

Université de Montréal

Méthodes de déconvolution en épidémiologie

par

Arik Loinaz

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques appliquées

juillet 1999

© Arik Loinaz, 1999



1.011A.0111X

QA
3
U57
1999
V.016

Université de Montréal

Méthodes de déconvolution en épidémiologie

par

Arif Jolani

Département de mathématiques et de statistiques
Faculté des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maîtrise en sciences (M.Sc.)
en mathématiques appliquées

juin 1999



1999

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Méthodes de déconvolution en épidémiologie

présenté par

Arik Loinaz

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Mme Anne Bourlioux

(président-rapporteur)

M. Robert Brunet

(directeur de recherche)

M. Jean-François Angers

(membre du jury)

Mémoire accepté le :

1999-08-09

SOMMAIRE

Le présent mémoire étudie des fonctions de risque cumulatif utilisées pour mesurer l'efficacité des programmes d'intervention dans un modèle épidémiologique. Les fonctions pertinentes peuvent être représentées sous forme mathématique par un système de convolution. L'objet est de déconvoluer ce système et plusieurs approches différentes sont considérées. D'abord, puisque l'information obtenue n'est qu'un échantillonnage de points discrets, une approche matricielle considérant les fonctions pertinentes comme étant des convolutions discrètes tronquées permet de résoudre « exactement » le système. Mais l'information de départ étant connue seulement approximativement (erreurs de mesure, bruits, etc.), l'approche précédente est instable, la matrice étant mal-conditionnée. Une seconde approche utilisant le principe des moindres carrés permet d'établir une méthode théoriquement applicable, mais difficile à stabiliser. Enfin, une troisième approche utilisant la régression non paramétrique dite de régularisation qui pénalise le caractère non lisse de la courbe s'avère fructueuse grâce à l'utilisation de la fonction GCV comme repère. Pour illustrer cette dernière approche, plusieurs simulations numériques sont présentées.

REMERCIEMENTS

« Che non men che saper dubiar m'aggrada* »

Dante.

Le plus difficile dans un travail comme celui-ci, c'est de s'approprier tout le mérite. Néanmoins, c'est une épreuve à laquelle il me fait plaisir d'échouer. Je m'incline donc devant ceux qui contribuèrent à ma réussite.

Je remercie tout d'abord mon directeur Robert Brunet de m'avoir appuyé jusqu'à la fin, même si la plupart du temps, j'avançais à l'aveuglette de surprise en surprise. Je vous en suis entièrement reconnaissant.

Merci également à Jean-François Angers pour son aide et ses références sur les fonction splines et leurs utilisations en statistique.

Merci à ma soeur Maïté d'avoir pris le temps de corriger mon texte.

Finalement, je remercie le Centre de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada de m'avoir appuyé financièrement.

* Le doute me plaît autant que le savoir.

Table des matières

Sommaire	iii
Remerciements	iv
Table des figures	vii
Introduction	1
Objectifs	1
La modélisation	2
Approximation numérique	4
Chapitre 1. La méthode directe	8
1.1. Résolution du système	8
1.2. Contraintes	12
1.2.1. $H_0 \neq C_0 \neq 0$	13
1.2.2. $\vec{0} \leq \vec{\beta} \leq \vec{1}$	15
1.3. La convolution discrète	16
1.3.1. La longueur des vecteurs	19
1.4. Fragilité de la solution	20
Chapitre 2. Déconvolution à l'aide du principe des moindres carrés	21

2.1.	L'analyse des signaux en géophysique	21
2.2.	Applications au système de convolutions	26
2.2.1.	Directement sur l'équation $C * \vec{I} = H * \beta$	26
2.2.2.	En utilisant la monotonie des fonctions	27
Chapitre 3. Régularisation à l'aide		
	de la régression non paramétrique	35
3.1.	Pénalité sur la rudesse de la courbe	35
3.2.	Application au système de convolutions	41
3.2.1.	Critères pour λ_1 et λ_2	45
3.3.	Les simulations	49
3.3.1.	H et C polluées	51
3.3.1.1.	Premier cas: $\alpha_H = 0,05, \alpha_C = 0$ (figures 3.7 et 3.8)	56
3.3.1.2.	Second cas: $\alpha_H = 0, \alpha_C = 0,05$ (figures 3.9 et 3.10)	59
3.3.1.3.	Troisième cas: $\alpha_H = \alpha_C = 0,05$ (figures 3.11 et 3.12)	61
3.3.2.	g et C polluées	63
3.3.2.1.	Premier cas: $\alpha_g = 0,05, \alpha_C = 0$ (figures 3.13 et 3.14)	65
3.3.2.2.	Second cas: $\alpha_g = 0, \alpha_C = 0,05$ (figures 3.15 et 3.16)	67
3.3.2.3.	Troisième cas: $\alpha_g = \alpha_C = 0,05$ (figures 3.17 et 3.18)	69
Conclusion		71
Bibliographie		73

Table des figures

2.1	Schéma des signaux en géophysique.....	22
2.2	Signal constitué d'un pic.....	27
2.3	Exemples d'approximation de δ_0 par moindres carrés.....	32
2.4	Exemples d'approximation de β par moindres carrés.....	34
3.1	La rudesse d'une courbe.....	37
3.2	Données synthétiques avec la courbe qui minimise $S(f)$ pour différentes valeurs de λ	38
3.3	Trois types de fonctions β caractéristiques.....	50
3.4	Les fonctions g utilisées.....	50
3.5	β croissante de longueur $0 \rightarrow 19$ avec $\alpha_H = \alpha_C = 0,05$	53
3.6	β décroissante de longueur $0 \rightarrow 19$ avec $\alpha_H = \alpha_C = 0,05$	54
3.7	β gamma de longueur $0 \rightarrow 9$ avec $\alpha_H = 0,05$, $\alpha_C = 0$	56
3.8	β gamma de longueur $0 \rightarrow 19$ avec $\alpha_H = 0,05$, $\alpha_C = 0$	57
3.9	β gamma de longueur $0 \rightarrow 9$ avec $\alpha_H = 0$, $\alpha_C = 0,05$	59
3.10	β gamma de longueur $0 \rightarrow 19$ avec $\alpha_H = 0$, $\alpha_C = 0,05$	60
3.11	β gamma de longueur $0 \rightarrow 9$ avec $\alpha_H = \alpha_C = 0,05$	61
3.12	β gamma de longueur $0 \rightarrow 19$ avec $\alpha_H = \alpha_C = 0,05$	62
3.13	β gamma de longueur $0 \rightarrow 9$ avec $\alpha_g = 0,05$, $\alpha_C = 0$	65

3.14	β gamma de longueur $0 \rightarrow 19$ avec $\alpha_g = 0,05$, $\alpha_C = 0$	66
3.15	β gamma de longueur $0 \rightarrow 9$ avec $\alpha_g = 0$, $\alpha_C = 0,05$	67
3.16	β gamma de longueur $0 \rightarrow 19$ avec $\alpha_g = 0$, $\alpha_C = 0,05$	68
3.17	β gamma de longueur $0 \rightarrow 9$ avec $\alpha_g = \alpha_C = 0,05$	69
3.18	β gamma de longueur $0 \rightarrow 19$ avec $\alpha_g = \alpha_C = 0,05$	70

INTRODUCTION

OBJECTIFS

Dans le domaine de la santé, il est important de mesurer l'efficacité des différents programmes d'intervention à long terme contre une ou des maladies au sein d'une population (ex. : campagne de vaccination).

À cet effet, il est commode d'utiliser des fonctions de risque cumulatif qui ne dépendent que de trois variables temporelles :

- i. l'âge de la population ;
- ii. le temps du calendrier ;
- iii. le temps écoulé depuis le début de l'intervention.

Les fonctions pertinentes peuvent être représentées sous forme mathématique par un système de convolution avec des fonctions mesurant l'impact de l'intervention. L'avantage d'établir un bon modèle est évident : classification des différents programmes selon leur efficacité.

L'objet du présent mémoire est de déconvoluer ce système en utilisant diverses méthodes afin de pouvoir mesurer l'efficacité des différents programmes. Ces diverses méthodes seront aussi utilisées avec des fonctions de risque cumulatif polluées (*i.e.* avec un certain pourcentage de bruit) afin d'obtenir les meilleurs résultats possibles. L'atteinte des objectifs fera intervenir une variété d'outils mathématiques (transformées, algèbre linéaire, principe des moindres carrés, fonctions splines) et statistiques (analyse de données, régression) et permettra d'établir la meilleure méthode possible pour déconvoluer avec des données polluées.

LA MODÉLISATION

La population étudiée est affectée par une maladie de type irréversible et bénéficie d'un programme d'intervention préventive capable de réduire l'incidence de la maladie. Le modèle a pour but de mesurer l'efficacité d'une intervention, à partir d'information tirée d'une population sujette à une infection où les différentes composantes du risque ont des variations inconnues dans le temps [1]. On supposera que :

- i. les bénéfices de l'intervention sur un individu sont fonction du temps écoulé depuis le début de l'intervention ;
- ii. la vulnérabilité du sujet est fonction de l'âge ;
- iii. les variables exogènes (*i.e.* les contributions environnementales au risque) sont fonctions du temps inscrit sur le calendrier.

Comme source d'information sur la population, on a, en général, accès à la fonction de survie S qui mesure la proportion de la population qui est encore susceptible à l'infection. Une population d'âge a au temps t , soumise à une intervention i , z unités de temps jadis, a une proportion encore susceptible égale à

$$S_i(t, a, z) = \exp \left(- \int_0^{a-z} h_0(t - a + a', a') da' - H_i(t, a, z) \right) \quad (0.1)$$

avec

$$H_i(t, a, z) = \int_0^z h_i(t - z + z', a - z + z', z') dz' \quad \text{pour } 0 \leq z \leq a \quad (0.2)$$

où $h_i(t, a, z)$ est le taux d'incidence évalué z unités de temps après l'intervention et $h_0(t, a)$ est le taux d'incidence quand aucune intervention n'a été effectuée. La fonction de risque cumulatif $H_i(t, a, z)$ peut être obtenue par estimation de la fonction $S_i(t, a, z)$.

Afin d'accentuer les bénéfices de l'intervention sur un individu encore susceptible, l'efficacité des programmes d'intervention peut être représentée comme étant la diminution relative dans le risque cumulatif depuis l'intervention :

$$E_i(t, a, z) = \frac{\int_{a-z}^a h_o(t - a + a', a') da' - \int_0^z h_i(t - z + z', a - z + z', z') dz'}{\int_{a-z}^a h_o(t - a + a', a') da'} \quad (0.3)$$

ou plutôt

$$E_i(t, a, z) = \frac{H_o(t, a, z) - H_i(t, a, z)}{H_o(t, a, z)}. \quad (0.4)$$

Il est toutefois plus simple de travailler avec la proportion ρ_i des risques cumulatifs, avec et sans intervention, depuis le début de l'intervention. Par souci de symétrie, on posera $h_o(t, a) = h_o(t, a, z)$ et

$$\rho_i(t, a, z) = 1 - E_i(t, a, z) = \frac{\int_0^z h_i(t - z + z', a - z + z', z') dz'}{\int_0^z h_o(t - z + z', a - z + z', z') dz'}. \quad (0.5)$$

La dépendance de ρ_i sur les trois variables t , a , et z peut être complexe. De plus, les contributions respectives de l'âge et des variables exogènes sur le risque cumulatif étant inconnues, la contribution réelle de l'intervention pourrait être masquée.

Dans l'esprit de Cox [2] et Cox et Miller [3], Robert C. Brunet et Claudio J. Struchiner [1] considèrent les variables du risque comme interagissant de manière multiplicative

$$h_j(t, a, z) = \lambda_o(t)\alpha(a)\beta_j(z), \quad j \in \{o, i\},$$

où $\lambda_o(t)$ représente le facteur exogène variant dans le temps de manière inconnue, $\alpha(a)$ est la vulnérabilité à la maladie en fonction de l'âge, elle aussi est présumée inconnue, et $\beta_j(z)$, $j \in \{o, i\}$, détermine le changement dans le risque en fonction du temps écoulé z depuis l'intervention. $\beta_o(z) \equiv 1$ puisque dans ce cas, il n'y a

eu aucune intervention. Alors, $\rho_i(t, a, z)$ devient

$$\rho_i(t, a, z) = \frac{H_i(t, a, z)}{H_o(t, a, z)} = \frac{\int_0^z \lambda_o(t - z + z') \alpha(a - z + z') \beta_i(z') dz'}{\int_0^z \lambda_o(t - z + z') \alpha(a - z + z') \beta_o(z') dz'}. \quad (0.6)$$

En écrivant $g(t, a; u) \equiv \lambda_o(t - u) \alpha(a - u)$, $u \geq 0$, cela permet alors de définir les fonctions de risque cumulatif $H_j(t, a, z)$, $j \in \{o, i\}$, comme des convolutions :

$$H_j(t, a; z) = \int_0^z g(t, a; z - z') \beta_j(z') dz'. \quad (0.7)$$

Si les fonctions $H_j(t, a, z)$ étaient connues pour $0 \leq z < \infty$, alors l'utilisation des transformées de Laplace

$$\mathcal{L}\{f(z)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-sz} f(z) dz.$$

permettrait en principe la détermination de la fonction $\beta_i(z)$ mesurant l'impact de l'intervention. En effet, grâce au théorème de convolution [10]

$$\frac{\mathcal{L}\{H_i\}}{\mathcal{L}\{H_o\}} = \frac{\mathcal{L}\{g\} \mathcal{L}\{\beta_i\}}{\mathcal{L}\{g\} \mathcal{L}\{1\}} = \frac{\mathcal{L}\{\beta_i\}}{1/s}$$

d'où

$$\beta_i = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mathcal{L}\{H_i\}}{s \mathcal{L}\{H_o\}} \right\}.$$

Malheureusement le fait que l'on ne peut connaître l'évolution d'une maladie au-delà d'une certaine valeur finie de z force l'utilisation d'une autre voie.

APPROXIMATION NUMÉRIQUE

Pour des populations d'un âge donné a évaluées à un temps donné t , les variables t et a peuvent être considérées comme des paramètres et seule la variable

z subit des variations à l'intérieur de l'équation (0.7). Dorénavant, la dépendance en t et a sera implicite. Du fait que $\beta_o \equiv 1$, on déduit facilement que

$$H_o(z) = \int_0^z g(x) dx.$$

En supposant que les fonctions H_o , H_i , g et β_i sont assez lisses pour $0 \leq z \leq Z$, le théorème fondamental du calcul [11] permet de dire que

$$g(z) = \frac{dH_o}{dz}.$$

H_o est une fonction monotone croissante puisque $g(z) \equiv g(t, a; z) = \lambda_o(t-z)\alpha(a-z) \geq 0$. L'équation (0.7) se réécrit maintenant sous cette forme :

$$H_i(z) = \int_0^z \beta_i(z-x)H'_o(x) dx. \quad (0.8)$$

En divisant l'intervalle $\{0, Z\}$ en $n+1$ intervalles égaux et en supposant nos deux fonctions H_o et H_i connues pour $z = j\Delta$, $j = 0, \dots, n+1$, il est possible d'appliquer le théorème de la valeur moyenne pour des intégrales [11] en utilisant la croissance monotone de H_o et d'écrire

$$\begin{aligned} H_i(\Delta) &= \int_0^\Delta \beta_i(\Delta-x)H'_o(x) dx \\ &= \beta_i(\Delta - \xi_{1,0}) \int_0^\Delta H'_o(x) dx \quad \text{pour } 0 \leq \xi_{1,0} \leq \Delta \\ &= \beta_i(\Delta - \xi_{1,0})(H_o(\Delta) - H_o(0)) \\ &= \beta_i(\Delta - \xi_{1,0})H_o(\Delta) \quad \text{puisque } H_o(0) = 0; \\ H_i(2\Delta) &= \int_0^\Delta \beta_i(2\Delta-x)H'_o(x) dx + \int_\Delta^{2\Delta} \beta_i(2\Delta-x)H'_o(x) dx \\ &= \beta_i(2\Delta - \xi_{2,0})H_o(\Delta) + \beta_i(2\Delta - \xi_{2,1})(H_o(2\Delta) - H_o(\Delta)) \\ &\quad \text{pour } 0 \leq \xi_{2,0} \leq \Delta, \quad \Delta \leq \xi_{2,1} \leq 2\Delta; \end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned}
H_i(k\Delta) &= \beta_i(k\Delta - \xi_{k,0})H_o(\Delta) + \beta_i(k\Delta - \xi_{k,1})(H_o(2\Delta) - H_o(\Delta)) \\
&\quad + \cdots + \beta_i(k\Delta - \xi_{k,k-1})(H_o(k\Delta) - H_o((k-1)\Delta)) \\
\text{pour } &0 \leq \xi_{k,0} \leq \Delta, \quad \dots, \quad (k-1)\Delta \leq \xi_{k,k-1} \leq k\Delta
\end{aligned} \tag{0.9}$$

et ce pour $k = 0, \dots, n+1$ (en n'oubliant pas que $H_o(0) = H_i(0) = 0$).

On fait l'approximation suivante: les $\xi_{k,j}$ sont situées à la moitié de l'intervalle correspondant, *i.e.* $\xi_{k,j} = (2j+1)\Delta/2$ pour $k = 1, \dots, n+1$. Les quatre principaux termes sont alors redéfinis. Soient

$$\begin{aligned}
H_k &= H_o((k+1)\Delta); \\
C_k &= H_i((k+1)\Delta); \\
\beta_k &= \beta_i((k + \frac{1}{2})\Delta); \\
g_k &= g((k + \frac{1}{2})\Delta);
\end{aligned} \tag{0.10}$$

pour $k = 0, \dots, n$. Avec les nouvelles variables l'équation (0.9) est nettement plus simple à travailler :

$$\begin{aligned}
C_0 &= \beta_0 H_0; \\
C_k &= \beta_k H_0 + \sum_{j=1}^k \beta_{k-j} (H_j - H_{j-1}) \quad \text{pour } k = 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{0.11}$$

Ce qui permet la proposition suivante.

Proposition 0.1.

$$\sum_{j=0}^k C_j = \sum_{j=0}^k \beta_{k-j} H_j \quad \text{pour tout } k = 0, 1, \dots \tag{0.12}$$

DÉMONSTRATION. Par récurrence. Le cas $k = 0$ est évident. On suppose le cas k vrai et on regarde le cas $k + 1$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^{k+1} C_j &= \sum_{j=0}^k C_j + C_{k+1} \\
 &= \sum_{j=0}^k \beta_{k-j} H_j + C_{k+1} \\
 &= \sum_{j=0}^k \beta_{k-j} H_j + \left(\beta_{k+1} H_0 + \sum_{j=1}^{k+1} \beta_{k+1-j} (H_j - H_{j-1}) \right) \quad \text{par (0.11)} \\
 &= \beta_{k+1} H_0 + \sum_{j=1}^{k+1} \beta_{k+1-j} H_j \\
 &= \sum_{j=0}^{k+1} \beta_{k+1-j} H_j.
 \end{aligned}$$

□

Remarque 0.1. $\sum_{j=0}^k \beta_{k-j} H_j = \sum_{j=0}^k \beta_j H_{k-j}$ pour tout $k = 0, 1, \dots$

On notera le passage d'un système de fonctions continues (0.7) à un système de fonctions discrètes (0.12). À partir de maintenant, le problème sera abordé avec des fonctions discrètes.

Il est possible de réécrire le système (1.1) sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ C_0 + C_1 \\ C_0 + C_1 + C_2 \\ \vdots \\ C_0 + \dots + C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_0 & & & & \\ H_1 & H_0 & & & 0 \\ H_2 & H_1 & H_0 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ H_n & \dots & H_2 & H_1 & H_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix},$$

d'où

$$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_0 & & & & \\ H_1 & H_0 & & & 0 \\ H_2 & H_1 & H_0 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ H_n & \dots & H_2 & H_1 & H_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_0 + C_1 \\ C_0 + C_1 + C_2 \\ \vdots \\ C_0 + \dots + C_n \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

La matrice contenant les termes du vecteur H est appelée *matrice de Toeplitz triangulaire inférieure* [13].

