UNIVERSITÉ DE MONTREAL

SOLUTIONS PARTIELLEMENT INVARIANTES DE L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER NONLINÉAIRE COUPLÉE

par

Andrey SEMKOVSKI

Département de mathématiques et statistique

Faculté des Arts et des Sciences

Mémoire de maîtrise présenté à la Faculté des études supérieures en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.) en Mathématiques

Décembre 1998

UNIVERSITÉ DE MONTREAL

FACULTÉ DES ÉTUDES SUPÉRIEURES

Ce mémoire intitulé

SOLUTIONS PARTIELLEMENT INVARIANTES DE L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER NONLINÉAIRE COUPLÉE

présenté par

Andrey SEMKOVSKI

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Mme V. Hussin

(président rapporteur)

M. P. Winternitz

(directeur de recherche)

M. A.M. Grundland

(membre du jury)

Mémoire accepté le 29 janvier 1999

SOMMAIRE

Le présent mémoire considère le système d'équations différentielles

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = (\overline{u}u)u \quad \text{où} \quad u = (u_1, u_2, u_3)$$

qui est une généralisation de l'équation bien connue de Schrödinger. Le système susdit, appelé aujourd'hui système de Schrödinger non-linéaire couplé est déjà étudié dans un article de A.Sciarrino et P.Winternitz où sont citées les sources physiques des problèmes menant à ce système et sont trouvées les solutions invariantes provenant des algèbres deux- et tridimensionnelles qui satisfont à la condition de rang maximal. Dans le mémoire sont considérées les deux sous-algèbres tridimensionnelles $\{L_{12} + a_1 M + a_2 T_3 + a_3 U_3, P_1, P_2\}$ et $\{C, D, P_0\}$ de l'algèbre de Lie, $L = sch(2) \oplus su(3)$ correspondant au système de Schrödinger non-linéaire couplé, où L_{12} est l'algèbre de rotation, D - dilatation, P_0, P_1, P_2 - translations suivant t, x et y respectivement, C - transformation projective, M, T_3 et U_3 - changement des phases. Ces sous-algèbres ne satisfont pas à la condition de rang maximal et les solutions provenant d'elles sont supposées (d'après la terminologie contemporaine) partiellement invariantes. En dépit des apparences certaines solutions provenant de ces algèbres restent invariantes sous l'action des sous-groupes correspondant aux algèbres déjà étudiées. De pareilles solutions sont appelées partiellement invariantes réductibles. Telles sont les solutions **(II.20)** et **(II.21)** - invariantes sous l'action du groupe engendré par l'algèbre $L_{2,2} = \{K_1 + a_k \partial_{\phi_k}, P_2 + b_k \partial_{\phi_k}\}$ et les solutions **(II.19)** et **(II.22)** - invariantes sous l'action d'un groupe correspondant à une algèbre conjuguée à $L_{2,2}$. Ces quatre solutions ne doivent pas être considérées comme essentiellement différentes. Du même type est la solution **(II.29)** - invariante sous l'action du groupe associé à l'algèbre

$$L_{3,1} = \{P_0 + kM + a_1 T_3 + a_2 U_3, P_1 + b_1 T_3 + b_2 U_3, P_2 + c_1 T_3 + c_2 U_3\}$$

Une exception curieuse de ces solutions est **(II.18)**. Cette solution, pour autant qu'on le sache, n'a pas été publiée (au moins on ne peut pas la trouver dans les livres et les articles des références). Elle est invariante sous l'action des rotations du plan qui constituent un groupe dépendant d'un seul paramètre auquel correspond une algèbre unidimensionnelle. Faute d'une classification des algèbres de cette dimension, la solution mentionnée ci-dessus a échappé aux chercheurs. Les véritables résultats nouveaux sont les solutions qui ne sont invariantes sous l'action d'aucun sous-groupe du groupe engendré par l'algèbre $L = sch(2) \oplus su(3)$. Elles sont appelées partiellement invariantes irréductibles . Ce sont les solutions **(II.24)-(II. 27)** et toutes les solutions obtenues de l'algèbre $\{C, D, P_0\}$ - **(III.16)-(III.20)**.

TABLE DES MATIÈRES

I. INTRODUCTION

Le but de cette recherche est l'étude du système de Schrödinger non-linéaire couplé c'est-à-dire

$$\textbf{(I.1)} \qquad i\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \\ \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \\ \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = (\overline{u}u)u \text{ , où } u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

Pour séparer la partie réelle de la partie imaginaire on pose

$$\begin{cases} u_1 = \rho_1 e^{i\Phi_1} & \rho_k, \Phi_k \in \mathbb{R} \\ u_2 = \rho_2 e^{i\Phi_2} & \rho_k \geq 0 \quad k = 1,2,3 \\ u_3 = \rho_3 e^{i\Phi_3} & 0 \leq \Phi_k < 2\pi \end{cases}$$

Après la séparation, on obtient le système des six équations suivantes :

$$\textbf{(I.2)} \qquad \begin{array}{ll} \Delta\rho_1 - \rho_1 \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial t} - \rho_1 \displaystyle\sum_{k=1}^{2}\left(\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial x_k}\right)^2 = \rho_1 \sum_{\mu=1}^{3} \rho_\mu^2 & \dfrac{\partial\rho_1}{\partial t} + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{2} \dfrac{\partial\rho_1}{\partial x_k}\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial x_k} + \rho_1\Delta\Phi_1 = 0 \\ \Delta\rho_2 - \rho_2 \dfrac{\partial\Phi_2}{\partial t} - \rho_2 \displaystyle\sum_{k=1}^{2}\left(\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial x_k}\right)^2 = \rho_2 \sum_{\mu=1}^{3} \rho_\mu^2 & \dfrac{\partial\rho_2}{\partial t} + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{2} \dfrac{\partial\rho_2}{\partial x_k}\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial x_k} + \rho_2\Delta\Phi_2 = 0 \\ \Delta\rho_3 - \rho_3 \dfrac{\partial\Phi_3}{\partial t} - \rho_3 \displaystyle\sum_{k=1}^{2}\left(\dfrac{\partial\Phi_3}{\partial x_k}\right)^2 = \rho_3 \sum_{\mu=1}^{3} \rho_\mu^2 & \dfrac{\partial\rho_3}{\partial t} + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{2} \dfrac{\partial\rho_3}{\partial x_k}\dfrac{\partial\Phi_3}{\partial x_k} + \rho_3\Delta\Phi_3 = 0 \end{array}$$

ou sous une forme matricielle

$$\textbf{(I.3)}\quad \begin{pmatrix} \Delta\rho_1 - \rho_1 \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial t} - \rho_1 \displaystyle\sum_{k=1}^{2}\left(\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial x_k}\right)^2 \\ \Delta\rho_2 - \rho_2 \dfrac{\partial\Phi_2}{\partial t} - \rho_2 \displaystyle\sum_{k=1}^{2}\left(\dfrac{\partial\Phi_3}{\partial x_k}\right)^2 \\ \Delta\rho_3 - \rho_3 \dfrac{\partial\Phi_3}{\partial t} - \rho_3 \displaystyle\sum_{k=1}^{2}\left(\dfrac{\partial\Phi_3}{\partial x_k}\right)^2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\rho_1}{\partial t} + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\dfrac{\partial\rho_1}{\partial x_k}\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial x_k} + \rho_1\Delta\Phi_1 \\ \dfrac{\partial\rho_2}{\partial t} + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\dfrac{\partial\rho_2}{\partial x_k}\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial x_k} + \rho_2\Delta\Phi_2 \\ \dfrac{\partial\rho_3}{\partial t} + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\dfrac{\partial\rho_3}{\partial x_k}\dfrac{\partial\Phi_3}{\partial x_k} + \rho_3\Delta\Phi_3 \end{pmatrix} = \sum_{\mu=1}^{3}\rho_\mu^2 \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix}$$

A.Sciarrino et P.Winternitz ont utilisé la théorie des groupes de Lie afin d'obtenir certaines solutions invariantes de **(I.1)** - **(I.3)** (voir [41]). Ils ont trouvé que l'algèbre de Lie correspondant au système considéré est $L = sch(2) \oplus su(3)$. Dans [41] la classification complète des sous-algèbres deux- et tridimensionnelles de L est faite et pour celles dont le nombre des invariants n'est pas inférieur au nombre des variables dépendantes (les fonctions inconnues dans **(I.1)** - **(I.3)**), les solutions invariantes sont trouvées. Le nombre des invariants des algèbres $\{L_{12} + a_1 M + a_2 T_3 + a_3 U_3, P_1, P_2\}$ et $\{C, D, P_0\}$ est inférieur au nombre des fonctions inconnues. Ces deux algèbres s'avèrent donc de bons candidats pour qu'on obtienne des solutions partiellement invariantes. Pour chacune d'elles on obtient six invariants linéairement indépendants dont il n'y a qu'un seul qui dépend des variables indépendantes (le temps t pour la première algèbre et l'angle polaire ω pour la seconde). Les autres cinq invariants sont aussi fonctions des variables dépendantes dont le nombre est six. Alors on peut exprimer en termes de t (pour la première algèbre par exemple) les trois modules mais l'une des trois phases (Φ_1 par exemple) dépendra de t (invariant) et des deux variables indépendantes (x et y dans le cas considéré). On se propose de résoudre le système **(I.2)** pour les cinq fonctions inconnues à une variable indépendante, et une fonction inconnue à trois variables indépendantes. Les pages qui suivent visent l'étude et l'analyse des solutions provenant de ces deux algèbres tridimensionnelles. Elles n'ont pas la prétention d'avoir épuisé le problème, mais plutôt d'avoir contribué à l'avancement de sa résolution.

II. SOLUTIONS OBTENUES DE L'ALGÈBRE

$$\left\{L_{12}+a_1 M+a_2 T_3+a_3 U_3, P_1, P_2\right\}$$

Pour trouver les invariants du groupe de Lie correspondant à l'algèbre $\left\{L+a_1 M+a_2 T_3+a_3 U_3, P_1, P_2\right\}$ où $L_{12}=x_2\dfrac{\partial}{\partial x_1}-x_1\dfrac{\partial}{\partial x_2}$, $M=\sum_{\mu=1}^{3}\dfrac{\partial}{\partial \Phi_\mu}$, $P_1=\dfrac{\partial}{\partial x_1}$, $P_2=\dfrac{\partial}{\partial x_2}$,

$T_3=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial \Phi_1}-\dfrac{\partial}{\partial \Phi_2}\right)$, $U_3=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial \Phi_2}-\dfrac{\partial}{\partial \Phi_3}\right)$ et $a_i=const\ (i=1,2,3)$, on forme le système

$$\text{(II.1)}\quad \begin{cases} x_2\dfrac{\partial F}{\partial x_1}-x_1\dfrac{\partial F}{\partial x_2}+a_1\left(\dfrac{\partial F}{\partial \Phi_1}+\dfrac{\partial F}{\partial \Phi_2}+\dfrac{\partial F}{\partial \Phi_3}\right)+\dfrac{a_2}{2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \Phi_1}-\dfrac{\partial F}{\partial \Phi_2}\right)+\dfrac{a_3}{2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \Phi_2}-\dfrac{\partial F}{\partial \Phi_3}\right)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_1}=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2}=0 \end{cases}$$

Les deux dernières équations montrent que la fonction F ne dépend pas de x_1 et de x_2. On introduira les nouvelles notations $A_1=a_1+\dfrac{a_2}{2}$, $A_2=a_1-\dfrac{a_2}{2}+\dfrac{a_3}{2}$, $A_3=a_1-\dfrac{a_3}{2}$ à l'aide desquelles la première équation s'écrira sous la forme

$$\text{(II. 2)}\quad A_1\frac{\partial F}{\partial \Phi_1}+A_2\frac{\partial F}{\partial \Phi_2}+A_3\frac{\partial F}{\partial \Phi_3}=0$$

Le système caractéristique pour cette équation est

$$\frac{dt}{0}=\frac{d\rho_1}{0}=\frac{d\rho_2}{0}=\frac{d\rho_3}{0}=\frac{d\Phi_1}{A_1}=\frac{d\Phi_2}{A_2}=\frac{d\Phi_3}{A_3}$$

d'où on obtient les six invariants

$$\textbf{(II.3)}\qquad \begin{cases} t = const, \quad \rho_1 = const, \quad \rho_2 = const, \quad \rho_3 = const \\ \xi_1 = A_2\Phi_1 - A_1\Phi_2, \quad \xi_2 = A_3\Phi_1 - A_1\Phi_3 \end{cases}$$

Après avoir calculé les dérivées partielles des invariants par rapport aux fonctions inconnues, on obtient pour le jacobien:

$$J=\frac{D(t,\rho_1,\rho_2,\rho_3,\xi_1,\xi_2)}{D(\rho_1,\rho_2,\rho_3,\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3)}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_2 & -A_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_3 & 0 & -A_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} A_2\Phi_1 = A_1\Phi_2 + \xi_1(t) \\ A_3\Phi_1 = A_1\Phi_3 + \xi_2(t) \end{cases}$$

<u>Dans ce qui suit on ne traitera que le cas - Jacobien de rang cinq.</u>

Soit $A_1 \neq 0$, ce qui assure la condition $\operatorname{rang} J = 5$. Choisissons parmi les six invariants **(II.3)** cinq qui seront considérés comme des fonctions du sixième (considéré comme variable indépendante). On va sauvegarder t en tant que variable indépendante. Alors on aura

$\rho_k = \rho_k(t)$ $(k=1,2,3)$ $\xi_k = \xi_k(t) = A_{k+1}\Phi_k - A_k\Phi_{k+1}$. Posons $C_2 = \dfrac{A_2}{A_1}$, $C_3 = \dfrac{A_3}{A_1}$ et introduisons $\widetilde{\alpha}_k = -\dfrac{\xi_k}{A_1}$, $(k=1,2)$ ($\widetilde{\alpha}_k$ sont aussi des invariants, ayant en vue que A_k sont des constants) . Pour faciliter l'écriture, on posera $x_1 = x$ et $x_2 = y$. Les variables dépendantes deviennent

$$\textbf{(II.4)}\quad \begin{array}{ll} \rho_1 = \rho_1(t) & \Phi_1 = \Phi_1(t,x,y) \\ \rho_2 = \rho_2(t) & \Phi_2 = C_2\Phi_1(t,x,y) + \widetilde{\alpha}_2(t) \\ \rho_3 = \rho_3(t) & \Phi_3 = C_3\Phi_1(t,x,y) + \widetilde{\alpha}_3(t) \end{array}$$

Il faut donc établir des conditions de compatibilité entre les six fonctions $\rho_k = \rho_k(t)$, $(k=1,2,3)$; $\Phi_1 = \Phi_1(t,x,y)$; $\widetilde{\alpha}_k = \widetilde{\alpha}_k(t)$ $(k=2,3)$ de telle façon que les fonctions définies par **(II.4)** satisfassent au système de six équations non - linéaires aux dérivées partielles **(I. 2)**

Après avoir remplacé **(II.4)** dans **(I. 2),** on obtient pour $\rho_k = \rho_k(t)$, $(k=1,2,3)$; $\Phi_1 = \Phi_1(t,x,y)$ et $\widetilde{\alpha}_k = \widetilde{\alpha}_k(t)$ $(k=2,3)$ le système suivant

$$\textbf{(II.5)}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial t} + \left(\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial y}\right)^2 = -\left(\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2\right) \\ C_2\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial t} + C_2^2\left(\left(\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial y}\right)^2\right) = -\left(\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2\right) - \widetilde{\alpha}_2'(t) \\ C_3\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial t} + C_3^2\left(\left(\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial y}\right)^2\right) = -\left(\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2\right) - \widetilde{\alpha}_3'(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho_1}{\partial t} + \rho_1\left(\dfrac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\Phi_1}{\partial y^2}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial\rho_2}{\partial t} + C_2\rho_2\left(\dfrac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\Phi_1}{\partial y^2}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial\rho_3}{\partial t} + C_3\rho_3\left(\dfrac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\Phi_1}{\partial y^2}\right) = 0 \end{cases}$$

Il faut remarquer aussi que la solution du système **(II.5)** dépendra essentiellement des constantes C_2 et C_3 donc on commencera par le cas le plus simple où ces deux constantes sont zéro.

A) <u>**L'étude du cas**</u> $C_2 = C_3 = 0$.

Le système **(II.5)** est réduit à

$$\textbf{(II.5')}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \left(\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y}\right)^2 = -\left(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2\right) \\ \widetilde{\alpha}_2'(t) = -\left(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2\right) \\ \widetilde{\alpha}_3'(t) = -\left(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_1\left(\dfrac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial \rho_2}{\partial t} = 0 \\ \dfrac{\partial \rho_3}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

Il en résulte que $\rho_2 = \gamma_2 = const$ et $\rho_3 = \gamma_3 = const$ et $\widetilde{\alpha}_2' = -\sum_{k=1}^{3} \rho_k^2$, $\widetilde{\alpha}_3' = -\sum_{k=1}^{3} \rho_k^2$, ce qui entraîne $\widetilde{\alpha}_3 = \widetilde{\alpha}_2 + K_3$ et $\Phi_2 = \widetilde{\alpha}_2(t) = -\int \sum_{k=1}^{3} \rho_\kappa^2(t)dt$, $\Phi_3 = \widetilde{\alpha}_2(t) + const$. Pour trouver la solution dans ce cas, il suffira donc de déterminer $\rho_1 = \rho_1(t)$ et $\Phi_1 = \Phi_1(t,x,y)$.

Puisque ρ_1 ne dépend que de t, le laplacien $\dfrac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2}$ doit être une fonction de t (sinon l'équation $\dfrac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_1\left(\dfrac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2}\right) = 0$ n'aurait pas eu de sens). En introduisant une fonction $f = f(t)$ (pour l'instant inconnue), on pose **(II.6)** $\dfrac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} = -\dfrac{\dot{f}(t)}{f(t)}$. Une fois $f = f(t)$ trouvée, l'équation **(II.7)** $\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_1 \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} \right) = 0$ est résoluble par une quadrature. La solution la plus générale de **(II.6)** est obtenue par la somme de la solution la plus générale de l'équation homogène $\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} = 0$, plus une solution particulière de l'équation non-homogène **(II.6)** , c'est-à-dire $\Phi_1(t,x,y) = R(t,\xi) + S(t,\eta) + \zeta(t,x,y)$ où $\xi = x + iy$, $\eta = x - iy$ et $\Phi_1 = \Phi_1^*$, ce qui implique $S(t,\eta) = R^*(t,\xi^*) = R^*(t,\eta)$. On vérifie aisément que $\zeta(t,x,y) = -\frac{\dot{f}(t)}{4f(t)}\left(x^2 + y^2\right)$ est une solution particulière de **(II.6),** pour n'importe quelle fonction dérivable $f(t)$ (qui ne s'annule pas pour $t \geq 0$), d'où la solution $\Phi_1(t,x,y)$ sera obtenue sous la forme

$$\textbf{(II.8)} \qquad \Phi_1(t,x,y) = R(t,\xi) + S(t,\eta) - \frac{\dot{f}(t)}{4f(t)}\left(x^2 + y^2\right)$$

Les dérivées partielles de Φ_1 par rapport à x et y sont

$$\textbf{(II.9)} \quad \begin{cases} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} = R_\xi + S_\eta - \frac{\dot{f}(t)}{2f(t)}x \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} = i(R_\xi - S_\eta) - \frac{\dot{f}(t)}{2f(t)}y \end{cases}$$

Après avoir remplacé ces dérivées dans l'équation

$$\textbf{(II.10)} \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\right)^2 = -\left(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2\right)$$

on trouve

$$R_t + S_t - \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{f}(t)}{4f(t)}\left(x^2 + y^2\right)\right) + \left(R_\xi + S_\eta - \frac{\dot{f}}{2f}x\right)^2 + \left(i\left(R_\xi - S_\eta\right) - \frac{\dot{f}}{2f}y\right)^2 = -\sum_{\mu=1}^{3}\rho_\mu^2(t)$$

Après la simplification (compte tenu de $(x-iy)(x+iy)=x^2+y^2=\xi\eta$), on obtient

$$R_t+S_t-\frac{\xi\eta}{4}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot f}{f}\right)-\left(\frac{\dot f}{f}\right)^2\right]+4R_\xi S_\eta-\left(\xi R_\xi+\eta S_\eta\right)\frac{\dot f}{f}=-\sum_{\mu=1}^{3}\rho_\mu^2$$

En dérivant cette égalité successivement par rapport à ξ et η, on aura

$-\frac{1}{4}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot f}{f}\right)-\left(\frac{\dot f}{f}\right)^2\right]+4(R_\xi S_\eta)_{\xi\eta}=0$, d'où en intégrant réciproquement :

$$\textbf{(II.11)}\quad R_\xi S_\eta=-\frac{1}{16}\left[\left(\frac{\dot f}{f}\right)^2-\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot f}{f}\right)\right]\xi\eta+h(t,\xi)+l(t,\eta)$$

Supposons que les fonctions $R(t,\xi)$ et $S(t,\xi)$ soient analytiques au voisinage de $(\xi,\eta)=(0,0)$ et considérons leurs développement de Taylor autour de $(0,0)$.

$$\begin{aligned}R&=\tilde\alpha_0+i\tilde\beta_0+(\tilde\alpha_1+i\tilde\beta_1)\xi+(\tilde\alpha_2+i\tilde\beta_2)\xi^2+(\tilde\alpha_3+i\tilde\beta_3)\xi^3+\ldots\\S&=\tilde\alpha_0-i\tilde\beta_0+(\tilde\alpha_1-i\tilde\beta_1)\eta+(\tilde\alpha_2-i\tilde\beta_2)\eta^2+(\tilde\alpha_3-i\tilde\beta_3)\eta^3+\ldots\end{aligned}$$ d'où on obtient

$$\textbf{(II.12)}\quad\begin{aligned}R_\xi&=\tilde\alpha_1+i\tilde\beta_1+2(\tilde\alpha_2+i\tilde\beta_2)\xi+3(\tilde\alpha_3+i\tilde\beta_3)\xi^2+\ldots\\S_\eta&=\tilde\alpha_1-i\tilde\beta_1+2(\tilde\alpha_2-i\tilde\beta_2)\eta+3(\tilde\alpha_3-i\tilde\beta_3)\eta^2+\ldots\end{aligned}$$

