

dm11.2661.8

Université de Montréal

Des fleuves et la courbe de de Rham vus par la  
géométrie fractale

par

Emmanuel Antaya

Département de mathématiques et de statistique  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de  
Maître ès sciences (M.Sc.)  
en mathématiques

novembre 1998

© Emmanuel Antaya, 1998



QA

3

U54

1999

v.001

Université de Montréal

Des fleuves et la courbe de la coupe de la Rhain vos par  
géométrie fractale

par

Emmanuel Anaya

Département de mathématiques et de statistiques  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de  
Maîtrise en sciences (M.Sc.)  
en mathématiques

novembre 1998



© Emmanuel Anaya, 1998

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Des fleuves et la courbe de de Rham vus par la  
géométrie fractale

présenté par

Emmanuel Antaya

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

*Jacques Bélair*

---

(président-rapporteur)

*Serge Dubuc*

---

(directeur de recherche)

*Norbert Schlomiuk*

---

(membre du jury)

Mémoire accepté le :

98. 11. 16

## SOMMAIRE

---

La géométrie fractale nous donne divers outils pour étudier certains objets. Nous allons illustrer deux de ces outils d'investigation. Le premier est composé de la dimension fractale et du diagramme log-log. Il nous permettra d'étudier l'ensemble des fleuves, un objet naturel. Le deuxième est composé des attracteurs des systèmes de fonctions itérées. Ceux-ci nous seront utiles lors de l'étude de la classe des courbes de de Rham, un objet mathématique.

# Table des matières

---

<b>Sommaire</b> .....	iii
<b>Table des figures</b> .....	vi
<b>Liste des tableaux</b> .....	vii
<b>Introduction</b> .....	1
<b>Chapitre 1. Fractales et fleuves</b> .....	3
<b>Chapitre 2. Les systèmes de fonctions itérées</b> .....	12
<b>Chapitre 3. Les courbes de de Rham</b> .....	22
3.1. Préliminaire: Définitions et propriétés .....	22
3.2. Étude sur la longueur des courbes de de Rham .....	26
3.3. Études sur les constantes $r^0$ et $R^0$ .....	37
<b>Conclusion</b> .....	56
<b>Annexe A. Les données sur les fleuves</b> .....	58
<b>Annexe B. Les programmes</b> .....	61
B.1. Unité pour les programmes suivants .....	61
B.2. Les Fleuves .....	63
B.3. La courbe de von Koch .....	71

B.4. La fougère de Barnsley .....	74
B.5. Sur les courbes de de Rham .....	75
B.6. Les composantes de la courbe de de Rham .....	81
<b>Bibliographie</b> .....	<b>89</b>

## Table des figures

---

1.0.1	Courbe de von Koch.....	5
1.0.2	Îles géométriquement similaires avec quadrillé dépendant de l'aire....	7
1.0.3	Diagramme log-log.....	10
2.0.1	Construction de l'ensemble de Cantor.....	19
2.0.2	Le triangle de Sierpiński.....	20
2.0.3	La fougère de Barnsley.....	21
3.1.1	Première étape de la construction de la courbe de de Rham.....	23
3.1.2	Les points milieux de $P^2$ et la courbe limite.....	24
3.1.3	Les composantes $x(t)$ et $y(t)$ .....	25
3.2.1	Les paramètres de la courbe de de Rham.....	27
3.2.2	Calcul des angles dans la construction de la courbe de de Rham.....	34
3.3.1	$r_i^9$ pour $\gamma = 1.5$ et $x_0 = 1$ .....	39
3.3.2	$r_i^9$ pour $\gamma = 2.2$ et $x_0 = 1$ .....	40
3.3.3	$s_a^9$ pour $\gamma = 1.8$ et $x_0 = 1$ .....	53
3.3.4	$s_a^9$ pour $\gamma = 3.5$ et $x_0 = 1$ .....	54

## Liste des tableaux

---

3.3.1	Statistiques des ratios de longueurs avec gamma variant et rapport initial constant .....	40
3.3.2	Statistiques des ratios de longueurs avec gamma variant et rapport initial variant .....	41
3.3.3	Statistiques des ratios de longueurs pour les triangles non dégénérés..	54

# INTRODUCTION

---

Certains objets sont très difficiles à représenter à l'aide de la géométrie euclidienne. Pour remédier à cette faille, Benoit Mandelbrot a introduit la géométrie fractale. Cette nouvelle forme de géométrie a pour but d'étudier des objets de formes complexes, soient les fractales. Cette nouvelle géométrie a des applications dans de nombreux domaines, comme par exemple en graphisme par ordinateur, ou pour calculer de façon plus précise la longueur, l'aire ou le volume d'objets naturels.

Cette géométrie nous donne aussi divers outils pour étudier certains objets. Nous allons en voir deux. Le premier est une fonction rationnelle entre la longueur et l'aire d'objets géométriquement similaires. Celle-ci nous permettra d'étudier l'ensemble des fleuves, un objet naturel, comme un objet de la géométrie fractale. Le deuxième outil, les systèmes de fonctions itérées, pourra nous aider à étudier la classe des courbes de de Rham, un objet mathématique.

Dans le premier chapitre, nous allons tout d'abord définir les dimensions topologique et fractale. À l'aide de ces définitions, nous serons alors en mesure de donner la définition des fractales. Nous verrons ensuite un certain ratio entre la longueur et l'aire d'objets géométriquement similaires et nous pourrons ensuite étudier les fleuves à l'aide de ce ratio, ce qui nous permettra d'obtenir une bonne approximation de la dimension fractale des fleuves.

Ensuite, dans le deuxième chapitre, nous allons définir une importante classe de fractales: les attracteurs des systèmes de fonctions itérées, ou SFI. Chacun

de ces systèmes est composé de fonctions contractantes sur un espace complet et engendre un certain sous-ensemble compact, l'attracteur du SFI. Cet outil nous permettra d'étudier les courbes de de Rham. De plus, nous verrons quelques exemples classiques de SFI, dont l'ensemble de Cantor.

Dans le troisième chapitre, nous introduirons la classe des courbes de de Rham. Nous verrons les principaux théorèmes concernant la longueur d'une courbe de de Rham donnée et la convergence de deux approximations vers la longueur exacte de la courbe. Lors de l'analyse de la convergence de ces deux approximations, nous étudierons deux fonctions. Quoique ces deux fonctions ne forment pas un SFI, elles agissent de façon semblable et nous verrons comment pour un cas particulier. Finalement, par l'entremise d'exemples numériques, nous pourrions voir qu'il semble en être de même pour le cas général.

# Chapitre 1

---

## FRACTALES ET FLEUVES

Nous pouvons aisément constater qu'il est impossible de représenter tous les objets de la nature par des représentations de la géométrie euclidienne. Il est bien difficile, en effet, de représenter fidèlement un nuage, le tracé d'une rivière ou une montagne à l'aide de sphères, de droites, de pyramides ...

Mandelbrot a donc introduit une nouvelle géométrie composée d'objets nommés fractales. Pour être en mesure de saisir le sens de ces objets, nous devons tout d'abord considérer deux types de dimensions. La première, la plus facile à comprendre, est la dimension topologique, généralement dénotée par  $D_T$ . C'est Poincaré en 1912 qui a donné une première définition intuitive de la dimension topologique. Elle était énoncée comme suit: Si pour diviser un continuum il suffit de prendre des éléments isolés, alors ce continuum est de dimension 1. Cependant, si pour diviser un continuum il faut prendre un autre continuum de dimension  $n - 1$ , alors le continuum en question est de dimension  $n$ . Cette définition a poussé plusieurs mathématiciens à faire de la recherche sur ce sujet. Divers textes nous ont proposé différentes définitions, mais celle que nous retenons est celle de Menger. Si nous définissons le bord d'un ensemble  $A \subset X$  comme  $\text{Bd}(A) = \overline{A} \cap \overline{(A - X)}$ , alors nous pouvons définir la dimension d'un espace de cette façon: l'ensemble vide est de dimension -1 et un ensemble est de dimension  $n$  si chacun des points de l'espace possède un voisinage dont le bord est de dimension d'au plus  $n - 1$ .

Il est à noter que les diverses définitions sont équivalentes sous la condition que l'espace considéré soit un espace métrique séparable. (Voir par exemple les propositions III 5A et V8 de [8]). Aussi, cette définition récursive requiert évidemment que  $n$  soit un entier et on peut voir aussi que les dimensions topologiques d'une droite, d'un plan et de l'espace sont respectivement de 1, 2 et 3. À chacune de ces dimensions correspond une mesure de l'objet considéré, soit la longueur, l'aire et le volume respectivement. Par exemple, considérons la surface d'une sphère, un objet de dimension 2. L'aire de cette surface est de  $4\pi r^2$ . Cependant, il ne fait pas de sens de parler de la longueur de cette surface (étant  $+\infty$ ) ou de son volume (étant évidemment 0).

Maintenant, considérons une courbe continue dans l'espace ayant un début et une fin. Nous savons que cette courbe a une dimension topologique de 1. De plus, il est normal d'espérer que cette courbe possède une longueur finie. Malheureusement, ce n'est pas toujours le cas. En effet, considérons la courbe de von Koch illustrée ci-dessous. La construction de cette courbe est relativement simple. Nous commençons avec le segment de droite  $[0, 1]$ , que nous appelons l'initiateur. Ensuite, nous divisons ce segment en trois parties d'égales longueurs et nous remplaçons le segment du milieu par deux segments toujours de la même longueur, se joignant au dessus du segment. Nous obtenons alors le générateur. Il est à noter que le générateur mesure  $(4/3)$  unité de longueur puisqu'il a été construit à l'aide de 4 segments dont chacun possède une longueur du tiers de la longueur initiale. Par la suite, nous remplaçons chacun des segments de droites par le générateur. Par raisonnement semblable, nous pouvons remarquer qu'après  $n$  itérations la longueur de la courbe est de  $(4/3)^n$ . Et si nous continuons à itérer de cette façon indéfiniment, nous obtenons la courbe de von Koch qui possède une longueur de  $(\lim_{n \rightarrow \infty} (4/3)^n)$ , c'est-à-dire de longueur infinie, mais qui possède

toutefois une aire nulle. On peut donc supposer que la dimension de cet objet se situe entre 1 et 2. Cependant, la dimension topologique d'un objet ne peut être qu'un nombre entier.

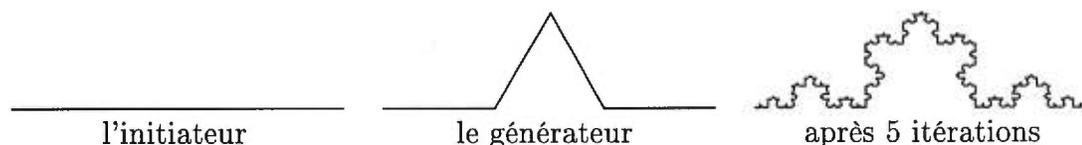


FIG. 1.0.1. *Courbe de von Koch*

Nous introduisons donc le deuxième type de dimension en question: la dimension de Hausdorff, dénotée par  $D$ . Définissons d'abord la mesure de Hausdorff d'un ensemble  $\mathcal{X}$  sur un espace métrique avec une fonction de distance  $d$ . Soit  $\delta(A)$  le diamètre d'un sous-ensemble  $A$  de  $\mathcal{X}$ , c'est-à-dire

$$\delta(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y)$$

Soit  $p \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$  et soit  $m_p^\varepsilon(\mathcal{X}) = \inf_{\{A_k\}} \sum_{k=1}^{\infty} [\delta(A_k)]^p$  où  $\{A_k\}$  est un recouvrement dénombrable de  $\mathcal{X}$  et où chaque ensemble est de diamètre moindre que  $\varepsilon$ , c'est-à-dire

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots = \mathcal{X} \text{ et } \delta(A_k) < \varepsilon \forall k.$$

Alors la mesure de Hausdorff d'ordre  $p$  est

$$m_p(\mathcal{X}) = \sup_{\varepsilon > 0} m_p^\varepsilon(\mathcal{X})$$

Besicovitch a démontré qu'il existe une constante  $D \in \mathbb{R}$  telle que  $m_p(\mathcal{X}) = 0 \forall p > D$  et  $m_p(\mathcal{X}) = \infty \forall p < D$ . Nous appelons alors  $D$  la dimension de Hausdorff de  $\mathcal{X}$ .

Par exemple, il est facile à démontrer que la courbe de von Koch est de dimension  $D = \frac{\log 4}{\log 3} \sim 1.2618 > 1$ .

Nous sommes maintenant en mesure d'introduire une définition des fractales. Nous savons d'abord que les deux dimensions introduites répondent à l'inégalité suivante:  $D \geq D_T$ . (Une preuve de ce théorème peut être trouvée au chapitre 7 de [10]). Nous pouvons aussi montrer facilement que pour un objet de la géométrie euclidienne, nous avons  $D = D_T$ . Nous définissons maintenant une fractale comme un ensemble pour lequel  $D > D_T$  bien que cette définition fasse encore l'objet de discussion.

Nous allons maintenant introduire une relation entre le périmètre et l'aire d'un objet donné. Pour des cercles, carrés et autres polygones réguliers, nous connaissons une relation simple entre le périmètre et l'aire de l'objet considéré à diverses échelles: si  $p = (\text{Périmètre})/(\text{Aire})^{1/2}$ , alors  $p$  est indépendant de la grandeur de l'objet considéré. Par exemple, pour un cercle nous obtenons  $p = 2\pi^{1/2}$  et pour un carré,  $p = 4$ , et ce, peu importe le rayon du cercle ou la longueur d'un côté du carré.

Mandelbrot introduit une relation similaire pour les fractales. Considérons une île quelconque (une courbe fractale fermée) de dimension  $D > 1$ . Soit  $L(G)$  la longueur de la côte de l'île mesurée à l'aide d'un bâton de longueur  $G$  et soit  $A(G)$  l'aire de l'île mesurée à l'aide d'un carré dont les côtés sont tous de longueur  $G$ . Alors le ratio

$$(L(G))^{1/D}/(A(G))^{1/2} = p_D$$

a la même valeur pour des îles géométriquement similaires, c'est-à-dire que  $p_D$  ne dépend pas de la grandeur de l'île. Cependant,  $p_D$  dépend de  $G$ . Pour établir la validité de cette proposition, nous allons observer deux îles similaires de grandeurs différentes telles qu'illustrées dans la figure 1.0.2 et nous allons introduire une

nouvelle mesure  $G_i^*$  qui dépend de l'aire  $A_i(G)$  de l'île  $i$ :

$$G_i^* = \lambda \sqrt{A_i(G)}$$

où  $A_i$  est l'aire de l'île  $i$  mesurée à l'aide de carrés dont chaque côté est de longueur  $G$  et  $\lambda$  est un petit nombre (1/1000 dans [10])

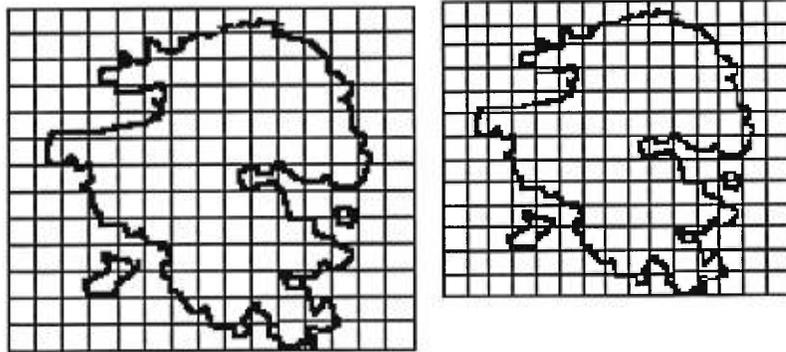


FIG. 1.0.2. Îles géométriquement similaires avec quadrillé dépendant de l'aire

On mesure alors la longueur  $L_i(G_i^*)$  de l'île  $i$  à l'aide de  $N_\lambda$  bâtons de longueur  $G_i^*$ , c'est-à-dire que  $L_i(G_i^*) = N_\lambda G_i^*$ . Maintenant, par construction de  $G_i^*$  il est important de noter que, pour des îles géométriquement semblables,  $N_\lambda$  est indépendant de la grandeur de l'île. De plus, par la définition de la dimension fractale  $D$  nous savons que  $N_\lambda(G) \sim \frac{1}{G^D}$  et donc  $N_\lambda(G) = \frac{L_i}{G^D}$  ( $L_i$  est constant par rapport à  $G$ )

On a enfin

$$\begin{aligned}
 L_i(G) &= N(G) G \\
 &= \frac{L_i}{G^D} G \\
 &= \frac{L_i}{(G_i^*)^D} (G_i^*)^D G^{1-D} \\
 &= N(G_i^*) (G_i^*)^D G^{1-D} \\
 &= N_\lambda (G_i^*)^D G^{1-D}
 \end{aligned}$$

Nous avons donc  $L_i(G) = N_\lambda (G_i^*)^D G^{1-D}$  et si nous remplaçons  $G_i^*$  par  $\lambda\sqrt{A_i(G)}$  tel que défini, nous obtenons alors

$$L_i(G) = N_\lambda \lambda^D G^{1-D} (\sqrt{A_i(G)})^D$$

d'où le ratio

$$p_D(G) = \frac{L_i(G)^{1/D}}{A_i(G)^{1/2}} = N_\lambda^{1/D} \lambda G^{(1-D)/D}$$

ne dépend pas de la grandeur de l'île mais de la longueur  $G$  et du facteur  $\lambda$ , ce qui complète la démonstration.

Pour illustrer cette relation, nous allons considérer la relation entre la longueur des fleuves et l'aire de leur bassin. Les données que l'on trouve en annexe sont tirées du livre de Cousteau et Paccalet [3]. On note premièrement que la longueur du fleuve correspond à la longueur du fleuve à partir de la source de l'affluent du fleuve qui se trouve le plus loin de la mer. Quant à lui, le bassin désigne la superficie de terrain d'où le fleuve et ses affluents collectent les eaux de ruissellement.

Rappelons que la saucisse de Minkowski de rayon  $r$  autour d'une courbe  $C$  est défini comme étant l'ensemble des points dont la distance à la courbe est moindre que  $r$ . Supposons d'abord que l'on représente le fleuve et son bassin

par un segment de droite de longueur  $L = nh$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , avec  $h$  une constante et que le bassin est la saucisse de Minkowski autour de la droite de rayon  $r = nk$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , avec  $k$  une autre constante. Nous obtenons alors que la longueur du fleuve est  $L = nh$  alors que l'aire du bassin est de

$$\begin{aligned} \text{aire} &= Lr + \pi r^2 = nhnk + \pi(nk)^2 \\ &= n^2(hk + \pi k^2) \end{aligned}$$

On voit donc que le ratio

$$\frac{\text{longueur}}{\text{aire}^{1/2}} = \frac{nh}{[n^2(hk + \pi k^2)]^{1/2}} = \frac{h}{(hk + \pi k^2)^{1/2}}$$

ne dépend pas de  $n$ .

On obtient donc que la dimension  $D$  de ce fleuve est 1.

De plus, la pente du diagramme  $\log(\text{Aire})$ - $\log(\text{Longueur})$  est de 2 car nous avons, avec  $L$  et  $A$  exprimant la longueur du fleuve et l'aire de son bassin respectivement,

$$\begin{aligned} L^2 &= \frac{h^2}{hk + \pi k^2} A \\ \Rightarrow (\ln A) &= 2(\ln L) + \left(\ln \frac{hk + \pi k^2}{h^2}\right) \end{aligned}$$

La troisième figure illustre les données recueillies dans un diagramme  $\log(\text{Aire})$ - $\log(\text{Longueur})$ . La ligne pleine indique la droite approchant le mieux les données et a été calculée à l'aide de la méthode des moindres carrés. La ligne pointillée nous montre une droite de pente 2. Cette figure nous montre bien que la pente du diagramme  $\log$ - $\log$  est de 1.82, et est donc moindre que 2.

Comment explique-t-on ce fait? Il est bien évident que le modèle avec la saucisse de Minkowski ne représente pas de façon très précise un fleuve et son bassin. Premièrement, un fleuve n'est pas un segment de droite, ni même une union de

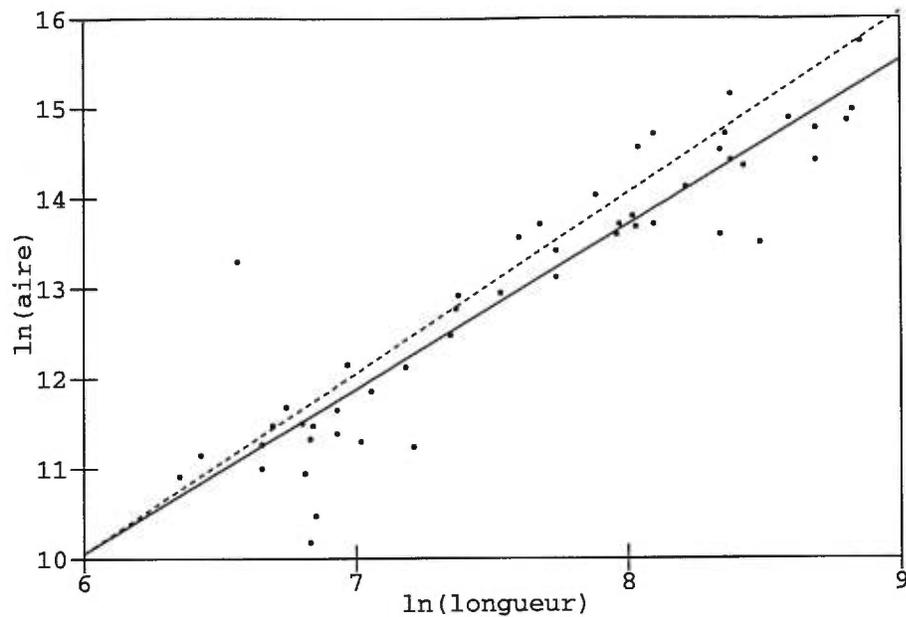


FIG. 1.0.3. *Diagramme log-log*

segments de droites, mais plutôt une courbe irrégulière. Il serait donc plus adéquat de représenter un fleuve comme une fractale. Donc si tous les fleuves et leurs bassins sont statistiquement similaires, en représentant un fleuve comme une ligne sinueuse, la version fractale du rapport longueur-aire devrait nous donner que

$$\frac{(\text{longueur})^{1/D}}{(\text{aire})^{1/2}} = C$$

où  $D$  est la dimension fractale du fleuve.

