

---

**Université de Montréal**

**LE JEU DE WYTHOFF ET SES GÉNÉRALISATIONS**

par

**Josée Deslongchamps**

Département de mathématiques et de statistique  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de  
Maître ès sciences (M. Sc.)  
en Mathématiques

juillet 1999

© Josée Deslongchamps, MCMXCIX



QA  
3  
U54  
1999  
v.011

(mirrored text)

LE BUDGET WYTHOET ET SES GÉNÉRALISATIONS

(mirrored text)

(mirrored text)

(mirrored text)

(mirrored text)

(mirrored text)



(mirrored text)

---

**Université de Montréal**  
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé :

**LE JEU DE WYTHOFF ET SES GÉNÉRALISATIONS**

présenté par :

**Josée Deslongchamps**

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Président du jury : Qazi Ibadur Rahman

Directeur de recherche : Jean M. Turgeon

Membre du jury : Ivo Rosenberg

Mémoire accepté le : 99-09-22

## SOMMAIRE

---

Ce travail est une synthèse de certains jeux de soustraction. Nous y présentons d'abord les notions générales liées aux jeux de soustractions et les définitions qui seront utilisés par la suite.

Le deuxième chapitre est consacré au célèbre jeu de Nim. Nous exposons différentes théories élaborées par Charles Leonard Bouton et D.P. McIntyre afin de trouver les positions gagnantes. Nous résoudrons d'abord ce jeu en utilisant la remarquable somme de Nim et ses propriétés. À la fois simple et efficace, cette méthode est certainement la plus utilisée de toutes. Nous trouverons aussi les positions gagnantes du jeu de Nim en écrivant les positions en base 4, 8, ... Ces méthodes, bien qu'aussi efficaces que la somme de Nim, sont peu utilisées parce qu'elles sont beaucoup plus complexes mais très intéressantes sur le plan théorique.

La première section du troisième chapitre est consacrée à la présentation de sujets qui serviront à plusieurs reprises dans la suite du texte : complémentarité de deux suites, fractions continues, définitions, etc.

Dans la deuxième section du même chapitre, le jeu de Wythoff, qui est une variante du jeu de Nim, sera expliqué et solutionné. Les positions gagnantes du jeu de Wythoff sont liées de façon surprenante au nombre d'or et à la suite de Fibonacci. Ces positions sont d'abord définies par récurrence et sont constituées de deux suites complémentaires. Le célèbre théorème de Beatty permet de découvrir le lien entre ces suites complémentaires et le nombre d'or. À son tour le nombre d'or permet de caractériser les positions gagnantes par algèbre. Quant à la suite de Fibonacci, elle permet de construire un système de numération qui servira à caractériser les positions par arithmétique. En

retour, la liste des positions gagnantes révèle une façon de construire un ensemble infini de suites de Fibonacci généralisées dont l'union contient tous les entiers positifs.

Nous étudierons ensuite des généralisations du jeu de Wythoff. Elles seront présentées dans un ordre logique plutôt que chronologique, de sorte que chaque version sera une généralisation de la précédente. Comme pour le jeu de Wythoff les positions gagnantes sont caractérisées gagnantes de trois façons différentes : par récurrence, par algèbre et par arithmétique. De plus, au moins une stratégie gagnante et des exemples qui couvrent tous les cas possibles.

Le dernier chapitre traite de la version qui-perd-gagne d'une généralisation du jeu de Wythoff. Un jeu peu populaire mais qui mériterait qu'on y accorde une plus grande importance, c'est pourquoi le quatrième chapitre y est consacré. Ici encore nous donnons les positions gagnantes par récurrence, par algèbre et par arithmétique.

Bon jeu!

# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>Sommaire</b> .....	<b>iii</b>
<b>Liste des tableaux</b> .....	<b>vii</b>
<b>Liste des figures</b> .....	<b>viii</b>
<b>Chapitre 1 : Introduction</b> .....	<b>1</b>
1.1. Définitions préliminaires .....	1
<b>Chapitre 2 : Jeu de Nim</b> .....	<b>4</b>
2.1. Jeu de Nim original .....	4
2.1.1. Règles du jeu.....	4
2.1.2. Somme de Nim .....	5
2.1.3. Jeu de Nim à trois piles .....	8
2.1.4. Jeu de Nim à plus de trois piles .....	10
2.1.5. Autres méthodes pour trouver les positions gagnantes.....	11
<b>Chapitre 3 : Le jeu de Wythoff</b> .....	<b>15</b>
3.0. Notion préliminaires.....	15
3.0.1. Suites complémentaires .....	15
3.0.2. Représentation d'un entier positif par les numérateurs et dénominateurs des convergents d'une fraction continue .....	16
3.0.3. Représentation d'un entier positif avec les nombres de Fibonacci.....	22
3.1. Le jeu de Wythoff original .....	24
3.1.1. Règles du jeu.....	24
3.1.2. Première représentation des positions gagnantes (récurrente).....	26
3.1.3. Deuxième représentation des positions gagnantes (algébrique).....	33
3.1.4. Troisième représentation des positions gagnantes (arithmétique).....	38
3.2. Première généralisation du jeu de Wythoff.....	43
3.2.1. Règles du jeu.....	43

3.2.2.	Première représentation des positions gagnantes (récurrente).....	43
3.2.3.	Deuxième caractérisation des positions gagnantes (algébrique) .....	46
3.2.4.	Troisième représentation des positions gagnantes (arithmétique).....	48
3.3.	Deuxième généralisation du jeu de Wythoff .....	52
3.3.1.	Règles du jeu.....	52
3.3.2.	Première représentation des paires gagnantes (récurrente).....	52
3.3.3.	Deuxième représentation des paires gagnantes (algébrique).....	57
3.3.4.	Troisième représentation des positions gagnantes (arithmétique).....	59
3.4.	Troisième généralisation du jeu de Wythoff .....	65
3.4.1.	Règles du jeu.....	65
3.4.2.	Première représentation des positions gagnantes (récurrente).....	65
3.4.3.	Deuxième caractérisation des positions gagnantes (algébrique) .....	69
3.4.4.	Troisième représentation des positions gagnantes (arithmétique).....	72
<b>Chapitre 4 : Qui-perd-gagne.....</b>		<b>78</b>
4.1.	Jeu qui-perd-gagne de la première généralisation du jeu de Wythoff.....	78
4.1.1.	Règles du jeu.....	78
4.1.2.	Première représentation des positions gagnantes (récurrente).....	78
4.1.3.	Deuxième représentation des positions gagnantes (algébrique).....	82
4.1.4.	Troisième représentation des positions gagnantes (arithmétique).....	83
<b>Conclusion .....</b>		<b>91</b>
<b>Références.....</b>		<b>92</b>

## LISTE DES TABLEAUX

---

Tableau I : Somme de Nim .....	6
Tableau II : Somme de Nim en base 2.....	6
Tableau III : Exemple d'un jeu de Nim à deux piles.....	10
Tableau IV : Exemple de position gagnante au jeu de Nim à deux piles .....	10
Tableau V : Exemple d'un jeu de Nim à cinq piles.....	11
Tableau VI : Exemple de position gagnante au jeu de Nim à cinq piles .....	11
Tableau VII : Passage de la base 4 à la base 2.....	12
Tableau VIII : Représentation des nombres en base 4.....	12
Tableau IX : Position gagnante recherchée .....	13
Tableau X : Passage de la base 8 à la base 2 .....	14
Tableau XI : Valeurs de $p_i$ et $q_i$ lorsque $a_i = 2$ .....	17
Tableau XII : Exemples de représentations .....	22
Tableau XIII : Les suites $\{F^*_i\}$ et $\{F_i\}$ .....	23
Tableau XIV : Exemples de représentations par les nombres de Fibonacci.....	23
Tableau XV : Positions gagnantes au jeu de Wythoff.....	27
Tableau XVI : Exemples de jeux de Wythoff.....	42
Tableau XVII : Positions gagnantes à la première généralisation du jeu de Wythoff où $a = 2$ .....	45
Tableau XVIII : Exemple d'un jeu de la première généralisation du jeu de Wythoff où $a = 2$ .....	50
Tableau XIX : Positions gagnantes de la deuxième généralisation du jeu de Wythoff où $k = 4$ .....	56
Tableau XX : Positions gagnantes de la troisième généralisation du jeu de Wythoff où $a = 2$ et $b = 3$ .....	69
Tableau XXI : Positions gagnantes du jeu qui-perd-gagne de Wythoff où $a = 1$ .....	80
Tableau XXII : Positions gagnantes du jeu qui-perd-gagne de Wythoff où $a = 2$ .....	81



## **LISTE DES FIGURES**

---

Figure 1 : Le jeu de Nim sur l'échiquier.....	5
Figure 2 : Le jeu de Wythoff sur l'échiquier .....	24
Figure 3 : Façon d'obtenir les positions gagnantes sur l'échiquier .....	25
Figure 4 : Positions gagnantes et perdantes sur l'échiquier.....	25

# CHAPITRE 1 : INTRODUCTION

---

## 1.1. Définitions préliminaires

Avant de nous attaquer aux jeux eux-mêmes, notons quelques définitions et théorèmes qui nous serviront de bases sur lesquelles reposera le reste de notre travail.

Définition : Un jeu dans lequel jouent au moins deux joueurs à tour de rôle en faisant un déplacement jusqu'à ce qu'un des joueurs gagne est appelé *progressivement fini* si

- (i) il y a un nombre fini de déplacements possibles à chaque position du jeu;
- (ii) la partie a une fin (avec le gain d'un des joueurs) après un nombre fini de déplacements.

Définition : Un *jeu de soustraction* est défini comme un jeu progressivement fini qui se joue à deux. Les joueurs jouent en alternance et retirent un ou plusieurs jetons du nombre original tout en respectant les règles définies. Le joueur qui enlève le dernier jeton est le gagnant.

Définition : Un *déplacement* dans un jeu de soustraction consiste à enlever un certain nombre de jetons.

Notre objectif est évidemment de gagner. Pour ce faire, nous voulons trouver un moyen de s'assurer une victoire éventuelle quels que soient les déplacements futurs de notre adversaire. Ce moyen sera la stratégie gagnante.

Définition : Une *stratégie gagnante* pour un joueur est une règle qui dit au joueur quel déplacement il doit faire à chaque étape du jeu pour lui assurer une victoire éventuelle.

Pour trouver cette stratégie, il faudra étudier les positions du jeu et les déplacements possibles pour chaque position.

Chaque position  $P$  d'un jeu où il a deux piles de jetons est représentée par le couple  $(x, y)$ , où  $x$  est le nombre de jetons de la plus petite pile et  $y$ , le nombre de jetons de la plus grande.

Définition : Une *position gagnante*, dans un jeu progressivement fini, est une position telle que le joueur qui s'y est rendu peut gagner en jouant correctement peu importe les déplacements de l'adversaire.

La stratégie consiste à se diriger vers cette position gagnante. C'est-à-dire que nous devons nous déplacer vers cette position, tout en respectant les règles du jeu, afin de s'assurer d'une victoire éventuelle. Par contre, si un des joueurs est déjà en position gagnante, l'adversaire se trouve avantagé puisque celui-ci a toujours la possibilité d'appliquer la stratégie gagnante.

Pour montrer que l'ensemble  $\{P_0, P_1, P_2, \dots\}$  est l'ensemble des positions gagnantes, il suffira de montrer que les deux propriétés suivantes sont respectées.

(a) À partir d'une position perdante, il existe un déplacement qui permet de se rendre à une position gagnante.

(b) À partir d'une position gagnante, tous les déplacements possibles mènent à une position perdante.

En somme, si nous sommes dans une position perdante, nous devons nous déplacer vers une position gagnante. L'adversaire se trouvera donc devant une position gagnante et n'aura pas d'autre choix que se déplacer vers une position perdante. Nous nous déplacerons de nouveau vers une position gagnante et le jeu continuera de cette façon jusqu'à ce que l'on obtienne la victoire.

Théorème 1 : Dans un jeu progressivement fini, toute position est soit gagnante soit perdante, mais jamais les deux.

Démonstration : La preuve se fait par induction sur le nombre de déplacements qu'il peut rester au jeu.

Soit  $P$  une position pour laquelle il n'y a plus de déplacement possible. La position  $P$  est nécessairement gagnante puisque nul déplacement ne mène à une position gagnante.

Maintenant supposons que le théorème est vrai pour un jeu auquel il ne reste pas plus de  $m - 1$  déplacements, et soit  $P$  une position à laquelle il reste  $m$  déplacements. Toutes les positions  $P_n$  vers lesquelles on peut aller ont au plus  $m - 1$  déplacements restants. Par hypothèse, chacun de ces déplacements est gagnant ou perdant mais pas les deux. Il y a donc deux possibilités pour les  $P_n$ ; soit elles sont toutes perdantes, soit il y a une position gagnante parmi celle-ci. Si tous les  $P_n$  sont perdantes, alors  $P$  est gagnante et s'il y a un de  $P_n$  gagnant, alors  $P$  est perdante. Donc,  $P$  lui-même est soit gagnant soit perdant mais pas les deux. C.Q.F.D.

# CHAPITRE 2 : JEU DE NIM

---

## 2.1. Jeu de Nim original

Le jeu de Nim est probablement le plus ancien des jeux [24] mais a été résolu pour la première fois qu'en 1902 par monsieur Charles Leonard Bouton [18]. Par la suite, d'autres stratégies gagnantes ont été élaborées, entre autres par D.P. McIntyre [19], mais ces nouvelles stratégies sont étroitement liées à celle de C.L. Bouton. De plus, elles sont plus complexes et moins pratiques que la stratégie de C.L. Bouton.

Ces stratégies consistent à écrire le nombre de jetons de chaque pile en base 2 pour la stratégie de Bouton et en base 4, 8, ... pour celles de McIntyre. Dans ce chapitre nous allons voir en détail la théorie qui mène aux stratégies victorieuses ainsi que quelques exemples de jeux avec leur solution à partir de ces stratégies.

### 2.1.1. Règles du jeu

Le jeu de Nim est défini par les règles suivantes :

- (i) deux joueurs jouent en alternance;
- (ii) on a au départ un ou plusieurs piles de jetons, un nombre arbitraire dans chacune des piles;
- (iii) un joueur doit prendre un nombre arbitraire de jetons dans une des piles. Il doit prendre au moins un jeton et au plus la pile entière sélectionnée;
- (iv) le joueur qui prend le dernier jeton gagne la partie.

<b>Observations</b>
---------------------

Le cas à une seule pile est trivial. Le joueur $A$ prend la pile entière et gagne!
--

Lorsqu'il y a deux piles, les piles sont soit égales ou inégales. Si elles sont inégales le joueur  $A$  doit égaliser les deux piles. Le joueur  $B$  les rendra inégales. En continuant l'égalisation, le joueur  $A$  arrivera nécessairement à la position  $(0, 0)$  et gagnera. Si les piles sont égales, le joueur  $A$  rendra les piles inégales et perdra si le joueur  $B$  égalise les piles à chacun de ses déplacements.

Lorsqu'il y a trois piles inégales, il faut éviter d'égaliser deux des piles. Autrement, le joueur  $B$  enlèvera la troisième pile et gagnera.

### Sur un échiquier

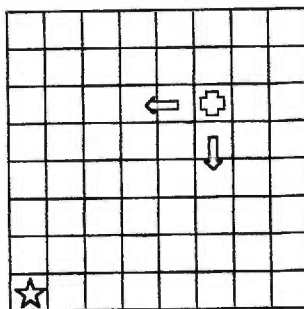


Figure 1 : Le jeu de Nim sur l'échiquier

Le jeu à deux piles peut être représenté sur un échiquier par le jeu où il faut déplacer la tour vers le bas ou vers la gauche jusqu'à ce qu'elle soit rendue dans la case étoilée (figure 1).

#### 2.1.2. Somme de Nim

Soit  $A$  et  $B$  deux entiers non négatifs tels que

$$A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i 2^i = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_0)_2$$

et

$$B = \sum_{i=0}^{\infty} b_i 2^i = (b_n, b_{n-1}, \dots, b_0)_2.$$

où  $n = \max_{i \geq 0} \{i \mid a_i \text{ ou } b_i \neq 0\}$ .

On définit la *somme de Nim*  $A \oplus B$  comme étant l'entier  $C$  tel que

$$C = \sum_{i=0}^n c_i 2^i = (c_n, c_{n-1}, \dots, c_0)_2 = \sum_{i=0}^n c_i 2^i$$

$$\text{où } c_i = \begin{cases} 0 & \text{si } a_i + b_i \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } a_i + b_i \text{ est impair.} \end{cases}$$

Tableau I : Somme de Nim

$\oplus$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0	3	2	5	4	7	6	9	8
2	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11
3	3	2	1	0	7	6	5	4	11	10
4	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13
5	5	4	7	6	1	0	3	2	13	12
6	6	7	4	5	2	3	0	1	14	15
7	7	6	5	4	3	2	1	0	15	14
8	8	9	10	11	12	13	14	15	0	1
9	9	8	11	10	13	12	15	14	1	0

Tableau II : Somme de Nim en base 2

$\oplus$	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001
0000	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001
0001	0001	0000	0011	0010	0101	0100	0111	0110	1001	1000
0010	0010	0011	0000	0001	0110	0111	0100	0101	1010	1011
0011	0011	0010	0001	0000	0111	0110	0101	0100	1011	1010
0100	0100	0101	0110	0111	0000	0001	0010	0011	1100	1101
0101	0101	0100	0111	0110	0001	0000	0011	0010	1101	1100
0110	0110	0111	0100	0101	0010	0011	0000	0001	1110	1111
0111	0111	0110	0101	0100	0011	0010	0001	0000	1111	1110
1000	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111	0000	0001
1001	1001	1000	1011	1010	1101	1100	1111	1110	0001	0000

Nous allons voir que la somme de Nim est très utile pour pouvoir gagner au jeu de Nim. Voyons d'abord quelques propriétés.

#### Propriétés de la somme de Nim :

- (1) La somme de Nim est commutative, i.e.  $A \oplus B = B \oplus A$ . Ceci vient directement de la définition.
- (2) La somme de Nim est associative, i.e.  $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ .

Si  $A = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_0)_2$ ,  $B = (b_n, b_{n-1}, \dots, b_0)_2$ ,  $C = (c_n, c_{n-1}, \dots, c_0)_2$ , on a par la définition que les sommes  $(A \oplus B) \oplus C$  et  $A \oplus (B \oplus C)$  sont égales à  $\sum_{i=0}^n d_i 2^i$ , où

$$c_i = \begin{cases} 0 & \text{si } a_i + b_i + c_i \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } a_i + b_i + c_i \text{ est impair.} \end{cases} \quad (\text{On écrit } A \oplus B \oplus C \text{ pour dénoter ces deux mêmes résultats.})$$

(3) 0 est l'élément neutre, i.e.  $0 \oplus A = A$  pour tout  $A$ .

(4)  $A$  est l'élément inverse (absorbant) de  $A$ , i.e.  $A \oplus A = 0$  pour tout  $A$ . En effet, si  $A = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_0)_2$ , alors  $a_i + a_i = 2a_i$ , un nombre pair pour tout  $i$ .

Autres propriétés :

(a)  $0 \oplus 0 = 0$ .

(b)  $A \oplus B$  est différent de tous les nombres  $P \oplus B$  ( $P < A$ ) et  $A \oplus Q$  ( $Q < B$ ).

(c) Tout entier non négatif  $X < A \oplus B$  est égal à un des nombres  $P \oplus B$  ( $P < A$ ) ou  $A \oplus Q$  ( $Q < B$ ).

Démonstration :

(a) Cette propriété vient directement des propriétés (3) ou (4).

(b) Si  $A \oplus B = P \oplus B$ , où  $P < A$ , alors  $A \oplus B \oplus B = P \oplus B \oplus B$ . Puisque  $B \oplus B = 0$ , on a  $A = P$ , une contradiction.

(c) Soit  $X = (x_n, x_{n-1}, \dots, x_0)_2$ ,  $A = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_0)_2$ ,  $B = (b_n, b_{n-1}, \dots, b_0)_2$  et  $X < A \oplus B = C$  où  $C = (c_n, c_{n-1}, \dots, c_0)_2$ . Soit  $k$  le plus grand entier tel que  $c_k \neq x_k$ . Puisque  $C > X$  on doit avoir  $c_k = 1$  et  $x_k = 0$ . Puisque  $c_k = 1$  on a soit  $a_k = 1, b_k = 0$  ou  $a_k = 0, b_k = 1$ .

Supposons que  $a_k = 1, b_k = 0$ . Alors  $B \oplus X < B \oplus C$ , puisque  $b_k + x_k = 0 < b_k + c_k = 1$ , et que tous les autres chiffres à la gauche dans  $B \oplus X$  et  $B \oplus C$  sont les mêmes. Mais  $B \oplus C = B \oplus B \oplus A = A$  alors  $B \oplus X < A$ . Soit  $P = B \oplus X$ , on a  $P \oplus B = B \oplus X \oplus B = X$ , donc  $P$  est de la forme voulue avec  $P < A$ .

On démontre de la même manière que le cas  $a_k = 0, b_k = 1$  donne  $X = A \oplus Q$  où  $Q < B$ . C.Q.F.D.



Ainsi, la propriété (c) montre que la somme de Nim est égale au nombre qui n'est apparu ni à gauche, ni en haut dans le tableau.

### 2.1.3. Jeu de Nim à trois piles

Considérons le cas où il y a trois piles de jetons. Soit  $a$ ,  $b$  et  $c$  les nombres représentant la première, deuxième et troisième pile de jetons respectivement.

Supposons que ces nombres, écrits en base 2, sont

$$a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i 2^i = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_0)_2,$$

$$b = \sum_{i=0}^{\infty} b_i 2^i = (b_n, b_{n-1}, \dots, b_0)_2,$$

et

$$c = \sum_{i=0}^{\infty} c_i 2^i = (c_n, c_{n-1}, \dots, c_0)_2$$

où  $n = \max_{i \geq 0} \{i \mid a_i, b_i \text{ ou } c_i \neq 0\}$ .

Théorème 2 : La position  $(a, b, c)$  est gagnante si, et seulement si, la somme de Nim,  $a \oplus b \oplus c$ , est nulle.

Démonstration : Chaque déplacement change seulement un des nombres  $a$ ,  $b$ ,  $c$  en un nombre plus petit. De ce nombre ( $a$ ,  $b$  ou  $c$ ), au moins un des chiffres ( $a_i$ ,  $b_i$  ou  $c_i$ ) est changé. Notons que chaque changement dans un chiffre change aussi sa parité.

Considérons les sommes

$$a_m + b_m + c_m, a_{m-1} + b_{m-1} + c_{m-1}, \dots, a_1 + b_1 + c_1, a_0 + b_0 + c_0.$$

Si au moins une de ces sommes est impaire, nous allons montrer que le joueur à qui c'est le tour à jouer peut gagner peu importe ce que son adversaire jouera par la suite.

Soit  $k$  le plus grand entier tel que  $a_k + b_k + c_k$  est impair. Il y a donc au moins un des chiffres  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $c_k$  qui est égal à 1. Supposons que  $a_k = 1$ . Si on enlève des jetons de la première pile en s'assurant qu'aucun des chiffres  $a_m, a_{m-1}, \dots, a_{k+1}$  n'est changé, que  $a_k$  est changé pour un 0 et que les autres chiffres  $a_{k-1}, \dots, a_1, a_0$  deviennent tels que les

sommes  $a_i + b_i + c_i$  ( $i = k - 1, \dots, 1, 0$ ) soient paires. Ces changements rendent la somme de Nim  $a \oplus b \oplus c$  nulle.

Montrons maintenant qu'un tel déplacement est toujours possible. Puisque  $a_k$  est changé pour un 0, on possède  $2^k$  jetons pour modifier les autres chiffres  $a_{k-1}, \dots, a_1, a_0$ . Pour ce faire, nous aurons besoin d'au plus

$$\sum_{i=0}^{k-1} 2^i = 2^k - 1 \text{ jetons}$$

si les  $a_i$  ( $i = 0, \dots, k - 1$ ) sont tous des 0 et que nous devons les changer pour des 1. Un tel changement est toujours possible parce que nous devons enlever au moins  $2^k - (2^k - 1) = 1$  jeton.

Lorsque l'adversaire jouera à son tour, il changera lui aussi la parité d'une des sommes. Ainsi, la somme de Nim deviendra non nulle.

Corollaire 1 : Si  $z = x \oplus y$ , alors  $(x, y, z)$  est une position gagnante.

Démonstration : À partir du théorème 2, il suffit de démontrer que  $x \oplus y \oplus z = 0$ . En effet,

$$x \oplus y \oplus z = x \oplus y \oplus (x \oplus y) = 0,$$

selon la propriété (4).

C.Q.F.D.

### Stratégie gagnante

Soit  $a$ ,  $b$  et  $c$  le nombre de jetons de chacune des piles. Calculer la somme de Nim  $a \oplus b \oplus c$  de ces trois piles.

- Si cette somme n'est pas zéro, se déplacer vers une position pour laquelle la somme de Nim est zéro.
- Si cette somme est zéro, on perd si l'adversaire joue parfaitement jusqu'à la fin.

Exemples : Soit la position  $(43, 27, 12)$  au jeu de Nim à trois. Écrivons ces nombres en base deux et calculons la somme de Nim de ces trois nombres.

Tableau III : Exemple d'un jeu de Nim à deux piles

	$2^5$	$2^4$	$2^3$	$2^2$	$2^1$	$2^0$
43	1	0	1	0	1	1
27		1	1	0	1	1
12			1	1	0	0
$43 \oplus 27 \oplus 12$	1	1	1	1	0	0

La dernière ligne du tableau représente la somme de Nim du nombre de jetons de chaque pile. Puisque cette somme n'est pas nulle, il faudra se déplacer vers une position pour laquelle la somme de Nim sera nulle. Pour ce faire, nous devons enlever des jetons de la première pile.

En effet, en enlevant  $2^5 - 2^4 + 2^3 - 2^2 = 20$  jetons, on obtiendra la position (23, 27, 12) qui est gagnante puisque  $23 \oplus 27 \oplus 12 = 0$  et  $23 \oplus 27 = 12$ .

Tableau IV : Exemple de position gagnante au jeu de Nim à deux piles

	$2^5$	$2^4$	$2^3$	$2^2$	$2^1$	$2^0$
23	0	1	0	1	1	1
27	0	1	1	0	1	1
$23 \oplus 27 = 12$	0	0	1	1	0	0
$23 \oplus 27 \oplus 12$	0	0	0	0	0	0

#### 2.1.4. Jeu de Nim à plus de trois piles

**Théorème 3** : Soit  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  une position au jeu de Nim à  $n$  piles de jetons. Cette position est gagnante si, et seulement si, la somme de Nim  $x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$  est nulle.

La démonstration de ce théorème est semblable à celle du cas à trois piles de jetons. La stratégie gagnante est aussi semblable à celle où il y a trois piles de jetons.

#### **Stratégie gagnante**

Soit  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , le nombre de jetons de chacune des piles d'un jeu à  $n$  pile. Calculer la somme de Nim  $x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$  de ces trois piles.

- Si cette somme n'est pas zéro, se déplacer vers une position pour laquelle la somme de Nim est zéro.
- Si la somme de Nim est zéro, on perd si l'adversaire joue parfaitement jusqu'à la fin.

Exemple : Soit la position (43, 27, 12, 9, 5) d'un jeu à cinq piles de jetons. Écrivons ces nombres en base deux.