Théorème 1.1. *L'inverse d'une matrice de Toeplitz triangulaire inférieure*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & \dots & \dots \\ a_1 & a_0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & \dots & a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

(où $a_0 \neq 0$) est une matrice de Toeplitz triangulaire inférieure

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_0 & 0 & \dots & \dots \\ b_1 & b_0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & \dots & b_1 & b_0 \end{bmatrix}$$

où les termes des deux matrices satisfont la relation suivante :

$$\sum_{i=0}^j a_i b_{j-i} = \delta_{j,0} \quad \text{pour } j = 0, \dots, n \quad (1.3)$$

où

$$\delta_{j,0} = \begin{cases} 1, & \text{si } j = 0 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Puisqu'une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul et que le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des termes sur la diagonale, la supposition $a_0 \neq 0$ permet d'affirmer que la matrice \mathbf{A} possède un inverse \mathbf{B} . Il faut maintenant démontrer que \mathbf{B} est nécessairement une matrice de Toeplitz triangulaire inférieure.

Soit

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{0,0} & \dots & b_{0,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n,0} & \dots & b_{n,n} \end{bmatrix}$$

où les termes $b_{i,j}$ sont indéterminés. Puisque \mathbf{B} est l'inverse de \mathbf{A} , on a la relation $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ où \mathbf{I} représente la matrice identité. D'où

$$\begin{bmatrix} a_0 b_{0,0} & a_0 b_{0,1} & \dots & a_0 b_{0,n} \\ a_1 b_{0,0} + a_0 b_{1,0} & a_1 b_{0,1} + a_0 b_{1,1} & \dots & a_1 b_{0,n} + a_0 b_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n b_{0,0} + \dots + a_0 b_{n,0} & a_n b_{0,1} + \dots + a_0 b_{n,1} & \dots & a_n b_{0,n} + \dots + a_0 b_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En commençant avec les termes situés sur la première ligne, on en déduit les valeurs de $b_{0,i}$ pour $i = 0, \dots, n$ (puisque $a_0 \neq 0$) :

$$\begin{aligned} b_{0,0} &= 1/a_0 ; \\ b_{0,i} &= 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{0}$$

On descend ensuite à la seconde ligne :

$$\begin{aligned} a_1 b_{0,0} + a_0 b_{1,0} &= 0 ; \\ b_{1,1} &= 1/a_0 ; \\ b_{1,i} &= 0 \quad \text{pour } i = 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{1}$$

La troisième :

$$\begin{aligned} a_2 b_{0,0} + a_1 b_{1,0} + a_0 b_{2,0} &= 0 ; \\ a_1 b_{1,1} + a_0 b_{2,1} &= 0 ; \\ b_{2,2} &= 1/a_0 ; \\ b_{2,i} &= 0 \quad \text{pour } i = 3, \dots, n. \end{aligned} \tag{2}$$

Par récurrence, on arrive jusqu'à la dernière ligne :

$$\begin{aligned} a_n b_{0,0} + \dots + a_0 b_{n,0} &= 0 ; \\ a_{n-1} b_{1,1} + \dots + a_0 b_{n,1} &= 0 ; \\ &\vdots \\ a_1 b_{n-1,n-1} + a_0 b_{n,n} &= 1/a_0. \end{aligned} \tag{n}$$

De toutes ces égalités (0)–(n), on fait les déductions suivantes :

1° $b_{i,j} = 0$ pour $i, j = 1, \dots, n$ et $j > i$. Donc \mathbf{B} est bien une matrice triangulaire inférieure.

2° $b_{i,i} = 1/a_0$ pour $i = 0, \dots, n$. Il suffit donc de poser $b_0 = b_{i,i}$ pour $i = 0, \dots, n$ et la première égalité de l'équation (1.3) est respectée.

3° Puisque $b_{i,i} = b_0$ pour tout $i = 0, \dots, n$, on obtient alors que $a_1 b_0 + a_0 b_{i+1,i} = 0$ pour $i = 0, \dots, n$. On pose donc $b_1 = b_{i+1,i}$. On continue le même raisonnement pour toutes les autres égalités et on trouve les termes constants suivants

$$b_{i+k,i} = b_k$$

pour $i = 0, \dots, n$ et $k = 2, \dots, n$ en tenant compte du fait que les indices de b ne peuvent être plus grands que n . Ce qui implique que \mathbf{B} est une matrice de Toeplitz triangulaire inférieure.

4° En remplaçant les termes $b_{i,j}$ par les nouveaux termes b_0, \dots, b_n dans toutes les égalités (0)–(n), on obtient l'équation (1.3), ce qui met fin à la preuve. \square

Grâce au théorème 1.1, le système (1.2) peut être réécrit dans une version plus conviviale :

$$\beta_i = \sum_{j=0}^i \kappa_j \left(\sum_{l=0}^{i-j} C_l \right) \quad (1.4)$$

où les κ_i sont définis par la relation

$$\sum_{j=0}^i H_j \kappa_{i-j} = \delta_{i,0} \quad (1.5)$$

pour $i = 0, \dots, n$. κ est appelé l'*inverse convolutif* de H .

1.2. CONTRAINTES

La simplicité du système (1.4) cache quelques conditions qui ont été supposées vraies sans aucun questionnement. Avant de poursuivre plus loin, il serait bon de s'interroger sur les conséquences de ces conditions sur la fiabilité de l'approche par la méthode directe. Deux principales restrictions ont été relevées.

1.2.1. $H_0 \neq C_0 \neq 0$

Par (0.10), on a que

$$H_0 = \int_0^\Delta g(x) dx \quad \text{et} \quad C_0 = \int_0^\Delta g(x)\beta_i(\Delta - x) dx.$$

S'il s'avère que $g(z) = 0$ pour tout $0 \leq z \leq \Delta$, alors $H_0 = 0$ et $C_0 = 0$.

Or, une telle supposition ne permet plus de résoudre le système avec l'algèbre linéaire puisque le déterminant de la matrice de Toeplitz triangulaire inférieure constituée avec les termes de H sera nulle. En revanche, il y a un moyen de surmonter cet obstacle : il suffit de considérer l'équation (0.12) avec $H_0 = C_0 = 0$. Pour $k = 0$, on obtient l'équation $C_0 = H_0\beta_0$ qui laisse le β_0 indéterminé. Mais pour $k = 1$, on se retrouve avec l'équation $C_1 = H_1\beta_0$, d'où $\beta_0 = C_1/H_1$. Si on développe toutes les équations jusqu'à $k = n$, on obtient le système

$$\sum_{i=1}^k C_i = \sum_{i=1}^k H_{k-i+1}\beta_{i-1} \quad \text{pour} \quad k = 1, \dots, n$$

qui est équivalent à

$$\sum_{i=0}^k c_i = \sum_{i=0}^k h_{k-i}\beta_i \quad \text{pour} \quad k = 0, \dots, n-1$$

avec $h_i = H_{i+1}$ et $c_i = C_{i+1}$. On revient donc au système (1.1) de départ, mais avec une longueur raccourcie d'une unité, ce qui est résoluble.

Il est ainsi inutile de considérer $H_0 = 0$ puisque que c'est équivalent à redéfinir les vecteurs

$$\vec{H} = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 & \dots & H_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{C} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{bmatrix},$$

i.e. sans leur premier terme nul. Il est toutefois important de tenir compte de la remarque suivante.

Remarque 1.1. Puisque le système est défini pour $k = 0, \dots, n - 1$, par le système solution (1.4), $\vec{\beta}$ sera défini pour ses n premiers termes seulement. On est donc réduit à obtenir un vecteur $\vec{\beta}$ de longueur moindre que \vec{H} et \vec{C} .

On peut généraliser ce fait avec la proposition suivante.

Proposition 1.1. *Si $H_i = 0$ pour tous les $i = 0, \dots, j \leq n - 1$, alors on ne peut déterminer un vecteur $\vec{\beta}$ que de longueur $0 \rightarrow n - 1 - j$.*

DÉMONSTRATION. Par récurrence. Le cas $j = 0$ a été discuté précédemment. Il reste à démontrer le cas $j + 1$ en supposant le cas j vrai.

Soit $H_i = 0$ pour tous les $i = 0, \dots, j + 1 \leq n - 1$. On a le système d'équations

$$\sum_{i=0}^k c_i = \sum_{i=0}^k h_{k-i} \beta_i$$

vrai pour $k = 0, \dots, n - 1 - j$ (avec $h_i = H_{i+j+1}$ et $c_i = C_{i+j+1}$). Or $H_{j+1} = 0$ implique nécessairement que $C_{j+1} = 0$ et donc $h_0 = c_0 = 0$. On peut donc réécrire le système comme étant

$$\sum_{i=1}^k c_i = \sum_{i=1}^k h_{k-i+1} \beta_{i-1} \quad \text{pour } k = 1, \dots, n - 1 - j.$$

En posant $h'_i = h_{i+1}$ et $c'_i = c_{i+1}$ et en effectuant un changement de variable, on se ramène au système

$$\sum_{i=0}^k c'_i = \sum_{i=0}^k h'_{k-i} \beta_i \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots, n - j - 2$$

qui est résolvable et qui donne comme solution un vecteur $\vec{\beta}$ de longueur $0 \rightarrow n - 2 - j$. □

Remarque 1.2. Si le vecteur \vec{H} est identiquement nul, \vec{C} le sera aussi et par conséquent, le système (1.1) ne sera plus qu'un ensemble d'équations $0 = 0$. Donc, dans ce cas précis, $\vec{\beta}$ restera indéterminé pour tous ses termes.

$$1.2.2. \quad \vec{0} \leq \vec{\beta} \leq \vec{1}$$

En se replaçant dans le contexte de départ, $\beta(z)$ est une fonction qui mesure l'impact de l'intervention présumée bénéfique, d'où la relation suivante est nécessaire :

$$0 \leq \beta_m \leq 1 \quad \text{pour } m = 0, \dots, n. \quad (1.6)$$

Il est donc important de regarder quelles conséquences cette restriction apporte aux vecteurs \vec{H} et \vec{C} .

Premièrement, (1.6) respecte bien la relation d'ordre en \vec{H} et \vec{C} . En effet,

$$0 \leq \beta_k \leq 1 \quad \implies \quad 0 \leq \sum_{i=0}^k \beta_{k-i} g_i \leq \sum_{i=0}^k g_i \quad \iff \quad 0 \leq C_k \leq H_k$$

pour $k = 0, \dots, n$ puisque \vec{g} est non négatif.

Deuxièmement, les systèmes (1.4) et (1.6) permettent d'établir une relation plus générale pour \vec{H} et \vec{C} . Les deux vecteurs doivent respecter le système suivant :

$$0 \leq \sum_{i=0}^k \kappa_i \left(\sum_{j=0}^{k-i} C_j \right) \leq 1 \quad \text{pour } k = 0, \dots, n \quad (1.7)$$

où les κ_i respectent la relation (1.5) pour tous les $i = 0, \dots, n$. Cette dernière relation sera importante à respecter si l'on veut avoir des résultats cohérents.

1.3. LA CONVOLUTION DISCRÈTE

On peut concevoir comme continues les fonctions sous-jacentes aux vecteurs \vec{H} , \vec{C} , $\vec{\beta}$ et \vec{g} . Mais l'information disponible ne l'est pas. Pour le système étudié, utiliser des fonctions discrètes plutôt que continues est naturel puisque les fonctions $H(z)$ et $C(z)$ ne sont connues que pour des valeurs bien précises de l'argument z . Ces valeurs s'expriment par des vecteurs.

Lorsqu'on travaille avec des fonctions discrètes (ou vecteurs) plutôt que continues, il convient de redéfinir la convolution :

Définition 1.1. Soient $\vec{a} = [a_0 \ a_1 \ \dots]$ et $\vec{b} = [b_0 \ b_1 \ \dots]$ deux vecteurs. La *convolution* entre \vec{a} et \vec{b} est définie comme étant

$$\vec{c} = \vec{a} * \vec{b} = [c_0 \ c_1 \ \dots]$$

où les coefficients de \vec{c} sont donnés par la formule

$$c_m = \sum_{i=0}^m a_i b_{m-i}.$$

Il est utile de noter que la convolution reste une opération commutative, associative et distributive avec l'addition.

On peut maintenant réécrire le système pour des vecteurs \vec{H} , \vec{C} , $\vec{\beta}$ et $\vec{1}^\dagger$ de même longueur $0 \rightarrow n$:

$$H = g * \vec{1} \quad \text{où} \quad H_m = \sum_{i=0}^m g_i; \quad (1.8)$$

$$C = g * \beta \quad \text{où} \quad C_m = \sum_{i=0}^m g_{m-i} \beta_i. \quad (1.9)$$

$\dagger \vec{1}$ représente le vecteur $[1 \ 1 \ \dots \ 1]$ et sa longueur va être la même que celle des vecteurs \vec{H} , \vec{C} , $\vec{\beta}$ et \vec{g} .

Ou en considérant (1.8) et (1.9) comme une seule équation

$$C * \vec{1} = H * \beta \quad \text{où} \quad \sum_{i=0}^m C_i = \sum_{i=0}^m H_{m-i} \beta_i \quad (1.10)$$

pour $m = 0, \dots, n$.

Remarque 1.3. Par souci d'une notation la moins lourde possible, la flèche surplombant les vecteurs H , C , β et g a été supprimée. Seulement le vecteur $\vec{1}$ l'a conservée afin de ne pas le confondre avec le scalaire 1.

La première convolution (1.8) montre que H est une fonction dépendant de g et puisque g est une fonction non négative, il est clair que H sera non négative et croissante.

Plutôt que d'utiliser l'algèbre linéaire, le système (1.1) aurait pu être résolu en utilisant les transformées en z .

Définition 1.2. La transformée en z d'un vecteur $\vec{a} = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_n]$ de longueur finie est le polynôme en z^\dagger de degré n

$$A(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n.$$

Puisque la transformée en z d'un vecteur de longueur finie est un polynôme, la transformée en z d'un vecteur de longueur infinie est une série de puissance. Autrement dit, la transformée de z d'un vecteur $\vec{b} = [b_0 \ b_1 \ b_2 \ \dots]$ de longueur infinie est la série

$$B(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots.$$

[‡] Les ingénieurs utilisent souvent z^{-1} à la place de z . Leur version n'est pas considérée puisqu'il est préférable de travailler avec des polynômes en puissance de z plutôt que z^{-1} [9].

L'utilisation des transformées en z s'avère commode lorsqu'on travaille avec des convolutions puisque

$$\vec{c} = \vec{a} * \vec{b} \iff C(z) = A(z)B(z) \quad (1.11)$$

où A , B et C sont les transformées en z de \vec{a} , \vec{b} et \vec{c} respectivement. Déconvoluer se résume donc à trouver un polynôme

$$B(z) = C(z)/A(z).$$

Pour le trouver, il suffit de factoriser

$$\frac{1}{A(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^{\zeta_0} \cdots (z - z_r)^{\zeta_r}}$$

et de prendre les développements en série de

$$\frac{1}{(z - z_j)} = \alpha_{j,0} + \alpha_{j,1}z + \alpha_{j,2}z^2 + \cdots, \quad j = 0, \dots, r,$$

en supposant $|z| < 1$, pour ensuite les multiplier (en tenant compte de la multiplicité) avec $C(z)$, *i.e.*

$$B(z) = (c_0 + c_1z + \cdots)(\alpha_{0,0} + \alpha_{0,1}z + \cdots)^{\zeta_0} \cdots (\alpha_{r,0} + \alpha_{r,1}z + \cdots)^{\zeta_r}.$$

Néanmoins, une approche polynomiale plutôt que matricielle comporte deux grandes difficultés :

- i. comme il sera expliqué dans la section suivante, la longueur du vecteur résultant d'une convolution doit être tronquée pour permettre une solution valable ;
- ii. La factorisation n'est pas facile à effectuer pour un polynôme de degré supérieur à 5.

Ces deux difficultés favorisent l'utilisation de la méthode directe.

1.3.1. La longueur des vecteurs

Les fonctions H et C tel que définies par (1.8) et (1.9) ne sont pas des convolutions discrètes au vrai sens du terme. Un détail a été omis volontairement à propos de la longueur des vecteurs résultant d'une convolution. Voici un exemple qui démontre comment.

Soient $\vec{a} = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_m]$ et $\vec{b} = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_n]$ deux vecteurs et $A(z)$ et $B(z)$ leur transformées en z respectives. La convolution a été décrite précédemment par l'équation (1.11) comme étant le produit des transformées en z . Mais, le produit de deux polynômes de degré m et n est un polynôme de degré $m + n$.

On s'aperçoit désormais que la convolution de deux vecteurs de longueur $0 \rightarrow m$ et $0 \rightarrow n$ est un vecteur de longueur $0 \rightarrow m + n$, ce qui n'est pas le cas pour H et C puisqu'ils sont indéterminés après une certaine borne connue. En fait, H et C ne sont pas des convolutions, mais plutôt des convolutions *tronquées* que l'on va désigner par

$$H = \widetilde{g * \vec{1}} \quad (1.12)$$

$$C = \widetilde{\beta * g} \quad (1.13)$$

ou plutôt

$$\widetilde{C * \vec{1}} = \widetilde{\beta * H} \quad (1.14)$$

où $\widetilde{}$ signifie une convolution tronquée au $n + 1^{\text{e}}$ terme (en n'oubliant pas que tous nos vecteurs sont de longueurs $0 \rightarrow n$). On remarque que le système (1.14) est équivalent au système (1.1). À partir de maintenant pour éviter toute confusion possible il sera indiqué si une convolution est tronquée ou non.

Remarque 1.4. Alors que la convolution tronquée est, en principe, résolvable avec des fonctions discrètes, ce n'est pas le cas pour une convolution non tronquée. Soit $\vec{c} = \vec{a} * \vec{b}$ avec \vec{a} et \vec{c} des vecteurs connus de longueur $0 \rightarrow n$ et $0 \rightarrow n + m$ respectivement. Si l'on essaie de retrouver \vec{b} , on se bute à un obstacle solide : on a $m + 1$ inconnus à déterminer avec $n + m + 1$ équations. Le système étant sur-déterminé, il devient donc algébriquement impossible de solutionner le système si les coefficients de \vec{c} et \vec{a} sont entachés d'erreurs.

1.4. FRAGILITÉ DE LA SOLUTION

Malgré le fait qu'il soit exact et résolvable, le système (1.4) souffre d'une plus grande dépendance des premières composantes des vecteurs H et C par rapport aux dernières. Il est fragile face à toute erreur qui pourrait affecter nos données initiales. Une seule erreur sur un des deux termes H_0 et C_0 et tout le vecteur β se trouve erroné. Si l'on travaillait toujours avec des données exactes, le problème ne se poserait pas, mais il faut considérer la possibilité d'avoir un jeu de données entachées d'erreur. Les figures 3.5 à 3.12 (pages 53 et suivantes) permettent d'observer cette fragilité de la méthode directe : à chaque sous-figure (c) sont représentés la reconstitution du vecteur β avec la méthode directe (points) en comparaison avec la fonction originale (ligne pointillée) lorsque les données de départ H et C contiennent de légères erreurs.

Il faut donc maintenant se tourner vers d'autres méthodes qui :

- restent stables face aux erreurs possibles en distribuant le poids de chacun des termes de H et C de la manière la plus uniforme possible ;
- soient très près de la réponse obtenue par méthode directe lorsqu'il n'y a pas d'erreur sur les données.

Chapitre 2

DÉCONVOLUTION À L'AIDE DU PRINCIPE DES MOINDRES CARRÉS

2.1. L'ANALYSE DES SIGNAUX EN GÉOPHYSIQUE

En géophysique, l'analyse du sous-sol terrestre est un travail important ; il permet la reconnaissance des ressources naturelles (pétrole, gaz naturel, etc.). Une des techniques utilisées consiste à envoyer des signaux (magnétiques ou autres) dans le sol qui seront réfractés sur les différentes couches terrestres pour ensuite être recueillis et analysés [9, 7]. Voici un schéma très simple qui modélise ce procédé (voir Fig. 2.1) : un signal d'entrée x_t est dirigé dans le sol pour ensuite être retourné sous un signal de retour y_t . Ce signal y_t est le résultat du signal x_t soumis à divers délais suite aux multiples rebondissements sur les strates géologiques. Ceci peut-être assimilé à l'action d'un filtre f_t convolué avec x_t auquel s'ajoutent divers bruits pour donner y_t . Si on cherche des nappes de pétroles, on s'attend pour un signal x_t donné à obtenir un signal de retour d'un type désiré, disons z_t . On cherche un filtre f_t tel que $y_t = x_t * f_t$ soit le plus proche possible de z_t . Il faut cependant garder en tête qu'ici la convolution n'est pas tronquée et que, par conséquent, la déconvolution reste en général insoluble (voir Remarque 1.4). Une des techniques utilisées pour créer un filtre f est d'utiliser le principe des moindres carrés.