Dans les dernières égalités, les coefficients $\tilde\alpha_k$ et $\tilde\beta_k$ sont tous des fonctions de t et ils n'ont rien à voir avec les fonctions $\tilde\alpha_k=\tilde\alpha_k(t)$, $k=1{,}2$ qui font partie des formules **(II.3)**. La multiplication des expressions R_ξ et S_η donne

$$R_\xi S_\eta=\tilde\alpha_1^2+\tilde\beta_1^2+2\left(\tilde\alpha_1\tilde\alpha_2+\tilde\beta_1\tilde\beta_2\right)(\xi+\eta)+2i\left(\tilde\alpha_1\tilde\beta_2-\tilde\alpha_2\tilde\beta_1\right)(\xi-\eta)+4\left(\tilde\alpha_2^2+\tilde\beta_2^2\right)\xi\eta+\ldots$$

En comparant le dernier résultat avec **(II.11)**, on constate que

$$\textbf{(II.13)}\quad 4\left(\widetilde{\alpha}_2^2+\widetilde{\beta}_2^2\right)=-\frac{1}{16}\left[\left(\frac{\dot f}{f}\right)^2-\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot f}{f}\right)\right]\ \text{et}\ \begin{matrix}\widetilde{\alpha}_k=0\\ \widetilde{\beta}_k=0\end{matrix}\quad \forall\ k\geq 3.$$

On substitue les expressions de R_ξ et S_η dans **(II.8)** et on en obtient

$$\Phi_1=2\widetilde{\alpha}_0+\widetilde{\alpha}_1(\xi+\eta)+i\widetilde{\beta}_1(\xi-\eta)+\widetilde{\alpha}_2\left(\xi^2+\eta^2\right)+i\widetilde{\beta}_2\left(\xi^2-\eta^2\right)-\frac{\dot f}{4f}\left(x^2+y^2\right)=$$

$$=\ 2\widetilde{\alpha}_0+2\widetilde{\alpha}_1x-2\widetilde{\beta}_1y+2\widetilde{\alpha}_2\left(x^2-y^2\right)+4\widetilde{\beta}_2xy-\frac{\dot f}{4f}\left(x^2+y^2\right)$$

On changera les notations, en posant $2\widetilde{\alpha}_0=\alpha_0$, $2\widetilde{\alpha}_1=\alpha_1$, $2\widetilde{\alpha}_2=\alpha_2$, $-2\widetilde{\beta}_1=\beta_1$, $2\widetilde{\beta}_2=\beta_2$ ce qui permettra d'écrire Φ_1 sous la forme

$$\textbf{(II.14)}\quad \Phi_1=\alpha_0+\alpha_1x+\beta_1y+\alpha_2\left(x^2-y^2\right)+2\beta_2xy-\frac{\dot f}{4f}\left(x^2+y^2\right)$$

Les dérivées partielles par rapport à x et y sont respectivement

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}=\alpha_1+2\alpha_2x+2\beta_2y-\frac{\dot f}{2f}x=\alpha_1+\left(2\alpha_2-\frac{\dot f}{2f}\right)x+2\beta_2y$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}=\beta_1-2\alpha_2y+2\beta_2x-\frac{\dot f}{2f}y=\beta_1+2\beta_2x-\left(2\alpha_2+\frac{\dot f}{2f}\right)y$$

Ces dérivées remplacées dans **(II.10)** donnent

$$\dot\alpha_0+\dot\alpha_1x+\dot\beta_1y+\dot\alpha_2\left(x^2-y^2\right)+2\dot\beta_2xy-\frac{x^2+y^2}{4}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot f}{f}\right)+$$

$$+\alpha_1^2+\beta_1^2+\left[\left(2\alpha_2-\frac{\dot f}{2f}\right)^2+4\beta_2^2\right]x^2+\left[4\beta_2^2+\left(2\alpha_2+\frac{\dot f}{2f}\right)^2\right]y^2+$$

$$+2\left[\alpha_1\left(2\alpha_2-\frac{\dot f}{2f}\right)+2\beta_1\beta_2\right]x+2\left[2\alpha_1\beta_2-\beta_1\left(2\alpha_2+\frac{\dot f}{2f}\right)\right]y-4\beta_2\frac{\dot f}{f}xy=-\sum_{\mu=1}^{3}\rho_\mu^2$$

La comparaison des coefficients devant x^2, y^2, xy, x, y et 1 en dernière égalité donne le système des six équations suivant :

$$\textbf{(II.15)}\quad \begin{cases} \left(2\alpha_2 - \dfrac{\dot f}{2f}\right)^2 + 4\beta_2^2 + \dot\alpha_2 - \dfrac{1}{4}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\dot f}{f}\right) = 0 \\ 4\beta_2^2 + \left(2\alpha_2 + \dfrac{\dot f}{2f}\right)^2 - \dot\alpha_2 - \dfrac{1}{4}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\dot f}{f}\right) = 0 \\ -4\beta_2\dfrac{\dot f}{f} + 2\dot\beta_2 = 0 \\ 2\left[\alpha_1\left(2\alpha_2 - \dfrac{\dot f}{2f}\right) + 2\beta_1\beta_2\right] + \dot\alpha_1 = 0 \\ 4\alpha_1\beta_2 - 2\beta_1\left(2\alpha_2 + \dfrac{\dot f}{2f}\right) + \dot\beta_1 = 0 \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \dot\alpha_0 + \sum_{\mu=1}^{3}\rho_\mu^2 = 0 \end{cases}$$

La troisième équation est aux variables séparées et s'intègre directement : $\dfrac{d\beta_2}{\beta_2} = 2\dfrac{df}{f}$, d'où $\beta_2 = \mu_0 f^2$ (le cas $\beta_2 = 0$ y est compris pour $\mu_0 = 0$). En soustrayant la seconde équation de la première on trouve $\left(2\alpha_2 - \dfrac{\dot f}{2f}\right)^2 - \left(2\alpha_2 + \dfrac{\dot f}{2f}\right)^2 + 2\dot\alpha_2 = 0$, ce qui implique, après la simplification , $\dfrac{d\alpha_2}{\alpha_2} = 2\dfrac{df}{f}$ soit $\alpha_2 = \mu_1 f^2$. L'addition des deux premières équations entraîne

$$\left(2\alpha_2 - \frac{\dot f}{2f}\right)^2 + \left(2\alpha_2 + \frac{\dot f}{2f}\right)^2 + 8\beta_2^2 - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot f}{f}\right) = 0$$

ou bien $8\alpha_2^2 + \dfrac{\dot f^2}{2f^2} + 8\beta_2^2 - \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\dot f}{f}\right) = 0$ et après une simplification, on retrouve **(II.13)**

On remplace dans **(II.13)** les expressions trouvées pour α_2 et β_2 et on obtient $16\left(\mu_0^2+\mu_1^2\right)f^4+\left(\frac{\dot f}{f}\right)^2-\frac{\ddot f}{f}+\left(\frac{\dot f}{f}\right)^2=0$, ce qui donne après la simplification l'équation

$$\textbf{(II.16)}\quad \ddot f=\frac{2\dot f^2}{f}+16(\mu_0^2+\mu_1^2)f^5$$

En mettant α_2 et β_2 dans la quatrième et la cinquième des équations **(II.15)** et en simplifiant, on obtient un système d'équations ordinaires linéaire du premier ordre par rapport à α_1 et β_1

$$\textbf{(II.17)}\quad \begin{cases} \dot\alpha_1+\left[4\mu_1 f^2-\dfrac{\dot f}{f}\right]\alpha_1+4\mu_0 f^2\beta_1=0 \\ \dot\beta_1+4\mu_0 f^2\alpha_1-\left[4\mu_1 f^2+\dfrac{\dot f}{f}\right]\beta_1=0 \end{cases}$$

A partir d'ici on va faire une étude des solutions possibles, suivant les valeurs de μ_0 et μ_1.

I. $\mu_0^2+\mu_1^2=0$. Cette hypothèse implique immédiatement $\alpha_2=\beta_2=0$. L'équation **(II.16)** est réduite à $\ddot f=\frac{2\dot f^2}{f}$. On va la réécrire sous la forme $\frac{\ddot f f-\dot f^2}{f^2}=\frac{\dot f^2}{f^2}$ soit $\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot f}{f}\right)=\frac{\dot f^2}{f^2}$.

La substitution $\frac{\dot f}{f}=u$ amène l'équation à $u'=u^2$; après une intégration, on trouve

$u=\frac{\dot f}{f}=-\frac{1}{t+v}$ et une seconde intégration donne $f=\frac{a}{t+v}$. Le système **(II.17)** devient (à partir d'ici on utilisera les constantes $A_i,\ i=1,2,\ldots$ comme n'ayant rien à voir avec celles utilisées pour définir $C_k,\ k=1,2$),

$$\begin{cases} \dot\alpha_1+\dfrac{1}{t+v}\alpha_1=0 \\ \dot\beta_1+\dfrac{1}{t+v}\beta_1=0 \end{cases}\text{, ce qui donne}\quad \begin{cases} \alpha_1=\dfrac{A_1}{t+v} \\ \beta_1=\dfrac{A_2}{t+v} \end{cases}$$

Puisque $\dot{\tilde{\alpha}}_2 = -\sum_{k=1}^{3} \rho_k^2$, $\dot{\tilde{\alpha}}_3 = -\sum_{k=1}^{3} \rho_k^2 \Rightarrow \tilde{\alpha}_3 - \tilde{\alpha}_2 + const$ et $\rho_2 = \gamma_2$, $\rho_3 = \gamma_3$, alors on aura $\Phi_2 = \tilde{\alpha}_2(t) = -\int \sum_{k=1}^{3} \rho_\kappa^2(t)dt$, $\Phi_3 = \tilde{\alpha}_2(t) + const.$ La fonction Φ_1 devient

$$\Phi_1 = \alpha_0 + \alpha_1 x + \beta_1 y - \frac{\dot{f}}{4f}\left(x^2 + y^2\right)$$

et son laplacien d'après **(II.6)** est $\Delta\Phi_1 = -\frac{\dot{f}}{f} = \frac{1}{t+\nu}$ alors $\frac{d\rho_1}{\rho_1} = -\frac{dt}{t+\nu}$ soit $\rho_1 = \frac{\gamma_1}{t+\nu}$.

Alors on trouve pour $\dot{\tilde{\alpha}}_2(t) = -\left[\frac{\gamma_1^2}{(t+\nu)^2} + \gamma_2^2 + \gamma_3^2\right]$ soit $\tilde{\alpha}_2(t) = \frac{\gamma_1^2}{t+\nu} - (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)t + K_2$ d'où découle $\tilde{\alpha}_3(t) = \frac{\gamma_1^2}{t+\nu} - (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)t + K_3$.

A la fin $\dot{\alpha}_0 = -\left(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \sum_{k=1}^{3} \rho_k^2\right) = -\left(\frac{A_1^2 + A_2^2 + \gamma_1^2}{(t+\nu)^2} + \gamma_2^2 + \gamma_3^2\right)$, ce qui donne pour le premier coefficient $\alpha_0(t) = \frac{A_1^2 + A_2^2 + \gamma_1^2}{t+\nu} - (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)t + const.$ Finalement on a

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{t+\nu} \qquad \Phi_1 = \frac{A_1^2 + A_2^2 + \gamma_1^2}{t+\nu} - (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)t + \frac{A_1 x + A_2 y}{t+\nu} + \frac{1}{t+\nu}\frac{x^2 + y^2}{4} + K_1$$

$$\rho_2 = \gamma_2 \qquad \Phi_2 = \frac{\gamma_1^2}{t+\nu} - (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)t + K_2$$

$$\rho_3 = \gamma_3 \qquad \Phi_3 = \frac{\gamma_1^2}{t+\nu} - (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)t + K_3$$

Il est évident que cette solution est transformée par le groupe des translations $t' = t + \nu$ en une solution de **(II.5)** (plutôt **(II.5')**) mais cette évidence disparaît quand il s'agit des translations $\begin{cases} x' = x + \lambda \\ y' = y + \mu \end{cases}$, à cause de l'expression $x^2 + y^2$. A son tour, cette dernière expression suppose invariance par rapport au groupe des rotations du plan, mais la partie linéaire $A_1 x + B_1 y$ en est un obstacle. Il est facile à démontrer, qu'en dépit des apparences cette solution se transforme en solution sous l'action du groupe des translations

$$x' = x + \lambda, \quad y' = y + \mu \qquad \text{et}$$

que dans l'ensemble des solutions de ce type il y en a une qui est invariante sous l'action du groupe des rotations du plan.

Si l'on pose $2A_1 = \lambda$, $2B_1 = \mu$ alors la solution devient

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{t+\nu} \qquad \Phi_1 = \frac{(x+\lambda)^2 + (y+\mu)^2 + 4\gamma_1^2}{4(t+\nu)} - (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)(t+\nu) + \widetilde{K}_1$$

$$\rho_2 = \gamma_2 \qquad \Phi_2 = \frac{\gamma_1^2}{t+\nu} - (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)(t+\nu) + \widetilde{K}_2$$

$$\rho_3 = \gamma_3 \qquad \Phi_3 = \frac{\gamma_1^2}{t+\nu} - (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)(t+\widetilde{\nu}) + \widetilde{K}_3$$

Il est déjà évident que cette solution se transforme en solution sous l'action du groupe des translations $x' = x + \lambda$, $y' = y + \mu$, $t' = t + \nu$. Pour le choix spécial $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0$, on aura la solution

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{t} \qquad \Phi_1 = \frac{x^2 + y^2 + 4\gamma_1^2}{4t} - (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)t + K_1$$

(II.18) $$\rho_2 = \gamma_2 \qquad \Phi_2 = \frac{\gamma_1^2}{t} - (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)t + K_2$$

$$\rho_3 = \gamma_3 \qquad \Phi_3 = \frac{\gamma_1^2}{t} - (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)t + K_3$$

qui est invariante sous l'action du groupe $\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$.

On est donc arrivé au phénomène suivant : en cherchant une solution (supposée partiellement invariante) à partir d'une algèbre donnée **A**, on obtient une solution qui est invariante par rapport au groupe engendré par une autre algèbre **B**, différente de l'algèbre **A** de départ. On appellera une pareille solution, par convention, solution partiellement invariante **réductible**.

S'il n'existe pas une algèbre **B** jouissant de cette propriété, la solution obtenue sera appelée - solution partiellement invariante **irréductible**.

II. $\mu_0 = 0,\ \mu_1 \neq 0$. Cette hypothèse implique $\beta_2 = 0$. L'équation **(II.16)** est réduite à $\ddot{f} = \frac{2\dot{f}^2}{f} + 16\mu_1^2 f^5$ et par la substitution, $f = \frac{1}{w}$ devient $-\frac{\ddot{w}}{w^2} + \frac{2\dot{w}^2}{w^3} = \frac{2\dot{w}^2}{w^3} + \frac{16\mu_1^2}{w^5}$ soit $\ddot{w} = -\frac{16\mu_1^2}{w^3}$. On multiplie cette équation par $\dot{w}$ et on trouve $\ddot{w}\dot{w} = -16\mu_1^2 \frac{\dot{w}}{w^3}$, ce qui donne après une intégration $\frac{1}{2}(\dot{w})^2 = 16\mu_1^2 \frac{1}{2w^3} + \frac{k}{2}$. Alors, $\dot{w} = \sqrt{\frac{kw^2 + 16\mu_1^2}{w^2}}$ d'où on trouve

$$\int \frac{wdw}{\sqrt{kw^2 + 16\mu_1^2}} = \varepsilon(t - t_0)$$

Cette intégrale dépend essentiellement des valeurs de k (supposées réelles)

a) $k = 0$. On aura $w^2 = 8|\mu_1|\varepsilon(t - t_0)$, $\begin{cases} \varepsilon = 1 & t > t_0 \\ \varepsilon = -1 & t < t_0 \end{cases}$, alors $w = \varepsilon_0 2\sqrt{2|\mu_1|}\sqrt{|t - t_0|}$

Comme $\varepsilon_0 = \pm 1$, $\varepsilon_1 = \frac{1}{\varepsilon_0}$, on trouve $f = \frac{\varepsilon_1}{2\sqrt{2|\mu_1|}\sqrt{|t - t_0|}}$ soit

$$f = \begin{cases} \frac{\varepsilon_1}{2\sqrt{2|\mu_1|}} \frac{1}{\sqrt{t_0 - t}} & t < t_0 \\ \frac{\varepsilon_1}{2\sqrt{2|\mu_1|}} \frac{1}{\sqrt{t - t_0}} & t > t_0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{\operatorname{sgn} \mu_1}{8|t - t_0|}$$

On différentie f et on obtient

$$\dot{f} = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon_1}{2\sqrt{2|\mu_1|}} \dfrac{1}{2(t_0 - t)^{3/2}} & t < t_0 \\ \dfrac{\varepsilon_1}{2\sqrt{2|\mu_1|}} \dfrac{-1}{2(t - t_0)^{3/2}} & t > t_0 \end{cases},$$

ce qui permet de calculer $\dfrac{\dot{f}}{f} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{t - t_0} \quad t \neq t_0$

En substituant l'expression obtenue pour $\dfrac{\dot{f}}{f}$ dans **(16)**, on aura

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_1 + \left[\dfrac{\operatorname{sgn} \mu_1}{2|t - t_0|} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{t - t_0} \right] \alpha_1 = 0 \\ \dot{\beta}_1 - \left[\dfrac{\operatorname{sgn} \mu_1}{2|t - t_0|} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{t - t_0} \right] \beta_1 = 0 \end{cases}$$

Il faut donc étudier les cas possibles suivant le signe de μ_1 et la valeur de $|t - t_0|$.

a') $\boxed{\mu_1 > 0} \Rightarrow \operatorname{sgn} \mu_1 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = \dfrac{1}{8|t - t_0|}$ et d'après la valeur de $|t - t_0|$, on aura

$$\dot{\alpha}_1 + \left[\frac{1}{2|t - t_0|} + \frac{1}{2}\frac{1}{t - t_0} \right] \alpha_1 = 0 \quad \text{ce qui donne}$$

$$t < t_0 \Rightarrow \dot{\alpha}_1 = 0 \qquad \alpha_1 = A_1 = const$$

$$t > t_0 \Rightarrow \dot{\alpha}_1 + \frac{\alpha_1}{t - t_0} = 0 \qquad \alpha_1 = \frac{A_2}{t - t_0} \quad \text{soit}$$

$$\alpha_1(t) = \begin{cases} A_1 & t < t_0 \\ \dfrac{A_2}{t - t_0} & t > t_0 \end{cases}$$

et de même pour $\dot{\beta}_1 - \left[\frac{1}{2|t-t_0|} - \frac{1}{2}\frac{1}{t-t_0}\right]\beta_1 = 0$ ce qui implique

$$t < t_0 \Rightarrow \dot{\beta}_1 + \frac{\beta_1}{t-t_0} = 0 \quad \beta_1 = \frac{B_1}{t-t_0}$$
$$t > t_0 \Rightarrow \dot{\beta}_1 = 0 \qquad \beta_1 = B_2 = const \quad \text{soit}$$

$$\beta_1(t) = \begin{cases} \dfrac{B_1}{t-t_0} & t < t_0 \\ B_2 & t > t_0 \end{cases}$$

Puisque $\frac{\dot{\rho}_1}{\rho_1} = \frac{\dot{f}}{f} = -\frac{1}{2}\frac{1}{t-t_0} \Rightarrow \rho_1(t) = \frac{\gamma_1}{\sqrt{|t-t_0|}} \quad \rho_2 = \gamma_2 \quad \rho_3 = \gamma_3$.

Pour la dérivée de $\alpha_0(t)$ on trouve

$$\dot{\alpha}_0(t) = -(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \sum_{k=1}^{3}\rho_k^2) = \begin{cases} -(A_1^2 + \dfrac{B_1^2}{(t-t_0)^2} + \dfrac{\gamma_1^2}{t_0 - t} + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) & t < t_0 \\ -(\dfrac{A_2^2}{(t-t_0)^2} + B_2^2 + \dfrac{\gamma_1^2}{t-t_0} + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) & t > t_0 \end{cases},$$

ce qui donne, après une intégration,

$$\alpha_0(t) = \begin{cases} -(A_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2)t + \dfrac{B_1^2}{t-t_0} + \gamma_1^2 \ln(t_0 - t) + K_1 & t < t_0 \\ -(B_2^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2)t + \dfrac{A_2^2}{t-t_0} - \gamma_1^2 \ln(t - t_0) + K_1 & t > t_0 \end{cases}$$

$$\dot{\tilde{\alpha}}_2(t) = -\sum_{k=1}^{3}\rho_k^2 = -(\frac{\gamma_1^2}{|t-t_0|} + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) \Rightarrow \tilde{\alpha}_2(t) = \begin{cases} \gamma_1^2 \ln(t_0 - t) - (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)t + K_2 & t < t_0 \\ -\gamma_1^2 \ln(t - t_0) - (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)t + K_2 & t > t_0 \end{cases}$$

$\dot{\tilde{\alpha}}_3(t) = \dot{\tilde{\alpha}}_2(t) \Rightarrow \tilde{\alpha}_3 - \tilde{\alpha}_2 = const$. Alors $\tilde{\alpha}_3(t) = \begin{cases} \gamma_1^2 \ln(t_0 - t) - (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)t + K_3 & t < t_0 \\ -\gamma_1^2 \ln(t - t_0) - (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)t + K_3 & t > t_0 \end{cases}$

Solution pour $\boxed{\mu_0 = 0 \quad k = 0 \quad \mu_1 > 0 \quad t < t_0}$

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\sqrt{t_0 - t}} \qquad \rho_2 = \gamma_2 \qquad \rho_3 = \gamma_3$$

(II.19) $$\Phi_1 = -(A_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2)t + \frac{B_1^2}{t - t_0} + \gamma_1^2 \ln(t_0 - t) + A_1 x + \frac{B_1}{t - t_0} y + \frac{y^2}{4(t - t_0)} + K_1$$

$$\Phi_2 = \gamma_1^2 \ln(t_0 - t) - (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)t + K_2$$

$$\Phi_3 = \gamma_1^2 \ln(t_0 - t) - (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)t + K_3$$

Solution pour $\boxed{\mu_0 = 0 \quad k = 0 \quad \mu_1 > 0 \quad t > t_0}$

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\sqrt{t - t_0}} \qquad \rho_2 = \gamma_2 \qquad \rho_3 = \gamma_3$$

(II.20) $$\Phi_1 = -(B_2^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2)t + \frac{A_2^2}{t - t_0} - \gamma_1^2 \ln(t - t_0) + \frac{A_2}{t - t_0} x + B_2 y + \frac{x^2}{4(t - t_0)} + K_1$$

$$\Phi_2 = -\gamma_1^2 \ln(t - t_0) - (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)t + K_2$$

$$\Phi_3 = -\gamma_1^2 \ln(t - t_0) - (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)t + K_3$$

On peut , bien sûr, présenter cette solution sous une forme plus simple, ainsi qu'on l'a fait dans le cas précédent. Par exemple, si dans l'expression pour Φ_1 correspondant à $t < t_0$ on ajoute et soustrait $(A_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2)t_0$ et $A_1 x_0$, on obtiendra après une simplification l'expression

$$\Phi_1 = (A_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2)(t_0 - t) + \gamma_1^2 \ln(t_0 - t) + A_1(x - x_0) - \frac{(y - y_0)^2}{4(t_0 - t)} + \tilde{K}_1$$

où $2B_1 = -y_0$ et la solution peut être mise sous la forme

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\sqrt{t_0 - t}} \qquad \rho_2 = \gamma_2 \qquad \rho_3 = \gamma_3$$

(II.19') $$\Phi_1 = (A_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2)(t_0 - t) + \gamma_1^2 \ln(t_0 - t) + A_1(x - x_0) - \frac{(y - y_0)^2}{4(t_0 - t)} + \widetilde{K}_1$$

$$\Phi_2 = \gamma_1^2 \ln(t_0 - t) + (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)(t_0 - t) + \widetilde{K}_2$$

$$\Phi_3 = \gamma_1^2 \ln(t_0 - t) + (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)(t_0 - t) + \widetilde{K}_3$$

d'où on constate que les translations $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$ transforment une solution dans une autre solution. Les solutions obtenues sont invariantes sous l'action du groupe engendré par l'algèbre $L_{2,2}$ (voir [41]) et d'après la terminologie introduite ci-dessus elles sont partiellement invariantes réductibles. Les mêmes remarques sont valables dans le cas $t > t_0$, auquel correspond une solution analogue à celle qui vient d'être trouvée.