Tableau V : Exemple d'un jeu de Nim à cinq piles

	$2^5$	$2^4$	$2^3$	$2^2$	$2^1$	$2^0$
43	1	0	1	0	1	1
27	0	1	1	0	1	1
12	0	0	1	1	0	0
9	0	0	1	0	0	1
5	0	0	0	1	0	1
$43 \oplus 27 \oplus 12 \oplus 9 \oplus 5$	1	1	0	0	0	0

La dernière ligne du tableau représente la somme de Nim du nombre de jetons de chaque pile. Puisque cette somme n'est pas nulle, il faudra se déplacer vers une position pour laquelle la somme de Nim sera nulle. Pour ce faire, nous devons enlever des jetons de la première pile.

En effet, en enlevant  $2^5 - 2^4 = 16$  jetons, on obtiendra la position (27, 27, 12, 9, 5) qui est gagnante puisque  $27 \oplus 27 \oplus 12 \oplus 9 \oplus 5 = 0$ .

Tableau VI : Exemple de position gagnante au jeu de Nim à cinq piles

	$2^5$	$2^4$	$2^3$	$2^2$	$2^1$	$2^0$
27	0	1	1	0	1	1
27		1	1	0	1	1
12			1	1	0	0
9	0	0	1	0	0	1
5	0	0	0	1	0	1
$27 \oplus 27 \oplus 12 \oplus 9 \oplus 5$	0	0	0	0	0	0

### 2.1.5. Autres méthodes pour trouver les positions gagnantes

Au lieu de représenter le nombre de jetons de chaque pile en base 2, pour trouver les positions gagnantes, on peut utiliser les bases 4, 8, 16, etc.

---

#### Base 4

---

Soit un jeu à  $n$  piles de  $x_1, x_2, \dots, x_n$  jetons respectivement. Les nombres  $x_i$  peuvent être écrits de cette façon

$$x_i = \sum_{j=0}^m a_{ij} 4^j,$$

où  $0 \leq a_{ij} \leq 3$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Pour trouver les positions gagnantes passons de la base 4 à la base 2 et voyons pour quels coefficients (en base 4) la somme de Nim sera nulle.

Tableau VII : Passage de la base 4 à la base 2

$a_{ij}$	$a_{ij} 4^j$	$2^{2j+1}$	$2^{2j}$
0	0	0	0
1	$2^{2j}$	0	1
2	$2^{2j+1}$	1	0
3	$2^{2j} + 2^{2j+1}$	1	1

En vertu de la propriété (4) des sommes de Nim, on a

$$1 \oplus 1 = 2 \oplus 2 = 3 \oplus 3 = 0.$$

Il existe encore la somme

$$1 \oplus 2 \oplus 3 = 0$$

et, bien sûr l'ensemble  $\{0\}$ .

On vérifie assez facilement que tout autre ensemble dont les éléments sont 0, 1, 2 ou 3 et dont la somme de Nim est nulle admet une partition en sous-ensembles de la forme

$$\{0\}, \{1, 1\}, \{2, 2\}, \{3, 3\}, \{1, 2, 3\}.$$

Ainsi, la position  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  sera gagnante si, et seulement si, les ensembles  $\{a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}\}$  ( $j = 0, 1, \dots, m$ ) admettent une partition en sous-ensembles de la forme

$$\{0\}, \{1, 1\}, \{2, 2\}, \{3, 3\}, \{1, 2, 3\}.$$

Exemple : Soit la position (43, 27, 12, 9, 5) d'un jeu à cinq piles de jetons. Écrivons ces nombres en base quatre.

Tableau VIII : Représentation des nombres en base 4

	$4^2$	$4^1$	$4^0$
$x_i$	$a_{i2}$	$a_{i1}$	$a_{i0}$
43	2	2	3
27	1	2	2
12	0	3	0
9	0	2	1
5	0	1	1

Cette position n'est pas gagnante puisque l'ensemble  $\{a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{42}, a_{52}\}$ , la colonne des  $a_{i2}$ , en peut être séparé en sous-ensembles ayant tous une des formes  $\{0\}$ ,  $\{1, 1\}$ ,  $\{2, 2\}$ ,  $\{3, 3\}$  ou  $\{1, 2, 3\}$ . Donc  $a_{12} \oplus a_{22} \oplus a_{32} \oplus a_{42} \oplus a_{52} \neq 0$ .

Le déplacement approprié serait d'enlever des jetons de la première pile en se déplaçant vers la position (26, 27, 12, 9, 5).

Tableau IX : Position gagnante recherchée

	$4^2$	$4^1$	$4^0$
$x_i$	$a_{i2}$	$a_{i1}$	$a_{i0}$
26	1	2	2
27	1	2	2
12	0	3	0
9	0	2	1
5	0	1	1

On a maintenant,

$$\{a_{11}, a_{21}, \dots, a_{51}\} = \{1, 1\} \cup \{0\} \cup \{0\} \cup \{0\}$$

$$\{a_{12}, a_{22}, \dots, a_{52}\} = \{2, 2\} \cup \{1, 2, 3\}$$

$$\{a_{13}, a_{23}, \dots, a_{53}\} = \{2, 2\} \cup \{0\} \cup \{1, 1\}$$

Donc, on a  $a_{1j} \oplus a_{2j} \oplus \dots \oplus a_{5j} = 0$  pour  $j = 1, 2, 3$ , et  $x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_5 = 0$ .

---

### Base 8

---

De la même manière, soit un jeu à  $n$  piles de  $x_1, x_2, \dots, x_n$  jetons respectivement. Les nombres  $x_i$  peuvent être écrits de cette façon

$$x_i = \sum_{j=0}^m b_{ij} 8^j,$$

où  $0 \leq b_{ij} \leq 7, 1 \leq i \leq n$ .

Passons de la base 8 à la base 2 et voyons pour quels coefficients (en base 8) la somme de Nim sera nulle.

Tableau X : Passage de la base 8 à la base 2

$b_{ij}$	$b_{ij} 8^j$	$2^{3j+2}$	$2^{3j+1}$	$2^{3j}$
0	0	0	0	0
1	$2^{3j}$	0	0	1
2	$2^{3j+1}$	0	1	0
3	$2^{3j} + 2^{3j+1}$	0	1	1
4	$2^{3j+2}$	1	0	0
5	$2^{3j} + 2^{3j+2}$	1	0	1
6	$2^{3j+1} + 2^{3j+2}$	1	1	0
7	$2^{3j} + 2^{3j+1} + 2^{3j+2}$	1	1	1

On voit assez facilement que pour obtenir

$$a_{1j} \oplus a_{2j} \oplus \dots \oplus a_{nj} = 0$$

il faut et il suffit que l'ensemble  $\{a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}\}$  admette une partition en sous-ensembles de la forme

$$\begin{aligned} &\{0\}, \{1, 1\}, \{2, 2\}, \{3, 3\}, \{4, 4\}, \{5, 5\}, \{6, 6\}, \{7, 7\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}, \\ &\{1, 6, 7\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 4, 7\}, \{3, 5, 6\}, \{1, 2, 4, 7\}, \{1, 2, 5, 6\}, \\ &\{1, 3, 4, 6\}, \{1, 3, 5, 7\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 6, 7\}, \{4, 5, 6, 7\}, \end{aligned}$$

qui sont toutes les façons d'obtenir une somme de Nim nulle, sans redondance, avec les nombres 0, 1, 2, ..., 7.

De cette façon, la somme de Nim

$$x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$$

sera nulle si, et seulement si,  $a_{1j} \oplus a_{2j} \oplus \dots \oplus a_{nj} = 0$  pour tout  $j = 1, \dots, m$ .

On pourrait continuer de cette façon et exprimer les  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , en base 16, 32, ... mais on voit déjà qu'en base 8 il est très ardu d'arriver à trouver si une position est gagnante ou non.

# CHAPITRE 3 : LE JEU DE WYTHOFF

---

## 3.0. Notion préliminaires

Afin de mieux comprendre les stratégies gagnantes du jeu de Wythoff et de ses généralisations, il est essentiel d'introduire quelques notions qui seront fréquemment utilisées dans les prochaines sections.

### 3.0.1. Suites complémentaires

Définition : Soit  $A$  et  $B$  les ensembles de tous les entiers des séries entières  $a_n$  et  $b_n$  respectivement. On dit que les suites  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  et  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  sont *complémentaires* si

- (i) Aucun entier n'apparaît plus d'une fois dans  $A$  et aucun entier n'apparaît plus d'une fois dans  $B$ ,
- (ii)  $A \cap B = \emptyset$ ,
- (iii)  $A \cup B = \mathbb{Z}^+$ , l'ensemble de tous les entiers supérieurs à zéro.

Définition : [5] Soit  $N$  un entier et soit  $A$  et  $B$  les ensembles de tous les entiers des séries entières  $a_n$  et  $b_n$  respectivement,  $n \geq N$ . On dit que les suites  $a_n, b_n$  sont *complémentaires  $N$ -supérieures* si

- (iv) Aucun entier n'apparaît plus d'une fois dans  $a_n$  et aucun entier n'apparaît plus d'une fois dans  $b_n, n \geq N$ ,
- (v)  $A \cap B = \emptyset$ ,
- (vi)  $A \cup B =$  l'ensemble de tous les entiers supérieurs ou égaux à  $a_N$ .

Notation : On écrira  $[x]$  pour représenter la partie entière de  $x$ ; le plus grand entier inférieur ou égal à  $x$ .



Théorème 4 : (Théorème de Beatty) Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux nombres positifs irrationnels satisfaisant à l'équation  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ . Si  $a_n = [n\alpha]$  et  $b_n = [n\beta]$ , alors les suites  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  et  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  sont complémentaires.

Démonstration : Il suffit de montrer qu'il y a exactement un membre de la suite  $\zeta = \{\alpha, \beta, 2\alpha, 2\beta, 3\alpha, 3\beta, \dots, n\alpha, n\beta, \dots\}$  dans l'intervalle  $[h, h + 1)$ , pour tout entier positif  $h$ . Par conséquent, il suffit de montrer que si  $M > 1$  est un entier, alors il y a exactement  $M - 1$  membres de  $\zeta$  plus petit que  $M$ . Le nombre de  $n\alpha < M$  est  $\left[ \frac{M}{\alpha} \right]$  et le nombre de  $n\beta < M$  est  $\left[ \frac{M}{\beta} \right]$ . Donc le nombre de membres de  $\zeta$  plus petit que  $M$  est  $N = \left[ \frac{M}{\alpha} \right] + \left[ \frac{M}{\beta} \right]$ .

Maintenant,

$$\frac{M}{\alpha} - 1 < \left[ \frac{M}{\alpha} \right] < \frac{M}{\alpha}$$

et

$$\frac{M}{\beta} - 1 < \left[ \frac{M}{\beta} \right] < \frac{M}{\beta}.$$

En additionnant on obtient  $M - 2 < N < M$ . Puisque  $N$  est un entier, on a  $N = M - 1$ .

C.Q.F.D.

### 3.0.2.Représentation d'un entier positif par les numérateurs et dénominateurs des convergents d'une fraction continue

On étudie ici un cas particulier de la fraction continue simple d'un nombre. En effet, on s'attarde aux nombres compris entre un et deux.

Soit  $\alpha$  un nombre irrationnel tel que  $1 < \alpha < 2$ . Dénotons sa fraction continue simple (« simple continued fraction ») par

$$\alpha = 1 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}} = [1, a_1, a_2, a_3, \dots],$$

où les  $a_i$  sont des entiers positifs. Le convergent  $p_n/q_n$  satisfait à la récurrence

$$p_{-1} = 1, p_0 = 1, p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad (n \geq 1)$$

$$q_{-1} = 0, q_0 = 1, q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \quad (n \geq 1).$$

Exemple : Prenons le cas où les  $a_i$  sont tous égaux à 2. On aura alors comme suites  $\{p_i\}$  et  $\{q_i\}$  les suites représentées dans le tableau suivant.

Tableau XI : Valeurs de  $p_i$  et  $q_i$  lorsque  $a_i = 2$ .

$i$	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$p_i$	1	1	3	7	17	41	99	239	577	...
$q_i$	0	1	2	5	12	29	70	169	408	...

Dans les sections suivantes nous aurons besoins de quelques résultats concernant les suites  $\{p_i\}$  et  $\{q_i\}$ .

Lemme 1 : Soit

$$R_{i+1} = a_{i+1} p_i + a_{i-1} p_{i-2} + a_{i-3} p_{i-4} + \dots + a_{k+1} p_k$$

où  $k = 0$  si  $i$  est pair,  $k = 1$  si  $i$  est impair, alors

$$R_{i+1} = p_{i+1} - 1.$$

Démonstration : Si  $i$  est pair

$$\begin{aligned} R_{i+1} &= a_{i+1} p_i + a_{i-1} p_{i-2} + a_{i-3} p_{i-4} + \dots + a_1 p_0 \\ &= (p_{i+1} - p_{i-1}) + (p_{i-1} - p_{i-3}) + \dots + (p_1 - 1) \\ &= p_{i+1} - 1. \end{aligned}$$

Si  $i$  est impair

$$\begin{aligned} R_{i+1} &= a_{i+1} p_i + a_{i-1} p_{i-2} + \dots + a_2 p_1 \\ &= (p_{i+1} - p_{i-1}) + (p_{i-1} - p_{i-3}) + \dots + (p_2 - p_0) \\ &= p_{i+1} - p_0 \\ &= p_{i+1} - 1. \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Théorème 5 : [20] Tout entier positif peut être écrit de manière unique sous la forme

$$(1) \quad N = \sum_{i=0}^m s_i p_i,$$

où  $0 \leq s_i \leq a_{i+1}$ ,  $s_{i+1} = a_{i+2} \Rightarrow s_i = 0$  ( $i \geq 0$ ),

et aussi sous la forme

$$(2) \quad N = \sum_{i=0}^m t_i q_i,$$

où  $0 \leq t_0 \leq a_1$ ,  $0 \leq t_i \leq a_{i+1}$ ,  $t_i = a_{i+1} \Rightarrow t_{i-1} = 0$  ( $i \geq 1$ ).

Démonstration : On fait la démonstration de (1). La preuve de (2) est similaire.

(existence) Soit  $N$  un entier positif. Soit  $m$  le plus grand entier tel que  $p_m \leq N$ . Écrivons

$$\begin{aligned} N &= s_m p_m + r_m, & 0 \leq r_m < p_m \\ r_m &= s_{m-1} p_{m-1} + r_{m-1}, & 0 \leq r_{m-1} < p_{m-1} \\ &\dots & \\ r_{i+1} &= s_i p_i + r_i, & 0 \leq r_i < p_i \\ &\dots & \\ r_2 &= s_1 p_1 + r_1, & 0 \leq r_1 < p_1 \\ r_1 &= s_0 p_0. \end{aligned}$$

Donc

$$(3) \quad N = \sum_{i=0}^m s_i p_i.$$

Les nombres  $s_i$  de la représentation (3) satisfont à

$$s_i = \frac{r_{i+1} - r_i}{p_i} < \frac{p_{i+1}}{p_i} = \frac{a_{i+1} p_i + p_{i-1}}{p_i} = a_{i+1} + \frac{p_{i-1}}{p_i} \leq a_{i+1} + 1.$$

Donc  $0 \leq s_i \leq a_{i+1}$  ( $i \geq 0$ ). Supposons que  $s_i = a_{i+1}$  et  $s_{i-1} \geq 1$ . Alors

$$r_i = s_{i-1} p_{i-1} + r_{i-1} \geq p_{i-1},$$

et

$$r_{i+1} = s_i p_i + r_i = a_{i+1} p_i + r_i \geq a_{i+1} p_i + p_{i-1} = p_{i+1},$$

une contradiction. Donc  $s_i = a_{i+1} \Rightarrow s_{i-1} = 0$  ( $i \geq 1$ ).

(unicité) Supposons que  $N$  admet deux représentations différentes

$$N = \sum_{i=0}^m s_i p_i = \sum_{i=0}^m u_i p_i ,$$

où  $s_i$  et  $u_i$  satisfont aux conditions données en (1). Soit  $j$  le plus grand entier tel que  $s_j \neq u_j$ , disons  $s_j > u_j$ . Alors

$$\begin{aligned} p_j &\leq (s_j - u_j) p_j \\ &= \left( N - \sum_{i=0}^{j-1} s_i p_i \right) - \left( N - \sum_{i=0}^{j-1} u_i p_i \right) = \sum_{i=0}^{j-1} (u_i - s_i) p_i \\ &\leq \sum_{i=0}^{j-1} u_i p_i \\ &\leq \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} a_{j-2k} p_{j-2k-1} \\ &\stackrel{\text{lemme 1}}{=} p_j - 1, \end{aligned}$$

une contradiction.

C.Q.F.D.

Notons que si  $a_i = 1$ ,  $i \geq 1$ , (1) devient la représentation par la suite de Fibonacci, où tous les  $s_i$  sont 0 ou 1 (voir section suivante).

Théorème 6 : Soit  $\alpha = [1, a_1, a_2, \dots]$  un nombre irrationnel dont les convergents (ou réduites) sont  $p_n/q_n$ . Définissons  $D_n$  ( $n \geq -1$ ) de la manière suivante

$$D_n = \alpha q_n - p_n \quad (n \geq -1).$$

Alors, les  $D_n$  sont tels que

$$-1 = < D_{-1} < D_1 < D_3 < \dots < 0 < \dots < D_4 < D_2 < D_0 = \alpha - 1.$$

Démonstration :

De la théorie des fractions continue ([27], théorème 8.10), on sait que

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \dots < \alpha < \dots < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}.$$

C'est-à-dire

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \alpha$$

ou

$$0 < \alpha q_{2n} - p_{2n} = D_{2n}$$

pour  $n \geq 0$ .

De même, on a

$$\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} < \alpha$$

ou

$$0 < \alpha q_{2n+1} - p_{2n+1} = D_{2n+1}$$

pour  $n \geq 0$ .

Pour  $n = -1$ , on a

$$D_{-1} = \alpha q_{-1} - p_{-1} = \alpha \cdot 0 - 1 < 0.$$

Il reste donc à montrer que

$$|D_n| < |D_{n-2}|$$

pour  $n \geq -1$ .

Faisons référence au théorème de Lagrange ([27], théorème 8.24).

Théorème 7 : (Lagrange) Soit  $n \geq 0$  et soit  $p_n/q_n$  la  $n$ -ième réduite du nombre  $1 < \alpha < 2$ .

Soit  $a, b \in \mathbb{Z}$  tels que  $1 \leq b < q_{n+1}$ . Alors

$$|q_n \alpha - p_n| \leq |b \alpha - a|.$$

Donc si on prend  $b = q_{n-2}$  et  $a = p_{n-2}$ , on a le résultat voulu, soit

$$|q_n \alpha - p_n| < |\alpha q_{n-2} - p_{n-2}|$$

ou

$$|D_n| < |D_{n-2}|.$$

C.Q.F.D.

Définitions :

(a) On définit une *représentation* comme un  $(m+1)$ -uplet

$$R = (\delta_m, \delta_{m-1}, \dots, \delta_1, \delta_0)$$

où  $0 \leq \delta_i \leq a_{i+1}$  et  $\delta_{i+1} = a_{i+2} \Rightarrow \delta_i = 0$  ( $i \geq 0$ ). Si on sait que  $\delta_{i-1} = \delta_{i-2} = \dots = \delta_0 = 0$ , on peut écrire  $(\delta_m, \delta_{m-1}, \dots, \delta_i)$  à la place de  $(\delta_m, \delta_{m-1}, \dots, \delta_i, 0, \dots, 0)$ .

La  $p$ -interprétation  $I_p$  de la représentation  $R = (\delta_m, \delta_{m-1}, \dots, \delta_1, \delta_0)$  est le nombre  $I_p = \sum_{i=0}^m \delta_i p_i$ .

La  $q$ -interprétation  $I_q$  de  $R$  est le nombre  $I_q = \sum_{i=0}^m \delta_i q_i$ , pourvu que  $\delta_0 < a_1$ , autrement, il n'y a pas de  $q$ -interprétation de  $R$ .

Soit  $N$  un entier positif. On dit que sa  $p$ -représentation  $R_p(N)$  est  $(\delta_m, \delta_{m-1}, \dots, \delta_1, \delta_0)$  si  $N = \sum_{i=0}^m \delta_i p_i$ .

De manière analogue, la  $q$ -représentation  $R_q(N)$  de  $N$  est  $(\delta_m, \delta_{m-1}, \dots, \delta_1, \delta_0)$  si  $N = \sum_{i=0}^m \delta_i q_i$ ,  $\delta_0 < a_1$ .

(b) Soit  $R = (\delta_m, \delta_{m-1}, \dots, \delta_1, \delta_0)$  une représentation (qui peut être soit  $R_p(N)$  ou  $R_q(N)$  pour un entier positif  $N$ ). La représentation  $R' = (\delta_m, \delta_{m-1}, \dots, \delta_1, \delta_0, 0)$  est appelé un *saut vers la gauche* (« left shift ») de  $R$ . C'est-à-dire que  $R'$  est obtenu de  $R$  en déplaçant chaque chiffre  $\delta_i$  de  $R$  d'une place vers la gauche en ajoutant un zéro à la droite.

De la même manière, la représentation  $R'' = (\delta_m, \delta_{m-1}, \dots, \delta_1)$  est appelée un *saut vers la droite* (« right shift ») de  $R$ . C'est-à-dire que  $R''$  est obtenu de  $R$  en déplaçant chaque chiffre  $\delta_i$  de  $R$  d'une place vers la droite en enlevant  $\delta_0$ .

Exemples : Représentons quelques nombres avec les nombres des suites  $\{p_i\}_{i=0}^{\infty}$  et  $\{q_i\}_{i=0}^{\infty}$ .

Tableau XII : Exemples de représentations

$R$	$p_5$	$p_4$	$p_3$	$p_2$	$p_1$	$p_0$	$I_p(R)$
	99	41	17	7	3	1	
$R_p(40)$			2	0	2	0	40
$R'_p(40)$		2	0	2	0	0	96
$R''_p(40)$				2	0	2	16
$R^*_p(40)$				2	0	2	16
$R_p(50)$		1	0	1	0	2	50
$R^*_p(50)$	1	0	1	0	2	0	122
$R$	$q_5$	$q_4$	$q_3$	$q_2$	$q_1$	$q_0$	$I_q(R)$
	70	29	12	5	2	1	
$R_q(40)$		1	0	2	0	1	40
$R^*_q(40)$	1	0	2	0	1	0	96
$R_q(50)$		1	1	1	2	0	50
$R^*_q(50)$	1	1	1	2	0	0	121

D'après le tableau XII, on a

$$40 = I_p(2, 0, 2, 0) = 2 \times 17 + 2 \times 3 \Leftrightarrow R_p(40) = (2, 0, 2, 0)$$

$$50 = I_p(1, 0, 1, 0, 2) = 1 \times 41 + 1 \times 7 + 2 \times 1 \Leftrightarrow R_p(50) = (1, 0, 1, 0, 2)$$

$$40 = I_q(1, 0, 2, 0, 1) = 1 \times 29 + 2 \times 5 + 1 \times 1 \Leftrightarrow R_q(40) = (1, 0, 2, 0, 1)$$

$$50 = I_q(1, 1, 1, 2, 0) = 1 \times 29 + 1 \times 12 + 1 \times 5 + 2 \times 2 \Leftrightarrow R_q(50) = (1, 1, 1, 2, 0)$$

$$122 = I_p(1, 0, 1, 0, 2, 0) = 1 \times 99 + 1 \times 17 + 2 \times 3 \Leftrightarrow R_p(121) = (1, 0, 1, 0, 2, 0) = R'_p(50).$$

### 3.0.3. Représentation d'un entier positif avec les nombres de Fibonacci

Un cas particulier de la représentation d'un entier positif par les numérateurs et dénominateurs des convergents d'une fraction continue est la représentation avec les nombres de Fibonacci. Ces nombres sont définis par  $F_1 = F_2 = 1$  et, pour  $i \geq 3$ ,  $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ .

**Théorème 8 :** (Théorème de Zeckendorf) Tout entier positif peut être représenté comme la somme de nombres de Fibonacci distincts, en n'utilisant jamais deux éléments consécutifs de la suite. Une telle représentation est unique.

**Démonstration :** En effet, si on prend  $\alpha = [1, 1, \dots]$  (le nombre d'or), on obtient

$$p_{-1} = 1, p_0 = 1, p_n = p_{n-1} + p_{n-2} \quad (n \geq 1)$$

$$q_{-1} = 0, q_0 = 1, q_n = q_{n-1} + q_{n-2} \quad (n \geq 1).$$

où  $\{p_{n-2}\} = \{F_n\}$  la suite de Fibonacci et comme on l'a démontré dans la section précédente, tout entier positif  $N$  peut être écrit de manière unique sous la forme

$$N = \sum_{i=0}^m \delta_i p_i,$$

où  $0 \leq s_i \leq 1, s_{i+1} = 1 \Rightarrow s_i = 0 \quad (i \geq 0)$ . Il n'y a donc jamais deux nombres de Fibonacci consécutif dans sa représentation. C.Q.F.D.

Définition : Définissons la suite  $\{F^i\}$  de la manière suivante  $F^i = p_i = F_{i+2}$ .

Tableau XIII : Les suites  $\{F^i\}$  et  $\{F_i\}$

$i$	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p_i$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
$q_i$	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
$F^i$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
$F_i$		0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Comme dans la section précédente, on notera par  $R_F(N)$  la  $p$ -représentation d'un entier positif par les nombres de la suite de Fibonacci.

Exemples : Représentons quelques nombres avec les nombres de la suite de Fibonacci.

Tableau XIV : Exemples de représentations par les nombres de Fibonacci

$R$	$F^7$	$F^6$	$F^5$	$F^4$	$F^3$	$F^2$	$F^1$	$F^0$	$I_p(R)$
	34	21	13	8	5	3	2	1	
$R_F(40)$	1	0	0	0	1	0	0	1	40
$R_F(50)$	1	0	1	0	0	1	0	0	50
$R_F(33)$		1	0	1	0	1	0	1	33



### 3.1. Le jeu de Wythoff original

Le jeu de Wythoff est en fait une modification du jeu de Nim. Étonnamment, ce jeu a été introduit et résolu très tôt après le jeu de Nim par W. Wythoff en 1907 [23]. Depuis, plusieurs autres représentations gagnantes ont été étudiées.

Dans les prochaines sections, nous verrons les représentations des positions gagnantes par récurrence, par algèbre et par arithmétique. Les stratégies gagnantes de plusieurs de ces représentations seront aussi décrites.

#### 3.1.1. Règles du jeu

Le jeu de Wythoff est défini par les règles suivantes :

- (i) deux joueurs jouent en alternance;
- (ii) on a au départ deux piles de jetons, un nombre arbitraire dans chacune des piles;
- (iii) un joueur doit prendre un nombre arbitraire de jetons dans une des piles ou un nombre égal dans chaque pile mais il doit prendre au moins un jeton;
- (iv) le joueur qui prend le dernier jeton gagne la partie.

---

#### **Sur un échiquier**

---

Le jeu de Wythoff peut être représenté sur un échiquier par le jeu où il faut déplacer la reine vers le bas, vers la gauche ou en diagonale vers le bas à gauche, jusqu'à ce qu'elle soit rendue dans la case la plus à gauche sur la rangée du bas (la case étoilée).

