Université de Montréal

ÉQUATIONS DU GAZ DE CHAPLYGIN ET SUPERSYMÉTRIES

par

Alexander Hariton

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

juillet 2001

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

ÉQUATIONS DU GAZ DE CHAPLYGIN ET SUPERSYMÉTRIES

présenté par

Alexander Hariton

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Michel Grundland
(président-rapporteur)

Véronique Hussin
(directeur de recherche)

Pavel Winternitz
(membre du jury)

Mémoire accepté le :
26 septembre 2001

SOMMAIRE

Le présent travail est principalement une étude des équations différentielles de la mécanique des fluides et de leurs symétries. Cette étude consiste en deux thèmes principaux. Le premier est une synthèse des divers éléments de la théorie. Nous faisons un rappel de la théorie reliée à la mécanique des fluides et aux groupes et algèbres de symétries des systèmes d'équations différentielles. Nous définissons les algèbres et les variables de Grassmann, leurs propriétés et leur rôle dans la formation de théories supersymétriques. Finalement, nous présentons quelques exemples simples de modèles supersymétriques.

Le second thème est une contribution originale à l'étude des équations d'un modèle de fluide particulier appelé gaz de Chaplygin. En premier lieu, nous utilisons la méthode décrite dans le livre de P. Olver pour calculer et analyser en détail le groupe de Lie de symétries des équations du gaz de Chaplygin en une dimension spatiale. Deuxièmement, nous considérons un modèle généralisé du gaz de Chaplygin, proposé par R. Jackiw, qui utilise des variables de Grassmann. Nous associons les charges conservées identifiées par Jackiw à des transformations supersymétriques. Nous déterminons les relations de commutation de ces dernières avec les symétries ordinaires (paires) de la théorie.

Mots-clés: groupes de Lie, supersymétries, variables de Grassmann, équations différentielles, gaz de Chaplygin.

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à exprimer ma plus profonde reconnaisance envers ma directrice de recherche, la professeure Véronique Hussin. C'est sous son impulsion que ce travail a été entrepris, et c'est grâce à son aide et à son feed-back constant et rapide qu'il a pu aboutir. Je la remercie également pour le cours "Théorie des Groupes de Lie" qui a stimulé mon interêt en la matière.

Je remercie les membres du jury d'avoir accepté de juger ce travail.

Je remercie également le professeur Michel Grundland pour le pertinent cours "Equations de la Physique Mathématique" qui a fortement enrichi mes connaissances dans le domaine des équations différentielles aux dérivées partielles.

Je suis reconnaissant à la Faculté des Etudes Supérieures et au Département de mathématiques et de statistiques pour l'encadrement intellectuel dont j'ai bénéficié.

Finalement, je ne peux oublier l'appui contribué par les membres de ma famille durant cette période parfois difficile. Je tiens à remercier particulièrement mon père George Hariton, ma mère Suzanne Hariton et ma grand-mère Vivianne Hariton qui m'ont continuellement donné leur support.

Table des matières

Sommaire iii

Remerciements iv

Liste des tableaux viii

Introduction 1

Chapitre 1. Eléments de la mécanique des fluides 4

1.1. Les équations de base de la mécanique des fluides 4

1.2. Formulations lagrangienne et hamiltonienne 7

1.3. Le théorème de Noether 11

1.4. Le gaz de Chaplygin 12

Chapitre 2. Symétries des équations différentielles 15

2.1. Espaces des jets et prolongations 15

2.2. Equations différentielles 19

2.3. Symétries généralisées 20

Chapitre 3. Symétries des équations du gaz de Chaplygin 23

3.1. Générateurs de symétries 23

3.1.1. Le cas $\lambda = 0$ 29

3.1.2. Le cas $\lambda \neq 0$ 34

3.2. Transformations de symétries et quantités conservées 37

3.2.1. Symétries présentes pour les deux cas 38

3.2.2. Dilatations 41

3.2.3. Symétries additionnelles pour le cas $\lambda = 0$ 44

3.3. Une symétrie généralisée 48

Chapitre 4. Variables de Grassmann 50

4.1. Espace vectoriel gradué 50

4.2. Algèbre de Grassmann 52

4.3. Fonctions à valeurs de Grassmann 54

4.4. Superalgèbres et supergroupes de Lie 57

4.5. Equations différentielles et supersymétries 58

4.6. Intégration des variables de Grassmann 61

Chapitre 5. Modèles supersymétriques 63

5.1. Mécanique du superpoint matériel 63

5.2. Théorie supersymétrique des champs 68

5.3. Modèle supersymétrique du gaz de Chaplygin 71

5.4. Symétries et supersymétries du modèle de Jackiw 74

5.4.1. Symétries du groupe de Galilée 79

5.4.2. Dilatations en deux dimensions spatiales 80

5.4.3. Transformation conforme et superconforme 82

Conclusion 84

Bibliographie 86

Liste des tableaux

3.1 Equations déterminantes pour la condition (3.1.7) 27

3.2 Equations déterminantes pour la condition (3.1.8) 28

3.3 Table de commutation de l'algèbre de Lie pour le cas $\lambda = 0$ 33

3.4 Table de commutation de l'algèbre de Lie pour le cas $\lambda \neq 0$ 37

INTRODUCTION

Les groupes et les algèbres de Lie jouent un rôle crucial dans la formulation de théories en physique. Durant les trente dernières années, l'utilisation des groupes de symétries a connu un essor marqué dans le domaine de la physique mathématique, particulièrement en physique de particules et de haute-énergie [Cornwell]. En particulier, les méthodes de groupes de Lie sont utilisées pour déterminer les symétries continues de systèmes d'équations différentielles. Ces transformations sur les variables, qui préservent l'espace de solutions des équations, permettent alors de simplifier la résolution du système. En effet, lorsqu'une solution particulière est connue, il est possible d'utiliser les transformations du groupe de Lie de symétries pour obtenir d'autres solutions. Dans le cas d'une équation différentielle ordinaire, l'invariance sous un groupe de symétries à un paramètre permet de réduire l'ordre de l'équation par un [Olver].

Par ailleurs, suite à la découverte de la supersymétrie (SUSY) par Golfand et Likhtman [West, Golfand], on a vu apparaître des équations différentielles faisant intervenir des variables de Grassmann (anticommutantes). Berezin [Berezin], concerné par des questions liées à la seconde quantification, essaya de donner une description parallèle des champs bosoniques et fermioniques. On a ainsi assisté à la naissance de théories supersymétriques, permettant de traiter sur le même pied les variables paires (bosoniques) et impaires (fermioniques). Des exemples de telles théories sont le modèle Wess-Zumino en 4 dimensions, ainsi que l'équation de Korteweg-de Vries (KdV), supersymétrisée par P. Mathieu et P. Labelle [Ayari, Hussin, Mathieu, Labelle].

Dans ce mémoire, nous analysons plus particulièrement les équations d'un modèle en mécanique fluide appelé gaz de Chaplygin. Nous considérons également un modèle proposé par R. Jackiw [Jackiw 1,2,3,4], en collaboration avec A. Polychronakos, pour supersymétriser le gaz de Chaplygin en ajoutant des variables de Grassmann sous forme de spineurs de Majorana. La contribution originale de ce travail consiste de deux parties. Premièrement, nous utilisons la méthode décrite dans le livre de P. Olver [Olver] pour calculer l'algèbre des symétries des équations du gaz de Chaplygin en une dimension. Les résultats obtenus sont analysés en détail et comparés à ceux de Jackiw, ainsi qu'à ceux de Hassaïne et Horváthy [Hassaïne]. Deuxièmement, nous associons les charges supersymétriques, identifiées par Jackiw pour le modèle généralisé, à des générateurs infinitésimaux de symétries sous forme de champs vectoriels. Nous déterminons les relations de commutation avec les symétries (paires) de la théorie.

Le contenu de ce mémoire se décrit comme suit. Dans le premier chapitre, nous présentons une révision des éléments de base de la mécanique des fluides, y compris les équations de mouvement d'un fluide idéal et les formulations lagrangienne et hamiltonienne d'une théorie locale de champs. Nous rappelons le lien introduit par E. Noether entre les symétries d'un système d'équations différentielles et les quantités conservées. Finalement, nous introduisons les équations du gaz de Chaplygin.

Le second chapitre fait un rappel de la méthode pour déterminer l'algèbre des générateurs de symétries d'un système d'équations différentielles, utilisant les prolongations et les espaces des jets. Le troisième chapitre est consacré au calcul et à l'analyse du groupe de symétries des équations du gaz de Chaplygin.

Le quatrième chapitre introduit les variables de Grassmann, ainsi que les superespaces, superalgèbres et supergroupes de Lie. Les fonctions à valeurs de Grassmann sont définies, ainsi que les supersymétries. Finalement, dans le cinquième chapitre, nous considérons certains modèles supersymétriques standards, avant de passer au modèle supersymétrique du gaz de Chaplygin étudié par Jackiw et al [Jackiw 2,4]. Nous identifions les symétries et les supersymétries de ce modèle.

Chapitre 1

ELÉMENTS DE LA MÉCANIQUE DES FLUIDES

Les éléments que nous introduisons dans ce chapitre sont tirés principalement des livres *Mechanics* et *Fluid Mechanics* par L. D. Landau et E. M. Lifshitz [Landau1, Landau2], du livre de M. Peskin et D. Schroeder [Peskin], et d'articles par R. Jackiw [Jackiw 1,2,3,4]. Nous commençons par dériver les équations de base de la mécanique fluide, suivant la méthode de Landau et Lifshitz [Landau2]. Nous décrivons aussi les formulations lagrangienne et hamiltonienne pour un système discret [Landau1], ainsi que pour une théorie de champs [Peskin]. Nous donnons ensuite le théorème de Noether et la relation entre symétries et charges conservées [Peskin, Olver, Hassaïne]. Finalement, nous introduisons les équations du gaz de Chaplygin, analysées par R. Jackiw [Jackiw 1,3], dont nous étudierons les symétries dans le chapitre 3.

1.1. Les équations de base de la mécanique des fluides

La mécanique des fluides est l'étude du mouvement des liquides et des gaz. L'état d'un fluide en mouvement peut être représenté mathématiquement par des fonctions donnant la distribution de la vitesse $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x,y,z,t) = \mathbf{v}(\mathbf{r},t)$, de la densité $\rho(\mathbf{r},t)$ et de la pression $P(\mathbf{r},t)$. Toutes les quantités thermodynamiques du fluide peuvent être déterminées par les valeurs de ρ et P, en utilisant l'équation d'état:

$$P = P(T,\rho), \quad \text{où} \quad T \quad \text{est la température du système.} \tag{1.1.1}$$

Cette équation varie selon le type de fluide considéré.

Les deux équations fondamentales qui gouvernent le mouvement d'un fluide idéal (c'est-à-dire où la viscosité et la conductivité thermique ne sont pas importantes) sont l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{1.1.2}$$

et l'équation d'Euler

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla P. \tag{1.1.3}$$

L'équation de continuité représente la conservation de la matière. En effet, si on considère un volume V_0, alors la masse du fluide contenu dans V_0 est $\int_{V_0} \rho dV$. On en déduit que la décroissance de la masse de fluide à l'intérieur de V_0, par unité de temps, est donnée par

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_0} \rho dV \quad . \tag{1.1.4}$$

Par ailleurs, si $d\mathbf{S}$ est un élément de surface à la frontière de V_0, alors la masse de fluide passant à travers $d\mathbf{S}$, par unité de temps, est donnée par $\rho\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$. Donc, la masse totale sortant de V_0 par unité de temps à travers sa frontière est

$$\oint_{V_0} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \quad . \tag{1.1.5}$$

Puisque la matière doit être conservée, ces deux quantités doivent être égales, c'est-à-dire que l'on a

$$\oint_{V_0} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_0} \rho dV \quad . \tag{1.1.6}$$

En utilisant le théorème de la divergence, on transforme l'intégrale de surface à la gauche de l'équation précédente pour obtenir

$$\int_{V_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) dV = 0 \quad . \tag{1.1.7}$$

Puisque cette équation doit être vraie pour tout volume V_0, on obtient l'équation (1.1.2).

L'équation d'Euler peut être dérivée en considérant les forces agissant sur un élément de volume de fluide V_0. En l'absence d'un champ de force extérieur, ce sont les forces causées par la pression du fluide en chaque point de la frontière ∂V_0 du volume V_0. La force totale agissant sur V_0 est donc

$$\mathbf{F_T} = -\oint_{\partial V_0} P d\mathbf{S} = -\int_{V_0} (\nabla P) dV \quad . \tag{1.1.8}$$

Pour un élément de volume infinitesimal dV, la force exercée est alors égale à $-\nabla P dV$. Si on définit $d\mathbf{v}/dt$ comme étant l'accélération d'un élément de fluide *en mouvement* (au lieu d'être à un point fixe), alors on peut relier l'accélération de l'élément dV à la force

$$(\rho dV)(d\mathbf{v}/dt) = -\nabla P dV \quad , \tag{1.1.9}$$

où d/dt est la dérivée totale par rapport au temps. Cette équation peut être reliée aux quantités correspondant à un point fixe de la façon suivante. Le changement $d\mathbf{v}$ de la vitesse d'un élément de fluide *en mouvement* durant l'intervalle de temps dt est composé de deux parties:

- le changement de $\mathbf{v}$ durant le temps dt à un point fixe, égal à $(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t})dt$;
- le changement de $\mathbf{v}$ quand l'élément se déplace de $d\mathbf{r}$ durant l'intervalle dt, donné par $dx\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + dy\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + dz\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = (d\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{v} \quad .$

On obtient donc,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \quad . \tag{1.1.10}$$

En insérant le résultat de l'équation (1.1.10) dans l'équation (1.1.9), nous obtenons l'équation (1.1.3).

L'absence de conductivité thermique empêche l'échange de chaleur entre les différentes parties du fluide et le processus est donc adiabatique, ce qui signifie que l'entropie de chaque particule de fluide reste constante, et que la pression P est une fonction de ρ seulement. Par conséquent, pour un fluide idéal, le terme de droite de l'équation d'Euler, terme qui représente la force, peut être écrit

$$-\frac{1}{\rho}\nabla P = -\nabla V'(\rho) = -\nabla(\frac{dV}{d\rho}) \quad . \tag{1.1.11}$$

1.2. Formulations lagrangienne et hamiltonienne

Commençons par faire un rappel de ces formulations dans le cas discret d'un système de N particules. Dans un espace à trois dimensions, le système peut être complètement spécifié par $3N$ coordonnées de positions $(x_i,y_i,z_i,\quad$ où $i = 1,2,\ldots,N)$ et $3N$ coordonnées de vitesse $(v_x^i,v_y^i,v_z^i,\quad$ où $i = 1,2,\ldots,N)$. Plus généralement, il est possible d'utiliser $3N$ coordonnées généralisées $(q_1,q_2,\ldots,q_s)$ et leurs vitesses généralisées $(\dot{q}_1,\dot{q}_2,\ldots,\dot{q}_s)$ où le point représente la dérivée par rapport au temps et $s = 3N$.

Chaque système est caractérisé par une fonction $L(q_i,\dot{q}_i,t)$ appelée *lagrangien*. Si le système occupe les positions $q^{(1)}$ et $q^{(2)}$ aux instants t_1 et t_2 respectivement, le *principe de moindre action* dit que le système doit évoluer de telle façon que *l'action*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt \tag{1.2.1}$$

soit minimisée (selon les possibilités de chemin $q(t)$). Cela signifie que si $q(t)$ est la trajectoire du système et que nous ajoutons une variation $\delta q(t)$ telle que $q(t) \rightarrow q(t)+\delta q(t)$, alors la variation de l'action est nulle: $\delta S = 0$. Cette condition est équivalente aux équations d'Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad , \qquad (i = 1,2,\ldots,s) \quad . \tag{1.2.2}$$

Ces dernières représentent les équations de mouvement du système.

La mécanique des fluides étant une théorie locale des champs, nous sommes intéressés à donner une description semblable. Ainsi, le lagrangien L peut être exprimé comme l'intégrale spatiale d'une fonction $\mathcal{L}(\phi^i,\partial_\mu\phi^i)$ d'un ou plusieurs champs $\phi^i(\mathbf{r},t)$ $(i = 1,2,\ldots,N)$ et de leurs dérivées. Cette fonction est appelée *densité lagrangienne*. L'action peut donc être maintenant écrite comme

$$S = \int \mathcal{L}(\phi^i,\partial_\mu\phi^i)d^3x\ dt \tag{1.2.3}$$

et la condition $\delta S = 0$ génère les équations d'Euler-Lagrange:

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^i} = 0 \quad , \tag{1.2.4}$$

pour chaque champ ϕ^i.

La dynamique d'un tel système peut également être représentée par une formulation canonique hamiltonienne. En effet, si nous définissons, pour chaque coordonnée $q_i(t)$, un *moment conjugué* $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ et que nous considérons la fonction

$$H(q_i,p_i) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L \quad , \tag{1.2.5}$$

celle-ci est appelée le *hamiltonien* du système. Les variables q_i et p_i forment une *paire canonique* pour chaque valeur de i. Dans cette formulation hamiltonienne, en termes des quantités H, p_i, et q_i, les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad . \end{aligned}$$

Ce sont les *équations de Hamilton.*

Nous allons dans la suite utiliser le crochet de Poisson que nous devons donc définir. Soit $F(p,q,t)$ une fonction générale des coordonnées, moments et du temps. La dérivée totale de F par rapport au temps est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \sum_k \left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial p_k}\dot{p}_k \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial F}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial F}{\partial p_k} \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} + \{H,F\} \quad , \end{aligned}$$

où $\{A,B\} = \sum_k \left(\frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{\partial B}{\partial q_k} - \frac{\partial A}{\partial q_k}\frac{\partial B}{\partial p_k} \right)$ est appelé le *crochet de Poisson* des fonctions A et B. Plus généralement [Olver], nous pouvons définir le crochet de Poisson dans un espace M à n dimensions pour des fonctions $F : M \to \Re$. Si chaque élément $\mathbf{q}$ de M est décrit par les coordonnées $\mathbf{q} = (q_1,q_2,\dots,q_n)$, alors nous commençons avec les crochets élémentaires entre les variables $\{q_i,q_j\}$. Ces crochets doivent satisfaire les propriétés:

- bilinéarité: $\{aA+bB,C\} = a\{A,C\}+b\{B,C\}$ et $\{A,bB+cC\} = b\{A,B\}+c\{A,C\}$;
- anti-symétrie: $\{A,B\} = -\{B,A\}$;
- identité de Jacobi: $\{\{A,B\},C\}+\{\{B,C\},A\}+\{\{C,A\},B\} = 0$;
- règle de Leibniz: $\{A,BC\} = \{A,B\}C + B\{A,C\}$.

Le crochet de deux fonctions $F(\mathbf{q})$ et $G(\mathbf{q})$ est alors défini comme étant

$$\{F,G\} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\{q_i,q_j\}\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial q_j}. \tag{1.2.6}$$

Les équations de Hamilton sont encore données par

$$\dot{q}_i = \{q_i,H\}, \tag{1.2.7}$$

$$\dot{p}_i = \{p_i,H\}. \tag{1.2.8}$$

De façon analogue à la densité lagrangienne, il est possible de définir une densité hamiltonienne:

$$\mathcal{H} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^i}\dot{\phi}^i - \mathcal{L}, \tag{1.2.9}$$

telle que

$$H = \int \mathcal{H}(\phi^i,\partial_\mu \phi^i)d^3x. \tag{1.2.10}$$

1.3. Le théorème de Noether

Si nous considérons des transformations continues sur les champs $\phi^i(\mathbf{r},t)$ telles que, sous forme infinitésimale, elles s'écrivent:

$$\phi^i(\mathbf{r},t) \longrightarrow \phi^i_\varepsilon(\mathbf{r},t) = \phi^i(\mathbf{r},t) + \varepsilon\Delta\phi^i(\mathbf{r},t) \quad , \tag{1.3.1}$$

alors, une telle transformation est dite une *symétrie* du système si elle laisse invariante les équations d'Euler-Lagrange (1.2.4). Ceci est assuré si la transformation garde l'action S invariante ou, plus généralement, ajoute à l'action un terme de surface. On voit donc que l'action sera invariante si la densité lagrangienne varie au plus d'une divergence totale du type:

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} + \varepsilon\partial_\mu J^\mu \quad , \tag{1.3.2}$$

pour une quantité J^μ, $\mu = 0,1,\ldots,N$ (en N dimensions spatiales, où $x_0 = t$). La variation en $\mathcal{L}$ causée par les variations (1.3.1) des champs est donnée par

$$\begin{aligned}
\varepsilon\Delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^i}(\varepsilon\Delta\phi^i) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}\partial_\mu(\varepsilon\Delta\phi^i) && (1.3.3)\\
&= \varepsilon\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}\Delta\phi^i\right) + \varepsilon\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^i} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}\right)\right]\Delta\phi^i && (1.3.4)\\
&= \varepsilon\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}\Delta\phi^i\right) \qquad \text{(par Euler-Lagrange).} && (1.3.5)
\end{aligned}$$

Cela nous permet de déduire qu'à chaque symétrie de l'action correspond une quantité conservée qui s'écrit

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}\Delta\phi^i - J^\mu \quad , \tag{1.3.6}$$

satifaisant donc $\partial_\mu j^\mu = 0$. Cela signifie que la quantité $Q = \int j^0 d^N x$ est conservée dans le temps t.

