Université de Montréal

FIBRÉS VECTORIELS COMPLEXES SUR LES SURFACES DE RIEMANN

par

Abdelkrim Kihel

Département de Mathématiques et de Statistique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en Mathématiques

Orientation mathématiques fondamentales

août, 1997

Université de Montréal

Faculté des études supérieurs

Ce mémoire intitulé:

FIBRÉS VECTORIELS COMPLEXES SUR LES SURFACES DE RIEMANN

présenté par:

Abdelkrim Kihel

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

Pierre Berthiaume

(président rapporteur)

Srinivasacharyulu Kilambi

(directeur de recherche)

Abraham Broer

(codirecteur de recherche)

Christiane Rousseau

(membre du jury)

mémoire accepté le 29.04.1998

Sommaire

Le but de notre travail est l'étude des fibrés vectoriels holomorphes sur les surfaces de Riemann. Dans le premier chapitre nous jeterons les bases de la théorie des surfaces de Riemann. Après avoir rappelé brièvement les notions de faisceaux et de revêtements, nous démontrons un lemme qui nous donnera une condition suffisante pour qu'un espace étalé soit un espace de revêtement. Nous utiliserons ce lemme pour montrer qu'en général les primitives (globales) des formes différentielles fermées sur les surfaces de Riemann sont des fonctions multiformes. Par ailleurs, il est bien connu que l'espace des formes harmoniques sur une surface de Riemann compacte de genre g est de dimension $2g$. Pour le démontrer, on construit en général dans la littérature un isomorphisme entre cet espace et $\mathbb{C}^{2g}$. Nous démontrerons l'injectivité de cette isomorphisme en exploitant la relation qui existe entre le groupe d'homotopie et le groupe d'homologie.

Le chapitre 2 sera consacré à l'étude des fibrés vectoriels complexes sur les surfaces de Riemann. Nous verrons que tout fibré complexe analytique sur une surface de Riemann compacte admet des sections méromorphes globales non-triviales, ce qui conduit presqu'immédiatement à l'existence de sous-fibrés en droites. L'existence de sous-fibrés en droites pose donc le problème de l'existence de décompositions (en fibrés en droites) pour tout fibré vectoriel complexe analytique sur une surface de Riemann compacte. Malheureusement, une telle décomposition n'est possible que dans le cas de la droite projective.

Remerciements

Quand dans de pareils cas on veut remercier des gens, on en oublie souvent, et pas des moindres. Je commence alors par remercier tous ceux que je vais oublier...
Je remercie également mon directeur de recherche , le professeur Srinivas Kilambi pour ses grandes qualités humaines. Il a toujours été disponible. Les discussions avec lui m'ont été très utiles; c'est toujours enrichissant de parler à un vrai géomètre. Je remercie tout particulièrement mon frère Omar et sa femme Barbara. Omar a toujours été à mes côtés dans les moments les plus durs de ma vie; qu'il trouve ici l'expression de ma haute gratitude. Parmi mes amis je tiens à remercier tout particulièrement Hassan Benjaafar qui n'a jamais hésité à répondre présent quand j'avais besoin de son aide. Je remercie également mon ami Sadok Kallel avec qui j'ai beaucoup discuté et qui a attiré mon attention sur beaucoup de problèmes de géométrie algébrique et de topologie algébrique. Je ne pourrais terminer ces quelques lignes sans remercier mes chers amis Aziz Madrane et les trois frères Ayari pour leur soutien de toute sorte.

Table des matières

Introduction

Les origines de la théorie des surfaces de Riemann remontent à plus de cent ans avec le problème des fonctions complexes à valeurs multiples ou fonctions multiformes. À l'époque une telle appellation était tout à fait inappropriée pour de tels objets mathématiques: en effet, une fonction au sens usuel du terme associe à un élément donné d'un ensemble de départ un seul élément dans un ensemble d'arrivée. L'exemple le plus élémentaire parmi les fonctions qui violent cette règle est $\sqrt{z}$. A un élément $z \in \mathbb{C}^*, \sqrt{z}$ associe deux valeurs distinctes dans $\mathbb{C}^*$. Question: que faire devant un tel dérèglement ? Réponse: Attendre que le génie de Riemann s'exprime. Et il s'est exprimé. Il suffisait donc de doubler l'ensemble de départ. J'aurais pu avoir la même réponse, c'est à dire attendre que le génie de Riemann s'exprime, mais enfin !

Aujourd'hui, la théorie des surfaces de Riemann ne se borne plus à l'étude des fonctions multiformes. Elle a connu depuis Riemann un très grand essor. Elle étend ses tentacules dans des domaines aussi variés que la théorie des nombres et la géométrie analytique et algébrique, en passant par la physique théorique. Ses outils sont devenus tellement sophistiqués (revêtement, théorie des faisceaux, cohomologie, espace modulaire...) qu'il serait vain d'espérer en faire le tour dans un seul livre (et encore moins dans un seul mémoire...).

Dans le premier chapitre, nous insisterons sur les résultats les plus fondamentaux de la théorie des surfaces de Riemann. Nous commencerons par un survol rapide des variétés complexes; les surfaces de Riemann n'en sont qu'un cas particulier. Nous rentrerons tout de suite après dans le vif du sujet avec les surfaces de Riemann. Nous mettrons tout particulièrement l'accent sur les espaces de fonctions holomorphes et méromorphes. Cette démarche est somme toute naturelle, puisque pour comprendre les variétés complexes analytiques et pouvoir les classifier, il faut comprendre leurs

faisceaux de fonctions holomorphes et méromorphes.
La section qui suivra sera consacrée à l'étude des formes différentielles sur les surfaces de Riemann. Rappelons qu'une des grandes motivations de la naissance de la topologie algébrique est le problème de l'intégration des formes différentielles le long de circuits donnés sur des surfaces (ou des variétés) données. Inversement, comprendre les formes différentielles sur une surface de Riemann nous permet de comprendre sa topologie. Par exemple, la dimension complexe de l'espace des formes holomorphes globales sur une surface de Riemann compacte est égale au genre de cette surface ; d'ailleurs le genre d'une surface de Riemann peut être défini de cette manière. Dans cette même section nous parlerons également de l'intégration et de l'existence des primitives des formes différentielles.
Dans la section 4, nous introduirons la cohomologie à coefficients dans un faisceau quelconque. En fait, la vocation première de cette section est de nous préparer au chapitre suivant, puisqu' un fibré vectoriel peut toujours être considéré comme un élément d'un certain groupe de cohomologie.
Ceci ne nous empêchera nullement de démontrer à la fin de cette section un théorème d'annulation du premier groupe de cohomologie d'une surface de Riemann à coefficients dans certains faisceaux.
Dans la section 5, nous aborderons l'étude des diviseurs et de la suite exacte de cohomologie. C'est d'ailleurs ici que nous donnerons une définition parachutée (dans un premier temps) de la notion de fibré en droites. Nous introduirons également à la fin de cette section la définition de la classe de Chern comme application de la suite exacte de cohomologie.
Le chapitre 2 sera entièrement consacré à l'étude des fibrés vectoriels complexes analytiques sur les surfaces de Riemann. Un long travail de préparation est nécessaire, où les concepts abstraits sont souvent bien présents, avant de pouvoir aborder les questions importantes d'existence de sections globales et de décompositions des fibrés.
Dans la première section de ce chapitre nous parlerons des fibrés vectoriels complexes analytiques sur les variétés complexes d'une manière générale. Nous en donnerons les définitions, les exemples et les premières propriétés qui s'imposent. C'est un avant-goût de ce qui nous attend dans la suite. Dans la section 2, nous commencerons

l'étude exclusive des fibrés vectoriels complexes sur les surfaces de Riemann. Notons qu'un des problèmes fondamentaux concernant les fibrés vectoriels est l'existence des sections globales. Nous montrerons qu'effectivement, tout fibré vectoriel complexe analytique sur une surface de Riemann compacte admet des sections méromorphes globales non triviales. De telles sections existent pour les fibrés vectoriels complexes analytiques sur la droite projective. Mais comme toute surface de Riemann compacte peut être considérée comme un revêtement ramifié à m-feuillets de la droite projective, alors le théorème d'existence des sections globales se généralise aux surfaces de Riemann compactes de genre quelconque (ce n'est pas immédiat !).

L'existence de sections globales nous conduit directement à montrer l'existence de sous-fibrés en droites. C'est alors que, d'une manière naturelle, nous sommes amenés à étudier le problème d'existence de décomposition en fibrés en droites pour les fibrés vectoriels complexes analytiques sur les surafces de Riemann. Grothendieck a montré que la réponse à cette question est affirmative dans le cas des fibrés vectoriels complexes sur la droite projective. Srinivas Kilambi a montré que pour le genre plus grand ou égal à 1, une telle décomposition n'est pas toujours possible. C'est par ce résultat que nous concluons notre mémoire.

Chapitre 1

Généralités sur les surfaces de Riemann

Dans ce premier chapitre nous commencerons par rappeler les définitions et quelques propriétés des variétés complexes. Nous enchaînerons toute de suite après avec les surfaces de Riemann (qui ne sont qu'un cas particulier de variétés complexes). Après en avoir donné la définition et les exemples classiques (parfois détaillés), nous commencerons l'étude des applications holomorphes entres surfaces de Riemann. Suivront ensuite les notions fondamentales sur les revêtements et la théorie des faisceaux, qui sont devenues inévitables pour une étude souple des formes différentielles sur les surfaces de Riemann, ainsi que pour toute théorie cohomologique. Il va donc de soi que les formes différentielles et la cohomologie seront incorporées dans ce même chapitre.

1 Variétés complexes

Définition 1 *Soit X un espace topologique de Hausdorff. Une carte complexe sur X est un homéomorphisme $\varphi : U \to V$ où U et V sont des ouverts de X et de $\mathbb{C}^n$ respectivement.*

Deux cartes $\varphi_i : U_i \to V_i,\ i = 1,\ 2$ sont dites compatibles si l'application

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

est biholomorphe.

Définition 2 *On appelle atlas complexe sur X, une famillle*

$$\mathcal{U} = \{\varphi_i : U_i \to V_i, \imath \in I\}$$

de cartes, telle que, $X = \cup_{i \in I} U_i$, et telle que deux cartes quelconques sont compatibles.

Deux atlas complexes sont dits équivalents si leur réunion est un atlas.
La réunion de tous les atlas équivalents sur X est appelée structure complexe sur X.

Définition 3 *Un espace topologique de Hausdorff est appelé variété complexe s'il est muni d'une structure complexe.*

On appelle n la dimension complexe de X.

Définition 4 *Soient X une varieté complexe et $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \to v_\alpha, \alpha \in I\}$ son atlas. Soit $p \in X$; il existe toujours un ouvert U_α le contenant. Une application $f : X \to \mathbb{C}$ est dite holomorphe au point p si l'application $f \circ {\varphi_\alpha}^{-1}$ est holomorphe au point $\varphi_\alpha(p)$ de V_α.*

Bien entendu la compatibilité des cartes entres elles ne laisse aucune ambiguité sur la définition.

Exemples

a) $\mathbb{C}^n$ est une variété complexe avec l'identité $Id_{\mathbb{C}}$ comme structure complexe.
b) Tout ouvert U d'une variété complexe est une variété complexe avec $Id_{\mathbb{C}}|_U$ comme structure complexe.
c) L'espace projectif $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ est une variété complexe : en effet $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ est défini comme l'ensemble des $(z_0, \cdots, z_1)$ autres que $(0, \cdots, 0)$ modulo la relation d'équivalence

$$(z_0, \cdots, z_n) \sim (\lambda z_0, \cdots, \lambda z_n) \;\; \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

Soit $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ l'application qui à tout élément de $\mathbb{C}^{n+1}$ associe sa classe d'équivalence. On munit $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ de la topologie quotient, π devient alors continue et $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ compact comme image continue de la sphère unité de $\mathbb{C}^{n+1}$ par π.

Pour tout $0 \leq i \leq n$ l'ensemble $U_i = \{p \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C}), p = [x_0, \cdots, x_n], x_i \neq 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ et $\mathbb{P}_n(\mathbb{C}) = \cup_0^n U_i$,.
D'autres part , définissons pour tout $0 \leq i \leq n$, l'application

$$\begin{array}{rcl} p_i : U_i & \rightarrow & \mathbb{C}^n \\ [z_0, \cdots, z_n] & \rightarrow & [\frac{z_0}{z_i}, \cdots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \cdots, \frac{z_n}{z_i}] \end{array}$$

On vérifie facilement que p_i est un homéomorphisme et que $p_i \circ p_j^{-1}$ est biholomorphe. On a ainsi construit sur $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ une structure complexe.

2 Surfaces de Riemann

Définition 5 *On appelle surface de Riemann toute variété complexe connexe de dimension complexe* 1.

Exemples de surfaces de Riemann

a) $\mathbb{C}^1$ et $\mathbb{P}^1$ sont des surfaces de Riemann.

b) Tout ouvert connexe d'une surface de Riemann est une surface de Riemann.

c) On appelle réseau engendré par ω_1 et ω_2 l'ensemble $\Gamma = \{n\omega_1 + n\omega_2 |\ n, m \in \mathbb{Z}\}$ où ω_1 et ω_2 désignent deux éléments de $\mathbb{C}$ qui sont $\mathbb{R}$-linéairement indépendants.
Deux éléments de $\mathbb{C}$, z_1 et z_2 sont dits équivalents modulo Γ , si $z_1 - z_2 \in \Gamma$. La relation ainsi définie est clairement une relation d'équivalence. L'ensemble $\mathbb{C}/\Gamma$ a alors un sens. La projection canonique $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$ induit sur $\mathbb{C}/\Gamma$ la topologie quotient. Cette topologie fait de $\mathbb{C}/\Gamma$ un espace de Hausdorff connexe, comme image de $\mathbb{C}$ par π, et compact comme image par π du rectangle (compact) $R := \{n\omega_1 + m\omega_2 |\ n, m \in [0, 1]\}$.
Soit V un ouvert de $\mathbb{C}$ ne contenant pas de points équivalents modulo Γ. La restriction de π à V est un homéomorphisme de V sur $\pi(V) := U$. Son application réciproque $\varphi : U \rightarrow V$ est une carte sur $\mathbb{C}/\Gamma$.
Soient $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ et $\varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ deux cartes obtenues de la manière précédemment décrite. Montrons alors que $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_2)$ est biholomorphe. Par construction de φ_1 et φ_2, pour tout $z \in \varphi_1(U_1 \cap U_2)$, $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(z)$ et z sont

équivalents modulo Γ. Γ étant discret et $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(z)$ continue, il en résulte alors que sur toute composante connexe de $\varphi_2(U_1 \cap U_2), \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(z)$ s'écrit : $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(z) = z + a$ où $a \in \Gamma$.