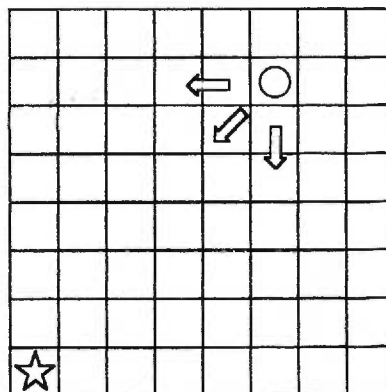


Figure 2 : Le jeu de Wythoff sur l'échiquier

De la définition même des position gagnantes, on peut dire que les positions gagnantes du jeu de Wythoff seront telles que

- (1)  $(0, 0)$  est une position gagnante;
- (2) si  $(x, y)$  est une position gagnante, alors toutes positions de la forme  $(x + i, y)$ ,  $(x, y + i)$  ou  $(x + i, y + i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , est perdante;
- (3) si toute position  $(x - i, y)$ ,  $(x, y - i)$  et  $(x - i, y - i)$  est perdante, alors  $(x, y)$  est gagnante.

En appliquant les propriétés (2) et (3) à la position  $(0, 0)$ , on obtient la figure suivante et les positions gagnantes  $(1, 2)$  et  $(2, 1)$ .

P							P
P						P	
P					P		
P				P			
P			P				
P	G	P					
P	P	G					
G	P	P	P	P	P	P	P

Figure 3 : Façon d'obtenir les positions gagnantes sur l'échiquier

En continuant ainsi, on obtient les positions gagnantes  $(a_n, b_n)$  et  $(b_n, a_n)$ , telles que  $b_n = a_n + n$ , d'où la première représentation des paires gagnantes.

P	P	P	P	G	P	P	P
P	P	P	P	P	P	P	P
P	P	P	G	P	P	P	P
P	P	P	P	P	P	P	G
P	P	P	P	P	G	P	P
P	G	P	P	P	P	P	P
P	P	G	P	P	P	P	P
G	P	P	P	P	P	P	P

Figure 4 : Positions gagnantes et perdantes sur l'échiquier

### 3.1.2. Première représentation des positions gagnantes (récurrente)

Soit les suites  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  et  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$  définies de la manière suivante :

$$(1) a_0 = 0;$$

$$(2) b_n = a_n + n;$$

(3)  $a_n$  est le plus petit entier positif distinct des  $2n$  entiers  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ .

De cette façon, chaque entier positif n'apparaît qu'une seule fois dans les suites  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  et  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

Théorème 9 : Les positions  $(a_n, b_n)$  sont exactement les positions gagnantes au jeu de Wythoff.

Démonstration : On doit montrer que

(1) tout déplacement à partir d'une telle position mène à une position qui n'est pas de la forme  $(a_n, b_n)$ ;

(2) à partir d'une paire qui n'est pas de la forme  $(a_n, b_n)$ , il existe un déplacement vers une position qui a cette forme.

(1) Supposons qu'un déplacement légal fait à partir d'une position  $(a_n, b_n)$ ,  $n > 0$ , mène à  $(x, y)$ ,  $x \leq y$ . On distingue 3 cas.

(i) Supposons qu'on enlève  $i$  jetons de la plus petite pile et qu'on ait alors

$$(x, y) = (a_m, b_m), m \leq n.$$

On aurait  $b_n = y = b_m < b_n$ , contradiction.

(ii) Supposons qu'on enlève  $i$  jetons de la plus grande pile et qu'on ait alors

$$(x, y) = (a_m, b_m), m \leq n.$$

On aurait  $a_n = x = a_m < a_n$ , contradiction.

(iii) Supposons qu'on enlève  $i$  jetons de chaque pile et qu'on ait alors

$$(x, y) = (a_m, b_m), m \leq n.$$

On aurait

$$m = b_m - a_m = y - x$$

mais

$$n = b_n - a_n = (y + i) - (x + i) = m < n,$$

une contradiction.

(2) Supposons que  $(x, y)$  ne soit pas de la forme  $(a_n, b_n)$ . Parce que les suites  $\{a_n\}$  et  $\{b_n\}$  sont complémentaires, on doit avoir soit

$$x = a_m$$

soit

$$x = b_m, m \geq 0.$$

(i) Si  $x = a_m$ . Alors  $y = a_m + i$ .

Si  $y > b_m$  alors enlever  $i - m$  jetons de la plus grande pile pour avoir la paire  $(a_m, b_m)$ .

Si  $y < b_m$  alors

$$y = b_m - i = a_m + m - i, (m - i \geq 0).$$

Enlever  $t$  jetons de chaque pile, où  $t = a_m - a_{m-i}$  pour obtenir la paire

$$\begin{aligned} & (x - (a_m - a_{m-i}), y - (a_m - a_{m-i})) \\ &= (a_{m-i}, a_{m-i} + m - i) \\ &= (a_{m-i}, b_{m-i}). \end{aligned}$$

(ii) Si  $x = b_m$ . Alors  $x = a_m + m$  et  $y = a_m + m + i, i \geq 0$ .

Enlever  $m + i$  jetons de la plus grande pile pour obtenir la paire  $(a_m + m, a_m) = (b_m, a_m)$ . C.Q.F.D.

Les paires  $(a_n, b_n)$  sont donc toutes les positions gagnantes au jeu de Wythoff, on les appelle les *paires de Wythoff*.

Tableau XV : Positions gagnantes au jeu de Wythoff

$n$	$a_n$	$b_n$	$n$	$a_n$	$b_n$	$n$	$a_n$	$b_n$	$n$	$a_n$	$b_n$
0	0	0	10	16	26	20	32	52	30	48	78
1	1	2	11	17	28	21	33	54	31	50	81
2	3	5	12	19	31	22	35	57	32	51	83
3	4	7	13	21	34	23	37	60	33	53	86
4	6	10	14	22	36	24	38	62	34	55	89
5	8	13	15	24	39	25	40	65	35	56	91
6	9	15	16	25	41	26	42	68	36	58	94
7	11	18	17	27	44	27	43	70	37	59	96
8	12	20	18	29	47	28	45	73	38	61	99
9	14	23	19	30	49	29	46	75	39	63	102

De la démonstration précédente, on obtient la stratégie gagnante.

### Stratégie gagnante

On écrit la paire  $(x, y)$ ,  $x \leq y$ , sous la forme  $(x, x + z)$ .

- Si  $x = a_n$  et  $z > n$ , enlever  $z - n$  jetons de la pile  $y$ .
- Si  $x = a_n$  et  $z < n$ , enlever  $a_n - a_z$  jetons de chaque pile.
- Si  $x = b_n$ , enlever  $n + z$  jetons de la pile  $y$ .
- Autrement, on perd si l'adversaire joue parfaitement jusqu'à la fin.

Exemples : Soit la position  $(27, 46)$  dans un jeu de Wythoff. En regardant le tableau XV on voit que  $27 = a_{17}$  et que  $46 - 27 = 19 > 17$ . On doit donc enlever  $19 - 17 = 2$  jetons de la deuxième pour obtenir la position gagnante  $(27, 44) = (a_{17}, b_{17})$ .

Soit la position  $(27, 43)$  dans un jeu de Wythoff. En regardant le tableau XV on voit que  $27 = a_{17}$  et que  $43 - 27 = 16 < 17$ . On doit donc enlever  $a_{17} - a_{16} = 27 - 25 = 2$  jetons de chaque pile pour obtenir la position gagnante  $(25, 41) = (a_{16}, b_{16})$ .

Soit la position  $(36, 43)$  dans un jeu de Wythoff. En regardant le tableau XV on voit que  $36 = b_{14}$ . On doit donc enlever  $14 + (43 - 36) = 21$  jetons de la deuxième pile pour obtenir la position gagnante  $(36, 22) = (b_{14}, a_{14})$ .

Quelques propriétés intéressantes de  $a_n$  et  $b_n$  ont été publiées dans l'articles de Carlitz, Scoville et Hoggatt en 1972 [2]. Quelques-unes de ces propriétés introduisent le lien qu'il existe entre les paires  $(a_n, b_n)$  et les nombres de Fibonacci. Pour les propriétés (6) à (10), on utilisera la notation  $ab_n = a_{b_n}$  et  $b_n^r = b_{b_n^{r-1}}$ .

$$(1) \quad n + a_n = b_n$$

$$(2) \quad b_n = a_{a_n} + 1$$

$$(3) \quad a_n + b_n = b_{a_n} + 1$$

$$(4) \quad a_{b_n} = b_{a_n} + 1$$

$$(5) \quad a_n + b_n = a_{b_n}$$

$$(6) \quad b_n^2 = aba_n + 2$$

$$(7) \quad ab_n^2 = b^2 a_n + 3$$

$$(8) \quad b_n^r = ab^{r-1} a_n + F_{2r-1} \quad (r = 1, 2, \dots)$$

$$(9) \quad ab_n^r = b^r a_n + F_{2r} \quad (r = 1, 2, \dots)$$

$$(10) \quad b_1^r = F_{2r+1} \quad (r = 1, 2, \dots)$$

Démonstration des propriétés :

(1) Par construction des  $a_n$  et  $b_n$ .

(2) Soit  $j$  un entier positif. Les  $j + n$  entiers  $b_1, b_2, \dots, b_n$ , et  $a_1, a_2, \dots, a_j = b_n - 1$  sont représentés une, et une seule, fois dans la suite  $1, 2, \dots, b_n$ , et  $b_n$  est le plus grand d'entre eux. Par conséquent  $j + n = b_n$ . On a alors, par (1),  $j = a_n$ . Donc  $a_{a_n} = b_n - 1$ .

(3) En remplaçant  $n$  par  $a_n$  dans l'équation (1), on a

$$a_n + a_{a_n} = b_{a_n}.$$

En vertu de (2), on peut remplacer  $a_{a_n}$  par  $b_n - 1$ . On obtient

$$a_n + b_n - 1 = b_{a_n}$$

ou

$$a_n + b_n = b_{a_n} + 1.$$

(4) Pour démontrer (4), notons d'abord que  $b_{a_n}$  est la  $a_n$ -ième valeur des  $b_n$ , et  $a_{b_n}$  est la  $b_n$ -ième valeur des  $a_n$ . Donc le total du nombre de valeurs est

$$a_n + b_n = \overset{(3)}{b_{a_n}} + 1.$$

Comme  $b_{a_n}$  ne peut pas être la plus grande valeur, alors  $a_{b_n}$  l'est.

Aussi, tous les entiers  $\leq b_{a_n} + 1$  doivent être représentés parmi les nombres  $a_i$  et  $b_j$ ,  $i \leq b_n$  et  $j \leq a_n$ . Donc,  $a_{b_n} = b_{a_n} + 1$ .

$$(5) \quad a_n + b_n = \overset{(3)}{b_{a_n}} + 1 = \overset{(4)}{a_{b_n}}.$$

(6) En additionnant les équations (2) et (4) on obtient

$$b_n + a_{b_n} = a_{a_n} + 1 + b_{a_n} + 1$$

$$b_{b_n} \overset{\text{par (1) et (5)}}{=} ab_{a_n} + 2$$

(7) En additionnant les équations (4) et (6) on obtient

$$a_{b_n} + b_{b_n} = b_{a_n} + 1 + ab_{a_n} + 2$$

$$ab_{b_n} \stackrel{\text{par (5) et (1)}}{=} bb_{a_n} + 3$$

(8) et (9)

Vérifions les équations (8) et (9) pour le cas  $r = 1$

$$b_n^1 = ab^0 a_n + F_1 = a_{a_n} + 1 \Rightarrow b_n = a_{a_n} + 1.$$

Cette équation est l'équation (2). Donc l'équation (8) est vraie pour  $r = 1$ .

$$ab_n^1 = b^1 a_n + F_2 = b_{a_n} + 1 \Rightarrow a_{b_n} = b_{a_n} + 1.$$

Cette équation est l'équation (4). Donc l'équation (9) est vraie pour  $r = 1$ .

Supposons que les deux équations ((8) et (9)) soient vraies pour  $r$ . Montrons qu'elles sont aussi vraies pour  $r + 1$ .

En additionnant les équations (8) et (9), pour le cas  $r$ , on obtient

$$b_n^r + ab_n^r = ab^{r-1} a_n + F_{2r-1} + b^r a_n + F_{2r}.$$

Par (1),  $b_n^r + ab_n^r = bb_n^r$ . Par (6), où l'on pose  $n = b^{r-1} a_n$ , on a  $b^r a_n = b^{r-1} a_n$ . On obtient donc

$$bb_n^r = abb^{r-1} a_n + F_{2r-1} + F_{2r}$$

ou

$$b_n^{r+1} = ab^r a_n + F_{2r+1}.$$

Donc (8) est vraie pour  $r + 1$ .

Pour démontrer (9), on additionne la formule (9) pour  $r$  à la formule (8) pour  $r + 1$ .

On obtient

$$ab_n^r + b_n^{r+1} = b^r a_n + F_{2r} + ab^r a_n + F_{2r+1}$$

Par (5),  $ab_n^r + b_n^{r+1} = bb_n^r$ . Par (1), où l'on pose  $n = b^r a_n$ , on a  $b^r a_n = bb^r a_n$ . On obtient donc

$$abb_n^r = bb^r a_n + F_{2r} + F_{2r+1}$$

ou

$$ab_n^{r+1} = b^{r+1} a_n + F_{2r+2}.$$

Donc (9) est vraie pour  $r + 1$ .

(10) Dans (8) si  $n = 1$  on a

$$b_1^r = ab^{r-1} a_1 + F_{2r-1}$$

ou, puisque  $a_1 = 1$

$$bb_1^{r-1} = ab_1^{r-1} + F_{2r-1}.$$

Par (1) avec  $n = b_1^{r-1}$ , on a

$$F_{2r-1} = b_1^{r-1}$$

ou

$$b_1^r = F_{2r+1}. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

D'autres liens entre les nombres de Fibonacci et les paires  $(a_n, b_n)$  ont été publiés par R. Silver en 1976 [1].

Si  $x$  et  $y$  sont deux entiers, on appellera *suite de Fibonacci générée par  $x$  et  $y$*  la suite  $v_i$  où  $v_1 = x$ ,  $v_2 = y$  et, pour  $i \geq 3$ ,  $v_i = v_{i-1} + v_{i-2}$ .

Théorème 10 : [1] Soit  $G_1, G_2, G_3, \dots$  la suite de Fibonacci générée par la paire de Wythoff  $(a_n, b_n)$ . Alors, toute paire  $(G_1, G_2), (G_3, G_4), (G_5, G_6), \dots$  est aussi une paire de Wythoff.

Démonstration :

Considérons les quatre premiers termes de la suite de Fibonacci générée :

$$a_n, b_n, a_n + b_n, a_n + 2b_n.$$

Par l'équation (5), on a

$$a_n + b_n = a_{b_n}.$$

Donc

$$a_n + 2b_n = a_{b_n} + b_n.$$

L'équation (1) avec  $k = b_n$  donne

$$a_{b_n} + b_n = b_{b_n},$$

alors les quatre termes considérés sont en fait

$$a_n, b_n, a_{b_n}, b_{b_n}.$$



Nous avons montré qu'en général  $(G_3, G_4)$  est une paire de Wythoff quand  $(G_1, G_2)$  en est une. Mais  $(G_5, G_6)$  peut être considérée comme les troisième et quatrième termes de la suite de Fibonacci générée par  $(G_3, G_4)$ , donc est aussi une paire de Wythoff. Dans ce sens, le théorème suit par induction. C.Q.F.D.

Nous avons donc vu que chaque paire de Wythoff génère une suite de paires de Wythoff; les paires suivant la première de la suite sont dites *générées* par la première paire.

Définition : Une paire de Wythoff est dite *primitive* si aucune autre paire de Wythoff ne la génère.

Théorème 11 : Une paire de Wythoff  $(a_n, b_n)$  est primitive si, et seulement si,  $n = a_k$  pour un entier positif  $k$ .

Démonstration : ( $\Leftarrow$ ) Nous avons vu que les termes de la suite de Fibonacci générés par n'importe quelle paire de Wythoff  $(a_n, b_n)$  sont de la forme

$$a_n, b_n, a_{b_n}, b_{b_n}, a_{b_{b_n}}, b_{b_{b_n}}, \dots$$

Il est donc évident que n'importe quelle paire non-primitive  $(a_n, b_n)$  doit avoir  $n = b_k$  pour un entier positif  $k$ , ce qui implique que toute paire  $(a_n, b_n)$  avec  $n = a_k$  doit être une paire primitive.

( $\Rightarrow$ ) La suite

$$a_n, b_n, a_{b_n}, b_{b_n}, \dots$$

générée par  $(a_n, b_n)$  montre clairement que chaque paire  $(a_{b_k}, b_{b_k})$  est générée par  $(a_k, b_k)$ ; donc toute paire primitive  $(a_n, b_n)$  doit avoir  $n = a_k$ . C.Q.F.D.

Corollaire 2 : [1] Il existe une suite de suites de Fibonacci telle que tout les nombres entiers positifs sont couverts. Une propriété intéressante des paires primitives apparaît quand nous calculons successivement le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_n & b_n \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix},$$

Restreint aux paires  $(a_n, b_n)$  qui sont primitives. On trouve que

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} &= 1, & \begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} &= 2, \\ \begin{vmatrix} 9 & 15 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} &= 3, & \begin{vmatrix} 12 & 20 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} &= 4, \end{aligned}$$

et ainsi de suite. Ceci suggère que le déterminant appliqué à la  $k^e$  paire primitive est  $k - 1$ .

1. Par le théorème précédent, nous savons que la  $k^e$  paire primitive est en réalité  $(a_{a_k}, b_{a_k})$ , alors on a l'identité

$$2 a_{a_k} - b_{a_k} = k - 1.$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} 2 a_{a_k} - b_{a_k} &\stackrel{\text{par (1)}}{=} 2 a_{a_k} - (a_k - a_{a_k}) \\ &= a_{a_k} - a_k \\ &\stackrel{\text{par (2)}}{=} b_k - 1 - a_k \\ &\stackrel{\text{par (1)}}{=} k - 1. \end{aligned} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Il n'y a maintenant plus de doute, les paires de Wythoff et les nombres de Fibonacci sont étroitement liés. Ce lien nous suggère que le nombre d'or et les paires de Wythoff ne sont pas très éloignés. En effet, on peut aussi écrire les paires gagnantes avec le nombre d'or.

### 3.1.3. Deuxième représentation des positions gagnantes (algébrique)

Soit

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \tau \text{ (le nombre d'or)}$$

et

$$\beta = \alpha + 1 = \tau + 1 = \tau^2,$$

où  $\alpha$  est une racine positive de l'équation  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = 1$ . Donc  $\alpha$  et  $\beta$  sont irrationnels et satisfont à  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ . Par le théorème 4 (de Beatty), les suites  $\{a'_n\}_{n=0}^{\infty}$  et  $\{b'_n\}_{n=0}^{\infty}$ , où  $a'_n = [n\alpha] = [n\tau]$  et  $b'_n = [n\beta] = [n\tau^2]$ , sont complémentaires.

Théorème 12 : Les paires  $(a'_n, b'_n)$  sont exactement les paires  $(a_n, b_n)$ .

Démonstration :  $a'_0 = 0 = a_0$ ,  $b'_0 = 0 = b_0$  et  $b'_n = a'_n + n$ . De plus  $a'_n$  est le plus petit entier positif absent de  $\{a'_1, b'_1, a'_2, b'_2, \dots, a'_{n-1}, b'_{n-1}\}$  puisque  $\{a'_n\}$  et  $\{b'_n\}$  sont des suites croissantes et complémentaires. Si le plus petit entier positif absent de  $\{a'_1, b'_1, a'_2, b'_2, \dots, a'_{n-1}, b'_{n-1}\}$  n'était pas  $a'_n$ ,  $a'_n$  ne serait jamais obtenu.

On a donc  $a_n \equiv a'_n$  et  $b_n \equiv b'_n$  pour  $n \geq 0$ .

C.Q.F.D.

### Stratégie gagnante

Soit  $(x, y)$  une paire telle que  $x \leq y$ .

- (i) Si  $\{x\tau\} < 1/\tau^2$ , aller à la position  $(x, [x\tau] - x)$ .
- (ii) Si  $\{x\tau\} > 1/\tau^2$  et  $y > [x\tau] + 1$ , aller à la position  $(x, [x\tau] + 1)$ .
- (iii) Si  $\{x\tau\} > 1/\tau^2$  et  $y < [x\tau] + 1$ , aller à la position  $([(y-x)\tau], [(y-x)\tau^2])$ .
- (iv) Si  $\{x\tau\} > 1/\tau^2$  et  $y = [x\tau] + 1$ , on est dans une position gagnante et on ne peut gagner si l'adversaire joue parfaitement jusqu'à la fin.

Démonstration de la stratégie gagnante : [21]

Notons d'abord qu'on ne peut avoir  $\{x\tau\} = 1/\tau^2$ . En effet, si on avait

$$\{x\tau\} > 1/\tau^2$$

$$\Rightarrow \{x\tau\} \tau^2 = 1$$

$$\Rightarrow ((x\tau) - [x\tau]) (\tau + 1) = 1$$

$$\Rightarrow x\tau^2 + x\tau - [x\tau]\tau - [x\tau] = 1$$

$$\Rightarrow x(\tau + 1) + x\tau - [x\tau]\tau - [x\tau] = 1$$

$$\Rightarrow \tau(2x - [x\tau]) = 1 - x + [x\tau]$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{1 - x + [x\tau]}{2x - [x\tau]}.$$

Puisque  $x$  et  $[x\tau]$  sont entiers,  $\tau$  serait un nombre rationnel et on aurait une contradiction.

(i) On a  $[x\tau] < 2x$  puisque  $\tau < 2$ . Donc  $[x\tau] - x < x < y$ . On doit donc montrer que  $(x, [x\tau] - x)$  est une position gagnante de la forme  $(b_n, a_n)$ . C'est-à-dire que si

$$n = x - ([x\tau] - x) = 2x - [x\tau]$$

alors on a

$$[x\tau] - x = [n\tau] \quad \text{et} \quad x = [n\tau] + n.$$

En effet, soit  $n = 2x - [x\tau]$ . Alors

$$\begin{aligned} [n\tau] &= [(2x - (x\tau - \{x\tau\}))\tau] \\ &= [2x\tau - x\tau^2 + \{x\tau\}\tau] \\ &= [2x\tau - x(\tau + 1) + \{x\tau\}\tau] \\ &= [x\tau + \{x\tau\}\tau] - x \\ &= [[x\tau] + \{x\tau\} + \{x\tau\}\tau] - x \\ &= [x\tau] - x + [\{x\tau\}(\tau + 1)] \\ &= [x\tau] - x + [\{x\tau\}\tau^2] \\ &= [x\tau] - x \end{aligned}$$

puisque  $\{x\tau\}\tau^2 < 1$  par hypothèse.

Aussi

$$[n\tau^2] = [n(\tau + 1)] = [n\tau] + n = ([x\tau] - x) + 2x - [x\tau] = x.$$

(ii)  $y > [x\tau] + 1 \geq x + 1 > x$ .

On doit donc montrer que  $(x, [x\tau] + 1)$  est une position gagnante de la forme  $(a_n, b_n)$ . C'est-à-dire que si

$$n = [x\tau] + 1 - x$$

alors

$$x = [n\tau] \quad \text{et} \quad [x\tau] + 1 = [x\tau^2].$$

En effet, soit  $n = [x\tau] + 1 - x$ . Alors

$$\begin{aligned} [n\tau] &= [[x\tau] + 1 - x]\tau \\ &= [(x\tau - \{x\tau\})\tau + \tau - x\tau] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [x\tau^2 - \{x\tau\}\tau + \tau - x\tau] \\
&= [x\tau + x - \{x\tau\}\tau + \tau - x\tau] \\
&= x + [-\{x\tau\}\tau + \tau] \\
&= x + [\tau(1 - \{x\tau\})] \\
&= x
\end{aligned}$$

puisque

$$\begin{aligned}
\tau(1 - \{x\tau\}) &< \tau \left(1 - \frac{1}{\tau^2}\right) \\
&= \tau \left(\frac{\tau^2 - 1}{\tau^2}\right) \\
&= \tau \left(\frac{\tau + 1 - 1}{\tau^2}\right) = 1.
\end{aligned}$$

Aussi,

$$[n\tau] + n = x + [x\tau] + 1 - x = [x\tau] + 1.$$

(iii) On doit montrer que  $([(y-x)\tau], [(y-x)\tau^2])$  peut être obtenue à partir de  $(x, y)$ . C'est-à-dire que

$$y - x = [(y-x)\tau^2] - [(y-x)\tau].$$

On a

$$\begin{aligned}
[(y-x)\tau^2] - [(y-x)\tau] &= [(y-x)(\tau+1)] - [(y-x)\tau] \\
&= [(y-x)\tau] + (y-x) - [(y-x)\tau] \\
&= y-x.
\end{aligned}$$

Il faut donc enlever  $x - [(y-x)\tau]$  de chaque tas pour obtenir  $([(y-x)\tau], [(y-x)\tau^2])$ .

Montrons que  $x - [(y-x)\tau] > 0$ .

$$\begin{aligned}
x - [(y-x)\tau] &> x - [(x\tau] + 1 - x)\tau \\
&= x - [[x\tau]\tau + \tau - x\tau] \\
&= x - [x\tau^2 - \{x\tau\}\tau + \tau - x\tau] \\
&= x - [x(\tau+1) - x\tau - \{x\tau\}\tau + \tau] \\
&= x - x - [\tau - \{x\tau\}\tau] \\
&= -[\tau - \{x\tau\}\tau] \\
&= -[\tau(1 - \{x\tau\})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \left[ \tau \left( 1 - \frac{1}{\tau^2} \right) \right] \\
&= - \left[ \tau \left( \frac{\tau^2 - 1}{\tau^2} \right) \right] \\
&= - \left[ \frac{\tau + 1 - 1}{\tau} \right] = -1.
\end{aligned}$$

Donc  $x - [(y-x) \tau] > 0$ .

(iv) On veut montrer que si  $\{x\tau\} > 1/\tau^2$  et  $y = [x\tau] + 1$ , alors la position  $(x, [x\tau] + 1)$  est gagnante. On doit donc montrer que si

$$n = [x\tau] + 1 - x$$

alors

$$x = [n\tau]$$

et

$$[x\tau] + 1 = [n\tau] + n.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
[n\tau] &= [( [x\tau] + 1 - x ) \tau] \\
&= [ [x\tau] \tau + \tau - x\tau ] \\
&= [ x\tau^2 - \{x\tau\} \tau + \tau - x\tau ] \\
&= [ x - \{x\tau\} \tau + \tau ] \\
&= x + [ \tau - \{x\tau\} \tau ] \\
&= x
\end{aligned}$$

pour les mêmes raisons qu'en (ii).

Aussi,

$$\begin{aligned}
[n\tau] + n &= x + [x\tau] + 1 - x \\
&= [x\tau] + 1.
\end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Exemples : Appliquons la nouvelle stratégie gagnante aux exemples de la section précédente.

On doit d'abord obtenir la valeur numérique de  $1/\tau^2$  :

$$\frac{1}{\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2} = \frac{4}{(1+\sqrt{5})^2} \cong 0,381966.$$

Soit la position  $(27, 46)$  dans un jeu de Wythoff. On a  $\{27 \tau\} \cong \{43,686918\} = 0,686918 > 1/\tau^2$  et  $46 > [27 \tau] + 1 = 44$ . On doit donc aller à la position gagnante  $(27, [27 \tau] + 1) = (27, 44) = (a_{17}, b_{17})$ .