L'analyse des données nous donne que la pente du diagramme log-log est de 1.82 et que l'ordonnée à l'origine est de -0.87, c'est-à-dire que

$$\ln A = 1.82 \ln L - 0.87$$

De plus, le coefficient de corrélation est de -0.995 et donc très près de -1 ce qui nous montre bien que la relation  $\log(\text{Aire du bassin})-\log(\text{Longueur du fleuve})$  révèle un comportement de linéarité.

Maintenant,

$$\begin{aligned} \ln A &= 1.82 \ln L - 0.87 \\ \Rightarrow \ln A &= \ln \frac{L^{1.82}}{e^{0.87}} \\ \Rightarrow A &= \frac{L^{1.82}}{e^{0.82}} \\ \Rightarrow e^{0.82} &= \frac{L^{1.82}}{A} \\ \Rightarrow e^{0.82/2} &= \frac{L^{1.82/2}}{A^{1/2}} \\ \Rightarrow c &= \frac{L^{0.91}}{A^{1/2}} \end{aligned}$$

où  $c$  est une constante ( $c = e^{0.41}$ ).

Donc  $1/D = 0.91 \Rightarrow D = 1.10$ .

Nous obtenons donc que

$$\frac{(\text{longueur})^{1/1.10}}{\text{aire}^{1/2}} = C$$

et que  $D = 1.10 > 1$ .

Donc, les données nous montrent que les fleuves peuvent être représentés de façon adéquate comme étant des fractales de dimension  $D = 1.10$ . Il est aussi à noter que de cette analyse, nous obtenons que les fleuves sont tous similaires du point de vue de la géométrie fractale. Il est aussi intéressant de remarquer que Hack en 1957, tel que rapporté par Mandelbrot [10], a trouvé, par cette même méthode, que pour les rivières nous avons  $D = 1.2$ . On remarque donc que les deux valeurs sont relativement proches.

## Chapitre 2

---

### LES SYSTÈMES DE FONCTIONS ITÉRÉES

Pour être en mesure de définir un système de fonctions itérées, un SFI, nous devons d'abord introduire quelques notions. Nous travaillons avec un espace métrique  $(\mathcal{X}, d)$ . Il faut tout d'abord se rappeler qu'un sous-ensemble  $C$  de  $\mathcal{X}$  est dit compact si chaque suite  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  dans  $C$  contient une sous-suite convergente vers un point de  $C$ . Nous introduisons maintenant l'espace métrique  $(\mathcal{H}(\mathcal{X}), h)$ , qui joue un rôle très important dans les SFI.

**Définition 2.0.1.** *Soit  $(\mathcal{X}, d)$  un espace métrique complet. Alors  $\mathcal{H}(\mathcal{X})$  dénote l'espace où les points sont les sous-ensembles compacts de  $\mathcal{X}$  autres que l'ensemble vide.*

Effectuons maintenant un rappel sur quelques notions topologiques. Soient  $A$  et  $B$  des sous-ensembles compacts de  $\mathcal{X}$ . La distance du point  $x \in \mathcal{X}$  à l'ensemble  $B$  est définie par

$$d(x, B) = \min\{d(x, y); y \in B\}$$

et la distance de l'ensemble  $A$  à l'ensemble  $B$  est définie par

$$d(A, B) = \max\{d(x, B); x \in A\}$$

Il est à noter que ces deux définitions ont du sens puisque  $A$  et  $B$  sont compacts et que la fonction  $x \rightarrow d(x, B)$  est continue. Il est aussi à noter qu'il

existe des points  $x_0 \in A$  et  $y_0 \in B$  tels que  $d(A, B) = d(x_0, y_0)$  par la compacité de  $A$  et  $B$ . Nous pouvons maintenant définir la distance de Hausdorff sur  $\mathcal{H}(\mathcal{X})$ .

**Définition 2.0.2.** *Soit  $(\mathcal{X}, d)$  un espace métrique complet. Alors la distance de Hausdorff entre les deux points  $A, B \in \mathcal{H}(\mathcal{X})$  ( $A$  et  $B$  des sous-ensembles compacts de  $\mathcal{X}$ ) est définie par*

$$h(A, B) = \max(d(A, B), d(B, A))$$

Il est à noter que la distance de Hausdorff peut être assez facilement généralisée à une distance entre des ensembles bornés. Dans ce cas cependant, nous pouvons avoir  $h(A, B) = 0$  tout en ayant  $A \neq B$ . Donc, il faut considérer deux ensembles  $A$  et  $B$  équivalents si  $h(A, B) = 0$ . L'espace dont les points sont ces classes d'équivalences est dénoté  $(2^{\mathcal{X}})$  et il est important de remarquer que tous les théorèmes qui suivent sont valables dans ce cas aussi.

Nous obtenons enfin ce théorème important:

**Théorème 1.**  *$h$  est une métrique sur  $\mathcal{H}(\mathcal{X})$ , c'est-à-dire que  $(\mathcal{H}(\mathcal{X}), h)$  est un espace métrique.*

**Preuve:** Soit  $A, B, C \in \mathcal{H}(\mathcal{X})$ , alors on a évidemment

$$h(A, A) = \max(d(A, A), d(A, A)) = \max(0, 0) = 0.$$

Donc  $h(A, A) = 0$ . Aussi par compacité de  $A$  et  $B$ ,  $\exists x_0 \in A$  et  $\exists y_0 \in B$  tels que  $d(A, B) = d(x_0, y_0)$ . Aussi  $\exists x_1 \in A$  et  $\exists y_1 \in B$  tels que  $d(B, A) = d(x_1, y_1)$ . Nous obtenons alors que

$$h(A, B) = \max(d(A, B), d(B, A)) = \max(d(x_0, y_0), d(x_1, y_1)) = d(x_i, y_i)$$

où  $i = 0$  ou  $i = 1$  et donc  $h(A, B) = d(x_i, y_i)$  et puisque  $0 \leq d(x_i, y_i) < \infty$  on obtient que

$$0 \leq h(A, B) < \infty$$

De plus, si  $A \neq B$  alors on peut supposer  $\exists a \in A$  tel que  $a \notin B$  ( sinon  $\exists b \in B$  tel que  $b \notin A$  ). Alors,

$$h(A, B) = \max(d(A, B), d(B, A)) \geq d(A, B) = \max_{x \in A} d(x, B) \geq d(a, B) > 0$$

On a donc  $0 \leq h(A, B) < \infty$  et  $h(A, B) = 0 \iff A = B$ .

On montre enfin que  $h(A, B) \leq h(A, C) + h(C, B)$ . On commence par établir que  $d(a, B) \leq d(a, C) + d(C, B)$ . En effet,  $\forall a \in A$  nous avons

$$\begin{aligned} d(a, B) &= \min\{d(a, b); b \in B\} \\ &\leq \min\{d(a, c) + d(c, b); b \in B\} && \forall c \in C \\ &= d(a, c) + \min\{d(c, b); b \in B\} && \forall c \in C \\ &= d(a, c) + d(c, B) && \forall c \in C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d(a, B) &\leq \min\{d(a, c); c \in C\} + \max\{d(c, B); c \in C\} \\ &= d(a, C) + d(C, B) && \text{et ce } \forall a \in A \end{aligned}$$

$$\Rightarrow d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$$

De la même façon, on peut montrer que  $d(B, A) \leq d(B, C) + d(C, A)$ . Enfin,

$$\begin{aligned} h(A, B) &= \max\{d(A, B), d(B, A)\} \\ &\leq \max\{d(A, C) + d(C, B), d(B, C) + d(C, A)\} \\ &\leq \max\{d(A, C), d(C, A)\} + \max\{d(C, B), d(B, C)\} \\ &= h(A, C) + h(C, B) \end{aligned}$$

ce qui complète la preuve.

Ainsi,  $(\mathcal{H}(\mathcal{X}), h)$  est un espace métrique. De plus, il est possible de démontrer que cet espace est complet. (Voir par exemple le théorème 1 section 2.7 de [1]). Il ne nous reste plus maintenant qu'à introduire un type de transformations pour être en mesure de définir un SFI.

**Définition 2.0.3.** Une transformation  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  sur un espace métrique complet  $(\mathcal{X}, d)$  est appelée une contraction s'il existe une constante  $s$  telle que  $0 \leq s < 1$  et

$$d(f(x), f(y)) \leq sd(x, y) \quad \forall x, y \in \mathcal{X}$$

Cette constante est appelée constante de Lipschitz.

**Théorème 2.** Soit  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  une contraction sur un espace métrique complet  $(\mathcal{X}, d)$ . Alors  $f$  possède exactement un point fixe  $x_f \in \mathcal{X}$  et pour tout  $x \in \mathcal{X}$ , la suite  $\{f^{on}(x); n = 0, 1, 2, \dots\}$  converge à  $x_f$ . C'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{on}(x) = x_f \quad \forall x \in \mathcal{X}$$

Ici, par  $f^{on}$ , on entend  $n$  compositions de la fonction  $f$ .

**Preuve:** Il s'agit ici, en fait, du principe des contractions de Banach. Puisqu'il s'agit d'un théorème bien connu, nous allons parcourir rapidement la preuve.

L'unicité provient du fait que, si nous supposons qu'il existe deux points fixes,  $x_1$  et  $x_2$ , c'est-à-dire que  $f(x_1) = x_1$  et que  $f(x_2) = x_2$ , alors

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq sd(f(x_1), f(x_2)) = sd(x_1, x_2)$$

avec  $s \in (0, 1)$  et ainsi  $d(x_1, x_2) = 0$  et d'où  $x_1 = x_2$ . Maintenant, soit  $x$  un point quelconque de  $\mathcal{X}$  et considérons la suite  $(f^{on}(x), n = 0, 1, 2, \dots)$ . Il s'agit en fait d'une suite de Cauchy. En effet, puisque  $f$  est une contraction nous pouvons aisément prouver que,  $\forall \varepsilon > 0$  donné, (si  $m \wedge n = \min(m, n)$ )

$$\begin{aligned} d(f^{on}(x), f^{om}(x)) &\leq s^{m \wedge n} d(x, f^{|n-m|}(x)) \\ &\leq \frac{s^{m \wedge n}}{1-s} d(x, f(x)) < \varepsilon \end{aligned}$$

pour  $m$  et  $n$  sont assez grand. Donc  $f^{on}(x)$  est une suite de Cauchy et puisque  $\mathcal{X}$  est un espace complet, la suite possède une limite, disons  $x_f$ . On peut facilement vérifier que ce point est le point fixe recherché.

On rappelle aussi qu'une contraction est toujours continue et que l'image d'un ensemble compact par une fonction continue est aussi compacte. Les deux lemmes suivants permettent enfin de définir des contractions sur  $\mathcal{H}(\mathcal{X})$ .

**Lemme 2.0.1.** *Soit  $w : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  une contraction sur l'espace métrique complet  $(\mathcal{X}, d)$  avec constante de Lipschitz  $s$ . Alors  $W : \mathcal{H}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{X})$  définie par*

$$W(A) = \{w(x) : x \in A\} \quad \forall A \in \mathcal{H}(\mathcal{X})$$

*est une contraction sur  $(\mathcal{H}(\mathcal{X}), h)$  de constante de Lipschitz  $s$ .*

**Preuve:** On a premièrement que pour  $A \in \mathcal{H}(\mathcal{X})$ ,  $W(A) \in \mathcal{H}(\mathcal{X})$  car  $w$  étant une contraction, elle est aussi continue et donc l'image de  $A$  reste compacte.

Ensuite, si  $A, B \in \mathcal{H}(\mathcal{X})$ , alors

$$\begin{aligned} d(W(A), W(B)) &= \max\{\min\{d(w(x), w(y)), y \in B\}, x \in A\} \\ &\leq \max\{\min\{sd(x, y), y \in B\}, x \in A\} \\ &= s \max\{\min\{d(x, y), y \in B\}, x \in A\} = sd(A, B) \end{aligned}$$

De façon similaire, on obtient  $d(W(B), W(A)) \leq sd(B, A)$ , ainsi

$$\begin{aligned} h(W(A), W(B)) &= \max\{d(W(A), W(B)), d(W(B), W(A))\} \\ &\leq s \max\{d(A, B), d(B, A)\} = sh(A, B) \end{aligned}$$

d'où  $W$  est une contraction sur  $\mathcal{H}(\mathcal{X})$ .

**Lemme 2.0.2.** *Soit  $(\mathcal{X}, d)$  un espace métrique et  $\{W_n; n = 1, 2, \dots, N\}$  des contractions sur  $\mathcal{H}(\mathcal{X})$  de constantes de Lipschitz  $s_n$ . Soit  $W : \mathcal{H}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{X})$  définie par*

$$W(A) = \bigcup_{n=1}^N W_n(A)$$

*Alors  $W$  est une contraction sur  $\mathcal{H}(\mathcal{X})$  de constante de Lipschitz  $s = \max\{s_n; n = 1, 2, \dots, N\}$*

**Preuve:** La preuve de ce lemme suit assez facilement du fait que pour tout  $A, B, C, D \in \mathcal{H}(\mathcal{X})$  nous avons

$$h(A \cup B, C \cup D) \leq \max\{h(A, C), h(B, D)\}$$

et par induction sur  $n$ .

Nous voilà enfin préparés à introduire les SFI.

**Définition 2.0.4.** *Un système de fonctions itérées, un SFI, consiste d'un espace métrique complet  $(\mathcal{X}, d)$  et d'un ensemble fini de contractions  $\{w_n; n = 1, 2, \dots, N\}$*

de constantes de Lipschitz  $s_n$ . On dénote ce SFI par  $\{\mathcal{X}, w_n; n = 1, 2, \dots, N\}$  et sa constante de Lipschitz est  $s = \max\{s_n; n = 1, 2, \dots, N\}$ .

Le théorème suivant nous montre comment les SFI peuvent définir une classe de fractales. Ce théorème découle directement des théorèmes précédents et il a été introduit par Williams dans [12] et par Hutchinson dans [9].

**Théorème 3.** Soit  $\{\mathcal{X}, w_n; n = 1, 2, \dots, N\}$  un SFI de constante de Lipschitz  $s$ . Alors la transformation  $W : \mathcal{H}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{X})$

$$W(A) = \bigcup_{n=1}^N W_n(A)$$

est une contraction sur l'espace métrique complet  $(\mathcal{H}(\mathcal{X}), h)$  de constante de Lipschitz  $s$ . L'unique point fixe  $A \in \mathcal{H}(\mathcal{X})$  est donné par

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^{on}(B)$$

pour n'importe quel point  $B \in \mathcal{H}(\mathcal{X})$

**Définition 2.0.5.** Le point fixe  $A \in \mathcal{H}(\mathcal{X})$  est appelé l'attracteur du SFI.

C'est ce point fixe  $A$  qui nous donne de bons exemples de fractales. Nous allons en voir trois. Pour représenter les deux premiers attracteurs, nous allons utiliser l'algorithme de Hutchinson: pour tout ensemble compact  $B$ , la suite  $\{B_n\}$ ,  $B_n = W^n(B)$  est une suite qui converge dans la métrique de Hausdorff à l'attracteur  $A$ . Il est à noter qu'un bon choix pour l'ensemble  $B$  est le singleton  $\{x\}$  où  $x$  est le point fixe d'une fonction du SFI. Dans ce cas, il est aisé de voir que  $\{B_n\}$  forme une suite croissante d'ensemble, c'est-à-dire  $B_0 \subset B_1 \subset B_2 \subset \dots$ .

Notre premier exemple explique la construction d'un ensemble bien connu: l'ensemble de Cantor. Comme nous allons le voir, il est en effet possible de définir l'ensemble de Cantor comme le point fixe d'un SFI.

Nous commençons donc avec  $(\mathbb{R}, d)$  où  $d(x, y) = |x - y|$  et nous définissons  $w_1(x) = \frac{1}{3}x$  et  $w_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ . Il est alors facile de voir que  $\{\mathbb{R}; w_1, w_2\}$  est un SFI de constante de Lipschitz  $s = 1/3$ . De plus, si l'on dénote l'ensemble de Cantor par  $C$ , alors nous avons  $C = \frac{1}{3}C \cup \{\frac{1}{3}C + \frac{2}{3}\}$  et on peut donc en conclure que  $C$  est le point fixe de notre SFI. Pour illustrer ces propos, nous commençons avec  $B_0 = [0, 1]$  et la figure 2.0.1 donne les ensembles  $B_0$  à  $B_4$ .



FIG. 2.0.1. *Construction de l'ensemble de Cantor*

L'exemple suivant est une fractale assez connue aussi. Il s'agit du triangle de Sierpiński. Pour la construction que nous retrouvons dans la deuxième figure, nous avons utilisé le SFI suivant:  $\{\mathbb{R}^2; w_1, w_2, w_3\}$  où

$$\begin{aligned}
 w_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} \\
 w_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \\
 w_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Nous commençons le processus d'itération avec  $B_0 = \{(0, 1)\}$ , le point fixe de  $w_1$  et la figure 2.0.2 nous donne  $B_{10}$ , une bonne approximation du point fixe du SFI.

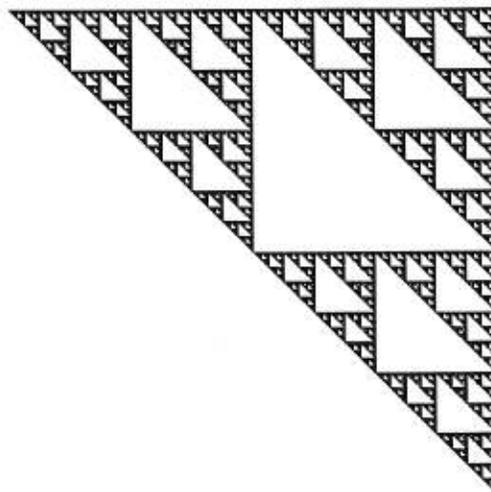


FIG. 2.0.2. *Le triangle de Sierpiński*

Enfin, le troisième exemple nous montre la construction de la fougère de Barnsley. Cette fougère correspond au SFI  $\{\mathbb{R}^2; w_1, w_2, w_3, w_4\}$  où

$$\begin{aligned}
w_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
w_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.85 & 0.04 \\ -0.04 & 0.85 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \end{pmatrix} \\
w_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.2 & -0.26 \\ 0.23 & 0.22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \end{pmatrix} \\
w_4 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -0.15 & 0.28 \\ 0.26 & 0.24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.44 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

La figure 2.0.3, représentant l'attracteur de ce SFI, a été construite différemment de la méthode directe appliquée dans les deux premiers cas. Elle utilise l'algorithme d'itération aléatoire de Barnsley-Demko que l'on peut retrouver dans [1].



FIG. 2.0.3. *La fougère de Barnsley*

## Chapitre 3

---

### LES COURBES DE DE RHAM

#### 3.1. PRÉLIMINAIRE: DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS

Nous introduisons maintenant les courbes de de Rham. Une courbe de ce type est la limite d'une suite  $\{P^n\}_{n=0}^{\infty}$  de lignes polygonales construites selon la méthode particulière suivante. Nous commençons avec la ligne polygonale de sommets  $A, B$  et  $C$ , trois points distincts quelconques. C'est-à-dire que ces trois points peuvent être vus comme les sommets d'un triangle. Nous dénotons cette ligne polygonale par  $P^0 = \{A, B, C\}$  et elle est formée des deux segments de droites,  $AB$  et  $BC$ .

Ensuite, les sommets de la ligne polygonale  $P^n$  sont les points qui divisent les côtés de la ligne polygonale précédente,  $P^{n-1}$ , en trois parties de telle sorte que les parties aux extrémités soient de même longueur, alors que la partie du milieu soit en rapport  $\gamma : 1$  avec l'une des extrémités. La figure 3.1.1 nous montre le passage de  $P^0 = \{A, B, C\}$  à  $P^1 = \{A', B', C', D'\}$ .  $P^0$  et  $P^1$  sont représentées par la ligne pointillée et la ligne pleine respectivement et  $\gamma$  a été choisi égal à deux.

