

Université de Montréal

Systèmes quadratiques intégrables avec point de
selle

par

Yanick Dupuis

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en Mathématiques

8 janvier 1999

© Yanick Dupuis, 1999



QA

36

V54

1999

n. 005

Université de Montréal

Systèmes quadratiques intégrables avec point de

selle

par

Yanick Dupuis

Département de mathématiques et de statistiques
Université de Montréal

Présenté en vue de l'obtention du grade de
Maîtrise en sciences (M.Sc.)
en mathématiques

8 janvier 1999



Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**Systèmes quadratiques intégrables avec point de
selle**

présenté par

Yanick Dupuis

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Christiane Rousseau

(président-rapporteur)

Dana Schlomiuk

(directeur de recherche)

Marlène Frigon

(membre du jury)

Mémoire accepté le :

février 1999

à ma grand-mère Anne-Marie et en mémoire de mon grand-père Roger pour tout leur amour.

SOMMAIRE

L'étude de la classe des systèmes différentiels quadratiques dans le plan est une tâche très complexe, due à la taille importante que prend cette classe. En fait, elle dépend, à travers des changements de coordonnées affins, de cinq paramètres. C'est ce grand nombre de paramètres, et la quantité importante de portraits de phases que ça implique, qui en rend l'étude difficile.

Un certain nombre de sous-classes de ces systèmes quadratiques, qui possédaient des propriétés spécifiques, ont déjà été étudié. Citons par exemple les systèmes avec centre (voir [Sch93a], [Sch93b]) ou encore les systèmes avec foyer faible d'ordre trois (voir [AL97]). Le but de ce mémoire est d'étudier une autre sous-classe. Nous aborderons pour la première fois et de façon détaillée la classe des systèmes quadratiques avec point de selle intégrables. Qu'ils soient intégrables ressort, en fait, du travail de Dulac (voir [Du108]).

Dans ce mémoire, on construit les diagrammes de bifurcations de plusieurs de ces systèmes et on dresse la liste des intégrales premières de ces systèmes à l'aide des courbes algébriques invariantes. C'est Mathieu Gagné qui s'est d'abord penché sur ce sujet de recherche, lors d'un travail pour une bourse du CRSNG, à l'été 1992. Il avait alors commencé l'étude des portraits de phases pour les cas non-Hamiltoniens ainsi que le calcul des courbes algébriques invariantes. Nous avons donc complété l'étude des portraits de phases pour tous les cas non-Hamiltoniens

et avons étudié en détail le cas Hamiltonien, qui était le plus complexe. Notre approche, pour ce problème, est analogue à celle utilisée par D. Schlomiuk dans [Sch93a] et [Sch93b] et celle utilisée par J. Pal et D. Schlomiuk dans [PS97]. Cette approche, qui agence les méthodes géométriques et algébriques, donne une vision beaucoup plus globale de la géométrie de cette sous-classe de systèmes.

REMERCIEMENTS

Ce mémoire est signé de mon nom, mais je dois rendre grâce à tous ceux qui y ont apporté quelque chose, que ce soit en me prodiguant de précieux conseils ou en m'encourageant tout au long de ce travail.

Je dois d'abord remercier ma directrice de recherche, Mme Dana Schlomiuk, pour ses conseils judicieux et la patience dont elle a fait preuve au long de notre collaboration pour ce travail. Je lui dois assurément le plus gros de la formation mathématique que j'ai acquise pendant ma maîtrise.

Merci aussi à Mathieu Gagné, que je n'ai jamais rencontré mais dont les travaux ont été non seulement un point de départ, mais aussi une inspiration et une référence.

Je veux aussi remercier particulièrement Louis-Sébastien Guimond, pour toute l'aide et les suggestions qu'il m'a apportées dans le domaine informatique. Sa compétence et son sérieux ont été grandement appréciés. Vers la fin, le flambeau a été repris par Nicolas Beauchemin, qui mérite également tous mes remerciements pour sa patience et son efficacité.

Merci au CRM pour m'avoir permis de bénéficier des bourses du FCAR, que j'ai reçues au cours de mes travaux estivaux.

Merci à Danielle Proulx pour toute la bonne humeur et la gentillesse qu'elle sait mettre dans son travail.

Merci à mes parents Michel Dupuis et Claudette St-Louis, pour leur soutien, leurs encouragements et leur amour.

Mes remerciements vont aussi à Mme Christiane Rousseau pour son aide précieuse, en particulier pour le chapitre 5.

Je m'en voudrais de ne pas aussi remercier tous mes amis et collègues du département qui ont su partager des discussions constructives.

Table des matières

Sommaire	i
Remerciements	iii
Table des figures	viii
Liste des tableaux	x
Introduction	1
Chapitre 1. Constantes de Poincaré-Lyapunov	6
1.1. Préliminaires	6
1.1.1. La notion d'intégrabilité	6
1.1.2. Théorème de la base de Hilbert	7
1.1.3. Bases de Gröbner	7
1.2. Constantes de Poincaré-Lyapunov et conditions d'intégrabilité.....	9
Chapitre 2. Courbes algébriques invariantes	14
2.1. Définitions et méthode de Darboux	15
2.2. Droites invariantes	16
2.2.1. Droites passant par l'origine	16
2.2.2. Droites ne passant pas par l'origine	17
2.3. Coniques invariantes	20

Chapitre 3. Cas (III)	22
3.1. Préliminaires	22
3.1.1. Théorème de Hartman-Grobman	22
3.1.2. Compactification de Poincaré	23
3.2. Étude des points singuliers dans le plan affiné	25
3.3. Étude des points singuliers à l'infini et compactification de Poincaré	29
3.4. Intégrales premières	32
3.5. Portraits de phase	34
Chapitre 4. Cas (II)	37
4.1. Cas $n \neq 0$	37
4.1.1. Étude des points singuliers dans le plan affiné	37
4.1.2. Étude des points à l'infini	40
4.2. Cas $n = 0$	42
4.2.1. Dans le plan affiné	42
4.2.2. À l'infini	43
4.3. Intégrales premières	44
4.4. Portraits de phase	46
Chapitre 5. Cas (I)	49
5.1. Espace des paramètres	49
5.2. Étude des points singuliers finis	49
5.3. Les points singuliers à l'infini	52

5.4. Courbes algébriques invariantes	53
5.5. Diagramme de bifurcation	56
Chapitre 6. Le cas Hamiltonien.....	57
6.1. Forme normale et symétrie.....	57
6.2. Singularités des systèmes (QH) et multiplicités d'intersection des courbes projectives.....	59
6.3. Nature des points singuliers finis	65
6.4. Étude des points singuliers à l'infini.....	76
6.5. Connexion des points de selle	79
6.6. Portraits de phases	84
Annexe A. Calcul des constantes de Poincaré-Lyapunov	89
Bibliographie	99

Table des figures

3.1.1	Compactification de Poincaré.....	24
3.1.2	Exemple de carte utilisée pour l'étude des points singuliers à l'infini..	25
3.5.1	Diagramme de bifurcation, cas (III) avec $m > 0$, cas génériques et points de bifurcation dégénérés à codimension 2.....	35
3.5.2	Diagramme de bifurcation, cas (III) avec $m > 0$, points de bifurcation dégénérés à codimension 1	36
4.4.1	Diagramme de bifurcation, cas (II), $n = 0$	46
4.4.2	Diagramme de bifurcation, cas (II), $n > 0$, cas génériques et points de bifurcation dégénérés à codimension 2.....	47
4.4.3	Diagramme de bifurcation, cas (II), $n > 0$, points de bifurcation dégénérés à codimension 1.	48
5.5.1	Diagramme de bifurcation, cas (I).....	56
6.6.1	Courbes de bifurcation, cas hamiltonien.....	84
6.6.2	Diagramme de bifurcation, cas hamiltonien, points de bifurcation dégénérés à codimension 1, première partie.....	85
6.6.3	Diagramme de bifurcation, cas hamiltonien, points de bifurcation dégénérés à codimension 1, deuxième partie.....	86
6.6.4	Diagramme de bifurcation, cas hamiltonien, points de bifurcation dégénérés à codimension 2.	87

6.6.5	Diagramme de bifurcation, cas hamiltonien, régions génériques.	88
-------	--	----

Liste des tableaux

2.2.1 Droites invariantes.....	20
2.3.1 Coniques irréductibles invariantes.....	20
3.4.1 Intégrales premières, cas (III), $kbm(k-b)\Delta \neq 0$	33
3.4.2 Intégrales premières, cas (III), $kbm(k-b)\Delta = 0$	33
4.3.1 Intégrales premières, cas (II).....	45
6.3.1 Points singuliers dans B_\cap	72
6.3.2 Points singuliers dans $B_\nu - B_\cap$	74

INTRODUCTION

Dulac considère des équations différentielles

$$\mathbb{X}(x, y)dy + \mathbb{Y}(x, y)dx = 0 \quad (0.0.1)$$

où \mathbb{X} et \mathbb{Y} sont des fonctions holomorphes au voisinage d'un point singulier (x_0, y_0) non-dégénéré, au sens que la matrice jacobienne

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbb{X}}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial \mathbb{X}}{\partial y}(x_0, y_0) \\ -\frac{\partial \mathbb{Y}}{\partial x}(x_0, y_0) & -\frac{\partial \mathbb{Y}}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

admette des valeurs propres λ_1 et λ_2 telles que $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$. Soit $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$. Par des changements affins de coordonnées, l'équation (0.0.1) se ramène sous la forme:

$$(x + \dots)dy + (\lambda y + \dots)dx = 0 \quad (0.0.2)$$

où l'on n'a écrit que les termes de degré le plus bas. Dulac considère alors le cas où λ est négatif et, plus précisément, au cas où $\nu = -\lambda > 0$ est rationnel, c'est-à-dire où $\nu = p/q$ avec p et q des entiers positifs. Il cherche "*une intégrale générale de la forme $yx^\nu H(x, y) = c$, c une constante et H étant holomorphe au voisinage de $(0, 0)$ et non nul pour $x = y = 0$* " (cf. [Dul08], page 4). C'est ce que Dulac appelle *centre*.

Dans [Dul08], Dulac considère, pour des équations quadratiques, le cas où $\lambda = -1$ ($\nu = 1$) et il montre que si l'origine est un centre pour une équation du type de (0.0.2) avec $\lambda = -1$, alors cette équation est intégrable en termes finis,

c'est-à-dire que par un nombre fini de "transformations" effectuées à partir de l'équation, on arrive à l'intégrer par diverses méthodes *ad hoc*.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons aux systèmes d'équations différentielles dans le plan:

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (\text{P})$$

avec P et Q analytiques au voisinage d'un point singulier (x_0, y_0) . Pour ces systèmes réels ou complexes, on peut adapter la notion de centre au sens de Dulac et nous nous intéresserons au cas $\lambda = -1$. Supposons donc que le système possède un point singulier (x_0, y_0) , i.e. $P(x_0, y_0) = 0 = Q(x_0, y_0)$, tel que les valeurs propres λ_1, λ_2 du linéarisé du système soient non-nulles et que $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -1$. Cela revient à dire que la matrice du linéarisé a une trace nulle. Si ce système admet une intégrale première holomorphe au voisinage de (x_0, y_0) , on dira que (x_0, y_0) est un centre.

Nous nous intéressons maintenant au cas où P et Q sont tous deux réels. Dans ce cas, on a deux possibilités. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, et, dans ce cas, $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$, ou encore $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Restreignons-nous aux systèmes réels (P) quadratiques, i.e. P et Q sont des polynômes à coefficients réels tels que $\max(\deg P, \deg Q) = 2$. Si $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$, alors (x_0, y_0) est un centre au sens de Dulac si et seulement si (x_0, y_0) est un centre, c'est-à-dire une singularité isolée entourée de courbes de phases fermées. Les systèmes ont été étudiés en détail dans [Sch93a] et [Sch93b].

Le cas qui n'a pas été considéré dans la littérature est le cas où $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -1$. C'est ce cas, dont l'étude a été commencée par M. Gagné dans un travail d'été sous la supervision de Mme D. Schlomiuk, qui sera étudié dans ce mémoire.

Un tel système se ramène par un changement affín réel de coordonnées à la forme canonique suivante:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + \dots \\ \dot{y} = -y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{30}x^3 + \dots \end{cases}$$

avec $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$. On vérifie sans peine que la transformation ($x \mapsto X + Y$, $y \mapsto X - Y$) ramène ces systèmes à la forme canonique suivante:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + A_{20}x^2 + A_{11}xy + A_{02}y^2 + A_{30}x^3 + \dots \\ \dot{y} = x + B_{20}x^2 + B_{11}xy + B_{02}y^2 + B_{30}x^3 + \dots \end{cases} \quad (\text{S}')$$

En effet,

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \frac{1}{2}(\dot{x} + \dot{y}) = \frac{1}{2}[x - y + \dots] = Y + \dots \\ \dot{Y} &= \frac{1}{2}(\dot{x} - \dot{y}) = \frac{1}{2}[x + y + \dots] = X + \dots \end{aligned}$$

Dans ce mémoire, on étudie les systèmes (S') qui sont quadratiques. La forme canonique est:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + kx^2 + mxy + ny^2 \\ \dot{y} = x + ax^2 + bxy + cy^2 \end{cases} \quad (\text{SQ})$$

dont l'espace des paramètres est $\mathbb{R}^6/0$. On peut maintenant abaisser la dimension de cet espace pointé à 5, de la façon suivante. On se ramène à un système où les paramètres a et c sont égaux. Si, déjà, $a = c$, il n'y a rien à changer. Si $k = n$, étant donné que les solutions $x(t)$ et $y(t)$ sont définies sur \mathbb{R}^2 , on peut les interchanger et on a le résultat. Dans le cas où $(a - c)(k - n) \neq 0$, on utilise la propriété selon laquelle les systèmes de la forme (SQ) soient invariants sous l'action du groupe des rotations hyperboliques. On effectue donc la rotation hyperbolique des axes correspondant à un angle θ .

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta \\ -\sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix}.$$

D'où,

$$\begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Cela nous donne un système de la forme (SQ) en ζ et η , i.e.

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = \eta + k'\zeta^2 + m'\zeta\eta + n'\eta^2 \\ \dot{\eta} = \zeta + a'\zeta^2 + b'\zeta\eta + c'\eta^2. \end{cases}$$

Posant les nouveaux coefficients égaux ($a' = c'$), on trouve la condition:

$$(n - k) \tanh^3 \theta + (c - a) \tanh^2 \theta + (k - n) \tanh \theta + (a - c) = 0$$

qui est une équation cubique en $\tanh \theta$ avec coefficients réels non-nuls. La cubique $(n-k)t^3 + (c-a)t^2 + (k-n)t + (a-c) = 0$ se factorise: $(t-1)(t+1)((n-k)t + (c-a)) = 0$. Comme $\tanh \theta \in (-1, 1)$, si $t = \frac{c-a}{n-k} \in (-1, 1)$, on ramène le système au système (S) avec $a = c$. Si $t = \frac{c-a}{n-k} \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, on utilise l'équation cubique en $\coth \theta$ et on peut encore se ramener au système (S) ci-dessous. Dans ce mémoire, on traitera les cas $\frac{c-a}{n-k} \neq \pm 1$.

On considérera donc désormais les systèmes de la forme:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + kx^2 + mxy + ny^2 \\ \dot{y} = x + ax^2 + bxy + ay^2 \end{cases} \quad (\text{S})$$

avec coefficients $k, m, n, a, b \in \mathbb{R}$. Nous trouvons les conditions sous lesquelles l'origine est un centre pour un système quadratique (S), nous donnons le diagramme de bifurcations de ces systèmes ainsi que toute la liste des intégrales premières. Ces intégrales premières ne sont pas calculées par diverses méthodes *ad hoc* comme l'a fait Dulac. Pour leur intégration, on n'utilise qu'une seule méthode: la très belle méthode géométrique d'intégration à l'aide des solutions algébriques des systèmes, méthode introduite par Darboux dans [Dar78]. En l'appliquant ici,

on obtient une unification des preuves d'intégrabilité des systèmes. Ces solutions algébriques sont aussi un joli outil pour tracer les portraits de phases.

Chapitre 1

CONSTANTES DE POINCARÉ-LYAPUNOV

Dans ce chapitre, nous donnons d'abord le bagage algébrique nécessaire pour, enfin, déterminer les conditions d'intégrabilité pour un système avec point de selle de trace nulle à l'origine.

1.1. PRÉLIMINAIRES

1.1.1. La notion d'intégrabilité

D'abord, nous définissons l'intégrabilité:

Définition 1.1.1. Une fonction différentiable $F \in C^1(U, \mathbb{R})$ où U est un ouvert de \mathbb{R}^2 est une *intégrale première* d'un système

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (1.1.1)$$

dans U si F est constante pour toutes les solutions $(x(t), y(t))$ dans U , i.e. qu'il existe K une constante telle que $F(x(t), y(t)) = K$, pour tout t tel que $(x(t), y(t)) \in U$. Si pour tout sous-ensemble ouvert V de U , il existe une intégrale première F non-constante, alors le système (1.1.1) est dit *intégrable* sur U .

Pour P et Q donnés, dans l'anneau $\mathbb{R}[[x, y]]$ de séries formelles à coefficients dans \mathbb{R} , on pose l'opérateur $D : = \frac{d}{dt} = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y}$. On voit facilement que

$F : U \rightarrow \mathbb{R} \in C^1(U, \mathbb{R})$ est une intégrale première de (1.1.1) sur U si et seulement si $DF = 0$ sur U .

1.1.2. Théorème de la base de Hilbert

On se référera à [Lan93].

Définition 1.1.2. Un anneau commutatif A avec élément unité est *Noethérien* si tout idéal I de A possède une base finie, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble fini S de I , $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ tel que S engendre I ($\langle S \rangle = I$), ou encore tout élément a de I est de la forme $a = a_1s_1 + a_2s_2 + \dots + a_ks_k$, où $s_i \in S$ et $a_i \in A$, $i = 1, \dots, k$.

Alors le théorème de la base de Hilbert sur les idéaux des anneaux de polynômes s'énonce ainsi.

Théorème 1.1.1. Si un anneau commutatif A avec élément unité est Noethérien, alors l'anneau de polynômes $A[X]$ est aussi Noethérien.

Corollaire 1.1.1. Si un anneau commutatif A avec élément unité 1 est Noethérien, alors l'anneau $A[x_1, \dots, x_n]$ est aussi Noethérien.

1.1.3. Bases de Gröbner

On aura besoin plus tard d'utiliser des bases d'idéaux ayant de bonnes propriétés. Ces bases seront les bases de Gröbner. Cette partie est un résumé du chapitre un de l'ouvrage de Adams et Loustaunau [AL94]. Une base de Gröbner est une base d'un idéal d'un anneau de polynômes à plusieurs variables qui a certaines propriétés intéressantes. Introduisons quelques notations utiles pour définir les bases de Gröbner.

- Si \mathbb{K} est un corps, on a $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, l'ensemble des polynômes en n variables avec coefficients dans \mathbb{K} , qui consistent en une somme finie de termes de la forme $ax_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n}$, où $a \in \mathbb{K}$ et $\beta_i \in \mathbb{N}$, pour tout $i = 1, \dots, n$.

- On appelle *produit de puissances* un monôme de la forme $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n} = x^\beta$, avec $\beta \in \mathbb{N}^n$. L'ensemble de tous les produits de puissances est noté $\mathbb{T}^n = \{x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n} \mid \beta_i \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, n\} = \{x^\beta\}$.
- Il est trivial d'ordonner un tel ensemble dans le cas $n = 1$; pour ordonner \mathbb{T}^n , avec $n > 1$, on rappelle un *ordre total*.

Définition 1.1.3. Un *ordre total* strict, $<$, sur X est une relation d'ordre entre éléments de X si et seulement si pour tous $x, y \in X$, on a exactement une des situations suivantes satisfaite: $x < y$, $x = y$ ou $y < x$ et que si, pour $x, y, z \in X$, on a $x < y$ et $y < z$, alors $x < z$.

Définition 1.1.4. Un "*terme-ordre*" sur \mathbb{T}^n est un ordre total $<$ tel que:

- $1 < x^\beta, \forall x^\beta \in \mathbb{T}^n$ et $x^\beta \neq 1$;
- $x^\alpha < x^\beta$, alors $x^\alpha x^\gamma < x^\beta x^\gamma, \forall x^\gamma \in \mathbb{T}^n$.

Exemple 1.1.1. L'ordre *lexicographique* (noté **lex**) sur \mathbb{T}^n avec $x_n < x_{n-1} < \dots < x_2 < x_1$ est défini comme suit:

Soient $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ et $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$, on dit que $x^\alpha < x^\beta$ si et seulement si les premières coordonnées α_i et β_i de la gauche qui sont différentes satisfont $\alpha_i < \beta_i$.

Exemple 1.1.2. L'ordre *de degré lexicographique* (noté **deglex**) sur \mathbb{T}^n avec $x_n < x_{n-1} < \dots < x_2 < x_1$ est défini comme suit:

Soient $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ et $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$, on dit que

$$x^\alpha < x^\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n \alpha_i < \sum_{i=1}^n \beta_i \\ \text{ou} \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n \beta_i \text{ et } x^\alpha < x^\beta \text{ avec l'ordre lex.} \end{cases}$$

– **Définition 1.1.5.** Soit $<$ un ordre de termes sur $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, alors $\forall f \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_m]$, $f \neq 0$, on a $f = a_1x^{\alpha_1} + a_2x^{\alpha_2} + \dots + a_mx^{\alpha_m}$, où $0 \neq a_i \in \mathbb{K}$, $x^{\alpha_i} \in \mathbb{T}^n$, $\forall i = 1, \dots, n$ et $x^{\alpha_1} > x^{\alpha_2} > \dots > x^{\alpha_m}$. On dénote:

- $lp(f) = x^{\alpha_1}$, le produit de puissances dominant;
- $lc(f) = a_1$, le coefficient dominant;
- $lt(f) = a_1x^{\alpha_1}$, le terme dominant

avec la convention $lp(0) = lc(0) = lt(0) = 0$.

On définit maintenant une base de Gröbner.

Définition 1.1.6. Un ensemble de polynômes $G = \{g_1, g_2, \dots, g_t\}$ d'un idéal I d'un anneau de polynômes, $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, est *une base de Gröbner* pour $I \Leftrightarrow \forall f \in I$ tel que $f \neq 0$, $\exists i \in \{1, 2, \dots, t\}$ tel que $lp(g_i)$ divise $lp(f)$.

On peut en fait démontrer qu'une base de Gröbner pour un idéal est une base au sens où on l'entend, c'est-à-dire que si $G = \{g_1, g_2, \dots, g_t\}$ est une base de Gröbner pour I , alors $\langle g_1, g_2, \dots, g_t \rangle = I$.

1.2. CONSTANTES DE POINCARÉ-LYAPUNOV ET CONDITIONS D'INTÉGRABILITÉ

Dans [Shi84], Shi démontre un lemme pour des système différentiels polynômiaux $\dot{x} = -y + \dots$, $\dot{y} = x + \dots$ qui permette de déterminer les conditions pour avoir un centre dans le cas quadratique. Nous considérons ici l'analogie du lemme de Shi, prouvé par M. Gagné pour les systèmes qui nous intéressent, $\dot{x} = y + \dots$, $\dot{y} = x + \dots$

Théorème 1.2.1. Soit le système:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + P_2(x, y) + \dots + P_n(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = x + Q_2(x, y) + \dots + Q_n(x, y) \end{cases} \quad (1.2.1)$$

où $P_i(x, y)$ et $Q_i(x, y)$ sont des polynômes homogènes de degré i en x et y , c'est-

à-dire $P_i(x, y) = \sum_{j=0}^i a_{ij} x^{i-j} y^j$ et $Q_i(x, y) = \sum_{j=0}^i b_{ij} x^{i-j} y^j$.

Alors il existe une série formelle $F \in \mathbb{Q}[a_{20}, \dots, b_{0n}][[x, y]]$ telle que

$$F(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + F_3(x, y) + F_4(x, y) + \dots$$

(les $F_i(x, y)$ étant homogènes de degré i) et il existe $V_1, \dots, V_i, \dots \in \mathbb{Q}[a_{20}, \dots, b_{0n}]$ tels que

$$\frac{\partial F}{\partial x} P + \frac{\partial F}{\partial y} Q = \sum_{i=1}^{\infty} V_i (x^2 - y^2)^{i+1}$$

avec $P = \sum_{i=2}^n P_i(x, y)$ et $Q = \sum_{i=2}^n Q_i(x, y)$.

La démonstration de ce théorème est faite dans l'annexe du présent mémoire. Les V_i ainsi définis sont appelées les *constantes de Poincaré-Lyapunov* correspondant aux systèmes de la forme (1.2.1). Analoguement au cas traité dans [Shi84] et [Shi81], on a que V_1 est uniquement déterminée, mais qu'il n'en va pas de même pour les autres constantes. La k^e constante de Poincaré-Lyapunov, V_k , est uniquement déterminée modulo l'idéal engendré par les constantes précédentes (voir l'annexe). Plus précisément, on a:

Théorème 1.2.2 (Gagné). Soit $\mathcal{A} = \mathbb{Q}[a_{20}, \dots, b_{0n}]$, l'anneau engendré par les coefficients du système (1.2.1), sur le corps des rationnels. Soit une collection de constantes de Poincaré-Lyapunov V_1, V_2, \dots, V_k pour (1.2.1), et soit \mathcal{J}_{k-1} , l'idéal de \mathcal{A} engendré par V_1, V_2, \dots, V_{k-1} . Si $\{W_1, W_2, \dots, W_k\}$ est une autre collection de constantes de Poincaré-Lyapunov de (1.2.1), alors

$$V_k \equiv W_k \pmod{\mathcal{J}_{k-1}},$$

ou encore $V_k - W_k \in \mathcal{J}_{k-1}$.

De la preuve de ce théorème, on tire le théorème suivant, qui est une conséquence du théorème de la base de Hilbert et qui apporte plus d'information sur la structure des constantes de Poincaré-Lyapunov:

Théorème 1.2.3. Soit un système (1.2.1). Il existe un entier naturel $N \in \mathbb{N}$ et $B_i \in \mathbb{Q}[a_{20}, \dots, b_{0n}]$, $i = 1, 2, \dots, N$ tels que si les constantes de Poincaré-Lyapunov de (1.2.1) sont $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, alors,

$$V_i = \begin{cases} k_i B_i + \sum_{k=1}^{i-1} P_i^{(k)} B_k, & i = 1, 2, \dots, N \\ \sum_{k=1}^N P_i^{(k)} B_k, & i > N \end{cases} \quad (1.2.2)$$

pour $k_i \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ et $P_i^{(k)} \in \mathbb{Q}[a_{20}, \dots, b_{0m}]$. Ce qui revient à dire que $\langle B_1, B_2, \dots, B_k \rangle = \langle V_1, V_2, \dots, V_N \rangle$.

Il devient clair qu'un point de selle à l'origine du système (S) est intégrable si et seulement si toutes ses constantes de Poincaré-Lyapunov sont nulles (i.e. $0 = V_1 = V_2 = \dots = V_n = \dots$), ou encore, avec ce dernier théorème, si et seulement si $B_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Définition 1.2.1. Soit un système (S) ayant toutes ses constantes de Poincaré-Lyapunov nulles. On appelle l'origine de ce système une *selle régulière*.

D'un autre point de vue, soit $\mathcal{J} = \langle V_1, V_2, \dots \rangle$, l'idéal engendré par l'ensemble des V_i . Le théorème de la base de Hilbert nous assure de l'existence d'une base finie pour \mathcal{J} , \mathcal{A} étant un anneau Noethérien. Il existe donc une collection $\{B_1, B_2, \dots, B_k\} \subset \mathcal{J}$ telle que $\mathcal{J} = \langle B_1, B_2, \dots, B_k \rangle$. Dans notre cas, les calculs des B_i se font en utilisant les bases de Gröbner, qui sont des bases avec des bonnes

propriétés. Les calculs ont été fait par Mathieu Gagné à l'aide de son programme en Maple qui est présenté en annexe. Les résultats sont exposés ici.

