Université de Montréal

La verticalité dans les groupes primaires abéliens

par

Stéphane Flamand

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

Avril, 1999

Page d'identification du jury

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé :

La verticalité dans les groupes primaires abéliens

présenté par :

Stéphane Flamand

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Pierre Berthiaume
(Président-rapporteur)

Khalid Benabdallah
(Directeur de recherche)

Hidemitsu Sayeki
(Membre du jury)

Mémoire accepté le :
30 septembre 1999

Les groupes abéliens sont comme la nature; plus on en explore la structure interne en relation avec tous ses individus et son environnement, plus on en découvre les richesses et on en comprend le fonctionnement.

Floyd

SOMMAIRE

L'un des principaux buts de la théorie des groupes est de classifier ceux-ci selon leur structure interne, c'est-à-dire à un isomorphisme près. Une façon naturelle d'effectuer cette classification est de décomposer les groupes d'après les facteurs directs contenus dans ceux-ci afin de visualiser cette structure. Nous savons qu'une condition nécessaire afin qu'un sous-groupe soit un facteur direct est la pureté de celui-ci. Par conséquent, l'identification des sous-groupes purs du groupe en question est un bon point de départ. Dans le cas où ceux-ci sont difficilement repérables, il est alors justifié de tenter l'identification de sous-groupes possédant une propriété plus faible mais nécessaire à la pureté. Par exemple, la netteté d'un sous-groupe est une de ces propriétés. Elle possède de plus l'avantage sur la pureté que tout sous-socle d'un groupe est le support d'un sous-groupe net dans ce groupe. Nous pouvons ensuite poursuivre nos investigations afin de mettre à jour une autre propriété englobant la pureté d'une façon différente. Qui plus est, celle-ci pourrait s'avérer plus avantageuse que la netteté.

La verticalité constitue la propriété auprès de laquelle nos exigences trouveront satisfaction. Elle sera le sujet d'étude principal de cet ouvrage.

Afin d'être en mesure de dégager toute la richesse des caractéristiques de la verticalité, le premier chapitre nous dotera des outils abéliens, topologiques et analytiques essentiels à la réalisation de cette entreprise.

Étant donné que la netteté, la pureté et la verticalité sont intimement liées comme les trois Parques de la mythologie grecque, ces propriétés seront étudiées dans cet ordre dans les trois chapitres suivants, nous livrant du même coup les définitions et les résultats nécessaires à la compréhension de ce qui suivra. Constituant le sujet principal de ce mémoire, la verticalité sera étudiée de façon plus approfondie que ses consoeurs. Notamment, nous montrerons que tout sous-socle supporte un sous-groupe vertical et que parmi ceux-ci existent les sous-groupes verticaux maximaux.

En abordant l'étude de ces derniers dans le cinquième chapitre, nous réaliserons que les sous-groupes purs sont verticaux maximaux bien que la réciproque soit généralement fausse. De là une interrogation double s'imposera naturellement à notre esprit. Quels sont les sous-groupes verticaux maximaux qui sont purs et quels sont les groupes qui contiennent de tels sous-groupes?

Enfin, le dernier chapitre se consacrera à la notion de purifiabilité d'un sous-groupe en guise d'application de la verticalité. Essentiellement, nous définirons la notion de verticalité-éventuelle et montrerons que cette propriété d'un sous-groupe constitue une condition nécessaire à sa purifiabilité.

En terminant, afin de restreindre le sujet, nous serons confinés aux groupes p-primaires abéliens, c'est-à-dire ceux dont les ordres des éléments sont des puissances d'un nombre premier p donné. C'est la raison pour laquelle il est sous-entendu que tous les groupes interpellés dans ce travail sont primaires abéliens avec p comme nombre premier associé. À moins d'avis contraire, G est le p-groupe de référence principal et tous les nombres rencontrés sont des entiers naturels.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Historiquement, la notion de verticalité a été introduite par messieurs K. Benabdallah, B. Charles et A. Mader dans [2] suite à une recherche de K. Benabdallah et T. Okuyama. Ceux-ci puisaient leur motivation dans la recherche d'une condition nécessaire à la purifiabilité des sous-groupes des groupes primaires abéliens. Pour tout $n \geq 0$, ils ont introduit un foncteur de la catégorie des pairs (G, H) à celle des espaces vectoriels Z/pZ, où H est un sous-groupe de G. Le $n^{\text{ième}}$ surplomb de H dans G est l'espace vectoriel

$$V_n(G, H) = \frac{(H + p^{n+1}G) \cap (p^nG)[p]}{H \cap (p^nG)[p] + (p^{n+1}G)[p]}$$

où V_n est le foncteur en question. Un sous-groupe H qui annule tous ses foncteurs est appelé un sous-groupe vertical dans G. En d'autres mots, H est un sous-groupe vertical dans G si et seulement si $V_n(G, H) = 0$ pour tout $n \geq 0$. Analoguement, ils ont défini H comme étant un sous-groupe éventuellement-vertical dans G si et seulement si il existe $m \geq 0$ tel que $V_n(G, H) = 0$ pour tout $n \geq m$. La verticalité-éventuelle est précisément une propriété nécessaire que doit posséder un sous-groupe H dans G afin d'être purifiable.

Toutefois, c'est la notion de compatibilité entre deux sous-groupes H et K de G qui nous conduira au concept de verticalité dans cet ouvrage. Précisément, H est compatible avec K si et seulement si l'isomorphisme naturel $\Phi : (H + K)/K \to H/(H \cap K)$ préserve les hauteurs finies. Explicitement, $h_{G/K}(h + K) = h_{G/(H \cap K)}(h + H \cap K)$ où $h \in H$. Ainsi, par définition, nous verrons que V est un sous-groupe vertical dans G si et seulement si V est compatible avec G[p].

CHAPITRE I

PRÉAMBULES

Ce chapitre a pour but de préparer l'entrée en matière en nous dotant des outils nécessaires à la réalisation de l'étude qui nous préoccupe. Il se divise en trois sections. Les définitions et les résultats se trouvant dans la première partie s'appliquent aux groupes primaires abéliens en général, alors que ceux qui constituent le second point traitent du caractère topologique p-adique engendré par la structure de ces groupes. Enfin, la dernière section examine une partie du côté analytique généré par la structure des p-groupes. Cependant, le contenu de ce chapitre n'est pas exhaustif à dessein; d'autres définitions et résultats seront abordés en temps voulu.

1. PRÉAMBULE ABÉLIEN

Cette première partie comporte des définitions et des résultats connus des algébristes des groupes. En premier lieu toutefois, sont introduites des définitions personnelles.

Définition 1.1.1

Un groupe G est nul si et seulement si
il ne possède que l'élément neutre comme élément.
Nous notons alors $G = 0$.

Définition 1.1.2

Par notation, H est un sous-groupe de G ou dans G
si et seulement si $H < G$.
Dans le cas où H possède une propriété P dans G, nous disons que
H est un sous-groupe P dans G ou tout simplement H est P dans G.

Définition 1.1.3

Un sous-groupe E de G est appelé une extension ou un prolongement de H dans G si et seulement si $H < E < G$; dans ce cas-ci les deux termes sont synonymes.
Néanmoins, nous allons établir la distinction qui existe entre ceux-ci dans le cas où ils possèdent une propriété P quelconque.

Dans les définitions qui vont suivre, H est un sous-groupe de G et P une propriété quelconque.

Définition 1.1.4

E est une P-extension de H dans G si et seulement si $H < E < G$ et H est un sous-groupe P dans E.

Définition 1.1.5

L est un P-prolongement de H dans G si et seulement si $H < L < G$ et L est un sous-groupe P dans G.

Par exemple, soit E et L respectivement une extension verticale et un prolongement net de H dans G, les propriétés mises en cause ici étant évidemment la verticalité et la netteté. En clair, cela signifie que H est un sous-groupe vertical dans E où à l'instar de H, E ne possède a priori aucune propriété particulière dans G. Quant à lui, L est un sous-groupe net dans G contenant H qui ne possède aucune propriété particulière ni dans L ni dans G au premier abord [1].

Définition 1.1.6

M est une P-extension minimale de H dans G si et seulement si M est une P-extension de H dans G et que pour toute P-extension E de H dans G contenue dans M, alors $E = M$.

---

[1] Cette distinction qui peut sembler pointilleuse est à mon avis essentielle. En abordant la littérature concernant les groupes abéliens, j'ai constaté ce qui m'a semblé une incongruence dans la définition d'extension. Par exemple, lorsque H possède une extension essentielle E dans G, c'est H qui possède la propriété d'être essentiel dans E, alors que lorsqu'il est question d'une extension verticale E de H dans G, c'est E qui possède la propriété de verticalité dans G. Ainsi, pour le même terme employé, c'est le sous-groupe qui possède la propriété dans son extension dans le premier cas, tandis que dans le second, c'est l'extension elle-même qui possède la propriété dans le groupe de référence. Étant moi-même à première vue confus par cette ambiguïté, j'ai décidé de clarifier celle-ci en établissant une distinction entre les deux natures d'une extension grâce aux définitions des termes *extension* et *prolongement*. Il est par conséquent important que le lecteur s'approprie ces définitions de façon claire afin d'éviter une éventuelle confusion lors de la lecture de cet ouvrage.

<u>Définition 1.1.7</u>

M est une P-extension maximale de H dans G si et seulement si
M est une P-extension de H dans G et que pour toute P-extension E de H dans G contenant M, alors E = M.

<u>Définition 1.1.8</u>

M est un P-prolongement minimal de H dans G si et seulement si
M est un P-prolongement de H dans G et que pour tout P-prolongement L de H dans G contenu dans M, alors L = M.
Un tel prolongement est appelé une *P-enveloppe.*

<u>Définition 1.1.9</u>

M est un P-prolongement maximal de H dans G si et seulement si
M est un P-prolongement de H dans G et que pour tout P-prolongement L de H dans G contenant M, alors L = M.
Un tel prolongement est appelé un *P-contenant* [2].

Par exemple, M peut jouer le rôle d'une extension verticale maximale de H dans G i.e. un des plus *grands* sous-groupes de G dans lequel H est vertical. Ou encore, M peut être une enveloppe pure de H dans G i.e. un des plus *petits* sous-groupes purs de G contenant H.

---

[2] Étant donné que les prolongements minimaux possèdent l'appellation particulière reconnue d'enveloppe comme dans le cas d'une enveloppe nette ou d'une enveloppe pure, j'ai pris le loisir d'affubler également les prolongements maximaux d'un sobriquet spécial.

Ceci termine la présentation des définitions personnelles. La suite est plus orthodoxe avec la somme de groupes.

<u>Définition 1.1.10</u>

Soit H et K deux sous-groupes de G.

Alors la somme $H + K = \{h + k \mid h \in H, k \in K\}$

est le plus petit sous-groupe de G contenant H et K.

Lorsque $G = H + K$, H et K se nomment des facteurs internes de G.

Le cas échéant où $H \cap K = 0$, il s'agit alors de la somme directe interne de H et K; nous écrivons alors $H \oplus K$ afin de le spécifier et, H et K sont ainsi appelés des facteurs directs internes de G lorsque leur somme égale G.

Il est à noter que le terme *interne* signifie que les facteurs impliqués sont des sous-groupes de G.

Puisque tous les facteurs rencontrés ultérieurement seront internes, ce qualificatif sera sous-entendu.

Soit I un ensemble d'indices quelconques.

Si $G = \oplus_{i \in I} F_i$ est une somme directe de facteurs directs quelconques F_i, la généralisation de la définition donnée ci-haut consiste au fait que

$F_j \cap \sum_{i \in I\setminus\{j\}} F_i = 0$ pour tout $j \in I$.

<u>Proposition 1.1.11</u>

Soit $\{H_\alpha\}_{\alpha \in A}$ une famille quelconque de sous-groupes de G et $K < G$.

Alors,

- $(\cap_{\alpha \in A} H_\alpha) \cap K = \cap_{\alpha \in A} (H_\alpha \cap K)$;
- $(\cap_{\alpha \in A} H_\alpha) + K < \cap_{\alpha \in A} (H_\alpha + K)$.

<u>Démonstration</u>

Le premier énoncé étant plus évident que le second, prouvons ce dernier.

$\cap_{\alpha \in A} H_\alpha < H_\alpha$ i.e. $(\cap_{\alpha \in A} H_\alpha) + K < H_\alpha + K$ pour tout $\alpha \in A$,

d'où $(\cap_{\alpha \in A} H_\alpha) + K < \cap_{\alpha \in A} (H_\alpha + K)$. ▧

Proposition 1.1.12

Soit $H < K < G$ et $Q < G$.

Alors $(H + Q) \cap K = H + (Q \cap K)$.

C'est la loi modulaire.

Démonstration

Soit $h + x = k$ où $h \in H$, $x \in Q$ et $k \in K$.

Alors $x = k - h \in Q \cap K$ car $H < K$.

Ainsi $h + x \in H + (Q \cap K)$.

Maintenant, soit $h + k \in H + (Q \cap K)$ où $h \in H$ et $k \in Q \cap K$.

Par conséquent, $h + k \in H + Q$ et $h + k \in K$ puisque $H < K$. ▩

Proposition 1.1.13

Soit $G = E \oplus F$ et H, K des sous-groupes de E tel que $H \oplus F < K \oplus F$.

Alors $H < K$.

Démonstration

$H < E \cap (H \oplus F) < E \cap (K \oplus F) = K \oplus (E \cap F)$ par la proposition 1.1.12

$= K \oplus 0 = K$. ▩

Corollaire 1.1.14

Soit $G = E \oplus F$ et H, K des sous-groupes de E tel que $H \oplus F = K \oplus F$.

Alors $H = K$.

Proposition 1.1.15

Soit $G = E \oplus F$ tel que $E < H < G$.

Alors $H = E \oplus (H \cap F)$.

Démonstration

$H = H \cap G = H \cap (E \oplus F) = E \oplus (H \cap F)$ par 1.1.12. ▩

Poursuivons maintenant avec les groupes quotients.

Définition 1.1.16

Soit H un sous-groupe de G.

Le groupe quotient $G/H = \{g + H \mid g \in G\}$ partitionne G en classes distinctes selon H de tel sorte que pour $x, y \in G$, $x + H = y + H$ si et seulement si $x - y \in H$.

Par conséquent, il est clair que $h + H = 0 + H = H$ ou 0 comme le mentionne 1.1.1, puisque $h - 0 \in H$ pour tout $h \in H$.

Également, la somme de deux éléments de G/H se définit par $(x + H) + (y + H) = (x + y) + H$ pour $x, y \in G$.

De plus, si H et K sont des sous-groupes de G, alors un élément de $(K + H)/H$ est défini par $(k + h) + H = (k + H) + (h + H) = (k + H) + (0 + H)$ $= (k + 0) + H = k + H$ où $h \in H$ et $k \in K$.

La représentation de H dans K + H par l'élément h est donc superflue.

Ensuite, il est clair que si Q est un sous-groupe de H et K, alors $H/Q = K/Q$ si et seulement si $H = K$.

Enfin, $G/H = 0$ si et seulement si $G = H$.

Proposition 1.1.17

Soit $\{H_\alpha\}_{\alpha \in A}$ une famille quelconque de sous-groupes de G tel que $K < H_\alpha$ pour tout $\alpha \in A$.

Alors,

- $(\cap_{\alpha \in A} H_\alpha)/K = \cap_{\alpha \in A} (H_\alpha/K)$;
- $(\Sigma_{\alpha \in A} H_\alpha)/K = \Sigma_{\alpha \in A} (H_\alpha/K)$.

Démonstration

Montrons le dernier énoncé.

Soit $h + K \in (\Sigma_{\alpha \in A} H_\alpha)/K$.

Ainsi $h \in \sum_{\alpha \in A} H_\alpha$ i.e. que $h = \sum_{1 \leq i \leq n} h_{\alpha i}$ où $n \geq 1$.

En effet, il ne faut pas oublier que nous considérons ici la structure de groupe qui définit tout élément de $\sum_{\alpha \in A} H_\alpha$ comme une somme d'éléments puisés dans n'importe quel sous-famille finie de $\{H_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

Alors $h + K = \sum_{1 \leq i \leq n} h_{\alpha i} + K = \sum_{1 \leq i \leq n} (h_{\alpha i} + K) \in \sum_{\alpha \in A} (H_\alpha/K)$.

L'inclusion inverse se démontre de manière semblable. ▧

Continuons avec les ordres des éléments.

Définition 1.1.18

L'ordre d'un élément $g \in G$ est la plus petite puissance de p

tel que $p^n g = 0$ où $n \geq 0$.

On note $o(g) = p^n$.

Définition 1.1.19

Soit $n \geq 1$.

Alors $G[p^n] = \{g \in G \mid p^n g = 0\}$

est le sous-groupe de tous les éléments de G dont l'ordre divise p^n.

Par conséquent,

il est clair que l'ensemble $\{G[p^i]\}_{i \geq 1}$

forme une chaîne ascendante dans G.

$G[p^n]$ se nomme le socle p^n-ième de G,

alors que $G[p]$ est tout simplement appelé le socle de G.

Les sous-groupes de $G[p]$ sont appelés les sous-socles de G.

Si S est un sous-socle de G et $H < G$, on dit que S est le support de H ou H est supporté par S si et seulement si $S = H[p]$.

Proposition 1.1.20

Soit H un sous-groupe de G.

Alors $H = \cup_{i \geq 1} H[p^i]$.

Démonstration

Soit $h \in H$ tel que $o(h) = p^n$ où $n \geq 1$.

Ainsi $h \in H[p^n] < \cup_{i \geq 1} H[p^i]$.

À présent, soit $h \in \cup_{i \geq 1} H[p^i]$.

Il existe alors $j \geq 1$ tel que $h \in H[p^j] < H$. ▩

Quoique simpliste, cette proposition est importante au point de vue pratique. En effet, afin de prouver par exemple que deux groupes H et K sont égaux, il s'agit simplement de montrer par induction que $H[p^i] = K[p^i]$ pour tout $i \geq 1$. Nous pouvons également démontrer qu'un groupe est sous-groupe d'un autre grâce à ce procédé. Nous en constaterons les applications sous peu.

Proposition 1.1.21

$G = 0$ si et seulement si $G[p] = 0$.

Démonstration

La nécessité est évidente puisque $G[p] < G$.

En ce qui concerne la suffisance,

supposons $g \in G$ tel que $g \neq 0$ et $o(g) = p^{n+1}$ où $n \geq 0$.

Ainsi $p^n g \in G[p] = 0$, contredisant l'ordre de g.

Alors $g = 0$ d'où $G = 0$. ▩

Corollaire 1.1.22

Soit H un sous-groupe de G.

Alors $G = H$ si et seulement si $(G/H)[p] = 0$.

Démonstration

Voir la définition 1.1.16. ▩

À l'instar des ordres des éléments, la divisibilité de ceux-ci constitue une caractéristique importante.

Définition 1.1.23

Un élément g de G est divisible par $n \geq 1$ dans G
si et seulement si il existe $g_n \in G$ tel que $g = ng_n$.
De plus, g est divisible dans G si et seulement si
il est divisible par n pour tout $n \geq 1$.

Définition 1.1.24

Soit $m \geq 1$.
Alors $mG = \{mg \mid g \in G\}$ est le sous-groupe
de tous les éléments de G qui sont divisibles par m.
Toutefois, nous constaterons à l'instant que seuls les sous-groupes p^nG
où $n \geq 0$ intéressent un groupe p-primaire abélien.
Au contraire des $\{G[p^i]\}_{i \geq 1}$,
l'ensemble des $\{p^iG\}_{i \geq 1}$ constitue une chaîne descendante dans G.

Proposition 1.1.25

Soit $n > 1$ tel que $n = \pi p^i$ où $i \geq 0$ est une factorisation de n en nombres premiers exhibant la plus grande puissance de p comprise dans n,
et dans laquelle π représente conséquemment le produit des facteurs premiers de n qui diffèrent de p.
Alors $nG = p^iG$.

Démonstration

Il est clair que $nG < p^iG$.
Par conséquent, soit $p^ig \in p^iG$ où $g \in G$ et $o(g) = p^m$ où $m \geq 0$.
Si $m \leq i$, alors $p^ig = 0 \in nG$.
Autrement, $m > i$ donc $\mathrm{pgcd}(n, p^m) = p^i$.

Par le lemme de Bézout, il existe deux entiers α et β tel que $p^i = \alpha n + \beta p^m$. Ainsi $p^i g = \alpha ng + \beta p^m g = \alpha ng + 0 = \alpha ng \in nG$. ■

Ce résultat en dit long. Il signifie effectivement que pour tout élément g d'un groupe p-primaire abélien, seuls les multiples de g par une puissance de p méritent d'être considérés. Du point de vue pratique, l'établissement de ce résultat nous évitera l'utilisation répétitive du lemme de Bézout lorsqu'il sera question des multiples d'un élément de groupe. De plus, les sous-groupes de la définition 1.1.24 qui attireront notre attention seront seulement ceux de la forme p^nG où $n \geq 0$. Il est primordial que le lecteur en prenne consciencieusement note.

Avant de poursuivre, il convient de mentionner les quelques résultats triviaux suivants dont les démonstrations sont laissées au lecteur.

Proposition 1.1.26

Soit une famille quelconque $\{H_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de sous-groupes de G.

Alors pour tout $i \geq 1$,

- $(\cap_{\alpha \in A} H_\alpha)[p^i] = \cap_{\alpha \in A} H_\alpha[p^i]$;
- $(\Sigma_{\alpha \in A} H_\alpha)[p^i] > \Sigma_{\alpha \in A} H_\alpha[p^i]$ mais la réciproque est en général fausse;
- $p^i(\Sigma_{\alpha \in A} H_\alpha) = \Sigma_{\alpha \in A} p^i H_\alpha$;
- $p^i(\cap_{\alpha \in A} H_\alpha) < \cap_{\alpha \in A} p^i H_\alpha$ bien que la réciproque soit généralement fausse.

Proposition 1.1.27

Soit $\{F_i\}_{i \in I}$ un ensemble quelconque de facteurs directs de G et $n \geq 1$. Alors $(\oplus_{i \in I} F_i)[p^n] = \oplus_{i \in I} F_i[p^n]$.

Démonstration

L'inclusion $\oplus_{i \in I} F_i[p^n] < (\oplus_{i \in I} F_i)[p^n]$

est comprise dans les résultats mentionnés ci-haut.

Soit $\sum_{1 \leq i \leq m} f_i \in (\oplus_{i \in I} F_i)[p^n]$ où $f_i \in F_i$ pour tout $i \in \{1, ..., m\}$.

Ainsi $p^n\sum_{1 \leq i \leq m} f_i = 0$ i.e. $-p^nf_j = \sum_{1 \leq i \leq m, i \neq j} p^nf_i$ où $j \in \{1, ..., m\}$.

Or $-p^nf_j = \sum_{1 \leq i \leq m, i \neq j} p^nf_i \in F_j \cap \sum_{i \in I\setminus\{j\}} F_i = 0$ donc $p^nf_j = 0$

i.e. $f_j \in F_j[p^n]$ pour tout $j \in \{1, ..., m\}$.

Par conséquent, $\sum_{1 \leq i \leq m} f_i \in \oplus_{i \in I} F_i[p^n]$. ⊠

Définition 1.1.28

G est un groupe borné si et seulement si les ordres des éléments de G sont bornés i.e. qu'il existe une borne $n \geq 0$ tel que $p^ng = 0$ pour tout $g \in G$.

Cette caractéristique peut être soulignée par $p^nG = 0$.

Définition 1.1.29

Un groupe est cyclique si et seulement si il est engendré par un élément particulier $g \in G$ i.e. que les éléments du groupe cyclique que l'on note par $<g>$ sont les multiples de g.

Un groupe cyclique est un exemple d'un groupe borné. En effet, puisque l'ordre de g est fini par définition d'un groupe torsion, il est clair que $<g>$ est non seulement borné par o(g), mais que $<g>$ est fini et qu'il renferme justement o(g) éléments i.e. $|<g>| = o(g)$. En fait, tout groupe fini est borné. Par exemple, considérons $g \in G$ où G est 3-primaire et $o(g) = 3^2$. Ainsi $<g> = \{g, 2g, 3g, 4g, 5g, 6g, 7g, 8g, 9g = 0\}$. Cependant, comme nous venons tout juste de le constater avec la proposition 1.1.25, seuls les multiples de g par une puissance de p sont intéressants : $\{3^0g, 3^1g, 3^2g\} = \{g, 3g, 0\}$ dans l'exemple ci-haut mentionné.

Ils sont au nombre de $n + 1$ lorsque $o(g) = p^n$ où $n \geq 0$.

En fait, $\langle g \rangle$, $\langle 3g \rangle$ et $\langle 0 \rangle$ sont les seuls sous-groupes de $G = \langle g \rangle$.

Proposition 1.1.30

Soit $g \in G$ et $n \geq 1$.

Alors $\langle p^n g \rangle = p^n \langle g \rangle$.

Démonstration

Soit $p^i p^n g \in \langle p^n g \rangle$ où $i \geq 0$.

Ainsi $p^n p^i g \in p^n \langle g \rangle$.

De même, soit $p^n p^i g \in p^n \langle g \rangle$ où $i \geq 0$.

Alors $p^i p^n g \in \langle p^n g \rangle$. $\blacksquare$

Proposition 1.1.31

Tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique.

Démonstration

Soit $g \in G$ engendrant le groupe cyclique $\langle g \rangle$ tel que $o(g) = p^n$ où $n \geq 0$.

Soit H un sous-groupe de $\langle g \rangle$.

Puisque $\langle g \rangle$ est fini comme le mentionne 1.1.29, H l'est également.

Soit $\mathrm{H} = \{i \geq 0 \mid p^i g \in H\}$.

Il est clair que $\mathrm{H} \neq \varnothing$ puisque $p^n g = 0 \in \mathrm{H}$.

Montrons que $H = \langle p^m g \rangle$ où $m = \min\{i \mid i \in \mathrm{H}\}$.

Soit $h \in H$.

Étant donné que $h \in \langle g \rangle$, alors il existe $j \geq 0$ tel que $h = p^j g$.

Puisque $j \geq m$, alors $h = p^j g = p^{j-m} p^m g \in \langle p^m g \rangle$.

Inversement, soit $p^j p^m g \in \langle p^m g \rangle$ où $j \geq 0$.

Il va de soi que $p^j p^m g \in H$ car $p^m g \in H$. $\blacksquare$

Lemme 1.1.32

Soit $H < G$ et $n \geq 1$.

Alors $p^n(G/H) = (p^nG + H)/H$.

Démonstration

Soit $p^n(g + H) \in p^n(G/H)$ où $g \in G$.

Ainsi $p^n(g + H) = p^ng + 0 + H \in (p^nG + H)/H$.

Maintenant, soit $p^ng + H \in (p^nG + H)/H$ où $g \in G$.

Alors $p^ng + H = p^n(g + H) \in p^n(G/H)$. ∎

Proposition 1.1.33

Soit $H < G$ où G est borné.

Alors G/H est borné.

Démonstration

Soit p^n la borne de G où $n \geq 0$.

Par le lemme précédent, $p^n(G/H) = (p^nG + H)/H = (0 + H)/H = H/H = 0$. ∎

Proposition 1.1.34

Soit $n \geq 1$.

Alors $p^nG = 0$ si et seulement si $G = G[p^n]$.

Démonstration

La nécessité

Soit $g \in G$.

Ainsi $p^ng \in p^nG = 0$ d'où $g \in G[p^n]$.

La suffisance

Soit $g \in p^nG$.

Alors il existe $g_n \in G$ tel que $g = p^ng_n$.

Cependant, $g_n \in G[p^n]$ d'où $g = p^ng_n = 0$. ∎

Proposition 1.1.35

Soit G un groupe non borné.

Alors G possède des éléments de tous les ordres.

Démonstration

Soit $n \geq 1$.

Montrons qu'il existe un élément de G dont l'ordre est p^n.

Puisque G est non borné, il existe $g \in G$ tel que $o(g) = p^m$ où $m > n$.

Ainsi $p^mg = p^np^{m-n}g = 0$ où $p^{m-n}g$ est un élément de G d'ordre p^n. ∎

Le prochain résultat sera fréquemment utilisé.

Proposition 1.1.36

Soit H un sous-groupe de G et $g \in G$ tel que $pg \in H \backslash pH$.

Alors $g \notin H$ et $(H + \langle g \rangle)[p] = H[p]$.

Démonstration

Clairement, $g \notin H$ car autrement $pg \in pH$.

Maintenant, soit $h + p^ng \in (H + \langle g \rangle)[p]$ où $h \in H$ et $n \geq 0$.

En effet, en vertu de la proposition 1.1.25, les éléments de $\langle g \rangle$

à prendre en considération consistent uniquement des p^ng où $n \geq 0$.

Il importe d'en prendre correctement note une fois pour toute.

Puisque $pg \notin pH$ alors $n > 0$, sinon $pg = -ph \in pH$.