Soit la position  $(27, 43)$  dans un jeu de Wythoff. On a  $\{27 \tau\} \cong \{43,686918\} = 0,686918 > 1/\tau^2$  et  $43 < [27 \tau] + 1 = 44$ . On doit donc aller à la position gagnante  $([27 \tau], [(43 - 27) \tau]) = (25, 41) = (a_{16}, b_{16})$ .

Soit la position  $(36, 43)$  dans un jeu de Wythoff. On a  $\{36 \tau\} \cong \{58,249224\} = 0,249224 < 1/\tau^2$ . On doit donc aller à la position gagnante  $(36, [36 \tau] - 36) = (36, 22) = (b_{14}, a_{14})$ .

Revenons au lien qu'il existe entre les paires de Wythoff et les nombres de Fibonacci et écrivons les positions gagnantes avec ces nombres.

### 3.1.4. Troisième représentation des positions gagnantes (arithmétique)

Soit une paire  $(x, y)$  telle que  $R_F(x)$  se termine par un nombre pair de zéros et  $y = I_F(R_F(x))$ . Nous allons montrer qu'une paire est gagnante si, et seulement si, elle est de cette forme.

Proposition 1 : Tout entier positif  $n$  appartient à exactement une paire  $(x, I_F(R_F(x)))$ .

Démonstration :  $R_F(n)$  se termine soit par un nombre pair de zéros, soit par un nombre impair. C.Q.F.D.

Proposition 2 : Tout entier positif  $z$  apparaît comme la différence  $y - x$  d'au moins une paire  $(x, y)$  où  $y = I_F(R_F(x))$ .

Démonstration : Soit  $z = I_F((\delta_k \delta_{k-1} \dots \delta_1 \delta_0)) = \sum_{i=0}^k \delta_i F^i$ .

(1) Si  $R_F(z)$  se termine par un nombre impair de zéros. Soit

$$x = I_F(\delta_k \delta_{k-1} \dots \delta_1 \delta_0 0) = \sum_{i=0}^k \delta_i F_{i+1},$$

$$y = I_F(\delta_k \delta_{k-1} \dots \delta_1 \delta_0 00) = \sum_{i=0}^k \delta_i F_{i+2}.$$

Alors  $(x, y)$  est une de la forme  $(x, I_F(R^2_F(x)))$  et

$$y - x = \sum_{i=0}^k \delta_i (F_{i+2} - F_{i+1}) = \sum_{i=0}^k \delta_i F_i = z.$$

(2) Si  $R_F(z)$  se termine par un nombre pair de zéros, disons  $2m$ , alors

$$\delta_0 = \delta_1 = \dots = \delta_{2m-1} = 0 \text{ et } \delta_{2m} = 1.$$

Soit

$$x = I_F(\delta_k \delta_{k-1} \dots \delta_{2m+1} \underbrace{0101\dots 01}_{2m+1 \text{ chiffres}}),$$

$$y = I_F(\delta_k \delta_{k-1} \dots \delta_{2m+1} \underbrace{0101\dots 010}_{2m+2 \text{ chiffres}}).$$

Alors  $(x, y)$  est une paire de la forme  $(x, I_F(R^2_F(x)))$  et

$$x = \sum_{i=2m+1}^k \delta_i F_{i+1} + \sum_{i=0}^m F_{2i},$$

$$y = \sum_{i=2m+1}^k \delta_i F_{i+2} + \sum_{i=0}^m F_{2i+1}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} y - x &= \sum_{i=2m+1}^k \delta_i (F_{i+2} - F_{i+1}) + \sum_{i=0}^m (F_{2i+1} - F_{2i}) = \\ &= \sum_{i=2m+1}^k \delta_i F_i + \sum_{i=1}^m F_{2i-1} + F_1 - F_0. \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m F_{2i-1} + F_1 - F_0 &= \sum_{i=1}^m (F_{2i} - F_{2i-2}) + 2 - 1 = \\ &= \sum_{i=1}^m F_{2i} - \sum_{i=1}^m F_{2i-2} + 1 \\ &= \sum_{i=2}^{m+1} F_{2i-2} - \sum_{i=1}^m F_{2i-2} + 1 \\ &= F_{2m} - F_0 + 1 = F_{2m}. \end{aligned}$$



Donc

$$y - x = \sum_{i=2m+1}^k \delta_i F^i + F^{2m} = z. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Proposition 3 : Soit  $(x, y)$  et  $(x', y')$  deux paires pour lesquelles  $x < x', y = I_F(R'_F(x))$  et  $y' = I_F(R'_F(x'))$ . Alors  $y - x < y' - x'$ .

Démonstration : Soit

$$x = I_F(\delta_k \delta_{k-1} \dots \delta_1 \delta_0) = \sum_{i=0}^k \delta_i F^i,$$

$$x' = I_F(\delta'_k \delta'_{k-1} \dots \delta'_1 \delta'_0) = \sum_{i=0}^k \delta'_i F^i.$$

où  $\delta'_k = 1$  mais il peut y avoir des zéros parmi  $\delta_k, \delta_{k-1}, \dots$

Soit  $l$  le plus grand indice tel que  $\delta_l \neq \delta'_l$ . Alors  $\delta'_l = 1$  et  $\delta_l = 0$ .  $l \neq 1$  car la représentation de  $x'$  finirait par un seul zéro.

Comme

$$y = I_F(\delta_k \delta_{k-1} \dots \delta_1 \delta_0) = \sum_{i=0}^k \delta_i F^{i+1},$$

on a

$$\begin{aligned} y - x &= \sum_{i=0}^k \delta_i (F^{i+1} - F^i) \\ &= \sum_{i=0}^k \delta_i F^{i-1}. \end{aligned}$$

De même

$$y' - x' = \sum_{i=0}^k \delta'_i F^{i-1}.$$

Donc

$$(y' - x') - (y - x) = F^{l-1} + \sum_{i=0}^{l-1} (\delta'_i - \delta_i) F^{i-1}.$$

(1) Si  $l$  est impair, alors

$$\begin{aligned}
(y^* - x^*) - (y - x) &\geq F^*_{l-1} - \sum_{i=0}^{l-1} \delta_i F^*_{i-1} - \delta_0 \\
&\geq F^*_{l-1} - (F^*_{l-2} + F^*_{l-4} + \dots + F^*_1) \\
&= F^*_{l-1} - [(F^*_{l-1} - F^*_{l-3}) + (F^*_{l-3} - F^*_{l-5}) + \dots + (F^*_2 - F^*_0)] \\
&= F^*_{l-1} - (F^*_{l-1} - 1) = 1
\end{aligned}$$

(2) Si  $l$  est pair, alors il existe un  $i < l$  tel que  $\delta^*_i = 1$ , car autrement  $x^*$  se terminerait par un nombre impair de zéros. On a donc

$$\begin{aligned}
(y^* - x^*) - (y - x) &> F^*_{l-1} - \sum_{i=0}^{l-1} \delta_i F^*_{i-1} - \delta_0 \\
&\geq F^*_{l-1} - (F^*_{l-2} + F^*_{l-4} + \dots + F^*_0) - 1 \\
&= F^*_{l-1} - [(F^*_{l-1} - F^*_{l-3}) + (F^*_{l-3} - F^*_{l-5}) + \dots + (F^*_3 - F^*_1)] - 1 \\
&= F^*_{l-1} - (F^*_{l-1} - 1) - 1 = 0.
\end{aligned}$$

C.Q.F.D.

**Théorème 13** : L'ensemble des paires de la forme  $(x, I_F(R^*_F(x)))$  est égal à l'ensemble  $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$  des positions gagnantes.

**Démonstration** : Soit  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{\infty}$  l'ensemble des paires où  $y_i = I_F(R^*_F(x_i))$  et  $x_1 < x_2 < \dots$

Par la proposition 3, on a

$$y_1 - x_1 < y_2 - x_2 < \dots$$

Par la proposition 2, tout entier positif apparaît au moins une fois parmi les différences  $y_n - x_n$ . On a donc

$$y_i - x_i = i, i = 1, 2, 3, \dots$$

Par la proposition 1, tout entier positif appartient à exactement une paire  $(x, I_F(R^*_F(x)))$ .

Donc  $x_n$  est le plus petit entier positif non compris dans  $\{x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_{n-1}, y_{n-1}\}$ .

Les paires  $(x_i, I_F(R^*_F(x_i)))$  satisfont donc aux conditions qui définissent les positions gagnantes  $\{(a_n, b_n)\}$ . Donc  $x_n \equiv a_n$ , et  $y_n \equiv b_n$ , pour tout  $n = 1, 2, 3, \dots$  C.Q.F.D.

### Stratégie gagnante

Soit la position  $(x, y)$   $x \leq y$ . Trouver  $R_F(x)$ .

- Si  $R_F(x)$  se termine par un nombre impair de zéros, aller à  $(x, I_F(R^*_F(x)))$ .

- Si  $R_F(x)$  se termine par un nombre pair de zéros et  $y > I_F(R'_F(x))$ , aller à  $(x, I_F(R'_F(x)))$ .
- Si  $R_F(x)$  se termine par un nombre pair de zéros et  $y < I_F(R'_F(x))$ , calculer  $m = y - x$  et aller à  
 $(I_F(R'_F(m)), I_F(R'_F(m)) + m)$  si  $I_F(R'_F(m))$  se termine par un nombre pair de zéros  
 $(I_F(R'_F(m)) - 1, I_F(R'_F(m)) - 1 + m)$  sinon.
- Si  $R_F(x)$  se termine par un nombre pair de zéros et  $y = I_F(R'_F(x))$ , on perd si l'adversaire joue parfaitement jusqu'à la fin.

Exemples : Reprenons les mêmes exemples vus aux sections précédentes. On aura besoin de la représentation de certains nombres avec les nombres de Fibonacci.

Tableau XVI : Exemples de jeux de Wythoff

$R$	$F_8$	$F_7$	$F_6$	$F_5$	$F_4$	$F_3$	$F_2$	$F_1$	$F_0$	$I_F(R)$
	55	34	21	13	8	5	3	2	1	
$R_F(16)$				1	0	0	1	0	0	16
$R'_F(16)$			1	0	0	1	0	0	0	26
$R''_F(16) - 1$			1	0	0	0	1	0	1	25
$R_F(27)$			1	0	0	1	0	0	1	27
$R'_F(27)$		1	0	0	1	0	0	1	0	44
$R_F(36)$		1	0	0	0	0	0	1	0	36
$R''_F(36)$			1	0	0	0	0	0	1	22
$R_F(43)$		1	0	0	1	0	0	0	1	43
$R_F(46)$		1	0	0	1	0	1	0	1	46

Soit la position (27, 46) dans un jeu de Wythoff.  $R_F(43)$  se termine par un nombre pair de zéros (aucun) et  $46 > I_F(R'_F(27)) = 44$ . On doit donc aller à la position gagnante  $(27, I_F(R'_F(27))) = (27, 44) = (a_{17}, b_{17})$ .

Soit la position (27, 43) dans un jeu de Wythoff.  $R_F(43)$  se termine par un nombre pair de zéros (aucun) et  $43 < I_F(R'_F(27)) = 44$ . On doit donc aller à la position gagnante  $(I_F(R'_F(43 - 27)) - 1, I_F(R'_F(43 - 27)) - 1 + (43 - 27)) = (25, 41) = (a_{16}, b_{16})$ .

Soit la position (36, 43) dans un jeu de Wythoff.  $R_F(43)$  se termine par un nombre impair de zéros. On doit donc aller à la position gagnante  $(36, I_F(R''_F(36))) = (36, 22) = (b_{14}, a_{14})$ .

### 3.2. Première généralisation du jeu de Wythoff

Dans les sections qui suivront, nous généraliserons le jeu de Wythoff en ajoutant une contrainte sur les déplacements. Les jeux seront des généralisations dans le sens où le jeu de Wythoff constitue, pour chacune d'elles, un cas particulier.

La généralisation du jeu de Wythoff que nous considérons en premier a été publiée par Aviezri S. Frankel [20] en 1982, quelques années après les deuxième (1959) et troisième (1973) généralisations. Nous commencerons par elle parce qu'elle est une bonne introduction aux autres jeux. Aussi, les autres généralisations demandent des démonstrations plus complexes, qui se rejoignent davantage.

#### 3.2.1. Règles du jeu

Définissons la première généralisation du jeu de Wythoff par les règles suivantes :

- (i) deux joueurs jouent en alternance;
- (ii) on a au départ deux piles de jetons, un nombre arbitraire dans chacune des piles;
- (iii) on fixe au préalable un paramètre  $a$ , un entier naturel. Un joueur doit prendre des jetons selon une des deux façons suivantes :
  - (iv) un nombre arbitraire de jetons dans une des piles;
  - (v)  $c > 0$  et  $d > 0$  jetons de chaque pile, respectivement, avec les contraintes suivantes :

$$|c - d| < a.$$

- (vi) le joueur qui ne peut pas jouer, en enlevant un nombre légal de jetons, perd la partie.

Le jeu de Wythoff original correspond à  $a = 1$ .

#### 3.2.2. Première représentation des positions gagnantes (récurrente)

Définissons les suites  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  et  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ , de manière récurrente comme suit :

$$(1) a_0 = b_0 = 0.$$

$$(2) b_n = a_n + na;$$

(3)  $a_n$  est le plus petit entier positif distinct des  $2n$  entiers  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ .

Des définitions des  $a_n$  et  $b_n$  données on obtient des suites  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ , complémentaires.

Théorème 14 : Les gagnantes sont exactement les positions de la forme  $(a_n, b_n)$ ,  $n \geq 0$ .

Démonstration : On doit montrer que (1) Un déplacement à partir d'une position  $(a_n, b_n)$  résulte nécessairement en une position qui n'est pas de la forme  $(a_i, b_i)$ , (2) À partir d'une position  $(x, y)$  qui n'est pas de la forme  $(a_n, b_n)$ , il existe un déplacement qui mène à une position de la forme  $(a_n, b_n)$ .

(1) Un déplacement du premier type à partir d'une position  $(a_n, b_n)$  résulte évidemment en une position qui n'est pas de la forme  $(a_i, b_i)$ .

Supposons qu'à partir de  $(a_n, b_n)$  on peut obtenir  $(a_i, b_i)$ . On a  $i < n$ . Un déplacement du second type (règle v) satisfait  $|(b_n - b_i) - (a_n - a_i)| < a$ . On a donc

$$|(b_n - b_i) - (a_n - a_i)| = |(n - i) a| < a.$$

Ce qui implique que  $n = i$ , une contradiction.

(2) Soit  $(x, y)$ ,  $x \leq y$ , une position qui n'est pas de la forme  $(a_i, b_i)$  ( $i \geq 0$ ). Puisque les suites sont complémentaires, tout entier positif apparaît une, et une seule, fois dans une des suites. Donc on a soit  $x = b_n$  ou bien  $x = a_n$  pour un  $n \geq 0$ .

(i) Si  $x = b_n$ , le déplacement à effectuer est aller à la position  $(b_n, a_n)$

(ii) Si  $x = a_n$  et  $y > b_n$  se déplacer à la position  $(a_n, b_n)$ .

Si  $x = a_n$  et  $a_n \leq y < b_n$ , calculer  $z = y - x$ ,  $m = [z/a]$  et aller à  $(a_m, b_m)$ . Montrons que c'est un déplacement légal.

En effet,

$$z = y - a_n < b_n - a_n = an, \text{ puisque } m \leq [z/a] < n,$$

$$y = a_n + z > a_m + z \geq a_n + am = b_m,$$

$$|(y - b_m) - (x - a_m)| = |(y - x) - (b_m - a_m)| = |z - am| < a. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

### Stratégie gagnante

Soit la position  $(x, y)$   $x \leq y$ . On écrit la paire sous la forme  $(x, x + z)$ .

- Si  $x = b_n$ , enlever  $an + z$  jetons de la deuxième pile.
- Si  $x = a_n$  et  $z > an$ , enlever  $z - an$  jetons de la deuxième pile.
- Si  $x = a_n$  et  $z < an$ , enlever  $a_n - a_m$  jetons de la première pile et  $a_n - a_m + (z - am)$  jetons de la deuxième pile, où  $m = \lfloor z/a \rfloor$ .
- Autrement, on perd si l'adversaire joue parfaitement jusqu'à la fin.

Tableau XVII : Positions gagnantes à la première généralisation du jeu de Wythoff où  $a = 2$

$n$	$a_n$	$b_n$	$n$	$a_n$	$b_n$	$n$	$a_n$	$b_n$
0	0	0	10	14	34	20	28	68
1	1	3	11	15	37	21	29	71
2	2	6	12	16	40	22	31	75
3	4	10	13	18	44	23	32	78
4	5	13	14	19	47	24	33	81
5	7	17	15	21	51	25	35	85
6	8	20	16	22	54	26	36	88
7	9	23	17	24	58	27	38	92
8	11	27	18	25	61	28	39	95
9	12	30	19	26	64	29	41	99

Exemples : Soit la position  $(26, 66)$  dans la première généralisation du jeu Wythoff avec  $a = 2$ . En regardant le tableau XVII on voit que  $26 = a_{19}$  et que  $66 - 26 = 40 > 2 \times 19 = 38$ . On doit donc enlever  $40 - 38 = 2$  jetons de la deuxième pile pour obtenir la position gagnante  $(26, 64) = (a_{19}, b_{19})$ .

Soit la position  $(26, 49)$ . En regardant le tableau XVII on voit que  $26 = a_{19}$  et on a  $49 - 26 = 23 < 38$ . On doit donc enlever  $a_{19} - a_{\lfloor 23/2 \rfloor} = 26 - 15 = 11$  jetons de la première pile et  $a_{19} - a_{\lfloor 23/2 \rfloor} + 23 - 2 \times 11 = 11 + 1 = 12$  jetons de la deuxième pile, pour obtenir la position gagnante  $(15, 37) = (a_{11}, b_{11})$ .

Soit la position  $(27, 66)$ . En regardant le tableau XVII on voit que  $27 = b_8$ . On doit donc enlever  $2 \times 8 + (66 - 27) = 55$  jetons de la deuxième pile pour obtenir la position gagnante  $(27, 11) = (b_8, a_8)$ .

### 3.2.3. Deuxième caractérisation des positions gagnantes (algébrique)

Soit

$$\alpha(a) = \alpha = \frac{2 - a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}$$

et

$$\beta(a) = \beta = \alpha + a,$$

où  $\alpha$  est une racine positive de l'équation  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+a} = 1$ . Donc  $\alpha$  et  $\beta$  sont irrationnels pour tout entier positif  $a$ , et satisfont à  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ . Par le théorème 4 (de Beatty), les suites  $\{a'_n\}_{n=0}^{\infty}$  et  $\{b'_n\}_{n=0}^{\infty}$ , où  $a'_n = [n\alpha]$  et  $b'_n = [n\beta]$ , sont complémentaires.

**Théorème 15** : Les paires  $(a'_n, b'_n)$  sont exactement les paires  $(a_n, b_n)$ .

**Démonstration** :  $a'_0 = 0 = a_0$ ,  $b'_0 = 0 = b_0$  et  $b'_n = a'_n + an$ . De plus  $a'_n$  est le plus petit entier positif absent de  $\{a'_1, b'_1, a'_2, b'_2, \dots, a'_{n-1}, b'_{n-1}\}$  puisque  $\{a'_n\}$  et  $\{b'_n\}$  sont des suites croissantes et complémentaires. Si le plus petit entier positif absent de  $\{a'_1, b'_1, a'_2, b'_2, \dots, a'_{n-1}, b'_{n-1}\}$  n'était pas  $a'_n$ ,  $a'_n$  ne serait jamais obtenu.

On a donc  $a_n \equiv a'_n$  et  $b_n \equiv b'_n$  pour  $n \geq 0$ .

C.Q.F.D.

#### Stratégie gagnante

Soit la position  $(x, y)$ ,  $x \leq y$ .

- Si  $x = \left[ \left[ \frac{x+1}{\beta} \right] \beta \right]$ , aller à la position  $\left( x, \left[ \left[ \frac{x+1}{\beta} \right] \alpha \right] \right)$ .
- Si  $x = \left[ \left[ \frac{x+1}{\alpha} \right] \alpha \right]$  et  $y > \left[ \left[ \frac{x+1}{\alpha} \right] \beta \right]$ , aller à la position  $\left( x, \left[ \left[ \frac{x+1}{\alpha} \right] \beta \right] \right)$ .

- Si  $x = \left[ \left[ \frac{x+1}{\alpha} \right] \alpha \right]$  et  $y < \left[ \left[ \frac{x+1}{\alpha} \right] \beta \right]$ , aller à  $([m\alpha], [m\beta])$  où  $m = [(y-x)/\alpha]$ .
- Si  $(x, y) = \left( \left[ \left[ \frac{x+1}{\alpha} \right] \alpha \right], \left[ \left[ \frac{x+1}{\alpha} \right] \beta \right] \right)$ , on perd si l'adversaire joue parfaitement jusqu'à la fin.

Démonstration de la stratégie :

La stratégie est en fait la même que celle de 3.2.2. En effet,

$$x = [n\alpha]$$

$$\Leftrightarrow x < n\alpha < x + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\alpha} < n < \frac{x+1}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow n = \left[ \frac{x+1}{\alpha} \right] = \left[ \frac{x}{\alpha} \right] + 1.$$

Donc  $x = a_n \Leftrightarrow x = \left[ \left[ \frac{x+1}{\alpha} \right] \alpha \right]$ . De même,  $x = b_n \Leftrightarrow x = \left[ \left[ \frac{x+1}{\beta} \right] \beta \right]$ . C.Q.F.D.

Exemples : Appliquons la nouvelle stratégie gagnante aux exemples de la section précédente.

On doit d'abord obtenir les valeurs numériques  $\alpha(2)$  et  $\beta(2)$

$$\alpha(2) = \frac{2 - 2 + \sqrt{2^2 + 4}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2} \cong 1,4142136$$

et

$$\beta(a) = \alpha + 2 \cong 3,4142136.$$

Soit la position (26, 66) dans la première généralisation du jeu Wythoff avec  $a = 2$ .

$$\text{On a } 26 = \left[ \left[ \frac{27}{1,4142136} \right] 1,4142136 \right] = [19 \times 1,4142136] = 26 \text{ et } 66 > [19 \times 3,4142136] =$$

64. On doit donc aller à la position gagnante  $(26, 64) = (a_{19}, b_{19})$ .



Soit la position (26, 49). On a  $26 = \left[ \left[ \frac{27}{1,4142136} \right] 1,4142136 \right] = [19 \times 1,4142136] = 26$

et  $49 < [19 \times 3,4142136] = 64$ . On doit donc aller à la position gagnante

$$\left( \left( \left[ \frac{49-26}{2} \right] 1,4142136 \right), \left( \left[ \frac{49-26}{2} \right] 3,4142136 \right) \right) = ([11 \times 1,4142136], [11 \times 3,4142136]) \\ = (15, 37) = (a_{11}, b_{11}).$$

Soit la position (27, 66). On a  $27 = \left[ \left[ \frac{28}{3,4142136} \right] 3,4142136 \right] = [8 \times 3,4142136] = 27$ .

On doit donc aller à la position gagnante  $(27, [8 \times 1,4142136]) = (27, 11) = (b_8, a_8)$ .

### 3.2.4. Troisième représentation des positions gagnantes (arithmétique)

Soit  $\alpha = [1, a_1, a_2, \dots]$  un nombre irrationnel dont les convergents sont  $p_i/q_i$ . Soit  $D_i = \alpha q_i - p_i$  ( $i \geq -1$ ). Par la théorie des fractions continues vu dans l'introduction de ce chapitre on a que

$$-1 = < D_{-1} < D_1 < D_3 < \dots < 0 < \dots < D_4 < D_2 < D_0 = \alpha - 1.$$

Lemme 2 :  $D_j + \sum_{i=1}^m a_{j+2i} D_{j+2i-1} = D_{j+2m}$  ( $j \geq -1$ ).

Démonstration : On a pour  $m = 1$ ,

$$D_j + a_{j+2} D_{j+1} = \alpha q_j - p_j + a_{j+2} (\alpha q_{j+1} - p_{j+1}) = D_{j+2}.$$

Donc

$$D_j + a_{j+2} D_{j+1} = D_{j+2},$$

$$D_{j+2} + a_{j+4} D_{j+3} = D_{j+4},$$

...

$$D_{j+2m-2} + a_{j+2m} D_{j+2m-1} = D_{j+2m},$$

En additionnant, on arrive au résultat.

C.Q.F.D.

Théorème 16 : Soit  $\alpha = [1, a_1, a_2, \dots]$  un nombre irrationnel qui converge vers  $\{p_i/q_i\}$ .

Soit  $n$  un entier positif.

Si  $R_q(n) = (\delta_m, \delta_{m-1}, \dots, \delta_{2k})$  ( $\delta_{2k} \neq 0, k \geq 0$ ), alors  $I_p(R_q(n)) = [n\alpha]$ .

Si  $R_q(n) = (\delta_m, \delta_{m-1}, \dots, \delta_{2k+1})$  ( $\delta_{2k+1} \neq 0, k \geq 0$ ), alors  $I_p(R_q(n)) = [n\alpha] + 1$ .

Démonstration : Pour le premier cas, il suffit de montrer que

$$0 < n\alpha - \sum_{i=2k}^m \delta_i p_i < 1,$$

c'est-à-dire

$$0 < \sum_{i=2k}^m \delta_i D_i < 1.$$

Par le lemme 2,

$$\sum_{i=2k}^m \delta_i D_i \geq D_{2k} + \sum_{i=1}^m a_{2k+2i} D_{2k+2i-1} = D_{2k+2m} > 0$$

et

$$\sum_{i=2k}^m \delta_i D_i \leq \sum_{i=1}^m a_{2k+2i-1} D_{2k+2i-2} = D_{2k+2m-1} - D_{2k-1} \leq D_{2k+2m-1} < 1.$$

Pour le deuxième cas, il suffit de montrer que

$$-1 < \sum_{i=2k+1}^m \delta_i D_i < 0.$$

Par le lemme 2,

$$\sum_{i=2k+1}^m \delta_i D_i \geq \sum_{i=1}^m a_{2k+2i} D_{2k+2i-1} = D_{2k+2m} - D_{2k} \geq -D_{2k} \geq -D_0 = 1 - \alpha > -1.$$

et

$$\sum_{i=2k+1}^m \delta_i D_i \leq D_{2k+1} + \sum_{i=1}^m a_{2k+2i+1} D_{2k+2i} = D_{2k+2m+1} < 0. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Théorème 17 : Soit  $\alpha = [1, a]$ ,  $\beta = \alpha + a$ , où  $a$  est un entier positif. Alors pour tout entier positif  $n$ ,  $R_p([n\beta]) = R'_p([n\alpha])$ .

Démonstration : (par induction sur  $n$ )

On a  $[\alpha] = 1 = p_0$ ,  $[\beta] = 1 + a = p_1$ , l'énoncé est donc vrai pour  $n = 1$ . Supposons que c'est vrai pour  $k < n$ . Maintenant  $R_p([n\alpha])$  fini par un nombre pair de zéros par le théorème précédent. Soit  $R' = R'_p([n\alpha])$ . Par l'hypothèse d'induction,  $I_p(R') \neq [k\beta]$ ,  $k < n$ . En réalité,  $I_p(R')$  est le plus petit nombre avec la représentation  $R'$  qui se termine par un nombre impair de zéros non encore obtenu. Si  $I_p(R') \neq [n\beta]$ , alors  $I_p(R')$  ne pourra jamais être obtenu pour  $k > n$  puisque la suite  $[k\beta]$  est croissante, ce qui contredit le lemme. C.Q.F.D.