On voit donc que la courbe  $C_\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \{P^n\}$  est déterminée par les points  $A, B, C$  et par le paramètre  $\gamma$ . Nous pouvons aussi remarquer que  $P^n$  possède  $2^n + 1$  cotés.

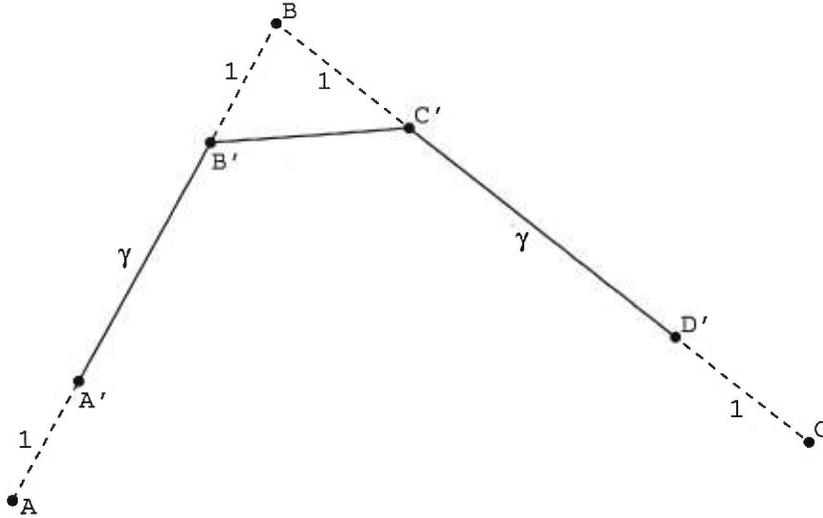


FIG. 3.1.1. Première étape de la construction de la courbe de de Rham

Dénotons maintenant les sommets de  $P^n$  par  $S_0^n, \dots, S_{2^n+1}^n$ . Pour calculer les sommets de  $P^{n+1}$  à partir de ceux de  $P^n$  nous utilisons les deux formules suivantes:

$$S_{2i}^{n+1} = \alpha S_i^n + \beta S_{i+1}^n, \quad S_{2i+1}^{n+1} = \beta S_i^n + \alpha S_{i+1}^n$$

où  $\beta = \frac{1}{\gamma+2}$  et  $\alpha = 1 - \beta$  et ce, pour  $i = 0, 1, \dots, 2^n$ .

Il est intéressant de noter que la construction de la courbe de de Rham donne naissance à une paramétrisation naturelle de celle-ci. Dénotons par  $M(0)$  et  $M(1)$  les points milieux des côtés  $AB$  et  $BC$  respectivement. Nous pouvons tout d'abord remarquer que ces points correspondent aux extrémités de la courbe limite. Il est aisé de voir aussi que les côtés de  $P^n$  contiennent  $2^n - 1$  points milieux entre  $M(0)$  et  $M(1)$  puisque  $P^n$  contient  $2^n + 1$  côtés dont les côtés contenant  $M(0)$  et  $M(1)$ . De plus, si un point milieu occupe le rang  $r$  après  $M(0)$  dans  $P^n$ , alors il sera aussi un point milieu dans  $P^{n+k}$  et il occupera le rang  $2^k r$ . On voit donc que si l'on dénote ce point par  $M(r/2^n)$ , nous obtenons une paramétrisation  $M(t)$   $0 \leq t \leq 1$  de la courbe. Les figures 3.1.2 et 3.1.3 ont été construites à

partir du triangle de sommets  $A = (0,0)$ ,  $B = (1,2)$  et  $C = (2,1)$ , alors que  $\gamma = 3.5$ . La première figure nous montre, à gauche, les trois premières étapes de la construction de la courbe avec les points milieux et à droite la représentation de la paramétrisation. La deuxième figure nous présente les composantes  $x(t)$  et  $y(t)$  de  $M(t)$  à gauche et à droite respectivement.

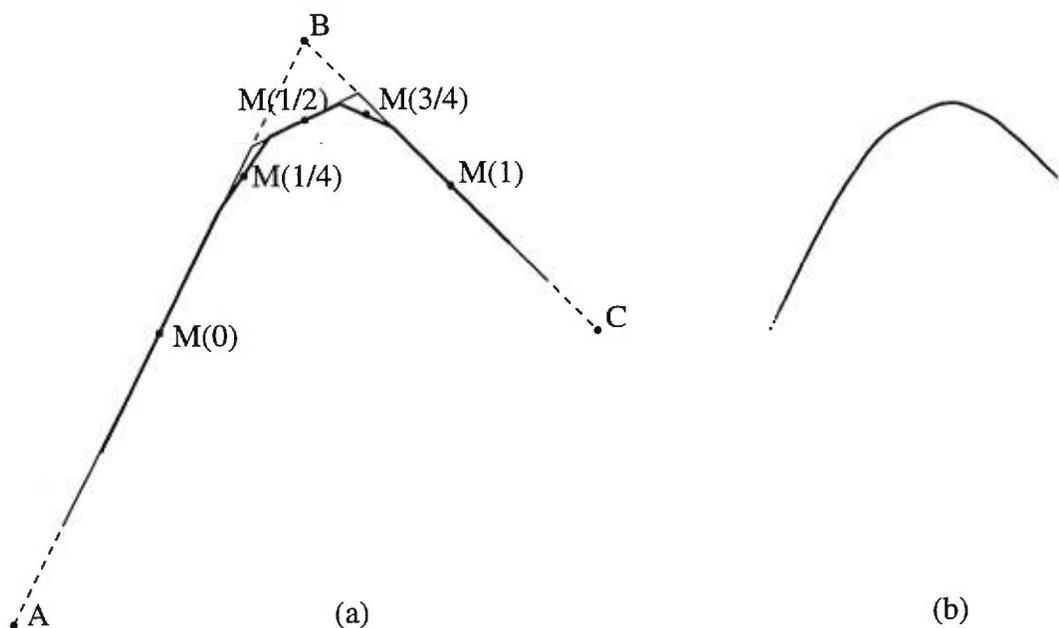


FIG. 3.1.2. Les points milieux de  $P^2$  et la courbe limite

Nous pouvons voir dans la figure 3.1.3 que les composantes  $x(t)$  et  $y(t)$  de la courbe semblent posséder quelques irrégularités. Celles-ci pourraient nous inciter à croire que les rapports entre les longueurs de deux côtés consécutifs de  $P^n$  ne seront pas uniformément bornés. Comme nous le verrons plus tard, tel n'est pas le cas.

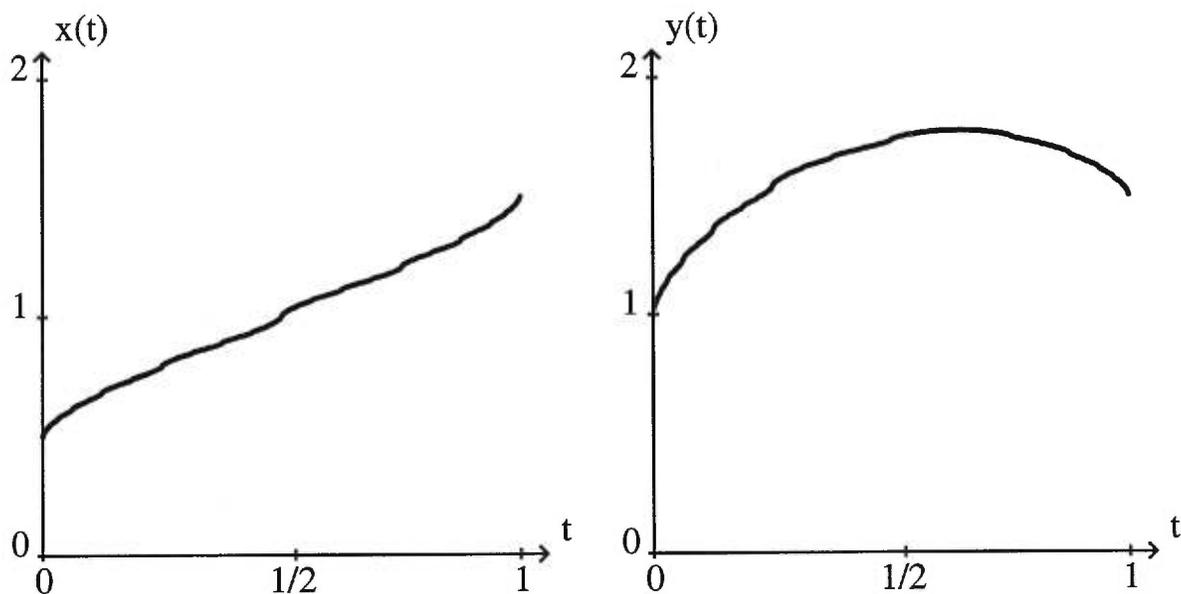


FIG. 3.1.3. Les composantes  $x(t)$  et  $y(t)$

Dans l'article [5], de Rham établit que  $\{P^n\}$  est une suite de courbes polygonales convexes convergentes à la courbe convexe et continue  $C_\gamma$ . De plus, comme nous l'avons déjà dit, puisque chaque point milieu d'un côté de  $P^n$  est un point milieu d'un certain côté pour chaque itération subséquente, on peut aisément voir que  $C_\gamma$  est tangente à  $P^n$  en tous ses points milieux. Enfin, de Rham établit aussi que si  $\gamma > 1$  alors  $C_\gamma$  a une tangente à chaque point et la pente de la tangente est continue. De plus si  $\gamma = 2$  alors  $C_2$  est un "arc de parabole" du point milieu de  $AB$  au point milieu de  $BC$ , c'est-à-dire que l'on peut représenter les composantes  $x$  et  $y$  de la courbe comme deux polynômes quadratiques. Par exemple, si  $A = (-1, 0)$ ,  $B = (1, 0)$  et  $C = (1, 2)$ , alors  $x(t) = 2t - t^2$  et  $y(t) = t^2$  (voir [5]).

### 3.2. ÉTUDE SUR LA LONGUEUR DES COURBES DE DE RHAM

Nous introduisons maintenant deux approximations de la longueur de la courbe de de Rham. Introduisons tout d'abord quelques notations. Nous représentons les points milieux des cotés de  $P^n$  par  $M_i^n$  pour  $i = 0, 1, 2, \dots, 2^n$ . On peut remarquer que  $M_i^n$  correspond au point  $M(i/2^n)$  de la paramétrisation. Soit aussi  $\theta_i^n$  l'angle entre les côtés  $S_i^n S_{i+1}^n$  et  $S_{i+1}^n S_{i+2}^n$  et soit  $\lambda_i^n = |S_i^n S_{i+1}^n|$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, 2^n$ , la longueur du segment  $S_i^n S_{i+1}^n$  de  $P^n$ . Finalement soit  $L^n$  la longueur de  $P^n$  mesurée à partir du point milieu de  $AB$  jusqu'à celui de  $BC$ , c'est-à-dire de  $M_0^n$  jusqu'à  $M_{2^n}^n$  et soit  $l^n$  la longueur de la courbe polygonale de sommet  $M_0^n, M_1^n, \dots, M_{2^n}^n$ .

On remarque donc que,  $M_i^n$  étant un point milieu,  $M_i^n = (S_i^n + S_{i+1}^n)/2$  et comme nous l'avons déjà dit  $M_i^n = M_{2^i}^{n+1}$ , c'est-à-dire que le  $i^e$  point milieu de  $P^n$  occupe le rang  $i + 1$  dans  $P^{n+1}$ . Maintenant, pour alléger la notation, nous allons omettre l'indice  $n$ . Nous allons donc écrire  $M_i$  et  $S_i$  à la place de  $M_i^n$  et  $S_i^n$ . De plus, pour identifier l'étape suivante nous allons écrire  $M_i'$  pour  $M_i^{n+1}$  et similairement pour  $S_i'$ . La figure suivante illustre les divers paramètres de la construction de la courbe que nous venons d'introduire.

Nous avons donc

$$L^n = \sum_{i=0}^{2^n-1} (|M_i S_{i+1}| + |S_{i+1} M_{i+1}|), \quad L^0 = (|AB| + |BC|)/2$$

et

$$l^n = \sum_{i=0}^{2^n-1} |M_i M_{i+1}|, \quad l^0 = |AC|/2.$$

Aussi, J. Itard dans [11] a présenté deux postulats importants d'Archimède concernant la longueur de courbes. Ces postulats sont :

- i. La droite est la ligne la plus courte joignant ses extrémités.

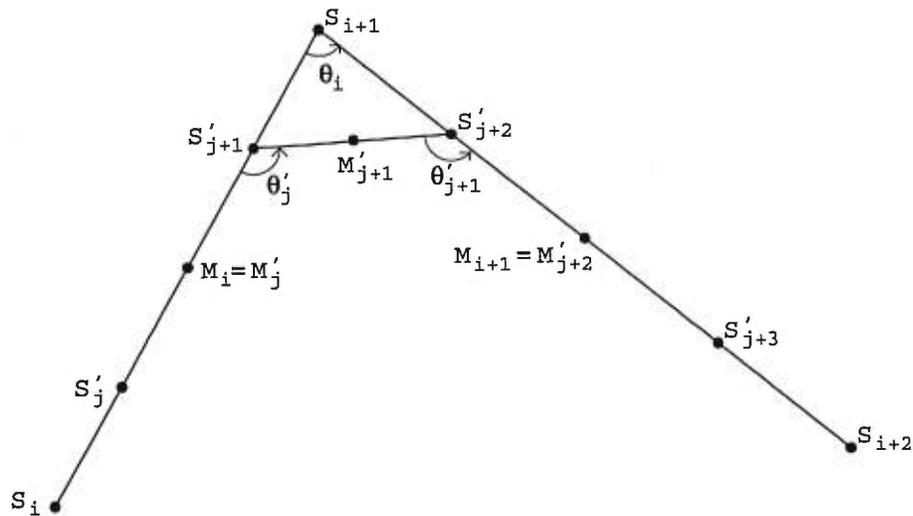


FIG. 3.2.1. Les paramètres de la courbe de de Rham

- ii. De deux lignes planes convexes joignant deux points donnés situées du même côté de la droite de jonction, et dont l'une enveloppe l'autre, c'est l'enveloppante qui est la plus grande.

Ici, on voit facilement que la courbe de longueur  $L^n$  enveloppe  $C_\gamma$  qui, elle-même, enveloppe la courbe de longueur  $l^n$ . De plus, ces trois courbes sont convexes et situées du même côté de la droite joignant les points milieux de  $AB$  et  $BC$ . Ainsi, en utilisant deux fois le deuxième postulat d'Archimède, nous obtenons que  $l^n \leq |C_\gamma| \leq L^n$  où  $|C_\gamma|$  dénote la longueur de la courbe  $C_\gamma$ .

On obtient alors assez facilement un premier résultat:

**Lemme 3.2.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}$  nous avons

$$L^{n+1} = \frac{\gamma L^n + 2l^n}{\gamma + 2}$$

**Preuve:** Soit  $j = 2i$ , alors pour  $i = 0, 1, \dots, 2^n$  nous avons

$$\begin{aligned}
& |M'_j S'_{j+1}| + |S'_{j+1} M'_{j+1}| + |M'_{j+1} S'_{j+2}| + |S'_{j+2} M'_{j+2}| \\
&= |M'_j S'_{j+1}| + |S'_{j+1} S'_{j+2}| + |S'_{j+2} M'_{j+2}| \\
&= \frac{\gamma}{\gamma+2} |M_i S_{i+1}| + \frac{2}{\gamma+2} |M_i M_{i+1}| + \frac{\gamma}{\gamma+2} |S_{i+1} M_{i+1}| \\
&= \frac{\gamma}{\gamma+2} (|M_i S_{i+1}| + |S_{i+1} M_{i+1}|) + \frac{2}{\gamma+2} |M_i M_{i+1}|
\end{aligned}$$

Nous obtenons donc,

$$\begin{aligned}
L^{n+1} &= \sum_{j=0}^{2^{n+1}-1} |M'_j S'_{j+1}| + |S'_{j+1} M'_{j+1}| \\
&= \frac{\gamma}{\gamma+2} \sum_{i=0}^{2^n-1} (|M_i S_{i+1}| + |S_{i+1} M_{i+1}|) + \frac{2}{\gamma+2} \sum_{i=0}^{2^n-1} |M_i M_{i+1}| \\
&= \frac{\gamma}{\gamma+2} L^n + \frac{2}{\gamma+2} l^n \\
&= \frac{\gamma L^n + 2l^n}{\gamma+2}
\end{aligned}$$

ce qui complète la preuve.

Grâce à ce résultat, nous pouvons démontrer la convergence des deux suites considérées:

**Théorème 4.** *Les suites  $(L^n)$  et  $(l^n)$  convergent à la même limite, c'est-à-dire la longueur de  $C_\gamma$ .*

**Preuve:** Nous avons tout d'abord  $l_n \leq |C_\gamma| \leq L_n$  pour tout  $n$ . Donc si nous avons que  $\lim_{n \rightarrow \infty} l^n = \lim_{n \rightarrow \infty} L^n = L$  alors  $L \leq |C_\gamma| \leq L \Rightarrow |C_\gamma| = L$ . Nous avons donc simplement à démontrer que les deux suites convergent vers la même limite. Soit  $j = 2i$  nous avons alors

$$|M_i M_{i+1}| = |M'_j M'_{j+2}| \leq |M'_j M'_{j+1}| + |M'_{j+1} M'_{j+2}|$$

d'où  $l^n \leq l^{n+1}$ , c'est-à-dire que  $(l^n)$  est croissante. D'autre part,

$$\begin{aligned} |M_i S_{i+1}| + |S_{i+1} M_{i+1}| &= |M'_j S'_{j+1}| + |S'_{j+1} S_{i+1}| + |S_{i+1} S'_{j+2}| + |S'_{j+2} M'_{j+2}| \\ &\geq |M'_j S'_{j+1}| + |S'_{j+1} S'_{j+2}| + |S'_{j+2} M'_{j+2}| \\ &= |M'_j S'_{j+1}| + |S'_{j+1} M'_{j+1}| + |M'_{j+1} S'_{j+2}| + |S'_{j+2} M'_{j+2}| \end{aligned}$$

d'où  $L^n \geq L^{n+1}$ , c'est-à-dire que  $(L^n)$  est décroissante. On a enfin

$$\begin{aligned} L^n &\geq l^n \geq l^0 = |AC|/2 \\ l^n &\leq L^n \leq L^0 = (|AB| + |BC|)/2 \end{aligned}$$

Donc  $L^n$  est décroissante,  $l^n$  est croissante et les deux suites sont bornées et donc elles convergent vers  $L$  et  $l$  respectivement. Mais par le lemme précédent nous avons

$$L = \frac{\gamma L + 2l}{\gamma + 2} \Rightarrow (\gamma + 2)L = \gamma L + 2l \Rightarrow 2L = 2l \Rightarrow L = l$$

ce qui complète la preuve.

Maintenant que nous avons établi la convergence des deux approximations à la longueur de la courbe, nous allons discuter du comportement de la convergence elle-même.

Brezinski et Redivo Zaglia dans [2] ont démontré un résultat qui s'avère utile dans le cas présent :

**Proposition 3.2.1.** *Soit  $x_n$  une suite de nombres complexes qui converge vers  $x$ , soit  $q \in \mathbb{C}$  avec  $q \neq 1$  on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x}{x_n - x} = q \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}} = q$$

En d'autres mots, si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}} = q$  et si  $x_n$  converge vers  $x$ , alors la convergence est linéaire, c'est-à-dire d'ordre 1. De plus, à l'aide du lemme 3.2.1 nous pouvons établir la proposition suivante.

**Proposition 3.2.2.** *Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L^{n+1} - L}{L^n - L} = q$  avec  $q \neq 1$  et  $q \neq \frac{\gamma}{\gamma+2}$  alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l^{n+1} - L}{l^n - L} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L^{n+1} - l^{n+1}}{L^n - l^n} = q$$

Donc si  $\frac{L^{n+1} - L^n}{L^n - L^{n-1}}$  converge vers  $q \neq 1$  et  $q \neq \frac{\gamma}{\gamma+2}$  alors nous obtenons, grâce au théorème de Brezinski et Redivo Zaglia que la convergence de  $L^n$  est linéaire et avec l'aide de la proposition précédente nous avons qu'il en est de même pour la convergence de  $l^n$ .

Il est possible de prouver la convergence de ce ratio pour  $\gamma = 2$  vers  $q = 1/4$  (voir [6] pour cette preuve), mais il est cependant plus difficile de le faire pour un  $\gamma$  quelconque. Cependant, toujours dans [6], ce ratio a été calculé pour divers  $\gamma$  et il semble bel et bien y avoir convergence.

Les trois propositions suivantes serviront à établir que la vitesse de convergence de la suite  $L^n$  vers  $L$  est au moins aussi rapide que celle d'une suite géométrique.