Or $pg \in H$ donc $p^ng \in H$ i.e. $h + p^ng \in H[p]$. ∎

Définition 1.1.37

La hauteur d'un élément $g \in G$ dans $K < G$ est égale à $n \geq 0$

si et seulement si g est divisible par p^n mais pas par p^{n+1} dans K

i.e. $g \in p^nK \backslash p^{n+1}K$.

Nous notons $h_K(g) = n$.

En général, la hauteur de g dans le groupe de référence G

est simplement notée par h(g).

La hauteur de g dans K est infinie i.e. $h_K(g) = \infty$ si et seulement si

g est divisible dans K i.e. $g \in p^nK$ pour tout $n \geq 1$ ou encore $g \in \cap_{n \geq 1} p^nK$.

Ce sous-groupe, que l'on note par $p^\omega K$,

est celui des éléments de hauteur infinie dans K.

Proposition 1.1.38

Soit x et $y \in G$ tel que $h(x) \neq h(y)$.

Alors $h(x + y) = \min\{h(x), h(y)\}$.

Démonstration

Soit $h(x) = m$ et $h(y) = n$ i.e. qu'il existe x_m et $y_n \in G$

tel que $x = p^m x_m$ et $y = p^n y_n$.

Supposons que $m > n$ sans perte de généralité.

Soit $h(x + y) = r \geq 0$ i.e. qu'il existe $z \in G$ tel que $x + y = p^r z$.

Ainsi $x + y = p^m x_m + p^n y_n = p^n(p^{m-n} x_m + y_n)$ d'où $r \geq n$.

Supposons que $r > n$, impliquant alors que $\min\{m, r\} > n$.

Nous obtenons $y = p^r z - x = p^r z - p^m x_m = p^{\min\{m, r\}}(p^{r - \min\{m, r\}} z - p^{m - \min\{m, r\}} x)$.

Par conséquent, $h(y) \geq \min\{m, r\} > n$, ce qui est contradictoire; $r = n$. ▣

Définition 1.1.39

G est un groupe divisible si et seulement si

tous ses éléments sont de hauteur infinie dans G.

En d'autres mots, $G = p^\omega G$ i.e. $G = p^i G$ pour tout $i \geq 1$.

Proposition 1.1.40

G est divisible si et seulement si $G = pG$.

Démonstration

Si $G = p^iG$ pour tout $i \geq 1$,

alors la nécessité va de soi puisqu'elle correspond au cas particulier $i = 1$.

En ce qui concerne la suffisance, montrons par induction sur i

que $G = p^iG$ pour tout $i \geq 1$.

L'hypothèse de départ confirme la véracité du cas $i = 1$.

Supposons que $G = p^iG$ pour $i \geq 1$.

Ainsi $p^{i+1}G = pp^iG = pG = G$ par les hypothèses d'induction et de départ. ▩

Proposition 1.1.41

Un groupe divisible borné est nul.

Démonstration

Soit D un groupe divisible dont la borne est p^n où $n \geq 0$.

Alors $D = p^nD = 0$. ▩

Corollaire 1.1.42

Un groupe cyclique divisible est nul.

Démonstration

Évidemment, puisqu'un groupe cylique est borné par l'ordre de l'élément qui le génère. ▩

Proposition 1.1.43

Soit D un sous-groupe divisible de G.

Alors $D < p^\omega G$.

Démonstration

$D = p^iD < p^iG$ pour tout $i \geq 1$ i.e. $D < p^\omega G$. ▣

Définition 1.1.44

G est un groupe réduit si et seulement si
il ne possède que 0 comme sous-groupe divisible.

Quelques-unes des preuves que contient cet ouvrage feront appel au principe de l'induction transfinie. Notamment les preuves concernant l'existence des extensions et des prolongements optimaux. Le lemme de Zorn est un axiome qui nous permettra de faire usage de ce principe d'induction. Précisément, nous appliquerons le lemme de Zorn dans des ensembles partiellement ordonnés.

Définition 1.1.45

Z est un ensemble partiellement ordonné si et seulement si
il est muni sur ses éléments d'une relation binaire $\succcurlyeq$
qui possède les propriétés suivantes pour tout x, y et z $\in \mathrm{Z}$:

- $x \succcurlyeq x$ (réflexivité);
- si $x \succcurlyeq y$ et $y \succcurlyeq x$ alors $x = y$ (antisymétrie);
- si $x \succcurlyeq y$ et $y \succcurlyeq z$ alors $x \succcurlyeq z$ (transitivité).

Définition 1.1.46

Soit E un sous-ensemble d'un ensemble partiellement ordonné Z.
Alors $s \in \mathrm{Z}$ est une borne supérieure minimale de E si et seulement si :

- $s \succcurlyeq x$ pour tout $x \in \mathrm{E}$;
- si $t \succcurlyeq x$ pour tout $x \in \mathrm{E}$, alors $t \succcurlyeq s$.

L'existence d'une telle borne n'est pas obligatoire. De plus, elle ne force pas son appartenance à E. Cependant, elle implique son unicité.

<u>**Définition 1.1.47**</u>

Soit Z un ensemble partiellement ordonné et $z \in Z$.
Alors z est un élément maximal de Z si et seulement si
$z \succ x$ pour tout $x \in Z$.

En raison de la relation de comparaison $\succ$ qui ne prévaut pas toujours entre deux éléments de Z, l'existence de plus d'un élément maximal est possible.

<u>**Définition 1.1.48**</u>

Une chaîne de Z est un sous-ensemble partiellement ordonné de Z dont toutes les paires x et y d'éléments sont comparables : $x \succ y$ ou $y \succ x$.

<u>**Lemme 1.1.49**</u> (lemme de Zorn)

Soit Z un ensemble partiellement ordonné dans lequel toute chaîne possède une borne supérieure minimale dans Z.
Alors Z contient un élément maximal.

Explicitement, nous travaillerons surtout avec des ensembles partiellement ordonnés $Z = \{H < G \mid H$ possède un ensemble de propriétés $P\}$ où les éléments H sont des sous-groupes de G. Ainsi, la propriété d'inclusion des sous-groupes les uns dans les autres constitue la relation binaire de Z sur ses éléments. Selon le lemme de Zorn, afin de montrer que Z possède un élément maximal, il faut alors démontrer que toute chaîne $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de Z possède une borne supérieure minimale dans Z. Une telle borne existe toujours puisqu'elle est égale à $\cup_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$ qui constitue une structure de groupe. La borne peut sans doute ne pas appartenir à la chaîne, mais elle doit tout de même appartenir à Z; c'est ce qu'il s'agit alors de prouver. En guise d'exemple, la prochaine démonstration utilise le lemme de Zorn.

Auparavant, à propos des chaînes quelconques d'éléments, introduisons sur le champ les diverses propriétés triviales mais essentielles qui nous seront utiles lors des différentes applications du lemme de Zorn.

Proposition 1.1.50

Soit $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ une chaîne quelconque de sous-groupes et $K < G$.

Alors,

- $(\cup_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda) \cap K = \cup_{\lambda \in \Lambda} (H_\lambda \cap K)$;
- $K + \cup_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda = \cup_{\lambda \in \Lambda} (K + H_\lambda)$;
- $(\cup_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda)[p^i] = \cup_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda[p^i]$ pour tout $i \geq 1$;
- $p^i(\cup_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda) = \cup_{\lambda \in \Lambda} p^i H_\lambda$ pour tout $i \geq 1$.

Proposition 1.1.51

Tout sous-socle de G est le support d'un sous-groupe de G maximal par rapport au fait qu'il est supporté par ce sous-socle.

Démonstration

Soit S un sous-socle de G et $Z = \{H < G \mid H[p] = S\}$.

Il est clair que $Z \neq \varnothing$ puisque $S \in Z$.

Soit $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ une chaîne de sous-groupes dans Z.

Montrons que $M = \cup_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda \in Z$.

Il va de soi que $M < G$ puisque $H_\lambda < G$ pour tout $\lambda \in \Lambda$.

De plus, $M[p] = (\cup_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda)[p] = \cup_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda[p]$ par la proposition précédente $= \cup_{\lambda \in \Lambda} S = S$ car $H_\lambda[p] = S$ pour tout $\lambda \in \Lambda$.

Ainsi Z possède un élément maximal par le lemme de Zorn. ∎

Achevant cette première partie, nous effleurons une notion importante dans le treillis des sous-groupes d'un groupe.

<u>Définition 1.1.52</u>

Soit $K < G$.

Un sous-groupe H de G est dit K-haut dans G si et seulement si

H est un sous-groupe maximal disjoint de K

i.e. un *plus grand* sous-groupe de G tel que $H \cap K = 0$.

Formellement, H est K-haut dans G si et seulement si

pour toute extension E de H dans G tel que $E \cap K = 0$, alors $E = H$.

Afin d'uniformiser certaines propriétés à l'aide du concept de la hauteur d'un sous-groupe dans un groupe, il est utile de montrer le résultat qui suit. Tout d'abord un lemme.

<u>Lemme 1.1.53</u>

Soit H, K et Q des sous-groupes de G tel que $Q < H, K$.

Alors $H \cap K = Q$ si et seulement si $H/Q \cap K/Q = 0$.

<u>Démonstration</u>

<u>La nécessité</u>

Soit $x + Q \in H/Q \cap K/Q = (H \cap K)/Q$ par 1.1.17.

Ainsi $x \in H \cap K = Q$ donc $x + Q = 0$.

<u>La suffisance</u>

Soit $x \in H \cap K$.

Alors $x + Q \in (H \cap K)/Q = H/Q \cap K/Q = 0$ d'où $x \in Q$. ■

Proposition 1.1.54

Soit $Q < K < G$.

Alors $H < G$ est maximal par rapport au fait que $H \cap K = Q$

si et seulement si H/Q est K/Q-haut dans G/Q.

Démonstration

La nécessité

Soit E/Q une extension de H/Q dans G/Q tel que $E/Q \cap K/Q = 0$.

Ainsi $H < E$ et $E \cap K = Q$ par le lemme précédent.

La maximalité de H entraîne donc que $E = H$ i.e. $E/Q = H/Q$.

La suffisance

Soit E une extension de H dans G tel que $E \cap K = Q$.

Alors $H/Q < E/Q$ et $E/Q \cap K/Q = 0$ à nouveau par le lemme précédent.

La maximalité de H/Q implique donc que $E/Q = H/Q$ i.e. $E = H$. ∎

Voici une autre application du lemme de Zorn.

Proposition 1.1.55

Soit H et K des sous-groupes de G tel que $H \cap K = 0$.

Alors H possède une extension M dans G tel que M est K-haut.

Démonstration

Soit $Z = \{E < G \mid H < E \text{ et } E \cap K = 0\}$.

Z est clairement non vide puisque H en est un élément.

Soit $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ une chaîne de sous-groupes dans Z.

Démontrons que $M = \cup_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda \in Z$.

Clairement $H < M < G$ car $H < E_\lambda < G$ pour tout $\lambda \in \Lambda$.

De plus, $M \cap K = (\cup_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda) \cap K = \cup_{\lambda \in \Lambda} (E_\lambda \cap K)$ par 1.1.50

$= \cup_{\lambda \in \Lambda} 0 = 0$ puisque $E_\lambda \cap K = 0$ pour tout $\lambda \in \Lambda$.

Par le lemme de Zorn, $\mathcal{Z}$ renferme un élément maximal. ▩

Corollaire 1.1.56

Soit K un sous-groupe de G.

Alors G possède un sous-groupe K-haut.

Démonstration

Puisque $0 \cap K = 0$, la proposition précédente nous indique

que 0 peut être prolongé à un sous-groupe K-haut. ▩

Proposition 1.1.57

Soit $H, K, Q < G$ tel que $H \cap K = Q$.

Alors il existe une extension maximale M de H dans G

telle que $M \cap K = Q$.

Démonstration

Puisque $H \cap K = Q$, ceci signifie que $H/Q \cap K/Q = 0$ par le lemme 1.1.53.

La proposition 1.1.55 nous assure que H/Q possède un prolongement M/Q

qui est K/Q-haut dans G/Q.

Par la proposition 1.1.54, M est l'extension de H recherchée. ▩

2. PRÉAMBULE TOPOLOGIQUE

Cette section a pour but de présenter une structure topologique naturelle que possède un groupe primaire abélien. Sont définies quelques notions usuelles telles que l'ouverture, la fermeture, la densité, etc. Également, certains résultats topologiques sont démontrés; ils seront utiles lors du traitement des sujets subséquents.

Un groupe primaire abélien possède une structure algébrique interne telle, qu'il est possible de définir la topologie suivante sur celle-ci. En identifiant $\mathrm{T} = \{p^nG \mid n \geq 0\}$ comme étant une base de l'ensemble des ouverts de G dans le voisinage de 0, il est facile de constater que ces sous-groupes engendrent une topologie dans G. En effet, puisque les p^nG sont les maillons d'une chaîne descendante dans G, il est clair que :

- $\varnothing$ et G appartiennent à T;
- l'union des éléments de tout sous-ensemble quelconque de T appartient à T;
- l'intersection des éléments de tout sous-ensemble fini de T appartient à T.

La topologie engendrée par les p^nG se nomme la topologie p-adique de G.

En premier lieu, voici les définitions et les résultats topologiques à connaître concernant l'ouverture et la fermeture dans la topologie p-adique.

Définition 1.2.1

Un sous-groupe H de G est dit ouvert dans G si et seulement si il existe $n \geq 0$ tel que $p^nG < H$.

Définition 1.2.2

Soit H un sous-groupe de G.

La fermeture d'un sous-groupe F de H dans H est définie par

$F^{-H} = \cap_{i \geq 1} (F + p^iH)$.

F est un sous-groupe fermé dans H si et seulement si $F^{-H} = F$.

Il est évident que si $F < H < K$ alors $F^{-H} < F^{-K}$.

Lorsqu'il est question de la fermeture de H dans le groupe de référence G, on écrit simplement F^{-}.

Par exemple, la fermeture de 0 dans G est

$0^{-} = \cap_{i \geq 1} (0 + p^iG) = \cap_{i \geq 1} p^iG = p^{\omega}G$.

Proposition 1.2.3

Soit $H < G$ et $n \geq 1$.

Alors $H^{-} = \cap_{i \geq n} (H + p^iG)$.

Démonstration

D'une part, nous avons $\cap_{i \geq n}(H + p^iG) < H + p^jG$ pour tout $j \geq 1$

d'où $\cap_{i \geq n}(H + p^iG) < \cap_{j \geq 1} (H + p^jG) = H^{-}$.

D'autre part, $H^{-} = \cap_{i \geq 1} (H + p^iG) = [\cap_{1 \leq i < n} (H + p^iG)] \cap [\cap_{i \geq n} (H + p^iG)]$

$< \cap_{i \geq n} (H + p^iG)$ i.e. $H^{-} = \cap_{i \geq n}(H + p^iG)$. ■

Corollaire 1.2.4

Soit $H < G$ et $m, n \geq 1$.

Alors $H^{-} = \cap_{i \geq n} (H + p^{i+m}G)$.

Démonstration

En posant $j = i + m$, nous obtenons $\cap_{i \geq n}(H + p^{i+m}G) = \cap_{j \geq m+n} (H + p^jG)$

$= H^{-}$ par la proposition précédente. ■

Proposition 1.2.5

Soit $H < G$ et $n \geq 1$.

Alors $(H \cap p^nG)^- = H^- \cap p^nG$.

Démonstration

$(H \cap p^nG)^- = \cap_{i \geq n} [(H \cap p^nG) + p^iG]$ par 1.2.3

$= \cap_{i \geq n} [(H + p^iG) \cap p^nG]$ par 1.1.12 car $p^iG < p^nG$ pour tout $i \geq n$

$= \cap_{i \geq n} (H + p^iG) \cap p^nG$ par 1.1.11

$= H^- \cap p^nG$. ∎

Proposition 1.2.6

Soit H un sous-groupe ouvert dans G et $n \geq 0$.

Alors p^nH est fermé dans G.

Démonstration

Puisque H est ouvert dans G,

il existe $m \geq 0$ tel que $p^mG < H$ d'où $p^{m+n}G < p^nH$.

Ainsi $(p^nH)^- = \cap_{i \geq m+n} (p^nH + p^iG)$ par 1.2.3

$= \cap_{i \geq m+n} p^nH$ puisque $p^iG < p^nH$ pour tout $i \geq m + n$

$= p^nH$. ∎

Corollaire 1.2.7

- p^nG est fermé dans G pour tout $n \geq 0$
  puisque G est ouvert dans lui-même;
- les sous-groupes ouverts sont fermés dans la topologie p-adique
  en posant $n = 0$.

Proposition 1.2.8

Soit $H < G$.

Alors $pH^- < (pH)^-$.

Démonstration

Par 1.1.26, $pH^{-} = p\cap_{i \geq 1} (H + p^iG) < \cap_{i \geq 1} [p(H + p^iG)]$

$= \cap_{i \geq 1} (pH + p^{i+1}G) = (pH)^{-}$ par 1.2.4. ▩

Proposition 1.2.9

Soit $H < G$.

Alors $p^{\omega}G < H^{-}$.

Démonstration

Nous avons $0 < H$ d'où $p^{\omega}G = 0^{-} < H^{-}$. ▩

Corollaire 1.2.10

Tout sous-groupe divisible D est contenu dans la fermeture

de n'importe quel sous-groupe de G.

Démonstration

$D < p^{\omega}G$ par 1.1.43. ▩

Corollaire 1.2.11

Soit H un sous-groupe de $p^{\omega}G$.

Alors $H^{-} = p^{\omega}G$.

Démonstration

$H^{-} = \cap_{i \geq 1} (H + p^iG) < \cap_{i \geq 1} (p^{\omega}G + p^iG)$

$= \cap_{i \geq 1} p^iG$ car $p^{\omega}G < p^iG$ pour tout $i \geq 1$

$= p^{\omega}G$.

Or, nous venons tout juste de constater l'inclusion inverse; $H^{-} = p^{\omega}G$. ▩

Proposition 1.2.12

Soit $H < G$.

Alors $H^{-}/H = p^{\omega}(G/H)$.

Démonstration

$H^{-}/H = [\cap_{i \geq 1} (H + p^iG)]/H = \cap_{i \geq 1} [(H + p^iG)/H]$ par 1.1.17

$= \cap_{i \geq 1} p^i(G/H)$ par 1.1.32

$= p^{\omega}(G/H)$. ▣

De la fermeture, nous pouvons définir la densité d'un sous-groupe dans G.

Définition 1.2.13

Un sous-groupe H de G est dense dans G si et seulement si $H^{-} = G$.

Étant donné que $H^{-} = \cap_{i \geq 1} (H + p^iG) < H + p^jG$ pour tout $j \geq 1$,

il s'en suit que $G = H + p^jG$ pour tout $j \geq 1$.

Proposition 1.2.14

Soit G un groupe divisible.

Alors tout sous-groupe de G est dense dans G.

Démonstration

En combinant la définition 1.1.39 et le corollaire 1.2.11. ▣

Proposition 1.2.15

Soit $H < G$.

Alors H est dense dans G si et seulement si G/H est divisible.

Démonstration

La nécessité

Si $H^{-} = G$ alors $G/H = H^{-}/H = p^{\omega}(G/H)$ par 1.2.12,

donc G/H est divisible par la définition 1.1.39.

La suffisance

Si G/H est divisible alors $G/H = p^{\omega}(G/H) = H^{-}/H$ d'où $H^{-} = G$. ▣

La notion de séparabilité peut également être introduite dans la topologie p-adique.

Définition 1.2.16

La topologie p-adique de G est dite séparée si et seulement si G ne possède que 0 comme élément de hauteur infinie i.e. que $p^{\omega}G = 0$.

On dit alors que G est séparable.

Proposition 1.2.17

Soit G un groupe borné.

Alors G est séparable.

Démonstration

Soit p^n la borne de G où $n \geq 0$.

Ainsi $p^{\omega}G = \cap_{i \geq 1} p^iG < p^nG = 0$. ▣

Proposition 1.2.18

Soit $H < G$.

Alors G/H est séparable si et seulement si H est fermé dans G.

Démonstration

La nécessité

Par 1.2.12, $H^{-}/H = p^{\omega}(G/H) = 0$ alors $H^{-} = H$.

La suffisance

Si $H^{-} = H$ alors $p^{\omega}(G/H) = H^{-}/H = H/H = 0$. ▩

Corollaire 1.2.19

Soit $H < G$ tel que G/H est borné.

Alors H est fermé dans G.

Démonstration

Puisque G/H est borné alors G/H est séparable

et H est fermé par les propositions précédentes. ▩

Corollaire 1.2.20

Soit $H < G$ où G est borné.

Alors H est fermé dans G.

Démonstration

La borne de G en est une pour G/H par 1.1.33

d'où la fermeture de H dans G par le corollaire précédent. ▩

Proposition 1.2.21

Soit G un groupe séparable.

Alors G est réduit.

Démonstration

Puisque tout sous-groupe divisible D de G est contenu dans $p^{\omega}G = 0$ par 1.1.43, alors G ne possède aucun sous-groupe divisible non nul. ■

Corollaire 1.2.22

Les groupes bornés sont réduits.

Démonstration

Grâce à 1.2.17. ■

Maintenant, les résultats qui suivent concernent la notion de hauteur d'un élément dans un groupe.

Proposition 1.2.23

Soit $H < G$ et $g \in G$.

Alors $h_{G/H}(g + H) = n < \infty$ où $n \geq 0$ si et seulement si

$g \in (H + p^iG)\backslash(H + p^{n+1}G)$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$.

Démonstration

La nécessité

$h_{G/H}(g + H) = n$ entraîne que $g + H \in p^n(G/H)\backslash p^{n+1}(G/H)$ par définition.

Par 1.1.32, $g + H \in [(H + p^nG)/H]\backslash[(H + p^{n+1}G)/H]$

i.e. $g \in (H + p^nG)\backslash(H + p^{n+1}G)$ mais encore

$g \in (H + p^iG)\backslash(H + p^{n+1}G)$ car $p^nG < p^iG$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$.

La suffisance

Il est clair que $g \in (H + p^nG)\backslash(H + p^{n+1}G)$ en particulier.

Ainsi $g + H \in [(H + p^nG)/H]\backslash[(H + p^{n+1}G)/H]$

i.e. $g + H \in p^n(G/H) \setminus p^{n+1}(G/H)$ d'où $h_{G/H}(g + H) = n$. ▨

Proposition 1.2.24

Soit $H < G$ et $g \in G$.

Alors $h_{G/H}(g + H) = \infty$ si et seulement si $g \in H^{-}$.

Démonstration

La nécessité

Puisque la hauteur de $g + H$ dans G/H est infinie,

alors $g + H \in p^{\omega}(G/H) = H^{-}/H$ par 1.2.12, d'où $g \in H^{-}$.

La suffisance

Il est clair que $g \in H^{-}$ entraîne que $g + H \in H^{-}/H = p^{\omega}(G/H)$

grâce à quoi nous déduisons que $h_{G/H}(g + H) = \infty$. ▨

Poursuivons cette section en glissant un mot sur la topologie induite sur le socle $G[p]$.

Définition 1.2.25

Il est possible d'induire une structure topologique dans le socle $G[p]$ de G

en considérant les sous-socles $p^nG \cap G[p] = (p^nG)[p]$

comme étant une base des ouverts de $G[p]$.

Ainsi, $S < G[p]$ est un sous-socle ouvert de G i.e. S est ouvert dans $G[p]$

si et seulement si il existe $n \geq 0$ tel que $(p^nG)[p] < S$.

Également, la fermeture d'un sous-socle S de G dans $G[p]$

est $S^{-G[p]} = \cap_{i \geq 1} (S + (p^iG)[p])$.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté possible, on écrit seulement S^{-}.

Évidemment, S est un sous-socle fermé de G dans $G[p]$

si et seulement si $S^{-} = S$.

Ensuite, S est un sous-socle dense de G i.e. S est dense dans G[p]

si et seulement si $S^{-} = G[p]$ i.e. $G[p] = S + (p^iG)[p]$ pour tout $i \geq 1$.

Enfin, il est clair que G[p] est séparable

si et seulement si G l'est également par 1.1.21.

En terminant cette seconde section, nous allons donner un exemple d'un groupe particulier qui nous sera utile à maintes reprises dans ce mémoire.

Définition 1.2.26

Le groupe de Prüfer se définit par $P = \langle x_i \mid px_0 = 0 \text{ et } p^ix_i = x_0\rangle$

où les éléments générateurs $x_i \neq 0$ pour tout $i \geq 0$

engendrent les éléments du groupe P.

Précisément, tout élément de P est de la forme $\sum_{1 \leq j \leq m} \alpha_j p^{n(j)} x_{i(j)}$ où $m \geq 1$, $\alpha_j \in \{0, \ldots, p-1\}$ et $i(j), n(j) \geq 0$ pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Les particularités du groupe de Prüfer qui nous seront utiles sont les suivantes :

- $h(x_0) = \infty$;
- pour tout $i \geq 0$, $h(p^n x_{i+1}) = n$ pour tout $n \in \{0, \ldots, i\}$;
- $h(x_i) = 0$ pour tout $i \geq 1$ en particulier;
- $p^{\omega}P = \langle x_0\rangle$;
- P est un groupe non borné;
- P est un groupe non séparable;
- P est un groupe réduit.

3. PRÉAMBULE ANALYTIQUE

Il est possible d'introduire un caractère analytique dans la structure d'un groupe primaire abélien. Ce caractère sera utile dans la recherche des groupes dont tous les sous-groupes verticaux maximaux sont purs. Nous terminons le premier chapitre avec cette dernière section.

Définition 1.3.1

Soit G un groupe séparable.

Une séquence $\{g_i\}_{i \geq 1}$ d'éléments de G converge vers une limite g si et seulement si $g - g_i \in p^iG$ pour tout $i \geq 1$.

Il va de soi que cette limite est unique.

Effectivement, si la séquence converge vers une autre limite x, alors $x - g_i \in p^iG$ pour tout $i \geq 1$, et par conséquent,

$x - g_i - (g - g_i) = x - g \in p^iG$ pour tout $i \geq 1$.

Ainsi, $x - g \in \cap_{i \geq 1} p^iG = p^\omega G = 0$ d'où $x = g$.

Définition 1.3.2

Une séquence $\{g_i\}_{i \geq 1}$ d'éléments de G est appelée séquence de Cauchy si et seulement si $g_i - g_{i+1} \in p^iG$ pour tout $i \geq 1$.

Définition 1.3.3

Une séquence $\{g_i\}_{i \geq 1}$ d'éléments de G est bornée si et seulement si les ordres des éléments g_i sont bornés i.e. qu'il existe $n \geq 0$ tel que $o(g_i) \leq p^n$ pour tout $i \geq 1$.

Définition 1.3.4

Soit G un groupe séparable.

Alors G est un groupe torsion-complet si et seulement si toute séquence de Cauchy bornée de G converge vers une limite dans G.

Proposition 1.3.5

Soit G un groupe torsion-complet et $n \geq 1$.

Alors $G[p^n]$ est torsion-complet.

Démonstration

Soit $\{g_i\}_{i \geq 1}$ une séquence de Cauchy bornée dans $G[p^n]$.

Étant donné que G est torsion-complet et que la séquence est évidemment Cauchy bornée dans G, elle converge vers un élément $g \in G$.

Montrons que $p^n g \in p^\omega G$.

Puisque que g est la limite de la séquence alors $g - g_i \in p^i G$ pour tout $i \geq 1$.

Également, $p^n g_i = 0$ car $g_i \in G[p^n]$ pour tout $i \geq 1$.

Ainsi $p^n(g - g_i) = p^n g - 0 = p^n g \in p^{i+n}G < p^i G$ pour tout $i \geq 1$.

G étant séparable, nous obtenons $p^n g \in p^\omega G = 0$ d'où $g \in G[p^n]$. ∎

CHAPITRE II

LA NETTETÉ

Ce deuxième chapitre traite de la propriété de netteté dans les groupes primaires abéliens. En effet, nous verrons au quatrième chapitre que la verticalité et la netteté d'un sous-groupe engendre sa pureté et vice versa. Pour le moment, ce chapitre présente les caractéristiques de la netteté qui nous seront prochainement utiles.

1. LES SOUS-GROUPES ESSENTIELS

Les sous-groupes nets originent des sous-groupes essentiels. Effectivement, les extensions essentielles maximales dans G sont précisément les sous-groupes nets dans celui-ci. C'est la raison pour laquelle la propriété essentielle est abordée en premier lieu. Également, elle sera utile tout au long du mémoire.

Définition 2.1.1

E est un sous-groupe essentiel dans G si et seulement si pour tout $H < G$, si $E \cap H = 0$ alors $H = 0$.

En d'autres mots, un sous-groupe est essentiel dans un groupe si et seulement si il possède au moins un élément non nul en commun avec n'importe quel autre sous-groupe non nul du groupe en question.

Proposition 2.1.2

Soit $H < G$.

Alors H est essentiel dans G si et seulement si H et G possèdent le même socle.

Démonstration

La nécessité

Soit $g \in G[p]$ tel que $g \neq 0$.

Puisque $\langle g \rangle \neq 0$ alors $H \cap \langle g \rangle \neq 0$ car H est essentiel dans G.