Il est à noter cependant qu'il existe des symétries du système d'équations qui ne laissent *pas* l'action invariante et qui ne correspondent donc pas à une quantité conservée. En effet, comme le constate Olver, *"Not every symmetry group of a system of Euler-Lagrange equations will give rise to a conservation law; one needs the group to satisfy an additional variational property"* [Olver, p.246]. Les dilatations que nous obtiendrons dans le chapitre 3 sont un exemple de symétries du système qui ne préservent pas l'action.

1.4. Le gaz de Chaplygin

Un exemple particulier d'un fluide idéal est le gaz de Chaplygin, qui correspond à une pression polytrope de la forme [Jackiw 4, Chaplygin, Krementosov]:

$$P(\rho) = -\frac{2\lambda}{m\rho}, \text{ où } \lambda \geq 0 \quad . \tag{1.4.1}$$

Dans le cas où le fluide est irrotationnel, c'est-à-dire, où la vorticité:

$$\omega_{ij} \equiv \partial_i v^j - \partial_j v^i \tag{1.4.2}$$

est égale à zéro, on peut exprimer la vitesse $\mathbf{v}$ en termes d'un potentiel θ [Jackiw 3]. Ce résultat est valide en général pour un fluide en n dimensions spatiales, mais les modèles en une, deux ou trois dimensions sont les plus utilisés. La vorticité correspond, en trois dimensions, au vecteur $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ et, en deux dimensions, au scalaire $\omega = \partial_x v^2 - \partial_y v^1$.

Pour déterminer le lagrangien du système, nous utiliserons l'argument suivant, attribué à Eckart [Jackiw3, Bazeia, Eckart]. Considérons tout d'abord un système de N particules libres, sans interaction externe ou interne, pour lequel le lagrangien est simplement l'énergie cinétique:

$$L_0 = \frac{1}{2}\sum_i m v_i^2(t) \quad . \tag{1.4.3}$$

En remplaçant le système par une distribution de matière continue, et en ajoutant la contrainte que l'équation de continuité (1.1.2) doit être respectée, nous obtenons:

$$L_0 = \int dr \, \left(\frac{1}{2} m\rho v^2 + \theta \left(\dot{\rho} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})\right)\right) \quad , \tag{1.4.4}$$

où θ est un multiplicateur de Lagrange.

Une variation de la vitesse $\mathbf{v} \to \mathbf{v} + \delta\mathbf{v}$ cause une variation, dans le lagrangien, de la forme

$$\delta L_0 = \int (m\rho\mathbf{v} - \rho\nabla\theta) \cdot \delta\mathbf{v} dr \quad . \tag{1.4.5}$$

De la condition $\delta L_0 = 0$, on déduit le résultat:

$$\mathbf{v} = \frac{\nabla\theta}{m} \quad . \tag{1.4.6}$$

En remplaçant cette valeur de $\mathbf{v}$ dans L_0, nous obtenons finalement

$$L_0 = \int d\mathbf{r} \left(\theta\dot{\rho} - \frac{1}{2m}\rho(\nabla\theta)^2\right) \quad . \tag{1.4.7}$$

Pour avoir le lagrangien complet, il faut encore soustraire le terme d'énergie potentielle $V(\rho) = \lambda/\rho$. Le gaz Chaplygin correspond donc au lagrangien

$$L = \int d\mathbf{r} \left(\theta\dot{\rho} - \frac{1}{2m}\rho(\nabla\theta)^2 - \frac{\lambda}{\rho}\right) \quad , \tag{1.4.8}$$

où $\theta(\mathbf{r},t)$ est une fonction d'état scalaire. En termes de ρ et θ, l'équation de continuité (1.1.2) s'écrit

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{m}(\nabla\rho \cdot \nabla\theta + \rho\nabla^2\theta) = 0 \tag{1.4.9}$$

et l'équation d'Euler (1.1.3) prend la forme

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\nabla\theta)^2 = \frac{\lambda}{\rho^2} \quad . \tag{1.4.10}$$

Ces équations peuvent également être obtenues en utilisant le hamiltonien du système. La densité hamiltonienne $\mathcal{H}$ est donnée en (1.2.9)

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\rho(\theta_x)^2 + \frac{\lambda}{\rho} \quad , \tag{1.4.11}$$

et le hamiltonien est alors donné par

$$H = \int dr \left(\frac{1}{2m}\rho(\theta_x)^2 + \frac{\lambda}{\rho}\right) \quad . \tag{1.4.12}$$

Utilisant le lagrangien (1.4.8), nous observons que le moment conjugué de la variable ρ est égal à θ, et que ces deux variables forment donc une paire canonique. Le crochet élémentaire pour les variables fondamentales ρ et θ est alors:

$$\{\theta(\mathbf{r}),\rho(\mathbf{r}')\} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \tag{1.4.13}$$

En prenant le crochet de Poisson de H avec les variables ρ et θ pour les équations de Hamilton, nous obtenons l'équation de continuité (1.4.9) et l'équation d'Euler (1.4.10) respectivement.

Chapitre 2

SYMÉTRIES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Dans ce chapitre, nous faisons un rappel de la méthode qui permet de trouver les symétries d'un système d'équations différentielles. Cette méthode, proposée dans le livre de P. J. Olver [Olver], ainsi que celui de D. H. Sattinger et O. L. Weaver [Sattinger], utilise la prolongation de transformations infinitésimales à un espace fibré des jets, $\mathcal{J}_k$, incluant non seulement les variables indépendantes et dépendantes, mais aussi les dérivées de ces dernières. Une condition reliant le système d'équations à sa prolongation permet de déterminer quand un champ de vecteurs constitue un générateur de groupe de symétries à un paramètre.

2.1. Espaces des jets et prolongations

Commençons par considérer une équation différentielle ordinaire de degré 1, incluant une variable indépendante x, une fonction dépendante $u = u(x)$, et sa dérivée première $u' = \frac{du}{dx}$. L'équation peut être représentée par

$$f(x,u,u') = 0. \tag{2.1.1}$$

Si l'espace décrit par l'équation $f = 0$ est une sous-variété de $\Re^3$, alors toute solution de l'équation (2.1.1) est une courbe $(x,u(x),p(x))$ dans la surface $f = 0$, où $p(x) = u'(x)$. Nous voulons déterminer les transformations du plan (x,u)

qui laissent invariant l'ensemble des solutions, c'est-à-dire qui envoient chaque solution $u(x)$ sur une autre solution $\tilde{u}(\tilde{x})$.

Prenons un groupe de transformations à un paramètre dans le plan (x,u):

$$\tilde{x} = X(x,u,\varepsilon) \qquad , \qquad \tilde{u} = U(x,u,\varepsilon), \tag{2.1.2}$$

où $X(x,u,0) = x$ et $U(x,u,0) = u$. Sous cette transformation, le graphe Γ de la fonction $u = u(x)$ (donné par $\Gamma = \{(x,u) : u = u(x)\}$ est transformé en un nouveau graphe $\tilde{\Gamma} = \{(\tilde{x},\tilde{u}) : \tilde{u} = \tilde{u}(\tilde{x})\}$. Donc, si on inclut aussi la première dérivée de u, chaque point $(x,u(x),\frac{du}{dx}|_x)$ de la fonction $u = u(x)$ est envoyé sur un nouveau point $(\tilde{x},\tilde{u}(\tilde{x}),\frac{d\tilde{u}}{d\tilde{x}}|_{\tilde{x}})$. Cela signifie que la transformation (2.1.2) est *prolongée* de $\Re^2$ à $\Re^3$ pour inclure aussi la variable $p = \frac{du}{dx}$.

En général, si on considère G un groupe agissant sur le plan (x,u), représenté par les transformations Φ_g, puisque $\Phi_{(g_1 \cdot g_2)} = \Phi_{g_1} \circ \Phi_{g_2}$, alors le graphe sous cette transformation est

$$\tilde{\Gamma}_{g_1 \cdot g_2} = \Phi_{(g_1 \cdot g_2)}(\Gamma) = \Phi_{g_1}\left(\Phi_{g_2}(\Gamma)\right) \quad . \tag{2.1.3}$$

Cela signifie que la pente du graphe Γ doit également obéir à la propriété de composition de la représentation [Sattinger]. L'action du groupe G peut donc être prolongée de $\Re^2$ à $\Re^3$ pour inclure la première dérivée. Il est également possible d'étendre la prolongation pour inclure les derivées d'ordre supérieur, ainsi que plusieurs variables dépendantes et indépendantes.

Soient $x = (x_1,x_2,\cdots x_n)$ les variables indépendantes et $u = (u^1,u^2,\cdots u^m)$ les variables dépendantes, fonctions des x_i, et prenons $X \times U = \{(x_1,\cdots,x_n,u^1,\cdots u^m)\}$ comme espace de base. Nous définissons alors un multi-index $J = (j_1,j_2,\cdots j_n)$, où chaque j_i est un entier non-négatif. Définissons aussi l'espace $\mathcal{J}_k$ comme étant l'espace de coordonnées (x_i,u^l,u^l_J), où $i = 1,\cdots n$, $l = 1,\cdots,r$, et $|J| =$

$j_1+j_2+\cdots+j_n \leq k$. Chaque fonction $u(x) = (u^1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,u^r(x_1,\cdots,x_n))$ définit alors une sous-variété dans l'espace $\mathcal{J}_k$, donnée par $(x_i,u^l(x),u^l_J(x))$, où

$$u^l_J(x) = \frac{\partial^{|J|}}{\partial x_1^{j_1}\cdots\partial x_n^{j_n}}(u^l)|_x = \partial_J u^l(x). \tag{2.1.4}$$

L'espace $\mathcal{J}_k$ est appelé *espace fibré des jets d'ordre k*.

Une action Φ_g sur l'espace $X \times U$ induit une action $\Phi_g^{(k)}$ sur l'espace $\mathcal{J}_k$, qu'on appelle la *prolongation de Φ_g d'ordre k* . Si on considère un groupe de transformations à un paramètre Φ_ε tel que:

$$\Phi_\varepsilon \quad : \quad \tilde{x}_i = X^i(x,u,\varepsilon) \quad , \quad \tilde{u}^j = U^j(x,u,\varepsilon), \tag{2.1.5}$$

où $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$, le générateur infinitésimal de ce groupe $\alpha = \frac{d}{d\varepsilon}(\Phi_\varepsilon)|_{\varepsilon=0}$ est donné par

$$\alpha = \xi^i\frac{\partial}{\partial x_i} + \phi^j\frac{\partial}{\partial u^j} \quad , \tag{2.1.6}$$

où $\xi^i = \xi^i(x,u)$, $\phi^j = \phi^j(x,u)$, avec $\frac{d}{d\varepsilon}X^i|_{\varepsilon=0} = \xi^i$, $\frac{d}{d\varepsilon}U^j|_{\varepsilon=0} = \phi^j$.

Sur l'espace $\mathcal{J}_k$, nous définissons l'opération:

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{l,J} u^l_{J_i}\frac{\partial}{\partial u^l_J} \quad , \qquad \text{où} \quad J_i = (j_1,\ldots,j_{i-1},j_i+1,j_{i+1},\ldots,j_n)) \quad . \tag{2.1.7}$$

Il est clair que D_i agit comme une dérivée totale:

$$D_i f(x,u(x),u_J(x)) = \frac{d}{dx_i}f(x,u(x),u_J(x)) \quad .$$

Plus généralement, pour $J = (j_1,j_2,\ldots,j_n)$, nous définissons:

$$D_J = \underbrace{D_1 D_1\cdots D_1}_{j_1}\cdots\underbrace{D_n D_n\cdots D_n}_{j_n} \tag{2.1.8}$$

Pour le champ de vecteurs α défini dans (2.1.6), nous avons le résultat suivant:

Théorème 2.1.1. *Si* $\alpha = \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \phi^j \frac{\partial}{\partial u^j}$, *alors la première prolongation de* α *est donnée par*

$$pr^{(1)}(\alpha) = \alpha + \sum_{l,i} \phi_i^l \frac{\partial}{\partial u_i^l}, \tag{2.1.9}$$

où

$$\phi_i^l = D_i \phi^l - u_m^l D_i \xi^m. \tag{2.1.10}$$

Les prolongations de degré supérieur à 1 sont calculées récursivement. Ayant trouvé la prolongation d'ordre k, $pr^{(k)}(\alpha)$, nous trouvons $pr^{(k+1)}$ en prenant la première prolongation de $pr^{(k)}$:

$$pr^{(k+1)}(\alpha) = pr^{(1)} \left[pr^{(k)}(\alpha) \right]. \tag{2.1.11}$$

Si on écrit la prolongation d'ordre k sous la forme

$$pr^{(k)}(\alpha) = \alpha + \sum_{l,0<|J|\leq k} \phi_J^l \frac{\partial}{\partial u_J^l}, \tag{2.1.12}$$

il est possible d'établir la relation entre les fonctions $\phi_{J_i}^l$ et ϕ_J^l, et donc entre la prolongation d'ordre $k+1$ et celle d'ordre k. Nous avons:

$$\phi_{J_i}^l = D_i \phi_J^l - u_{J_m}^l D_i \xi^m.$$

En itérant cette récursion k fois, on obtient finalement l'expression de la prolongation d'ordre k,

$$pr^{(n)}(\alpha) = \alpha + \sum_{l,J} \phi_J^l \frac{\partial}{\partial u_J^l}, \tag{2.1.13}$$

où, en général, ϕ^l_J est donné par

$$\phi^l_J = D_J(\phi^l - \xi^m u^l_m) + (D_m u^l_J)\xi^m. \tag{2.1.14}$$

2.2. Equations différentielles

Un système d'équations différentielles d'ordre (maximum) k est défini par une fonction

$$\Delta(x_i,u^l,u^l_J) = (\Delta^1(x_i,u^l,u^l_J),\cdots,\Delta^q(x_i,u^l,u^l_J)) \tag{2.2.1}$$

de $\mathcal{J}_k$ dans $\Re^q$, telle que l'espace des valeurs x_i, u^l, u^l_J dans $\mathcal{J}_k$ où $\Delta = 0$ forme une sous-variété de $\mathcal{J}_k$. Notre système est défini par $\Delta = 0$, et une solution est donc une courbe $(x_i,u^l(x),u^l_J(x))$ dans $\mathcal{J}_k$.

Théorème 2.2.1. *Soit G un groupe agissant localement sur $X \times U$ par les transformations*

$$\tilde{x}_i = X^i(x,u,g) \quad , \quad \tilde{u}^j = U^j(x,u,g)$$

où $g \epsilon G$, et soit $\Delta(x,u,u_J)$ un système d'équations différentielles. Alors, l'action du groupe G préserve les solutions de $\Delta = 0$ (i.e. si $u(x)$ est une solution, $\tilde{u}(\tilde{x})$ l'est aussi) si et seulement si

$$\left[pr^{(k)}(\alpha)\right](\Delta) = 0 \text{ quand } \Delta = 0, \tag{2.2.2}$$

pour tout générateur infinitesimal α de l'action du groupe.

2.3. Symétries généralisées

Les groupes de symétries considérés dans les sections précédentes étaient telles que les coefficients des générateurs dépendaient seulement des variables (indépendantes et dépendantes). Il est possible d'étendre la méthode pour inclure aussi des générateurs dépendant également des dérivées des variables dépendantes. Une discussion complète de ce type de symétrie est présentée dans le livre d'Olver [Olver]. Cette section se limite aux définitions de base, qui seront utilisées dans les chapitres suivants.

Nous utilisons la notation $P(x,u^{(n)})$ pour indiquer une fonction P dépendant des variables indépendantes x^i, des variables dépendantes u^α et des dérivées des u^α d'ordre inférieur ou égal à n. Si l'ordre maximal des dérivées est indéterminé, nous écrivons $P = P[u]$, où P dépend de x, u et des dérivées de u à *tous* les ordres. Ces fonctions sont appelées *fonctions différentielles.*

Un *champ de vecteurs généralisé* est défini comme étant une expression de la forme

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} \xi^i[u]\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \phi_\alpha[u]\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \tag{2.3.1}$$

où ξ^i et ϕ_α sont des fonctions différentielles. Nous définissons la *n-ième prolongation* d'un champ généralisé de façon analogue à l'équation (2.1.14):

$$pr^{(n)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_{|J|\leq n} \phi_\alpha^J[u]\frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}, \tag{2.3.2}$$

où les coefficients sont déterminés par:

$$\phi_\alpha^J = D_J\left(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^{p}\xi^i u_i^\alpha\right) + \sum_{i=1}^{p}\xi^i u_{J,i}^\alpha. \tag{2.3.3}$$

Il est également possible de définir la prolongation de degré infini de $\mathbf{v}$ comme étant:

$$pr\ \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_{J} \phi_\alpha^J[u] \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}, \tag{2.3.4}$$

où J prend maintenant toutes les valeurs possibles. Notons que si une fonction différentielle P dépend d'un nombre fini de dérivées, il est seulement nécessaire de calculer un nombre fini des coefficients de la somme (2.3.4). Donc, il n'est jamais vraiment nécessaire d'étudier la convergence de cette expression.

Par exemple, pour le cas $p = 1$, $q = 1$ l'expression

$$\mathbf{v} = x u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u}$$

est un champ de vecteurs généralisé. La première prolongation est donnée par:

$$pr^{(1)}\mathbf{v} = x u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u} + \left[u_{xxx} - (x u_{xx} + u_x) u_x\right] \frac{\partial}{\partial u_x}.$$

Définition 2.3.1. *Soit* $\mathbf{v}$ *un champ de vecteurs généralisé, et*

$$\Delta_\nu[u] = 0, \qquad \nu = 1, \ldots, s \tag{2.3.5}$$

un système d'équations différentielles. Alors, $\mathbf{v}$ *est appelé* symétrie généralisée infinitésimale *si et seulement si*

$$pr\ \mathbf{v}\,[\Delta_\nu] = 0, \qquad \nu = 1, \ldots, s, \tag{2.3.6}$$

pour toute solution u.

Le commutateur de Lie entre deux champs de vecteurs généralisés est défini de façon suivante:

Définition 2.3.2. *Soient* $\mathbf{v}$ *et* $\mathbf{w}$ *deux champs de vecteurs généralisés:*

$$\mathbf{v} = \sum_i \xi^i[u]\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_\alpha \phi_\alpha[u]\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \qquad \mathbf{w} = \sum_i \eta^i[u]\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_\alpha \psi_\alpha[u]\frac{\partial}{\partial u^\alpha}. \quad (2.3.7)$$

Alors, le commutateur est défini:

$$\begin{aligned} [\mathbf{v},\mathbf{w}] &= pr\ \mathbf{v}(\mathbf{w}) - pr\ \mathbf{w}(\mathbf{v}) \qquad (2.3.8) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \left[pr\ \mathbf{v}(\eta^i) - pr\ \mathbf{w}(\xi^i)\right]\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \left[pr\ \mathbf{v}(\psi_\alpha) - pr\ \mathbf{w}(\phi_\alpha)\right]\frac{\partial}{\partial u^\alpha}. \end{aligned}$$

Chapitre 3

SYMÉTRIES DES ÉQUATIONS DU GAZ DE CHAPLYGIN

Dans ce chapitre, nous utilisons la méthode des prolongations décrite dans le chapitre 2 pour calculer les générateurs de symétries des équations du gaz de Chaplygin. A notre connaissance, cette approche n'a pas été considérée auparavant et représente donc une contribution originale de ce travail. Les deux cas, $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$ sont considérés séparément, car le premier cas contient des symétries qui ne sont pas présentes dans le second. Les transformations du groupe de symétries sont ensuite discutées en détail, et le théorème de Noether est utilisé pour relier ces dernières aux charges conservées. Finalement, les résultats sont comparés aux résultats de Jackiw, Bazeia, Hassaïne et Horváthy [Bazeia, Jackiw 1,3, Hassaïne].

3.1. Générateurs de symétries

Nous trouvons ici en détail les générateurs de symétries pour le cas spécifique du gaz de Chaplygin décrit dans la section (1.4). Les équations décrivant le mouvement du gaz ont été déterminées comme étant

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\nabla\theta)^2 = \frac{\lambda}{\rho^2} \quad , \tag{3.1.1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{m}(\nabla\rho \cdot \nabla\theta + \rho\nabla^2\theta) = 0 \quad . \tag{3.1.2}$$

Nous allons étudier les symétries pour le cas d'une seule dimension spatiale, avec *une* variable spatiale x et la variable temporelle t. Les variables dépendantes sont donc

$$\theta = \theta(x,t) \quad , \qquad \rho = \rho(x,t).$$

Les équations (3.1.1) et (3.1.2) se simplifient alors pour donner

$$\theta_t + \frac{1}{2m}(\theta_x)^2 = \frac{\lambda}{\rho^2} \quad , \tag{3.1.3}$$

$$\rho_t + \frac{1}{m}(\rho_x\theta_x + \rho\theta_{xx}) = 0 \quad . \tag{3.1.4}$$

Nous avons donc un système de deux équations différentielles pour les deux fonctions, θ et ρ, qui dépendent chacune des deux variables, x et t. L'ordre maximal du système est 2 et on a $n = 2$, $r = 2$, $k = 2$.