Donc $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ est holomorphe; étant injective elle est alors biholomorphe.

Muni de cette structure complexe, $\mathbb{C}/\Gamma$ est appelé le tore complexe.

Définition 6 *Soit U un ouvert d'une surface de Riemann X. Une application $f : U \to \mathbb{C}$ est dite holomorphe sur U si pour toute carte locale $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$, l'application $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ est holomorphe sur $\varphi_\alpha(U \cap U_\alpha) \subset \mathbb{C}$.*

L'ensemble des fonctions holomorphes sur U , qu'on désigne par $\mathcal{O}(U)$, est muni d'une manière naturelle d'une structure de $\mathbb{C}$-algèbre.

Définition 7 *Soit U un ouvert d'une surface de Riemann X. Une fonction complexe f est dite méromorphe sur U si elle est holomorphe partout sur U sauf sur un sous-ensemble $U' \subset U$ de points isolés et si pour tout point $p \in U'$, $\lim_{x \to p} |f(x)| = \infty$.*

On appelle pôle tout point de U' et on désigne par $\mathcal{M}(U)$ la $\mathbb{C}$-algèbre des fonctions méromorphes sur U.

Remarque: $(f + g)$ et $(f.g)$ sont holomorphes là où f et g le sont. La réunion des pôles de $f$et g est un ensemble discret, donc $(f + g)$ et $(f.g)$ resteront méromorphes sur U.

Définition 8 *Soient X et Y deux surfaces de Riemann. Une application $f : X \to Y$ est dite holomorphe si pour toute carte $\varphi : U \to V$ et $\psi : U' \to V'$ sur X et Y respectivement, telles que $f(U) \subset U'$, l'application $h := \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : V \to V'$ est holomorphe.*

Si f est biholomorphe alors X et Y sont dites isomorphes.

Théorème 1 *Soient X une surface de Riemann, et $f \in \mathcal{M}(X)$. Pour tout pôle p de f définissons $f(p) := \infty$. Alors $f : X \to \mathbb{P}$ est une application holomorphe de surfaces de Riemann.*

Réciproquement si $f : X \to \mathbb{P}$ est holomorphe, alors f est identiquement égale à ∞; ou bien $f^{-1}(\infty)$ est un ensemble de points isolés et $f : X - f^{-1}(\infty) \to \mathbb{C}$ est méromorphe sur X.

Preuve: Soit p un pôle de f. Soit $\varphi : U \to V$ une carte autour de p , et soit $\psi : U' \to V'$ une carte de $\mathbb{P}$ telles que $f(U) \subset U'$. Puisque l'ensemble des pôles ne contient que des points isolés, il existe un ouvert $U_p \subset U$ qui ne contient aucun pôle autre que p. Montrons que

$$h := \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \ \varphi(U_p) \to \psi(f(U_p))$$

est holomorphe.

Puisque f est holomorphe sur $U_p - \{p\}$, alors h est holomorphe sur $\varphi(U_p) - \{\varphi(p)\}$. Par conséquent, d'après le théorème des singularités isolées de Riemann (voir [3] page 5), on déduit que h est holomorphe sur $\varphi(U_p)$.

La réciproque est une conséquence directe du théorème suivant:

Théorème 2 *(Théorème de l'identité) Si $f_1, f_2 : X \to Y$ sont deux applications holomorphes entre deux surfaces de Riemann X et Y qui coincident sur une partie $A \subset X$ admettant un point d'accumulation $a \in X$, alors f_1 et f_2 coincident partout sur X.*

Preuve: voir [3] page 6.

Théorème 3 *Soient X et Y deux surfaces de Riemann et $f : X \to Y$ une application holomorphe non constante. Soient $a \in X$ et $b := f(a) \in Y$. Alors il est toujours possible de trouver une carte $\phi : U \to V$ autour de a et une carte $\psi : U' \to V'$ autour de b telles que:*

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}(z) = z^k, k \in \mathbb{N}^* \ \textit{pour tout } z \in V.$$

Preuve: Soient $\omega_1 : W_1 \to W_2$ et $\omega_1' : W_1' \to W_2'$ deux cartes autour de a et b respectivement telles que $\omega_1(a) = \omega_1'(b) = 0$. L'application $\omega_1' \circ f \circ \omega_1^{-1}$ est non constante sur W_2, sinon f serait constante sur W_1 et donc constante sur X en entier car elle est holomorphe. D'autre part, par construction des cartes ω_1 et ω_2, l'application $\omega_1^{'} \circ f \circ \omega_1^{-1}$ s'annule en 0. Étant holomorphe, $\omega_1^{'} \circ f \circ \omega_1^{-1}(z) = z^k g(z)$, avec $k \in \mathbb{N}^*$ et g une application holomorphe ne s'annulant pas en zero. Il existe donc un ouvert $Z \subset W_2$, et une application holomorphe h sur Z telle que $h^k(z) = g(z)$. L'application $zh(z)$ est biholomorphe à l'intérieur d'un ouvert $Z_2 \subset Z$. Si on désigne par α cette dernière application alors $\alpha \circ \omega_1$ est une carte autour de a qui vérifie:

$$\omega_1^{'} \circ f \circ (\alpha \circ \omega_1)^{-1}(z) = z^k \text{ pour tout } z \in Z_2. \quad \square$$

On appelle k *la multiplicité* avec laquelle f envoie a dans b.

Corollaire 1.1 *Soient X et Y deux surfaces de Riemann et $f : X \to Y$ une application holomorphe non constante. Alors f est ouverte.*

Preuve: Il suffit de montrer sur les cartes. En effet l'image de tout disque ouvert $D_r := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ est le disque ouvert $D_{r^k} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r^k\}$. $\square$

Corollaire 1.2 *Soient X une surface de Riemann et $f : X \to \mathbb{C}$ une application holomorphe non constante. Alors $|f|$ n'atteint pas son maximum.*

Preuve: Supposons le contraire i.e. il existe $a \in X$ tel que $|f(a)| \geq |f(x)|$, $x \in X$. Il vient alors que

$$f(X) \subset K := \{z \in \mathbb{C} | \ |z| \leq |f(a)|\},$$

mais f est ouverte, donc $f(X)$ est inclus dans l'intérieur de K, ce qui contredit le fait que $f(a) \in \delta K$, (δK est la frontière de K). $\square$

Théorème 4 *Soient X une surface de Riemann compacte, et $f : X \to Y$ une application holomorphe non constante où Y désigne une surface de Riemann. Alors Y est compacte et f est surjective.*

Preuve: X étant compacte, donc $f(X)$ est compact. Y étant séparé, alors $f(X)$ est fermé dans Y. Mais d'après le corollaire 1.1 $f(X)$ est ouvert. Il vient alors que $f(X)$ est un sous-ensemble non vide, ouvert et fermé dans le connexe Y. Donc: $f(X) = Y$. $\square$
Une conséquence immédiate du théorème 4 est le corollaire suivant:

Corollaire 1.3 *Les seules fonctions holomorphes sur une surface de Riemann compacte sont les constantes.*

Preuve: Soit $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe où X est une surface de Riemann compacte. $\mathbb{C}$ n'étant pas compact, alors f est constante. □

Corollaire 1.4 *Toute fonction méromorphe f sur $\mathbb{P}$ est le quotient de deux polynômes.*

Preuve: En posant $f(\infty) = \infty$, nous pouvons considérer f comme une application holomorphe de $\mathbb{P}$ vers $\mathbb{P}$. L'ensemble des pôles $f^{-1}(\infty)$ est nécessairement fini, sinon il admettrait un point d'accumulation car $\mathbb{P}$ est compact, et f serait identiquement égale à l'infini d'après le théorème de l'identité. Soient, alors $\{a_1, \dots, a_n\}$ l'ensemble des pôles de f, et $h_i(z) = \sum_{j=-k_i}^{-1} c_j(z-a_i)^j$ la partie principale de f au pôle a_i.

L'application $g := f - \sum_{i=1}^{n} h_i$ est holomorphe sur la surface de Riemann compacte $\mathbb{P}$.

Donc d'après le corollaire 1.3 elle est constante. Par conséquent f est rationnelle. □
Nous terminons cette section par un théorème important sur les fonctions doublement périodiques.

Définition 9 *Soient ω_1 et $\omega_2 \in \mathbb{C}$, $\mathbb{R}$-linéairement indépendants, et $\Gamma := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ le réseau engendré par ω_1 et ω_2. Une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}$ méromorphe est dite doublement périodique par rapport à Γ si $f(z+\omega) = f(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $\omega \in \Gamma$.*

Soit $\mathbb{C}/\Gamma$ le tore associé à Γ et soit $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$ la projection canonique. f étant doublement périodique, les points de $\mathbb{C}$ équivalents modulo Γ ont la même image par f. Donc f induit, par composition avec π, une fonction (méromorphe) sur $\mathbb{C}/\Gamma$. De la même manière une fonction méromorphe $f : \mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{P}$ induit sur $\mathbb{C}$ la fonction (méromorphe) $f \circ \pi$ qui est doublement périodique par rapport à Γ.

Théorème 5 *a) Toute fonction doublement périodique holomorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est constante.*
b) Toute fonction non-constante doublement périodique méromorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}$ atteint tout point $c \in \mathbb{P}$.

Preuve: a) D'après la définition 9, f induit sur le tore (compact) $\mathbb{C}/\Gamma$ l'application holomorphe $\tilde{f} : \mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{C}$. D'après le corollaire 1.3 elle est constante.

b) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}$ induit sur le tore (compact) $\mathbb{C}/\Gamma$ l'application $\tilde{f} : \mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{P}$ qui d'après le théorème 4 est surjective. □

3 Les formes différentielles et leur intégration

Avant de commencer l'étude des formes différentielles sur les surfaces de Riemann , il nous paraît essentiel de rappeler les concepts de bases de la théorie des faisceaux. La théorie des faisceaux est l'oeuvre de Jean Leray. Sa qualité première est de permettre le passage du local au global.

Définition 10 *On appelle faisceau abélien $\mathcal{F}$ sur un espace topologique X , la donnée, pour tout ouvert $U \subset X$, d'un groupe abélien $\mathcal{F}(U)$ et d'une collection d'homomorphismes de groupes, qu'on appelle morphismes de restriction , $r_V^U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ pour tous ouverts U et V tels que $V \subset U$, vérifiant les deux propriétés suivantes:*

$$a) \quad r_U^U = \textit{Identité de } U$$

$$b) \quad \forall\ W \subset V \subset U, \ r_W^U = r_W^V \circ r_V^U$$

D'autres part les deux axiomes suivants doivent être vérifiés:

1) *Si* $U = \cup_{i \in I} U_i$ *et* $s, t \in \mathcal{F}(U)$ *sont tels que* $\forall i, j \in I r_{U_i}^U(s) = r_{U_i}^U(t)$ *alors* $s = t$

2) *Si* $U = \cup_{i \in I} U_i,\ s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ *et* $\forall i, j \in I r_{U_i \cap U_j}^{U_i}(s_i) = r_{U_i \cap U_j}^{U_j}(s_j)$ *alors il existe*

$s \in \mathcal{F}(U)$ *telle que* $r_{U_i}^U(s) = s_i \ \forall i$.

Exemples

a) Pour toute variété complexe (resp. différentiable) X on définit le faisceau $\mathcal{O}_M$ (resp $\mathcal{E}_M$) des applications holomorphes (resp. différentiables) sur X de la manière suivante : pour tout ouvert $U \subset X$, on définit $\mathcal{O}_M(U)$ (resp $\mathcal{E}_M(U)$) comme la $\mathbb{C}$-algèbre des applications holomorphes sur U (resp. différentiables sur U).

b) Pour tout ouvert $U \subset \mathbb{C}$, désignons par $\mathcal{B}(U)$ l'algèbre des fonctions holomorphes bornées sur U. Posons $U_i = \{z : |z| < i\}$ *alors* $\mathbb{C} = \cup\ U_i$. Soit $f_i \in \mathcal{B}(U_i)$ telle que $f_i(z) = z$. D'après le théorème de Liouville (voir [3] page 12) , $\mathcal{B}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. Donc il n'existe pas de fonction $f \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ telle que $r^{\mathbb{C}}_{U_i}(f) = f_i$. Le dernier axiome de la définition précédente n'est donc pas vérifié, et par conséquent $\mathcal{B}$ n'est pas un faisceau.

Définition 11 *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur l'espace toplogique X. On appelle fibre au dessus du point $x \in X$ du faisceau $\mathcal{F}$ la limite inductive $\varinjlim_{x\in U} \mathcal{F}(U)$ relativement aux morphismes $\{r^U_V\}$.*

On désigne par $\mathcal{F}_x$ cette limite .

Remarque: La limite inductive $\varinjlim_{x\in U} \mathcal{F}(U)$ s'obtient en effectuant la réunion de tous les $\mathcal{F}(U)$ où U contient x , et en identifiant ensuite deux élément $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ et $s_j \in \mathcal{F}(U_j)$ s'il existe un ouvert $V \subset (U_i \cap U_j)$ *tel que* $r^{U_i}_V(s_i) = r^{U_j}_V(s_j)$.

Soit $r^U_x : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}_x$ la projection naturelle. L'image d'un élément $s \in \mathcal{F}(U)$ *par* r^U_x est appelé germe de s au point x. On le désigne par s_x.

Définition 12 *On appelle espace étalé au dessus d'un espace topologique X, la donnée d'un espace topologique Y et d'un homéomorphisme local surjectif $\pi : Y \rightarrow X$.*

Comme exemple particulièrement intéressant, considérons l'ensemble $\tilde{\mathcal{F}} := \cup_{x\in X}\mathcal{F}_x$, avec la projection naturelle $\pi : \tilde{\mathcal{F}} :\rightarrow X$ qui envoie $s_x \in \mathcal{F}_x$ sur le point x.

Mettons sur $\tilde{\mathcal{F}}$ une structure d'espace topologique:

Pour tout ouvert $U \subset X$ et tout $s \in \mathcal{F}(U)$ considérons l'ensemble

$$\tilde{s}(U) = \{s_x \in \mathcal{F}_x\ |x \in U\}.$$

En prenant comme base de la topologie étalée sur $\mathcal{F}_x$ les ensembles $\tilde{s}(U)$ π devient un homéomorphisme local surjectif (voir [3] page 43), et ainsi $\tilde{\mathcal{F}}$ est un espace étalé.