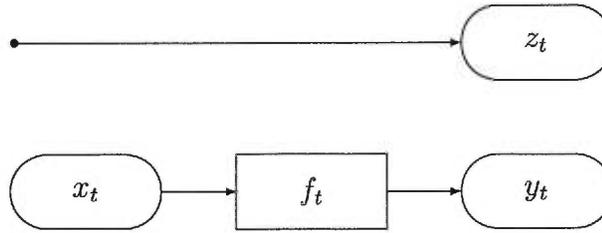


FIG. 2.1. Schéma des signaux en géophysique

Afin de simplifier les calculs, soient f de longueur finie $0 \rightarrow m$ et x de longueur finie $0 \rightarrow n$. Alors, y et z sont de longueur $0 \rightarrow m + n$. La construction du filtre s'appuie sur le critère des moindres carrés: minimisation de la différence entre le signal de sortie désiré z et celui obtenu y . Plus précisément, on cherche les coefficients de f tels que

$$J = \sum_{t=0}^{m+n} (z_t - y_t)^2$$

soit minimum. J peut être considérée comme une fonction d'erreur.

Pour appliquer le principe, il faut tout d'abord définir le vecteur en dehors de son intervalle. Un vecteur \vec{a} de longueur $0 \rightarrow m$ sera défini comme nul pour tous ses termes qui sont en dehors de l'intervalle. Plus précisément,

$$a_j = 0 \quad \text{pour } j \notin [0, m]. \quad (2.1)$$

Grâce à (2.1), y_t peut s'écrire comme étant

$$y_t = \sum_{\tau=0}^m f_{\tau} x_{t-\tau}$$

et donc

$$J = \sum_{t=0}^{m+n} \left(z_t - \sum_{\tau=0}^m f_{\tau} x_{t-\tau} \right)^2.$$

Cette quantité est minimisée en posant ses dérivées partielles par rapport à chaque coefficient f_τ nulles. La dérivée partielle de J par rapport à f_j ($j = 0, \dots, m$) est

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial f_j} &= \sum_{t=0}^{m+n} \left(2 \left(z_t - \sum_{\tau=0}^m f_\tau x_{t-\tau} \right) \frac{\partial}{\partial f_j} \left(z_t - \sum_{\tau=0}^m f_\tau x_{t-\tau} \right) \right) \\
&= 2 \sum_{t=0}^{m+n} \left(z_t - \sum_{\tau=0}^m f_\tau x_{t-\tau} \right) (-x_{t-j}) \\
&= 2 \sum_{t=0}^{m+n} \left(-z_t x_{t-j} + \sum_{\tau=0}^m f_\tau x_{t-\tau} x_{t-j} \right) \\
&= 2 \left(- \sum_{t=0}^{m+n} z_t x_{t-j} + \sum_{\tau=0}^m f_\tau \sum_{t=0}^{m+n} x_{t-\tau} x_{t-j} \right) \\
&= 2 \left(-\phi_{zx}(j) + \sum_{\tau=0}^m f_\tau \phi_{xx}(j-\tau) \right).
\end{aligned}$$

En posant cette dérivée partielle nulle, on obtient le système de $m+1$ équations :

$$\sum_{\tau=0}^m f_\tau \phi_{xx}(j-\tau) = \phi_{zx}(j) \quad \text{pour } j = 0, \dots, m. \quad (2.2)$$

Ce sont les *équations normales*. La solution d'un tel système est donnée par le filtre

$$f = \Phi_{XX}^{-1} \Phi_{ZX}$$

où $(\Phi_{XX})_{i,j} = \phi_{xx}(|i-j|)$ et $(\Phi_{ZX})_i = \phi_{zx}(i)$.

Deux nouvelles fonctions ont été introduites :

Définition 2.1. (i) La *fonction d'autocorrélation* d'un vecteur \vec{a} est la fonction ϕ_{aa} qui mesure l'appariement des termes du vecteur selon un décalage j , *i.e.*

$$\phi_{aa}(j) = \sum_i a_{i+j} a_i.$$

(ii) La *fonction de corrélation croisée* entre deux vecteurs distincts \vec{a} et \vec{b} est la fonction ϕ_{ab} qui mesure l'appariement des termes des vecteurs selon un

décalage j , *i.e.*

$$\phi_{ab}(j) = \sum_i a_{i+j} b_i.$$

Il est facile de voir que

$$\phi_{ab}(j) = \phi_{ba}(-j).$$

Si $a = b$, on peut réduire l'expression à

$$\phi_{aa}(j) = \phi_{aa}(-j).$$

Par conséquent, la fonction d'autocorrélation est une fonction paire.

Pour aider à la compréhension, une simple application du principe pour des vecteurs de longueur 2 est présentée. Soient $x = [x_0 \ x_1]$, $f = [f_0 \ f_1]$ et $z = [z_0 \ z_1 \ z_2]$ notre signal de sortie désiré qui lui est de longueur 3. Le signal de sortie actuel y est obtenu par la convolution de x avec f qui est

$$\begin{aligned} [y_0 \ y_1 \ y_2] &= [x_0 \ x_1] * [f_0 \ f_1] \\ &= [f_0 x_0 \ (f_0 x_1 + f_1 x_0) \ f_1 x_1]. \end{aligned}$$

En appliquant le principe des moindres carrés, le système (2.2) à deux équations :

$$\phi_{xx}(0)f_0 + \phi_{xx}(1)f_1 = \phi_{zx}(0);$$

$$\phi_{xx}(1)f_1 + \phi_{xx}(0)f_0 = \phi_{zx}(1);$$

s'écrit sous la forme

$$f_0(x_0^2 + x_1^2) + f_1(x_0 x_1) = z_0 x_0 + z_1 x_1;$$

$$f_0(x_0 x_1) + f_1(x_0^2 + x_1^2) = z_1 x_0 + z_2 x_1;$$

en évaluant les fonctions d'autocorrélation et de corrélation croisée.

Exemple 2.1. Comme exemple numérique, soient $x = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}$ et $z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Les équations normales sont

$$10f_0 + 3f_1 = 3;$$

$$3f_0 + 10f_1 = 0.$$

En les résolvant, on trouve un filtre

$$f = \begin{bmatrix} f_0 & f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{30}{91} & -\frac{9}{91} \end{bmatrix}.$$

Le signal de sortie actuel sera donc

$$y = \begin{bmatrix} y_0 & y_1 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{30}{91} & -\frac{9}{91} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{90}{91} & \frac{3}{91} & -\frac{9}{91} \end{bmatrix}$$

qui est assez proche du signal désiré $z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Pour pouvoir juger de l'efficacité du filtre obtenue par le principe des moindres carrés, il est essentiel de définir une fonction d'erreur

$$E = \sqrt{\frac{\sum_t (z_t - y_t)^2}{\sum_t z_t^2}}$$

($\sum_t z_t^2 = \phi_{zz}(0)$ ne sera jamais nulle sauf pour le cas trivial $z = \vec{0}$). On peut donc définir une fonction de performance

$$P = 1 - E.$$

Si l'exemple numérique précédent est repris, l'erreur de notre filtre est

$$E = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{90}{91}\right)^2 + \left(-\frac{3}{91}\right)^2 + \left(\frac{9}{91}\right)^2}{1}} = \sqrt{\frac{91}{8281}} \approx 0,105,$$

ce qui nous donne un taux de performance respectable $P = 0,895$.

2.2. APPLICATIONS AU SYSTÈME DE CONVOLUTIONS

Maintenant que le principe a été développé, il sera appliqué à l'équation (1.10) de deux manières distinctes qui apporteront des résultats et des taux de performance très différents.

Comme le principal intérêt est la fidélité de la méthode par rapport à la solution directe (1.4), des taux d'erreur

$$E_\beta = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^n (\beta_i - \beta'_i)^2}{\sum_{i=0}^n (\beta_i)^2}}$$

et de performance

$$P_\beta = 1 - E_\beta$$

seront calculés afin de comparer la fonction β obtenue par la méthode directe (1.4) et la fonction β' obtenue par les différentes méthodes.

2.2.1. Directement sur l'équation $C * \vec{1} = H * \beta$

La technique la plus intuitive consiste à appliquer directement le principe de moindres carrés au système $D \equiv C * \vec{1} = H * \beta$ qui est sur-déterminé. D'où les équations normales suivantes sont obtenues :

$$\sum_{i=0}^n \phi_{HH}(j-i) \beta'_i = \phi_{DH}(j) \quad \text{pour } j = 0, \dots, n. \quad (2.3)$$

Les résultats obtenus ne sont malheureusement pas stables : leur taux d'erreur peut varier grandement d'un vecteur à un autre comme on peut le voir avec l'exemple suivant.

Exemple 2.2. Soient $H = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. En résolvant le problème avec la méthode directe, on obtient que

$$\beta = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{5}{9} & \frac{19}{27} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,\overline{3} & 0,\overline{5} & 0,\overline{703} \end{bmatrix}.$$

Or, un filtrage par moindres carrés permet d'obtenir un

$$\beta' = \begin{bmatrix} \frac{7991}{21035} & \frac{317}{601} & \frac{12799}{21035} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0,3799 & 0,5275 & 0,6085 \end{bmatrix}.$$

Reconvolué avec H , ce β' permet d'obtenir un taux de performance $P_\beta = 0,8855$. Mais, seulement en redéfinissant $H = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}$ et en laissant C identique, le taux de performance P_β tombe à 0,5556. Cette chute sera expliquée dans la section ci-dessous ; elle provient du fait que les vecteurs H et C demeurent croissants, mais que le nouveau vecteur recherché $\beta = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,125 \end{bmatrix}$ est devenu décroissant.

2.2.2. En utilisant la monotonicité des fonctions

En géophysique, un problème intéressant est celui de trouver un filtre qui permettra d'obtenir comme signal de retour un signal constitué d'un pic, *i.e.* un vecteur z tel qu'un des termes soit égal à une constante réelle positive et que tous les autres soient nuls (voir Fig. 2.2). Robinson et Treitel [9] expliquent

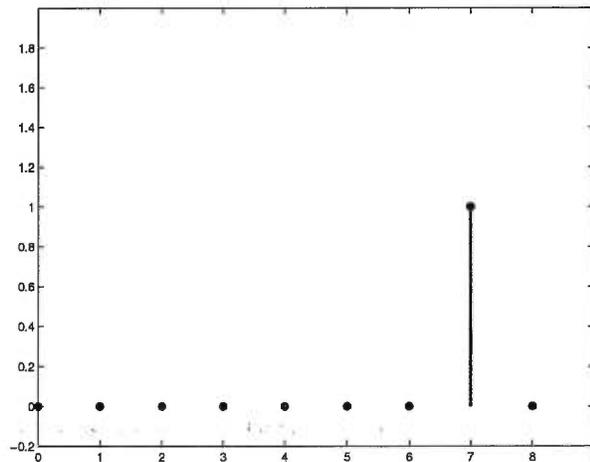


FIG. 2.2. Signal constitué d'un pic

que, selon que x soit un vecteur croissant, décroissant ou mixte (croissant et/ou décroissant selon la partition choisie), la position du pic à l'intérieur du vecteur

z joue un rôle déterminant dans la performance du filtre f obtenue par moindres carrés. Un autre facteur important est la longueur du filtre. Sans refaire aucune démonstration, voici les conclusions obtenues :

- si le vecteur x est décroissant, alors plus le pic est placé au début du vecteur désiré z , meilleure est la performance ;
- si le vecteur x est croissant, alors plus le pic est placé à la fin du vecteur désiré z , meilleure est la performance ;
- si le vecteur x est mixte, alors il faut procéder par tâtonnements pour trouver l'endroit optimal pour le pic à l'intérieur du vecteur z ;
- la longueur du filtre f joue toujours le même rôle : plus la longueur du vecteur f est grande, meilleure est la performance.

Sachant que la fonction H est croissante, on peut utiliser ce concept en trouvant par moindres carrés un filtre inverse $f : 0 \rightarrow m$ tel que

$$H * f = \delta_{m+n} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En reconvoluant de chaque côté le système de base avec le filtre inverse f , *i.e.*

$$f * H * \beta = f * C * \vec{1}.$$

À l'aide de la transformée en z , on vérifie que

$$\begin{aligned} \beta_0 &= f_{m-n}C_n + f_{m-n+1}(C_{n-1} + C_n) + \dots + f_m(C_0 + \dots + C_n); \\ \beta_1 &= f_{m-n+1}C_n + f_{m-n+2}(C_{n-1} + C_n) + \dots + f_m(C_1 + \dots + C_n); \\ &\vdots \\ \beta_n &= f_m C_n; \end{aligned}$$

sans oublier de tenir compte du critère (2.1).

Malheureusement, la méthode envisagée ci-haut utilise le prolongement $n \rightarrow 2n$ de $H * \beta = C * \vec{1}$ qui est inconnu expérimentalement dans le problème épidémiologique, car seule la forme tronquée $\widetilde{H * \beta}^n = \widetilde{C * \vec{1}}^n$ est donnée. Pour éviter cet embarras, on doit travailler avec un vecteur décroissant.

Toujours avec H croissant et non négatif, on choisit une constante arbitraire $k \geq H_n$ et on définit un vecteur

$$K = k\vec{1} - H \quad (2.4)$$

de longueur $0 \rightarrow n$. Il est clair que

$$K_0 = k - H_0 \geq K_1 = k - H_1 \geq \dots \geq K_n = k - H_n \geq 0,$$

d'où K est un vecteur décroissant non négatif.

$$\begin{aligned} K * \beta &= k\vec{1} * \beta - H * \beta \\ &= k\vec{1} * \beta - C * \vec{1} \end{aligned} \quad (2.5)$$

est un vecteur de longueur $0 \rightarrow 2n$. Vu que K est décroissante et non négative, on peut l'inverser par moindres carrés avec un filtre $f : 0 \rightarrow m$ tel que

$$f * K = \delta_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

En convoluant chaque côté de l'équation (2.5) avec f , on obtient

$$f * K * \beta = kf * \vec{1} * \beta - f * C * \vec{1}.$$

Par la transformée en z , on vérifie que seule la partie $0 \rightarrow n$ du système $H * \beta = C * \vec{1}$ intervient et on peut écrire avec $\widetilde{H * \beta}^n = \widetilde{C * \vec{1}}^n$ que β est la troncation en n de

$$kf * \vec{1} * \beta - f * C * \vec{1}. \quad (2.6)$$

Pour trois différentes valeurs de la constante $k = 234, 351, 468$ et deux différentes longueurs $l = 10, 20$, le filtre inverse f a été trouvé par moindres carrés pour ensuite déterminer le vecteur β' à l'aide du système-solution (2.7).

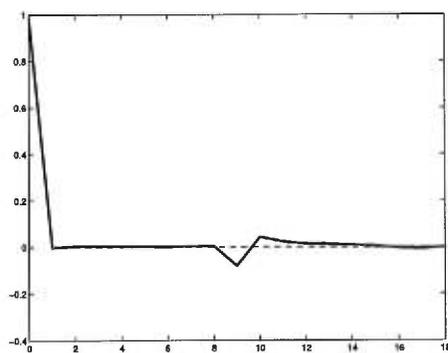
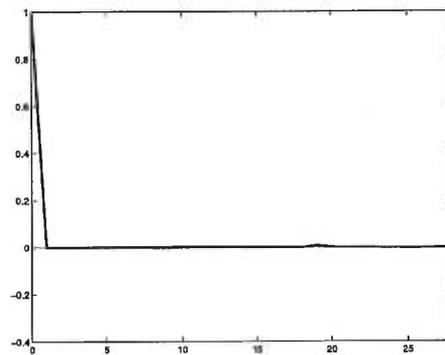
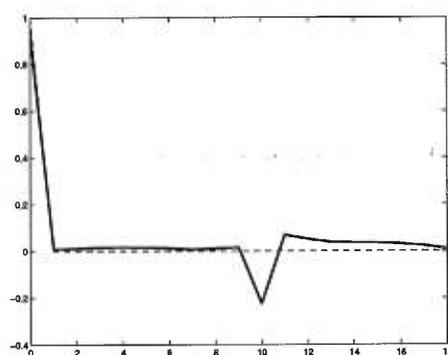
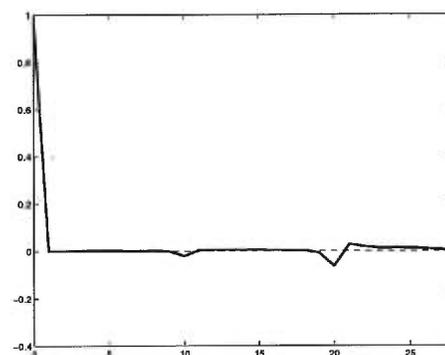
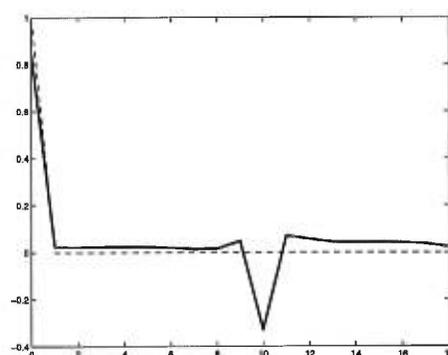
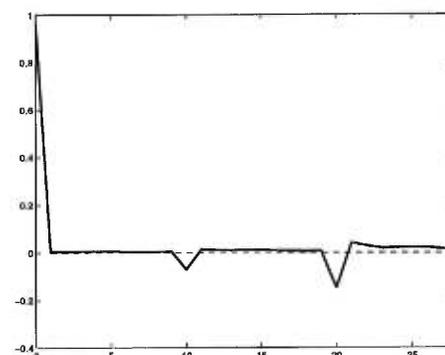
Dans la figure 2.3 (page 32), on a représenté pour chacun des six cas la convolution $f * K$ (ligne pleine) en comparaison avec la fonction δ_0 recherchée (ligne pointillée). Deux constatations sont apparentes :

- i. plus le filtre est long, meilleure est la performance ;
- ii. plus k est proche de H_n , meilleure est la performance.

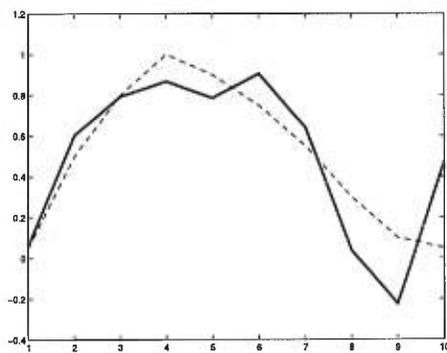
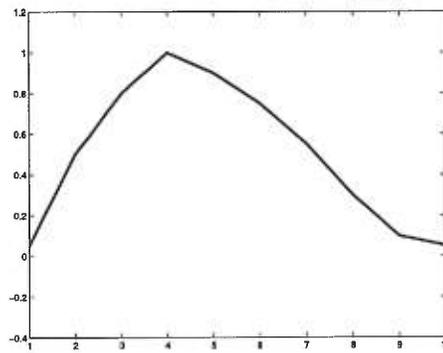
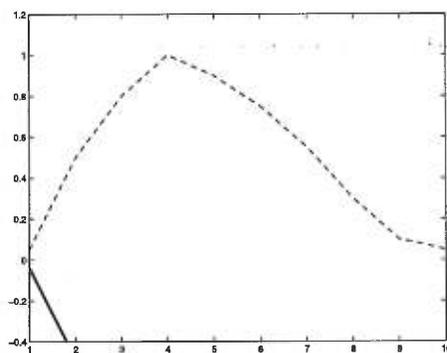
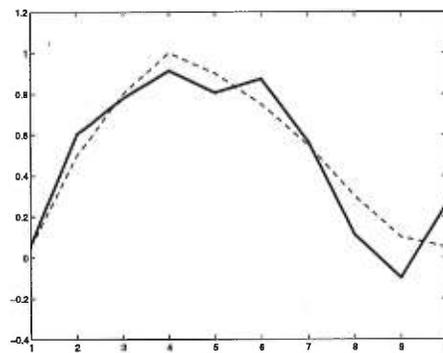
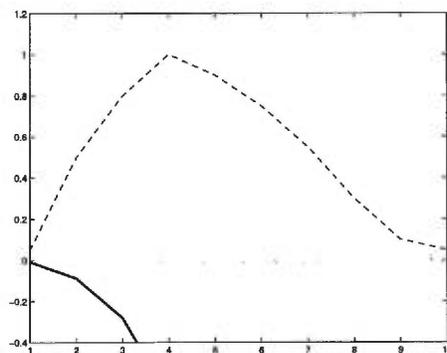
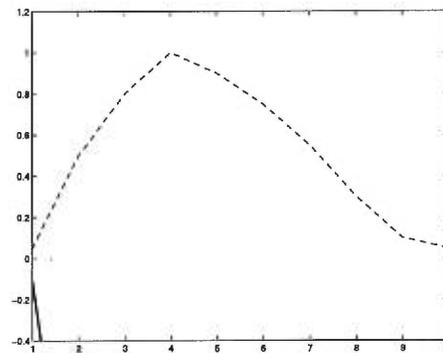
La dernière constatation n'est pas singulière à cet exemple. En effet, plus k est supérieur à H_n et plus les termes K_n formant le vecteur K sont élevés. En se rappelant que le principe des moindres carrés accorde le même poids à tous les termes de K (contrairement à la méthode directe), plus les termes à l'extrême droite de K sont élevés, plus le résultat risque d'être loin du résultat recherché. Il est ainsi préférable d'avoir la constante k la plus proche possible de H_n .