En utilisant la technique décrite au chapitre 2, nous devons considérer la *deuxième* prolongation d'un champ de vecteurs $\mathbf{v}$ de la forme:

$$\mathbf{v} = \xi(x,t,\theta,\rho)\frac{\partial}{\partial x} + \ \tau(x,t,\theta,\rho)\frac{\partial}{\partial t} + \ \phi(x,t,\theta,\rho)\frac{\partial}{\partial \theta} + \ \psi(x,t,\theta,\rho)\frac{\partial}{\partial \rho} \quad . \tag{3.1.5}$$

La seconde prolongation de $\mathbf{v}$ est représentée par

$$\begin{aligned} pr^{(2)}(\mathbf{v}) &= \mathbf{v} + \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{|J|\leq 2} \phi_\alpha^J \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} \quad , \\ &= \xi\frac{\partial}{\partial x} + \tau\frac{\partial}{\partial t} + \phi\frac{\partial}{\partial \theta} + \psi\frac{\partial}{\partial \rho} + \phi^x\frac{\partial}{\partial \theta_x} \\ &\quad + \phi^t\frac{\partial}{\partial \theta_t} + \psi^x\frac{\partial}{\partial \rho_x} + \psi^t\frac{\partial}{\partial \rho_t} + \phi^{xx}\frac{\partial}{\partial \theta_{xx}} + \phi^{xt}\frac{\partial}{\partial \theta_{xt}} \\ &\quad + \phi^{tt}\frac{\partial}{\partial \theta_{tt}} + \psi^{xx}\frac{\partial}{\partial \rho_{xx}} + \psi^{xt}\frac{\partial}{\partial \rho_{xt}} + \psi^{tt}\frac{\partial}{\partial \rho_{tt}} \quad . \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Nous avons utilisé $x_1 = x$, $x_2 = t$, $u^1 = \theta$, $u^2 = \rho$, $\phi_1^J = \phi^J$, et $\phi_2^J = \psi^J$, $J = (1,0)$, $(0,1)$, $(2,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$.

Par le théorème (2.2.1), $\mathbf{v}$ est un générateur infinitésimal de symétries de Δ si

$$\left[pr^{(2)}(\mathbf{v})\right](\Delta_1) = 0 \quad et \left[pr^{(2)}(\mathbf{v})\right](\Delta_2) = 0$$

quand $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$ où, dans notre exemple, on a

$$\Delta_1 = \theta_t + \frac{1}{2m}(\theta_x)^2 - \frac{\lambda}{\rho^2} \quad ,$$

$$\Delta_2 = \rho_t + \frac{1}{m}(\rho_x\theta_x + \rho\theta_{xx}) \quad .$$

Nous déterminons donc les contraintes suivantes pour les fonctions coefficients de $pr^{(2)}(\mathbf{v})$:

$\left[pr^{(2)}(\mathbf{v})\right](\Delta_1) = 0$ implique que

$$\phi^t + \frac{1}{m}\phi^x\theta_x + \frac{2\lambda\psi}{\rho^3} = 0 \quad ; \tag{3.1.7}$$

$\left[pr^{(2)}(\mathbf{v})\right](\Delta_2) = 0$ implique que

$$\psi^t + \frac{1}{m}\phi^x\rho_x + \frac{1}{m}\psi^x\theta_x + \frac{1}{m}\psi\theta_{xx} + \frac{1}{m}\phi^{xx}\rho = 0 \quad . \tag{3.1.8}$$

Il est alors nécessaire d'obtenir seulement les expressions explicites des fonctions ϕ^x, ϕ^t, ψ^x, ψ^t et ϕ^{xx}. En utilisant la formule générale (2.1.14) pour les coefficients de la prolongation, nous obtenons:

$$\begin{aligned} \phi^x &= \phi_x + (\phi_\theta - \xi_x)\theta_x - \tau_x\theta_t - \xi_\theta(\theta_x)^2 \\ &\quad -\tau_\theta\theta_x\theta_t + \phi_\rho\rho_x - \xi_\rho\rho_x\theta_x - \tau_\rho\rho_x\theta_t \quad , \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

$$\begin{aligned} \phi^t &= \phi_t - \xi_t\theta_x + (\phi_\theta - \tau_t)\theta_t - \tau_\theta(\theta_t)^2 \\ &\quad -\xi_\theta\theta_x\theta_t + \phi_\rho\rho_t - \xi_\rho\rho_t\theta_x - \tau_\rho\rho_t\theta_t \quad , \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

$$\begin{aligned}\psi^x &= \psi_x + (\psi_\rho - \xi_x)\rho_x - \tau_x\rho_t - \xi_\rho(\rho_x)^2 \\ &\quad -\tau_\rho\rho_x\rho_t + \psi_\theta\theta_x - \xi_\theta\theta_x\rho_x - \tau_\theta\theta_x\rho_t \quad ,\end{aligned} \tag{3.1.11}$$

$$\begin{aligned}\psi^t &= \psi_t - \xi_t\rho_x + (\psi_\rho - \tau_t)\rho_t - \tau_\rho(\rho_t)^2 \\ &\quad -\xi_\rho\rho_x\rho_t + \psi_\theta\theta_t - \xi_\theta\theta_t\rho_x - \tau_\theta\theta_t\rho_t \quad ,\end{aligned} \tag{3.1.12}$$

$$\begin{aligned}\phi^{xx} &= \phi_{xx} + (2\phi_{\theta x} - \xi_{xx})\theta_x - \tau_{xx}\theta_t + (\phi_{\theta\theta} - 2\xi_{\theta x})(\theta_x)^2 \\ &\quad -2\tau_{\theta x}\theta_x\theta_t + 2\phi_{\rho x}\rho_x + 2(\phi_{\theta\rho} - \xi_{\rho x})\theta_x\rho_x - 2\tau_{\rho x}\theta_t\rho_x - \xi_{\theta\theta}(\theta_x)^3 \\ &\quad -\tau_{\theta\theta}(\theta_x)^2\theta_t - 2\xi_{\theta\rho}(\theta_x)^2\rho_x - 2\tau_{\theta\rho}\theta_x\theta_t\rho_x + \phi_{\rho\rho}(\rho_x)^2 - \xi_{\rho\rho}\theta_x(\rho_x)^2 \\ &\quad -\tau_{\rho\rho}\theta_t(\rho_x)^2 + (\phi_\theta - 2\xi_x)\theta_{xx} - 2\tau_x\theta_{xt} - 3\xi_\theta\theta_x\theta_{xx} \\ &\quad -\tau_\theta\theta_t\theta_{xx} - 2\tau_\theta\theta_x\theta_{xt} - 2\xi_\rho\rho_x\theta_{xx} - 2\tau_\rho\rho_x\theta_{xt} \\ &\quad +\phi_\rho\rho_{xx} - \xi_\rho\theta_x\rho_{xx} - \tau_\rho\theta_t\rho_{xx} \quad .\end{aligned} \tag{3.1.13}$$

En remplaçant les fonctions ϕ^t et ϕ^x dans la condition (3.1.7) par les formules (3.1.10) et (3.1.9) respectivement, et en remplaçant les θ_t et ρ_t par

$$\theta_t = \frac{\lambda}{\rho^2} - \frac{1}{2m}(\theta_x)^2 \quad ,$$

$$\rho_t = -\frac{1}{m}(\rho_x\theta_x + \rho\theta_{xx}) \quad ,$$

on obtient les coefficients tels qu'indiqués dans le tableau 3.1.

Les équations (a) et (c) impliquent que $\tau = \tau(x,t)$. L'équation (b) nous donne $\xi = \xi(x,t,\theta)$, tandis que (d) donne $\phi = \phi(x,t,\theta)$. Par l'équation (e), $\xi_\theta =$

TAB. 3.1 –. *Equations déterminantes pour la condition (3.1.7)*

Monôme	Coefficient	
$(\theta_x)^2\theta_{xx}$	$-\frac{1}{2m^2}\tau_\rho\rho = 0$	(a)
$\theta_x\theta_{xx}$	$\frac{1}{m}\xi_\rho\rho = 0$	(b)
$(\theta_x)^4$	$\frac{1}{4m^2}\tau_\theta = 0$	(c)
θ_{xx}	$\frac{\lambda}{m\rho}\tau_\rho - \frac{1}{m}\phi_\rho\rho = 0$	(d)
$(\theta_x)^3$	$\frac{1}{2m^2}\tau_x - \frac{1}{2m}\xi_\theta = 0$	(e)
$(\theta_x)^2$	$\frac{1}{2m}\tau_t - \frac{1}{m}\xi_x + \frac{1}{2m}\phi_\theta = 0$	(f)
θ_x	$\frac{1}{m}\phi_x - \xi_t - \xi_\theta\frac{\lambda}{\rho^2} - \frac{\lambda}{m\rho^2}\tau_x = 0$	(g)
1	$\phi_t + \phi_\theta\frac{\lambda}{\rho^2} - \tau_\theta\frac{\lambda^2}{\rho^4} - \tau_t\frac{\lambda}{\rho^2} + \frac{2\lambda\psi}{\rho^3} = 0$	(h)

$\frac{1}{m}\tau_x$, on a donc

$$\xi = \frac{1}{m}\tau_x\theta + \alpha(x,t) \quad . \tag{3.1.14}$$

L'équation (f) nous donne

$$\phi_\theta \;=\; 2\xi_x - \tau_t \;=\; \frac{2}{m}\tau_{xx}\theta + 2\alpha_x - \tau_t \quad ,$$

qui s'intègre facilement comme:

$$\phi = \frac{1}{m}\tau_{xx}\theta^2 + (2\alpha_x - \tau_t)\theta + \beta(x,t) \quad . \tag{3.1.15}$$

Nous laissons les équations (g) et (h) pour l'instant, pour pouvoir considérer séparément les deux cas $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$.

En procédant de la même façon pour la condition (3.1.8) , et les fonctions (3.1.9), (3.1.11), (3.1.12), et (3.1.13), et en éliminant les termes contenant ξ_ρ, τ_θ et τ_ρ, on obtient les coefficients tels qu'indiqués dans le tableau 3.2.

TAB. 3.2 –. *Equations déterminantes pour la condition (3.1.8)*

Monôme	Coefficient	
1	$\psi_t + \psi_\theta \frac{\lambda}{\rho^2} + \frac{1}{m}\rho\phi_{xx} - \frac{\lambda}{m\rho}\tau_{xx} = 0$	(i)
θ_x	$\frac{1}{m}\psi_x + \frac{2}{m}\rho\phi_{\theta x} - \frac{1}{m}\rho\xi_{xx} = 0$	(j)
$(\theta_x)^2$	$\frac{1}{2m}\psi_\theta + \frac{1}{2m^2}\rho\tau_{xx} + \frac{1}{m}\rho\phi_{\theta\theta} - \frac{2}{m}\rho\xi_{\theta x} = 0$	(k)
$(\theta_x)^3$	$-\frac{1}{m}\rho\xi_{\theta\theta} = 0$	(l)
ρ_x	$\frac{1}{m}\phi_x - \xi_t - \xi_\theta\frac{\lambda}{\rho^2} - \frac{1}{m}\tau_x\frac{\lambda}{\rho^2} = 0$	(m)
$\theta_x\rho_x$	$\frac{1}{m}\phi_\theta + \frac{1}{m}\tau_t - \frac{2}{m}\xi_x = 0$	(n)
$(\theta_x)^2\rho_x$	$-\frac{3}{2m}\xi_\theta + \frac{3}{2m^2}\tau_x = 0$	(o)
θ_{xx}	$\frac{1}{m}\left(\psi - \rho\psi_\rho + \rho\phi_\theta + \rho\tau_t - 2\rho\xi_x\right) = 0$	(p)
$\theta_x\theta_{xx}$	$\frac{3}{m^2}\rho\tau_x - \frac{3}{m}\rho\xi_\theta = 0$	(q)

L'équation (n) est équivalente à (f), et les équations (o) et (q) sont équivalentes à (e). L'équation (m) est identique à (g).

Puisque $\xi =$ (3.1.14), où $\tau = \tau(x,t)$, on en déduit que $\xi_{\theta\theta} = 0$, et que l'équation (l) est identiquement satisfaite. En utilisant (n) pour simplifier (p), nous obtenons

$$\psi - \rho\psi_\rho = 0 \quad .$$

Cela donne donc:

$$\psi = f(x,t,\theta)\rho \quad .$$

L'équation (k) implique que

$$\begin{aligned} \psi_\theta &= -\frac{1}{m}\rho\tau_{xx} - 2\rho\phi_{\theta\theta} + 4\rho\xi_{\theta x} \quad , & (3.1.16) \\ &= -\frac{1}{m}\rho\tau_{xx} \quad . & (3.1.17) \end{aligned}$$

On obtient finalement:

$$\psi = \left(-\frac{1}{m}\tau_{xx}\theta + \eta(x,t)\right)\rho \quad . \tag{3.1.18}$$

En utilisant (3.1.14), (3.1.15) et (3.1.18), l'équation (j) nous donne:

$$\left(\frac{2}{m}\tau_{xxx}\right)\theta + (3\alpha_{xx} - 2\tau_{xt} + \eta_x) = 0 \quad . \tag{3.1.19}$$

Nous en déduisons que $\tau_{xxx} = 0$, ce qui donne:

$$\tau(x,t) = \frac{1}{2}\gamma(t)x^2 + \delta(t)x + \epsilon(t) \quad . \tag{3.1.20}$$

Par ailleurs, on a aussi:

$$3\alpha_{xx} + \eta_x = 2\gamma_t x + 2\delta_t \quad . \tag{3.1.21}$$

Nous devons toujours satisfaire les équations (g), (h), (i), et (3.1.21). Etant donné que les trois premières impliquent le paramètre λ, nous allons considérer les deux cas séparément: le cas libre $\lambda = 0$ et le cas interactif $\lambda \neq 0$.

3.1.1. Le cas $\lambda = 0$

Si $\lambda = 0$, résumons les conditions à satisfaire:

$$\begin{aligned}
(g) \quad &: \quad \frac{1}{m}\phi_x - \xi_t = 0 \quad , \\
(h) \quad &: \quad \phi_t = 0 \quad , \\
(i) \quad &: \quad \psi_t + \frac{1}{m}\rho\phi_{xx} = 0 \quad , \\
(3.1.21) \quad &: \quad 3\alpha_{xx} + \eta_x = 2\gamma_t x + 2\delta_t \quad .
\end{aligned}$$

Par (h), on a $\phi_t = 0$. Donc, en utilisant (3.1.15) et (3.1.20), on trouve

$$\frac{1}{m}\gamma_t\theta^2 + \left(2\alpha_{xt} - \frac{1}{2}\gamma_{tt}x^2 - \delta_{tt}x - \varepsilon_{tt}\right)\theta + \beta_t = 0 \quad .$$

On en déduit de suite que

$$\gamma(t) = C \tag{3.1.22}$$

et

$$\beta = \beta(x) \quad . \tag{3.1.23}$$

De plus, on a

$$2\alpha_{xt} = \delta_{tt}x + \varepsilon_{tt} \quad . \tag{3.1.24}$$

La fonction $\alpha(x,t)$ prend donc la forme:

$$\alpha(x,t) = \frac{1}{4}\delta_t x^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_t x + \sigma(x) + \mu(t) \quad , \tag{3.1.25}$$

pour des fonctions arbitraires $\sigma(x)$ et $\mu(t)$.
L'équation (g) implique que

$$\frac{1}{m}\left(2\sigma_{xx} - \delta_t\right)\theta + \left(\frac{1}{m}\beta_x - \frac{1}{4}\delta_{tt}x^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_{tt}x - \mu_t\right) = 0.$$

La première conséquence est que $\frac{1}{m}\beta_x = \frac{1}{4}\delta_{tt}x^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_{tt}x + \mu_t$, mais puisque $\beta(x)$ est fonction de x seulement, nous obtenons nécessairement:

$$\delta(t) = Dt^2 + Pt + U \quad , \tag{3.1.26}$$

$$\varepsilon(t) = Et^2 + Lt + V \quad , \tag{3.1.27}$$

$$\mu(t) = Wt + Y \quad . \tag{3.1.28}$$

On en déduit aisément l'expression de β:

$$\beta(x) = \frac{m}{6}Dx^3 + \frac{m}{2}Ex^2 + mWx + Z \quad . \tag{3.1.29}$$

La deuxième conséquence est que $2\sigma_{xx} = \delta_t = 2Dt + P$. Puisque $\sigma(x)$ est fonction de x seulement, $D = 0$, et

$$\sigma(x) = \frac{1}{4}Px^2 + Rx + S. \tag{3.1.30}$$

Enfin, l'équation (3.1.21) implique que $2\eta_x = \delta_t - 6\sigma_{xx} = -2P$, donc on a

$$\eta(x,t) = -Px + \Omega(t) \quad . \tag{3.1.31}$$

Finalement, (i) implique que $\Omega_t = -E$, donc on a

$$\Omega(t) = -Et + F \quad . \tag{3.1.32}$$

Rassemblant toutes ces solutions, nous obtenons les fonctions coefficients

$$\begin{aligned}
\xi(x,t,\theta) &= \frac{1}{m}(Cx + Pt + U)\,\theta + \frac{1}{2}Px^2 + Ext + \left(\frac{1}{2}L + R\right)x + Wt + (S + Y) \quad , \\
\tau(x,t) &= \frac{1}{2}Cx^2 + Pxt + Et^2 + Ux + Lt + V \quad , \\
\phi(x,\theta) &= \frac{1}{m}C\theta^2 + (Px + 2R)\,\theta + \frac{m}{2}Ex^2 + mWx + Z \quad , \\
\psi(x,t,\theta,\rho) &= -\left(\frac{1}{m}C\theta + Px + Et - F\right)\rho \quad .
\end{aligned} \tag{3.1.33}$$

Les symétries infinitésimales pour le cas $\lambda = 0$ sont alors données par les générateurs suivants:

$$C = \frac{1}{m}x\theta\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}x^2\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{m}\theta^2\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{m}\theta\rho\frac{\partial}{\partial \rho}, \tag{3.1.34}$$

$$E = xt\frac{\partial}{\partial x} + t^2\frac{\partial}{\partial t} + \frac{m}{2}x^2\frac{\partial}{\partial \theta} - t\rho\frac{\partial}{\partial \rho}, \tag{3.1.35}$$

$$F = \rho\frac{\partial}{\partial \rho}, \tag{3.1.36}$$

$$P = \left(\frac{1}{m}t\theta + \frac{1}{2}x^2\right)\frac{\partial}{\partial x} + xt\frac{\partial}{\partial t} + x\theta\frac{\partial}{\partial \theta} - x\rho\frac{\partial}{\partial \rho}, \tag{3.1.37}$$

$$L = \frac{1}{2}x\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial t}, \tag{3.1.38}$$

$$R = x\frac{\partial}{\partial x} + 2\theta\frac{\partial}{\partial \theta}, \tag{3.1.39}$$

$$U = \frac{1}{m}\theta\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial t}, \tag{3.1.40}$$

$$W = t\frac{\partial}{\partial x} + mx\frac{\partial}{\partial \theta}, \tag{3.1.41}$$

$$Z = \frac{\partial}{\partial \theta}, \tag{3.1.42}$$

$$S = \frac{\partial}{\partial x}, \tag{3.1.43}$$

$$V = \frac{\partial}{\partial t}, \tag{3.1.44}$$

où on a utilisé la même notation pour les générateurs que les paramètres associés. Ces symétries infinitésimales génèrent une algèbre de Lie de dimension 11 avec les relations de commutation [X,Y] telles qu'indiquées dans le tableau ci-dessous:

X\Y	**C**	**E**	**U**	**P**	**L**	**R**	**F**	**W**	**Z**	**S**	**V**
C	0	0	0	0	0	$-2C$	0	$-P$	$\frac{1}{m}(F-R)$	$-U$	0
E	0	0	$-P$	0	$-E$	0	0	0	0	$-W$	$-2L+F$
U	0	P	0	C	$\frac{1}{2}U$	$-U$	0	$\frac{1}{2}R-L$	$-\frac{1}{m}S$	$-V$	0
P	0	0	$-C$	0	$-\frac{1}{2}P$	$-P$	0	$-E$	$-\frac{1}{m}W$	$F-L$ $-\frac{1}{2}R$	$-U$
L	0	E	$-\frac{1}{2}U$	$\frac{1}{2}P$	0	0	0	$\frac{1}{2}W$	0	$-\frac{1}{2}S$	$-V$
R	$2C$	0	U	P	0	0	0	$-W$	$-2Z$	$-S$	0
F	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
W	P	0	$L-\frac{1}{2}R$	E	$-\frac{1}{2}W$	W	0	0	0	$-mZ$	$-S$
Z	$\frac{1}{m}(R-F)$	0	$\frac{1}{m}S$	$\frac{1}{m}W$	0	$2Z$	0	0	0	0	0
S	U	W	V	$L+\frac{1}{2}R$ $-F$	$\frac{1}{2}S$	S	0	mZ	0	0	0
V	0	$2L-F$	0	U	V	0	0	S	0	0	0