Dans les prochaines lignes nous donnerons une condition suffisante pour qu'un espace étalé soit un espace de revêtement. Cette condition nous permettra plus tard de démontrer qu'une primitive globale d'une forme différentielle fermée sur une surface de Riemann n'existe que comme fonction multiforme. Mais tout d'abord rappelons quelques définitions sur les revêtements.

Définition 13 *$p : \tilde{X} \to X$ est appelée espace de revêtement de X si tout point de X admet un voisinage ouvert U tel que $p^{-1}(U)$ soit une réunion disjointe d'ouverts V_i chacun d'eux homéomorphe à U. Les ouverts V_i sont appelés les feuillets du revêtement.*

Comme conséquences immédiates de la définition nous avons:

(1) La fibre $p^{-1}(x)$ au dessus de tout point x est discrète.

(2) p est un homéomorphisme local.

(3) p est surjectif.

Lemme 6 *Soient X un espace topologique et $\mathcal{F}$ un faisceau sur X. Soient $\tilde{\mathcal{F}}$ l'espace étalé associé au faisceau $\mathcal{F}$ et $\pi : \tilde{\mathcal{F}} \to X$ la projection naturelle. Si pour tout point x de X il existe un ouvert U contenant x tel que $\forall\ V \subset U$ le morphisme de restriction r_V^U est bijectif alors $\pi : \tilde{\mathcal{F}} \to X$ est un espace de revêtement.*

Preuve: Soient $x \in X$ et U un ouvert contenant x vérifiant la condition du lemme. Alors: $\pi^{-1}(U) = \dot{\cup}_{s \in \mathcal{F}(V)_{V \subset U}} \tilde{s}(V)$ mais r_V^U étant surjective, tout $s \in \mathcal{F}(V)$ est l'image d'un $t \in \mathcal{F}(U)$ i.e $s = r_V^U(t)$; donc $\forall x \in V \;\; s_x = t_x$ et par conséquent $\tilde{s}(V) \subset \tilde{t}(U)$. (avec $s = r_V^U(t)$). Il en résulte que: $\pi^{-1}(U) = \dot{\cup}_{s \in \mathcal{F}(U)} \tilde{s}(U)$. D'autre part, r_V^U étant injective, pour tous $s,\ t \in \mathcal{F}(U)$ et pour tout $V \subset U$ nous avons $r_V^U(s) \neq r_V^U(t)$ (si $s \neq t$). Il en résulte alors que $t_x \neq s_x\, \forall x \in U$ et par conséquent:

$$\tilde{s}(U) \cap \tilde{t}(U) = \emptyset.$$

Comme $\tilde{s}(U)$ est homéomorphe à U par construction de la topologie étalée alors $\pi : \tilde{\mathcal{F}} \to X$ est un espace de revêtement. $\square$

Les opérateurs $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f = f(z)$ une fonction complexe définie dans Ω. En posant

$z = x + i\,y$ nous pouvons considérer $f = (x, y)$ comme une fonction d'un ouvert Ω' de $\mathbb{R}^2$. Supposons que f est différentiable en un point $z_0 \in \Omega$. Sans perte de généralité, on peut supposer $z_0 = f(z_0) = 0$. f s'exprime donc autour de $z_0\,(= 0)$ sous la forme:

$$f(z) = \alpha\, x + \beta\, y + \eta(z)\, z. \tag{1}$$

où α, $\beta \in \mathbb{C}$ et η tend vers 0 avec z. Mais

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2},\; y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

(où $\bar{z} = x - iy$), et ainsi f s'exprime sous la forme:

$$f(z) = \frac{\alpha - i\beta}{2} z + \frac{\alpha + i\beta}{2} \bar{z} + \eta(z)\, z. \tag{2}$$

Ceci nous impose d'introduire les deux opérateurs :

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}). \tag{3}$$

La formule (2) nous suggère immédiatement le théorème suivant:

Théorème 7 *Soit f une fonction différentiable dans l'ouvert Ω, alors f est holomorphe ssi l'équation de Cauchy-Riemann*

$$(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f)(z) = 0 \tag{4}$$

est vérifiée $\forall z \in \Omega$.

Preuve: En effet, d'après la relation (2), $\frac{f(z)}{z} = \frac{\alpha - i\beta}{2} + \frac{\alpha + i\beta}{2}\frac{\bar{z}}{z} + \eta(z)$. Mais $\frac{\bar{z}}{z}$ peut prendre toutes les valeurs du cercle unité, et la limite n'existerait pas. Donc pour que la limite existe il faut et il suffit que $\frac{\alpha + i\beta}{2} = (\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f)(z)|_{z=0} = 0$.

Construction de l'espace cotangent

En géométrie comme souvent en mathématiques on aimerait linéariser localement certains problèmes pour les rendre plus accessibles. D'après la formule (1) $\alpha x + \beta y$ est une approximation linéaire de f au voisinage de z_0 $(= 0)$. Par l'intermédiaire des cartes locales un problème qui se pose localement sur une variété peut être ramené sur un ouvert d'un espace de Banach où un calcul différentiel satisfaisant est toujours permis. En d'autres termes , si $z : U \to V$ est une carte locale autour d'un point z_0 d'une certaine surface de Riemann les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, *et* $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ agissent d'une manière évidente sur l'algèbre des fonctions différentiables $\mathcal{E}(U)$.

Désignons par $\mathcal{E}$ le faisceau des applications différentiables sur une surface de Riemann X donnée . Soient $a \in X$ et $\mathcal{E}_a$ la fibre au dessus de a. Soient $I_a \subset \mathcal{E}_a$ l'espace vectoriel des germes de fonctions s'annulant en a, et $I_a^2 \subset I_a$ les germes de fonctions s'annulant au second degré i.e. telles que $\alpha = \beta = 0$ dans (1). Le quotient I_a/I_a^2 est appelé *espace cotangent* au point a. On le désigne par $T_a^{(1)}$.

Si (U, z) est une carte locale autour d'un point d'une surface de Riemann, avec $z = x + iy$ alors pour toute fonction f différentiable au point a , la forme définie par $\frac{\partial f}{\partial x}(a)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y - a)$ est une application tangente à f. En désignant par

$$d_a x := x - x(a) \ \ et \ \ d_a y = y - y(a)$$

$d_a x$ *et* $d_a y$ deviennent les éléments de la base de l'espace cotangent $T_a^{(1)}$. La forme $df = \frac{\partial f}{\partial x}(a)d_a x + \frac{\partial f}{\partial y}(a)d_a y$ est dite la differentielle de f au point a. De la même manière en désignant par

$$d_a z := z - z(a) \ \ et \ \ d_a\bar{z}(a) = \bar{z} - \bar{z}(a)$$

$d_a\bar{z}$ *et* $d_a z$ sont une base de l'espace cotangent $T_a^{(1)}$. L'espace cotangent $T_a^{(1)}$ s' écrit alors:

$$T_a^{(1)} = \mathbb{C}d_a x \oplus \mathbb{C}d_a y = \mathbb{C}d_a z \oplus \mathbb{C}d_a \bar{z}$$

Les deux espaces ($\mathbb{C}$-unidimensionnels) $\mathbb{C}d_a z$ et $\mathbb{C}d_a \bar{z}$ sont souvent désignés respectivement par $T_a^{1,0}$ et $T_a^{0,1}$.

Définition 14 *Soit U un ouvert d'une surface de Riemann X. On appelle forme différentielle du premier degré sur U une application $\omega : U \to \cup_{a \in U} T_a^{(1)}$, telle que $\omega(a) \in T_a^{(1)}$ pour tout $a \in U$.*

Définition 15 *Une forme différentielle est dite de type* $(1,0)$ *(resp* $(0,1)$*) si* $\omega(a) \in T_a^{1,0}$ *(resp* $T_a^{0,1}$*) pour tout* $a \in U$

De la définition, il résulte que si (U, z) est une carte de X et ω est une forme différentielle sur U , alors ω s'écrit sur U :

$$\omega = fdz + gd\bar{z}$$

où f et g sont des fonctions de U vers $\mathbb{C}$. Si de plus f et g sont différentiables sur U alors ω est une *forme différentiable.* D'autre part si ω s' écrit $\omega = fdz$ où $f \in \mathcal{O}(U)$ alors ω est dite *forme holomorphe.* On désigne par $\Omega(U)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des formes holomorphes sur U.
De la même manière que pour les fonctions méromorphes , nous définissons les formes différentielles méromorphes. Soient U un ouvert d'une surface de Riemann X et P un sous-ensemble discret de U. Une forme différentielle ω est dite méromorphe sur U si elle est holomorphe sur $U - P$ et si tout les points de P sont des pôles.
Dans toute la suite on adoptera les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^{(1)}(U) &:= \text{ L'espace vectoriel des formes différentiables du premier degré sur } U \\
\mathcal{E}^{(1,0)}(U) &:= \text{ L'espace vectoriel des formes différentiables de type } (1,0) \text{ sur } U \\
\mathcal{E}^{(0,1)}(U) &:= \text{ L'espace vectoriel des formes différentiables de type } (0,1) \text{ sur } U \\
\mathcal{M}^{(1)}(U) &:= \text{ L'espace vectoriel des formes méromorphes du premier degré sur } U.
\end{aligned}$$

Formes différentielles de degré 2

On désigne par $T_a^{(2)}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel dont les éléments sont les sommes finies d'éléments de la forme $\omega_1 \wedge \omega_2$ où ω_1 , $\omega_2 \in T_a^{(1)}$ avec les proprietés suivantes:

$$\begin{aligned}
(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 &= (\omega_1 \wedge \omega_3) + (\omega_2 \wedge \omega_3) \\
(\lambda\omega_1 \wedge \omega_2) &= \lambda(\omega_1 \wedge \omega_2) \\
(\omega_1 \wedge \omega_2) &= -(\omega_2 \wedge \omega_1)
\end{aligned}$$

où $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in T_a^{(1)}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$

Définition 16 *On appelle forme différentielle de degré 2 sur U la donnée d'une application $\omega : U \to \cup_{a\in U}(T_a^{(2)})$ telle que $\omega(a) \in T_a^{(2)}$.*

Nous savons que $(d_a x, d_a y)$ et $(d_a z, d_a \bar{z})$ sont deux bases de $T_a^{(1)}$, il en résulte alors que $d_a x \wedge d_a y$ et $d_a z \wedge d_a \bar{z}$ sont deux bases de $T_a^{(2)}$, avec $d_a z \wedge d_a \bar{z} = -2\, i d_a x \wedge d_a y$.

Toute forme différentielle du second degré s'écrit alors sous la forme

$$\omega = f\, dz \wedge d\bar{z} = -2\, i\, f dx \wedge dy$$

où f est une fonction de $U \to \mathbb{C}$. ω est dite différentiable sur U si $f \in \mathcal{E}(U)$. Nous désignerons par $\mathcal{E}^{(2)}(U)$ l'espace vectoriel des formes différentiables de degré 2.

Différentiation extérieure des formes différentiables.

Comme nous l'avons déja vu dans les sections précédentes toute forme différentielle différentiable du premier degré s'écrit $\omega = f dx + g dy$ où $f, g \in \mathcal{E}(U)$. Nous définissons la dérivée extérieure de ω par l'élément $d\omega$ de $\mathcal{E}^{(2)}(U)$ donné par $d\omega := df \wedge dx + dg \wedge dy$. Mais ω s'écrit également $\omega = \tilde{f} dz + \tilde{g} d\bar{z}$ et $d\omega := d\tilde{f} \wedge dz + d\tilde{g} \wedge d\bar{z}$.
Comme conséquence immédiate de la définition nous avons: $ddf = 0, \quad \forall f \in \mathcal{E}(U)$. En effet, $ddf = d(1.df) = d1 \wedge df = 0$.
Par ailleurs une forme différentielle $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(U)$ où U est un ouvert d'une surface de Riemann X est dite *fermée* si $d\omega = 0$, et elle est dite *exacte* si $\omega = df$ où $f \in \mathcal{E}(U)$.
Soit U un ouvert d'une surface de Riemann X . Nous avons le théorème suivant:

Théorème 8 *(1) Toute forme différentielle holomorphe est fermée.*
(2) Toute forme différentielle différentiable de type (1,0) et fermée est holomorphe.

Preuve: (1) Si ω est une forme holomorphe alors elle s'écrit localement sous la forme $\omega = f\, dz$ avec $f \in \mathcal{O}(U)$. Mais f étant holomorphe, $df = \frac{\partial f}{\partial z} dz$ (voir 3.8). Donc $d\omega = df \wedge dz$ et par conséquent $d\omega = \frac{\partial f}{\partial z} dz \wedge dz = 0$.
(2) Soit $\omega \in \mathcal{E}^{(1,0)}(U)$ qui est fermée. Alors localement $\omega = f dz$ avec $f \in \mathcal{E}(U)$. Par conséquent $d\omega = (\frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}) \wedge dz$, soit $d\omega = -\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z}$. ω étant fermée, $d\omega = 0$,

d'où $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ et donc f est holomorphe. $\square$

Nous pouvons à présent aborder l'intégration des formes différentielles le long d'une courbe et l'existence de primitives.

Soient alors $c : [0,1] \to X$ une courbe continument différentiable par morceaux relativement à une partition $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ de l'intervalle $[0,1]$ et $(U_k, z_k), z_k = x_k + iy_k, k = 1, \ldots, n$ des cartes de X telles que $c([t_{k-1}, t_k]) \subset U_k$. Soit $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$. Sur chaque ouvert U_k, ω sécrit sous la forme $\omega = f_k dx_k + g_k dy_k$, où $f_k$etg_k sont différentiable. On définit l'intégrale de ω le long de c comme suit:

$$\int_c \omega := \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (f_k(c(t))\frac{dx_k}{dt}(c(t)) + g_k(c(t))\frac{dy_k}{dt}(c(t)))dt$$

Théorème 9 *Soient X une surface de Riemann et $c : [0,1] \to X$ une courbe continûment différentiable par morceaux. Soit $F \in \mathcal{E}(X)$. Alors*

$$\int_c dF = F(c(1)) - F(c(0))$$

Preuve: Soient $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ une partition de l'intervalle $[0,1]$ et (U_k, ϕ_k) un système de carte tels que $[t_{k-1}, t_k] \subset U_k$. Sur chaque U_k nous avons :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_k}dx_k + \frac{\partial F}{\partial y_k}dy_k$$

si on pose $\phi_k = x_k + iy_k$.