Alors il existe un élément non nul $p^n g \in H \cap \langle g \rangle$ où $n \geq 0$.

Étant donné que $p^n g \neq 0$ alors $n = 0$ d'où $g \in H$.

La suffisance

Soit $K < G$ tel que $H \cap K = 0$.

Ainsi $K[p] = G[p] \cap K[p] = H[p] \cap K[p] = (H \cap K)[p] = 0$

d'où $K = 0$ par 1.1.21. ▩

Proposition 2.1.3

Tout sous-groupe de G possède une extension essentielle maximale dans G.

Démonstration

Soit $E < G$ et $Z = \{H < G \mid E \text{ est essentiel dans } H\}$.

Nous savons que $Z \neq \varnothing$ puisque $E \in Z$.

Soit $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ une chaîne de sous-groupes dans Z.

Montrons que $M = \cup_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda \in Z$.

Clairement $E < M < G$ car $E < H_\lambda < G$ pour tout $\lambda \in \Lambda$.

Aussi $M[p] = (\cup_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda)[p] = \cup_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda[p]$ par 1.1.50

$= \cup_{\lambda \in \Lambda} E[p]$ par 2.1.2 car E est essentiel dans H_λ pour tout $\lambda \in \Lambda$.

$= E[p]$, d'où E est essentiel dans M.

Le lemme de Zorn entraîne donc que Z possède un élément maximal. ▩

Proposition 2.1.4

Soit H un sous-groupe de G.

Alors H est une extension essentielle maximale dans G si et seulement si H ne possède pas d'extension essentielle propre.

Démonstration

La nécessité

Supposons que H est une extension essentielle maximale de K dans G.

Soit E une extension essentielle de H dans G.

Puisque $K[p] = H[p] = E[p]$, alors K est essentielle dans E.

La maximalité de H entraîne alors que $E = H$.

La suffisance

Étant donné que $H[p]$ est essentielle dans H,

montrons que H est une extension essentielle maximale de $H[p]$ dans G.

Soit E une extension essentielle de $H[p]$ contenant H.

Puisque $H[p] = E[p]$, alors H est essentiel dans E.

Or H ne possède pas d'extension essentielle propre; $E = H$. ∎

Proposition 2.1.5

Soit $H < G$.

Alors $H + G[p]$ est l'unique enveloppe essentielle de H dans G.

Démonstration

Tout d'abord, il est clair que $(H + G[p])[p] = G[p]$

i.e. que $H + G[p]$ est essentiel dans G.

Soit E essentiel dans G tel que $H < E < H + G[p]$.

Ainsi $H + G[p] = H + E[p] < E + E[p] = E$, d'où $E = H + G[p]$.

Quant à l'unicité, soit E une enveloppe essentielle de H dans G.

Nous avons $[E \cap (H + G[p])][p] = E[p] \cap (H + G[p])[p]$

$= G[p] \cap G[p] = G[p]$.

Ainsi $E \cap (H + G[p])$ est essentiel dans G

donc $E = E \cap (H + G[p])$ par sa minimalité dans G.

En raisonnant analoguement pour H + G[p], nous concluons alors que

E et H + G[p] sont tous deux égaux à $E \cap (H + G[p])$

d'où l'unicité de H + G[p] dans G. ∎

2. LES PROPRIÉTÉS DE LA NETTETÉ

À présent, étudions les caractéristiques des sous-groupes nets dans G; nous établirons le lien avec la propriété essentielle à la fin de cette section.

Définition 2.2.1

N est un sous-groupe net dans G si et seulement si $N \cap pG = pN$.

En d'autres termes, N est un sous-groupe net dans G si et seulement si tous les éléments de N qui sont divisibles par p dans G le sont également dans N.

En terminant, il va de soi que $pN < N \cap pG$ est toujours vrai puisque $pN < N$ et $pN < pG$.

Par conséquent, afin de prouver la netteté d'un sous-groupe N dans G, il est suffisant de montrer que $N \cap pG < pN$.

Proposition 2.2.2

La netteté est une propriété transitive.

Démonstration

Soit $N < Q < G$ tel que N est net dans Q et Q est net dans G.

Ainsi $N \cap pG = N \cap Q \cap pG = N \cap pQ$ car Q est net dans G

$= pN$ car N est net dans Q. ■

Proposition 2.2.3

Soit $N < H < G$ tel que N est net dans G.

Alors N est net dans H.

Démonstration

$N \cap pH < N \cap pG = pN$ car N est net dans G. ■

Proposition 2.2.4

Soit $H < N < G$ tel que N est net dans G.

Alors N/H est net dans G/H.

Démonstration

$(N/H) \cap p(G/H) = (N/H) \cap (pG + H)/H$ par 1.1.32

$= [N \cap (pG + H)]/H = [(N \cap pG) + H]/H$ car $H < N$

$= (pN + H)/H$ car N est net dans G

$= p(N/H)$. ▩

Proposition 2.2.5

Soit $N < H < G$ tel que N est net dans G et H/N est net dans G/N.

Alors H est net dans G.

Démonstration

Montrons que $(H \cap pG) + N = pH + N$ en premier lieu.

$(pH + N)/N = p(H/N)$ par 1.1.32

$= H/N \cap p(G/N)$ car H/N est net dans G/N

$=H/N \cap (pG + N)/N = [H \cap (pG + N)]/N = [(H \cap pG) + N]/N$ car $N < H$,

d'où $(H \cap pG) + N = pH + N$.

Conséquemment, $H \cap pG < (H \cap pG) + (N \cap pG)$

$= [(H \cap pG) + N] \cap pG$ car $H \cap pG < pG$

$= [pH + N] \cap pG = [N \cap pG] + pH$ car $pH < pG$

$= pN + pH$ car N est net dans G

$= pH$ car $N < H$. ▩

Lemme 2.2.6

Soit D un sous-groupe divisible de G et N net dans G.

Alors $D + N$ est net dans G.

Démonstration

$(D + N) \cap pG = D + (N \cap pG)$ car $D < pG$

$= D + pN$ car N est net dans G

$= pD + pN$ car D est divisible

$= p(D + N)$. ■

Proposition 2.2.7

Soit D un sous-groupe divisible de G et $H < G$ tel que $D \cap H = 0$.

Alors H est net dans G si et seulement si $D \oplus H$ est net dans G.

Démonstration

La nécessité a été précédemment démontrée par le lemme 2.2.6.

En ce qui concerne la suffisance, nous avons $H \cap pG = H \cap (D \oplus H) \cap pG$

$= H \cap p(D \oplus H)$ car $D \oplus H$ est net dans G

$= H \cap (pD \oplus pH) = (H \cap pD) \oplus pH$ car $pH < H$

$= 0 \oplus pH = pH$. ■

Proposition 2.2.8

Soit $g \in G$.

Alors $\langle g \rangle$ est net dans G si et seulement si $h(g) = 0$.

Démonstration

La nécessité

Supposons que $h(g) > 0$.

Ainsi $g \in \langle g \rangle \cap pG$ mais $g \notin p\langle g \rangle$.

Alors $\langle g \rangle \cap pG \neq p\langle g \rangle$, contredisant la netteté de $\langle g \rangle$ dans G.

La suffisance

Soit $p^n g \in \langle g \rangle \cap pG$ où $n \geq 0$.

Si $n = 0$ alors $g \in pG$, contredisant la valeur nulle de la hauteur de g.

Par conséquent, $n > 0$ d'où $p^n g \in p\langle g\rangle$. ■

Voici maintenant un résultat intéressant dont l'utilité fera ses preuves plus d'une fois. Avant toute chose, deux lemmes faciles.

Lemme 2.2.9

Soit H un sous-groupe de G et $n \geq 1$.

Alors $(G[p^n] + H)/H < (G/H)[p^n]$.

Démonstration

Soit $g + H \in (G[p^n] + H)/H$ où $g \in G[p^n]$.

Ainsi $p^n(g + H) = p^n g + H = 0 + H = 0$ d'où $g + H \in (G/H)[p^n]$. ■

Lemme 2.2.10

Soit $H < G$.

Alors H est net dans G si et seulement si $(G/H)[p] = (G[p] + H)/H$.

Démonstration

La nécessité

Grâce au lemme ci-haut,

il s'agit seulement de montrer que $(G/H)[p] < (G[p] + H)/H$.

Soit $g + H \in (G/H)[p]$ où $g \in G$.

Ainsi $pg \in H$ d'où $pg \in pH$ car H est net dans G.

Par conséquent, $pg = ph$ où $h \in H$, d'où $g + H$

$= g - h + h + H \in (G[p] + H)/H$ car $g - h \in G[p]$.

La suffisance

Soit $pg \in H$ où $g \in G$.

Ainsi $g + H \in (G/H)[p]$, donc il existe $g_p \in G[p]$ tel que $g + H = g_p + H$.

Alors $g - g_p \in H$ d'où $p(g - g_p) = pg \in pH$. ▩

Proposition 2.2.11

Soit N net dans G.

Alors N = G si et seulement si N est essentiel dans G.

Démonstration

La nécessité va de soi.

En ce qui concerne la suffisance, le lemme précédent nous permet d'affirmer que $(G/N)[p] = (G[p] + N)/N$

$= (N[p] + N)/N$ car $G[p] = N[p]$ par 2.1.2

$= N/N = 0$ d'où N = G. ▩

De ceci, nous obtenons les deux résultats qui suivent.

Corollaire 2.2.12

Soit N un sous-groupe net dans G.

Alors $N = N^{-}$ si et seulement si $N[p] = N^{-}[p]$.

Démonstration

N est net dans N^{-} par 2.2.3. ▩

Proposition 2.2.13

Soit N un sous-groupe net dans G.

Alors N est dense dans G si et seulement si N^{-} est essentielle dans G.

Démonstration

La nécessité est triviale.

Utilisant la proposition 1.1.20,

montrons par induction sur n que $G[p^n] = N^-[p^n]$ pour tout $n \geq 1$.

L'hypothèse de départ confirmant le cas $n = 1$,

supposons que $G[p^n] = N^-[p^n]$ pour $n \geq 1$.

Soit $g \in G[p^{n+1}]$.

Ainsi, par l'hypothèse d'induction,

$pg \in G[p^n] = N^-[p^n]$ i.e. que pour tout $i \geq 1$,

il existe $x_i \in N$ et $g_i \in G$ tel que $pg = x_i + p^{i+1}g_i$.

La netteté de N dans G entraîne l'existence de $y_i \in N$

tel que $p(g - p^i g_i) = py_i$.

Par conséquent, $g - p^i g_i - y_i \in G[p] = N^-[p]$ i.e. $g \in N + p^iG$ pour tout $i \geq 1$

d'où $g \in N^-$. ■

Voici un autre résultat intéressant.

<u>Proposition 2.2.14</u>

Soit S un sous-socle de G

et M un sous-groupe maximal dans G par rapport au fait que $M[p] = S$.

Alors M est net dans G.

<u>Démonstration</u>

Soit $pg \in M$ où $g \in G$.

Supposons que $pg \notin pM$.

Ainsi $g \notin M$ et $(M + \langle g \rangle)[p] = M[p]$ par 1.1.36.

Cependant, la maximalité de M dans G entraîne que $M + \langle g \rangle = M$

i.e. $g \in M$ d'où la flagrante contradiction. ■

En combinant ce dernier résultat avec la proposition 1.1.51, nous obtenons ce résultat bien connu.

Proposition 2.2.15

Tout sous-socle de G est le support d'un sous-groupe net dans G.

Proposition 2.2.16

Soit $K < G$, N un sous-groupe net dans K

et H/N un sous-groupe K/N-haut dans G/N.

Alors H est net dans G et $G[p] = H[p] + K[p]$.

Démonstration

Soit $pg \in H$ où $g \in G$.

Par la proposition 1.1.54,

H est maximal par rapport au fait que $H \cap K = N$.

Ainsi $(H + \langle g \rangle) \cap K \neq N$ si $g \notin H$.

Il existe alors $h + p^n g = k \notin N$ où $h \in H$, $p^n g \in \langle g \rangle$, $k \in K$

et $n = 0$ car autrement $p^n g \in H$ et $k \in N$.

Donc $pk = ph + pg \in K \cap H = N$.

Alors $pk = px$ où $x \in N$ car celui-ci est net dans K.

Conséquemment, $pg = px - ph \in pN + pH = pH$ car $N < H$.

Enfin, montrons que $G[p] < H[p] + K[p]$.

Soit $g \in G[p] \backslash H[p]$.

Analoguement à ce qui précède, il existe $h + p^n g = k \notin N$

où $h \in H$, $p^n g \in \langle g \rangle$, $k \in K$

et $n = 0$ car autrement la preuve est concluante.

Ainsi $pk = ph + pg = ph \in K \cap H = N$.

Donc $pk = px$ où $x \in N$ car N est net dans K.

Par conséquent, $g = k - h = (k - x) + (x - h)$ où $k - x \in K[p]$

et $x - h \in H[p]$. ■

Proposition 2.2.17

Soit H et K des sous-groupes de G tel que $H \cap K = 0$.

Alors H est K-haut dans G si et seulement si

H est net dans G et $G[p] = H[p] \oplus K[p]$.

Démonstration

La nécessité

Nous avons 0 net dans K et H maximal par rapport au fait que $H \cap K = 0$.

Grâce au résultat précédent, nous obtenons la netteté de H dans G

et $G[p] = H[p] \oplus K[p]$.

La suffisance

Soit E une extension de H dans G tel que $E \cap K = 0$.

H est net dans E en raison de 2.2.3.

Or $E[p] = E[p] \cap G[p] = E[p] \cap (H[p] \oplus K[p])$

$= H[p] \oplus (E[p] \cap K[p])$ car $H < E$

$= H[p] \oplus 0 = H[p]$.

Ainsi H est essentiel et net dans E, d'où E = H par 2.2.11. ■

Voici à présent le lien existant entre la propriété essentielle et la netteté.

Théorème 2.2.18

Soit $H < G$.

Alors H est une extension essentielle maximale dans G si et seulement si

H est net dans G.

Démonstration

La nécessité

Soit $pg \in H$ où $g \in G$.

Supposons que $pg \notin pH$.

Ainsi $g \notin H$ et $(H + \langle g \rangle)[p] = H[p]$ par 1.1.36.

Cependant, H ne possède pas d'extension essentielle propre dans G par 2.1.4.

Ainsi $H + \langle g \rangle = H$, d'où la contradiction amenée par $g \in H$.

La suffisance

En vertu de 2.1.4,

montrons que H ne possède pas d'extension essentielle propre dans G.

Soit E une extension essentielle de H dans G.

La netteté de H dans G entraîne celle de H dans E par 2.2.3.

Puisque les socles de H et E sont égaux,

nous pouvons donc conclure que E = H par 2.2.11. ∎

Voici un résultat dont l'importance sera manifeste lors de l'étude de la purifiabilité des sous-groupes dans le dernier chapitre.

Théorème 2.2.19

Soit H un sous-groupe de G.

Alors H possède une enveloppe nette dans G dont le socle est $H[p]$.

Démonstration

Soit $H < G$.

La proposition 2.1.3 garantit l'existence d'une extension essentielle maximale M de H dans G.

Or, nous venons tout juste de constater que M est net dans G.

Montrons que M constitue une enveloppe nette de H dans G.
Supposons N net dans G tel que $H < N < M$.
D'une part, N est essentiel dans M puisque $N[p] = M[p]$
et d'autre part, N est net dans M par 2.2.3.
Force est de conclure que $N = M$ par 2.2.11. ∎

Conséquemment, tout sous-socle de G supporte donc un sous-groupe net dans G. D'ailleurs, cette caractéristique des sous-socles a déjà été montrée en 2.2.15.

3. LES COMPOSANTES DIVISIBLE ET RÉDUITE D'UN GROUPE

Nous allons maintenant démontrer que G peut être décomposé en deux facteurs directs dont l'un est divisible alors que l'autre est réduit. Cette caractéristique sera essentielle dans le cinquième chapitre lorsque nous rechercherons les groupes dans lesquels tous les sous-groupes verticaux maximaux sont purs. Tout d'abord, les résultats nous menant à cette décomposition.

Proposition 2.3.1

Soit D un sous-groupe divisible de G.

Alors D est un facteur direct de G.

Démonstration

Le corollaire 1.1.56 nous assure que G possède un sous-groupe H D-haut et que, par conséquent, H est net dans G et $G[p] = D[p] \oplus H[p]$

$= (D \oplus H)[p]$ par 2.2.17 et 1.1.27.

Étant donné que $D \oplus H$ est alors essentiel et net dans G par 2.2.7, ainsi $G = D \oplus H$ par 2.2.11. ■

Lemme 2.3.2

La somme d'une famille quelconque de sous-groupes divisibles est divisible.

Démonstration

Soit $\{D_\alpha\}_{\alpha \in A}$ une famille quelconque de sous-groupes divisibles.

$\sum_{\alpha \in A} D_\alpha = \sum_{\alpha \in A} pD_\alpha$ par 1.1.40

$= p\sum_{\alpha \in A} D_\alpha$, d'où la divisibilité de la somme. ■

Proposition 2.3.3

G possède un sous-groupe divisible maximal unique.

Démonstration

Soit $\Xi = \{D < G \mid D \text{ est divisible}\}$.

Clairement, $\Xi \neq \varnothing$ car $0 \in \Xi$.

Soit $M = \sum_{D \in \Xi} D$ divisible par lemme le précédent.

Il est alors clair que $D < M$ pour tout sous-groupe divisible D de G.

Quant à l'unicité de M,

supposons Q un sous-groupe divisible maximal de G.

Ainsi $M + Q$ est aussi divisible et puisque $M < M + Q$,

la maximalité de M entraîne que $M = M + Q$ i.e. $Q < M$.

Un raisonnement analogue nous permet de conclure que $M < Q$

donc $Q = M$. ⌘

Théorème 2.3.4

Soit D le sous-groupe divisible maximal de G.

Alors $G = D \oplus R$ où R est un sous-groupe réduit de G.

Le sous-groupe divisible maximal de G est appelé la partie divisible de G

que l'on note par div(G),

alors que R est une partie réduite de G notée par réd(G).

Démonstration

Puisque D est divisible,

il est un facteur direct de G par 2.3.1 i.e. $G = D \oplus R$ où $R < G$.

Supposons que R possède un sous-groupe divisible Q.

Ainsi $D < D + Q$ où $D + Q$ est divisible.

La maximalité de D implique donc que $D = D + Q$ i.e. $Q < D$.

Mais $Q = R \cap Q = R \cap (D \cap Q) = 0 \cap Q = 0$.

R est alors réduit. $\boxtimes$

Il est à noter que contrairement à div(G), l'ensemble des réd(G) n'est pas un singleton, bien que tous les éléments le constituant soient isomorphes.

<u>Proposition 2.3.5</u>

$p^{\omega}G$ est divisible si et seulement si $p^{\omega}G = \mathrm{div}(G)$.

<u>Démonstration</u>

La suffisance étant claire, attardons-nous à la nécessité.
Puisque tous les sous-groupes divisibles sont contenus dans $p^{\omega}G$
en vertu de 1.1.43,
cette caractéristique prévaut pour la partie divisible de G; $\mathrm{div}(G) < p^{\omega}G$.
Cependant, comme tous les sous-groupes divisibles de G sont contenus dans le sous-groupe divisible maximal de G,
alors $p^{\omega}G < \mathrm{div}(G)$ en particulier; $p^{\omega}G = \mathrm{div}(G)$. $\boxtimes$

CHAPITRE III

LA PURETÉ

Historiquement, la pureté est une propriété qui a été développée et étudiée, entre autres parce qu'elle constitue une condition nécessaire afin qu'un sous-groupe soit un facteur direct. Étant donné que la purifiabilité sera l'objet de la principale application de la verticalité et que celle-ci est une composante intrinsèque de la pureté, il est naturel d'aborder cette propriété en premier lieu.

1. LES PROPRIÉTÉS DE LA PURETÉ

Voici les propriétés de la pureté qui nous seront utiles.

Définition 3.1.1

A est un sous-groupe pur dans G si et seulement si

$A \cap p^iG = p^iA$ pour tout $i \geq 1$.

En d'autre termes, A est un sous-groupe pur dans G si et seulement si tous les éléments de A qui sont divisibles par p^i dans G le sont également dans A.

Précisons qu'il est évident que $p^iA < A \cap p^iG$ pour tout $i \geq 1$ puisque $p^iA < A$ et $p^iA < p^iG$ sans égard à aucune propriété particulière de A. Conséquemment, il est suffisant de montrer que $A \cap p^iG < p^iA$ pour tout $i \geq 1$ afin de prouver la pureté d'un sous-groupe A dans G.

Enfin, un fait qui saute immédiatement aux yeux est que la netteté d'un sous-groupe dans G est un corollaire immédiat de sa pureté car elle correspond au cas particulier $i = 1$.

Proposition 3.1.2

La pureté est une propriété transitive.

Démonstration

Soit $A < Q < G$ tel que A est un sous-groupe pur dans Q

qui est lui-même pur dans G.

Alors $A \cap p^iG = A \cap Q \cap p^iG = A \cap p^iQ$ car Q est pur dans G

$= p^iA$ pour tout $i \geq 1$, car A est pur dans Q. ■

Proposition 3.1.3

Soit $A < H < G$ tel que A est pur dans G.

Alors A est pur dans H.

Démonstration

$A \cap p^iH < A \cap p^iG = p^iA$ pour tout $i \geq 1$, car A est pur dans G. ■

Proposition 3.1.4

Soit $H < A < G$ où A est un sous-groupe pur dans G.

Alors A/H est pur dans G/H.

Démonstration

$A/H \cap p^i(G/H) = A/H \cap (p^iG + H)/H$ par 1.1.32

$= [A \cap (p^iG + H)]/H = [(A \cap p^iG) + H]/H$ car $H < A$

$= (p^iA + H)/H$ car A est pur dans G

$= p^i(A/H)$ pour tout $i \geq 1$. ■

Proposition 3.1.5

Soit $A < H < G$ tel que A est pur dans G et H/A est pur dans G/A.

Alors H est pur dans G.

Démonstration

En premier lieu, montrons que $(H \cap p^iG) + A = p^iH + A$.

Nous avons $(p^iH + A)/A = p^i(H/A)$ par 1.1.32

$= H/A \cap p^i(G/A)$ car H/A est pur dans G/A

$= H/A \cap (p^iG + A)/A = [H \cap (p^iG + A)]/A = [(H \cap p^iG) + A]/A$ car $A < H$.

Conséquemment, $(H \cap p^iG) + A = p^iH + A$.

Ainsi $H \cap p^iG < (H \cap p^iG) + (A \cap p^iG)$

$= [(H \cap p^iG) + A] \cap p^iG$ car $H \cap p^iG < p^iG$

$= (p^iH + A) \cap p^iG = (A \cap p^iG) + p^iH$ car $p^iH < p^iG$

$= p^iA + p^iH$ car A est pur dans G

$= p^iH$ pour tout $i \geq 1$. ▣

<u>Proposition 3.1.6</u>

Soit H un sous-groupe de G.

Alors H est pur dans G si et seulement si

$(G/H)[p^i] = (G[p^i] + H)/H$ pour tout $i \geq 1$.

<u>Démonstration</u>

<u>La nécessité</u>

En vertu du lemme 2.2.9,

il suffit de montrer que $(G/H)[p^i] < (G[p^i] + H)/H$.

Soit $g + H \in (G/H)[p^i]$ où $g \in G$ et $i \geq 1$.

Ainsi $p^ig \in H$ d'où $p^ig \in p^iH$ car H est pur dans G.

Conséquemment, il existe $h \in H$ tel que $p^ig = p^ih$

d'où $g + H = g - h + h + H \in (G[p^i] + H)/H$ car $g - h \in G[p^i]$.

<u>La suffisance</u>

Soit $p^ig \in H$ où $g \in G$ et $i \geq 1$.

Ainsi $g + H \in (G/H)[p^i]$, donc il existe $g_i \in G[p^i]$ tel que $g + H = g_i + H$.

Alors $g - g_i \in H$ d'où $p^i(g - g_i) = p^ig - 0 = p^ig \in p^iH$. ▣

Proposition 3.1.7

Soit A un sous-groupe pur dans G et $n \geq 1$.

Alors $A \cap p^nG = p^nA$ est pur dans p^nG.

Démonstration

La pureté de A dans G entraîne que $p^nA \cap p^ip^nG = A \cap p^nG \cap p^ip^nG$

$= A \cap p^ip^nG = p^ip^nA$ pour tout $i \geq 1$. ▣

Proposition 3.1.8

Soit A un sous-groupe pur dans G et $n \geq 1$.

Alors $[p^n(G/A)][p] = [(p^nG)[p] + A]/A$.

Démonstration

Il est clairement suffisant de montrer que $[p^n(G/A)][p] < [(p^nG)[p] + A]/A$.

Soit $p^n(g + A) \in [p^n(G/A)][p]$ où $g \in G$.

Ainsi $p^{n+1}g \in A$ d'où $p^{n+1}g = p^{n+1}a$

où $a \in A$ en raison de la pureté de A dans G.

Par conséquent, $p^n(g + A) = p^ng + A = p^ng - p^na + p^na + A$

$= p^n(g - a) + p^na + A \in [(p^nG)[p] + A]/A$ puisque $pp^n(g - a) = 0$. ▣

Lemme 3.1.9

Soit D et A respectivement des sous-groupes divisible et pur dans G.

Alors D + A est pur dans G.

Démonstration

Puisque $D < p^iG$ pour tout $i \geq 1$ par 1.1.43,

alors $(D + A) \cap p^iG = D + (A \cap p^iG) = D + p^iA$ car A est pur dans G

$= p^iD + p^iA$ car D est divisible

$= p^i(D + A)$ pour tout $i \geq 1$. ▣

Proposition 3.1.10

Soit D un sous-groupe divisible de G et $H < G$ tel que $D \cap H = 0$.

Alors H est pur dans G si et seulement si $D \oplus H$ est pur dans G.

Démonstration

La nécessité étant connue par la proposition précédente,

établissons la suffisance.

$H \cap p^iG = H \cap (D \oplus H) \cap p^iG = H \cap p^i(D \oplus H)$ car $D \oplus H$ est pur dans G

$= H \cap (p^iD \oplus p^iH) = (H \cap p^iD) \oplus p^iH$ car $p^iH < H$

$= 0 \oplus p^iH = p^iH$ pour tout $i \geq 1$. $\blacksquare$

Proposition 3.1.11

La divisibilité d'un sous-groupe de G entraîne sa pureté dans G.

Démonstration

Soit D un sous-groupe divisible de G.

Alors $D \cap p^iG = p^iD \cap p^iG = p^iD$ pour tout $i \geq 1$. $\blacksquare$

Proposition 3.1.12

Soit $H < p^\omega G$.

Alors H est divisible si et seulement si H est pur dans G.

Démonstration

La proposition précédente impose la nécessité.

En ce qui concerne la suffisance, la netteté suffit.

En effet, $H = H \cap p^\omega G < H \cap pG = pH$, d'où la divisibilité de H par 1.1.40. $\blacksquare$

Corollaire 3.1.13

$p^\omega G$ est divisible si et seulement si $p^\omega G$ est pur dans G.

Corollaire 3.1.14

Soit G un groupe divisible et H un sous-groupe de G.

Alors H est divisible si et seulement si H est pur dans G.

Démonstration

$G = p^{\omega}G$ par 1.1.39. ⊠

Proposition 3.1.15

Soit A un sous-groupe pur dans G.

Alors $p^{\omega}(G/A)$ est divisible si et seulement si A^{-} est pur dans G.

Démonstration

La nécessité

En combinant les résultats 3.1.13 et 1.2.12,

nous obtenons que A^{-}/A est pur dans G/A.

Conséquemment, 3.1.5 implique que A^{-} est pur dans G.

La suffisance

Cette fois-ci, par 3.1.4 et 1.2.12, nous obtenons que

$p^{\omega}(G/A)$ est pur dans G/A d'où la divisibilité de $p^{\omega}(G/A)$ par 3.1.13. ⊠

Remarquons que la netteté de A^{-} aurait suffit pour la suffisance.

Proposition 3.1.16

Les facteurs directs de G sont purs dans G.

Démonstration

Soit F un facteur direct de G et E le facteur complémentaire.

Ainsi $F \cap p^iG = F \cap p^i(F \oplus E) = F \cap (p^iF \oplus p^iE)$

$= p^iF \oplus (F \cap p^iE)$ car $p^iF < F$

$= p^iF \oplus 0 = p^iF$ pour tout $i \geq 1$. ∎

<u>Proposition 3.1.17</u>

Soit $H < A < G$ tel que A est un sous-groupe pur dans G.

Alors $H^{-A} = H^{-G} \cap A$.

<u>Démonstration</u>

$H^{-G} \cap A = \cap_{i \geq 1} (H + p^iG) \cap A = \cap_{i \geq 1} [(H + p^iG) \cap A]$

$= \cap_{i \geq 1} [H + (p^iG \cap A)]$ car $H < A$

$= \cap_{i \geq 1} (H + p^iA)$ car A est pur dans G

$= H^{-A}$. ∎

<u>Corollaire 3.1.18</u>

Soit A un sous-groupe pur dans G.

