inf f(S_{1,r});$$

(b) f satisfait $(PS)^*$.

Alors f possède au moins une valeur critique $c_0 \in [\inf f(B_{1,r}), \sup f(B_{2,R})]$.

DÉMONSTRATION. On sépare la preuve en deux cas. Supposons dans le premier cas que pour une suite admissible $\{\alpha_n\}$ on a que f_{α_n} satisfait à $(PS)_c$ pour tout $c \in [\inf f(B_{1,r}), \sup f(B_{2,R})]$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, par le théorème 2.16 on a que f_{α_n} possède une valeur critique dans $[\inf f(B_{1,r}), \sup f(B_{2,R})]$. Comme f satisfait à $(PS)^*$, on en déduit que f possède une valeur critique.

Supposons au contraire, qu'il n'y ait pas de suite admissible telle que décrite ci-dessus, alors il existe un entier n_0 tel que pour tout $\alpha \geq (n_0, n_0)$, il existe $c_\alpha \in [\inf f(B_{1,r}), \sup f(B_{2,R})]$ tel que f_α ne satisfait pas à $(PS)_{c_\alpha}$. Donc pour tout $n \geq n_0$, $f_{(n,n)}$ ne satisfait pas $(PS)_{c_n}$ pour un certain $c_n \in [\inf f(B_{1,r}), \sup f(B_{2,R})]$. Il y a donc une suite $\{a_k\}_1^\infty$ de $E^{(n,n)}$ telle que

$$\lim_{k\to\infty} f(a_k) = c_n \text{ et } \lim_{k\to\infty} f'_{(n,n)}(a_k) \to 0$$

(autrement $(PS)_{c_n}$ serait trivialement vérifiée). On en déduit qu'il existe $x_n \in E^{(n,n)}$ tel que

$$||f'_{(n,n)}(x_n)|| \leq 1/n \text{ et } |f(x_n) - c_n| \leq 1/n.$$

Ainsi $\{f(x_n)\}$ est bornée et $f'_{(n,n)}(x_n) \to 0$. Comme $\{(n,n)\}$ est admissible et f satisfait à $(PS)^*$, la suite $\{x_n\}$ possède une sous–suite qui converge vers le point critique désiré.

□

Remarque 4.5. Nous aurions pu introduire la *condition de Palais–Smale étoile au niveau c* (notée $(PS)_c^*$) qui généralise $(PS)^*$, mais par simplicité nous avons omis de le faire.

4.2. Théorème des deux points critiques généralisé

Nous donnons une généralisation du théorème des deux points critiques (théorème 2.17). Dans cette version $\dim E_2$ n'est pas nécessairement finie, de plus la coercivité de $-f$ est remplacée par une condition moins restrictive. Ce théorème généralise un résultat obtenu par Li et Willem **[13]** dans lequel l'hypothèse (a) était remplacée par celle d'enlacement local.

Théorème 4.6. *Soit $f \in C^1(E, \mathbb{R})$ et supposons que :*

(a) il existe $r, R > 0$ tel que

$$\sup f(S_{2,R}) < \inf f(B_{1,r}) \leq \sup f(B_{2,R}) < \inf f(S_{1,r});$$

(b) f satisfait à $(PS)^*$;

(c) f envoie les bornés dans des bornés;

(d) pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a que

$$\lim_{\substack{\|u\| \to \infty \\ u \in E_1^m \oplus E_2}} f(u) = -\infty.$$

Alors f possède au moins deux points critiques.

DÉMONSTRATION. Pour alléger la preuve, nous supposerons que E_1 est de dimension infinie, le cas $\dim E_1 < \infty$ étant plus simple.

En vertu du théorème précédent, on sait que f possède une valeur critique $c_0 \in [\inf f(B_{1,r}), \sup f(B_{2,R})]$. Supposons que f ait seulement une valeur critique, c'est-à-dire

$$K = K_{c_0}.$$

On note que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^2$, f_α satisfait (PS). En effet si $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ une suite de E^α est telle que $\{f(u_n)\}_{n=1}^\infty$ est bornée, par l'hypothèse (d) on peut en déduire que $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ est bornée, et donc possède une sous-suite convergente car E^α est de dimension finie.

Il existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $\alpha \geq (m_1, m_1)$, f_α ne possède pas de valeur critique dans $(-\infty, \sup(f(S_{2,R}))]$. En effet, sinon on aurait une suite admissible $\{\alpha_n\}$ telle que pour chaque n, f_{α_n} possède une valeur critique dans $(-\infty, \sup(f(S_{2,R}))]$. Comme f satisfait à $(PS)^*$, on aurait une valeur critique

$c_1 \in (-\infty, \sup(f(S_{2,R}))]$, ce qui contredirait l'hypothèse que f possède une seule valeur critique.