On applique le même raisonnement pour

a") $\mu_1 < 0$. Des calculs analogues à ceux qu'on vient de faire donnent :

Solution pour $\boxed{\mu_0 = 0 \quad k = 0 \quad \mu_1 < 0 \quad t < t_0}$

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\sqrt{t_0 - t}} \qquad \rho_2 = \gamma_2 \qquad \rho_3 = \gamma_3$$

(II.21) $$\Phi_1 = -(B_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2)t - \frac{A_1^2}{t_0 - t} + \gamma_1^2 \ln(t_0 - t) - \frac{A_1}{t_0 - t}x + B_1 y - \frac{x^2}{4(t_0 - t)} + K_1$$

$$\Phi_2 = \gamma_1^2 \ln(t_0 - t) - (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)t + K_2$$

$$\Phi_3 = \gamma_1^2 \ln(t_0 - t) - (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)t + K_3$$

Solution pour $\boxed{\mu_0 = 0 \quad k = 0 \quad \mu_1 < 0 \quad t > t_0}$

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\sqrt{t - t_0}} \qquad \rho_2 = \gamma_2 \qquad \rho_3 = \gamma_3$$

(II.22) $$\Phi_1 = -(A_2^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2)t + \frac{B_2^2}{t - t_0} - \gamma_1^2 \ln(t - t_0) + A_2 x + \frac{B_2}{t - t_0} y + \frac{y^2}{4(t - t_0)} + K_1$$

$$\Phi_2 = -\gamma_1^2 \ln(t - t_0) - (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)t + K_2$$

$$\Phi_3 = -\gamma_1^2 \ln(t - t_0) - (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)t + K_3$$

Chacune de ces solutions peut être mise sous une forme permettant de conclure immédiatement que le groupe des translations par rapport à x et y transforme toute solution en une autre solution. Quant aux translations par rapport à t, elles doivent être telles que les quantités sous les racines et les logarithmes soient positives. Par exemple pour $t < t_0$ on aura

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\sqrt{t_0 - t}} \qquad \rho_2 = \gamma_2 \qquad \rho_3 = \gamma_3$$

(II.21') $$\Phi_1 = (B_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2)(t_0 - t) + \gamma_1^2 \ln(t_0 - t) - \frac{(x - x_0)^2}{4(t_0 - t)} + B_1(y - y_0) + \widetilde{K}_1$$

$$\Phi_2 = \gamma_1^2 \ln(t_0 - t) + (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)(t_0 - t) + \widetilde{K}_2$$

$$\Phi_3 = \gamma_1^2 \ln(t_0 - t) + (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)(t_0 - t) + \widetilde{K}_3$$

Cette solution n'est pas invariante par rapport aux rotations du plan. Un résultat pareil tiendra pour $t > t_0$.

b) $k \neq 0$

Alors, l'intégral $\int \frac{w\,dw}{\sqrt{kw^2 + 16\mu_1^2}} = \varepsilon(t - t_0)$ implique $\frac{(kw^2 + 16\mu_1^2)^{\frac{1}{2}}}{k} = \varepsilon(t - t_0)$, d'où $w^2 = \frac{k^2(t - t_0)^2 - 16\mu_1^2}{k}$. On étudiera les solutions possibles suivant le signe de k.

b') $k > 0$

On aura alors $f = \dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{k^2(t-t_0)^2 - 16\mu_1^2}}$. Le domaine de définition pour f est déterminé par l'inégalité $|t - t_0| > \dfrac{4|\mu_1|}{k}$, d'où on obtient $t \in \left]-\infty, t_0 - \dfrac{4|\mu_1|}{k}\right[\cup \left]t_0 + \dfrac{4|\mu_1|}{k}, +\infty\right[$. Comme $\alpha_2(t) = \mu_1 f^2$, on aura $\alpha_2(t) = \dfrac{\mu_1 k}{k^2(t-t_0)^2 - 16\mu_1^2}$. Après avoir trouvé la dérivée $\dot{f} = -\sqrt{k}\dfrac{k^2(t-t_0)}{\left[k^2(t-t_0)^2 - 16\mu_1^2\right]^{\frac{3}{2}}}$, on obtient $\dfrac{\dot{f}}{f} = -\dfrac{k^2(t-t_0)}{k^2(t-t_0)^2 - 16\mu_1^2}$ et ce résultat, mis en **(II.17)**, donne

$$\dot{\alpha}_1 + \frac{k^2(t-t_0) + 4\mu_1 k}{k^2(t-t_0)^2 - 16\mu_1^2}\alpha_1 = 0 \quad \text{soit} \quad \dot{\alpha}_1 + k\frac{\alpha_1}{k(t-t_0) - 4\mu_1} = 0$$

$$\dot{\beta}_1 + \frac{k^2(t-t_0) - 4\mu_1 k}{k^2(t-t_0)^2 - 16\mu_1^2}\beta_1 = 0 \quad \text{soit} \quad \dot{\beta}_1 + k\frac{\beta_1}{k(t-t_0) + 4\mu_1} = 0$$

En résolvant les deux dernières équations, on trouve

$$\alpha_1(t) = \frac{A}{k(t-t_0) - 4\mu_1} \qquad \beta_1(t) = \frac{B}{k(t-t_0) + 4\mu_1}$$

Pour obtenir $\rho_1(t)$, on forme

$$\frac{1}{\rho_1}\frac{d\rho_1}{dt} = \frac{\dot{f}}{f} = -\frac{k^2(t-t_0)}{k^2(t-t_0)^2 - 16\mu_1^2} = -\frac{k}{2}\left[\frac{1}{k(t-t_0) + 4\mu_1} + \frac{1}{k(t-t_0) - 4\mu_1}\right]$$

et après une intégration, on trouve $\rho_1 = \dfrac{\gamma_1}{\sqrt{k^2(t-t_0)^2 - 16\mu_1^2}}$. On a aussi $\rho_2 = \gamma_2$ et $\rho_3 = \gamma_3$.

En intégrant

$$\dot{\alpha}_0 = -(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \frac{\gamma_1^2}{k^2(t-t_0)^2 - 16\mu^2} + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) =$$

$$= -(\frac{A^2}{(k(t-t_0) - 4\mu_1)^2} + \frac{B^2}{(k(t-t_0) + 4\mu_1)^2} + \frac{\gamma_1^2}{k^2(t-t_0) - 16\mu_1^2} + \gamma_2^2 + \gamma_3^2)$$

on obtient

$$\alpha_0(t) = \frac{A^2}{k}\frac{1}{k(t-t_0)-4\mu_1} + \frac{B^2}{k}\frac{1}{k(t-t_0)+4\mu_1} + \frac{\gamma_1^2}{8\mu_1 k}\ln\frac{k(t-t_0)+4\mu_1}{k(t-t_0)-4\mu_1} - (\gamma_2^2+\gamma_3^2)t$$

$$\dot{\tilde{\alpha}}_2 = -\sum_{k=1}^{3}\rho_k^2 = -(\frac{\gamma_1^2}{k^2(t-t_0)^2-16\mu^2} + \gamma_2^2 + \gamma_3^2),\quad \dot{\tilde{\alpha}}_3(t) = \dot{\tilde{\alpha}}_2(t) \Rightarrow \tilde{\alpha}_3 - \tilde{\alpha}_2 = const$$

soit

$$\tilde{\alpha}_2(t) = \frac{\gamma_1^2}{8\mu_1 k}\ln\frac{k(t-t_0)+4\mu_1}{k(t-t_0)-4\mu_1} - (\gamma_2^2+\gamma_3^2)t + K_2$$

$$\tilde{\alpha}_3(t) = \frac{\gamma_1^2}{8\mu_1 k}\ln\frac{k(t-t_0)+4\mu_1}{k(t-t_0)-4\mu_1} - (\gamma_2^2+\gamma_3^2)t + K_3$$

On a $\Phi_2 = \tilde{\alpha}_2(t), \Phi_3 = \tilde{\alpha}_3(t)$. On substitue les $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$ et $f = \dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{k^2(t-t_0)^2-16\mu_1^2}}$ dans **(II.14)** et on trouve $\Phi_1(t)$.

Solution pour $\boxed{\mu_0 = 0 \;\; \mu_1 \neq 0 \;\; k > 0}$ $\quad t \in \left]-\infty, t_0 - \frac{4|\mu_1|}{k}\right[\cup \left]t_0 + \frac{4|\mu_1|}{k}, +\infty\right[$

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\sqrt{k^2(t-t_0)^2-16\mu_1^2}}, \qquad \rho_3 = \gamma_2, \qquad \rho_3 = \gamma_3$$

$$\Phi_1 = \frac{A^2}{k}\frac{1}{k(t-t_0)-4\mu_1} + \frac{B^2}{k}\frac{1}{k(t-t_0)+4\mu_1} + \frac{\gamma_1^2}{8\mu_1 k}\ln\frac{k(t-t_0)+4\mu_1}{k(t-t_0)-4\mu_1} - (\gamma_2^2+\gamma_3^2)t +$$
$$+ \frac{A}{k(t-t_0)-4\mu_1}x + \frac{B}{k(t-t_0)+4\mu_1}y + \frac{kx^2}{4[k(t-t_0)-4\mu_1]} + \frac{ky^2}{4[k(t-t_0)+4\mu_1]} + K_1$$

$$\Phi_2(t) = \frac{\gamma_1^2}{8\mu_1 k}\ln\frac{k(t-t_0)+4\mu_1}{k(t-t_0)-4\mu_1} - (\gamma_2^2+\gamma_3^2)t + K_2$$
$$\Phi_3(t) = \frac{\gamma_1^2}{8\mu_1 k}\ln\frac{k(t-t_0)+4\mu_1}{k(t-t_0)-4\mu_1} - (\gamma_2^2+\gamma_3^2)t + K_3$$

On peut présenter cette solution sous une autre forme . En posant successivement

$$\frac{2A}{k} = -x_0,\ \frac{2B}{k} = -y_0,\ \frac{4\mu_1}{k} = \widetilde{\mu}_1,\ \frac{\gamma_1}{k} = \widetilde{\gamma}_1 \qquad \text{on obtiendra}$$

$$\Phi_1 = \frac{(x-x_0)^2}{4[t-t_0-\widetilde{\mu}_1]} + \frac{(y-y_0)^2}{4[t-t_0+\widetilde{\mu}_1]} + \frac{\widetilde{\gamma}_1^2}{2\widetilde{\mu}_1}\ln\frac{t-t_0+\widetilde{\mu}_1}{t-t_0-\widetilde{\mu}_1} - (\gamma_2^2+\gamma_3^2)t + K_1$$

Un nouveau changement $t_0 + \widetilde{\mu}_1 = \widetilde{t}_0$, $t_0 - \widetilde{\mu}_1 = \widetilde{t}_1$ (ce qui implique $\widetilde{\mu}_1 = \frac{\widetilde{t}_0 - \widetilde{t}_1}{2}$), donne

$$\Phi_1 = \frac{(x-x_0)^2}{4(t-\widetilde{t}_0)} + \frac{(y-y_0)^2}{4(t-\widetilde{t}_1)} + \frac{\widetilde{\gamma}_1^2}{\widetilde{t}_0-\widetilde{t}_1}\ln\frac{t-\widetilde{t}_1}{t-\widetilde{t}_0} - (\gamma_2^2+\gamma_3^2)t + K_1$$

Alors la solution est présentée sous la forme

$$\rho_1 = \frac{\widetilde{\gamma}_1}{\sqrt{(t-\widetilde{t}_0)(t-\widetilde{t}_1)}} \qquad \rho_2 = \gamma_2 \qquad \rho_3 = \gamma_3$$

(II.23) $$\Phi_1 = \frac{(x-x_0)^2}{4(t-\widetilde{t}_0)} + \frac{(y-y_0)^2}{4(t-\widetilde{t}_1)} + \frac{\widetilde{\gamma}_1^2}{\widetilde{t}_0-\widetilde{t}_1}\ln\frac{t-\widetilde{t}_1}{t-\widetilde{t}_0} - (\gamma_2^2+\gamma_3^2)t + K_1$$

$$\Phi_2 = \frac{\widetilde{\gamma}_1^2}{\widetilde{t}_0-\widetilde{t}_1}\ln\frac{t-\widetilde{t}_1}{t-\widetilde{t}_0} - (\gamma_2^2+\gamma_3^2)t + K_2$$

$$\Phi_3 = \frac{\widetilde{\gamma}_1^2}{\widetilde{t}_0-\widetilde{t}_1}\ln\frac{t-\widetilde{t}_1}{t-\widetilde{t}_0} - (\gamma_2^2+\gamma_3^2)t + K_3$$

Cette solution définie pour t à l'extérieur de l'intervalle $\left[\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1\right]$ montre que chaque solution est transformée par le groupe des translations dans une autre solution, mais comme $\widetilde{t}_0 \neq \widetilde{t}_1$ parce que $\widetilde{\mu}_1 \neq 0$, les coefficients devant x^2 et y^2 sont différents. La solution n'est donc pas invariante par rapport aux rotations du plan. Elle ne dépend pas de l'ordre de $\widetilde{t}_0$ et $\widetilde{t}_1$ et présente une solution partiellement invariante irréductible, c'est-à-dire il n'existe aucun sous-groupe du groupe de Lie engendré par l'algèbre $L = sch(2) \oplus su(3)$ du système considéré, pour lequel cette solution est invariante.

b") $\boxed{k<0}$

Puisque l'intégral $\int \frac{wdw}{\sqrt{kw^2+16\mu_1^2}} = \varepsilon(t-t_0)$ implique $\frac{(kw^2+16\mu_1^2)^{\frac{1}{2}}}{k} = \varepsilon(t-t_0)$ c'est-à-dire $w^2 = \frac{k^2(t-t_0)^2-16\mu_1^2}{k}$ on aura $w^2 = \frac{16\mu_1^2-k^2(t-t_0)^2}{-k}$. Comme $f = \frac{1}{w}$ on trouve

$$f = \frac{\sqrt{-k}}{\sqrt{16\mu_1^2-k^2(t-t_0)^2}} \quad \text{avec } |t-t_0| < \frac{4|\mu_1|}{-k} \Rightarrow t \in \left]t_0 + \frac{4|\mu_1|}{k}, t_0 - \frac{4|\mu_1|}{k}\right[$$

Comme $\alpha_2(t) = \mu_1 f^2$ on aura $\alpha_2(t) = \frac{-\mu_1 k}{16\mu_1^2-k^2(t-t_0)^2}$ Après avoir trouvé la dérivé $\dot{f} = \sqrt{-k}\frac{k^2(t-t_0)}{\left[16\mu_1^2-k^2(t-t_0)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$ on obtient $\frac{\dot{f}}{f} = \frac{k^2(t-t_0)}{16\mu_1^2-k^2(t-t_0)^2}$ et ce résultat mis en **(II.17)** donne

$$\dot{\alpha}_1 - k\frac{\alpha_1}{4\mu_1-k(t-t_0)} = 0$$

$$\dot{\beta}_1 + k\frac{\beta_1}{4\mu_1+k(t-t_0)} = 0$$

En résolvant les deux dernières équations on trouve

$$\alpha_1(t) = \frac{A}{4\mu_1 - k(t-t_0)} \qquad \beta_1(t) = \frac{B}{4\mu_1 + k(t-t_0)}$$

Pour trouver $\rho_1(t)$ on forme

$$\frac{1}{\rho_1}\frac{d\rho_1}{dt} = \frac{\dot{f}}{f} = \frac{k^2(t-t_0)}{16\mu_1^2 - k^2(t-t_0)^2} = \frac{k}{2}\left[\frac{1}{4\mu_1 - k(t-t_0)} - \frac{1}{4\mu_1 + k(t-t_0)}\right]$$

et après une intégration on obtient $\rho_1 = \dfrac{\gamma_1}{\sqrt{16\mu_1^2 - k^2(t-t_0)^2}}$. On a aussi $\rho_2 = \gamma_2$ et $\rho_3 = \gamma_3$.

En intégrant

$$\dot{\alpha}_0 = -(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \frac{\gamma_1^2}{16\mu^2 - k^2(t-t_0)^2} + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) =$$

$$= -(\frac{A^2}{(4\mu_1 - k(t-t_0))^2} + \frac{B^2}{(4\mu_1 + k(t-t_0))^2} + \frac{\gamma_1^2}{16\mu_1^2 - k^2(t-t_0)^2} + \gamma_2^2 + \gamma_3^2)$$

on obtient

$$\alpha_0(t) = -\frac{A^2}{k}\frac{1}{4\mu_1 - k(t-t_0)} + \frac{B^2}{k}\frac{1}{4\mu_1 + k(t-t_0)} + \frac{\gamma_1^2}{8\mu_1 k}\ln\frac{4\mu_1 - k(t-t_0)}{4\mu_1 + k(t-t_0)} - (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)t$$

$$\dot{\tilde{\alpha}}_2 = -\sum_{k=1}^{3}\rho_k^2 = -(\frac{\gamma_1^2}{16\mu^2 - k^2(t-t_0)^2} + \gamma_2^2 + \gamma_3^2),\ \dot{\tilde{\alpha}}_3(t) = \dot{\tilde{\alpha}}_2(t) \Rightarrow \tilde{\alpha}_3 - \tilde{\alpha}_2 = const$$

soit

$$\tilde{\alpha}_2(t) = \frac{\gamma_1^2}{8\mu_1 k}\ln\frac{4\mu_1 - k(t-t_0)}{4\mu_1 + k(t-t_0)} - (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)t + K_2$$

$$\tilde{\alpha}_3(t) = \frac{\gamma_1^2}{8\mu_1 k}\ln\frac{4\mu_1 - k(t-t_0)}{4\mu_1 + k(t-t_0)} - (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)t + K_3$$

Solution pour $\boxed{\mu_0 = 0 \;\; \mu_1 \neq 0 \;\; k < 0}$ $\quad t \in \left]t_0 + \frac{4|\mu_1|}{k}, t_0 - \frac{4|\mu_1|}{k}\right[$

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\sqrt{16\mu_1^2 - k^2(t-t_0)^2}} \qquad \rho_3 = \gamma_2 \qquad \rho_3 = \gamma_3$$

$$\Phi_1 = -\frac{A^2}{k}\frac{1}{4\mu_1 - k(t-t_0)} + \frac{B^2}{k}\frac{1}{4\mu_1 + k(t-t_0)} + \frac{\gamma_1^2}{8\mu_1 k}\ln\frac{4\mu_1 - k(t-t_0)}{4\mu_1 + k(t-t_0)} - (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)t +$$
$$+ \frac{A}{4\mu_1 - k(t-t_0)}x + \frac{B}{4\mu_1 + k(t-t_0)}y - \frac{kx^2}{4[4\mu_1 - k(t-t_0)]} + \frac{ky^2}{4[4\mu_1 + k(t-t_0)]} + K_1$$

$$\Phi_2(t) = \frac{\gamma_1^2}{8\mu_1 k}\ln\frac{4\mu_1 - k(t-t_0)}{4\mu_1 + k(t-t_0)} - (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)t + K_2$$

$$\Phi_3(t) = \frac{\gamma_1^2}{8\mu_1 k}\ln\frac{4\mu_1 - k(t-t_0)}{4\mu_1 + k(t-t_0)} - (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)t + K_3$$

Cette solution, ainsi que dans le cas $k > 0$ peut être présentée sous une autre forme. Si l'on pose $\frac{2A}{k} = x_0$, $\frac{2B}{k} = -y_0$, $\frac{4\mu_1}{k} = \tilde{\mu}_1$, $\frac{\gamma_1}{k} = \tilde{\gamma}_1$, on obtiendra

$$\Phi_1 = -\frac{(x-x_0)^2}{4[\tilde{\mu}_1 - t + t_0]} + \frac{(y-y_0)^2}{4[\tilde{\mu}_1 + t - t_0]} + \frac{\tilde{\gamma}_1^2}{2\tilde{\mu}_1}\ln\frac{\tilde{\mu}_1 - t + t_0}{\tilde{\mu}_1 + t - t_0} - (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)t + K_1$$

Un nouveau changement $t_0 + \tilde{\mu}_1 = \tilde{t}_0$, $t_0 - \tilde{\mu}_1 = \tilde{t}_1$ (ce qui implique $\tilde{\mu}_1 = \frac{\tilde{t}_0 - \tilde{t}_1}{2}$), donne

$$\Phi_1 = -\frac{(x-x_0)^2}{4(\tilde{t}_0 - t)} - \frac{(y-y_0)^2}{4(\tilde{t}_1 - t)} + \frac{\tilde{\gamma}_1^2}{\tilde{t}_0 - \tilde{t}_1}\ln\frac{\tilde{t}_0 - t}{t - \tilde{t}_1} - (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)t + K_1$$

Pour ρ_1 et Φ_2 on aura respectivement

$$\rho_1 = \frac{\tilde{\gamma}_1}{\sqrt{(\tilde{t}_0 - t)(\tilde{t}_1 - t)}} \quad \text{et} \quad \Phi_2 = \frac{\tilde{\gamma}_1^2}{\tilde{t}_0 - \tilde{t}_1}\ln\frac{\tilde{t}_0 - t}{t - \tilde{t}_1} - (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)t + K_2$$

Alors la solution est présentée sous la forme

$$\rho_1 = \frac{-\widetilde{\gamma}_1}{\sqrt{(\widetilde{t}_0 - t)(t - \widetilde{t}_1)}} \qquad \rho_3 = \gamma_2 \qquad \rho_3 = \gamma_3 \qquad (\widetilde{\gamma}_1 \leq 0,\ \gamma_2 \geq 0,\ \gamma_3 \geq 0\ )$$

(II.24) $$\Phi_1 = -\frac{(x - x_0)^2}{4(\widetilde{t}_0 - t)} - \frac{(y - y_0)^2}{4(\widetilde{t}_1 - t)} + \frac{\widetilde{\gamma}_1^2}{\widetilde{t}_0 - \widetilde{t}_1} \ln \frac{\widetilde{t}_0 - t}{t - \widetilde{t}_1} - (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)t + K_1$$

$$\Phi_2 = \frac{\widetilde{\gamma}_1^2}{\widetilde{t}_0 - \widetilde{t}_1} \ln \frac{\widetilde{t}_0 - t}{t - \widetilde{t}_1} - (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)t + K_2$$

$$\Phi_3 = \frac{\widetilde{\gamma}_1^2}{\widetilde{t}_0 - \widetilde{t}_1} \ln \frac{\widetilde{t}_0 - t}{t - \widetilde{t}_1} - (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)t + K_3$$

Pour cette solution (définie pour $t \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1]$) est valable la même remarque que pour le cas $k > 0$, c'est-à-dire la solution se transforme par le groupe des translations dans une solution. Elle n'est pas invariante par rapport aux rotations du plan et présente une solution partiellement invariante irréductible.