3.1.2. Le cas $\lambda \neq 0$

Pour ce cas, nous devons satisfaire les équations

$$(g) \quad : \quad \frac{1}{m}\phi_x - \xi_t - \xi_\theta \frac{\lambda}{\rho^2} - \frac{\lambda}{m\rho^2}\tau_x = 0,$$

$$(h) \quad : \quad \phi_t + \phi_\theta \frac{\lambda}{\rho^2} - \tau_t \frac{\lambda}{\rho^2} + \frac{2\lambda\psi}{\rho^3} = 0,$$

$$(i) \quad : \quad \psi_t + \frac{1}{m}\rho\phi_{xx} + \psi_\theta \frac{\lambda}{\rho^2} - \frac{\lambda}{m\rho}\tau_{xx} = 0,$$

$$(3.1.21) \quad : \quad 3\alpha_{xx} + \eta_x = 2\gamma_t x + 2\delta_t.$$

En utilisant (3.1.15), (3.1.18) et (3.1.20), l'équation (h) devient

$$\begin{aligned} \frac{1}{m}\gamma_t\theta^2 + \left(2\alpha_{xt} - \frac{1}{2}\gamma_{tt}x^2 - \delta_{tt}x - \varepsilon_{tt}\right)\theta + \beta_t & \\ + \frac{\lambda}{\rho^2}\left(2\alpha_x - \gamma_t x^2 - 2\delta_t x - 2\varepsilon_t + 2\eta\right) &= 0. \end{aligned} \qquad (3.1.45)$$

Nous en déduisons, comme dans le cas où $\lambda = 0$, les conditions (3.1.22), (3.1.23), (3.1.24), ainsi que l'expression (3.1.25) de $\alpha(x,t)$. Nous avons en plus:

$$2\alpha_x - \gamma_t x^2 - 2\delta_t x - 2\varepsilon_t + 2\eta = 0. \qquad (3.1.46)$$

L'équation (g) implique que

$$\frac{1}{m}\left(2\sigma_{xx} - \delta_t\right)\theta + \left(\frac{1}{m}\beta_x - \frac{1}{4}\delta_{tt}x^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_{tt}x - \mu_t\right) + \frac{\lambda}{m\rho^2}\left(-2Cx - 2\delta(t)\right) = 0.$$

On a toujours

$$\delta(t) = Pt + U, \tag{3.1.47}$$

$$\varepsilon(t) = Et^2 + Lt + V, \tag{3.1.48}$$

$$\mu(t) = Wt + Y, \tag{3.1.49}$$

$$\beta(x) = \frac{m}{2}Ex^2 + mWx + Z, \tag{3.1.50}$$

$$\sigma(x) = \frac{1}{4}Px^2 + Rx + S. \tag{3.1.51}$$

La condition supplémentaire $Cx + \delta(t) = 0$ implique que $Cx = Pt + U$, et donc que

$$C = 0, \quad P = 0, \quad U = 0. \tag{3.1.52}$$

On en déduit que $\delta(t) = 0$, $\gamma(t) = 0$, $\alpha(x,t) = Ext + \left(\frac{1}{2}L + R\right)x + Wt + (S + Y)$. L'équation (3.1.21) implique que $\eta_x = 0$ et alors

$$\eta = \eta(t). \tag{3.1.53}$$

De l'équation (3.1.46), on tire $\alpha - \delta_t x - \varepsilon_t + \eta = 0$, donc $\eta(t) = Et + \left(\frac{1}{2}L - R\right)$. Finalement, en vertu de (i), $2E\rho = 0$, ce qui donne $E = 0$.

Les fonctions coefficients sont finalement

$$\xi(x,t) = \left(\frac{1}{2}L + R\right) x + Wt + (S + Y), \tag{3.1.54}$$

$$\tau(t) = Lt + V, \tag{3.1.55}$$

$$\phi(x,\theta) = 2R\theta + mWx + Z, \tag{3.1.56}$$

$$\psi(\rho) = \left(\frac{1}{2}L - R\right) \rho. \tag{3.1.57}$$

Les symétries infinitésimales pour le cas $\lambda \neq 0$ sont donc

$$\begin{aligned}
L' &= x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + \rho\frac{\partial}{\partial \rho}, &(3.1.58)\\
R' &= x\frac{\partial}{\partial x} + 2\theta\frac{\partial}{\partial \theta} - \rho\frac{\partial}{\partial \rho}, &(3.1.59)\\
W &= t\frac{\partial}{\partial x} + mx\frac{\partial}{\partial \theta}, &(3.1.60)\\
Z &= \frac{\partial}{\partial \theta}, &(3.1.61)\\
S &= \frac{\partial}{\partial x}, &(3.1.62)\\
V &= \frac{\partial}{\partial t}. &(3.1.63)
\end{aligned}$$

Notons que tous les générateurs de symétries du cas $\lambda \neq 0$ sont également des générateurs du cas $\lambda = 0$. En effet, les générateurs W, Z, S, et V sont identiques. Les générateurs L et R du cas $\lambda = 0$ sont des combinaisons des générateurs L'

et R' du cas $\lambda \neq 0$ avec le générateur F. Par contre, les générateurs L, R, F, U, E, C, et P du cas $\lambda = 0$ ne sont pas des générateurs de symétrie du cas $\lambda \neq 0$. Ces symétries infinitésimales génèrent une algèbre de Lie de dimension 6 avec les relations de commutations [X,Y] données dans le tableau suivant:

X\Y	**L'**	**R'**	**W**	**Z**	**S**	**V**
L'	0	0	W	0	$-S$	$-2V$
R'	0	0	$-W$	$-2Z$	$-S$	0
W	$-W$	W	0	0	$-mZ$	$-S$
Z	0	$2Z$	0	0	0	0
S	S	S	mZ	0	0	0
V	$2V$	0	S	0	0	0

3.2. Transformations de symétries et quantités conservées

A chaque générateur de symétrie, déterminé dans la section précédente, correspond une famille de transformations à un paramètre sur les variables indépendantes et dépendantes. Celle-ci forme un sous-groupe du groupe de symétries du système d'équations différentielles. Certaines de ces transformations sont également des symétries de l'action, modifiant le lagrangien par, au plus, une divergence totale en x et en t. Pour ces derniers cas, il est possible d'utiliser le théorème de Noether pour déterminer les charges conservées. Nous considérons en premier les générateurs communs aux deux cas $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$.

3.2.1. Symétries présentes pour les deux cas

Considérons tout d'abord les générateurs $S = \partial_x$ et $V = \partial_t$, qui correspondent aux translations dans l'espace et dans le temps respectivement. La transformation S est donnée par:

$$x' = x + \varepsilon, \qquad t' = t, \qquad \theta' = \theta, \qquad \rho' = \rho, \tag{3.2.1}$$

avec

$$\theta'(x',t') = \theta(x,t) = \theta(x' - \varepsilon \ , \ t'), \qquad \rho'(x',t') = \rho(x,t) = \rho(x' - \varepsilon \ , \ t') \tag{3.2.2}$$

Cela signifie que si $\theta(x,t)$ et $\rho(x,t)$ sont des solutions du système d'équations, les fonctions $\theta(x - \varepsilon,t)$ et $\rho(x - \varepsilon,t)$ le sont aussi. Si la valeur du paramètre ε est suffisament proche de zéro, ces dernières peuvent être approximées par les fonctions:

$$\begin{aligned} \theta_\varepsilon(x,t) &= \theta(x - \varepsilon,t) \approx \theta - \varepsilon\theta_x, \\ \rho_\varepsilon(x,t) &= \rho(x - \varepsilon,t) \approx \rho - \varepsilon\rho_x. \end{aligned}$$

Sous la transformation S, nous pouvons voir aisément que la densité lagrangienne est transformée en

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \theta_\varepsilon\dot{\rho}_\varepsilon - \frac{1}{2m}\rho_\varepsilon(\theta_\varepsilon)_x{}^2 - \frac{\lambda}{\rho_\varepsilon} \\ &= \mathcal{L} + \varepsilon\partial_x\left(-\theta\dot{\rho} + 12m\rho(\theta_x)^2 + \frac{\lambda}{\rho}\right) \\ &= \mathcal{L} + \varepsilon\partial_x(-\mathcal{L}) \\ &= \mathcal{L} + \varepsilon\partial_\mu J^\mu, \end{aligned}$$

où $J^\mu = (0 \ , \ \ -\mathcal{L})$. Suivant notre discussion du théorème de Noether, nous obtenons donc

$$j^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}(-\theta_x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}}(-\rho_x) - J^0 = -\theta \rho_x \tag{3.2.3}$$

et la charge conservée est

$$Q = \int j^0 dx = -\int \theta \rho_x dx = \int \rho \theta_x dx = \int \mathcal{P} dx, \tag{3.2.4}$$

où $\mathcal{P} = \rho v$ est la densité de moment. Cela signifie que le *moment* total du système est conservé.

La transformation V correspondant à la translation temporelle s'écrit:

$$x' = x, \qquad t' = t + \varepsilon, \qquad \theta' = \theta, \qquad \rho' = \rho. \tag{3.2.5}$$

Donc, si $\theta(x,t)$ et $\rho(x,t)$ sont des solutions, alors les fonctions $\theta(x,t-\varepsilon)$ et $\rho(x,t-\varepsilon)$ le sont aussi. On a encore sous forme infinitésimale:

$$\begin{aligned} \theta_\varepsilon(x,t) &= \theta(x,t-\varepsilon) \approx \theta - \varepsilon\dot{\theta}, \\ \rho_\varepsilon(x,t) &= \rho(x,t-\varepsilon) \approx \rho - \varepsilon\dot{\rho}. \end{aligned}$$

Une telle transformation donne lieu à la densité lagrangienne transformée:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \mathcal{L} + \varepsilon \partial_t \left(-\theta\dot{\rho} + 12m\rho(\theta_x)^2 + \frac{\lambda}{\rho} \right) \\ &= \mathcal{L} + \varepsilon \partial_t (-\mathcal{L}). \end{aligned}$$

Le courant j^0 est donné par:

$$j^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}(-\dot{\theta}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}}(-\dot{\rho}) - J^0 = -\theta\dot{\rho} + \mathcal{L} = -\mathcal{H}, \tag{3.2.6}$$

et la charge conservée est donc le hamiltonien correspondant à l'énergie du système, comme attendu:

$$Q = \int \mathcal{H} dx = H. \tag{3.2.7}$$

Le générateur $W = t\partial_x + mx\partial_\theta$ correspond au boost galiléen:

$$x' = x + \varepsilon t, \qquad t' = t, \qquad \theta' = \theta + \varepsilon mx + \frac{1}{2}\varepsilon^2 mt, \qquad \rho' = \rho. \tag{3.2.8}$$

Les champs modifiés prennent la forme infinitésimale:

$$\begin{aligned} \theta_\varepsilon(x,t) &\approx \theta - \varepsilon t\theta_x + \varepsilon mx, \\ \rho_\varepsilon(x,t) &\approx \rho - \varepsilon t\rho_x \end{aligned}$$

et le lagrangien modifié est:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \varepsilon\partial_t\left(mx\rho\right) + \varepsilon\partial_x\left(-\theta\rho - t\mathcal{L}\right), \tag{3.2.9}$$

ce qui implique que $J^\mu = (mx\rho\ ,\ -\theta\rho - t\mathcal{L})$, et:

$$j^0 = -t\theta\rho_x - mx\rho. \tag{3.2.10}$$

La charge conservée est donc

$$Q = tP - m\int x\rho dx. \tag{3.2.11}$$

Si on combine ces trois transformations, elles donnent lieu aux transformations du groupe de Galilée en une dimension spatiale. Dans le cas de deux ou trois dimensions spatiales, (x,y) ou (x,y,z), ce groupe inclura aussi les translations et les boosts dans ces autres dimensions, ainsi que les rotations.

Le champ de vecteurs $Z = \partial_\theta$ génère une translation du potentiel θ telle que

$$x' = x, \qquad t' = t, \qquad \theta' = \theta + \varepsilon, \qquad \rho' = \rho. \tag{3.2.12}$$

La densité lagrangienne est transformée par:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \varepsilon \partial_t(\rho), \tag{3.2.13}$$

où $J^\mu = (\rho\ ,\ 0)$ et $j^0 = -\rho$. La charge conservée est

$$Q = \int \rho dx = N, \tag{3.2.14}$$

qui correspond à la masse, relié au nombre de particules [Jackiw 1,2,3,4], et représente donc la conservation de la matière. Si on inclut cette symétrie aux précédentes, on trouve le groupe des transformations de symétrie de l'extension centrale du groupe de Galilée.

Ces quatre transformations sont identifiées par Jackiw et Bazeia, ainsi que par Hassaïne et Horváthy. Il est à noter qu'en général, en d dimensions spatiales, le groupe comprend un total de $\frac{1}{2}(d+1)(d+2)+1$ transformations indépendantes [Jackiw 1,3]: $d+1$ translations, d boosts galiléens, $\frac{1}{2}d(d-1)$ rotations, et une transformation de changement de phase.

3.2.2. Dilatations

Pour le cas $\lambda = 0$, il existe trois dilatations indépendantes:

$$\begin{aligned} L &= x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t}, \\ R &= x\frac{\partial}{\partial x} + 2\theta\frac{\partial}{\partial \theta}, \\ F &= \rho\frac{\partial}{\partial \rho}. \end{aligned}$$

La première, L, est une dilatation en x et en t qui correspond aux transformations:

$$x' = e^{\varepsilon}x, \qquad t' = e^{2\varepsilon}t, \qquad \theta' = \theta, \qquad \rho' = \rho. \tag{3.2.15}$$

Les dérivées par rapport aux variables indépendantes seront transformées selon $\partial_x \to e^{-\varepsilon}\partial_x$ et $\partial_t \to e^{-2\varepsilon}\partial_t$ et la densité lagrangienne sera modifiée sous la forme:

$$\mathcal{L}' = e^{-2\varepsilon}\mathcal{L}.$$

L'action n'est donc pas laissée invariante par cette transformation, mais puisque le facteur de $e^{-2\varepsilon}$ multiplie le lagrangien entier, il s'annule lorsque nous déterminons les équations d'Euler-Lagrange. Cette dilatation est donc une symétrie du système d'équations, mais pas de l'action.

La seconde transformation, R, est une dilatation en x et en θ telle que:

$$x' = e^{\varepsilon}x, \qquad t' = t, \qquad \theta' = e^{2\varepsilon}\theta, \qquad \rho' = \rho. \tag{3.2.16}$$

Encore une fois, la densité lagrangienne transformée s'écrit:

$$\mathcal{L}' = e^{2\varepsilon}\mathcal{L}$$

et fait donc apparaître un facteur multiplicatif.

Finalement, nous avons la dilatation F en ρ qui donne:

$$x' = x, \qquad t' = t, \qquad \theta' = \theta, \qquad \rho' = e^{\varepsilon}\rho. \tag{3.2.17}$$

Cela produit la transformation:

$$\mathcal{L}' = e^{\varepsilon}\mathcal{L}.$$

Pour le cas $\lambda \neq 0$, il n'y a que deux dilatations indépendantes qui sont:

$$\begin{aligned} L' &= x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + \rho\frac{\partial}{\partial \rho}, \\ R' &= x\frac{\partial}{\partial x} + 2\theta\frac{\partial}{\partial \theta} - \rho\frac{\partial}{\partial \rho}. \end{aligned}$$

La première correspond à la transformation:

$$x' = e^{\varepsilon}x, \qquad t' = e^{2\varepsilon}t, \qquad \theta' = \theta, \qquad \rho' = e^{\varepsilon}\rho. \tag{3.2.18}$$

Cette symétrie est l'addition des symétries associées à L et F données précédemment, donc aussi une symétrie pour le cas $\lambda = 0$. C'est aussi le cas pour la seconde dilatation:

$$x' = e^{\varepsilon}x, \qquad t' = t, \qquad \theta' = e^{2\varepsilon}\theta, \qquad \rho' = e^{-\varepsilon}\rho, \tag{3.2.19}$$

car c'est la différence des symétries associées à R et F. La densité lagrangienne est modifiée dans le premier cas par:

$$\mathcal{L}' = e^{-\varepsilon}\mathcal{L},$$

et dans le second cas par:

$$\mathcal{L}' = e^{\varepsilon}\mathcal{L}.$$

Ces dilatations ne sont pas identifiées séparément par Jackiw et Bazeia. Par contre, la dilatation suivante est discutée par Jackiw [Jackiw 1,3]:

$$x' = x, \qquad t' = e^{\varepsilon}t, \qquad \theta' = e^{-\varepsilon}\theta, \qquad \rho' = e^{\varepsilon}\rho. \tag{3.2.20}$$

Cette transformation correspond au générateur $D = t\frac{\partial}{\partial t} - \theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \rho\frac{\partial}{\partial\rho}$, qui est formé par la différence: $D = \frac{1}{2}(L' - R')$. Avec cette combinaison, la dilatation constitue également une symétrie de l'action. La charge conservée est:

$$Q = \int (\theta\rho - t\mathcal{H})\, dx. \tag{3.2.21}$$

Une autre combinaison de dilatations est identifiée par Hassaïne et Horváthy pour le cas $\lambda = 0$ [Hassaïne]:

$$x' = e^{\varepsilon}x, \qquad t' = e^{2\varepsilon}t, \qquad \theta' = \theta, \qquad \rho' = e^{2\varepsilon}\rho. \tag{3.2.22}$$

Cette transformation correspond au générateur $\zeta = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + 2\rho\frac{\partial}{\partial\rho}$, qui est formé par la somme: $\zeta = \frac{1}{2}(L + 2F)$. Avec cette combinaison, la dilatation constitue également une symétrie de l'action. La charge conservée est:

$$Q = \int \left(\frac{1}{2}x\mathcal{P} - t\mathcal{H}\right) dx. \tag{3.2.23}$$

3.2.3. Symétries additionnelles pour le cas $\lambda = 0$

Pour le cas $\lambda = 0$, il existe quatre transformations additionelles qui préservent l'espace des solutions. Il y a tout d'abord le générateur $U = \frac{1}{m}\theta\partial_x + x\partial_t$, correspondant à la transformation

$$x' = x + \frac{1}{m}\varepsilon\theta, \qquad t' = t + \varepsilon x + \frac{1}{2m}\varepsilon^2\theta, \qquad \theta' = \theta, \qquad \rho' = \rho. \tag{3.2.24}$$

Cette transformation, appelée *"antiboost"* est en effet obtenue en invertissant les variables t et $\frac{1}{m}\theta$ dans la transformation W (le "boost"). Cette symétrie est fondamentalement différente des précédentes dans le sens que les transformations sur les coordonnées x et t de l'espace-temps sont définies implicitement par le champ $\theta(x,t)$. Les nouvelles solutions générées sont, sous forme infinitésimale:

$$\begin{aligned}
\theta_\varepsilon(x,t) &\approx \theta - \frac{1}{m}\varepsilon\theta\theta_x - \varepsilon x\dot{\theta}, \\
\rho_\varepsilon(x,t) &\approx \rho - \frac{1}{m}\varepsilon\theta\rho_x - \varepsilon x\dot{\rho}
\end{aligned}$$

et la densité lagrangienne subit la transformation:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \varepsilon\partial_t\left(-x\mathcal{L} - \frac{1}{2m}\theta^2\rho_x\right) + \varepsilon\partial_x\left(-\frac{1}{m}\theta\mathcal{L} + \frac{1}{2m}\theta^2\dot{\rho}\right). \tag{3.2.25}$$

Nous avons donc: $J^\mu = (-x\mathcal{L} - \frac{1}{2m}\theta^2\rho_x \;,\; -\frac{1}{m}\theta\mathcal{L} + \frac{1}{2m}\theta^2\dot{\rho})$ et la composante temporelle du courant conservé est

$$j^0 = -\frac{1}{2}\theta^2\rho_x - \frac{1}{2}x\rho(\theta_x)^2. \tag{3.2.26}$$

La charge conservée s'écrit ainsi:

$$Q = \int (\theta\mathcal{P} - x\mathcal{H})\,dx. \tag{3.2.27}$$

où $\mathcal{P} = \rho\theta_x$ est la densité de moment comme définie en (3.2.4).