Par (d), il existe $D > \max\{r, R\}$ tel que

$$u \in E_1^{m_1+1} \oplus E_2\,,\, \|u\| \geq \frac{D}{\sqrt{2}} \Rightarrow f(u) \leq \sup f(S_{2,R}).$$

Soit $\mu :\ = \inf\{f(u) : \|u\| \leq D\}$ (que l'on sait fini grâce à (c)). Prenons $v_0 \in E_1^{m_1+1} \setminus E_1^{m_1}$ tel que $\|v_0\| = D$ et soit $\alpha :\ = (m_1, n)$ avec $n \geq m_1 + 1$ (n est arbitraire et fixe). Par le théorème de l'intervalle non critique (théorème 1.9), il existe une déformation $\eta_\alpha : E^\alpha \times [0,1] \to E^\alpha$ tel que pour tout $u \in E^\alpha, t \in [0,1]$, on a

$$\eta_\alpha(u, 0) = u,$$

$$f(\eta_\alpha(u,t)) \leq f(u),$$

$$f(\eta_\alpha(u,1)) \leq \mu - 1 \quad \text{si} \quad f(u) \leq \sup f(S_{2,R}).$$

Donc

$$\forall u \in S_{2,R}^n\ ,\ f(\eta_\alpha(u,1)) \leq \mu - 1.$$

Notons $Q_\alpha :\ = B_{2,R}^n \times [0,1]$ et définissons $\phi : \partial Q_\alpha \to E^{(m_1+1,n)}$ par

$$\phi(t,u) = \begin{cases} u, & \text{si } t = 0, \\ \eta_\alpha(u, 2t), & \text{si } 0 < t \leq 1/2, u \in S_{2,R}^n, \\ (2-2t)\eta_\alpha(u,1) + (2t-1)v_0, & \text{si } 1/2 < t < 1, u \in S_{2,R}^n, \\ v_0, & \text{si } t = 1, u \in B_{2,R}^n. \end{cases}$$

On montre facilement que ϕ est continue sur ∂Q_α. Soit $\Phi : Q_\alpha \to E^{(m_1+1,n)}$ une extension continue de ϕ. D'une façon similaire au théorème des trois points critiques (théorème 3.1), on peut montrer que $(\Phi(Q_\alpha), \phi(\partial Q_\alpha))$ enlace $(S^n_{1,r}, \emptyset)$ dans $E^n_1 \oplus E^n_2$. Aussi $\sup f(\phi(\partial Q_\alpha)) < \inf f(S^n_{1,r})$. Par le théorème 2.16,

$$c_n := \inf_{\eta \in \mathcal{N}(\phi(\partial Q_\alpha))} \sup_{x \in \Phi(Q_\alpha)} f(\eta(x,1))$$

est une valeur critique de $f_{(n,n)}$. On sait que $\inf(S^n_{1,r}) \leq c_n \leq \sup(\Phi(Q_\alpha))$. Aussi $\inf f(S_{1,r}) \leq \inf f(S^n_{1,r})$, et $\sup(\Phi(Q_\alpha)) \leq \sup f(E_1^{(m_1+1)} \oplus E_2)$. Les conditions (c) et (d) impliquent que $\sup f(E_1^{(m_1+1)} \oplus E_2) < \infty$.

Ce que l'on a fait est vrai pour n'importe quel $n \geq m_1 + 1$. Donc pour chaque $n \geq m_1 + 1$, $f_{(n,n)}$ possède une valeur critique c_n telle que

$$\inf f(S_{1,r}) \leq c_n \leq \sup f(E_1^{(m_1+1)} \oplus E_2).$$

Comme f satisfait à $(PS)^*$, f possède une valeur critique

$$c \in [\inf f(S_{1,r}), \sup f(E_1^{(m_1+1)} \oplus E_2)].$$

Clairement $c \neq c_0$, ce qui contredit l'hypothèse que f ne possède qu'une valeur critique. En conséquence f possède au moins deux points critiques. $\square$

4.3. Théorème des trois points critiques généralisé

Dans cette section nous généralisons le théorème des trois points critiques (théorème 3.1). Ici nous avons la possibilité d'avoir $\dim E_2 = \infty$, en conséquence nous devons supposer que f envoie les bornés dans les bornés, que la première inégalité de l'hypothèse (a) est stricte et nous devons remplacer la condition (PS) par la condition plus forte de $(PS)^*$.