Cette méthode (2.7) qui consiste à trouver un filtre intermédiaire f par le principe des moindres carrés peut en principe inverser approximativement la convolution $\overbrace{H * \beta}^n = \overbrace{C * \vec{1}}^n$. Son intérêt provient du fait qu'elle possède deux paramètres (la longueur du vecteur l et la constante k) qui servent à comparer les résultats obtenus à divers niveau d'approximation du filtre f . Par ailleurs, il n'existe pas de critère pouvant déterminer les paramètres k et l à utiliser, on doit procéder par des tests empiriques pour s'assurer de la qualité de la reconstitution.

Dans la figure 2.4 (page 34), on a représenté pour chacun des six cas la reconstitution β' (ligne pleine) en comparaison avec la fonction β recherchée (ligne pointillée). Ici, un fait nouveau vient s'ajouter à ceux indiqués ci-haut : on remarque souvent (voir Sous-figures (c), (e) et (f)) que le vecteur β' diverge rapidement vers $-\infty$. Ceci est dû à l'inversion de la matrice de Toeplitz triangulaire

(a) $k = 234, l = 10$ (b) $k = 234, l = 20$ (c) $k = 351, l = 10$ (d) $k = 351, l = 20$ (e) $k = 468, l = 10$ (f) $k = 468, l = 20$ FIG. 2.3. Exemples d'approximation de δ_0 par moindres carrés

inférieure constituant β' (voir (2.7)) qui devient numériquement instable lorsque les termes sur la diagonale $1 - kf_0$ sont près de zéro. Vu que les f_0 sont établis par la méthode des moindres carrés, ces zéros des éléments diagonaux sont imprévisibles. Considérant le manque de stabilité dans les calculs numériques, ce système-solution (2.7) ne se révèle pas utile pour travailler avec des données polluées.

(a) $k = 234, l = 10$ (b) $k = 234, l = 20$ (c) $k = 351, l = 10$ (d) $k = 351, l = 20$ (e) $k = 468, l = 10$ (f) $k = 468, l = 20$ FIG. 2.4. Exemples d'approximation de β par moindres carrés

Chapitre 3

RÉGULARISATION À L'AIDE DE LA RÉGRESSION NON PARAMÉTRIQUE

On a vu que la méthode précédente (2.7) est, en pratique, inutilisable avec des données entachées d'erreurs importantes. Il serait donc intéressant de se diriger vers une autre méthode. Si les mathématiques appliquées semblent épuisées, il existe un domaine qui, pour l'instant, est demeuré inexploré : la statistique. La mise en oeuvre d'un modèle de régression non paramétrique permettra d'estimer plus efficacement la fonction β .

3.1. PÉNALITÉ SUR LA RUDESSE DE LA COURBE

L'idée de départ qu'ont eue Robert C. Brunet et Claudio J. Struchiner [1] de travailler avec des fonctions continues, quoique intuitive, revient en tête lorsqu'on travaille avec des données polluées à cause des avantages suivants :

- elles permettent de déterminer la fonction β pour n'importe quelle dimension du temps (semaine, mois, année, etc.). On ne se limite donc plus à des intervalles égaux entre chaque donnée ;
- avec ou sans l'aide d'un graphe, on perçoit plus rapidement les caractéristiques de la fonction (croissance, minima, maxima, etc.).

Il serait plus conforme à l'intuition de supposer des fonctions continues sous-jacentes. Il s'agirait donc de reconstituer une fonction continue β à partir des

données discrètes H_i et C_i , $i = 0, \dots, n$, qui sont polluées par du bruit. La statistique a développé plusieurs techniques et modèles de reconstitution de fonctions, un de ces modèles va s'avérer profitable: un modèle de régression non paramétrique appliqué à des fonctionnelles [5, 8, 12].

Soit un jeu de données (t_i, Y_i) , $i = 0, \dots, n$. Sans entrer dans les détails, la *régression* est une technique utilisée en statistique qui consiste principalement à appliquer le modèle

$$Y = f(t) + \text{erreur} \quad (3.1)$$

au jeu de données observées [6]. L'approche classique est d'utiliser comme fonction f un polynôme et d'estimer ses coefficients par moindres carrés. On considère plutôt une approche qui ne suppose pas *a priori* de forme particulière pour la fonction et qui pose une pénalité sur la rudesse de la courbe. Cette approche est bien résumée dans Green et Silverman [6] et Wahba [12].

Définition 3.1. Soit f une courbe définie sur un intervalle $[a, b]$. La *rudesse* de la courbe f est le degré de fluctuation qui la constitue. Plus la courbe est rude, plus les fluctuations sont nombreuses et grandes (elle s'apparente à des « dents de scie »); à l'opposé, plus la courbe est lisse, plus les fluctuations paraissent inexistantes (voir Fig. 3.1).

Pour mesurer la rudesse, on considère l'intégrale de la seconde dérivée au carré

$$\int_a^b (f'')^2 dt. \quad (3.2)$$

Les motivations qui poussent à utiliser cette mesure plutôt qu'une autre vont être dévoilées plus loin avec le théorème 3.1. Il suffit de trouver un f qui minimise

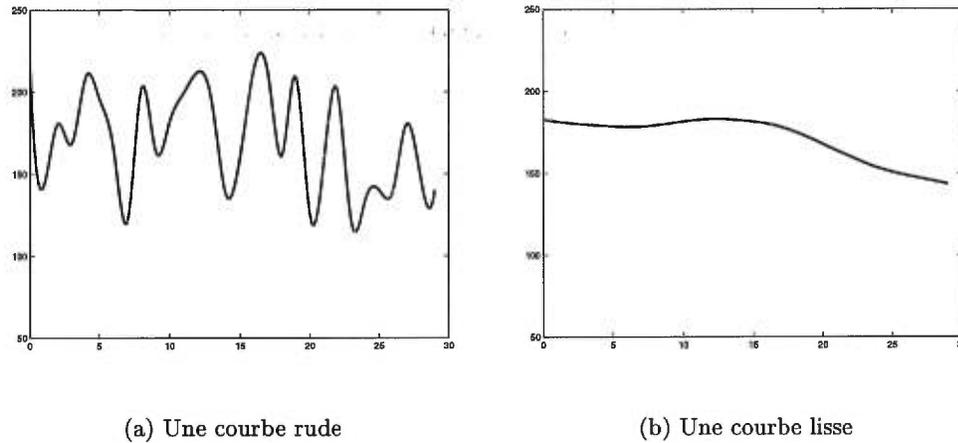


FIG. 3.1. La rudesse d'une courbe

l'équation

$$S(f) = \sum_{i=0}^n (Y_i - f(t_i))^2 + \lambda \int_a^b (f'')^2 dt. \quad (3.3)$$

Le paramètre $\lambda > 0$ est la pénalité qui permet de varier l'importance accordée à la rudesse de la fonction f . Pour mieux visualiser le rôle du paramètre λ , il suffit de considérer les cas extrêmes : lorsque λ tend vers l'infini, on force la fonction à être tellement lisse qu'elle devient linéaire ; à l'opposé, lorsque λ tend vers zéro, la rudesse n'a plus d'importance et la fonction f qui minimise l'équation sera celle qui relie exactement tous les points Y_i . On peut observer la figure 3.2 qui représente un exemple de données obtenues synthétiquement avec la courbe qui minimise $S(f)$ pour différentes valeurs de λ . $S(f)$ représente le meilleur compromis entre le lissage et la représentation des points Y_i pour la fonction f .

Maintenant, avant d'aller de l'avant avec l'application de la méthode aux données observées, il est intéressant de connaître la nature de la fonction f qui minimise $S(f)$.

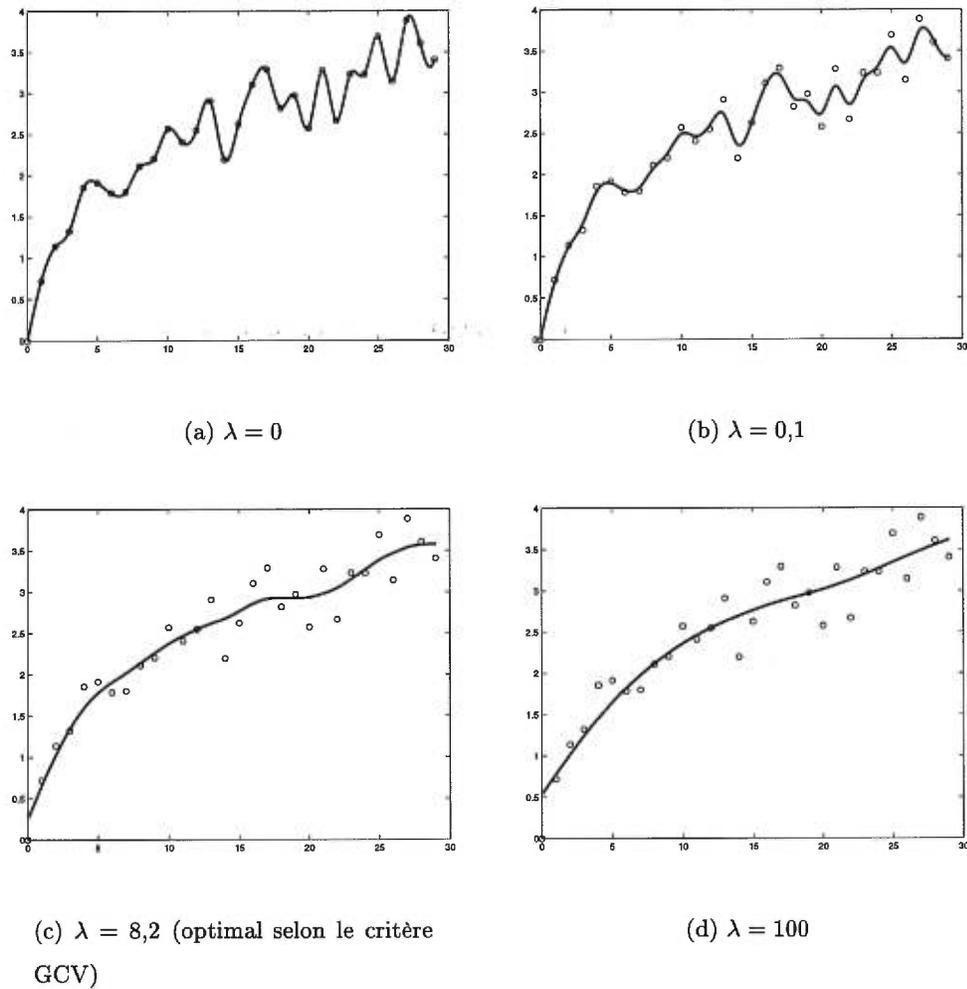


FIG. 3.2. Données synthétiques avec la courbe qui minimise $S(f)$ pour différentes valeurs de λ

Définition 3.2. Soient $a < t_0 < t_1 < \dots < t_n < b$. Une fonction f définie sur l'intervalle $[a, b]$ est appelée *spline cubique* si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- i. sur chaque intervalle $(a, t_0), (t_0, t_1), \dots, (t_n, b)$, f est un polynôme d'ordre 3 ;

- ii. les polynômes sont définis de telle sorte qu'à chaque point t_i , f , sa première et sa seconde dérivées sont continues.

Une spline cubique définie sur l'intervalle $[a, b]$ est appelée *spline cubique naturelle* si ses seconde et troisième dérivées sont nulles aux bornes a et b . Ce qui implique la linéarité de f sur ses deux intervalles situées aux extrêmes, *i.e.* $[a, t_0]$ et $[t_n, b]$.

Soit $\mathcal{S}_2[a, b]$ l'espace des fonctions différentiables sur l'intervalle $[a, b]$ et qui ont une première dérivée absolument continue; ce qui signifie qu'une fonction f appartenant à $\mathcal{S}_2[a, b]$ est continue et différentiable partout sur l'intervalle $[a, b]$ avec une dérivée f' et qu'il existe une fonction intégrable f'' tel que $\int_a^x f''(t) dt = f'(x) - f'(a)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[a, b]$. Toute fonction doublement continuellement différentiable et, par conséquent, toute spline cubique, fait partie de cet espace. Le prochain théorème est important. Il montre que la spline cubique naturelle est l'unique fonction minimisant le mieux $\int (f'')^2$ pour toutes les fonctions appartenant à $\mathcal{S}_2[a, b]$ [6]. Les motivations qui poussent à choisir (3.2) comme mesure de la rudesse apparaissent maintenant comme évidentes.

Théorème 3.1. *Soient $n \geq 1$ et f la spline cubique naturelle prenant les valeurs Y_0, \dots, Y_n aux points t_0, \dots, t_n satisfaisant $a < t_0 < \dots < t_n < b$. Soit g n'importe quelle fonction de $\mathcal{S}_2[a, b]$ tel que $g(t_i) = Y_i$ pour $i = 0, \dots, n$. Alors $\int (g'')^2 \geq \int (f'')^2$ et on a l'égalité seulement lorsque les deux fonctions sont identiques.*

DÉMONSTRATION. Soit h la fonction appartenant à $\mathcal{S}_2[a, b]$ définie de telle sorte que $h = g - f$. Donc $h(t_i) = 0$ pour $i = 0, \dots, n$. Puisque f est une spline cubique

naturelle, par intégration par partie on obtient que

$$\begin{aligned}
\int_a^b f''(t)h''(t) dt &= - \int_a^b f'''(t)h'(t) dt \\
&= - \sum_{j=0}^{n-1} f'''(t_j^+) \int_{t_j}^{t_{j+1}} h'(t) dt \\
&= - \sum_{j=0}^{n-1} f'''(t_j^+) (h(t_{j+1}) - h(t_j)) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Cela implique, en substituant (3.4), que

$$\begin{aligned}
\int_a^b (g''(t))^2 dt &= \int_a^b (f''(t) + h''(t))^2 dt \\
&= \int_a^b (f''(t))^2 dt + 2 \int_a^b f''(t)h''(t) dt + \int_a^b (h''(t))^2 dt \\
&= \int_a^b (f''(t))^2 dt + \int_a^b (h''(t))^2 dt \\
&\geq \int_a^b (f''(t))^2 dt.
\end{aligned}$$

L'égalité est obtenue seulement si $\int_a^b (h''(t))^2 dt = 0$, *i.e.* lorsque h est linéaire sur $[a, b]$. Mais puisque h est nulle aux points t_0, \dots, t_n , et $n \geq 1$, h est linéaire seulement si elle est nulle partout sur $[a, b]$, *i.e.* si $g = f$. \square

Il est donc parfaitement justifié d'estimer f dans (3.1) avec une spline cubique naturelle \hat{f} comme le démontre le corollaire suivant :

Corollaire 3.1. *Soit $\lambda > 0$. La courbe f qui minimise le mieux $S(f)$ parmi toutes les courbes appartenant à $\mathcal{S}_2[a, b]$ est la spline cubique naturelle.*

DÉMONSTRATION. On suppose le contraire: f n'est pas une spline cubique naturelle. Il est toutefois possible de construire la spline cubique naturelle \hat{f} telle

que $\hat{f}(t_i) = f(t_i)$ pour $i = 0 \dots, n$. Donc

$$\sum_{i=0}^n (Y_i - \hat{f}(t_i))^2 = \sum_{i=0}^n (Y_i - f(t_i))^2.$$

Par le théorème 3.1,

$$\int_a^b (\hat{f}'')^2 dt < \int_a^b (f'')^2 dt$$

et puisque $\lambda > 0$, il est clair que

$$S(\hat{f}) < S(f).$$

On a démontré que si f n'est pas une spline cubique naturelle, il est néanmoins possible de trouver une spline cubique naturelle \hat{f} qui permet d'obtenir une plus petite valeur pour (3.3). La spline cubique naturelle est, par cela, la courbe qui minimise le mieux $S(f)$. \square

On peut maintenant regarder comment appliquer cette méthode aux équations (1.8) et (1.9) lorsqu'elles sont polluées par du bruit.

3.2. APPLICATION AU SYSTÈME DE CONVOLUTIONS

Lorsque les données de départ (t_i, H_i) et (t_i, C_i) , $i = 0, \dots, n$, sont polluées, on ne peut pas les écrire sous la forme (3.1) puisque ce sont des convolutions avec la même fonction g . On peut toutefois les écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= g * \vec{1} + \epsilon_H; \\ \tilde{C} &= g * \beta + \epsilon_C; \end{aligned} \tag{3.5}$$

avec des erreurs ϵ_H et ϵ_C . Ce système est nécessairement unique et peut être réécrit sous cette forme :

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= l_{\vec{1}}(g) + \epsilon_H; \\ \tilde{C} &= l_g(\beta) + \epsilon_C; \end{aligned} \tag{3.6}$$

où $l_{\vec{1}}$ et l_g sont des fonctionnelles. Chacune des deux équations qui constituent le système (3.6) est un cas particulier du modèle de régression non paramétrique développé par Engle, Granger, Rice et Weiss [4] pour étudier la relation existant entre la météo et les ventes d'électricité aux États-Unis.