Alors $p^{\omega}A = A \cap p^{\omega}G$.

<u>Démonstration</u>

Effectivement, $0^{-A} = p^{\omega}A$ et $0^{-G} = p^{\omega}G$. ∎

<u>Proposition 3.1.19</u>

Soit $G = D \oplus F$ où D est un sous-groupe divisible de G et $H < F$.

Alors $H^{-G} = D \oplus H^{-F}$.

<u>Démonstration</u>

La proposition 3.1.16 combinée à 3.1.17 nous indique que $H^{-F} = H^{-G} \cap F$.

Puisque $D < H^{-G}$ par 1.2.10,

alors 1.1.15 nous donne $H^{-G} = D \oplus (H^{-G} \cap F) = D \oplus H^{-F}$. ∎

Corollaire 3.1.20

Soit $G = D \oplus F$ où D est un sous-groupe divisible de G.

Alors $p^{\omega}G = D \oplus p^{\omega}F$.

Démonstration

En effet, puisque $0^{-G} = p^{\omega}G$ et $0^{-F} = p^{\omega}F$. $\blacksquare$

Nous verrons au chapitre sur la purifiabilité qu'un sous-socle ne supporte pas toujours un sous-groupe pur. Cependant, le résultat suivant prévaut. D'abord un lemme.

Lemme 3.1.21

L'union d'une chaîne quelconque de sous-groupes purs dans G est pure dans G.

Démonstration

Soit $\{A_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ une chaîne quelconque de sous-groupes purs dans G.

Par 1.1.50, $(\cup_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda}) \cap p^{i}G = \cup_{\lambda \in \Lambda} (A_{\lambda} \cap p^{i}G)$

$= \cup_{\lambda \in \Lambda} p^{i}A_{\lambda}$ car A_{λ} est pur dans G pour tout $\lambda \in \Lambda$

$= p^{i} \cup_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda}$ pour tout $i \geq 1$. $\blacksquare$

Théorème 3.1.22

Soit $S < G[p]$ et A un sous-groupe pur dans G tel que $A[p] < S$.

Alors A possède un contenant pur C dans G tel que $C[p] < S$.

C'est la propriété de purification faible.

Démonstration

Soit $Z = \{L < G \mid L$ est un prolongement pur de A dans G et $L[p] < S\}$.

Il est clair que $Z \neq \varnothing$ puisque $A \in Z$.

Soit $\{L_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ une chaîne d'éléments dans Z.

Montrons que $C = \cup_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda \in \mathcal{Z}$.

Clairement, $A < C < G$ et $C[p] = (\cup_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda)[p] = \cup_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda[p] < \cup_{\lambda \in \Lambda} S = S$ i.e. $C[p] < S$ puisque $A < L_\lambda < G$ et $L_\lambda[p] < S$ pour tout $\lambda \in \Lambda$.

Également, nous savons par le lemme précédent que l'union d'une chaîne de sous-groupes purs est pure.

Ainsi, $\mathcal{Z}$ possède un élément maximal par le lemme de Zorn. ⌘

2. LA PURETÉ DANS LES SOUS-GROUPES CYCLIQUES

Cette dernière section du troisième chapitre présente des résultats intéressants qui seront utiles lors de la caractérisation des groupes dans lesquels tous les sous-groupes sont verticaux.

Proposition 3.2.1

Soit $g \in G[p]$.

Alors $<g>$ est pur dans G si et seulement si $h(g) = 0$.

Démonstration

La nécessité a été montrée par la proposition 2.2.8.

Quant à la suffisance, soit $i \geq 1$.

Soit $p^n g \in <g> \cap p^i G$ où $n \geq 0$.

Si $n = 0$ alors $g \in p^i G$, contredisant ainsi que $h(g) = 0$.

Conséquemment, $n > 0$ d'où $p^n g = 0 \in p^i <g>$. ▩

Lemme 3.2.2

Soit $g \in G$ tel que $h(p^n g) = n$ où $n \geq 0$.

Alors la hauteur de $p^j g$ dans $p^i G$ est égale à $j - i$ pour tout $i \leq j \leq n$.

Démonstration

Soit $i \leq j \leq n$.

Supposons que la hauteur de $p^j g$ dans $p^i G$ est égale à $m \geq 0$.

En premier lieu, il est clair que $m \geq j - i$ puisque $p^j g = p^{j-i}(p^i g)$.

Ensuite, soit $g_m \in G$ tel que $p^j g = p^m p^i g_m$ d'où $p^n g = p^{n-j} p^j g = p^{n-j} p^{m+i} g_m$.

Par conséquent, $h(p^n g) = n$ entraîne que $i - j + m + n \leq n$

d'où $m \leq j - i$ et enfin, $m = j - i$. ▩

Lemme 3.2.3

Soit $g \in G$ tel que $h(g) < \infty$.

Alors $<g> \cap p^iG = <pg> \cap p^iG$ pour tout $i > h(g)$.

Démonstration

Soit $i > h(g)$.

Soit $p^ng \in <g> \cap p^iG$ où $n \geq 0$.

Si $n = 0$ alors $g \in p^iG$, ce qui est impossible puisque $i > h(g)$.

Ainsi $n > 0$ d'où $p^ng \in <pg> \cap p^iG$. ▣

Théorème 3.2.4

Soit $g \in G$ tel que $h(g) = 0$ et $o(g) = p^{n+1}$ où $n \geq 0$.

Alors $<g>$ est pur dans G si et seulement si $h(p^ng) = n$.

Démonstration

La nécessité

Supposons que $h(p^ng) > n$ i.e. que $p^ng \in p^{n+1}G$.

Alors $p^ng \in <g> \cap p^{n+1}G$ mais $p^ng \notin p^{n+1}<g>$,

violant ainsi le critère de pureté pour $i = n + 1$.

La suffisance

Par induction sur n, le cas $n = 0$ est vérifié par 3.2.1.

Admettons que la suffisance de la biconditionnelle soit vraie pour $n \geq 0$.

Maintenant, soit $g \in G$ tel que $h(g) = 0$ et $o(g) = p^{(n+1)+1}$.

Supposons que $h(p^{n+1}g) = n + 1$.

Ainsi $pg \in pG$, $o(pg) = p^{n+1}$ et $h_{pG}(pg) = 0$ par le lemme 3.2.2.

De plus, $h_{pG}[p^n(pg)] = n$ toujours par le même lemme.

L'hypothèse d'induction intervient alors afin de nous permettre de conclure

que $<pg>$ est pur dans pG.

Soit $i \geq 0$.

Conséquemment, $\langle g\rangle \cap p^{i+1}G = \langle pg\rangle \cap p^{i}pG$ par le lemme 3.2.3

$= p^{i}\langle pg\rangle$ car $\langle pg\rangle$ est pur dans pG

$= p^{i+1}\langle g\rangle$ par le lemme 1.1.30,

garantissant ainsi la pureté de $\langle g\rangle$ dans G. ▩

CHAPITRE IV

LA VERTICALITÉ

Ce quatrième chapitre constitue la clef de cet ouvrage. Nous définirons la propriété de verticalité à l'aide de la notion de compatibilité entre deux sous-groupes de G. Nous dévoilerons ensuite diverses propriétés et caractéristiques de la verticalité. Entre autres, nous montrerons que tout sous-socle de G supporte un sous-groupe vertical dans G. De plus, il sera établi que la fermeture de tout sous-groupe vertical dans G est verticale dans G. Ces caractéristiques sont d'autant plus importantes que la netteté ne possède que la première propriété alors que la pureté est privée de l'une et de l'autre. Également, nous identifierons les sous-groupes verticaux dans un groupe donné et rechercherons les groupes qui en contiennent. Finalement, nous examinerons l'existence des extensions et des prolongements optimaux concernant la verticalité.

1. <u>DÉFINITION DE LA VERTICALITÉ</u>

En premier lieu, il s'agit de se munir des outils nécessaires afin de définir adéquatement la verticalité.

<u>Proposition 4.1.1</u>

Soit H et K deux sous-groupes de G.

Alors la fonction $\Phi : H/(H \cap K) \rightarrow (H + K)/K$ définie par

$\Phi(h + H \cap K) = h + K$ où $h \in H$ constitue un isomorphisme.

<u>Démonstration</u>

Montrons que Φ est bien définie.

Soit $x + H \cap K = y + H \cap K$ où x et $y \in H$.

Alors $\Phi(x + H \cap K) = x + K = x + (H \cap K) + K = (x + H \cap K) + K$

$= (y + H \cap K) + K = y + K = \Phi(y + H \cap K)$.

Démontrons que Φ définit un homomorphisme.

Soit x et $y \in H$.

Alors $\Phi[(x + H \cap K) + (y + H \cap K)] = \Phi[x + y + H \cap K] = x + y + K$

$= (x + K) + (y + K) = \Phi(x + H \cap K) + \Phi(y + H \cap K)$.

Ensuite, montrons que Φ est injective.

Soit $\Phi(x + H \cap K) = \Phi(y + H \cap K)$ où x et $y \in H$.

Ainsi $x + K = y + K$ d'où $x - y \in H \cap K$ donc $x + H \cap K = y + H \cap K$.

Enfin, montrons que Φ est surjective.

Soit $h + K \in (H + K)/K$ où $h \in H$.

Il est clair que $\Phi(x + H \cap K) = h + K$ pour $x = h$. ▧

Définition 4.1.2

Soit H et K deux sous-groupes de G.

Alors H est compatible avec K si et seulement si l'isomorphisme

$\Phi: H/(H \cap K) \to (H + K)/K$ préserve les hauteurs finies d'éléments.

Précisément, $h_{G/(H \cap K)}(h + H \cap K) = h_{G/K}(h + K)$ pour tout élément $h \in H$ tel que $h + H \cap K$ et $h + K$ sont de hauteurs finies dans $G/(H \cap K)$ et G/K respectivement.

Définition 4.1.3

V est un sous-groupe vertical dans G

si et seulement si V est compatible avec G[p].

Afin de caractériser la propriété de verticalité des sous-groupes de G, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 4.1.4

Soit H un sous-groupe de G.

Alors H est compatible avec G[p] si et seulement si

$pH \cap p^{i+1}G = p(H \cap p^iG)$ pour tout $i \geq 1$.

Démonstration

En vertu de la proposition 4.1.1, posons K = G[p]

et utilisons l'isomorphisme ainsi défini par $\Phi : H/H[p] \rightarrow (H + G[p])/G[p]$

tel que $\Phi : (h + H[p]) = h + G[p]$ où $h \in H$.

La nécessité

Nous savons que $p(H \cap p^iG) < pH \cap p^{i+1}G$ pour tout $i \geq 1$.

Demeure donc l'inclusion inverse à montrer.

Soit $ph = p^{i+1}g \in pH \cap p^{i+1}G$ où $h \in H$, $g \in G$ et $i \geq 1$.

Ainsi $h - p^ig \in G[p]$ i.e. $h + G[p] = p^ig + G[p]$ d'où $h_{G/G[p]}(h + G[p]) \geq i$.

Étant donné que la hauteur de $h + H[p]$ dans $G/H[p]$

est la même que celle de $h + G[p]$ dans $G/G[p]$,

nous obtenons $h + H[p] = p^ig_i + H[p]$ où $g_i \in G$.

Conséquemment, puisque $p^ig_i \in H$,

nous obtenons $ph = pp^ig_i \in p(H \cap p^iG)$.

La suffisance

Soit $h + G[p] \in (H + G[p])/G[p]$ où $h \in H$ et tel que $h_{G/G[p]}(h + G[p]) = i$.

Il s'agit alors de montrer que $h_{G/H[p]}(h + H[p]) = i$.

Puisque $h_{G/G[p]}(h + G[p]) = i$,

alors il existe $g \in G$ tel que $h + G[p] = p^ig + G[p]$.

Ainsi $h - p^ig \in G[p]$ i.e. $ph \in pH \cap p^{i+1}G = p(H \cap p^iG)$.

Par conséquent, $ph = ph_i$ tel que $h_i = p^ig_i \in H$ où $g_i \in G$.

Ainsi $h - h_i \in H[p]$ d'où $h + H[p] = h_i + H[p] = p^ig_i + H[p]$.

Nous sommes donc en mesure de conclure que $h_{G/H[p]}(h + H[p]) \geq i$.

Supposons maintenant que $h_{G/H[p]}(h + H[p]) > i$.

Ceci signifie qu'il existe $n \geq 1$ et $g_n \in G$ tel que $h + G[p] = \Phi(h + H[p])$

$= \Phi(p^{i+n}g_n + H[p]) = p^{i+n}g_n + G[p]$ puisque $p^{i+n}g_n \in H$,

contredisant ainsi que la hauteur de $h + G[p]$ dans $G/G[p]$ est égale à i.

Par conséquent, $h_{G/H[p]}(h + H[p]) = i$. ⊠

Conséquemment, voici le résultat qui caractérisera la verticalité.

Théorème 4.1.5

Soit H un sous-groupe de G.

Alors H est vertical dans G si et seulement si

$pH \cap p^{i+1}G = p(H \cap p^iG)$ pour tout $i \geq 1$.

Puisque $p(H \cap p^iG) < pH \cap p^{i+1}G$, il sera suffisant de montrer que $pH \cap p^{i+1}G < p(H \cap p^iG)$ pour tout $i \geq 1$ afin de prouver la verticalité d'un sous-groupe H dans G.

Étant donné que nous allons souvent travailler avec la notion de socle de groupe ou de sous-groupe, établissons un résultat important concernant la verticalité à l'aide du lemme qui suit.

Lemme 4.1.6

Soit $H < G$ et $n \geq 1$.

Alors $pH \cap p^{n+1}G = p(H \cap p^nG)$ si et seulement si

$(H + p^nG)[p] = H[p] + (p^nG)[p]$.

Démonstration

La nécessité

$H[p] + (p^nG)[p] < (H + p^nG)[p]$ par 1.1.26.

Reste à montrer l'inclusion contraire.

Soit $h + p^ng \in (H + p^nG)[p]$ où $h \in H$ et $g \in G$.

Ainsi $p(h + p^ng) = 0$ d'où $ph = -p^{n+1}g \in pH \cap p^{n+1}G$.

Puisque $pH \cap p^{n+1}G = p(H \cap p^nG)$,

alors $ph = ph_n$ où $h_n = p^ng_n \in H$ et $g_n \in G$.

Donc $h + p^ng = h - h_n + h_n + p^ng = (h - h_n) + p^ng_n + p^ng$

$= (h - h_n) + p^n(g_n + g) \in H[p] + (p^nG)[p]$ car $p(h - h_n) = pp^n(g_n + g) = 0$.

La suffisance

Soit $ph = p^{n+1}g \in pH \cap p^{n+1}G$ où $h \in H$ et $g \in G$.

Puisque $p(h - p^ng) = 0$, alors $h - p^ng \in (H + p^nG)[p]$ i.e. qu'il existe $h_n \in H[p]$ et $p^ng_n \in (p^nG)[p]$ où $g_n \in G$ tel que $h - p^ng = h_n + p^ng_n$.

Par conséquent, $h - h_n = p^n(g + g_n) \in H \cap p^nG$

et $ph = ph - 0 = ph - ph_n = p(h - h_n) \in p(H \cap p^nG)$. ⊠

Conséquemment, le théorème suivant prévaut.

Théorème 4.1.7

Soit H un sous-groupe de G.

Alors H est un sous-groupe vertical dans G si et seulement si $(H + p^iG)[p] = H[p] + (p^iG)[p]$ pour tout $i \geq 1$.

Étant donné que $H[p] + (p^iG)[p] < (H + p^iG)[p]$ en tout temps, il suffira de prouver que $(H + p^iG)[p] < H[p] + (p^iG)[p]$ pour tout $i \geq 1$ afin de montrer la verticalité d'un sous-groupe H dans G.

L'utilisation des théorèmes 4.1.5 et 4.1.7 sera très fréquente. C'est pourquoi le lecteur devra les garder en tête constamment.

2. LES PROPRIÉTÉS DE LA VERTICALITÉ

Voici maintenant une série de résultats identifiant des sous-groupes verticaux et présentant les propriétés et caractéristiques de la verticalité.

Proposition 4.2.1

Soit V un sous-groupe vertical dans G et S un sous-socle de G.

Alors V + S est vertical dans G.

Démonstration

Grâce au théorème 4.1.5,

la verticalité de V dans G entraîne que $p(V + S) \cap p^{i+1}G = pV \cap p^{i+1}G$

$= p(V \cap p^iG) < p[(V + S) \cap p^iG]$ pour tout $i \geq 1$. ▨

Étant donné que 0 est vertical dans G, un corollaire et l'un des théorèmes principaux se présentent sur le champ.

Corollaire 4.2.2

Tout sous-socle de G est vertical dans G.

Théorème 4.2.3

Tout sous-socle de G est le support d'un sous-groupe vertical dans G.

Proposition 4.2.4

Tout sous-groupe de G dont le socle est dense dans G[p]

est vertical dans G.

Démonstration

Soit $H < G$ tel que H[p] est dense dans G[p].

Alors $(H + p^iG)[p] < G[p] = H[p] + (p^iG)[p]$ pour tout $i \geq 1$,

par la définition de la densité d'un socle.
Par conséquent, H est vertical dans G par le théorème 4.1.7. ▣

Nous constaterons dans la troisième section de ce chapitre que, contrairement à la netteté et à la pureté, la verticalité n'est pas une propriété transitive. Effectivement, la transition se fait toujours avec une propriété plus forte que la verticalité. En voici des exemples.

Proposition 4.2.5

Soit $E < V < G$ tel que E est un sous-groupe essentiel dans V
et V est un sous-groupe vertical dans G.
Alors E est vertical dans G.

Démonstration

$(E + p^iG)[p] < (V + p^iG)[p] = V[p] + (p^iG)[p]$ par 4.1.7
$= E[p] + (p^iG)[p]$ pour tout $i \geq 1$. ▣

Corollaire 4.2.6

Tout sous-groupe essentiel dans G est vertical dans G.

Démonstration

G est vertical dans lui-même. ▣

Proposition 4.2.7

Soit $V < A < G$ tel que V un sous-groupe vertical dans A
et A est un sous-groupe pur dans G.
Alors V est vertical dans G.

Démonstration

$pV \cap p^{i+1}G = pV \cap A \cap p^{i+1}G$ car $V < A$

$= pV \cap p^{i+1}A$ car A est pur dans G

$= p(V \cap p^iA)$ car V est vertical dans A

$= p(V \cap A \cap p^iG)$ car A est pur dans G

$= p(V \cap p^iG)$ pour tout $i \geq 1$. ∎

Proposition 4.2.8

Soit $A < V < G$ tel que A est un sous-groupe pur et dense dans V et V est vertical dans G.

Alors A est vertical dans G.

Démonstration

$pA \cap p^{i+1}G = pA \cap pV \cap p^{i+1}G$ car $pA < pV$

$= pA \cap p(V \cap p^iG)$ car V est vertical dans G

$= pA \cap p[(A + p^iV) \cap p^iG]$ car A est dense dans V

$= pA \cap p[(A \cap p^iG) + p^iV]$ car $p^iV < p^iG$

$= pA \cap [p(A \cap p^iG) + p^{i+1}V]$

$= p(A \cap p^iG) + (pA \cap p^{i+1}V)$ car $p(A \cap p^iG) < pA$

$< p(A \cap p^iG) + (A \cap p^{i+1}V) = p(A \cap p^iG) + p^{i+1}A$ car A est pur dans V

$= p[(A \cap p^iG) + p^iA] = p[(A + p^iA) \cap p^iG]$ car $p^iA < p^iG$

$= p[A \cap p^iG]$ pour tout $i \geq 1$. ∎

Proposition 4.2.9

Soit $V < A < G$ tel que V est un sous-groupe vertical dans G et A un sous-groupe pur dans G.

Alors V est vertical dans A.

Démonstration

$pV \cap p^{i+1}A < pV \cap p^{i+1}G = p(V \cap p^iG)$ car V est vertical dans G

$= p(V \cap A \cap p^iG)$ car $V < A$

$= p\,(V \cap p^iA)$ pour tout $i \geq 1$, car A est pur dans G. ▨

Proposition 4.2.10

Soit $V < H < G$ tel que V est un sous-groupe dense dans H
et vertical dans G.
Alors H est vertical dans G.

Démonstration

$pH \cap p^{i+1}G = p(V + p^iH) \cap p^{i+1}G$ car V est dense dans H
$= (pV + p^{i+1}H) \cap p^{i+1}G = (pV \cap p^{i+1}G) + p^{i+1}H$ car $p^{i+1}H < p^{i+1}G$
$= p(V \cap p^iG) + p^{i+1}H$ car V est vertical dans G
$= p[(V \cap p^iG) + p^iH] = p[(V + p^iH) \cap p^iG]$ car $p^iH < p^iG$
$= p[H \cap p^iG]$ pour tout $i \geq 1$, car V est dense dans H. ▨

Proposition 4.2.11

Soit $A < V < G$ tel que A est un sous-groupe pur dans G
et V est vertical dans G.
Alors V/A est vertical dans G/A.

Démonstration

$[V/A + p^i(G/A)][p] = [V/A + (p^iG + A)/A)][p]$ par 1.1.32
$= [(V + p^iG)/A][p]$ par 1.1.17 car $A < V$
$= [(V + p^iG)[p] + A]/A$ par 2.2.10 car A est net dans $V + p^iG$ par 2.2.3
$= [V[p] + (p^iG)[p] + A]/A$ car V est vertical dans G
$= [V[p] + A + (p^iG)[p] + A]/A = [V[p] + A]/A + [(p^iG)[p] + A]/A$ par 1.1.17
$= [V/A][p] + [p^i(G/A)][p]$ pour tout $i \geq 1$, par 2.2.3, 2.2.10 et 3.1.8. ▨

Afin de démontrer la prochaine proposition, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 4.2.12

Soit $A < V < G$ tel que A est un sous-groupe pur dans G

et V/A est vertical dans G/A.

Alors $(V + p^iG)[p] + A = V[p] + (p^iG)[p] + A$.

Démonstration

$[(V + p^iG)[p] + A]/A = [(V + p^iG)/A][p]$ par 2.2.3 et 2.2.10

$= [(V + p^iG + A)/A][p]$ car $A < V$

$= [V/A + (p^iG + A)/A][p] = [V/A + p^i(G/A)][p]$ par 1.1.32

$= [V/A][p] + [p^i(G/A)][p]$ car V/A est vertical dans G/A

$= [V[p] + A]/A + [(p^iG)[p] + A]/A$ par 2.2.3, 2.2.10 et 3.1.8

$= [V[p] + A + (p^iG)[p] + A]/A = [V[p] + (p^iG)[p] + A]/A$.

Par conséquent, $(V + p^iG)[p] + A = V[p] + (p^iG)[p] + A$. ▣

Proposition 4.2.13

Soit $A < V < G$ tel que A est un sous-groupe pur dans G

et V/A est vertical dans G/A.

Alors V est vertical dans G.

Démonstration

$(V + p^iG)[p] < [A \cap (V + p^iG)[p]] + (V + p^iG)[p]$

$= [A + (V + p^iG)[p]] \cap (V + p^iG)[p]$ car $(V + p^iG)[p] < (V + p^iG)[p]$

$= [A + V[p] + (p^iG)[p]] \cap (V + p^iG)[p]$ par le lemme précédent

$= [A \cap (V + p^iG)[p]] + V[p] + (p^iG)[p]$

car $V[p] + (p^iG)[p] < (V + p^iG)[p]$ pour tout $i \geq 1$

$= A[p] + V[p] + (p^iG)[p] = V[p] + (p^iG)[p]$ pour tout $i \geq 1$, car $A < V$. ▣

Lemme 4.2.14

Soit D un sous-groupe divisible de G et V un sous-groupe vertical dans G.

Alors D + V est vertical dans G.

Démonstration

$p(D + V) \cap p^{i+1}G = (pD + pV) \cap p^{i+1}G$

$= (D + pV) \cap p^{i+1}G$ car D est divisible

$= (pV \cap p^{i+1}G) + D$ car $D < p^{i+1}G$ pour tout $i \geq 1$

$= p(V \cap p^iG) + D$ car V est vertical dans G

$= p[(V \cap p^iG) + D]$ car D est divisible

$= p[(D + V) \cap p^iG]$ pour tout $i \geq 1$. ▩

Proposition 4.2.15

Soit D un sous-groupe divisible de G et $H < G$ tel que $D \cap H = 0$.

Alors H est vertical dans G si et seulement si $D \oplus H$ est vertical dans G.

Démonstration

La nécessité a été précédemment démontrée.

Quant à la suffisance, nous avons $pH \cap p^{i+1}G = pH \cap p(D \oplus H) \cap p^{i+1}G$

$= pH \cap p[(D \oplus H) \cap p^iG]$ car $D \oplus H$ est vertical dans G

$= pH \cap p[(H \cap p^iG) \oplus D]$ car $D < p^iG$ pour tout $i \geq 1$

$= pH \cap [p(H \cap p^iG) \oplus D]$ car D est divisible

$= p(H \cap p^iG) \oplus (pH \cap D)$ car $p(H \cap p^iG) < pH$ pour tout $i \geq 1$

$= p(H \cap p^iG) \oplus 0$ car $D \cap H = 0$

$= p(H \cap p^iG)$ pour tout $i \geq 1$. ▩

Proposition 4.2.16

Soit V un sous-groupe vertical dans G et $m \geq n \geq 0$.

Alors $V \cap p^mG$ est vertical dans p^nG.

Démonstration

Il s'agit de montrer que

$p(V \cap p^mG) \cap p^{i+1}p^nG = p[(V \cap p^mG) \cap p^ip^nG]$ pour tout $i \geq 1$.

La verticalité de V dans G entraîne que $p(V \cap p^mG) \cap p^{i+1}p^nG$

$= pV \cap p^{m+1}G \cap p^{i+1+n}G = pV \cap p^{\max\{m,\, i+n\}+1}G = p(V \cap p^{\max\{m,\, i+n\}}G)$

$= p(V \cap p^mG \cap p^{i+n}G) = p[(V \cap p^mG) \cap p^ip^nG]$ pour tout $i \geq 1$. ▨

Corollaire 4.2.17

- $V \cap p^nG$ est vertical dans p^nG pour tout $n \geq 0$;
- $V \cap p^nG$ est vertical dans G pour tout $n \geq 0$.

En ce qui concerne la verticalité de $V \cap p^\omega G$ dans $p^\omega G$ lorsque V est vertical dans G, nous examinerons la question dans la prochaine section de ce chapitre. À présent, le résultat qui suit est capital parce qu'il foisonne de corollaires importants.

Proposition 4.2.18

Soit V un sous-groupe vertical dans G

et H un sous-groupe de G tel que $V < H < V^-$.

Alors H est vertical dans G.

Démonstration

Puisque $V^- < V + p^iG$ pour tout $i \geq 1$, alors $(H + p^iG)[p] < (V^- + p^iG)[p]$

$< (V + p^iG + p^iG)[p] = (V + p^iG)[p] = V[p] + (p^iG)[p]$

$< H[p] + (p^iG)[p]$ pour tout $i \geq 1$. ▨

Un théorème d'importance émerge à l'instant.

Théorème 4.2.19

La fermeture de tout sous-groupe vertical dans G est verticale dans G.

Étant donné que $p^{\omega}G$ est la fermeture de 0 qui est vertical dans G, les corollaires pullulent.

Corollaire 4.2.20

- $p^{\omega}G$ est vertical dans G;
- tout sous-groupe de $p^{\omega}G$ est vertical dans G;
- tout sous-groupe divisible de G est vertical dans G par 1.1.43;
- tout sous-groupe d'un groupe divisible est vertical dans ce groupe par 1.1.39.

Proposition 4.2.21

$G[p^n]$ est vertical dans G pour tout $n \geq 1$.

Démonstration

Soit $n \geq 1$.

$(G[p^n] + p^iG)[p] < G[p] = (G[p^n])[p] < (G[p^n])[p] + (p^iG)[p]$ pour tout $i \geq 1$. $\blacksquare$

Proposition 4.2.22

Soit V un sous-groupe vertical dans G et $n \geq 1$.

Alors $V + p^nG$ est vertical dans G.

Démonstration

$(V + p^nG + p^iG)[p] = (V + p^{\min\{i,\, n\}}G)[p]$

$= V[p] + (p^{\min\{i,\, n\}}G)[p]$ car V est vertical dans G

$= V[p] + (p^nG)[p] + (p^iG)[p] = (V + p^nG)[p] + (p^iG)[p]$ pour tout $i \geq 1$. $\blacksquare$

Corollaire 4.2.23

p^nG est vertical dans G pour tout $n \geq 1$.

Proposition 4.2.24

Soit $H < p^{\omega}G$ et V un sous-groupe vertical dans G.

Alors $V + H$ est vertical dans G.