Théorème 4.7. *Soit $f \in C^1(E, \mathbb{R})$ telle que :*

(a) il existe $r, R > 0$ tel que

$$\sup f(S_{2,R}) < \inf f(B_{1,r}) \leq \sup f(B_{2,R}) < \inf f(S_{1,r});$$

(b) f satisfait $(PS)^*$;

(c) f envoie les bornés dans les bornés;

(d) f est bornée inférieurement.

Alors f possède au moins trois points critiques.

DÉMONSTRATION. Soit

$$d: = \inf(E).$$

On suppose que $d < \sup f(S_{2,R})$ (le cas $d = \sup f(S_{2,R})$ est plus simple).

Étant donné que f satisfait à $(PS)^*$, on sait par le théorème 4.3 que f satisfait (PS). On a donc par le théorème 1.10 que d est une valeur critique de f et par le théorème 1.12 , on a que f (et donc f_α pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^2$) est coercive. On en déduit que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^2$, f_α satisfait (PS). En effet, soit $\alpha \in \mathbb{N}^2$ fixé et $\{a_n\}$ une suite de E^α tel que $\{f_\alpha(a_n)\}$ est bornée. Comme f_α est coercive, on a que $\{a_n\}$ est bornée. E^α étant de dimension finie, $\{a_n\}$ possède une sous-suite convergente.

La coercivité de f nous fournit l'existence d'un $M > 0$ tel que

$$f^{-1}((-\infty, \sup f(B_{2,R} + 1)]) \subset B(0, M).$$

Par le thérorème 4.4, on sait que f possède une valeur critique

$$c \in [\inf f(B_{1,r}), \sup f(B_{2,R})].$$

Clairement, $c \neq d$. Pour prouver que f possède trois points critiques, on procède encore une fois par contradiction. On suppose que f possède seulement deux points critiques et donc que

$$K = \{u_0, u_1\}$$

avec $u_0 \in K_d$ et $u_1 \in K_c$. Comme dans la première version du théorème des trois points critiques (théorème 3.1), on obtient l'existence de $\epsilon_1, s > 0$ suffisamment petits tel que $f(u) \leq d + \epsilon_1$ implique $u \in B(u_0, s)$. En utilisant la condition $(PS)^*$ et le fait que f ne possède pas de valeur critique dans $[d+\epsilon_1, \sup f(S_{2,R})]$, on en déduit que pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$, $\alpha \geq (n_0, n_0)$ implique que f_α n'a pas de valeur critique dans $[d + \epsilon_1, \sup f(S_{2,R})]$. Soit $n \geq n_0$ fixé, posons $\alpha = (n, n)$. En appliquant le théorème de l'intervalle non critique à f_α avec l'intervalle $[d + \epsilon_1, \sup f(S_{2,R})]$, on montre d'une façon similaire au théorème des trois points critiques (théorème 3.1) l'existence d'une transformation $\phi : \partial Q_\alpha \to E^\alpha$ où $Q_\alpha = B_n^2 \times [0,1]$ telle que $f(\phi(\partial Q_\alpha)) \leq \sup f(S_{2,R})$. En conséquence $\phi(\partial Q_\alpha) \subset B(0, M)$. On peut prolonger ϕ de façon continue sur Q_α par $\Phi : Q_\alpha \to E^\alpha$ tel que $\Phi(Q_\alpha) \subset B(0, M)$. On obtient ainsi que $(\Phi(Q_\alpha), \phi(\partial Q_\alpha))$ enlace $(S^n_{1,r}, \emptyset)$ dans E^α. On obtient une valeur critique $\inf f(S^n_{1,r}) \leq c_n \leq \sup(\Phi(Q_\alpha))$. Mais $\sup(\Phi(Q_\alpha)) \leq \sup f(B(0, M))$ qui est finie car f envoie les bornés dans les bornés. Ce que l'on a fait est vrai pour n'importe quel $n \geq n_0$. Donc pour chaque $n \geq n_0$, on a que $f_{(n,n)}$ possède une valeur critique c_n telle que

$$\inf f(S_{1,r}) \leq c_n \leq \sup f(B(0, M)).$$

Comme f satisfait à $(PS)^*$, f possède une valeur critique $\nu \in [\inf f(S_{1,r}), \sup f(B(0, M))]$. Clairement ν est différente de c et d, ce qui contredit l'hypothèse que f ne possède que deux valeurs critiques.

$\square$

Chapitre 5

APPLICATION

Dans ce chapitre, nous donnons un exemple d'application du théorème des deux points critiques généralisé (théorème 4.6) à un problème elliptique.