Si on reprend leur modèle et on l'applique aux deux équations (3.6), on obtient deux fonctions à minimiser :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^n \left(\tilde{H}_i - (\hat{g} * \vec{1})_i \right)^2 + \lambda_1 \int_0^n (\hat{g}'')^2 dt ; \\ & \sum_{i=0}^n \left(\tilde{C}_i - (\hat{\beta} * \hat{g})_i \right)^2 + \lambda_2 \int_0^n (\hat{\beta}'')^2 dt ; \end{aligned}$$

où $\hat{\beta}$ et \hat{g} sont les estimations des fonctions β et g sous-jacentes. Toutefois, puisque seul $\hat{\beta}$ est intéressant, il ne semble pas nécessaire de passer par l'étape intermédiaire de la fonction \hat{g} ; on peut plutôt envisager de trouver une fonction \hat{H} qui minimise la fonction

$$\sum_{i=0}^n \left(\tilde{H}_i - \hat{H}_i \right)^2 + \lambda_1 \int_0^n (\hat{H}'')^2 dt \quad (3.7)$$

pour ensuite trouver la fonction $\hat{\beta}$ qui minimise

$$\sum_{i=0}^n \left((\tilde{C} * \vec{1})_i - (\hat{\beta} * \hat{H})_i \right)^2 + \lambda_2 \int_0^n (\hat{\beta}'')^2 dt. \quad (3.8)$$

Les fonctions H et C sont accessibles à intervalles discrets en $t_0 \rightarrow t_n$, il convient donc de travailler avec l'algèbre linéaire. On peut réécrire l'équation (1.8) additionnée de bruit sous forme matricielle

$$\tilde{H} = H + \epsilon_H \quad (3.9)$$

Il suffit de prendre ce nouveau \hat{H} et de le remplacer dans l'équation (1.10) additionnée de bruit. On obtient alors le système matriciel

$$\mathbf{X}\tilde{C} = \hat{\mathbf{H}}\beta \quad (3.12)$$

où \tilde{C} et β sont des vecteurs définis verticalement, \mathbf{X} est la matrice de Toeplitz triangulaire inférieure constituée d'éléments unité et $\hat{\mathbf{H}}$ est la matrice de Toeplitz triangulaire inférieure constituée avec le vecteur \hat{H} . En s'appuyant sur le raisonnement établi pour trouver (3.11) [6], il est facile de trouver une solution $\hat{\beta}$ qui minimise l'équation (3.8), car

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^n \left((\mathbf{X}\tilde{C})_i - (\hat{\mathbf{H}}\hat{\beta})_i \right)^2 + \lambda_2 \sum_{i=0}^n \left((\mathbf{U}\hat{\beta})_i \right)^2 \\ &= (\mathbf{X}\tilde{C} - \hat{\mathbf{H}}\hat{\beta})^T (\mathbf{X}\tilde{C} - \hat{\mathbf{H}}\hat{\beta}) + \lambda_2 (\mathbf{U}\hat{\beta})^T (\mathbf{U}\hat{\beta}) \\ &= \tilde{C}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \tilde{C} - \tilde{C}^T \mathbf{X}^T \hat{\mathbf{H}} \hat{\beta} - \hat{\beta}^T \hat{\mathbf{H}}^T \mathbf{X} \tilde{C} + \hat{\beta}^T \hat{\mathbf{H}}^T \hat{\mathbf{H}} \hat{\beta} + \lambda_2 \hat{\beta}^T \mathbf{U}^T \mathbf{U} \hat{\beta} \\ &= \tilde{C}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \tilde{C} - 2\tilde{C}^T \mathbf{X}^T \hat{\mathbf{H}} \hat{\beta} + \hat{\beta}^T \hat{\mathbf{H}}^T \hat{\mathbf{H}} \hat{\beta} + \lambda_2 \hat{\beta}^T \mathbf{U}^T \mathbf{U} \hat{\beta} \\ &= \hat{\beta}^T (\hat{\mathbf{H}}^T \hat{\mathbf{H}} + \lambda_2 \mathbf{U}^T \mathbf{U}) \hat{\beta} - 2\tilde{C}^T \mathbf{X}^T \hat{\mathbf{H}} \hat{\beta} + \tilde{C}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \tilde{C} \\ &= (\hat{\beta} - (\hat{\mathbf{H}}^T \hat{\mathbf{H}} + \lambda_2 \mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1} \hat{\mathbf{H}}^T \mathbf{X} \tilde{C})^T (\hat{\mathbf{H}}^T \hat{\mathbf{H}} + \lambda_2 \mathbf{U}^T \mathbf{U}) \\ &\quad \times (\hat{\beta} - (\hat{\mathbf{H}}^T \hat{\mathbf{H}} + \lambda_2 \mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1} \hat{\mathbf{H}}^T \mathbf{X} \tilde{C}) \\ &\quad + (\tilde{C}^T \mathbf{X}^T - ((\hat{\mathbf{H}}^T \hat{\mathbf{H}} + \lambda_2 \mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1} \hat{\mathbf{H}}^T \mathbf{X} \tilde{C})^T \hat{\mathbf{H}}^T) \mathbf{X} \tilde{C}. \end{aligned}$$

Parce que le dernier terme $(\tilde{C}^T \mathbf{X}^T - ((\hat{\mathbf{H}}^T \hat{\mathbf{H}} + \lambda_2 \mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1} \hat{\mathbf{H}}^T \mathbf{X} \tilde{C})^T \hat{\mathbf{H}}^T) \mathbf{X} \tilde{C}$ ne dépend que de $\mathbf{X}\tilde{C}$ (et non de $\hat{\beta}$) et que $(\hat{\mathbf{H}}^T \hat{\mathbf{H}} + \lambda_2 \mathbf{U}^T \mathbf{U})$ est toujours strictement positif, alors l'équation (3.8) est minimalisée par

$$\hat{\beta} = (\hat{\mathbf{H}}^T \hat{\mathbf{H}} + \lambda_2 \mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1} \hat{\mathbf{H}}^T \mathbf{X} \tilde{C}. \quad (3.13)$$

On a donc trouvé un $\hat{\beta}$ qui dépend des deux paramètres λ_1 et λ_2 . Il serait maintenant pertinent de définir un critère permettant de les déterminer.

3.2.1. Critères pour λ_1 et λ_2

Il n'existe pas de critère définissant le paramètre parfait qui permettrait d'obtenir l'estimation optimale. Toutefois, il existe une quantité de critères et d'approches qui permettent de minimiser (plus ou moins parfaitement selon les cas) les équations (3.7) et (3.8) [4, 6, 8, 12]. Comme Engle *et al.* [4] et Wahba [12] le suggèrent, la fonction de validation croisée généralisée (GCV) sera utilisée.

La fonction de validation croisée généralisée est, comme son nom l'indique, inspirée par la *fonction de validation croisée* (CV) fondée sur une idée très simple et intuitive: on enlève un point du jeu de données, on estime le modèle et on compare la valeur prédite par le modèle pour le point enlevé avec la donnée. On répète l'opération pour tous les points du jeu de données et on choisit le paramètre qui minimise le mieux la somme des différences au carré entre valeurs prédites et données. Ainsi avec le jeu de données (t_i, Y_i) , $i = 0 \dots, n$, on commence par retirer Y_i du jeu de données. Pour un λ donné, $\hat{f}^{(-i)}(t_i; \lambda)$ est estimé et la différence $(\hat{f}^{(-i)}(t_i; \lambda) - Y_i)^2$ est formée. On répète l'opération pour tous les i et on obtient la fonction

$$\text{CV}(\lambda) = \sum_{i=0}^n (\hat{f}^{(-i)}(t_i; \lambda) - Y_i)^2. \quad (3.14)$$

λ est choisi de façon à minimiser cette quantité.

Si l'idée est simple, les calculs pour trouver le λ qui minimise semblent, à première vue, longs et laborieux. Mais, heureusement, il existe une technique simple pour construire la fonction CV [6, 12].

Soit la matrice

$$\mathbf{A}(\lambda) = (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1}$$

telle que

$$\vec{f} = \mathbf{A}(\lambda)Y,$$

$\vec{f} = (f_0, \dots, f_n)$ étant le vecteur défini de telle sorte que

$$f_i = \hat{f}(t_i; \lambda).$$

Alors le théorème suivant présente une manière économique de calculer la fonction CV.

Théorème 3.2. *La fonction de validation croisée satisfait*

$$CV(\lambda) = \sum_{i=0}^n \left(\frac{Y_i - \hat{f}(t_i)}{1 - \mathbf{A}_{ii}(\lambda)} \right)^2 \quad (3.15)$$

où \hat{f} est la fonction spline calculée à partir du jeu de données (t_i, Y_i) , $i = 0, \dots, n$, avec le paramètre λ .

Pour démontrer le théorème, le lemme suivant est nécessaire.

Lemme 3.1. *Pour un λ et un i donnés, soient $\vec{f}^{(-i)}$ le vecteur dont les composantes sont les termes*

$$f_j^{(-i)} = \hat{f}^{(-i)}(t_j; \lambda)$$

et Y^* le vecteur défini par

$$Y_j^* = \begin{cases} Y_j & \text{si } j \neq i; \\ \hat{f}^{(-i)}(t_i) & \text{si } j = i. \end{cases}$$

Alors

$$\vec{f}^{(-i)} = \mathbf{A}(\lambda)Y^*.$$

DÉMONSTRATION. Soit f une courbe lisse quelconque. Alors

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^n (Y_j^* - f(t_j))^2 + \lambda \int_a^b (f'')^2 dt &\geq \sum_{j \neq i} (Y_j^* - f(t_j))^2 + \lambda \int_a^b (f'')^2 dt \\
 &\geq \sum_{j \neq i} (Y_j^* - \hat{f}^{(-i)}(t_j))^2 + \lambda \int_a^b ((\hat{f}^{(-i)})'')^2 dt \\
 &= \sum_{j=0}^n (Y_j^* - \hat{f}^{(-i)}(t_j))^2 + \lambda \int_a^b ((\hat{f}^{(-i)})'')^2 dt.
 \end{aligned}$$

Ainsi, puisque $\hat{f}^{(-i)}$ est la fonction qui minimise le mieux $\sum_{j=0}^n (Y_j^* - f(t_j))^2 + \lambda \int_a^b (f'')^2 dt$, on a que $\hat{f}^{(-i)} = \mathbf{A}(\lambda)Y^*$. \square

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.2. Il est maintenant possible d'écrire

$$\begin{aligned}
 \hat{f}^{(-i)}(t_i) - Y_i &= \sum_{j=0}^n \mathbf{A}_{ij}(\lambda)Y_j^* - Y_i \\
 &= \sum_{j \neq i} \mathbf{A}_{ij}(\lambda)Y_j + \mathbf{A}_{ii}(\lambda)\hat{f}^{(-i)}(t_i) - Y_i \\
 &= \sum_{j=0}^n \mathbf{A}_{ij}(\lambda)Y_j - Y_i + \mathbf{A}_{ii}(\lambda)(\hat{f}^{(-i)}(t_i) - Y_i) \\
 &= \hat{f}(t_i) - Y_i + \mathbf{A}_{ii}(\lambda)(\hat{f}^{(-i)}(t_i) - Y_i)
 \end{aligned}$$

d'où

$$Y_i - \hat{f}^{(-i)}(t_i) = \frac{Y_i - \hat{f}(t_i)}{1 - \mathbf{A}_{ii}(\lambda)}.$$

Il suffit de sommer sur tous les i pour obtenir le résultat recherché :

$$\sum_{i=0}^n \left(Y_i - \hat{f}^{(-i)}(t_i) \right)^2 = \sum_{i=0}^n \left(\frac{Y_i - \hat{f}(t_i)}{1 - \mathbf{A}_{ii}(\lambda)} \right)^2.$$

\square

La fonction CV représentée par (3.15) permet de définir la *fonction de validation croisée généralisée*

$$\text{GCV} = \frac{\sum_{i=0}^n (Y_i - \hat{f}(t_i))^2}{(1 - n^{-1} \text{tr } \mathbf{A}(\lambda))^2} \quad (3.16)$$

où le poids des $(Y_i - \hat{f}^{(-i)}(t_i))^2$ dans (3.15) est ajusté par le facteur

$$\frac{(1 - \mathbf{A}_{ii}(\lambda))^2}{(1 - n^{-1} \text{tr } \mathbf{A}(\lambda))^2}$$

(même si la formule finale donne à penser le contraire). La fonction GCV remplace pour chaque $i = 0, \dots, n$ le dénominateur $1 - \mathbf{A}_{ii}(\lambda)$ de la fonction CV par sa valeur moyenne (tr représente la trace de la matrice \mathbf{A}).

Wahba [12] suggère d'utiliser la fonction GCV plutôt que CV lorsqu'on travaille, comme ici, avec des fonctionnelles. Elle explique que, dans certains cas, le paramètre λ estimé par la fonction GCV reste invariant, contrairement à celui estimé par la fonction CV. Suivant sa recommandation, le critère GCV sera celui utilisé.

Après avoir défini de manière conforme le critère qui sera utilisé, il suffit maintenant de l'adapter aux solutions (3.11) et (3.13) pour trouver les paramètres λ_1 et λ_2 .

Soient

$$\mathbf{V}(\lambda_1) = (\mathbf{I} + \lambda_1 \mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1} \quad (3.17)$$

et

$$\mathbf{W}(\lambda_2) = \hat{\mathbf{H}}(\hat{\mathbf{H}}^T \hat{\mathbf{H}} + \lambda_2 \mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1} \hat{\mathbf{H}}^T \quad (3.18)$$

Les fonctions GCV (3.16) appliquées aux paramètres λ_1 et λ_2 seront donc :

$$\text{GCV}(\lambda_1) = \frac{\sum_{i=0}^n (\tilde{H}_i - (\mathbf{V}(\lambda_1)\tilde{H})_i)^2}{(1 - n^{-1} \text{tr } \mathbf{V}(\lambda_1))^2}; \quad (3.19)$$

$$\text{GCV}(\lambda_2) = \frac{\sum_{i=0}^n ((\mathbf{X}\tilde{C})_i - (\mathbf{W}(\lambda_2)\mathbf{X}\tilde{C})_i)^2}{(1 - n^{-1} \text{tr } \mathbf{W}(\lambda_2))^2}. \quad (3.20)$$

3.3. LES SIMULATIONS

Afin d'examiner la performance des équations (3.11) et (3.13), plusieurs simulations numériques ont été effectuées avec des données H et C polluées. Les données ont été limitées à deux longueurs, soit de 10 et 20 intervalles, qui sont des longueurs suffisantes et couramment rencontrées en épidémiologie. Comme le modèle (1.14) représente une situation étudiée en épidémiologie, trois types de fonctions β simulant l'action d'une intervention en fonction du temps écoulé depuis son application, sont examinées :

- i. une fonction croissante qui suit la différence entre la fonction unité et une fonction exponentielle inverse ;
- ii. une fonction décroissante qui suit une fonction exponentielle inverse ;
- iii. une fonction qui suit une loi gamma.

La figure 3.3 représente les trois types de fonctions β de longueur $0 \rightarrow 19$ qui seront utilisées pour les simulations. Pour les fonctions de longueur $0 \rightarrow 9$, les représentations graphiques sont sensiblement les mêmes.

Pour la fonction g , il a été convenu d'utiliser pour chaque longueur des fonctions peu lisses (voir Fig. 3.4), elles visent à simuler la variation temporelle de l'incidence d'une maladie infectieuse en l'absence d'intervention.

Les fonctions discrètes H et C ont été construites de manière à retrouver les vecteurs g et β initiaux.

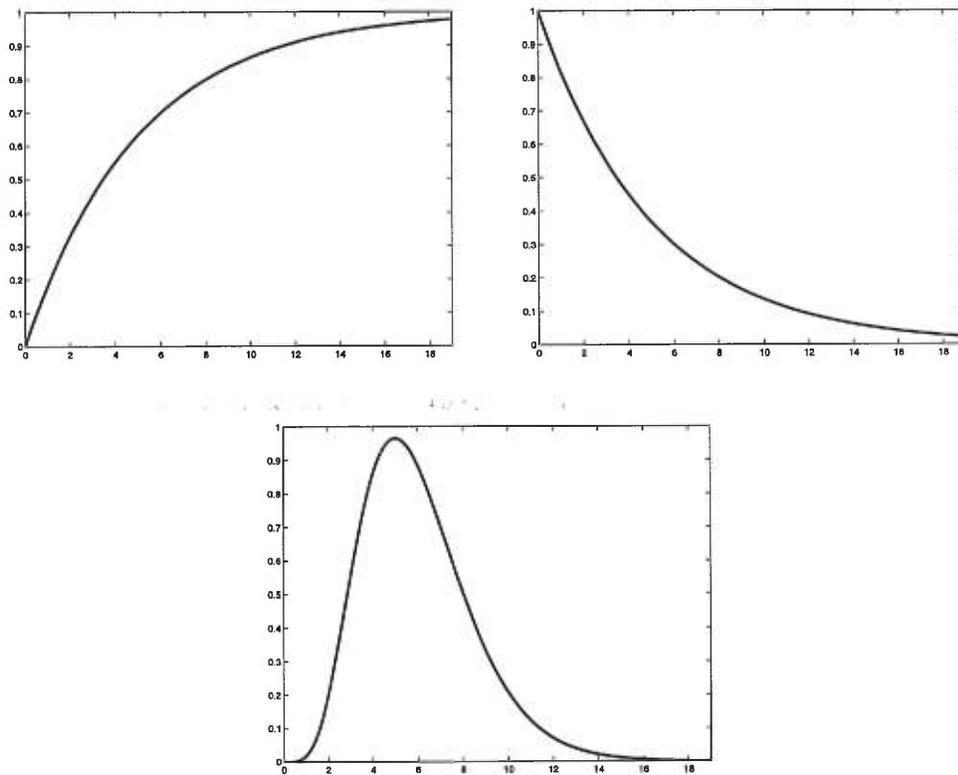
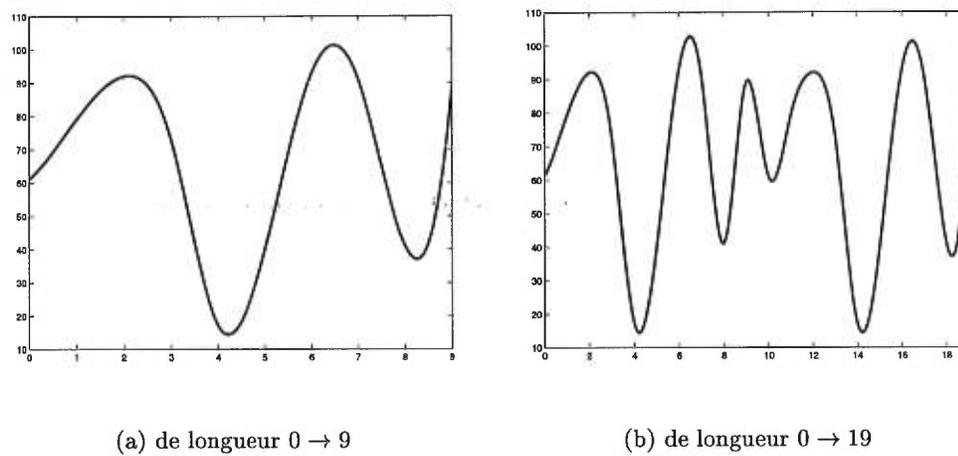


FIG. 3.3. Trois types de fonctions β caractéristiques



(a) de longueur $0 \rightarrow 9$

(b) de longueur $0 \rightarrow 19$

FIG. 3.4. Les fonctions g utilisées

Pour les simulations, l'idée de départ est d'estimer les paramètres λ_1 et λ_2 avec le critère GCV. Pour λ_1 , l'estimation par GCV est bonne, mais pour λ_2 , il en est autrement. Souvent le paramètre λ_2 établi par le critère GCV donne une fonction $\hat{\beta}$ erronée. L'utilisation de fonctionnelles et le nombre restreint de points permettent de croire qu'on a dépassé le seuil de performance de la fonction GCV (une discussion sur les limites de la fonction GCV se retrouve dans Wahba [12]).

Or, certaines informations sur les fonctions à reproduire sont, dans ce cas-ci, accessibles (ex. : la non-décroissance de la fonction H). Ceci permet alors de déterminer un domaine de valeurs possibles pour les paramètres à estimer. Après de multiples essais, la décision suivante a été prise : la fonction GCV servira surtout à établir la gamme des valeurs admissibles pour les paramètres.

3.3.1. H et C polluées

Les fonctions sont polluées de manière aléatoire selon une distribution normale avec un écart type proportionnel à l'amplitude locale :

$$\tilde{H}_i = H_i + N(0, (\alpha_H H_i)^2);$$

$$\tilde{C}_i = C_i + N(0, (\alpha_C C_i)^2);$$

pour $i = 0 \dots, n$, en considérant des taux d'erreur α_H et α_C qui vont varier entre 0 et 5%.

Les figures suivantes présentent les résultats obtenus en polluant les fonctions H et C selon différents taux d'erreur. Chaque figure est constituée des quatre graphiques suivants :

(a) H :

- la fonction sans bruit H (ligne pointillée) ;
- le vecteur pollué \tilde{H} (points) avec son intervalle de confiance évaluée à $\pm 2\alpha_H H_i$;

- la spline cubique naturelle \hat{H} obtenue avec le modèle de régression non paramétrique (ligne pleine);
- (b) C :
- la fonction sans bruit C (ligne pointillée);
 - le vecteur pollué \tilde{C} (points) avec son intervalle de confiance évaluée à $\pm 2\alpha_C C_i$;
- (c) β :
- la fonction sans bruit β recherchée (ligne pointillée);
 - le vecteur β_d obtenu avec la méthode directe (points);
 - la spline cubique naturelle $\hat{\beta}$ obtenue avec le modèle de régression non paramétrique (ligne pleine);
- (d) un ensemble d'une vingtaine de splines cubiques naturelles $\hat{\beta}$ obtenues avec le modèle de régression non paramétrique (lignes pleines) pour une vingtaine de simulations avec différents vecteurs \tilde{H} et \tilde{C} pollués de manière aléatoire. Les résultats sont comparés avec la fonction sans bruit β recherchée (ligne pointillée).