**Proposition 3.2.3.**  $\forall n \in \mathbb{N}$  nous avons

$$L^{n+1} - L^n = \frac{1}{\gamma + 2} \sum_{i=0}^{2^n - 1} (\lambda_i + \lambda_{i+1}) \left( \sqrt{1 - \frac{4\lambda_i \lambda_{i+1} \cos^2(\theta_i/2)}{(\lambda_i + \lambda_{i+1})^2}} - 1 \right)$$

**Preuve:** Pour  $i = 0, 1, \dots, 2^n - 1$  et  $j = 2i$ , on peut facilement vérifier, à l'aide de la figure 3.2.1, que

$$\lambda'_j = \alpha \lambda_i$$

$$\begin{aligned} \text{et } \lambda'_{j+1} &= \sqrt{(\beta \lambda_i)^2 + (\beta \lambda_{i+1})^2 - 2(\beta \lambda_i)(\beta \lambda_{i+1}) \cos \theta_i} \quad \text{par le théorème du cosinus} \\ &= \sqrt{(\beta \lambda_i + \beta \lambda_{i+1})^2 - 2\beta^2 \lambda_i \lambda_{i+1} (1 + \cos \theta_i)} \\ &= \sqrt{(\beta \lambda_i + \beta \lambda_{i+1})^2 - 4\beta^2 \lambda_i \lambda_{i+1} \cos^2(\theta_i/2)} \\ &= \beta \sqrt{(\lambda_i + \lambda_{i+1})^2 - 4\lambda_i \lambda_{i+1} \cos^2(\theta_i/2)} \\ &= \beta(\lambda_i + \lambda_{i+1}) \sqrt{1 - \frac{4\lambda_i \lambda_{i+1} \cos^2(\theta_i/2)}{(\lambda_i + \lambda_{i+1})^2}} \end{aligned}$$

$$\text{et } \lambda'_{2^{n+1}} = \alpha \lambda_{2^n}$$

Or on a

$$L^n = \sum_{i=0}^{2^n-1} |M_i S_{i+1}| + |S_{i+1} M_{i+1}| = \frac{\lambda_0}{2} + \sum_{i=1}^{2^n-1} \lambda_i + \frac{\lambda_{2^n}}{2},$$

donc

$$\begin{aligned} L^{n+1} - L^n &= \frac{\lambda'_0}{2} + \sum_{i=1}^{2^{n+1}-1} \lambda'_i + \frac{\lambda'_{2^{n+1}}}{2} - \frac{\lambda_0}{2} - \sum_{i=1}^{2^n-1} \lambda_i - \frac{\lambda_{2^n}}{2} \\ &= \alpha \frac{\lambda_0}{2} + \sum_{j=1}^{2^n-1} (\lambda'_j + \lambda'_{j+1}) + \alpha \frac{\lambda_{2^n}}{2} - \frac{\lambda_0}{2} - \sum_{i=1}^{2^n-1} \lambda_i - \frac{\lambda_{2^n}}{2} \\ &= \alpha \frac{\lambda_0}{2} + \alpha \sum_{i=1}^{2^n-1} \lambda_i + \sum_{i=1}^{2^n-1} \beta(\lambda_i + \lambda_{i+1}) \sqrt{1 - \frac{4\lambda_i \lambda_{i+1} \cos^2(\theta_i/2)}{(\lambda_i + \lambda_{i+1})^2}} \\ &\quad - \frac{\lambda_0}{2} - \sum_{i=1}^{2^n-1} \lambda_i - \frac{\lambda_{2^n}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{2^n-1} \left( \beta(\lambda_i + \lambda_{i+1}) \sqrt{1 - \frac{4\lambda_i\lambda_{i+1} \cos^2(\theta_i/2)}{(\lambda_i + \lambda_{i+1})^2}} + \frac{(\alpha - 1)(\lambda_i + \lambda_{i+1})}{2} \right) \\
&= \beta \sum_{i=0}^{2^n-1} (\lambda_i + \lambda_{i+1}) \left( \sqrt{1 - \frac{4\lambda_i\lambda_{i+1} \cos^2(\theta_i/2)}{(\lambda_i + \lambda_{i+1})^2}} - 1 \right)
\end{aligned}$$

Ce qui complète la preuve.

**Proposition 3.2.4.** Soit  $r_i^n = \frac{\lambda_{i+1}^n}{\lambda_i^n}$  pour  $i \in \{0, 1, \dots, 2^n\}$  le ratio des longueurs de deux côtés consécutifs de  $P^n$ . Alors il existe des constantes  $r^0$  et  $R^0$  telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in \{0, 1, \dots, 2^n\}, r^0 \leq r_i^n \leq R^0.$$

**Preuve:** Il s'agit ici de la proposition qui nous intéresse le plus. Nous allons la prouver maintenant, mais nous allons fournir plus tard une explication géométrique.

On a premièrement que  $\theta_0^0 \leq \theta_i^n \leq \pi$ . Alors on pose  $\theta^0 \in (0, \pi)$  tel que  $\theta^0 \leq \theta_i^n \leq \pi$ . Soit aussi  $r = \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}$ ,  $\theta = \theta_i = \angle(S_i S_{i+1}, S_{i+1} S_{i+2})$  et

$$r'_1 = \frac{\lambda'_{j+1}}{\lambda'_j}, \quad r'_2 = \frac{\lambda'_{j+2}}{\lambda'_{j+1}} \quad \text{où } j = 2i$$

Alors

$$\begin{aligned}
r'_1 &= \frac{\beta \sqrt{(\lambda_i)^2 + (\lambda_{i+1})^2 - 2\lambda_i\lambda_{i+1} \cos \theta_i}}{\alpha \lambda_i} \\
&= \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\frac{(\lambda_i)^2}{(\lambda_i)^2} + \frac{(\lambda_{i+1})^2}{(\lambda_i)^2} - \frac{2\lambda_i\lambda_{i+1} \cos \theta_i}{(\lambda_i)^2}} \\
&= \frac{1}{\gamma} \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\right)^2 - 2\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} \cos \theta_i} \\
&= \frac{1}{\gamma} \sqrt{r^2 - 2r \cos \theta_i + 1}
\end{aligned}$$

et par une méthode semblable on obtient

$$r'_2 = \frac{\gamma r}{(r^2 - 2r \cos \theta_i + 1)^{1/2}}$$

Soit donc  $f(x) = \frac{1}{\gamma}(x^2 - 2x \cos \theta + 1)^{1/2}$  et  $g(x) = \frac{\gamma x}{(x^2 - 2x \cos \theta + 1)^{1/2}}$ . Alors on a  $r'_1 = f(r)$  et  $r'_2 = g(r)$ . Ces deux formules nous donnent tous les ratios de longueurs à l'étape  $n + 1$  si l'on connaît les ratios et les angles entre les côtés de  $P^n$ . De plus on a

$$x^2 - 2x \cos \theta + 1 \leq x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

et puisque  $x^2 - 2x \cos \theta^0 + \cos^2 \theta^0 = (x - \cos \theta^0)^2 \geq 0$ , alors nous avons  $x^2 - 2x \cos \theta^0 + 1 \geq 1 - \cos^2 \theta^0 = \sin^2 \theta^0$  d'où on obtient l'inégalité suivante

$$x^2 - 2x \cos \theta + 1 \geq x^2 - 2x \cos \theta^0 + 1 \geq \sin^2 \theta^0$$

On obtient alors  $\forall x \in [0, \infty)$

$$\frac{\sin \theta^0}{\gamma} \leq f(x) \leq \frac{1 + x}{\gamma} \leq \max(x, \frac{1}{\gamma - 1}).$$

De façon semblable, on obtient les bornes suivantes sur  $g(x)$ :

$$\min(x, \gamma - 1) \leq g(x) \leq \frac{\gamma}{\sin \theta^0}.$$

Alors on voit facilement qu'avec ces inégalités, on a par induction que la proposition est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  si on pose  $r^0 = \min(\frac{|BC|}{|AB|}, \frac{\sin \theta^0}{\gamma}, \gamma - 1)$  et  $R^0 = \max(\frac{|BC|}{|AB|}, \frac{\gamma}{\sin \theta^0}, \frac{1}{\gamma - 1})$ .

**Proposition 3.2.5.**  $\exists c \in \mathbb{R}$  et  $q \in ]0, 1[$  tels que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, 2^n\}$ , on a  $|\pi - \theta_i^n| \leq cq^n$ .

**Preuve:** Considérons dans la ligne polygonale  $P^n$ , le triangle de sommets  $S_i$ ,  $S_{i+1}$  et  $S_{i+2}$ . Alors on peut voir, à l'aide des figures 3.2.1 et 3.2.2, que ce triangle est similaire au triangle de sommets  $(1, 0)$ ,  $(0, 0)$  et  $(r_i^n \cos \theta_i^n, r_i^n \sin \theta_i^n)$ . De plus, si  $j = 2i$ , alors nous pouvons voir que le triangle de sommets  $S'_{j+1}$ ,  $S_{i+1}$  et  $S'_{j+2}$  est similaire au triangle  $(1, 0)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(r_i^n \cos \theta_i^n, r_i^n \sin \theta_i^n)$ . Si nous dénotons par  $W$  le vecteur qui commence au point  $(1, 0)$  et qui se termine

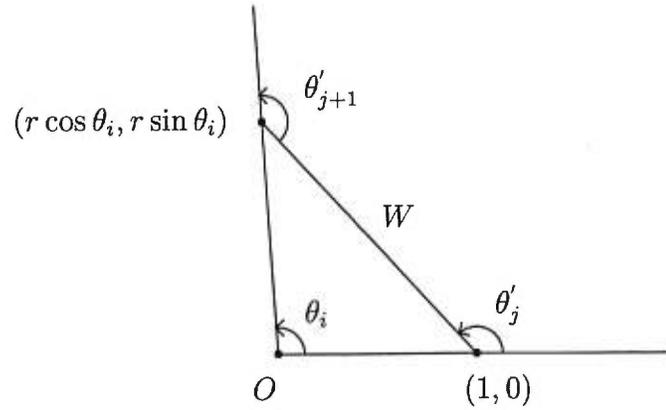


FIG. 3.2.2. Calcul des angles dans la construction de la courbe de de Rham

au point  $(r_i^n \cos \theta_i^n, r_i^n \sin \theta_i^n)$ , alors  $W$  fait un angle de  $\theta'_j$  avec l'axe des  $x$ , et un angle de  $\theta'_{j+1}$  avec le prolongement du côté  $(0, 0)(r_i^n \cos \theta_i^n, r_i^n \sin \theta_i^n)$ . Maintenant, soit  $w$  la longueur du vecteur  $W$ , alors nous avons

$$(w \cos \theta'_j, w \sin \theta'_j) = (r_i \cos \theta_i - 1, r_i \sin \theta_i)$$

Donc,

$$\cot \theta'_j = \frac{r_i \cos \theta_i - 1}{r_i \sin \theta_i} = \cot \theta_i - \frac{1}{r_i} \csc \theta_i = \cot \theta_i - \frac{1}{r_i} \sqrt{1 + \cot^2 \theta_i}$$

Aussi, puisque la somme des angles intérieurs d'un triangle est  $\pi$ , alors nous obtenons

$$\theta_i + (\pi - \theta'_j) + (\pi - \theta'_{j+1}) = \pi \Rightarrow \theta'_{j+1} = \theta_i + (\pi - \theta'_j)$$

et ainsi

$$\begin{aligned}
\cot \theta'_{j+1} &= \cot(\theta_i + (\pi - \theta'_j)) = \frac{\cot \theta_i \cot(\pi - \theta'_j) - 1}{\cot \theta_i + \cot(\pi - \theta'_j)} \\
&= \frac{-\cot \theta_i \cot \theta'_j - 1}{\cot \theta_i - \cot \theta'_j} = \frac{1 + \cot \theta_i \cot \theta'_j}{\cot \theta'_j - \cot \theta_i} \\
&= \frac{1 + \cot \theta_i (\cot \theta_i - \frac{1}{r_i} \sqrt{1 + \cot^2 \theta_i})}{\cot \theta_i - \frac{1}{r_i} \sqrt{1 + \cot^2 \theta_i} - \cot \theta_i} \\
&= -r_i \frac{(1 + \cot^2 \theta_i) - \frac{1}{r_i} \cot \theta_i \sqrt{1 + \cot^2 \theta_i}}{\sqrt{1 + \cot^2 \theta_i}} \\
&= \cot \theta_i - r_i \sqrt{1 + \cot^2 \theta_i}
\end{aligned}$$

Soit maintenant  $m_i = \cot \theta_i$ ,  $m'_j = \cot \theta'_j$  et  $m'_{j+1} = \cot \theta'_{j+1}$ , alors nous avons obtenu

$$m'_j = m_i - \frac{\sqrt{1 + m_i^2}}{r_i} \quad \text{et} \quad m'_{j+1} = m_i - r_i \sqrt{1 + m_i^2}$$

Aussi, puisque  $\sqrt{1 + m_i^2} \geq 1$  et  $\sqrt{1 + m_i^2} \geq -m_i$ , alors nous obtenons les deux systèmes d'inégalités suivantes:

- i.  $m'_j \leq m_i - \frac{1}{r_i}$  et  $m'_{j+1} \leq m_i - r_i$  ainsi que
- ii.  $m'_j \leq m_i(1 + \frac{1}{r_i})$  et  $m'_{j+1} \leq m_i(1 + r_i)$

Soit  $\rho = \min(\frac{1}{R^0}, r^0)$  où  $R^0$  et  $r^0$  sont les constantes définies dans la proposition précédente. On voit donc facilement, par induction sur le premier système d'inégalités, qu'il existe une constante  $c_1 \in \mathbb{R}$  de telle sorte que  $\forall n \in \mathbb{N}$  et  $i \in \{1, \dots, 2^n\}$ ,  $m_i^n \leq c_1 - n\rho$  et donc  $m_i^n \rightarrow -\infty$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  et puisque  $m_i^n = \cot \theta_i^n$ , alors nous obtenons que  $\theta_i^n \rightarrow \pi$ .

De plus, puisque  $m_i^n \rightarrow -\infty$  lorsque  $n \rightarrow \infty \forall i \in \{1, \dots, 2^n\}$ , alors  $\exists N_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq N_0$ , et  $\forall i \in \{1, \dots, 2^n\}$ , alors  $m_i^n < 0$ . Ainsi, par induction sur le deuxième système d'inégalités,  $\exists c_2 < 0$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$n \geq N_0$ , et  $\forall i \in \{1, \dots, 2^n\}$ ,  $m_i^n \leq c_2(1 + \rho)^n$ . Nous obtenons ainsi une troisième constante,  $c_3 > 0$ , telle que

$$\sin(\pi - \theta_i^n) = \frac{1}{\sqrt{1 + (m_i^n)^2}} \leq c_3 \frac{1}{(1 + \rho)^n} = c_3 q^n$$

avec  $q = \frac{1}{1 + \rho} \in ]0, 1[$  et nous obtenons enfin, pour une constante  $c_4 > 0$ ,

$$|\pi - \theta_i^n| \leq c_4 q^n$$

ce qui complète la démonstration.

**Proposition 3.2.6.**  $\exists c \in (0, \infty)$  et  $k \in (0, 1)$  tels que  $\forall n \in \mathbb{N}$  nous avons  $|L^{n+1} - L^n| \leq ck^n$ .

**Preuve:** Nous avons déjà démontré que

$$L^{n+1} - L^n = \frac{1}{\gamma + 2} \sum_{i=0}^{2^n-1} (\lambda_i + \lambda_{i+1}) \left( \sqrt{1 - \frac{4\lambda_i \lambda_{i+1} \cos^2(\theta_i/2)}{(\lambda_i + \lambda_{i+1})^2}} - 1 \right)$$

Nous savons aussi que  $\sqrt{1 - x} \geq 1 - x$  si  $x \in [0, 1]$  et donc

$$\begin{aligned} |L^{n+1} - L^n| &= \frac{1}{\gamma + 2} \sum_{i=0}^{2^n-1} (\lambda_i + \lambda_{i+1}) \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4\lambda_i \lambda_{i+1} \cos^2(\theta_i/2)}{(\lambda_i + \lambda_{i+1})^2}} \right) \\ &\leq \frac{1}{\gamma + 2} \sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{4\lambda_i \lambda_{i+1} \cos^2(\theta_i/2)}{\lambda_i + \lambda_{i+1}} \\ &= \frac{1}{\gamma + 2} \sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{4\lambda_i \lambda_{i+1} \sin^2(\frac{\pi - \theta_i}{2})}{\lambda_i + \lambda_{i+1}} \\ &\leq \frac{1}{\gamma + 2} \sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{(2(\lambda_i)^2 + 4\lambda_i \lambda_{i+1} + 2(\lambda_{i+1})^2) \sin^2(\frac{\pi - \theta_i}{2})}{\lambda_i + \lambda_{i+1}} \\ &= \frac{2}{\gamma + 2} \sum_{i=0}^{2^n-1} (\lambda_i + \lambda_{i+1}) \sin^2\left(\frac{\pi - \theta_i}{2}\right) \\ &= \frac{2}{\gamma + 2} 2L \frac{c_1 q^{2n}}{2} = ck^n \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

où l'équation 3.2.1 a été obtenue par la proposition précédente, ce qui complète la preuve.

Grâce à cette dernière proposition, nous sommes maintenant en mesure de démontrer facilement que la suite  $L^n$  converge vers  $L$  aussi rapidement qu'une suite géométrique.

**Proposition 3.2.7.**  $\exists d \in \mathbb{R}$  et  $k \in (0, 1)$  telles que  $\forall n \in \mathbb{N}$  nous avons

$$|L^{n+1} - L| \leq dk^n$$

**Preuve:** Pour tout  $m, n \in \mathbb{N}$  nous avons

$$\begin{aligned} |L^n - L| &\leq |L^n - L^{n+1}| + |L^{n+1} - L^{n+2}| + \dots + |L^{n+m} - L^{n+m+1}| + |L^{n+m+1} - L| \\ &\leq ck^n + ck^{n+1} + \dots + ck^{n+m} + |L^{n+m+1} - L| \end{aligned}$$

par la proposition précédente

$$= ck^n \left( \sum_{i=0}^m k^i \right) + |L^{n+m+1} - L|$$

Maintenant, puisque  $L^n$  converge vers  $L$ , on obtient  $\lim_{m \rightarrow \infty} |L^{n+m+1} - L| = 0$  et donc

$$\begin{aligned} |L^n - L| &\leq ck^n \left( \sum_{i=0}^{\infty} k^i \right) \\ &= \frac{c}{1-k} k^n = dk^n \end{aligned}$$

### 3.3. ÉTUDES SUR LES CONSTANTES $r^0$ ET $R^0$

Nous avons donc démontré que la suite  $L^n$  converge vers  $L$  aussi vite qu'une suite géométrique. Revenons maintenant à la proposition 3.2.4. Nous avons montré l'existence de deux constantes,  $r^0$  et  $R^0$ , telles que  $r^0 \leq r_i^n \leq R^0$  pour tout  $i$

et  $n$ , et ce à l'aide de deux fonctions :

$$f(x) = \frac{1}{\gamma} \sqrt{x^2 - 2x \cos \theta_i^n + 1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\gamma x}{\sqrt{x^2 - 2x \cos \theta_i^n + 1}}$$

Si nous arrivons à démontrer que ces deux fonctions forment un système de fonctions itérées, alors le résultat deviendrait plus facile à comprendre puisque ce système posséderait un attracteur. Malheureusement, comme nous allons le voir, tel n'est pas le cas. Cependant, ces deux fonctions agissent de façon similaire à un SFI et c'est ce que nous allons montrer.

Pour commencer, nous allons considérer le cas où  $\theta_0^0 = \pi$ , c'est-à-dire le cas où le triangle initial est dégénéré et donc formé de trois points colinéaires. On considère ce cas pour diverses raisons. Premièrement, cela facilite grandement les calculs. En effet, nous avons  $\theta_0^0 = \pi \Rightarrow \theta_i^n = \pi$  car  $\theta_0^0 \leq \theta_i^n \leq \pi$ . Donc

$$f(x) = \frac{1}{\gamma} \sqrt{x^2 - 2x \cos \pi + 1} = \frac{1}{\gamma} \sqrt{x^2 + 2x + 1} = \frac{1}{\gamma} \sqrt{(x+1)^2} = \frac{x+1}{\gamma} \quad \text{et}$$

$$g(x) = \frac{\gamma x}{x+1} \quad \text{de façon similaire}$$

On voit donc dans ce cas que  $f(x)$  et  $g(x)$  ne dépendent pas de  $n$ . Ainsi, si  $x_0$  est le ratio initial, c'est-à-dire que  $x_0 = \frac{|BC|}{|AB|}$ ,  $W(A) = f(A) \cup g(A)$  et  $W^n(A) = W(W^{n-1}(A))$ , alors on peut vérifier facilement par induction que  $W^n(\{x_0\}) = \{r_i^n\}_{i=0}^{2^n}$ . Enfin, on considère le cas  $\theta_0^0 = \pi$  car nous savons que  $|\theta_i^n - \pi| \leq cq^n$  et donc le cas général doit s'approcher du cas que l'on considère (au moins pour  $n$  assez grand).

On note maintenant que

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{x+1}{\gamma} - \frac{y+1}{\gamma} \right| = \frac{1}{\gamma} |x - y|$$

et puisque  $\gamma > 1$  alors  $\frac{1}{\gamma} < 1$  et ainsi, on voit que  $f(x)$  est une contraction. Le problème vient en fait de  $g(x)$ . En effet

$$|g(x) - g(y)| = \left| \frac{\gamma x}{x+1} - \frac{\gamma y}{y+1} \right| = \gamma \left| \frac{x(y+1) - y(x+1)}{(x+1)(y+1)} \right| = \frac{\gamma}{(x+1)(y+1)} |x - y|$$

et nous ne pouvons donc pas conclure que  $g(x)$  est une contraction car nous savons simplement que  $\gamma > 1$  et  $x, y > 0$  ce qui n'est pas suffisant pour conclure que  $\frac{\gamma}{(x+1)(y+1)} < 1$ . Donc  $g(x)$  n'est pas nécessairement une contraction et donc  $f(x)$  et  $g(x)$  ne forment pas un système de fonctions itérées.