Soit le problème suivant:

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} -\triangle u(x) + a(x)u(x) = |u(x)|^{s-1}u(x) + h(x), & \text{dans } \Omega, \\ u(x) = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) dont la frontière $\partial\Omega$ est lisse. On suppose aussi que

(H1) $a \in L^\infty(\Omega)$;

(H2) $1 < s < \frac{N+2}{N-2}$;

(H3) 0 n'est pas une valeur propre de $u \longmapsto (-\triangle u + au)$;

(H4) $h \in L^2(\Omega)$.

Nous allons montrer que si $||h||_{L^2(\Omega)}$ est suffisamment petit, le problème $(\mathcal{P})$ possède au moins deux solutions. (Nous nous limitons au cas $N \geq 3$, les cas $N = 1, 2$ se traitent similairement en remplaçant (H2) par une condition moins restrictive).

Rappelons qu'une solution *classique* de $(\mathcal{P})$ est une fonction $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ qui vérifie $(\mathcal{P})$.

Si on multiplie $(\mathcal{P})$ par $v \in H_0^1(\Omega)$ et que l'on intègre, on note qu'une solution classique satisfait

$$\int_\Omega (-(\triangle u)v + auv)dx = \int_\Omega (u|u|^{s-1}v + hv)dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{5.1}$$

Par une intégration par partie, l'équation (5.1) se ramène à

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + auv - u|u|^{s-1}v - hv)dx = 0 \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{5.2}$$

Une fonction $u \in H_0^1$ qui satisfait à l'équation (5.2) est appelée *solution faible* de $(\mathcal{P})$. Lorsque a et h sont continues sur $\overline{\Omega}$, par un théorème de régularité on obtient que toute solution faible est une solution classique. Mais a et h ne sont pas nécessairement des fonctions continues, en conséquence chercher les solutions classiques n'est pas toujours pertinent. On s'intéressera donc aux solutions faibles de $(\mathcal{P})$.

Nous allons travailler sur l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ et appliquer le théorème des deux points critiques généralisé (théorème 4.6) à la fonctionnelle $f : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(u) : = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega au^2 \, dx - \int_\Omega \frac{|u|^{s+1}}{s+1} + hu \, dx. \tag{5.3}$$

Nous allons montrer que les points critiques de f correspondent aux solutions (faibles) du problème $(\mathcal{P})$.

Remarque 5.1. Dorénavant f désignera toujours la fonctionnelle définie par l'équation (5.3). Vu qu'il n'y a pas de confusion possible, nous noterons $||u||_{L^p}$ et $||u||_{H_0^1}$ à la place de $||u||_{L^p(\Omega)}$ et $||u||_{H_0^1(\Omega)}$ respectivement.

Lemme 5.2. *La fonctionelle f est de classe C^1 et sa dérivée au point u est:*

$$< f'(u), v >= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega auv dx - \int_\Omega (|u|^{s-1}uv + hv)dx. \tag{5.4}$$

Nous omettons la preuve du lemme 5.2 car elle est très technique et connue. Le lecteur intéressé pourra consulter **[18]**.

Le lemme suivant découle directement du lemme précédent.

Lemme 5.3. *Les solutions faibles du problème* $(\mathcal{P})$ *correspondent aux points critiques de* f.

Nous allons montrer que si $\|h\|_{L^2}$ est suffisamment petit alors f satisfait à chacune des hypothèses du théorème des deux points critiques généralisé (théorème 4.6). Le prochain lemme correspond à l'hypothèse (c) de ce théorème.

Lemme 5.4. *La fonctionnelle* f *envoie les bornés dans les bornés.*

DÉMONSTRATION. Pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}
|f(u)| \leq & \left|\int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{2} dx\right| + \left|\int_\Omega \frac{au^2}{2} dx\right| + \left|\int_\Omega \frac{|u|^{s+1}}{s+1} dx\right| + \left|\int_\Omega hudx\right| \\
\leq & \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1} + \frac{1}{2}\|a\|_{L^\infty}\|u\|^2_{L^2} + \frac{\|u\|^{s+1}_{L^{s+1}}}{s+1} + \|h\|_{L^2}\|u\|_{L^2} \\
\leq & \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1} + k_0\|a\|_{L^\infty}\|u\|^2_{H_0^1} + k_1\|u\|^{s+1}_{H_0^1} + k_2\|h\|_{L^2}\|u\|_{H_0^1}
\end{aligned}$$

où k_i, $i = 0, 1, 2$ sont des constantes positives indépendantes de u et découlant de la continuité de l'inclusion $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q$, $q < \frac{2N}{N-2}$ (théorème 1.25). □