### Stratégie gagnante

Soit la position  $(x, y)$   $x \leq y$ . On calcule  $R_p(x)$

- Si  $R_p(x)$  se termine par un nombre impair de zéros, aller à  $(I_p(R''_p(x)), x)$
- Si  $R_p(x)$  se termine par un nombre pair de zéros et  $y > I_p(R'_p(x))$ , aller à  $(x, I_p(R'_p(x)))$
- Si  $R_p(x)$  se termine par un nombre pair de zéros et  $y < I_p(R'_p(x))$ , aller à  $(I_p(R_q(m)), I_p(R_q(m)) + ma)$  où  $m = [(y - x)/a]$
- Si  $R_p(x)$  se termine par un nombre pair de zéros et  $y = I_p(R'_p(x))$ , on perd si l'adversaire joue parfaitement jusqu'à la fin.

Exemples : Reprenons les mêmes exemples vus aux sections précédentes. On aura besoin de la représentation de certains nombres avec les suites  $\{p_i\}$  et  $\{q_i\}$ .

Tableau XVIII : Exemple d'un jeu de la première généralisation du jeu de Wythoff où  $a = 2$

$R$	$p_5$	$p_4$	$p_3$	$p_2$	$p_1$	$p_0$	$I_p(R)$
	99	41	17	7	3	1	
$R_p(26)$			1	1	0	2	26
$R'_p(26)$		1	1	0	2	0	64
				2	0	1	15
$R_p(27)$			1	1	1	0	27
$R''_p(27)$				1	1	1	11
$R$	$q_5$	$q_4$	$q_3$	$q_2$	$q_1$	$q_0$	$I_q(R)$
	70	29	12	5	2	1	
$R_q(11)$				2	0	1	11

Soit la position  $(26, 66)$  dans la première généralisation du jeu de Wythoff pour lequel  $a = 2$ .  $R_p(26)$  se termine par un nombre pair de zéros (aucun) et  $66 > I_p(R'_p(26)) = 64$ . On doit donc aller à la position gagnante  $(26, I_p(R'_p(26))) = (26, 64)$ .

Soit la position  $(26, 49)$ .  $R_p(26)$  se termine par un nombre pair de zéros (aucun) et  $49 < I_p(R'_p(26)) = 49$ . On doit donc aller à la position gagnante  $(I_p(R_q([(49-26)/2])), I_p(R_q([(49-26)/2])) + 2 \times [(49-26)/2]) = (I_p(R_q(11)), I_p(R_q(11)) + 2 \times 11) = (15, 37)$ .

Soit la position  $(27, 66)$ .  $R_p(27)$  se termine par un nombre impair de zéros. On doit donc aller à la position gagnante  $(27, I_p(R''_p(27))) = (27, 11)$ .

### 3.3. Deuxième généralisation du jeu de Wythoff

Publiée par Ian G. Connel en 1959 [4], cette deuxième généralisation du jeu de Wythoff est certainement l'évolution la plus remarquable dans le domaine depuis l'avènement du jeu de Wythoff en 1907.

#### 3.3.1. Règles du jeu

Définissons la deuxième généralisation du jeu de Wythoff par les règles suivantes :

- (i) deux joueurs jouent en alternance;
- (ii) on a au départ deux piles de jetons, un nombre arbitraire dans chacune des piles;
- (iii) un joueur doit prendre un nombre égal de jetons dans chaque pile ou un multiple de  $k$  jetons dans une des piles mais il doit prendre au moins un jeton;
- (iv) le joueur qui ne peut prendre un nombre légal de jetons perd la partie.

Dans un tel jeu on ajoute à l'ensemble des paires gagnantes les paires d'où aucun déplacement légal ne peut être fait.

Le jeu de Wythoff original correspond à  $k = 1$ .

#### 3.3.2. Première représentation des paires gagnantes (récurrente)

Soit

$$\varepsilon = \varepsilon_i = \begin{cases} 0, & \text{si } i = 0, \\ 1, & \text{si } i \neq 0. \end{cases}$$

Définissons les suites  $\{a_{i,n}\}_{n=0}^{\infty}$  et  $\{b_{i,n}\}_{n=0}^{\infty}$ ,  $0 \leq i < k$ , de façon récurrente comme suit :

$$(1) a_{i,0} = 0, b_{i,0} = i.$$

$$(2) b_{i,n} = a_{i,n} + nk + i;$$

$$(3) a_{i,n} \text{ est le plus petit entier positif distinct des } 2n \text{ entiers } a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,n-1}, b_{ek-i,0},$$

$$b_{ek-i,1}, \dots, b_{ek-i,n-1}.$$

Lemme 3 : Pour tout  $0 \leq i < k$ ,

$$1 \leq a_{i,n} - a_{i,n-1} \leq 2 \leq b_{i,n} - b_{i,n-1}, n \geq 1.$$

Démonstration : Le côté gauche de l'inégalité suit directement de la définition de la suite  $a_{i,n}$ . Donc, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$b_{i,n} - b_{i,n-1} = a_{i,n} - a_{i,n-1} + k \geq a_{i,n} - a_{i,n-1} + 1 \geq 2.$$

Soit  $m$  un entier positif. Si  $a_{i,m-1} + 1 \neq b_{ek-i,n}$  pour tout  $n < m$ , alors  $a_{i,m} = a_{i,m-1} + 1$ .

Si  $a_{i,m-1} + 1 = b_{ek-i,n}$  pour un  $n < m$ , alors  $a_{i,m-1} + 2 \neq b_{ek-i,n}$ ,  $n < m$ , et  $a_{i,m} = a_{i,m-1} + 2$ .

C.Q.F.D.

Corollaire 3 :  $b_{ek-i,n} > a_{i,n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Démonstration : Puisque

$$a_{0,1} < b_{0,1}, a_{i,0} < b_{i,0} \quad (0 < i < k),$$

le résultat suit directement du lemme 3.

C.Q.F.D.

Lemme 4 : Les suites  $\{a_{i,n}\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{b_{ek-i,n}\}_{n=1}^{\infty}$  sont complémentaires  $(1 - \varepsilon)$ -supérieures.

Démonstration : Pour tout nombre positif fixé  $n$ ,  $b_{ek-i,n} \neq a_{i,m}$  pour  $m \leq n$  par le corollaire, et ceci tient aussi pour  $m > n$ . De plus,

$$b_{ek-i,n} > b_{ek-i,m}, a_{i,n} > a_{i,m}, m < n.$$

Ceci montre que les suites sont disjointes; et la définition de  $a_{i,n}$  garantie qu'éventuellement tout entier positif va apparaître au moins une fois parmi les deux suites.

C.Q.F.D.

Théorème 17 : L'ensemble des paires gagnantes pour ce jeu comprend les  $k$  suites

$$(4) \quad \{(a_{i,n}, b_{i,n})\}_{n=0}^{\infty}$$

où  $i = 0, 1, \dots, k-1$ .

Démonstration : On étudie séparément les trois propriétés qui caractérisent l'ensemble des paires gagnantes.

Propriété (a) : Si  $(x, y)$  n'est pas une paire de type (4), nous devons montrer qu'elle peut être réduite en une telle paire dans un seul déplacement.

Clairement, l'ordre des piles n'est pas important et nous pouvons supposer que  $x \leq y$ . Soit  $y - x = i \pmod k$  tel que

$$(5) \quad y = x + i + rk$$

où  $r \geq 0$  et  $0 \leq i \leq k - 1$ .

Comme les suites  $\{a_{i,n}\}$  et  $\{b_{k-i,n-1}\}$  sont complémentaires  $(1 - \varepsilon)$ -supérieures, on a

- (i)  $x = 0$ ; ou
- (ii)  $x = a_{i,n}$ ,  $n \geq 1$ ; ou
- (iii)  $x = b_{k-i,n-1}$ ,  $n \geq 1$ .

Cas (i) : Dans ce cas

$$x = a_{i,0} = 0, y = i + rk.$$

Si  $r = 0$  la paire  $(x, y)$  est la paire  $(a_{i,0}, b_{i,0})$  qui est du type (4).

Si  $r > 0$  la pile  $y$  peut être réduite de  $rk$  jetons pour donner cette paire.

Cas (ii) : On distingue trois cas

- (ii,i)  $y > b_{i,n}$ ;
- (ii,ii)  $y = b_{i,n}$ ;
- (ii,iii)  $y < b_{i,n}$ .

Cas (ii,i) :  $y = x + i + rk = a_{i,n} + i + rk = b_{i,n} + (r - n)k$ . Donc la pile  $y$  peut être réduite de  $r - n > 0$  multiple de  $k$  pour obtenir la paire  $(a_{i,n}, b_{i,n})$ .

Cas (ii,ii) : La paire  $(x, y)$  est du type (4).

Cas (ii,iii) : Dans ce cas  $r < n$ . Prendre  $s$  jetons de chaque pile tel que  $x - s = a_{i,n} - s = a_{i,r}$ . Donc  $y - s = x + i + rk - s = a_{i,r} + i + rk = b_{i,r}$ , et la paire  $(x, y)$  est réduite à  $(a_{i,r}, b_{i,r})$  où  $r \geq 0$ .

Cas (iii) : Maintenant

$$y \geq x = b_{k-i,n-1} > a_{k-i,n-1}$$

et

$$y = x + i + rk = b_{k-i,n-1} + i + rk$$

$$\begin{aligned}
&= a_{k-i, n-1} + k - i + (n-1)k + i + rk \\
&= a_{k-i, n-1} + (n+r)k
\end{aligned}$$

et le déplacement est évident (enlever  $(n+r)k$  jetons de la pile  $y$ .)

Propriété (b) : On doit montrer qu'un déplacement à partir d'une paire de type (4) produit une paire qui n'est pas de type (4). Maintenant

$$b_{i, n} = a_{i, n} + i \pmod k$$

et cette égalité est préservée par tout déplacement puisque

$$b_{i, n-s} = a_{i, n} + (i-s) \pmod k,$$

$$b_{i, n} - rk = a_{i, n} + i \pmod k,$$

et

$$b_{i, n} \equiv a_{i, n} + (i - rk) \pmod k.$$

Les seules paires dans l'ensemble (4) qui satisfont à cette équation sont les paires de type  $(a_{i, n'}, b_{i, n'})$  et  $(a_{k-i, n'}, b_{k-i, n'})$  parce que

$$b_{k-i, n'} \equiv a_{k-i, n'} + (k-i) \pmod k$$

i.e.

$$a_{k-i, n'} \equiv b_{k-i, n'} + i \pmod k$$

Supposons qu'un déplacement à partir de la paire  $(a_{i, n}, b_{i, n})$  donne la paire  $(a_{i, n'}, b_{i, n'})$ . Alors  $n' < n$ ,  $a_{i, n'} < a_{i, n}$  et  $b_{i, n'} < b_{i, n}$  tel que le déplacement doit avoir enlevé  $s$  jetons de chaque pile. Par (2)

$$b_{i, n-s} = a_{i, n-s} + nk + i,$$

i.e.

$$b_{i, n'} - s = a_{i, n'} - s + nk + i$$

ce qui est impossible par (2).

D'un autre côté supposons que le déplacement donne la paire  $(a_{k-i, n'}, b_{k-i, n'})$ . Puisque  $a_{i, n} < b_{i, n}$  pour tout  $i$  et  $n$  (excepté  $a_{0, 0} = b_{0, 0} = 0$ ) le déplacement a seulement enlevé un multiple de  $k$  jetons de la pile  $b_{i, n}$  tel que

$$a_{i, n} = b_{k-i, n'}$$

et

$$b_{i, n} - rk = a_{k-i, n'}.$$

Mais les équations ainsi formées ne satisfont pas à la propriété de complémentarité des suites  $\{a_{i, n}\}$  et  $\{b_{k-i, n'}\}$ .

Donc aucun déplacement à partir d'une paire  $(a_{i, n}, b_{i, n})$  ne produit une paire de l'ensemble (4).



Propriété (c) : Toute paire gagnante pour laquelle aucun déplacement ne peut être fait est de la forme

$$(0, 0), (0, 1), \dots, (0, k-1);$$

i.e.  $(a_{0,0}, b_{0,0}), (a_{1,0}, b_{1,0}), \dots, (a_{k-1,0}, b_{k-1,0}),$

et cette suite est incluse dans (4).

C.Q.F.D.

### Stratégie gagnante

On écrit la paire  $(x, y)$  ( $x \leq y$ ) sous la forme  $(x, x + i + rk)$  où  $i$  est tel que  $y - x = i \pmod k$  et  $r \geq 0$ .

- Si  $x = 0$  et  $r > 0$ , enlever  $rk$  jetons de la pile  $y$ .
- Si  $x = a_{i,n}$  et  $y > b_{i,n}$ , enlever  $(r - n)k$  jetons de la pile  $y$ .
- Si  $x = a_{i,n}$  et  $y < b_{i,n}$ , enlever  $s$  jetons de chaque pile où  $s$  est tel que  $x - s = a_{i,r}$ .
- Si  $x = b_{k-i,n-1}$ , enlever  $(n + r)k$  jetons de la pile  $y$ .
- Autrement on perd si l'adversaire joue bien jusqu'à la fin.

Tableau XIX : Positions gagnantes de la deuxième généralisation du jeu de Wythoff où  $k = 4$

$k = 4$								
$n$	$a_{0,n}$	$b_{0,n}$	$a_{1,n}$	$b_{1,n}$	$a_{2,n}$	$b_{2,n}$	$a_{3,n}$	$b_{3,n}$
0	0	0	0	1	0	2	0	3
1	1	5	1	6	1	7	2	9
2	2	10	2	11	3	13	3	14
3	3	15	4	17	4	18	4	19
4	4	20	5	22	5	23	5	24
5	6	26	6	27	6	28	7	30
6	7	31	7	32	8	34	8	35
7	8	36	8	37	9	39	9	40
8	9	41	10	43	10	44	10	45
9	11	47	11	48	11	49	12	51
10	12	52	12	53	12	54	13	56
11	13	57	13	58	14	60	14	61
12	14	62	15	64	15	65	15	66

Exemples : Soit la position  $(13, 66)$  dans la deuxième généralisation du jeu Wythoff avec  $k = 4$ . On a  $(13, 66) = (13, 13 + 1 + 13 \times 4)$ . En regardant le tableau XIX on voit que 13

$= a_{1,11}$  et que  $66 > b_{1,11} = 58$ . On doit donc enlever  $(13 - 11) 4 = 8$  jetons de la deuxième pile pour obtenir la position gagnante  $(13, 58) = (a_{1,11}, b_{1,11})$ .

Soit la position  $(13, 49)$ . On a  $(13, 49) = (13, 13 + 0 + 9 \times 4)$ . En regardant le tableau XIX on voit que  $13 = a_{0,11}$  et on a  $49 < a_{0,11} = 57$ . On doit donc enlever  $13 - a_{0,9} = 13 - 11 = 2$  jetons de chaque pile pour obtenir la position gagnante  $(11, 47) = (a_{0,9}, b_{0,9})$ .

Soit la position  $(14, 47)$ . On a  $(14, 47) = (14, 14 + 1 + 8 \times 4)$ . En regardant le tableau XIX on voit que  $14 = b_{4-1,2}$ . On doit donc enlever  $(2 + 1 + 8) 4 = 44$  jetons de la deuxième pile pour obtenir la position gagnante  $(14, 3) = (b_{3,2}, a_{3,2})$ .

### 3.3.3. Deuxième représentation des paires gagnantes (algébrique)

Définissons

$$\alpha = \frac{2 - k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}, \beta = \alpha + k,$$

$$\gamma = \gamma(i) = \frac{i\alpha}{k}, \delta = \delta(i) = \gamma(i) + i,$$

où  $\varepsilon$  est défini comme précédemment. Soit

$$\phi_{i,n} = [n\alpha + \gamma(i)], \psi_{i,n} = [n\beta + \delta(i)].$$

**Lemme 5** : Pour tout  $0 \leq i < b$ , les suites  $\{\phi_{i,n}\}$  et  $\{\psi_{\varepsilon k - i, n}\}$  sont complémentaires  $(1 - \varepsilon)$ -supérieures.

**Démonstration** : Selon le théorème II de l'article de A. S. Fraenkel [25], les suites  $\phi_n = [n\alpha + \gamma]$ ,  $\psi_n = [n\beta + \delta]$  ( $\alpha, \beta$  des irrationnels positifs,  $\gamma, \delta$  réels et  $N$  entier) avec  $\phi_N \leq \psi_N$  sont complémentaires  $N$ -supérieures si, et seulement si,

(a) 
$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$$

(b) 
$$\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\delta}{\beta} = \varphi_N - 2N + 1$$

(c) 
$$n\beta + \delta = K, \quad n, K \text{ entiers implique } n < N.$$

Vérifions (a)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} &= \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+k} = \frac{2\alpha+k}{\alpha^2+ak} \\
&= \frac{2+\sqrt{k^2+4}}{(2-k)^2+2(2-k)\sqrt{k^2+4}+(k^2+4)} + \frac{2k-k^2+k\sqrt{k^2+4}}{2} \\
&= \frac{2+\sqrt{k^2+4}}{\frac{4-2k+k^2+(2-k)\sqrt{k^2+4}}{2} + \frac{2k-k^2+k\sqrt{k^2+4}}{2}} = 1.
\end{aligned}$$

Aussi, si

$$\begin{aligned}
n\beta + \delta &= n(\alpha+k) + i + \frac{i\alpha}{k} \\
&= \left(n + \frac{i}{k}\right)\alpha + nk + i = K
\end{aligned}$$

alors  $n = i = 0$  puisque  $\alpha$  est irrationnel et positif. (c) est vérifié.

Pour  $i = 0$ , les deux côtés de (b) sont zéro. Pour  $0 < i < k$ , on a

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma(i)}{\alpha} + \frac{\delta(k-i)}{\beta} &= \frac{i\alpha}{k\alpha} + \frac{(k-i)\alpha}{k\beta} + \frac{k-i}{\beta} \\
&= \frac{i}{k} + \frac{(k-i)(\beta-k)}{k\beta} + \frac{k-i}{\beta} = 1.
\end{aligned}$$

Il reste donc à montrer que  $\phi_{i,0} = 0$ . On a

$$\gamma(i) = \frac{i\alpha}{k} \leq \frac{(k-1)\alpha}{k} < 1.$$

La dernière inégalité est toujours vraie. En effet, supposons le contraire,

$$\alpha - \frac{\alpha}{k} \geq 1.$$

On aurait alors

$$\alpha - 1 \geq \frac{\alpha}{k},$$

$$1 - \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta} \geq \frac{1}{k},$$

et

$$k \geq \beta = \alpha + k > k,$$

une contradiction. (b) est donc vérifié.

C.Q.F.D.

**Théorème 18** : Les paires  $(\phi_{i,n}, \psi_{i,n})$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  et  $n = 0, 1, 2, \dots$ , sont les paires gagnantes à la deuxième généralisation du jeu de Wythoff.

**Démonstration** : La preuve du lemme 5 montre que  $\phi_{i,0} = a_{i,0}$ ,  $\psi_{i,0} = b_{i,0}$  dans la notation de la section précédente. Notons que pour tout  $m > 0$ ,  $\phi_{i,m}$  est le plus petit entier positif  $j$  qui n'est pas parmi  $\phi_{i,n}, \psi_{ek-i,n}$ ,  $n < m$ . Autrement,  $j$  doit ne jamais être apparu dans les deux suites complémentaires  $(1 - \varepsilon)$ -supérieure  $\phi_{i,n}, \psi_{ek-i,n}$  puisque  $\phi_{i,n+1} > \phi_{i,n}$  et évidemment  $\psi_{ek-i,n} > \phi_{i,n}$ ,  $n \geq 1$ .

De plus,

$$\psi_{i,m} = \phi_{i,m} + m k + i.$$

La définition des suites  $\phi_{i,n}, \psi_{i,n}$  est en fait la même que celle de  $a_{i,n}, b_{i,n}$ , on a donc  $\phi_{i,n} \equiv a_{i,n}$  et  $\psi_{i,n} \equiv b_{i,n}$ .

C.Q.F.D.

### 3.3.4. Troisième représentation des positions gagnantes (arithmétique)

Soit  $\{p_n\}$  et  $\{q_n\}$  les suites telles que  $p_n/q_n$  est la  $n$ -ième réduite de  $\alpha = \frac{2 - k + \sqrt{k^2 + 4}}{2} = [1, k, k, k, \dots]$ .

**Lemme 6** : Supposons que  $1 = x_1 < x_2 < x_3 < \dots$  est une suite d'entiers positifs pour laquelle  $x_m$  peut être écrit avec les nombres de la suite  $\{p_n\}$  de la manière suivante

$$x_m = \gamma_n p_n + \gamma_{n-1} p_{n-1} + \dots + \gamma_{2i} p_{2i}$$

(il y a un nombre pair de zéros à la fin), et soit

$$y_m = \gamma_n p_{n+1} + \gamma_{n-1} p_n + \dots + \gamma_{2i} p_{2i+1}$$

(on ajoute un zéro à la fin de  $x_m$ ). Alors

- I.  $\{x_n\}, \{y_n\}$  sont des suites complémentaires 1-supérieures;
- II.  $y_n = x_n + k n$ ,  $n \geq 1$ .

Démonstration : Puisque tout entier positif se termine avec soit un nombre pair, soit un nombre impair de zéros, I est clair. Pour montrer II, il suffit de montrer

$$(a) y_1 - x_1 = k,$$

$$(b) f_m = k, m \geq 2,$$

où

$$f_m = (y_m - x_m) - (y_{m-1} - x_{m-1}) = (y_m - y_{m-1}) - (x_m - x_{m-1}).$$

$$(a) x_1 = 1 = p_0, y_1 = p_1 = k p_0 + p_{-1} = k + 1, y_1 - x_1 = k.$$

(b) Soit

$$x_m = \gamma_n p_n + \gamma_{n-1} p_{n-1} + \dots + \gamma_{2i} p_{2i}, \gamma_{2i} \neq 0.$$

On considère plusieurs cas

(i)  $i = 0, \gamma_0 > 1$ . Alors

$$x_m = \gamma_n p_n + \dots + \gamma_0 p_0,$$

$$x_m - 1 = \gamma_n p_n + \dots + (\gamma_0 - 1) p_0 = x_{m-1},$$

$$y_m = \gamma_n p_{n+1} + \dots + \gamma_0 p_1,$$

$$y_{m-1} = \gamma_n p_{n+1} + \dots + (\gamma_0 - 1) p_1,$$

$$f_m = p_1 - p_0 = k.$$

(ii)  $i = 0, \gamma_0 = 1$ . Alors

$$x_m - 1 = \gamma_n p_n + \dots + \gamma_l p_l, \gamma_l \neq 0, l \geq 1.$$

Si  $l$  est pair, alors  $x_m - 1 = x_{m-1}$ , et on a  $f_m = k$  comme le cas précédent. Si  $l$  est impair, alors  $x_m - 1 \neq x_{m-1}$ , mais par le lemme 1 de la section 3.0.,

$$x_m - 2 = \gamma_n p_n + \dots + (\gamma_l - 1) p_l + k (p_{l-1} + p_{l-3} + \dots + p_0) = x_{m-1},$$

$y_m$  est comme en (i), et

$$y_{m-1} = \gamma_n p_{n+1} + \dots + (\gamma_l - 1) p_{l+1} + k (p_l + p_{l-2} + \dots + p_1),$$

$$f_m = p_{l+1} - k (p_l + p_{l-2} + \dots + p_1) + \gamma_0 p_1 - p_l$$

$$+ k (p_{l-1} + p_{l-3} + \dots + p_0) - \gamma_0 p_0$$

$$= p_{l+1} - (p_{l+1} - p_2) + p_1 - p_l + (p_l - 1) - p_0$$

$$= p_1 - p_0 = k.$$

(iii)  $i > 0$ . Par le lemme 1 de la section 3.0.,

$$x_m - 1 = \gamma_n p_n + \dots + (\gamma_{2i} - 1) p_{2i} + k (p_{2i-1} + p_{2i-3} + \dots + p_1) \neq x_{m-1},$$

Mais

$$x_m - 2 = \gamma_n p_n + \dots + (\gamma_{2i} - 1) p_{2i} + k(p_{2i-1} + p_{2i-3} + \dots + p_1) - p_1 + k p_0 = x_{m-1}.$$

$$y_m = \gamma_n p_{n+1} + \dots + \gamma_{2i} p_{2i+1}$$

$$y_{m-1} = \gamma_n p_{n+1} + \dots + (\gamma_{2i} - 1) p_{2i+1} + k(p_{2i} + p_{2i-2} + \dots + p_2) - p_2 + k p_1,$$

$$f_m = p_{2i+1} - k(p_{2i} + p_{2i-2} + \dots + p_2) + p_2 - k p_1$$

$$- p_{2i} + k(p_{2i-1} + p_{2i-3} + \dots + p_1) - p_1 + k p_0$$

$$= p_{2i+1} - (p_{2i+1} - p_1) + p_2 - (p_2 - p_0)$$

$$- p_{2i} + (p_{2i} - p_0) - p_1 + k p_0 = k.$$

C.Q.F.D.

**Lemme 7** : Soit  $0 < r < k$ , et supposons que  $0 = x_{r,0} < x_{r,1} < x_{r,2} < \dots$  est la suite de tous les entiers non négatif pour laquelle la  $p$ -représentation est

$$x_{r,m} = \gamma_n p_n + \gamma_{n-1} p_{n-1} + \dots + \gamma_0 p_0$$

et a une des formes

(a)  $k - r \neq \gamma_0 \neq k - r + 1,$

(b)  $x_{r,m} = \gamma_n p_n + \dots + \gamma_{i+1} p_{i+1} + r p_i + (k - r) p_{i-1} + r p_{i-2} + \dots + (k - r) p_2 + r p_1 + (k - r + 1) p_0,$

$$\gamma_{i+1} \geq k - r + 1,$$

(c)  $x_{r,m} = \gamma_n p_n + \dots + \gamma_{i+1} p_{i+1} + (k - r) p_i + r p_{i-1} + \dots + (k - r) p_2 + r p_1 + (k - r + 1) p_0,$

$$\gamma_{i+1} \leq r - 1,$$

(d)  $x_{r,m} = \gamma_n p_n + \dots + \gamma_{i+1} p_{i+1} + (k - r) p_i + r p_{i-1} + \dots + (k - r) p_2 + r p_1 + (k - r) p_0,$

$$\gamma_{i+1} \geq r + 1,$$

(e)  $x_{r,m} = \gamma_n p_n + \dots + \gamma_{i+1} p_{i+1} + r p_i + (k - r) p_{i-1} + r p_{i-2} + \dots + (k - r) p_2 + r p_1 + (k - r) p_0,$

$$\gamma_{i+1} \leq k - r - 1,$$

où en (b), (c), (d), (e), il y a un nombre non négatif de paires de nombres  $(k - r, r)$  précédant  $\gamma_0$ . De plus, soit

$$y_{r,m} = \gamma_n p_{n+1} + \gamma_{n-1} p_n + \dots + \gamma_1 p_2 + \gamma_0' p_1 + \gamma' p_0,$$

où

$$\gamma_0' = \gamma_0, \gamma' = r, \text{ si } 0 \leq \gamma_0 \leq k - r,$$

$$\gamma_0' = \gamma_0 - 1, \gamma' = r + 1, \text{ si } k - r < \gamma_0 \leq k.$$

Alors

- I.  $x_{r,m}, y_{k-r,m}$  sont complémentaires;  
 II.  $y_{r,m} = x_{r,m} + mk + r, m \geq 0$ .