Donc

$$\int_c dF = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\frac{\partial F}{\partial x_k}(c(t))\frac{dx_k}{dt}(c(t)) + \frac{\partial F}{\partial y_k}(c(t))\frac{dy_k}{dt}(c(t)))dt$$

Or :

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} (\frac{\partial F}{\partial x_k}(c(t))\frac{dx_k}{dt}(c(t)) + \frac{\partial F}{\partial y_k}(c(t))\frac{dy_k}{dt}(c(t)))dt = F(c(t_k)) - F(c(t_{k-1}))$$

Par conséquent:

$$\int_c dF = \sum_{k=1}^{n}(F(c(t_k)) - F(c(t_{k-1})) = F(c(1)) - F(c(0)) \quad \square$$

Image inverse des formes différentielles

Soient X et Y deux surfaces de Riemann et $F : X \to Y$ une application holomorphe. Pour tout $k = 0, 1, 2$, et tout U ouvert de Y, nous définissons l'application:

$$F^* : \mathcal{E}^k(U) \to \mathcal{E}^k(F^{-1}(U))$$

Pour $k = 0$ $(\mathcal{E}^0 := \mathcal{E}), f \in \mathcal{E}(U)$, d'où $F^*(f) = f \circ F$; pour $k = 1, f \in \mathcal{E}^{(1)}(U)$ et s'écrit $f = f_1\, dx + f_2\, dy$, alors $F^*(f) = f_1 \circ F\, d(x \circ F) + f_2 \circ F\, d(y \circ F)$; pour $k = 2$, $F^*(f dg \wedge dh) = F^*(f) d(F^*(g)) \wedge d(F^*(h))$

Définition 17 *Soient X une surface de Riemann et $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$. Une fonction $f \in \mathcal{E}(X)$ est dite une primitive de ω si $df = \omega$.*

Il est clair que toute forme différentielle admettant une primitive est fermée (puisque $d^2 f = d\omega = 0$). D'autres part si F est une primitive de ω alors $F + c$ est aussi une primitive de ω. Réciproquement si F_1 et F_2 sont deux primitives de ω alors $d(F_1 - F_2) = dF_1 - dF_2 = 0$. Donc d'après le théorème précédent $F_1 - F_2 = cste$. Par ailleurs si $U = x + iy$ est une carte locale d'une surface de Riemann X , et $\omega \in \mathcal{E}^1(U)$ est fermée alors il existe toujours une fonction $f \in \mathcal{E}(U)$ telle que $df = \omega$ (voir [3] page 71). Cependant, globalement une primitive d'une forme différentielle fermée n'existe généralement que comme fonction multiforme.

Théorème 10 *Soient X une surface de Riemann et $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$. Alors il existe un espace de revêtement $p : \tilde{X} \to X$ avec $\tilde{X}$ connexe et une primitive $F \in \mathcal{E}(\tilde{X})$ de la forme différentielle $p^*\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(\tilde{X})$.*

Preuve: Pour tout ouvert $U \subset X$, considérons l'ensemble $\mathcal{F}(U)$ de toutes les primitives $f (\in \mathcal{E}(U))$ de ω. $\mathcal{F}$ est un faisceau. Soit $\tilde{\mathcal{F}}$ l'espace étalé associé. D'après le lemme 6 $\tilde{\mathcal{F}}$ est un espace de revêtement. Soit $\tilde{X}$ une composante connexe de $\tilde{\mathcal{F}}$, alors

$p|_{\tilde{X}} : \tilde{X} \to X$ est aussi un espace de revêtement et $\tilde{X}$ admet une structure de surface de Riemann (voir [5] page 220). Ainsi $(p|_{\tilde{X}})^*\omega$ admet comme primitive la fonction $F : \tilde{X} \to \mathbb{C}$ définie par $F(\phi) = \phi(p(\phi))$.

Soit à présent f une fonction de classe C^2 sur une surface de Riemann X. f est dite *harmonique* si

$$f_{xx} + f_{yy} = 0$$

f_{xx} (resp. f_{yy}) est localement la dérivée seconde relativement a x (resp. y). Une forme différentielle est dite harmonique si localement elle est la différentielle d'une fonction harmonique. Nous désignerons par $H^1(X)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des formes différentielles harmoniques sur X.
Il en résulte alors immédiatement de la définition que toute forme harmonique est fermée.

Petit survol intuitif du groupe d'homotopie et du groupe d'homologie

Soit X une surface de Riemann. Pour construire le groupe d'homotopie de X on regroupe les courbes fermées définies sur X par paquets de telle sorte que les courbes contenues dans le même paquet peuvent être déformées l'une en l'autre d'une manière continue et que deux courbes contenues dans deux paquets différents ne peuvent pas être déformées l'une en l'autre d'une manière continue. Les paquets sont appelés *classes d'équivalences*. On désigne l'ensemble ainsi construit par $\pi_1(X)$. Il admet une structure de groupe.
Que fait-on pour construire le groupe d'homologie ? On reprend ce même groupe d'homotopie et on cherche toutes les classes d'équivalences de courbes qui séparent X en deux composantes connexes disjointes. En d'autres termes, on cherche toutes les courbes fermées de X qui sont des bords. On quotiente $\pi_1(X)$ par le sous groupe ainsi construit. Le groupe quotient obtenu est appelé *groupe d'homologie*; il est noté $H_1(X)$. Nous avons donc la projection $\pi_1(X) \to H_1(X)$. Tout élément de $\pi_1(X)$ peut s'écrire comme somme d'éléments de $H_1(X)$. Toute base de $H_1(X)$ s'écrit sous la forme $\{a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g\}$. On appelle g le genre de la surface X.

Si c est un élément de $\pi_1(X)$ ou $H_1(X)$, et ω une forme différentielle sur X, nous appellerons *période* de ω la valeur de son intégrale $\int_c \omega$. Pour une étude détaillée de l'homotopie et de l'homologie voir par exemple [3].

Pour démontrer le théorème qui suivra nous avons besoin du lemme suivant:

Lemme 11 *Soit X une surface de Riemann. Une forme différentielle $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$ admet une primitive $F \in \mathcal{E}(X)$ si et seulement si toutes ses périodes sur $\pi_1(X)$ sont nulles.*

Preuve: Si ω admet une primitive, alors le résultat est une conséquence immédiate du théorème 9.
Pour démontrer l'autre sens on utilise la notion de revêtement universel et d'automorphie. Pour la preuve voir par exemple [3] page 75.

Théorème 12 *L'espace vectoriel $H^1(X)$ des formes harmoniques est de dimension $2g$, où g est le genre d'une surface de Riemann compacte X.*

Preuve: Soient X une surface de Riemann compacte de genre g et $\{a_1, \ldots .a_g, b_1, \ldots, b_g\}$ une base du groupe d'homologie $H_1(X)$. Soit $H^1(X)$ l'espace vectoriel des formes harmoniques sur X. Considérons l'application

$$\begin{aligned} \psi : H^1(X) &\rightarrow \mathbb{C}^{2g} \\ \omega &\rightarrow (\int_{a_1} \omega, \ldots, \int_{a_g} \omega, \int_{b_1} \omega, \ldots, \int_{b_g} \omega) \end{aligned}$$

Montrons que ψ est injective.
Supposons qu'il existe une forme harmonique $\omega \in H^1(X)$ telle que $\psi(\omega) = 0$, i.e telle que les périodes de ω sont nulles sur les éléments de $H_1(X)$. Nous savons que tout élément de $\pi_1(X)$ est la somme d'un élément de $H_1(X)$ et d'un élément homologue à zéro (car il existe un morphisme surjectif naturel de groupe $\pi_1(X) \rightarrow H_1(X)$). ω étant fermée , sa période sur un élément de $\pi_1(X)$ homologue à zéro est nulle. Donc les périodes de ω sur tout élément de $\pi_1(X)$ sont également nulles. Il en résulte alors d'après le lemme précédent que ω admet une primitive F sur X. ω est harmonique

donc F l'est aussi. Or, les seules fonctions harmoniques sur une surface de Riemann compacte sont les constantes (voir [2]). Par conséquent, $\omega = dF = 0$ et ψ est injective. Pour la surjectivité il faut construire à la main les formes harmoniques désirées. Pour une preuve détaillée de la surjectivité nous conseillons au lecteur de consulter [2] page 75. □

4 Cohomologie

Soient X un espace topologique (séparé ou non), $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$, un recouvrement ouvert et $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur X. A toute suite finie $s = (i_0, \ldots, i_p)$ d'éléments de I , nous associons l'ouvert $U_s = U_{i_0 \ldots i_p} = U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p}$.

Définition 18 *On appelle p-cochaine de $\mathcal{U}$ à valeurs dans $\mathcal{F}$ une fonction qui fait correspondre à toute suite $s = (i_0, \ldots, i_p)$ d'éléments de I, une section $f_s = f_{i_0 \ldots i_p}$ de $\mathcal{F}$ au dessus de U_s.*

On désigne par $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ le groupe abélien de toute les p-cochaines sur U.
On définit un opérateur $\delta : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ comme suit : Si $f \in C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ et $s = (i_0, \ldots, i_p)$ est une suite de $p+1$ éléments de I, alors,

$$(\delta f)(i_0, \ldots, i_p) = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j r_s^{s_j} f(i_0, \ldots, \hat{i}_j, \ldots, i_{p+1})$$

où $s_j = (i_0, \ldots, \hat{i}_j, \ldots, i_{p+1})$ et $r_s^{s_j}$ désigne le morphisme de restriction de $f(i_0, \ldots, \hat{i}_j, \ldots, i_{p+1})$ à U_s. δ est appelé opérateur cobord. C'est un homomorphisme de groupe. Par un calcul direct on voit que $\delta\delta = 0$. On appelle groupe des p-cocycles le noyau de l'homomorphisme $\delta : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ et groupe des p-cobords l'image de l'homomorphisme $\delta : C^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Il est évident que tout cobord est un cocycle car $\delta\delta = 0$. Désignons par $Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ le noyau de $\delta : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$

Définition 19 *Le groupe quotient $H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) / \delta C^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ est appelé le p-ième groupe de cohomologie de $\mathcal{U}$ à coefficients dans $\mathcal{F}$.*

Lemme 13 *$H^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \Gamma(X,\mathcal{F})$, où $\Gamma(X,\mathcal{F})$ désigne le groupe abélien des sections globales.*

Preuve: Un 0-cocycle est une famille $(f_i)_{i\in I}$ où chaque f_i est un élément de $\Gamma(U_i,\mathcal{F})$ et vérifiant $r_{U_i}^{U_i\cap U_j}(f_i) - r_{U_j}^{U_i\cap U_j}(f_j) = 0$. Il existe donc une section globale (unique) $f \in \Gamma(X,\mathcal{F})$ telle que $f|_{U_i} = f_i$ (parceque $\mathcal{F}$ est un faisceau).
Inversement si $f \in \Gamma(X,\mathcal{F})$ est une section globale la famille $(f|_{U_i})_{i\in I}$ est un 0-cocycle.

Passage d'un recouvrement à un recouvrement plus fin

$\mathcal{F}$ étant fixé les groupes $H^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ dépendent du recouvrement $\mathcal{U}$ choisi. Pour avoir une théorie cohomologique qui ne dépend que de l'espace topologique X on doit prendre des recouvrements de plus en plus "fins" et prendre ensuite la limite inductive de tout les H^p.

Définition 20 *Un recouvrement $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ est dit plus fin qu'un recouvrement $\mathcal{B} = \{V_i\}_{j\in J}$ s'il existe $\tau : I \to J$ telle que $U_i \subset V_{\tau i}$ pour tout $i \in I$.*

Les recouvrements $\mathcal{U}$ et $\mathcal{B}$ étant fixés , l'application τ n'est pas unique. Si $f \in C^p(\mathcal{B},\mathcal{F})$, posons

$$(\tau f)_{i_0\ldots i_p} = r_{U_{i_0\ldots i_p}}^{V_{\tau i_0\ldots\tau i_p}}(f_{i_0\ldots i_p})$$

L'application $\tau : C^p(\mathcal{B},\mathcal{F}) \to C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ est un homomorphisme de groupe qui commute avec l'opérateur cobord δ. Elle induit donc un homomorphisme

$$\tau^* : H^p(\mathcal{B},\mathcal{F}) \to H^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$$

Nous énonçons sans démonstration le lemme suivant:

Lemme 14 *Si $\tau,\mu : I \to J$ sont deux applications de raffinement , alors $\tau^* = \mu^*$.*

La relation "$\mathcal{U}$ est plus fin que $\mathcal{B}$" est une relation de préordre (filtrante) dans l'ensemble de tout les recouvrements de X ; et d'après le lemme précédent l'homomorphisme $H^p(\mathcal{B},\mathcal{F}) \to H^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ est unique si $\mathcal{U}$ est plus fin que $\mathcal{B}$. D'autre part ces homomorphismes sont transitifs ce qui nous permet d'introduire

Définition 21 *On appelle p-ième groupe de cohomologie de X à valeurs dans le faisceau $\mathcal{F}$, la limite inductive des groupes $H^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$, et on la note $H^p(X,\mathcal{F})$.*

Il existe donc un homomorphisme canonique $H^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to H^p(X,\mathcal{F})$ associé à tout recouvrement $\mathcal{U}$.
Nous terminons cette section par la démonstration du théorème suivant:

Théorème 15 *Sur une surface de Riemann X, les premiers groupes de cohomologie à coefficients dans $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}^{(1)}$, $\mathcal{E}^{(1,0)}$, $\mathcal{E}^{(0,1)}$ et $\mathcal{E}^{(2)}$ sont nuls.*

Preuve: Nous allons démontrer que $H^1(X,\mathcal{E}) = 0$, les démonstrations des autres cas sont analogues. Soient alors $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X, et $(f_{ij})_{i,j\in I} \in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{E})$ un cocycle. Il faut donc montrer que $(f_{ij})_{i,j\in I} \in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{E})$ est un cobord. $(f_{ij})_{i,j\in I} \in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{E})$ étant un cocycle alors pour tout $i,j,k \in I$, $f_{ij} = f_{ik} - f_{jk}$.
Soit $(\psi_i)_{i\in I}$ une partition de l'unité (voir [3] page 238) subordonnée au recouvrement $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$. La fonction $\psi_k f_{ik}$ définie sur $U_i \cap U_k$ peut être prolongée en une fonction différentiable sur U_i en lui assignant la valeur 0 en dehors de son support. De la même manière, la fonction $\psi_k f_{jk}$ définie sur $U_j \cap U_k$ peut être prolongée en une fonction différentiable sur U_j. Les fonctions $g_i = \sum \psi_k f_{ik}$ *et* $g_j = \sum \psi_k f_{jk}$ sont définies sur U_i *et* U_j respectivement et vérifient

$$g_i - g_j = \sum \psi_k(f_{ik} - f_{jk}) = \sum \psi_k f_{ij} = f_{ij}.$$

Donc $(f_{ij})_{i,j\in I}$ est un cobord.