Les deux figures suivantes, les figures 3.3.1 et 3.3.2, représentent les points  $r_i^n$  pour  $n = 9$ ,  $x_0 = 1$  et  $\gamma = 1.5$  et  $2.2$  respectivement.

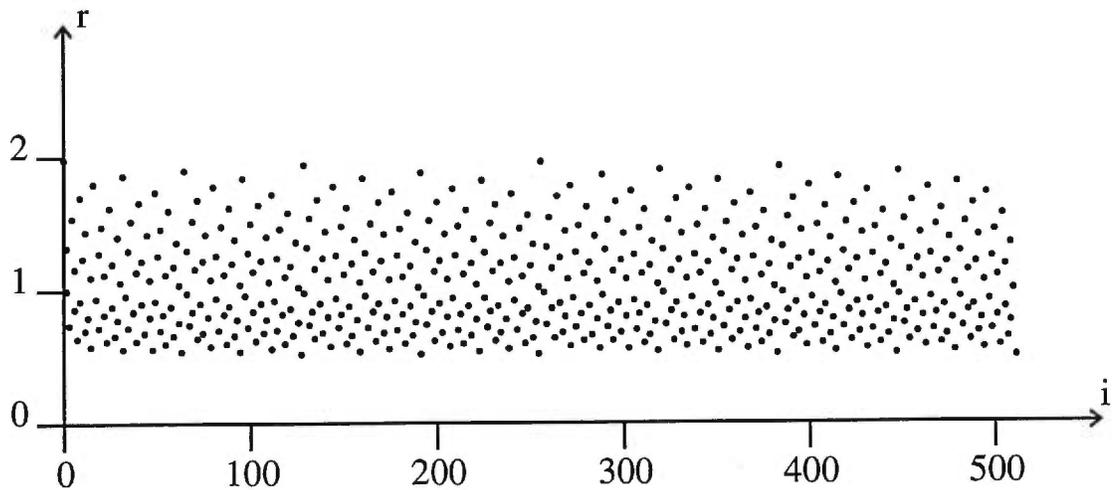


FIG. 3.3.1.  $r_i^9$  pour  $\gamma = 1.5$  et  $x_0 = 1$

L'axe des  $x$  représente les  $i$  alors que l'axe des  $y$  représente la valeur correspondante de  $r_i^n$ . On peut remarquer que les valeurs de  $r_i^n$  semblent bornées entre deux valeurs. Nous avons donc essayé de les identifier.

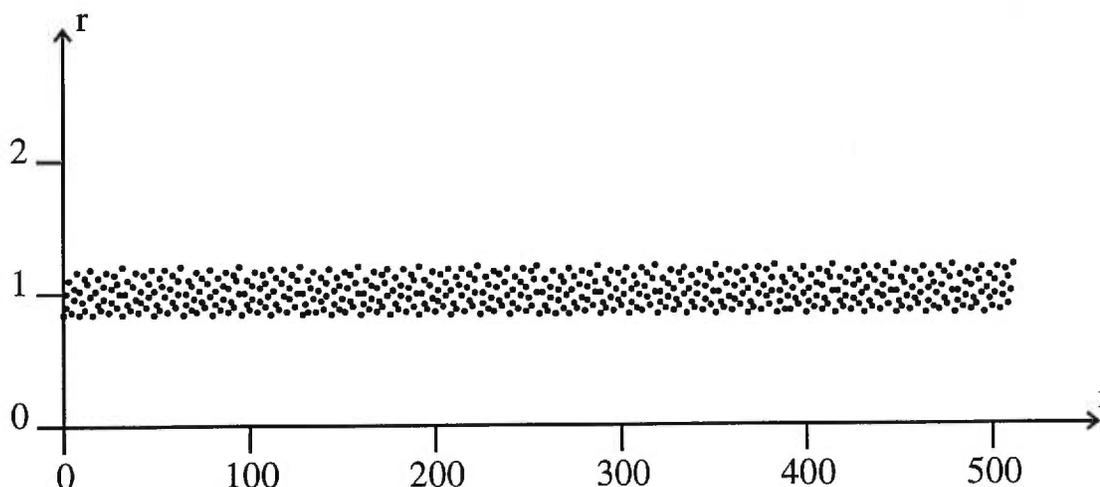


FIG. 3.3.2.  $r_i^9$  pour  $\gamma = 2.2$  et  $x_0 = 1$

Les deux tableaux suivants nous donnent, entre autres, les minimum et maximum des  $r_i^n$  à l'étape  $n = 7$ , c'est-à-dire qu'ils nous donnent les extrêmes de  $W^7(\{x_0\})$ , pour diverses valeurs du ratio initial et de  $\gamma$ .

Gamma	1.5	1.8	2.2	2.5	4.5
Rapport initial	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
Minimum	0.506589	0.800807	0.833471	0.666754	0.285715
Maximum	1.973988	1.248740	1.199801	1.499803	3.499988
Moyenne	1.062497	1.007692	1.005882	1.031250	1.390625
Écart-Type	0.369071	0.124671	0.108870	0.254815	1.068613

TAB. 3.3.1. *Statistiques des ratios de longueurs avec gamma variant et rapport initial constant*

Il est important de réaliser que dans chacun des cas, il semble que le minimum converge vers  $\gamma - 1$  si  $\gamma < 2$  et vers  $\frac{1}{\gamma-1}$  si  $\gamma \geq 2$ , alors que le maximum converge vers  $\frac{1}{\gamma-1}$  si  $\gamma < 2$  et vers  $\gamma - 1$  si  $\gamma \geq 2$ .

Gamma	1.8	1.8	1.8	2.2	2.2
Rapport initial	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
Minimum	0.800807	0.802427	0.797587	0.833471	0.834300
Maximum	1.248740	1.253781	1.246219	1.199801	1.200398
Moyenne	1.007692	1.009060	1.006330	1.005882	1.007244
Écart-Type	0.124671	0.124874	0.124494	0.108870	0.109000

TAB. 3.3.2. *Statistiques des ratios de longueurs avec gamma variant et rapport initial variant*

Les valeurs  $\frac{1}{\gamma-1}$  et  $\gamma-1$  sont spéciales. En effet, il s'agit des points fixes de  $f(x)$  et  $g(x)$  respectivement. Dans les théorèmes qui suivent, nous allons démontrer ces hypothèses. Mais avant, il est intéressant de noter aussi que dans les deux tableaux ci-dessus, nous pouvons remarquer que l'écart-type semble diminuer lorsque  $\gamma$  approche de deux. En effet, dans ce cas, le minimum et le maximum convergent tous deux vers 1. Donc, tous les  $r_i^n$  convergent vers 1 aussi et ainsi l'écart-type diminue alors que la moyenne tend vers 1.

Les deux lemmes qui suivent serviront à prouver que le minimum et le maximum convergeront vers les points fixes de  $f$  et  $g$ .

**Lemme 3.3.1.** *Si  $f(x) : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ,  $f(x) = \frac{x+1}{\gamma}$ , alors  $f(x)$  possède un point fixe unique, disons  $x_f$ , et  $f^{on}(x)$  converge de façon monotone vers  $x_f$  lorsque  $n$  croît, et ce pour tout  $x \in (0, \infty)$ . De plus  $x_f = \frac{1}{\gamma-1}$*

**Preuve:**

$$\begin{aligned}
 f(x_f) = x_f &\iff \frac{x_f+1}{\gamma} = x_f &\iff x_f + 1 = \gamma x_f \\
 &\iff x_f(\gamma - 1) = 1 &\iff x_f = \frac{1}{\gamma - 1}
 \end{aligned}$$

(On sait que  $\gamma > 1$  et donc  $\gamma - 1 \neq 0$ ).

Donc  $x_f = \frac{1}{\gamma-1}$  est le point fixe. Maintenant soit  $x < x_f$ , alors nous allons montrer que  $x < f(x) < x_f$ .

$$\begin{aligned} x < x_f &\quad \Rightarrow x < \frac{1}{\gamma-1} &\quad \Rightarrow x(\gamma-1) < 1 \\ &\quad \Rightarrow \gamma x - x < 1 &\quad \Rightarrow \gamma x < x + 1 \\ &\quad \Rightarrow x < \frac{x+1}{\gamma} = f(x) \end{aligned}$$

d'où  $x < x_f \Rightarrow x < f(x)$ . De plus,  $f'(x) = \frac{1}{\gamma} > 0$  et puisque  $f(x)$  est linéaire on obtient que  $f(x)$  est strictement croissante. Donc  $x < x_f \Rightarrow f(x) < f(x_f) = x_f$ .

On peut obtenir de façon similaire que  $x > x_f$ , alors  $x > f(x) > x_f$ . Donc, si  $x \in (0, \infty)$ , alors soit  $x = x_f$ ,  $x < x_f$  ou  $x > x_f$ . Dans le premier cas, on a évidemment que  $f^{on}(x_f) = x_f$  pour tout  $n$  et donc  $f^{on}(x)$  converge de façon monotone vers  $x_f$ . Si  $x < x_f$ , alors on peut vérifier par induction que  $x < f(x) < \dots < f^{on}(x) < x_f$  pour tout  $n$  et puisque  $f(x)$  est une contraction, alors on obtient que  $f^{on}(x)$  converge aussi de façon monotone vers  $x_f$ . On vérifie de façon similaire que si  $x > x_f$ , alors  $f^{on}(x)$  converge aussi vers le point fixe de façon monotone.

**Lemme 3.3.2.** *Si  $g(x) : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ,  $g(x) = \frac{\gamma x}{x+1}$ , alors  $g(x)$  possède un point fixe unique, soit  $x_g = \gamma - 1$ , et  $\{g^{on}(x)\}$  converge de façon monotone vers  $x_g$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  et ce, pour tout  $x \in (0, \infty)$ .*

**Preuve:** Premièrement, on voit facilement que si  $x > 0$ , alors  $g(x) > 0$ . De plus,

$$\begin{aligned} g(x_g) = x_g &\quad \Leftrightarrow \frac{\gamma x_g}{x_g+1} = x_g &\quad \Leftrightarrow \gamma x_g = x_g(x_g + 1) \\ &\quad \Leftrightarrow x_g^2 + (1 - \gamma)x_g = 0 &\quad \Leftrightarrow x_g(x_g + (1 - \gamma)) = 0 \\ &\quad \Leftrightarrow x_g = 0 \text{ ou } x_g = \gamma - 1 \end{aligned}$$

Or  $0 \notin (0, \infty)$ , donc le seul point fixe de  $g(x)$  est  $x_g = \gamma - 1$ .

Soit donc maintenant  $x \leq x_g$ . On montre que  $x \leq g(x) \leq x_f$ . On a alors

$$\begin{aligned} x \leq x_g &\Rightarrow x \leq \gamma - 1 &\Rightarrow x + 1 \leq \gamma \\ &\Rightarrow x(x + 1) \leq \gamma x &\Rightarrow x \leq \frac{\gamma x}{x + 1} \end{aligned}$$

d'où  $x \leq x_g \Rightarrow x \leq g(x)$ . Aussi

$$g(x) = \frac{\gamma x}{x + 1} \Rightarrow g'(x) = \frac{\gamma(x + 1) - \gamma x}{(x + 1)^2} = \frac{\gamma}{(x + 1)^2} > 0.$$

Donc  $g(x)$  est croissante sur  $(0, \infty)$  et donc  $g(x) \leq g(x_g) = x_g$ . Ainsi nous obtenons que si  $x \leq x_g$ , alors  $x \leq g(x) \leq x_g$  et de façon similaire, nous pouvons obtenir l'inégalité inverse, c'est-à-dire que si  $x \geq x_g$ , alors  $x \geq g(x) \geq x_g$ . Maintenant soit  $x \in (0, \infty)$ . Nous montrons maintenant, que  $g^{on}(x)$  converge de façon monotone vers  $x_g$ . Puisque  $x \in (0, \infty)$ , alors soit  $x \leq x_g$  ou  $x \geq x_g$ . Supposons que  $x \leq x_g$ . Dans ce cas, nous pouvons aisément montrer par induction que nous avons  $x \leq g(x) \leq g^{o2}(x) \leq \dots \leq g^{on}(x) \leq x_g$  et ce, pour tout  $n$ . Donc la suite  $\{g^{on}(x)\}$  est croissante et bornée supérieurement par  $x_g$ . Cette suite converge donc.

De façon semblable, nous pouvons montrer que si  $x \geq x_g$ , alors  $\{g^{on}(x)\}$  est décroissante et bornée inférieurement par  $x_g$  et converge donc dans ce cas aussi.

Soit  $x_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} g^{on}(x)$ , nous avons alors

$$\begin{aligned} g(x_1) &= g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} g^{on}(x)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(g^{on}(x)) && \text{par continuité de } g \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} g^{o(n+1)}(x) = x_1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow g(x_1) = x_1$  et donc  $x_1$  est un point fixe de  $g$ . Donc nous obtenons que  $x_1 = x_g$  ou  $x_1 = 0$ . Mais si  $x \geq x_g$ , alors la suite  $\{g^{on}(x)\}$  est bornée inférieurement par  $x_g > 0$  et donc dans ce cas  $x_1 > 0 \Rightarrow x_1 = x_g$ . Si  $x \leq x_g$ ,

alors la suite  $\{g^{on}(x)\}$  croît vers  $x_1$  et est bornée inférieurement par  $x > 0$  d'où dans ce cas aussi  $x_1 > 0$  et donc  $x_1 = x_g$ . Donc dans tous les cas, nous avons  $x_1 = x_g$  et donc on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g^{on}(x) = x_g = \gamma - 1$$

et la convergence est monotone.

Nous rappelons que nous avons défini  $W(A) = \{f(x); x \in A\} \cup \{g(x); x \in A\}$  et  $W^n(A) = W(W^{n-1}(A))$ . On obtient alors

**Théorème 5.** *Pour tout  $x \in (0, \infty)$  nous avons*

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_y [y \in W^n(\{x\})] = \begin{cases} \gamma - 1 & \text{si } \gamma \leq 2 \\ \frac{1}{\gamma - 1} & \text{si } \gamma > 2 \end{cases}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_y [y \in W^n(\{x\})] = \begin{cases} \frac{1}{\gamma - 1} & \text{si } \gamma \leq 2 \\ \gamma - 1 & \text{si } \gamma > 2 \end{cases}$$

**Preuve:** Supposons que  $\gamma \leq 2$ , alors nous avons  $f(x) \geq g(x)$  pour tout  $x \in (0, \infty)$ . En effet

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 \geq 0 & \Rightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \\ \Rightarrow x^2 + 2x + 1 \geq 4x & \Rightarrow (x + 1)^2 \geq 4x \\ \Rightarrow \frac{x+1}{2} \geq \frac{2x}{x+1} & \Rightarrow f(x) = \frac{x+1}{\gamma} \geq \frac{x+1}{2} \geq \frac{2x}{x+1} \geq \frac{\gamma x}{x+1} = g(x) \\ \Rightarrow f(x) \geq g(x) & \quad \forall x, \text{ si } \gamma \leq 2 \end{aligned}$$

On rappelle de plus que  $f$  et  $g$  sont croissantes (ceci a été prouvé dans les deux lemmes précédents). Aussi nous avons

$$W^n(A) = W(W^{n-1}(A)) = f(W^{n-1}(A)) \cup g(W^{n-1}(A)).$$

Nous procédons maintenant par induction pour montrer que

$$\inf_y \{y \in W^n(\{x\})\} = g^{\circ n}(x) \text{ et } \sup_y \{y \in W^n(\{x\})\} = f^{\circ n}(x) \quad \forall n$$

Pour  $n = 1$ , nous avons  $\inf_y \{y \in W^1(\{x\})\} = \min\{f(x), g(x)\} = g(x)$  et  $\sup_y \{y \in W^1(\{x\})\} = \max\{f(x), g(x)\} = f(x)$ . Maintenant, supposons que le résultat est valable pour  $n - 1$ , nous avons alors

$$\begin{aligned} \inf_y \{y \in W^n(\{x\})\} &= \inf_y \{y \in f(W^{n-1}(\{x\})) \cup g(W^{n-1}(\{x\}))\} \\ &= \min[\inf_y \{y \in f(W^{n-1}(\{x\}))\}, \inf_y \{y \in g(W^{n-1}(\{x\}))\}] \\ &= \min[f(\inf_y \{y \in W^{n-1}(\{x\})\}), g(\inf_y \{y \in W^{n-1}(\{x\})\})] \\ &\quad \text{car } f \text{ et } g \text{ sont croissantes} \\ &= g(\inf_y \{y \in W^{n-1}(\{x\})\}) \quad \text{car } g(x) \leq f(x) \quad \forall x \\ &= g(g^{\circ(n-1)}(x)) \quad \text{par hypothèse d'induction} \\ &= g^{\circ n}(x) \end{aligned}$$

Donc,  $\inf_y \{y \in W^n(\{x\})\} = g^{\circ n}(x)$  et par le même procédé, nous pouvons montrer que  $\sup_y \{y \in W^n(\{x\})\} = f^{\circ n}(x)$ . Donc si  $\gamma \leq 2$  nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_y \{y \in W^n(\{x\})\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} g^{\circ n}(x) = \gamma - 1 \\ \text{et } \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_y \{y \in W^n(\{x\})\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} f^{\circ n}(x) = \frac{1}{\gamma - 1} \end{aligned}$$

ce qui démontre le résultat pour le cas où  $\gamma \leq 2$ . Maintenant, il reste à considérer le cas  $\gamma > 2$ .

On sépare la preuve de ce cas en deux parties :

$$\text{a) } x > \gamma - 1 \text{ ou } x < \frac{1}{\gamma - 1} \text{ et}$$

$$\text{b) } \frac{1}{\gamma - 1} \leq x \leq \gamma - 1$$

Nous commençons donc avec la partie a) et nous supposons tout d'abord que  $x > \gamma - 1$ . Nous allons montrer premièrement que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_y \{y \in W^n(\{x\})\} \geq \gamma - 1$ . Pour commencer nous savons que la limite existe. En effet, nous obtenons que  $\sup_y \{y \in W^n(\{x\})\} \geq \gamma - 1$ , car nous avons  $g^{on} \in W^n(\{x\})$  et donc  $g^{on}(x) \leq \sup_y \{y \in W^n(\{x\})\}$  or  $g^{on}(x)$  décroît vers  $\gamma - 1$  par le lemme précédent et donc  $g^{on}(x) \geq \gamma - 1$  et d'où  $\sup_y \{y \in W^n(\{x\})\} \geq \gamma - 1$  et ce pour tout  $n$ .

Aussi

$$\begin{aligned} \sup_y \{y \in W^{n+1}(\{x\})\} &= \sup_y \{y \in f(W^n(\{x\})) \cup g(W^n(\{x\}))\} \\ &= \max\{\sup_y \{y \in f(W^n(\{x\}))\}, \sup_y \{y \in g(W^n(\{x\}))\}\} \\ &= \max\{f(\sup_y \{y \in W^n(\{x\})\}), g(\sup_y \{y \in W^n(\{x\})\})\} \\ &\quad f \text{ et } g \text{ sont croissantes} \\ &\leq \max\{\sup_y \{y \in W^n(\{x\})\}, \sup_y \{y \in W^n(\{x\})\}\} \quad (3.3.1) \\ &= \sup_y \{y \in W^n(\{x\})\} \end{aligned}$$

l'inégalité 3.3.1 provient du fait que  $W^n(\{x\}) \geq \gamma - 1$  et que pour  $x \geq \gamma - 1 > \frac{1}{\gamma - 1}$  nous avons  $f(x) \leq x$  et  $g(x) \leq x$ .

Donc, la suite  $\sup_y \{y \in W^n(\{x\})\}$  est décroissante et bornée inférieurement par  $\gamma - 1$ , d'où la limite existe.

Supposons donc que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_y \{y \in W^n(\{x\})\} = L$  avec  $L > \gamma - 1$ . Nous avons donc  $f(L) < L$  et  $g(L) < L$ . Or

$$\begin{aligned} f(L) &= f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_y \{y \in W^n(\{x\})\}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\sup_y \{y \in W^n(\{x\})\}\right) \\ \text{et } g(L) &= \lim_{n \rightarrow \infty} g\left(\sup_y \{y \in W^n(\{x\})\}\right) \end{aligned}$$

Maintenant,  $\max(f(L), g(L)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \max(f(\sup_y \{y \in W^n(\{x\})\}), g(\sup_y \{y \in W^n(\{x\})\})) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_y \{y \in W^{n+1}(\{x\})\} = L$ .

Nous avons donc  $f(L) < L$ ,  $g(L) < L \Rightarrow \max(f(L), g(L)) < L$  et nous avons montré que  $\max(f(L), g(L)) = L$  d'où nous obtenons que  $L < L$ , une contradiction. Donc,  $L \not> \gamma - 1$ , mais nous savons cependant que  $L \geq \gamma - 1$  et nous concluons donc que  $L = \gamma - 1$ .