Démonstration : Soit  $X$ , l'ensemble de tous les nombres de la forme  $x_{r,m}$ ,  $Y$  l'ensemble de tous les nombres de la forme  $y_{k-r,m}$ . Les hypothèses sur  $x_{r,m}, y_{r,m}$  impliquent que  $Y$  contient tous, et seulement tous, les nombres de la forme

$$y_{k-r,m} = \gamma_n p_n + \dots + \gamma_{i+1} p_{i+1} + (k-r) p_i + r p_{i-1} + \dots \\ + (k-r) p_2 + r p_1 + (k-r+1) p_0,$$

$$\gamma_{i+1} \geq r+1,$$

$$y_{k-r,m} = \gamma_n p_n + \dots + \gamma_{i+1} p_{i+1} + r p_i + (k-r) p_{i-1} + r p_{i-2} + \dots \\ + (k-r) p_2 + r p_1 + (k-r+1) p_0,$$

$$\gamma_{i+1} \leq k-r-1,$$

$$y_{k-r,m} = \gamma_n p_n + \dots + \gamma_{i+1} p_{i+1} + r p_i + (k-r) p_{i-1} + r p_{i-2} + \dots \\ + (k-r) p_2 + r p_1 + (k-r) p_0,$$

$$\gamma_{i+1} \geq k-r+1,$$

$$y_{k-r,m} = \gamma_n p_n + \dots + \gamma_{i+1} p_{i+1} + (k-r) p_i + r p_{i-1} + \dots \\ + (k-r) p_2 + r p_1 + (k-r) p_0,$$

$$\gamma_{i+1} \leq r-1,$$

où le nombre de paires  $(k-r, r)$  consécutives précédant le dernier chiffre est non négatif.

Tous les nombres finissant en  $\gamma_0, k-r \neq \gamma_0 \neq k-r+1$  est dans  $X$  et non dans  $Y$ . Considérons l'ensemble des nombres  $p$  finissant en  $\gamma = k-r+1$ . On doit supposer qu'une suite maximale de  $l \geq 0$  paires  $(k-r, r)$  consécutives précèdent  $\gamma_0$ . Si le chiffre  $h$  précédent la première de ces paires est  $\leq r-1$ , alors  $p \in X, p \notin Y$ . Si  $h \geq r+1$ , alors  $p \notin X, p \in Y$ . Si  $h = r$ , le chiffre  $j$  précédent  $h$  est soit  $\geq k-r+1$ , dans ce cas  $p \in X, p \notin Y$ , ou  $j \leq k-r+1$ , dans ce cas  $p \notin X, p \in Y$ . Le cas  $j = k-r$  est impossible puisqu'il implique qu'un ensemble de  $\geq l+1$  paires  $(k-r, r)$  consécutives précèdent  $\gamma_0$ , contrairement à l'hypothèse.

Le même argument montre que tout nombre finissant en  $k-r$  est soit dans  $X$  soit dans  $Y$  mais pas dans les deux.

II. En utilisant la méthode et la notation du lemme 6, on va montrer que  $f_m = k$ ,  $m \geq 1$ .  
C'est suffisant parce que, clairement,  $y_{r,0} - x_{r,0} = r$ .

Pour le reste de la preuve, on écrit  $x_m, y_m$  au lieu de  $x_{r,m}, y_{r,m}$ . Soit

$$x_m = \gamma_n p_n + \gamma_{n-1} p_{n-1} + \dots + \gamma_i p_i, \gamma_i \neq 0.$$

(1)  $i = 0$ . Alors

$$x_m = \gamma_n p_n + \dots + \gamma_0 p_0,$$

$$x_m - 1 = \gamma_n p_n + \dots + (\gamma_0 - 1) p_0.$$

(i)  $0 \leq \gamma_0 - 1 < k - r$ . Alors  $x_m - 1 = x_{m-1}$ . Mais

$$y_m = \gamma_n p_{n+1} + \dots + \gamma_0 p_1 + r p_0,$$

$$y_{m-1} = \gamma_n p_{n+1} + \dots + (\gamma_0 - 1) p_1 + r p_0,$$

$$f_m = p_1 - p_0 = k.$$

(ii)  $\gamma_0 - 1 = k - r$ . Alors  $x_m$  a une des formes (b) ou (c) d'où  $x_m - 1 \neq x_{m-1}$ . Mais

$$x_m - 2 = \gamma_n p_n + \dots + \gamma_1 p_1 + (\gamma_0 - 2) p_0 = x_{m-1},$$

$$y_m = \gamma_n p_{n+1} + \dots + \gamma_1 p_2 + (\gamma_0 - 1) p_1 + (r + 1) p_0,$$

$$y_{m-1} = \gamma_n p_{n+1} + \dots + \gamma_1 p_2 + (\gamma_0 - 2) p_1 + r p_0,$$

$$f_m = p_1 + p_0 - 2 p_0 = k.$$

(iii)  $\gamma_0 - 1 = k - r + 1$ . Supposons d'abord que  $x_m - 1 = x_{m-1}$ . Alors  $y_m$  est comme en (ii),  
et

$$y_{m-1} = \gamma_n p_{n+1} + \dots + \gamma_1 p_2 + (\gamma_0 - 2) p_1 + (r + 1) p_0,$$

$$f_m = p_1 - p_0 = k.$$

Maintenant supposons que  $x_m - 1 \neq x_{m-1}$ . Alors  $x_m - 1$  n'a pas une des formes (b) ou (c), il a donc une des formes (d) ou (e), excepté que le dernier chiffre  $k - r$  en (d), (e) est remplacé par  $k - r + 1$ . Donc  $x_m - 2$  a la forme (d) ou (e), et  $x_m - 2 = x_{m-1}$ . Aussi,  $y_m$  et  $y_{m-1}$  sont comme en (ii), et  $f_m = k$ .

(iv)  $\gamma_0 - 1 > k - r + 1$ . Alors  $x_m - 1 = x_{m-1}$ ,  $y_m$  a la forme de (ii),  $y_{m-1}$  a la forme du premier cas de (iii), et  $f_m = p_1 - p_0 = k$ .

(2)  $i > 0$ . Alors

$$x_m = \gamma_n p_n + \dots + \gamma_i p_i,$$

$$y_m = \gamma_n p_{n+1} + \dots + \gamma_i p_{i+1} + r p_0,$$



Par le lemme 1 de la section 3.0.,

$$x_m - 1 = \gamma_n p_n + \dots + \gamma_{i+1} p_{i+1} + (\gamma_i - 1) p_i + k(p_{i-1} + p_{i-3} + \dots + p_\theta)$$

où

$$\theta = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } i \text{ est impair.} \end{cases}$$

(v)  $i$  pair. Alors  $x_m - 1 = x_{m-1}$ ,

$$y_{m-1} = \gamma_n p_{n+1} + \dots + \gamma_{i+1} p_{i+2} + (\gamma_i - 1) p_{i+1} + k(p_i + p_{i-2} + \dots + p_2) + k p_0,$$

$$f_m = p_{i+1} - k(p_i + p_{i-2} + \dots + p_0) + k p_0$$

$$- p_i + k(p_{i-1} + p_{i-3} + \dots + p_1)$$

$$= p_{i+1} - (p_{i+2} - 1) + k - p_i + (p_i - 1) = k.$$

(vi)  $i$  impair. Maintenant,  $k > k - r$ , alors  $x_m - 1 = x_{m-1}$ ,

$$y_{m-1} = \gamma_n p_{n+1} + \dots + \gamma_{i+1} p_{i+2} + (\gamma_i - 1) p_{i+1}$$

$$+ k(p_i + p_{i-2} + \dots + p_1) - p_1 + (r+1) p_0,$$

$$f_m = p_{i+1} + r p_2 - k(p_i + p_{i-2} + \dots + p_1) + p_1 - (r+1) p_0$$

$$- p_i + k(p_{i-1} + p_{i-3} + \dots + p_0)$$

$$= p_1 - p_0 = k.$$

C.Q.F.D.

Notons la paire  $(x_n, y_n)$  définie dans le lemme 6 par  $(x_{0,n}, y_{0,n})$ . Nous obtenons une autre représentation des positions gagnantes.

**Théorème 19** : Les paires  $(x_r, n, y_r, n)$ ,  $0 \leq r < k$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  définies dans les lemmes 6 et 7, avec  $(x_{0,0}, y_{0,0}) = (0, 0)$  comprends l'ensemble de toutes les paires gagnantes (paires de Wythoff).

**Démonstration** : Notons que  $x_{0,1} = 1 = a_{0,1}$  et  $y_{0,1} = 1 + k = b_{0,1}$  dans la notation de la section précédente. Pour  $0 < r < k$  on a  $x_{r,0} = 0$ ,  $y_{r,0} = r$ . Le reste de la preuve est dans le théorème 17.

### 3.4. Troisième généralisation du jeu de Wythoff

C'est A.S. Fraenkel et I. Borosh qui reprirent la généralisation de Connell vue dans la section précédente en y ajoutant une encore une fois des contraintes sur les déplacements.

#### 3.4.1. Règles du jeu

Définissons le jeu par les règles suivantes :

- (i) deux joueurs jouent en alternance;
- (ii) on a au départ deux piles de jetons, un nombre arbitraire dans chacune des piles;
- (iii) on fixe au préalable deux paramètres,  $a$  et  $b$ , qui sont des entiers naturels. Un joueur doit prendre des jetons selon une des deux façons suivantes :
  - (iv) un multiple de  $b$  jetons dans une des piles;
  - (v)  $c > 0$  et  $d > 0$  jetons des deux piles, respectivement, avec les contraintes suivantes :

$$c - d = 0 \pmod{b}, |c - d| < ab.$$

- (vi) le joueur qui ne peut prendre un nombre légal de jetons perd la partie.

Le jeu de Wythoff original correspond à  $a = b = 1$ , la première généralisation du jeu de Wythoff correspond à  $b = 1$  et  $a$  fixé arbitrairement et la deuxième généralisation du jeu de Wythoff correspond à  $a = 1$  et  $b$  fixé arbitrairement.

#### 3.4.2. Première représentation des positions gagnantes (récurrente)

Soit

$$\varepsilon = \varepsilon_i = \begin{cases} 0, & \text{si } i = 0, \\ 1, & \text{si } i \neq 0. \end{cases}$$

Définissons les  $b$  suites,  $\{a_{i,n}\}_{n=0}^{\infty}$  et  $\{b_{i,n}\}_{n=0}^{\infty}$ ,  $0 \leq i < b$ , de façon récurrente comme suit :

- (1)  $a_{i,0} = 0$ ,  $b_{i,0} = i$ .
- (2)  $b_{i,n} = a_{i,n} + nab + i$ ;

(3)  $a_{i,n}$  est le plus petit entier positif distinct des  $2n$  entiers  $a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,n-1}, b_{cb-i,0}, b_{cb-i,1}, \dots, b_{cb-i,n-1}$ .

Lemme 8 : Pour tout  $0 \leq i < b$ ,

$$1 \leq a_{i,n} - a_{i,n-1} \leq 2 \leq b_{i,n} - b_{i,n-1}, n \geq 1.$$

Démonstration : Le côté gauche de l'inégalité suit directement de la définition de la suite  $a_{i,n}$ . Donc, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$b_{i,n} - b_{i,n-1} = a_{i,n} - a_{i,n-1} + ab \geq a_{i,n} - a_{i,n-1} + 1 \geq 2.$$

Soit  $m$  un entier positif. Si  $a_{i,m-1} + 1 \neq b_{cb-i,n}$  pour tout  $n < m$ , alors  $a_{i,m} = a_{i,m-1} + 1$ .  
Si  $a_{i,m-1} + 1 = b_{cb-i,n}$  pour un  $n < m$ , alors  $a_{i,m-1} + 2 \neq b_{cb-i,n}, n < m$ , et  $a_{i,m} = a_{i,m-1} + 2$ .  
C.Q.F.D.

Corollaire 4 :  $b_{cb-i,n} > a_{i,n}, n = 1, 2, \dots$

Démonstration : Puisque

$$a_{0,1} < b_{0,1}, a_{i,0} < b_{i,0} \quad (0 < i < b),$$

le résultat suit directement du lemme 8.

C.Q.F.D.

Lemme 9 : Les suites  $\{a_{i,n}\}_{n=1}^{\infty}, \{b_{cb-i,n}\}_{n=1}^{\infty}$  sont complémentaires  $(1 - \varepsilon)$ -supérieures.

Démonstration : Pour tout nombre positif fixé  $n$ ,  $b_{cb-i,n} \neq a_{i,k}$  pour  $k \leq n$  par le corollaire, et ceci tient aussi pour  $k > n$ . De plus,

$$b_{cb-i,n} > b_{cb-i,k}, a_{i,n} > a_{i,k}, k < n.$$

Ceci montre que les suites sont disjointes; et la définition de  $a_{i,n}$  garantie qu'éventuellement tout entier positif va apparaître au moins une fois parmi les deux suites.  
C.Q.F.D.

Appelons *positions extra* les positions de la forme  $(a_{i,n}, b_{i,n})$ .

Théorème 20 : Les positions extra sont exactement toutes les positions gagnantes.

Démonstration : Il suffit de démontrer que les positions extra possèdent les propriétés suivantes :

(1) Toutes les positions du jeu à partir desquelles aucun déplacement légal peut être fait, sont extra.

(2) Tout déplacement à partir d'une position extra, pour laquelle un déplacement légal peut être fait, mène à une position non-extra.

(3) Pour toute position non-extra, il existe un déplacement qui mène à une position extra.

Propriété (1) : Les seules positions à partir desquelles il n'y a pas de déplacement possible sont  $(0, i)$ ,  $0 \leq i < b$ . En effet, une position  $(0, y)$  avec  $y \geq b$  peut devenir  $(0, y - b)$ , et une position  $(x, y)$  avec  $x > 0, y > 0$  peut devenir  $(x - 1, y - 1)$ . Puisque les positions  $(0, i)$  sont extra, la propriété (1) tient.

Propriété (2) : Supposons qu'un déplacement depuis une position extra  $(a_{i,n}, b_{i,n})$ ,  $n > 0$ , résulte en une position  $(x, y)$  avec  $x \leq y$ . Notons que  $b_{i,n} = a_{i,n} + i \pmod{b}$ . On distingue trois cas.

Cas (i) : Enlever  $kb$  jetons de la plus petite pile. L'équivalence suivante est préservée :  $y \equiv x + i \pmod{b}$ . Si  $(x, y)$  est une position extra, la seule possibilité est

$$(x, y) = (a_{i,m}, b_{i,m}), m < n.$$

Mais  $b_{i,n} = y = b_{i,m} < b_{i,n}$ , une contradiction.

Cas (ii) : Enlever  $kb$  jetons de la plus grosse pile. Si  $b_{i,n} - kb \geq a_{i,n}$ , alors l'équivalence  $y \equiv x + i \pmod{b}$  et les arguments ci-dessus restent valides. Si  $b_{i,n} - kb < a_{i,n}$ , alors  $y \equiv x - i \pmod{b}$ . Puisque  $b_{b-i,n} \equiv a_{b-i,n} - i \pmod{b}$ , la seule possibilité de  $(x, y)$  pour devenir une position extra est  $(x, y) = (a_{cb-i,m}, b_{cb-i,m})$ . Alors  $a_{i,n} = b_{cb-i,m}$ , contredisant le lemme 9.

Cas (iii) : Enlever  $k$  jetons d'une pile et  $k + db$  jetons de l'autre,  $d < a$ . La seule possibilité pour  $(x, y)$  pour devenir une position extra est encore

$$(x, y) = (a_{i,m}, b_{i,m}), m < n.$$

Donc

$$b_{i,m} - a_{i,m} = y - x \geq (na - d)b + i > (n-1)ab + i \geq mab + i = b_{i,m} - a_{i,m},$$

une contradiction.

Propriété (3) : Supposons que  $(x, y)$  avec  $x \leq y$  est une position non-extra. Écrivons

$$y = x + rb + i, 0 \leq i < b, r = r'a + i', 0 \leq i' < a.$$

Par le lemme 9,  $x = a_{i,n}, n \geq 0$ , ou  $x = b_{eb-i,n}, n \geq 0$ .

Cas (i) :  $x = a_{i,n}$ . Alors

$$y = a_{i,n} + rb + i = b_{i,n} + (r - an)b.$$

Si  $y > b_{i,n}$ , enlever  $(r - an)b$  jetons de la plus grosse pile. Si  $y < b_{i,n}$ , alors

$$y = b_{i,n} + ((r' - n)a + i')b < b_{i,n} \\ \Rightarrow r' < n.$$

Enlever  $t$  jetons de la plus petite pile et  $t + i'b$  jetons de la plus grosse pile, où  $t = a_{i,n} - a_{i,r'}$ . Le déplacement est légitime. Il mène à la position extra  $(a_{i,r'}, b_{i,r'})$ , puisque

$$y - t - i'b = a_{i,n} + rb + i - t - i'b = a_{i,r'} + r'ab + i = b_{i,r'}.$$

Cas (ii)  $x = a_{eb-i,n}$ . Alors

$$y = b_{eb-i,n} + rb + i = a_{eb-i,n} + nab > (r + \varepsilon)b.$$

Enlever  $(an + r + \varepsilon)b$  jetons de la plus grosse pile mène à la position extra  $(a_{eb-i,n}, b_{eb-i,n})$ . C.Q.F.D.

### Stratégie gagnante

On écrit la paire  $(x, y)$  ( $x \leq y$ ) sous la forme  $(x, x + i + r'ab + bi')$  où  $0 \leq i < b, 0 \leq i' < a$  et  $0$ .

- Si  $x = 0$  et  $r > 0$ , enlever  $rab$  jetons de la deuxième pile.
- Si  $x = a_{i,n}$  et  $y > b_{i,n}$ , enlever  $(r - an)b$  jetons de la deuxième pile où  $r = r'a + i$ .
- Si  $x = a_{i,n}$  et  $y < b_{i,n}$ , enlever  $t$  jetons de la première pile et  $t + i'b$  jetons de la deuxième pile où  $t = a_{i,n} - a_{i,r'}$ .
- Si  $x = b_{k-i,n-1}$ , enlever  $(an + r + \varepsilon)b$  jetons de la deuxième pile.
- Autrement on perd si l'adversaire joue bien jusqu'à la fin.

Tableau XX : Positions gagnantes de la troisième généralisation du jeu de Wythoff où  $a = 2$  et  $b = 3$

$a = 2$ et $b = 3$						
$n$	$a_{0,n}$	$b_{0,n}$	$a_{1,n}$	$b_{1,n}$	$a_{2,n}$	$b_{2,n}$
0	0	0	0	1	0	2
1	1	7	1	8	2	10
2	2	14	3	16	3	17
3	3	21	4	23	4	24
4	4	28	5	30	5	31
5	5	35	6	37	6	38
6	6	42	7	44	7	45
7	8	50	8	51	9	53
8	9	57	9	58	10	60
9	10	64	11	66	11	67
10	11	71	12	73	12	74
11	12	78	13	80	13	81
12	13	85	14	87	14	88
13	15	93	15	94	15	95
14	16	100	16	101	17	103
15	17	107	18	109	18	110

Exemples : Soit la position  $(13, 83)$  dans la troisième généralisation du jeu Wythoff avec  $a = 2$  et  $b = 3$ . On a  $(13, 83) = (13, 13 + 1 + 11 \times 2 \times 3 + 3 \times 1)$ . En regardant le tableau XX on voit que  $13 = a_{1,11}$  et que  $83 > b_{1,11} = 80$ . On doit donc enlever  $(11 \times 2 + 1 - 2 \times 11) 3 = 3$  jetons de la deuxième pile pour obtenir la position gagnante  $(13, 80) = (a_{1,11}, b_{1,11})$ .

Soit la position  $(13, 82)$ . On a  $(13, 82) = (13, 13 + 0 + 11 \times 2 \times 3 + 3 \times 1)$ . En regardant le tableau XX on voit que  $13 = a_{0,12}$  et on a  $82 < a_{0,12} = 85$ . On doit donc enlever  $13 - a_{0,11} = 13 - 12 = 1$  jeton de la première pile et  $1 + 1 \times 3 = 4$  jetons de la deuxième pile pour obtenir la position gagnante  $(12, 78) = (a_{0,11}, b_{0,11})$ .

Soit la position  $(17, 55)$ . On a  $(17, 55) = (17, 17 + 1 + 6 \times 2 \times 3)$ . En regardant le tableau XX on voit que  $17 = b_{3-1,2}$ . On doit donc enlever  $(2 \times 2 + 6 \times 2 + 1) 3 = 5$  jetons de la deuxième pile pour obtenir la position gagnante  $(17, 3) = (b_{2,2}, a_{2,2})$ .

### 3.4.3. Deuxième caractérisation des positions gagnantes (algébrique)

Définissons

$$\alpha = \frac{2 - ab + \sqrt{a^2 b^2 + 4}}{2}, \beta = \alpha + ab,$$

$$\gamma = \chi(i) = \frac{\varepsilon b(a-1) + i\alpha}{ab}, \delta = \delta(i) = \chi(i) + i,$$

où  $\varepsilon$  est défini comme précédemment. Soit

$$\phi_{i,n} = [n\alpha + \chi(i)], \psi_{i,n} = [n\beta + \delta(i)].$$

Lemme 10 : Pour tout  $0 \leq i < b$ , les suites  $\{\phi_{i,n}\}$  et  $\{\psi_{eb-i,n}\}$  sont complémentaires  $(1 - \varepsilon)$ -supérieures.

Démonstration : Selon le théorème II de l'article de A. S. Fraenkel [25], les suites  $\phi_n = [n\alpha + \gamma]$ ,  $\psi_n = [n\beta + \delta]$  ( $\alpha, \beta$  des irrationnels positifs,  $\gamma, \delta$  réels et  $N$  entier) avec  $\phi_N \leq \psi_N$  sont complémentaires  $N$ -supérieures si, et seulement si,

$$(a) \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$$

$$(b) \quad \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\delta}{\beta} = \varphi_N - 2N + 1$$

$$(c) \quad n\beta + \delta = K, \quad n, K \text{ entiers implique } n < N.$$

Vérifions (a)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} &= \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha + ab} = \frac{2\alpha + ab}{\alpha^2 + \alpha ab} \\ &= \frac{2 + \sqrt{a^2 b^2 + 4}}{(2 - ab)^2 + 2(2 - ab)\sqrt{a^2 b^2 + 4} + (a^2 b^2 + 4)} + \frac{2ab - a^2 b^2 + ab\sqrt{a^2 b^2 + 4}}{2} \\ &= \frac{2 + \sqrt{a^2 b^2 + 4}}{4 - 2ab + a^2 b^2 + (2 - ab)\sqrt{a^2 b^2 + 4}} + \frac{2ab - a^2 b^2 + ab\sqrt{a^2 b^2 + 4}}{2} = 1. \end{aligned}$$

Aussi, si

$$n\beta + \delta = n(\alpha + ab) + i + \frac{\varepsilon b(a-1) + i\alpha}{ab}$$

$$= \left( n + \frac{i}{ab} \right) \alpha + nab + i + \frac{\varepsilon b(a-1)}{ab} = K$$

alors  $n = i = 0$  puisque  $\alpha$  est irrationnel et positif. (c) est vérifié.

Pour  $i = 0$ , les deux côtés de (b) sont zéro. Pour  $0 < i < b$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(i)}{\alpha} + \frac{\delta(b-i)}{\beta} &= \frac{b(a-1) + i\alpha}{ab\alpha} + \frac{b(a-1) + (b-i)\alpha}{ab\beta} + \frac{b-i}{\beta} \\ &= \frac{a-1}{a} + \frac{i}{ab} + \frac{(b-i)(\beta-ab)}{ab\beta} + \frac{b-i}{\beta} = 1. \end{aligned}$$

Il reste donc à montrer que  $\phi_{i,0} = 0$ . On a

$$\gamma(i) = \frac{b(a-1) + i\alpha}{ab} \leq \frac{b(a-1) + (b-1)\alpha}{ab} < 1.$$

La dernière inégalité est toujours vraie. En effet, supposons le contraire,

$$1 - \frac{1}{a} + \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha}{ab} \geq 1.$$

On aurait alors

$$\alpha - 1 \geq \frac{\alpha}{b},$$

$$1 - \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta} \geq \frac{1}{b},$$

et

$$b \geq \beta = \alpha + ab > b,$$

une contradiction. (b) est donc vérifié. C.Q.F.D.

**Théorème 21** : Les positions  $(\phi_{i,n}, \psi_{i,n})$ ,  $0 \leq i < b$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  sont précisément toutes les positions gagnantes.

**Démonstration** : La preuve du lemme 10 montre que  $\phi_{i,0} = a_{i,0}$ ,  $\psi_{i,0} = b_{i,0}$  dans la notation de la section précédente. Notons que pour tout  $m > 0$ ,  $\phi_{i,m}$  est le plus petit entier positif  $k$  qui n'est pas parmi  $\phi_{i,n}, \psi_{eb-i,n}$ ,  $n < m$ . Autrement,  $k$  doit ne jamais être apparu dans les deux suites complémentaires  $(1 - \varepsilon)$ -supérieures  $\phi_{i,n}, \psi_{eb-i,n}$  puisque  $\phi_{i,n+1} > \phi_{i,n}$ , et évidemment  $\psi_{eb-i,n} > \phi_{i,n}$ ,  $n \geq 1$ .



De plus,

$$\psi_{i,m} = \phi_{i,m} + m ab + i.$$

La définition des suites  $\phi_{i,n}$ ,  $\psi_{i,n}$  est en fait la même que celle de  $a_{i,n}$ ,  $b_{i,n}$ , on a donc  $\phi_{i,n} \equiv a_{i,n}$  et  $\psi_{i,n} \equiv b_{i,n}$ . C.Q.F.D.

### 3.4.4. Troisième représentation des positions gagnantes (arithmétique)

Soit  $\{p_n\}$  et  $\{q_n\}$  les suites telles que  $p_n/q_n$  est la  $n$ -ième réduite de  $\alpha = \frac{2 - ab + \sqrt{a^2 b^2 + 4}}{2} = [1, ab, ab, ab, \dots]$ .

**Lemme 11** : Supposons que  $1 = x_1 < x_2 < x_3 < \dots$  est une suite d'entiers positifs pour laquelle  $x_m$  peut être écrit avec les nombres de la suite  $\{p_n\}$  de la manière suivante

$$x_m = \gamma_n p_n + \gamma_{n-1} p_{n-1} + \dots + \gamma_{2i} p_{2i}$$

(il y a un nombre pair de zéros à la fin), et soit

$$y_m = \gamma_n p_{n+1} + \gamma_{n-1} p_n + \dots + \gamma_{2i} p_{2i+1}$$

(on ajoute un zéro à la fin de  $x_m$ ). Alors

- I.  $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$  sont des suites complémentaires 1-supérieures;
- II.  $y_n = x_n + ab$ ,  $n \geq 1$ .