5 Diviseurs et suite exacte de cohomologie

Soient X une surface de Riemann et p un point de X. L'ordre d'une fonction meromorphe en un point p est l'entier k tel que $a_k \neq 0$ et $a_j = 0$ $\forall j > k$ dans son developpement en serie de Laurent. Soient f et g deux fonctions méromorphes dans un voisinage de p et qui ont le même ordre en ce point, alors f/g est une fonction holomorphe qui ne s'annule pas dans un voisinage du point p.

Cette remarque nous amène à considérer le faisceau quotient (voir [5] page 23)$\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$, où $\mathcal{M}^*$ désigne le faisceau des germes de fonctions méromorphes non identiquement nulles et $\mathcal{O}^*$ est le faisceau des fonctions holomorphes qui ne s'annulent en aucun point, identifiant de la sorte deux fonctions méromorphes qui ont le même pôle en un point donné.

Soient $U \subset X$ un ouvert et $f \in \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*(U)$. Considérons la fonction

$$D(f): U \to \mathbb{Z}$$

qui à tout point de U associe l'ordre de f en ce point.

Ce qu'il faut d'abord noter ici, c'est que l'ensemble des points où $D(f)$ est non nulle est un ensemble discret puisque l'ensemble des points où l'ordre de f est non nul est exactement l'ensemble des pôles et des zéros de f, et d'après le principe des singularités (et des zéros) isolés, cet ensemble est discret.

Nous avons ainsi associé à toute fonction $f \in \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*(U)$ une fonction $D(f): U \to \mathbb{Z}$ à support discret. Inversement, si $D: U \to \mathbb{Z}$ est une fonction à support discret, est-il toujours possible de lui associer une fonction méromorphe dans U ? La réponse à cette question est loin d'être évidente. Introduisons alors la définition suivante:

Définition 22 *On appelle diviseur sur un ouvert U d'une surface de Riemann X, la donnée d'une fonction $D: U \to \mathbb{Z}$ à support discret.*

Nous désignerons par $\mathcal{D}$ le faisceau des diviseurs sur X.

Répondre à la question précédente revient donc à étudier le morphisme

$$\tau: \Gamma(X, \mathcal{M}^*) \to \Gamma(X, \mathcal{D})$$

Est-il surjectif ? Sinon, "jusqu'à quel point" il ne l'est pas ?

Nous avons donc une bonne motivation pour introduire la suite exacte de cohomologie.

Soient X un espace topologique, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{S}$ deux faisceaux abélien sur X. Rappelons (voir [3] page 120) d'abord qu'un morphisme de faisceau $\alpha: \mathcal{F} \to \mathcal{S}$ est injectif (resp. surjectif) si les homomorphismes $\alpha_x: \mathcal{F}_x \to \mathcal{S}_x$ induits sur les fibres sont injectifs (resp. surjectifs) pour tout $x \in X$.

Soient $\mathcal{F}$, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{H}$ trois faisceaux sur X et

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{S} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$$

une suite de morphismes. Une telle suite est dite exacte si pour tout $x \in X$ la suite

$$\mathcal{F}_x \xrightarrow{\alpha_x} \mathcal{S}_x \xrightarrow{\alpha_x} \mathcal{H}_x$$

induite sur les fibres est exacte.

$H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ s'identifie avec le groupe des sections globales $\Gamma(X, \mathcal{F})$.
Soit maintenant

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{S} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \to 0 \quad (*)$$

une suite exacte de faisceaux sur un espace topologique X où 0 désigne le faisceau trivial. Nous définissons un homomorphisme

$$\delta^* \colon H^0(\mathcal{U}, \mathcal{H}) \to H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

de la façon suivante :
β est localement surjective; mais ceci ne veut nullement dire que l'application $\mathcal{S}(U) \to \mathcal{H}(U)$ est également surjective pour tout ouvert $U \subset X$. Cependant, si $h \in \mathcal{H}(X)$, il est toujours possible de trouver un recouvrement $\mathcal{U} = \{U_{i \in I}\}$ de X tel que $\forall i \in I$, il existe un élément $g_i \in S(U_i)$ tel que $\beta(g_i) = h|_{U_i}$ où $h|_{U_i}$ désigne la restriction de h à U_i. Mais

$$\beta(g_i)|_{U_i \cap U_j} - \beta(g_j)|_{U_i \cap U_j} = (h|_{U_i})|_{U_i \cap U_j} - (h|_{U_j})|_{U_i \cap U_j} = h|_{U_i \cap U_j} - h|_{U_i \cap U_j} = 0$$

Donc $\beta(g_i - g_j) = 0$.

L'élément $g_i - g_j \in ker(\mathcal{S}(U_i \cap U_j) \overset{\beta|_{U_i \cap U_j}}{\longrightarrow} \mathcal{H}(U_i \cap U_j))$. Par exactitude de la suite (*) il existe un unique élément $f_{ij} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ tel $\alpha(f_{ij}) = g_i - g_j$. Par ailleurs la famille $(f_{ij})_{i,j \in J}$ ainsi construite vérifie $f_{ij} - f_{ik} + f_{jk} = 0$. C'est donc un cocycle de $\mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Soit alors $(\bar{f_{ij}})$ sa classe de cohomologie dans $H^1(X, \mathcal{F})$. L'homomorphisme δ^* est donc défini par

$$\delta^*(h) = (\bar{f_{ij}})$$

Nous énonçons alors sans plus de détails le théorème suivant:

Théorème 16 *Si X est un espace de Hausdorff paracompact et si*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{S} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de faisceaux abéliens sur X, alors elle induit la suite la suite exacte de cohomologie suivante:

$$0 \longrightarrow H^0(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha^*} H^0(X,\mathcal{S}) \xrightarrow{\beta^*} H^0(X,\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta^*} H^1(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha^*} H^1(X,\mathcal{S}) \xrightarrow{\beta^*}$$

$$H^1(X,\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta^*} H^2(X,\mathcal{F}) \longrightarrow \ldots$$

Rappelons qu'un espace de Hausdorff est dit paracompact si tout recouvrement admet un recouvrement plus fin localement fini.

Comme application de la suite exacte de cohomologie introduisons la notion de classe de Chern.
A cet effet, considérons la suite exacte suivante:

$$o \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{e} \mathcal{O}^* \longrightarrow 0$$

où $e(f) = exp2\pi i f$ localement.
La suite exacte de cohomologie associée contient le segment

$$H^1(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}^*) \longrightarrow H^2(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X,\mathcal{O}) \quad (*)$$

Mais $H^2(X,\mathcal{O}) = 0$. Pour le montrer on utilise la suite exacte de Dolbeault-Serre, qui est une résolution fine (voir [5] page 37) d'un certain faisceau. Nous n'allons pas démontrer ce théorème (voir par exemple [5]).
La suite précédente se transforme alors en la suite exacte suivante:

$$0 \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O})/H^1(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}^*) \xrightarrow{c} H^2(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

Dans toute la suite un élément de $H^1(X,\mathcal{O}^*)$ sera appelé *fibré en droites holomorphe.*

Définition 23 *Soit $\xi \in H^1(X,\mathcal{O}^*)$ un fibré holomorphe en droites. On appelle classe de Chern de ξ son image $c(\xi)$ dans $H^2(X,\mathbb{Z})$.*

Chapitre 2

Fibrés vectoriels sur les surfaces de Riemann

1 Fibrés vectoriels sur les variétés complexes

Définition 24 *Soit X une variété complexe de dimension n. Un fibré vectoriel holomorphe de rang r sur X est la donnée de :*

1) Une variété complexe E.

2) Une application holomorphe surjective $\pi : E \to X$ telle que :

i) $E_p = \pi^{-1}(p)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension r pour tout $p \in X$.

ii) Il existe un recouvrement de X par des cartes locales $\{U_j\}_{\{j\in J\}}$ et des applications biholomorphes $\{h_j\}_{\{j\in J\}}, h_j : \pi^{-1}(U_j) \to U_j \times \mathbb{C}^r$ vérifiant $Pr_1 \circ h_j = \pi$ et telles que :

$$E_p \to \{p\} \times \mathbb{C}^r \to \mathbb{C}^r$$

soit un isomorphisme.

Les h_j sont appelées trivialisations locales.

Remarques:

1) Sur chaque intersection $U_i \cap U_j$ nous pouvons introduire les fonctions de transition

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \to Gl(r, \mathbb{C})$$

par la formule

$$(h_i \circ h_j^{-1})(p, v) = (p, g_{ij}(p)v) \quad \forall\ p \in U_i \cap U_j$$

D'autres part nous avons les relations de cocycles importantes:

$$g_{ij}g_{jk} = g_{ik} \ \ sur \ U_i \cap U_j \cap U_k$$

$$g_{ij} = g_{ji}^{-1} \ \ et \ \ g_{ii} = I$$

2) Etant donné un recouvrement $\{U_j\}_{\{j \in J\}}$ *de* X, et des fonctions holomorphes

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \to Gl(r, \mathbb{C})$$

satisfaisant

$$g_{ij}g_{jk} = g_{ik} \ \ sur \ U_i \cap U_j \cap U_k$$

il est toujours possible de construire un fibré holomorphe E sur X.

Exemples de fibrés vectoriels

1) Fibré trivial : $\pi : X \times \mathbb{C}^r \to X$ où π désigne la première projection.

2) Fibré tangent holomorphe:

Si X est une variété complexe de dimension n et p un point de X, on désigne par par T_pX l'espace vectoriel des dérivations $D : \mathcal{O}_p \to \mathbb{C}$ où $\mathcal{O}_p$ est le germe des fonctions holomorphes au point p. Le fibré tangent holomorphe est donné par

$$T_{1,0}(X) = \cup_{p \in X} T_p(X)$$

avec la projection naturelle $\pi : T_{1,0}(X) \to X$. Si $(h_j = (z_1^j, ..., z_n^j)_{j \in J})$ est un système de coordonnées locales sur X, alors les applications de transitions sont données par

$$g_{ij} = (\frac{\partial z_k^i}{\partial z_q^j})$$

3) Fibré cotangent holomorphe:

Le fibré cotangent holomorphe sur X est donné par ses fonctions de transitions

$$f_{ij} = (\frac{\partial z_q^j}{\partial z_k^i})$$

Nous donnons tout de suite la définition suivante:

Définition 25 *Soit $\pi : E \to X$ un fibré vectoriel et g_{ij} ses applications de transition relativement à un recouvrement donné. Un fibré $\pi^* : E^* \to X$ est dit dual de E si les applications de transition $\{f_{ij}\}$ de E^* relativement au même recouvrement sont données par :*

$$f_{ij} = (g_{ij}^{-1})^t$$

Quelques opérations linéaires sur les fibrés vectoriels

i) Produit extérieur:

Les fonctions de transition de $\wedge^k E$ sont $\wedge^k g_{ij}$ (produit extérieur) et $\wedge^r g_{ij} = det(g_{ij})$ pour $k = r$,

ii) Si F est un autre fibré vectoriel sur X, alors $Hom(E, F) \cong E^* \otimes F$. Si $F = \mathbb{C}$, nous avons le cas particulier du fibré dual $Hom(E, \mathbb{C}) = E^*$.

iii) Soit $\{f_{ij}\}$ les fonctions de transition du fibré vectoriel F. Alors les fonctions de transition du fibré $E \oplus F$ sont :

$$k_{ij} = g_{ij} \oplus f_{ij}$$

Plus généralement, si $E \subset F$ est un sous-fibré avec fonctions de transition $g_{ij} = f_{ij}|_E$, les f_{ij} peuvent s'exprimer sous la forme

$$\begin{pmatrix} g_{ij} & (*) \\ 0 & h_{ij} \end{pmatrix}$$

où les h_{ij} sont les fonctions de transitions du fibré quotient F/E.

Sections des fibrés vectoriels

Soit $\pi : E \to X$ un un fibré holomorphe sur une variété complexe X.

Définition 26 *On appelle section de E sur X une application holomorphe $f : X \to E$ telle que $\pi \circ f = Id_X$.*

Quelques exemples

i) Un champ de vecteurs holomorphe est une section du fibré tangent d'une variété complexe.

ii) Une k-forme ω est une section du produit extérieur $\wedge^k T^*X$ du fibré cotangent d'une variété X.

Applications entre fibrés vectoriels

Soient $\pi_1 \colon E \to X$ et $\pi_2 \colon F \to X$ deux fibrés vectoriels holomorphes sur X.

Définition 27 *$f \colon E \to F$ est un homomorphisme de fibrés vectoriels holomorphes si:*

1) f est holomorphe.

2) $\pi_2 \circ f = \pi_1$

3) f est linéaire sur chaque fibre.

Interprétation locale des isomorphismes de fibrés vectoriels

Soit $\mu \colon E \to F$ un isomorphisme de fibrés vectoriels. Soit $\{U_j\}$ un recouvrement de X qui trivialise E et F tel que

i) E admet comme trivialisations locales $h_j \colon \pi_1^{-1}(U_j) \to U_j \times \mathbb{C}^r$

ii) F admet comme trivialisations locales $k_j \colon \pi_2^{-1}(U_j) \to U_j \times \mathbb{C}^r$

avec comme fonctions de transition $\{g_{ij}\}$ et $\{f_{ij}\}$ respectivement.

Le biholomorphisme $k_j \circ \mu \circ h_j^{-1} \colon U_j \times \mathbb{C}^r \to U_j \times \mathbb{C}^r$ prend la forme

$$k_j \circ \mu \circ h_j^{-1} = (Id_{U_j}, \mu_j)$$

où $\mu_j \colon U_j \to GL(r, \mathbb{C})$ est holomorphe.