Le même procédé est valable pour démontrer que si  $x < \frac{1}{\gamma-1}$  alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_y \{y \in W^n(\{x\})\} = \frac{1}{\gamma - 1}$$

Naturellement, dans ce cas, la suite sera croissante et bornée par  $\frac{1}{\gamma-1}$ .

Toujours avec  $x > \gamma - 1$ , nous allons montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_y \{y \in W^n(\{x\})\} = \frac{1}{\gamma - 1}.$$

Nous devons premièrement établir la convergence de cette suite.

Nous avons tout d'abord, que pour tout  $n$ ,  $\inf_y \{y \in W^n(\{x\})\} \geq \frac{1}{\gamma-1}$ . En effet nous avons pour  $n = 1$

$$\begin{aligned} \inf_y \{y \in W^1(\{x\})\} &= \min\{f(x), g(x)\} \\ &\geq \min\left\{\frac{1}{\gamma-1}, \gamma-1\right\} \quad \text{par les lemmes précédents} \\ &= \frac{1}{\gamma-1} \end{aligned}$$

Maintenant, si le résultat est vrai pour  $n - 1$ , alors

$$\begin{aligned} \inf_y \{y \in W^n(\{x\})\} &= \min[\inf_y \{y \in f(W^{n-1}(\{x\}))\}, \inf_y \{y \in g(W^{n-1}(\{x\}))\}] \\ &= \min[f(\inf_y \{y \in W^{n-1}(\{x\})\}), g(\inf_y \{y \in W^{n-1}(\{x\})\})] \\ &\hspace{15em} \text{car } f \text{ et } g \text{ sont croissantes} \\ &\leq \min\left[f\left(\frac{1}{\gamma-1}\right), g\left(\frac{1}{\gamma-1}\right)\right] \tag{3.3.2} \\ &= \frac{1}{\gamma-1} \tag{3.3.3} \end{aligned}$$

où l'inégalité 3.3.2 provient du fait que  $\inf_y \{y \in W^{n-1}(\{x\})\} \geq \frac{1}{\gamma-1}$  par hypothèse et donc  $f(\inf_y \{y \in W^{n-1}(\{x\})\}) \geq f(\frac{1}{\gamma-1})$ , car  $f$  est croissante et la même inégalité est valable pour  $g$  pour la même raison.

L'égalité 3.3.3 provient, quant à elle, du fait que  $f(\frac{1}{\gamma-1}) = \frac{1}{\gamma-1}$  et que  $\frac{1}{\gamma-1} \leq g(\frac{1}{\gamma-1}) \leq \gamma-1$  par le lemme précédent puisque  $\frac{1}{\gamma-1} < \gamma-1$ .

Nous avons donc  $\inf_y \{y \in W^n(\{x\})\} \geq \frac{1}{\gamma-1}$  pour tout  $n$ . De plus, nous pouvons voir que  $f^{on}(x) \in W^n(\{x\}) \Rightarrow f^{on}(x) \geq \inf_y \{y \in W^n(\{x\})\}$ . Donc, pour tout  $n$ , nous avons

$$\frac{1}{\gamma-1} \leq \inf_y \{y \in W^n(\{x\})\} \leq f^{on}(x)$$

où  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{\circ n}(x) = \frac{1}{\gamma-1}$  et nous pouvons donc aisément conclure que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_y \{y \in W^n(\{x\})\} = \frac{1}{\gamma-1}$$

De la même façon, nous pouvons établir que si  $x < \frac{1}{\gamma-1}$ , alors nous obtenons  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_y \{y \in W^n(\{x\})\} = \gamma-1$ , ce qui complète la preuve de la partie a).

Maintenant, pour la partie b), nous avons  $\frac{1}{\gamma-1} \leq x \leq \gamma-1$ . Dans ce cas, nous avons par les deux lemmes précédents que

$$\frac{1}{\gamma-1} \leq f(x) \leq x \text{ et } x \leq g(x) \leq \gamma-1$$

et donc, comme dans la preuve où  $\gamma \leq 2$ , nous avons  $f(x) \leq g(x)$  et ce, pour tout  $x \in [\frac{1}{\gamma-1}, \gamma-1]$ . Par un simple procédé d'induction, nous pouvons montrer de plus que si  $x \in [\frac{1}{\gamma}, \gamma-1]$ , alors  $\inf_y \{y \in W^n(\{x\})\} \subset [\frac{1}{\gamma}, \gamma-1]$  et ce, pour tout  $n$ . Maintenant, il suffit de procéder comme dans la première partie, où  $\gamma \leq 2$ , pour établir que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_y \{y \in W^n(\{x\})\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} f^{\circ n}(x) = \frac{1}{\gamma-1} \\ \text{et } \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_y \{y \in W^n(\{x\})\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} g^{\circ n}(x) = \gamma-1 \end{aligned}$$

ce qui complète la preuve.

Les lemmes et théorèmes précédents nous permettent maintenant de voir que  $f(x)$  est une contraction sur  $[0, \infty)$  avec le point fixe  $\frac{1}{\gamma-1}$ . De plus  $g(x)$ , n'est pas une contraction, mais possède toutefois un point fixe unique sur  $(0, \infty)$ , soit  $\gamma-1$ , et, comme une contraction,  $g^{\circ n}(x)$  converge vers celui-ci. De plus, si  $W^n(\{x_0\}) = \{r_i^n\}$  où  $x_0 = \frac{|BC|}{|AB|}$ , alors on obtient que le minimum de  $W^n(\{x_0\})$ , c'est-à-dire le minimum de tous les ratios des longueurs de deux côtés consécutifs de  $P^n$ , converge lorsque  $n \rightarrow \infty$  vers  $\min(\gamma-1, \frac{1}{\gamma-1})$ , alors que le maximum de  $W^n(\{x_0\})$  converge vers  $\max(\gamma-1, \frac{1}{\gamma-1})$  comme nous le croyions.

Nous n'avons toutefois pas établi la convergence de  $W^n(\{x_0\})$  et il est difficile de le faire pour des valeurs quelconques de  $\gamma$  et  $x_0$ . On peut voir cependant que si  $x_0 = \gamma - 1$  ou  $x_0 = \frac{1}{\gamma-1}$ , les deux points fixes de  $f$  et  $g$ , alors  $W^n(\{x_0\})$  forme une suite d'ensembles croissante et bornée par  $[\min(\gamma - 1, \frac{1}{\gamma-1}), \max(\gamma - 1, \frac{1}{\gamma-1})]$  et converge donc pour n'importe quelle valeur de  $\gamma$ . Aussi, si  $\gamma = 2$ , alors le minimum et le maximum convergent vers  $\gamma - 1 = \frac{1}{\gamma-1} = 1$  et donc  $W^n(\{x_0\})$  converge vers  $\{1\}$  pour n'importe quel ratio initial. De plus, le théorème suivant nous donne la convergence de  $W^n(\{x_0\})$  pour tout  $x_0$  et pour tout  $\gamma \in (1, \frac{3+\sqrt{5}}{2})$ .

**Théorème 6.** *Si*

$$f(x) : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), \quad f(x) = \frac{x+1}{\gamma},$$

$$g(x) : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), \quad g(x) = \frac{\gamma x}{x+1},$$

$W(A) = f(A) \cup g(A)$  et  $W^n(A) = W^{n-1}(W(A))$  et si  $1 < \gamma < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$  alors  $W^n(\{x_0\})$  converge vers un "attracteur"  $A_\gamma$  pour tout  $x_0 > 0$

**Preuve:** Rappelons que nous avons  $|f(x) - f(y)| = \frac{1}{\gamma}|x - y|$  pour tout  $x, y > 0$ . Aussi, nous savons que  $f^{\circ n}(x)$  converge de façon monotone vers son point fixe, soit  $\frac{1}{\gamma-1}$ . Donc, si nous choisissons une constante  $a \in \mathbb{R}$  telle que  $0 < a < \frac{1}{\gamma-1}$ , alors nous obtenons  $f(x) : [a, \infty) \rightarrow [a, \infty)$  et  $\exists s < 1$ , tel que  $|f(x) - f(y)| < s|x - y|$  pour tout  $x, y > a$  et ainsi  $f(x)$  est une contraction sur  $[a, \infty)$  pour tout  $a \in (0, \frac{1}{\gamma-1})$  et  $\gamma > 1$ .

Aussi,  $|g(x) - g(y)| = \frac{\gamma}{(x+1)(y+1)}|x - y|$ , et ce pour tout  $x, y > 0$ . Nous désirons maintenant trouver un ensemble  $[b, \infty)$  tel que si  $x$  et  $y \in [b, \infty)$ , alors  $\frac{\gamma}{(x+1)(y+1)} < 1$ . Dans un tel ensemble nous avons

$$\frac{\gamma}{(x+1)(y+1)} \leq \frac{\gamma}{(b+1)^2} \text{ et}$$

$$\frac{\gamma}{(b+1)^2} < 1 \iff (b+1)^2 > \gamma \iff b > \sqrt{\gamma} - 1.$$

Donc, il existe un certain  $s < 1$  tel que, si  $x, y \in [b, \infty)$ , avec  $b > \sqrt{\gamma} - 1$  alors  $|g(x) - g(y)| < s|x - y|$ .

Nous désirons maintenant avoir les points fixes de  $f$  et  $g$  dans cet intervalle.

Or

$$\gamma - 1 > \sqrt{\gamma} - 1 \iff \gamma > \sqrt{\gamma} \iff \gamma > 1$$

et

$$\frac{1}{\gamma - 1} > \sqrt{\gamma} - 1 \iff 1 > (\sqrt{\gamma} - 1)(\gamma - 1) \iff 1 > \gamma^{3/2} - \gamma - \gamma^{1/2} + 1$$

$$\iff -\gamma^{3/2} + \gamma + \gamma^{1/2} > 0 \iff -\gamma + \gamma^{1/2} + 1 > 0$$

Soit maintenant  $r = \sqrt{\gamma}$ , alors  $r > 1$  et

$$-\gamma + \gamma^{1/2} + 1 > 0 \iff -r^2 + r + 1 > 0$$

Or  $-r^2 + r + 1 = 0 \iff r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  ou  $r = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ . Mais  $r > 0$  et ainsi  $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  et  $-r^2 + r + 1 > 0 \iff r < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Or  $\gamma = r^2$  et nous pouvons donc voir que  $-\gamma + \gamma^{1/2} + 1 > 0 \iff \gamma < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ .

Nous avons donc obtenu que

$$\gamma - 1 > \sqrt{\gamma} - 1 \iff \gamma > 1$$

et que

$$\frac{1}{\gamma - 1} > \sqrt{\gamma} - 1 \iff \gamma < \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Ainsi, si l'on pose  $\gamma \in (1, \frac{3+\sqrt{5}}{2})$ , alors  $\exists b_1 \in \mathbb{R}$  tel que  $\sqrt{\gamma} - 1 < b_1 < \min(\gamma - 1, \frac{1}{\gamma - 1})$ .

Nous avons déjà démontré que  $g^{\circ n}(x)$  converge de façon monotone vers son point fixe,  $\gamma - 1$ , et donc  $g(x) : [b_1, \infty) \rightarrow [b_1, \infty)$  avec  $g(x) = \frac{\gamma x}{x+1}$  est une contraction.

De plus, puisque  $0 < b_1 < \frac{1}{\gamma-1}$  alors nous obtenons aussi  $f(x) : [b_1, \infty) \rightarrow [b_1, \infty)$  avec  $f(x) = \frac{x+1}{\gamma}$  est une contraction.

Maintenant, supposons que  $x_0 > \sqrt{\gamma}-1$ . Alors on choisit  $b_1$  tel que  $\sqrt{\gamma}-1 < b_1 < \min(x_0, \gamma-1, \frac{1}{\gamma-1})$  et puisque  $f$  et  $g$  sont des contractions sur  $[b_1, \infty)$ , alors ces deux fonctions forment un SFI sur cet intervalle et ainsi  $W^n(\{x_0\})$  converge vers l'attracteur  $A_\gamma$ .

Mais si  $x_0 \leq \sqrt{\gamma}-1$ , puisque  $\inf_y \{y \in W^n(\{x_0\})\}$  converge vers  $\min(\frac{1}{\gamma-1}, \gamma-1) > \sqrt{\gamma}-1$  alors il existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tel que  $\inf_y \{y \in W^{n_1}(\{x_0\})\} > \sqrt{\gamma}-1$ . Or  $W^{n_1}(\{x_0\}) = \{r_0^{n_1}, r_1^{n_1}, \dots, r_{2^{n_1}}^{n_1}\}$  où  $r_i^{n_1}$  est tel que défini dans la proposition 3.2.4. Ainsi  $r_i^{n_1} > \sqrt{\gamma}-1$  pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, 2^{n_1}\}$  et donc  $W^n(\{r_i^{n_1}\})$  converge vers  $A_\gamma$ . De plus

$$W^n(\{x_0\}) = \bigcup_{i=0}^{2^{n_1}} W^{n-n_1}(\{r_i^{n_1}\})$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W^n(\{x_0\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{i=0}^{2^{n_1}} W^{n-n_1}(\{r_i^{n_1}\}) = \bigcup_{i=0}^{2^{n_1}} A_\gamma = A_\gamma$$

et ainsi nous obtenons le résultat voulu pour tout  $x_0 > 0$ .

Aussi, l'ensemble  $W^n(\{x_0\})$  semble converger vers l'intervalle bornée par les points fixes de  $f$  et  $g$ , c'est-à-dire,  $[\min(\gamma-1, \frac{1}{\gamma-1}), \max(\gamma-1, \frac{1}{\gamma-1})]$ , pour toutes les valeurs de  $\gamma$  et du ratio initial  $x_0$ . En effet, si nous considérons le développement binaire de l'indice  $i$  de  $r_i^n$ ,  $i = a_0 + a_1 2^1 + a_2 2^2 + \dots + a_{n-1} 2^{n-1}$  et nous posons  $a = a_{n-1} + a_{n-2} 2^1 + \dots + a_1 2^{n-2} + a_0 2^{n-1}$ , alors nous obtenons, si  $s_a^n = r_i^n$ , que  $\{s_a^n\}$  est simplement un réarrangement des termes de  $W^n(\{x_0\})$  et représente

donc le même ensemble. Les deux figures suivantes représentent les valeurs de  $s_a^n$  en fonction de l'indice  $a$  et pour  $n = 9$ .

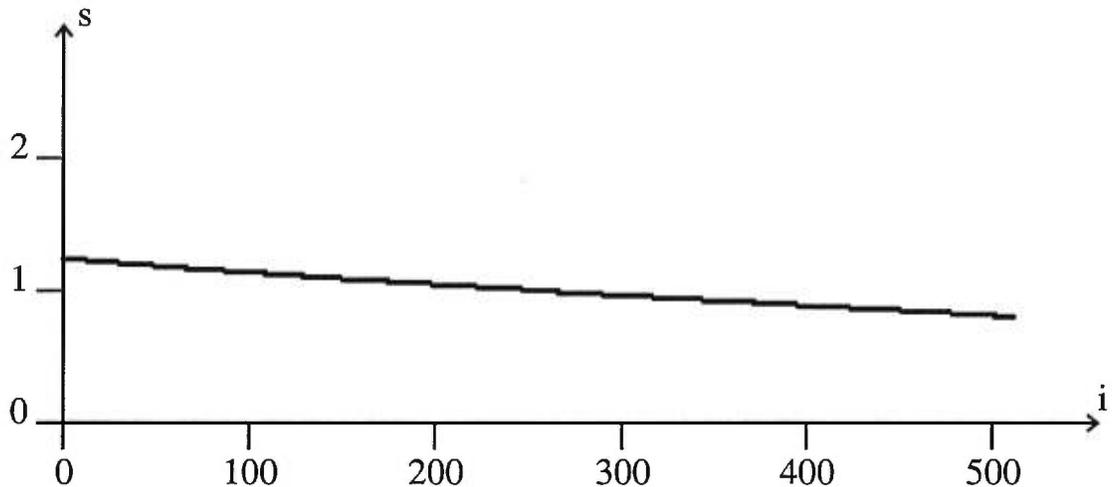


FIG. 3.3.3.  $s_a^9$  pour  $\gamma = 1.8$  et  $x_0 = 1$

Nous pouvons voir que  $s_a^n$  semble aussi converger vers le même intervalle, soit  $[\min(\gamma - 1, \frac{1}{\gamma-1}), \max(\gamma - 1, \frac{1}{\gamma-1})]$ , puisque le graphe de  $s_a^n$  par rapport à  $a$  semble être une courbe reliant un extrémum pour  $a = 0$  à l'autre extrémum pour  $a = 2^n - 1$ . Donc, puisque  $s_a^n$  n'est qu'un réarrangement des termes de  $W^n(\{x_0\})$ , nous pouvons maintenant comprendre pourquoi cet ensemble semble converger vers l'intervalle en question.

De plus, nous avons seulement considéré le cas du triangle dégénéré. Le cas général où  $f(x) = \frac{1}{\gamma} \sqrt{x^2 - 2x \cos \theta_i^n + 1}$  et  $g(x) = \frac{\gamma x}{\sqrt{x^2 - 2x \cos \theta_i^n + 1}}$  semble posséder les mêmes caractéristiques. Le tableau suivant nous donne le minimum et maximum pour trois triangles différents (et non dégénéré). Le premier est de sommets  $(1, 0)$ ,  $(0, 0)$  et  $(0, 1)$  et ainsi nous avons  $\theta_0^0 = 90^\circ$  et  $x_0 = 1$ . Le deuxième est composé des sommets  $(1, 0)$ ,  $(0, 0)$  et  $(0, 2)$  et donc nous avons  $\theta_0^0 = 90^\circ$  et

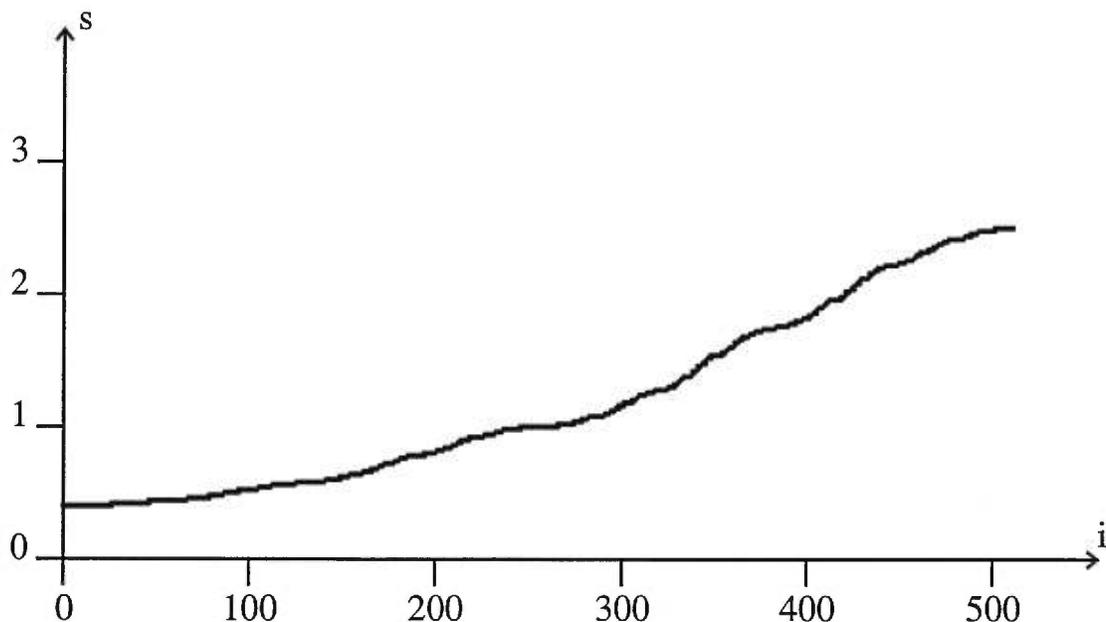


FIG. 3.3.4.  $s_a^0$  pour  $\gamma = 3.5$  et  $x_0 = 1$

Gamma	1.8	2.5	1.8	2.5	2.5
Rapport initial	1.0	1.0	2.0	2.0	1.0
Angle initial	90	90	90	90	45
Minimum	0.802021	0.666492	0.804052	0.666492	0.666232
Maximum	1.246851	1.500393	1.251741	1.500393	1.501184

TAB. 3.3.3. *Statistiques des ratios de longueurs pour les triangles non dégénérés*

$x_0 = 2$ . Enfin, le dernier est le triangle de sommets  $(1, 1)$ ,  $(0, 0)$  et  $(0, 1)$  et de cette façon nous avons  $\theta_0^0 = 45^\circ$  et  $x_0 = 1$ .