**Démonstration** : Puisque tout entier positif se termine avec soit un nombre pair, soit un nombre impair de zéros, I est clair. Pour montrer II, il suffit de montrer

$$(a) \quad y_1 - x_1 = ab,$$

$$(b) \quad y_m - x_m = ab, \quad m \geq 2,$$

où

$$f_m = (y_m - x_m) - (y_{m-1} - x_{m-1}) = (y_m - y_{m-1}) - (x_m - x_{m-1}).$$

$$(a) \quad x_1 = 1 = p_0, y_1 = p_1 = ab p_0 + p_{-1} = ab + 1, y_1 - x_1 = ab.$$

(b) Soit

$$x_m = \gamma_n p_n + \gamma_{n-1} p_{n-1} + \dots + \gamma_{2i} p_{2i}, \quad \gamma_{2i} \neq 0.$$

On considère plusieurs cas

(i)  $i = 0, \gamma_0 > 1$ . Alors

$$\begin{aligned}x_m &= \gamma_n p_n + \dots + \gamma_0 p_0, \\x_m - 1 &= \gamma_n p_n + \dots + (\gamma_0 - 1) p_0 = x_{m-1}, \\y_m &= \gamma_n p_{n+1} + \dots + \gamma_0 p_1, \\y_{m-1} &= \gamma_n p_{n+1} + \dots + (\gamma_0 - 1) p_1, \\f_m &= p_1 - p_0 = ab.\end{aligned}$$

(ii)  $i = 0, \gamma_0 = 1$ . Alors

$$x_m - 1 = \gamma_n p_n + \dots + \gamma_l p_l, \gamma_l \neq 0, l \geq 1.$$

Si  $l$  est pair, alors  $x_m - 1 = x_{m-1}$ , et on a  $f_m = ab$  comme le cas précédent. Si  $l$  est impair, alors  $x_m - 1 \neq x_{m-1}$ , mais par le lemme 1 de la section 3.0.,

$$x_m - 2 = \gamma_n p_n + \dots + (\gamma_l - 1) p_l + ab (p_{l-1} + p_{l-3} + \dots + p_0) = x_{m-1},$$

$y_m$  est comme en (i), et

$$\begin{aligned}y_{m-1} &= \gamma_n p_{n+1} + \dots + (\gamma_l - 1) p_{l+1} + ab (p_l + p_{l-2} + \dots + p_1), \\f_m &= p_{l+1} - ab (p_l + p_{l-2} + \dots + p_1) + \gamma_0 p_1 - p_l \\&\quad + ab (p_{l-1} + p_{l-3} + \dots + p_0) - \gamma_0 p_0 \\&= p_{l+1} - (p_{l+1} - p_0) + p_1 - p_l + (p_l - 1) - p_0 \\&= p_1 - p_0 = ab.\end{aligned}$$

(iii)  $i > 0$ . Par le lemme 1 de la section 3.0.,

$$x_m - 1 = \gamma_n p_n + \dots + (\gamma_{2i} - 1) p_{2i} + ab (p_{2i-1} + p_{2i-3} + \dots + p_1) \neq x_{m-1},$$

Mais

$$x_m - 2 = \gamma_n p_n + \dots + (\gamma_{2i} - 1) p_{2i} + ab (p_{2i-1} + p_{2i-3} + \dots + p_1) - p_1 + ab p_0 = x_{m-1}.$$

$$y_m = \gamma_n p_{n+1} + \dots + \gamma_{2i} p_{2i+1}$$

$$y_{m-1} = \gamma_n p_{n+1} + \dots + (\gamma_{2i} - 1) p_{2i+1} + ab (p_{2i} + p_{2i-2} + \dots + p_2) - p_2 + ab p_1,$$

$$\begin{aligned}f_m &= p_{2i+1} - ab (p_{2i} + p_{2i-2} + \dots + p_2) + p_2 - ab p_1 \\&\quad - p_{2i} + ab (p_{2i-1} + p_{2i-3} + \dots + p_1) - p_1 + ab p_0 \\&= p_{2i+1} - (p_{2i+1} - p_1) + p_2 - (p_2 - p_0) \\&\quad - p_{2i} + (p_{2i} - p_0) - p_1 + ab p_0 = ab.\end{aligned}$$

C.Q.F.D.

**Lemme 12** : Soit  $0 < r < b$ , et supposons que  $0 = x_{i,0} < x_{i,1} < x_{i,2} < \dots$  est la suite de tous les entiers non négatif pour laquelle la  $p$ -représentation est

$$x_{i,m} = \gamma_n p_n + \gamma_{n-1} p_{n-1} + \dots + \gamma_0 p_0,$$

et a une des formes

$$(a) \quad b - r \neq \gamma_0 \neq b - i + 1,$$

$$(b) \quad x_{r,m} = \gamma_n p_n + \dots + \gamma_{i+1} p_{i+1} + r p_i + (b - r) p_{i-1} + r p_{i-2} + \dots + (b - r) p_2 + r p_1 + (b - r + 1) p_0,$$

$$\gamma_{i+1} \geq b - r + 1,$$

$$(c) \quad x_{r,m} = \gamma_n p_n + \dots + \gamma_{i+1} p_{i+1} + (b - r) p_i + r p_{i-1} + \dots + (b - r) p_2 + r p_1 + (b - r + 1) p_0,$$

$$\gamma_{i+1} \leq r - 1,$$

$$(d) \quad x_{r,m} = \gamma_n p_n + \dots + \gamma_{i+1} p_{i+1} + (b - r) p_i + r p_{i-1} + \dots + (b - r) p_2 + r p_1 + (b - r) p_0,$$

$$\gamma_{i+1} \geq r + 1,$$

$$(e) \quad x_{r,m} = \gamma_n p_n + \dots + \gamma_{i+1} p_{i+1} + r p_i + (b - r) p_{i-1} + r p_{i-2} + \dots + (b - r) p_2 + r p_1 + (b - r) p_0,$$

$$\gamma_{i+1} \leq b - r - 1,$$

où en (b), (c), (d), (e), il y a un nombre non négatif de paires de nombres  $(b - r, r)$  précédant  $\gamma_0$ . De plus, soit

$$y_{r,m} = \gamma_n p_{n+1} + \gamma_{n-1} p_n + \dots + \gamma_1 p_2 + \gamma_0' p_1 + \gamma' p_0,$$

où

$$\gamma_0' = \gamma_0, \gamma' = r, \text{ si } 0 \leq \gamma_0 \leq b - r,$$

$$\gamma_0' = \gamma_0 - 1, \gamma' = r + 1, \text{ si } b - r < \gamma_0 \leq ab.$$

Alors

I.  $x_{r,m}, y_{b-r,m}$  sont complémentaires;

II.  $y_{r,m} = x_{r,m} + m ab + r, m \geq 0$ .

**Démonstration** : Soit  $X$ , l'ensemble de tous les nombres de la forme  $x_{r,m}$ ,  $Y$  l'ensemble de tous les nombres de la forme  $y_{b-r,m}$ . Les hypothèses sur  $x_{r,m}, y_{r,m}$  impliquent que  $Y$  contient tous, et seulement tous, les nombres de la forme

$$y_{b-r,m} = \gamma_n p_n + \dots + \gamma_{i+1} p_{i+1} + (b - r) p_i + r p_{i-1} + \dots + (b - r) p_2 + r p_1 + (b - r + 1) p_0,$$

$$\gamma_{i+1} \geq r + 1,$$

$$y_{b-r,m} = \gamma_n p_n + \dots + \gamma_{i+1} p_{i+1} + r p_i + (b - r) p_{i-1} + r p_{i-2} + \dots$$

$$+ (b-r)p_2 + rp_1 + (b-r+1)p_0,$$

$$\gamma_{i+1} \leq b-r-1,$$

$$y_{b-r,m} = \gamma_n p_n + \dots + \gamma_{i+1} p_{i+1} + r p_i + (b-r) p_{i-1} + r p_{i-2} + \dots$$

$$+ (b-r)p_2 + rp_1 + (b-r)p_0,$$

$$\gamma_{i+1} \geq b-r+1,$$

$$y_{b-r,m} = \gamma_n p_n + \dots + \gamma_{i+1} p_{i+1} + (b-r) p_i + r p_{i-1} + \dots$$

$$+ (b-r)p_2 + rp_1 + (b-r)p_0,$$

$$\gamma_{i+1} \leq r-1,$$

où le nombre de paires  $(b-r, r)$  consécutives précédent le dernier chiffre est non négatif.

Tous les nombres finissant en  $\gamma_0$ ,  $b-r \neq \gamma_0 \neq b-r+1$  est dans  $X$  et non dans  $Y$ . Considérons l'ensemble des nombres  $p$  finissant en  $\gamma = b-r+1$ . On doit supposer qu'une suite maximale de  $l \geq 0$  paires  $(b-r, r)$  consécutives précédent  $\gamma_0$ . Si le chiffre  $h$  précédent la première de ces paires est  $\leq r-1$ , alors  $p \in X, p \notin Y$ . Si  $h \geq r+1$ , alors  $p \notin X, p \in Y$ . Si  $h = r$ , le chiffre  $j$  précédent  $h$  est soit  $\geq b-r+1$ , dans ce cas  $p \in X, p \notin Y$ , ou  $j \leq b-r+1$ , dans ce cas  $p \notin X, p \in Y$ . Le cas  $j = b-r$  est impossible puisqu'il implique qu'un ensemble de  $\geq l+1$  paires  $(b-r, r)$  consécutives précédent  $\gamma_0$ , contrairement à l'hypothèse.

Le même argument montre que tout nombre finissant en  $b-r$  est soit dans  $X$  soit dans  $Y$  mais pas dans les deux.

II. En utilisant la méthode et la notation du lemme 11, on va montrer que  $f_m = ab$ ,  $m \geq 1$ .

C'est suffisant parce que, clairement,  $y_{r,0} - x_{r,0} = r$ .

Pour le reste de la preuve, on écrit  $x_m, y_m$  au lieu de  $x_{r,m}, y_{r,m}$ . Soit

$$x_m = \gamma_n p_n + \gamma_{n-1} p_{n-1} + \dots + \gamma_i p_i, \gamma_i \neq 0.$$

(1)  $i = 0$ . Alors

$$x_m = \gamma_n p_n + \dots + \gamma_0 p_0,$$

$$x_m - 1 = \gamma_n p_n + \dots + (\gamma_0 - 1) p_0.$$

(i)  $0 \leq \gamma_0 - 1 < b-r$ . Alors  $x_m - 1 = x_{m-1}$ . Mais

$$y_m = \gamma_n p_{n+1} + \dots + \gamma_0 p_1 + r p_0,$$

$$y_{m-1} = \gamma_n p_{n+1} + \dots + (\gamma_0 - 1) p_1 + r p_0,$$

$$f_m = p_1 - p_0 = ab.$$

(ii)  $\gamma_0 - 1 = b - r$ . Alors  $x_m$  a une des formes (b) ou (c) d'où  $x_m - 1 \neq x_{m-1}$ . Mais

$$\begin{aligned} x_m - 2 &= \gamma_n p_n + \dots + \gamma_1 p_1 + (\gamma_0 - 2) p_0 = x_{m-1}, \\ y_m &= \gamma_n p_{n+1} + \dots + \gamma_1 p_2 + (\gamma_0 - 1) p_1 + (r + 1) p_0, \\ y_{m-1} &= \gamma_n p_{n+1} + \dots + \gamma_1 p_2 + (\gamma_0 - 2) p_1 + r p_0, \\ f_m &= p_1 + p_0 - 2 p_0 = ab. \end{aligned}$$

(iii)  $\gamma_0 - 1 = b - r + 1$ . Supposons d'abord que  $x_m - 1 = x_{m-1}$ . Alors  $y_m$  est comme en (ii), et

$$\begin{aligned} y_{m-1} &= \gamma_n p_{n+1} + \dots + \gamma_1 p_2 + (\gamma_0 - 2) p_1 + (r + 1) p_0, \\ f_m &= p_1 - p_0 = ab. \end{aligned}$$

Maintenant supposons que  $x_m - 1 \neq x_{m-1}$ . Alors  $x_m - 1$  n'a pas une des formes (b) ou (c), il a donc une des formes (d) ou (e), excepté que le dernier chiffre  $b - r$  en (d), (e) est remplacé par  $b - r + 1$ . Donc  $x_m - 2$  a la forme (d) ou (e), et  $x_m - 2 = x_{m-1}$ . Aussi  $y_m$  et  $y_{m-1}$  sont comme en (ii), et  $f_m = ab$ .

(iv)  $\gamma_0 - 1 > b - r + 1$ . Alors  $x_m - 1 = x_{m-1}$ ,  $y_m$  a la forme de (ii),  $y_{m-1}$  a la forme du premier cas de (iii), et  $f_m = p_1 - p_0 = ab$ .

(2)  $i > 0$ . Alors

$$\begin{aligned} x_m &= \gamma_n p_n + \dots + \gamma_i p_i, \\ y_m &= \gamma_n p_{n+1} + \dots + \gamma_i p_{i+1} + r p_0, \end{aligned}$$

Par le lemme 1 de la section 3.0.,

$$x_m - 1 = \gamma_n p_n + \dots + \gamma_{i+1} p_{i+1} + (\gamma_i - 1) p_i + ab (p_{i-1} + p_{i-3} + \dots + p_0)$$

où

$$\theta = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } i \text{ est impair.} \end{cases}$$

(v)  $i$  pair. Alors  $x_m - 1 = x_{m-1}$ ,

$$\begin{aligned} y_{m-1} &= \gamma_n p_{n+1} + \dots + \gamma_{i+1} p_{i+2} + (\gamma_i - 1) p_{i+1} + ab (p_i + p_{i-2} + \dots + p_2) + ab p_0, \\ f_m &= p_{i+1} - ab (p_i + p_{i-2} + \dots + p_0) + ab p_0 \\ &\quad - p_i + ab (p_{i-1} + p_{i-3} + \dots + p_1) \\ &= p_{i+1} - (p_{i+2} - 1) + ab - p_i + (p_i - 1) = ab. \end{aligned}$$

(vi)  $i$  impair. Maintenant,  $ab > b - r$ . Si  $b - r - 1 \neq ab$ , alors  $x_m - 1 = x_{m-1}$ ,

$$\begin{aligned} y_{m-1} &= \gamma_n p_{n+1} + \dots + \gamma_{i+1} p_{i+2} + (\gamma_i - 1) p_{i+1} \\ &\quad + ab (p_i + p_{i-2} + \dots + p_1) - p_1 + (r+1) p_0, \\ f_m &= p_{i+1} + r p_2 - ab (p_i + p_{i-2} + \dots + p_1) + p_1 - (r+1) p_0 \\ &\quad - p_i + ab (p_{i-1} + p_{i-3} + \dots + p_0) \\ &= p_1 - p_0 = ab. \end{aligned}$$

Maintenant supposons que  $ab = b - r + 1$ . Si  $x_m - 1$  a une des formes (b) ou (c) alors  $x_m - 1 = x_{m-1}$  et l'argument précédent s'applique. Si  $x_m - 1$  n'a pas la forme (b) ou (c), alors comme on a vu en (iii), alors  $x_m - 2 = x_{m-1}$ ,

$$\begin{aligned} y_{m-1} &= \gamma_n p_{n+1} + \dots + \gamma_{i+1} p_{i+2} + (\gamma_i - 1) p_{i+1} \\ &\quad + ab (p_i + p_{i-2} + \dots + p_1) - p_1 + r p_0, \\ f_m &= p_{i+1} - ab (p_i + p_{i-2} + \dots + p_1) + p_1 \\ &\quad - p_{i+1} + ab (p_{i-1} + p_{i-3} + \dots + p_0) - p_0 \\ &= p_1 - p_0 = ab. \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Notons la paire  $(x_n, y_n)$  définie dans le lemme 11 par  $(x_{0,n}, y_{0,n})$ . Nous obtenons une autre représentation des positions gagnantes.

**Théorème 22** : Les paires  $(x_r, n, y_r, n)$ ,  $0 \leq r < b$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  définies dans les lemmes 11 et 12, avec  $(x_{0,0}, y_{0,0}) = (0, 0)$  comprends l'ensemble de toutes les paires gagnantes (paires de Wythoff).

**Démonstration** : Notons que  $x_{0,1} = 1 = a_{0,1}$  et  $y_{0,1} = 1 + ab = b_{0,1}$  dans la notation de la section précédente. Pour  $0 < r < b$  on a  $x_{r,0} = 0$ ,  $y_{r,0} = r$ . Le reste de la preuve est dans le théorème 21.

## **CHAPITRE 4 : QUI-PERD-GAGNE**

---

Dans le jeu habituel, le joueur qui enlève le dernier jeton gagne. Réciproquement, dans le cas du qui-perd-gagne, le joueur qui est le dernier à jouer perd.

### **4.1. Jeu qui-perd-gagne de la première généralisation du jeu de Wythoff**

C'est en 1984 que Avieri S. Fraenkel publia un article, [22], donnant une description très complète du jeu qui-perd-gagne de la première généralisation du jeu de Wythoff.

#### **4.1.1. Règles du jeu**

Définissons le jeu par les règles suivantes :

- (i) deux joueurs jouent en alternance;
- (ii) on a au départ deux piles de jetons, un nombre arbitraire dans chacune des piles;
- (iii) on fixe au préalable un paramètre  $a$ , lequel est un entier naturel.

Un joueur doit prendre des jetons selon une des deux façons suivantes :

- (iv) un nombre arbitraire de jetons dans une des piles;
- (v)  $c > 0$  et  $d > 0$  jetons des deux piles, respectivement, avec la contrainte suivante :

$$|c - d| < a.$$

(vi) le joueur qui ne peut pas jouer, en enlevant un nombre légal de jetons, gagne la partie.

#### **4.1.2. Première représentation des positions gagnantes (récurrente)**

**Théorème 23** : Les positions gagnantes pour le jeu qui-perd-gagne de la première généralisation du jeu de Wythoff sont les suivantes

(i) Pour  $a = 1$  :  $(A_0, B_0) = (2, 2)$ .

$$A_n = \text{mex}\{A_i, B_i : 0 \leq i < n\}, B_n = A_n + n \quad (n \geq 1).$$

(ii) Pour  $a > 1$  :

$$A_n = \text{mex}\{A_i, B_i : 0 \leq i < n\}, B_n = A_n + an + 1 \quad (n \geq 0).$$

où *mex* signifie la valeur minimale absente (« minimum excluded value »).

Démonstration : De la définition de  $A_n$  et  $B_n$  donnée dans le théorème, on a que les suites  $\{A_n\}$  et  $\{B_n\}$  sont complémentaires pour  $a > 1$ .

En effet, par la définition de, on a  $\{A_n\} \cup \{B_n\} = \mathbf{Z}^0$  (l'ensemble des entiers non négatifs). Aussi,  $\{A_n\} \cap \{B_n\} = \emptyset$  puisque si  $A_n = B_m$ , alors pour  $n > m$ , on aurait que  $A_n$  est le *mex* d'un ensemble contenant  $B_m = A_n$ , une contradiction. Pour  $n \leq m$  c'est impossible puisque  $B_m = A_m + am + 1 \geq A_n + an + 1 > A_n$ .

Pour  $a = 1$ , on a  $\{A_n\} \cup \{B_n\} = \mathbf{Z}^0$  par la définition des  $A_n$ . Aussi,  $\{A_n\} \cap \{B_n\} = \{2\}$ .

Les suites  $\{A_n\}$  et  $\{B_n\}$  couvrent donc tous les entiers non négatifs pour tout  $a \geq 1$ .

Pour montrer le théorème, il faut montrer deux choses : (i) un déplacement à partir d'une position de la forme  $(A_n, B_n)$  résulte nécessairement en une position qui n'est pas de la forme  $(A_i, B_i)$ . (ii) Un déplacement à partir d'une position  $(x, y) \neq (A_i, B_i)$  (exception de  $(0, 0)$ ) il existe un déplacement qui mène à une position de la forme  $(A_n, B_n)$ .

(i) Un déplacement du premier type (enlever un nombre arbitraire de jetons d'une des piles) à partir de  $(A_n, B_n)$  mène clairement à une position qui n'est pas de la forme  $(A_i, B_i)$ .

Supposons qu'un déplacement du second type à partir de  $(A_n, B_n)$  mène à  $(A_i, B_i)$ . On a nécessairement  $i \neq n$ . Ce déplacement satisfait à

$$\begin{aligned} & |(B_n - B_i) - (A_n - A_i)| \\ &= |(B_n - A_n) - (B_i - A_i)| \\ &= |(an + 1) - (ai + 1)| \\ &= |(n - i)a| < a. \end{aligned}$$

Donc  $n = i$ , ce qui est une contradiction.



(ii) Soit  $(x, y)$  une position, telle que  $x \leq y$ , qui n'est pas de la forme  $(A_i, B_i)$ ,  $i \geq 0$ . Si  $(x, y) = (0, 0)$  le joueur suivant gagne puisqu'il ne peut plus jouer. Si  $(x, y) \neq (0, 0)$ , on doit avoir  $x = B_n$  ou  $x = A_n$  pour un  $n \geq 0$  puisque  $\{A_n\} \cup \{B_n\} = \mathbb{Z}^0$ .

Cas  $x = B_n$ . Réduire  $y$  à  $A_n$ . Ce déplacement est possible puisque  $y \geq x = B_n \geq A_n$ , et au moins une égalité est stricte.

Cas  $x = A_n$ . Si  $y > B_n$ , réduire  $y$  à  $B_n$ . Si  $y = A_n$ , aller à  $(A_0, B_0)$ . Ce déplacement est possible puisque

$$|(A_n - A_0) - (A_n - B_0)| = |B_0 - A_0| = \begin{cases} 0 & \text{si } a = 1 \\ 1 & \text{si } a > 1. \end{cases} < a.$$

Si  $A_n < y < B_n$ , soit  $d = y - x - \varepsilon$ ,  $m = [d/a]$

$$\text{où } \varepsilon = \varepsilon(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } a = 1 \\ 1 & \text{si } a > 1. \end{cases}$$

Aller à  $(A_m, B_m)$ . Ce déplacement est possible puisque

(a)  $m \geq 0$ ,

(b)  $d = y - A_n - \varepsilon < B_n - A_n - \varepsilon = an$ , donc  $m = [d/a] \leq d/a < n$ ,

(c)  $y = A_n + d + \varepsilon > A_m + d + \varepsilon \geq A_m + am + \varepsilon = B_m$ ,

(d)  $|(y - B_m) - (x - A_m)| = |(y - x) - (B_m - A_m)| = |d - am| < a$  parce que

$$d/a - 1 < [d/a] = m \Rightarrow d - a < am \Rightarrow d - am < a.$$

C.Q.F.D.

Tableau XXI : Positions gagnantes du jeu qui-perd-gagne de Wythoff où  $a = 1$

$a = 1$		
$n$	$A_n$	$B_n$
0	2	2
1	0	1
2	3	5
3	4	7
4	6	10
5	8	13
6	9	15
7	11	18
8	12	20
9	14	23
10	16	26

Tableau XXII : Positions gagnantes du jeu qui-perd-gagne de Wythoff où  $a = 2$

$a = 2$		
$n$	$A_n$	$B_n$
0	0	1
1	2	5
2	3	8
3	4	11
4	6	15
5	7	18
6	9	22
7	10	25
8	12	29
9	13	32
10	14	35

### Stratégie gagnante

Soit la position  $(x, y)$  telle que  $0 \leq x \leq y$  ( $(x, y) \neq (0, 0)$ ).

- Si  $(x, y) = (A_n, B_n)$ , on perd si l'adversaire joue parfaitement jusqu'à la fin.
- Si  $x = A_n$  et  $y > B_n$ , aller à la position  $(A_n, B_n)$ .
- Si  $x = A_n$  et  $y = A_n$ , aller à  $(A_0, B_0)$ .
- Si  $x = A_n$  et  $A_n < y < B_n$ , aller à  $(A_m, B_m)$  où  $m = [(y - x - \varepsilon)/a]$  et  $\varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{si } a = 1 \\ 1 & \text{si } a > 1. \end{cases}$
- Si  $x = B_n$ , aller à la position  $(B_n, A_n)$ .

Exemple : Soit  $(9, 27)$  une position au présent jeu avec  $a = 2$ . En regardant le tableau XXII on voit que  $9 = A_6$  et que  $27 > B_6 = 22$ . On doit donc aller à la position gagnante  $(9, 22)$ . Le déplacement effectué est légal puisqu'on a enlever 5 jetons de la deuxième pile.

Soit la position  $(9, 13)$ . En regardant le tableau XXII on voit que  $9 = A_6$  et que  $13 < B_6 = 22$ . On doit donc aller à la position gagnante  $(A_{\lfloor \frac{13-9-1}{2} \rfloor}, B_{\lfloor \frac{13-9-1}{2} \rfloor}) = (A_1, B_1) = (2, 5)$ .

Le déplacement effectué est légal puisqu'on a enlever 7 et 8 jetons de chacune des piles et  $|7 - 8| = 1 < 2$ .

### 4.1.3. Deuxième représentation des positions gagnantes (algébrique)

Soit

$$\alpha = \alpha(a) = \frac{2-a+\sqrt{a^2+4}}{2}, \beta = \beta(a) = \alpha + a.$$

$\alpha$  est la racine positive de l'équation  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+a} = 1$ . Donc,  $\alpha$  et  $\beta$  sont irrationnels pour

tout entier positif  $a$ , et satisfait à  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ . Soit  $\gamma = \gamma(a) = \alpha^{-1}$ ,  $\delta = \delta(a) = \gamma + 1$ . Alors

$$\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\delta}{\beta} = \gamma \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$$

Par le théorème de l'introduction sur les suites complémentaires, on a que les suites  $\{A'_n\}$  et  $\{B'_n\}$ , où

$$A'_n = [n\alpha + \gamma]$$

et

$$B'_n = [n\beta + \delta],$$

sont complémentaires.

**Théorème 24** : Les positions gagnantes au jeu qui-perd-gagne de Wythoff sont les suivantes

(i) Pour  $a = 1$  :  $(A'_0, B'_0) = (2, 2)$ ,  $(A'_1, B'_1) = (0, 1)$ ,

$$(A'_n, B'_n) = ([n\alpha], [n\beta]) \quad (n \geq 2),$$

où  $\alpha = \alpha(1)$ ,  $\beta = \beta(1)$ .

(ii) Pour  $a > 1$  :

$$(A'_n, B'_n) = ([n\alpha + \gamma], [n\beta + \delta]) \quad (n \geq 0),$$

où  $\alpha = \alpha(a)$ ,  $\beta = \beta(a)$ ,  $\gamma = \gamma(a)$ ,  $\delta = \delta(a)$ .

**Démonstration** :

(i) Soit  $a = 1$ ,

$$(A'_0, B'_0) = (2, 2) = (A_0, B_0)$$

et

$$(A'_1, B'_1) = (0, 1) = (\text{mex} \{A_0, B_0\}, A_1 + 1) = (A_1, B_1).$$

$$B'_n = [n\beta] = [n(\alpha + a)] = [n\alpha] + na = A'_n + n.$$

De plus  $\text{mex} \{A'_i, B'_i : 0 \leq i < n\} = A'_n$ , puisque  $\{A'_n\}_{n=0}^\infty$  et  $\{B'_n\}_{n=0}^\infty$  sont des suites croissantes et complémentaires : si le  $\text{mex}$  n'était pas  $A'_n$ , alors  $A'_n$  ne pourrait jamais être obtenu. Ceci montre que  $A'_n \equiv A_n$  et  $B'_n \equiv B_n$  ( $n \geq 0$ ).