III. $\boxed{\mu_0 \neq 0}$ On aura pour l'équation **(II.16)** $\ddot{f} = 2\frac{\dot{f}}{f} + 16(\mu_0^2 + \mu_1^2)f^5$**,** et après avoir fait la substitution $f = \frac{1}{w}$, l'égalité $-\frac{\ddot{w}}{w^2} + \frac{2\dot{w}^2}{w^3} = \frac{2\dot{w}^2}{w^3} + \frac{16(\mu_0^2 + \mu_1^2)}{w^5}$ soit $\ddot{w} = -\frac{16(\mu_0^2 + \mu_1^2)}{w^3}$. On multiplie cette équation par $\dot{w}$ et on trouve $\ddot{w}\dot{w} = -16(\mu_0^2 + \mu_1^2)\frac{\dot{w}}{w^3}$, ce qui donne après une intégration $\frac{1}{2}(\dot{w})^2 = 16(\mu_0^2 + \mu_1^2)\frac{1}{2w^3} + \frac{k}{2}$. Alors, $\dot{w} = \sqrt{\frac{kw^2 + 16(\mu_0^2 + \mu_1^2)}{w^2}}$, d'où on trouve

$$\int \frac{w\,dw}{\sqrt{kw^2 + 16(\mu_0^2 + \mu_1^2)}} = \varepsilon(t - t_0)$$

Cette intégral dépend essentiellement des valeurs de k (supposées réelles).

a) $\boxed{k=0}$ La dernière égalité implique

$$\int w\,dw = \varepsilon_0 4\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}\,(t-t_0) \text{ soit}$$

$$w^2 = \varepsilon_0\, 8\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}\,(t-t_0) \Rightarrow w^2 = 8\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}\,|t-t_0|$$

$$w = \sqrt{8\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}\,|t-t_0|}$$. Posons $A = 8\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}$ alors

$$f = \frac{1}{\sqrt{A|t-t_0|}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{A(t_0-t)}} & t<t_0 \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{A(t-t_0)}} & t>t_0 \end{cases} \quad \text{et l'on a } \dot{f} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{A}(t_0-t)^{\frac{3}{2}}} & t<t_0 \\[2ex] \dfrac{-1}{2\sqrt{A}(t-t_0)^{\frac{3}{2}}} & t>t_0 \end{cases}$$

Alors ,
$$\frac{\dot{f}}{f} = \begin{cases} \dfrac{1}{2(t_0-t)} & t<t_0 \\[2ex] \dfrac{-1}{2(t-t_0)} & t>t_0 \end{cases} = \frac{-1}{2(t-t_0)} \qquad t \neq t_0$$

Comme $\alpha_2 = \mu_1 f^2$ et $\beta_2 = \mu_0 f^2$, on aura respectivement

$$\alpha_2 = \frac{\mu_1}{8\sqrt{\mu_1^2+\mu_0^2}\,|t-t_0|} \qquad \beta_2 = \frac{\mu_0}{8\sqrt{\mu_1^2+\mu_0^2}\,|t-t_0|}$$

Pour le système **(II.17)** on obtiendra

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_1 + \alpha_1\left[\dfrac{4\mu_1}{A|t-t_0|} + \dfrac{1}{2(t-t_0)}\right] + \dfrac{4\mu_0}{A|t-t_0|}\beta_1 = 0 \\[2ex] \dot{\beta}_1 + \dfrac{4\mu_0}{A|t-t_0|}\alpha_1 - \left[\dfrac{4\mu_1}{A|t-t_0|} - \dfrac{1}{2(t-t_0)}\right]\beta_1 = 0 \end{cases} \qquad \text{où } A = 8\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}$$

a') $t < t_0$

On aura

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_1 + \alpha_1 \left[\dfrac{\mu_1}{2\sqrt{\mu_0^2 + \mu_1^2}\,(t_0 - t)} - \dfrac{1}{2(t_0 - t)} \right] + \dfrac{\mu_0}{2\sqrt{\mu_0^2 + \mu_1^2}\,(t_0 - t)} \beta_1 = 0 \\ \dot{\beta}_1 + \dfrac{\mu_0}{2\sqrt{\mu_0^2 + \mu_1^2}\,(t_0 - t)} \alpha_1 - \left[\dfrac{\mu_1}{2\sqrt{\mu_0^2 + \mu_1^2}\,(t_0 - t)} + \dfrac{1}{2(t_0 - t)} \right] \beta_1 = 0 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_1 + \dfrac{\mu_1 - \sqrt{\mu_0^2 + \mu_1^2}}{2\sqrt{\mu_0^2 + \mu_1^2}\,(t_0 - t)} \alpha_1 + \dfrac{\mu_0}{2\sqrt{\mu_0^2 + \mu_1^2}\,(t_0 - t)} \beta_1 = 0 \\ \dot{\beta}_1 + \dfrac{\mu_0}{2\sqrt{\mu_0^2 + \mu_1^2}\,(t_0 - t)} \alpha_1 - \dfrac{\mu_1 + \sqrt{\mu_0^2 + \mu_1^2}}{2\sqrt{\mu_0^2 + \mu_1^2}\,(t_0 - t)} \beta_1 = 0 \end{cases}$$

On exprime β_1 de la première équation et on remplace dans la seconde :

$$\beta_1 = -\frac{2\sqrt{\mu_0^2 + \mu_1^2}}{\mu_0} \left[\dot{\alpha}_1 (t_0 - t) + \frac{\mu_1 - \sqrt{\mu_0^2 + \mu_1^2}}{2\sqrt{\mu_0^2 + \mu_1^2}} \alpha_1 \right]$$

Après une simplification on obtient

$$(t_0 - t)\ddot{\alpha}_1 - 2\dot{\alpha}_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1(t) = \frac{A_1}{t_0 - t} + B_1 \quad \Rightarrow \dot{\alpha}_1(t) = \frac{A_1}{(t_0 - t)^2}$$

d'où on calcule facilement

$$\beta_1 = -\frac{\mu_1 + \sqrt{\mu_0^2 + \mu_1^2}}{\mu_0} \frac{A_1}{(t_0 - t)} - \frac{\mu_1 - \sqrt{\mu_0^2 + \mu_1^2}}{\mu_0} B_1$$

Le calcul de ρ_1 est immédiat si l'on connaît f.

$$\frac{\dot{\rho}_1}{\rho_1} = \frac{\dot{f}}{f} = \frac{1}{2(t_0 - t)} \Rightarrow \rho_1 = \frac{\gamma_1}{\sqrt{t_0 - t}}, \quad \rho_2 = \gamma_2, \quad \rho_3 = \gamma_3$$

Alors
$$\dot{\tilde{\alpha}}_2(t) = -\sum_{k=1}^{3} \rho_k^2 = -(\frac{\gamma_1^2}{t_0 - t} + \gamma_2^2 + \gamma_3^2)$$

$$\dot{\tilde{\alpha}}_3(t) = -\sum_{k=1}^{3} \rho_k^2 = -(\frac{\gamma_1^2}{t_0 - t} + \gamma_2^2 + \gamma_3^2)$$

ce qui donne

$$\tilde{\alpha}_2(t) = \gamma_1^2 \ln(t_0 - t) - (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)t + const$$

$$\tilde{\alpha}_3(t) = \gamma_1^2 \ln(t_0 - t) - (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)t + const$$

Pour α_0 on obtient

$$\dot{\alpha}_0 = -(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \sum_{\kappa=1}^{3} \rho_\kappa^2) =$$
$$-(\frac{2\sqrt{\mu_0^2 + \mu_1^2}(\mu_1 + \sqrt{\mu_0^2 + \mu_1^2})}{\mu_0^2 (t_0 - t)^2} A_1^2 - \frac{2\sqrt{\mu_0^2 + \mu_1^2}(\mu_1 - \sqrt{\mu_0^2 + \mu_1^2})}{\mu_0^2} B_1^2 + \sum_{\kappa=1}^{3} \rho_\kappa^2)$$

soit
$$\alpha_0 = -2\frac{\sqrt{\mu_0^2 + \mu_1^2}}{\mu_0^2}\left[(\mu_1 + \sqrt{\mu_0^2 + \mu_1^2})\frac{A_1^2}{t_0 - t} - (\mu_1 - \sqrt{\mu_0^2 + \mu_1^2})B_1^2 t\right] +$$
$$+ \gamma_1^2 \ln(t_0 - t) - (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)t$$

Solution pour $\boxed{\mu_0 \neq 0 \;\; k = 0 \;\; t < t_0}$

(II.25)
$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\sqrt{t_0 - t}} \qquad \rho_2 = \gamma_2 \qquad \rho_3 = \gamma_3$$

$$\Phi_1 = -2\frac{\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}}{\mu_0^2}\left[(\mu_1+\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2})\frac{A_1^2}{t_0-t}+(\mu_1-\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2})B_1^2(t_0-t)\right]+\gamma_1^2\ln(t_0-t)-$$

$$+(\gamma_2^2+\gamma_3^2)(t_0-t)+\left(\frac{A_1}{t_0-t}+B_1\right)x-\left(\frac{\mu_1+\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}}{\mu_0}\frac{A_1}{t_0-t}+\frac{\mu_1-\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}}{\mu_0}B_1\right)y+$$

$$+\frac{1}{8\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}(t_0-t)}\left[\left(\mu_1-\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}\right)x^2+2\mu_0xy-\left(\mu_1+\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}\right)y^2\right]+K_1$$

$$\Phi_2 = \gamma_1^2\ln(t_0-t)+(\gamma_2^2+\gamma_3^2)(t_0-t)+K_2$$

$$\Phi_3 = \gamma_1^2\ln(t_0-t)+(\gamma_2^2+\gamma_3^2)(t_0-t)+K_3$$

Des résultats analogues sont obtenus pour

a") $t > t_0$

On aura successivement

$$\begin{cases}\dot{\alpha}_1+\left[\dfrac{\mu_1}{2\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}(t-t_0)}+\dfrac{1}{2(t-t_0)}\right]\alpha_1+\dfrac{\mu_0}{2\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}(t-t_0)}\beta_1=0\\[2ex] \dot{\beta}_1+\dfrac{\mu_0}{2\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}(t-t_0)}\alpha_1-\left[\dfrac{\mu_1}{2\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}(t-t_0)}-\dfrac{1}{2(t-t_0)}\right]\beta_1=0\end{cases}$$

soit

$$\begin{cases}\dot{\alpha}_1+\dfrac{\mu_1+\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}}{2\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}(t-t_0)}\alpha_1+\dfrac{\mu_0}{2\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}(t-t_0)}\beta_1=0\\[2ex] \dot{\beta}_1+\dfrac{\mu_0}{2\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}(t-t_0)}\alpha_1-\dfrac{\mu_1-\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}}{2\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}(t-t_0)}\beta_1=0\end{cases}$$

En exprimant β_1 de la première équation

$$\beta_1 = -\frac{2\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}}{\mu_0}\left[\dot{\alpha}_1(t_0-t)+\frac{\mu_1+\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}}{2\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}}\alpha_1\right]$$

et en remplaçant dans la seconde, on trouve

$$(t-t_0)\ddot{\alpha}_1+2\dot{\alpha}_1=0 \Rightarrow \alpha_1(t)=\frac{A_1}{t-t_0}+B_1 \quad \Rightarrow \dot{\alpha}_1(t)=-\frac{A_1}{(t-t_0)^2}$$

La fonction $\alpha_1(t)$ et sa dérivée substituées dans l'expression définissant β_1 donnent

$$\beta_1 = -\frac{\mu_1-\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}}{\mu_0}\frac{A_1}{(t-t_0)}-\frac{\mu_1+\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}}{\mu_0}B_1$$

Pour les fonctions $\rho_i(t)$ on obtient successivement

$$\frac{\dot{\rho}_1}{\rho_1}=\frac{\dot{f}}{f}=-\frac{1}{2(t-t_0)} \Rightarrow \rho_1=\frac{\gamma_1}{\sqrt{t-t_0}}, \quad \rho_2=\gamma_2, \qquad \rho_3=\gamma_3$$

Alors, on aura pour $\dot{\tilde{\alpha}}_2(t)$, et $\dot{\tilde{\alpha}}_3(t)$ les expressions suivantes :

$$\dot{\tilde{\alpha}}_2(t)=-\sum_{k=1}^{3}\rho_k^2=-(\frac{\gamma_1^2}{t-t_0}+\gamma_2^2+\gamma_3^2)$$

$$\dot{\tilde{\alpha}}_3(t)=-\sum_{k=1}^{3}\rho_k^2=-(\frac{\gamma_1^2}{t-t_0}+\gamma_2^2+\gamma_3^2)$$

Après une intégration on obtient

$$\tilde{\alpha}_2(t)=-\gamma_1^2\ln(t-t_0)-(\gamma_2^2+\gamma_3^2)t$$

$$\tilde{\alpha}_3(t)=-\gamma_1^2\ln(t-t_0)-(\gamma_2^2+\gamma_3^2)t$$

On aura

$$\dot{\alpha}_0=-(\alpha_1^2+\beta_1^2+\sum_{\kappa=1}^{3}\rho_\kappa^2)=$$

$$-(\frac{2\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}(\mu_1-\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2})}{\mu_0^2(t-t_0)^2}A_1^2+\frac{2\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}(\mu_1+\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2})}{\mu_0^2}B_1^2+\sum_{\kappa=1}^{3}\rho_\kappa^2)$$

soit

$$\alpha_0 = -2\frac{\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}}{\mu_0^2}\left[(\mu_1-\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2})\frac{A_1^2}{t-t_0}+(\mu_1+\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2})B_1^2 t\right]$$
$$-\gamma_1^2\ln(t-t_0)-(\gamma_2^2+\gamma_3^2)t$$

On remplace les fonctions obtenues $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$ dans **(II.14)** pour obtenir Φ_1.

Solution pour $\boxed{\mu_0 \neq 0 \; k=0 \;\; t>t_0}$

(II.26) $$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\sqrt{t-t_0}}\;, \qquad \rho_2=\gamma_2\;, \qquad \rho_3=\gamma_3$$

$$\Phi_1 = -2\frac{\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}}{\mu_0^2}\left[(\mu_1-\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2})\frac{A_1^2}{t-t_0}+(\mu_1+\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2})B_1^2(t-t_0)\right]-\gamma_1^2\ln(t-t_0)$$
$$-(\gamma_2^2+\gamma_3^2)(t-t_0)+\left(\frac{A_1}{t-t_0}+B_1\right)x-\left(\frac{\mu_1-\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}}{\mu_0}\frac{A_1}{t-t_0}+\frac{\mu_1+\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}}{\mu_0}B_1\right)y+$$
$$+\frac{1}{8\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}(t-t_0)}\left[\left(\mu_1+\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}\right)x^2+2\mu_0xy-\left(\mu_1-\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}\right)y^2\right]+K_1$$

$$\Phi_2(t) = -\gamma_1^2\ln(t-t_0)-(\gamma_2^2+\gamma_3^2)(t-t_0)+K_2$$

$$\Phi_3(t) = -\gamma_1^2\ln(t-t_0)-(\gamma_2^2+\gamma_3^2)(t-t_0)+K_3$$

b) $\boxed{k \neq 0}$

On va traiter du cas $k>0$. Comme les calculs sont très longs et fastidieux on donnera seulement les résultats définitifs. Pour la fonction f, on obtient

$f = \sqrt{\dfrac{k}{k^2(t-t_0)^2-16(\mu_0^2+\mu_1^2)}}$. Elle est définie pour $|t-t_0| > \dfrac{4\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}}{k}$ c'est-à-dire

$t \in \left]-\infty, t_0-\dfrac{4\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}}{k}\right[\cup \left]t_0+\dfrac{4\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}}{k}, +\infty\right[$. On trouve successivement

$$\alpha_2(t)=\frac{\mu_1 k}{k^2(t-t_0)^2-16(\mu_0^2+\mu_0^2)} \qquad \beta_2(t)=\frac{\mu_0 k}{k^2(t-t_0)^2-16(\mu_0^2+\mu_0^2)}$$

$$\alpha_1(t)=\frac{A(t-t_1)}{k^2(t-t_0)^2-16(\mu_0^2+\mu_0^2)}$$

$$\beta_1(t)=-\frac{A}{4\mu_0 k}\frac{(k^2(t_1-t_0)+4\mu_1 k)(t-t_0)-4\mu_1 k(t_1-t_0)-16(\mu_0^2+\mu_0^2)}{k^2(t-t_0)^2-16(\mu_0^2+\mu_0^2)}$$

$$\rho_1=\frac{\gamma_1}{\left[k^2(t-t_0)^2-16(\mu_0^2+\mu_1^2)\right]^{\frac{1}{2}}}, \qquad \rho_2=\gamma_2, \qquad \rho_3=\gamma_3$$

$$\alpha_0(t)=-A^2\int\frac{(t-t_1)^2\,dt}{\left[k^2(t-t_0)^2-16(\mu_0^2+\mu_1^2)\right]^2}-$$

$$-\frac{A^2}{16\mu_0^2k^2}\int\frac{\left[\left[k^2(t_1-t_0)+4\mu_1 k\right](t-t_0)-4\mu_1 k(t_1-t_0)-16(\mu_0^2+\mu_1^2)\right]^2dt}{\left[k^2(t-t_0)^2-16(\mu_0^2+\mu_1^2)\right]^2}-\int\sum_{j=1}^{3}\rho_j^2(t)dt$$

$$\dot{\tilde{\alpha}}_2=-\sum_{j=1}^{3}\rho_j^2=-\frac{\gamma_1^2}{k^2(t-t_0)^2-16(\mu_0^2+\mu_1^2)}-(\gamma_2^2+\gamma_3^2)\ ; \qquad \dot{\tilde{\alpha}}_3=\dot{\tilde{\alpha}}_2$$

$$\tilde{\alpha}_2=\frac{1}{8\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}}\ln\frac{k(t-t_0)+4\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}}{k(t-t_0)-4\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}}-(\gamma_2^2+\gamma_3^2)(t-t_0)+const$$

$$\tilde{\alpha}_3=\tilde{\alpha}_2+const$$

La solution que l'on obtiendra d'ici est une solution partiellement invariante irréductible, c'est-à-dire il n'existe aucun sous-groupe du groupe de Lie engendré par l'algèbre $L=sch(2)\oplus su(3)$ du système considéré, pour lequel cette solution est invariante.