D'autre part nous avons:

$$(k_i \circ k_j^{-1}) \circ (k_j \circ \mu \circ h_j^{-1}) = (k_i \circ \mu \circ h_j^{-1}) = (k_i \circ \mu \circ h_i^{-1}) \circ (h_i \circ h_j^{-1})$$

On en conclut que : $f_{ij}\mu_j = \mu_i g_{ij}$

D'où le théorème suivant:

Théorème 1 *Soient E et F deux fibrés vectoriels sur X. Alors E et F sont isomorphes, si et seulement si, il existe un recouvrement trivialisant commun $\{U_j\}_{\{j \in J\}}$ et des applications $\mu_j \colon U_j \to GL(r, \mathbb{C})$ telles que si $\{g_{ij}\}$ et $\{f_{ij}\}$ sont les applications de transitions respectives de E et F alors $f_{ij}\mu_j = \mu_i g_{ij}$ $\forall\, i, j \in J$.*

Fibrés en droites

Définition 28 *Un fibré en droites est un fibré vectoriel de rang* 1.

Si le fibré en droite est holomorphe alors ses applications de transition sont (localement) des éléments de $\mathcal{O}^*$ qui vérifient les conditions de cobordisme pour tout recouvrement. Ceci donne la relation avec la définition 23.
Remarque:
Si E et F sont deux fibrés en droites isomorphes alors $g_{ij}/f_{ij} = \mu_j/\mu_i$. C'est donc une condition de cobordisme qui peut s'interpréter en termes de cohomologie.

2 Faisceaux de $\mathcal{R}$-modules

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{F}$ deux faisceaux de groupes abéliens sur un espace topologique X. Le produit Cartésien $\mathcal{R} \times \mathcal{F}$ induit une structure de faisceau sur $X \times X$. La restriction de ce faisceau à la diagonale $X \subset X \times X$ est un faisceau de groupe abélien sur X. On le désigne par $\mathcal{R} \circ \mathcal{F}$.

Définition 29 *Un faisceau $\mathcal{F}$ de groupes abéliens sur X est dit faisceau de modules sur le faisceau d'anneaux $\mathcal{R}$ (ou faisceau de $\mathcal{R}$-module) s'il existe un homomorphisme de faisceaux $\mathcal{R} \circ \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ tel que pour tout $p \in X$, l'application induite sur les fibres $\mathcal{R}_p \circ \mathcal{F}_p \to \mathcal{F}_p$ définit sur $\mathcal{F}_p$ une structure de $\mathcal{R}_p$-module.*

Un $\mathcal{R}$-module $\mathcal{F}$ est dit libre de rang m s'il est isomorphe à m copies du faisceau $\mathcal{R}$ où d'une manière équivalente si $\mathcal{F} \cong \mathcal{R} \oplus \cdots \oplus \mathcal{R}$ (m fois).

Définition 30 *Un faisceau $\mathcal{F}$ de $\mathcal{R}$-modules est dit localement libre de rang m sur X, s'il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_i\}_{\{i \in I\}}$ de X, tel que les restrictions $\mathcal{F}|_{U_i}$ soient des faisceaux libres de rang m.*

Soient maintenant X une surface de Riemann, et $\mathcal{O}$ le faisceau d'anneaux des fonctions holomorphes sur X. Un faisceau de $\mathcal{O}$-modules sur X est appelé faisceau analytique. Un fibré vectoriel analytique sur une surface de Riemann X est un faisceau analytique localement libre.
Nous avons rappelé à la section précédente que si E est un fibré vectoriel complexe

(sur une surface de Riemann X) alors ses fonctions de transition vérifient les relations de cocycles $g_{ij}.g_{jk} = g_{ik}$ sur $U_i \cap U_j \cap U_k$. D'autre part nous avons vu que si E et F sont deux fibrés vectoriels équivalents , nous avons entre leurs applications de transition la relation de cobordisme suivante : $\mu_i g_{ij} = f_{ij}\mu_j$, où $\{g_{ij}\}$ et $\{f_{ij}\}$ désignent les applications de transition de E et F respectivement et où les applications
$\mu_i \colon U_i \to GL(m, \mathbb{C})$ sont holomorphes. Par ailleurs, si $\mathcal{F}$ est un faisceau de $\mathcal{O}$-modules localement libres de rang m, considérons le recouvrement $\mathcal{U} = \{U\}_{\{i \in I\}}$ tel que $\mathcal{F}|_{U_i}$ soit libre sur U_i. Donc, pout tout $i \in I$, il existe un $\mathcal{O}$-isomorphisme $\phi_i : \mathcal{F}|_{U_i} \to \mathcal{O}^m|_{U_i}$. De tels isomorphismes induisent sur chaque intersection non vide $U_i \cap U_j$ l'isomorphisme $\phi_{ij} = \phi_i \phi_j^{-1} : \mathcal{O}^m|_{U_i \cap U_j} \to \mathcal{O}^m|_{U_i \cap U_j}$. Les isomorphismes ϕ_{ij} sont des matrices inversibles de $GL(m, \mathcal{O})$ et forment d'une manière évidente un cocycle de $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{GL}(m, \mathcal{O}))$ (même si $\mathcal{GL}(m, \mathcal{O})$) n'est pas nécessairement un faisceau abélien, ceci ne cause pas de problème pour la définition). Soit (ϕ_{ij}) sa classe d'équivalence dans $H^1(X, \mathcal{GL}(m, \mathcal{O}))$.
Nous avons ainsi construit une application qui à tout faisceau de $\mathcal{O}$-modules localement libres de rang m associe un élément de $H^1(X, \mathcal{GL}(m, \mathcal{O}))$: cette application est bijective.
Nous énonçons alors sans démonstration le théorème suivant:

Théorème 2 *Il existe une bijection entre l'ensemble des faisceaux de $\mathcal{O}$-module localement libres et l'ensemble de cohomologie $H^1(X, \mathcal{GL}(m, \mathcal{O}))$, où $\mathcal{GL}(m, \mathcal{O})$ désigne le faisceau associé au préfaisceau $GL(m, \mathcal{O})$.*

Remarque: On obtient la définition de préfaisceau en retirant les axomes 1) et 2) de la définition 9.
Dans toute la suite un élément de $H^1(X, \mathcal{GL}(m, \mathcal{O}))$ sera appelé fibré vectoriel complexe analytique de rang m.
Si $m = 1$, un élément de $H^1(X, \mathcal{GL}(1, \mathcal{O})) = H^1(X, \mathcal{O}^*)$ sera appelé fibré en droites complexes.

Nous pouvons actuellement nous poser la question suivante: étant donné un fibré vectoriel complexe en droites ξ sur la surface de Riemann X, et deux ouverts U_1 et

U_2 de X, jusqu'à quel point serait-il possible de recoller les éléments de $\Gamma(U_1, \mathcal{O})$ et $\Gamma(U_2, \mathcal{O})$ via les applications de transition de ξ ? Plus généralement , si $\{U_\alpha\}$ est une base de la topologie de X , jusqu'à quel point nous pouvons recoller les éléments de $\Gamma(U_\alpha, \mathcal{O})$ entre eux via les applications de transition de ξ ?

D'une manière plus rigoureuse , soit $\xi \in H^1(X, \mathcal{O}^*)$ un fibré en droites complexes représenté par sa classe de cohomologie $(\xi_{\alpha\beta}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ où $\mathcal{U}$ est une base de la topologie X. Si $U_\alpha \subset U_\beta$, nous construisons l'homomorphisme de groupe

$$\rho_{\alpha\beta} \colon \Gamma(U_\beta, \mathcal{O}) \to \Gamma(U_\alpha, \mathcal{O})$$

défini par

$$(\rho_{\alpha\beta} f)(p) = \xi(p).f(p) \quad \forall p \in U_\alpha \subset U_\beta$$

D'autre part, si $U_\gamma \subset U_\beta \subset U_\alpha$ et $f \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{O})$ alors

$$\rho_{\gamma\beta}(\rho_{\beta\alpha} f)(p) = \xi_{\gamma\beta}(p).\xi_{\beta\alpha}(p).f(p) = \xi_{\gamma\alpha}(p).f(p) = (\rho_{\gamma\alpha} f)(p) \;\; \forall \; p \in U_\gamma$$

et par conséquent:

$$\rho_{\gamma\beta}\rho_{\beta\alpha} = \rho_{\gamma\alpha}$$

Nous avons de la sorte associé au fibré en droite ξ un faisceau noté $\mathcal{O}(\xi)$, tel que sur chaque ouvert de U_α de la base de la topologie de X, nous avons

$$\Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}(\xi)) = \Gamma(U_\alpha, \mathcal{O})$$

et tout élément $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}(\xi))$ s'obtient par recollements d'éléments $f_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{O})$ via les applications de transitions $\xi_{\alpha\beta}$, $i.e$

$$f_\alpha(p) = \xi_{\alpha\beta}(p).f_\beta(p) \;\; \forall \;\; p \in U_\alpha \cap U_\beta$$

$\mathcal{O}(\xi)$ sera appelé le faisceau des sections holomorphes du fibré en droites ξ. La construction qu'on vient de faire se généralise d'une manière naturelle au faisceau de rang m quelconque.

Définition 31 *Un faisceau analytique $\mathcal{F}$ est dit faisceau analytique cohérent sur la surface de Riemann X s'il existe une suite exacte de faisceaux analytiques de la forme*

$$\mathcal{O}^{m_1}|_U \to \mathcal{O}^m|_U \to \mathcal{F}|_U \to 0$$

où U est un ouvert contenant $p \in X$, et ceci $\forall p \in X$.

D'une autre manière, $\mathcal{F}$ est un faisceau analytique cohérent sur une surface de Riemann X, si pour tout $p \in X$, il existe un ouvert U contenant p, tel que la restriction de $\mathcal{F}$ à U soit le conoyau d'un $\mathcal{O}$-homomorphisme de faisceaux analytiques libres.

Image inverse et image directe de faisceau

Image inverse

Soit $f\colon X \to Y$ une application analytique non constante de surfaces de Riemann. Nous avons démontré dans le premier chapitre qu'une telle application est toujours ouverte. Soient $\mathcal{O}_X$ et $\mathcal{O}_Y$ les faisceaux des fonctions holomorphes sur X et Y respectivement. A chaque ouvert U, associons l'anneau $\Gamma(f(U), \mathcal{O}_Y)$ (f est ouverte !). Nous avons ainsi construit un nouveau faisceau sur X qu'on notera $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)$.

Au fait $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)$ peut être considéré comme un sous-faisceau de $\mathcal{O}_X$. En effet, si $h \in \Gamma(f(U), \mathcal{O}_Y)$, alors $f \circ h$ est un élément de $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$.

La construction précédente se généralise d'une manière évidente à tout faisceau de groupes $\mathcal{F}$ sur Y.

Soit maintenant $\mathcal{F}$ un faisceau analytique complexe sur une surface de Riemann Y et soit $f^{-1}(\mathcal{F})$ le faisceau induit sur X. $f^{-1}(\mathcal{F})$ admet naturellement la structure de $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)$-module. Mais $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)$ étant un sous-faisceau de $\mathcal{O}_X$, alors $\mathcal{O}_X$ admet également la structure de $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)$-module. Nous pouvons alors construire le produit tensoriel de faisceaux suivant:

$$f^*(\mathcal{F}) := \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)} f^{-1}(\mathcal{F})$$

Nous pouvons à présent démontrer un lemme qui nous sera utile dans la suite .

Lemme 3 *Soit $f\colon X \to Y$ une application analytique non constante entre deux surfaces de Riemann X et Y, et $\mathcal{F}$ un faisceau analytique localement libre de rang m sur Y. Alors $f^*(\mathcal{F})$ est un faisceau localement libre de rang m sur X.*

Preuve: Remarquons que nous avons

$$f^*(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_X \otimes_{f_{-1}(\mathcal{O}_Y)} f^{-1}(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_X$$

D'autre part

$$f^*(\mathcal{O}_Y^m) = \mathcal{O}_X^m \qquad (*)$$

f étant ouverte et $\mathcal{F}$ localement libre sur Y, pour tout point $p \in X$, il existe un voisinage ouvert suffisamment petit U le contenant tel que

$$\mathcal{F}|_{f(U)} \cong \mathcal{O}_Y^m|_{f(U)}.$$

Donc

$$f^*(\mathcal{F})|_U = f^*(\mathcal{F}|_{f(U)}) \cong f^*(\mathcal{O}_Y^m|_{f(U)})$$

Mais d'après $(*)$, $f^*(\mathcal{O}_Y^m|_{f(U)}) = \mathcal{O}_X^m|_U$. Il en résulte alors que $f^*(\mathcal{F})$ est localement libre de rang m sur X.

Image directe

Si $f\colon X \to Y$ est une application surjective holomorphe de surfaces de Riemann et $\mathcal{F}$ un faisceau de groupe abélien. Nous pouvons construire sur X un faisceau qu'on appelle faisceau image directe et qu'on note $f_*(\mathcal{F})$. La construction se fait de la manière suivante:
on considère une base $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ de la topologie de Y. A chaque U_α associons le groupe abélien

$$I_\alpha = \Gamma(f^{-1}(U_\alpha), \mathcal{F}).$$

Nous construisons ainsi un préfaisceau dont le faisceau associé est $f_*(\mathcal{F})$. La même construction s'applique aux faisceaux d'anneau, et d'une manière naturelle $\mathcal{O}_Y$ devient un sous faisceau de $f_*(\mathcal{O}_X)$.

Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-module sur X, $f_*(\mathcal{F})$ est un $f_*(\mathcal{O}_X)$-module sur Y. Mais comme $f_*(\mathcal{O}_X) \supset \mathcal{O}_Y, f_*(\mathcal{F})$ admet également la structure de $\mathcal{O}_Y$-module.

Lemme 4 *Soient X et Y deux surfaces de Riemann, et $f\colon X \to Y$ un revêtement ramifié (complexe analytique). Si $\mathcal{F}$ est un faisceau analytique cohérent sur X, alors $f_*(\mathcal{F})$ est un faisceau analytique cohérent sur Y.*

Preuve: Ce lemme est un cas particulier d'un théorème de Grauert (pour la preuve voir [6] page 51).