Il existe également trois transformations conformes qui préservent l'espace de solutions. En effet, le générateur $E = xt\partial_x + t^2\partial_t + \frac{m}{2}x^2\partial_\theta - t\rho\partial_\rho$ correspond à la transformation:

$$\begin{aligned}
x' &= \frac{x}{1-\varepsilon t}, \qquad t' = \frac{t}{1-\varepsilon t}, \\
\theta' &= \theta + \frac{m\varepsilon x^2}{2(1-\varepsilon t)}, \qquad \rho' = (1-\varepsilon t)\rho.
\end{aligned} \tag{3.2.28}$$

Cette transformation génére les nouvelles solutions:

$$\begin{aligned}
\theta_\varepsilon(x,t) &\approx \theta - \varepsilon xt\theta_x - \varepsilon t^2\dot{\theta} + \frac{1}{2}\varepsilon m x^2, \\
\rho_\varepsilon(x,t) &\approx \rho - \varepsilon xt\rho_x - \varepsilon t^2\dot{\rho} - \varepsilon t\rho.
\end{aligned}$$

Dans ce cas, la densité lagrangienne transformée s'écrit:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \varepsilon\partial_t\left(-t^2\mathcal{L} + \frac{1}{2}mx^2\rho\right) + \varepsilon\partial_x\left(-xt\mathcal{L} - x\theta\rho\right). \tag{3.2.29}$$

On a alors: $J^\mu = (-t^2\mathcal{L} + \frac{1}{2}mx^2\rho\ ,\ -xt\mathcal{L} - x\theta\rho)$ et

$$j^0 = -xt\theta\rho_x - t\theta\rho - t^2\mathcal{H} - \frac{1}{2}mx^2\rho. \tag{3.2.30}$$

La charge conservée est

$$Q = t^2 H - t\int x\mathcal{P}dx + \frac{1}{2}m\int x^2\rho dx \quad . \tag{3.2.31}$$

Le générateur $C = \frac{1}{m}x\theta\partial_x + \frac{1}{2}x^2\partial_t + \frac{1}{m}\theta^2\partial_\theta - \frac{1}{m}\theta\rho\partial_\rho$ génère la transformation:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{mx}{m-\varepsilon\theta}, \qquad t' = t + \frac{m\varepsilon x^2}{2(m-\varepsilon\theta)}, \\ \theta' &= \frac{m\theta}{m-\varepsilon\theta}, \qquad \rho' = (1 - \frac{1}{m}\varepsilon\theta)\rho \end{aligned} \tag{3.2.32}$$

Dans le même sens que le "boost" et "antiboost", les symétries E et C sont complémentaires. Nous obtenons les nouvelles solutions:

$$\begin{aligned} \theta_\varepsilon(x,t) &\approx \theta - \frac{1}{m}\varepsilon x\theta\theta_x - \frac{1}{2}\varepsilon x^2\dot{\theta} + \frac{1}{m}\varepsilon\theta^2, \\ \rho_\varepsilon(x,t) &\approx \rho - \frac{1}{m}\varepsilon x\theta\rho_x - \frac{1}{2}\varepsilon x^2\dot{\rho} - \frac{1}{m}\varepsilon\theta\rho. \end{aligned}$$

La densité lagrangienne est modifiée à:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \varepsilon\partial_t\left(-\frac{1}{2}x^2\mathcal{L} - \frac{1}{m}x\theta\theta_x\rho - \frac{1}{m}x\theta^2\rho_x\right) + \varepsilon\partial_x\left(-\frac{1}{m}x\theta\mathcal{L} + \frac{1}{m}x\theta\dot{\theta}\rho + \frac{1}{m}x\theta^2\dot{\rho}\right). \tag{3.2.33}$$

Donc, $J^\mu = (-\frac{1}{2}x^2\mathcal{L} - \frac{1}{m}x\theta\theta_x\rho - \frac{1}{m}x\theta^2\rho_x \;, \;\; -\frac{1}{m}x\theta\mathcal{L} + \frac{1}{m}x\theta\dot{\theta}\rho + \frac{1}{m}x\theta^2\dot{\rho})$ et le courant est

$$j^0 = \frac{1}{m}x\theta\rho\theta_x - \frac{1}{m}\theta^2\rho - \frac{1}{2}x^2\mathcal{H}. \tag{3.2.34}$$

La charge conservée est donc

$$Q = \int \left(\frac{1}{2}x^2\mathcal{H} - \frac{1}{m}x\theta\mathcal{P} + \frac{1}{m}\theta^2\rho\right) dx. \tag{3.2.35}$$

Le générateur $P = \left(\frac{1}{m}t\theta + \frac{1}{2}x^2\right)\partial_x + xt\partial_t + x\theta\partial_\theta - x\rho\partial_\rho$ nous donne une transformation compliquée, dont les termes du premier ordre en ε sont:

$$\begin{aligned} x' &= x + \varepsilon\left(\frac{1}{m}t\theta + \frac{1}{2}x^2\right), \qquad t' = t + \varepsilon\,(xt)\,, \\ \theta' &= \theta + \varepsilon\,(x\theta)\,, \qquad \rho' = \rho - \varepsilon\,(x\rho)\,. \end{aligned} \tag{3.2.36}$$

On peut donc écrire les nouvelles solutions au premier ordre en ε sous la forme:

$$\begin{aligned} \theta_\varepsilon(x{,}t) &\approx \theta - \frac{1}{m}\varepsilon t\theta\theta_x - \varepsilon xt\dot{\theta} - \frac{1}{2}\varepsilon x^2\theta_x + \varepsilon x\theta, \\ \rho_\varepsilon(x{,}t) &\approx \rho - \frac{1}{m}\varepsilon t\theta\rho_x - \varepsilon xt\dot{\rho} - \frac{1}{2}\varepsilon x^2\rho_x - \varepsilon x\rho. \end{aligned}$$

La densité lagrangienne devient:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \mathcal{L} + \varepsilon\partial_t\left(-xt\mathcal{L} - \frac{1}{m}t\theta^2\rho_x - \frac{1}{m}t\rho\theta\theta_x - \frac{1}{2}x^2\rho\theta_x - \frac{1}{2}x^2\theta\rho_x\right) \qquad (3.2.37) \\ &\quad + \varepsilon\partial_x\left(-\frac{1}{m}t\theta\mathcal{L} - \frac{1}{2}x^2\mathcal{L} + \frac{1}{2}x^2\theta\dot{\rho} + \frac{1}{2}x^2\rho\dot{\theta} + \frac{1}{m}t\rho\theta\dot{\theta} + \frac{1}{m}t\theta^2\dot{\rho}\right) \end{aligned}$$

et nous obtenons la composante j^0 du courant comme:

$$j^0 = \left(\frac{1}{m}t\theta + \frac{1}{2}x^2\right)\rho\theta_x - x\theta\rho - xt\mathcal{H}. \tag{3.2.38}$$

La charge conservée est encore:

$$Q = xtH - \int \left(\frac{1}{m}t\theta + \frac{1}{2}x^2\right) \mathcal{P} dx + \int x\theta\rho \, dx. \tag{3.2.39}$$

Ces transformations pour le cas $\lambda = 0$ n'apparaissent pas dans les articles de Jackiw et Bazeia, mais sont discutées par Hassaïne et Horváthy [Hassaïne]. En effet, les charges conservées correspondant aux transformations U, E, C et P sont identifiées à G, K, C_1 et C_2 respectivement dans l'article de Hassaïne et Horváthy.

3.3. UNE SYMÉTRIE GÉNÉRALISÉE

Les équations du gaz de Chaplygin sont également invariantes pour les deux cas ($\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$) sous une transformation spécifique considérée par R. Jackiw [Bazeia, Jackiw 1,3], qui mélange les variables indépendantes avec le champ θ. Les variables se transforment selon les relations:

$$x' = x + \varepsilon\theta, \qquad t' = t + \varepsilon x + \frac{1}{2}\varepsilon^2\theta, \qquad \theta' = \theta, \qquad \rho' = \rho|J|, \tag{3.3.1}$$

où J est le Jacobien de la transformation de (x,t) à (x',t'):

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial t} \\ \frac{\partial t'}{\partial x} & \frac{\partial t'}{\partial t} \end{pmatrix} = 1 + \varepsilon\theta_x - \frac{1}{2}\varepsilon^2\dot{\theta}. \tag{3.3.2}$$

Cette transformation correspond au champ de vecteurs

$$\mathbf{v} = \theta\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial t} + \rho\theta_x\frac{\partial}{\partial \rho}. \tag{3.3.3}$$

Nous remarquons que ce générateur contient la dérivée θ_x, et n'est donc plus une symétrie infinitésimale ordinaire, mais génère une symétrie *généralisée*. Cette transformation est presqu' identique à l'antiboost (générateur U) déterminé dans la section précédente, mais ce dernier ne conservait le système que pour le cas $\lambda = 0$. Les champs varient selon:

$$\begin{aligned}\theta_\varepsilon(x,t) &\approx \theta - \frac{1}{m}\varepsilon\theta\theta_x - \varepsilon x\dot{\theta},\\ \rho_\varepsilon(x,t) &\approx \rho - \frac{1}{m}\varepsilon\theta\rho_x - \varepsilon x\dot{\rho} + \varepsilon\rho\theta_x.\end{aligned}$$

La densité lagrangienne se transforme comme suit:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \varepsilon\partial_t\left(-x\mathcal{L} - \frac{1}{2m}\theta^2\rho_x + \rho\theta\theta_x\right) + \varepsilon\partial_x\left(-\frac{1}{m}\theta\mathcal{L} + \frac{1}{2m}\theta^2\dot{\rho}\right), \tag{3.3.4}$$

ce qui implique que l'on ait:

$$\begin{aligned}J^\mu &= (-x\mathcal{L} - \frac{1}{2m}\theta^2\rho_x + \rho\theta\theta_x\ ,\ -\frac{1}{m}\theta\mathcal{L} + \frac{1}{2m}\theta^2\dot{\rho}) \text{ et}\\ j^0 &= -\frac{1}{2}\theta^2\rho_x - \frac{1}{2}x\rho(\theta_x)^2.\end{aligned}$$

La charge conservée est donc

$$Q = \int (\theta\mathcal{P} - x\mathcal{H})\,dx \qquad . \tag{3.3.5}$$

Il est remarquable que la charge obtenue pour cette symétrie généralisée soit identique à celle de la transformation U. Ce résultat est produit par l'annulation de deux termes. Le coefficient de divergence J^0 contient le terme additionnel $\rho\theta\theta_x$ qui est identique à la différence entre les termes caractéristiques

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\rho}}\Delta\rho$$

des deux transformations.

Chapitre 4

VARIABLES DE GRASSMANN

Dans ce chapitre, nous introduisons les concepts d'un espace vectoriel gradué, d'une algèbre de Grassmann B_L contenant des variables paires et impaires et d'un superespace $\Re B_L^{m,n}$ formé de coordonnées à valeurs de Grassmann. Nous discutons ensuite des fonctions à valeurs de Grassmann (superchamps) définies sur un superespace, et les notions de superalgèbres et supergroupes de Lie sont ensuite données. Ces éléments sont tirés principalement du livre de J. F. Cornwell [Cornwell]. Nous rappelons également [Ayari] la méthode de calcul de symétries pour un système d'équations différentielles à variables de Grassmann. Finalement, nous définissons l'intégration sur les variables de Grassmann en utilisant la définition de Berezin [Freund, Berezin, Matthews, Candlin]. Cela nous permet d'introduire la notion d'une action supersymétrique.

4.1. Espace vectoriel gradué

Soit V un espace vectoriel de dimension $(m+n)$, dont les éléments de base sont a_1, a_2, $\cdots$, a_m, a_{m+1}, $\cdots$, a_{m+n}. Chaque élément a de V peut donc être écrit

$$a = \sum_{j=1}^{m+n} \mu_j a_j, \tag{4.1.1}$$

où les coefficients μ_j sont réels. Une *graduation* peut alors être définie sur l'espace en posant que chaque élément de la forme

$$a = \sum_{j=1}^{m} \mu_j a_j \tag{4.1.2}$$

est *pair*, alors que chaque élément de la forme

$$a = \sum_{j=m+1}^{m+n} \mu_j a_j \tag{4.1.3}$$

est *impair*. Si on définit V_0 comme étant l'espace d'éléments pairs de V et V_1 comme étant l'espace d'éléments impairs, on en déduit que V est la somme directe de V_0 et V_1: $V = V_0 \oplus V_1$.

Définition 4.1.1. *Tout élément $a \in V$ qui est soit pair soit impair est dit* homogène. *Le* degré *d'un élément homogène est défini comme:*

$$deg(a) = \begin{cases} 0 & si \quad a \in V_0, \\ 1 & si \quad a \in V_1. \end{cases}$$

Définition 4.1.2. *Une* superalgèbre associative *est un espace gradué V muni d'un produit $V \times V \to V: \quad (a,b) \mapsto ab$ tel que:*

1. *$\forall a,b,a',b' \in V$, et $\mu,\lambda,\mu',\lambda' \in \Re$:*

$$(\mu a + \mu' a')(\lambda b + \lambda' b') = \mu\lambda(ab) + \mu\lambda'(ab') + \mu'\lambda(a'b) + \mu'\lambda'(a'b'), \tag{4.1.4}$$

2. *$\forall a,b,c \in V$:*

$$(ab)c = a(bc), \tag{4.1.5}$$

3. $\forall a, b$:

$$\begin{aligned} a \in V_0 \quad et \quad b \in V_0 \quad &\Longrightarrow \quad ab \in V_0, \\ a \in V_1 \quad et \quad b \in V_1 \quad &\Longrightarrow \quad ab \in V_0, \\ a \in V_0 \quad et \quad b \in V_1 \quad &\Longrightarrow \quad ab \in V_1. \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

Définition 4.1.3. *Une superalgèbre associative est dite* commutative *si*

$$ba = (-1)^{(dega)(degb)} ab, \tag{4.1.7}$$

pour tout a,b homogènes dans V. Donc,

$$ba = \begin{cases} -ab & si \quad a \quad et \quad b \quad sont\ impairs, \\ ab & autrement. \end{cases}$$

4.2. ALGÈBRE DE GRASSMANN

L'algèbre de Grassmann est un exemple particulier de superalgèbre associative, construite en partant d'un ensemble de L générateurs, $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_L$, et en définissant les produits $\theta_k \theta_j$ tels que:

1. $(\theta_j \theta_k)\theta_l = \theta_j(\theta_k \theta_l), \forall j,k,l = 1,2,\ldots,L$ (associative), (4.2.1)
2. $\theta_j \theta_k = -\theta_k \theta_j$ (donc $\theta_j^2 = 0$), (4.2.2)
3. chaque produit non-nul $\theta_{j_1}\theta_{j_2}\cdots\theta_{j_r}$ de r générateurs est linéairement indépendant des produits avec moins de r générateurs. (4.2.3)

Si à tous les produits non-nuls et indépendants de ces générateurs, on ajoute le générateur 1 vérifiant $1 \cdot 1 = 1$ et $1\theta_j = \theta_j 1 = \theta_j$, alors on obtient une base de 2^L éléments. Donc, si on note

$$\theta_\mu = \theta_{j_1}\theta_{j_2}\cdots\theta_{j_r}, \quad 1 \leq r \leq L, \quad 1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_r \leq L,$$

nous avons un espace vectoriel dont chaque élément est écrit

$$B = \sum_\mu B_\mu \theta_\mu, \quad \text{où} \quad B_\mu \in \Re.$$

La graduation est définie de la façon suivante: chaque élément θ_μ sera considéré pair s'il est formé d'un produit d'un nombre pair des θ_j, ou si $\theta_\mu = 1$, et θ_μ sera impair s'il est formé d'un produit d'un nombre impair des θ_j. L'élément pair (impair) le plus général est une combinaison linéaire arbitraire d'éléments pairs (impairs) de la base.

Cette superalgèbre associative, appelée *algèbre de Grassmann* est notée $\Re B_L$. Les sous-espaces pairs et impairs sont notés $\Re B_{L_0}$ et $\Re B_{L_1}$ respectivement. Nous voulons maintenant introduire le concept de *superespace* $\Re B_L^{m,n}$.

Le superespace $\Re B_L^{m,n}$ est formé de m copies du sous-espace pair $\Re B_{L_0}$ et de n copies du sous-espace impair $\Re B_{L_1}$. Chaque élément $(\mathbf{X};\Theta)$ de $\Re B_L^{m,n}$ est de la forme

$$(\mathbf{X};\Theta) = (X_1,X_2,\ldots,X_m;\Theta_1,\Theta_2,\ldots,\Theta_n), \tag{4.2.4}$$

où $X_i \in \Re B_{L_0}, \quad i = 1,\cdots,m$ et $\Theta_j \in \Re B_{L_1}, \quad j = 1,\cdots,n$. Donc, en général, on a:

$$X_i = \sum_\mu X_i^\mu \theta_\mu, \tag{4.2.5}$$

où seuls les indices μ *pairs* apparaissent, et

$$\Theta_j = \sum_{\mu} \Theta_j^{\mu} \theta_{\mu}, \tag{4.2.6}$$

où seuls les indices μ *impairs* apparaissent. L'espace $\Re B_L^{m,n}$ est donc de dimension $(m+n)2^{L-1}$. En particulier, l'algèbre de Grassmann est équivalente au cas $(m,n) = (1,1)$.

Nous pouvons définir une norme sur $\Re B_L^{m,n}$ comme étant

$$\|(\mathbf{X};\Theta)\| = \sum_{i=1}^{m} \sum_{\mu} |X_i^{\mu}| + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\mu} |\Theta_j^{\mu}|. \tag{4.2.7}$$

Cette norme vérifie évidemment toutes les propriétés nécessaires d'une norme. Il est alors possible de définir la métrique:

$$d_{m,n}\left((\mathbf{X};\Theta),(\mathbf{X}';\Theta')\right) = \|(\mathbf{X};\Theta) - (\mathbf{X}';\Theta')\| \tag{4.2.8}$$

sur l'espace $\Re B_L^{m,n}$. Utilisant cette métrique, nous pouvons alors doter l'espace $\Re B_L^{m,n}$ de la topologie habituelle.

4.3. Fonctions à valeurs de Grassmann

Nous considérons maintenant deux types de fonctions à valeurs de Grassmann. Le premier type consiste en ces fonctions définies sur un espace ouvert V de $\Re^m$. Nous prenons la fonction $\mathcal{F} : V \longrightarrow \Re B_L$ qui associe à chaque point $\mathbf{x} = (x_1,x_2,\ldots,x_m)$ de $\Re^m$ un élément $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ de $\Re B_L$ pouvant être écrit sous la forme

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \sum_{\mu} \mathcal{F}_{\mu}(\mathbf{x})\theta_{\mu}, \tag{4.3.1}$$

où chaque $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ est une fonction $V \to \Re$. Le deuxième type consiste, plus généralement, en les fonctions définies sur un espace ouvert U du superespace $\Re B_L^{m,n}$. La fonction $F : U \longrightarrow \Re B_L$ associe à chaque point $(\mathbf{X},\Theta)$ du superespace un élément de Grassmann de la forme

$$F(\mathbf{X},\Theta) = \sum_{\mu} F_{\mu}(\mathbf{X},\Theta)\theta_{\mu}, \tag{4.3.2}$$

où chaque F_μ est une fonction $U \to \Re$. Une telle fonction est également appelée un *superchamp*. Si $n = 0$ et μ est limité à la valeur pour laquelle $\theta_\mu = 1$, on obtient évidemment le cas précédent. La fonction F est appelée *paire* si les fonctions F_μ sont nulles pour tout μ impair et *impaire* si les F_μ sont nulles pour les μ pairs.

Les notions de continuité et de différentiabilité peuvent également être étendue aux fonctions à valeurs de Grassmann. En utilisant la métrique $d_{m,n}(\cdot,\cdot)$ définie dans la section précédente, nous pouvons généraliser la définition de continuité à une fonction à valeurs de Grassmann, définie dans $\Re B_L^{m,n}$. Une telle fonction $F : U \longrightarrow \Re B_L$ est *continue au point* $(\mathbf{X_0},\Theta_\mathbf{0})$ si $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$:

$$d_{m,n}\left((\mathbf{X},\Theta),(\mathbf{X_0},\Theta_\mathbf{0})\right) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_{1,1}\left(F(\mathbf{X},\Theta),F(\mathbf{X_0},\Theta_\mathbf{0})\right) < \varepsilon. \tag{4.3.3}$$

La différentiation est généralisée de façon suivante.