Démonstration

Puisque $H < p^{\omega}G < p^{i}G$ pour tout $i \geq 1$,

alors $(V + H + p^{i}G)[p] = (V + p^{i}G)[p]$

$= V[p] + (p^{i}G)[p]$ car V est vertical dans G

$< (V + H)[p] + (p^{i}G)[p]$ pour tout $i \geq 1$. ■

Corollaire 4.2.25

Soit V un sous-groupe vertical dans G.

Alors $V + p^{\omega}G$ est vertical dans G.

Voici maintenant le lien qui fond les trois principales propriétés étudiées jusqu'ici.

Théorème 4.2.26

Soit $H < G$.

Alors H est pur dans G si et seulement si H est net et vertical dans G.

Démonstration

La nécessité

Nous savons déjà que la netteté est un cas particulier de la pureté.

Reste donc la verticalité de H dans G à montrer.

La pureté de H dans G entraîne que $pH \cap p^{i+1}G < H \cap pG \cap p^{i+1}G$

$= H \cap p^{i+1}G = p^{i+1}H = pp^{i}H = p(H \cap p^{i}G)$ pour tout $i \geq 1$.

La suffisance

En procédant par induction sur i,

le cas i = 1 est vérifié par la netteté de H dans G.

Supposons que $H \cap p^iG = p^iH$ pour $i \geq 1$.

Ainsi $H \cap p^{i+1}G = H \cap pG \cap p^{i+1}G = pH \cap p^{i+1}G$ car H est net dans G

$= p(H \cap p^iG)$ car H est vertical dans G

$= pp^iH$ par l'hypothèse d'induction

$= p^{i+1}H$. ▩

Ce dernier théorème permettra non seulement la facilité et la rapidité de certaines démonstrations, mais il sera fréquemment utilisé.

Voici maintenant un résultat qui s'avérera bientôt d'une importance capitale par son utilité. En premier lieu, le lemme servant à le démontrer.

Lemme 4.2.27

Soit $H < G$ et $n \geq 1$ tel que $H \cap p^nG$ est vertical dans p^nG

et $pH \cap p^{i+1}G = p(H \cap p^iG)$ pour $i \in \{1, ..., n\}$.

Alors H est vertical dans G.

Démonstration

Il s'agit de montrer que le résultat prévaut également pour tous les entiers plus grands que n i.e. $pH \cap p^{i+n+1}G = p(H \cap p^{i+n}G)$ pour tout $i \geq 1$.

Ainsi $pH \cap p^{i+n+1}G = pH \cap p^{n+1}G \cap p^{i+1}(p^nG)$

$= p(H \cap p^nG) \cap p^{i+1}(p^nG)$ car le résultat prévaut pour i = n

$= p[(H \cap p^nG) \cap p^i(p^nG)]$ puisque $H \cap p^nG$ est vertical dans p^nG

$= p[H \cap p^nG \cap p^{i+n}G] = p[H \cap p^{i+n}G]$ pour tout $i \geq 1$. ▩

<u>Proposition 4.2.28</u>

Soit A un sous-groupe pur dans p^nG où $n \geq 1$

et H/A un sous-groupe p^nG/A-haut dans G/A.

Alors H est pur dans G.

<u>Démonstration</u>

Puisque A est net dans p^nG, alors la proposition 2.2.16 nous permet de conclure que H est net dans G également et que $G[p] = H[p] + (p^nG)[p]$.

Ainsi, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $(H + p^iG)[p] < G[p] = H[p] + (p^iG)[p]$

i.e. $(H + p^iG)[p] = H[p] + (p^iG)[p]$ ou encore par le lemme 4.1.6,

$pH \cap p^{i+1}G = p(H \cap p^iG)$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$.

Étant donné que $H \cap p^nG = A$ par 1.1.53, la pureté de $H \cap p^nG$ dans p^nG entraîne sa verticalité dans p^nG par 4.2.26.

H est donc vertical dans G par le lemme ci-haut.

Enfin, par 4.2.26 à nouveau, la combinaison de la netteté et de la verticalité de H dans G nous confirme sa pureté dans celui-ci. ⊠

À l'aide des deux résultats suivants, nous allons montrer une extension intéressante du théorème 2.2.14.

<u>Proposition 4.2.29</u>

Soit V un sous-groupe vertical dans G.

Alors $V^{-}[p] = (V[p])^{-}$.

<u>Démonstration</u>

$V^{-}[p] = [\cap_{i \geq 1}(V + p^iG)][p] = \cap_{i \geq 1} [(V + p^iG)[p]]$ par 1.1.26

$= \cap_{i \geq 1} [V[p] + (p^iG)[p]]$ car V est vertical dans G

$= (V[p])^{-}$ par la topologie induite sur le socle V[p]. ⊠

<u>Proposition 4.2.30</u>

Soit A un sous-groupe pur dans G.

Alors A est dense dans G si et seulement si A[p] est dense dans G[p].

<u>Démonstration</u>

<u>La nécessité</u>

Puisque A est également vertical dans G, la densité de A dans G entraîne que $G[p] = (A + p^iG)[p] = A[p] + (p^iG)[p]$ pour tout $i \geq 1$.

<u>La suffisance</u>

$A^{-}[p] = (A[p])^{-} = G[p]$ par la proposition qui précède

i.e. que A^{-} est essentiel dans G.

Ainsi la netteté de A dans G implique sa densité dans G

avec le concours de 2.2.13. ■

<u>Proposition 4.2.31</u>

Soit S un sous-socle dense de G

et $M < G$ maximal par rapport au fait que $M[p] = S$.

Alors M est pur et dense dans G.

<u>Démonstration</u>

En premier lieu,

la maximalité de M dans G nous assure de sa netteté par 2.2.14.

Ensuite, la densité du socle de M dans celui de G

nous permet de conclure à la verticalité de M dans G par 4.2.4.

La netteté et la verticalité combinées de M provoquent sa pureté dans G.

Enfin, 4.2.30 nous confirme la densité de M dans G. ■

Proposition 4.2.32

Soit K un sous-groupe de $p^{\omega}G$ et H un sous-groupe K-haut dans G. Alors H est pur et dense dans G.

Démonstration

En premier lieu, montrons que H[p] est dense dans G[p].

G[p] = H[p] + K[p] par 2.2.17

$<$ H[p] + (p^{ω}G)[p] car K $<$ p^{ω}G

$<$ H[p] + (p^{i}G)[p]

i.e. G[p] = H[p] + (p^{i}G)[p] pour tout $i \geq 1$.

Ensuite, soit S = H[p].

Montrons que H est maximal par rapport au fait que H[p] = S.

Soit E une extension de H dans G tel que E[p] = S.

Ainsi $(E \cap K)[p] = E[p] \cap K[p] = H[p] \cap K[p] = (H \cap K)[p]$

= 0 car H est K-haut.

Puisque $E \cap K = 0$ par 1.1.21,

alors la maximalité de H implique que E = H.

La proposition précédente entraîne donc la conclusion désirée. ▣

Nous terminons cette seconde section avec la propriété de purification concernant les sous-socles denses de G.

Proposition 4.2.33

Soit S un sous-socle dense de G et H $<$ G tel que H[p] $<$ S. Alors H possède un prolongement pur et dense dans G dont le socle est S.

Démonstration

Le sous-groupe $H + S$ possède une enveloppe nette N dans G

tel que $(H + S)[p] = N[p]$ par 2.2.19.

Montrons que $(H + S)[p] = S$.

Soit $h + s \in (H + S)[p]$ où $h \in H$ et $s \in S$.

Ainsi $ph + ps = ph = 0$ d'où $h \in H[p] < S$ donc $h + s \in S$.

Alors $N[p] = S$.

Puisque $N[p]$ est dense dans $G[p]$ alors N est vertical dans G par 4.2.4,

engendrant alors la pureté de N dans G.

Enfin, N est dense dans G par 4.2.30. ▪

Corollaire 4.2.34

Tout sous-socle dense de G supporte un sous-groupe pur dans G.

3. LA VERTICALITÉ DANS LES SOUS-GROUPES CYCLIQUES

Cette section a plusieurs vocations. D'abord, elle examinera les conditions dans lesquelles un sous-groupe cyclique est vertical dans G.

Grâce à ces résultats, nous serons alors en mesure de déduire en particulier que l'intersection d'une famille quelconque de sous-groupes cycliques verticaux dans G est verticale dans G. Dans la même veine, elle montrera que la somme de deux sous-groupes cycliques verticaux dans G n'est pas nécessairement verticale dans G.

Ensuite, elle déterminera les groupes dans lesquels tous les sous-groupes sont verticaux. Nous savons déjà que les socles et les groupes divisibles font partie de ceux-ci. C'est grâce à la construction d'un sous-groupe cyclique non vertical que nous parviendrons à ces résultats, d'où l'intérêt particulier accordé à l'étude de la verticalité dans les sous-groupes cycliques.

Enfin, deux contre-exemples concernant la verticalité seront dévoilés.

Ce sont l'ordre et la hauteur de l'élément engendrant le sous-groupe cyclique qui déterminent en partie la verticalité de celui-ci dans G.

Proposition 4.3.1

Soit $g \in G$ tel que $h(g) = \infty$.

Alors $\langle g \rangle$ est vertical dans G.

Démonstration

Étant donné que $<g> \, < p^{\omega}G$, le corollaire 4.2.20
nous permet de conclure à la verticalité de $<g>$ dans G. $\boxtimes$

En ce qui concerne les éléments dont la hauteur est finie, les deux résultats suivants nous aideront à parvenir au but.

Proposition 4.3.2

Soit $g \in G$ tel que $<g>$ est vertical dans G et $n \geq 1$.
Alors $<p^n g>$ est vertical dans G.

Démonstration

En clair, $<p^n g>$ est essentiel dans $<g>$ puisque $(<p^n g>)[p] = (<g>)[p]$.
Le corollaire 4.2.6 entraîne alors que $<p^n g>$ est vertical dans $<g>$. $\boxtimes$

Lemme 4.3.3

Soit $g \in G$ tel que $<g>$ est vertical dans G et $n \geq 0$.
Alors pour tout $i \geq 0$, $h(p^i g) > i + n$ si et seulement si $h(g) > n$.

Démonstration

La suffisance est évidente.
Concernant la nécessité, le cas $i = 0$ est évidemment vérifié.
Supposons par induction que le résultat est valable pour $i \geq 0$.
Soit $h(p^{i+1}g) > i + 1 + n$.
Puisque $p^{i+1}g \in p<g> \cap \, p^{i+2+n}G$, la verticalité de $<g>$ dans G implique que $p^{i+1}g = pg_i$ où $g_i \in \, <g> \cap \, p^{i+1+n}G$.
Ainsi $g_i = p^i g \in p^{i+1+n}G$ i.e. $h(p^i g) > i + n$.
L'hypothèse d'induction nous permet alors de conclure que $h(g) > n$. $\boxtimes$

<u>Théorème 4.3.4</u>

Soit $g \in G$ tel que $o(g) = p^{m+1}$ où $m \geq 0$ et $h(g) = n < \infty$ où $n \geq 0$.

Alors $<g>$ est vertical dans G si et seulement si $h(p^m g) = m + n$.

<u>Démonstration</u>

<u>La nécessité</u>

Supposons que $h(p^m g) > m + n$.

Le lemme précédent nous indique alors que $h(g) > n$,

ce qui entre en contradiction avec l'hypothèse de départ.

<u>La suffisance</u>

Puisque $h(g) = n$, il existe $g_n \in G$ tel que $g = p^n g_n$.

Il est clair que $h(g_n) = 0$ autrement $h(g) > n$.

Également, $o(g_n) = p^{m+n+1}$ et $h(p^{m+n} g_n) = h(p^m p^n g_n) = h(p^m g) = m + n$.

La proposition 3.2.4 entraîne alors que $<g_n>$ est pur donc vertical dans G.

Enfin, 4.3.2 implique que $<p^n g_n> = <g>$ est vertical dans G. ▩

Mentionnons que la verticalité d'un sous-groupe cyclique $<g>$ lorsque g est élément d'un socle est également assurée par le corollaire 4.2.2.

Nous allons maintenant examiner l'intersection et la somme de sous-groupes cycliques verticaux dans G.

<u>Proposition 4.3.5</u>

Soit $g \in G$ tel que $<g>$ est vertical dans G.

Alors tout sous-groupe de $<g>$ est vertical dans G.

Démonstration

Soit H un sous-groupe de $\langle g \rangle$ et $o(g) = p^n$ où $n \geq 0$.

La proposition 1.1.31 nous indique que $H = \langle p^m g \rangle$ où $m \in \{0, ..., n\}$.

Ainsi H est vertical dans G par 4.3.2. ■

Corollaire 4.3.6

Soit H un sous-groupe de G et $g \in G$ tel que $\langle g \rangle$ est vertical dans G.

Alors $H \cap \langle g \rangle$ est vertical dans G.

Proposition 4.3.7

L'intersection d'une famille quelconque de sous-groupes cycliques verticaux dans G est verticale dans G.

En fait, il suffit qu'un seul de ces sous-groupes soit vertical dans G afin que l'intersection entière soit verticale dans G.

Proposition 4.3.8

La somme de deux sous-groupes cycliques verticaux dans G n'est pas forcément verticale dans G.

Démonstration

Soit P le groupe de Prüfer avec p = 2 : $\langle x_i \mid 2x_0 = 0 \text{ et } 2^i x_i = x_0 \rangle$.

Posons $y = x_2 - 2x_3$ et $z = x_2 + 2x_3$.

Nous avons $2y = 2x_2 - 2^2x_3$ et $2^2y = 2^2x_2 - 2^3x_3 = x_0 - x_0 = 0$ i.e. $o(y) = 2^2$.

De même, $2z = 2x_2 + 2^2x_3$ et $2^2z = 2^2x_2 + 2^3x_3 = x_0 + x_0 = 2x_0 = 0$

d'où $o(z) = 2^2$ également.

En consultant la définition 1.2.26,

il est aisé de constater que $h(y) = h(z) = 0$

et $h(2y) = h(2z) = 1$ grâce à 1.1.38.

Par conséquent, la proposition 4.3.4 entraîne que

$\langle y \rangle$ et $\langle z \rangle$ sont tous deux verticaux dans P.

Il s'agit à présent de dénicher un élément appartenant à

$2(\langle y \rangle + \langle z \rangle) \cap 2^{n+1}P$ mais pas à $2[(\langle y \rangle + \langle z \rangle) \cap 2^{n}P]$

pour un certain $n \geq 1$.

Nous avons $2(y + z) = 2(x_2 - 2x_3 + x_2 + 2x_3) = 2(2x_2) = 2^2x_2 = x_0 \in 2^{n+1}P$

pour tout $n \geq 1$ puisque $h(x_0) = \infty$.

Supposons que $x_0 \in 2[(\langle y \rangle + \langle z \rangle) \cap 2^2P]$

i.e. qu'il existe $i, j \geq 0$ tel que $2^iy + 2^jz \in 2^2P$ et $x_0 = 2(2^iy + 2^jz)$.

Il est aisé de constater que $i = j = 0$ est la seule solution possible afin que

$x_0 \in 2(\langle y \rangle + \langle z \rangle)$.

Toutefois, ces valeurs engendrent l'élément

$2^0y + 2^0z = x_2 - 2x_3 + x_2 + 2x_3 = 2x_2 \notin 2^2P$ car $h(2x_2) = 1$.

Conséquemment, $\langle y \rangle + \langle z \rangle$ n'est pas vertical dans G. $\boxtimes$

Nous allons maintenant circonscrire de façon précise les groupes dans lesquels tous les sous-groupes sont verticaux. En premier lieu, analysons le cas des groupes non bornés à l'aide du résultat suivant.

Proposition 4.3.9

Soit V un sous-groupe vertical dans G.

Alors $V < p^{\omega}G$ si et seulement si $V[p] < p^{\omega}G$.

Démonstration

La nécessité allant de soi, attardons-nous à la suffisance.

En vertu de 1.1.20, il suffit de montrer que

$V[p^n] < p^{\omega}G$ pour tout $n \geq 1$ en procédant par induction sur n.

Le résultat étant déjà vérifié pour $n = 1$,

supposons que $V[p^n] < p^{\omega}G$ pour $n \geq 1$.

Soit $v \in V[p^{n+1}]$.

Ainsi $pv \in V[p^n]$ donc $pv \in p^{\omega}G$ par l'hypothèse d'induction.

Conséquemment, il existe $g_i \in G$ tel que $pv = p^{i+1}g_i$ pour tout $i \geq 0$.

Alors $v - p^ig_i \in (V + p^iG)[p]$; la verticalité de V dans G confirme donc l'existence de $v_i \in V[p]$, $p^ix_i \in (p^iG)[p]$ où $x_i \in G$, tel que $v - p^ig_i = v_i + p^ix_i$.

Enfin, puisque $v_i \in p^\omega G$ par l'hypothèse de départ,

$v = v_i + p^i(g_i + x_i) \in p^iG$ pour tout $i \geq 0$, d'où $v \in p^\omega G$. ▩

Proposition 4.3.10

Soit K un sous-groupe non borné de G.

Alors tout sous-groupe de K est vertical dans G si et seulement si $K < p^\omega G$.

Démonstration

La suffisance est garantie par le corollaire 4.2.20.

Quant à la nécessité, il suffit de montrer que

$K[p] < p^\omega G$ en vertu de la proposition précédente,

puisque K est vertical dans G en particulier.

Si tel n'est pas le cas,

alors il existe un élément k_n de hauteur finie n dans K[p].

À l'aide de cet élément, nous allons construire un sous-groupe cyclique de K qui n'est pas vertical dans G.

Puisque K n'est pas borné, il existe $k_3 \in K$ tel que $o(k_3) = p^{n+3}$ par 1.1.35.

Considérons l'élément $x = p^{n+1}k_3 + k_n \in K$

et montrons que $<x>$ n'est pas vertical dans G.

En premier lieu, nous avons $o(x) = p^2$ et $h(x) = \min\{h(p^{n+1}k_3), h(k_n)\}$

$= h(k_n) = n$ en raison de 1.1.38 car $h(p^{n+1}k_3) \geq n + 1$.

Selon la proposition 4.3.4,

$<x>$ est vertical dans G si et seulement si $h(px) = n + 1$.

Or $px = p^{n+2}k_3 \in p^{n+2}G$; $<x>$ n'est donc pas vertical dans G. ▩

Grâce à la définition 1.1.39, nous obtenons une première caractérisation.

Théorème 4.3.11

Soit G un groupe non borné.

Alors tous les sous-groupes de G sont verticaux dans G si et seulement si G est divisible.

En ce qui concerne maintenant les groupes bornés, nous savons déjà par 4.2.2 que tous les sous-groupes d'un groupe borné par p sont verticaux dans celui-ci. Néanmoins, ce qui peut être a priori moins évident, c'est qu'il en va de même pour p^2.

Proposition 4.3.12

Soit G un groupe borné par p^2.

Alors tous les sous-groupes de G sont verticaux dans G.

Démonstration

Soit H un sous-groupe de G.

Simplement, $pH \cap p^{i+1}G < pH \cap p^2G$ pour tout $i \geq 1$

$= pH \cap 0 = 0 < p(H \cap p^iG)$. ∎

Corollaire 4.3.13

Soit A un sous-groupe pur de G tel que A est borné par p^n où $n \leq 2$.

Alors tous les sous-groupes de A sont verticaux dans G.

Démonstration

Que la borne de A soit p ou p^2, nous pouvons conclure que tous les sous-groupes de A sont verticaux dans A d'une part, et verticaux dans G d'autre part en vertu de 4.2.7. ∎

Cependant, qu'en est-il des groupes dont la borne est p^n où $n \geq 3$? Un petit lemme avant tout.

Lemme 4.3.14

Soit B, $H < G$ tel que B est borné par p^{n+1} où $n \geq 0$.

Alors $(H + p^nB)[p] = H[p] + (p^nB)[p]$.

Démonstration

Soit $h + p^nb \in (H + p^nB)[p]$ où $h \in H$ et $b \in B$.

Ainsi $ph + p^{n+1}b = ph + 0 = ph = 0$ d'où $h \in H[p]$.

Puisque $p^nB = (p^nB)[p]$ alors $h + p^nb \in H[p] + (p^nB)[p]$. ▣

Théorème 4.3.15

Soit G un groupe borné par p^{n+2} où $n \geq 1$.

Alors tous les sous-groupes de G sont verticaux dans G

si et seulement si $G[p] = (p^nG)[p]$.

Démonstration

La nécessité

Supposons que $G[p] \neq (p^nG)[p]$ i.e. qu'il existe $g_p \in G[p]$ tel que $h(g_p) < n$.

Ensuite, soit $g \in G$ tel que $o(g) = p^{n+2}$;

un tel élément existe forcément puisque la borne de G est p^{n+2}.

Enfin, posons $x = p^ng + g_p$ et montrons que $<x>$ n'est pas vertical dans G.

En premier lieu, il est aisé de constater que $o(x) = p^2$ et de plus,

$h(x) = h(p^ng + g_p) = \min\{h(p^ng), h(g_p)\} = h(g_p) < n$ par 1.1.38.

Toutes les hypothèses sont alors en place

afin d'utiliser la proposition 4.3.4 à nouveau.

Or $h(px) \geq n + 1$ puisque $px \in p^{n+1}G$.

$<x>$ ne peut donc pas être vertical dans G.

La suffisance

Soit H un sous-groupe de G.

Les trois cas suivants seront étudiés : $i \in \{1, ..., n\}$, $i = n + 1$ et $i > n + 1$.

Soit $i \in \{1, ..., n\}$.

Ainsi $(H + p^iG)[p] < G[p] = (p^nG)[p] < (p^iG)[p]$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$

$< H[p] + (p^iG)[p]$.

Quant à lui, le cas où $i = n + 1$ est vérifié par le lemme qui précède.

Enfin, si $i > n + 1$ alors $(H + p^iG)[p] < (H + p^{n+2}G)[p] = (H + 0)[p] = H[p]$

$< H[p] + (p^iG)[p]$. ■

Corollaire 4.3.16

Soit A un sous-groupe pur dans G tel que A est borné par p^{n+2} où $n \geq 1$.

Alors tous les sous-groupes de A sont verticaux dans G

si et seulement si $A[p] = (p^nA)[p]$.

Démonstration

La nécessité

Supposons que $A[p] \neq (p^nA)[p]$.

Alors A possède un sous-groupe non vertical dans A

par le théorème précédent.

En raison de 4.2.9, ce sous-groupe n'est pas vertical dans G non plus.

La suffisance

Soit H un sous-groupe de A.

4.3.15 permet de déduire que H est vertical dans A,

d'où la verticalité de H dans G par 4.2.7. ■

En consultant la référence bibliographique [17], il est possible d'effectuer un lien intéressant.

Proposition 4.3.17

Tous les sous-groupes de G sont verticaux dans G si et seulement si tous les sous-groupes nets dans G sont purs dans G.

Démonstration

La nécessité

En particulier, les sous-groupes nets dans G sont verticaux dans celui-ci, entraînant ainsi leur pureté dans G.

La suffisance

Soit H un sous-groupe de G.

H possède un prolongement N net dans G tel que H[p] = N[p] par 2.2.19.

H étant alors essentiel dans N et N pur dans G, les résultats 4.2.6 et 4.2.7 provoquent la verticalité de H dans G. ⊠

Étant donné l'équivalence entre les groupes dont tous les sous-groupes sont verticaux et ceux dont tous les sous-groupes nets sont purs, il est facile d'établir une correspondance entre les conditions données par K. Simauti dans [17] et celles qui se trouvent dans les théorèmes 4.3.11 et 4.3.15.

En terminant cette section, revenons en arrière afin de clarifier deux questions laissées en suspens.

Tout d'abord, nous allons montrer que la verticalité n'est pas une propriété transitive. Il est possible de réaliser cette démonstration à présent que nous sommes certains de l'existence de sous-groupes non verticaux.

<u>Lemme 4.3.18</u>

Soit H un sous-groupe de G.

Alors H est vertical dans H + G[p].

<u>Démonstration</u>

Facilement, $pH \cap p^{i+1}(H + G[p]) = pH \cap p^{i+1}H = p^{i+1}H = pp^iH = p[H \cap p^iH]$

$= p[H \cap p^i(H + G[p])]$ pour tout $i \geq 1$. ▧

<u>Proposition 4.3.19</u>

La verticalité n'est pas une propriété transitive.

<u>Démonstration</u>

Soit le groupe de Prüfer $P = \langle x_i \mid px_0 = 0 \text{ et } p^ix_i = x_0\rangle$.

Étant non borné et réduit,

P possède forcément un sous-groupe non vertical par 4.3.11.

En fait, aucun des $\langle x_i\rangle$ où $i \geq 1$ n'est vertical dans G.

Effectivement, $h(p^ix_i) = h(x_0) = \infty$ pour tout $i \geq 1$,

empêchant ainsi la verticalité de ces sous-groupes cycliques dans P

en raison du théorème 4.3.4.

Or $\langle x_i\rangle$ est vertical dans $\langle x_i\rangle + P[p]$ par le lemme précédent

et $\langle x_i\rangle + P[p]$ est vertical dans P par 4.2.6

puisque $\langle x_i\rangle + P[p]$ est essentiel dans P, pour tout $i \geq 1$. ▧

Enfin, achevons avec ce dernier résultat.

<u>Proposition 4.3.20</u>

La verticalité d'un sous-groupe V dans G n'entraîne pas celle de $V \cap p^\omega G$ dans $p^\omega G$.

Démonstration

Soit $G = D \oplus R$ où $D = \text{div}(G) \neq 0$ et $R = \text{réd}(G) \neq 0$.

Supposons que R est non séparable i.e. que $p^{\omega}R \neq 0$.

Étant donné que $p^{\omega}G = D \oplus p^{\omega}R$ par 3.1.20, nous déduisons que $p^{\omega}G$ n'est pas divisible par 2.3.5 et qu'il n'est pas non plus borné.

Effectivement, s'il existe $n \geq 0$ tel que $p^n p^{\omega}G = 0$,

alors $D < D \oplus p^n p^{\omega}R = p^n D \oplus p^n p^{\omega}R$ car D est divisible

$p^n(D \oplus p^{\omega}R) = p^n p^{\omega}G = 0$ d'où $D = 0$,

contredisant ainsi l'hypothèse de départ.

Conséquemment, le théorème 4.3.11 nous assure de l'existence d'un sous-groupe H non vertical dans $p^{\omega}G$.

Or H est vertical dans G par 4.2.20

tandis que $H \cap p^{\omega}G = H$ ne l'est pas dans $p^{\omega}G$. ⌘

4. LES EXTENSIONS ET PROLONGEMENTS OPTIMAUX

À présent, examinons les extensions et les prolongements optimaux concernant les sous-groupes verticaux. Tout d'abord les extensions.

Parmi les extensions possibles, examinons du même coup celles qui sont plus restrictives, c'est-à-dire où le socle de l'extension est égal à celui du sous-groupe dont elle est l'extension. Il est clair que tout sous-groupe est sa propre extension verticale minimale dans G.
De plus, les socles des deux protagonistes sont égaux.

Proposition 4.4.1
Tout sous-groupe de G possède une extension verticale maximale dans G.

Démonstration
Soit $V < G$ et $Z = \{E < G \mid V \text{ est vertical dans } E\}$.
Nous savons que $Z \neq \varnothing$ puisque $V \in Z$.
Soit $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ une chaîne d'éléments dans Z.
Montrons que $M = \cup_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda \in Z$.
Clairement $V < M < G$ car $V < E_\lambda < G$ pour tout $\lambda \in \Lambda$.
De plus, puisque V est vertical dans E_λ pour tout $\lambda \in \Lambda$,
la proposition 1.1.50 nous permet de conclure que $(V + p^iM)[p]$
$= (V + p^i \cup_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda)[p] = (V + \cup_{\lambda \in \Lambda} p^iE_\lambda)[p] = [\cup_{\lambda \in \Lambda} (V + p^iE_\lambda)][p]$
$= \cup_{\lambda \in \Lambda} (V + p^iE_\lambda)[p] = \cup_{\lambda \in \Lambda} [V[p] + (p^iE_\lambda)[p]] = V[p] + \cup_{\lambda \in \Lambda} (p^iE_\lambda)[p]$
$= V[p] + (\cup_{\lambda \in \Lambda} p^iE_\lambda)[p] = V[p] + (p^i \cup_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda)[p]$
$= V[p] + (p^iM)[p]$ pour tout $i \geq 1$, d'où la verticalité de V dans M.
Z possède donc un élément maximal par le lemme de Zorn. ⊠

Proposition 4.4.2

Toute extension verticale maximale de G est essentielle dans G.

Démonstration

Soit M une extension verticale maximale de V dans G.

Soit $g \in G[p]$.

Puisque V est vertical dans M, alors $[V + p^i(M + \langle g \rangle)][p] = [V + p^iM][p] =$

$V[p] + (p^iM)[p] < V[p] + [p^i(M + \langle g \rangle)][p]$ pour tout $i \geq 1$.

Par conséquent, V est vertical dans $M + \langle g \rangle$.