Théorème 1.2.4. Pour le système (S), on a

$$\begin{aligned} B_1 &= (2a + m)(k - n) \\ B_2 &= m(b + 2k)(k - n)(b + 5n - 3k) \\ B_3 &= m(b + 2k)(k - n)^2(4kn - 8n^2 + m^2) \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

avec

$$\begin{aligned} V_1 &= -\frac{1}{4}B_1 \\ V_2 &= -\frac{1}{48}B_2 + P_2^1 B_1 \\ V_3 &= \frac{5}{256}B_3 + P_3^2 + P_3^1 B_1 \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

où les $P_j^{(i)} \in \mathbb{Q}[k, m, n, a, b]$ sont homogènes, donc les V_k sont aussi homogènes.

Ces résultats peuvent aussi être obtenus par calculs directs, à cause de la forme spéciale des systèmes. Notre hypothèse est que l'origine du système (S) soit une selle régulière. Pour avoir une intégrale première locale quadratique, il est nécessaire d'avoir $B_i = 0$ pour tout i , donc, en particulier, $B_1 = B_2 = B_3 = 0$.

Corollaire 1.2.1. Si un système (S) possède une selle régulière, alors une des conditions suivantes est satisfaite:

$$\begin{aligned} (I) \quad & m + 2a = b - 3k + 5n = a^2 + kn - 2n^2 = 0 \\ (II) \quad & m = a = 0 \\ (III) \quad & k - n = 0 \\ (H) \quad & b + 2k = m + 2a = 0 \text{ (la condition hamiltonienne)} \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

DÉMONSTRATION. On montre que $B_1 = B_2 = B_3 = 0$ si et seulement si une des conditions énumérées ci-haut est satisfaite. Supposons que $B_1 = B_2 = B_3 = 0$. Puisque $B_1 = 0$, alors soit $k - n = 0$, ou bien $2a + m = 0$. Si $k - n = 0$ (condition

(III)), nous avons tous les $B_i = 0$, $i = 1, 2, 3$. Si $2a + m = 0$, on a deux cas: ou bien $a = m = 0$, ou bien $am \neq 0$. Si $a = m = 0$ (condition (II)), on a encore $B_i = 0$, $i = 1, 2, 3$. Mais si $am(k - n) \neq 0 = 2a + m$, puisque $B_2 = 0$, on a soit $b + 2k = 0$, soit $b + 5n - 3k = 0$. Si $b + 2k = 0 = 2a + m$, la condition (H) est satisfaite et les $B_i = 0$. Si $b + 2k \neq 0$ et $b + 5n - 3k = 0$, puisque $B_3 = 0$, il faut imposer $4kn - 8n^2 + m^2 = 4a^2 + 4kn - 8n^2 = 0$, (car $2a + m = 0$), ou encore $a^2 + kn - 2n^2 = 0$. Donc, on doit avoir $m + 2k = b - 3k + 5n = a^2 + kn - 2n^2 = 0$, la condition (I) est satisfaite. Inversement, on voit facilement que si l'une des conditions précédentes est satisfaite, alors $B_1 = B_2 = B_3 = 0$.

□

Ces conditions sont-elles suffisantes pour que l'origine de tels systèmes soit un centre de Dulac (c'est-à-dire un point de selle intégrable dans un voisinage)? On montre que la réponse est affirmative par la méthode de Darboux expliquée au chapitre suivant.

Chapitre 2

COURBES ALGÈBRIQUES INVARIANTES

Dans [Sch93a] et [Sch93b], on étudiait les systèmes avec centre dont la forme canonique utilisée, appelée *forme de Kapteyn*, était:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - bx^2 - Cxy - dy^2 \\ \dot{y} = x + ax^2 + Axy - ay^2 \end{cases} \quad (\text{SC})$$

On peut communiquer du système (SC) au système (S) réel à l'aide de la transformation:

$$(x, y, t) \longmapsto (X, iY, iT), \quad (2.0.6)$$

tirée de [RJ89], en autant que $b, d, A \in i\mathbb{R}$ où $i\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re z = 0\}$ et $a, C \in \mathbb{R}$. En effet, $\frac{dX}{dT} = \frac{dX}{dx} \frac{dx}{dt} \frac{dt}{dT} = 1(-y - bx^2 - Cxy - dy^2)i = Y - ibX^2 - CXY + idY^2$ et $\frac{dY}{dT} = \frac{dY}{dy} \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dT} = \frac{1}{i}(x + ax^2 + Axy - ay^2)i = X + aX^2 + iAXY + aY^2$. Les systèmes sont intégrables car analogues à des centres. Donc, du travail de Dulac [Dul08], il ressort que les intégrales sont élémentaires (on peut les calculer par des méthodes *ad hoc*), mais nous les calculerons à l'aide des courbes algébriques invariantes et de la méthode de Darboux.

2.1. DÉFINITIONS ET MÉTHODE DE DARBOUX

Maintenant, on introduit la définition de courbe algébrique invariante pour un système:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Définition 2.1.1. Soit $f \in \mathbb{C}[x, y]$ et la courbe $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$. Alors \mathcal{C} est une *courbe algébrique invariante* pour le système différentiel (2.1.1) s'il existe $K \in \mathbb{C}[x, y]$ tel que $Df \equiv fK$, où K est appelé le *cofacteur* de f .

Définition 2.1.2. Une *solution algébrique* de (2.1.1) est une courbe algébrique invariante $f(x, y) = 0$ pour ce système, où f est un polynôme irréductible sur \mathbb{C} .

La méthode de Darboux vise à trouver des intégrales premières à l'aide de courbes algébriques invariantes. Les intégrales premières de Darboux sont de la forme particulière $F(x, y) = C$, où $F = \prod_{i=1}^q f_i^{\lambda_i}$, avec $\lambda_i \in \mathbb{C}$ et $f_i \in \mathbb{C}[x, y]$ ou bien avec f_i exponentielle d'une fonction rationnelle de $\mathbb{C}[x, y]$. Si on a assez de courbes algébriques invariantes $f_i = 0$ pour (2.1.1), alors $F(x, y) = C$ sera une intégrale première pour ce système. Le terme assez est trop flou, ici, mais le théorème suivant, dû à Darboux, le précise.

Théorème 2.1.1 (Darboux). Soit un système (2.1.1). Si $f_i(x, y) = 0$, $i = 1, \dots, q$ sont des solutions algébriques distinctes, avec cofacteurs respectifs K_i et $q > \frac{m(m+1)}{2}$ (où $m = \max(\deg P, \deg Q)$), alors il existe des $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, q$ tels que $F = \prod_{i=1}^q f_i^{\lambda_i} = C$ soit une intégrale première de (2.1.1), en ce sens que $DF = 0$, avec l'opérateur différentiel $D = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y}$.

Des précisions intéressantes concernant cette méthode très utile pour déterminer l'intégrabilité de systèmes apparaissent dans [Sch93a]. On réfère à cet article pour les détails.

2.2. DROITES INVARIANTES

On cherchera à obtenir maintenant les droites invariantes du système (S)

$$\begin{cases} \dot{x} = y + kx^2 + mxy + ny^2 \\ \dot{y} = x + ax^2 + bxy + ay^2 \end{cases}$$

On devra considérer séparément les cas où la droite passe par l'origine et ceux où ce n'est pas le cas.

2.2.1. Droites passant par l'origine

Proposition 2.2.1. Le système (S) possède une droite invariante passant par l'origine si et seulement si une des conditions suivantes est satisfaite:

- i) $b + m = k + n + 2a$ auquel cas, la droite est $x + y = 0$
- ii) $b - m = k + n - 2a$ auquel cas, la droite est $x - y = 0$

DÉMONSTRATION. F est de degré 1, donc s'il existe un cofacteur K , il sera évidemment de degré 1 lui aussi. Posons donc $F(x, y) = f_{10}x + f_{01}y$ et $K = k_0 + k_{10}x + k_{01}y$. Remarquons qu'on ne peut avoir $f_{10} = 0$, sinon on aurait $F(x, y) = y$ et $DF = Q = x + ax^2 + bxy + ay^2$ qui ne peut être égal à $y(k_0 + k_{10}x + k_{01}y)$. On peut donc, sans perte de généralité, supposer $f_{10} = 1$.

$$\text{Maintenant, } P \frac{\partial F}{\partial x} + Q \frac{\partial F}{\partial y} = FK$$

ce qui implique $(y + kx^2 + mxy + ny^2) + f_{01}(x + ax^2 + bxy + ay^2) = (x + f_{01}y)(k_0 + k_{10}x + k_{01}y)$

ou encore, égalant les coefficients,

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad f_{01} - k_0 = 0 \\ (2) \quad 1 - f_{01}k_0 = 0 \\ (3) \quad k + af_{01} - k_{10} = 0 \\ (4) \quad m + bf_{01} - k_{10}f_{01} - k_{01} = 0 \\ (5) \quad n + af_{01} - f_{01}k_{01} = 0 \end{array} \right.$$

De (1), $f_{01} = k_0$, dans (2), $f_{01}^2 = 1 \Rightarrow f_{01} = \pm 1$.

– si $f_{01} = 1$, de (3) et (5), on a que $k_{10} = k + a$ et $k_{01} = n + a$. Dans (4), on obtient que $m + b - (k + a) - (n + a) = 0 \Rightarrow m + b = k + n + 2a$, et ainsi $F(x, y) = x + y$.

– si $f_{01} = -1$, de (3) et (5), on a que $k_{10} = k - a$ et $k_{01} = n - a$. Dans (4), on obtient que $m - b - (k - a) - (n - a) = 0 \Rightarrow b - m = k + n - 2a$, et ainsi $F(x, y) = x - y$.

□

2.2.2. Droites ne passant pas par l'origine

Étudions maintenant les conditions pour que le système possède une droite invariante ne passant pas par l'origine.

Proposition 2.2.2. Si le système (S) possède une droite ne passant pas par l'origine, alors ou bien $a = 0$ et $b \neq 0$ et, dans ce cas, la droite invariante est $1 + by = 0$, ou bien $k = n$.

DÉMONSTRATION. Soient $F(x, y) = 1 + f_{10}x + f_{01}y$ et $K(x, y) = k_{10}x + k_{01}y$.

Maintenant, $P \frac{\partial F}{\partial x} + Q \frac{\partial F}{\partial y} = FK$

donc $f_{10}(y + kx^2 + mxy + ny^2) + f_{01}(x + ax^2 + bxy + ay^2) = (1 + f_{10}x + f_{01}y)(k_{10}x +$

$k_{01}y$) en égalant les coefficients, on obtient:

$$\begin{cases} f_{01} = k_{10} \\ f_{10} = k_{01} \\ kf_{10} + af_{01} - f_{10}k_{10} = 0 \\ mf_{10} + bf_{01} - f_{10}k_{01} - f_{01}k_{10} = 0 \\ nf_{10} + af_{01} - f_{01}k_{01} = 0 \end{cases}$$

ou encore, éliminant les deux premières conditions:

$$\begin{cases} (1) \quad kf_{10} + af_{01} - f_{10}f_{01} = 0 \\ (2) \quad mf_{10} + bf_{01} - f_{10}^2 - f_{01}^2 = 0 \\ (3) \quad nf_{10} + af_{01} - f_{10}f_{01} = 0 \end{cases}$$

Soustrayant (1) de (3), on obtient $f_{10}(k - n) = 0$. Si $k \neq n$, alors il faut que $f_{10} = 0$. Mais dans (1), nous donne $af_{01} = 0$, d'où $a = 0$, car $f_{01} = 0$ ne nous donnerait plus une droite. Retournant dans (2), on a $bf_{01} - f_{01}^2 = 0$ et donc $b \neq 0$, car sinon $f_{01} = 0$. On obtient donc que $f_{01} = b \neq 0$, d'où, $F(x, y) = 1 + by$. Dans le cas où $k = n$, le système est de la forme:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + kx^2 + mxy + ky^2 \\ \dot{y} = x + ax^2 + bxy + ay^2 \end{cases} \quad (2.2.1)$$

qu'on peut ramener à un système de la forme:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \mathcal{K}x^2 + \mathcal{M}xy + \mathcal{K}y^2 \\ \dot{y} = x + \mathcal{B}xy \end{cases} \quad (2.2.2)$$

en effectuant une rotation hyperbolique, qui conserve les conditions $k = n$ et $a = c$:

$$\begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

avec $\tanh \theta$, une racine réelle de

$$k \tanh^3 \theta + (a - m) \tanh^2 \theta + (k - b) \tanh \theta + a = 0.$$

Égalant une fois de plus $P \frac{\partial F}{\partial x} + Q \frac{\partial F}{\partial y} = FK$, on a

$$f_{10}(y + \mathcal{K}x^2 + \mathcal{M}xy + \mathcal{K}y^2) + f_{01}(x + \mathcal{B}xy) = (1 + f_{10}x + f_{01}y)(f_{01}x + f_{10}y)$$

d'où les conditions:

$$\begin{cases} (1) & \mathcal{K}f_{10} = f_{10}f_{01} \\ (2) & \mathcal{M}f_{10} + \mathcal{B}f_{01} = f_{10}^2 + f_{01}^2 \end{cases}$$

– si $f_{10} = 0$, on a que $\mathcal{B}f_{01} = f_{01}^2$, et, puisque $f_{01} \neq 0$, $f_{10} = \mathcal{B}$ et la droite invariante est $F(x, y) = 1 + \mathcal{B}y = 0$.

– si $f_{10} \neq 0$, alors $f_{01} = \mathcal{K}$, et on obtient, dans (2), $f_{10}^2 - \mathcal{M}f_{10} + \mathcal{K}^2 - \mathcal{B}\mathcal{K} = 0$. Si $\mathcal{K} = 0$, $f_{10} = \mathcal{M}$, sinon $f_{10} = \frac{\mathcal{M} \pm \sqrt{\mathcal{M}^2 + 4\mathcal{K}(\mathcal{B} - \mathcal{K})}}{2}$, d'où les deux droites invariantes

$$F_+(x, y) = 1 + \frac{\mathcal{M} + \sqrt{\Delta}}{2}x + \mathcal{K}y = 0$$

et

$$F_-(x, y) = 1 + \frac{\mathcal{M} - \sqrt{\Delta}}{2}x + \mathcal{K}y = 0$$

$$\text{où } \Delta = \sqrt{\mathcal{M}^2 + 4\mathcal{K}(\mathcal{B} - \mathcal{K})}.$$

On remarque que si $\Delta = 0 \neq \mathcal{K}$, on n'a qu'une droite invariante, à savoir $F(x, y) = 1 + \frac{\mathcal{M}}{2}x + \mathcal{K}y = 0$.

□

En résumé, le système (2.2.1) possède une droite invariante ne passant pas par l'origine si et seulement si une des conditions suivantes est satisfaite:

Condition	droite invariante
$a = 0$ et $b \neq 0$	$f(x, y) = 1 + by = 0$
$k = n$ et $\mathcal{B} \neq 0$	$f(x, y) = 1 + \mathcal{B}y = 0$
$k = n$, $\mathcal{K} \neq 0$ et $\Delta \neq 0$	$f(x, y) = 2 + (\mathcal{M} \pm \sqrt{\Delta})x + 2\mathcal{K}x = 0$
$k = n$, $\mathcal{K} \neq 0$ et $\Delta = 0$	$f(x, y) = 1 + \frac{\mathcal{M}}{2}x + \mathcal{K}y = 0$
$k = n$, $\mathcal{K} = 0$ et $\mathcal{M} \neq 0$	$f(x, y) = 1 + \mathcal{M}x = 0$

TABLEAU 2.2.1. Droites invariantes

2.3. CONIQUES INVARIANTES

Le calcul des coniques irréductibles invariantes a été fait par Mathieu Gagné, utilisant Maple V. Le résultat est résumé ci-dessous. On peut vérifier que ces coniques sont en effet des coniques invariantes pour notre famille de systèmes par calcul direct sur ces coniques.

Théorème 2.3.1. Le système (2.2.1) possède une conique irréductible invariante ne passant pas par l'origine si et seulement si une des conditions suivantes est satisfaite:

Condition	Conique irréductible invariante
$k = m = 0$ et $b = n$	$f_1(x, y) = 1 + tx^2 - ty^2 = 0$, avec $t \neq 0$
$n = m = a = 0$ et $b = k$	$f_2(x, y) = 1 + 2ky + tx^2 + (k^2 - t)y^2 = 0$, avec $t \neq 0$
$k = n$, $m = 2a$ et $b = 2k$	$f_3(x, y) = 1 + 2ax + 2ny + tx^2 - ty^2 = 0$, avec $0 \neq t \neq a^2 - n^2$
$a = m = 0$ $k(k + n + b)(2k - b)(k - b)(k - n) \neq 0$	$f_4(x, y) = (b - k - n)(1 + 2ky) + k(b - 2k)((k - b)x^2 + ny^2) = 0$
$a^2 + 2n^2 + am - kn = 0$ $a^2 + 3n^2 + nb - 2kn = 0$ $n(n^2 + am + a^2) \neq 0$	$f_5(x, y) = n^2 + (n^2 + am + a^2)((ax - ny)^2 + 2ny) = 0$

TABLEAU 2.3.1. Coniques irréductibles invariantes

Remarque 2.3.1. Étudions maintenant la nature de ces coniques irréductibles invariantes. Les coniques données par $f_1(x, y)$ sont des hyperboles, celles données par $f_2(x, y)$, si $k = 0$, sont des hyperboles, ou encore si $k \neq 0$, mais que $t(k^2 - t) < 0$. Par contre, si $t(k^2 - t) > 0$, on a des ellipses et si $t = k^2$, ce sont des paraboles. Celles données par $f_3(x, y)$ sont des hyperboles. Pour ce qui est des coniques données par les $f_4(x, y)$, si $n = 0$, ce sont des paraboles. Enfin, les coniques données par les $f_5(x, y)$ sont des paraboles.

Chapitre 3

CAS (III)

3.1. PRÉLIMINAIRES

On commence maintenant l'étude des cas (III), (II) et (I), ainsi que le cas (H) dans le détail. On devra déterminer dans chaque cas les points singuliers et discuter de leur nature, observer ce qui se passe sur la droite à l'infini et faire la même étude pour les points singuliers situés à l'infini. Pour ce faire, on utilisera les techniques regroupées dans cette section dans les quatre prochains chapitres.

3.1.1. Théorème de Hartman-Grobman

Pour tracer le portrait de phases d'un système $\dot{x} = f(x)$, on s'intéresse d'abord aux points singuliers de ce système, les points x_0 où $f(x_0) = 0$.

Définition 3.1.1. Deux systèmes différentiels $\dot{X} = f(X)$ et $\dot{X} = g(X)$, définis respectivement sur des ouverts de \mathbb{R}^2 , U et V , sont dits *topologiquement équivalents* s'il existe un homéomorphisme $h : U \rightarrow V$, tel que h applique les orbites du champ de vecteurs f sur les orbites du champ g tout en préservant l'orientation des orbites.

Définition 3.1.2. Un point singulier x_0 de $\dot{x} = f(x)$ est dit un point singulier *hyperbolique* si toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne $J_f(x_0)$ ont une partie réelle non-nulle.

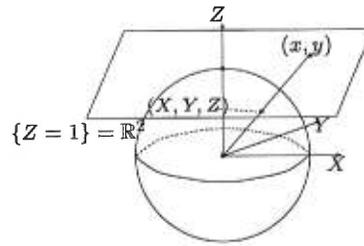
Théorème 3.1.1 (Hartman-Grobman). Soit x_0 un point singulier hyperbolique de $\dot{x} = f(x)$, alors il existe un voisinage de x_0 dans lequel le système $\dot{x} = f(x)$ soit topologiquement équivalent au système linéaire $\dot{x} = J_f(x_0)x$.

3.1.2. Compactification de Poincaré

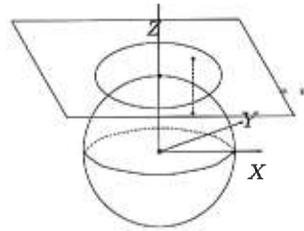
Pour étudier les points singuliers à l'infini d'un système:

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (\text{S})$$

avec $P, Q \in \mathbb{R}[x, y]$, on effectue la compactification de Poincaré (cf. [Vel69]). On représente dans \mathbb{R}^3 avec coordonnées (X, Y, Z) , le plan (x, y) par le plan $Z = 1$. On projette le plan sur la sphère unité S^2 (c'est-à-dire l'ensemble des points $(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$), utilisant la projection centrale. Un point du plan $Z = 1$ est envoyé sur deux points de S^2 diamétralement opposés. Ce processus de projection centrale génère sur le complément de l'équateur de la sphère un champ de vecteurs (S') associé au champ dans le plan (x, y) défini par le système (S). Dans [Vel69], on montre qu'il existe un champ analytique $A(S)$ sur la sphère tel que sa restriction à l'hémisphère nord ($(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ et $Z > 0$) ait un portrait de phases topologiquement équivalent à celui défini par (S). La compactification de (S) est obtenue en considérant la restriction de $A(S)$ à l'hémisphère nord complété de l'équateur. Le champ de vecteurs $A(S)$ est ensuite projeté verticalement sur le plan (x, y) (i.e. $Z = 1$), le portrait de phases apparaissant sur le disque de rayon 1. Sur le diagramme de bifurcation, les portraits des systèmes seront représentés sur des disques. Les points à l'infini sont situés sur l'équateur, lors de la compactification et, après la projection verticale, se retrouvent sur la circonférence du disque de rayon 1.



(a) Étape 1.



(b) Étape 2.

FIG. 3.1.1. Compactification de Poincaré

Pour l'étude des points singuliers à l'infini, de la sphère, on considère deux cartes:

- l'ouvert $X \geq 0$ que l'on projette sur le plan $X = 1$
- l'ouvert $Y \geq 0$ que l'on projette sur le plan $Y = 1$

Donc, par exemple, pour la première carte, si on choisit un point du plan aux coordonnées (x, y) l'application l'envoyant sur un point de la sphère est:

$$(x, y) \mapsto (X(x, y), Y(x, y), Z(x, y)) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \right).$$

Ensuite, de la sphère, on projette sur le plan $X = 1$, de coordonnées (u, z) , avec $(u, z) = \left(\frac{Y}{X}, \frac{Z}{X} \right) = \left(\frac{y}{x}, \frac{1}{x} \right)$. Donc, le changement de coordonnées de cette carte sur l'ouvert $X > 0$ est $(x, y) \mapsto (u, z) = \left(\frac{y}{x}, \frac{1}{x} \right)$. De même, le changement de coordonnées sur la deuxième carte est $(x, y) \mapsto (z, v) = \left(\frac{1}{y}, \frac{x}{y} \right)$. On utilisera ces changements de cartes avec ces changements de coordonnées dans la section sur les points singuliers à l'infini, la section 3.3.

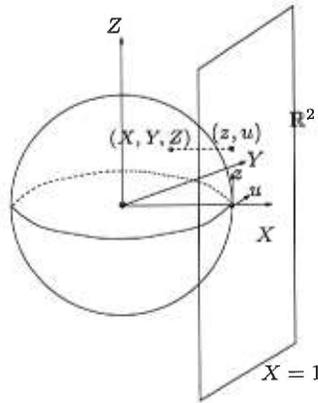


FIG. 3.1.2. Exemple de carte utilisée pour l'étude des points singuliers à l'infini

3.2. ÉTUDE DES POINTS SINGULIERS DANS LE PLAN AFFIN

Le cas (III) impose la condition sur les paramètres $k = n$ dans le système (S). On étudie donc les systèmes suivants:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + kx^2 + mxy + ky^2 \\ \dot{y} = x + ax^2 + bxy + ay^2 \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Ces systèmes sont invariants sous rotations hyperboliques.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta \\ -\sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Cette rotation des axes d'angle θ ramène le système d'équations à un système de la même forme, mais avec coefficients k', m', n', a' et b' , i.e.

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = \eta + k'\zeta^2 + m'\zeta\eta + n'\eta^2 \\ \dot{\eta} = \zeta + a'\zeta^2 + b'\zeta\eta + a'\eta^2 \end{cases}.$$

Le calcul nous donne

$$a' = k \sinh^3 \theta + (m - a) \sinh^2 \theta \cosh \theta + (k - b) \sinh \theta \cosh^2 \theta - a \cosh^3 \theta.$$

Si $a \neq 0$, on peut trouver θ tel que $a' = 0$, car, divisant cette dernière équation par $\cosh \theta$, qui est positif, on obtient une équation cubique en $\tanh \theta$ à coefficients réels. Il suffit de prendre θ tel que:

$$k \tanh^3 \theta + (m - a) \tanh^2 \theta + (k - b) \tanh \theta - a = 0,$$

dans le cas où un tel $\theta \neq \pm 1$, et le système devient sous la forme:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + kx^2 + mxy + ky^2 \\ \dot{y} = x + bxy \end{cases} \quad (3.2.2)$$

L'espace des paramètres de ces systèmes est ici \mathbb{R}^3 , car de tels systèmes dépendent de (k, b, m) . Comme nous sommes intéressés aux systèmes non-linéaires, il faut considérer $(k, b, m) \neq (0, 0, 0)$. On peut donc changer l'échelle sur les axes et considérer l'espace des paramètres comme étant le plan projectif $P_2(\mathbb{R})$, que l'on peut représenter comme un disque dont les points de la circonférence diamétralement opposés sont identifiés. Plaçons la droite $m = 0$ comme la droite à l'infini du plan (k, b) . Puisque, pour $m \neq 0$, on peut faire un changement d'échelle sur les axes k et b , on supposera que $m > 0$. On remarque que lorsque $m = 0$, puisqu'on a la condition $a = 0$, on se ramène au cas (II), traité au chapitre suivant. Donc, dans la suite du chapitre, on considérera $m > 0$.

On a un point singulier (x_0, y_0) lorsque $\frac{dx}{dt}(x_0, y_0) = \frac{dy}{dt}(x_0, y_0) = 0$. Si $x = 0$, alors nécessairement $y + ky^2 = 0$, donc $y = 0$ ou $y = -\frac{1}{k}$, si $k \neq 0$, ce qui nous donne les points singuliers $0 = (0, 0)$ et $P_k = (0, -\frac{1}{k})$, si $k \neq 0$. Autrement, si $1 + by = 0$, ce qui implique $y = -\frac{1}{b}$, si $b \neq 0$, d'où, $x = \frac{m \pm \sqrt{\Delta}}{2kb}$, où $\Delta = m^2 + 4k(b - k)$. On trouve donc deux points singuliers, $P_{\pm} = (\frac{m \pm \sqrt{\Delta}}{2kb}, -\frac{1}{b})$,

si $kb \neq 0$ et si $\Delta \geq 0$, un seul autre point singulier si $\Delta = 0$.

Le linéarisé du système au point (x_0, y_0) , nous donne

$$D\mathbb{X}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 2kx_0 + my_0 & mx_0 + 2ky_0 + 1 \\ 1 + by_0 & bx_0 \end{pmatrix}$$

Proposition 3.2.1. Pour le cas où $m > 0$,

- i. Si $\Delta = m^2 + 4k(b - k) < 0$ et
 - (i) $k > 0$, P_k est un foyer attractif;
 - (ii) $k < 0$, P_k est un foyer répulsif.
- ii. Si $\Delta \geq 0$ et
 - (i) $k = b$, P_k est un col-noeud;
 - (ii) $\text{sgn } k(b - k) = 1$, on a P_k un point de selle;
 - (iii) autrement, on a un noeud; attractif si $k > 0$, répulsif si $k < 0$.