Posons $E = H_0^1(\Omega)$. Par la théorie des équations aux dérivées partielles on sait que l'opérateur $u \longmapsto -\Delta u + au$ possède un nombre fini de valeurs propres négatives (voir **[21]**) . Soient

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_k < 0 < \beta_1 \leq \beta_2 \leq \ldots$$

ses valeurs propres où chaque valeur propre est répétée selon sa multiplicité. Soient

$$e_1, e_2, e_3, \ldots, e_k, d_1, d_2, \ldots$$

les vecteurs propres orthonormaux dans $L^2(\Omega)$ correspondants. Soit E_2 le sous-espace de E engendré par $\{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_k\}$ et E_1 son complément orthogonal dans E par rapport au produit scalaire dans $L^2(\Omega)$. Ainsi $E = E_1 \oplus E_2$. On pose

$$E_1^n : = \operatorname{span}(d_1, \ldots, d_n), \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{5.5}$$

$$E_2^n : = E_2, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{5.6}$$

Il est connu que

$$E_1 = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_1^n},$$

voir [4].

Les deux prochains lemmes serviront à montrer la proposition 5.7 qui dit que si $||h||_{L^2}$ est suffisamment petit alors f satisfait à l'hypothèse (a) du théorème des deux points critiques généralisé (théorème 4.6).

Le lecteur interresé pourra consulter **[21]** pour la démonstration du résultat suivant.

Lemme 5.5. *On a que*

$$\delta : = \inf_{\substack{u \in E_1 \\ ||u||_{H_0^1} = 1}} \int_\Omega (|\nabla u|^2 + au^2) dx > 0.$$

Lemme 5.6. *Soient $E = E_1 \oplus E_2$ et $f : E \to \mathbb{R}$ tels que définis ci-dessus et vérifiant (H1)-(H4). Alors il existe des constantes positives $C_i, K_j, i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2$ indépendantes de u telles que*

$$f(u) \geq C_1 ||u||_{H_0^1}^2 - C_2 ||u||_{H_0^1}^{s+1} - C_3 ||h||_{L^2} ||u||_{H_0^1} \qquad \forall u \in E_1, \tag{5.7}$$

$$f(u) \leq -K_1 ||u||_{H_0^1}^2 + K_2 ||h||_{L^2} ||u||_{H_0^1} \qquad \forall u \in E_2. \tag{5.8}$$

DÉMONSTRATION. Soit $u \in E_1$, on sait grâce au lemme 5.5 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$f(u) \geq \delta \frac{||u||^2_{H^1_0}}{2} - \frac{||u||^{s+1}_{L^{s+1}}}{s+1} - ||u||_{L^2(\Omega)}||h||_{L^2(\Omega)}. \tag{5.9}$$

Par l'inégalité de Rellich (théorème 1.25), on a

$$f(u) \geq C_1||u||^2_{H^1_0} - C_2||u||^{s+1}_{H^1_0} - C_3||h||_{L^2}||u||_{H^1_0},$$

où C_i, $i = 1, 2, 3$ sont des constantes positives indépendantes de u.

Sur E_2, si $u = c_1e_1 + \ldots + c_ke_k$ alors

$$-\triangle u + au = \lambda_1 c_1 e_1 + \ldots + \lambda_n c_n e_n.$$

En mutipliant par u et en faisant une intégration par partie, on obtient

$$\int_\Omega (|\nabla u|^2 + au^2)dx = \int_\Omega (\lambda_1 c_1 e_1 + \ldots + \lambda_k c_k e_k)u\, dx.$$

Vu que les e_i sont orthogonaux entre eux dans $L^2(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega (|\nabla u|^2 + au^2)dx = \lambda_1 c_1^2 + \ldots + \lambda_k c_k^2.$$

En utilisant le fait que

$$\lambda_i \leq \lambda_k \text{ pour tout } i = 1, \ldots, k$$

et que $||u||^2_{L^2} = c_1^2 + \ldots + c_k^2$ on a que

$$\int_\Omega (|\nabla u|^2 + au^2)dx \leq \lambda_k ||u||^2_{L^2}. \tag{5.10}$$

En utilisant (5.10) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$f(u) \leq \frac{\lambda_k}{2}||u||^2_{L^2} + ||h||_{L^2}||u||_{L^2}$$