Cependant, la maximalité de M dans G nous permet alors de conclure que

$M + \langle g \rangle = M$ d'où $g \in M[p]$; M est essentiel dans G. ■

Qu'en est-il de l'extension verticale maximale d'un sous-groupe lorsque l'on impose l'égalité des socles entre le sous-groupe en question et son extension?

Proposition 4.4.3

Soit N un prolongement net de H dans G tel que $N[p] = H[p]$.

Alors N est une extension verticale maximale de H dans G

tel que $N[p] = H[p]$.

Démonstration

Soit E une extension verticale de H dans G contenant N

tel que $E[p] = H[p]$.

Ainsi $E[p] = N[p]$ et la netteté de N dans G entraîne celle de N dans E

par 2.2.3, d'où $E = N$ par 2.2.11. ■

Corollaire 4.4.4

Tout sous-groupe H de G possède une extension verticale maximale M

dans G tel que $H[p] = M[p]$.

Démonstration

H possède une enveloppe nette N dans G tel que H[p] = N[p] par 2.2.19. ▩

Concernant les prolongements optimaux, il va sans dire que G est le contenant vertical de tous ses sous-groupes alors que tout sous-socle est sa propre enveloppe verticale. Toutefois, 4.2.5 entraîne qu'un sous-groupe H de G possédant un prolongement vertical dans lequel il est essentiel est vertical dans G. Comme il existe des sous-groupes qui ne sont pas verticaux dans G, l'existence d'un tel prolongement pour un sous-groupe H de G n'est nullement garantie. Néanmoins, nous obtenons le résultat qui suit après le lemme que voici.

Lemme 4.4.5

L'union d'une chaîne quelconque de sous-groupes verticaux dans G est verticale dans G.

Démonstration

Soit $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ une chaîne quelconque de sous-groupes verticaux dans G.

Alors $p(\cup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda) \cap p^{i+1}G = (\cup_{\lambda \in \Lambda} pV_\lambda) \cap p^{i+1}G = \cup_{\lambda \in \Lambda} (pV_\lambda \cap p^{i+1}G)$

$= \cup_{\lambda \in \Lambda} [p(V_\lambda \cap p^iG)]$ car V_λ est vertical dans G pour tout $\lambda \in \Lambda$

$= p[\cup_{\lambda \in \Lambda} (V_\lambda \cap p^iG)] = p[(\cup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda) \cap p^iG]$ pour tout $i \geq 1$. ▩

Proposition 4.4.6

Tout sous-groupe vertical dans G possède un contenant vertical dans G dans lequel il est essentiel.

Démonstration

Soit V un sous-groupe vertical dans G

et $Z = \{L < G \mid V < L$, L est vertical dans G et $L[p] = V[p]\}$.

$Z \neq \varnothing$ puisque $V \in Z$.

Soit $\{L_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ une chaîne de prolongements dans $\mathcal{Z}$.

Montrons que $C = \cup_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda \in \mathcal{Z}$.

Clairement, $V < C < G$ car $V < L_\lambda < G$ pour tout $\lambda \in \Lambda$.

Qui plus est, $C[p] = (\cup_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda)[p] = \cup_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda[p] = \cup_{\lambda \in \Lambda} V[p]$

$= V[p]$ car $L_\lambda[p] = V[p]$ pour tout $\lambda \in \Lambda$.

Enfin, le lemme précédent nous confirme que C est vertical dans G.

Par le lemme de Zorn, $\mathcal{Z}$ possède donc un élément maximal. ▣

Corollaire 4.4.7

Tout sous-socle de G est le support d'un contenant vertical dans G.

Démonstration

Corollaire 4.2.2. ▣

Quant à l'enveloppe verticale d'un sous-groupe H, elle est forcément égale à H si celui-ci est essentiel dans son enveloppe à cause de 4.2.5. Autrement, nous entamerons la question des enveloppes verticales dans le dernier chapitre.

CHAPITRE V

LA VERTICALITÉ MAXIMALE

Ce cinquième chapitre a pour but d'étudier la propriété de verticalité maximale dans son ensemble et en rapport avec la pureté. Précisément, nous rechercherons les sous-groupes verticaux maximaux qui sont purs dans G. Également, nous tenterons de découvrir les groupes dans lesquels la verticalité maximale et la pureté sont des propriétés équivalentes.

1. LES PROPRIÉTÉS DE LA VERTICALITÉ MAXIMALE

Cette première partie se consacre à la définition et à l'identification des sous-groupes verticaux maximaux dans G ainsi que leurs propriétés.

Définition 5.1.1

W est un sous-groupe vertical maximal dans G si et seulement si

- W est un sous-groupe vertical dans G;
- pour tout V vertical dans G tel que $W < V$ et $V[p] = W[p]$, alors $V = W$.

En d'autres termes, W est un *plus grand* sous-groupe vertical dans G parmi tous les sous-groupes verticaux dans G possédant le même socle que lui.

En guise d'introduction à la matière, il importe d'énoncer le résultat qui est à l'origine de presque toute l'étude qui va suivre dans ce chapitre.

Théorème 5.1.2

Tout sous-groupe pur dans G est vertical maximal dans G.

Démonstration

Soit A un sous-groupe pur dans G.

Nous savons que A est à la fois net et vertical dans G.

Soit V un sous-groupe vertical dans G tel que $A < V$ et $V[p] = A[p]$.
A étant alors net dans V par 2.2.3, V = A par 2.2.11. ∎

Cependant, soyons patient, car c'est uniquement au prochain chapitre que nous constaterons l'existence d'un sous-groupe vertical maximal qui n'est pas pur.

À présent, montrons le résultat homologue à celui démontré au théorème 4.2.3 grâce à la proposition suivante.

Proposition 5.1.3
Tout contenant vertical C d'un sous-groupe H de G
tel que $C[p] = H[p]$ est vertical maximal dans G.

Démonstration
Soit V un sous-groupe vertical dans G tel que $C < V$ et $V[p] = C[p]$.
Puisque H et V partagent ainsi le même socle,
la maximalité de C entraîne alors que V = C. ∎

C'est en combinant ce qui précède avec les propositions 4.2.2 et 4.4.6 que nous parvenons à ce qui suit.

Théorème 5.1.4
Tout sous-socle de G est le support d'un sous-groupe vertical maximal dans G.

Il est à noter que nous aurions pu utiliser le lemme de Zorn afin de parvenir à ce résultat.

Corollaire 5.1.5

Tous les sous-socles de G sont verticaux maximaux dans $G[p]$.

Démonstration

Soit S un sous-socle de G.

Alors S supporte un sous-groupe vertical maximal W dans $G[p]$

par le théorème précédent.

Or $S = W[p] = W$. ▩

Proposition 5.1.6

Soit $W < A < G$ tel que W est un sous-groupe vertical maximal dans G

et A un sous-groupe pur dans G.

Alors W est vertical maximal dans A.

Démonstration

La proposition 4.2.9 nous assure tout d'abord que W est vertical dans A.

Soit V vertical dans A tel que $W < V$ et $V[p] = W[p]$.

Ainsi V est vertical dans G par 4.2.7,

donc $V = W$ par la maximalité de W dans G. ▩

Lemme 5.1.7

Soit V un sous-groupe vertical dans G, $n \geq 1$

et $g \in p^nG$ tel que $(V + \langle g \rangle) \cap p^nG$ est vertical dans p^nG.

Alors $V + \langle g \rangle$ est vertical dans G.

Démonstration

Grâce à la proposition 4.2.27, il s'agit seulement de montrer que

$(V + \langle g \rangle + p^iG)[p] = (V + \langle g \rangle)[p] + (p^iG)[p]$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$

par 4.1.6.

Ainsi $(V + \langle g \rangle + p^iG)[p] < (V + p^nG + p^iG)[p]$ car $g \in p^nG$

$= (V + p^iG)[p]$ car $i \leq n$

$= V[p] + (p^iG)[p]$ car V est vertical dans G

$< (V + \langle g\rangle)[p] + (p^iG)[p]$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$. ▩

Proposition 5.1.8

Soit W un sous-groupe vertical maximal dans G et $n \geq 1$.

Alors $W \cap p^nG$ est vertical maximal dans p^nG.

Démonstration

Soit V vertical dans p^nG tel que $W \cap p^nG < V$ et $V[p] = (W \cap p^nG)[p]$.

Montrons que le socle de $V/(W \cap p^nG)$ est nul.

Soit $v + W \cap p^nG \in (V/(W \cap p^nG))[p]$ où $v \in V$.

Supposons que $pv \notin pW$, plus précisément $pv \in W \setminus pW$.

Alors $(W + \langle v\rangle)[p] = W[p]$ de même que $v \notin W$ par 1.1.36.

Démontrons la verticalité de $(W + \langle v\rangle) \cap p^nG$ dans p^nG.

Ainsi $[(W + \langle v\rangle) \cap p^nG + p^ip^nG][p]$

$= [(W \cap p^nG) + \langle v\rangle + p^ip^nG][p]$ car $v \in p^nG$

$< (V + p^ip^nG)[p]$ car $(W \cap p^nG) + \langle v\rangle < V$

$= V[p] + (p^ip^nG)[p]$ car V est vertical dans p^nG

$= (W \cap p^nG)[p] + (p^ip^nG)[p]$

$< [(W \cap p^nG) + \langle v\rangle][p] + (p^ip^nG)[p]$

$= [(W + \langle v\rangle) \cap p^nG][p] + (p^ip^nG)[p]$ pour tout $i \geq 1$.

Nous sommes alors en présence de toutes les hypothèses nécessaires qui permettent de conclure que $W + \langle v\rangle$ est vertical dans G grâce au lemme précédent.

Cependant, $W + \langle v\rangle$ et W possèdent le même socle donc $W + \langle v\rangle = W$ par la maximalité de W dans G d'où la contradiction induite par $v \in W$.

Conséquemment, $pv \in pW$ et puisque $v \in p^nG$ alors $pv \in pW \cap p^{n+1}G$ $= p(W \cap p^nG)$ i.e. $pv = pw$ où $w \in W \cap p^nG$.

Ceci entraîne que $v - w \in V[p] = (W \cap p^nG)[p]$ i.e. $v \in W \cap p^nG$

d'où la nullité du socle de $V/ W \cap p^nG$ et donc $V = W \cap p^nG$. $\boxtimes$

Le prochain résultat foisonne de corollaires. Également, il sera utile dans plusieurs démonstrations subséquentes. Tout d'abord le lemme suivant.

<u>Lemme 5.1.9</u>

Soit W un sous-groupe vertical maximal dans G et $g \in G$

tel que $pg \in W \setminus pW$.

Alors la hauteur de $g + W$ dans G/W est égale à un entier naturel $n < \infty$.

De plus, $(W + \langle g\rangle + p^iG)[p] = W[p] + (p^iG)[p]$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$

alors que $(W + \langle g\rangle + p^{n+1}G)[p] \neq W[p] + (p^{n+1}G)[p]$.

<u>Démonstration</u>

Étant donné que $pg \in W \setminus pW$ alors $(W + \langle g\rangle)[p] = W[p]$

et $g \notin W$ par 1.1.36.

En premier lieu, la proposition 1.2.24 nous permet d'établir que

la hauteur de $g + W$ dans G/W est finie en montrant que $g \notin W^-$.

Effectivement, supposons que $g \in W^-$.

Alors $W < W + \langle g\rangle < W^-$ entraîne que

$W + \langle g\rangle$ est vertical dans G par 4.2.18.

Toutefois, W est vertical maximal dans G

et possède le même socle que $W + \langle g\rangle$; nous pouvons alors conclure que

$W + \langle g\rangle = W$, d'où la contradiction provoquée par $g \in W$.

Par conséquent, il existe un entier naturel $n < \infty$ tel que $h_{G/W}(g + W) = n$.

En second lieu, montrons que $(W + \langle g\rangle + p^iG)[p]$

$= W[p] + (p^iG)[p]$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$.

La proposition 1.2.23 nous indique que

$g \in W + p^iG$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$.

Ainsi $(W + <g> + p^iG)[p] < (W + W + p^iG + p^iG)[p] = (W + p^iG)[p]$

$= W[p] + (p^iG)[p]$ car W est vertical dans G.

Enfin, établissons que $(W + <g> + p^{n+1}G)[p] \neq W[p] + (p^{n+1}G)[p]$.

Étant donné que $W + <g>$ n'est pas vertical dans G puisque $g \notin W$,

il existe $j > n$ tel que $(W + <g> + p^jG)[p] \neq (W + <g>)[p] + (p^jG)[p]$

$= W[p] + (p^jG)[p]$.

Il existe donc un élément appartenant à $(W + <g> + p^jG)[p]$

mais pas à $W[p] + (p^jG)[p]$.

Soit $x = w_j + p^mg + p^jg_j$ un tel élément où $w_j \in W$, $m \geq 0$ et $g_j \in G$.

Puisque $pg \in W$,

il est clair que $m = 0$ en raison de la verticalité de W dans G.

Ensuite, $x \in (W + <g> + p^{n+1}G)[p]$ également car $p^jG < p^{n+1}G$.

Maintenant, s'il appert que x appartienne aussi à $W[p] + (p^{n+1}G)[p]$,

alors il existe $w_n \in W$ et $g_n \in G$ tel que $w_j + g + p^jg_j = w_n + p^{n+1}g_n$

i.e. $g = w_n - w_j + p^{n+1}(g_n - p^{j-n-1}g_j) \in W + p^{n+1}G$.

Une contradiction est alors dévoilée avec $h_{G/W}(g + W) = n + 1$. ∎

<u>Théorème 5.1.10</u>

Soit W un sous-groupe vertical maximal dans G.

Alors $W \cap pG < (pW)^{-}$.

<u>Démonstration</u>

Soit $w \in (W \cap pG) \backslash pW$, car autrement la preuve est concluante.

Montrons que la hauteur de $w + pW$ dans G/pW est infinie.

Étant donné que $w \in pG$, cette hauteur est au moins unitaire.

Supposons donc que $h_{G\backslash pW}(w + pW) = n + 1$ où $n \geq 0$.

Ainsi il existe $g_n \in G$ tel que $w + pW = p^{n+1}g_n + pW$

i.e. $w = pw_n + p^{n+1}g_n$ où $w_n \in W$.

Posons $x = w_n + p^n g_n$.

Puisque $px \in W \backslash pW$, alors $h_{G/W}(x + W) = m < \infty$ où $m \geq 0$

et $(W + \langle x\rangle + p^{m+1}G)[p] \neq W[p] + (p^{m+1}G)[p]$ par le lemme précédent.

Donc il existe

$w_m + p^i x + p^{m+1}g_m \in (W + \langle x\rangle + p^{m+1}G)[p] \setminus (W[p] + (p^{m+1}G)[p])$

où $w_m \in W$, $g_m \in G$ et $i = 0$ à cause de la verticalité de W dans G.

Conséquemment, $pw_m + px + p^{m+2}g_m = 0$

i.e. $w = -pw_m - p^{m+2}g_m \in pW + p^{m+2}G$.

Alors $h_{G/pW}(w + pW) = n + 1 \geq m + 2$ i.e. $n \geq m + 1$.

Cependant, $x = w_n + p^n g_n$ implique que $h_{G/W}(x + W) = m \geq n$,

ce qui est absurde.

Par conséquent, $h_{G/pW}(w + pW) = \infty$ et $w \in (pW)^-$ par 1.2.24. ☒

Nous pouvons généraliser ce résultat.

__Corollaire 5.1.11__

Soit W un sous-groupe vertical maximal dans G.

Alors $W \cap p^n G < (p^n W)^-$ pour tout $n \geq 1$.

__Démonstration__

En procédant par induction sur n,

le cas n = 1 vient d'être démontré à l'instant.

Supposons que $W \cap p^n G < (p^n W)^-$ pour $n \geq 1$.

Ainsi $W \cap p^{n+1}G = W \cap p^n G \cap p^{n+1}G$

$< (p^n W)^- \cap p^{n+1}G$ par l'hypothèse d'induction

$= \cap_{i \geq n+1}(p^n W + p^i G) \cap p^{n+1}G$ par 1.2.3

$= \cap_{i \geq n+1}[(p^n W + p^i G) \cap p^{n+1}G]$

$= \cap_{i \geq n+1} [(p^nW \cap p^{n+1}G) + p^iG]$ car $p^iG < p^{n+1}G$ pour tout $i \geq n + 1$

$< \cap_{i \geq n+1} [(pW \cap p^{n+1}G) + p^iG]$

$= \cap_{i \geq n+1} [p(W \cap p^nG) + p^iG]$ car W est vertical dans G

$< \cap_{i \geq n+1} [p(p^nW)^- + p^iG]$ par l'hypothèse d'induction

$< \cap_{i \geq n+1} [(p^{n+1}W)^- + p^iG]$ par 1.2.8

$= [(p^{n+1}W)^-]^- = (p^{n+1}W)^-$. ⊠

__Proposition 5.1.12__

Soit F un sous-groupe vertical et fermé dans G.

Alors F est vertical maximal dans G si et seulement si $F \cap pG = (pF)^-$.

__Démonstration__

__La nécessité__

D'une part $F \cap pG < (pF)^-$ par 5.1.10.

D'autre part $(pF)^- < (F \cap pG)^- = F^- \cap pG$ par 1.2.5

$= F \cap pG$ car F est fermé dans G.

__La suffisance__

Soit V un sous-groupe vertical dans G tel que $F < V$ et $V[p] = F[p]$.

Montrons que le socle de (V/F) est nul.

Soit $v + F \in (V/F)[p]$ où $v \in V$.

Ainsi $pv \in F \cap pG = (pF)^-$ i.e. pour tout $i \geq 1$,

il existe $f_i \in F$ et $g_i \in G$ tel que $pv = pf_i + p^{i+1}g_i$.

Par conséquent, $p(v - f_i) = p^{i+1}g_i \in pV \cap p^{i+1}G$

$= p(V \cap p^iG)$ car V est vertical dans G.

Alors $p(v - f_i) = pv_i$ tel que $v_i = p^ix_i$ où $x_i \in G$.

Or $v - f_i - v_i \in V[p] = F[p]$ i.e. $v - f_i - p^ix_i \in F[p]$

d'où $v \in F + p^iG$ pour tout $i \geq 1$.

F étant fermé dans G, $v \in F$ et enfin, $(V/F)[p] = 0$ d'où $V = F$ par 1.1.22. ■

Ce résultat peut également être généralisé.

Corollaire 5.1.13

Soit F un sous-groupe vertical et fermé dans G.

Alors F est vertical maximal dans G si et seulement si

$F \cap p^nG = (p^nF)^-$ pour tout $n \geq 1$.

Démonstration

La suffisance est claire par le cas particulier n = 1 qui a déjà été démontré.

Reste donc la nécessité à prouver.

En procédant par induction sur n, le cas n = 1 est déjà connu.

Supposons que $F \cap p^nG = (p^nF)^-$ pour $n \geq 1$.

Nous savons déjà que $F \cap p^{n+1}G < (p^{n+1}F)^-$ par 5.1.11.

Ainsi $(p^{n+1}F)^- = (p^nF)^- \cap (p^{n+1}F)^-$

$= F \cap p^nG \cap (p^{n+1}F)^-$ par l'hypothèse d'induction

$< F \cap p^nG \cap (p^{n+1}F + p^{n+1}G)$ car $(p^{n+1}F)^- < p^{n+1}F + p^{n+1}G$ en particulier

$= F \cap p^nG \cap p^{n+1}G = F \cap p^{n+1}G$. ■

Analoguement à la fermeture d'un sous-groupe vertical dans G, le résultat suivant prévaut.

Théorème 5.1.14

La fermeture dans G de tout sous-groupe vertical maximal dans G est verticale maximale dans G.

Démonstration

Soit W un sous-groupe vertical maximal dans G.

Puisque W^- est un sous-groupe vertical fermé dans G par 4.2.19,

il s'agit d'utiliser la proposition 5.1.12 et montrer que $W^{-} \cap pG = (pW^{-})^{-}$.
D'une part, $(pW^{-})^{-} < (W^{-} \cap pG)^{-} = W^{-} \cap pG$ par 1.2.5.
D'autre part, $W^{-} \cap pG = (W \cap pG)^{-} < (pW)^{-} < (pW^{-})^{-}$ par 5.1.10. ■

Il importe de réaliser qu'il existe des sous-groupes verticaux maximaux fermés qui ne sont pas purs puisque la fermeture d'un sous-groupe pur n'est généralement pas pure. C'est ce que nous verrons au prochain chapitre. Dans un autre ordre d'idées, puisque $p^{\omega}G$ est la fermeture de 0 qui est vertical maximal dans G, nous obtenons le corollaire qui suit.

Corollaire 5.1.15

$p^{\omega}G$ est un sous-groupe vertical maximal dans G.

Proposition 5.1.16

$p^{\omega}G$ est l'unique sous-groupe vertical maximal dans G supporté par $(p^{\omega}G)[p]$.

Démonstration

Supposons qu'il existe un sous-groupe vertical maximal W dans G possédant le même socle que $p^{\omega}G$.
Ainsi $W[p] < p^{\omega}G$ donc $W < p^{\omega}G$ par la proposition 4.3.9.
Toutefois, puisque W est maximal, alors $W = p^{\omega}G$. ■

Proposition 5.1.17

Soit A un sous-groupe pur dans G.
Alors A^{-} est l'unique sous-groupe vertical maximal dans G supporté par $A^{-}[p]$ et contenant A.

Démonstration

En premier lieu, la combinaison des résultats 5.1.2 et 5.1.14

nous assure que A^{-} est un sous-groupe vertical maximal dans G.

En ce qui concerne le caractère d'unicité, supposons W un sous-groupe vertical maximal dans G tel que $A < W$ et $W[p] = A^{-}[p]$.

La pureté et la verticalité de A et W respectivement dans G entraînent que W/A est vertical dans G/A par 4.2.11.

De plus, A est net dans A^{-} et W à la fois par 2.2.3.

Conséquemment, $(W/A)[p] = (W[p] + A)/A = (A^{-}[p] + A)/A$

$= (A^{-}/A)[p]$ par 2.2.10 i.e. $(W/A)[p] = [p^{\omega}(G/A)][p]$ par 1.2.12.

Ensuite, la proposition 4.3.9 nous permet alors de conclure que

$W/A < p^{\omega}(G/A) = A^{-}/A$ i.e. $W < A^{-}$.

Enfin, par la maximalité de W, $W = A^{-}$. ▣

En terminant cette première partie, voici deux propositions qui seront utiles dans la dernière section de ce chapitre.

Proposition 5.1.18

Soit $G = D \oplus F$ où D est divisible

et W est un sous-groupe vertical maximal dans F.

Alors $D \oplus W$ est vertical maximal dans G.

Démonstration

Puisque F est pur dans G par 3.1.16,

alors W est vertical dans G de même que $D \oplus W$ par 4.2.7 et 4.2.15.

Soit V un sous-groupe vertical dans G tel que $D \oplus W < V$

et $V[p] = (D \oplus W)[p]$.

Puisque $V = D \oplus (V \cap F)$ par 1.1.15, alors $V \cap F$ est vertical dans G par 4.2.15 et donc dans F également par 4.2.9.

Cependant, $W < V \cap F$

et ces deux sous-groupes partagent le même socle.

Effectivement, $(V \cap F)[p] = V[p] \cap F[p] = (D \oplus W)[p] \cap F[p]$

$= [(D \oplus W) \cap F][p] = [(D \cap F) \oplus W][p]$ car $W < F$

$= (0 \oplus W)[p] = W[p]$.

La maximalité de W dans F entraîne alors que $V \cap F = W$.

Par conséquent, $V = D \oplus W$. ▩

<u>Proposition 5.1.19</u>

Soit $G = D \oplus F$ où D est divisible

et W est un sous-groupe vertical maximal fermé dans G.

Alors $W \cap F$ est vertical maximal dans F.

<u>Démonstration</u>

Étant donné que $D < W$ par 1.2.10, alors $W = D \oplus (W \cap F)$ par 1.1.15.

Puisque F est pur dans G par 3.1.16, alors les propositions combinées 4.2.15 et 4.2.9 entraînent que $W \cap F$ est vertical F.

Soit V un sous-groupe vertical dans F tel que $W \cap F < V$

et $V[p] = (W \cap F)[p]$.

Ainsi $D \oplus V$ est vertical dans G par 4.2.7 et 4.2.15.

Or $D \oplus V$ et W possèdent le même socle;

$(D \oplus V)[p] = D[p] \oplus V[p]$ par 1.1.27

$= D[p] \oplus (W \cap F)[p] = [D \oplus (W \cap F)][p] = W[p]$.

Conséquemment, $D \oplus V = W$ par la maximalité de W dans G,

d'où $V = W \cap F$ par 1.1.14. ▩

2. À LA RECHERCHE DE SOUS-GROUPES PURS

Poursuivons maintenant en identifiant des sous-groupes verticaux maximaux qui sont purs dans G. Nous pouvons débuter en nous interrogeant sur la verticalité maximale de $W \cap p^\omega G$ dans $p^\omega G$ lorsque W est vertical maximal dans G. La proposition 4.3.19 nous informe que nous ne sommes même pas certain de la simple verticalité de $W \cap p^\omega G$ dans $p^\omega G$. Toutefois, les résultats suivants prévalent.

Proposition 5.2.1

Soit W un sous-groupe vertical maximal dans G.
Alors W est net dans W^-.

Démonstration

Par la proposition 2.2.19, nous savons que W possède un prolongement net N dans W^- tel que $N[p] = W[p]$.
Or N est vertical dans G par 4.2.18 car $W < N < W^-$.
Puisque W et N sont supportés par le même socle, la maximalité de W dans G implique que $N = W$. $\boxtimes$

Proposition 5.2.2

Soit W un sous-groupe vertical maximal dans G tel que $W[p] < p^\omega G$.
Alors W est net dans $p^\omega G$.

Démonstration

4.3.9 implique que $W < p^\omega G$.
Puisque $W^- = p^\omega G$ par 1.2.11,
alors W est net dans $p^\omega G$ par la proposition précédente. $\boxtimes$

<u>**Corollaire 5.2.3**</u>

Soit W un sous-groupe vertical maximal dans G
tel que W est vertical dans $p^{\omega}G$.
Alors W est pur dans $p^{\omega}G$.

<u>Démonstration</u>

La verticalité de W dans $p^{\omega}G$ alliée à sa netteté par la proposition précédente entraîne sa pureté dans $p^{\omega}G$. ■

Poursuivons en examinant le cas des groupes cycliques.

<u>**Lemme 5.2.4**</u>

Soit $g \in G$ tel que $<g>$ est vertical maximal dans G.
Alors $h(g) = 0$ ou $h(g) = \infty$.

<u>Démonstration</u>

Soit $o(g) = p^{m+1}$ où $m \geq 0$.
Supposons que $h(g) = n < \infty$ où $n \geq 1$.
La verticalité de $<g>$ dans G entraîne que $h(p^m g) = m + n$ par 4.3.4.
De plus, la proposition 5.1.11 implique que $<g> \cap p^{m+n}G < (p^{m+n}<g>)^{-}$
$= 0^{-} = p^{\omega}G$ puisque $n \geq 1$.
Or $p^m g \in <g> \cap p^{m+n}G < p^{\omega}G$,
contredisant ainsi la hauteur finie de $p^m g$ dans G.
Ainsi $h(g) = 0$ ou $h(g) = \infty$. ■

Par exemple, si $h(g) = 0$ et $g \in G[p]$, alors $<g>$ est pur dans G par 3.1.2 donc vertical maximal dans celui-ci par 5.1.2. Également, en vertu de 5.1.15, $p^{\omega}P = <x_0>$ où P est le groupe de Prüfer est un exemple d'un sous-groupe cyclique vertical maximal engendré par un élément dont la hauteur est infinie.

Proposition 5.2.5

Soit $g \in G$ tel que $\langle g \rangle$ est vertical maximal dans G.

Alors $\langle g \rangle$ est pur dans G si et seulement si $h(g) = 0$.

Démonstration

La nécessité

La pureté de $\langle g \rangle$ dans G entraîne sa netteté dans G d'où $h(g) = 0$ par 2.2.8.

La suffisance

La même proposition 2.2.8 entraîne que $\langle g \rangle$ est net dans G.

Sa verticalité implique alors sa pureté dans G. ∎

Proposition 5.2.6

Soit W un sous-groupe vertical maximal dans G

dont le socle est dense dans G[p].

Alors W est pur et dense dans G.

Démonstration

Soit S = W[p].

Montrons que W est maximal par rapport au fait que W[p] = S.

Soit L un prolongement de W dans G tel que L[p] = S.

L est donc vertical dans G par 4.2.4.

La maximalité de W implique ainsi que L = W.

W est alors pur et dense dans G par 4.2.31. ∎

Proposition 5.2.7

Soit A et W des sous-groupes pur et vertical maximal dans G

respectivement tel que $(p^nA)[p] < W < A$ pour $n \geq 0$.

Alors W est pur dans G.

Démonstration

D'une part, W est vertical maximal dans A par 5.1.6

donc $W \cap p^nA$ est vertical maximal dans p^nA par 5.1.8.