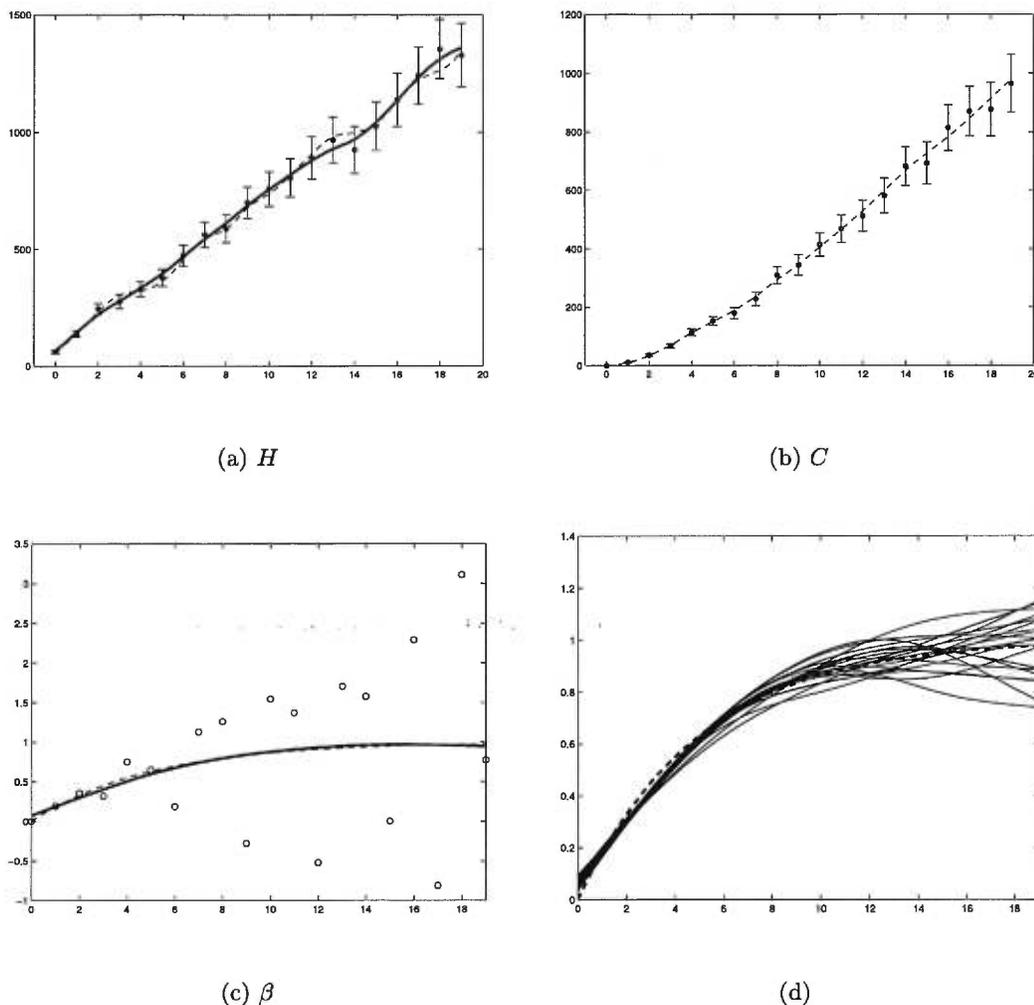


FIG. 3.5. β croissante de longueur $0 \rightarrow 19$ avec $\alpha_H = \alpha_C = 0,05$

Dans un cadre général, voici les résultats obtenus avec les fonctions β monotones de longueur $0 \rightarrow 19$ pour un taux d'erreur commun de 5% (Figures 3.5 et 3.6). Les paramètres ont été fixés à

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 2\,000\,000$$

après utilisation de la fonction GCV comme repère.

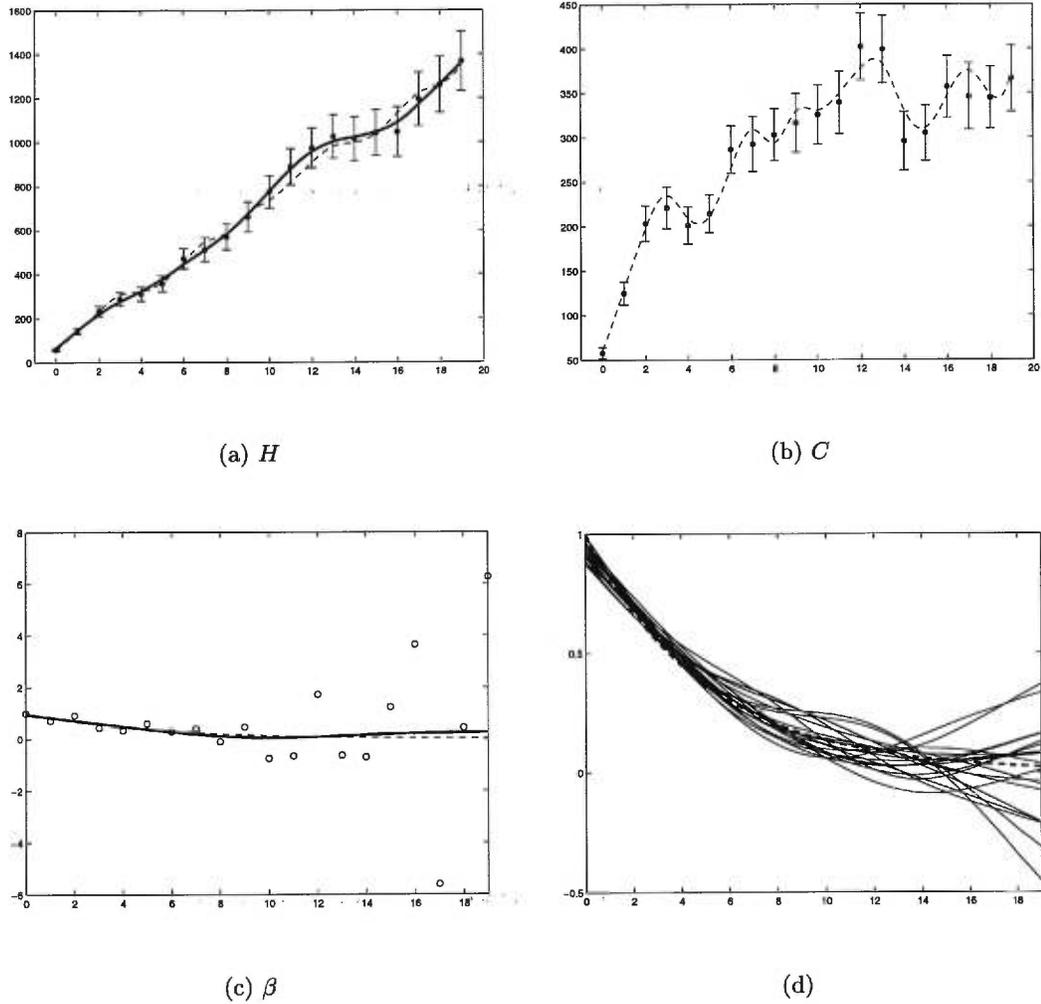


FIG. 3.6. β décroissante de longueur $0 \rightarrow 19$ avec $\alpha_H = \alpha_C = 0,05$

Deux aspects sautent au yeux :

- 1° la méthode directe offre une solution aberrante, les erreurs devenant très importantes avec le temps écoulé ;
- 2° les simulations répétées montrent des estimations $\hat{\beta}$ stables et fidèles à la fonction originale β au début de l'intervalle. Les divergences deviennent

de plus en plus importantes vers la fin de l'intervalle. Ce phénomène est lié au fait que $\beta(z)$, pour z vers la fin de son intervalle, entre peu dans la fonctionnelle $\widetilde{H} * \beta = \widetilde{C} * \vec{1}$, les erreurs sur H et C ont plus d'impact sur l'estimation de $\beta(z)$ dans cette région extrême.

Mais les fonctions β monotones ne sont pas les plus intéressantes à examiner. On va s'intéresser davantage à la fonction β suivant une loi gamma avec laquelle on procède à une étude plus complète.

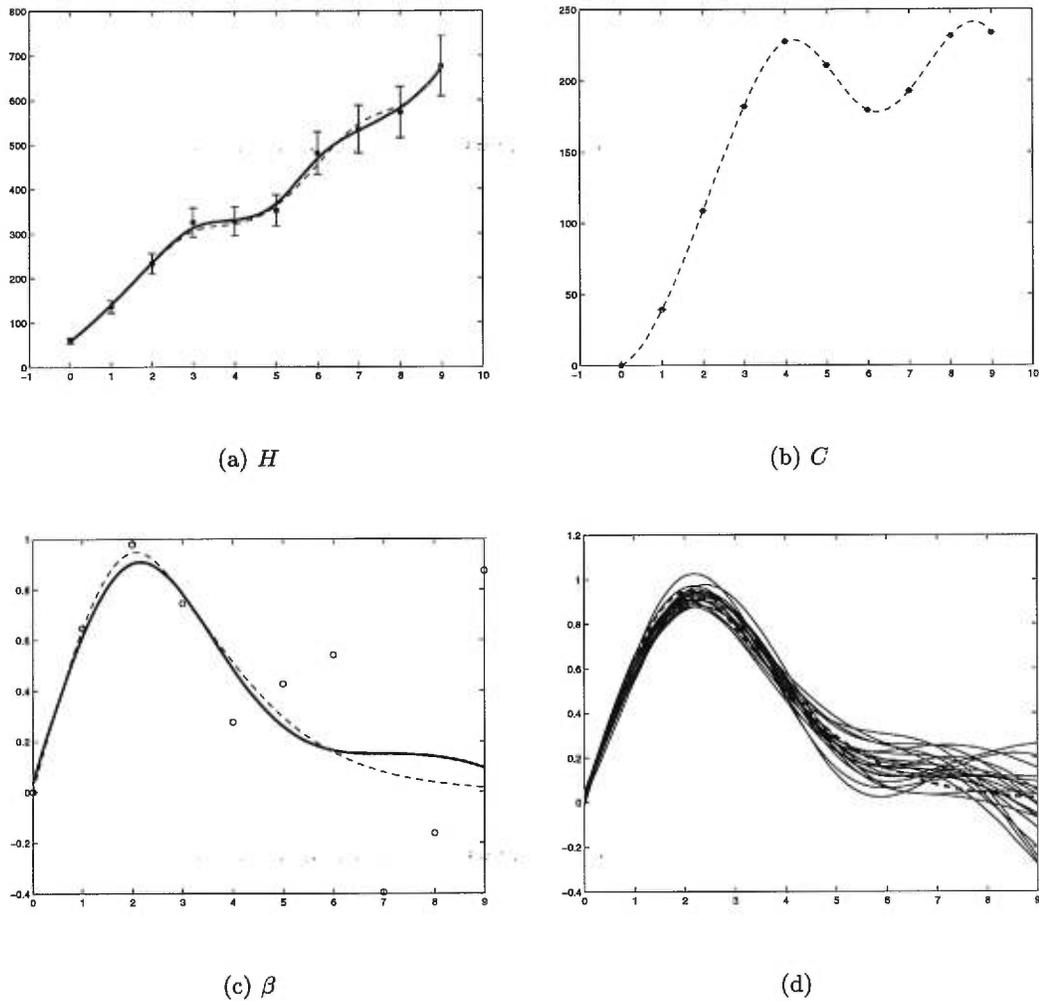


FIG. 3.7. β gamma de longueur $0 \rightarrow 9$ avec $\alpha_H = 0,05$, $\alpha_C = 0$

3.3.1.1. Premier cas : $\alpha_H = 0,05$, $\alpha_C = 0$ (figures 3.7 et 3.8)

Les deux premières simulations représentent le cas où seulement la fonction H est polluée. Ce cas simple permettra plus tard de voir les effets d'une bonne reconstitution \hat{H} de la fonction H . Pour se faire, les paramètres ont été fixés à

$$\lambda_1 = 0,1 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 1\,000.$$

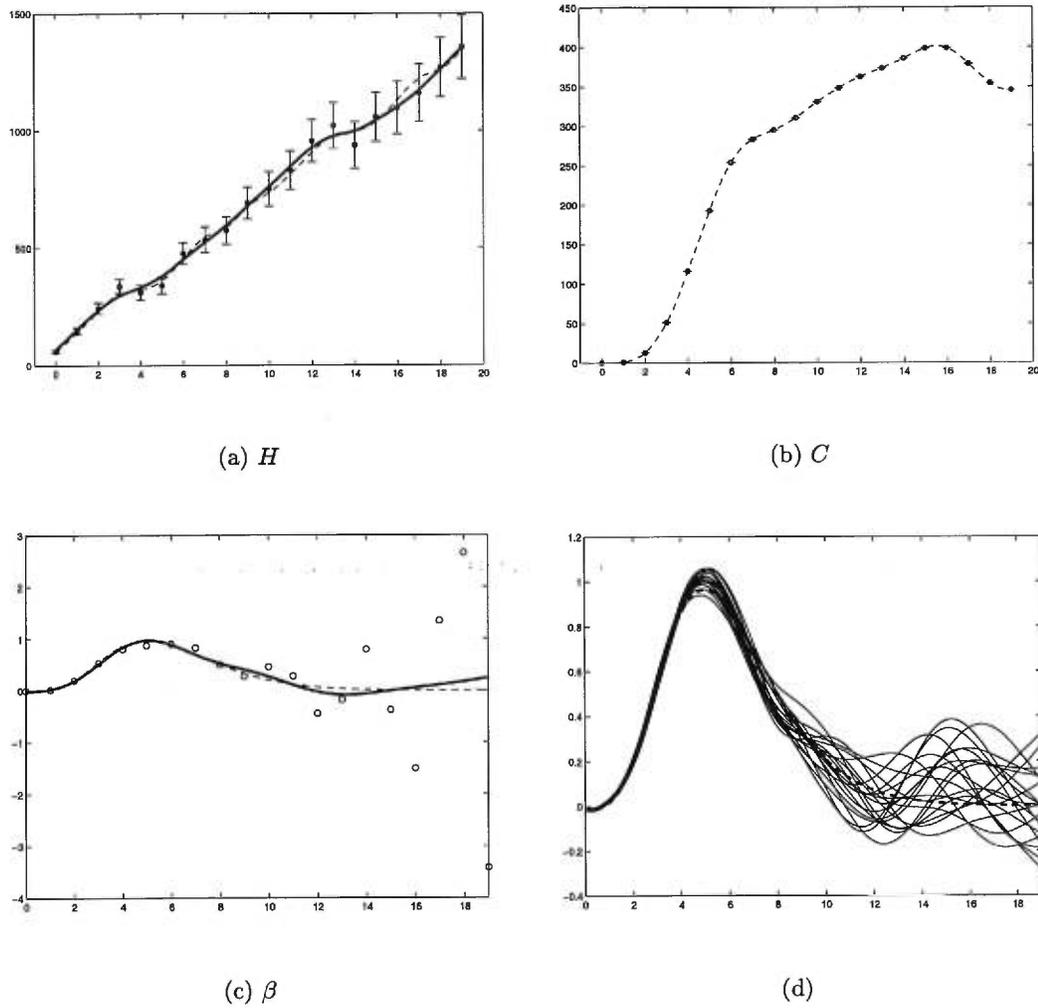


FIG. 3.8. β gamma de longueur $0 \rightarrow 19$ avec $\alpha_H = 0,05$, $\alpha_C = 0$

pour les vecteurs de longueur $0 \rightarrow 9$ et

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 1\,000.$$

pour ceux de longueur $0 \rightarrow 19$.

On notera que la valeur du paramètre λ_1 varie avec la longueur de l'intervalle. Ceci tient au fait que le critère de régularisation n'est pas un invariant sous un changement d'échelle compte tenu de l'intégrale de la dérivée seconde au carré.

On s'aperçoit que la reconstitution est très bonne pour la première moitié de la fonction. En revanche, la seconde moitié, en particulier pour le vecteur de longueur $0 \rightarrow 19$, semble se diriger vers toutes les directions possibles. On constate toutefois le progrès effectué comparé à la méthode directe.

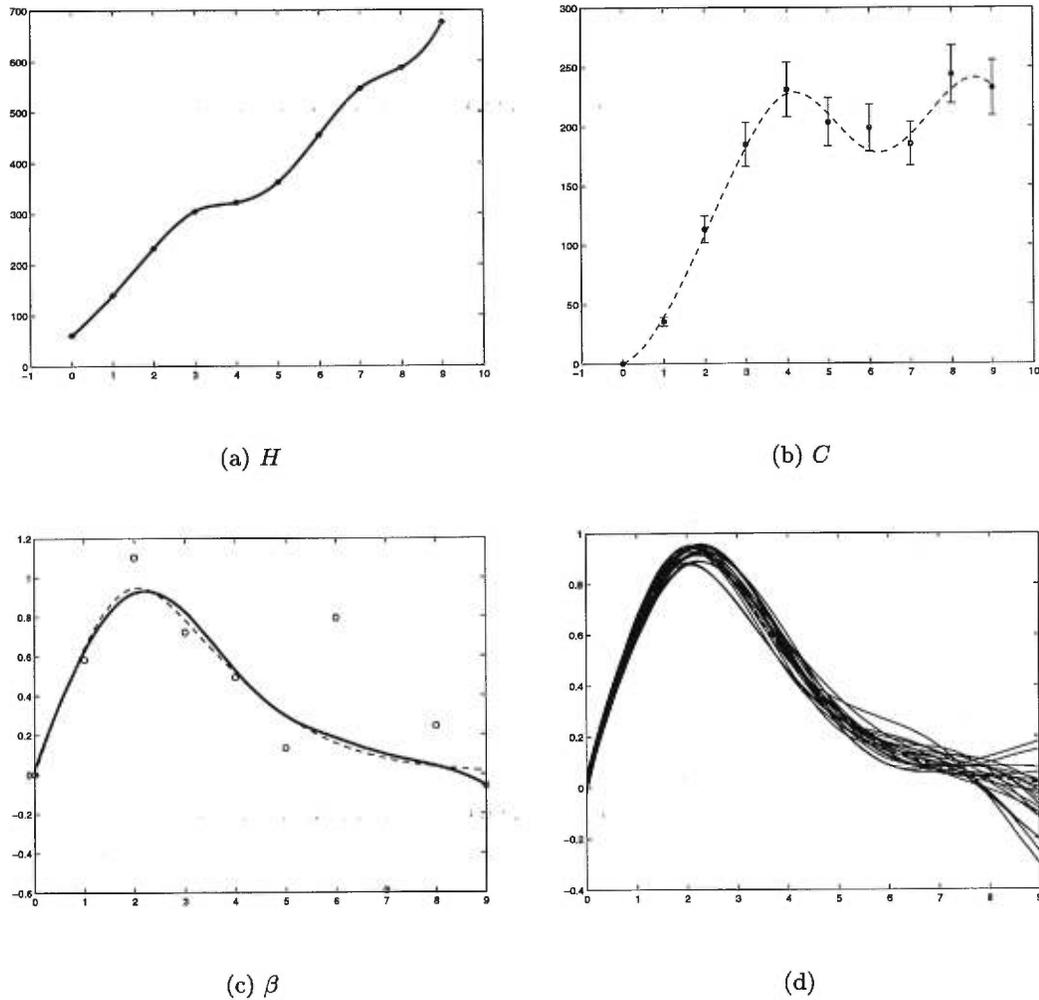


FIG. 3.9. β gamma de longueur $0 \rightarrow 9$ avec $\alpha_H = 0$, $\alpha_C = 0,05$