Mais comme on est dans E_2 qui est de dimension finie, les normes sur E_2 sont équivalentes. Donc il existe des constantes positives K_1 et K_2 telles que

$$f(u) \leq -K_1\|u\|^2_{H^1_0} + K_2\|h\|_{L^2}\|u\|_{H^1_0}.$$

□

Proposition 5.7. *Soient $E = E_1 \oplus E_2$ et $f : E \to \mathbb{R}$ tels que définis ci-dessus et vérifiant (H1)-(H4). Alors il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que si $\|h\|_{L^2} < \epsilon_0$, il existe $r, R > 0$ tels que*

$$\sup f(S_{2,R}) < \inf f(B_{1,r}) \leq \sup f(B_{2,R}) < \inf f(S_{1,r}).$$

DÉMONSTRATION. Soient $C_i, i = 1, 2, 3$ les constantes fournies par l'inégalité (5.7). Prenons

$$r : = \left(\frac{2C_1}{C_2(s+1)}\right)^{\frac{1}{s-1}}. \tag{5.11}$$

Alors si $u \in E_1$ tel que $\|u\|_{H^1_0} = r$ alors

$$f(u) \geq \frac{C_1}{s+1}\left(\frac{2C_1}{C_2(s+1)}\right)^{\frac{2}{s-1}}(s-1) - C_3\|h\|_{L^2}\left(\frac{2C_1}{C_2(s+1)}\right)^{\frac{1}{s-1}}$$

En conséquence

$$\inf(S_{1,r}) \geq \frac{C_1}{s+1}\left(\frac{2C_1}{C_2(s+1)}\right)^{\frac{2}{s-1}}(s-1) - C_3\|h\|_{L^2}\left(\frac{2C_1}{C_2(s+1)}\right)^{\frac{1}{s-1}}. \tag{5.12}$$

Pour simplifier, réécrivons l'équation (5.12) de la forme

$$\inf f(S_{1,r}) \geq D_1 - D_2\|h\|_{L^2}. \tag{5.13}$$

où D_1 et D_2 sont des constantes positives.

Soient K_1, K_2 les constantes fournies par l'inégalité (5.8). En utilisant le calcul différentiel, on montre facilement que le maximum de la fonction

$$g(t) = -K_1t^2 + K_2\|h\|_{L^2}t$$

est atteint en $t = \frac{K_2}{2K_1}||h||_{L^2}$. On a donc pour tout $u \in E_2$ que

$$\begin{aligned} f(u) &\leq -K_1 \left(\frac{K_2}{2K_1}||h||_{L^2} \right)^2 + K_2||h||_{L^2} \left(\frac{K_2}{2K_1}||h||_{L^2} \right) \\ &\leq \frac{K_2^2||h||_{L^2}^2}{4K_1} \end{aligned}$$

En particulier, pour tout $R > 0$,

$$\sup f(B_{2,R}) \leq D_3||h||_{L^2}^2 \tag{5.14}$$

où D_3 est une constante positive. Alors, en combinant (5.13) et (5.14) il est clair que si ϵ_0 est suffisamment petit alors $||h||_{L^2} < \epsilon_0$ implique que

$$D_3||h||_{L^2}^2 < D_1 - D_2||h||_{L^2}.$$

et donc pour n'importe quel $R > 0$,

$$\sup f(B_{2,R}) < \inf f(S_{1,r}).$$

Aussi en utilisant l'inégalité (5.8), on a que

$$\lim_{\substack{||u|| \to \infty \\ u \in E_2}} f(u) = -\infty.$$

Nous choisissons donc un $R > 0$ tel que $||u|| \geq R$ et $u \in E_2$ implique $f(u) < \inf f(B_{1,r}) - 1$. En paticulier $\sup f(S_{2,R}) < \inf f(B_{1,r})$.

Notons que l'inégalité

$$\inf f(B_{1,r}) \leq \sup f(B_{2,R})$$

est satisfaite trivialement. Nous avons donc terminé la démonstration. $\square$

Le lemme suivant correspond à l'hypothèse (d) du théorème des deux points critiques généralisé (théorème 4.6).

Lemme 5.8. *Pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a :*

$$\lim_{\substack{\|u\| \to \infty \\ u \in E_1^m \oplus E_2}} f(u) = -\infty.$$

DÉMONSTRATION.

$$f(u) \leq \frac{1}{2}\|u\|_{H_0^1}^2 + \frac{1}{2}\|a\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}^2 - \frac{\|u\|_{L^{s+1}}^{s+1}}{s+1} + \|h\|_{L^2}\|u\|_{L^2}$$

et comme l'espace $E_1^m \oplus E_2$ est de dimension finie, toutes les normes sur cet espace sont équivalente, on en déduit facilement le résultat cherché. □

Le lemme suivant correspond à l'hypothèse (b) du théorème des deux points critiques généralisé (théorème 4.6).