Solution pour $\boxed{\mu_0 \neq 0 \quad k > 0}$

(II.27) $$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\left[k^2(t-t_0)^2 - 16(\mu_0^2+\mu_1^2)\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad \rho_2 = \gamma_2, \qquad \rho_3 = \gamma_3$$

$$\Phi_1 = -A^2\left\{\frac{\left[k(t_1-t_0)+4\mu_1\right]^2}{32\mu_0^2k^2} - \frac{\left[\mu_1 k(t_1-t_0)+4(\mu_0^2+\mu_1^2)\right]^2}{32\mu_0^2k^2(\mu_0^2+\mu_1^2)} - \frac{(t_1-t_0)^2}{16(\mu_0^2+\mu_1^2)} - \frac{1}{2k^2}\right\}\times$$
$$\frac{t}{k^2(t-t_0)^2-16(\mu_0^2+\mu_1^2)} -$$
$$-A^2\left\{\frac{t_1-t_0}{k^2} - \frac{4k\left[k(t_1-t_0)+4\mu_1\right]\left[\mu_1 k(t_1-t_0)+4(\mu_0^2+\mu_1^2)\right]}{16\mu_0^2k^4}\right\}\frac{1}{k^2(t-t_0)^2-16(\mu_0^2+\mu_1^2)} -$$
$$-\left\{\frac{A^2}{16k^2\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}} - \frac{A^2}{16\mu_0^2k^2}\left[\frac{\left[k(t_1-t_0)+4\mu_1\right]^2}{2} + \frac{\left[\mu_1 k(t_1-t_0)+4(\mu_0^2+\mu_1^2)\right]^2}{2(\mu_0^2+\mu_1^2)}\right] - \frac{\gamma_1^2}{8\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}}\right\}\times$$
$$\ln\frac{k(t-t_0)-4\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}}{k(t-t_0)+4\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}} - (\gamma_2^2+\gamma_3^2)t +$$
$$+\frac{A\left(t-(t_1-t_0)\right)}{k^2(t-t_0)^2-16(\mu_0^2+\mu_1^2)}x - \frac{A}{4\mu_0 k}\frac{k\left[k(t_1-t_0)+4\mu_1\right](t-t_0) - 4\left[\mu_1 k(t_1-t_0)+4(\mu_0^2+\mu_1^2)\right]}{k^2(t-t_0)^2-16(\mu_0^2+\mu_1^2)}y +$$
$$\frac{k}{4\left[k^2(t-t_0)^2-16(\mu_0^2+\mu_1^2)\right]}\left\{\left[k(t-t_0)+4\mu_1\right]x^2 + 8\mu_0 xy + \left[k(t-t_0)-4\mu_1\right]y^2\right\} + K_1$$
$$\Phi_2 = \frac{1}{8\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}}\ln\frac{k(t-t_0)-4\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}}{k(t-t_0)+4\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}} - (\gamma_2^2+\gamma_3^2)t + K_2$$
$$\Phi_3 = \frac{1}{8\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}}\ln\frac{k(t-t_0)-4\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}}{k(t-t_0)+4\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}} - (\gamma_2^2+\gamma_3^2)t + K_3$$

On pourrait obtenir, bien sûr, une solution analogue pour $k < 0$, qui sera définie pour $t \in \left]\frac{4\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}}{k}, -\frac{4\sqrt{\mu_0^2+\mu_1^2}}{k}\right[$. Cette solution sera aussi partiellement invariante irréductible.

B) <u>Cas général</u> (quels que soit C_2, C_3)

On retourne au système **(II.5)**. En soustrayant la première équation multipliée par C_2 et C_3 respectivement de la deuxième et de la troisième on obtient

$$\textbf{(II.28)}\quad \begin{aligned}&\left(C_2 - C_2^2\right)\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = \left(C_2^2 - 1\right)\sum_{k=1}^{3}\rho_k^2(t) - \tilde{\alpha}_2'(t)\\ &\left(C_3 - C_3^2\right)\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = \left(C_3^2 - 1\right)\sum_{k=1}^{3}\rho_k^2(t) - \tilde{\alpha}_3'(t)\end{aligned}$$

Si les coefficients devant $\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}$ ne sont pas identiquement nuls, alors $\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}$ ne dépendra que de t et en vertu de **(II.14)** on aura

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = \dot{\alpha}_0 + \dot{\alpha}_1 x + \dot{\beta}_1 y + \dot{\alpha}_2\left(x^2 - y^2\right) + 2\dot{\beta}_2 xy - \frac{x^2 + y^2}{4}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{f}}{f}\right)$$

Pour que la partie droite soit une fonction de t il faut qu'on ait

$$\dot{\alpha}_1 = \dot{\beta}_1 = \dot{\alpha}_2 = \dot{\beta}_2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{f}}{f}\right) = 0$$

En remplaçant ces résultats dans **(II.15)** on trouve $\alpha_2 = \beta_2 = \frac{\dot{f}}{f} = 0$. La solution dans ce cas est

$$\textbf{(II.29)}\quad \begin{cases}\rho_1(t) = \lambda & \Phi_1 = -(A + R)t + Bx + \sqrt{A - B^2}\,y + B_1\\ \rho_2(t) = \mu & \Phi_2 = -\left(C_2^2 A + R\right)t + C_2 Bx + C_2\sqrt{A - B^2}\,y + B_2\\ \rho_3(t) = \nu & \Phi_3 = -\left(C_3^2 A + R\right)t + C_3 Bx + C_3\sqrt{A - B^2}\,y + B_3\end{cases}$$

avec $R = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$, $\tilde{\alpha}_2(t) = \left(C_2 - 1\right)\left(R - C_2 A\right)t + B^*$ et $\tilde{\alpha}_3(t) = \left(C_3 - 1\right)\left(R - C_3 A\right)t + B^{**}$

Cette solution est invariante pour l'algèbre $L_{3,1}$ (voir le sommaire) et d'après la terminologie introduite elle est aussi une solution partiellement invariante réductible.

Il reste à considérer le cas où les coefficients devant $\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}$ s'annulent identiquement. On a déjà traité $C_2 = C_3 = 0$. Si ces deux constantes sont égales à un, alors **(II.28)** implique $\tilde{\alpha}_2' = \tilde{\alpha}_3' = 0$ et donc $\tilde{\alpha}_2 = const, \quad \tilde{\alpha}_3 = const$. Alors **(II.4)** et **(II.5)** impliquent

$$
\begin{aligned}
\rho_1 &= \rho_1(t) = \gamma_1 f \qquad & \Phi_1 &= \Phi_1(t,x,y) + K_1 \\
\rho_2 &= \rho_2(t) = \gamma_2 f \qquad & \Phi_2 &= \Phi_1(t,x,y) + K_2 \\
\rho_3 &= \rho_3(t) = \gamma_3 f \qquad & \Phi_3 &= \Phi_1(t,x,y) + K_3
\end{aligned}
$$

À partir d'ici on peut dresser encore une liste de solutions partiellement invariantes (réductibles ou irréductibles) suivant les valeurs des paramètres μ_0, μ_1, k et les intervalles de variation de t. Par exemple la solution pour $C_2 = C_3 = 1$, $\mu_0 = 0$, $\mu_1 \neq 0$, $k > 0$ (une solution partiellement invariante irréductible) est (comparer avec la solution **(II.23)** page 24)

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\sqrt{(t-t_0)(t-t_1)}} \qquad \rho_2 = \frac{\gamma_2}{\sqrt{(t-t_0)(t-t_1)}} \qquad \rho_3 = \frac{\gamma_3}{\sqrt{(t-t_0)(t-t_1)}}$$

$$\Phi_1 = \frac{x^2}{4(t-t_0)} + \frac{y^2}{4(t-t_1)} + \frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2}{t_0 - t_1} \ln \frac{t-t_1}{t-t_0} + K_1$$

$$\Phi_2 = \frac{x^2}{4(t-t_0)} + \frac{y^2}{4(t-t_1)} + \frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2}{t_0 - t_1} \ln \frac{t-t_1}{t-t_0} + K_2$$

$$\Phi_3 = \frac{x^2}{4(t-t_0)} + \frac{y^2}{4(t-t_1)} + \frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2}{t_0 - t_1} \ln \frac{t-t_1}{t-t_0} + K_3$$

Les formules **(II.29)** présentent une solution quels que soient C_2 et C_3 (zéro et un y compris).

Remarque : Si dans **(II.29)** on considère B_1 comme fonction de A et B on peut résoudre le système **(I. 2)** d'une manière tout à fait différente de celle qu'on vient d'exposer.

III. SOLUTIONS OBTENUES DE L'ALGÈBRE

$\{C, D, P_0\}$

Pour trouver les invariants du groupe de Lie correspondants à l'algèbre $\{C, D, P_0\}$ où,

$$C = t^2 \frac{\partial}{\partial t} + t\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} - \rho_1 \frac{\partial}{\partial \rho_1} - \rho_2 \frac{\partial}{\partial \rho_2} - \rho_3 \frac{\partial}{\partial \rho_3} \right) + \frac{x^2 + y^2}{4}\left(\frac{\partial}{\partial \Phi_1} + \frac{\partial}{\partial \Phi_2} + \frac{\partial}{\partial \Phi_2} \right),$$

$$D = t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} \right) - \frac{1}{2}\left(\rho_1 \frac{\partial}{\partial \rho_1} + \rho_2 \frac{\partial}{\partial \rho_2} + \rho_3 \frac{\partial}{\partial \rho_3} \right) \text{ et } P_0 = \frac{\partial}{\partial t} \text{ on forme le système}$$

$$\begin{cases} t\dfrac{\partial F}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\left(x\dfrac{\partial F}{\partial x} + y\dfrac{\partial F}{\partial y} \right) - \dfrac{1}{2}\left(\rho_1 \dfrac{\partial F}{\partial \rho_1} + \rho_2 \dfrac{\partial F}{\partial \rho_2} + \rho_3 \dfrac{\partial F}{\partial \rho_3} \right) = 0 \\ t^2 \dfrac{\partial F}{\partial t} + t\left(x\dfrac{\partial F}{\partial x} + y\dfrac{\partial F}{\partial y} - \rho_1 \dfrac{\partial F}{\partial \rho_1} - \rho_2 \dfrac{\partial F}{\partial \rho_2} - \rho_3 \dfrac{\partial F}{\partial \rho_3} \right) + \dfrac{x^2 + y^2}{4}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \Phi} + \dfrac{\partial F}{\partial \Phi_2} + \dfrac{\partial F}{\partial \Phi_3} \right) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

La dernière équation montre que F ne dépend pas de t, c'est-à-dire on aura le système simultané des deux équations :

$$\textbf{(III.1)} \begin{cases} x\dfrac{\partial F}{\partial x} + y\dfrac{\partial F}{\partial y} - \rho_1 \dfrac{\partial F}{\partial \rho_1} - \rho_2 \dfrac{\partial F}{\partial \rho_2} - \rho_3 \dfrac{\partial F}{\partial \rho_3} = 0 \\ t\left(x\dfrac{\partial F}{\partial x} + y\dfrac{\partial F}{\partial y} - \rho_1 \dfrac{\partial F}{\partial \rho_1} - \rho_2 \dfrac{\partial F}{\partial \rho_2} - \rho_3 \dfrac{\partial F}{\partial \rho_3} \right) + \dfrac{x^2 + y^2}{4}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \Phi_1} + \dfrac{\partial F}{\partial \Phi_2} + \dfrac{\partial F}{\partial \Phi_3} \right) = 0 \end{cases}$$

L'expression $x^2 + y^2$ suggère le changement des variables par des coordonnées polaires

$\begin{cases} x = r\cos\omega \\ y = r\sin\omega \end{cases}$. On trouve successivement $\begin{cases} 1 = \cos\omega\dfrac{\partial r}{\partial x} - r\sin\omega\dfrac{\partial\omega}{\partial x} \\ 0 = \sin\omega\dfrac{\partial r}{\partial x} + r\cos\omega\dfrac{\partial\omega}{\partial x} \end{cases}$ d'où on obtient

$\dfrac{\partial r}{\partial x} = \cos\omega,\quad \dfrac{\partial\omega}{\partial x} = -\dfrac{\sin\omega}{r}$ et de même $\begin{cases} 0 = \cos\omega\dfrac{\partial r}{\partial y} - r\sin\omega\dfrac{\partial\omega}{\partial y} \\ 1 = \sin\omega\dfrac{\partial r}{\partial y} + r\cos\omega\dfrac{\partial\omega}{\partial y} \end{cases}$ d'où on trouve

$\dfrac{\partial r}{\partial y} = \sin\omega,\quad \dfrac{\partial\omega}{\partial y} = \dfrac{\cos\omega}{r}$. Alors le système **(III.1)** devient

$$\begin{cases} r\cos\omega\left(\dfrac{\partial F}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial\omega}\dfrac{\partial\omega}{\partial x}\right) + r\sin\omega\left(\dfrac{\partial F}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial\omega}\dfrac{\partial\omega}{\partial y}\right) - \rho_1\dfrac{\partial F}{\partial\rho_1} - \rho_2\dfrac{\partial F}{\partial\rho_2} - \rho_3\dfrac{\partial F}{\partial\rho_3} = 0 \\ t\left[r\cos\omega\left(\dfrac{\partial F}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial\omega}\dfrac{\partial\omega}{\partial x}\right) + r\sin\omega\left(\dfrac{\partial F}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial\omega}\dfrac{\partial\omega}{\partial y}\right) - \rho_1\dfrac{\partial F}{\partial\rho_1} - \rho_2\dfrac{\partial F}{\partial\rho_2} - \rho_3\dfrac{\partial F}{\partial\rho_3}\right] - \\ -\dfrac{r^2}{4}\left(\dfrac{\partial F}{\partial\Phi_1} + \dfrac{\partial F}{\partial\Phi_2} + \dfrac{\partial F}{\partial\Phi_3}\right) = 0 \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} \left(r\cos\omega\dfrac{\partial r}{\partial x} + r\sin\omega\dfrac{\partial r}{\partial y}\right)\dfrac{\partial F}{\partial r} + \left(r\cos\omega\dfrac{\partial\omega}{\partial x} + r\sin\omega\dfrac{\partial\omega}{\partial y}\right)\dfrac{\partial F}{\partial\omega} - \sum_{i=1}^{3}\rho_i\dfrac{\partial F}{\partial\rho_i} = 0 \\ t\left[\left(r\cos\omega\dfrac{\partial r}{\partial x} + r\sin\omega\dfrac{\partial r}{\partial y}\right)\dfrac{\partial F}{\partial\rho} + \left(r\cos\omega\dfrac{\partial\omega}{\partial x} + r\sin\omega\dfrac{\partial\omega}{\partial y}\right)\dfrac{\partial F}{\partial\omega} - \sum_{i=1}^{3}\rho_i\dfrac{\partial F}{\partial\rho_i}\right] - \\ -\dfrac{r^2}{4}\sum_{i=1}^{3}\dfrac{\partial F}{\partial\Phi_i} = 0 \end{cases}$$

Après la simplification on obtient

$$\textbf{(III.2)}\quad \begin{cases} r\dfrac{\partial F}{\partial r} - \sum_{i=1}^{3}\rho_i\dfrac{\partial F}{\partial\rho_i} = 0 \\ t\left(r\dfrac{\partial F}{\partial r} - \sum_{i=1}^{3}\rho_i\dfrac{\partial F}{\partial\rho_i}\right) + \dfrac{r^2}{4}\sum_{i=1}^{3}\dfrac{\partial F}{\partial\Phi_i} = 0 \end{cases}$$

Le système caractéristique pour la première équation est $\frac{dr}{r} = -\frac{d\rho_1}{\rho_1} = -\frac{d\rho_2}{\rho_2} = -\frac{d\rho_3}{\rho_3}$ d'où on trouve les trois intégrales premières $\eta_1 = r\rho_1$, $\eta_2 = r\rho_2$, $\eta_3 = r\rho_3$ où les η_i sont des fonctions de ω. On en obtient $\rho_i = \frac{\eta_i(\omega)}{r}$, $i = 1,2,3$. En soustrayant la première équation multipliée par t de la seconde on trouve $\frac{r^2}{4}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial F}{\partial \Phi_i} = 0$ soit $\frac{\partial F}{\partial \Phi_1} + \frac{\partial F}{\partial \Phi_2} + \frac{\partial F}{\partial \Phi_3} = 0$. Son système caractéristique $\frac{d\Phi_1}{\Phi_1} = \frac{d\Phi_2}{\Phi_2} = \frac{d\Phi_3}{\Phi_3}$ implique $\beta_1(\omega) = \Phi_1 - \Phi_2$, $\beta_2(\omega) = \Phi_1 - \Phi_3$ et finalement on obtient

$$\textbf{(III.3)} \quad \begin{aligned} &\rho_i = \frac{\eta_i(\omega)}{r}, \quad i = 1,2,3 \\ &\Phi_2 = \Phi_1(r,\omega,t) + \beta_1(\omega) \\ &\Phi_3 = \Phi_1(r,\omega,t) + \beta_2(\omega) \end{aligned}$$

Pour trouver les équations auxquelles ces fonctions satisfassent il faut changer les variables dans le système initial **(I. 2)**. Pour faire ce changement on calcule d'abord les dérivées secondes de r et ω par rapport à x et y. On obtient successivement

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = -\sin\omega\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\sin^2\omega}{r} \qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = -\frac{\cos\omega\frac{\partial \omega}{\partial x}r - \frac{\partial r}{\partial x}\sin\omega}{r^2} = \frac{\sin 2\omega}{r^2}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x\partial y} = -\sin\omega\frac{\partial \omega}{\partial y} = -\frac{\sin\omega\cos\omega}{r} \qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x\partial y} = -\frac{\cos\omega\frac{\partial \omega}{\partial y}r - \frac{\partial r}{\partial y}\sin\omega}{r^2} = -\frac{\cos 2\omega}{r^2}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \cos\omega\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\cos^2\omega}{r} \qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \frac{-\sin\omega\frac{\partial \omega}{\partial y}r - \frac{\partial r}{\partial y}\cos\omega}{r^2} = -\frac{\sin 2\omega}{r^2}$$

Ensuite, on exprime les dérivées de ρ_i et Φ_i par rapport aux anciennes variables x et y à l'aide de dérivées par rapport aux nouvelles variables r et ω. On aura

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial x} = \frac{\partial \rho_i}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \rho_i}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial x} \qquad \frac{\partial \rho_i}{\partial y} = \frac{\partial \rho_i}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \rho_i}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \rho_i}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 \rho_i}{\partial r \partial \omega}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial \omega^2}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \rho_i}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial \rho_i}{\partial \omega}\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \rho_i}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 \rho_i}{\partial r \partial \omega}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial \omega^2}\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial \rho_i}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial \rho_i}{\partial \omega}\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}$$

Après l'addition des deux égalités dernières, on trouve

$$\Delta \rho_i = \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial r^2}\left[\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2\right] + 2\frac{\partial^2 \rho_i}{\partial r \partial \omega}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial \omega^2}\left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2\right] +$$

$$+ \frac{\partial \rho_i}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial \rho_i}{\partial \omega}\left(\frac{\partial \omega^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right)$$

Comme **(III.4)** $\begin{cases} \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 = 1, \quad \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0, \quad \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{r^2} \\ \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \frac{1}{r^2} \end{cases}$

on aura $\Delta \rho_i = \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \rho_i}{\partial \omega^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \rho_i}{\partial r}$ $\quad i = 1,2,3$. D'une manière analogue on trouve

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial x} \qquad \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial r \partial \omega}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial \omega^2}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \Phi_i}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \omega}\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial r \partial \omega}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial \omega^2}\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial \Phi_i}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \omega}\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}$$

Après l'addition des deux égalités dernières, on trouve

$$\Delta\Phi_i = \frac{\partial^2\Phi_i}{\partial r^2}\left[\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2\right] + 2\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial r\partial\omega}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\omega r}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2\Phi_i}{\partial\omega^2}\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2\right] +$$
$$+ \frac{\partial\Phi_i}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial\Phi_i}{\partial\omega}\left(\frac{\partial w^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right)$$

En utilisant **(III.4),** on obtient $\Delta\Phi_i = \frac{\partial^2\Phi_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial\omega^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_i}{\partial r}$. Il reste à calculer les expressions $\left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}\right)^2$ et $\frac{\partial\rho_i}{\partial x}\frac{\partial\Phi_i}{\partial x} + \frac{\partial\rho_i}{\partial y}\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}$. On obtient successivement

$$\left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial r}\right)^2\left[\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2\right] + 2\frac{\partial\Phi_i}{\partial r}\frac{\partial\Phi_i}{\partial\omega}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial y}\right) +$$
$$+ \frac{\partial\Phi_i}{\partial\omega}\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2\right] = \left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial\omega}\right)^2$$

(le résultat est obtenu en utilisant **(III.4)**). On aura aussi

$$\frac{\partial\rho_i}{\partial x}\frac{\partial\Phi_i}{\partial x} + \frac{\partial\rho_i}{\partial y}\frac{\partial\Phi_i}{\partial y} = \frac{\partial\rho_i}{\partial r}\frac{\partial\Phi_i}{\partial r}\left[\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial\rho_i}{\partial r}\frac{\partial\Phi_i}{\partial\omega} + \frac{\partial\rho_i}{\partial\omega}\frac{\partial\Phi_i}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial y}\right) +$$
$$\frac{\partial\rho_i}{\partial\omega}\frac{\partial\Phi_i}{\partial\omega}\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2\right] = \frac{\partial\rho_i}{\partial r}\frac{\partial\Phi_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\rho_i}{\partial\omega}\frac{\partial\Phi_i}{\partial\omega}$$

On substitue ces résultats dans **(I. 2)** et on obtient

$$\textbf{(III.5)} \quad \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial^2\rho_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\rho_1}{\partial\omega^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\rho_1}{\partial r}\right) - \rho_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial t} - \rho_1\left[\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\omega}\right)^2\right] \\ \left(\frac{\partial^2\rho_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\rho_2}{\partial\omega^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\rho_2}{\partial r}\right) - \rho_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial t} - \rho_2\left[\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial\omega}\right)^2\right] \\ \left(\frac{\partial^2\rho_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\rho_3}{\partial\omega^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\rho_3}{\partial r}\right) - \rho_3\frac{\partial\Phi_3}{\partial t} - \rho_3\left[\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial\omega}\right)^2\right] \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\rho_1}{\partial t}+2\left(\dfrac{\partial\rho_1}{\partial r}\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial\rho_1}{\partial\omega}\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial\omega}\right)+\rho_1\left(\dfrac{\partial^2\Phi_1}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\Phi_1}{\partial\omega^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right) \\ \dfrac{\partial\rho_2}{\partial t}+2\left(\dfrac{\partial\rho_2}{\partial r}\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial\rho_2}{\partial\omega}\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial\omega}\right)+\rho_2\left(\dfrac{\partial^2\Phi_2}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\Phi_2}{\partial\omega^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial r}\right) \\ \dfrac{\partial\rho_3}{\partial t}+2\left(\dfrac{\partial\rho_3}{\partial r}\dfrac{\partial\Phi_3}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial\rho_3}{\partial\omega}\dfrac{\partial\Phi_3}{\partial\omega}\right)+\rho_3\left(\dfrac{\partial^2\Phi_3}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\Phi_3}{\partial\omega^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Phi_3}{\partial r}\right) \end{pmatrix} + i \quad = \sum_{k=1}^{3}\frac{\eta_k^2(\omega)}{r^3}\begin{pmatrix}\eta_1(\omega)\\ \eta_2(\omega)\\ \eta_3(\omega)\end{pmatrix}$$

ce qui présente le système initial **(I. 2)** en coordonnées polaires. En utilisant les formules **(III.3)** on obtiendra $\Delta\rho_i=\dfrac{\partial^2\rho_i}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\rho_i}{\partial\omega^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\rho_i}{\partial r}=2\dfrac{\eta_i}{r^3}+\dfrac{1}{r^3}\eta_i''-\dfrac{1}{r^3}\eta_i=\dfrac{\eta_i''+\eta_i}{r^3}$ et aussi

$$\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial\omega}\right)^2=\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\omega}+\beta_1'\right)^2=\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\omega}\right)^2+2\frac{\beta_1'}{r^2}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\omega}+\frac{\beta_1'^2}{r^2}$$