D'autre part, $(p^nA)[p] = W \cap (p^nA)[p] = W[p] \cap (p^nA)[p] = (W \cap p^nA)[p]$.

Étant donné que p^nA est vertical dans p^nA,

la maximalité de $W \cap p^nA$ dans p^nA entraîne que $W \cap p^nA = p^nA$.

Ainsi $p^nA < W$ i.e. W est ouvert dans A

donc fermé dans celui-ci de même que pW par 1.2.6.

Par conséquent, 5.1.10 entraîne que $W \cap pA < (pW)^{-} = pW$

i.e. W est net dans A.

W est donc pur dans A et dans G par la transitivité de la pureté. ▩

Proposition 5.2.8

Soit W un sous-groupe vertical maximal dans G où G est borné.

Alors W est pur dans G.

Démonstration

Nous savons par la proposition 1.2.20

que tous les sous-groupes d'un groupe borné sont fermés.

Ainsi par 5.1.10, nous obtenons $W \cap pG < (pW)^{-} = pW$.

Étant à la fois net et vertical, le sous-groupe W est alors pur dans G. ▩

Voici à présent un deux pour un intéressant. Tout d'abord la proposition suivante.

Proposition 5.2.9

Soit W un sous-groupe vertical maximal dans G
tel que W^- est pur dans G.
Alors W est pur dans G.

Démonstration

La proposition 5.2.1 nous apprend que W est net dans W^-.
La pureté de W^- dans G entraîne alors la netteté de W dans G
par la transitivité de cette propriété.
Or W est déjà vertical dans G; il est donc pur dans celui-ci. ∎

Proposition 5.2.10

Soit G séparable et W vertical maximal dans G tel que W est borné.
Alors W et W^- sont purs dans G.

Démonstration

Il suffit uniquement de montrer la pureté de W^- dans G
et le résultat précédent conclura le cas de W.
Soit p^n la borne de W où $n \geq 0$.
Ainsi $W^- \cap p^nG = \cap_{i \geq n} (W + p^iG) \cap p^nG$ par 1.2.3
$= \cap_{i \geq n} [(W + p^iG) \cap p^nG]$ par 1.1.11
$= \cap_{i \geq n} [(W \cap p^nG) + p^iG]$ car $p^iG < p^nG$ pour tout $i \geq n$
$< \cap_{i \geq n} [(p^nW)^- + p^iG]$ par 5.1.11
$= (p^nW)^- = 0^- = p^\omega G = 0$ car G est séparable.
Étant donné que 0 est pur dans p^nG, les propositions 1.1.55 et 4.2.28
garantissent l'existence d'un prolongement pur A de W^- dans G
tel que $A \cap p^nG = W^- \cap p^nG$.
Or $p^nA = A \cap p^nG = W^- \cap p^nG = 0$ donc A est borné.
W^- étant vertical maximal dans G par 5.1.14 donc dans A par 5.1.6,
5.2.8 nous garantit la pureté de W^- dans A;

la transitivité assure alors celle de W^- dans G. ▣

Il est intéressant de noter que la démonstration de ce résultat aurait pu faire appel à 5.2.7 afin de parvenir à ses fins puisque l'existence du sous-groupe pur borné A entraîne que $(p^nA)[p] = 0 < W^- < A$.

En terminant avec cette première partie, nous pouvons effectuer un rapide bilan.

Proposition 5.2.11

Soit W un sous-groupe vertical maximal dans G.

Alors W est pur dans G dans les cas suivants :

- W est un sous-groupe cyclique dont l'élément générateur est de hauteur nulle dans G;
- le socle de W est dense dans G[p];
- il existe un sous-groupe pur A dans G tel que $(p^nA)[p] < W < A$;
- G est borné;
- W^- est pur dans G;
- W est borné dans G qui est séparable; dans ce cas, W^- est pur dans G également.

3. LES CLASSES JUMELLES : $\Psi = \Gamma$

Nous avons identifié des individus verticaux maximaux qui sont purs dans G selon certaines conditions. La dernière partie de ce chapitre propose maintenant de repérer les groupes dans lesquels les propriétés de verticalité maximale et de pureté sont équivalentes. Nous découvrirons que la classe Γ des groupes dont la fermeture de tout sous-groupe pur est pure est précisément la même que Ψ, la classe des groupes dont les sous-groupes verticaux maximaux sont purs.

Afin de parvenir à ce but, nous travaillerons jusqu'à la fin de ce chapitre avec $G = D \oplus R$ où, à moins d'avis contraire, il sera sous-entendu que D est la partie divisible de G alors que R en est une partie réduite. D'une part, nous montrerons que tous les sous-groupes verticaux maximaux dans G sont purs si et seulement si R possède la même propriété. D'autre part, nous prouverons que la fermeture de tout sous-groupe pur dans G est pure si et seulement si R répond au même critère. Conséquemment, le lien entre les deux classes Ψ et Γ s'établira en démontrant que dans un groupe réduit, les sous-groupes verticaux maximaux et les sous-groupes purs sont les mêmes.

Enfin, grâce à ces résultats, nous pourrons identifier les groupes dans lesquels tous les sous-groupes sont verticaux maximaux.

Avant d'entrer dans le vif du sujet, il faut énoncer un résultat qui nous aidera à atteindre notre but. La proposition 74.5 se trouvant dans la référence bibliographique [10] agira comme postulat. Les lecteurs intéressés par sa preuve peuvent toujours y référer.

Postulat 5.3.1

Soit G un groupe séparable.

Alors $G \in \Gamma$ si et seulement si

pour tout sous-groupe pur non borné A dans G,

G/A est la somme directe d'un groupe divisible

et d'un groupe torsion-complet.

Proposition 5.3.2

$G \in \Psi$ si et seulement si $R \in \Psi$.

Démonstration

La nécessité

Soit W un sous-groupe vertical maximal dans R.

La proposition 5.1.18 nous a montré que

$D \oplus W$ est vertical maximal dans G.

$D \oplus W$ étant alors pur dans G,

la pureté de W dans G par 3.1.10 garantit celle de W dans R par 3.1.3.

La suffisance

Soit W un sous-groupe vertical maximal dans G.

Montrons que W^{-} est pur dans G.

Étant donné que $D < W^{-}$ par 1.2.10, alors $W^{-} = D \oplus (W^{-} \cap R)$ par 1.1.15.

Puisque W^{-} est vertical maximal fermé dans G par 5.1.14,

alors $W^{-} \cap R$ est vertical maximal dans R par 5.1.19.

Par conséquent, la pureté de $W^{-} \cap R$ dans R

entraîne celle du même sous-groupe dans G par 3.1.16 et 3.1.2.

Enfin, la pureté de W^{-} dans G est déduite grâce à 3.1.10

et implique alors celle de W dans le même groupe en raison de 5.2.9. ▣

Proposition 5.3.3

$G \in \Gamma$ si et seulement si $R \in \Gamma$.

Démonstration

La nécessité

Soit A un sous-groupe pur dans R.

La transitivité de la pureté nous assure que A est pur dans G par 3.1.16;

A^- est donc pur aussi dans le même groupe.

Cependant $A^- = D \oplus A^{-R}$ par 3.1.19.

Alors puisque $D \oplus A^{-R}$ est pur dans G,

la proposition 3.1.10 mène à la conclusion que A^{-R} est pur dans G

d'où sa pureté dans R également par 3.1.3.

La suffisance

Soit A un sous-groupe pur dans G.

Les résultats 3.1.9 et 1.1.15 nous permettent d'affirmer

que $D + A$ est pur dans G et que $D + A = D \oplus [(D + A) \cap R]$.

Ainsi $(D + A) \cap R$ est pur dans G donc dans R aussi par 3.1.10 et 3.1.3.

Par conséquent, la fermeture de $(D + A) \cap R$ dans R est non seulement

pure dans celui-ci mais dans G également par 3.1.16 et 3.1.2.

Or cette fermeture est égale à $\cap_{i \geq 1} [(D + A) \cap R + p^iR]$

$= \cap_{i \geq 1} [(D + A + p^iR) \cap R]$ car $p^iR < R$

$= \cap_{i \geq 1} [(A + p^iD + p^iR) \cap R]$ car D est divisible

$= \cap_{i \geq 1} (A + p^iG) \cap R = A^- \cap R$ qui est pur dans G.

Cependant, $A^- = D \oplus (A^- \cap R)$ par 1.2.10 et 1.1.15,

ce qui entraîne la pureté de A^- dans G par 3.1.10. ■

Afin d'exécuter la preuve cruciale qui nouera les classes Ψ et Γ, il est essentiel de montrer plusieurs résultats préalables. En premier lieu, démontrons le théorème de purification forte pour les groupes dans Γ. Pour ce faire, il est nécessaire d'établir les faits suivants.

Lemme 5.3.4

Soit A un sous-groupe pur dans G, S un sous-socle de G et s un élément de S tel que $h_{G/A}(s + A) = n < \infty$ où $n \geq 0$.
Alors $(A + \langle s\rangle) \cap p^nG$ est pur dans p^nG.

Démonstration

En premier lieu, montrons que $(A + \langle s\rangle) \cap p^{i+n}G = p^{i+n}A$ pour tout $i \geq 1$.
Soit $i \geq 1$.
Il va de soi que $p^{i+n}A < (A + \langle s\rangle) \cap p^{i+n}G$.
À présent, soit $a + p^m s \in (A + \langle s\rangle) \cap p^{i+n}G$ où $a \in A$ et $m \geq 0$.
Si $m = 0$ alors $s \in A + p^{i+n}G$ i.e. $h_{G/A}(s + A) = i + n > n$, menant ainsi à une contradiction.
Par conséquent, $m > 0$ et $a + p^m s = a + 0 = a \in p^{i+n}A$ puisque A est pur dans G.

Enfin, démontrons la pureté en question.
$[(A + \langle s\rangle) \cap p^nG] \cap p^i p^n G = (A + \langle s\rangle) \cap p^{i+n}G = p^{i+n}A = p^i(p^nA \cap p^nG)$
$< p^i[(A + \langle s\rangle) \cap p^nG]$ pour tout $i \geq 1$. ▩

Lemme 5.3.5

Soit S un sous-socle de G et A un sous-groupe pur dans G maximal par rapport à $A[p] < S$.
Alors $(S + A)/A < p^\omega(G/A)$ et $(S + A)/A \cap D/A = 0$ où D/A est la partie divisible de G/A.

Démonstration

Montrons que $(S + A)/A < p^\omega(G/A)$.

Étant donné que $p^{\omega}(G/A) = A^{-}/A$ par 1.2.12, prouvons que $S < A^{-}$.

Soit $s \in S$.

Si $h_{G/A}(s + A) = \infty$ alors $s \in A^{-}$ par 1.2.24.

Le cas où $h_{G/A}(s + A) = n < \infty$ où $n \geq 0$ demande plus de travail.

En premier lieu, le lemme précédent nous indique que

$(A + \langle s \rangle) \cap p^nG$ est pur dans p^nG.

Par 1.1.57, soit M un prolongement maximal de $A + \langle s \rangle$ dans G

par rapport au fait que $M \cap p^nG = (A + \langle s \rangle) \cap p^nG$.

Les propositions 1.1.54 et 4.2.28 nous assurent que M est pur dans G;

alors A est pur dans M par 3.1.3.

En second lieu, la verticalité A dans M par 4.2.26

entraîne celle de $A + \langle s \rangle$ dans M par 4.2.1.

La proposition 4.4.6 nous garantit ainsi l'existence

d'un contenant vertical C de $A + \langle s \rangle$ dans M tel que $C[p] = (A + \langle s \rangle)[p]$.

Ce contenant est vertical maximal dans M par 5.1.3.

Cependant, $(p^nM)[p] < p^nM = M \cap p^nG$

$= (A + \langle s \rangle) \cap p^nG < A + \langle s \rangle < C < M$ i.e. $(p^nM)[p] < C < M$.

La proposition 5.2.7 nous permet donc de conclure que C est pur dans M

et par conséquent dans G également par la transitivité de la pureté.

Toutefois, puisque $C[p] = (A + \langle s \rangle)[p] < S$, la maximalité de A dans G

implique alors que $C = A$ d'où $A + \langle s \rangle = A$ i.e. $s \in A < A^{-}$.

Ensuite, montrons que $(S + A)/A \cap D/A = 0$.

Soit $s + A \in (S + A)/A \cap D/A$ où $s \in S$; il suffit de prouver que $s \in A$.

Tout d'abord, il est clair que $s \in D$, A est pur dans D par 3.1.3

de même que D est pur dans G par 3.1.11 et 3.1.5.

Considérons une enveloppe nette N/A de $(A + \langle s \rangle)/A$ dans D/A

tel que $(N/A)[p] = [(A + \langle s \rangle)/A][p]$ par 2.2.19.

Or cette enveloppe est pure dans D/A

puisqu'elle est verticale dans celui-ci par 4.2.20.

Ainsi N est pur dans D par 3.1.5 car A est pur dans D.

Par conséquent, N est pur dans G également par 3.1.2.

Cependant, la netteté de A dans N par 2.2.3 entraîne que

$(N[p] + A)/A = (N/A)[p]$ par 2.2.10

$= [(A + \langle s\rangle)/A][p] < [(S + A)/A][p] < (S + A)/A$ i.e. $N[p] + A < S + A$.

Alors $N[p] = N[p] \cap (S + A) = N[p] \cap (S + A)[p] = N[p] \cap (S + A[p])$

$= A[p] + (S \cap N[p])$ car $A[p] < N[p]$

$= S \cap N[p]$ car $A[p] < S \cap N[p]$

$< S$.

La maximalité de A dans G entraîne donc que $N = A$

et de fait $A + \langle s\rangle = A$ d'où $s \in A$. $\boxtimes$

<u>Théorème 5.3.6</u>

Pour tout sous-socle S de G et tout sous-groupe pur A dans G

tel que $A[p] < S$, A possède un prolongement pur L dans G

tel que $L[p] = S$ si et seulement si $G \in \Gamma$.

C'est la propriété de purification forte.

<u>Démonstration</u>

<u>La nécessité</u>

Soit A un sous-groupe pur de G.

Alors A possède un prolongement pur L dans G tel que $L[p] = A^{-G}[p]$.

Montrons que $L = A^{-G}$.

Par 3.1.17, nous savons que $A^{-L} = A^{-G} \cap L$ d'où $A^{-L}[p] = (A^{-G} \cap L)[p]$

$= A^{-G}[p] \cap L[p] = L[p]$.

Puisque A est net dans L par 2.2.3, alors $A^{-L} = L$ par 2.2.13.

Ainsi $L = A^{-G} \cap L < A^{-G}$.

Par conséquent, L est net dans A^{-G} par 2.2.3

et $L[p] = A^{-G}[p]$ entraîne que $L = A^{-G}$ par 2.2.11.

La suffisance

Soit S un sous-socle de G

et A un sous-groupe pur dans G tel que $A[p] < S$.

Le lemme de Zorn nous a déjà confirmé l'existence d'un contenant pur C de A dans G tel que $C[p] < S$ en 3.1.22.

Montrons que $S < C[p]$.

Le lemme précédent nous a démontré que $(S + C)/C < p^{\omega}(G/C)$ ainsi que $(S + C)/C \cap D/C = 0$ où $D/C = \mathrm{div}(G/C)$.

Par hypothèse, nous savons que C^{-} est pur dans G,

d'où la pureté de C^{-}/C dans G/C par 3.1.4.

Ceci entraîne alors que $p^{\omega}(G/C)$ est divisible par 1.2.12 et 3.1.13.

Conséquemment, $0 = (S + C)/C \cap D/C = (S + C)/C \cap p^{\omega}(G/C)$ par 2.3.5 $= (S + C)/C$ i.e. $S + C = C$ d'où $S < C[p]$; $C[p] = S$. ▣

En second lieu, nous faisons appel au côté analytique des groupes abéliens dans le résultat qui suit.

Proposition 5.3.7

Soit A un sous-groupe pur dans G tel que G/A est séparable et torsion-complet, et V un sous-groupe vertical fermé dans G tel que $V[p] = A[p]$. Alors $V + G[p]$ est fermé dans G.

Démonstration

Soit $x \in (V + G[p])^{-}$.

Ainsi, pour tout $i \geq 1$, il existe $v_i \in V$, $s_i \in G[p]$ et $g_i \in G$

tel que $x = v_i + s_i + p^i g_i$.

Montrons que la séquence bornée $\{s_i + A\}_{i \geq 1}$ d'éléments de $(G/A)[p]$

est Cauchy dans $(G/A)[p]$.

Soit $i \geq 1$.

En vertu de la définition 1.3.2, il s'agit de montrer que

$(s_i + A) - (s_{i+1} + A) \in [p^i(G/A)][p]$.

Or $s_i - s_{i+1} = (x - v_i - p^i g_i) - (x - v_{i+1} - p^{i+1} g_{i+1})$

$= v_{i+1} - v_i + p^i(pg_{i+1} - g_i) \in (V + p^iG)[p]$

$= V[p] + (p^iG)[p]$ car V est vertical dans G

$= A[p] + (p^iG)[p]$.

Par conséquent, il existe $a_i \in A[p]$ et $y_i \in G$ tel que

$(s_i + A) - (s_{i+1} + A) = s_i - s_{i+1} + A = a_i + p^iy_i + A = p^iy_i + A \in [p^i(G/A)][p]$.

Puisque $(G/A)[p]$ est également torsion-complet par 1.3.5,

la définition 1.3.4 nous enseigne que la séquence $\{s_i + A\}_{i \geq 1}$ converge

vers un élément $g_p + A \in (G[p] + A)/A = (G/A)[p]$ où $g_p \in G[p]$ par 2.2.10.

Par 1.3.1, nous obtenons alors $s_i + A - (g_p + A) \in p^i(G/A) = (p^iG + A)/A$

par 1.1.32, i.e. $s_i - g_p \in (A + p^iG)[p]$ pour tout $i \geq 1$.

Or $(A + p^iG)[p] = A[p] + (p^iG)[p]$ car A est vertical dans G

$= V[p] + (p^iG)[p] = (V + p^iG)[p]$ pour tout $i \geq 1$ car V est vertical dans G.

Conséquemment, $x - g_p = (s_i - g_p) + (v_i + p^ig_i) \in V + p^iG$ pour tout $i \geq 1$

i.e. $x - g_p \in V^- = V$ d'où $x \in V + G[p]$. ⊠

En troisième lieu, nous allons montrer que la fermeture de $H + G[p]$ entraîne celle de pH dans G pour tout $H < G$ à l'aide des lemmes suivants.

<u>Lemme 5.3.8</u>

Soit H un sous-groupe de G.

Alors $G/(H + G[p]) \cong pG/pH$.

<u>Démonstration</u>

Il s'agit d'établir que $\Phi : G/(H + G[p]) \rightarrow pG/pH$ défini par

$\Phi(g + H + G[p]) = pg + pH$ où $g \in G$ constitue un isomorphisme.

Tout d'abord, montrons que Φ est une fonction bien définie.

Soit $x + H + G[p] = y + H + G[p]$ où x et $y \in G$.

Ainsi $p(x - y) \in p(H + G[p]) = pH$.

Alors $\Phi(x + H + G[p]) = px + pH = py + p(x - y) + pH$

$= py + pH$ car $p(x - y) \in pH$

$= \Phi(y + H + G[p])$.

Montrons ensuite que la fonction Φ définit un homomorphisme.

Soit x et $y \in G$.

Alors $\Phi[(x + H + G[p]) + (y + H + G[p])] = \Phi[x + y + H + G[p]]$

$= p(x + y) + pH = px + pH + py + pH$

$= \Phi(x + H + G[p]) + \Phi(y + H + G[p])$.

Ensuite, montrons que Φ est injective.

Soit $\Phi(x + H + G[p]) = \Phi(y + H + G[p])$ où x et $y \in G$.

Alors $px + pH = py + pH$ i.e. $p(x - y) \in pH$

d'où $x - y - h = g_p$ où $h \in H$ et $g_p \in G[p]$.

Ainsi $x + H + G[p] = y + h + g_p + H + G[p] = y + H + G[p]$.

Enfin, montrons que Φ est surjective.

Simplement, pour $pg + pH \in pG/pH$ où $g \in G$,

alors $\Phi(x + H + G[p]) = pg + pH$ pour $x = g$. ∎

Lemme 5.3.9

Soit $H < G$ et $m \geq 1$.

Alors $p^{\omega}(G/p^mH) = p^{\omega}(p^nG/p^mH)$ pour tout $n \in \{1, ..., m\}$.

Démonstration

Soit $n \in \{1, ...,m\}$.

Alors $p^{\omega}(G/p^mH) = \cap_{i \geq n+1} p^i(G/p^mH) = \cap_{i \geq n+1} [(p^iG + p^mH)/p^mH]$ par 1.1.32

$= \cap_{j \geq 1} [(p^{j+n}G + p^mH)/p^mH]$ en posant $j = i - n$

$= \cap_{j \geq 1} p^j(p^nG/p^mH) = p^{\omega}(p^nG/p^mH)$. ▧

Proposition 5.3.10

Soit H un sous-groupe de G.

Alors $H + G[p]$ est fermé si et seulement si pH l'est également.

Démonstration

Clairement, en combinant 1.2.12 aux deux lemmes précédents,

nous obtenons $(H + G[p])^{-}/(H + G[p]) = p^{\omega}[G/(H + G[p])] \cong p^{\omega}(pG/pH)$

$= p^{\omega}(G/pH) = (pH)^{-}/pH$.

Ainsi $(H + G[p])^{-}/(H + G[p]) = 0$ si et seulement si $(pH)^{-}/pH = 0$,

démontrant à la fois la suffisance et la nécessité. ▧

Enfin, trois derniers résultats sont nécessaires.

Proposition 5.3.11

Soit $G \in \Gamma$.

Alors R est séparable.

Démonstration

D'abord, $p^{\omega}G$ est pur puisqu'il est la fermeture du sous-groupe pur 0.

Sa divisibilité se déduit alors de 3.1.13.

Ainsi $p^{\omega}G = div(G)$ par 2.3.5 d'où $p^{\omega}R = 0$

car $p^{\omega}G = div(G) \oplus p^{\omega}R$ par 3.1.20. ▩

Proposition 5.3.12

Soit A un sous-groupe pur dans G et H un sous-groupe de G

tel que $H[p] = A[p]$.

Si A est borné alors H est borné.

Démonstration

Soit p^n la borne de A où $n \geq 0$.

Ainsi $(p^nH)[p] = (p^nH)[p] \cap (p^nG)[p] < H[p] \cap (p^nG)[p] = A[p] \cap (p^nG)[p]$

$= (A \cap p^nG)[p] = (p^nA)[p]$ car A est pur dans G

$= 0$ puisque A est borné par p^n.

La proposition 1.1.21 entraîne alors que $p^nH = 0$. ▩

Proposition 5.3.13

Soit W un sous-groupe vertical maximal dans G.

Alors W^- est pur dans G si et seulement si pW^- est fermé dans G.

Démonstration

La nécessité

Puisque W^- est fermé et vertical maximal dans G par 5.1.14,

alors $(pW^-)^- = W^- \cap pG$ par 5.1.12

$= pW^-$.

La netteté de W^- suffit ici.

La suffisance

$W^- \cap pG = (pW^-)^- = pW^-$ par 5.1.12.

Puisque W^- est déjà vertical dans G,

sa netteté donne naissance à sa pureté dans G. ▣

Nous sommes maintenant prêts à effectuer la démonstration principale.

<u>Proposition 5.3.14</u>

Soit G un groupe réduit.

Alors $G \in \Psi$ si et seulement si $G \in \Gamma$.

<u>Démonstration</u>

<u>La nécessité</u>

Soit A un sous-groupe pur dans G.

Alors A est vertical maximal dans G par 5.1.2.

Ainsi A^{-} est aussi vertical maximal dans G par 5.1.14.

Conséquemment, A^{-} est pur dans G.

<u>La suffisance</u>

Soit W un sous-groupe vertical maximal dans G.

Étant réduit, G = R est séparable par la proposition 5.3.11.

Le cas échéant où W est borné est alors pris en charge

par le théorème 5.2.10.

Supposons donc que W n'est pas borné

et montrons que W^{-} est pur dans G.

D'abord, le théorème de purification 5.3.6 précédemment démontré

entraîne l'existence d'un prolongement pur A de 0 dans G

tel que $A[p] = W^{-}[p] = (W[p])^{-}$ par 4.2.29.

W^{-} n'étant pas borné, A ne l'est pas non plus par 5.3.12.

Le caractère séparable de G et le postulat 5.3.1 entraînent alors que G/A

est la somme directe d'un groupe divisible et d'un groupe torsion-complet.

Cependant, la pureté de A dans G implique sa verticalité maximale par 5.1.2.

Puisque A est net dans G, $A^{-}[p] = (A[p])^{-} = (W[p])^{-} = A[p]$ d'où la fermeture de A en entier dans G par 2.2.12, i.e. $A^{-}/A = 0$.

G/A est alors séparable par 1.2.12 et donc réduit par 1.2.21.

Par conséquent, div(G/A) = 0 et G/A est torsion-complet.

La proposition 5.3.7 nous propose alors la fermeture de $W^{-} + G[p]$ dans G, entraînant celle de pW^{-} dans G par 5.3.10.

Conséquemment, W^{-} est pur dans G par 5.3.13, engendrant ainsi la pureté de W dans G par 5.2.9. ▩

Théorème 5.3.15

$G \in \Psi$ si et seulement si $G \in \Gamma$.

Démonstration

Clairement, la combinaison de la proposition qui précède aux résultats 5.3.2 et 5.3.3 parvient à établir la véracité de ce théorème. ▩

Étonnamment, nous pouvons établir l'existence d'une classe de groupe équivalente à Ψ mais possédant l'avantage d'être moins exigente que cette dernière.

Théorème 5.3.16

$G \in \Psi$ si et seulement si tous les sous-groupes verticaux maximaux fermés dans G sont purs dans G.

Démonstration

La nécessité

En particulier, les sous-groupes verticaux maximaux fermés dans G sont purs dans G.

La suffisance

En vertu du théorème précédent, nous pouvons montrer que $G \in \Gamma$.

Soit A un sous-groupe pur dans G.

Ainsi A est vertical maximal dans G par 5.1.2

donc A^{-} l'est aussi par 5.1.14.

Étant fermé, A^{-} est pur dans G. ■

La suffisance aurait pu être montrée directement en utilisant le théorème 5.2.9. En effet, si W est un sous-groupe vertical maximal dans G, W^{-} est également vertical maximal par 5.1.14.

L'hypothèse de départ entraîne alors la pureté de W^{-} dans G qui engendre à son tour celle de W dans le même groupe par 5.2.9.

Corollaire 5.3.17

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $G \in \Psi$;
- $G \in \Gamma$;
- les sous-groupe verticaux maximaux fermés dans G sont purs dans G.

En guise d'exemples, voici deux types de groupes qui appartiennent à Ψ.

Proposition 5.3.18

Les groupes bornés appartiennent à Ψ.

Démonstration

Soit G un groupe borné.

Une fois de plus, montrons que $G \in \Gamma$.

Soit A un sous-groupe pur dans G.

Puisque A est fermé dans G par 1.2.20, alors A^{-} est pur dans G. ■

Proposition 5.3.19

Les groupes divisibles sont éléments de Ψ.

Démonstration

Soit G un groupe divisible i.e. G = $p^{\omega}G$ par 1.1.39.

En vertu de 5.3.15, montrons que G $\in \Gamma$.

Soit A un sous-groupe pur dans G.

Or A^{-} = G par 1.2.11, i.e. que A^{-} est pur dans G. ■

En terminant ce chapitre, nous allons déterminer les groupes dans lesquels tous les sous-groupes sont verticaux maximaux.

Théorème 5.3.20

Soit G un groupe non borné.

Alors tous les sous-groupes de G sont verticaux maximaux dans G

si et seulement si G = 0.

Démonstration

La suffisance étant évidente, examinons la nécessité.

La proposition 4.3.11 implique que G est divisible

car tous ses sous-groupes sont verticaux.

Alors G $\in \Psi$ tel que montré ci-haut,

entraînant que tous les sous-groupes de G sont purs dans G.

Ils sont donc tous également divisibles par 3.1.14.

Soit g $\in$ G.

Ainsi <g> est divisible,

mais le corollaire 1.1.42 indique alors que g = 0 d'où G = 0. ■

Théorème 5.3.21

Soit G un groupe borné.

Alors tous les sous-groupes de G sont verticaux maximaux dans G si et seulement si $G = G[p]$.

Démonstration

La suffisance nous est déjà acquise par 5.1.5.

En ce qui concerne la nécessité, soit $g \in G$.

La verticalité maximale de $\langle g \rangle$ dans G entraîne que $h(g) = 0$ ou $h(g) = \infty$ par 5.2.4.

Cependant, $p^{\omega}G = 0$ car G est borné.

Ainsi, $h(g) = 0$ pour tout $g \neq 0$.

Conséquemment, $pG = 0$ et $G = G[p]$ par 1.1.34. ∎

CHAPITRE VI

LA PURIFIABILITÉ

Ce chapitre qui termine l'ouvrage lorgne du côté de la purifiabilité des sous-groupes de G en guise d'application de la verticalité.