Nous avons vu dans le premier chapitre que toute application holomorphe non-constante f entre deux surfaces de Riemann X et Y, peut s'écrire localement sous la forme $f(z) = z^n, n \in \mathbb{N}$, n est dit la multiplicité de f et $n-1$ la ramification de f (en zéro). On désigne par $ram_x(f)$ la ramification de f en x. Si X est compacte l'ensemble des points de ramification est fini, et pour toute application holomorphe non-constante $f\colon X \to Y$ il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que pour $y \in Y$,

$$n = card\{f^{-1}(y)\} + \sum_{f(x)=y} ram_x(f)$$

n est appelé le nombre de feuillets (degré) du revêtement $f\colon X \to Y$.
D'autre part, toute surface de Riemann compacte peut être considérée comme un revêtement à m feuillets de la droite projective $\mathbb{P}^1$ (voir [5] page 225).
Ceci sera le résultat fondamental pour montrer que tout fibré vectoriel sur une surface de Riemann compacte admet une section méromorphe. Mais tout d'abord énonçons le théorème:

Théorème 5 *Tout fibré vectoriel analytique complexe sur la droite projective $\mathbb{P}$ admet des sections méromorphes non-triviales.*

Preuve: (voir [6] page 42)
Remarque:
La démonstration du théorème précédent nous conduit au résultat suivant:
En tensorisant un faisceau analytique cohérent sur $\mathbb{P}$ par $\mathcal{M}(\mathbb{P})$ on obtient un faisceau libre de $\mathcal{M}(\mathbb{P})$-module (voir [6] page 44).

Théorème 6 *Si $\mathcal{F}$ est un faisceau analytique cohérent sur une surface de Riemann compacte X, il existe un fibré en droites complexes ξ sur X tel que $\mathcal{O}(\xi) \otimes \mathcal{F}$ admet une section méromorphe non triviale.*

Preuve: X étant une surface de Riemann compacte, il existe un revêtement ramifié $f\colon X \to \mathbb{P}$.
D'après le lemme 5, l'image directe $f_*(\mathcal{F})$ est un faisceau cohérent analytique, il vient alors que

$$\mathcal{M}(\mathbb{P}) \otimes_{\mathcal{O}(\mathbb{P})} f_*(\mathcal{F}) \cong \mathcal{M}^m(\mathbb{P})$$

pour un certain $m \in \mathbb{N}$. Donc $\mathcal{M}(\mathbb{P}) \otimes_{\mathcal{O}(\mathbb{P})} f_*(\mathcal{F})$ admet une section méromorphe d'après le théorème précédent. Soit g cette section. Soit un recouvrement fini convenablement choisi $\{U_\alpha\}$ de $\mathbb{P}$, $g = \{m_\alpha \otimes s_\alpha\}$ où m_α est méromorphe sur U_α et $s_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, f_*(\mathcal{F}))$. $\mathbb{P}$ étant compacte, l'ensemble des pôles des m_α sur $\mathbb{P}$ est fini. Nous pouvons donc lui associer un faisceau sur $\mathbb{P}$ localement libre $\mathcal{S}$ de rang 1 admettant une section
$h = \{h_\alpha\} \in \Gamma(\mathbb{P}, \mathcal{S})$ de telle sorte que $h_\alpha m_\alpha$ soit holomorphe sur U_α. Le produit tensoriel $\mathcal{F} \otimes f_*(\mathcal{F})$ admet donc comme section holomorphe $hg = \{h_\alpha m_\alpha \otimes s_\alpha\}$.
Il existe donc (d'après le lemme 4) un fibré en droites ξ sur X tel que $f^*(\mathcal{S}) = \mathcal{O}(\xi)$. Or d'après le lemme précédent, nous avons

$$\Gamma(X, \mathcal{O}(\xi) \otimes \mathcal{F}) = \Gamma(X, f^*(\mathcal{S}) \otimes_{\mathcal{O}(X)} \mathcal{F}) \cong \Gamma(\mathbb{P}, f_*(f^*(\mathcal{S}) \otimes_{\mathcal{O}(X)} \mathcal{F})) \cong$$
$$\Gamma(\mathbb{P}, \mathcal{S} \otimes_{\mathcal{O}(\mathbb{P})} f_*(\mathcal{F})) \neq 0$$

Corollaire 2.1 *Tout fibré vectoriel analytique sur une surface de Riemann compacte admet des sections méromorphes non-triviales.*

Preuve: Soit Φ un fibré vectoriel analytique sur X. D'après le théorème précédent, il existe un fibré en droites ξ sur X tel que $\mathcal{O}(\xi) \otimes \mathcal{O}(\Phi) = \mathcal{O}(\xi \otimes \Phi)$ ($\mathcal{O}(\Phi)$ est le faisceau des sections de Φ) admet une section h non-triviale. Soit g une section de ξ^{-1}, alors gh répond à la question.

Nous pouvons maintenant démontrer facilement le théorème fondamental suivant:

Théorème 7 *Tout fibré vectoriel complexe de rang $m > 1$ sur une surface de Riemann compacte X admet un sous-fibré en droites.*

Preuve: Soit F une section méromorphe d'un fibré vectoriel complexe Φ sur X (elle existe d'après le théorème précédent). Nous pouvons toujours trouver un recouvrement $\{U_\alpha\}$ de X tel que $F = \{F_\alpha\}$ où F_α est holomorphe et non-identiquement nulle sauf peut-être en un seul point. Soit (U_α, z_α) une carte telle qu'en ce point $z_\alpha = 0$. Il existe alors un certain entier n_α pour lequel, $z_\alpha^{n_\alpha}.F_\alpha$ est holomorphe et non-identiquement nulle sur U_α en entier. Il existe alors (en utilisant un recouvrement plus fin si nécessaire) une matrice inversible $\psi_\alpha \in GL(m, \mathcal{O}(U_\alpha))$ telle que

$$\psi_\alpha . z_\alpha^{n_\alpha} . F_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons de la sorte construit un fibré Φ' vérifiant sur toute intersection $U_\alpha \cap U_\beta$ la relation $\Phi'_{\alpha\beta}\psi_\beta = \psi_\alpha \Phi_{\alpha\beta}$ qui transforme la section F de Φ en la section

$$F' = \{\psi_\alpha F_\alpha\} = z_\alpha^{-n_\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Φ *et* Φ' sont alors équivalents. La matrice $\Phi_{\alpha\beta}$ s'écrit alors:

$$\begin{pmatrix} \phi_{\alpha\beta} & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

et le cocycle $(\phi_{\alpha\beta})$ désigne le fibré en droites recherché.

3 Classification des fibrés vectoriels complexes sur les surfaces de Riemann compactes

Nous consacrerons cette section à la discussion de la classification des fibrés vectoriels complexes sur les surfaces de Riemann. La classification des fibrés vectoriels complexes est un problème difficile, aussi nous a-t-il semblé raisonnable de ne pas donner les preuves de certains théorèmes qui sont techniquement lourdes. Mais avant d'aborder ce problème rappelons quelques propriétés des fibrés vectoriels complexes. Soit alors ψ un fibré vectoriel complexe de rang m sur une surface de Riemann X, et $(\psi_{\alpha\beta})$ des applications de transition le représentant dans un certain recouvrement

$\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\{\alpha \in I\}}$ de X. $\psi_{\alpha\beta}$ est une matrice inversible appartenant à $GL(m, \mathcal{O}(U_\alpha \cap U_\beta))$. Donc son déterminant $\det(\psi_{\alpha\beta}) \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$. On vient d'associer au fibré ψ, un fibré en droites dont les applications de transition sont $\det(\psi_{\alpha\beta})$. On l'appelle le *fibré en droite déterminant* du fibré ψ. On le désignera par $\det\psi$.

D'autre part si ψ est un sous fibré de Φ , où Φ désigne un fibré de rang m sur X, on peut construire le fibré quotient $\phi = \Phi/\psi$. Φ est appelé *extension* de ψ par le fibré quotient $H = \Phi/\psi$.

Si Φ admet deux sous fibrés ψ et ϕ tels que $\Phi = \psi \oplus \phi$ alors Φ est dit *décomposable*, il est dit *indécomposable* dans le cas contraire.

Si ξ est un fibré en droites nous désignons par $c(\xi)$ sa classe de Chern. Intuitivement la classe de Chern nous dit "jusqu'à quel point" un fibré n'est pas trivial.

Nous avons une relation très importante entre les sections méromorphes d'un fibré en droites holomorphe ξ et sa classe de Chern donnée par

$$c(\xi) = \sum_{p \in X} \nu_p(f) \qquad (**)$$

où f est une section méromorphe de ξ et $\nu_p(f)$ son ordre au point p (voir [5] page 103)

Théorème 8 *(Riemann-Roch) Soient X une surface de Riemann compacte de genre g et $\Phi \in H^1(X, \mathcal{GL}(m, \mathcal{O}))$un fibré vectoriel complexe analytique de rang m sur X, alors*

$$dim H^0(X, \mathcal{O}(\Phi)) - dim H^1(X, \mathcal{O}(\Phi)) = c(det\Phi) + m(1-g)$$

Remarque:

Si Φ est un fibré en droites ξ, on retrouve le théorème de Riemann-Roch classique sur les surfaces de Riemann, soit:

$$dim H^0(X, \mathcal{O}(\xi)) - dim H^1(X, \mathcal{O}(\xi)) = c(\xi) + (1-g)$$

La démonstration du théorème de dualité de Serre nécessite plusieurs pages de préparation, aussi avons nous choisi de l'énoncer sans preuve. Les lecteurs desireux de voir la démonstration peuvent consulter par exemple [5].

Théorème 9 *(Serre)*

Soient X une surface de Riemann compacte, et $\Phi \in H^1(X, \mathcal{GL}(m, \mathcal{O}))$ un fibré en droites complexes sur X. Soit Φ^* son fibré dual. Alors il existe une dualité canonique entre les espaces vectoriels $H^1(X, \mathcal{O}(\Phi))$ et $H^0(X, \mathcal{O}^{1,0}(\Phi^*))$ où $\mathcal{O}^{1,0}(\Phi^*)$ est le faisceau des sections holomorphes de Φ^* .

Soit à présent Φ un fibré de rang 2 qui soit une extension du fibré en droites ϕ_1 par le fibré en droites ϕ_2. Nous avons alors la suite exacte de faisceaux analytiques des sections qui s'écrit:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(\phi_1) \longrightarrow \mathcal{O}(\Phi) \longrightarrow \mathcal{O}(\phi_2) \longrightarrow 0$$

Si Φ' est une autre extension, alors Φ et Φ' sont équivalentes s'il existe un isomorphisme de faisceaux $\theta : \mathcal{O}(\Phi) \longrightarrow \mathcal{O}(\Phi')$ tel que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}(\phi_1) & \longrightarrow & \mathcal{O}(\Phi) & \longrightarrow & \mathcal{O}(\phi_2) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow id & & \downarrow \theta & & \downarrow id & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}(\phi_1) & \longrightarrow & \mathcal{O}(\Phi') & \longrightarrow & \mathcal{O}(\phi_2) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant:

Théorème 10 *Soient ϕ_1 et ϕ_2 deux fibrés en droites complexes sur la surface de Riemann X. L'ensemble des classes d'équivalence des extensions de ϕ_1 par ϕ_2 est en bijection avec le groupe de cohomologie $H^1(X, \mathcal{O}(\phi_1\phi_2^{-1}))$. De plus l'extension triviale $\phi_1 \oplus \phi_2$ correspond à l'élément nul du groupe.*

Preuve: (voir [6] page 72)

Corollaire 2.2 *Soit Φ un fibré vectoriel de rang deux sur une surface de Riemann compacte Xde genre g. Supposons qu'il existe un fibré en droites $\phi_1 \subset \Phi$ avec un fibré quotient $\phi_2 = \Phi/\phi_1$ tels que $c(\phi_1) - c(\phi_2) > 2g - 2$, alors Φ est décomposable en somme directe*

$$\Phi = \phi_1 \oplus \phi_2$$

Preuve: Si $c(\phi_1) - c(\phi_2) > 2g - 2$ alors

$$c(\kappa\phi_1^{-1}\phi_2) = c(\kappa) - c(\phi_1) + c(\phi_2) = 2g - 2 - c(\phi_1) + c(\phi_2) < 0$$

(κ est le fibré canonique et sa classe de Chern est egale à 2g-2). Donc

$$H^0(X, \mathcal{O}(\kappa\phi_1^{-1}\phi_2)) = 0$$

D'après le théorème précédent, l'ensemble des extensions de ϕ_1 par ϕ_2 est en bijection avec $H^1(X, \mathcal{O}(\phi_1\phi_2^{-1}))$. De plus, le théorème de dualité de Serre nous donne que

$$H^1(X, \mathcal{O}(\phi_1\phi_2^{-1})) \cong H^0(X, \mathcal{O}(\kappa\phi_1^{-1}\phi_2))$$

Ceci finit la preuve.

Nous généralisons à présent la notion de diviseur aux m-uplets F de fonctions méromorphes dans un voisinage d'un certain point p d'une surface de Riemann X.

Nous appellerons ordre de F au point p un entier $\nu \in \mathbb{Z}$ tel que les composantes de $(z-p)^\nu F(z)$ soient holomorphes et sans zéros communs dans un voisinage de p. L'ordre de F au point p sera noté $\nu_p(F)$. Remarquons que l'action d'une matrice inversible holomorphe ne change pas l'ordre de F. Il est donc possible de parler d'ordre d'une section F d'un fibré vectoriel complexe analytique X.

Définition 32 *On appelle diviseur d'une section F la somme $\mathcal{D}(F)$ définie par*

$$\mathcal{D}(F) = \sum \nu_p(F).p, \quad p \in X$$

Lemme 11 *Si Φ est un fibré vectoriel complexe analytique sur une surface de Riemann X, alors un fibré en droites complexe analytique ϕ est un sous-fibré de Φ, si et seulement si, pour tout diviseur $\mathcal{D}$ associé à ϕ, il existe une section méromorphe F de Φ telle que $\mathcal{D} = \mathcal{D}(F)$.*

Preuve: Conséquence de la définition et du théorème sur l'existence de sections méromorphes (voir [6] page 78). □

Nous avons vu que tout fibré vectoriel complexe analytique sur une surface de Riemann compacte X admet un sous-fibré en droites. Une induction immédiate nous montre que ses applications de transitions peuvent alors s'écrire sous la forme de matrices triangulaires supérieures. Soit alors Φ un fibré vectoriel complexe analytique de rang m sur une surface de Riemann compacte X. Si F est une section non triviale de Φ, et si sa dernière composante est non identiquement nulle, alors les dernières composantes diagonales des matrices de transition de Φ forment un sous-fibré en droites $\phi \subset \Phi$.