(ii) Soit  $a > 1$ . Notons que

$$(A'_0, B'_0) = (0, 1) = (A_0, B_0)$$

et

$$\begin{aligned} B'_n &= [n\beta + \delta] \\ &= [n(\alpha + a) + \gamma + 1] = [n\alpha + \gamma + na + 1] \\ &= [n\alpha + \gamma] + na + 1 = A'_n + an + 1. \end{aligned}$$

De plus  $\text{mex} \{A'_i, B'_i : 0 \leq i < n\} = A'_n$ , puisque  $\{A'_n\}$  et  $\{B'_n\}$  sont des suites croissantes et complémentaires : si le  $\text{mex}$  n'était pas  $A'_n$ , alors  $A'_n$  ne pourrait jamais être obtenu. Ceci montre que  $A'_n \equiv A_n$  et  $B'_n \equiv B_n$  ( $n \geq 0$ ).

C.Q.F.D.

#### 4.1.4. Troisième représentation des positions gagnantes (arithmétique)

Soit  $D_i = \alpha q_i - p_i$  ( $i \geq -1$ ) tels que décrits à la section 3.2.4.

Lemme 12 : Soit  $b$  un entier,  $a$  un entier non négatif et  $\alpha = [b, a]$ . Alors

$$\sum_{i=0}^m D_i = a^{-1}(D_m + D_{m+1} + b + 1 - \alpha), m \geq 0.$$

Démonstration : (par induction) On a

$$\begin{aligned} D_0 &= a^{-1}(D_0 + D_1 + b + 1 - \alpha) \\ &= a^{-1}(\alpha - b + D_1 + b + 1 - \alpha) \\ &= a^{-1}(D_1 + 1) \\ &= a^{-1}(D_{-1} + aD_0 + 1) \\ &= a^{-1}(-1 + aD_0 + 1) = D_0. \end{aligned}$$

Le lemme est donc vrai pour  $m = 0$ . Supposons que c'est vrai pour  $m$ , alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m+1} D_i &= a^{-1}(D_m + D_{m+1} + b + 1 - \alpha) + D_{m+1} \\ &= a^{-1}(aD_{m+1} + D_m + D_{m+1} + b + 1 - \alpha) \\ &= a^{-1}(D_{m+1} + D_{m+2} + b + 1 - \alpha) \end{aligned}$$

puisque  $aD_{m+1} + D_m = D_{m+2}$ .

C.Q.F.D.

**Propriété 1** : Soit  $n$  un entier non négatif quelconque. Si  $R_q(n)$  se termine par  $\underbrace{011\dots1}_{\text{pair}}$  ou

$\underbrace{c11\dots1}_{\text{impair}}$  ( $1 < c < a$ ), alors  $A_n = I_p(R_q(n))$ . Si  $R_q(n)$  se termine par  $\underbrace{011\dots1}_{\text{impair}}$  ou  $\underbrace{c11\dots1}_{\text{pair}}$ , alors

$$A_n = I_p(R_q(n)) + 1 \quad (n \geq 0)..$$

**Démonstration** : Il suffit de montrer les quatre relations suivantes pour  $j \geq 0$ .

$$(i) \quad n = \sum_{i=0}^{2j-1} q_i + \sum_{i=2j+1}^k d_i q_i \Rightarrow \left[ n\alpha + \frac{1}{\alpha} \right] = \sum_{i=0}^{2j-1} p_i + \sum_{i=2j+1}^k d_i p_i, \quad k \geq 0$$

$$(ii) \quad n = \sum_{i=0}^{2j} q_i + \sum_{i=2j+1}^k d_i q_i, \quad d_{2j+1} > 1 \Rightarrow \left[ n\alpha + \frac{1}{\alpha} \right] = \sum_{i=0}^{2j} p_i + \sum_{i=2j+1}^k d_i p_i, \quad k \geq 1.$$

$$(iii) \quad n = \sum_{i=0}^{2j} q_i + \sum_{i=2j+2}^k d_i q_i \Rightarrow \left[ n\alpha + \frac{1}{\alpha} \right] = 1 + \sum_{i=0}^{2j} p_i + \sum_{i=2j+2}^k d_i p_i, \quad k \geq 0.$$

$$(iv) \quad n = \sum_{i=0}^{2j-1} q_i + \sum_{i=2j}^k d_i q_i, \quad d_{2j} > 1 \Rightarrow \left[ n\alpha + \frac{1}{\alpha} \right] = 1 + \sum_{i=0}^{2j-1} p_i + \sum_{i=2j}^k d_i p_i, \quad k \geq 0.$$

L'équation (i) est équivalente à

$$0 \leq n\alpha + \frac{1}{\alpha} - \sum_{i=0}^{2j-1} p_i + \sum_{i=2j+1}^k d_i p_i < 1.$$

Pour le  $n$  donné dans (i) c'est équivalent à

$$(v) \quad 0 \leq \sum_{i=0}^{2j-1} D_i + \sum_{i=2j+1}^k d_i D_i + \frac{1}{\alpha} < 1, \quad k \geq 0.$$

De la même manière (ii), (iii) et (iv), sont respectivement, équivalentes à

$$(vi) \quad 0 \leq \sum_{i=0}^{2j} D_i + \sum_{i=2j+1}^k d_i D_i + \frac{1}{\alpha} < 1, \quad d_{2j+1} > 1, \quad k \geq 1,$$

$$(vii) \quad 1 \leq \sum_{i=0}^{2j} D_i + \sum_{i=2j+2}^k d_i D_i + \frac{1}{\alpha} < 2, k \geq 0,$$

$$(viii) \quad 1 \leq \sum_{i=0}^{2j-1} D_i + \sum_{i=2j}^k d_i D_i + \frac{1}{\alpha} < 2, d_{2j} > 1, k \geq 0.$$

Démonstration de (v) : Par le lemme 12,

$$\begin{aligned} \sum_{i=2j+1}^k d_i D_i &\leq \sum_{i=1}^{k-2j} d_{2j+i} D_{2j+i} = \sum_{i=1}^{k-2j} d_{2j+i} D_{(2j+1)+(i-1)} \leq \sum_{i=1}^k d_{2j+i} D_{(2j+1)+(2i-1)} \\ &\leq \sum_{i=1}^k a D_{(2j+1)+(2i-1)} = D_{2j+2k+1} - D_{2j+1} < -D_{2j+1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{i=2j+1}^k d_i D_i &= \sum_{i=1}^{k-2j} d_{2j+i} D_{2j+i} \geq \sum_{i=1}^k d_{2j+i} D_{2j+i} \geq \sum_{i=1}^k d_{2j+i} D_{2j+2i-1} \\ &\geq \sum_{i=1}^k a D_{2j+2i-1} = D_{2j+2k} - D_{2j} > -D_{2j}. \end{aligned}$$

Par le lemme 12 avec  $b = 1$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2j-1} D_i + \sum_{i=2j+1}^k d_i D_i &< a^{-1} (D_{2j-1} + D_{2j} + 2 - \alpha) - D_{2j+1} \\ &= a^{-1} [2 - \alpha - (a-1) D_{2j-1} - (a^2 - 1) D_{2j}]. \end{aligned}$$

Maintenant

$$D_{2j+1} = a D_{2j} + D_{2j-1} = (a+1) D_{2j} + D_{2j-1} - D_{2j}.$$

Puisque  $D_{2j} > -D_{2j+1}$ , on a

$$(a+1) D_{2j} = D_{2j+1} + D_{2j} - D_{2j-1} > -D_{2j-1}$$

Donc  $-(a-1) D_{2j-1} \leq (a^2 - 1) D_{2j}$ , et

$$\sum_{i=0}^{2j-1} D_i + \sum_{i=2j+1}^k d_i D_i < a^{-1} (2 - \alpha).$$

Soit  $\alpha_2$  la racine négative de  $x^2 + (a-2)x - a = 0$  ( $\alpha$  étant la racine positive). Alors

$\alpha \alpha_2 = -a$ ,  $\alpha + \alpha_2 = 2 - a$ . Donc

$$\begin{aligned} a^{-1} (2 - \alpha) &= a^{-1} (2 - a + a - \alpha) \\ &= a^{-1} (\alpha + \alpha_2 + a - \alpha) = a^{-1} (a + \alpha_2) \\ &= a^{-1} (a - a \alpha^{-1}) = 1 - \alpha^{-1}, \end{aligned}$$

ce qui démontre l'inégalité de droite de (v). Pour l'égalité de gauche,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{2j-1} D_i + \sum_{i=2j+1}^k d_i D_i &\geq a^{-1} (D_{2j-1} + D_{2j} + 2 - \alpha) - D_{2j} \\
&= a^{-1} [D_{2j-1} - (a-1) D_{2j} + 2 - \alpha] \\
&\geq a^{-1} [D_{-1} - (a-1) D_0 + 2 - \alpha] \\
&= a^{-1} [-1 - (a-1)(\alpha-1) + 2 - \alpha] \\
&= a^{-1} [-1 - a\alpha + a + \alpha - 1 + 2 - \alpha] \\
&= a^{-1} [-a\alpha + a] = 1 - \alpha \\
&= 2 - \alpha - 1 + a = \alpha + \alpha_2 - \alpha - 1 + a = a + \alpha_2 - 1 \\
&= a + a\alpha^{-1} - 1 = a(1 - \alpha^{-1}) - 1 \geq -\alpha^{-1}.
\end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Démonstration de (vi) : On utilise  $d_{2j+1} > 1$  et le lemme 12

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2j+1}^k d_i D_i &\leq 2 D_{2j+1} + \sum_{i=2j+2}^k d_i D_i \\
&\leq 2 D_{2j+1} + \sum_{i=1}^{k-(2j+1)} d_{2j+1+i} D_{2j+1+i} \\
&\leq 2 D_{2j+1} + \sum_{i=1}^k d_{2j+1+i} D_{(2j+1)+(2i-1)} \\
&< 2 D_{2j+1} + \sum_{i=1}^k a D_{(2j+1)+(2i-1)} \\
&= D_{2j+1} + D_{2j+2k+1} < D_{2j+1},
\end{aligned}$$

et

$$\sum_{i=2j+1}^k d_i D_i > -D_{2j}.$$

Donc par le lemme 12,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{2j} D_i + \sum_{i=2j+1}^k d_i D_i &< a^{-1} (D_{2j} + D_{2j+1} + 2 - \alpha) + D_{2j+1} \\
&= a^{-1} (D_{2j+1} + D_{2j+2} + 2 - \alpha) = \sum_{i=0}^{2j+1} D_i
\end{aligned}$$

mais

$$|D_{2j+1}| > |D_{2j+2}|,$$

ou

$$-D_{2j+1} > D_{2j+2},$$

ou

$$0 > D_{2j+2} + D_{2j+1}$$

donc

$$\sum_{i=0}^{2j+1} D_i \leq a^{-1} (2 - \alpha) \leq 1 - \alpha^{-1},$$

et la dernière inégalité suit comme la preuve de (v). De l'autre côté,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2j} D_i + \sum_{i=2j+1}^k d_i D_i &> a^{-1} (D_{2j} + D_{2j+1} + 2 - \alpha) - D_{2j} \\ &= a^{-1} [2 - \alpha - (a - 1) D_{2j} + D_{2j+1}] \\ &\geq a^{-1} [2 - \alpha - (a - 1) D_0 + D_1] = 0 > -\alpha^{-1}. \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Démonstration de (vii) : Par le lemme 12

$$\begin{aligned} \sum_{i=2j+2}^k d_i D_i &\leq \sum_{i=1}^k a D_{(2j+1)+(2i-1)} = D_{2j+2k+1} - D_{2j+1} < -D_{2j+1}, \\ \sum_{i=2j+2}^k d_i D_i &\geq \sum_{i=1}^k a D_{(2j+2)+(2i-1)} = D_{2j+2k+2} - D_{2j+2} > -D_{2j+2}, \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2j} D_i + \sum_{i=2j+2}^k d_i D_i &< a^{-1} (D_{2j} + D_{2j+1} + 2 - \alpha) - D_{2j+1} \\ &= a^{-1} [2 - \alpha + D_{2j} - (a - 1) D_{2j+1}] \\ &\leq a^{-1} [2 - \alpha + D_0 - (a - 1) D_1] \\ &= \alpha + a - a\alpha = 1 - (\alpha - 1)(a - 1). \end{aligned}$$

Puisque  $\alpha > 1$ , on a  $-(\alpha - 1)(a - 1) \leq 0 < 1 - \alpha^{-1}$ . Donc

$$1 - (\alpha - 1)(a - 1) < 2 - \alpha^{-1},$$

ce qui démontre l'inégalité de droite de (vii). D'autre part,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2j} D_i + \sum_{i=2j+2}^k d_i D_i &> a^{-1} (D_{2j} + D_{2j+1} + 2 - \alpha) - D_{2j+2} \\ &= a^{-1} [2 - \alpha - (a - 1) D_{2j} - (a^2 - 1) D_{2j+1}]. \end{aligned}$$



De la même manière que la preuve de (v),

$$D_{2j+2} = (a+1)D_{2j+1} + D_{2j} - D_{2j+1},$$

et

$$-D_{2j} > D_{2j+2} + D_{2j+1} - D_{2j} = (a+1)D_{2j+1},$$

alors

$$-(a-1)D_{2j} - (\alpha^2 - 1)D_{2j+1} \geq 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2j} D_i + \sum_{i=2j+2}^k d_i D_i &> \alpha^{-1} (2 - \alpha) = -\alpha^{-1} \alpha_2^{-1} (\alpha_2 + \alpha) \\ &= -\alpha^{-1} - \alpha^{-1} \alpha_2^{-1} \alpha = -\alpha^{-1} + \alpha \alpha^{-1} = 1 - \alpha^{-1}. \end{aligned} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Démonstration de (viii) :

$$\sum_{i=2j}^k d_i D_i \leq \sum_{i=1}^k a D_{(2j-1)+(2i-1)} = D_{2j+2k-1} - D_{2j-1} < -D_{2j-1}.$$

Puisque  $d_{2j} > 1$ ,

$$\sum_{i=2j}^k d_i D_i > 2 D_{2j} + \sum_{i=1}^k a D_{2j+2i-1} = D_{2j} + D_{2j+2k} > D_{2j}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2j-1} D_i + \sum_{i=2j}^k d_i D_i &< \alpha^{-1} (D_{2j-1} + D_{2j} + 2 - \alpha) - D_{2j-1} \\ &= \alpha^{-1} [2 - \alpha - (a-1)D_{2j-1} + D_{2j}] \\ &\leq \alpha^{-1} [2 - \alpha - (a-1)D_{-1} + D_0] \\ &= 1 < 2 - \alpha^{-1}, \end{aligned}$$

puisque  $\alpha > 1$ . Pour l'autre inégalité,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2j-1} D_i + \sum_{i=2j}^k d_i D_i &> \alpha^{-1} (D_{2j-1} + D_{2j} + 2 - \alpha) + D_{2j} \\ &= \alpha^{-1} (D_{2j} + D_{2j+1} + 2 - \alpha) \\ &= \sum_{i=0}^{2j} D_i > 1 - \alpha^{-1}. \end{aligned} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Propriété 2 : Soit  $\{A''_n\}$  l'ensemble des nombre dont la  $p$ -représentation se termine par

- (i)  $3, 4, \dots, a,$   
(ii)  $0\underbrace{11\dots1}_{\text{pair}}, 0\underbrace{11\dots12}_{\text{pair}},$   
(iii)  $c\underbrace{11\dots1}_{\text{impair}}, c\underbrace{11\dots12}_{\text{impair}},$  où  $1 < c < a,$

et soit  $\{B''_n\}$  l'ensemble des nombre dont la  $p$ -représentation se termine par

- (iv)  $0\underbrace{11\dots1}_{\text{impair}}, 0\underbrace{11\dots12}_{\text{impair}},$   
(v)  $c\underbrace{11\dots1}_{\text{pair}}, c\underbrace{11\dots12}_{\text{pair}}.$

Alors,  $\{A''_n\} \equiv \{A_n\}$  et  $\{B''_n\} \equiv \{B_n\}.$

Démonstration : La première partie de la propriété 1 implique que si  $R_q(n)$  se termine par  $0\underbrace{11\dots1}_{\text{pair}}$  ou  $c\underbrace{11\dots1}_{\text{impair}},$  alors  $R_p(A_n) = R_q(n)$  se termine aussi par les mêmes chiffres.

La deuxième partie de la propriété 3 implique que si  $R_q(n)$  se termine par  $0\underbrace{11\dots1}_{\text{impair}},$  alors  $R_p(A_n)$  se termine par  $0\underbrace{11\dots12}_{\text{pair}},$  et si  $R_q(n)$  se termine par  $c\underbrace{11\dots1}_{\text{pair}}$  alors  $R_p(A_n)$  se termine par  $3, 4, \dots, a$  ou  $c\underbrace{11\dots12}_{\text{impair}}.$

Puisque les ensembles  $\{A_n\}$  et  $\{B_n\}, n \geq 0,$  sont complémentaires, le deuxième ensemble de nombres,  $\{B_n\}$  a une représentation qui est le complément de la représentation de l'autre. C'est-à-dire que  $B_n$  se termine par  $0\underbrace{11\dots1}_{\text{impair}}, 0\underbrace{11\dots12}_{\text{impair}}, c\underbrace{11\dots1}_{\text{pair}}$  ou  $c\underbrace{11\dots12}_{\text{pair}},$  et on a que  $\{A''_n\} \equiv \{A_n\}$  et  $\{B''_n\} \equiv \{B_n\}.$  C.Q.F.D.

Propriété 3 : Notons le dernier chiffre de  $R_p(A_n)$  par  $t.$  Alors  $R_p(B_n)$  est  $R'_p(A_n),$  avec le dernier chiffre (zéro) remplacé par 1 (si  $t = 0$  ou 1) ou par 2 et  $t$  remplacé par  $t - 1$  (si  $1 < t \leq a), n \geq 0.$

C'est-à-dire, si  $f$  est la fonction telle que

$$f(\delta_n, \dots, \delta_1, \delta_0) = \begin{cases} (\delta_n, \dots, \delta_1, \delta_0, 1) & \text{si } \delta_0 = 0 \text{ ou } 1, \\ (\delta_n, \dots, \delta_1, \delta_0 - 1, 2) & \text{si } 1 < \delta_0 \leq a, \end{cases}$$

alors  $f(R_p(A_n)) = R_p(B_n).$

Démonstration : Soit  $f^{-1}$  la fonction inverse de  $f$ . C'est-à-dire, soit  $f^{-1}$  la fonction telle que

$$f^{-1}(\delta_n, \dots, \delta_1, \delta_0) = \begin{cases} (\delta_n, \dots, \delta_1 + 1) & \text{si } \delta_0 = 2, \\ (\delta_n, \dots, \delta_1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a évidemment  $f^{-1}(f(R_p(A_n))) = R_p(A_n)$ . De plus, par la propriété 2, les ensembles  $\{R_p(A_n)\}$  et  $\{f(R_p(A_n))\}$  sont complémentaires.

Montrons que  $f(R_p(A_n)) = R_p(B_n)$  par induction sur  $n$ . On a

$$R_p(A_0) = R_p(0) = (0)$$

et

$$f(R_p(A_0)) = (0, 1) = (1) = R_p(B_0).$$

Le théorème est donc vrai pour  $n = 0$ . Supposons qu'il est vrai pour tout  $n < m$ , alors  $f(R_p(A_m)) \neq R_p(B_m)$ ,  $n < m$ . En réalité,  $I_p(f(R_p(A_m)))$  est le plus petit nombre absent de  $\{B_n\}$ ,  $n < m$ .

Si  $B_m \neq I_p(f(R_p(A_m)))$ , alors  $I_p(f(R_p(A_m)))$  ne pourrait jamais être obtenu pour  $n > m$ , contredisant la complémentarité de  $\{R_p(A_n)\}$  et  $\{I_p(f(R_p(A_n)))\}$ . C.Q.F.D.

### Stratégie gagnante

Soit la position  $(x, y)$  telle que  $0 \leq x \leq y$  et  $a > 1$  ( $(x, y) \neq (0, 0)$ ,  $1 < c < a$ ).

- Si  $R_p(x)$  se termine par  $\underbrace{011\dots1}_{\text{impair}}$ ,  $\underbrace{011\dots12}_{\text{impair}}$ ,  $\underbrace{c11\dots1}_{\text{pair}}$  ou  $\underbrace{c11\dots12}_{\text{pair}}$ , aller à  $(I_p(f^{-1}(R_p(x))), x)$ .
- Si  $R_p(x)$  se termine par  $3, 4, \dots, a$ ,  $\underbrace{011\dots1}_{\text{pair}}$ ,  $\underbrace{011\dots12}_{\text{pair}}$ ,  $\underbrace{c11\dots1}_{\text{impair}}$  ou  $\underbrace{c11\dots12}_{\text{impair}}$ 
  - et  $y > I_p(f(R_p(x)))$ , aller à  $(x, I_p(f(R_p(x))))$ .
  - et  $y = I_p(f(R_p(x)))$ , on perd si l'adversaire joue parfaitement jusqu'à la fin.
- Si  $x = y$ , aller à  $(0, 1)$ .
- Si  $x < y < I_p(f(R_p(x)))$ , calculer  $m = \lfloor (y - x - 1)/a \rfloor$ 
  - si  $R_q(m)$  se termine par  $\underbrace{011\dots1}_{\text{pair}}$  ou  $\underbrace{c11\dots1}_{\text{impair}}$ , aller  $(I_p(R_q(m)), I_p(R_q(m)) + am + 1)$ .
  - sinon aller à  $(I_p(R_q(m)) + 1, I_p(R_q(m)) + am + 2)$ .

La stratégie pour  $a = 1$  est similaire.

## CONCLUSION

---

Le jeu de Wythoff et ses généralisations vues ici ne sont qu'une infime partie des jeux dérivés du jeu de Nim. En effet, plusieurs autres modifications du jeu de Nim ont été étudiées jusqu'à présent. On a qu'à penser au jeu de Nim avec alternance périodique des joueurs [11], aux jeux de Nim où un des joueurs choisit la pile et l'autre le nombre de jetons à enlever (Spite-Nim) [8], au jeu de Lucas-Wythoff [15] pour ne nommer que ceux là.

La résolution du jeu de Wythoff à plus de deux piles est aussi un très grand défi. Ce jeu a été introduit par A. S. Fraenkel en 1991 [29] mais n'a, à ma connaissance, pas encore été solutionné.

Étonnamment un domaine qui peut sembler frivole donne un éclairage nouveau sur des disciplines réputées sérieuses. En effet, nous avons vu que la théorie des jeux est étroitement liée à plusieurs notions du domaine des mathématiques. On y fait appel tant à la théorie des nombres et à la théorie des suites complémentaires qu'à la combinatoire. On aurait pu recourir aux probabilités pour calculer nos chances que l'adversaire choisisse une position de départ perdante. D'autres pourraient créer des programmes informatiques afin de mettre toutes ces belles théories en valeurs. Enfin, la théorie des jeux est certainement beaucoup plus complexe qu'on aurait pu l'imaginer mais demeure une partie de plaisirs pour tous ceux qui savent l'apprécier.

## RÉFÉRENCES

---

- [1] R. Silver, *A Fibonacci Property of Wythoff Pairs*, The Fibonacci Quarterly, Vol. 14, 1976, p. 380-384.
- [2] L. Carlitz, R. Scoville and V.E. Hoggatt, Jr., *Fibonacci Representations*, The Fibonacci Quarterly, Vol. 10, 1972, p. 1-28.
- [3] L. Carlitz, R. Scoville and V.E. Hoggatt, Jr., *Addendum to the Paper 'Fibonacci Representations'*, The Fibonacci Quarterly, Vol. 10, 1972, p. 527-530.
- [4] I.G. Connell, *A Generalization of Wythoff's Game*, Canadian Math. Bulletin, Vol. 2, 1959, p. 181-190.
- [5] A.S. Fraenkel and I. Borosh, *A Generalization of Wythoff's Game*, J. Combinatorial Theory, Vol. 15, A Series, September, 1973, p. 175-191.
- [6] Vorob'ev, Nikolaj Nikolaevic, *Caractère de divisibilité; Suite de Fibonacci*, Éditions Mir, Moscou, 1965.
- [7] Schwenk, Allen J., *Take-away games*, The Fibonacci Quarterly, Vol. 8, 1970, no. 3, p. 225-234, 241.
- [8] Hale, David R., *A variant of Nim and a function defined by Fibonacci representation*, The Fibonacci Quarterly, Vol. 21, 1983, no. 2, p. 139-142.
- [9] Alan Tucker, *Applied Combinatorics*, second Édition, éditions John Wiley & Sons, p. 395-410.
- [10] Loeb, Daniel E., *How to win at Nim*, UMAP J., Vol 16, 1995, no. 4, p. 367-388.
- [11] Althöfer, I., *Nim games with arbitrary periodic moving orders*, Internat. J. Game Theory, Vol. 17, 1988, no. 3, p. 165-175.
- [12] Alan Tucker, *Applied combinatorics*, John Wiley and sons, New York, 1984.
- [13] Horodam, A. F., *Wythoff pairs*, The Fibonacci Quarterly, Vol. 16, 1978, no. 2, p.147-151.

- [14] R. Silber, *Wythoff's Nim and Fibonacci Representations*, The Fibonacci Quarterly, Vol. 15, 1977, p. 85-88.
- [15] Hoggatt, V.E., Jr; Bicknell-Johnson, Marjorie; Sasfield, Richard, *A generalization of Wythoff's game*, The Fibonacci Quarterly, Vol. 17, 1979, no. 3, p. 198-211.
- [16] Ian Stewart, *Playing with chocolate (Mathematical Recreations)*, Scientific American October, 1998, p. 122-124.
- [17] Martin Gardner, *Le jeu « coincer la reine » nous entraîne dans des recoins de la théorie des nombres!* in *Le monde mathématique de Martin Gardner*, Bibliothèque pour la science, Belin, Paris, 1986, p 106-110.
- [18] C.L. Bouton, *Nim, a game with a complete Mathematical Theory*, Annals of Mathematics, 1901-1902, p. 35-39.
- [19] D.P. McIntyre, *A new system for playing the game of Nim*, American Mathematical Monthly, 49, 1942, p. 44-46.
- [20] A.S. Fraenkel, *How to beat your Wythoff games'opponents on three fronts*, American Mathematical Monthly, 89, 1982, p. 353-361.
- [21] A.M. Yaglom and I.M. Yaglom, *Challenging Mathematical Problems with Elementary Solutions*, translated by J.McCawley, Jr., revised and edited by B. Gordon, vol. 2, Holden-Day, San Francisco, 1967, 214 p.
- [22] A.S. Fraenkel, *Wythoff games, continued fraction, cedar trees and Fibonacci searches*, Theoretical Computer Science, 29, 1984, no 1-2, p. 49-73.
- [23] W. Wythoff, *A modification of the game of Nim*, Nieuw Arch. Wisk., 7, 1907, p. 199-202.
- [24] A.S. Fraenkel et H. Erda, *Never rush to be first in playing Nimbi*, Mathematics Magazine, 53, 1980, p. 22.
- [25] A.S. Fraenkel, *The bracket function and complementary sets of integers*, Canad. J. Math., 21, 1969, p. 6-27.
- [26] Turgeon, Jean M., *Calculatrices et fractions continues*, Bulletin AMQ, Vol XXXVI, no. 1, mars 1996, p. 14-22.
- [27] de Konink, Jean-Marie et Armel Mercier, *Introduction à la théorie des nombres*, Modulo Éditeur, Montréal 1994.

- [28] Olds, Carl Douglas, *Continued fractions*, Random House, New Mathematical Library 9, Yale U., 1963.
- [29] A.S. Fraenkel, Loberbom, Mordechai, *Nimoff games*, J. Combin. Theory Ser A, 58, 1991, no. 1, p. 1-25.