3.3.1.2. Second cas : $\alpha_H = 0$, $\alpha_C = 0,05$ (figures 3.9 et 3.10)

Ici, on a le cas contraire : seulement la fonction C est polluée. Il est clair que le paramètre λ_1 est nul. Pour le second paramètre, des valeurs différentes ont été utilisées. Pour la première simulation ($0 \rightarrow 9$)

$$\lambda_2 = 1\,000,$$

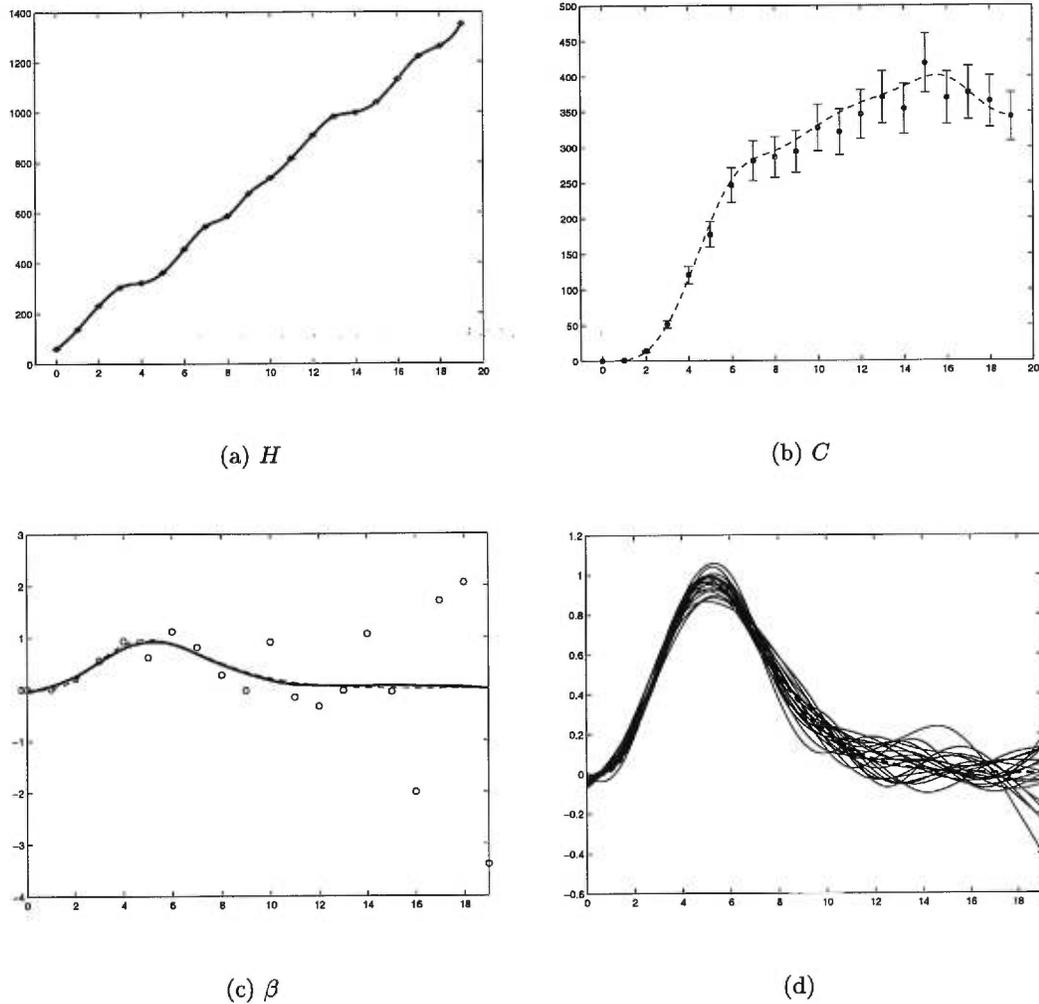


FIG. 3.10. β gamma de longueur $0 \rightarrow 19$ avec $\alpha_H = 0$, $\alpha_C = 0,05$

pour la seconde ($0 \rightarrow 19$)

$$\lambda_2 = 5\,000.$$

Les résultats sont toutefois meilleurs que ceux obtenus par le premier cas. Cela provient du fait que la reconstruction \hat{H} est parfaite ($\hat{H}_i = \tilde{H}_i = H_i$ pour tous les $i = 0, \dots, n$).

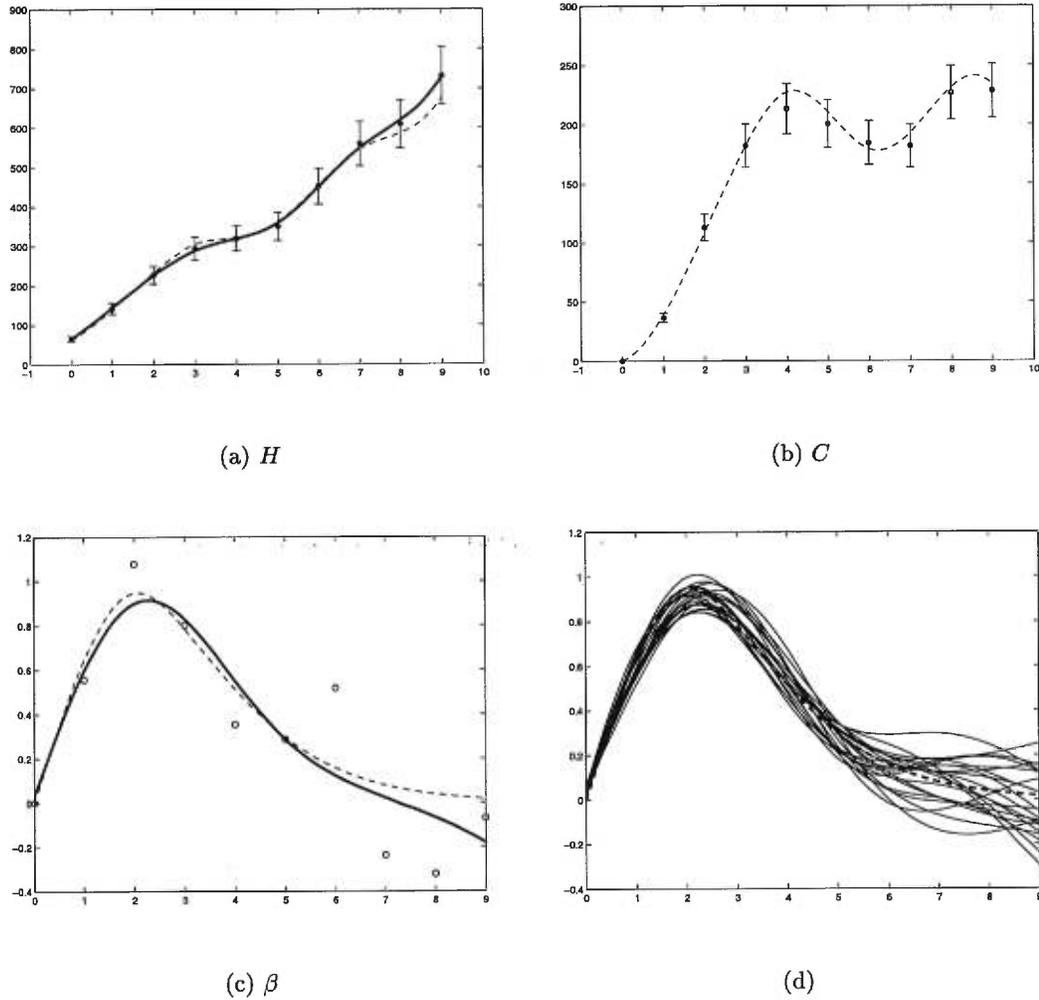


FIG. 3.11. β gamma de longueur $0 \rightarrow 9$ avec $\alpha_H = \alpha_C = 0,05$

3.3.1.3. Troisième cas : $\alpha_H = \alpha_C = 0,05$ (figures 3.11 et 3.12)

C'est le cas plus général. Les valeurs constantes des paramètres ont été fixées à

$$\lambda_1 = 0,1 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 2\,000$$

pour la première simulation ($0 \rightarrow 9$) et

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 10\,000$$

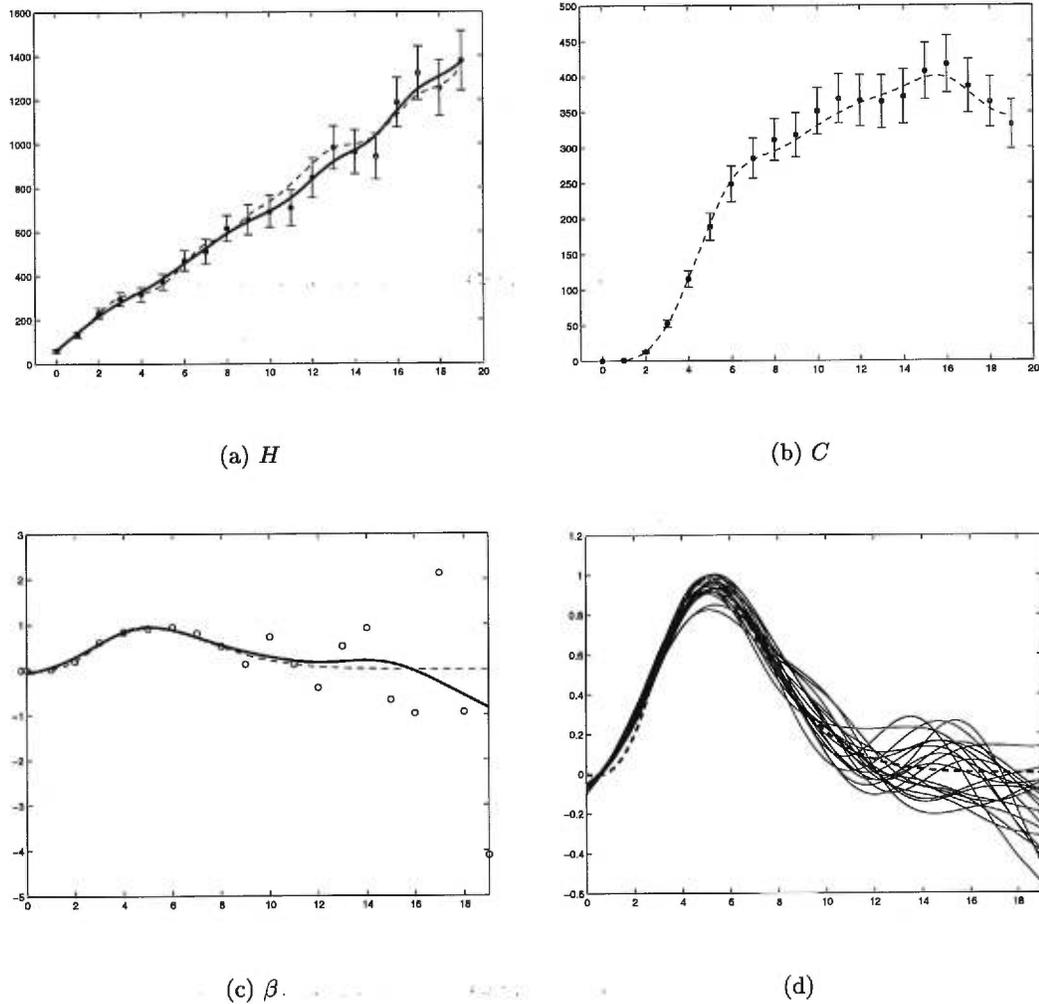


FIG. 3.12. β gamma de longueur $0 \rightarrow 19$ avec $\alpha_H = \alpha_C = 0,05$

pour la seconde ($0 \rightarrow 19$).

Les résultats se comparent à ceux obtenus avec le premier cas. On peut conclure que plus la reconstitution \hat{H} est proche de la fonction originale H , plus on semble obtenir de meilleurs résultats pour la fonction $\hat{\beta}$.

3.3.2. g et C polluées

Dans les situations étudiées jusqu'ici, le bruit se retrouve sur les fonctions H et C . Pourtant, dans d'autres cas du domaine épidémiologique, il n'est pas impossible que ce soit les fonctions C et g (où g est le taux d'incidence de la maladie en l'absence d'intervention) qui soient disponibles. Ne travailler qu'avec les fonctions C et g devient donc intéressant. Pour ce faire, il suffit de redéfinir l'équation de départ (3.9) avec g :

$$\tilde{g} = g + \epsilon_g \quad (3.21)$$

pour obtenir les deux fonctions à minimiser

$$\sum_{i=0}^n (\tilde{g}_i - \hat{g}_i)^2 + \lambda_1 \int_0^n (\hat{g}'')^2 dt \quad (3.22)$$

et

$$\sum_{i=0}^n \left(\tilde{C}_i - (\hat{\beta} * \hat{g})_i \right)^2 + \lambda_2 \int_0^n (\hat{\beta}'')^2 dt. \quad (3.23)$$

Cela permet de définir les fonctions discrètes

$$\hat{g} = (\mathbf{I} + \lambda_1 \mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1} \tilde{g} \quad (3.24)$$

et

$$\hat{\beta} = (\hat{\mathbf{G}}^T \hat{\mathbf{G}} + \lambda_2 \mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1} \hat{\mathbf{G}} \tilde{C} \quad (3.25)$$

(avec $\hat{\mathbf{G}}$ la matrice de Toeplitz triangulaire inférieure composée avec le vecteur \hat{g}) qui minimisent les équations (3.22) et (3.23). Pour les calculs, il suffit de revoir ceux effectués à la section 3.2.

Une étude semblable à celle de la sous-section précédente a été effectuée, soit une fonction β suivant une loi gamma et des données sur g et C selon trois cas

d'erreur (ne dépassant jamais 5%) et deux longueurs ($0 \rightarrow 9$ et $0 \rightarrow 19$). Il est bon de préciser que le graphique présentant les trois différentes fonctions H (H , \tilde{H} et \hat{H}) est ici remplacé par son équivalent avec la fonction g (g , \tilde{g} et \hat{g}).

Figure 1.10 : g et \tilde{g} et \hat{g}

Figure 1.11 : g et \tilde{g} et \hat{g}

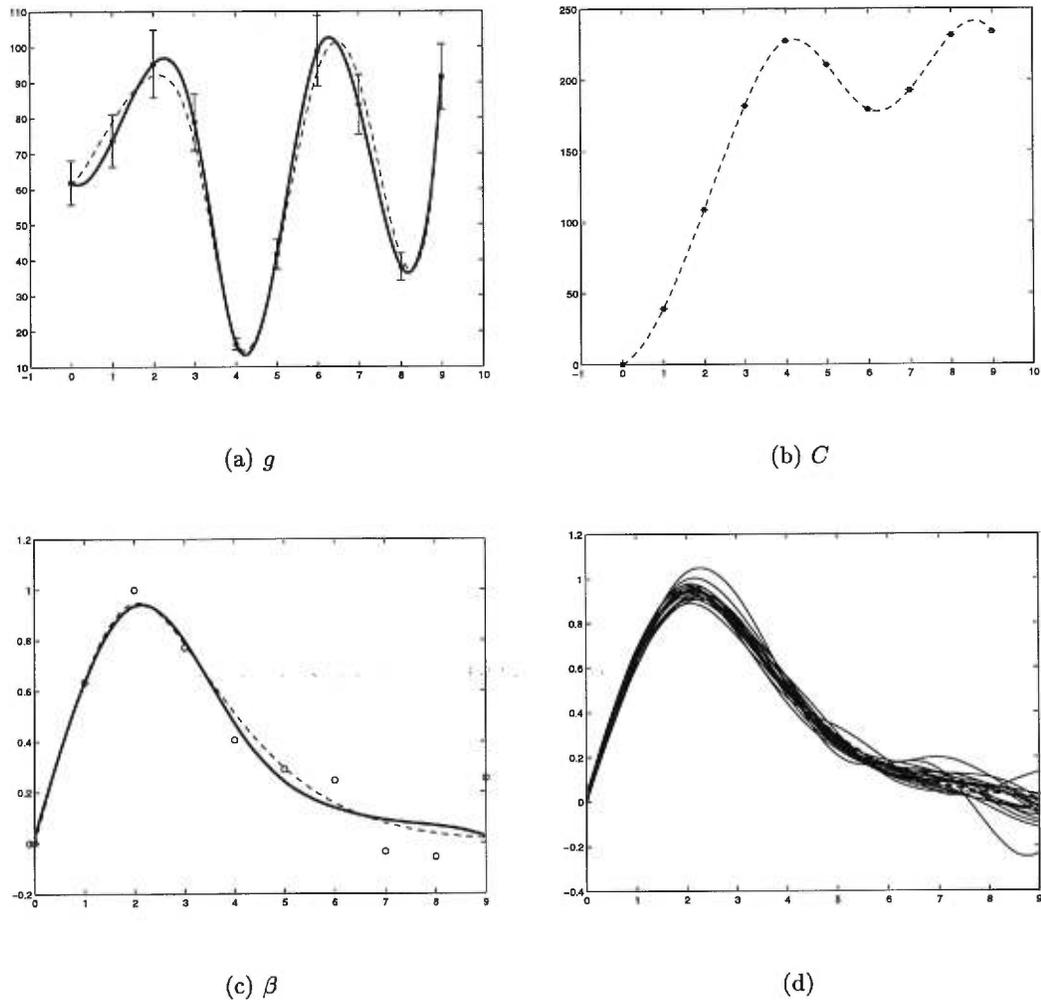
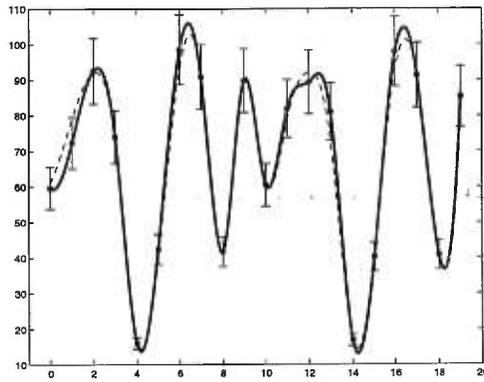
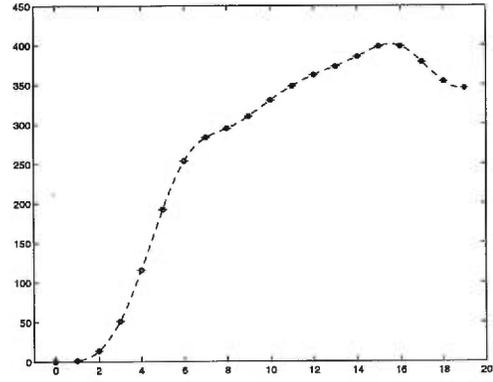
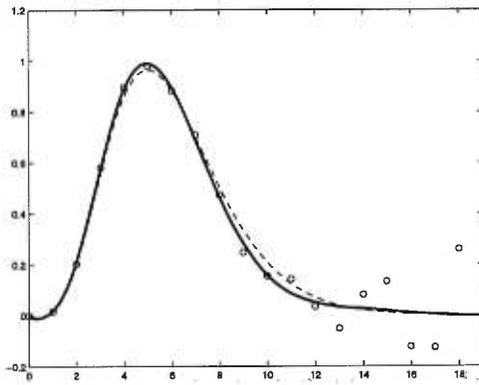
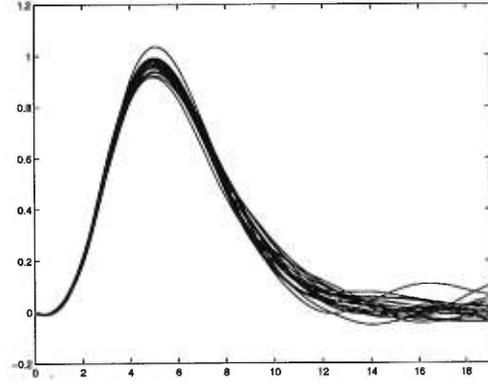


FIG. 3.13. β gamma de longueur $0 \rightarrow 9$ avec $\alpha_g = 0,05$, $\alpha_C = 0$

3.3.2.1. Premier cas : $\alpha_g = 0,05$, $\alpha_C = 0$ (figures 3.13 et 3.14)

De manière similaire à la sous-section précédente, les deux premières simulations représentent le cas où seulement le vecteur g est pollué. On s'aperçoit que la reconstitution est très bonne à chaque fois. Pour ces deux cas, l'estimation des paramètres par GCV s'est avérée la plus performante. Les paramètres ont été choisis ainsi :

$$\lambda_1 \approx 0 \quad \text{et} \quad \lambda_2 \in [0, 300],$$

(a) g (b) C (c) β 

(d)

FIG. 3.14. β gamma de longueur $0 \rightarrow 19$ avec $\alpha_g = 0,05$, $\alpha_C = 0$

les λ_2 étant différents pour chaque simulation.