DÉMONSTRATION. On trouve $D\mathbb{X}(0, -\frac{1}{k}) = \begin{pmatrix} -\frac{m}{k} & -1 \\ 1 - \frac{b}{k} & 0 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres sont

$$\lambda_+^{(k)} = \frac{-m + \sqrt{\Delta}}{2k} \text{ et } \lambda_-^{(k)} = \frac{-m - \sqrt{\Delta}}{2k}$$

si $\Delta < 0$, $\lambda_{\pm}^{(k)}$ est complexe et si $\frac{-m}{2k} > 0$ (donc $k < 0$), on a P_k un foyer répulsif. Si $k > 0$, il est attractif. Dans le cas où $\Delta \geq 0$, si $k = b$, on a $\lambda_+^{(k)} = 0$ et $\lambda_-^{(k)} = -\frac{m}{k}$, le point singulier a une de ses valeur propre nulle, l'autre non. Si $4k(b - k) > 0$ (ce qui entraîne $\text{sgn}(k) = \text{sgn}(b - k)$) et $k > 0$, alors $\lambda_+^{(k)} > 0$ et $\lambda_-^{(k)} < 0$ et donc P_k est un point de selle. On remarque qu'en inversant le signe de k , on inverse le signe des valeurs propres et la nature du point singulier demeure inchangée. Enfin, si $4k(b - k) < 0$ et $k > 0$, on aura $\lambda_+^{(k)} < 0$ et $\lambda_-^{(k)} < 0$, donc P_k est un noeud attractif. La même remarque s'applique en ce qui concerne le changement

de signe du paramètre k , le signe des valeurs propres changeant avec celui de k , d'où, si $k < 0$, on a $\lambda_+^{(k)} > 0$ et $\lambda_-^{(k)} > 0$ et P_k est un noeud répulsif. \square

Remarque 3.2.1. Dans le cas où $k = 0$, on trouve le point singulier $P_{\{k=0\}} = (\frac{-1}{m}, \frac{-1}{b})$, avec les valeurs propres $\lambda_1^0 = \frac{-m}{b}$ et $\lambda_2^0 = \frac{-b}{m}$. P_0 est donc un noeud, attractif si $b > 0$, répulsif si $b < 0$.

On s'intéresse maintenant aux points singuliers P_{\pm} , aux régions de l'espace des paramètres où ils sont définis ($kb \neq 0$ et $\Delta \geq 0$).

Proposition 3.2.2. Le point $P_+ = (\frac{m+\sqrt{\Delta}}{2kb}, \frac{-1}{b})$ est:

- i. un col-noeud si $\Delta = 0$;
- ii. si $\Delta > 0$, un noeud répulsif si b et k sont tous deux positifs, attractif s'ils sont tous deux négatifs;
- iii. si $\Delta > 0$, un point de selle si b et k sont de signes opposés.

DÉMONSTRATION. On trouve d'abord le linéarisé du système:

$$D\mathbb{X}(P_+) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\Delta}}{b} & \frac{m}{2kb}(m + \sqrt{\Delta}) - \frac{2k}{b} + 1 \\ 0 & \frac{m+\sqrt{\Delta}}{2k} \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1^+ = \frac{\sqrt{\Delta}}{b}$ et $\lambda_2^+ = \frac{m+\sqrt{\Delta}}{2k}$. Donc, si $\Delta = 0$, on aura $\lambda_1^+ = 0 \neq \lambda_2^+$, le point singulier est donc un col-noeud. Bien entendu, il est clair que le signe de b reste le même que celui de λ_1^+ et le signe de k que celui de λ_2^+ , d'où la conclusion. \square

Proposition 3.2.3. Le point $P_- = (\frac{m-\sqrt{\Delta}}{2kb}, \frac{-1}{b})$ est:

- i. un col-noeud si $\Delta = 0$ ou si $b = k$;
- ii. un noeud répulsif si $b > 0$ et $b > k$, attractif si $b < 0$ et $b < k$;
- iii. un point de selle si $k > b > 0$ ou si $0 > b > k$.

DÉMONSTRATION. Le linéarisé étant:

$$D\mathbb{X}(P_-) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{\Delta}}{b} & \frac{m}{2kb}(m - \sqrt{\Delta}) - \frac{2k}{b} + 1 \\ 0 & \frac{m - \sqrt{\Delta}}{2k} \end{pmatrix}$$

les valeurs propres sont donc $\lambda_1^- = -\frac{\sqrt{\Delta}}{b}$ et $\lambda_2^+ = \frac{m - \sqrt{\Delta}}{2k}$.

Si $\Delta = 0$, on a $\lambda_2^- = \frac{m}{2k} \neq 0 = \lambda_1^-$; si $b - k = 0$, on a $\lambda_1^- = -\frac{m}{b} \neq 0 = \lambda_2^-$.

Si $b > 0$, on a $\lambda_1^- < 0$ et si $b - k > 0$, on a $\lambda_2^- < 0$ peu importe le signe de k . La conclusion découle immédiatement. □

3.3. ÉTUDE DES POINTS SINGULIERS À L'INFINI ET COMPACTIFICATION DE POINCARÉ

On étudie le système (3.2.2) et on effectue la compactification de Poincaré, donc, pour la première carte, avec le changement de coordonnées $u = \frac{y}{x}$, $z = \frac{1}{x}$, $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{x^2}(y + kx^2 + mxy + ky^2) = -uz - k - mu - ku^2$.

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} = -\frac{y}{x^2}(y + kx^2 + mxy + ky^2) + \frac{1}{x}(x + bxy) \\ &= -u^2 - k\frac{u}{z} - m\frac{u^2}{z} - k\frac{u^3}{z} + 1 + b\frac{u}{z}. \end{aligned}$$

Comme on veut étudier les point singuliers à l'infini du système sur cette carte (c'est à dire $z = 0$), on effectue un changement de l'échelle du temps $t = z\tau$. Le système devient donc:

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = -z(uz + mu + ku^2 + k) \\ \frac{du}{d\tau} = z(1 - u^2) + u(b - k - mu - ku^2). \end{cases} \quad (3.3.1)$$

De même, dans la deuxième carte ($Y > 0$, avec changement de coordonnées $z = \frac{1}{y}$, $v = \frac{x}{y}$), on obtient:

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = -v(z + b) \\ \frac{dv}{dt} = -v^2 + \frac{k}{z} + m\frac{v}{z} + 1 + (k - b)\frac{v^2}{z}. \end{cases}$$

où, avec le changement de l'échelle du temps introduit plus haut ($t = z\tau$),

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = -zv(z + b) \\ \frac{dv}{d\tau} = z(1 - v^2) + k + mv + (k - b)v^2. \end{cases} \quad (3.3.2)$$

Dans la première carte, un point singulier à l'infini est de la forme ($z = 0, u = u_0$) et satisfaisant $\dot{z} = \dot{u} = 0$. Un point singulier doit donc satisfaire: $u_0(ku_0^2 + mu_0 + (k - b)) = 0$, d'où les trois solutions: $u_0 = 0$, $u_{\pm} = \frac{-m \pm \sqrt{\Delta}}{2k}$. Les points singuliers à l'infini sont donc $P_0 = (0, 0)$ et, si $k \neq 0$ et $\Delta \geq 0$, $P_{\pm} = (0, \frac{-m \pm \sqrt{\Delta}}{2k})$, ces deux derniers points singuliers étant confondus si $\Delta = 0$.

Dans la deuxième carte, on a les points singuliers à l'infini $P_{\pm} = (z = 0, v_{\pm} = \frac{-m \pm \sqrt{\Delta}}{2(k-b)})$, si $b - k \neq 0$ et $\Delta \geq 0$.

Le linéarisé du système (3.3.1) en (z_0, u_0) est:

$$D\tilde{X}(z_0, u_0) = \begin{pmatrix} -2u_0z_0 - mu_0 - ku_0^2 - k & -z_0^2 - mz_0 - 2kz_0 \\ 1 - u_0^2 & -2u_0z_0 + b - k - 2mu_0 - 3ku_0^2 \end{pmatrix} \quad (3.3.3)$$

On peut maintenant étudier la nature des points singuliers à l'infini trouvés ci-haut.

Proposition 3.3.1. $P_0 = (z = 0, u = 0)$ est:

- i. un col-noeud si $b = 0$ ou si $b = k$
- ii. un point de selle si $0 < k < b$ ou si $b < k < 0$
- iii. un noeud autrement; attractif si $k > 0$, répulsif si $k < 0$

DÉMONSTRATION. On obtient le champ linéarisé au point $(0, 0)$,

$$D\tilde{X}(0, 0) = \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 1 & b - k \end{pmatrix}$$

le système linéarisé devient

$$\begin{cases} \dot{z} = -kz \\ \dot{u} = z + (b - k)u \end{cases}$$

avec valeurs propres $\lambda_{0,\infty}^1 = -k$ et $\lambda_{0,\infty}^2 = b - k$.

alors si $b = 0$, on a $\lambda_{0,\infty}^1 = 0$ et si $b = k$, alors $\lambda_{0,\infty}^2 = 0$. Le reste de la preuve est immédiat. □

Proposition 3.3.2. Le point singulier $P_{+\infty}$ est:

- i. un col-noeud si $\Delta = 0$ ou si $b = 0$. Si $\Delta = b = 0$, $P_{+\infty}$ est un point singulier à région elliptique;
- ii. un point de selle si b et k sont de signe opposé;
- iii. un noeud autrement, attractif si $b > 0$, répulsif si $b < 0$.

DÉMONSTRATION. on calcule la matrice du linéarisé:

$$D\tilde{X}(P_{+\infty}) = D\tilde{X}(0, u_+) = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ \frac{8k^2 - 2m^2 + 2m\sqrt{\Delta} - 4kb}{4k^2} & \frac{-1}{2k}(\Delta - m\sqrt{\Delta}) \end{pmatrix}$$

d'où les valeurs propres $\lambda_{+, \infty}^1 = -b$ et $\lambda_{+, \infty}^2 = \frac{-1}{2k}(\Delta - m\sqrt{\Delta})$. Alors si $b = 0 \neq \Delta$, on a $\lambda_{+, \infty}^1 = 0 \neq \lambda_{+, \infty}^2$. Si $b \neq 0 = \Delta$, on a $\lambda_{+, \infty}^1 \neq 0 = \lambda_{+, \infty}^2$.

□

3.4. INTÉGRALES PREMIÈRES

Comme on l'a vu précédemment, le système satisfaisant au cas (III) possède trois droites invariantes. Voici des tableaux présentant les intégrales premières trouvées grâce à la méthode de Darboux, introduite au chapitre 2.

Dans le cas générique $mbk(k-b)\Delta \neq 0$, on a trois droites invariantes:

$$F_1(x, y) = 1 + by,$$

$$F_2(x, y) = \frac{m+\sqrt{\Delta}}{2}x + ky + 1$$

et

$$F_3(x, y) = \frac{m-\sqrt{\Delta}}{2}x + ky + 1.$$

avec, $\frac{dF_i}{dt} = \frac{\partial F_i}{\partial x}P + \frac{\partial F_i}{\partial y}Q = F_i K_i$, pour $i = 1, 2, 3$, où

$$K_1(x, y) = bx,$$

$$K_2(x, y) = kx + \frac{m+\sqrt{\Delta}}{2}y$$

$$K_3(x, y) = kx + \frac{m-\sqrt{\Delta}}{2}y.$$

On trouve la combinaison linéaire $\frac{2k\sqrt{\Delta}}{b}K_1 + (m - \sqrt{\Delta})K_2 - (m + \sqrt{\Delta})K_3 = 0$. D'où, la méthode de Darboux nous assure que $F(x, y) = F_1^{\frac{2k\sqrt{\Delta}}{b}} F_2^{(m-\sqrt{\Delta})} F_3^{-(m+\sqrt{\Delta})}$ est une intégrale première. Donc, pour $\Delta > 0$, prenant la fonction univoque, on a:

$$F(x, y) = |1 + by|^{\frac{2k\sqrt{\Delta}}{b}} \left| \frac{m-\sqrt{\Delta}}{2}x + ky + 1 \right|^{-(m+\sqrt{\Delta})} \left| \frac{m+\sqrt{\Delta}}{2}x + ky + 1 \right|^{(m-\sqrt{\Delta})}.$$

Présentons les intégrales premières trouvées grâce à la transformation (2.0.6) tirée de [RJ89], qui permet de communiquer entre les systèmes étudiés dans le présent mémoire et les systèmes avec centre, étudiés dans [Sch93a], où l'on dresse la listes des intégrales premières pour ces systèmes. D'abord les intégrales premières pour les cas génériques, c'est-à-dire où

$$k b m(k - b)\Delta \neq 0$$

Condition	Intégrale première
$\Delta > 0$	$ 1 + by ^{-\frac{k}{b}} \left \frac{m - \sqrt{\Delta}}{2} x + ky + 1 \right ^{\frac{m + \sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}}} \left \frac{m + \sqrt{\Delta}}{2} x + ky + 1 \right ^{\frac{\sqrt{\Delta} - m}{2\sqrt{\Delta}}}$
$\Delta < 0$	$ 1 + by ^{-\frac{k}{b}} \left(\left(\left(\frac{m}{2} x + ky + 1 \right)^2 - \frac{\Delta x^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(\frac{m}{\sqrt{-\Delta}} \arctan \left(\frac{\sqrt{-\Delta} x}{mx + 2ky + 2} \right) \right) \right)$

TABLEAU 3.4.1. *Intégrales premières, cas (III), $k b m(k - b)\Delta \neq 0$*

Ensuite, on présente les intégrales premières pour les cas dégénérés:

$$k b m(k - b)\Delta = 0$$

Condition	Intégrale première
$\Delta = 0$	$(1 + \frac{m}{2}x + ky) (1 + by)^{-\frac{k}{b}} \exp \left(\frac{1 + ky}{\frac{1}{2}mx + ky + 1} \right)$ si $b \neq 0$ $(1 + \frac{m}{2}x + ky) \exp \left(\frac{1 + ky}{\frac{1}{2}mx + ky + 1} - ky \right)$ si $b = 0$
$b = 0 \neq k$	$\left(1 + \frac{m + \sqrt{\Delta}}{2} x + ky \right)^{\frac{m - \sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}}} \left(1 + \frac{m - \sqrt{\Delta}}{2} x + ky \right)^{\frac{-m - \sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}}} e^{-2ky}$ si $\Delta > 0$ $\left(\left(\left(\frac{m}{2} x + ky + 1 \right)^2 - \frac{\Delta x^2}{4} \right)^{\frac{1}{2k^2}} \exp \left(\frac{-m}{k^2 \sqrt{-\Delta}} \arctan \left(\frac{\sqrt{-\Delta} x}{mx + 2ky + 2} - ky \right) \right) \right)$ si $\Delta < 0$
$k = 0 \neq b$	$(1 + mx)^{-b^2} (1 + by)^{m^2} e^{mb(bx - my)}$
$k = b \neq 0$	$(1 - by)^{(k^2 - m^2)} (mx + ky + 1)^{-k^2} e^{\frac{km(kx + my)}{1 + ky}}$
$k = b = 0$	$(1 + mx)^2 e^{m^2 y^2 - 2mx}$

TABLEAU 3.4.2. *Intégrales premières, cas (III), $k b m(k - b)\Delta = 0$*

3.5. PORTRAITS DE PHASE

Voici les portraits de phase des systèmes satisfaisant au cas (*III*), séparés selon qu'ils soient dans les cas génériques ou dégénérés, de codimension 1 ou 2. Les portraits de phases apparaîtront sans les flèches pour éviter d'alourdir les diagrammes.

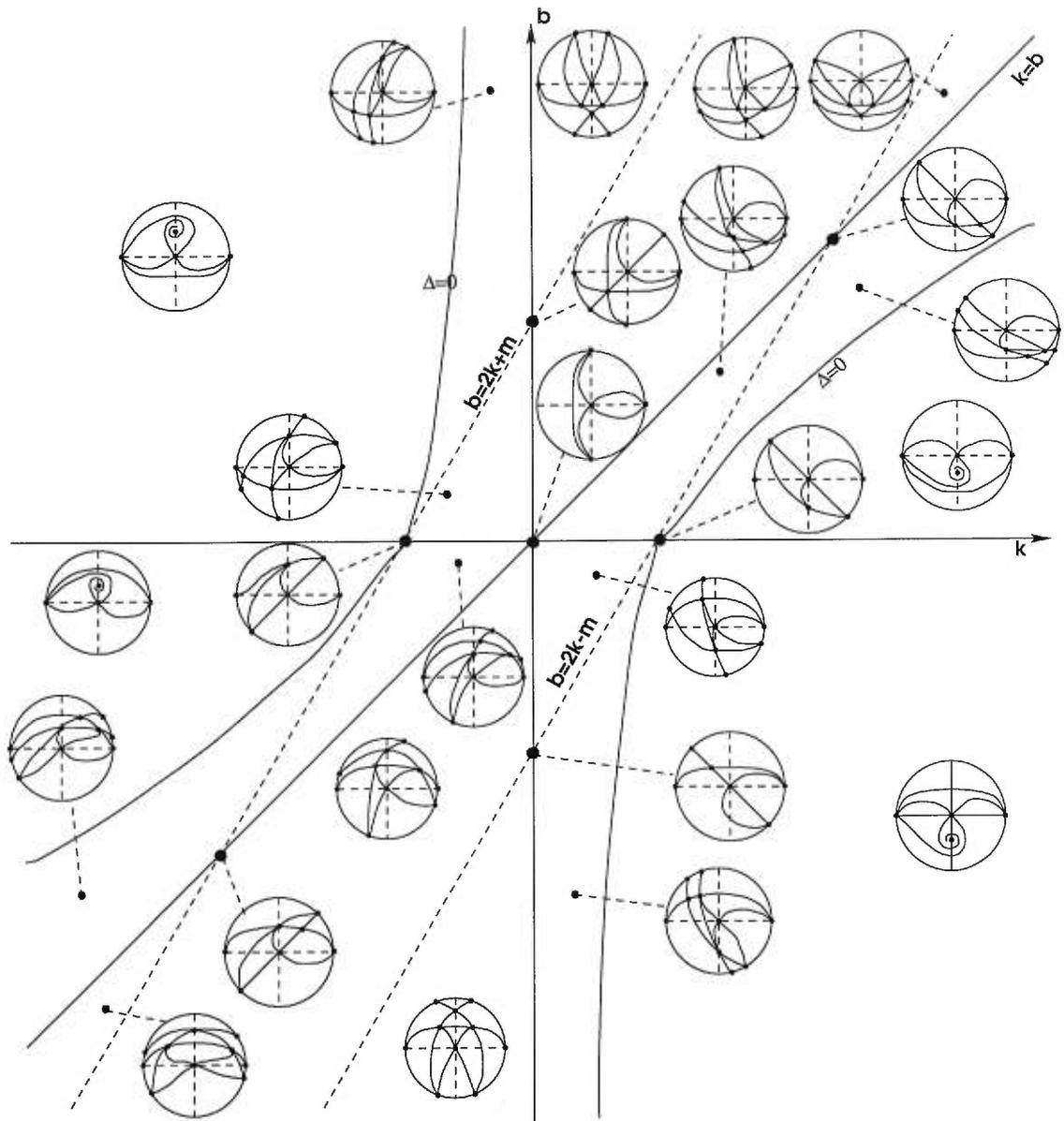


FIG. 3.5.1. Diagramme de bifurcation, cas (III) avec $m > 0$, cas génériques et points de bifurcation dégénérés à codimension 2

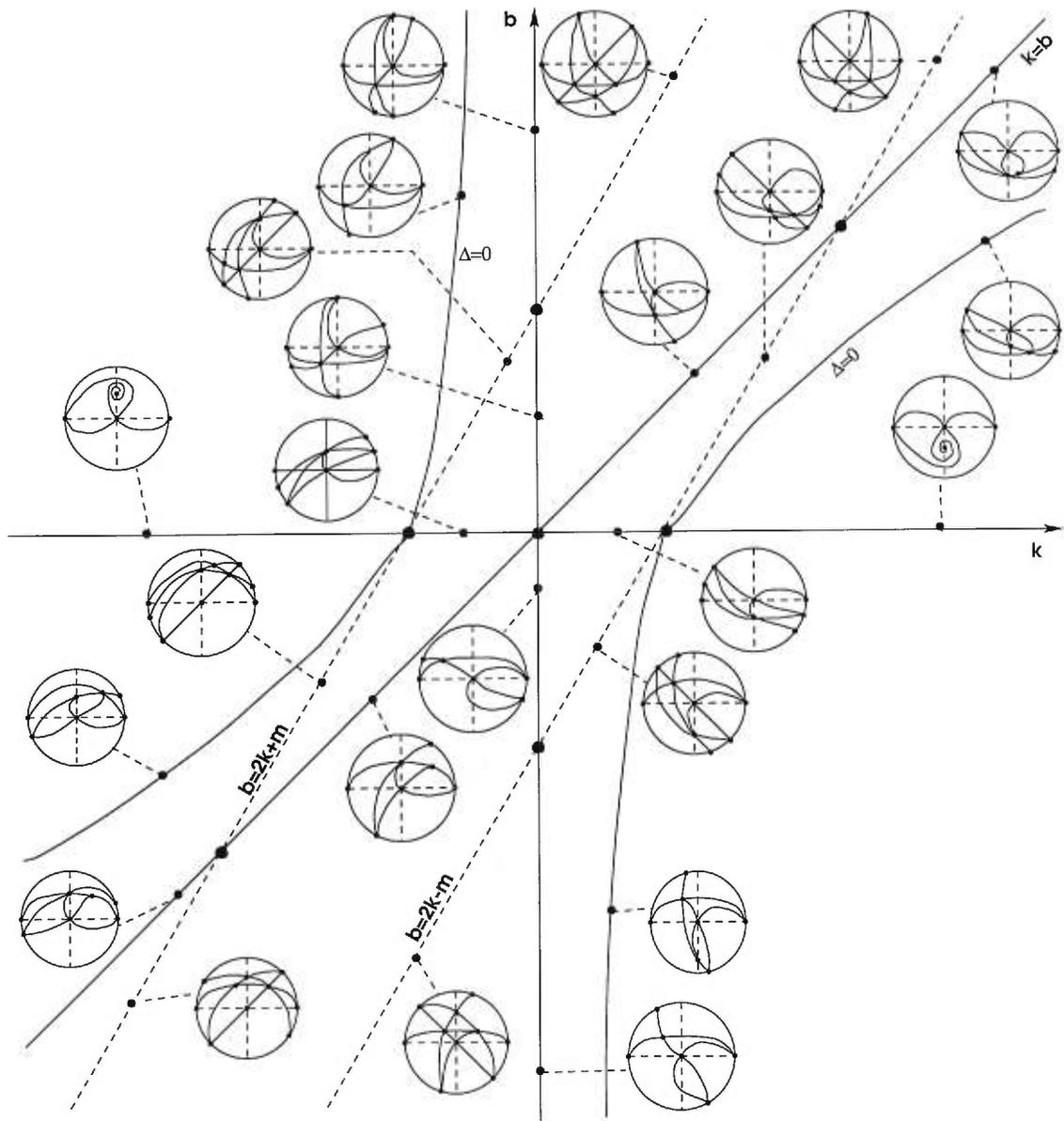


FIG. 3.5.2. Diagramme de bifurcation, cas (III) avec $m > 0$, points de bifurcation dégénérés à codimension 1

Chapitre 4

CAS (II)

Le cas (II) impose la condition sur les paramètres $a = m = 0$. Le système étudié est donc de la forme:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + kx^2 + ny^2 \\ \dot{y} = x + bxy \end{cases} \quad (4.0.1)$$

Le système dépend de trois paramètres ici, soient $(k, n, b) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. On voit que le changement de coordonnées $X = lx, Y = ly, l \neq 0$ nous ramène à un système de la forme:

$$\begin{cases} \dot{X} = Y + \frac{k}{l}X^2 + \frac{n}{l}Y^2 \\ \dot{Y} = X + \frac{b}{l}XY \end{cases},$$

d'où $[k, n, b] = [\frac{k}{l}, \frac{n}{l}, \frac{b}{l}]$, l'espace des paramètres se représente par le plan projectif $P_2(\mathbb{R})$. On place l'équation $n = 0$ comme la droite à l'infini de $P_2(\mathbb{R})$. Il faudra donc séparer les cas où $n = 0$ de ceux où $n \neq 0$.

4.1. CAS $n \neq 0$

4.1.1. Étude des points singuliers dans le plan affín

On a point singulier lorsque $y + kx^2 + ny^2 = x + bxy = 0$, donc on trouve soit $x = 0$ ou alors $y = -\frac{1}{b}$ ce qui mène aux points singuliers $(0, 0)$ et $P_n = (0, -\frac{1}{n})$

si $n \neq 0$, pour la première condition, et $P_{\pm} = (\pm \frac{1}{b} \sqrt{\frac{b-n}{k}}, -\frac{1}{b})$ si $bk \neq 0$ et $(b-n)k \geq 0$, pour la deuxième. On note que si $b-n=0$, on a que les deux points singuliers P_+ et P_- se confondent avec le point P_n .

Calculant la matrice du linéarisé du système (4.0.1) au point (x_0, y_0) , on obtient:

$$D\mathbb{X}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 2kx_0 & 1 + 2ny_0 \\ 1 + by_0 & bx_0 \end{pmatrix} \quad (4.1.1)$$

ce qui permettra d'étudier la nature locale des points singuliers. On considère le cas où $n \neq 0$ et, en particulier, lorsque $n > 0$. Le cas $n < 0$ se ramène au cas $n > 0$ par un changement de coordonnées affines.

Proposition 4.1.1. Pour $n > 0$, on a que le point singulier P_n est:

- i. un centre si $b < n$;
- ii. un point de selle si $b > n$.

DÉMONSTRATION. Le système linéarisé au point $P_n = (0, -\frac{1}{n})$ est donné par la matrice:

$$D\mathbb{X}(0, -\frac{1}{n}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 - \frac{b}{n} & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont $\lambda_n^{\pm} = \pm \sqrt{\frac{b-n}{n}}$, donc elles sont imaginaires pures et conjuguées complexes si $b-n < 0$ et réelles de signe opposé si $b-n > 0$.

□

Le cas $b = n$, non traité ici, où l'on voit P_+ et P_- coïncider avec P_n sera étudié à l'aide des courbes algébriques invariantes lorsqu'on les aura exposées. Dans le cas où $b \neq 0$ et $(b - n)k > 0$, on peut étudier les points singuliers P_{\pm} .

Proposition 4.1.2. Pour $n > 0$, $bk \neq 0$ et $(b - n)k > 0$, on a que le point singulier P_+ est:

- i. un noeud répulsif si $b > n > 0$ et $k > 0$ ou si $0 < b < n$ et $k < 0$;
- ii. un point de selle si b et k sont tous deux négatifs;
- iii. inexistant, sinon.

DÉMONSTRATION. La matrice représentant la partie linéaire du système (4.0.1) au point P_+ donne:

$$D\mathbb{X}\left(\frac{1}{b}\sqrt{\frac{b-n}{k}}, -\frac{1}{b}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{b}\sqrt{k(b-n)} & 1 - \frac{2n}{b} \\ 0 & \sqrt{\frac{b-n}{k}} \end{pmatrix}$$

d'où les valeurs propres $\lambda_1^+ = \frac{2}{b}\sqrt{k(b-n)}$ et $\lambda_2^+ = \sqrt{\frac{b-n}{k}}$.

Comme les valeurs propres sont réelles dans l'unique cas où $(b - n)$ et k sont du même signe, on retrouve la région de l'espace des paramètres décrite dans les points *i*, *ii* et *iii* de la proposition. La nature de ces points se retrouve facilement. Dans le cas où $0 < b < n$ mais $k > 0$, on aura deux valeurs propres imaginaires pures, mais qui ne seront pas conjugués complexes.

□

Proposition 4.1.3. Pour $n > 0$, $b \neq 0$ et $(b - n)k > 0$, on a que le point singulier P_- est:

- i. un noeud attractif si $b > n > 0$ et $k > 0$ ou si $0 < b < n$ et $k < 0$;
- ii. un point de selle si b et k sont tous deux négatifs;
- iii. inexistant, sinon.