Pour $\left(\dfrac{\partial\Phi_3}{\partial r}\right)^2+\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial\Phi_3}{\partial\omega}\right)^2$ on aura une expression analogue :

$$\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial\omega}\right)^2=\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\omega}+\beta_2'\right)^2=\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\omega}\right)^2+2\frac{\beta_2'}{r^2}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\omega}+\frac{\beta_2'^2}{r^2}$$

En remplaçant ces résultats dans **(I. 2)** on arrive au problème suivant. Trouver les fonctions $\eta_1(\omega),\eta_2(\omega),\eta_3(\omega);\ \beta_1(\omega),\beta_2(\omega)$ et $\Phi_1(t,r,\omega)$, telles que

$$\textbf{(III.6)}\begin{cases}\dfrac{\eta_1''+\eta_1}{r^3}-\dfrac{\eta_1}{r}\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial t}-\dfrac{\eta_1}{r}\left[\left(\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right)^2+\dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial\omega}\right)^2\right]=\dfrac{\eta_1}{r^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{3}\eta_k^2(\omega)\\ \dfrac{\eta_2''+\eta_2}{r^3}-\dfrac{\eta_2}{r}\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial t}-\dfrac{\eta_2}{r}\left[\left(\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right)^2+\dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial\omega}\right)^2\right]-\dfrac{\eta_2}{r^3}\left(2\beta_1'\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial\omega}+\beta_1'^2\right)=\dfrac{\eta_2}{r^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{3}\eta_k^2(\omega)\\ \dfrac{\eta_3''+\eta_3}{r^3}-\dfrac{\eta_3}{r}\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial t}-\dfrac{\eta_3}{r}\left[\left(\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right)^2+\dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial\omega}\right)^2\right]-\dfrac{\eta_3}{r^3}\left(2\beta_2'\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial\omega}+\beta_2'^2\right)=\dfrac{\eta_3}{r^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{3}\eta_k^2(\omega)\\ 2\left(-\dfrac{\eta_1}{r^2}\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial r}+\dfrac{1}{r^3}\eta_1'\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial\omega}\right)+\dfrac{\eta_1}{r}\left(\dfrac{\partial^2\Phi_1}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\Phi_1}{\partial\omega^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right)=0\\ 2\left(-\dfrac{\eta_2}{r^2}\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial r}+\dfrac{1}{r^3}\eta_2'\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial\omega}\right)+\dfrac{\eta_2}{r}\left(\dfrac{\partial^2\Phi_1}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\Phi_1}{\partial\omega^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right)+\dfrac{2}{r^3}\eta_2'\beta_1'+\dfrac{1}{r^3}\eta_2\beta_1''=0\\ 2\left(-\dfrac{\eta_3}{r^2}\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial r}+\dfrac{1}{r^3}\eta_3'\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial\omega}\right)+\dfrac{\eta_3}{r}\left(\dfrac{\partial^2\Phi_1}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\Phi_1}{\partial\omega^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right)+\dfrac{2}{r^3}\eta_3'\beta_2'+\dfrac{1}{r^3}\eta_3\beta_2''=0\end{cases}$$

On exprime $\frac{1}{r}\left[\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\omega}\right)^2\right]$ de première des équations **(III.6)** et on obtient

$\frac{1}{r}\left[\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\omega}\right)^2\right]=\frac{1}{\eta_1}\left(\frac{\eta_1''+\eta_1}{r^3}-\frac{\eta_1}{r}\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}-\frac{\eta_1}{r^3}\sum_{k=1}^{3}\eta_k^2(\omega)\right)$. Cette expression remplacée dans la seconde équation donne

$$\frac{\eta_2''+\eta_2}{r^3}-\frac{\eta_2}{r}\frac{\partial\Phi_1}{\partial}-\frac{\eta_2}{\eta_1}\left(\frac{\eta_1''+\eta_1}{r^3}-\frac{\eta_1}{r}\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}-\frac{\eta_1}{r^3}\sum_{k=1}^{3}\eta_k^2(\omega)\right)-\frac{\eta_2}{r^3}\left(2\beta_1'\frac{\partial\Phi_1}{\partial\omega}+\beta_1'^2\right)=\frac{\eta_2}{r^3}\sum_{k=1}^{3}\eta_k^2$$

Cette équation après une simplification et multiplication par r^3 donne $\frac{\eta_1\eta_2''-\eta_2\eta_1''}{\eta_1}-\eta_2\beta_1'^2-2\eta_2\beta_1'\frac{\partial\Phi_1}{\partial\omega}=0$. (La même substitution faite dans la troisième équation donnera $\frac{\eta_1\eta_3''-\eta_3\eta_1''}{\eta_1}-\eta_3\beta_2'^2-2\eta_3\beta_2'\frac{\partial\Phi_1}{\partial\omega}=0$). La même procédure, appliquée pour les trois dernières équations, permet d'exclure $\frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\omega^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right)$ des deux dernières équations. Le résultat de cette élimination sont les deux équations suivantes : $2\eta_2'\beta_1'+\eta_2\beta_1''+2\eta_1\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)'\frac{\partial\Phi_1}{\partial\omega}=0$ et $2\eta_3'\beta_2'+\eta_3\beta_2''+2\eta_1\left(\frac{\eta_3}{\eta_1}\right)'\frac{\partial\Phi_1}{\partial\omega}=0$. On supposera que les coefficients devant $\frac{\partial\Phi_1}{\partial\omega}$ dans les quatre dernières relations sont différents de zéro (sinon elles deviennent des trivialités) c'est-à-dire on suppose

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial\omega}=\frac{\eta_1\eta_2''-\eta_2\eta_1''-\eta_1\eta_2\beta_1'^2}{2\eta_2\eta_1\beta_1'}\qquad\qquad\frac{\partial\Phi_1}{\partial\omega}=\frac{\eta_1\eta_3''-\eta_3\eta_1''-\eta_1\eta_3\beta_2'^2}{2\eta_3\eta_1\beta_2'}$$

$$\textbf{(III.6')}\quad\frac{\partial\Phi_1}{\partial\omega}=-\frac{2\eta_2'\beta_1'+\eta_2\beta_1''}{2\eta_1\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)'}\qquad\qquad\frac{\partial\Phi_1}{\partial\omega}=-\frac{2\eta_3'\beta_2'+\eta_3\beta_2''}{2\eta_1\left(\frac{\eta_3}{\eta_1}\right)'}$$

En égalant les parties droites de ces équations on trouvera trois relations reliant les cinq fonctions inconnues $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \beta_1$ et β_2, ce qui n'est pas, bien sûr, un grand progrès (bien que, à ce moment-là, surgisse l'idée que les fonctions η_1, η_2 et η_3 sont proportionnelles). Toutes les quatre relations montrent quand même que $\frac{\partial \Phi_1}{\partial \omega}$ est une fonction de ω et donc on aura $\Phi_1 = A(\omega) + B(r,t)$.

La troisième des équations **(III.6)**

$$2\left(-\frac{\eta_1}{r^2}\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^3}\eta_1{}'\frac{\partial \Phi_1}{\partial \omega}\right) + \frac{\eta_1}{r}\left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \omega^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_1}{\partial r}\right) = 0$$

peut être écrite sous la forme $\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \omega^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = \frac{2}{r}\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} - \frac{2}{r^2}\frac{\eta_1'}{\eta_1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial \omega}$. On remplace dans cette égalité Φ_1 et l'on trouve $\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}A'' + \frac{1}{r}\frac{\partial B}{\partial r} = \frac{2}{r}\frac{\partial B}{\partial r} - \frac{2}{r^2}\frac{\eta_1{}'}{\eta_1}A'$ d'où après avoir séparé les dérivées de B de celles de A et multiplié par r^2, on obtient

$$r^2\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} - r\frac{\partial B}{\partial r} = -A'' - 2\frac{\eta_1'}{\eta_1}A' = \lambda$$

Dans cette équation les variables sont séparées et λ est une constante. On a donc à résoudre les deux équations suivantes : $r^2\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} - r\frac{\partial B}{\partial r} = \lambda$ et $-A'' - 2\frac{\eta_1'}{\eta_1}A' = \lambda$ où les fonctions inconnues sont $B = B(r,t)$ et $A = A(\omega)$. La première équation est une équation d'Euler qui par la substitution $r = e^u$ peut être ramenée à une équation linéaire ordinaire de second ordre

par rapport à r en considérant t comme paramètre . On aura $u = \ln r$, $u' = \frac{1}{r}$, $u'' = -\frac{1}{r^2}$, ce qui donne $\frac{\partial B}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial B}{\partial u}$ et $\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 B}{\partial u^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial B}{\partial u}$. On en obtient $\frac{\partial^2 B}{\partial u^2} - 2\frac{\partial B}{\partial u} = \lambda$. La solution de l'équation homogène est donc $B(u) = C_1 + C_2 e^{2u}$. On remplace u par $\ln r$ et on trouve la fonction $B(r) = C_1 + C_2 r^2$ qui vérifie l'équation homogène d'Euler. Pour trouver une solution particulière de l'équation non homogène on va appliquer la méthode de Lagrange de variations des constantes, c'est-à-dire on cherchera une solution particulière de l'équation non homogène $\xi(r) = C_1(r) + C_2(r)r^2$, telle que les fonctions $C_1(r)$ et $C_2(r)$ vérifient les conditions :

$$\begin{cases} C_1'(r) + C_2'(r)r^2 = 0 \\ C_1'(r).0 + 2C_2'(r)r = \dfrac{\lambda}{r^2} \end{cases}$$

On obtient $C_1'(r) = -\dfrac{\lambda}{2r} \Rightarrow C_1(r) = -\dfrac{\lambda}{2}\ln r$, $C_2'(r) = \dfrac{\lambda}{2r^3} \Rightarrow C_2(r) = -\dfrac{\lambda}{4r^2}$. Définitivement on aura $B(r,t) = C_1(t) + C_2(t)r^2 - \dfrac{\lambda}{2}\ln r - \dfrac{\lambda}{4}$. L'équation $-A'' - 2\dfrac{\eta_1'}{\eta_1}A' = \lambda$ devient une équation linéaire de premier ordre par la substitution $A' = z$. On aura $z' = -2\dfrac{\eta_1'}{\eta_1}z - \lambda$. Alors

$$z = e^{-2\int \frac{\eta_1'}{\eta_1}d\omega}\left(A_1 - \lambda \int e^{2\int \frac{\eta_1'}{\eta_1}d\omega} d\omega\right) \text{ d'où } A'(\omega) = \frac{1}{\eta_1^2}\left(A_1 - \lambda \int \eta_1^2 d\omega\right) \quad A_1 = const$$

On multiplie la première des équations **(III.6)** par $\dfrac{r^3}{\eta_1}$ et on obtient

$$\textbf{(III.7)} \quad \frac{\eta_1'' + \eta_1}{\eta_1} - r^2\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - r^2\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r}\right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \omega}\right)^2 = \sum_{k=1}^{3}\eta_k^2$$

Comme $\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial t} = \dfrac{\partial B}{\partial t} = C_1'(t) + C_2'(t)r^2$, $\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial r} = \dfrac{\partial B}{\partial r} = 2C_2(t)r - \dfrac{\lambda}{2r}$ et $\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial \omega} = \dfrac{dA}{d\omega} = A'(\omega)$, on aura, en remplaçant dans **(III.7)**

$$-r^2\left(C_1'(t) + C_2'(t)r^2\right) - r^2\left(2C_2(t)r - \frac{\lambda}{2r}\right)^2 = A'^2(\omega) + \sum_{k=1}^{3}\eta_k^2 - \frac{\eta_1'' + \eta_1}{\eta_1} \text{ soit}$$

$$-\left(C_2'(t) + 4C_2^2(t)\right)r^4 + \left(2C_2(t)\lambda - C_1'(t)\right)r^2 - \frac{\lambda^2}{4} = A'^2(\omega) + \sum_{k=1}^{3}\eta_k^2 - \frac{\eta_1'' + \eta_1}{\eta_1}$$

Pour que cette égalité soit possible, il faut que les coefficients devant les puissances de r soient nuls. On aura donc $C_2'(t)+4C_2^2(t)=0$ et $2C_2(t)\lambda - C_1'(t)=0$. L'intégration de ces équations donne $C_2(t)=\dfrac{1}{4t+K_2}$ et $C_1(t)=\ln \widetilde{K}_1(4t+K_2)^{\frac{\lambda}{2}}$ et pour la fonction Φ_1 on aura

$$\textbf{(III.8)}\quad \Phi_1(t,r,\omega)=\ln \widetilde{K}_1(4t+K_2)^{\frac{\lambda}{2}}+\frac{1}{4t+K_2}r^2-\frac{\lambda}{2}\ln r-\frac{\lambda}{4}+A(\omega)\ \text{avec}$$

$$\textbf{(III.9)}\qquad A'(\omega)=\frac{1}{\eta_1^2}\left(A_1-\lambda\int\eta_1^2 d\omega\right)\qquad A_1=const$$

La même procédure appliquée à la deuxième des équations **(III.6)** et compte tenu de **(III.8)** donne $\dfrac{\eta_2''+\eta_2}{\eta_2}-\left(A'(\omega)+\beta_1'\right)^2=\sum_{k=1}^{3}\eta_k^2+\dfrac{\lambda^2}{4}$ et d'une manière analogue on obtient de troisième équation $\dfrac{\eta_3''+\eta_3}{\eta_3}-\left(A'(\omega)+\beta_2'\right)^2=\sum_{k=1}^{3}\eta_k^2+\dfrac{\lambda^2}{4}$. La fonction Φ_1 définie par **(III.8)** satisfait à la quatrième des équations **(III.6)** quelques soient les constantes $\widetilde{K}_1,\ K_2,\lambda$ et la fonction $A(\omega)$ telle que la condition **(III.9)** soit vérifiée. La même fonction remplacée dans les deux dernières équations **(III.6)** permet d'établir certaines relations entre $A(\omega), \beta_1(\omega)$ et $\beta_2(\omega)$. On a

$$\textbf{(III.10)}\quad \begin{array}{ll} \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial r}=\dfrac{2r}{4t+K_2}-\dfrac{\lambda}{2r} & \dfrac{\partial^2\Phi_1}{\partial r^2}=\dfrac{2}{4t+K_2}+\dfrac{\lambda}{2r^2} \\ \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial\omega}=A' & \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial\omega}=A'' \end{array}$$

En multipliant la cinquième équation par $\dfrac{r^3}{\eta_2}$, on obtient

$$2\left(-r\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}+\frac{\eta_2'}{\eta_2}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\omega}\right)+r^2\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\omega^2}+r\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}+2\frac{\eta_2'}{\eta_2}\beta_1'+\beta_1''=0$$

En remplaçant dans cette équation les dérivées partielles de **(III.10)** et en simplifiant, on trouve

$A'' + 2\frac{\eta_2'}{\eta_2'}A' + \beta_1'' + 2\frac{\eta_2'}{\eta_2'}\beta_1' + \lambda = 0$. Posons $A' + \beta_1' = z$. Alors, la dernière équation devient

une équation ordinaire de premier ordre $z' + 2\frac{\eta_2'}{\eta_2'}z + \lambda = 0$ dont la solution générale est

$$z = A'(\omega) + \beta_1'(\omega) = \frac{1}{\eta_2^2}\left(A_2 - \lambda\int\eta_2^2 d\omega\right) \qquad A_2 = const$$

Cette expression mise dans l'équation $\frac{\eta_2'' + \eta_2}{\eta_2} - \left(A'(\omega) + \beta_1'\right)^2 = \sum_{k=1}^{3}\eta_k^2 + \frac{\lambda^2}{4}$ donne

$\frac{\eta_2'' + \eta_2}{\eta_2} - \frac{1}{\eta_2^4}\left(A_2 - \lambda\int\eta_2^2 d\omega\right)^2 = \sum_{k=1}^{3}\eta_k^2 + \frac{\lambda^2}{4}$ et une équation pareille est trouvée à partir de la dernière équation **(III.6)**. On est donc arrivé au problème suivant - trouver trois fonctions $\eta_1 = \eta_1(\omega)$, $\eta_2 = \eta_2(\omega)$ et $\eta_3 = \eta_3(\omega)$ qui satisfont au système suivant :

$$\textbf{(III.11)} \qquad \begin{aligned} \frac{\eta_1'' + \eta_1}{\eta_1} - \frac{1}{\eta_1^4}\left(A_1 - \lambda\int\eta_1^2 d\omega\right)^2 &= \sum_{k=1}^{3}\eta_k^2 + \frac{\lambda^2}{4} \\ \frac{\eta_2'' + \eta_2}{\eta_2} - \frac{1}{\eta_2^4}\left(A_2 - \lambda\int\eta_2^2 d\omega\right)^2 &= \sum_{k=1}^{3}\eta_k^2 + \frac{\lambda^2}{4} \\ \frac{\eta_3'' + \eta_3}{\eta_3} - \frac{1}{\eta_3^4}\left(A_3 - \lambda\int\eta_3^2 d\omega\right)^2 &= \sum_{k=1}^{3}\eta_k^2 + \frac{\lambda^2}{4} \end{aligned}$$

Une fois résolu ce système, on peut trouver $A(\omega)$ par une quadrature en intégrant l'égalité

$A'(\omega) = \frac{1}{\eta_1^2}\left(A_1 - \lambda\int\eta_1^2 d\omega\right)$ et par conséquence, on trouvera $\Phi_1 = \Phi_1(t, r, \omega)$. Les fonctions

$\beta_i = \beta_i(\omega) \quad i = 1,2$ peuvent être obtenues des égalités $A'(\omega) + \beta_i'(\omega) = \frac{1}{\eta_{i+1}^2}\left(A_{i+1} - \lambda\int\eta_i^2 d\omega\right)$

où $A_{i+1} = const \quad i = 1,2$ ce qui permet de résoudre complètement le problème, en utilisant les formules **(III.3)** . On laisse en héritage le problème de solution générale du système **(III.11)** aux générations qui viennent après nous. C'est un système intégro-différentiel pour la résolution duquel il n'existe pas une théorie générale. On considérera ici le cas particulier $\eta_2 = C_2\eta_1 \quad \eta_3 = C_3\eta_1$ et $\lambda = 0$. On aura alors

$$A'(\omega) = \frac{A_1}{\eta_1^2} \qquad A_1 = const \text{ qui implique } \quad A(\omega) = A_1 \int \frac{d\omega}{\eta_1^2} + \quad const$$

On pose $\ln \widetilde{K}_1 = K_1$ et on obtient

$$\Phi_1(t,r,\omega) = K_1 + \frac{1}{4t + K_2} r^2 + A_1 \int \frac{d\omega}{\eta_1^2}$$

Pour $\lambda = 0$ le système **(III.11)** devient

$$\textbf{(III.12)} \qquad \begin{aligned} \frac{\eta_1'' + \eta_1}{\eta_1} - \frac{A_1^2}{\eta_1^4} &= \sum_{k=1}^{3} \eta_k^2 \\ \frac{\eta_2'' + \eta_2}{\eta_2} - \frac{A_2^2}{\eta_2^4} &= \sum_{k=1}^{3} \eta_k^2 \\ \frac{\eta_3'' + \eta_3}{\eta_3} - \frac{A_3^2}{\eta_3^4} &= \sum_{k=1}^{3} \eta_k^2 \end{aligned}$$

En posant $\eta_2 = C_2\eta_1$ et $\eta_3 = C_3\eta_1$ on arrive au système

$$\begin{aligned} \frac{\eta_1'' + \eta_1}{\eta_1} - \frac{A_1^2}{\eta_1^4} &= \eta_1^2\left(1 + C_2^2 + C_3^2\right) \\ \frac{\eta_1'' + \eta_1}{\eta_1} - \frac{A_2^2}{C_2^2\eta_1^4} &= \eta_1^2\left(1 + C_2^2 + C_3^2\right) \\ \frac{\eta_1'' + \eta_1}{\eta_1} - \frac{A_3^2}{C_3^2\eta_1^4} &= \eta_1^2\left(1 + C_2^2 + C_3^2\right) \end{aligned}$$

Ces trois égalités ne sont possibles que si $A_2^2 = C_2^4 A_1^2, A_3^2 = C_3^4 A_1^2$. Dans ce cas elles sont ramenées à la première équation, c'est-à-dire on aura

$$\textbf{(III.13)} \quad \frac{\eta_1''}{\eta_1} + 1 - \frac{A_1^2}{\eta_1^4} = \eta_1^2(1 + C_2^2 + C_3^2)$$

En posant $1 + C_2^2 + C_3^2 = 2C_1^2$ et en multipliant par $\eta_1\eta_1'$,on obtient

$$\eta_1'\eta_1' + \eta_1'\eta_1 - \frac{A_1^2}{\eta_1^3}\eta_1' = 2C_1^2\eta_1'\eta_1^3$$

d'où en intégrant $\frac{1}{2}\eta_1'^2 + \frac{1}{2}\eta_1^2 + \frac{A_1^2}{2\eta_1^2} = \frac{C_1^2\eta_1^4}{2} + \frac{\alpha}{2}$ soit

$$\textbf{(III.14)} \quad (\eta_1\eta_1')^2 = C_1^2\eta_1^6 - \eta_1^4 + \alpha\eta_1^2 - A_1^2$$

On fait la substitution $\eta_1^2(\omega) = z(\omega) \Rightarrow \eta_1\eta_1' = \frac{1}{2}z'$ et $z(\omega) \geq 0$. En remplaçant dans **(III.14),** on trouve $\frac{1}{4}z'^2 = C_1^2 z^3 - z^2 + \alpha z - A_1^2$

On change les notations des constantes en posant

$$4C_1^2 = A^2,\ 4\alpha = B,\ 4K_1^2 = C^2$$

Alors $z'^2 = A^2z^3 - 4z^2 + Bz - C^2 \Rightarrow \frac{dz}{\sqrt{A^2z^3 - 4z^2 + Bz - C^2}} = d\omega$

Cette égalité impose la condition $A^2z^3 - 4z^2 + Bz - C^2 > 0$.