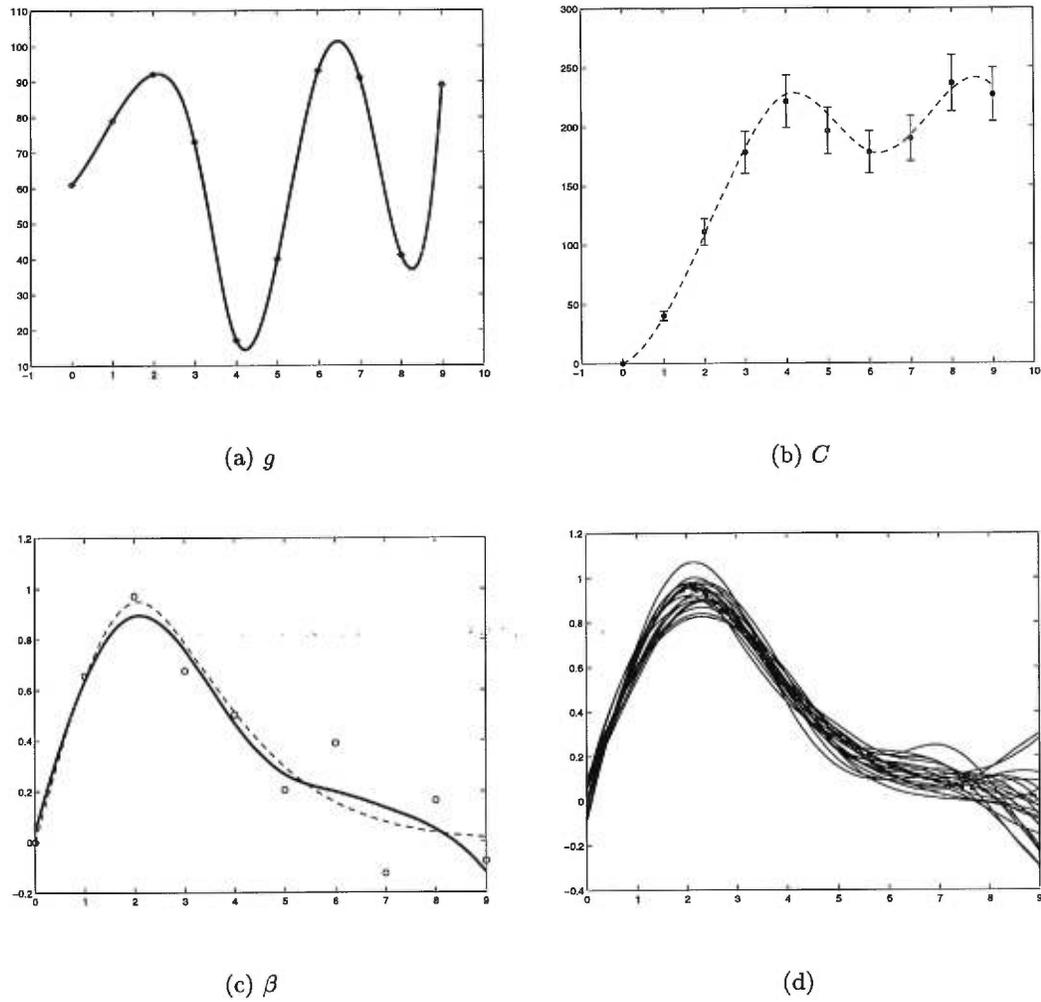


FIG. 3.15. β gamma de longueur $0 \rightarrow 9$ avec $\alpha_g = 0$, $\alpha_C = 0,05$

3.3.2.2. Second cas : $\alpha_g = 0$, $\alpha_C = 0,05$ (figures 3.15 et 3.16)

Ici, on a encore le cas contraire : le vecteur C seulement est pollué. Il est clair que le paramètre λ_1 est nul, tandis que pour la première simulation ($0 \rightarrow 9$)

$$\lambda_2 = 1\,000,$$

pour la seconde ($0 \rightarrow 19$)

$$\lambda_2 = 10\,000.$$

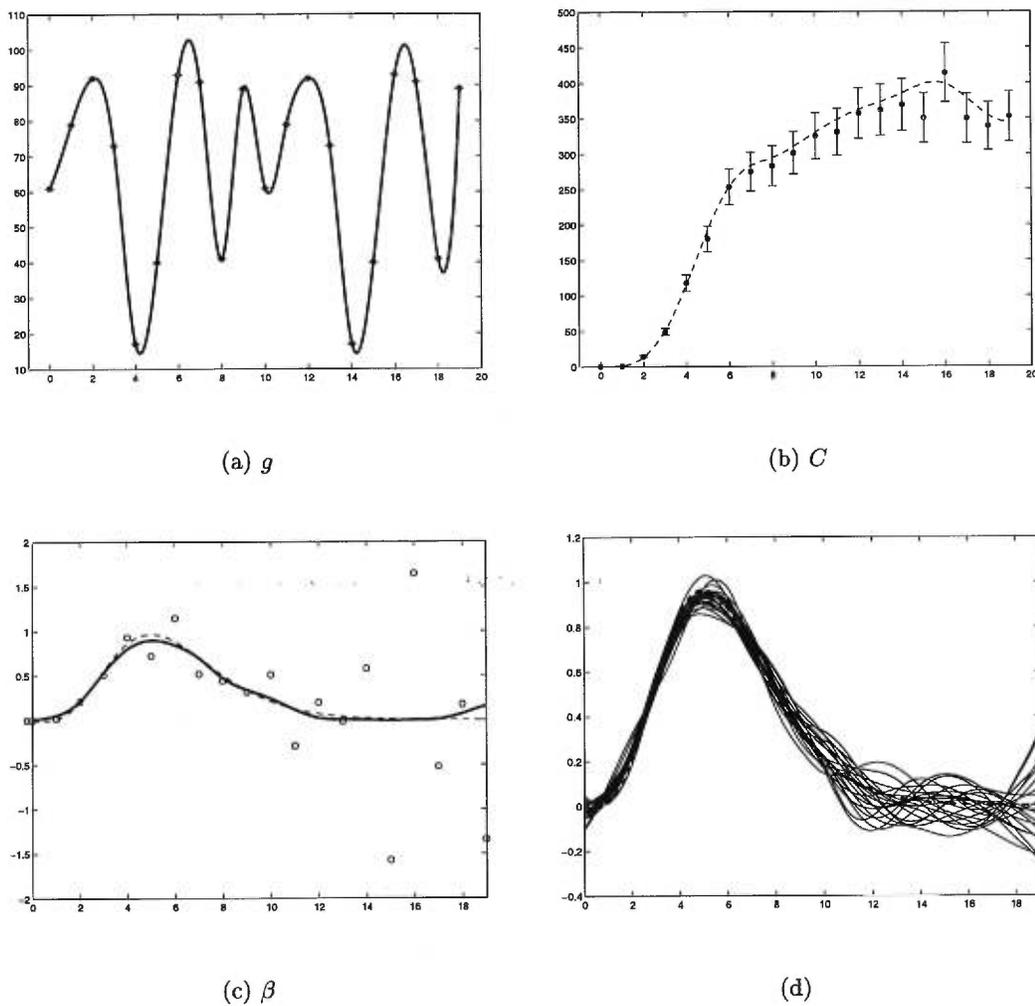


FIG. 3.16. β gamma de longueur $0 \rightarrow 19$ avec $\alpha_g = 0$, $\alpha_C = 0,05$

Les résultats demeurent semblables à ceux obtenus avec la fonction H non polluée et la fonction C polluée (second cas, p. 59). Ce qui montre bien que le poids de la fonction C semble, dans chaque cas, le même.

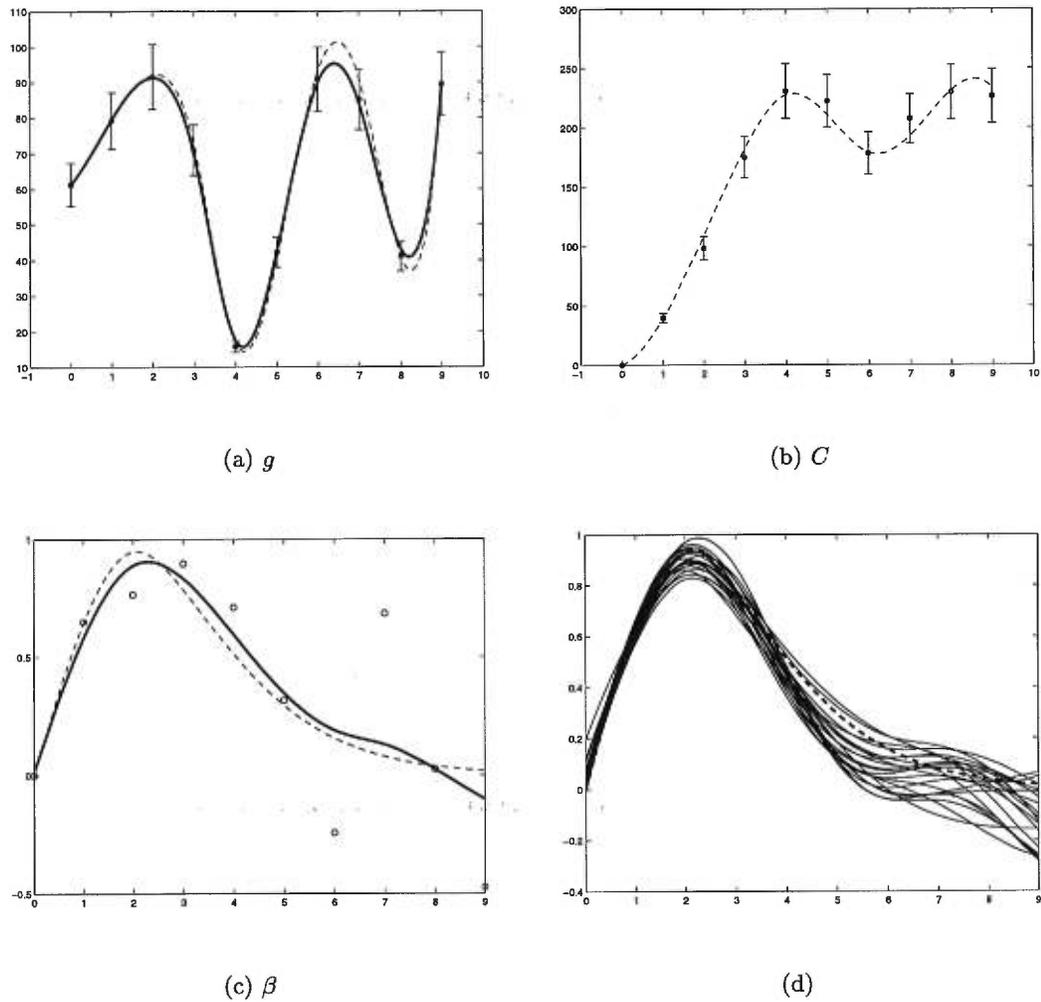


FIG. 3.17. β gamma de longueur $0 \rightarrow 9$ avec $\alpha_g = \alpha_C = 0,05$

3.3.2.3. Troisième cas : $\alpha_g = \alpha_C = 0,05$ (figures 3.17 et 3.18)

Ce cas le plus général est probablement le plus réaliste en pratique. On obtient de bons résultats en lissant très légèrement la fonction \hat{g} . Le paramètre λ_1 a été choisi comme étant

$$\lambda_1 = 0,01.$$

Les valeurs pour le paramètre λ_2 ont été choisies comme étant

$$\lambda_2 = 2\,500, \quad \lambda_2 = 10\,000$$

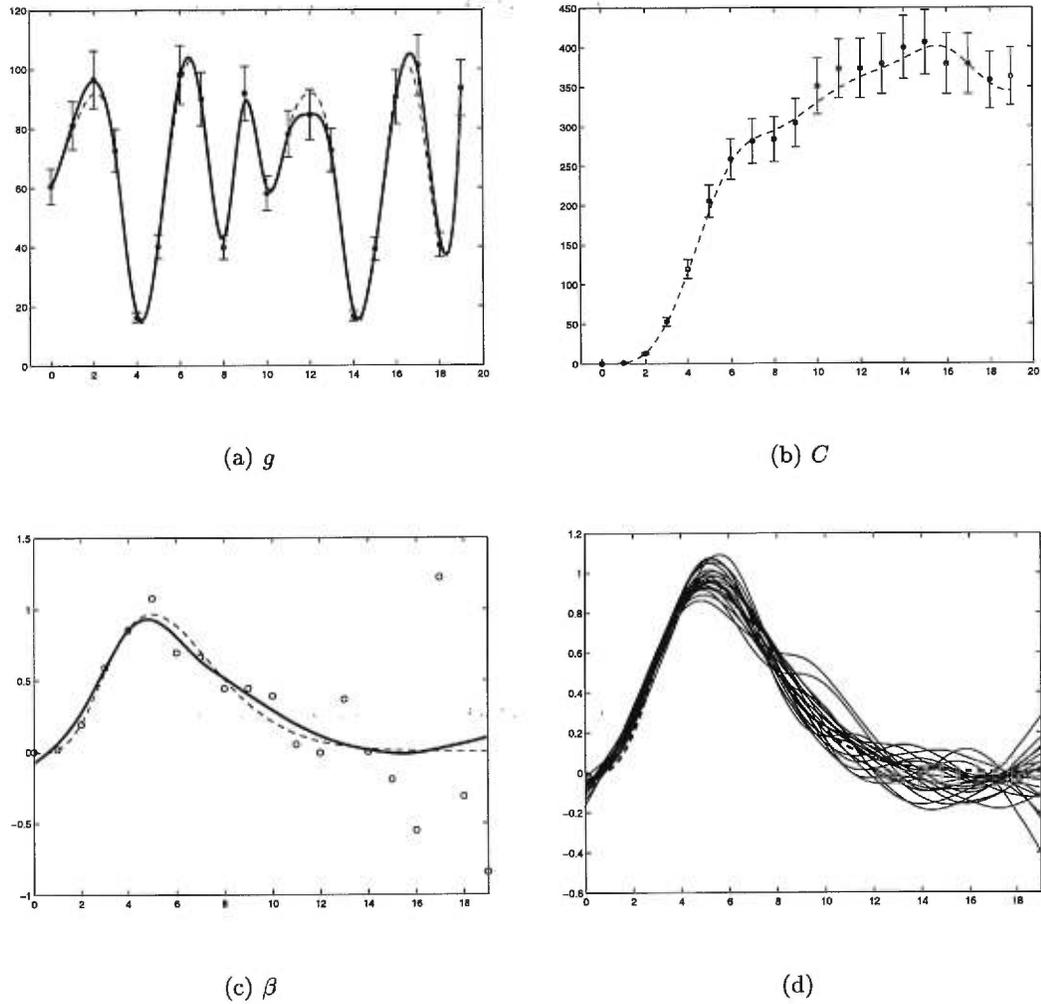


FIG. 3.18. β gamma de longueur $0 \rightarrow 19$ avec $\alpha_g = \alpha_C = 0,05$

pour les vecteurs de longueur $0 \rightarrow 9$ et $0 \rightarrow 19$ respectivement.

On constate toujours la bonne performance de l'approche comparée à la méthode directe (1.4) malgré la difficile reconstitution de la fin de la fonction β .

CONCLUSION

Le système de convolutions étudié dans ce mémoire est issu d'un modèle qui tient compte de l'impact d'une intervention au sein d'une population affectée par une infection. L'efficacité se mesure comme étant la diminution relative dans le risque cumulatif depuis l'intervention. Ce sont les fonctions de risque cumulatif $H_o(t, a, z)$ et $H_i(t, a, z)$ constituant cette mesure qui sont représentées par des convolutions où intervient une fonction d'impact $\beta(z)$ mesurant la réduction de l'incidence en fonction du temps écoulé depuis l'intervention. L'objectif de cette étude est de reconstituer cette fonction d'impact à partir de données sur le risque cumulatif.

Le premier chapitre est consacré à l'étude du système discrétisé. Ce système est résolu grâce à l'algèbre linéaire, ce qui est appelé la méthode directe. Néanmoins, plusieurs obstacles révèlent le manque de stabilité de cette méthode face à de légères erreurs. C'est dans cet esprit qu'il convenait d'identifier de nouvelles méthodes permettant de travailler avec des données polluées par du bruit.

Le second chapitre examine la déconvolution à l'aide du principe des moindres carrés. Ce principe, utilisé en géophysique, distribue plus uniformément le poids de chacun des termes lors d'une déconvolution permettant ainsi une plus grande stabilité face à l'erreur. Le principe a tout d'abord été appliqué directement au système. Mais, le taux de performance variant énormément d'un jeu de données à un autre, les résultats ne sont pas fiables. Ensuite, le principe a été appliqué en

utilisant la monotonie de la fonction H . Cette méthode aurait pu suffire, mais, il manque de critères permettant de déterminer les paramètres libres.

Le dernier chapitre reprend une approche de régression non paramétrique pénalisant la rudesse d'une courbe et l'applique aux convolutions données. Le fait marquant de ce mémoire réside dans une bonne reconstitution $\hat{\beta}$ de la fonction d'impact à partir de données polluées \tilde{H} et \tilde{C} . Ce résultat repose sur le caractère supposé lisse de la fonction d'origine β et sur le critère GCV qui a servi de repère lors du choix de valeurs possibles pour les paramètres libres de lissage. Cette dernière méthode se révèle la meilleure trouvée pour déconvoluer avec des données polluées.

Le système étudié ne comprend que deux convolutions, il serait éventuellement intéressant d'examiner un système de n convolutions.

La déconvolution n'est pas un problème unique à l'épidémiologie. Le problème $C = g * \beta$ est d'application générale en n'oubliant pas que toutes les fonctions étudiées ne sont données que sur un même intervalle finie $[0, Z]$. Il serait aussi intéressant de vérifier si les résultats obtenus sont applicables lorsque les fonctions ne sont pas lisses ou quand il est impossible de déterminer leur degré de rudesse.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Robert C. Brunet et Claudio J. Struchiner. A measure of efficacy for time dependent intervention benefits under arbitrary variations of the age and exogenous components of hazard. Rapport de recherche N° 392, Département de mathématiques et de statistique, Université de Montréal, février 1997.
- [2] D. R. Cox. Regression models and lifes tables. *J. Roy. Stat. Soc., Ser. B*, 34:187–220, 1972.
- [3] D. R. Cox et H. D. Miller. *The Theory of Stochastic Processes*. Chapman and Hall, London, 1977.
- [4] Robert F. Engle, C. W. J. Granger, John Rice et Andrew Weiss. Semiparametric estimates of the relation between weather and electricity sales. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 81(394):310–320, juin 1986.
- [5] Randall L. Eubank. *Spline Smoothing and Nonparametric Regression*, volume 90 de *Statist. Textbooks Monogr.* Marcel Dekker, New York, 1988.
- [6] P. J. Green et B. W. Silverman. *Nonparametric Regression and Generalized Linear Models: A roughness penalty approach*. N° 58 in *Monogr. Statist. Appl. Probab.* Chapman and Hall, London, 1994.
- [7] Jerry M. Mendel. *Optimal Seismic Deconvolution: An estimation-based approach*. Academic Press, New York, 1983.
- [8] J. O. Ramsay et B. W. Silverman. *Functional Data Analysis*. Springer Ser. Statist. Springer, New York, 1997.
- [9] Enders A. Robinson et Sven Treitel. *Geophysical Signal Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1980.
- [10] Ian N. Sneddon. *The Use of Integral Transform*. McGraw-Hill, New York, 1972.
- [11] Michael Spivak. *Calculus*. Publish or Perish, Houston, troisième édition, 1994.
- [12] Grace Wahba. *Spline Models for Observational Data*. N° 59 in *CBMS-NSF Regional Conf. Ser. in Appl. Math.* SIAM, Philadelphia, 1990.

- [13] Harper J. Whitehouse et Jeffery C. Allen. Displacement rank and deconvolution: Applications and open problems. *In* F. Alberto Grünbaum, Marvin Bernfeld et Richard E. Blahut, éditeurs, *Radar and Sonar, Part II*, volume 39 de *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 149–155. Springer, New York, 1992.