DÉMONSTRATION. Calculant la matrice du linéarisé du système au point singulier P_- , on obtient:

$$D\mathbb{X}\left(-\frac{1}{b}\sqrt{\frac{b-n}{k}}, -\frac{1}{b}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{b}\sqrt{k(b-n)} & 1 - \frac{2n}{b} \\ 0 & -\sqrt{\frac{b-n}{k}} \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont donc $\lambda_1^+ = -\frac{2}{b}\sqrt{k(b-n)}$ et $\lambda_2^+ = -\sqrt{\frac{b-n}{k}}$, c'est-à-dire, l'inverse additif des valeurs propres respectives associées au point P_+ (voir proposition précédente). Le résultat en découle immédiatement. \square

4.1.2. Étude des points à l'infini

On utilise les mêmes cartes que dans le chapitre précédent, c'est-à-dire la compactification de Poincaré. On prend les ouverts de la sphère $X > 0$ et $Y > 0$ que l'on projette par le centre de la sphère sur, respectivement, les plans $X = 1$ et $Y = 1$. Ça induit les changements de coordonnées $(x, y) \mapsto (z = \frac{1}{x}, u = \frac{y}{x})$, pour la première carte et $(x, y) \mapsto (z = \frac{1}{y}, v = \frac{x}{y})$, pour la deuxième. Avec le changement de l'échelle du temps $t = z\tau$, on obtient, dans la première carte, le système:

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = -z(uz + k + nu^2) \\ \frac{du}{d\tau} = z(1 - u^2) + u(b - k - nu^2). \end{cases} \quad (4.1.2)$$

Dans la deuxième carte, on a le système:

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = -zv(z + b) \\ \frac{dv}{d\tau} = z(1 - v^2) + v^2(k - b) + n. \end{cases} \quad (4.1.3)$$

Les points singuliers à l'infini sont les points de la forme $(z, u) = (0, u_0)$ et satisfont $\frac{dz}{d\tau}(0, u_0) = \frac{du}{d\tau}(0, u_0) = 0$.

Dans la première carte, les points singuliers à l'infini sont: $(z = 0, u = 0)$, et

$(z = 0, u^2 = \frac{b-k}{n})$, d'où les points $P_{\infty,0} = (0,0)$ et $P_{\infty,\pm} = (0, \pm\sqrt{\frac{b-k}{n}})$ si $b - k \geq 0$. Dans la deuxième carte, on a les points singuliers $(z = 0, v_{\pm} = \sqrt{\frac{n}{b-k}})$, ce qui n'apporte pas d'autre point singulier que ceux identifiés sur la première carte.

Maintenant, on calcule la matrice du système linéarisé sur la première carte, en un point (z_0, u_0) .

$$D\tilde{X}(z_0, u_0) = \begin{pmatrix} -2u_0z_0 - k - nu_0^2 & -z_0^2 - 2nu_0z_0 \\ 1 - u_0^2 & -2u_0z_0 + b - k - 3nu_0^2 \end{pmatrix} \quad (4.1.4)$$

Reste à étudier la nature des points singuliers à l'infini. On traite le cas où $b \neq k$, le cas $b = k$ sera étudié à l'aide des intégrales premières.

Proposition 4.1.4. Le point singulier à l'infini $P_{\infty 0}$ est:

- i. un point de selle si $b > k > 0$ ou si $0 > k > b$;
- ii. un noeud sinon, attractif si $k > 0$, répulsif si $k < 0$.

DÉMONSTRATION. La matrice du linéarisé du système (4.1.2) au point $(0,0)$ donne:

$$D\tilde{X}(0,0) = \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 1 & b - k \end{pmatrix}$$

ce qui nous donne les valeurs propres $\lambda_1^{\infty 0} = -k$ et $\lambda_2^{\infty 0} = b - k$. Le résultat suit immédiatement. \square

Proposition 4.1.5. Si $b - k > 0$, les point singuliers à l'infini $P_{\infty+}$ et $P_{\infty-}$ ont la même nature locale, à savoir:

- i. des points de selle si $k < b < 0$ ou si $0 < b < k$;
- ii. des noeuds attractifs si $b < k < 0$;
- iii. des noeuds répulsifs si $0 < k < b$.

DÉMONSTRATION. La matrice du linéarisé du système (4.1.2) au point $P_{\infty+}$, la même que celle au point $P_{\infty-}$, nous donne:

$$D\tilde{\mathbb{X}}(P_{\infty+}) = \begin{pmatrix} -k - (b - k) & 0 \\ 1 - \frac{b-k}{n} & b - k - 3(b - k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ 1 - \frac{b-k}{n} & -2(b - k) \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres associées à un de ces points singuliers à l'infini sont $\lambda_{1\pm\infty} = -b$, $\lambda_{2\pm\infty} = -2(b - k)$. Le reste de la preuve suit immédiatement. \square

4.2. CAS $n = 0$

Le système, dans le cas où le paramètre n est nul, devient:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + kx^2 \\ \dot{y} = x + bxy \end{cases}. \quad (4.2.1)$$

Les paramètres, dans ce cas-ci, sont (k, b) dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. On s'assure, par changement linéaire de coordonnées, que c'est une droite dans l'espace $P_2(\mathbb{R})$, soit $P_1(\mathbb{R})$.

4.2.1. Dans le plan affín

Les points singuliers finis sont $(0, 0)$ et $P_{\pm} = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{bk}}, -\frac{1}{b}\right)$ si $bk \geq 0$.

Comme précédemment, on détermine la nature locale de ces points singuliers en calculant la matrice de la partie linéaire du système (4.2.1) évaluée en ce point singulier:

$$D\mathbb{X}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 2kx_0 & 1 \\ 1 + by_0 & bx_0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D\mathbb{X}(P_{\pm}) = \begin{pmatrix} \pm \frac{2k}{\sqrt{bk}} & 1 \\ 0 & \pm \frac{b}{\sqrt{bk}} \end{pmatrix}$$

On remarque qu'alors $\lambda_1^+ \lambda_2^+ = \lambda_1^- \lambda_2^- = 2$, ce qui nous assure que les singularités P_+ et P_- , dans le cas où $bk \geq 0$, sont de type noeud. L'espace des paramètres étant représenté par la droite projective avec coordonnées homogènes k et b , dans le premier quadrant, on a P_+ attractif et P_- répulsif, et dans le troisième quadrant, P_+ répulsif et P_- attractif.

4.2.2. À l'infini

On effectue encore la compactification de Poincaré sur notre système. Le changement de coordonnées $(x, y) \mapsto (z = \frac{1}{x}, u = \frac{y}{x})$, correspondant à la première carte, suivi du changement de l'échelle du temps $t = z\tau$, nous mène au système:

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = z(k - zu) \\ \frac{du}{d\tau} = z(1 - u^2) + u(b - k) \end{cases} .$$

Le seul point singulier à l'infini ($z = 0$) sur cette carte est le point $P_{u\infty}^0 = (z = 0, u = 0)$, sauf si $b = k$, où, alors, $P = (z = 0, u)$ est toujours point singulier.

Le calcul de la matrice du linéarisé dans un tel cas nous mène à $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, les valeurs propres $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = k$ nous assurant que localement, ce sont des col-noeuds. Le même procédé sur la deuxième carte nous donne le système:

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = -zv(z + b) \\ \frac{dv}{d\tau} = z(1 - v^2) - v^2(k - b) \end{cases} .$$

Encore ici, on n'a qu'un seul point singulier à l'infini, à savoir le point $P_{v\infty}^0 = (z = 0, v = 0)$, dans le cas où $k \neq b$. Autrement, on a aussi $P_{v\infty} = (z = 0, v)$

toujours des points singuliers, correspondant à ceux trouvés sur l'autre carte. On va étudier la nature de ces points singuliers.

Proposition 4.2.1. Le point singulier $P_{u\infty}^0 = (z = 0, u = 0)$, au cas où $k(k-b) \neq 0$, est:

- i. un noeud si $k(k-b) > 0$, attractif si $k > 0$, répulsif si $k < 0$;
- ii. un col si $k(k-b) < 0$.

DÉMONSTRATION. Le système linéarisé au point (z, u) est:

$$D\mathbb{X}(z, u) = \begin{pmatrix} -2zu + k & -z^2 \\ 1 - u^2 & -2zu - (k - b) \end{pmatrix}$$

d'où

$$D\mathbb{X}(0, 0) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 1 & (k - b) \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont donc $\lambda_{u\infty 0}^1 = k$ et $\lambda_{u\infty 0}^2 = k - b$. Le résultat est immédiat. \square

4.3. INTÉGRALES PREMIÈRES

Comme au chapitre précédent, nous présentons un tableau donnant les intégrales premières d'un système (S) satisfaisant les conditions correspondant au cas (II), $a = m = 0$. Ces intégrales premières sont obtenues de [Sch93a] avec la

transformation (2.0.6).

Condition	Intégrale première
$bk(k-b)(2k-b) \neq 0$	$\{k(b-2k)((k-b)x^2 + ny^2) + (b-k-n)(1+2ky)\} 1+by ^{-\frac{2k}{b}}$
$b=0 \neq k$	$e^{-2ky}[2k^3x^2 + k^2ny^2 + 2k^2y - 2kny + k + n]$
$k=0 \neq b$	$e^{(b^3x^2 + b^2ny^2)} \left(\frac{e^{by}}{1+by}\right)^{2(n-b)}$
$(k-b)=0 \neq k$	$e^{\frac{b^3x^2 + b + n + 2(b-2n)(1+by)}{(1+by)^2}} 1+by ^{-2n}$
$(2k-b)=0 \neq k$	$e^{\frac{-\frac{1}{2}b^3x^2 - n + b + n(1+by)^2}{(1+by)}} 1+by ^{b-2n}$
$k=b=0$	$3(x^2 - y^2) - 2ny^3$

TABLEAU 4.3.1. *Intégrales premières, cas (II)*

Il faut rajouter, grâce à la proposition (2.2.1), que sur $b = k + n$, on a deux droites invariantes supplémentaires, soient $x + y = 0$ et $x - y = 0$. La proposition (2.2.2) nous informe que si $b \neq 0$, on a la droite invariante $1 + by = 0$, comme on peut le vérifier dans le tableau donnant les intégrales premières pour le cas (II) ci-haut. Une autre remarque intéressante à tirer de ces résultats est que, où P_+ et P_- existent (les lignes 1, 4 et 5), ils sont toujours situés à la fois sur la droite $1 + by = 0$ et sur la première composante de la courbe engendrée par l'intégrale première (la conique dans le premier cas, annule l'argument de l'exponentielle pour les autres). Reste à traiter le cas $b = n$, où P_+ et P_- se confondent avec P_n .

L'étude se fait à l'aide des intégrales premières, listées ci-haut. On se ramène, dans l'espace des paramètres, au cas affiné en considérant pour $n \neq 0$ la paramétrisation de l'espace affiné donnée par $(k/n, b/n)$. On peut tout aussi bien considérer $n = 1$ et analyser les intégrales premières dans chaque cas. Si $b = n$, sur $k(2k-b)(k-b) \neq 0$, la première composante engendre un hyperbole si $k < b$, une ellipse si $k > b$. Le cas $k = 0$ nous ramène directement à la proposition (2.2.1)

et on a les droites invariantes $x + y = 0$ et $x - y = 0$. $k = \frac{b}{2}$ nous donne des droites s'entrecoupant en P_n .

4.4. PORTRAITS DE PHASE

Comme au chapitre précédent, on présente les portraits de phase des systèmes satisfaisant le cas (II) pour les conditions $n = 0$ et $n \neq 0$. Les portraits de phases apparaîtront sans les flèches pour éviter d'alourdir les diagrammes.

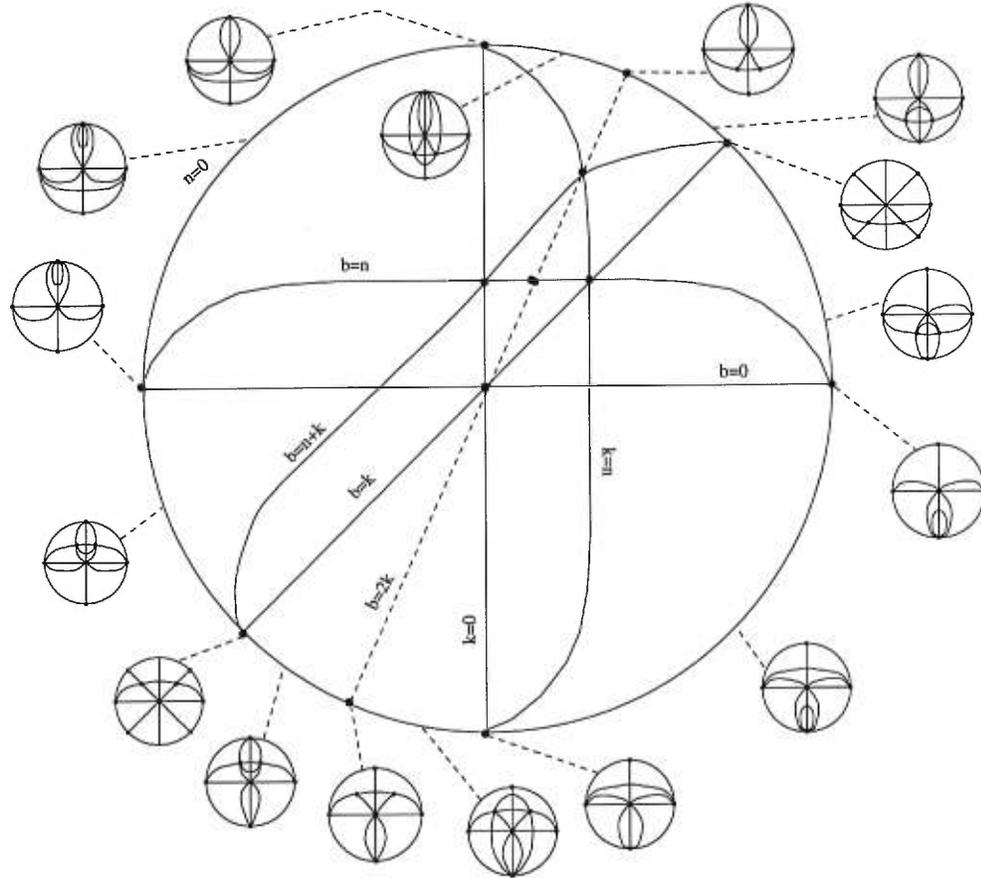


FIG. 4.4.1. Diagramme de bifurcation, cas (II), $n = 0$.

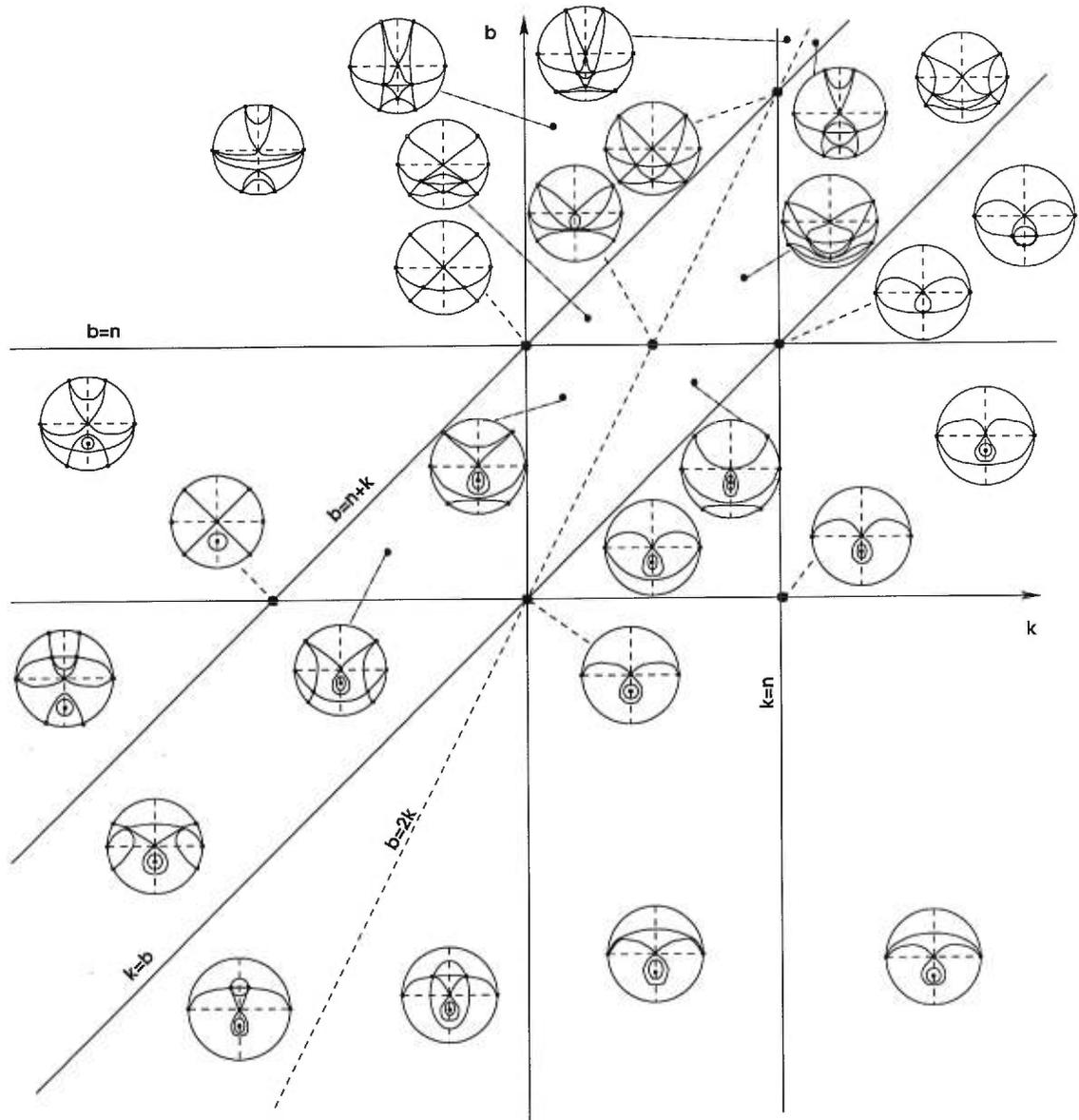


FIG. 4.4.2. Diagramme de bifurcation, cas (II), $n > 0$, cas génériques et points de bifurcation dégénérés à codimension 2.

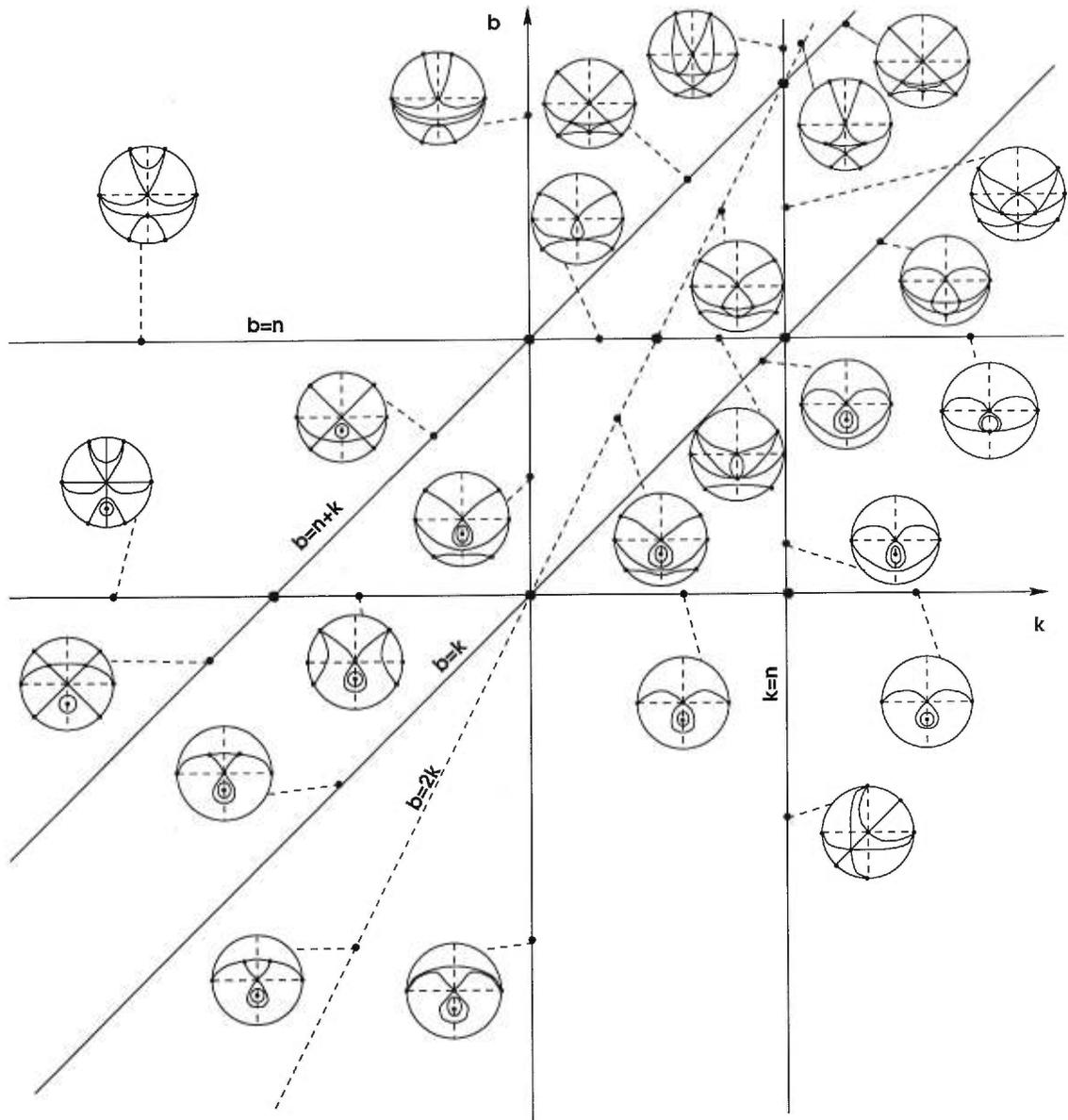


FIG. 4.4.3. Diagramme de bifurcation, cas (II), $n > 0$, points de bifurcation dégénérés à codimension 1.

Chapitre 5

CAS (I)

5.1. ESPACE DES PARAMÈTRES

L'étude du cas (I) nous amène à travailler avec un système du type

$$\begin{cases} \dot{x} = y + kx^2 + mxy + ny^2 \\ \dot{y} = x + ax^2 + bxy + ay^2 \end{cases}$$

avec les conditions sur les paramètres $m+2a = b-3k+5n = a^2+kn-2n^2 = 0$.

Ces trois conditions forment des courbes dans l'espace des paramètres et donc on peut représenter la variété algébrique déterminée par ces équations par la conique $a^2 + kn - 2n^2 = 0$ qui est située dans le plan projectif déterminé par les équations $m+2a = 0$ et $b-3k+5n = 0$. Ce plan projectif peut être paramétré par les coordonnées homogènes $[a, k, n]$. On pourra donc dessiner le diagramme de bifurcation des systèmes satisfaisant au cas (I) sur la courbe $a^2 + kn - 2n^2 = 0$ dans ce plan projectif qui sera représenté par un disque dont $a = 0$ sera sur la circonférence.

5.2. ÉTUDE DES POINTS SINGULIERS FINIS

Puisque $a \neq 0$ (le cas où $a = 0$ nous ramène au cas (II)), on considère dans le plan affine de l'espace des paramètres l'ouvert correspondant à la carte

$$U_a = \{[a, k, n] | a \neq 0\},$$

où la conique est une hyperbole. On a $n \neq 0$ sur la conique (car $a \neq 0$) et donc on retrouve $k = \frac{2n^2 - a^2}{n}$. Le système étudié se ramène donc à la forme suivante:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + \frac{2n^2 - a^2}{n}x^2 - 2axy + ny^2 \\ \frac{dy}{dt} = x + ax^2 + \frac{n^2 - 3a^2}{n}xy + ay^2 \end{cases} \quad (5.2.1)$$

Ce système est évidemment équivalent au système:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{n} [ny + (2n^2 - a^2)x^2 - 2anxy + n^2y^2] \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{n} [nx + anx^2 + (n^2 - 3a^2)xy + any^2] \end{cases} \quad (5.2.2)$$

En effectuant le changement de l'échelle du temps $Tn = t$, on obtient le système:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dT} = ny + (2n^2 - a^2)x^2 - 2anxy + n^2y^2 \\ \frac{dy}{dT} = nx + anx^2 + (n^2 - 3a^2)xy + any^2 \end{cases} \quad (5.2.3)$$

On effectue la transformation ($X = ax - ny, Y = -ny$) (d'où $x = \frac{X-Y}{a}$ et $y = -\frac{Y}{n}$) et on trouve:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dT} &= a \frac{dx}{dT} - n \frac{dy}{dT} \\ &= a \left[-Y + (2n^2 - a^2) \left(\frac{X-Y}{a} \right)^2 - 2an \left(\frac{X-Y}{a} \right) \left(\frac{-Y}{n} \right) + n^2 \left(\frac{-Y}{n} \right)^2 \right] \\ &\quad - n \left[\frac{n}{a}(X-Y) + \frac{n}{a}(X-Y)^2 + \left(\frac{n^2 - 3a^2}{an} \right) (X-Y)(-Y) + \frac{a}{n}Y^2 \right] \\ &= \frac{1}{a} [-n^2X + (n^2 - a^2)Y + (2n^2 - a^2 - n^2)X^2 \\ &\quad + (-4n^2 + 2a^2 + 2a^2 + 2n^2 + n^2 - 3a^2)XY + (2n^2 - a^2 - 2a^2 - a^2 - n^2 - n^2 + 3a^2 - a^2)Y^2] \\ &= \frac{1}{a} [-n^2X + (n^2 - a^2)Y + (n^2 - a^2)X^2 - (n^2 - a^2)XY] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{dY}{dT} &= -n \frac{dy}{dt} \\
&= -n \left[\frac{n}{a}(X - Y) + \frac{an}{a^2}(X - Y)^2 + \frac{(n^2 - 3a^3)}{an}(X - Y)(-Y) + an \left(-\frac{Y}{n} \right)^2 \right] \\
&= \frac{1}{a} [-n^2X + n^2Y - n^2X^2 + (2n^2 + n^2 - 3a^2)XY + (-n^2 - n^2 + 3a^2 - a^2)Y^2] \\
&= \frac{1}{a} [-n^2X + n^2Y - n^2X^2 + 3(n^2 - a^2)XY - 2(n^2 - a^2)Y^2]
\end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\frac{dX}{dY} = \frac{-\lambda X + Y + X^2 - XY}{-\lambda X + \lambda Y - \lambda X^2 + 3XY - 2Y^2} \quad (5.2.4)$$

où $\lambda = \frac{n^2}{n^2 - a^2}$ si $n \neq \pm a$ (notons que si $n = \pm a$, on a $k = \frac{2n^2 - a^2}{n} = n$; on se ramène au cas (III)). Notons que λ prend des valeurs supérieures à 1 si $a^2 < n^2$ et des valeurs négatives si $a^2 > n^2$. Pour avoir $\lambda \in (0, 1)$, on doit avoir $a^2 < 0$, que l'on exclut, évidemment. On étudie maintenant les points singuliers de ce système. Il n'y a aucun point singulier sur la droite $X = 1$, sinon dans le dénominateur de (5.2.4) on aurait $-\lambda + \lambda Y + 1 - Y = 0 \Rightarrow Y = 1$. Mais le point singulier $(X = 1, Y = 1)$, dans le numérateur de (5.2.4), nous donne $-\lambda + 1 = 0$ ce qui implique $a = 0$, qui nous renvoie au cas (II). Donc, il n'y a pas de point singulier sur $X = 1$.