Définition 4.3.1. *Soit $F : U \longrightarrow \Re B_L$ une fonction définie sur un ouvert U de $\Re B_L^{m,n}$. Supposons qu'il existe m fonctions $\frac{\partial F}{\partial X_j}(j = 1,\ldots,m)$ et n fonctions*

$\frac{\partial F}{\partial \Theta_k}(k = 1, \dots, n)$, *toutes de* $U \rightarrow \Re B_L$ *telles que*

$$F(\mathbf{X}+\mathbf{Y},\Theta+\Psi) = F(\mathbf{X},\Theta) + \sum_{j=1}^{m} Y_j \frac{\partial F(\mathbf{X},\Theta)}{\partial X_j} \tag{4.3.4}$$

$$= + \sum_{k=1}^{n} \Psi_k \frac{\partial F(\mathbf{X},\Theta)}{\partial \Theta_k} + \|(\mathbf{Y},\Psi)\| \eta(\mathbf{Y},\Psi), \tag{4.3.5}$$

où $(\mathbf{X},\Theta)$ *et* $(\mathbf{X}+\mathbf{Y},\Theta+\Psi) \in U$ *et* $\eta : \Re B_L^{m,n} \longrightarrow \Re B_L$ *sont tels que*

$$\|\eta(\mathbf{Y},\Psi)\| \rightarrow 0 \quad si \quad \|(\mathbf{Y},\Psi)\| \rightarrow 0. \tag{4.3.6}$$

Alors, F est dite différentiable *sur U, et les fonctions* $\frac{\partial F}{\partial X_j}$ *et* $\frac{\partial F}{\partial \Theta_k}$ *sont appelées les* dérivées partielles *de F.*

Les dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial X_j}$ sont complètement determinées. Cependant, ce n'est pas tout-à-fait le cas pour une dérivée de la forme $\frac{\partial F}{\partial \Theta_k}$, car la composante proportionnelle à $\theta_1\theta_2 \dots \theta_L$ peut être arbitraire (car multipliée par la variable *impaire* Ψ_k, elle donne toujours zéro).

Notons que si F est paire, alors les $\frac{\partial F}{\partial X_j}$ sont paires et les $\frac{\partial F}{\partial \Theta_k}$ sont impaires. Si F est impaire, c'est le contraire: les $\frac{\partial F}{\partial X_j}$ sont impaires et les $\frac{\partial F}{\partial \Theta_k}$ paires. Les dérivées partielles $\partial/\partial x_j$ sont considérées comme étant des quantités paires, tandis que les dérivées $\partial/\partial\theta_k$ sont considérées impaires et vérifient:

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial \theta_j} = \delta_{ij}, \qquad \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right\} = 0. \tag{4.3.7}$$

A partir de la définition, on peut déterminer les dérivées successives de $F(\mathbf{X},\Theta)$. Si toutes les dérivées de F existent sur un ouvert U de $\Re B_L^{m,n}$, alors la fonction est dite *superanalytique* sur U. Par ailleurs, nous avons encore la définition suivante:

Définition 4.3.2. *Une* supervariété superanalytique Y *sur* $\Re B_L$ *est définie par un espace topologique de Hausdorff avec un ensemble de "cartes"* $\{(U_\alpha,\psi_\alpha)\}$ *telles que:*

- $\bigcup U_\alpha = Y$,
- *chaque* ψ_α *est un homéomorphisme de* U_α *sur un ouvert de* $\Re B_L^{m,n}$,
- *les fonctions* $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : \psi_\beta(U_\alpha \bigcap U_\beta) \to \psi_\alpha(U_\alpha \bigcap U_\beta)$ *sont superanalytiques.*

4.4. Superalgèbres et supergroupes de Lie

Définition 4.4.1. *Soit* V *un espace vectoriel gradué,* V_0 *et* V_1 *ses sous-ensembles pairs et impairs, de dimension* m *et* n *respectivement* $(m,n \geq 0, m+n \geq 1)$. *Si* $\forall a,b \in V$, *il existe un commutateur (supercommutateur)* $[a,b]$ *tel que*

- *(i)* $\forall a,b \in V$, $[a,b] \in V$,
- *(ii)* $\forall a,b \in V$, $\forall \alpha,\beta \in \Re$, $[\alpha a + \beta b, c] = \alpha\,[a,c] + \beta\,[b,c]$,
- *(iii)* *si* a *et* b *sont homogènes, alors* $[a,b]$ *est homogène de degré* $(deg\ a + deg\ b) mod\ 2$. *Donc,* $[a,b]$ *est* pair *si* a *et* b *sont tous deux pairs ou tous deux impairs, et* impairs *si un est pair et l'autre impair,*
- *(iv)* *si* a *et* b *sont homogènes, alors*

$$[b,a] = -(-1)^{(deg\ a)(deg\ b)}[a,b], \tag{4.4.1}$$

– *(v)* *si a, b, et c sont homogènes, alors*

$$[a,[b,c]]\,(-1)^{(deg\ a)(deg\ c)} + [b,[c,a]]\,(-1)^{(deg\ b)(deg\ a)} + [c,[a,b]]\,(-1)^{(deg\ c)(deg\ b)} = 0 \tag{4.4.2}$$

(identité de Jacobi),

alors V est dite une superalgèbre de Lie *de dimension paire m et de dimension impaire n, et on note:* $dim(V) = (m|n)$.

En particulier, une superalgèbre de Lie peut être construite à partir d'une superalgèbre associative en définissant

$$[a,b] = ab - (-1)^{(deg\ a)(deg\ b)}ba. \tag{4.4.3}$$

Définition 4.4.2. *Un* supergroupe de Lie *de dimension $(m|n)$ est un ensemble H qui est un groupe* et *une supervariété superanalytique de dim $(m|n)$, où l'opération*

$$H\times\ H \to\ H: \qquad (h_1,h_2) \mapsto\ h_1 \cdot h_2^{-1}, \tag{4.4.4}$$

est superanalytique.

4.5. Equations différentielles et supersymétries

Il est possible, en général, d'étendre la méthode de calcul des symétries décrite dans le chapitre 2 à un système d'équations différentielles à variables de Grassmann. En effet, nous considérons maintenant un système de la forme:

$$\Delta_\nu(\mathbf{X},\mathbf{\Theta},\mathbf{A}^{(k_1)},\mathbf{Q}^{(k_2)}) = 0, \qquad \nu = 1,\ldots,s, \tag{4.5.1}$$

où

$$\begin{aligned}
\mathbf{X} &= \{x_1,x_2,\ldots,x_m\}\text{sont les variables indépendantes paires,}\\
\mathbf{\Theta} &= \{\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n\}\text{sont les variables indépendantes impaires,}\\
\mathbf{A} &= \{A^1,A^2,\ldots,A^q\}\text{sont les variables dépendantes paires,}\\
\mathbf{Q} &= \{Q^1,Q^2,\ldots,Q^p\}\text{sont les variables dépendantes impaires.}
\end{aligned}$$

Les transformations sur les variables indépendantes et dépendantes (mais pas leurs dérivées) sont alors générées par des champs de vecteurs de la forme:

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{m} \Xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} \Gamma^j \frac{\partial}{\partial \theta_j} + \sum_{r=1}^{q} \Phi^r \frac{\partial}{\partial A^r} + \sum_{l=1}^{p} \Lambda^l \frac{\partial}{\partial Q^l}, \tag{4.5.2}$$

où les fonctions Ξ^i, Γ^j, Φ^r et Λ^l dépendent de $(\mathbf{X},\mathbf{\Theta},\mathbf{A}^{(k_1)},\mathbf{Q}^{(k_2)})$. Les générateurs de symétries sont calculés de façon analogue à ceux du cas ordinaire, mais avec la complication qu'il faut tenir compte d'un changement de signe lorsque deux variables de Grassmann impaires sont interverties: $\theta_a\theta_b = -\theta_b\theta_a$. Les dérivées par rapport à ces variables, $\partial_{\theta_1},\partial_{\theta_2},\ldots,\partial_{\theta_j}$ doivent être considérées impaires également. Par exemple:

$$\partial_{\theta_1}(\theta_2\theta_1) = -\theta_2\partial_{\theta_1}(\theta_1) = -\theta_2.$$

Les générateurs que nous obtiendrons pourront donc être pairs ou impairs et formeront une superalgèbre de Lie.

Une *supersymétrie* est une symétrie qui relie les variables paires et impaires de façon non-triviale. Ces transformations sont générées par des générateurs impairs de symétries et les charges conservées obtenues par le théorème de

Noether le seront également.

Les commutateurs entre les différents générateurs qui forment la structure de la superalgèbre sont définis comme étant:

$$\begin{aligned} [B_1,B_2] &= B_1B_2 - B_2B_1, \text{ si } B_1 \text{ et } B_2 \text{ sont pairs,} \\ [B,Q] &= BQ - QB, \text{ si } B \text{ est pair et } Q \text{ est impair,} \\ \{Q_1,Q_2\} &= Q_1Q_2 + Q_2Q_1, \text{ si } Q_1 \text{ et } Q_2 \text{ sont impairs.} \end{aligned} \tag{4.5.3}$$

Le crochet de Poisson doit également être généralisé pour les fonctions à valeurs de Grassmann [Casalbuoni 1,2]. Si nous définissons les conjugués canoniques:

$$p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \qquad \pi^\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_\alpha}, \tag{4.5.4}$$

le crochet prendra la forme

$$\{A,B\} = \left(\frac{\partial B}{\partial p^i}\frac{\partial A}{\partial q_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p^i}\right) - \left(\frac{\partial B}{\partial \pi^\alpha}\frac{\partial A}{\partial \theta_\alpha} + \frac{\partial B}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial A}{\partial \pi^\alpha}\right). \tag{4.5.5}$$

Nous aurons donc les propriétés suivantes. Si E, E_1, E_2, E_3 sont des fonctions *paires* et O, O_1, O_2, O_3 des fonctions *impaires*, alors le cas pair-pair nous donne:

$$\begin{aligned} \{E_1,E_2\} &= -\{E_2,E_1\}, \\ \{E_1,E_2E_3\} &= E_2\{E_1,E_3\} + \{E_1,E_2\}E_3, \\ \{E_1,\{E_2,E_3\}\} &+ \{E_2,\{E_3,E_1\}\} + \{E_3,\{E_1,E_2\}\} = 0. \end{aligned} \tag{4.5.6}$$

Le cas impair-pair nous donne:

$$\begin{aligned}
\{E,O\} &= -\{O,E\}, \\
\{O,E_1E_2\} &= E_1\{O,E_2\} + \{O,E_1\}E_2, \\
\{O_1O_2,E\} &= O_1\{O_2,E\} + \{O_1,E\}O_2, \\
\{OE_1,E_2\} &= O\{E_1,E_2\} + \{O,E_2\}E_1, \\
\{E_1,\{E_2,O\}\} &+ \{E_2,\{O,E_1\}\} + \{O,\{E_1,E_2\}\} = 0.
\end{aligned} \tag{4.5.7}$$

Le cas impair-impair nous donne:

$$\begin{aligned}
\{O_1,O_2\} &= \{O_2,O_1\}, \\
\{O_1O_2,O_3\} &= O_1\{O_2,O_3\} - \{O_1,O_3\}O_2, \\
\{EO_1,O_2\} &= E\{O_1,O_2\} - \{E,O_2\}O_1, \\
\{E,\{O_1,O_2\}\} &+ \{O_1,\{O_2,E\}\} - \{O_2,\{E,O_1\}\} = 0, \\
\{O_1,\{O_2,O_3\}\} &+ \{O_2,\{O_3,O_1\}\} + \{O_3,\{O_1,O_2\}\} = 0.
\end{aligned} \tag{4.5.8}$$

4.6. Intégration des variables de Grassmann

Pour formuler une action sur un superespace, il est nécessaire de définir la notion d'intégration par rapport à des variables prenant leurs valeurs dans l'algèbre de Grassmann $\Re B_L$. Pour cela, nous utilisons la définition suivante:

Définition 4.6.1. *Pour une variable de Grassmann* impaire θ, *on a*

$$\int d\theta = 0, \qquad \int \theta \, d\theta = 1. \tag{4.6.1}$$

Pour plusieurs variables impaires, θ^1, θ^2, ..., θ^n, on a

$$\int \theta^i \, d\theta^j = \delta^{ij}, \qquad \int d\theta^j = 0. \tag{4.6.2}$$

L'intégrale est donc une généralisation de l'intégrale de Riemann sur les coordonnées ordinaires.

Une fonction arbitraire f avec valeur dans $\Re B_L$ peut être écrite sous la forme:

$$f = a + b\theta,$$

où a, $b \in \Re B_L$, mais sont indépendants de θ ce qui donne:

$$\int f d\theta = b.$$

L'intégrale $\int f d\theta$ représente donc une fonction qui à chaque élément de l'espace des fonctions dans $\Re B_L$ associe un élément du sous-espace de $\Re B_L$ indépendant de θ. Cette fonction a les propriétés suivantes:

1. linéarité: $$\int \sum_i c_i f_i(\theta) d\theta = \sum_i c_i \int f_i(\theta) d\theta, \quad c_i \in \Re B_L, \tag{4.6.3}$$

2. invariance sous translation: $$\int f(\theta + \varepsilon) d\theta = \int f(\theta) d\theta, \quad \varepsilon \text{ constant.} \tag{4.6.4}$$

Nous définissons finalement la version Grassmann du δ de Dirac:

$$\int f(\theta)\delta(\theta) d\theta = f(0). \tag{4.6.5}$$

Donc, pour une seule variable θ, on a $\delta(\theta) = \theta$, $\int \delta(\theta) d\theta = 1$, $\int \theta\delta(\theta) d\theta = 0$. Pour plusieurs variables, θ^1, θ^2, ..., θ^n, on a $\delta^{(n)}(\theta) = \delta(\theta^n)\delta(\theta^{n-1}) \cdots \delta(\theta^1) = \theta^n\theta^{n-1} \cdots \theta^1$.

Chapitre 5

MODÈLES SUPERSYMÉTRIQUES

Dans ce chapitre, nous présentons des exemples de modèles supersymétriques tirés du livre de Freund [Freund], incluant le superpoint matériel et une théorie supersymétrique de champs bosoniques et fermioniques. Dans ce second exemple, nous introduisons les spineurs de Majorana que nous utiliserons également dans les sections (5.3) et (5.4). Nous examinons ensuite un modèle proposé par R. Jackiw [Jackiw 2,4] pour supersymétriser les équations du gaz de Chaplygin étudiées dans le chapitre 3. Les symétries et supersymétries de ce modèle sont analysées. L'association entre les charges conservées impaires et les transformations supersymétriques finies et infinitésimales sur les coordonnées représente une contribution originale de ce chapitre.

5.1. Mécanique du superpoint matériel

En mécanique classique, nous avons une théorie de champs en une dimension, représentée par le temps t. Les coordonnées spatiales x^1, x^2, $\ldots$, x^n jouent le rôle de champs $x^1(t)$, $x^2(t)$, $\ldots$, $x^n(t)$ fonctions de la variable t. Pour supersymétriser le système, on introduit un superespace de dimension $(1|1)$, avec les variables t, τ, où $t \in B_{L_0}$ est une variable de Grassmann *paire* et $\tau \in B_{L_1}$ une variable *impaire*.

La superparticule (non-relativiste) peut donc être représentée par les n superchamps: $X^1(t,\tau)$, $\cdots$, $X^n(t,\tau)$, où

$$X^a(t,\tau) = x^a(t) + \theta^a(t)\tau, \tag{5.1.1}$$

avec $x^a \in B_{L_0}$ et $\theta^a \in B_{L_1}$ qui sont des fonctions de t seulement. Le générateur de supersymétrie est défini comme:

$$Q = i\tau\partial_t - \partial_\tau, \tag{5.1.2}$$

qui est tel que:

$$[Q,Q]_+ = QQ + QQ = -2H, \qquad [Q,H] = 0,$$

avec $H = i\partial_t$. Ce générateur Q correspond en fait à une translation, de paramètre impair α, du superchamp (5.1.1). Elle s'écrit:

$$X'^a = X^a + \delta X^a, \text{ où } \quad \delta X^a = \alpha\theta^a + i\alpha\tau\partial_t x^a = \alpha Q x^a. \tag{5.1.3}$$

On définit également l'opérateur:

$$D = i\tau\partial_t + \partial_\tau, \tag{5.1.4}$$

appelé *dérivée covariante*, qui est tel que

$$[Q,D]_+ = 0. \tag{5.1.5}$$

Grâce à cette dernière propriété, il est possible de formuler une action supersymétrique:

$$S_1 = \int_{t_i}^{t_f} dt \int d\tau \mathcal{L}_1, \tag{5.1.6}$$

$$\text{où } \mathcal{L}_1 = \frac{1}{2} DX^a D(DX^a). \tag{5.1.7}$$

En effet, considérons la transformation supersymétrique (5.1.3) ci-dessus. Comme (5.1.5) implique que $[\alpha Q, D]_- = 0$, on peut écrire:

$$\begin{aligned} \delta(DX^a) &= D(X^a + \delta X^a) - D(X^a), \\ &= \alpha Q(DX^a). \end{aligned} \tag{5.1.8}$$

Il est donc facile de montrer que

$$\begin{aligned} \delta(\mathcal{L}_1) &= \alpha Q(\mathcal{L}_1), \\ &= \underbrace{\alpha i \tau \partial_t \mathcal{L}_1}_{1} - \underbrace{\alpha \partial_\tau \mathcal{L}_1}_{2}. \end{aligned} \tag{5.1.9}$$

Le premier terme est une dérivée exacte par rapport au temps et donc ne contribue pas à la variation de l'action. Le deuxième terme $-\alpha\partial_\tau\mathcal{L}_1$ est indépendant de τ, car $\mathcal{L}_1$ est au plus linéaire en τ. L'intégrale $\int d\tau$ annule ce terme. Donc, puisque le générateur supersymétrique Q laisse invariante l'action S_1, cette dernière est supersymétrique.

Explicitons à présent la densité lagrangienne $\mathcal{L}_1$ définie par l'équation (5.1.7) comme fonction des champs x^a et θ^a, pour voir que nous obtenons une généralisation immédiate de la mécanique du point matériel. En effet, on a

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{2}\left(i\dot{x}^a\theta^a + \tau(\dot{x}^a\dot{x}^a + i\theta^a\dot{\theta}^a)\right)$$

et l'intégration par τ annule le premier terme. L'action devient

$$S_1 = \frac{1}{2}\int dt\left(\dot{x}^a\dot{x}^a + i\theta^a\dot{\theta}^a\right), \tag{5.1.10}$$

où on reconnait le terme d'énergie cinétique $\dot{x}^a\dot{x}^a$ habituel pour les coordonnées paires. Le second terme, $i\theta^a\dot{\theta}^a$, correspond aux degrés de liberté additionnels, à valeurs de Grassmann. Par les équations d'Euler-Lagrange, on obtient:

$$\ddot{x}^a = 0, \qquad \dot{\theta}^a = 0 \qquad . \tag{5.1.11}$$

Ces équations représentent clairement le mouvement d'une particule libre dans l'espace des x^a, avec l'addition de coordonnées θ^a à valeurs constantes.

On voudrait maintenant considérer le cas plus général représenté par la présence d'une interaction. Dans ce cas, il n'est pas possible d'ajouter un terme d'interaction général $V(X^a)$ pour supersymétriser le terme d'interaction habituel $V(x)$ car il devrait s'écrire:

$$V(X) = V(x) + \frac{\partial V}{\partial x^a}|_{\tau=0}\theta^a\tau.$$

Le terme $V(x)$ disparaît donc lorsqu'on intègre par rapport à τ.

Ce problème peut être résolu en prenant *deux* variables impaires τ_1, τ_2 au lieu d'une seule. On parlera dés lors d'une théorie supersymétrique en 2 dimensions dans laquelle nous définissons les superchamps comme:

$$X^a(t,\tau_1,\tau_2) = x^a(t) + \theta_1^a(t)\tau_1 + \theta_2^a(t)\tau_2 + iF^a(t)\tau_1\tau_2. \tag{5.1.12}$$

Les générateurs de supersymétries sont maintenant au nombre de deux avec

$$Q_\alpha = i\tau_\alpha\partial_t - \partial_{\tau_\alpha}, \quad \alpha = 1,2, \tag{5.1.13}$$

et les dérivées covariantes sont

$$D_\alpha = i\tau_\alpha\partial_t + \partial_{\tau_\alpha}. \tag{5.1.14}$$

Il est alors possible de formuler l'action supersymétrique sous la forme:

$$S_2 = -\int dt d\tau_2 d\tau_1 \left(\frac{1}{4}\varepsilon_{\alpha\beta} D_\alpha X^a D_\beta X^a\right), \tag{5.1.15}$$

$$= \int dt \frac{1}{2}(\dot{x}^a \dot{x}^a + i\theta^a_\alpha \dot{\theta}^a_\alpha + F^a F^a). \tag{5.1.16}$$

Les équations du mouvement sont:

$$\ddot{x}^a = 0, \qquad \dot{\theta}^a = 0, \qquad F^a = 0 \qquad . \tag{5.1.17}$$

Ajoutons maintenant le terme d'interaction

$$S_{int} = i\int dt d\tau_2 d\tau_1 W[X^a(t,\tau_1,\tau_2)], \tag{5.1.18}$$

$$= -\int dt \left[\frac{\partial W}{\partial x^a} F^a - i\frac{\partial^2 W}{\partial x^b \partial x^a}\theta^a_1 \theta^b_2\right]. \tag{5.1.19}$$

Les équations pour les champs auxiliaires F^a sont à présent moins triviales:

$$F^a = \frac{\partial W(x)}{\partial x^a}, \tag{5.1.20}$$

et l'action totale a la forme

$$S = \int dt \left[\frac{1}{2}\dot{x}^a \dot{x}^a + \frac{1}{2} i\theta^a_\alpha \dot{\theta}^a_\alpha - V(x) + i\frac{\partial^2 W}{\partial x^b \partial x^a}\theta^a_1 \theta^b_2\right], \tag{5.1.21}$$

où le potentiel $V(x)$ est:

$$V(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial x^a}\frac{\partial W}{\partial x^a}. \tag{5.1.22}$$

5.2. Théorie supersymétrique des champs

Nous considérons maintenant une théorie de champs en deux dimensions, avec une dimension spatiale x et la dimension temporelle t. Cependant, avant de construire le modèle, il est nécessaire de définir les spineurs de Majorana, ainsi que certains concepts additionnels. Nous commençons par définir les matrices γ^μ de Dirac pour l'espace-temps à deux dimensions à l'aide des matrices σ^i de Pauli [Peskin]:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5.2.1}$$

En général, en n dimensions, on cherche n matrices γ^μ vérifiant les relations d'anticommutation:

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \times \mathbf{1}_{n\times n}, \tag{5.2.2}$$

où $g^{00} = -1, g^{ii} = 1$ pour $i = 1,2,\dots$ et $g^{\mu\nu} = 0$ pour $\mu \neq \nu$. Pour notre cas, ces relations sont satisfaites par les matrices:

$$\gamma^0 = i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \gamma^1 = \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.2.3}$$

En utilisant ces matrices, il est possible [Peskin] de construire une représentation du groupe de Lorentz formée des éléments $S^{\mu\nu} = \frac{1}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]$. Les éléments de l'espace de représentation sont des champs à plusieurs composantes, $\psi = (\psi_1,\psi_2,\dots,\psi_m)^t$, que nous appelons *spineurs.* Dans le cas d'une représentation réelle, nous obtenons des *spineurs de Majorana* (où $\psi_i^* = \psi_i$) [Freund, West].