Comme nous pouvons le voir dans chacun de ces cas, le minimum et le maximum semblent encore converger vers  $\min(\gamma - 1, \frac{1}{\gamma-1})$  et vers  $\max(\gamma - 1, \frac{1}{\gamma-1})$

respectivement. Ce comportement est vraisemblable puisque nous avons

$$f(x) = \frac{1}{\gamma} \sqrt{x^2 - 2x \cos \theta_i^n + 1} \rightarrow \frac{x+1}{\gamma} \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

$$\text{et } g(x) = \frac{\gamma x}{\sqrt{x^2 - 2x \cos \theta_i^n + 1}} \rightarrow \frac{\gamma x}{x+1}$$

puisque nous savons que  $\theta_i^n \rightarrow \pi$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

## CONCLUSION

---

Dans ce mémoire, nous avons vu que la géométrie fractale nous donne des outils pour étudier divers objets, tant naturels que mathématiques. En effet, après avoir introduit la définition de la dimension fractale et des objets qui composent la géométrie fractale, telle que présentée par Benoit Mandelbrot, nous avons dérivé notre premier outil, un ratio entre la longueur et l'aire d'objets géométriquement similaires. Grâce à ce ratio et à un diagramme log-log, nous avons pu établir que la dimension fractale des fleuves est d'environ 1.1. Nous pouvons nous rappeler que cette valeur est proche de celle établie par Hack en 1957, où il avait démontré que la dimension fractale des rivières est de 1.2.

Ensuite, nous avons introduit les systèmes de fonctions itérées, ou SFI. Ces systèmes nous donnent notre deuxième outil, les attracteurs engendrés par les SFI.

Par la suite, nous avons introduit un objet mathématique, la classe des courbes de de Rham, et nous avons démontré les principaux théorèmes sur la convergence de deux approximations de la longueur d'une courbe de de Rham. Lors de la preuve d'un de ces théorèmes, nous avons étudié deux fonctions;  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x \cos \theta + 1}}{\gamma}$  et  $g(x) = \frac{\gamma x}{\sqrt{x^2 - 2x \cos \theta + 1}}$ . Ces deux fonctions ne forment pas un système de fonctions itérées puisque  $g(x)$  n'est pas contractante, mais semblent agir de façon semblable. Nous avons donc démontré que le minimum et le maximum de l'ensemble  $W^n(\{x_0\})$ , où  $W(A) = f(A) \cup g(A)$  et  $W^n(A) = W^{n-1}(W(A))$ , convergent lorsque  $n \rightarrow \infty$ , et si l'on pose  $\theta = \pi$ . De plus, nous avons démontré

que si  $\gamma \in (1, \frac{3+\sqrt{5}}{2})$ , alors l'ensemble  $W^n(\{x_0\})$  converge vers un "attracteur"  $A_\gamma$ . Malheureusement, il est beaucoup plus difficile de le prouver dans le cas plus général, c'est-à-dire pour tout  $\gamma > 1$  et pour tout  $\theta$ .

À la vue des exemples numériques, il semble que cet ensemble converge vers un intervalle, et ce, dans le cas général. Ainsi, dans un projet futur, il pourrait être intéressant de démontrer que "l'attracteur"  $A_\gamma$  est un intervalle et que ce résultat est valable pour le cas général.

Aussi, suite à la démonstration de la convergence de  $W^n(\{x_0\})$  vers un "attracteur" pour  $\gamma \in (1, \frac{3+\sqrt{5}}{2})$ , même si les fonctions  $f$  et  $g$  ne forment pas un système de fonctions itérées, il pourrait être intéressant de tenter de généraliser le concept de SFI. Cette généralisation pourrait inclure des systèmes de fonctions où ces dernières ne sont pas nécessairement contractantes, comme ce fut le cas ici.

## Annexe A

---

### LES DONNÉES SUR LES FLEUVES

Fleuve	Longueur Km	Bassin Km <sup>2</sup>	ln longueur	ln bassin
Amazone	7025	6915000	8.86	15.75
Mississippi	6800	3238000	8.82	14.99
Nil	6695	2870000	8.81	14.87
Yantze	5980	1830000	8.70	14.42
Ienissi	5940	2620000	8.69	14.78
Ob	5410	2990000	8.60	14.91
Huang-ho	4845	745000	8.49	13.52
Mackenzie	4600	1760000	8.43	14.38
Congo	4370	3820000	8.38	15.16
Amour	4354	1845000	8.38	14.43
Lena	4270	2490000	8.36	14.73
Mékong	4200	800000	8.34	13.59
Niger	4200	2050000	8.34	14.53
Volga	3690	1360000	8.21	14.12
Paraná	3300	2500000	8.10	14.73
Yukon	3290	900000	8.10	13.71
Gange	3090	2165000	8.04	14.59
Rio-Grande	3060	896000	8.03	13.71
Indus	3040	1000000	8.02	13.82
Brahmapoutre	2900	900000	7.97	13.71
Danube	2860	805000	7.96	13.60
Zambèze	2660	1240000	7.89	14.03
Colorado	2305	685000	7.74	13.44
Dniepr	2285	504000	7.73	13.13
Orénoque	2160	900000	7.68	13.71

Fleuve	Longueur Km	Bassin Km <sup>2</sup>	ln longueur	ln bassin
St-Laurent	2000	780000	7.60	13.57
Don	1870	422000	7.53	12.95
Limpopo	1600	415000	7.38	12.94
Rio-Uruguay	1580	350000	7.37	12.77
Magdalena	1550	266000	7.35	12.49
Dniestr	1350	76000	7.21	11.24
Rhin	1320	185000	7.19	12.13
Elbe	1165	143000	7.06	11.87
Tajo	1120	81000	7.02	11.30
Vistule	1068	194000	6.97	12.18
Loire	1020	115120	6.93	11.65
Dvina-Occidental	1020	87900	6.93	11.38
Meuse	950	36000	6.86	10.49
Niemen	935	98000	6.84	11.49
Sabine	930	26950	6.84	10.20
Ebre	928	85000	6.83	11.35
Kouban	906	57900	6.81	10.97
Douro	900	100000	6.80	11.51
Oder	854	120000	6.75	11.70
Rhône	812	97000	6.70	11.48
Guadania	780	61000	6.66	11.02
Seine	776	78878	6.65	11.28
Tama	710	602000	6.57	13.31
Sacramento	620	70190	6.43	11.16
Garonne	575	56000	6.35	10.93

# Annexe B

---

## LES PROGRAMMES

### B.1. UNITÉ POUR LES PROGRAMMES SUIVANTS

```
unit memoire;
{Recueil de procédures pour imprimer des lignes, cercles, ...
 sur des fichiers postscripts}
interface

var
    ps : text;

procedure prepareps(filename : string; x1,y1,x2,y2 : integer);
procedure moveps(x,y : real);
procedure lineps(x,y : real);
procedure arcps(x,y,r : real);
procedure setfont(size : integer);

{=====}

implementation

procedure prepareps(filename : string; x1,y1,x2,y2 : integer);
{Cette procédure permet de rediriger l'écriture vers le fichier postscript
 'filename' avec 'bounding box x1 y1 x2 y2'}

begin
    assign(ps,filename);
    rewrite(ps);
    writeln(ps,'%!PS-Adobe-2.0 EPSF-2.0');
    writeln(ps,'%BoundingBox: ',x1,' ',y1,' ',x2,' ',y2,' ');
    writeln(ps,'%Pages: 1');
    writeln(ps,'%DocumentFonts: Courier');
```

```

        writeln(ps, '%EndComments');
        writeln(ps, '%EndProlog');
        writeln(ps, ' ');
    end; {prepareps}

{=====}
procedure moveps(x,y : real);
begin
    writeln(ps,x, ' ',y, ' moveto')
end;

{=====}
procedure lineps(x,y : real);
begin
    writeln(ps,x, ' ',y, ' lineto')
end;

{=====}
procedure arcps(x,y,r:real);
begin
    writeln(ps,x, ' ',y, ' ',r, ' 0 360 arc');
    writeln(ps, 'fill'); writeln(ps, 'newpath');
end;

{=====}
procedure setfont(size : integer);
begin
    writeln(ps, '/Courier findfont');
    writeln(ps, size, ' scalefont');
    writeln(ps, 'setfont');
end;

{=====}
end.

```

## B.2. LES FLEUVES

```

program Fleuve;
{A partir d'une liste de fleuves, ce programme nous donne la relation
entre la longueur des fleuves et l'aire de leur bassin avec un
diagramme log-log}

uses memoire;

const
  NombreMax = 50;

type
  IntTable = array[0..NombreMax,0..1] of Longint;
  RealTable = array[0..NombreMax,0..1] of Real;
  StrTable = array[0..NombreMax] of string;

var
  Fleuves : StrTable;      { Tableau des noms des fleuves}
  Table :IntTable;        { Tableau des longueurs et aires}
  LnTable : RealTable;    { Tableau des log de longueurs et aires}
  NombreTot,i : integer;
  a,b : real;

{=====}
Procedure LireFleuve( var Fleuves : StrTable; var Table : IntTable;
                    var LnTable : RealTable; var Nombre : integer);
{Cette procédure lit une liste de fleuves et leur longueur et aire.}

var
  Mots : array[0..2] of string;
  Temp : string;
  Premier, Suivant, Longueur, Mot, E : Integer;
  Data : Text;

begin
  Assign(Data, 'c:\tp\bin\Fleuve.doc');
                                     {Fichier contenant la liste des fleuves}
  Reset(Data);
  Nombre := 0;

```

```

while ((not EOF(Data)) and (Nombre < NombreMax)) do begin
  Readln(Data, Temp);
  Premier := 1;
  Mot := 0;
  Longueur := Length(Temp);
  for Suivant := 1 to Longueur do      {Enregistre le nom du fleuve}
  begin
    if ((Temp[Suivant] = ' ') or (Suivant = Longueur )) then
    begin
      if Suivant = Longueur then
        Mots[Mot] := Copy(Temp, Premier, Suivant - Premier + 1)
      else begin
        Mots[Mot] := Copy(Temp, Premier, Suivant - Premier);
        Premier := Suivant + 1;
        Mot := Mot + 1;
      end;
    end;
  end;
  Fleuves[Nombre] := copy(Mots[0], 1, Length(Mots[0]));
  Val(Mots[1], Table[Nombre][0], E);      {Enregistre la longueur}
  LnTable[Nombre][0] := Ln(Table[Nombre][0]);
                                          {Enregistre log de longueur}
  Val(Mots[2], Table[Nombre][1], E);      {Enregistre l'aire}
  LnTable[Nombre][1] := Ln(Table[Nombre][1]);
                                          {Enregistre log de l'aire}
  Nombre := Nombre + 1;
end;
end; {LireFleuve}

```

```
{=====}
```

```

Procedure OrdonneFleuve(var Fleuves : StrTable; var Table : IntTable;
  var LnTable : RealTable; Nombre : integer);
{Cette procédure ordonne les fleuves de la liste du plus long au plus court}

```

```

var
  i, j, max : integer;
  TempStr : string;
  TempInt : longint;
  TempReal : real;

```

```

begin
  for i:=0 to NombreTot-1 do begin
    max:=i;
    for j:=i+1 to NombreTot-1 do
      if Table[max][0]<Table[j][0] then
        max := j;
    if max<>i then begin
      TempStr := copy(Fleuves[i],1,Length(Fleuves[i]));
      Fleuves[i] := copy(Fleuves[max],1,Length(Fleuves[max]));
      Fleuves[max] := copy(TempStr,1,Length(TempStr));

      TempInt := Table[i][0];
      Table[i][0] := Table[max][0];
      Table[max][0] := TempInt;

      TempInt := Table[i][1];
      Table[i][1] := Table[max][1];
      Table[max][1] := TempInt;

      TempReal := LnTable[i][0];
      LnTable[i][0] := LnTable[max][0];
      LnTable[max][0] := TempReal;

      TempReal := LnTable[i][1];
      LnTable[i][1] := LnTable[max][1];
      LnTable[max][1] := TempReal;
    end;
  end;
end; {OrdonneFleuve}

{=====}
Procedure OutPutFleuve(Fleuves : StrTable; Table : IntTable;
                      LnTable : RealTable; Nombre : integer);
{Cette procédure imprime la liste des fleuves ainsi que leur longueur et
aire dans le fichier output.tex}

var
  output : text;

```

```

    i,j : integer;

begin
    assign(output,'c:\tp\bin\output.tex');
    Rewrite(output);
    for j:=0 to 1 do begin
        writeln(output,'\begin{tabular}[t]{|l|l|l|l|l|l|}');
        writeln(output,'\hline');
        writeln(output,'Fleuve & Longueur Km & Bassin Km2 & ln longueur &
            ln bassin \\');
        writeln(output,'\hline');
        for i:=(j*25) to ((j+1)*25-1) do begin
            write(output,Fleuves[i],' & ',Table[i][0],' & ', Table[i][1],' & ');
            Writeln(output,LnTable[i][0]:5:2,' & ',LnTable[i][1]:5:2,' \\');
            writeln(output,'\hline');
        end;
        writeln(output,'\end{tabular}');
        end;
        Close(output);
    end; {outputfleuve}

{=====}
Procedure MoindreCarre( LnTable : RealTable; Nombre : integer;
    var pente,cons : real);
{Cette procédure calcule l'approximation linéaire de la fonction dans la
table LnTable à l'aide de la méthode des moindres carrés
(Elle calcule la pente et l'ordonnée à l'origine)}

var
    X,Y : Real;
    diff,diff2 : Real;

begin
    X := 0; Y :=0; diff := 0; diff2 := 0;
    for i:=0 to Nombre-1 do begin
        X := X + LnTable[i][0];
        Y := Y + LnTable[i][1];
    end;
    X:=X/Nombre ; Y:=Y/Nombre;

```

```

for i:=0 to Nombre-1 do begin
  diff := diff + (LnTable[i][0]-X)*LnTable[i][1];
  diff2:= diff2+ (LnTable[i][0]-X)*(LnTable[i][0]-X);
end;
pente := diff/diff2;
cons := Y - pente*X;
end;

```

```

{=====}
Procedure graphic(LnTable : RealTable; Nombre : integer; pente,cons : real);

```

```

{Cette fonction superpose la fonction linéaire trouvée dans la méthode des
moindres carrés et une fonction linéaire ayant une pente de 2 et les
valeurs de la table LnTable}

```

```

const
  x1 = 158; x2 = 466;
  y1 = 312; y2 = 516;

var
  minX, maxX, minY, maxY, i: integer;
  mx,bx,my,by : real;
  temp : string;

begin
  prepareps('c:\windows\bureau\Moindre1.ps',130,285,475,525);
  minX := trunc(LnTable[Nombre-1][0]);
  maxX := trunc(LnTable[0][0])+1;
  minY := 0; maxY := 0;
  for i:=1 to Nombre-1 do
    if LnTable[i][1]<LnTable[minY][1] then
      minY := i
    else if LnTable[i][1]>LnTable[maxY][1] then
      maxY := i;
  minY := trunc(LnTable[minY][1]);
  maxY := trunc(LnTable[maxY][1])+1;
  setfont(11);
  writeln(ps,'0.5 setlinewidth');

```

```

moveps(x1,y1);
lineps(x1,y2); lineps(x2,y2);
lineps(x2,y1); lineps(x1,y1);
writeln(ps,'stroke'); writeln(ps,'newpath');
moveps((x2+x1)/2-35,y1-20);
writeln(ps,'(ln(longueur)) show');
writeln(ps,'newpath'); {Trace les axes}
moveps(x1-20,(y2+y1)/2-25);
writeln(ps,'gsave'); writeln(ps,'90 rotate');
writeln(ps,'(ln(aire)) show');
writeln(ps,'newpath');
writeln(ps,'grestore');
mx := (x2-x1)/(maxX-minX);
bx := -mx*minX+x1;
for i:= minX to maxX do begin
  moveps(trunc(mx*i+bx),y1-5);
  lineps(trunc(mx*i+bx),y1+5);
  writeln(ps,'stroke'); writeln(ps,'newpath');
  moveps(trunc(mx*i+bx)-3,y1-12);
  writeln(ps, '(,i,') show');
  writeln(ps,'newpath');
end;
my := (y2-y1)/(maxY-minY);
by := -my*maxY+y2;
for i:= minY to maxY do begin
  moveps(x1-5,trunc(my*i+by));
  lineps(x1+5,trunc(my*i+by));
  writeln(ps,'stroke'); writeln(ps,'newpath');
  moveps(x1-18,trunc(my*i+by)-3);
  writeln(ps, '(,i,') show');
  writeln(ps,'newpath');
end;
moveps(minX*mx+bx,(minX*pen+cons)*my+by);
lineps(maxX*mx+bx,(maxX*pen+cons)*my+by);
writeln(ps,'stroke'); writeln(ps,'gsave');
writeln(ps,'[2 2] 0 setdash'); writeln(ps,'newpath');
{Trace la fonction lineaire trouvee par la methode des moindre carre}

moveps(minX*mx+bx,(minX*2+(pen-2)*minX+cons)*my+by);

```

```

linesp(maxX*mx+bx, (maxX*2+(pente-2)*minX+cons)*my+by);
writeln(ps, 'stroke'); writeln(ps, 'grestore'); writeln(ps, 'newpath');
{Trace la fonction linéaire de pente 2}

for i:=0 to Nombre-1 do
  arcsps(LnTable[i][0]*mx+bx, LnTable[i][1]*my+by, 1);
  {trace les points exactes de la relation log-log}

writeln(ps, 'showpage');      {ferme le fichier moindre.ps}
close(ps);
end;

{=====}
Procedure Fit(LnTable : RealTable; Nombre : integer; pente, cons : real);
{Cette procédure nous donne des informations générales sur la méthode des
moindres carrés appliquée à notre problème : Variance de la pente et de
l'ordonnée à l'origine et la covariance entre autre.}

var
  Output : Text;
  VarPente, VarCons, VarErreur, RSS, SumSquare, Sum, Cov, P : real;
  i : integer;

begin
  Assign(Output, 'c:\tp\bin\donnees.doc');
  Rewrite(Output);
  Writeln(Output, ' Le nombre de fleuves est: ', Nombre);
  Writeln(Output, ' La pente de la droite obtenue est: ', pente :4 :2);
  Writeln(Output, ' L''intercept est: ', cons :4 :2);
  Writeln(Output);
  RSS := 0;
  for i:=0 to Nombre-1 do
    RSS := RSS+(LnTable[i][1]-cons-pente*LnTable[i][0])
            *(LnTable[i][1]-cons-pente*LnTable[i][0]);
  VarErreur := RSS/(Nombre-2);
  Writeln(Output, ' La variance de l''erreur est: ', VarErreur :8 :6);
  SumSquare := 0; Sum := 0;
  for i:=0 to Nombre-1 do begin
    SumSquare := SumSquare + LnTable[i][0]*LnTable[i][0];

```

```

    Sum := Sum + LnTable[i][0];
end;
VarCons := (VarErreur*SumSquare)/(Nombre*SumSquare-Sum*Sum);
VarPente := (Nombre*VarErreur)/(Nombre*SumSquare-Sum*Sum);
Writeln(Output,' La variance de la pente est: ',VarPente :8:6);
Writeln(Output,' La variance de l''intercept est: ',VarCons :8:6);
Cov := -(VarErreur*Sum)/(Nombre*SumSquare-Sum*Sum);
Writeln(Output,' Cov(intercept, pente)= ',Cov :8:6);
P := Cov/Sqrt(VarCons*VarPente);
Writeln(Output,' Le coefficient de correlation est: ',P :8 :6);
Close(Output);
end;

{=====}
begin{main}
  LireFleuve(Fleuves, Table, LnTable, NombreTot);
  OrdonneFleuve(Fleuves, Table, LnTable, NombreTot);
  OutPutFleuve(Fleuves, Table, LnTable, NombreTot);
  MoindreCarre(LnTable,NombreTot,a,b);
  Graphic(LnTable,NombreTot,a,b);
  Fit(LnTable,NombreTot,a,b);
end.