On peut donc tirer, en annulant le numérateur de (5.2.4), que $Y = \frac{X(X-\lambda)}{X-1}$. On remplace dans le dénominateur, que l'on annule et on obtient

$$\frac{1}{(X-1)^2} [X^4(-\lambda + 1) + X^3(3\lambda - 3) + X^2(-3\lambda^2 + 3\lambda) + X(\lambda^2 - \lambda)] = 0$$

$$\text{ou encore } X^3 - 3X^2 + 3X\lambda - \lambda = 0.$$

On a que, pour une équation cubique de la forme $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$, le discriminant est donné par:

$$\Omega = B^2C^2 - 4AC^3 - 4B^3D - 27A^2D^2 + 18ABCD.$$

Dans notre cas, la cubique $X^3 - 3X^2 + 3X\lambda - \lambda = 0$ admet le discriminant $\Omega = -108\lambda(\lambda^2 - \lambda + 1)$. On a $\Omega < 0$ lorsque $\lambda > 1$ et $\Omega > 0$ quand $\lambda < 0$. La cubique n'admet donc qu'une racine réelle lorsque $\lambda > 1$, et donc le système n'a qu'un point singulier fini différent de l'origine, et trois racines réelles si $\lambda < 0$, donc trois points singuliers finis outre l'origine. La nature de ces points singuliers finis sera étudiée plus loin, en faisant intervenir la notion d'indice pour les points singuliers

5.3. LES POINTS SINGULIERS À L'INFINI

Comme aux chapitres précédents, on effectue un changement de carte que nous représenterons par le changement de coordonnées sur l'ouvert $X \neq 0$

$$(X, Y) \mapsto \left(Z = \frac{1}{X}, U = \frac{Y}{X} \right)$$

et sur l'ouvert $Y \neq 0$,

$$(X, Y) \mapsto \left(Z = \frac{1}{Y}, V = \frac{X}{Y} \right).$$

On obtient, après changement de l'échelle du temps, respectivement les systèmes:

$$\begin{cases} \dot{Z} = Z(\lambda Z - UZ + U - 1) \\ \dot{U} = -U^2 + 2U - \lambda + Z(2\lambda U - U^2 - \lambda) \end{cases} \quad (5.3.1)$$

et

$$\begin{cases} \dot{Z} = Z(\lambda ZV - \lambda Z + \lambda V^2 - 3V + 2) \\ \dot{V} = Z(-2\lambda V + 1 + \lambda V^2) + V(\lambda V^2 - 2V + 1) \end{cases} \quad (5.3.2)$$

À l'infini, correspondant à $Z = 0$, on trouve les points singuliers $P_+ = (0, 1 + \sqrt{1 - \lambda})$ et $P_- = (0, 1 - \sqrt{1 - \lambda})$ sur la première carte (en coordonnées (Z, U)) et, de plus, on a le point $P_0 = (0, 0)$ sur la deuxième carte (en coordonnées (Z, V)).

Les points P_+ et P_- n'apparaissent que dans la région $\lambda < 0$. Trouvons leur nature dans leur domaine d'existence. On calcule la matrice du système linéarisé dans la carte en (Z, U) .

$$D_{ZU}(Z, U) = \begin{pmatrix} -1 + U + 2(\lambda - U)Z & (1 - Z)Z \\ -\lambda + 2\lambda U - U^2 & 2 - 2U + 2(\lambda - U)Z \end{pmatrix}$$

$$\text{donc, } D_{ZU}(P_+) = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \lambda} & 0 \\ 2(\lambda - 1)(1 + \sqrt{1 - \lambda}) & -2\sqrt{1 - \lambda} \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$D_{ZU}(P_-) = \begin{pmatrix} -\sqrt{1 - \lambda} & 0 \\ 2(\lambda - 1)(1 - \sqrt{1 - \lambda}) & 2\sqrt{1 - \lambda} \end{pmatrix}.$$

P_+ et P_- sont donc des points de selle. Reste à étudier le point P_0 , qui existe pour tout λ . Pour ce point singulier à l'infini, on calcule la matrice du système linéarisé dans la carte en (Z, V) :

$$D_{ZV}(Z, V) = \begin{pmatrix} 2\lambda ZV - 2\lambda Z + \lambda V^2 - 3V + 2 & \lambda Z^2 + 2\lambda ZV - 3Z \\ -2\lambda V + 1\lambda V^2 & -2\lambda Z + 2\lambda ZV + 3\lambda V^2 - 4V + 1 \end{pmatrix}$$

d'où, en $(Z = 0, V = 0)$,

$$D_{ZV}(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 2 > 0$ et $\lambda_2 = 1 > 0$, $(z = 0, v = 0)$ est donc un noeud répulsif.

5.4. COURBES ALGÈBRIQUES INVARIANTES

On a l'équation $\frac{dX}{dY} = \frac{-\lambda X + Y + X^2 - XY}{-\lambda X + \lambda Y - \lambda X^2 + 3XY - 2Y^2}$ (5.2.4) ou encore, sous la 1-forme, $(3XY + \lambda Y - \lambda X^2 - 2Y^2 - \lambda X)dX - (-\lambda X + Y + X^2 - XY)dY = 0$. On pose la transformation

$$(X, Y) \mapsto (\zeta = X^2 - 2Y + \lambda, \eta = X^3 - 3XY + 3Y - \lambda) \quad (5.4.1)$$

ce qui nous ramène, dans la 1-forme, à l'équation

$$\frac{1}{2}\eta d\zeta - \frac{1}{3}\zeta d\eta = 0. \quad (5.4.2)$$

Cette équation possède une intégrale première générale

$$\eta^2 = C\zeta^3 \quad (5.4.3)$$

avec C une constante, ce qui nous conduit à l'équation

$$(X^3 - 3XY + 3Y - \lambda)^2 = C(X^2 - 2Y + \lambda)^3$$

qui, lorsque $X^2 + 2Y + \lambda \neq 0$, mène à une constante de mouvement:

$$\frac{(X^3 - 3XY + 3Y - \lambda)^2}{(X^2 - 2Y + \lambda)^3} = C \quad (5.4.4)$$

Il s'en suit immédiatement que les deux courbes

$$X^3 - 3XY + 3Y - \lambda = 0$$

$$X^2 - 2Y + \lambda = 0$$

sont des courbes invariantes de l'équation (5.2.4). De ces informations, et de celles des sections précédentes, on peut cerner la nature des points singuliers finis, dont la présence a été signalée à la section précédente. On utilisera le théorème de Poincaré, qui stipule que la somme des indices de tous les points singuliers d'un champ de vecteurs sur la sphère est indépendante du choix du champ et est constamment égale à 2. L'indice d'un point singulier simple (un foyer, un point de selle ou un noeud) est toujours ± 1 (en fait, un noeud ou un foyer ont un indice 1, un point de selle un indice -1) Pour référence, on revoit à [Arn74]. Comme on peut imaginer la sphère comme deux copies de notre disque réunies avec l'équateur, la somme est 2. Dans le cas $\lambda > 1$, on a deux noeuds sur l'équateur, ce qui fait une somme de 2. La somme des indices des points singuliers sur chaque copie de l'intérieur du disque doit donc être 0. Comme on a déjà l'origine qui est un point

de selle, donc d'indice -1 , l'autre point singulier fini, nécessairement d'indice 1 , doit être un noeud ou un foyer. Mais comme il est à l'intersection de la parabole et de la cubique invariante, il ne peut être un foyer. C'est donc un noeud. De la même façon, pour $\lambda < 0$, on a sur l'équateur deux noeuds et 4 points de selle, la somme de leurs indices donnant -2 . Du théorème de Poincaré, on tire que sur chaque copie de l'intérieur du disque, la somme des indices des points singuliers est 2 . L'origine, un point de selle est d'indice -1 , l'indice des trois autres points singuliers est 1 ; comme ils sont tous trois à l'intersection des courbes invariantes du système, il ne peut s'agir que des noeuds.

5.5. DIAGRAMME DE BIFURCATION

Voici le diagramme de bifurcation de la famille de systèmes satisfaisant le cas (I). On fait le diagramme pour $n \geq 0$ et on peut retrouver le cas $n < 0$ par antisymétrie par rapport à k .

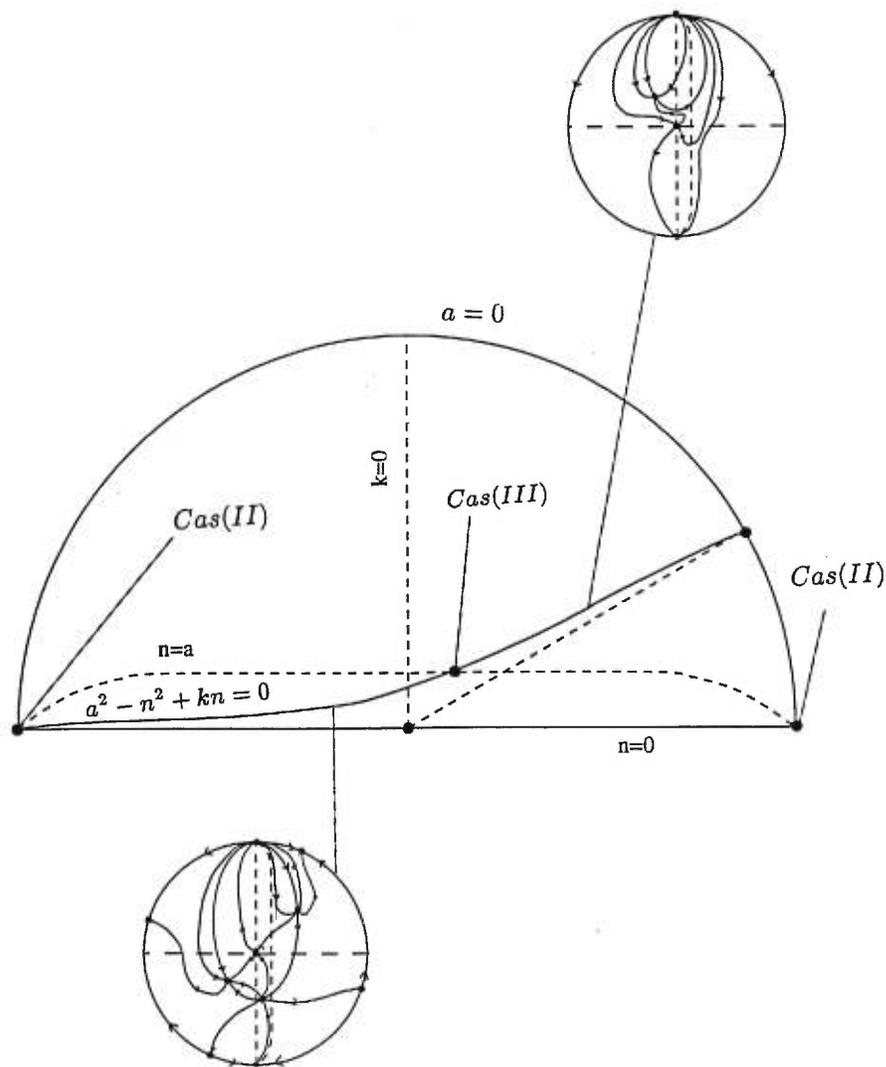


FIG. 5.5.1. Diagramme de bifurcation, cas (I)

Chapitre 6

LE CAS HAMILTONIEN

6.1. FORME NORMALE ET SYMÉTRIE

Pour ce chapitre, on considérera, au lieu de la forme normale du système (S) utilisée dans les chapitres précédents, la forme:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + kx^2 + mxy + ny^2 \\ \dot{y} = x + ax^2 + bxy \end{cases} \quad (\text{SH})$$

obtenue aussi de la forme (SQ) par rotation hyperbolique (comme dans l'introduction), mais en annulant le paramètre c au lieu d'annuler $a - c$. De façon similaire, on calcule l'angle de rotation θ dont $\tanh \theta$ doit être solution réelle de

$$k \tanh^3 \theta + (a - m) \tanh^2 \theta + (n - b) \tanh \theta + c = 0.$$

On montre que le fait que ce système soit hamiltonien correspond à la condition baptisée (H), au premier chapitre. Le système est hamiltonien (voir [Per91]), c'est-à-dire qu'il existe une application $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $H(x, y)$ satisfasse

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} = y + kx^2 + mxy + ny^2 \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} = x + ax^2 + bxy \end{cases} \quad (6.1.1)$$

Intégrant $\frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = y + kx^2 + mxy + ny^2$, on déduit que $H(x, y) = \frac{y^2}{2} + kx^2y + \frac{m}{2}xy^2 + \frac{n}{3}y^3 + f(x)$. En remplaçant dans la deuxième équation de (6.1.1),

on a:

$$-2kxy - m\frac{y^2}{2} - f'(x) = x + ax^2 + bxy$$

ce qui nous donne que $m = 0$, $b = -2k$ et $-f'(x) = x + ax^2$. Avec ces conditions, la forme normale devient:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + kx^2 + ny^2 \\ \dot{y} = x + ax^2 - 2kxy \end{cases} \quad (\text{QH})$$

et le système qui correspond aux paramètres $\lambda = (a, k, n)$ possède le hamiltonien suivant:

$$H_\lambda(x, y) = \frac{1}{3}(ny^3 - ax^3) + kx^2y + \frac{1}{2}(y^2 - x^2). \quad (6.1.2)$$

Remarquons que, dans le premier chapitre, on a trouvé les constante de Poincaré-Lyapunov pour la famille de systèmes de la forme (S), i.e. avec $a = c$. Avec la forme (SQ), la deuxième équation de la condition (H) de (1.2.5) devient $m + 2c = 0$, d'où, dans notre famille de la forme (QH), la condition devient seulement $m = 0$, ce que l'on a obtenu plus haut. Nous supposons que $(a, k, n) \neq 0$, car si $(a, k, n) = 0$, le système est linéaire avec intégrale première égale à $y^2 - x^2$. Comme $(a, k, n) \neq 0$, on peut changer l'échelle sur les axes et par conséquent, au lieu de considérer les paramètres variant dans \mathbb{R}^3 , nous pouvons considérer l'espace des paramètres comme étant le plan projectif $P_2(\mathbb{R})$, que l'on peut représenter comme un disque avec les points diamétralement opposés de la circonférence identifiés. On peut placer la ligne $n = 0$ comme la droite à l'infini du plan affine (a, k) . Comme pour $n \neq 0$, on peut faire un changement d'échelle sur les axes $X = -x$, $Y = -y$ et on pourra supposer que $n > 0$. En plus, nous observons une symétrie qui est donnée par l'identité suivante:

$$H_{(-a,k,n)}(x, y) = H_{(a,k,n)}(-x, y) \quad (6.1.3)$$

Donc, il suffira de considérer les systèmes dans le demi-disque correspondant à $a \geq 0$ et de retrouver les autres systèmes par symétrie.

6.2. SINGULARITÉS DES SYSTÈMES (QH) ET MULTIPLICITÉS D'INTERSECTION DES COURBES PROJECTIVES

Nous commençons l'étude des systèmes (QH) par l'étude des singularités finies des systèmes. Le premier aspect à considérer est le nombre de points singuliers de (QH). On considère les courbes algébriques suivantes:

$$P(x, y) = y + kx^2 + ny^2 = 0, \quad Q(x, y) = x + ax^2 - 2kxy = 0 \quad (6.2.1)$$

Les singularités de (QH) sont les points d'intersection de ces courbes algébriques. Remarquons que l'origine est toujours parmi ces points. Pour étudier les autres points d'intersection de $P = 0$ et $Q = 0$, on considère l'application $N : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{N}$ qui associe à chaque point $\lambda = [a, k, n] \in P_2(\mathbb{R})$ le nombre de points d'intersection dans \mathbb{R}^2 des courbes données par P et Q . Pour les détails sur la théorie des courbes algébriques et sur leurs intersections, on se réfère à [Kir92]. On étudie l'application N en faisant intervenir le théorème de Bézout pour les courbes planes.

Théorème 6.2.1 (Bézout). Deux courbes projectives complexes $f(X, Y, Z) = 0$ et $g(X, Y, Z) = 0$ sans composante commune et telles que $\deg(f) = m$ et $\deg(g) = n$ ont exactement mn points d'intersection dans $P_2(\mathbb{C})$, comptés avec multiplicité.

Pour la multiplicité d'intersection des courbes, on se réfère encore à [Kir92].
 Considérons donc la complétion projective et complexe des courbes définies par $P = 0$ et $Q = 0$.

$$P^*(X, Y, Z) = YZ + kX^2 + nY^2 = 0, \quad (6.2.2)$$

$$Q^*(X, Y, Z) = XZ + aX^2 - 2kXY = 0 \quad (6.2.3)$$

On vérifie que les courbes (6.2.2) et (6.2.3) sont sans composante commune pour pouvoir appliquer le théorème de Bézout. On voit que la courbe projective $Q^*(X, Y, Z) = 0$ est réductible et a deux composantes:

$$X = 0 \quad (6.2.4)$$

$$Z + aX - 2kY = 0 \quad (6.2.5)$$

Alors pour avoir la courbe (6.2.2) réductible, on doit avoir $k = 0$ et dans ce cas, la composante (6.2.4) n'est pas une composante de (6.2.2). Mais (6.2.5) non plus n'est pas composante de (6.2.2) car si $k = 0$ et en supposant que $Z + aX = 0$ et $Z + nY = 0$ soient la même composante de (6.2.2), alors on doit avoir $a = n = 0 = k$, ce qui contredit la non-linéarité du système. Donc les deux courbes (6.2.2) et (6.2.3) sont sans composante commune. Par le théorème de Bézout, elles ont donc quatre points d'intersection dans $P_2(\mathbb{C})$ comptés avec leur multiplicité.

Notation 6.2.1. Posons $C = a^2n + 4k^3$.

Proposition 6.2.1. Les courbes $y + kx^2 + ny^2 = 0$ et $x + ax^2 - 2kxy = 0$ s'intersectent à l'infini $\Leftrightarrow nC = 0$. Dans ce cas, le point d'intersection à l'infini p est unique et on a :

- i. Si $n = 0 \neq C$, alors $p = [0, 1, 0]$ et $I_p(P^*, Q^*) = 1$, et on a $N[a, k, n] \leq 3$;
- ii. Si $C = 0 \neq n$ et $(a, k) \neq (0, 0)$, alors $p = [2k, a, 0]$ et $I_p(P^*, Q^*) = 1$, et on a $N[a, k, n] \leq 3$;
- iii. Si $C = 0 \neq n$ et $(a, k) = (0, 0)$, alors $p = [1, 0, 0]$ et $I_p(P^*, Q^*) = 2$, et on a $N[0, 0, n] = 2$;
- iv. Si $n = C = 0$, alors $p = [0, 1, 0]$ et $I_p(P^*, Q^*) = 2$, et on a $N[a, 0, 0] = 2$.

DÉMONSTRATION. On considère l'intersection de la conique $YZ + kX^2 + nY^2 = 0$ avec la droite $X = 0$. On a donc un point d'intersection en $[0, 0, 1]$ et en $[0, 1, -n]$, d'où ces courbes s'intersectent à l'infini si et seulement si $n = 0$, le point à l'infini étant $p = [0, 1, 0]$. Dans ce cas, on aura $I_{[0,1,0]}(P^*, Q^*) = 1$ car la droite $X = 0$ n'est pas tangente à $YZ + kX^2 + nY^2 = 0$ en $[0, 1, 0]$. Intersectant maintenant $YZ + kX^2 + nY^2 = 0$ avec la droite $Z + aX - 2kY = 0$, on aura intersection à l'infini si et seulement si les équations $kX^2 + nY^2 = 0$ et $aX - 2kY = 0$ ont une solution commune dans \mathbb{C}^2 . Si $k \neq 0$, on a $Y = \frac{aX}{2k}$ et donc $kX^2 + \frac{n(aX)^2}{4k^2} = 0$, ou encore $X^2(k + \frac{a^2n}{4k^2}) = 0$. Donc, $C = 0$ et le point d'intersection est $[2k, a, 0]$. Si $k = 0$, on a $nY^2 = 0$ et $aX = 0$ et en supposant $n \neq 0$, on a nécessairement $a = 0$, donc $C = 0$, et on a point d'intersection en $[1, 0, 0]$. On a que $Z = 0$ passe par le point singulier de $YZ + nY^2 = 0$, on a donc $I_{[1,0,0]}(P^*, Q^*) = 2$. Enfin, si $n = C = 0$, on a $k = 0$ et les courbes sont donc $YZ = 0$ et $X(Z + aX) = 0$. Le point d'intersection sur $Z = 0$ est $p = [0, 1, 0]$, qui est un point double de $X(Z + aX) = 0$. On a donc $I_p(P^*, Q^*) = 2$. \square

La prochaine proposition dresse les conditions pour que le système ait quatre points singuliers finis distincts.

Notation 6.2.2. Posons $\delta = a^2 - 8k^2 - 4kn$.

Proposition 6.2.2. Le système (QH) possède quatre points singuliers finis distincts (réels ou complexes) $\Leftrightarrow nC\delta(n + 2k) \neq 0$. Ces points sont: $(0, 0), P_n = (0, -\frac{1}{n}), P_{\pm} = (x_{\pm}, y_{\pm})$, où

$$(x_{\pm}, y_{\pm}) = \begin{cases} \left(\frac{-a(k+n) \pm k \operatorname{sgn}(a) \sqrt{\delta}}{C}, \frac{4k^2 - a^2 \pm |a| \sqrt{\delta}}{2C} \right) & \text{si } a \neq 0 \\ \left(\pm \left(\frac{-n-2k}{4k^3} \right)^{1/2}, \frac{1}{2k} \right) & \text{si } a = 0 \end{cases} \quad (6.2.6)$$

De plus, on voit que ces points seront tous réels $\Leftrightarrow \delta > 0$, et dans ce cas, on a $N[a, k, n] = 4$.

DÉMONSTRATION. Considérant, dans (6.2.1), l'équation $Q = 0$, on a $x = 0$ ou bien $1 + ax - 2ky = 0$. Si $x = 0$, dans $P = 0$, on a $y = 0$ ou $y = -\frac{1}{n}$ (si $n \neq 0$), d'où les points 0 et P_n . Si $1 + ax - 2ky = 0 \neq a$, on obtient:

$$x = \frac{2ky - 1}{a} \quad (6.2.7)$$

et, remplaçant dans $P = 0$, $y + k\left(\frac{2ky-1}{a}\right)^2 + ny^2 = 0 \Rightarrow a^2y + k(4k^2y^2 - 4ky + 1) + a^2ny^2 = 0 \Rightarrow y^2(4k^3 + a^2n) + y(a^2 - 4k^2) + k = 0 \Rightarrow Cy^2 + y(a^2 - 4k^2) + k = 0$ on n'aura deux solutions que si $C \neq 0$, auquel cas on a une équation quadratique en y . Le discriminant est: $\Delta = (a^2 - 4k^2)^2 - 4kC = a^2(a^2 - 8k^2 - 4kn) = a^2\delta$ On aura donc deux solutions si $0 \neq \Delta = a^2\delta$ et deux solutions réelles si $0 < \Delta = a^2\delta \Rightarrow \delta > 0$. Les solutions sont donc $y = \frac{-(a^2 - 4k^2) \pm \sqrt{a^2\delta}}{2C} = \frac{4k^2 - a^2 \pm |a| \sqrt{\delta}}{2C}$ et, remplaçant dans (6.2.7), on obtient: $x = \frac{2k \left[\frac{4k^2 - a^2 \pm |a| \sqrt{\delta}}{2C} - 1 \right]}{a} = \frac{4k^3 - a^2k \pm k|a| \sqrt{\delta} - C}{aC} = \frac{-a(k+n) \pm k \operatorname{sgn}(a) \sqrt{\delta}}{C}$. Maintenant, si $a = 0$, on a $k \neq 0$ car $C \neq 0$ et on a $y = \frac{1}{2k}$, de

$P = 0$ qui implique que $x^2 = \frac{-(n+2k)}{4k^3}$. On a donc $P_{\pm} = (\pm(\frac{-n-2k}{4k^3})^{1/2}, \frac{1}{2k})$. Dans ce cas, $a = 0$ et $\delta = -4k(n+2k)$ et donc $\delta \neq 0 \Leftrightarrow (n+2k) \neq 0$. \square

Proposition 6.2.3. Soit $\lambda = [a, k, n] \in P_2(\mathbb{R})$ et considérons (QH), le système quadratique associé à ce point. Alors tout point singulier fini p de ce système satisfait $I_p(P, Q) \leq 3$. Il existe un point singulier q tel que $I_q(P, Q) \geq 2 \Leftrightarrow \delta(n+2k) = 0$. En particulier, on a:

- Si $\delta = 0 \neq (n+2k)$, on aura $N[a, k, n] = 3$ (car on aura deux points finis de multiplicité 1 et un de multiplicité 2);
- Si $\delta \neq 0 = (n+2k)$, on a également $N[a, k, n] = 3$, avec deux points finis de multiplicité 1 et un point de multiplicité 2;
- Si $\delta = 0 = (n+2k)$, alors $N[a, k, n] = 2$ (car on aura $I_{(0,0)}(P, Q) = 1$ et $I_{P_n}(P, Q) = 3$)

DÉMONSTRATION. L'origine est un point non-singulier de chacune des courbes $P(x, y) = y + kx^2 + ny^2 = 0$ et $Q(x, y) = x + ax^2 - 2kxy = 0$ car $\frac{\partial P}{\partial y}|_{(0,0)} = 1 + 2ny|_{(0,0)} = 1 \neq 0$ et $\frac{\partial Q}{\partial x}|_{(0,0)} = 1 + 2ax - 2ky|_{(0,0)} = 1 \neq 0$. Les courbes s'intersectent transversalement en $(0, 0)$, car les tangentes correspondantes sont $y = 0$ et $x = 0$ et donc on a que $I_{(0,0)}(P, Q) = 1$. Pour un autre point singulier fini p du système, on a $I_p(P, Q) \leq 3$ avec égalité dans l'unique cas où p est à la fois à l'intersection des droites $X = 0$ et $Z + aX - 2kY = 0$ (c'est-à-dire le point $p = [0, 1, 2k]$) et que l'une de ces droites soit tangente à la conique $YZ + kX^2 + nY^2 = 0$ en p . La tangente à $YZ + kX^2 + nY^2 = 0$ en $[0, 1, 2k]$ étant $2(k+n)Y + Z = 0$, la droite $X = 0$ ne peut jamais y être tangente en ce point. Donc, en $[0, 1, 2k]$, on devrait avoir $Z + aX - 2kY = 0$ tangent à $YZ + kX^2 + nY^2 = 0$, ce qui entraîne $a = 0$ et $2(n+k)Y + Z|_{[0,1,2k]} = 0 \Rightarrow 2k + n = 0 \Rightarrow \delta = 0$. Mais dans ce cas,

$p = [0, 1, 2k] = [0, -\frac{1}{n}, 1] = P_n$ et donc $I_{P_n}(P, Q) = 3$. On peut avoir $I_p(P, Q) = 2$ dans les cas suivants:

- Le point d'intersection des droites de Q , $[0, 1, 2k]$, est sur la conique $YZ + kX^2 + nY^2 = 0$ (ce qui entraîne $2k + n = 0$ et $a \neq 0 \Rightarrow \delta \neq 0$);
- Le point $p (\neq [0, 1, 2k])$ est sur $Z + aX - 2kY = 0$ et est son point de tangence avec $YZ + kX^2 + nY^2 = 0$. Notons que si $(a, k) = (0, 0)$, $Z + aX - 2kY = 0$ devient la droite à l'infini. Donc, on considère $(a, k) \neq (0, 0)$ et la droite $Z + aX - 2kY = 0$ est tangente à la conique $YZ + kX^2 + nY^2 = 0$ au point $p = [u, v, w] \Leftrightarrow 2ukX + (w + 2vn)Y + vZ = Z + aX - 2kY$, donc $v = 1$, $u = \frac{a}{2k}$ et $w = -2(k + n)$. De ce fait, $[u, v, w] = [\frac{a}{2k}, 1, -2(k + n)] \in \{Z + aX - 2kY = 0\} \Leftrightarrow -2(k + n) + \frac{a^2}{2k} - 2k = 0 \Leftrightarrow \delta = 0$. Aussi, $p = [u, v, w] \in \{YZ + kX^2 + nY^2 = 0\} \Leftrightarrow -2(k + n) + k(\frac{a^2}{4k^2}) + n = 0 \Leftrightarrow k\delta = 0$ et comme $k \neq 0$ il faut donc $\delta = 0$.

□

L'ensemble de bifurcations des points singuliers des systèmes quadratiques causées par le nombre de points singuliers finis du système est l'ensemble algébrique de $P_2(\mathbb{R})$ défini par l'équation $nC\delta(n + 2k) = 0$.

Proposition 6.2.4. λ est un point de discontinuité de $N \Leftrightarrow \lambda \in B$, où

$$B = \{[a, k, n] \in P_2\mathbb{R} \mid nC\delta(n + 2k) = 0\} = B_n \cup B_C \cup B_\delta \cup B_{n+2k} \quad (6.2.8)$$

avec la convention

$$B_\nu = \{[a, k, n] \in P_2(\mathbb{R}) \mid \nu = 0\} \text{ où } \nu \in \{n, C, \delta, 2k + n\} \quad (6.2.9)$$

et $B \subset \{\text{points de bifurcation des systèmes}\}$.