Pour notre théorie, nous utilisons comme variables indépendantes les coordonnées paires x et t, ainsi que le spineur de Majorana $\theta = (\theta_1,\theta_2)^t$ dont les composantes sont des variables de Grassmann (impaires). Nous utilisons la notation $\bar{\theta} = (\theta^*)^t\gamma^0 = \theta^t\gamma^0$, car pour un spineur de Majorana $\theta^* = \theta$. Nous obtenons alors les relations suivantes pour nos spineurs de Majorana:

$$\bar{\theta} = (-\theta_2,\theta_1), \qquad \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta = \theta_1\theta_2, \qquad \bar{\theta}_\alpha\phi_\alpha\theta_\beta = -\frac{1}{2}\bar{\theta}_\alpha\theta_\alpha\phi_\beta, \quad \alpha = 1{,}2, \tag{5.2.4}$$

où la dernière relation est appelée le réarrangement de Fierz pour deux spineurs θ et ϕ.

La forme la plus générale de notre superchamp admet trois types de termes dans son expansion:

$$\Phi(x,\theta) = A(x) + i\bar{\theta}\psi(x) + \frac{1}{2}i\bar{\theta}\theta F(x), \tag{5.2.5}$$

où les fonctions $A(x)$ et $F(x)$ sont des scalaires et $\psi = (\psi_1,\psi_2)^t$ est un spineur. En effet, tous les termes d'ordre supérieur en θ sont nuls. Les générateurs de supersymétrie sont donnés par:

$$Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^\alpha} - i(\gamma^\mu\theta)_\alpha\partial_\mu. \tag{5.2.6}$$

Sous ces transformations de supersymétrie, le superchamp Φ se transforme donc en $\Phi' = \Phi + \delta\Phi$ avec:

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= \bar{\alpha}Q\Phi, \\ &= -i\bar{\alpha}\gamma^\mu\theta\partial_\mu A + i\bar{\alpha}\psi + \bar{\alpha}\gamma^\mu\theta\bar{\theta}\partial_\mu\psi + i\bar{\alpha}\theta F. \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

Puisque l'on a aussi $\delta\Phi = \delta A + i\bar{\theta}\delta\psi + \frac{1}{2}i\bar{\theta}\theta\delta F$, il suit que les transformations sur les champs coefficients sont données par:

$$\delta A = i\bar{\alpha}\psi, \tag{5.2.8}$$

$$\delta\psi = (\gamma^\mu\partial_\mu A + F)\alpha, \tag{5.2.9}$$

$$\delta F = i\bar{\alpha}\gamma^\mu\partial_\mu\psi. \tag{5.2.10}$$

où nous avons utilisé le réarrangement de Fierz, ainsi que les relations de Majorana: $C = \gamma^0 = i\sigma^2$, $C^t = C^{-1} = -C$ et $C(\gamma^\nu)^t C^{-1} = -\gamma^\nu$.

La dérivée covariante devient l'opérateur spinoriel:

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\alpha} + i(\gamma^\mu \theta)_\alpha \partial_\mu, \tag{5.2.11}$$

tel que $[D_\alpha, Q_\beta]_+ = 0$ et $[\bar{D}^\alpha D_\alpha, Q_\beta] = 0$. Nous considérons maintenant la densité lagrangienne:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{4}\Phi^t \bar{D} D \Phi, \tag{5.2.12}$$

qui est, vu son expression, associée à une action supersymétrique. Nous pouvons l'expliciter en commençant par écrire:

$$\begin{aligned}
\bar{D}D\Phi &= D_\alpha C_{\alpha\beta} D_\beta \Phi, \\
&= -C_{\beta\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\alpha} + i(\gamma^\mu\theta)_\alpha \partial_\mu\right]\left[\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\beta} + i(\gamma^\nu\theta)_\beta \partial_\nu\right](A + i\bar{\theta}\psi + \frac{1}{2} i\bar{\theta}\theta F), \\
&= 2\left(-iF + \bar{\theta}\gamma^\mu \partial_\mu \psi + \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta(-\partial_0^2 + \partial_1^2)A\right).
\end{aligned} \tag{5.2.13}$$

En multipliant à gauche par Φ^t, nous obtenons l'expression suivante pour le coefficient de $\bar{\theta}\theta$ de $\mathcal{L}_0$ (le seul qui ne sera pas annulé par l'intégration en θ_1 et θ_2):

$$\frac{1}{2}F^2 + \frac{1}{2}A(\partial_\mu \partial^\mu A) - \frac{1}{2}\bar{\psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi.$$

L'action de la théorie sera donc exprimée, à un terme de surface près, par:

$$S_0 = -\frac{1}{2}\int d^2x \left[(\partial_\mu A)(\partial^\mu A) + i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - F^2\right]. \tag{5.2.14}$$

Les équations d'Euler-Lagrange nous donnent:

$$\partial_\mu \partial^\mu A = 0, \qquad i\gamma^\mu \partial_\mu \psi = 0, \qquad F = 0. \tag{5.2.15}$$

Nous reconnaissons l'équation de Klein-Gordon sans masse pour le scalaire bosonique A, ainsi que l'équation de Dirac sans masse pour le spineur fermionique ψ. Le troisième champ F est un champ auxiliaire qui disparait automatiquement lorsque les deux autres équations sont respectées.

5.3. Modèle supersymétrique du gaz de Chaplygin

Un modèle fut proposé récemment par R. Jackiw et A. Polychronakos [Jackiw 2,4] pour supersymétriser le gaz de Chaplygin introduit au chapitre 1 et dont les symétries ont été discutées dans le chapitre 3. Reprenons dés lors la construction de ce modèle.

Nous avons au chapitre 1 donné les équations du gaz de Chaplygin dans le cas d'un fluide tel que sa vorticité $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ est nulle. Dans le cas où la vorticité est non-nulle, la formulation est moins directe. Si on écrit maintenant la vitesse sous la forme de la décomposition de Clebsch [Jackiw3, Lin]:

$$\mathbf{v} = \nabla\theta + \alpha\nabla\beta, \tag{5.3.1}$$

la vorticité $\boldsymbol{\omega}$ est non-nulle et égale à $\nabla\alpha \times \nabla\beta$. Une algèbre canonique hamiltonienne peut alors être construite à l'aide du lagrangien:

$$L = \int dr \left[-\rho(\dot{\theta} + \alpha\dot{\beta}) - \frac{1}{2}\rho v^2 - V(\rho) \right] \tag{5.3.2}$$

Il est évident que les variables θ et ρ forment toujours une paire canonique, mais nous avons également la paire formée des variables β et $\rho\alpha$. Les quantités α et β sont appelées *potentiels de Gauss.*

Pour le modèle de Jackiw et Polychronakos cependant, nous n'utiliserons que deux dimensions spatiales x et y au lieu de trois, ainsi que la variable temporelle t. Ce caractère "planaire" du modèle est rendu nécessaire par le fait qu'il est dérivé d'une théorie de Nambu-Goto d'une supermembrane en (3+1) dimensions [Jackiw 2,3,4]. Les potentiels de Gauss α et β sont remplacés par des variables de Grassmann $\psi = (\psi_1, \psi_2)^t$ qui forment un spineur de Majorana à deux composantes. Suivant la notation de Jackiw, nous ne distinguerons pas entre ψ et ψ^t. Le contexte dictera l'interprétation exacte du symbole. En particulier si $\phi = (\phi_1, \phi_2)^t$ et $\chi = (\chi_1, \chi_2)^t$ sont des spineurs, on écrira:

$$\phi\chi \equiv \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = \phi_1\chi_1 + \phi_2\chi_2.$$

La vitesse et la vorticité (en 2 dimensions) sont maintenant données respectivement par:

$$\mathbf{v} = \nabla\theta - \frac{1}{2}\psi_a \nabla \psi_a, \quad \omega = -\partial_x \psi_\alpha \partial_y \psi_\alpha. \tag{5.3.3}$$

Il est naturel de décrire la vorticité par des variables de Grassmann, car le mouvement de vorticité est associé à un moment angulaire semblable au spin, décrit en physique pseudoclassique par des variables de Grassmann [Freund].

L'équation (5.3.2) décrivant le lagrangien du système devient alors:

$$L = \int dr \left[-\rho(\dot{\theta} - \frac{1}{2}\psi_a \dot{\psi}_a) - \frac{1}{2}\rho v^2 - V(\rho) \right]. \tag{5.3.4}$$

Les variables de Grassmann impaires sont ici présentes explicitement ainsi que dans le terme cinétique $\frac{1}{2}\rho v^2$. En déterminant les moments conjugués des variables θ et $\psi_a(a = 1{,}2)$ à l'aide du lagrangien, nous déduisons que θ et ρ restent une paire canonique, et que les variables ψ_a et $\rho\psi_a$ forment une paire additionnelle.

On a donc:

$$\begin{aligned}
\{\theta(\mathbf{r}),\rho(\mathbf{r}')\} &= \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), && (5.3.5)\\
\{\rho(\mathbf{r}),\psi_a(\mathbf{r}')\} &= 0, && (5.3.6)\\
\{\theta(\mathbf{r}),\psi_a(\mathbf{r}')\} &= -\frac{1}{2\rho(\mathbf{r})}\psi_a(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), && (5.3.7)\\
\{\psi_a(\mathbf{r}),\psi_b(\mathbf{r}')\} &= -\frac{\delta_{ab}}{\rho(\mathbf{r})}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), && (5.3.8)\\
\{\mathbf{v}(\mathbf{r}),\psi_a(\mathbf{r}')\} &= -\frac{\nabla\psi_a(\mathbf{r})}{\rho(\mathbf{r})}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), && (5.3.9)\\
\{\mathbf{v}(\mathbf{r}),\theta(\mathbf{r}')\} &= -\frac{\psi(\mathbf{r})\nabla\psi(\mathbf{r})}{2\rho(\mathbf{r})}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), && (5.3.10)\\
\{\mathbf{v}(\mathbf{r}),\rho(\mathbf{r}')\} &= \nabla\left(\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\right), && (5.3.11)\\
\{\mathbf{v}^i(\mathbf{r}),\mathbf{v}^j(\mathbf{r}')\} &= \frac{\partial_i\psi_\alpha(\mathbf{r})\partial_j\psi_\alpha(\mathbf{r})}{\rho(\mathbf{r})}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). && (5.3.12)
\end{aligned}$$

Jusqu'à présent, les variables de Grassmann n'ont été utilisées que pour paramétriser la vitesse et servir de variables canoniques. Il est possible cependant d'ajouter à la densité lagrangienne un terme composé de variables de Grassmann, tel que le modèle devienne supersymétrique. Ce terme, identifié par Jackiw et al. prend la forme:

$$-\frac{\sqrt{2\lambda}}{2}\psi\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\psi, \tag{5.3.13}$$

où $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha^1,\alpha^2)$ avec:

$$\alpha^1=\sigma^1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \qquad \alpha^2=\sigma^3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{5.3.14}$$

Ce terme est associé à l'élément de spin présent dans le moment angulaire du système, comme nous le verrons plus tard. Nous obtenons finalement la densité lagrangienne:

$$\mathcal{L} = -\rho\left(\dot{\theta} - \frac{1}{2}\psi\dot{\psi}\right) - \frac{1}{2}\rho\left(\nabla\theta - \frac{1}{2}\psi\nabla\psi\right)^2 - \frac{\lambda}{\rho} - \frac{\sqrt{2\lambda}}{2}\psi\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\psi. \qquad (5.3.15)$$

Les équations de mouvement prennent alors la forme:

$$\begin{aligned}
\dot{\rho} &= -\nabla\cdot(\rho\mathbf{v}), && (5.3.16)\\
\dot{\theta} &= -\mathbf{v}\cdot\nabla\theta + \frac{1}{2}v^2 + \frac{\lambda}{\rho^2} + \frac{\sqrt{2\lambda}}{2\rho}\psi\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\psi, && (5.3.17)\\
\dot{\psi}_a &= -(\mathbf{v}\cdot\nabla\psi)_a + \frac{\sqrt{2\lambda}}{\rho}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\psi)_a. && (5.3.18)
\end{aligned}$$

L'équation de continuité (5.3.16) est essentiellement inchangée, à part la présence de variables de Grassmann à l'intérieur de la vitesse. L'équation de force d'Euler (5.3.17) reçoit une contribution additionnelle causée par l'interaction avec le spin. Finalement, nous obtenons deux nouvelles équations non-homogènes pour les variables de Grassmann ψ_a.

5.4. Symétries et supersymétries du modèle de Jackiw

On retrouve, dans le modèle généralisé de Jackiw, les symétries du gaz de Chaplygin déterminées dans le chapitre 3. Cependant, nous avons maintenant les fonctions additionnelles, ψ_1 et ψ_2, ainsi qu'une dimension spatiale y de plus, ce qui rend nécessaire certaines modifications dans les transformations.

Le modèle considéré est supersymétrique dans le sens suivant [Jackiw 2,4]. Il a été montré que ce modèle admettait les quantités conservées:

$$Q_a = \int d^2r\left[\rho\mathbf{v}\cdot(\boldsymbol{\alpha}_{ab}\psi_b) + \sqrt{2\lambda}\psi_a\right], \qquad \text{où} \quad a = 1{,}2. \qquad (5.4.1)$$

Chacune de ces quantités (impaires) correspond à une transformation supersymétrique qui mélange les variables paires et impaires. Pour trouver leurs formes exactes ainsi que leurs générateurs infinitésimaux, nous devons intervertir l'ordre des opérations utilisés au chapitre 3. Cela signifie que nous devons premièrement obtenir la relation entre les solutions originales du système: ρ, θ, ψ_1, ψ_2, et les solutions modifiées par la transformation: $\rho+\delta\rho$, $\theta+\delta\theta$, $\psi_1+\delta\psi_1$, $\psi_2+\delta\psi_2$. Cette première étape a déja été accomplie par Jackiw de la façon suivante [Jackiw 2,4]. Si, nous contractons les charges Q_1, Q_2 avec un paramètre constant spinoriel $\eta = (\eta^1,\eta^2)$ à valeur de Grassmann impaire, nous obtenons la charge conservée bosonique:

$$Q = \eta^a Q_a = \int d^2r \left[\rho\mathbf{v} \cdot (\eta\boldsymbol{\alpha}\psi) + \sqrt{2\lambda}\eta\psi\right]. \tag{5.4.2}$$

Chacun des champs $A = \rho,\theta,\psi_1,\psi_2$ sera modifié par la transformation Q en une nouvelle solution $A+\delta A$, où $\delta A = \{Q,A\}$. Nous pouvons alors utiliser les crochets élémentaires entre les variables (5.3.5) - (5.3.12) pour obtenir:

$$\begin{aligned}
\delta\rho &= -\nabla\cdot\rho(\eta\boldsymbol{\alpha}\psi),\\
\delta\theta &= -\frac{1}{2}(\eta\boldsymbol{\alpha}\psi)\cdot\nabla\theta - \frac{1}{4}(\eta\boldsymbol{\alpha}\psi)\cdot\psi\nabla\psi + \frac{\sqrt{2\lambda}}{2\rho}\eta\psi,\\
\delta\psi &= -(\eta\boldsymbol{\alpha}\psi)\cdot\nabla\psi - \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\alpha}\eta - \frac{\sqrt{2\lambda}}{\rho}\eta.
\end{aligned} \tag{5.4.3}$$

La seconde étape consiste maintenant à identifier la transformation correspondante sur les variables indépendantes x,y,t et dépendantes $\rho,\theta,\psi_1,\psi_2$. En examinant les équations (5.4.3), nous remarquons que les variations pour ρ et θ

peuvent être réécrites sous la forme:

$$\begin{aligned}
\delta\rho &= -(\eta\boldsymbol{\alpha}\psi)\cdot\nabla\rho - \rho(\eta\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\psi),\\
\delta\theta &= -(\eta\boldsymbol{\alpha}\psi)\cdot\nabla\theta + \frac{1}{2}(\eta\boldsymbol{\alpha}\psi)\cdot\mathbf{v} + \frac{\sqrt{2\lambda}}{2\rho}\eta\psi,
\end{aligned}$$

Nous observons que sous cette forme, pour chaque δA, le coefficient de ∇A est $(\eta\boldsymbol{\alpha}\psi)$. Cela nous permet d'identifier Q à la transformation:

$$x' = x + \eta\alpha_1\psi, \qquad y' = y + \eta\alpha_2\psi, \qquad t' = t,$$

$$\begin{aligned}
\rho' &= \rho - (\eta\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\psi)\rho,\\
\theta' &= \theta + \frac{1}{2}(\eta\boldsymbol{\alpha}\psi)\cdot\mathbf{v} + \frac{\sqrt{2\lambda}}{2\rho}\eta\psi,\\
\psi' &= \psi - (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\alpha}\eta) - \frac{\sqrt{2\lambda}}{\rho}\eta. \qquad (5.4.4)
\end{aligned}$$

Nous voyons clairement que cette transformation est supersymétrique. En effet, elle mélange les variables paires x,y,ρ,θ avec les variables impaires ψ_1 et ψ_2.

Nous déterminons finalement les générateurs de supersymétries correspondant aux charges Q_1 et Q_2. Ceux-ci sont obtenus en dérivant la transformation (5.4.4) par rapport aux paramètres (impairs) η^1 et η^2. Nous obtenons:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \psi_2\frac{\partial}{\partial x} + \psi_1\frac{\partial}{\partial y} - \rho(\psi_{2x}+\psi_{1y})\frac{\partial}{\partial\rho}\\
&+ \left(\frac{1}{2}\theta_x\psi_2 - \frac{1}{4}\psi_1\psi_{1x}\psi_2 + \frac{1}{2}\theta_y\psi_1 - \frac{1}{4}\psi_2\psi_{2y}\psi_1 + \frac{\sqrt{2\lambda}}{2\rho}\psi_1\right)\frac{\partial}{\partial\theta}\\
&+ \left(-\theta_y + \frac{1}{2}\psi\psi_y - \frac{\sqrt{2\lambda}}{\rho}\right)\frac{\partial}{\partial\psi_1} + \left(-\theta_x + \frac{1}{2}\psi\psi_x\right)\frac{\partial}{\partial\psi_2}, \qquad (5.4.5)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Q_2 &= \psi_1 \frac{\partial}{\partial x} - \psi_2 \frac{\partial}{\partial y} - \rho(\psi_{1x} - \psi_{2y}) \frac{\partial}{\partial \rho} \\
&+ \left(\frac{1}{2}\theta_x \psi_1 - \frac{1}{4}\psi_2 \psi_{2x} \psi_1 - \frac{1}{2}\theta_y \psi_2 + \frac{1}{4}\psi_1 \psi_{1y} \psi_2 + \frac{\sqrt{2\lambda}}{2\rho}\psi_2 \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \\
&+ \left(-\theta_x + \frac{1}{2}\psi\psi_x \right) \frac{\partial}{\partial \psi_1} + \left(\theta_y - \frac{1}{2}\psi\psi_y - \frac{\sqrt{2\lambda}}{\rho} \right) \frac{\partial}{\partial \psi_2}. \qquad (5.4.6)
\end{aligned}
$$

Nous remarquons que ces générateurs contiennent les dérivées de premier ordre des champs θ, ψ_1 et ψ_2 et sont donc en fait des champs de vecteurs *généralisés.* Pour cette raison, il sera nécessaire de calculer la première prolongation pour tout générateur que nous voulons commuter avec Q_1 ou Q_2.