Lemme 5.9. *La fonctionelle f satisfait $(PS)^*$.*

DÉMONSTRATION. Soit une suite $\{u_{\alpha_n}\}$ telle que $\{\alpha_n\}$ est admissible et

$$u_{\alpha_n} \in E^{\alpha_n}, c := \sup_{n \in \mathbb{N}} f(u_{\alpha_n}) < \infty, \; f'_{\alpha_n}(u_{\alpha_n}) \to 0. \tag{5.15}$$

On a donc pour n suffisamment grand que

$$< f'_{\alpha_n}(u_{\alpha_n}), v > \quad \geq -\|v\|_{H_0^1} \quad \forall v \in E^{\alpha_n},$$

et en particulier

$$< f'(u_{\alpha_n}), u_{\alpha_n} \geq -\|u_{\alpha_n}\|_{H_0^1}, \tag{5.16}$$

car $u_{\alpha_n} \in E^{\alpha_n}$. Prenons $\nu \in](s+1)^{-1}, 2^{-1}[$. En combinant (5.15) et (5.16) on a que

$$\begin{aligned}
&c + \nu \, \|u_{\alpha_n}\|_{H_0^1} \\
&\geq \; f(u_{\alpha_n}) - \nu < f'(u_{\alpha_n}), u_{\alpha_n} > \\
&= \int_\Omega [(\frac{1}{2} - \nu)|\nabla u_{\alpha_n}|^2 + (\frac{1}{2} - \nu) a u_{\alpha_n}^2 - (\frac{1}{s+1} - \nu)|u_{\alpha_n}|^{s+1} - (1-\nu) h u_{\alpha_n}] dx \\
&\geq (\frac{1}{2} - \nu)\|u_{\alpha_n}\|_{H_0^1}^2 - (\frac{1}{2} - \nu)\|a\|_\infty \|u_{\alpha_n}\|_{L^2}^2 \\
&\qquad + (\nu - \frac{1}{s+1})\|u_{\alpha_n}\|_{L^{s+1}}^{s+1} - (1-\nu)\|h\|_{L^2}\|u_{\alpha_n}\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Comme $\|u_{\alpha_n}\|_{L^2} \leq K\|u_{\alpha_n}\|_{L^{s+1}}$ (où K est une constante), on voit que $\{\|u_{\alpha_n}\|_{H_0^1}\}$ est bornée. Il existe donc une sous-suite $\{u_k\}$ de $\{u_{\alpha_n}\}$ et $u \in H_0^1(\Omega)$ tels que $u_k \rightharpoonup u$ dans H_0^1 et $u_k \to u$ dans $L^{s+1}(\Omega)$.

Montrons que u_k converge (fortement) vers u dans $H_0^1(\Omega)$.

$$\begin{aligned}
\|u - u_k\|_{H_0^1}^2 = &< f'(u_k), u_k - u > - < f'(u_k), u_k - u > \\
&+ \int_\Omega [-a(u_k - u)^2 + (|u_k|^{s-1}u_k - |u|^{s-1}u)(u_k - u)] dx
\end{aligned}$$

Comme chacun des termes tend vers zéro, on en déduit que $u_k \to u$ et $f'(u) = 0$. $\square$

Nous avons donc montré que si $\|h\|_{L^2}$ est suffisamment petit alors f vérifie toutes les hypothèses du théorème des deux points critiques généralisé (théorème 4.6) et en conséquence que f possède aux moins deux points critiques. On en déduit que le problème $(\mathcal{P})$ a au moins deux solutions. Nous résumons ce résultat par le théorème suivant:

Théorème 5.10. *Sous les hypothèses (H1)–(H4), il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que si $\|h\|_{L^2} < \epsilon_0$ le problème $(\mathcal{P})$ possède au moins deux solutions.*

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons montré que la généralisation de la notion d'enlacement local est pertinente. En effet, nous avons donné des exemples de théorèmes relatifs à la notion d'enlacement local qui restent vrais lorsqu'on remplace l'hypothèse d'enlacement local par sa généralisation.

Mais plusieurs des réponses que nous avons apportées aux problèmes sont pour la plupart incomplètes. En effet, nous pouvons nous demander s'il n'y a pas des versions encore plus générales que celles proposées. Par exemple dans le théorème des trois points critiques (théorème 3.1), nous ne savons pas s'il est nécessaire que la dernière inégalité de l'hypothèse (a) soit stricte. De même, dans le théorème 2.17 des deux points critiques, nous ne savons pas s'il est nécessaire de supposer que f envoie les bornés dans les bornés.