6.3. NATURE DES POINTS SINGULIERS FINIS

Étudions la nature des points singuliers. La matrice du système linéarisé au point (x_0, y_0) est:

$$L(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 2kx_0 & 1 + 2ny_0 \\ 1 + 2ax_0 - 2ky_0 & -2kx_0 \end{pmatrix} \quad (6.3.1)$$

avec polynôme caractéristique:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - 2kx_0 & -1 - 2ny_0 \\ -1 - 2ax_0 + 2ky_0 & \lambda + 2kx_0 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - 4k^2x_0^2 - (1 + 2ny_0)(1 + 2ax_0 - 2ky_0) \\ &= \lambda^2 + \text{Det}L(x_0, y_0) \end{aligned}$$

et

$$\text{Det}L(x, y) = -4k^2x^2 - 4anxy + 4kny^2 + 2(k - n)y - 2ax - 1 \quad (6.3.2)$$

La nature d'un point singulier (x_0, y_0) du système est donc déterminé par le signe de $\text{Det}L(x_0, y_0)$. Si λ_1 et λ_2 sont les deux racines du polynôme caractéristique, on a:

- Si $\text{Det}L(x_0, y_0) < 0$, alors $\lambda_1\lambda_2 < 0$ et (x_0, y_0) est un point de selle.
- Si $\text{Det}L(x_0, y_0) > 0$, alors $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\text{Det}L(x_0, y_0)}$ et (x_0, y_0) est un centre, car le système est hamiltonien.

Remarque 6.3.1. Soit (x_0, y_0) un point singulier du système, et, puisque le système est hamiltonien, on a $\frac{\partial H}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial H}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Donc, le point singulier du système (x_0, y_0) est un point double de la courbe de niveau $H(x, y) - H(x_0, y_0) =$

0, avec l'équation des droites tangentes aux courbes de niveau en (x_0, y_0) :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \Big|_{(x_0, y_0)} (x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} (x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \Big|_{(x_0, y_0)} (y - y_0)^2 = 0 \quad (6.3.3)$$

ou encore $(-1 + 2ky_0 - 2ax_0)(x - x_0)^2 + 4kx_0(x - x_0)(y - y_0) + (1 + 2ny_0)(y - y_0)^2 = 0$.

Proposition 6.3.1. Soit $n > 0$, alors la singularité $P_n = (0, -\frac{1}{n})$ possède, selon les cas, la nature suivante:

- i. Si $n + 2k \neq 0$, le point singulier P_n est soit un point de selle (si $(n + 2k) < 0$), soit un centre (si $(n + 2k) > 0$);
- ii. Si $n + 2k = 0$, alors P_n est soit un cusp (si $\delta \neq 0$), soit un point de selle nilpotent (si $\delta = 0$).

DÉMONSTRATION. i. On a $DetL(0, -\frac{1}{n}) = -4k^2x^2 - (1 + 2ky)(1 + 2ax - 2ky) \Big|_{(0, -\frac{1}{n})} = \frac{n+2k}{n}$, donc si $(n + 2k)$ et n sont du même signe, $DetL(0, -\frac{1}{n}) > 0$, alors c'est un centre. Par contre, si $DetL(x, y) < 0$ alors $(0, -\frac{1}{n})$ est un point de selle.

- ii. Si $n + 2k = 0$, alors $DetL(0, -\frac{1}{n}) = 0$. Mais la courbe de niveau passant par P_n est:

$$H(x, y) - H(0, -\frac{1}{n}) = -\frac{1}{2}(x^2 - y^2) + kx^2y + \frac{1}{3}(ny^3 - ax^3) - \left(\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^2}\right) = 0 \quad (6.3.4)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -\frac{ax^3}{3} - \frac{(ny+1)x^2}{2} + \left(\frac{y^2}{2} + n^3y^3 - \frac{1}{6n^2}\right) &= 0 \\ \Rightarrow -\frac{ax^3}{3} - \frac{(ny+1)x^2}{2} + \frac{(ny+1)^2(2ny-1)}{6n^2} &= 0, \end{aligned} \quad (6.3.5)$$

aussi, dans (6.3.3), on voit que les droites tangentes à la courbe de niveau en $(0, -\frac{1}{n})$ sont $-(y + \frac{1}{n})^2 = 0$, deux droites coïncidentes. Si, de plus, $a = 0$ ($\Rightarrow \delta = 0$), on a les droites tangentes à cette courbe données par

$\frac{(ny+1)}{2} \left[-x^2 + \frac{(ny+1)(2ny-1)}{3n^2} \right] = 0$, alors $ny + 1 = 0$ est une composante de la courbe de niveau; P_n est donc un point de selle topologique. Mais si $a \neq 0$, en plus des conditions précédentes, $(ny + 1) = 0$ n'est pas une composante de la courbe de niveau; le point singulier est donc un cusp. C'est d'ailleurs le seul point nilpotent de multiplicité 2.

□

On s'intéresse maintenant à la nature des points P_{\pm} , qui dépend du signe de $DetL(x_0, y_0)$. On a $\delta > 0$ et on suppose toujours, sans perte de généralité, que $n > 0$.

Proposition 6.3.2. Si $nC\delta(n + 2k) \neq 0$ et $\delta > 0$, on a:

- i. Si $C(n + 2k) > 0$, un des points P_{\pm} est un centre, l'autre est un point de selle;
- ii. Si $C > 0$ et $(n + 2k) < 0$, alors P_{\pm} sont des centres;
- iii. Si $C < 0$ et $(n + 2k) > 0$, alors P_{\pm} sont des points de selle.

DÉMONSTRATION. On a

$$(x_{\pm}, y_{\pm}) = \left(\frac{-a(k+n) \pm k \operatorname{sgn}(a) \sqrt{\delta}}{C}, \frac{4k^2 - a^2 \pm |a| \sqrt{\delta}}{2C} \right)$$

et

$$DetL(x, y) = -4k^2x^2 - 4anxy + 4kny^2 + 2(k-n)y - 2ax - 1$$

on calcule (épargnant les détails au lecteur)

$$\begin{aligned} DetL(x_{\pm}, y_{\pm}) &= \pm \left(\frac{|a|(n-k)}{C} \right) \sqrt{\delta} - \frac{k\delta}{C} \\ &= -(\pm) \left(\frac{|a|k\sqrt{\delta} - |a|n\sqrt{\delta} \pm k\delta}{C} \right) \\ &= -(\pm) \operatorname{sgn}(a) x_{\pm} \sqrt{\delta} \end{aligned}$$

et donc,

$$\operatorname{sgn}(\operatorname{Det}L(x_{\pm}, y_{\pm})) = \begin{cases} -(\pm)\operatorname{sgn}(C)\operatorname{sgn}\{-\operatorname{sgn}(k+n)|k+n||a| \pm \operatorname{sgn}(k)|k|\sqrt{\delta}\} & \text{si } a \neq 0 \\ -1 & \text{si } a = 0 \end{cases} \quad (6.3.6)$$

On note que $|k+n||a| > |k|\sqrt{\delta} \Leftrightarrow C(n+2k) > 0$. En effet, $|k+n||a| > |k|\sqrt{\delta} \Leftrightarrow a^2k^2 + 2a^2kn + a^2n^2 > a^2k^2 - 8k^4 - 4k^3n \Leftrightarrow a^2n(n+2k) > -4k^3(n+2k) \Leftrightarrow (a^2n+4k^3)(n+2k) > 0$, ce qui équivaut à $C(n+2k) > 0$. 1- Si $C(n+2k) > 0$, on a deux cas:

a) $C > 0$ et $n+2k > 0$ ($\Rightarrow n+k > -k$). Donc,

- si $k < 0 \Rightarrow \operatorname{sgn}(n+k) = 1 = -\operatorname{sgn}(k)$ donc $\operatorname{sgn}(P_{\pm}) = -(\pm)\operatorname{sgn}\{-|k+n||a| \mp |k|\sqrt{\delta}\}$ donc $\operatorname{sgn}(P_+) = 1$ (P_+ est un centre), et $\operatorname{sgn}(P_-) = -1$, (P_- est un point de selle);
- si $k = 0$, $\Rightarrow \operatorname{sgn}(P_{\pm}) = -(\pm)\operatorname{sgn}\{-|k+n||a|\}$, donc $\operatorname{sgn}(P_+) = 1$ (P_+ est un centre), et $\operatorname{sgn}(P_-) = -1$ (P_- est un point de selle);
- si $k > 0$, $\Rightarrow n+k > 0 \Rightarrow \operatorname{sgn}(n+k) = \operatorname{sgn}(k) = 1$ donc $\operatorname{sgn}(P_{\pm}) = -(\pm)\operatorname{sgn}\{-|k+n||a| \pm |k|\sqrt{\delta}\}$ donc $\operatorname{sgn}(P_+) = 1$ (P_+ est un centre), et $\operatorname{sgn}(P_-) = -1$, (P_- est un point de selle).

b) $C < 0$ et $n+2k < 0$ (comme C et $n < 0$, $\Rightarrow k < 0 \Rightarrow \operatorname{sgn}(k) = -1$):

- si $n+k > 0$ ($\Rightarrow \operatorname{sgn}(n+k) = 1$), donc $\operatorname{sgn}(P_{\pm}) = (\pm)\operatorname{sgn}\{-|k+n||a| \mp |k|\sqrt{\delta}\}$ donc $\operatorname{sgn}(P_+) = -1$ (P_+ est un point de selle) et $\operatorname{sgn}(P_-) = 1$, (P_- est un centre);
- si $n+k < 0$, ($\Rightarrow \operatorname{sgn}(n+k) = -1$) donc $\operatorname{sgn}(P_{\pm}) = (\pm)\operatorname{sgn}\{|k+n||a| \mp |k|\sqrt{\delta}\}$ donc $\operatorname{sgn}(P_+) = 1$ (P_+ est un centre), et $\operatorname{sgn}(P_-) = -1$, (P_- est un point de selle).

2- Si $C(n + 2k) < 0$, on a aussi deux cas à considérer:

a) $C < 0$ et $n + 2k > 0$ ($\Rightarrow k < 0 \Rightarrow \text{sgn}(k) = -1$ et $n + k > n + 2k > 0 \Rightarrow \text{sgn}(n + k) = 1$) donc $\text{sgn}(P_{\pm}) = (\pm)\text{sgn}\{\text{sgn}\{-|k + n||a| \mp |k|\sqrt{\delta}\}\}$ donc $\text{sgn}(P_+) = -1$ (P_+ est un point de selle), et $\text{sgn}(P_-) = -1$, (P_- est un point de selle).

b) $C > 0$ et $n + 2k < 0$ (comme $n > 0$, $k < 0 \Rightarrow \text{sgn}(k) = -1$):

- si $n + k > 0$, $\text{sgn}(P_{\pm}) = -(\pm)\text{sgn}\{-|k + n||a| \mp |k|\sqrt{\delta}\}$ donc $\text{sgn}(P_+) = 1$ (P_+ est un centre), et $\text{sgn}(P_-) = 1$, (P_- est un centre);

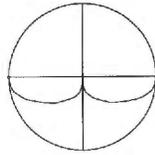
- si $n + k = 0$, $\text{sgn}(P_{\pm}) = -(\pm)\text{sgn}\{\mp|k|\sqrt{\delta}\}$ donc $\text{sgn}(P_+) = 1$ (P_+ est un centre), et $\text{sgn}(P_-) = 1$, (P_- est un centre);

- si $n + k < 0$, $\text{sgn}(P_{\pm}) = -(\pm)\text{sgn}\{|k + n||a| \mp |k|\sqrt{\delta}\}$ donc $\text{sgn}(P_+) = 1$ (P_+ est un centre), et $\text{sgn}(P_-) = 1$, (P_- est un centre).

□

Étudions maintenant les courbes de bifurcation qui apparaissent plus haut dans ce texte, c'est-à-dire $nC\delta(n + 2k) = 0$. Nous avons placé $n = 0$ la droite à l'infini et $n + 2k = 0$ est une droite dans le plan projectif. Les autres composantes de la courbe sont:

- $C = 0$. $C(a, k, n) = a^2n + 4k^3$. $C = 0$ est une cubique dont le seul point singulier est $[0, 0, 1]$ ($\frac{\partial C}{\partial a} = 2an$, $\frac{\partial C}{\partial k} = 12k^2$, $\frac{\partial C}{\partial n} = a^2$). Posant $n = 1$ pour trouver les coordonnées déshomogénéisées et calculant l'équation des droites tangentes en $(a, k) = (0, 0)$, on trouve $a^2 = 0$; il y a double tangence à l'axe $a = 0$, la courbe possède un cusp à l'origine. $C = 0$ possède aussi le point à l'infini $[1, 0, 0]$, la tangente à $C = 0$ en ce point est $n = 0$, la droite à l'infini.



– $\delta = 0$. $\delta(a, k, n) = a^2 - 8k^2 - 4kn = a^2 - 8(k + \frac{n}{4})^2 + \frac{n^2}{2}$. La conique $\delta = 0$ est donc une hyperbole, avec points sur $n = 0$ en $[\pm 2\sqrt{2}, 1, 0]$. On remarque que l'une des branches de l'hyperbole passe par l'origine.



Énonçons maintenant un théorème qui récapitule les informations sur l'application N .

Théorème 6.3.1. Pour le système (QH), on a

$$N[a, k, n] = \begin{cases} 4 \Leftrightarrow nC\delta(n+2k) \neq 0 \text{ et } \delta > 0 \\ 3 \Leftrightarrow \text{exactement une des égalités suivantes: } n = 0, C = 0, \delta = 0, n + 2k = 0 \\ 2 \Leftrightarrow \delta < 0 \text{ et } n \neq 0 \text{ ou bien exactement 2 parmi les précédentes sont satisfaites} \\ 1 \Leftrightarrow \delta < 0 \text{ et } n = 0 \end{cases} \quad (6.3.7)$$

DÉMONSTRATION. On introduit la notation

$$B_\cap = \{p \in P_2(\mathbb{R}) \mid \exists \nu_1, \nu_2 \in \{n, C, \delta, n + 2k\}, \nu_1 \neq \nu_2 \text{ et } p \in B_{\nu_1} \cap B_{\nu_2}\}. \quad (6.3.8)$$

Trouvons les points de $P_2(\mathbb{R})$ appartenant à B_\cap .

- $B_n \cap B_C = \{[1, 0, 0]\}$;
- $[a, k, n] \in B_n \cap B_\delta$, donc $a^2 = 8k^2 \Rightarrow [a, k, n] = [\pm 2\sqrt{2}, 1, 0]$;
- $B_n \cap B_{n+2k} = \{[1, 0, 0]\}$;
- $[a, k, n] \in B_C \cap B_\delta$, donc $a^2 = \frac{-4k^3}{n} \Rightarrow -4k(n + 2k + \frac{k^2}{n}) = 0 \Rightarrow k = 0$ ou $k = -n$. Alors, $B_C \cap B_\delta = \{[2, -1, 1], [-2, -1, 1], [0, 0, 1]\}$;

- $[a, k, n] \in B_C \cap B_{n+2k}$, donc $2k(2k^2 - a^2) = 0 \Rightarrow a = \pm\sqrt{2}k = \mp\frac{\sqrt{2}n}{2}$. Donc,
 $B_C \cap B_{n+2k} = \{[1, 0, 0], [\sqrt{2}, -1, 1], [-\sqrt{2}, -1, 1]\}$;
- $[a, k, n] \in B_C \cap B_{n+2k}$, donc $a^2 = 0$. Donc, $B_C \cap B_{n+2k} = \{[0, -\frac{1}{2}, 1]\}$.

Donc,

$$B_\cap = \{[1, 0, 0], [2\sqrt{2}, 1, 0], [-2\sqrt{2}, 1, 0], [2, -1, 1], [-2, -1, 1], [0, 0, 1], [\sqrt{2}, -1, 2], [-\sqrt{2}, -1, 2], [0, -\frac{1}{2}, 1]\}.$$

Étudions maintenant le nombre de points singuliers pour les systèmes correspondant à chacun de ces points.

- * $[1, 0, 0] \Rightarrow$ le système est $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x + ax^2 \end{cases}$
 donc les points singuliers sont: $\{(0, 0), (-\frac{1}{a})\}$;
- * $[0, 0, 1] \Rightarrow$ le système est $\begin{cases} \dot{x} = y + ny^2 \\ \dot{y} = x \end{cases}$
 les points singuliers: $\{(0, 0), (0, -\frac{1}{n})\}$;
- * $[2\sqrt{2}, 1, 0] \Rightarrow$ le système est $\begin{cases} \dot{x} = y + kx^2 \\ \dot{y} = x + 2\sqrt{2}kx^2 - 2kxy \end{cases}$
 donc les points singuliers sont: $\{(0, 0), (-\frac{1}{\sqrt{2}k}, -\frac{1}{2k})\}$; en effet, $y = -kx^2$ dans l'expression en \dot{y} donne $y = -\frac{1}{2k}$
- * $[-2\sqrt{2}, 1, 0] \Rightarrow$ le système est $\begin{cases} \dot{x} = y + kx^2 \\ \dot{y} = x - 2\sqrt{2}kx^2 - 2kxy \end{cases}$
 donc les points singuliers sont: $\{(0, 0), (\frac{1}{\sqrt{2}k}, -\frac{1}{2k})\}$; de la même façon
- * $[2, 1, -1] \Rightarrow$ le système est $\begin{cases} \dot{x} = y + kx^2 - ky^2 \\ \dot{y} = x + 2kx^2 - 2kxy = x(1 + 2kx - 2ky) \end{cases}$
 donc les points singuliers sont: $\{(0, 0), (0, \frac{1}{k})\}$;

- * $[-2, 1, -1] \Rightarrow$ le système est
$$\begin{cases} \dot{x} = y + kx^2 - ky^2 \\ \dot{y} = x - 2kx^2 - 2kxy = x(1 - 2kx - 2ky) \end{cases}$$

donc les points singuliers sont: $\{(0, 0), (0, \frac{1}{k})\}$;
- * $[\sqrt{2}, 1, -2] \Rightarrow$ le système est
$$\begin{cases} \dot{x} = y + kx^2 - 2ky^2 \\ \dot{y} = x + \sqrt{2}kx^2 - 2kxy = x(1 + \sqrt{2}kx - 2ky) \end{cases}$$

donc les points singuliers sont: $\{(0, 0), (0, -\frac{1}{2k})\}$;
- * $[-\sqrt{2}, 1, -2] \Rightarrow$ le système est
$$\begin{cases} \dot{x} = y + kx^2 - 2ky^2 \\ \dot{y} = x - \sqrt{2}kx^2 - 2kxy = x(1 + \sqrt{2}kx - 2ky) \end{cases} ;$$

donc les points singuliers sont: $\{(0, 0), (0, -\frac{1}{2k})\}$;
- * $[0, 1, -2] \Rightarrow$ le système est
$$\begin{cases} \dot{x} = y + kx^2 - 2ky^2 \\ \dot{y} = x - 2kxy \end{cases} .$$

donc les points singuliers sont: $\{(0, 0), (0, -\frac{1}{2k})\}$

On résume les calculs dans le tableau suivant:

point de B_Γ	points singuliers finis du système
$[1, 0, 0]$	$\{(0, 0), (0, -\frac{1}{a})\}$
$[0, 0, 1]$	$\{(0, 0), (0, -\frac{1}{n})\}$
$[2\sqrt{2}, 1, 0]$	$\{(0, 0), (-\frac{1}{\sqrt{2}k}, -\frac{1}{2k})\}$
$[-2\sqrt{2}, 1, 0]$	$\{(0, 0), (\frac{1}{\sqrt{2}k}, -\frac{1}{2k})\}$
$[2, 1, -1]$	$\{(0, 0), (0, \frac{1}{k})\}$
$[-2, 1, -1]$	$\{(0, 0), (0, \frac{1}{k})\}$
$[\sqrt{2}, 1, -2]$	$\{(0, 0), (0, -\frac{1}{2k})\}$
$[-\sqrt{2}, 1, -2]$	$\{(0, 0), (0, -\frac{1}{2k})\}$
$[0, 1, -2]$	$\{(0, 0), (0, -\frac{1}{2k})\}$

TABLEAU 6.3.1. Points singuliers dans B_Γ

Maintenant, étudions le nombre de points singuliers dans les cas satisfaisant $[a, k, n] \in B_\nu - B_\cap$, $\nu \in \{n, C, \delta, n + 2k\}$.

★ sur $B_n - B_\cap$, le système devient
$$\begin{cases} \dot{x} = y + kx^2 \\ \dot{y} = x + ax^2 - 2kxy = x(1 + ax^2 - 2ky) \end{cases};$$

on a donc $(0, 0)$ comme premier point singulier et aussi $y = -kx^2$. Dans l'expression $\dot{y} = 0$, un point singulier doit satisfaire $1 + ax + 2k^2x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 8k^2}}{4k^2}$ avec la coordonnée y correspondante. Ces points ne sont autres que P_\pm . Il y a donc trois points singuliers: $\{(0, 0), P_+, P_-\}$.

★ sur $B_\delta - B_\cap$, on a évidemment les points singuliers $(0, 0)$ et $P_n = (0, -\frac{1}{n})$. De plus, on a ici $P_+ = P_-$ car $\delta = 0$.

★ sur $B_{n+2k} - B_\cap$, on a $\sqrt{\delta} = \sqrt{a^2 - 4k(n + 2k)} = |a| = a$ (car on a considéré $a > 0$). Donc, $P_- = (\frac{-a(k+n) - k \operatorname{sgn}(a)\sqrt{\delta}}{C}, \frac{4k^2 - a^2 - a\sqrt{\delta}}{2C}) = (\frac{ak - ak}{C}, \frac{4k^2 - 2a^2}{2C}) = (0, \frac{2k^2 - a^2}{a^2n + 4k^3}) = (0, \frac{2k^2 - a^2}{2k(2k^2 - a^2)}) = (0, \frac{1}{2k}) = (0, -\frac{1}{n}) = P_n$. Donc sur $n + 2k = 0$, le point P_- se confond avec P_n . On a donc les points singuliers: $\{(0, 0), P_+, P_n = P_-\}$

★ sur $B_C - B_\cap$, on a, si $a = 0$ et $C = 0 \Rightarrow k = 0$ également et $\delta = 0$. D'où, il faut avoir $a \neq 0$. Le système est
$$\begin{cases} \dot{x} = y + kx^2 + ny^2 & (1) \\ \dot{y} = x + ax^2 - 2kxy & (2) \end{cases}$$
 de (2), on tire $x = \frac{2ky - 1}{a}$ puisque $a \neq 0$. Dans (1), on obtient $y + k(\frac{2ky - 1}{a})^2 + ny^2 = 0 \Rightarrow a^2y + 4k^3y^2 - 4k^2y + k + na^2y^2 = 0 \Rightarrow y(a^2 - 4k^2) + k = 0$ car $C = 0$. Donc, on obtient $y_f = \frac{-k}{a^2 - 4k^2}$, d'où $x_f = \frac{2k(\frac{-k}{a^2 - 4k^2}) - 1}{a} = \frac{2k^2 - a^2}{a(a^2 - 4k^2)}$, ce qui donne $P_f = (\frac{2k^2 - a^2}{a(a^2 - 4k^2)}, \frac{-k}{a^2 - 4k^2})$. Donc, les points singuliers sont: $\{(0, 0), P_n, P_f\}$.

Pour le reste de la preuve, on se réfère aux propositions (6.2.3) et (6.3.1).

□

région	points singuliers du système
$B_n \setminus B_\cap$	$\{(0, 0), P_+, P_-\}$
$B_\delta \setminus B_\cap$	$\{(0, 0), P_n, P_+ = P_-\}$
$B_{n+2k} \setminus B_\cap$	$\{(0, 0), P_+, P_n = P_-\}$
$B_C \setminus B_\cap$	$\{(0, 0), P_n, P_f\}$

TABLEAU 6.3.2. Points singuliers dans $B_\nu - B_\cap$

On passe maintenant aux systèmes dont les paramètres sont situés sur les lignes de bifurcation, d'abord omettant les intersections, puis aux intersections.

Proposition 6.3.3. Supposons que $nC(n + 2k) = 0$ et que $\delta > 0$, alors l'étude des points P_\pm (dans le cas $C \neq 0$) et P_f (dans le cas $C = 0$) donne:

- i. sur $B_n - B_\cap$, on a P_+ un centre et P_- un point de selle (sauf dans les cas où $a = 0$, où il n'y a que $(0, 0)$ comme point singulier);
- ii. sur $B_C - B_\cap$, on a P_f un point de selle si $n + 2k > 0$ et un centre si $n + 2k < 0$;
- iii. sur $B_{n+2k} - B_\cap$, on a $P_+ = (\frac{a}{2k^2 - a^2}, \frac{k}{2k^2 - a^2})$ est un point de selle et $P_- = P_n$ est un cusp;
- iv. sur B_\cap , on a:
 - pour $[1, 0, 0]$, les points singuliers sont $(0, 0)$ et $P_f = (\frac{-1}{a}, 0)$, un centre;
 - pour $[2\sqrt{2}, 1, 0]$, les points singuliers sont $(0, 0)$ et $P_k = (\frac{-1}{\sqrt{2k}}, \frac{-1}{2k})$ un cusp;
 - pour les autres cas, les points singuliers sont $(0, 0)$ et P_n .