Il existe un second type de transformation supersymétrique qui donne lieu aux supercharges conservées:

$$\tilde{Q}_a = \int d^2 r \rho \psi_a. \qquad (5.4.7)$$

Nous identifions ces transformations de façon analogue à celles identifiées précédemment. En contractant ces quantités avec le paramètre $\tilde{\eta} = (\tilde{\eta}^1, \tilde{\eta}^2)$, nous obtenons la charge bosonique:

$$\tilde{Q} = \tilde{\eta}^a \tilde{Q}_a = \int d^2 r (\rho \tilde{\eta} \psi), \qquad (5.4.8)$$

qui produit les variations sur les champs [Jackiw 2,4]:

$$\tilde{\delta}\rho = 0, \qquad \tilde{\delta}\theta = -\frac{1}{2}(\tilde{\eta}\psi), \qquad \delta\psi = -\tilde{\eta}. \qquad (5.4.9)$$

La transformation supersymétrique correspondante est:

$$x' = x, \qquad y' = y, \qquad t' = t,$$

$$
\begin{aligned}
\rho' &= \rho, \\
\theta' &= \theta - \frac{1}{2}\tilde{\eta}\psi, \\
\psi' &= \psi - \tilde{\eta}. \qquad (5.4.10)
\end{aligned}
$$

Ici, seules les variables dépendantes sont mélangées. Les générateurs infinitésimaux sont obtenus comme:

$$\tilde{Q}_1 = -\frac{1}{2}\psi_1\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\partial}{\partial\psi_1}, \tag{5.4.11}$$

$$\tilde{Q}_2 = -\frac{1}{2}\psi_2\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\partial}{\partial\psi_2}. \tag{5.4.12}$$

Nous remarquons la similarité avec les générateurs de supersymétries (5.2.6) de la section (5.2).

Pour calculer les commutateurs entre les générateurs Q_a et $\tilde{Q}_a$, nous calculons les prolongations de $\tilde{Q}_1$ et $\tilde{Q}_2$:

$$\begin{aligned} pr^{(1)}\tilde{Q}_1 &= -\frac{1}{2}\psi_1\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\partial}{\partial\psi_1} - \frac{1}{2}\psi_{1x}\frac{\partial}{\partial\theta_x} - \frac{1}{2}\psi_{1y}\frac{\partial}{\partial\theta_y}, \\ pr^{(1)}\tilde{Q}_2 &= -\frac{1}{2}\psi_2\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\partial}{\partial\psi_2} - \frac{1}{2}\psi_{2x}\frac{\partial}{\partial\theta_x} - \frac{1}{2}\psi_{2y}\frac{\partial}{\partial\theta_y}. \end{aligned}$$

Les prolongations de Q_1 et Q_2 sont compliquées et ne seront pas présentées ici. Nous obtenons alors les (anti)commutateurs suivants:

$$\begin{aligned} &\{\tilde{Q}_1,\tilde{Q}_1\} = Z, \qquad \{\tilde{Q}_2,\tilde{Q}_2\} = Z, \qquad \{\tilde{Q}_1,\tilde{Q}_2\} = 0, \\ &\{Q_1,Q_1\} = -2T_t, \qquad \{Q_2,Q_2\} = -2T_t, \qquad \{Q_1,Q_2\} = 0, \\ &\{\tilde{Q}_1,Q_1\} = -T_y, \qquad \{\tilde{Q}_1,Q_2\} = -T_x, \qquad \{\tilde{Q}_2,Q_1\} = -T_x, \\ &\{\tilde{Q}_2,Q_2\} = T_y. \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la relation: $\partial_t = \dot{\rho}\partial_\rho + \dot{\theta}\partial_\theta + \dot{\psi}_1\partial_{\psi_1} + \dot{\psi}_2\partial_{\psi_2}$.

Nous relions maintenant les supersymétries Q_a et $\tilde{Q}_a$ aux symétries ordinaires (paires) du système.

5.4.1. Symétries du groupe de Galilée

Commençons par décrire les symétries du groupe de Galilée. Dans le cas d'une seule dimension spatiale, nous avions les trois générateurs $S = \partial_x$, $V = \partial_t$ et $W = t\partial_x + mx\partial_\theta$, correspondant aux translations spatiales, translations temporelles et boost galiléen respectivement. En deux dimensions spatiales x et y, le groupe de Galilée consistera en sept transformations. On a en effet les translations spatiales dans les directions x et y qui correspondent aux générateurs $T_x = \partial_x$ et $T_y = \partial_y$ respectivement. On a aussi la translation temporelle de générateur $T_t = \partial_t$. Les boosts galiléens dans chacune des deux directions spatiales donnent $B_x = t\partial_x + x\partial_\theta$ et $B_y = t\partial_y + y\partial_\theta$. Une rotation dans le plan (xy) est identifiée par la transformation:

$$\begin{aligned} x' = (\cos\varepsilon)x - (\sin\varepsilon)y, \qquad y' = (\sin\varepsilon)x + (\cos\varepsilon)y, \qquad t' = t, \\ \theta' = \theta, \qquad \rho' = \rho, \qquad \psi_1' = \cos\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)\psi_1 + \sin\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)\psi_2, \\ \psi_2' = -\sin\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)\psi_1 + \cos\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)\psi_2. \end{aligned} \tag{5.4.13}$$

Elle correspond au générateur:

$$M = -y\partial_x + x\partial_y + \frac{1}{2}\psi_2\partial_{\psi_1} - \frac{1}{2}\psi_1\partial\psi_2. \tag{5.4.14}$$

Les deux premiers termes du générateur M, reliant les coordonnées spatiales, constituent la rotation ordinaire. Les deux autres termes, reliant les variables impaires ψ_1 et ψ_2 proviennent de la contribution du spin. En effet, si on examine la charge conservée associée:

$$Q_M = \int d^2r[x\rho v_2 - y\rho v_1] + \frac{1}{4}i\int d^2r\left[\rho\psi\sigma^2\psi\right], \tag{5.4.15}$$

il est évident que la première intégrale représente le moment angulaire orbital, et la seconde le spin [Jackiw3]. Finalement, il faut encore noter que la translation du potentiel θ demeure une symétrie du système et correspond au générateur $Z = \partial_\theta$.

Nous déterminons les commutateurs entre ces générateurs et les générateurs de supersymétries Q_a et $\tilde{Q}_a$:

$$[T_x,\tilde{Q}_1] = 0, \qquad [T_y,\tilde{Q}_1] = 0, \qquad [T_t,\tilde{Q}_1] = 0,$$
$$[Z,\tilde{Q}_1] = 0, \qquad [B_x,\tilde{Q}_1] = 0, \qquad [B_y,\tilde{Q}_1] = 0,$$
$$[M,\tilde{Q}_1] = \tfrac{1}{2}\tilde{Q}_2,$$
$$[T_x,\tilde{Q}_2] = 0, \qquad [T_y,\tilde{Q}_2] = 0, \qquad [T_t,\tilde{Q}_2] = 0,$$
$$[Z,\tilde{Q}_2] = 0, \qquad [B_x,\tilde{Q}_2] = 0, \qquad [B_y,\tilde{Q}_2] = 0,$$
$$[M,\tilde{Q}_2] = -\tfrac{1}{2}\tilde{Q}_1,$$
$$[T_x,Q_1] = 0, \qquad [T_y,Q_1] = 0, \qquad [T_t,Q_1] = 0,$$
$$[Z,Q_1] = 0, \qquad [B_x,Q_1] = \tilde{Q}_2, \qquad [B_y,Q_1] = \tilde{Q}_1,$$
$$[M,Q_1] = \tfrac{1}{2}Q_2,$$
$$[T_x,Q_2] = 0, \qquad [T_y,Q_2] = 0, \qquad [T_t,Q_2] = 0,$$
$$[Z,Q_2] = 0, \qquad [B_x,Q_2] = \tilde{Q}_1, \qquad [B_y,Q_2] = -\tilde{Q}_2,$$
$$[M,Q_2] = -\tfrac{1}{2}Q_1.$$

5.4.2. Dilatations en deux dimensions spatiales

On retrouve également les dilatations obtenues dans le chapitre 3, mais certaines modifications sont nécessaires pour préserver l'aspect symétrique. Dans le cas $\lambda = 0$, nous généralisons les transformations L, R et F à:

$$\begin{aligned} L: \; x' = e^{\varepsilon}x, \quad y' = e^{\varepsilon}y, \quad t' = e^{2\varepsilon}t, \quad \theta' = \theta, \quad \rho' = \rho, \quad \psi = \psi', \\ R: \; x' = e^{\varepsilon}x, \quad y' = e^{\varepsilon}y, \quad t' = t, \quad \theta' = e^{2\varepsilon}\theta, \quad \rho' = \rho, \quad \psi = e^{\varepsilon}\psi', \\ F: \; x' = x, \quad y' = y, \quad t' = t, \quad \theta' = \theta, \quad \rho' = e^{\varepsilon}\rho, \quad \psi = \psi'. \end{aligned}$$

Elles correspondent aux générateurs:

$$\begin{aligned} L &= x\partial_x + y\partial_y + 2t\partial_t, \\ R &= x\partial_x + y\partial_y + 2\theta\partial_\theta + \psi_1\partial_{\psi_1} + \psi_2\partial_{\psi_2}, \\ F &= \rho\partial_\rho. \end{aligned}$$

Nous obtenons alors les nouveaux commutateurs:

$$\begin{aligned} &[L,\tilde{Q}_1] = 0, \qquad [R,\tilde{Q}_1] = -\tilde{Q}_1, \qquad [F,\tilde{Q}_1] = 0, \\ &[L,\tilde{Q}_2] = 0, \qquad [R,\tilde{Q}_2] = -\tilde{Q}_2, \qquad [F,\tilde{Q}_2] = 0, \\ &[L,Q_1] = -Q_1, \qquad [R,Q_1] = 0, \qquad [F,Q_1] = 0, \\ &[L,Q_2] = -Q_2, \qquad [R,Q_2] = 0, \qquad [F,Q_2] = 0. \end{aligned} \tag{5.4.16}$$

Pour le cas $\lambda \neq 0$, nous obtenons les dilatations correspondant aux générateurs $L' = L + F$ et $R' = R - F$, comme pour le cas ordinaire.

5.4.3. Transformation conforme et superconforme

Nous avons déterminé que la transformation conforme:

$$x' = \frac{x}{1-\varepsilon t}, \qquad y' = \frac{y}{1-\varepsilon t}, \qquad t' = \frac{t}{1-\varepsilon t},$$
$$\theta' = \theta + \frac{\varepsilon(x^2+y^2)}{2(1-\varepsilon t)}, \qquad \rho' = (1-\varepsilon t)\rho, \qquad \psi' = \psi, \tag{5.4.17}$$

est une symétrie du modèle supersymétrique de Jackiw. Cette symétrie est en fait une généralisation de la transformation conforme E déterminée au chapitre 3, et elle est associée au générateur:

$$E = xt\partial_x + yt\partial_y + t^2\partial_t + \frac{1}{2}(x^2+y^2)\partial_\theta - t\rho\partial_\rho. \tag{5.4.18}$$

Le calcul des commutateurs donne:

$$[E,\tilde{Q}_1] = 0, \qquad [E,\tilde{Q}_2] = 0,$$
$$[E,Q_1] = \Lambda_1, \qquad [E,Q_2] = \Lambda_2,$$

où

$$\Lambda_1 = x\tilde{Q}_2 + y\tilde{Q}_1 - tQ_1, \tag{5.4.19}$$
$$\Lambda_2 = x\tilde{Q}_1 - y\tilde{Q}_2 - tQ_2. \tag{5.4.20}$$

Nous postulons que ces nouveaux champs impairs, Λ_1 et Λ_2, que nous venons de découvrir sont des générateurs de nouvelles supersymétries appelées *transformations superconformes* d'après la terminologie de Freund [Freund]. L'analyse de ces transformations est encore incomplète, mais nous avons déterminé les commutateurs suivants:

$$[T_x,\Lambda_1] = \tilde{Q}_2, \qquad [T_y,\Lambda_1] = \tilde{Q}_1, \qquad [T_t,\Lambda_1] = -Q_1,$$
$$[Z,\Lambda_1] = 0, \qquad [B_x,\Lambda_1] = 0, \qquad [B_y,\Lambda_1] = 0,$$
$$[M,\Lambda_1] = \tfrac{1}{2}\Lambda_2, \qquad [L,\Lambda_1] = \Lambda_1, \qquad [R,\Lambda_1] = 0,$$
$$[F,\Lambda_1] = 0, \qquad [E,\Lambda_1] = 0,$$
$$[T_x,\Lambda_2] = \tilde{Q}_1, \qquad [T_y,\Lambda_2] = -\tilde{Q}_2, \qquad [T_t,\Lambda_2] = -Q_2,$$
$$[Z,\Lambda_2] = 0, \qquad [B_x,\Lambda_2] = 0, \qquad [B_y,\Lambda_2] = 0,$$
$$[M,\Lambda_2] = -\tfrac{1}{2}\Lambda_1, \qquad [L,\Lambda_2] = \Lambda_2, \qquad [R,\Lambda_2] = 0,$$
$$[F,\Lambda_2] = 0, \qquad [E,\Lambda_2] = 0,$$
$$\{\tilde{Q}_1,\Lambda_1\} = B_y, \qquad \{\tilde{Q}_2,\Lambda_1\} = B_x,$$
$$\{\tilde{Q}_1,\Lambda_2\} = B_x, \qquad \{\tilde{Q}_2,\Lambda_2\} = -B_y,$$

Il est à noter que la formulation de supersymétrie de ce modèle est différente de celles discutées dans les sections précédentes, car il n'est pas question ici d'augmenter l'espace des variables indépendantes à un superespace, ni d'utiliser le formalisme des superchamps. Dans les théories présentées dans les sections (5.1) et (5.2), les transformations supersymétriques reliait les variables paires et impaires *indépendantes.* Celles du modèle de Jackiw relient au contraire les variables dépendantes entre elles (les transformations $\tilde{Q}_a$), ou même les dépendantes avec les indépendantes (les Q_a). Une théorie supersymétrique du gaz de Chaplygin dans un superespace n'a pas, jusqu'à date, été formulée.

CONCLUSION

La contribution originale de ce mémoire consiste donc en deux développements. Premièrement, nous avons calculé et analysé en détail l'algèbre des symétries des équations du gaz de Chaplygin en une dimension. Deuxièmement, nous avons identifié les transformations supersymétriques correspondant aux charges conservées déterminées par Jackiw et al. pour le modèle généralisé. Nous avons aussi identifié deux nouveaux générateurs impairs Λ_1 et Λ_2 qui correspondent à des transformations superconformes. Il est probable que le modèle de Jackiw admet d'autres symétries conformes, incluant possiblement des généralisations des transformations C et P déterminées au chapitre 3. Cela mènerait sans doute à des transformations superconformes additionnelles.

Nous postulons également la possibilité d'une formulation supersymétrique du gaz de Chaplygin plus semblable à celle discutée dans les premières sections du chapitre 5. Cela impliquerait la formation d'un superespace de coordonnées paires et impaires en ajoutant des variables de Grassmann *indépendantes* φ_1 et φ_2, et la reconstruction du lagrangien et des équations en termes d'un superchamp:

$$F(x,y,t,\varphi_1,\varphi_2) = A(x,y,t) + \varphi_1\chi_1(x,y,t) + \varphi_2\chi_2(x,y,t) + \varphi_1\varphi_2 B(x,y,t)$$

où les fonctions A, χ_a et B dépendent des champs ρ et θ du modèle ordinaire, ainsi que des variables ψ_a introduites par Jackiw. Il est généralement plus simple de formuler la mécanique des fluides sous forme relativiste [Nyawelo, Landau2], et il est probable que celle-ci constitue une description plus exacte des phénomèmes en hydrodynamique. Un modèle d'action supersymétrique a été proposé récemment par T. S. Nyawelo, J. W. van Holten et S. Groot Nibbelink [Nyawelo] pour une théorie relativiste en trois dimensions spatiales. Ce pourrait être le point de départ pour une étude plus à fond le modèle proposé par Jackiw et aussi faire une analyse détaillée de ses symétries et supersymétries.

BIBLIOGRAPHIE

[Ayari] MOHAMED ALI AYARI, *Supergroupes de Lie et solutions invariantes pour des équations différentielles non-linéaires à valeurs de Grassmann*, Thèse de doctorat, Univ. de Montréal, 1997.

[Bazeia] D. BAZEIA AND R. JACKIW, *Nonlinear Realization of a Dynamical Poincaré Symmetry by a Field-Dependent Diffeomorphism*, Ann. Phys. **270**, 246-259, 1998.

[Berezin] F. A. BEREZIN, *The Methods of Second Quantization*, Academic Press, NY, 1966.

[Bergner] Y. BERGNER AND R. JACKIW, *Integrable Supersymmetric Fluid Mechanics from Superstrings*, Phys. Lett. **A284**, 146-151, 2001.

[Candlin] D. J. CANDLIN, *On Sums over Trajectories for Systems with Fermi Statistics*, Nuovo Cim. **4**, 231-239, 1956.

[Casalbuoni1] R. CASALBUONI, *On the Quantization of Systems with Anticommuting Variables*, Nuovo Cim. **33A**, 115-125, 1976.

[Casalbuoni2] R. CASALBUONI, *The Classical Mechanics for Bose-Fermi Systems*, Nuovo Cim. **33A**, 389-431, 1976.

[Chaplygin] S. CHAPLYGIN, Sci. Mem. Moscow Univ. Math. Phys. **21**, 1, 1904.

[Cornwell] J. F. CORNWELL, *Group Theory in Physics, Volume III*, Academic Press, London, 1989.

[Eckart] C. ECKART, Phys. Rev. **54**, 920, 1938.

[Freund] P. G. O. FREUND, *Introduction to Supersymmetry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[Gieres] F. GIERES, *Geometry of Supersymmetric Gauge Theories*, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[Golfand] Y. A. GOLFAND AND E. P. LIKHTMAN, JETP Lett. **13**, 452, 1971.

[Hassaïne] M. Hassaïne and P. A. Horváthy, *Field-Dependent Symmetries of a Non-Relativistic Fluid Model*, Ann. Phys. **282**, 218-246, 2000.

[Hussin] V. Hussin, *Grassmann-valued differential equations and a method of resolution based on Lie Supergroup Theory*, Mathematics Newsletter (India) **10**, 47-57, 2000.

[Jackiw1] R. Jackiw, *Fluid Dynamical Profiles and Constants of Motion from D-Branes*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **88**, 215-221, 2000.

[Jackiw2] R. Jackiw and A. Polychronakos, *Supersymmetric Fluid Mechanics*, preprint, hep-th/0004083, 2000.

[Jackiw3] R. Jackiw, *A Particle Theorist's Lectures on Supersymmetric, Non-Abelian Fluid Mechanics and d-branes*, preprint, physics/0010042, 2000.

[Jackiw4] R. Jackiw, *Description of Vorticity by Grassmann Variables and an Extension to Supersymmetry*, preprint, physics/0010079, 2000.

[Kopka] H. Kopka and P. W. Daly, *A Guide to LATEX 2ε*, Addison-Wesley, Wokingham, England, 1995.

[Krementosov] N. Krementosov, *Stalinist Science*, Princeton University Press, Princeton, 1997.

[Labelle] P. Labelle and P. Mathieu, *A New* $N = 2$ *Supersymmetric Korteweg-de Vries Equation*, J. Math. Phys. **32**, 923-927, 1991.

[Landau1] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics*, 3rd edition, Pergamon Press, Oxford, 1976.

[Landau2] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, 2nd edition, Pergamon Press, Oxford, 1987.

[Lin] C. C. Lin, *International School of Physics E. Fermi (XXI)*, G. Careri ed., Academic Press, NY, 1963.

[Mathieu] P. Mathieu, *Supersymmetric extension of the Korteweg-de Vries equation*, Math. Phys. **29**, 2499-2506, 1988.

[Matthews] P. T. Matthews and A. Salam, *Propagators for Quantized Fields*, Nuovo Cim. **2**, 120-134, 1955.

[Misra] S. P. Misra, *Introduction to Supersymmetry and Supergravity*, Wiley Eastern Limited, New Delhi, India, 1992.

[Nyawelo] T. S. NYAWELO, J. W. VAN HOLTEN, AND S. GROOT NIBBELINK, *Superhydrodynamics*, Phys. Rev. **D64**, 021701, 2001.

[Olver] P. J. OLVER, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Springer-Verlag, NY, 1986.

[Peskin] M. E. PESKIN AND D. V. SCHROEDER, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1995.

[Sattinger] D. H. SATTINGER AND O. L. WEAVER, *Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry and Mechanics* Springer-Verlag, NY, 1986.

[Wess] J. WESS AND B. ZUMINO, Nucl. Phys **70**, 39, 1974.

[West] P. WEST, *Introduction to Supersymmetry and Supergravity*, World Scientific, Singapore, 1990.