Définition 6.0.1

U est un sous-groupe purifiable dans G si et seulement si
U possède une enveloppe pure dans G.

Avant d'aller plus loin, ajoutons immédiatement deux autres classes de groupes dans lesquels nous investiguerons bientôt :

- ♦ Ω est la classe des groupes dont tous les sous-groupes sont purifiables;
- ♦ Ω_S est la classe des groupes dont tous les sous-socles sont purifiables. Ceux-ci ont pour nom les groupes purs-complets.

La première partie de ce chapitre fera étalage de quelques critères de purifiabilité des sous-groupes de G. Elle identifiera également certains groupes dans lesquels tous les sous-groupes sont purifiables.

Quant à elle, la seconde section sera consacrée à la notion de verticalité-éventuelle. Elle examinera le rôle que joue cette propriété dans la purifiabilité des sous-groupes. Nous montrerons du même coup que $\Omega \subseteq \Psi \subseteq \Omega_S$.

Nous terminerons enfin en abordant de façon très succincte la notion homologue de la purifiabilité d'un sous-groupe, j'ai nommé la verticalisation de celui-ci.

Nous aborderons la matière en prenant pour acquis la proposition donnant la condition nécessaire et suffisante afin qu'un sous-groupe soit presque-dense dans G ainsi que le critère de purifiabilité établis par

K. Benabdallah et J. Irwin dans la référence bibliographique [3] donnée à la fin. Les lecteurs intéressés par les démonstrations menant à ces résultats peuvent y référer.

Définition 6.0.2

H est un sous-groupe presque-dense dans G si et seulement si tout sous-groupe pur le contenant est dense dans G.

Postulat 6.0.3

Soit H un sous-groupe de G.
Alors H est presque-dense dans G si et seulement si $(p^iG)[p] < H + p^{i+1}G$ pour tout $i \geq 0$.

Postulat 6.0.4

Soit H un sous-groupe de G.
Alors H est purifiable dans G si et seulement si il est contenu dans un sous-groupe pur A dans G tel que le socle de H est ouvert dans A.
De plus, A constitue une enveloppe pure de H dans G si et seulement si H est presque-dense dans A.

1. LES SOUS-GROUPES PURIFIABLES

Voici quelques propriétés entraînant la purifiabilité de certains sous-groupes.

Proposition 6.1.1

Tout sous-groupe de G dont le socle est dense dans G[p] est purifiable dans G.

Démonstration

Soit H un sous-groupe de G tel que H[p] est dense dans G[p].

La proposition 4.2.33 indique que H est contenu dans un sous-groupe A pur dans G dans lequel H est essentiel.

Ainsi $A[p] = H[p] < H < A$, d'où la purifiabilité de H dans G par 6.0.4. ▩

Proposition 6.1.2

Soit U un sous-groupe purifiable dans G et $n \geq 0$.

Alors $U \cap p^nG$ est purifiable dans p^nG.

Démonstration

Soit E une enveloppe pure de U dans G.

Ainsi $U < E < G$ i.e. $U \cap p^nG < E \cap p^nG < G \cap p^nG$

d'où $U \cap p^nG < p^nE < p^nG$ puisque E est pur dans G.

La proposition 3.1.7 nous indique que p^nE est pur dans p^nG.

Montrons que p^nE est une enveloppe pure de $U \cap p^nG$ dans p^nG.

Pour ce faire, supposons que A est un sous-groupe pur dans p^nG tel que $U \cap p^nG < A < p^nE$.

Nous obtenons $(A + U) \cap p^nE = (U \cap p^nE) + A$ car $A < p^nE$

$= A$, i.e. $(A + U)/A \cap p^nE/A = 0$.

Soit C/A un prolongement p^nE/A-haut de $(A + U)/A$ dans E/A dont l'existence est garantie par 1.1.55.

Étant donné que A est pur dans p^nE par 3.1.3, toutes les hypothèses de la proposition 4.2.28 sont à notre portée afin de conclure que

C est un sous-groupe pur dans E contenant U tel que $C \cap p^nE = A$.

Or C est également pur dans G par la transitivité de la pureté, provoquant l'égalité entre C et E en raison de la minimalité de ce dernier dans G.

Conséquemment, $A = C \cap p^nE = E \cap p^nE = p^nE$

d'où la purifiabilité de $U \cap p^nG$ dans p^nG. ▩

<u>Proposition 6.1.3</u>

Soit $U < G$ et $n \geq 0$ tel que $U \cap p^nG$ est purifiable dans p^nG.

Alors U est purifiable dans G.

<u>Démonstration</u>

Soit E une enveloppe pure de $U \cap p^nG$ dans p^nG.

Ainsi $(U + E) \cap p^nG = (U \cap p^nG) + E = E$ car $U \cap p^nG < E < p^nG$.

À nouveau, les propositions 1.1.55 et 4.2.28 admettent l'existence d'un prolongement pur A de U + E dans G tel que $A \cap p^nG = E$ i.e. $p^nA = E$.

Puisque E purifie $U \cap p^nG$ dans p^nG,

il existe $m \geq 0$ tel que $(p^mE)[p] < U \cap p^nG$ par 6.0.4.

Par conséquent, $(p^{m+n}A)[p] < U < A$; la pureté de A dans G entraîne la purifiabilité de U dans G toujours par 6.0.4. ■

<u>Corollaire 6.1.4</u>

Soit H un sous-groupe de G tel que $H \cap p^nG = 0$ où $n \geq 0$.

Alors H est purifiable dans G.

<u>Démonstration</u>

En effet, 0 est pur donc purifiable dans p^nG. ■

À présent, identifions deux types de groupes dans lesquels tous les sous-groupes sont purifiables.

<u>Proposition 6.1.5</u>

Soit G un groupe borné.

Alors tous les sous-groupes de G sont purifiables.

<u>Démonstration</u>

Soit p^n la borne de G où $n \geq 0$.

Soit H un sous-groupe de G.

Alors $H \cap p^nG < p^nG = 0$ d'où la purifiabilité de H dans G

par le corollaire précédent. ▩

Proposition 6.1.6

Tout sous-groupe d'un groupe divisible est purifiable.

Démonstration

Soit $H < G$ où G est divisible.

La proposition 2.2.19 garantit l'existence d'une enveloppe nette N

pour H dans G.

Or cette enveloppe est verticale dans G par 4.2.20.

Ainsi N constitue forcément une enveloppe pure de H dans G. ▩

En terminant cette première section, ajoutons un autre sous-groupe vertical maximal qui est pur dans G.

Proposition 6.1.7

Soit W un sous-groupe vertical maximal dans G tel que W est purifiable.

Alors W est pur dans G.

Démonstration

Le postulat 6.0.4 entraîne l'existence d'un sous-groupe pur A dans G

tel que $(p^nA)[p] < W < A$ où $n \geq 0$.

La pureté de W dans G est alors déduite de 5.2.7. ▩

Corollaire 6.1.8

La purifiabilité de $p^{\omega}G$ entraîne sa pureté dans G et sa divisibilité.

<u>Démonstration</u>

Par 5.1.15 et 3.1.13. ⊠

2. LA VERTICALITÉ-ÉVENTUELLE

Dans cette section, nous constaterons que la verticalité-éventuelle est une condition nécessaire à la purifiabilité d'un sous-groupe dans G. Naturellement, nous rechercherons alors les conditions dans lesquelles cette propriété devient une condition suffisante pour ce même critère.

Définition 6.2.1

T est un sous-groupe éventuellement-vertical dans G si et seulement si il existe $n \geq 0$ tel que $T \cap p^nG$ est vertical dans p^nG.

On dit que T est de niveau n si et seulement si

n est le plus petit entier naturel tel que $T \cap p^nG$ est vertical dans p^nG.

En particulier, un sous-groupe est vertical si et seulement si

il est éventuellement-vertical de niveau 0.

Théorème 6.2.2

Soit U un sous-groupe purifiable dans G.

Alors U est éventuellement-vertical dans G.

Démonstration

Puisque U est purifiable dans G,

il existe un sous-groupe pur A dans G

et $n \geq 0$ tel que $(p^nA)[p] < U < A$ par 6.0.4.

Ainsi $(A \cap p^nG)[p] < U \cap p^nG < A \cap p^nG$ d'où $(A \cap p^nG)[p] = (U \cap p^nG)[p]$.

Cependant, la pureté de A dans G entraîne sa verticalité dans G,

laquelle génère une autre verticalité; celle $A \cap p^nG$ dans p^nG par 4.2.17.

En raison de celle-ci, nous obtenons $[(U \cap p^nG) + p^ip^nG][p]$

$< [(A \cap p^nG) + p^ip^nG][p] = (A \cap p^nG)[p] + (p^ip^nG)[p]$

$= (U \cap p^nG)[p] + (p^ip^nG)[p]$ pour tout $i \geq 1$,

impliquant la verticalité-éventuelle de U dans G par 6.2.1. ▣

Afin de découvrir les conditions dans lesquelles la verticalité-éventuelle devient une condition suffisante à la purifiabilité, nous avons besoin de résultats préalables que voici.

Lemme 6.2.3

Soit T un sous-groupe éventuellement-vertical de niveau n dans G où $n \geq 0$.

Alors $(T + p^{n+i}G)[p] \cap (p^nG)[p] = (T[p] + (p^{n+i}G)[p]) \cap (p^nG)[p]$ pour tout $i \geq 1$.

Démonstration

$(T + p^{n+i}G)[p] \cap (p^nG)[p] = [(T + p^ip^nG) \cap (p^nG)][p]$

$= [(T \cap p^nG) + p^ip^nG][p]$ car $p^ip^nG < p^nG$

$= (T \cap p^nG)[p] + (p^ip^nG)[p]$

car T est éventuellement-vertical de niveau n dans G

$= T[p] \cap (p^nG)[p] + (p^ip^nG)[p]$

$= (T[p] + (p^{n+i}G)[p]) \cap (p^nG)[p]$ pour tout $i \geq 1$. ⊠

Lemme 6.2.4

Soit T un sous-groupe presque-dense et éventuellement-vertical de niveau n dans G où $n \geq 0$.

Alors $(p^nG)[p] < T[p] + (p^{n+i}G)[p]$ pour tout $i \geq 0$.

Démonstration

Le cas $i = 0$ étant évident, procédons par induction sur i et supposons que $(p^nG)[p] < T[p] + (p^{n+i}G)[p]$ pour $i \geq 0$.

Ainsi $(p^nG)[p] < (T[p] + (p^{n+i}G)[p]) \cap (p^nG)[p]$ par l'hypothèse d'induction

$< (T[p] + (T + p^{n+i+1}G)[p]) \cap (p^nG)[p]$ par 6.0.3

car T est presque-dense dans G

$= (T + p^{n+i+1}G)[p] \cap (p^nG)[p] = (T[p] + (p^{n+i+1}G)[p]) \cap (p^nG)[p]$ par 6.2.3

$< T[p] + (p^{n+i+1}G)[p]$. ▩

<u>Proposition 6.2.5</u>

Soit T un sous-groupe presque-dense

et éventuellement-vertical de niveau n dans G où $n \geq 0$.

Alors $(T \cap p^nG)[p]$ est dense dans $(p^nG)[p]$.

<u>Démonstration</u>

Le lemme précédent nous informe que

$(p^nG)[p] < T[p] + (p^{n+i}G)[p]$ pour tout $i \geq 0$.

Ainsi $(p^nG)[p] < (T[p] + (p^{n+i}G)[p]) \cap (p^nG)[p]$

$= (T[p] \cap (p^nG)[p]) + (p^{n+i}G)[p]$ car $(p^{n+i}G)[p] < (p^nG)[p]$

$= (T \cap p^nG)[p] + (p^ip^nG)[p]$ pour tout $i \geq 1$,

définissant ainsi la densité de $(T \cap p^nG)[p]$ dans $(p^nG)[p]$. ▩

<u>Théorème 6.2.6</u>

Soit H un sous-groupe presque-dense dans G.

Alors H est purifiable si et seulement si

H est éventuellement-vertical dans G.

<u>Démonstration</u>

La nécessité est claire par 6.2.2.

Quant à la suffisance,

supposons que H est éventuellement-vertical de niveau n où $n \geq 0$.

Conséquemment,

$(H \cap p^nG)[p]$ est dense dans $(p^nG)[p]$ par le résultat précédent.

La purifiabilité de $H \cap p^nG$ dans p^nG par 6.1.1

entraîne alors celle de H dans G par 6.1.3. ▩

. Nous venons de constater que la presque-densité d'un sous-groupe suffit à le rendre purifiable lorsqu'il est éventuellement-vertical. À présent, nous allons montrer dans quels groupes la verticalité-éventuelle et la purifiabilité deviennent des propriétés équivalentes. Avant toute chose, les résultats suivants.

<u>Proposition 6.2.7</u>

Soit E une enveloppe pure de U dans G.

Alors U est essentiel dans E si et seulement si U est vertical dans G.

<u>Démonstration</u>

La nécessité allant de soi par 4.2.6 et 4.2.7,

attardons-nous à la suffisance.

Puisque E est une enveloppe pure de U dans G, alors il existe $n \geq 0$

tel que $(p^nE)[p] < U$ et U est presque-dense dans E par 6.0.4.

La verticalité de U dans G entraîne celle de U dans E par 4.2.9.

U étant alors en fait un sous-groupe éventuellement-vertical de niveau 0 dans E, le lemme 6.2.4 nous permet alors de déduire que

$E[p] < U[p] + (p^iE)[p]$ pour tout $i \geq 0$.

En particulier pour $i = n$, nous obtenons $E[p] < U[p] + (p^nE)[p]$

$= U[p]$ puisque $(p^nE)[p] < U[p]$,

d'où U est essentiel dans E. ■

<u>Proposition 6.2.8</u>

Soit V un sous-groupe vertical dans G.

Alors V est purifiable dans G si et seulement si V possède un contenant vertical C pur dans G tel que $V[p] = C[p]$.

Démonstration

La nécessité

Montrons qu'une enveloppe pure E de V dans G

constitue le contenant recherché.

V étant essentiel dans E par la proposition précédente,

soit L un prolongement pur de E dans G tel que L[p] = V[p].

E étant alors net dans L par 2.2.3 et possédant le même socle que ce dernier, la proposition 2.2.11 intervient une fois de plus afin de nous permettre de conclure que L = E.

La suffisance

Soit C un contenant vertical de V dans G tel que C[p] = V[p]

et C est pur dans G.

Montrons que C est une enveloppe pure de V dans G.

Supposons A pur dans G tel que $V < A < C$.

Or A est vertical maximal dans G par 5.1.2

et partage le même socle que C.

Par conséquent, la maximalité de A dans G entraîne que A = C. ▪

Proposition 6.2.9

Soit H un sous-groupe de G où $G \in \Psi$.

Alors tout contenant vertical C de H dans G

tel que H[p] = C[p] est une enveloppe pure de H dans G.

Démonstration

Soit C un tel contenant.

Puisque C est vertical maximal dans G par 5.1.3,

alors C est pur dans G car $G \in \Psi$.

Soit A un sous-groupe pur dans G tel que $H < A < C$.

Or A est net et essentiel dans C donc A = C par 2.2.3 et 2.2.11. ▩

Corollaire 6.2.10

Soit $G \in \Psi$.

Les sous-groupes verticaux dans G sont purifiables dans G.

Démonstration

Soit V un sous-groupe vertical dans G.

Par la proposition 4.4.6, V possède le contenant exigé

par la proposition précédente afin d'être purifiable dans G.

Proposition 6.2.11

Soit $G \in \Psi$ et $n \geq 1$.

Alors $p^nG \in \Psi$.

Démonstration

En vertu du théorème 5.3.15, utilisons le fait que $\Psi = \Gamma$.

Soit A un sous-groupe pur dans p^nG.

Soit M un prolongement maximal de A dans G tel que $M \cap p^nG = A$

dont l'existence est garantie par 1.1.57.

En d'autres mots, M/A est p^nG/A-haut dans G/A par 1.1.54.

Par conséquent, M est pur dans G par 4.2.28.

M^- est donc pur dans G également.

Or la fermeture de $A = M \cap p^nG$ dans p^nG est égale à

$\cap_{i \geq 1} [(M \cap p^nG) + p^ip^nG)] = \cap_{i \geq 1} [(M + p^ip^nG) \cap p^nG]$ car $p^ip^nG < p^nG$

$= \cap_{i \geq 1} (M + p^ip^nG) \cap p^nG = M^- \cap p^nG$ par 1.2.4.

Or $M^- \cap p^nG$ est pur dans p^nG par 3.1.7. ▩

Théorème 6.2.12

Les sous-groupes éventuellement-verticaux dans G
sont purifiables dans G
si et seulement si $G \in \Psi$.

Démonstration

La nécessité

Soit W un sous-groupe vertical maximal dans G.
W étant alors éventuellement-vertical, sa purifiabilité entraîne sa pureté dans G par la proposition 6.1.7.

La suffisance

Soit T un sous-groupe éventuellement-vertical dans G
i.e. que $T \cap p^nG$ est vertical dans p^nG pour $n \geq 0$.
La proposition 6.2.11 nous indique que $p^nG \in \Psi$.
$T \cap p^nG$ est donc purifiable dans p^nG par 6.2.10,
provoquant ainsi la purifiabilité de T dans G par 6.1.3. ■

À l'aide de ce dernier théorème, montrons que $\Omega \subseteq \Psi \subseteq \Omega_S$ après ce qui suit.

Proposition 6.2.13

Soit S un sous-socle de G.
Alors S est purifiable dans G si et seulement si
S supporte un sous-groupe pur dans G.

Démonstration

La nécessité

Puisque S est purifiable et vertical dans G par 4.2.2,

la proposition 6.2.8 entraîne que S est le support d'un sous-groupe pur.

La suffisance

Montrons que le sous-groupe pur A supporté par S

constitue une enveloppe pure de S.

Soit L un prolongement pur de S dans G tel que $S < L < A$.

Or L est net et essentiel dans A donc $L = A$ par 2.2.3 et 2.2.11. ∎

Corollaire 6.2.14

Tout sous-socle dense de G est purifiable dans G.

Démonstration

4.2.34. ∎

Proposition 6.2.15

$\Omega \subseteq \Psi \subseteq \Omega_S$.

Démonstration

Soit $G \in \Omega$.

Puisque tous les sous-groupes éventuellement-verticaux sont alors purifiables, le théorème 6.2.12 nous indique alors que $G \in \Psi$.

Soit $G \in \Psi$.

Étant donné que $\Psi = \Gamma$, alors la propriété de purification forte du théorème 5.3.6 entraîne que tout sous-socle de G supporte un sous-groupe pur dans G en raison de la pureté de 0 dans G.

Conséquemment, la proposition précédente nous permet de conclure que tous les sous-socles de G sont purifiables dans G. ⊠

3. VERS LA VERTICALISATION

Avant de poursuivre notre quête avec la verticalisation, affichons une série de contre-exemples dont nous avons mentionné l'existence tout au long de l'ouvrage.

Proposition 6.3.1

Il existe un sous-groupe qui est :

1) vertical maximal sans être pur;
2) la fermeture d'un sous-groupe pur sans être pur;
3) éventuellement-vertical sans être purifiable;
4) tel que son socle n'est pas purifiable.

Démonstration

Il est intéressant de constater que le groupe de Prüfer
$P = < x_i \mid px_0 = 0$ et $p^i x_i = x_0 >$ puisse nous fournir à lui seul
quatre contre-exemples concernant l'étude qui nous préoccupe.
Qui plus est, c'est le même sous-groupe de P qui constituera
les contre-exemples dans tous les cas.
Effectivement :

1) $p^\omega P$ est vertical maximal en vertu du corollaire 5.1.15.
   La pureté de celui-ci dépend donc uniquement de sa netteté.
   Or $p^\omega P \cap pP = p^\omega P = < x_0 >$ puisque $p^\omega P < pP$.
   Cependant, $pp^\omega P = p< x_0 > = 0$ car $o(x_0) = p$.
   Force est donc de constater que $p^\omega P \cap pP \neq pp^\omega P$ puisque $x_0 \neq 0$;

2) $p^\omega P$ est la fermeture du sous-groupe pur 0.
   Or, comme nous venons tout juste de le constater,
   $p^\omega P$ n'est pas pur dans P.

De plus, $p^{\omega}P$ constitue aussi un exemple de la fermeture d'un sous-groupe net qui n'est pas nette;

3) la verticalité de $p^{\omega}P$ dans G est non seulement éventuelle mais factuelle.
Toutefois, par le corollaire 6.1.8,
$p^{\omega}P$ ne peut être purifiable sans être pur;

4) supposons que $(p^{\omega}P)[p]$ est purifiable dans G.
6.2.13 entraîne alors que $(p^{\omega}P)[p]$ supporte un sous-groupe pur dans G.
Ce sous-groupe étant alors vertical maximal dans P par 5.1.2,
il est égal à $p^{\omega}P$ par 5.1.16.
Ceci est toutefois impossible puisque $p^{\omega}P$ n'est pas pur dans P. ▩

Avant de conclure de manière définitive, je vous laisserai sur une problématique qui aurait normalement dû avoir sa place dans le sujet que nous avons traité, mais qui a néanmoins été évitée en raison de la longueur fort probable de son étude.

Nous avons pu constater qu'à l'inverse d'une enveloppe nette d'un sous-groupe H de G, une enveloppe pure de H n'existe pas toujours. Qu'en est-il de l'existence d'une enveloppe verticale?

Définition 6.3.2
H est un sous-groupe verticalisable dans G si et seulement si H possède une enveloppe verticale dans G.

Nous savons déjà que les socles, les sous-groupes d'un groupe divisible ainsi que ceux de certains groupes bornés sont verticalisables puisqu'ils constituent leur propre enveloppe verticale. Un traitement complet du sujet engendrerait sans doute encore des pages de réflexion. Toutefois, nous pouvons tenter une première incursion grâce à la proposition 2.1.5. Effectivement, puisqu'un sous-groupe essentiel dans G est vertical dans celui-ci, H + G[p] constitue un candidat à l'enveloppe verticale de H dans G qui mérite notre attention. Voici un premier résultat qui pourrait s'avérer une piste de départ.

Proposition 6.3.3

Soit $H < A < G$ tel que A est un sous-groupe pur dans G.
Si $H + A[p]$ est une enveloppe verticale de H dans G
alors A est une enveloppe pure de H dans G.

Démonstration

Supposons que $H + A[p]$ est une enveloppe verticale de H dans G.
Soit L un prolongement pur de H dans G contenu dans A.
Étant essentiel dans L, $H + L[p]$ est vertical dans L par 4.2.6
et dans G par 4.2.7.
La minimalité de $H + A[p]$ entraîne alors que $H + L[p] = H + A[p]$.
Montrons que L est essentiel dans A.
Soit $a \in A[p] < H + L[p]$ i.e. $a = h + l$ où $h \in H$ et $l \in L[p]$.
Ainsi $pa = ph + pl = ph = 0$ d'où $h \in H[p] < L[p]$.
Par conséquent, $a \in L[p]$.
Puisque L est net dans A par 2.2.3, L = A par 2.2.11. ▪

CONCLUSION

La verticalité a ceci d'attrayant qu'elle est foisonnante de propriétés qui dirigent les recherches dans plusieurs sens. Ces caractéristiques sont d'autant plus intéressantes lorsqu'elles ne sont pas partagées par ses deux consoeurs la netteté et la pureté. Toutefois, certaines questions demeurent toujours sans réponse.

En guise d'exemples, dans quels cas l'intersection de deux sous-groupes verticaux dans G n'est pas verticale dans G? À l'aide de la référence bibliographique [8], une piste à envisager pourrait être la création d'un sous-groupe cyclique H non vertical dans G mais purifiable dans celui-ci. Il s'agirait alors de construire deux enveloppes pures distinctes de ce sous-groupe de telle sorte que l'intersection K de ces enveloppes contienne H. Ensuite, il faudrait démontrer que K ne peut être vertical dans G.

En second lieu, quand un sous-groupe borné B de G voit-il tous ses sous-groupes devenir verticaux dans G? Nous savons déjà que tout sous-groupe de B est vertical dans G lorsque B est borné par p. Également, tout sous-groupe de B est vertical dans G lorsque B est borné par p^2, à condition que B soit pur dans G. Enfin, tout sous-groupe de B est vertical dans G lorsque B est borné par p^{n+2} où $n \geq 1$ si et seulement si $B[p] = (p^nB)[p]$, à condition que B soit pur dans G également. Cependant, existe-t-il une condition suffisante plus faible que la pureté, voire nécessaire, pouvant engendrer le même résultat?

Ou encore, quels sont les groupes dont tous les sous-groupes sont éventuellement-verticaux? En vertu du théorème 6.2.2, la classe des groupes dont tous les sous-groupes sont éventuellement-verticaux doit contenir celle des groupes dont tous les sous-groupes sont purifiables. Par conséquent, en consultant la référence bibliographique [6], nous constatons que les groupes G tel que réd(G) est borné font partie de cette classe.

Également, la question de la verticalité totale étudiée notamment par T. Okuyama pourrait s'avérer enrichissante. Précisons que H est totalement vertical dans G si et seulement si p^iH est vertical dans G pour tout $i \geq 0$.

Néanmoins, à mon avis, la question des enveloppes verticales est sans doute celle qui mérite le plus d'attention. Étant donné que la verticalité et la netteté engendrent la pureté et vice versa, la problématique des enveloppes verticales en rapport avec leurs homologues pures devient attirante sachant que l'existence des enveloppes nettes nous est toujours acquise. Effectivement, il existe peut-être des liens intéressants à établir entre la purifiabilité et la verticalisation d'un sous-groupe dans G.

BIBLIOGRAPHIE

1. **Benabdallah, K.,** *On Pure-High Subgroups of Abelian Groups,* Can. Math. Bull., vol. 17, n° 4, 1974, p. 479-482.

2. **Benabdallah, K., B. Charles, A. Mader,** *Vertical Subgroups of Primary Abelian Groups,* Can. J. Math., vol. 43, n° 1, 1991, p. 3-18.

3. **Benabdallah, K., J. Irwin,** *On Minimal Pure Subgroups,* Publ. Math., vol. 23, 1976, p. 111-114.

4. **Benabdallah, K., J. M. Irwin,** *On Quasi-Essential Subgroups of Primary Abelian Groups,* Can. J. Math., vol. 22, n° 6, 1970, p. 1176-1184.

5. **Benabdallah, K., A. Mader,** *When is Multiplication by P a Closed Map?,* Contemporary Mathematics, vol. 131, 1992, n° 1, p. 61-66.

6. **Benabdallah, K., T. Okuyama,** *On Purifiable Subgroups of Primary Abelian Groups,* Communications in Algebra, vol. 19, n° 1, 1991, p. 85-96.

7. **Benabdallah, K., T. Okuyama,** *On Subsocles of Primary Abelian Groups,* Rocky Mountain Journal of Mathematics, vol. 22, n° 3, 1992, p. 813-818.

8. **Benabdallah, K., C. Piché,** *Sur les sous-groupes purifiables des groupes abéliens primaires,* Can. Math. Bull., vol. 33, n° 1, 1990, p. 11-17.

9. **Benabdallah, K., S. Robert,** *Intersections finies de sous-groupes nets,* Can. J. Math., vol. 32, n° 4, 1980, p. 885-892.

10. **Fuchs, L.,** *Infinite Abelian Groups*, Academic Press, vol. 1 et 2, 1970 et 1973.

11. **Griffith, Phillip A.,** *Infinite Abelian Group Theory,* The University of Chicago Press, Chicago and London, 1970.

12. **Hill, P., C. Megibben,** *Minimal Pure Subgroups in Primary Groups,* Bull. Soc. math. France, vol. 92, 1964, p. 251-257.

13. **Irwin, J. M., K. Benabdallah,** *On N-High Subgroups of Abelian Groups,* Bull. Soc. math. France, vol. 96, 1968, p. 337-346.

14. **Kaplanski, I.,** *Infinite Abelian Groups,* The University of Michigan Press, Ann Arbor, 1954.

15. **Koyama, T., J. Irwin,** *On Topological Methods in Abelian Groups,* Études sur les groupes abéliens, 1967, p. 207-222.

16. **Piché, C.,** *Groupes abéliens munis de topologies linéaires,* Université de Montréal, 1982.

17. **Simauti, K.,** *On Abelian groups in which every neat subgroup is a pure subgroup,* Comment. Math. Univ. St. Paul, n° 17, 1969, p. 105-110.

REMERCIEMENTS

Je désire remercier chaleureusement monsieur Khalid Benabdallah qui m'a judicieusement dirigé dans mes recherches, qui m'a fourni la documentation ainsi que prodigué les conseils nécessaires afin de mener ce travail de recherches à bon port. Je tiens spécialement à lui exprimer ma reconnaissance pour la patience et la disponibilité dont il a fait preuve, étant donné que la réalisation de cet ouvrage s'est échelonnée sur une période intercalée par des intermèdes souvent très longs.