DÉMONSTRATION. i. on a $n = 0$, donc

$$(x_\pm, y_\pm) = \begin{cases} (\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 8k^2}}{4k^2}, \frac{4k^2 - a^2 \pm a\sqrt{a^2 - 8k^2}}{8k^3}) & \text{si } a \neq 0 \\ (\pm \sqrt{\frac{-1}{2k^2}}, \frac{1}{2k}) & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

on remarque que les points ne sont pas réels dans le cas $a = 0$. Sinon, on a $DetL(x, y) = -4k^2x^2 + 2ky - 2ax - 1 = \frac{-4k^2}{16k^4}(2a^2 - 8k^2 \mp 2a\sqrt{a^2 - 8k^2}) + \frac{2k}{8k^3}(4k^2 - a^2 \pm a\sqrt{a^2 - 8k^2}) - \frac{2a}{4k^2}(-a \pm \sqrt{a^2 - 8k^2}) - 1 = \frac{1}{16k^4}[32k^4 - 4a^2k^2 \pm$

$4ak^2\sqrt{a^2 - 8k^2}] = \frac{1}{4k^2}[8k^2 - a^2 \pm a\sqrt{a^2 - 8k^2}] = -(\pm\sqrt{a^2 - 8k^2})(\frac{-1}{4k^2}(-a \pm \sqrt{a^2 - 8k^2})) = -(\pm)x_{\pm}\sqrt{\delta}$, et comme, toujours, on a $x_{\pm} < 0$, on a $\text{sgn}(P_+) = 1$ et $\text{sgn}(P_-) = -1$, d'où P_+ est un centre et P_- est un point de selle.

ii. sur $C = 0$, on avait $P_f = (\frac{2k^2 - a^2}{a(a^2 - 4k^2)}, \frac{-k}{a^2 - 4k^2})$ on calcule $\text{Det}L(x_f, y_f) = -4k^2x_f^2 - 4anx_fy_f + 4kny_f^2 + 2(k - n)y_f - 2ax_f - 1 = \frac{-4k^2(2k^2 - a^2)^2}{a^2(a^2 - 4k^2)^2} - \frac{4ank(a^2 - 2k^2)}{a(a^2 - 4k^2)^2} + \frac{4k^3n}{(a^2 - 4k^2)^2} - \frac{2(k - n)k}{a^2 - 4k^2} - \frac{2a(2k^2 - a^2)}{a(a^2 - 4k^2)} - 1 = \frac{1}{a^2(a^2 - 4k^2)^2}(a^2 - 2k^2)(a^4 - 8a^2k^2 + 8k^4 - 2a^2kn) = \frac{(a^2 - 2k^2)(a^4 - 8a^2k^2 + 16k^4 - 2k(a^2n + 4k^3))}{a^2(a^2 - 4k^2)^2} = \frac{a^2 - 2k^2}{a^2}$ car $C = a^2n + 4k^3 = 0$. Enfin, sur $C = 0$, $a^2 - 2k^2 < 0 \Leftrightarrow n + 2k > 0$. Le reste de la preuve se déduit facilement.

iii. sur $n + 2k = 0$, on a $\delta = a^2 - 4k(n + 2k) = a^2$ et $C = 2k(2k^2 - a^2)$. On a donc $x_+ = \frac{-an}{2k(2k^2 - a^2)} = \frac{a}{a^2 - 2k^2}$ et $x_- = \frac{-a(2k + n)}{C} = 0$. Aussi, $y_+ = \frac{4k^2}{C} = \frac{k}{2k^2 - a^2}$ et $y_- = \frac{4k^2 - 2a^2}{4k(2k^2 - a^2)} = \frac{1}{2k} = -\frac{1}{n}$. Donc, on obtient $P_+ = (\frac{-a}{2k^2 - a^2}, \frac{k}{2k^2 - a^2})$ et $P_- = (0, -\frac{1}{n}) = P_n$. On calcule donc $\text{Det}L(P_+) = -4k^2x_+^2 - 4anx_+y_+ + 4kny_+^2 + 2(k - n)y_+ - 2ax_+ - 1 = \frac{-4a^2k^2}{(2k^2 - a^2)^2} - \frac{8a^2k^2}{(2k^2 - a^2)^2} - 8k^2(\frac{k^2}{2k^2 - a^2})^2 + 2(k - n)(\frac{k}{2k^2 - a^2}) + \frac{2a^2}{2k^2 - a^2} - 1 = \frac{1}{(2k^2 - a^2)^2}[-6a^2k^2 - 8k^4 - 4k^3n + 2a^2kn - 3a^4] = \frac{1}{(2k^2 - a^2)^2}[-10a^2k^2 - 3a^4 + (n + 2k)(2a^2k - 4k^3)] = \frac{1}{(2k^2 - a^2)^2}[-10a^2k^2 - 3a^4] < 0$ car $n + 2k = 0$. Alors, on a que P_+ est un point de selle. Aussi, $P_- = (0, -\frac{1}{n}) = P_n$ et c'est un cusp lorsque $n + 2k = 0$ (voir la proposition (6.3.1)).

iv. - $[a, k, n] = [1, 0, 0]$. Donc les points singuliers sont $(0, 0)$ et $(-\frac{1}{a}, 0)$ et $\text{Det}L(-\frac{1}{a}, 0) = 1 > 0$, donc c'est un centre;
- $[a, k, n] = [2\sqrt{2}, 1, 0]$. Donc les points singuliers sont $(0, 0)$ et $(\frac{-1}{\sqrt{2k}}, \frac{-1}{2k})$.
Pour ce dernier point singulier, on calcule les droites tangentes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \Big|_{(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2})} \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \Big|_{(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2})} \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(y + \frac{1}{2}\right) + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \Big|_{(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2})} \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 &= 0 \\ \Rightarrow 2 \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \sqrt{2} \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(y + \frac{1}{2}\right) + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{2} \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \left(y + \frac{1}{2} \right) \right)^2 = \left(\sqrt{2}x - y + \frac{1}{2} \right)^2 = 0$$

une droite double, donc c'est un cusp.

- Dans les autres points de B_\cap , on se retrouve avec les points singuliers $(0, 0)$ et P_n , déjà étudié à la proposition (6.3.1).

□

6.4. ÉTUDE DES POINTS SINGULIERS À L'INFINI

Pour étudier les points singuliers à l'infini du système, on effectue la compactification de Poincaré. Sur la sphère S^2 , on considère deux cartes:

- l'ouvert $X > 0$ que l'on projette par le centre sur le plan $X = 1$;
- l'ouvert $Y > 0$ que l'on projette par le centre sur le plan $Y = 1$,

avec le système dans le plan $Z = 1$ avec coordonnées x, y . Lorsqu'on étudie le système dans la première carte, on a le changement de coordonnées $(x, y) \mapsto (u, z) = \left(\frac{y}{x}, \frac{1}{x}\right)$ et, dans la seconde carte, $(x, y) \mapsto (z, v) = \left(\frac{1}{y}, \frac{x}{y}\right)$. Sur la première carte:

$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{x^2}(y + kx^2 + ny^2) = -uz - k - nu^2$; on effectue un décalage de l'échelle temporelle: $\tau = \frac{t}{z} \Rightarrow \frac{d}{d\tau} = \frac{d}{dt} \frac{dt}{d\tau} = z \frac{d}{dt}$ on a donc $\frac{dz}{d\tau} = z(-uz - nu - k)$.

De même, $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{-y}{x^2}(y + kx^2 + ny^2) + \frac{1}{x}(x + ax^2 - 2kxy) = -u^2 - k\frac{u}{z} - nu^3z + 1 + \frac{a}{z} - 2k\frac{u}{z}$.

Après le décalage, on obtient:
$$\begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = z(-uz - nu^2 - k) \\ \frac{du}{d\tau} = z(1 - u^2) - 3ku - nu^3 + a \end{cases}$$

et, sur la deuxième carte:

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = z(-zv - av^2 + 2kv) \\ \frac{dv}{d\tau} = z(1 - v^2) + 3kv^2 - av^3 + n. \end{cases}$$

Considérant l'axe $z = 0$ sur chaque carte, on trouve les points singuliers à l'infini du système (QH). Sur la carte en (u, z) , il faut avoir $f(u) = nu^3 + 3ku - a = 0$; sur l'autre, $g(v) = av^3 - 3kv^2 - n = 0$. Ces deux cubiques ont évidemment le même discriminant: $\Delta = -27nC$ et on a les renseignements suivants sur les racines des cubiques:

- les trois racines de la cubique sont toutes réelles $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$;
- les trois racines sont distinctes $\Leftrightarrow \Delta \neq 0$;
- la cubique n'a qu'une seule racine réelle $\Leftrightarrow \Delta < 0$.

Pour les systèmes ci-haut, les matrices des systèmes linéarisés au point singulier $(0, u)$ (respectivement $(0, v)$) seront:

$$A_f(0, u) = \begin{pmatrix} -nu^2 - k & 0 \\ 1 - u^2 & -3k - 3nu^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(k + nu^2) & 0 \\ 1 - u^2 & -3(k + nu^2) \end{pmatrix} \quad (6.4.1)$$

et

$$A_g(0, v) = \begin{pmatrix} -av^2 + 2kv & 0 \\ 1 - v^2 & 6kv - 3av^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v(av - 2k) & 0 \\ 1 - v^2 & -3v(av - 2k) \end{pmatrix} \quad (6.4.2)$$

Par exemple, dans la première carte, on trouve que $\lambda_1 = -3k - 3nu^2 = -f'(u)$ et $\lambda_2 = -k - nu^2 = -\frac{f'(u)}{3}$, d'où $\lambda_1\lambda_2 = \frac{(f'(u))^2}{3}$. Si u est une racine simple de f , alors $(0, u)$ est un noeud. Dans les cas où u est une racine multiple de f , c'est-à-dire si $\Delta = 0$, ou encore $nC = 0$, nous nous proposons d'étudier les propriétés géométriques des courbes dans ce cas pour dégager la nature des singularités du système.

Proposition 6.4.1. Au moins deux des trois points singuliers à l'infini du système coïncident $\Leftrightarrow nC = 0$. Dans ce cas, toutes les courbes de niveau $H(x, y) =$

K , où K est une constante, sont tangentes à la droite à l'infini en ce point et on a:

- si $n = 0$, le point de tangence est $[0, 1, 0]$;
- si $n \neq 0 = C$,
 - Si $(a, k) = (0, 0)$, le point de tangence est $[1, 0, 0]$;
 - Si $(a, k) \neq (0, 0)$, le point de tangence est $[2k, a, 0]$.

DÉMONSTRATION. La complétion projective de la courbe $H(x, y) - K = 0$, où K est une constante, est

$$H^*(X, Y, Z) - KZ^3 = \frac{1}{2}Z(Y^2 - X^2) + kX^2Y + \frac{1}{3}(nY^3 - aX^3) - KZ^3 = 0.$$

Les points à l'infini de cette courbe sont de la forme $(X_0, Y_0, 0)$. Une tangente à la courbe en un de ces points est de la forme:

$$(2kX_0Y_0 - aX_0^2)X + (kX_0^2 + nY_0^2)Y + \frac{1}{2}(Y_0^2 - X_0^2)Z = 0.$$

Pour avoir tangence avec la droite à l'infini, on doit donc avoir $2kX_0Y_0 - aX_0^2 = X_0(2kY_0 - aX_0) = 0$ et $kX_0^2 + nY_0^2 = 0$.

- i. Si $X_0 = kX_0^2 + nY_0^2 = 0$ est vérifié, alors on a $n = 0$ et dans ce cas $[0, 1, 0] = [X_0, Y_0, 0]$ est le point de tangence de la droite à l'infini;
- ii. Si $2kY_0 - aX_0 = kX_0^2 + nY_0^2 = 0$ est vérifié, alors ces deux équations, linéaires en (X_0^2, Y_0^2) , ont une solution commune non-triviale si et seulement si:

$$\begin{vmatrix} 4k^2 & -a^2 \\ n & k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow C = 0. \quad (6.4.3)$$

On a alors deux possibilités. Soit $(a, k) = (0, 0)$, et dans ce cas $[1, 0, 0]$ est un point de tangence, soit $(a, k) \neq (0, 0)$. Si $k \neq 0$, on a que $Y_0 = \frac{a}{2k}X_0$ et donc, le point de tangence est $[2k, a, 0]$

□

À la lumière de ce résultat, il vient que si deux des points singuliers à l'infini du système coïncident au point $[X_0, Y_0, 0]$, alors ce point est un point singulier du système qui a un secteur elliptique.

6.5. CONNEXION DES POINTS DE SELLE

Soit $\mathbb{X}(x, y) = P(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$, un champ de vecteurs différentiel polynomial (avec $P, Q \in \mathbb{R}[x, y]$). Soit une courbe $f(x, y) = 0$, avec f un polynôme à coefficients réels ou complexes. On dit que $f(x, y) = 0$ est une courbe algébrique invariante de \mathbb{X} s'il existe un polynôme $g(x, y)$, avec $g \in \mathbb{K}[x, y]$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} tel que:

$$P(x, y)\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + Q(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y)g(x, y). \quad (6.5.1)$$

Ici, comme le système est hamiltonien, si on a une connexion de selle entre deux points distincts, on a deux points singuliers du système, p et q , qui soient sur la même courbe de niveau, ou encore tels que $H(x, y) - H(q) = 0$ passe par p . Mais un point singulier du système est aussi un point singulier de la courbe $H(x, y) - H(q) = 0$. Cette cubique est donc réductible (car elle a deux points singuliers), elle a donc une droite comme composante. Le système possède donc une droite invariante. Soient, donc, $f(x, y) = ux + vy + w$ et $g(x, y) = Ux + Vy + W$.

Il faut chercher les cas où une droite de la forme $f(x, y) = 0$ soit invariante sous $\mathbb{X} = (y + kx^2 + ny^2)\frac{\partial}{\partial x} + (x + ax^2 - 2kxy)\frac{\partial}{\partial y}$.

Proposition 6.5.1. Le système (QH) admet des droites invariantes $\Leftrightarrow [a, k, n] \in P_2(\mathbb{R})$ satisfait l'une des conditions suivantes:

- i. $an(n - k) \neq 0$ et $[a, k, n]$ est situé sur (CPS) où (CPS) : $a^2n + (n - k)^2(n + 2k) = 0$. Dans ce cas, le système possède une droite invariante, $f(x, y) = anx + n(n - k)y + (n - k) = 0$;
- ii. $a = 0 \neq k$. Dans ce cas, le système possède la droite invariante $2ky - 1 = 0$. Si, de plus, $n + 3k = 0$, on aura deux autres droites invariantes: $x + y = 0$ et $x - y = 0$.
- iii. $a \neq 0$ et $[a, k, n]$ est sur l'une des deux droites
 - $a + 3k + n = 0$, alors on a la droite invariante $x + y = 0$;
 - $a - 3k - n = 0$, alors on a la droite invariante $x - y = 0$.

DÉMONSTRATION. On aura une droite invariante $f(x, y) = ux + vy + w = 0$, avec $(u, v) \neq 0$ si:

$$u(y + kx^2 + ny^2) + v(x + ax^2 - 2kxy) = (ux + vy + w)(Ux + Vy + W).$$

En identifiant les coefficients des deux polynômes en x et y , on obtient:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \ uU = ku + av \\ (2) \ -2kv = uV + Uv \\ (3) \ nu = vV \\ (4) \ wW = 0 \\ (5) \ v = uW + Uw \\ (6) \ u = vW + Vw \end{array} \right. \quad (6.5.2)$$

de (4), on tire que ou bien $w = 0$, ou bien $W = 0$.

– Si $w = 0$, alors $v = uW$ et $u = vW$. De (5) et (6), on a que $v(1 - W^2) = 0$. Mais $v \neq 0$, sinon, par (6), $u = 0$. Si $W = 1$, on obtient $u = v$, donc de (3), $V = n$, et de (2), $a + 3k + n = 0$, la droite invariante étant $f(x, y) = x + y = 0$ et, de même, si $W = -1$, on a avec $a - 3k - n = 0$, la droite invariante $f(x, y) = x - y = 0$.

– si $W = 0$, alors $u = Vw$ et $v = Uw$.

• si $a = 0$, de (1), on a $uU = ku$, donc $u = 0$ ou $U = k$;

* si $U = k$, $v = kw$. Donc, dans (3), $nu = vV \Rightarrow nu = kVw$, d'où $nVw = kVw \Rightarrow n - k = 0$. d'où $v = nw$. Mais, dans ce cas, dans (2), on a:

$$-2kv = uV + Uv$$

$$\Rightarrow -2k^2w = uV + k^2w$$

$$\Rightarrow uV = -3k^2w$$

$$\Rightarrow uVw = -3k^2w^2$$

$$\Rightarrow u^2 = -3k^2w^2$$

ce qui n'est possible que si $u = w = 0 = v$.

* si $u = 0$, on a, de (3), $vV = 0$. Mais, déjà, $w = 0$, donc $v \neq 0$, d'où $V = 0$. Cela implique, de (2), $-2kv = Uv \Rightarrow U = -2k$, donc $v = -2kw$. On a donc, sur $a = 0 \neq k$, la droite invariante $2ky - 1 = 0$.

• si $a \neq 0$, de (3), on a $nu = vV \Rightarrow nVw = UVw$ donc $U = n$ ou $V = 0$.

Notons que si $V = 0$, $u = 0$, mais, dans (1), $uU = ku + av \Rightarrow av = 0 \Rightarrow$

$v = 0$, ce qui mène à une contradiction. Donc, $U = n \Rightarrow v = nw$.

Dans (1), on obtient

$$UVw = kVw + aUw$$

$$\Rightarrow UV = kV + aU$$

$$\Rightarrow nV = kV + an$$

$$\Rightarrow V = \frac{an}{n-k}.$$

cette dernière égalité si $n \neq k$. Donc, $u = \frac{an}{n-k}W$. Maintenant, dans (2), on obtient

$$-2kv = uV + Uv$$

$$\Rightarrow -2knw = V^2w + n^2w$$

$$\Rightarrow V^2 = -n^2 - 2kn$$

$$\Rightarrow \frac{a^2n^2}{(n-k)^2} = -n^2 - 2kn$$

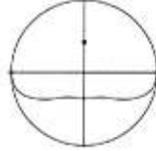
$$\Rightarrow \frac{a^2n}{(n-k)^2} = -n - 2k$$

$$\Rightarrow a^2n + (n+2k)(n-k)^2 = 0.$$

Donc, dans le cas où $[a, k, n] \in (CPS)$, où $(CPS) = \{[a, k, n] \in P_2(\mathbb{R}) \mid a^2n + (n+2k)(n-k)^2 = 0\}$, on a une droite invariante, cette droite ayant l'équation: $\frac{an}{n-k}x + ny + 1 = 0$,
ou encore $anx + n(n-k)y + n-k = 0$.

□

Étudions enfin la courbe (*CPS*) et ses points d'intersection avec les autres courbes de bifurcation. On a donc $CPS(a, k, n) = a^2n + (n - k)^2(n + 2k) = 0$. Les points sur $n = 0$ de cette courbe sont donnés par $(-k)^2(2k) = 0$, on n'a donc que $p = [1, 0, 0]$. On a $\frac{\partial CPS}{\partial a} = 2an$, $\frac{\partial CPS}{\partial k} = -6kn + 6k^2$ et $\frac{\partial CPS}{\partial n} = a^2 + 3n^2 - 3k^2$. La droite tangente au point p est donc la droite $n = 0$. Les points singuliers de (*CPS*) sont donnés par $2an = k(k - n) = a^2 + 3n^2 - 3k^2 = 0$, on n'a que le point $[0, 1, 1]$. L'équation des droites tangentes à la courbe en ce point est donnée par $2a^2 + 6n^2 = 0$, des tangentes complexes, p est donc un point isolé. Que se passe-t-il en ce point isolé? Ce point $[0, 1, 1]$ remplit la condition que $n = k$, qui été exclue dans la preuve et n'est donc pas un point de bifurcation pour le système (QH).



Pour l'intersection avec les autres courbes de bifurcation, on a:

- $(CPS) \cap \{n + 2k = 0\}$. L'intersection est constituée des points de $P_2(\mathbb{R})$ tels que $a^2n = 0$, donc $[a, k, n] = [1, 0, 0]$ et $[a, k, n] = [0, -\frac{1}{2}, 1]$
- $(CPS) \cap C = 0$. Ces courbes se rencontrent à l'infini, au point $[1, 0, 0]$. Autrement, si $n = 1$, on a $a^2 = -4k^3$, d'où $-4k^3 + (1 - k)^2(1 + 2k) = 0$, donc $(k + 1)^2(2k - 1) = 0$. On prend $k = -1$ ($k = \frac{1}{2}$ mène à un point complexe de $CPS \cap C$ et donc, $(CPS) \cap \{C = 0\} = \{[1, 0, 0], [2, -1, 1], [-2, -1, 1]\}$).
- $(CPS) \cap \delta = 0$. Ces deux courbes n'ont pas d'intersection sur $n = 0$, considérons donc $n = 1$. On a $4k(2k + 1) + (1 - k)^2(2k + 1) = 0$, ou encore $(2k + 1)(k + 1)^2 = 0$. $k = -\frac{1}{2}$ mène au point d'intersection $[0, -\frac{1}{2}, 1]$, $k = -1$ au point d'intersection $[\pm 2, -1, 1]$.

6.6. PORTRAITS DE PHASES

On présente enfin, dans cette section, les portraits de phase. D'abord, sur cette page, un aperçu global des courbes de bifurcation, puis les diagrammes de bifurcation, séparés comme dans les chapitres précédants pour en alléger la présentation.

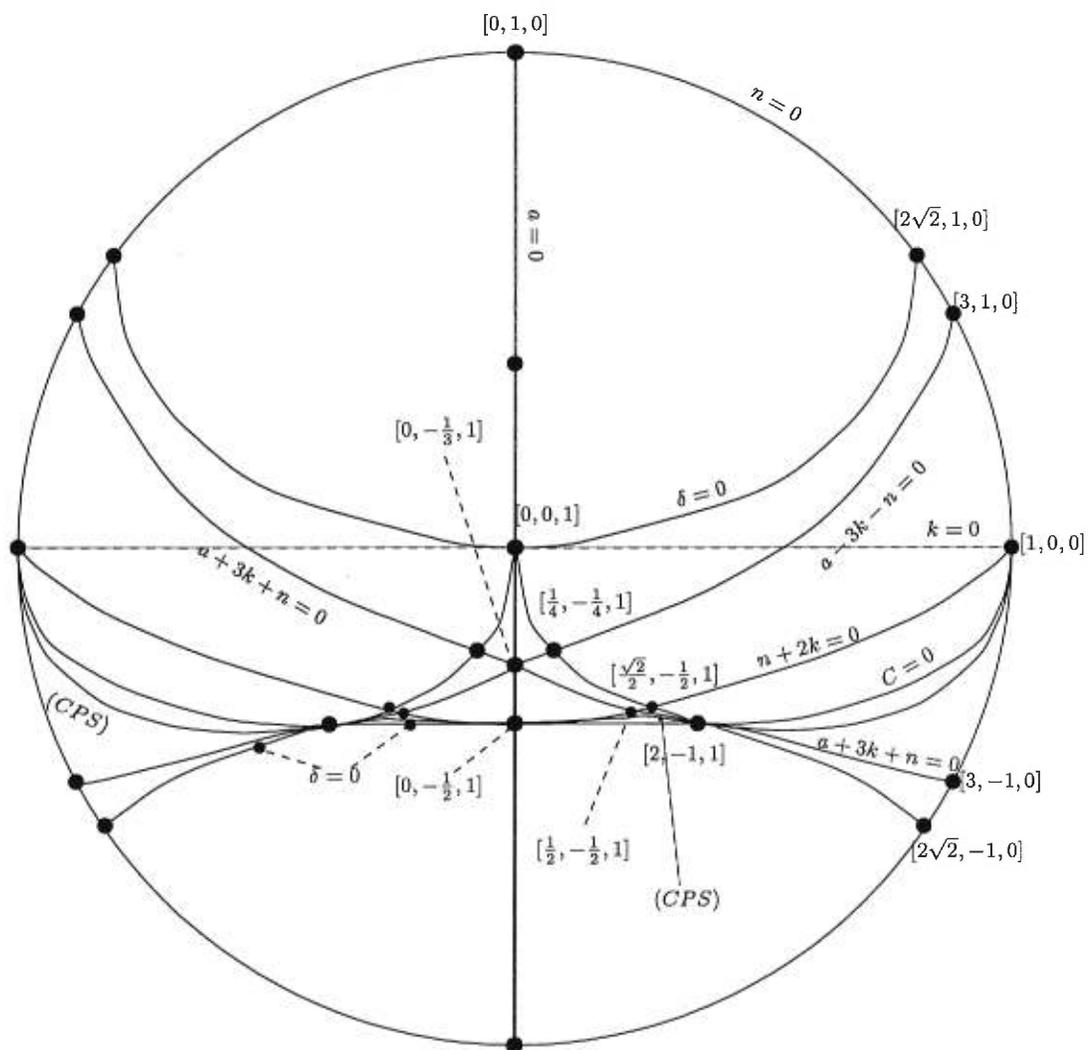


FIG. 6.6.1. Courbes de bifurcation, cas hamiltonien.

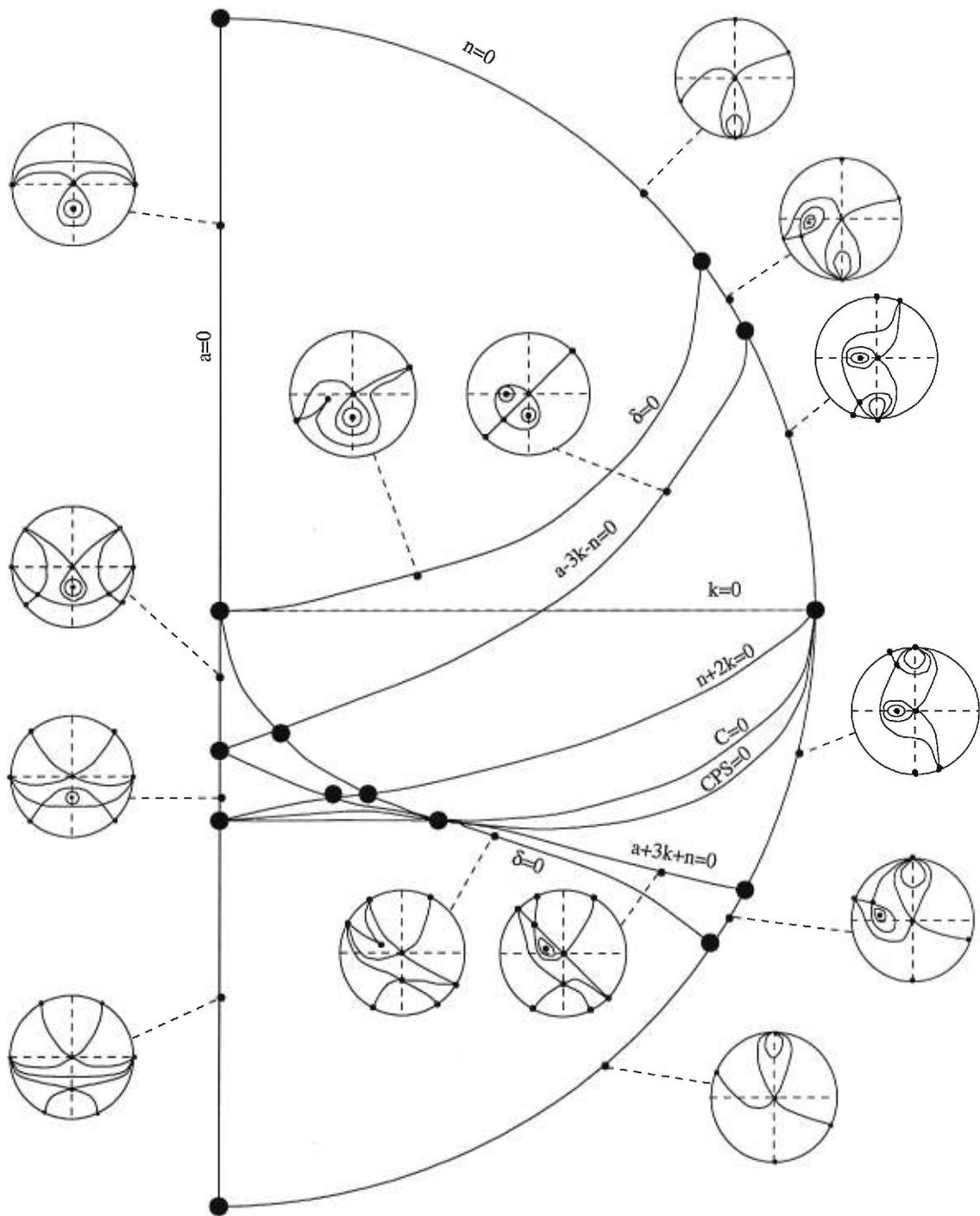


FIG. 6.6.2. Diagramme de bifurcation, cas hamiltonien, points de bifurcation dégénérés à codimension 1, première partie.

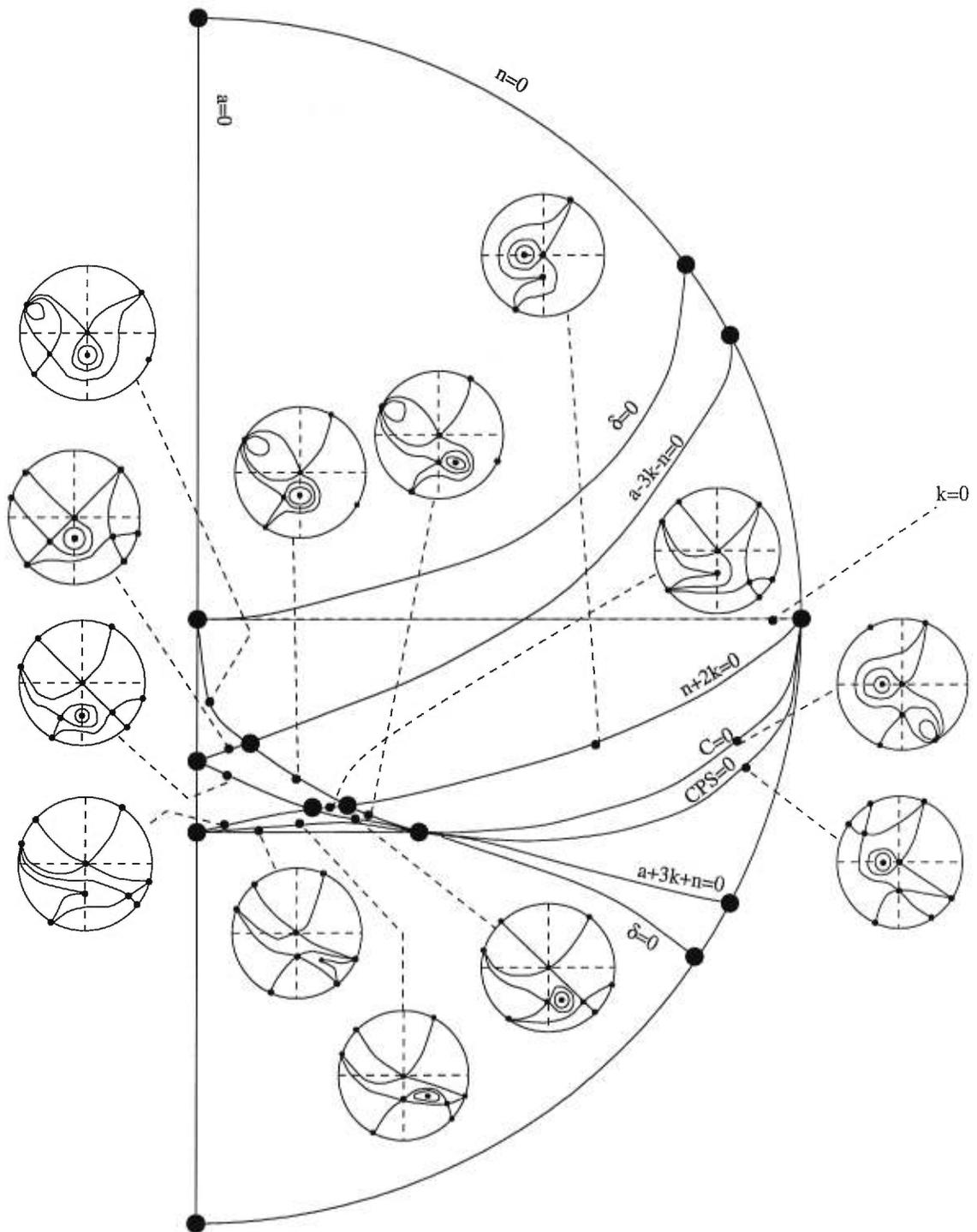


FIG. 6.6.3. Diagramme de bifurcation, cas hamiltonien, points de bifurcation dégénérés à codimension 1, deuxième partie.