D'une manière générale, si la r-ième composante de F est exactement sa dernière composante qui n'est pas identiquement nulle, alors les r-iemes composantes des diagonales des matrices de transitions de Φ forment un sous-fibré en droites de Φ qu'on notera ϕ_r. Il faut remarquer ici que tous les éléments diagonaux de Φ (dans sa représentation triangulaire) forment des fibrés en droites, qu'on appelle d'ailleurs fibrés diagonaux de Φ, mais ce ne sont pas des sous-fibrés de Φ.

D'autre part, si ϕ est un sous-fibré en droites de Φ admettant les fonctions de transition $(\phi_{\alpha\beta})$ relativement à un certain recouvrement de X, alors les matrices de transition $(\Phi_{\alpha\beta})$ de Φ peuvent s'écrire d'une manière triangulaire où chaque $\phi_{\alpha\beta}$ est un des élément diagonaux de $\Phi_{\alpha\beta}$. Il en résulte alors que $\phi^{-1} \otimes \Phi$ admet un sous-fibré en droite trivial, et par conséquent $\phi^{-1} \otimes \Phi$ admet une section holomorphe non triviale .

Ainsi, si la dernière composante de F qui n'est pas identiquement nulle est la r-ieme alors $\phi^{-1} \otimes \phi_r$ est un sous-fibré en droites de $\phi^{-1} \otimes \Phi$ qui admet une section holomorphe non triviale.

$c(\phi^{-1} \otimes \phi_r) \geq 0$ ce qui équivaut à $c(\phi_r) - c(\phi) \geq 0$

Par conséquent: $c(\phi) \leq c(\phi_r)$.

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant:

Théorème 12 *Les classes de Chern des sous-fibrés en droites complexes analytiques de tout fibré vectoriel complexe analytique sur une surface de Riemann compacte sont bornées supérieurement.*

Définition 33 *On appelle ordre de diviseur d'un fibré vectoriel complexe analytique sur une surface de Riemann compacte la plus grande des classes de Chern de ses* *sous-fibrés en droites.*

D'après ce qui précède un tel entier existe.

Si Φ est un vectoriel fibré complexe analytique on désigne cet entier par $div\Phi$.

Comme conséquences immédiates nous avons:

1) Si Φ est de rang m et si $\phi_1, \ldots, \phi_m$ sont ses fibrés diagonaux alors

$$div\Phi \leq maxc(\phi_j)$$

2) Si Φ est de rang m et s'il s'écrit sous la forme $\Phi = \phi_1 \oplus \cdots \oplus \phi_m$ alors

$$div(\Phi) = maxc(\phi_j), \quad 1 \leq m$$

Nous pouvons à présent démontrer le théorème suivant

Théorème 13 *Si X est une surface de Riemann compacte de genre g, et si Φ est un fibré vectoriel complexe analytique de rang m sur X alors*

$$div(\Phi) \geq \frac{1}{m}c(det\Phi) - g$$

De plus si $\Phi = \phi_1 \oplus \cdots \oplus \phi_m$ alors

$$div(\Phi) \geq \frac{1}{m}c(det\Phi)$$

Preuve: Soit ϕ un fibré en droites complexes sur X. D'aprés le théorème de Riemann-Roch

$$dimH^0(X, \mathcal{O}(\phi^{-1} \otimes \Phi)) = dimH^1(X, \mathcal{O}(\phi^{-1} \otimes \Phi)) + c(det(\phi^{-1} \otimes \Phi)) + m(1-g)$$

Il en résulte alors que

$$dimH^0(X, \mathcal{O}(\phi^{-1} \otimes \Phi)) \geq c(det(\phi^{-1} \otimes \Phi)) + m(1-g) \geq c(det\Phi) + m(1-g-c(\phi))$$

A chaque fois que $c(\phi) < \frac{1}{m}c(det\Phi) + 1 - g$, il s'en suivra que $dimH^0(X, \mathcal{O}(\phi^{-1} \otimes \Phi)) > 0$, et par conséquent $\phi^{-1} \otimes \Phi$ admet un sous fibré en droites ξ tel que $c(\xi) \geq 0$. Or $div(\phi^{-1} \otimes \Phi) \geq c(\xi)$ par définition.

Donc,

$$div\Phi + c(\phi^{-1}) \geq c(\xi) \Longleftrightarrow div\Phi \geq c(\phi) + c(\xi) \Longleftrightarrow div\Phi \geq c(\phi)$$

(parce que $c(\xi) > 0$)

ϕ étant arbitraire, $c(\phi)$ est donc un entier arbitraire; il en résulte alors que:

$$div\Phi \geq \frac{1}{m}c(det\Phi) - g$$

L'autre inégalité est facile à voir ([6] page 82). $\square$

Fibrés stables et fibrés instables

Définition 34 *Un fibré vectoriel complexe analytique Φ de rang deux sur une surface de Riemann compacte est dit stable si*

$$c(\phi) < \frac{1}{2}c(det\Phi) \quad \forall \phi \subset \Phi$$

Il est dit instable si

$$\exists \phi \subset \Phi | \;\; c(\phi) \geq \frac{1}{2}c(det\Phi)\phi \subset \Phi$$

Comme conséquence directe de la définition nous avons le lemme suivant:

Lemme 14 *La notion de stabilité est fermée sous la tensorisation par un fibré en droites.*

Preuve: Soient ϕ et ψ deux fibrés en droites et Φ un fibré stable de rang deux, tels que $\phi \subset \psi \otimes \Phi$. Alors $\psi^{-1}\phi \subset \Phi$. Φ étant stable, il vient alors que

$$c(\psi^{-1}\phi) < \frac{1}{2}c(det\Phi) \Longleftrightarrow c(\phi) - c(\psi) < \frac{1}{2}c(det\Phi)$$

$$\Longleftrightarrow c(\phi) < \frac{1}{2}c(det\Phi) + c(\psi) = \frac{1}{2}c(\psi \otimes \Phi) \quad \square$$

Si X est une surface de Riemann compacte et ξ un fibré en droites sur X, posons

$$X_{(\xi)} = \{\Phi \in H^1(X, \mathcal{GL}(2, \mathcal{O})) \mid det\Phi = \xi\}$$

Donc $\Phi \in X_{(\xi)}$ est stable si $c(\phi) < \frac{1}{2}c(\xi)$, $\forall \phi \subset \Phi$, ou d'une manière équivalente si

$$div\Phi < \frac{1}{2}c(\xi)$$

Si nous désignons par $X_{(\xi)'}$ et $X_{(\xi)''}$ les sous ensembles des sous fibrés de $X_{(\xi)}$ stables et instables respectivement, nous pouvons alors écrire

$$X_{(\xi)} = X_{(\xi)'} \cup X_{(\xi)''}$$

Par conséquent, si $\Phi = \phi_1 \oplus \phi_2$ (i.e. décomposable), on a vu qu'alors

$$div\Phi \geq \frac{1}{2}c(det\Phi) = \frac{1}{2}c(\xi)$$

et donc $\Phi \in X_{(\xi)''}$.

Ainsi si on désigne par $X_{(\xi)^\circ}$ le sous ensemble de $X_{(\xi)}$ des fibrés décomposables alors

$$X_{(\xi)^\circ} \subset X_{(\xi)''}$$

Théorème 15 *Soient X une surface de Riemann compacte, et $\Phi \in X_{(\xi)}$.*

a) Si $div\Phi > \frac{1}{2}c(\xi)$ alors Φ admet un unique sous fibré en droites $\phi_1 \subset \Phi$ vérifiant $c(\phi_1) = div\Phi$

b) Si Φ est indécomposable et si $div\Phi = \frac{1}{2}c(\xi)$, alors Φ admet un unique sous fibré en droites $\phi_1 \subset \Phi$ vérifiant $c(\phi_1) = div\Phi$

Preuve:

a) Soit ϕ un autre sous fibré en droites de Φ vérifiant $c(\phi) = div\Phi$.

Il en résulte que $c(\phi_1) - c(\phi) = 0$. D'où $c(\phi^{-1}\phi_1) = 0$.

Montrons que $\phi^{-1}\phi_1$ est triviale. Soit ϕ_2 l'autre fibré diagonal de Φ. $\phi^{-1} \otimes \Phi$ admet une section holomorphe non triviale, et dans ce cas, l'un des deux fibrés en droites $\phi^{-1}\phi_1$ et $\phi^{-1}\phi_2$ admet des sections holomorphes non triviales.

Montrons que ce n'est pas $\phi^{-1}\phi_2$.

En effet,

$$c(\phi^{-1}\phi_2) = -c(\phi) + c(\phi_2) = -c(\phi_1) + c(\phi_2) = -2c(\phi_1) + c(det\Phi)$$

et ainsi

$$c(\phi^{-1}\phi_2) = -2c(\phi_1) + c(\xi) = -2div\Phi + c(\xi) < 0$$

On en conclut alors que $\phi^{-1}\phi_2 \neq 1$. D'où $\phi^{-1}\phi_1 = 1$.

b) Si ϕ est un autre fibré en droites vérifiant la condition du théorème alors par le même raisonnement que dans a), on arrive à

$$c(\phi^{-1}\phi_2) = -2div\Phi + c(\xi)$$

mais $div\Phi = \frac{1}{2}c(\xi)$, donc $c(\phi^{-1}\phi_2) = 0$.

Si F est une section de $\phi^{-1} \otimes \Phi$ admettant f_1 et f_2 pour première et deuxième composante respectivement, il faut montrer que $f_2 \equiv 0$ pour conclure que $\phi^{-1}\phi_1$ est triviale ($= 1$).

Supposons le contraire, alors $\phi^{-1}\phi_2 = 1$. Donc $\phi^{-1} \otimes \Phi$ admet comme matrices de transition dans une certaine base une matrice triangulaire supérieure admettant $\psi_{\alpha\beta}$ et 1 comme premier et deuxieme éléments diagonaux respectivement; le dernier élément restant de la matrice est noté $\lambda_{\alpha\beta}$. Sa section F admettra dans cette base $f_{1\alpha}$ et une certaine constante $c \neq 0$ comme première et seconde composante respectivement. Et ainsi

$$f_{1\alpha} = \psi_{\alpha\beta}.f_{1\beta} + c\lambda_{\alpha\beta}$$

sur $U_\alpha \cap U_\beta$. Il en résulte alors que le cocycle $(\lambda_{\alpha\beta}) = 0$ dans $H^1(X, \mathcal{O}(\phi^{-1} \otimes \Phi))$. Ainsi $\phi^{-1} \otimes \Phi$ est décomposable d'où Φ l'est aussi. Contradiction! $\square$

Ceci étant montré nous pouvons poser

$$X_{(\xi,\phi)} = \{\Phi \in X_{(\xi)''} - X_{(\xi)'} \; | \phi \subset \Phi, c(\phi) = div\Phi\}$$

Nous énonçons sans preuve le théorème suivant:

Théorème 16 *Sur une surface de Riemann compacte X de genre g, il existe une bijection entre l'ensemble $X_{(\xi,\phi)}$, ξ et ϕ étant des fibrés en droites tels que $c(\phi) \geq \frac{1}{2}c(\xi)$, et l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^n$, avec $n = dimH^1(X, \mathcal{O}(\phi^2\xi^{-1})) - 1$.*

Pour la preuve voir [6] page 87.

Considérons maintenant le cas particulier de la droite projective $\mathbb{P}$.

Nous avons vu que pour une surface de Riemann compacte X de genre g ,

$div\Phi \geq \frac{1}{2}det\Phi - g.$

Si $X = \mathbb{P}$, $g = 0$ et l'inégalité précédente devient $div\Phi \geq \frac{1}{2}det\Phi$. De plus, si $\Phi \in X_{(\xi)'}$ alors $div\Phi < \frac{1}{2}det\Phi = \frac{1}{2}c(\xi)$ et nous aurons

$$\frac{1}{2}c(\xi) \leq div\Phi < \frac{1}{2}c(\xi)$$

Il en résulte que tous les fibrés vectoriels complexes analytiques de rang 2 sur $\mathbb{P}$ sont instables.

D'autre part, le théorème précédent nous dit que $\mathbb{P}_{(\xi,\phi)}$ est en bijection avec $\mathbb{P}^n$ où $n = dimH^1(\mathbb{P}, \mathcal{O}(\phi^2\xi^{-1})) - 1$.

En combinant le théorème de dualité de Serre avec Riemann-Roch, on montre facilement que $n = -1$. Donc

$$\mathbb{P}_{(\xi,\phi)} = \emptyset$$

Par conséquent:

$$\mathbb{P}_{(\xi)} = \mathbb{P}_{(\xi)^\circ}$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

Théorème 17 *Tous les fibrés vectoriels complexes analytiques de rang* 2 *sur* $\mathbb{P}_{(\xi)}$ *sont décomposables.*

A. Grothendieck a montré dans [4] que se résultat se généralise aux fibrés vectoriels complexes analytiques de rangs quelconques sur $\mathbb{P}$. M. Hazewinkel, C. F Martin ont donné une preuve élémentaire de ce résultat dans [8]. S.Kilambi a montré [9] que ce résultat n'est pas valable sur les surfaces de Riemann compactes de genre $g \geq 1$.

Théorème 18 *(Kilambi)*

Si X est une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 1$, il existe au moins un fibré vectoriel complexe analytique sur X qui n'est pas décomposable.

Corollaire 2.3 *La seule surface de Riemann compacte sur laquelle tout fibré vectoriel complexe analytique est décomposable est la droite projective $\mathbb{P}$.*

Bibliographie

[1] E. Arbarello, M. Cornalba, P.A. Griffiths, J. Harris, *Geometry of Algebraic Curves Volume I,* Grundlehren **267**, New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag, 1985.

[2] H. M Farkas, I.Kra, *Riemann Surfaces*, New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag, 1980.

[3] O. Forster, *Lectures on Riemann Surfaces*, New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag, 1981.

[4] A. Grothendieck, Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann, Amer. J. Math. 79 (1957) 121-138.

[5] R. C Gunning: Lectures on Riemann Surfaces, *Princeton Math. Notes* **2** (1966)

[6] R. C Gunning: Lectures on vector bundles over Riemann surfaces, *Princeton Math. Notes* **6** (1967)

[7] R. C Gunning: Lectures on Riemann surfaces: Jacobi Varieties, *Princeton Math. Notes* **12** (1972)

[8] M. Hazewinkel, C. F Martin, A short elementary proof of Grothendieck's theorem on algebraic vector bundles over the projective line, Jour. Pure and App. Alg. 25 (1982) 207-211.

[9] S. Kilambi, Holomorphic vector bundles over $\mathbb{P}^n$, Rapport de recherche du département de mathématiques et statistique (oct 1984).