```

### B.3. LA COURBE DE VON KOCH

```

Program Koch;
{ Trace les itérations 0, 1 et 5 de la construction de la courbe de Koch}

uses memoire;

type
  point = record
    x : real;
    y : real;
  end;
                                     {les sommet de la courbe}

var
  i : integer;
  point1, point2 : point;
  bound : integer;

{=====}
procedure applyfct(pt1,pt2 :point; var i : integer);
  {calculé les points de l'itération i de la courbe de von Koch,
  puis trace la courbe lorsque l'on a atteint l'itération
  voulue (dans le fichier koch.ps).}

var
  l1,l2,long, angle : real;
  pt3,pt4,pt5 : point;
  j : integer;

begin
  pt3.x:=((2/3)*pt1.x+(1/3)*pt2.x);
  pt3.y:=((2/3)*pt1.y+(1/3)*pt2.y);
  pt5.x:=((1/3)*pt1.x+(2/3)*pt2.x);
  pt5.y:=((1/3)*pt1.y+(2/3)*pt2.y);
  l1:=pt5.x-pt3.x;
  l2:=pt5.y-pt3.y;
  long:=sqrt(sqr(pt2.x-pt1.x)+sqr(pt2.y-pt1.y))/3;
  angle:=arctan(l2/l1);
  angle:=angle+pi/3;
  pt4.x:=(pt3.x+((l1)/abs(l1))*long*cos(angle));
  {calcul les points de}
  {l'itération présente}

```

```

pt4.y:=(pt3.y+((l1)/abs(l1))*long*sin(angle));
i:=i+1;
if i<bound then
  begin
    applyfct(pt1,pt3,i);           {passe à l'itération suivante}
    applyfct(pt3,pt4,i);           {si nécessaire}
    applyfct(pt4,pt5,i);
    applyfct(pt5,pt2,i);
    i:=i-1;
  end
else begin
  moveps(pt1.x,pt1.y);
  lineps(pt3.x,pt3.y);
  lineps(pt4.x,pt4.y);           {imprime la courbe}
  lineps(pt5.x,pt5.y);
  lineps(pt2.x,pt2.y);
  writeln(ps,'stroke'); writeln(ps,'newpath');
  i:=i-1;
end;
end;

{=====}
begin
  prepareps('c:\windows\bureau\koch1.ps',35, 285, 450, 340);
  setfont(11);
  writeln(ps,'0.5 setlinewidth');
  point1.x:=40.0;
  point1.y:=300.0;
  point2.x:=165.0;
  point2.y:=300.0;

  moveps(point1.x,point1.y);
  lineps(point2.x,point2.y);
  writeln(ps,'stroke'); writeln(ps,'newpath');           {trace l'initiateur}
  moveps(point1.x+20,point1.y-10);                         {(1'étape 0)}
  writeln(ps,'(l''initiateur) show');
  writeln(ps,'newpath');

  i:=1;

```

```
bound:=1;
point1.x:=point2.x+15;
point2.x:=point1.x+125;
applyfct(point1,point2,i);
moveps(point1.x+18,point1.y-10);
writeln(ps,'(le generateur) show');
writeln(ps,'newpath');

i:=1;
bound:=5;
point1.x:=point2.x+15;
point2.x:=point1.x+125;
applyfct(point1,point2,i);
moveps(point1.x+5,point1.y-10);
writeln(ps,'(apres 5 iterations) show');
writeln(ps,'newpath');
writeln(ps,'showpage');
close(ps);
end.
```

{trace le générateur}  
{(ou l'itération 1)}

{trace la cinquième}  
{itération}

## B.4. LA FOUGÈRE DE BARNSLEY

```

Program Fern;
{ Ce programme trace la fougère de Barnsley à l'aide de l'algorithme de
  Barnsley-Demko}

uses
  Memoire, Crt;

type
  Small = array[1..4] of real;

var
  a, b, c, d, e, f : Small;
  i,j,k : integer;
  x,y,newx,newy,ran : real;

begin
  prepareps('c:\windows\bureau\fern.ps',0,0,600,600); {Prépare le fichier}
  a[1]:=0; b[1]:=0; c[1]:=0; d[1]:=0.16; e[1]:=0; f[1]:=0;
  a[2]:=0.85; b[2]:=0.04; c[2]:=-0.04; d[2]:=0.85; e[2]:=0; f[2]:=1.6;
  a[3]:=0.2; b[3]:=-0.26; c[3]:=0.23; d[3]:=0.22; e[3]:=0; f[3]:=1.6;
  a[4]:=-0.15; b[4]:=0.28; c[4]:=0.26; d[4]:=0.24; e[4]:=0; f[4]:=0.44;
    {La matrice génératrice de la fougère}
  Randomize;
  x:=0; y:=0; i:=1;
  Repeat
    ran := Random;
    if ran < 0.01 then k := 1
    else if ran < 0.86 then k := 2
    else if ran < 0.93 then k := 3
    else k := 4;
    newx:=a[k]*x+b[k]*y+e[k];          {L'algorithme de B-D}
    newy:=c[k]*x+d[k]*y+f[k];
    x:=newx; y:=newy;
    if i>10 then arcsps(20*x+100,20*y,0.2); {Le point tracé}
    i:=1+i;
  until (i=20000) or (keypressed);      {Le nombre de point tracé}
  writeln(ps,'showpage'); close(ps);
end.

```

## B.5. SUR LES COURBES DE DE RHAM

```

program DeRham;
{$N+}

uses memoire;

const
  gamma = 1.8;
  beta = 1/(gamma+2);
  alpha = 1- beta;
  x1 = 0; x2 = 1; x3 = 2;           {coordonnées du triangle dégénéré}
  loop = 9;                         {nombre d'itérations à effectuer}
  psout = 'c:\windows\bureau\Rh3.ps';
                                     {Nom du fichier où on imprime le graphe}
  flag = false ; {True pour imprimer r par rapport à i, fig. 3.3.1-2}
                                     {False pour imprimer s par rapport à i, fig. 3.3.3-4}

type
  NodePointer = ^NodeRecord;
  NodeRecord = record
    x : extended;
    next : NodePointer;
  end;

var
  curve : NodePointer;           {liste des sommets de la courbe}
  rapport : NodePointer;        {liste des rapports de longueur}
  i,nombre : integer;
  minimum,maximum,moyenne,ecart : real;
  {=====}
  procedure initialize(var dest : NodePointer);
  {Cette procédure initialise 'dest' au triangle initial}

begin
  New(Dest);
  Dest^.x := x1;
  New(Dest^.next);
  Dest^.next^.x := x2;

```

```

    New(Dest^.Next^.Next);
    Dest^.Next^.Next^.Next := nil;
    Dest^.Next^.Next^.x := x3;
end;

{=====}
procedure insert(dest : NodePointer);
{Procédure utilisée par la procédure 'iterate', voir plus bas}

var
    temp : NodePointer;

begin
    new(temp);
    temp^.x:=beta*dest^.x+alpha*dest^.next^.x;    {calcul de P'(2i+1)}
    temp^.next:=dest^.next;                      {dans la courbe de de Rham}
    dest^.next:=temp;
end;

{=====}
procedure iterate(dest: NodePointer);
{Construction de l'étape suivante de la courbe de de Rham}

var temp : NodePointer;

begin
    repeat
        insert(Dest);
        dest^.x:=alpha*dest^.x+beta*dest^.next^.next^.x; {calcul de P'(2i)}
        dest:=dest^.next;
        if (dest^.next^.next=nil) then begin
            temp:= dest^.next;
            dest^.next:=nil;
            dispose(temp);
        end
        else dest:= dest^.next;
    until (dest^.next=nil);
end;

```

```

=====
procedure RapDeLong(Source, Dest : NodePointer);
{Cette procédure calcule les rapports de longueurs entre les côtés
 consécutifs du fichier 'source' et les enregistre dans le fichier 'dest'}

begin
  repeat
    Dest^.x:=(Source^.next^.next^.x-Source^.next^.x)
              /(Source^.next^.x-Source^.x);
    if not(Source^.next^.next^.next=nil) then begin
      New(Dest^.Next);
      Dest:=Dest^.next;
    end
  else
    Dest^.next:=nil;
    Source:=Source^.next;
  until(Source^.next^.next=nil);
end;

=====
function Index( a : integer) : integer;
{Pour transformer l'ordre d'énumération des rapports de longueurs, r -> s}

var
  temp1,i : integer;

begin
  temp1:=0;
  for i:=loop-1 downto 0 do begin
    temp1:=temp1+(a mod 2)*round(exp(i*ln(2)));
    a:=a div 2;
  end;
index:=temp1;
end;

=====
Procedure PrintToPs(Source : NodePointer; x, y : integer);

begin

```



```

        arcps(x+0.7*index(i),y+source^.x*50,1);      {flag}
        i:=i+1;
        source:=source^.next;
    until (source=nil);
    writeln(ps,'showpage');
    close(ps);
end;

{=====}
procedure Statistiques(Source : NodePointer);
{Cette procédure calcule le minimum, le maximum, la moyenne et l'écart type
entre les divers rapports de longueur dans 'source'}

begin
    minimum := 1000.0;
    maximum := 0;
    nombre := 0;
    moyenne := 0;
    ecart := 0;
    repeat
        nombre:=nombre+1;
        if source^.x < minimum then
            minimum := source^.x;
        if source^.x > maximum then
            maximum := source^.x;
        moyenne := moyenne + source^.x;
        ecart := ecart + sqr(source^.x);
        source := source^.next;
    until (source=nil);
    moyenne := moyenne/nombre;
    ecart := sqrt(ecart/nombre-sqr(moyenne));
end;

{=====}
procedure PrintStat;
{Cette procédure imprime les statistiques calculées dans la procédure
Statistiques (voir plus haut)}

var doc : text;

```

```

begin
  assign(doc,'c:\windows\bureau\stat.doc');
  rewrite(doc);
  Writeln(doc,'Le nombre d''observation : ',nombre :5);
  Writeln(doc,'Le rapport initial : ',(x3-x2)/(x2-x1) :8:6);
  Writeln(doc,'gamma : ',gamma :8:6);
  Writeln(doc,'Le maximum : ',maximum :8:6);
  Writeln(doc,'Le minimum : ',minimum :8:6);
  Writeln(doc,'La moyenne : ',moyenne :8:6);
  Writeln(doc,'L''ecart-type : ',ecart :8:6);
  Writeln(doc,'');
  Writeln(doc,'');
  close(doc);
end;

{=====}
begin{main}
  initialize(Curve);
  for i:=1 to loop do
    iterate(Curve);
  new(rapport);
  RapDeLong(Curve,Rapport);
  Statistiques(Rapport);
  PrintToPs(Rapport,40,750-50*(trunc(maximum)+2));
  PrintStat;
end.

```

## B.6. LES COMPOSANTES DE LA COURBE DE DE RHAM

```

program parametrisation;
{$N+}

uses memoire;

const
  gamma = 2.5;
  beta = 1/(gamma+2); alpha = 1- beta;
  x1 = 0; x2 = 1; x3 = 2;      {Coordonnées du triangle}
  y1 = 0; y2 = 2; y3 = 1;
  loop = 9;                    {Nombre d'itérations à effectuer}
  SIZE = 110;

type
  NodePointer = ^NodeRecord;
  NodeRecord = record
    x,y : extended;           {coordonnées des sommets de Pn}
    next : NodePointer;
  end;
  RapNodePointer = ^RapNodeRecord;
  RapNodeRecord = record
    x : extended;            {Rapport de longueur entre les}
    next : RapNodePointer;  {côtés consécutifs de Pn}
  end;

var
  curve : NodePointer;       {liste des sommets de la courbe}
  Rapport : RapNodePointer;  {liste des rapports de longueur}
  i,nombre : integer;
  minimum,maximum,moyenne, ecart : real;

{=====}
procedure initialize(var dest : NodePointer);
{Cette procédure initialise 'dest' au triangle initial}

begin
  New(dest);
  dest^.x := x1;

```

```

Dest^.y := y1;
New(Dest^.next);
Dest^.next^.x := x2;
Dest^.next^.y := y2;
New(Dest^.Next^.Next);
Dest^.Next^.Next^.Next := nil;
Dest^.Next^.Next^.x := x3;
Dest^.Next^.Next^.y := y3;
end;

{=====}
procedure insert(dest : NodePointer);
{Procédure utilisé dans la procédure 'iterate'(voir plus bas)}

var
  temp : NodePointer;

begin
  new(temp);
  temp^.x:=beta*dest^.x+alpha*dest^.next^.x;   {calcul de P'(2i+1)}
  temp^.y:=beta*dest^.y+alpha*dest^.next^.y;   {dans la courbe de de Rham}
  temp^.next:=dest^.next;
  dest^.next:=temp;
end;

{=====}
procedure iterate(dest: NodePointer);

var temp : NodePointer;

begin
  repeat
    insert(Dest);
    dest^.x:=alpha*dest^.x+beta*dest^.next^.next^.x;   {calcul de P'(2i)}
    dest^.y:=alpha*dest^.y+beta*dest^.next^.next^.y;
    dest:=dest^.next;
    if (dest^.next^.next=nil) then begin
      temp:= dest^.next;
      dest^.next:=nil;
    end;
  until false;
end;

```

```

        dispose(temp);
    end
    else dest:= dest^.next;
until (dest^.next=nil);
end;

{=====}
procedure print32a(source : NodePointer; i : integer);
{Cette procédure est utilisée pour imprimer la figure 3.1.2 a)}

var
    x,y : extended;
    loop : integer;

begin
    writeln(ps,'0.5 setlinewidth'); writeln(ps,'gsave');
    if i=0 then writeln(ps,'[3 3] 0 setdash') {choix du type de ligne selon}
    else writeln(ps,i*0.5,' setlinewidth');           {l'itération présente}
    moveps(source^.x*SIZE+20,source^.y*SIZE+20);
    source := source^.next;
    repeat
        lineps(source^.x*SIZE+20,source^.y*SIZE+20); {trace la courbe}
        source := source^.next;
    until source=nil;
    writeln(ps,'stroke'); writeln(ps,'newpath'); writeln(ps,'grestore');
end;

{=====}
procedure printpara(source : NodePointer; i:integer);
{Cette procédure imprime les paramètres dans la figure 3.2a)}

var x,y : extended;

begin
    if i=0 then
        arcsps(source^.x*SIZE+20,source^.y*SIZE+20,1.4);
    repeat
        x:=(source^.x+source^.next^.x)/2;
        y:=(source^.y+source^.next^.y)/2;

```

```

        arcps(x*SIZE+20,y*SIZE+20,1.4);
        source:=source^.next;
        if i=0 then
            arcps(source^.x*SIZE+20,source^.y*SIZE+20,1.4);
        until source^.next=nil;
    end;

{=====}
procedure print(source : NodePointer);
{Cette procédure imprime la courbe limite, soit la figure 3.1.2b)}

var x,y : extended;

begin
    repeat
        x:=(source^.x+source^.next^.x)/2;
        y:=(source^.y+source^.next^.y)/2;
        arcps(x*SIZE+250,y*SIZE+20,0.5);
        source := source ^.next;
    until source ^.next = nil;
end;

{=====}
procedure xplot(source : NodePointer);
{Cette procédure imprime les composantes x et y de la courbe de de Rham}

var
    i : integer;
    x,y : extended;

begin
    moveps(20,210); lineps(20,20); lineps(210,20);
    writeln(ps,'stroke'); writeln(ps,'newpath');
    moveps(17,207); lineps(20,210); lineps(23,207);
    writeln(ps,'stroke'); writeln(ps,'newpath');      {construction des axes}
    moveps(207,23); lineps(210,20); lineps(207,17);  {pour x(t)}
    writeln(ps,'stroke'); writeln(ps,'newpath');
    moveps(25,215); writeln(ps,'(x(t)) show');
    writeln(ps,'newpath');

```

```

moveps(215,25); writeln(ps,'(t) show');
writeln(ps,'newpath');

moveps(250,210); lineps(250,20);
lineps(440,20); writeln(ps,'stroke');
writeln(ps,'newpath');
moveps(247,207); lineps(250,210);           {Construction des axes}
lineps(253,207); writeln(ps,'stroke');       {pour y(t)}
writeln(ps,'newpath');
moveps(437,23); lineps(440,20);
lineps(437,17); writeln(ps,'stroke');
writeln(ps,'newpath');
moveps(255,215); writeln(ps,'(y(t)) show');
writeln(ps,'newpath');
moveps(445,25); writeln(ps,'(t) show');
writeln(ps,'newpath');

for i:=0 to 2 do begin
  moveps(18,20+i*90); lineps(22,20+i*90);
  writeln(ps,'stroke'); writeln(ps,'newpath');
  moveps(248,20+i*90); lineps(252,20+i*90);
  writeln(ps,'stroke'); writeln(ps,'newpath');
  moveps(10,20+i*90);                               {valeurs sur les}
  writeln(ps,'(,i,) show'); writeln(ps,'newpath'); {axes x et y}
  moveps(240,20+i*90);
  writeln(ps,'(,i,) show'); writeln(ps,'newpath');
end;

for i:=0 to 1 do begin
  moveps(20+i*180,18); lineps(20+i*180,22);
  writeln(ps,'stroke'); writeln(ps,'newpath');
  moveps(250+i*180,18); lineps(250+i*180,22);       {valeurs sur les}
  writeln(ps,'stroke'); writeln(ps,'newpath');       {axes des t}
  moveps(17+i*180,8);
  writeln(ps,'(,i,) show'); writeln(ps,'newpath');
  moveps(247+i*180,8);
  writeln(ps,'(,i,) show'); writeln(ps,'newpath');
end;

```

```

moveps(345,18); lineps(345,22);
writeln(ps,'stroke'); writeln(ps,'newpath');
moveps(335,8); writeln(ps,'(1/2) show');
writeln(ps,'newpath');
moveps(115,18); lineps(115,22);
writeln(ps,'stroke'); writeln(ps,'newpath');
moveps(105,8); writeln(ps,'(1/2) show');
writeln(ps,'newpath');
i:=0;

repeat
  x:=(source^.x+source^.next^.x)/2;
  y:=(source^.y+source^.next^.y)/2;
  arcps(20+i/exp(loop*ln(2))*180,20+x*90,1); {trace de deux graphes}
  arcps(250+i/exp(loop*ln(2))*180,20+y*90,1);
  source := source^.next;
  i:=i+1;
until source^.next=nil;
end;

{=====}
procedure RapDeLong(Source : NodePointer; Dest : RapNodePointer);
{Cette procédure calcule les rapports de longueurs entre les côtés
consécutifs du fichier 'source' et les enregistre dans le fichier 'dest'}

var
  temp1, temp2 : extended;

begin
  repeat
    temp1:=sqrt(sqr(Source^.next^.next^.x-Source^.next^.x)
      +sqr(Source^.next^.next^.y-Source^.next^.y));
    temp2:=sqrt(sqr(Source^.next^.x-Source^.x)
      +sqr(Source^.next^.y-Source^.y));
    Dest^.x:=temp1/temp2;
    if not(Source^.next^.next^.next=nil) then begin
      New(Dest^.Next);
      Dest:=Dest^.next;
    end
  end

```

```

        else
            Dest^.next:=nil;
            Source:=Source^.next;
        until(Source^.next^.next=nil);
    end;

{=====}
procedure Statistiques(Source : RapNodePointer);
{Cette procédure calcule le minimum, le maximum, la moyenne et l'écart-
type entre les divers rapports de longueur dans 'source'}

begin
    minimum := 1000.0; maximum := 0;
    nombre := 0; moyenne := 0;
    ecart := 0;
    repeat
        nombre:=nombre+1;
        if source^.x < minimum then
            minimum := source^.x;
        if source^.x > maximum then
            maximum := source^.x;
        moyenne := moyenne + source^.x;
        ecart := ecart + sqr(source^.x);
        source := source^.next;
    until (source=nil);
    moyenne := moyenne/nombre;
    ecart := sqrt(ecart/nombre-sqr(moyenne));
end;

{=====}
procedure PrintStat;
{Cette procédure imprime les statistiques calculées dans la procédure
Statistiques (voir plus haut)}

var doc : text;

begin
    assign(doc, 'c:\windows\bureau\stat.doc');
    rewrite(doc);

```

```

Writeln(doc,'Le nombre d''observations : ',nombre :5);
Writeln(doc,'Le rapport initial : ',(x3-x2)/(x2-x1) :8:6);
Writeln(doc,'gamma : ',gamma :8:6);
Writeln(doc,'Le maximum : ',maximum :8:6);
Writeln(doc,'Le minimum : ',minimum :8:6);
Writeln(doc,'La moyenne : ',moyenne :8:6);
Writeln(doc,'L''ecart-type : ',ecart :8:6);
Writeln(doc,'');
Writeln(doc,'');
close(doc);
end;

{=====}
begin{main}
  prepareps('c:\windows\bureau\para.ps',0,0,440,260);
  setfont(14);
  initialize(Curve);
  Print32a(Curve,0);
  PrintPara(Curve,0);
  for i:=1 to 2 do begin
    iterate(Curve);
    Print32a(Curve,i);
    PrintPara(Curve,i);
  end;
  for i:=3 to loop do
    iterate(Curve);
  print(curve);
  writeln(ps,'showpage');
  close(ps);
  prepareps('c:\windows\bureau\xplot.ps',0,0,455,230);
  setfont(12);
  xplot(curve);
  writeln(ps,'showpage');
  close(ps);
  new(rapport);
  RapDeLong(Curve,Rapport);
  Statistiques(Rapport);
  PrintStat;
end.
{imprime la figure 3.1.2a}
{imprime la figure 3.1.2b}
{calcule les statistiques sur les}
{rapports de longueurs}

```

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] Barnsley, M., *Fractals Everywhere*, Academic Press, Toronto, 1988.
- [2] Brezinski, C. et Redivo Zaglia, M., *Extrapolation Methods, Theory and Practice*, North-Holland, New-York, 1991.
- [3] Cousteau, J.Y. et Paccalet, Y., *Les grands fleuves*, Laffont, Paris, 1989.
- [4] de Rham, G., Un peu de mathématiques à propos d'une courbe plane, *El. Math.* **2** (1947), 73-76.
- [5] de Rham, G., Sur une courbe plane, *J. Math, Pure Appl.* (9) **35** (1956), 25-42.
- [6] Dubuc, S., Merrien, J.L. et Sablonnière, P., The length of the de Rham curve, *J. Math. Anal. Appl.*, à paraître.
- [7] Feder, J., *Fractals*, Plenum Press, New-York, 1988.
- [8] Hurewicz, W., *Dimension Theory*, Princeton University Press, Princeton, 1948.
- [9] Hutchinson, J. E., Fractals and self-similarity, *Indiana Univ. Math. J.* **30** (1981) 713-747.
- [10] Mandelbrot, B. B., *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman, New-York, 1983.
- [11] Taton, R., *Histoire générale des sciences I*, Presses universitaires de France, Paris, 1957.
- [12] Williams, R. F., Composition of contractions, *Bol. Soc. Mat.* **2** (1971) 55-59.