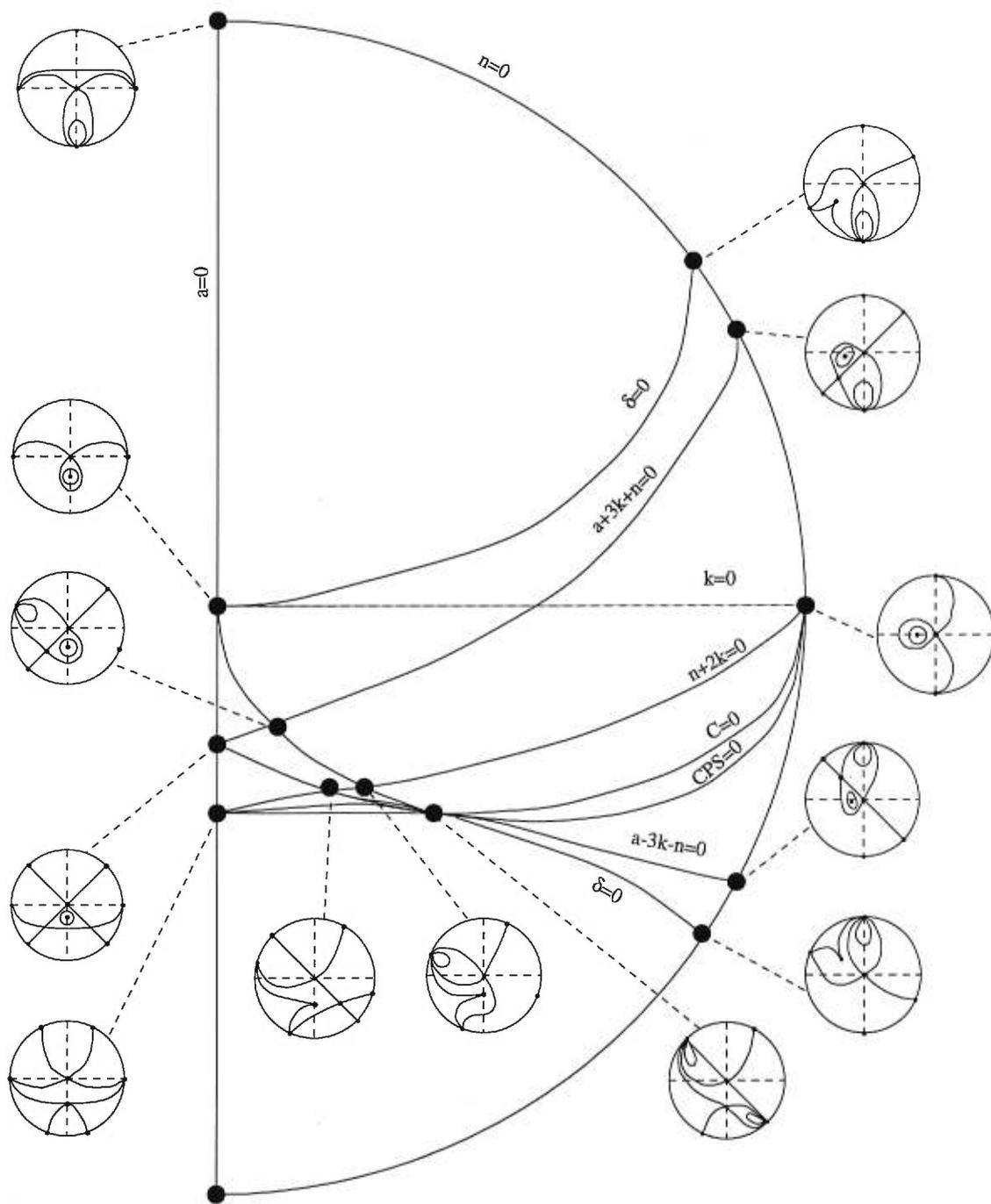


FIG. 6.6.4. Diagramme de bifurcation, cas hamiltonien, points de bifurcation dégénérés à codimension 2.

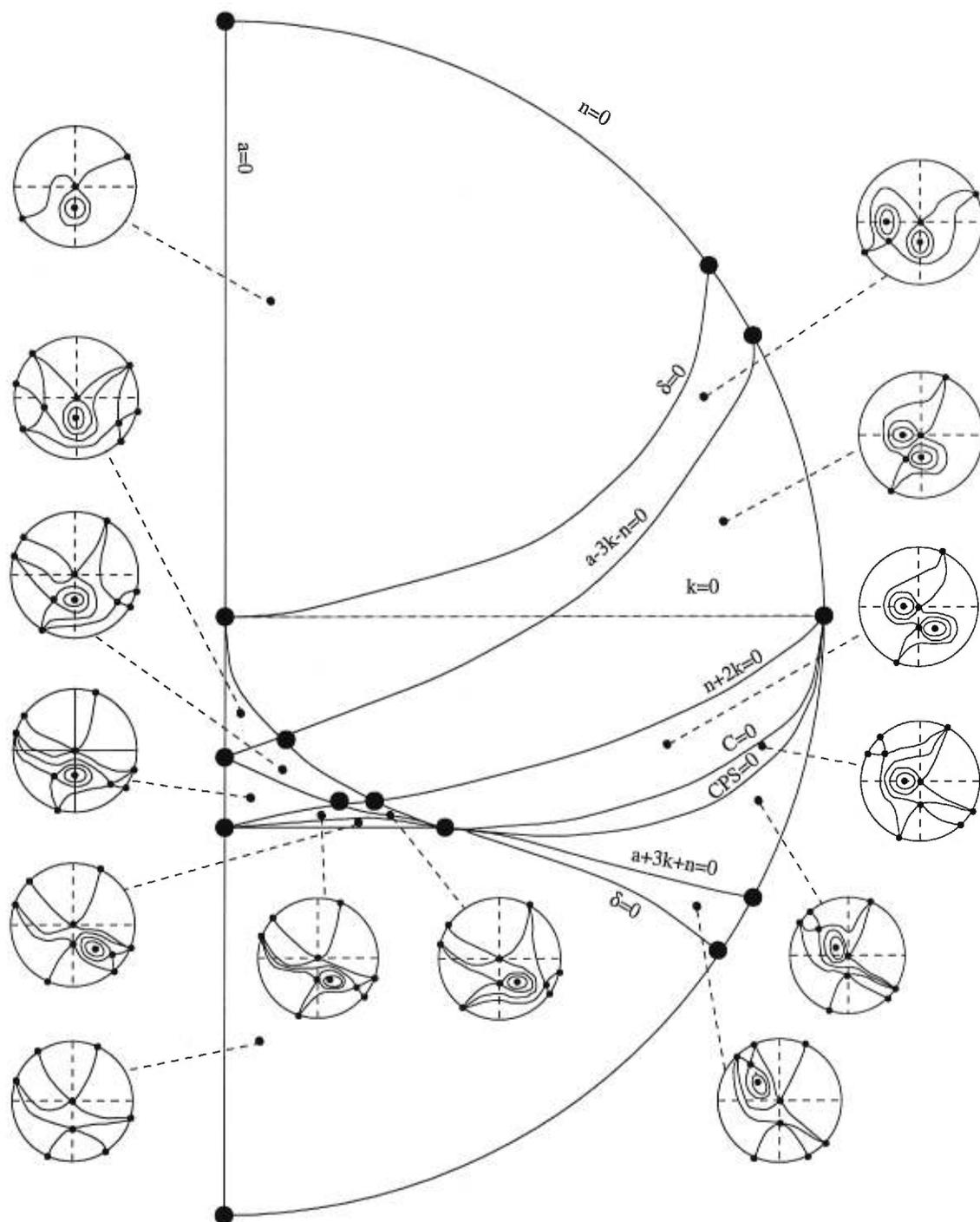


FIG. 6.6.5. Diagramme de bifurcation, cas hamiltonien, régions génériques.

Annexe A

CALCUL DES CONSTANTES DE POINCARÉ-LYAPUNOV

Voici une adaptation du programme écrit par Mathieu Gagné sur le calcul des constantes de Poincaré-Lyapunov avec Maple (voir [Gag]).

Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y + P(x, y) \\ \dot{y} = x + Q(x, y) \end{cases} \quad (\text{A.0.1})$$

$$\text{avec } P(x, y) = \sum_{i=2}^n P_i(x, y) \text{ et } Q(x, y) = \sum_{i=2}^n Q_i(x, y)$$

où $P_i(x, y) = \sum_{j=0}^i a_{ij} x^{i-j} y^j$ et $Q_i(x, y) = \sum_{j=0}^i b_{ij} x^{i-j} y^j$, avec $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{C}$ et posons $\mathbb{K} = \mathbb{Q}[a_{20}, \dots, a_{0n}, b_{20}, \dots, b_{0n}]$. Rappelons le théorème (1.2.1):

Théorème A.0.1. Étant donné le système (A.0.1), il existe une série formelle à coefficients dans \mathbb{K} , avec

$$F(x, y) = \sum_{p=2}^{\infty} F_p(x, y),$$

avec $F_2(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2}$ et $F_p(x, y) = \sum_{i=1}^p f_{pi} x^{p-i} y^i$, telle que

$$\frac{\partial F}{\partial x} P + \frac{\partial F}{\partial y} Q = \sum_{i=0}^{\infty} V_i (x^2 - y^2)^{i+1} \quad (\text{A.0.2})$$

avec $V_i \in \mathbb{K}$.

On doit d'abord entrer des sous-procédures. La première nous retourne $n!$

```
ffact:=proc(n) option remember;
  if n<=1 then 1 else n*ffact(n-2) fi end;
```

Pour un polynôme à deux variables, on considère deux représentations possibles. La première est la représentation dite *usuelle* (ex.: $f(x, y) = x + 3x^2 + 2xy - 4y^2 + 11y^3$), la seconde se voulant une représentation dite *vectorielle* (ex.: $f = [[1, 0], [3, 2, -4], [0, 0, 0, 11]]$). La procédure suivante transforme un vecteur $l = [a_0, \dots, a_m]$ en le polynôme homogène de degré m $\sum_{i=0}^m a_i x^{m-i} y^i$.

```
polyus:=proc(l) local k,i;
  k:=nops(l);
  sum('l[i]*x^(k-i)*y^(i-1)', 'i'=1..k) end;
```

La seconde procédure accepte un polynôme sous sa forme usuelle $p = \sum_{ij} a_{ij} x^i y^j$ et un nombre n et donne la n -ième composante homogène de ce polynôme sous la forme vectorielle $[a_{n0}, \dots, a_{0n}]$.

```
polyvec:=proc(p,n)
  map(proc(k,p,n),coeff(coeff(p,x,n-k),y,k) end, [$0..n],p,n) end;
```

On peut maintenant transformer l'équation (A.0.2) comme suit:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=2}^{\infty} \frac{\partial F_i}{\partial x} \right) \left(y + \sum_{i=2}^n P_i \right) + \left(\sum_{i=2}^{\infty} \frac{\partial F_i}{\partial y} \right) \left(x + \sum_{i=2}^n Q_i \right) \\ &= \sum_{i=2}^{\infty} \left(y \frac{\partial F_i}{\partial x} + x \frac{\partial F_i}{\partial y} \right) + \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=2}^n \left(P_j \frac{\partial F_i}{\partial x} + Q_j \frac{\partial F_i}{\partial y} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} V_i (x^2 - y^2)^{i+1}. \end{aligned}$$

Définissant les opérateurs différentiels $D_1 = y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ et $D_i = P_i \frac{\partial}{\partial x} + Q_i \frac{\partial}{\partial y}$, on réécrit maintenant l'équation

$$\sum_{i=2}^{\infty} D_1(F_i) = - \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=2}^n D_j(F_i) + \sum_{i=1}^{\infty} V_i (x^2 - y^2)^{i+1}. \quad (\text{A.0.3})$$

On introduit maintenant une procédure qui prend deux polynômes $P(x, y) = \sum_{i=2}^n P_i(x, y)$ et $Q(x, y) = \sum_{i=2}^n Q_i(x, y)$ et qui les retourne sous la forme vectorielle, séparés selon leurs composantes homogènes. En fait, la procédure nous retourne un objet de la forme $[[], [P2, Q2], [P3, Q3], \dots, [Pn, Qn]]$.

```
divihomo:= proc(P,Q) local djs,i;
  djs:=[1];
  for i from 2 to max(degree(P,{x,y}),degree(Q,{x,y}))
    do djs:=[op(djs),i] od;
  djs:=map(proc(n,P,Q) [polyus(polyvec(P,n)),
    polyus(polyvec(Q,n))] end, djs,P,Q) end;
```

Nous formons ensuite, de chaque paire de polynômes homogènes obtenue, l'opérateur différentiel qui y correspond: $D_i = P_i \frac{\partial}{\partial x} + Q_i \frac{\partial}{\partial y}$. La procédure qui suit saisit un polynôme p sous sa forme usuelle et lui applique l'opérateur dj .

```
djer:=proc(p,dj);
  expand(dj[1]*diff(p,x) +dj[2]*diff(p,y)) end;
```

Dans (A.0.3), si on réunit les composantes homogènes de même degré, on se ramène au système d'équations suivant. Puisque $\deg D_i(F_j) = i + j - 1$,

$$\left. \begin{array}{ll} \text{deg} = 2 & D_1(F_2) = 0 \\ \text{deg} = 3 & D_1(F_3) = -D_2(F_2) \\ \text{deg} = 4 & D_1(F_4) = -D_2(F_3) - D_3(F_2) + V_1(x^2 - y^2)^2 \\ \vdots & \vdots \\ \text{deg} = 2k - 1 & D_1(F_{2k-1}) = - \sum_{i+j=2k} D_j(F_i) \\ \text{deg} = 2k & D_1(F_{2k}) = - \sum_{i+j=2k+1} D_j(F_i) + V_{k-1}(x^2 - y^2)^k \end{array} \right\}$$

Afin de rendre ces résultats plus conviviaux, on notera

$$G_k = - \sum_{1+j=k+1} D_j(F_i) = - \sum_{1=2}^{\min(n,k-1)} D_i F_{k+1-i} = \sum_{i=0}^k g_{k,i} x^{k-i} y^i.$$

Maintenant voici une procédure pour, F étant donné sous sa forme vectorielle, nous fournir G_k .

```
Gn:=proc(F,p,djs) local u,j;
  u= min(p-1, nops(ejs));
  polyvec(-sum('djer(polyus(op(p+1-j,F)),djs[j]','j'=2..u),p) end:
```

On doit donc résoudre le système d'équations (A), que l'on a transformé sous la forme:

$$D_1(F_2) = 0 \quad (\text{A.0.4})$$

$$D_1(F_{2k-1}) = G_{2k-1} \quad (\text{A.0.5})$$

$$D_1(F_{2k}) = G_{2k} + V_{k-1}(x^2 - y^2)^k \quad (\text{A.0.6})$$

La première équation se résoud manuellement, $F_2 = \frac{x^2 - y^2}{2}$. Tout est en place pour débiter la preuve par induction. On suppose que l'on connaît déjà $F_2, F_3, \dots, F_{2k-2}$, on connaît aussi G_3, \dots, G_{2k-1} , calculées avec Gn. Les constantes V_1, \dots, V_{k-2} sont donc aussi supposées connues et les équations précédentes satisfaites jusqu'à l'ordre $2k - 2$. On s'attaque maintenant à calculer F_{2k-1} , V_{k-1} et F_{2k} .

D'abord, F_{2k-1} .

On résoud l'équation (A.0.4) en termes des $f_{2k-1,i}$.

$$\begin{aligned} & y \sum_{i=0}^{2k-2} f_{2k-1,i} x^{2k-2-i} y^i + x \sum_{i=1}^{2k-1} i f_{2k-1,i} x^{2k-1-i} y^{i-1} \\ &= f_{2k-1,1} x^{2k-1} + f_{2k-1,2k-2} y^{2k-2} + \sum_{i=1}^{2k-2} [(2k-i) f_{2k-1,i-1} + (i+1) f_{2k-1,i+1}] x^{2k-1-i} y^i \\ &= \sum_{i=0}^{2k-1} g_{2k-1,i} x^{2k-1-i} y^i. \end{aligned}$$

Cela nous permet d'exprimer sous la forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2k-1 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k-2 & 0 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 0 & 2k \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{2k-1,0} \\ f_{2k-1,1} \\ \vdots \\ f_{2k-1,2k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{2k-1,0} \\ g_{2k-1,1} \\ \vdots \\ g_{2k-1,2k-1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.0.7})$$

On a $\det A = (2k - 1)!!$ donc il existe une solution unique à ce système; on peut donc déterminer F_{2k-1} , et du même coup $G_{2k} = \sum_{i+j=2k+1} D_j(f_i)$.

```
Fimp:=proc(k,g) local tempF,j,cons;
  tempF:=table();
  tempF[1]:=g[1];
  tempF[2*k-2]:=g[2*k];
  for j from 1 to k-1 do
    tempF[2*k+1]:=expand((g[2*k+1]-(2*k-2*j)*tempF[2*j-1])/(2*j+1));
    tempF[2*k-2*j-2]:=expand((g[2*k-2*j]-(2*k-2*j)*
      tempF[2*k-2*j])/(2*j+1));
  od;
  cons:=[tempF[0]];
  for j from 1 to 2*j-1 do cons:=[op(cons,tempF[j])od end;
```

On s'attaque maintenant à trouver V_{k-1} , et par la suite F_{2k} . On résout

$D(F_{2k}) = G_{2k} + V_{k-1}(x^2 - y^2)^k$. Il faut résoudre:

$$\begin{aligned} & y \sum_{i=0}^{2k-1} (2k-i) f_{2k,i} x^{2k-1-i} y^i + x \sum_{i=1}^{2k} i f_{2k,i} x^{2k-i} y^{i-1} \\ &= f_{2k,1} x^{2k} + f_{2k,2k-1} y^{2k} + \sum_{i=1}^{2k-1} [(2k-i+1) f_{2k,i-1} + (i+1) f_{2k,i+1}] x^{2k-i} y^i \\ &= \sum_{i=0}^{2k} g_{2k,i} x^{2k-i} y^i + V_{k-1} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i x^{2k-2i} y^{2i}. \end{aligned}$$

Identifiant les termes de même degré, on retrouve:

$$f_{2k,1} = g_{2k,0} + V_{k-1} \quad (\text{A.0.8})$$

$$f_{2k,2k-1} = g_{2k,2k} + (-1)^k V_{k-1} \quad (\text{A.0.9})$$

$$(2k - 2j)f_{2k,2j} + (2j + 2)f_{2k,2j+2} = g_{2k,2j} \quad (\text{A.0.10})$$

$$(2k - 2j + 1)f_{2k,2j-1} + (2j + 1)f_{2k,2j+1} = g_{2k,2j} + (-1)^j \binom{k}{j} V_{k-1} \quad (\text{A.0.11})$$

Ce système se scinde en deux systèmes indépendants, ce qui en simplifie la résolution. Le premier sous-système contient les $f_{2k,i}$ avec les i impairs confrontés aux $g_{2k,i}$ avec i pairs. Le deuxième sous-système comporte, quant à lui, les $f_{2k,i}$ où les i sont pairs et les $g_{2k,i}$ où les i sont impairs, ce qui correspond à l'équation (A.0.11).

Le premier sous-système s'illustre sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ (2k-1) & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & (2k-3) & 5 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & (2k-1) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{2k,1} \\ f_{2k,3} \\ \vdots \\ f_{2k,2k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{2k,0} \\ g_{2k,2} \\ \vdots \\ g_{2k,2k} \end{pmatrix} + V_{k-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -k \\ (-1)^j \binom{k}{j} \\ (-1)^{k-1} \end{pmatrix}.$$

On nommera cette équation $B\vec{f} = \vec{g} + V_{k-1}\vec{k}$. Pour trouver V_{k-1} , on multiplie de chaque côté à gauche par la matrice A , diagonale de dimension $(k+1) \times (k+1)$, avec terme général

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ (-1)^i (2i-1)!! (2k-2i-1)!! & \text{si } i = j \end{cases}.$$

À gauche, l'addition de tous les termes du vecteur $AB\vec{f}$ s'annule, donc l'addition des éléments de $A\vec{g} + V_{k-1}A\vec{k}$ s'annule aussi, c'est-à-dire,

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i (2i-1)!! (2k-2i-1)!! g_{2k,2i} + V_{k-1} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (2i-1)!! (2k-2i-1)!! = 0.$$

Cela nous donne

$$V_{k-1} = \frac{-\sum_{i=0}^k (-1)^i (2i-1)!! (2k-2i-1)!! g_{2k,2i}}{\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (2i-1)!! (2k-2i-1)!!} \quad (\text{A.0.12})$$

et que l'on calcule, connaissant G_{2k} , comme suit:

```
Vj:=proc(ok,g) local j,k;
  k:=ok+1;
  -sum('((-1)^j)*g[2*j+1]*ffact(2*j-1)*ffact(2*k-2*j-1)',
  'j'=0..k)/sum('binomial(k,j)*ffact(2*j-1)*ffact(2*k-2*j-1)',
  'j'=0..k) end;
```

Ayant maintenant cette constante connue, on peut résoudre le système précédent de façon unique.

Reste à résoudre le deuxième sous-système, celui avec les $f_{2k,i}$ et i pairs.

$$\begin{pmatrix} 2k & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2k-2 & 4 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 4 & 2k-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{2k,0} \\ f_{2k,2} \\ \vdots \\ f_{2k,2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{2k,1} \\ g_{2k,3} \\ \vdots \\ g_{2k,2k-1} \end{pmatrix},$$

système avec $k-1$ équations, k inconnues. La matrice étant de rang maximal on a une variable libre, ce qui est concordant avec le fait que les constantes de

Poincaré-Lyapunov, V_k , pour $k \geq 2$, ne sont pas uniquement déterminées. Donc connaissant G_{2k} et V_{k-1} , on résoud les deux sous-systèmes avec la procédure:

```
Fpai:=proc(k,g,alpha,V) local tempF,j,cons;
  tempF:=table();
  tempF[1]:=g[1]+V;
  tempF[0]:=alpha;
  for j from 1 to k-1 do
    tempF[2*j+1]:=expand((g[2*j+1]+((-1)^j)*binomial(k,j)
      *V-(2*k-2*j-1)*tempF[2j-1])/(2*j+1));
    tempF[2*j]:=expand((g[2*j]-(2*k-2*j+2)*tempF[2j-2])/(2*j));
  od;
  tempF[2*k]:=expand((g[2*k]-2*tempF[2*k-2])/(2*k));
  cons:=[tempF[0]];
  for j from 1 to 2*k do cons:=[op(cons),tempF[j]] od end;
```

Reste la procédure principale, celle où, étant donnés P et Q , les polynômes et k , un nombre naturel, nous retourne la k^e constante de Poincaré-Lyapunov.

```
V:=proc(P,Q,k,retV,retF,oldF) local djs,F,G,Vs,j,n;
  djs:=divihomo(P,D);
  if nargs<6 then
    F:=[0,[1/2,0,-1/2]];
    G:=[0,0,Gn(F,3,djs)];
    F:=[op(F),Fimp(2,G[3])];
    G:=[op(G),Gn(F,4,djs)];
    Vs:=[Vj(1,G[4])]
  else
    F:=oldF;
```

```

G:=[0,0];
Vs:=[];
n:=(nops(F)-3)/2;
for j from 3 to 2*n+4 do
    G:=[op(G),Gn(F,j,djs)] od;
for j from 1 to n+1 do
    Vs:=[op(Vs),Vj(j,G[j,G[2*j+2]])] od fi;
j:=nops(Vs);
while j<k do
    F:=[op(F),Fpai(j+1,G[2*(j+1)],o,Vs[j])];
    G:=[op(G),Gn(F,2*(j+1)+1,djs)];
    F:=[op(F),Fpai(j+2,G[2*(j+1)+1])];
    G:=[op(G),Gn(F,2*(j+1)+2,djs)];
    Vs:=[op(Vs),Vj(j+1,G[2*(j+1)+2])];
    j:=j+1 od;
retV:=Vs;
retF:=F;
Vs[k] end:

```

BIBLIOGRAPHIE

- [AL94] William W. Adams and Philippe Loustau, *An introduction to Gröbner bases*, American Mathematical Society, 1994.
- [AL97] Joan. C. Artés and Jaume Llibre, *Quadratic vector fields with a weak focus of third order*, Publ. Mat. **41** (1997), 7–39.
- [Arn74] V. I. Arnol'd, *Equations différentielles ordinaires*, 3^e ed., Éditions Mir-Moscou, 1974.
- [Dar78] G. Darboux, *Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré*, Bull. des Sc. Math. (1878), 60–96, 123–144, 151–200.
- [Dul08] H. Dulac, *Recherches sur les points singuliers des équations différentielles*, Journal de l'École Polytechnique **9** (1908), no. 2, 1–125.
- [Gag] M. Gagné, *Calcul des constantes de Poincaré-Lyapunov*, 1992.
- [Kir92] F. Kirwan, *Complex algebraic curves*, London Mathematical Society, 1992.
- [Lan93] S. Lang, *Algebra*, Addison-Wesley, 1993.
- [Per91] L. Perko, *Differential equations and dynamical systems*, Texts in Applied Mathematics, 1991.
- [PS97] J. Pal and D. Schlomiuk, *Summing up the dynamics of quadratic hamiltonian systems with a center*, Canadian J. Math. **49** (3) (1997), 583–599.
- [RJ89] Christiane Rousseau and Pierre Joyal, *Saddle quantities and applications*, Journal of Differential Equations **78** (1989), 374–399.
- [Sch93a] Dana Schlomiuk, *Algebraic and geometric aspects of the theory of polynomial vector fields*, Kluwers Academic Publishers (1993), 429–467.
- [Sch93b] Dana Schlomiuk, *Algebraic particular integrals, integrability and the problem of the center*, Transactions of the AMS **338** (1993), no. 2, 799–841.
- [Shi81] Songling Shi, *A method of constructing cycles without contact around a weak focus*, Journal of Differential Equations (1981), 301–312.

- [Shi84] Songling Shi, *On the structure of Poincaré-Lyapunov constants for the weak focus of polynomial vector fields*, Journal of Differential Equations (1984), 52–57.
- [Vel69] E. A. González Velasco, *Generic properties of polynomial vector fields at infinity*, Trans. Amer. Math. Soc. **143** (1969), 201–222.