Lorsque l'on passe aux espaces de type $E = E_1 \oplus E_2$ avec $\dim E_2$ possiblement infinie, il y encore plus de questions ouvertes. Dans le théorème 2.16, on sait que si la valeur critique c fournie par le théorème est telle que $c = \inf f(B_{1,r})$, alors $dist(K_c, B_{1,r}) = 0$. Dans la version généralisée aux espaces avec $\dim E_2$ possiblement infinie, nous ne savons pas encore si on peut obtenir de l'information similaire. En conséquence, dans le théorème des deux points critiques généralisé (théorème 4.6), nous avons supposé que la première inégalité de l'hypothèse (a) soit stricte. Il en est de même pour le théorème des trois points critiques généralisé (théorème 4.7).

Si effectivement, il s'avère nécessaire de supposer les inégalités strictes, il faudrait alors le montrer à l'aide d'exemples. Dans ce cas, ces exemples seraient probablement difficiles à trouver. Il reste donc encore beaucoup de questions autour de ces problèmes.

Nous n'avons donné qu'un exemple d'application où une version généralisée d'un des théorèmes était utile. Mais probablement qu'il y en a d'autres. On pourrait étudier d'autres problèmes aux limites dans lesquels on ajouterait, comme dans ce mémoire, une perturbation suffisamment petite. Il y a donc beaucoup de nouvelles questions qui s'offrent à nous.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Ambrossetti et P. H. Rabinowitz, On the existence of multiple solutions for a class of nonlinear boundary value problems, *Rend. Sem. Math. Univ. Padova* **49** (1973), 195–204.

[2] R. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[3] V. Benci et P. H. Rabinowitz, Critical point theorems for indefinite functionals, *Invent. Math.* **52** (1979), 241–273.

[4] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Masson, Paris, 1983.

[5] H. Brezis et L. Nirenberg, Remarks on finding critical points, *Comm. Pure and Appl. Math.* **64** (1991), 939–963.

[6] K. C. Chang, *Infinite dimensional morse theory and its applications*, Presses Univ. Montréal, Montréal, 1985.

[7] D. C. Clark, A variant of the Ljusternik–Schnirelmann theory, *Indiana Univ. Math. J.* **22** (1972), 65–74.

[8] J.-N. Corvellec, *Contribution à la théorie des points critiques*, Thèse de doctorat, Univ. de Montréal, 1990.

[9] J.-N. Corvellec, M. Degiovanni et M. Marzocchi, Deformation properties for continuous functionals and critical points theory, *Topol. Methods Nonlinear Anal.* **1** (1993), 151–171.

[10] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[11] M. Frigon, On a new notion of linking and applications to elliptic problems at resonance, *J. Differential Equations* **153** (1999), 96–120.

[12] N. Ghoussoub, Location, multiplicity and Morse indices of min–max critical points, *J. Reine Angew. Math.* **417** (1991), 27–76.

[13] S. J. Li et M. Willem, Applications of local linking to critical point theory, *J. Math. Anal. Appl.* **189** (1995), 6–32.

[14] J. Q. Liu et S. J. Li, Some existence theorems on multiple on multiple critical points theory and their applications, *Kexue tongbao* **17** (1984), 1025–1027.

[15] A. Marino , A. M. Micheletti, et A. Pistoia, A nonsymmetric asymptotically linear elliptic problem, *Topol. Methods Nonlinear Anal.* **4** (1994), 289–339.

[16] W. M. Ni, Some minimax principles and their applications in nonlinear elliptic equations, *J. Anal. Mathématique* **37** (1980), 248–75.

[17] R. S. Palais, Lusternik–Schnirelmann theory on Banach manifolds, *Topology* **5** (1966), 115–132.

[18] P. H. Rabinowitz, *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., Vol. 65, Amer. Math. Soc., Providence, 1986.

[19] P. H. Rabinowitz, Some minimax theorems and applications to nonlinear partial differential equations, *Nonlinear Analysis, A collection in honour of Erich Röthe,* pp. 161–177, Academic Press, New York, 1978.

[20] E. A. de B. E. Silva, Linking theorems and applications to semilinear elliptic problems at resonance, *Nonlinear Anal.* **16** (1991), 1159–1168.

[21] M. Willem, *Minimax theorems*, Birkhauser, Berlin, 1996.

[22] E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications I, Fixed–point theorems,* Springer-Verlag, New York, 1986.