Pour $z = u + \frac{4}{3A^2}$ on obtient l'expression suivante :

$$A^2 3\sqrt{3}\frac{du}{\sqrt{3^3A^6u^3 + 3^2A^2(3A^2B - 16)u + (4.3^2BA^2 - 2.4^3 - 3^3A^4C^2)}} = d\omega$$

En retournant vers les constantes C_1, α, A_1, on aura

$$4C_1^2 3\sqrt{3}\frac{du}{\sqrt{3^3 4^3 C_1^6 u^3 + 3^2 4 C_1^2 (3.4C_1^2 4\alpha - 16)u + (4.3^2 4\alpha.4C_1^2 - 2.4^3 - 3^3 4^2 C_1^4 4A_1^2)}} = d\omega$$

soit

$$\frac{3\sqrt{3}C_1^2}{2}\frac{du}{\sqrt{3^3 C_1^6 u^3 + 3^2 C_1^2 (3.C_1^2\alpha - 1)u + (3^2\alpha.C_1^2 - 2 - 3^3 C_1^4 A_1^2)}} = d\omega$$

En mettant en évidence le coefficient $3^3 C_1^6$ devant u^3 et pour

$$p = \frac{1 - 3C_1^2\alpha}{3C_1^4}, \quad q = \frac{3^2 C_1^2\alpha - 3^3 C_1^4 A_1^2 - 2}{3^3 C_1^6}$$

on aura définitivement

$$\textbf{(III.15)} \quad \frac{1}{2C_1}\frac{du}{\sqrt{u^3 + pu + q}} = d\omega$$

L'intégration de l'équation **(III.15)** est étroitement reliée à la théorie des fonctions elliptiques. Pour une initiation à cette théorie on peut consulter [11] où sont ramassés aussi les formules et les résultats principaux concernant la théorie des intégrales elliptiques. On va faire une étude des solutions provenant de l'intégration de **(III.15)** suivant le signe du discriminant

$$\Delta = \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}$$

I. $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} < 0$. L'équation $u^3 + pu + q = 0$ a trois racines réelles distinctes u_1, u_2, u_3.

On suppose $u_1 < u_2 < u_3$. Alors **(III.15)** implique

$$\frac{1}{2C_1}\frac{du}{\sqrt{(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)}} = d\omega$$

1. Soit $u_1 < u < u_2 < u_3$. Il vient

$$\text{(a)}\quad \frac{1}{2C_1}\int_{u_1}^{u}\frac{dw}{\sqrt{(w-u_1)(w-u_2)(w-u_3)}}=\omega-\omega_0$$

On se propose d'exprimer l'intégral à gauche par les fonctions elliptiques de Jacobi.

Faisons dans cette intégral le changement $w-u_1=(u_2-u_1)\sin^2\theta$ .On aura

$dw=2(u_2-u_1)\sin\theta\cos\theta\,d\theta$, $w-u_2=(u_1-u_2)+(u_2-u_1)\sin^2\theta=(u_1-u_2)[1-\sin^2\theta]$,

$w-u_3=(u_1-u_3)+(u_2-u_1)\sin^2\theta=(u_1-u_3)\left[1-\dfrac{u_2-u_1}{u_3-u_1}\sin^2\theta\right]$. Le calcule des bornes de l'intégrale indique $w=u_1\Rightarrow\theta=0$ et $w=u\Rightarrow\theta=\varphi$ où $u-u_1=(u_2-u_1)\sin^2\varphi$ .Alors

$$\int_{u_1}^{u}\frac{dw}{\sqrt{(w-u_1)(w-u_2)(w-u_3)}}=$$

$$=2\int_0^{\varphi}\frac{(u_2-u_1)\sin\theta\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{(u_2-u_1)\sin^2\theta(u_1-u_2)(1-\sin^2\theta)(u_1-u_3)\left(1-\dfrac{(u_2-u_1)}{(u_3-u_1)}\sin^2\theta\right)}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{u_3-u_1}}\int_0^{\varphi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=\frac{2}{\sqrt{u_3-u_1}}\mathrm{F}(\varphi,k)\text{, où } k^2=\frac{u_2-u_1}{u_3-u_1}\text{ et }\sin\varphi=\sqrt{\frac{u-u_1}{u_2-u_1}}$$

Alors

$$\frac{1}{2C_1}\frac{2}{\sqrt{u_3-u_1}}\mathrm{F}(\varphi,k)=\omega-\omega_0\ \text{ soit }\ C_1\sqrt{u_3-u_1}(\omega-\omega_0)=\mathrm{F}(\varphi,k)=\mathrm{sn}^{-1}\left(\sqrt{\frac{u-u_1}{u_2-u_1}},k\right)$$

Il vient de cette égalité $\mathrm{sn}^2\left(C_1\sqrt{u_3-u_1}(\omega-\omega_0)\right)=\dfrac{u-u_1}{u_2-u_1}$

et $u=u_1+(u_2-u_1)\mathrm{sn}^2\left(C_1\sqrt{u_3-u_1}(\omega-\omega_0),k\right)$ avec $u_1\le u\le u_2<u_3$.

On a $z = u + \frac{1}{3C_1^2}$ et $\eta_1 = \sqrt{z(\omega)}$ donc $u \geq -\frac{1}{3C_1^2}$ d'où il vient

$$\eta_1 = \frac{1}{C_1\sqrt{3}}\left[3C_1^2 u_1 + 1 + 3C_1^2(u_2 - u_1)\mathrm{sn}^2\left(C_1\sqrt{u_3 - u_1}(\omega - \omega_0), k\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\eta_2 = \frac{C_2}{C_1\sqrt{3}}\left[3C_1^2 u_1 + 1 + 3C_1^2(u_2 - u_1)\mathrm{sn}^2\left(C_1\sqrt{u_3 - u_1}(\omega - \omega_0), k\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\eta_3 = \frac{C_3}{C_1\sqrt{3}}\left[3C_1^2 u_1 + 1 + 3C_1^2(u_2 - u_1)\mathrm{sn}^2\left(C_1\sqrt{u_3 - u_1}(\omega - \omega_0), k\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

Comme $\rho_i = \frac{\eta_i(\omega)}{r}$, $i = 1,2,3$, on aura

$$\rho_1 = \frac{\eta_1(\omega)}{r} = \frac{1}{C_1\sqrt{3}r}\left[3C_1^2 u_1 + 1 + 3C_1^2(u_2 - u_1)\mathrm{sn}^2\left(C_1\sqrt{u_3 - u_1}(\omega - \omega_0), k\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

(III.16) $$\rho_2 = \frac{\eta_2(\omega)}{r} = \frac{C_2}{C_1\sqrt{3}r}\left[3C_1^2 u_1 + 1 + 3C_1^2(u_2 - u_1)\mathrm{sn}^2\left(C_1\sqrt{u_3 - u_1}(\omega - \omega_0), k\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\rho_3 = \frac{\eta_3(\omega)}{r} = \frac{C_3}{C_1\sqrt{3}r}\left[3C_1^2 u_1 + 1 + 3C_1^2(u_2 - u_1)\mathrm{sn}^2\left(C_1\sqrt{u_3 - u_1}(\omega - \omega_0), k\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

Puisque $A'(\omega) + \beta_i'(\omega) = \frac{A_{i+1}}{\eta_{i+1}^2} = \frac{C_{i+1}^2 A_1}{C_{i+1}^2 \eta_1^2} = \frac{A_1}{\eta_1^2} = A'(\omega)$ $i = 1,2$ donc $\beta_i(\omega) = const$ pour $i = 1,2$. Alors on aura $\Phi_i = \Phi_1(r,\omega,t) + const$ $i = 2,3$. Pour Φ_1 on obtient

$$\Phi_1(t,r,\omega) = K_1 + \frac{1}{4t + K_2}r^2 + A_1\int\frac{d\omega}{\eta_1^2}$$

soit

$$\Phi_1 = K_1 + \frac{1}{4t + K_2} r^2 + 3C_1^2 A_1 \int \frac{d\omega}{3C_1^2 u_1 + 1 + 3C_1^2 (u_2 - u_1) \mathrm{sn}^2 \left(C_1 \sqrt{u_3 - u_1} (\omega - \omega_0), k \right)} + L_1$$

$$\Phi_2 = K_1 + \frac{1}{4t + K_2} r^2 + 3C_1^2 A_1 \int \frac{d\omega}{3C_1^2 u_1 + 1 + 3C_1^2 (u_2 - u_1) \mathrm{sn}^2 \left(C_1 \sqrt{u_3 - u_1} (\omega - \omega_0), k \right)} + L_2$$

$$\Phi_3 = K_1 + \frac{1}{4t + K_2} r^2 + 3C_1^2 A_1 \int \frac{d\omega}{3C_1^2 u_1 + 1 + 3C_1^2 (u_2 - u_1) \mathrm{sn}^2 \left(C_1 \sqrt{u_3 - u_1} (\omega - \omega_0), k \right)} + L_3$$

avec $k^2 = \dfrac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1}$.

2. Soit $u_1 < u_2 < u_3 < u$. En intégrant **(III.15)** de u à ∞, on trouve

$$\text{(b)} \quad \frac{1}{2C_1} \int_u^\infty \frac{dw}{\sqrt{(w - u_1)(w - u_2)(w - u_3)}} = \omega - \omega_0$$

Dans cette intégrale on fait la substitution $w - u_1 = \dfrac{u_3 - u_1}{\sin^2 \theta}$; $dw = -2 \dfrac{u_3 - u_1}{\sin^3 \theta} \cos\theta \, d\theta$

Alors

$$w - u_2 = u_1 - u_2 + \frac{u_3 - u_1}{\sin^2 \theta} = \frac{u_3 - u_1}{\sin^2 \theta} (1 - \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1} \sin^2 \theta)$$

$$w - u_3 = u_1 - u_3 + \frac{u_3 - u_1}{\sin^2 \theta} = \frac{u_3 - u_1}{\sin^2 \theta} (1 - \sin^2 \theta)$$

On calcule les nouvelles bornes $w = \infty \Rightarrow \theta = 0$ et $w = u \Rightarrow \theta = \varphi$ où $u - u_1 = \dfrac{u_3 - u_1}{\sin^2 \varphi}$

On aura $\displaystyle \int_u^\infty \frac{dw}{\sqrt{(w - u_1)(w - u_2)(w - u_3)}} =$

$$= -2\int_{\varphi}^{0} \frac{(u_3-u_1)\cos\theta\, d\theta}{\sin^3\theta\sqrt{\frac{u_3-u_1}{\sin^2\theta}\frac{u_3-u_1}{\sin^2\theta}(1-\frac{u_2-u_1}{u_3-u_1}\sin^2\theta)\frac{u_3-u_1}{\sin^2\theta}(1-\sin^2\theta)}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{u_3-u_1}}\int_0^{\varphi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \frac{2}{\sqrt{u_3-u_1}}\mathrm{F}(\varphi,k) = \frac{2}{\sqrt{u_3-u_1}}\mathrm{sn}^{-1}\left(\sqrt{\frac{u_3-u_1}{u-u_1}},k\right)$$

avec $k^2 = \dfrac{u_2-u_1}{u_3-u_1}$. En comparant avec (b), on trouve

$$\frac{1}{C_1\sqrt{u_3-u_1}}\mathrm{sn}^{-1}\left(\sqrt{\frac{u_3-u_1}{u-u_1}},k\right) = \omega-\omega_0$$

soit
$$\frac{u_3-u_1}{u-u_1} = \mathrm{sn}^2\left(C_1\sqrt{u_3-u_1}(\omega-\omega_0),k\right)$$

De cette égalité on peut exprimer *u* explicitement

$$u = u_1 + \frac{u_3-u_1}{\mathrm{sn}^2\left(C_1\sqrt{u_3-u_1}(\omega-\omega_0),k\right)}$$

Comme $z = u + \dfrac{1}{3C_1^2}$ et $\eta_1(\omega) = \sqrt{z(\omega)}$, on obtient

$$\eta_1(\omega) = \frac{\left[\left(3C_1^2u_1+1\right)\mathrm{sn}^2\left(C_1\sqrt{u_3-u_1}(\omega-\omega_0),k\right)+3C_1^2(u_3-u_1)\right]^{\frac{1}{2}}}{C_1\sqrt{3}\left|\mathrm{sn}\left(C_1\sqrt{u_3-u_1}(\omega-\omega_0),k\right)\right|}$$

$$\eta_2(\omega) = C_2\frac{\left[\left(3C_1^2u_1+1\right)\mathrm{sn}^2\left(C_1\sqrt{u_3-u_1}(\omega-\omega_0),k\right)+3C_1^2(u_3-u_1)\right]^{\frac{1}{2}}}{C_1\sqrt{3}\left|\mathrm{sn}\left(C_1\sqrt{u_3-u_1}(\omega-\omega_0),k\right)\right|}$$

$$\eta_3(\omega) = C_3\frac{\left[\left(3C_1^2u_1+1\right)\mathrm{sn}^2\left(C_1\sqrt{u_3-u_1}(\omega-\omega_0),k\right)+3C_1^2(u_3-u_1)\right]^{\frac{1}{2}}}{C_1\sqrt{3}\left|\mathrm{sn}\left(C_1\sqrt{u_3-u_1}(\omega-\omega_0),k\right)\right|}$$ d'où

$$\rho_1 = \frac{\eta_1(\omega)}{r} = \frac{\left[\left(3C_1^2 u_1 + 1\right)\mathrm{sn}^2\left(C_1\sqrt{u_3 - u_1}\left(\omega - \omega_0\right), k\right) + 3C_1^2\left(u_3 - u_1\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{C_1 r\sqrt{3}\left|\mathrm{sn}\left(C_1\sqrt{u_3 - u_1}\left(\omega - \omega_0\right), k\right)\right|}$$

$$\rho_2 = \frac{\eta_2(\omega)}{r} = C_2 \frac{\left[\left(3C_1^2 u_1 + 1\right)\mathrm{sn}^2\left(C_1\sqrt{u_3 - u_1}\left(\omega - \omega_0\right), k\right) + 3C_1^2\left(u_3 - u_1\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{C_1 r\sqrt{3}\left|\mathrm{sn}\left(C_1\sqrt{u_3 - u_1}\left(\omega - \omega_0\right), k\right)\right|}$$

$$\rho_3 = \frac{\eta_3(\omega)}{r} = C_3 \frac{\left[\left(3C_1^2 u_1 + 1\right)\mathrm{sn}^2\left(C_1\sqrt{u_3 - u_1}\left(\omega - \omega_0\right), k\right) + 3C_1^2\left(u_3 - u_1\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{C_1 r\sqrt{3}\left|\mathrm{sn}\left(C_1\sqrt{u_3 - u_1}\left(\omega - \omega_0\right), k\right)\right|}$$

(III.17)

$$\Phi_1 = K_1 + \frac{1}{4t + K_2} r^2 + 3C_1^2 A_1 \int \frac{\mathrm{sn}^2\left(C_1\sqrt{u_3 - u_1}\left(\omega - \omega_0\right), k\right) d\omega}{\left(3C_1^2 + 1\right)\mathrm{sn}^2\left(C_1\sqrt{u_3 - u_1}\left(\omega - \omega_0\right), k\right) + 3C_1^2\left(u_3 - u_1\right)} + L_1$$

$$\Phi_2 = K_1 + \frac{1}{4t + K_2} r^2 + 3C_1^2 A_1 \int \frac{\mathrm{sn}^2\left(C_1\sqrt{u_3 - u_1}\left(\omega - \omega_0\right), k\right) d\omega}{\left(3C_1^2 + 1\right)\mathrm{sn}^2\left(C_1\sqrt{u_3 - u_1}\left(\omega - \omega_0\right), k\right) + 3C_1^2\left(u_3 - u_1\right)} + L_2$$

$$\Phi_3 = K_1 + \frac{1}{4t + K_2} r^2 + 3C_1^2 A_1 \int \frac{\mathrm{sn}^2\left(C_1\sqrt{u_3 - u_1}\left(\omega - \omega_0\right), k\right) d\omega}{\left(3C_1^2 + 1\right)\mathrm{sn}^2\left(C_1\sqrt{u_3 - u_1}\left(\omega - \omega_0\right), k\right) + 3C_1^2\left(u_3 - u_1\right)} + L_3$$

avec $k^2 = \dfrac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1}$.

II. $\dfrac{p^3}{27} + \dfrac{q^2}{4} = 0$. Dans ce cas on aura une racine simple u_1 et une racine double $u_2 = u_3$

1. Soit $u_1 \leq u \leq u_2$. Puisque $u_2 = u_3$, $k = 1$. (voir [11] - page21), on a $\mathrm{sn}(u,1) = \tanh u$. Alors, on n'a que remplacer par $\tanh\left(C_1\sqrt{u_2 - u_1}(\omega - \omega_0)\right)$ dans les expressions définissant $\eta_i(\omega)$ pour $u_1 \leq u \leq u_2 < u_3$ la fonction $\mathrm{sn}\left(C_1\sqrt{u_2 - u_1}(\omega - \omega_0), k\right)$ pour obtenir

$$\eta_1 = \frac{1}{C_1\sqrt{3}}\left[3C_1^2u_1 + 1 + 3C_1^2(u_2 - u_1)\tanh^2\left(C_1\sqrt{u_2 - u_1}(\omega - \omega_0)\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\eta_2 = \frac{C_2}{C_1\sqrt{3}}\left[3C_1^2u_1 + 1 + 3C_1^2(u_2 - u_1)\tanh^2\left(C_1\sqrt{u_2 - u_1}(\omega - \omega_0)\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\eta_3 = \frac{C_3}{C_1\sqrt{3}}\left[3C_1^2u_1 + 1 + 3C_1^2(u_2 - u_1)\tanh^2\left(C_1\sqrt{u_2 - u_1}(\omega - \omega_0)\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\rho_1 = \frac{\eta_1(\omega)}{r} = \frac{1}{C_1\sqrt{3}r}\left[3C_1^2u_1 + 1 + 3C_1^2(u_2 - u_1)\tanh^2\left(C_1\sqrt{u_2 - u_1}(\omega - \omega_0)\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

(III.18) $$\rho_2 = \frac{\eta_2(\omega)}{r} = \frac{C_2}{C_1\sqrt{3}r}\left[3C_1^2u_1 + 1 + 3C_1^2(u_2 - u_1)\tanh^2\left(C_1\sqrt{u_2 - u_1}(\omega - \omega_0)\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\rho_3 = \frac{\eta_3(\omega)}{r} = \frac{C_3}{C_1\sqrt{3}r}\left[3C_1^2u_1 + 1 + 3C_1^2(u_2 - u_1)\tanh^2\left(C_1\sqrt{u_2 - u_1}(\omega - \omega_0), k\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

Pour calculer

$$\Phi_1 = K_1 + \frac{1}{4t + K_2}r^2 + 3C_1^2A_1\int\frac{d\omega}{3C_1^2u_1 + 1 + 3C_1^2(u_2 - u_1)\tanh^2\left(C_1\sqrt{u_2 - u_1}(\omega - \omega_0)\right)} + L_1$$

on utilise

$$(\alpha) \qquad \int\frac{dx}{a^2 + b^2\tanh^2 x} = \frac{1}{a^2 + b^2}x + \frac{b}{a}\frac{1}{a^2 + b^2}\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\tanh x\right),$$

Dans l'intégrale de Φ_1 on fait le changement $x = C_1\sqrt{u_2 - u_1}\left(\omega - \omega_0\right)$ et on obtient

$$3C_1^2A_1\int\frac{d\omega}{3C_1^2u_1 + 1 + 3C_1^2(u_2 - u_1)\tanh^2\left(C_1\sqrt{u_2 - u_1}(\omega - \omega_0)\right)} =$$
$$= \frac{3C_1A_1}{\sqrt{u_2 - u_1}}\int\frac{dx}{a^2 + b^2\tanh^2 x}$$

où $a^2 = 3C_1^2 u_1 + 1 \geq 0$ et $b^2 = 3C_1^2(u_2 - u_1)$. En appliquant (α) on trouve **(III.18')**

$$\Phi_1 = K_1 + \frac{1}{4t + K_2} r^2 + \frac{3C_1^2 A_1}{\left(3C_1^2 u_2 + 1\right)\sqrt{u_2 - u_1}} \times$$

$$\left[\sqrt{u_2 - u_1}\left(\omega - \omega_0\right) + \sqrt{\frac{3\left(u_2 - u_1\right)}{3C_1^2 u_1 + 1}} \operatorname{arctg}\left(C_1 \sqrt{\frac{3\left(u_2 - u_1\right)}{3C_1^2 u_1 + 1}} \tanh\left(C_1 \sqrt{u_2 - u_1}\left(\omega - \omega_0\right)\right)\right)\right] + L_1$$

$$\Phi_2 = K_1 + \frac{1}{4t + K_2} r^2 + \frac{3C_1^2 A_1}{\left(3C_1^2 u_2 + 1\right)\sqrt{u_2 - u_1}} \times$$

$$\left[\sqrt{u_2 - u_1}\left(\omega - \omega_0\right) + \sqrt{\frac{3\left(u_2 - u_1\right)}{3C_1^2 u_1 + 1}} \operatorname{arctg}\left(C_1 \sqrt{\frac{3\left(u_2 - u_1\right)}{3C_1^2 u_1 + 1}} \tanh\left(C_1 \sqrt{u_2 - u_1}\left(\omega - \omega_0\right)\right)\right)\right] + L_2$$

$$\Phi_3 = K_1 + \frac{1}{4t + K_2} r^2 + \frac{3C_1^2 A_1}{\left(3C_1^2 u_2 + 1\right)\sqrt{u_2 - u_1}} \times$$

$$\left[\sqrt{u_2 - u_1}\left(\omega - \omega_0\right) + \sqrt{\frac{3\left(u_2 - u_1\right)}{3C_1^2 u_1 + 1}} \operatorname{arctg}\left(C_1 \sqrt{\frac{3\left(u_2 - u_1\right)}{3C_1^2 u_1 + 1}} \tanh\left(C_1 \sqrt{u_2 - u_1}\left(\omega - \omega_0\right)\right)\right)\right] + L_3$$

2. Soit $u_1 < u_2 = u_3 < u$. On a $k = 1$, $\operatorname{sn}(u,1) = \tanh(u)$

Alors,

$$\eta_1(\omega) = \frac{\left[\left(3C_1^2 u_1 + 1\right)\tanh^2\left(C_1\sqrt{u_2 - u_1}\left(\omega - \omega_0\right)\right) + 3C_1^2\left(u_2 - u_1\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{C_1\sqrt{3}\left|\tanh\left(C_1\sqrt{u_2 - u_1}\left(\omega - \omega_0\right)\right)\right|}$$

$$\eta_2(\omega) = C_2 \frac{\left[\left(3C_1^2 u_1 + 1\right)\tanh^2\left(C_1\sqrt{u_2 - u_1}\left(\omega - \omega_0\right)\right) + 3C_1^2\left(u_2 - u_1\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{C_1\sqrt{3}\left|\tanh\left(C_1\sqrt{u_2 - u_1}\left(\omega - \omega_0\right)\right)\right|}$$

$$\eta_3(\omega) = C_3 \frac{\left[\left(3C_1^2 u_1 + 1\right)\tanh^2\left(C_1\sqrt{u_2 - u_1}\left(\omega - \omega_0\right)\right) + 3C_1^2\left(u_2 - u_1\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{C_1\sqrt{3}\left|\tanh\left(C_1\sqrt{u_2 - u_1}\left(\omega - \omega_0\right), k\right)\right|}$$

Alors, on aura

$$\rho_1 = \frac{\eta_1(\omega)}{r} = \frac{\left[\left(3C_1^2u_1+1\right)\tanh^2\left(C_1\sqrt{u_2-u_1}(\omega-\omega_0)\right)+3C_1^2(u_2-u_1)\right]^{\frac{1}{2}}}{C_1r\sqrt{3}\left|\tanh\left(C_1\sqrt{u_2-u_1}(\omega-\omega_0)\right)\right|}$$

(III.19)
$$\rho_2 = \frac{\eta_2(\omega)}{r} = C_2\frac{\left[\left(3C_1^2u_1+1\right)\tanh^2\left(C_1\sqrt{u_2-u_1}(\omega-\omega_0)\right)+3C_1^2(u_2-u_1)\right]^{\frac{1}{2}}}{C_1r\sqrt{3}\left|\tanh\left(C_1\sqrt{u_2-u_1}(\omega-\omega_0)\right)\right|}$$

$$\rho_3 = \frac{\eta_3(\omega)}{r} = C_3\frac{\left[\left(3C_1^2u_1+1\right)\tanh^2\left(C_1\sqrt{u_2-u_1}(\omega-\omega_0)\right)+3C_1^2(u_2-u_1)\right]^{\frac{1}{2}}}{C_1r\sqrt{3}\left|\tanh\left(C_1\sqrt{u_2-u_1}(\omega-\omega_0)\right)\right|}$$

Pour calculer

$$\Phi_1 = K_1 + \frac{1}{4t+K_2}r^2 + 3C_1^2A_1\int\frac{\tanh^2\left(C_1\sqrt{u_2-u_1}(\omega-\omega_0)\right)d\omega}{\left(3C_1^2u_1+1\right)\tanh^2\left(C_1\sqrt{u_2-u_1}(\omega-\omega_0)\right)+3C_1^2(u_2-u_1)} + L_1$$

On utilise

$$(\beta) \qquad \int\frac{\tanh^2 x dx}{a^2\tanh^2 x+b^2} = \frac{1}{a^2+b^2}x + \frac{b}{a}\frac{1}{a^2+b^2}\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a\tanh x}\right),$$

Dans l'intégrale de Φ_1 on fait le changement $x = C_1\sqrt{u_2-u_1}(\omega-\omega_0)$ et on obtient

$$3C_1^2A_1\int\frac{\tanh^2\left(C_1\sqrt{u_2-u_1}(\omega-\omega_0)\right)d\omega}{\left(3C_1^2u_1+1\right)\tanh^2\left(C_1\sqrt{u_2-u_1}(\omega-\omega_0)\right)+3C_1^2(u_2-u_1)} =$$

$$= \frac{3C_1A_1}{\sqrt{u_2-u_1}}\int\frac{\tanh^2 x dx}{a^2\tanh^2 x+b^2}, \text{ où } a^2 = 3C_1^2+1 \text{ et } b^2 = 3C_1^2(u_2-u_1)$$

En appliquant (β) on trouve **(III.19')**

$$\Phi_1 = K_1 + \frac{1}{4t+K_2}r^2 + \frac{3C_1^2 A_1}{\left(3C_1^2 u_2 + 1\right)\sqrt{u_2 - u_1}} \times$$

$$\left[\sqrt{u_2 - u_1}\left(\omega - \omega_0\right) + \sqrt{\frac{3(u_2 - u_1)}{3C_1^2 u_1 + 1}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3(u_2 - u_1)}{3C_1^2 u_1 + 1}}\frac{C_1}{\tanh\left(C_1\sqrt{u_2 - u_1}\left(\omega - \omega_0\right)\right)}\right)\right] + L_1$$

$$\Phi_2 = K_1 + \frac{1}{4t+K_2}r^2 + \frac{3C_1^2 A_1}{\left(3C_1^2 u_2 + 1\right)\sqrt{u_2 - u_1}} \times$$

$$\left[\sqrt{u_2 - u_1}\left(\omega - \omega_0\right) + \sqrt{\frac{3(u_2 - u_1)}{3C_1^2 u_1 + 1}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3(u_2 - u_1)}{3C_1^2 u_1 + 1}}\frac{C_1}{\tanh\left(C_1\sqrt{u_2 - u_1}\left(\omega - \omega_0\right)\right)}\right)\right] + L_2$$

$$\Phi_3 = K_1 + \frac{1}{4t+K_2}r^2 + \frac{3C_1^2 A_1}{\left(3C_1^2 u_2 + 1\right)\sqrt{u_2 - u_1}} \times$$

$$\left[\sqrt{u_2 - u_1}\left(\omega - \omega_0\right) + \sqrt{\frac{3(u_2 - u_1)}{3C_1^2 u_1 + 1}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3(u_2 - u_1)}{3C_1^2 u_1 + 1}}\frac{C_1}{\tanh\left(C_1\sqrt{u_2 - u_1}\left(\omega - \omega_0\right)\right)}\right)\right] + L_3$$

III. $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} > 0$. Dans ce cas l'équation $u^3 + pu + q = 0$ aura une racine réelle et deux racines complexes conjuguées. Supposons que dans l'expression sous le radical de **(III.15)** mis sous la forme

$$\textbf{(III.16)} \quad \frac{1}{2C_1}\frac{du}{\sqrt{(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)}} = d\omega$$

u_1 est réel et u_2 et u_3 sont les deux racines conjuguées. Puisque ces trois nombres vérifient l'équation $u^3 + pu + q = 0$, en vertu de la première formule de François Viète, on aura $u_1 + u_2 + u_3 = 0$. Il existe alors un nombre réel $\alpha > 0$ unique, tel qu'on ait $u_2 = -\frac{u_1}{2} + \alpha i$ et $u_3 = -\frac{u_1}{2} - \alpha i$. Considérons l'expression $H = \sqrt{\left(u_1 - u_2\right)\left(u_1 - u_3\right)} = \sqrt{\left(\frac{3u_1}{2} - \alpha i\right)\left(\frac{3u_1}{2} + \alpha i\right)}$,

ce qui donne $H = \sqrt{\frac{9u_1^2}{4} + \alpha^2} \geq 0$. En intégrant **(III.16)** pour $u_1 < u \leq w < \infty$,on obtient

$$\frac{1}{2C_1}\int_u^\infty \frac{dw}{\sqrt{(w-u_1)(w-u_2)(w-u_3)}} = \omega - \omega_0$$

Faisons dans l'intégrale la substitution $w - u_1 = H\tan^2\frac{\theta}{2}$. On aura $dw = H\tan\frac{\theta}{2}\frac{d\theta}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$.

On change les bornes de l'intégrale $w = \infty \Rightarrow \theta = \pi$ et $w = u \Rightarrow \theta = \varphi$ de façon à ce qu'on ait $u - u_1 = H\tan^2\frac{\varphi}{2}$. On calcule les différences $w - u_2 = u_1 - u_2 + H\tan^2\frac{\varphi}{2}$ et $w - u_3 = u_1 - u_3 + H\tan^2\frac{\varphi}{2}$. Alors, on aura

$$\int_u^\infty \frac{dw}{\sqrt{(w-u_1)(w-u_2)(w-u_3)}} =$$

$$= H\int_\varphi^\pi \frac{\tan\frac{\theta}{2}\,d\theta}{\cos^2\frac{\theta}{2}\sqrt{H\tan^2\frac{\theta}{2}\left(u_1-u_2+H\tan^2\frac{\theta}{2}\right)\left(u_1-u_3+H\tan^2\frac{\theta}{2}\right)}} =$$

$$= \sqrt{H}\int_\varphi^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{\left(\left(u_1-u_2\right)\cos^2\frac{\theta}{2}+H\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\left(\left(u_1-u_3\right)\cos^2\frac{\theta}{2}+H\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}} =$$

$$= \sqrt{H}\int_\varphi^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{\left(u_1-u_2\right)\left(u_1-u_3\right)\cos^4\frac{\theta}{2}+H\left[\left(u_1-u_2\right)+\left(u_1-u_3\right)\right]\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}+H^2\sin^4\frac{\theta}{2}}} =$$

$$= \sqrt{H}\int_\varphi^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{H^2\left(\sin^4\frac{\theta}{2}+\cos^4\frac{\theta}{2}\right)+H\left[\left(u_1-u_2\right)+\left(u_1-u_3\right)\right]\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}}$$

Puisque $\sin^4\frac{\theta}{2}+\cos^4\frac{\theta}{2} = \left(\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^2 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} = 1 - \frac{\sin^2\theta}{2}$ et $\left(u_1-u_2\right)+\left(u_1-u_3\right) = 3u_1$, on obtient

$$\sqrt{H}\int_\varphi^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{H^2\left(\sin^4\frac{\theta}{2}+\cos^4\frac{\theta}{2}\right)+H\left[\left(u_1-u_2\right)+\left(u_1-u_3\right)\right]\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{H}}{H} \int_{\varphi}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2\theta}{2} + \frac{3u_1}{H}\frac{\sin^2\theta}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{H}} \int_{\varphi}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{3u_1}{4H}\right)\sin^2\theta}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{H}} \int_{\varphi}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3u_1}{2H}\right)\sin^2\theta}}$$

Comme $H = \sqrt{\frac{9u_1^2}{4} + \alpha^2}$ on a $H > \frac{3|u_1|}{2} \Rightarrow \frac{3u_1}{2H} < \frac{3|u_1|}{2H} < 1$, ce qui assure $0 < 1 - \frac{3u_1}{2H}$ .On a aussi $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{3u_1}{2H}\right) < 1$ (car $3u_1 > -2H$ quel que soit u_1). En posant $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{3u_1}{2H}\right) = k^2$ on obtient

$$\int_{\varphi}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin\theta}} = 2C_1\sqrt{H}(\omega - \omega_0)$$

En utilisant

$$\int_{0}^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin\theta}} + \int_{\varphi}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin\theta}} = \int_{0}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin\theta}}$$

et $\int_{0}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin\theta}} = 2K$ ($4K$ est la période des fonctions elliptiques $\mathrm{sn}u$, $\mathrm{cn}u$), on obtient

$2K - \mathrm{sn}^{-1}(\varphi, k) = 2C_1\sqrt{H}(\omega - \omega_0)$ d'où on a

$$\sin\varphi = \mathrm{sn}\left(2K - 2C_1\sqrt{H}(\omega - \omega_0)\right) = \mathrm{sn}\left(2C_1\sqrt{H}(\omega - \omega_0)\right)$$

ce qui implique $\cos\varphi = \mathrm{cn}\left(2C_1\sqrt{H}(\omega - \omega_0)\right)$. A partir d'ici, on trouve

$$\frac{u-u_1}{H}=\tan^2\frac{\varphi}{2}=\frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}=\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}=\frac{1-\mathrm{cn}\left(2C_1\sqrt{H}(\omega-\omega_0)\right)}{1+\mathrm{cn}\left(2C_1\sqrt{H}(\omega-\omega_0)\right)}\text{ donc}$$

$$u=u_1+H\frac{1-\mathrm{cn}\left(2C_1\sqrt{H}(\omega-\omega_0)\right)}{1+\mathrm{cn}\left(2C_1\sqrt{H}(\omega-\omega_0)\right)}\text{ d'où}$$

$$z=u_1+\frac{1}{3C_1^2}+H\frac{1-\mathrm{cn}\left(2C_1\sqrt{H}(\omega-\omega_0)\right)}{1+\mathrm{cn}\left(2C_1\sqrt{H}(\omega-\omega_0)\right)}\text{ ce qui donne}$$

$$\eta_1(\omega)=\frac{1}{\sqrt{3}C_1}\left[\frac{\left(3C_1^2u_1+1\right)\left(1+\mathrm{cn}\left(2C_1\sqrt{H}(\omega-\omega_0)\right)\right)+3C_1^2H\left(1-\mathrm{cn}\left(2C_1\sqrt{H}(\omega-\omega_0)\right)\right)}{1+\mathrm{cn}\left(2C_1\sqrt{H}(\omega-\omega_0)\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\eta_2(\omega)=C_2\eta_1(\omega)\ ,\ \ \eta_3(\omega)=C_3\eta_1(\omega)$$

$$\rho_1=\frac{1}{\sqrt{3}C_1r}\left[\frac{\left(3C_1^2u_1+1\right)\left(1+\mathrm{cn}\left(2C_1\sqrt{H}(\omega-\omega_0)\right)\right)+3C_1^2H\left(1-\mathrm{cn}\left(2C_1\sqrt{H}(\omega-\omega_0)\right)\right)}{1+\mathrm{cn}\left(2C_1\sqrt{H}(\omega-\omega_0)\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

(III.20) $$\rho_2=\frac{C_2}{\sqrt{3}C_1r}\left[\frac{\left(3C_1^2u_1+1\right)\left(1+\mathrm{cn}\left(2C_1\sqrt{H}(\omega-\omega_0)\right)\right)+3C_1^2H\left(1-\mathrm{cn}\left(2C_1\sqrt{H}(\omega-\omega_0)\right)\right)}{1+\mathrm{cn}\left(2C_1\sqrt{H}(\omega-\omega_0)\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\rho_3=\frac{C_3}{\sqrt{3}C_1r}\left[\frac{\left(3C_1^2u_1+1\right)\left(1+\mathrm{cn}\left(2C_1\sqrt{H}(\omega-\omega_0)\right)\right)+3C_1^2H\left(1-\mathrm{cn}\left(2C_1\sqrt{H}(\omega-\omega_0)\right)\right)}{1+\mathrm{cn}\left(2C_1\sqrt{H}(\omega-\omega_0)\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\Phi_1 = K_1 + \frac{1}{4t+K_2} r^2 +$$

$$+3C_1^2 A_1 \int \frac{1+\mathrm{cn}\left(2C_1\sqrt{H}(\omega-\omega_0)\right)}{\left(3C_1^2 u_1+1\right)\left(1+\mathrm{cn}\left(2C_1\sqrt{H}(\omega-\omega_0)\right)\right)-3C_1^2 H\left(1+\mathrm{cn}\left(2C_1\sqrt{H}(\omega-\omega_0)\right)\right)} d\omega + L_1$$

$$\Phi_2 = K_1 + \frac{1}{4t+K_2} r^2 +$$

$$+3C_1^2 A_1 \int \frac{1+\mathrm{cn}\left(2C_1\sqrt{H}(\omega-\omega_0)\right)}{\left(3C_1^2 u_1+1\right)\left(1+\mathrm{cn}\left(2C_1\sqrt{H}(\omega-\omega_0)\right)\right)-3C_1^2 H\left(1+\mathrm{cn}\left(2C_1\sqrt{H}(\omega-\omega_0)\right)\right)} d\omega + L_2$$

$$\Phi_3 = K_1 + \frac{1}{4t+K_2} r^2 +$$

$$+3C_1^2 A_1 \int \frac{1+\mathrm{cn}\left(2C_1\sqrt{H}(\omega-\omega_0)\right)}{\left(3C_1^2 u_1+1\right)\left(1+\mathrm{cn}\left(2C_1\sqrt{H}(\omega-\omega_0)\right)\right)-3C_1^2 H\left(1+\mathrm{cn}\left(2C_1\sqrt{H}(\omega-\omega_0)\right)\right)} d\omega + L_3$$

Avant de terminer ce chapitre, on considérera encore une fois les formules

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \omega} = \frac{\eta_1\eta_2'' - \eta_2\eta_1'' - \eta_1\eta_2\beta_1'^2}{2\eta_2\eta_1\beta_1'} \qquad \frac{\partial \Phi_1}{\partial \omega} = \frac{\eta_1\eta_3'' - \eta_3\eta_1'' - \eta_1\eta_3\beta_2'^2}{2\eta_3\eta_1\beta_2'}$$

(III.6') $$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \omega} = -\frac{2\eta_2'\beta_1' + \eta_2\beta_1''}{2\eta_1\left(\dfrac{\eta_2}{\eta_1}\right)'} \qquad \frac{\partial \Phi_1}{\partial \omega} = -\frac{2\eta_3'\beta_2' + \eta_3\beta_2''}{2\eta_1\left(\dfrac{\eta_3}{\eta_1}\right)'}$$

Les expressions dans les dénominateurs sont supposées non nulles et sous cette condition on a séparé les variables de Φ_1. Il est à remarquer que si , $\eta_i = 0 \Rightarrow \rho_i = 0$, les équations **(III.8)** sont vérifiées quelles que soient les fonctions Φ_i. Si les β_i sont des constantes alors an aura

$$\frac{\eta_2''}{\eta_2} = \frac{\eta_1''}{\eta_1} \quad \text{et} \quad \frac{\eta_3''}{\eta_3} = \frac{\eta_1''}{\eta_1}$$

c'est-à-dire les trois premières équations **(III.8)** sont réduites à la première et les trois dernières impliques

$$\frac{\eta_2'}{\eta_2} = \frac{\eta_1'}{\eta_1} \text{ et } \frac{\eta_3'}{\eta_3} = \frac{\eta_1'}{\eta_1}$$

ce qui entraîne

$$\ln \eta_2 = \ln C_2 \eta_1 \text{ et } \ln \eta_3 = \ln C_3 \eta_1$$

autrement dit $\eta_2 = C_2 \eta_1$ et $\eta_3 = C_3 \eta_1$ c'est-à-dire le cas qui a été déjà traité.

IV. CONCLUSION

A la fin, quelques mots pour terminer. Le mémoire considère les solutions obtenues par les deux sous-algèbres tridimensionnelles $\{L + a_1 M + a_2 T_3 + a_3 U_3, P_1, P_2\}$ et $\{C, D, P_0\}$ de l'algèbre de Lie, $L = sch(2) \oplus su(3)$ du système **(I. 2)**. Parmi les solutions obtenues de la première sous-algèbre $\{L + a_1 M + a_2 T_3 + a_3 U_3, P_1, P_2\}$ il y a des solutions réductibles (c'est-à-dire invariantes sous l'action d'un sous-groupe engendré par une autre sous-algèbre) et irréductible (c'est-à-dire qui ne sont invariantes sous l'action d'aucun sous-groupe engendré par une sous-algèbre de L). Le cas qui n'a pas été traité pour cette sous-algèbre c'est - le jacobien de rang quatre. Dans ce cas, les formules **(II.4)** deviennent

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \rho_1(t) & \Phi_1 &= \Phi_1(t,x,y) \\ \rho_2 &= \rho_2(t) & \Phi_2 &= \Phi_2(t,x,y) \\ \rho_3 &= \rho_3(t) & \Phi_3 &= C\Phi_2(t,x,y) + \alpha(t) \end{aligned}$$

et le remplacement dans **(I.2)** donne un système de six équations avec les fonctions inconnues $\rho_1(t), \rho_2(t), \rho_3(t), \Phi_1(x,y,t), \Phi_2(x,y,t), \alpha(t)$ donc une fonction à trois variables de plus que dans le cas qui a été traité. Certaines solutions peuvent être obtenues en imposant des restrictions sur les fonctions inconnues. Voilà, par exemple ,une solution

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \gamma_1 & \Phi_1 &= -\left(\gamma_1^2 + \gamma_3^2\right)\left(t - t_1\right) + \frac{\gamma_2^2}{t_1 - t_2} \ln \frac{t - t_1}{t - t_2} + K_1 \\ \rho_2 &= \frac{\gamma_2}{\sqrt{\left(t - t_1\right)\left(t - t_2\right)}} & \Phi_2 &= \frac{x^2}{4\left(t - t_1\right)} + \frac{y^2}{4\left(t - t_2\right)} - \left(\gamma_1^2 + \gamma_3^2\right)\left(t - t_1\right) + \frac{\gamma_2^2}{t_1 - t_2} \ln \frac{t - t_1}{t - t_2} + K_2 \\ \rho_3 &= \gamma_3 & \Phi_3 &= -\left(\gamma_1^2 + \gamma_3^2\right)\left(t - t_1\right) + \frac{\gamma_2^2}{t_1 - t_2} \ln \frac{t - t_1}{t - t_2} + K_3 \end{aligned}$$

partiellement invariante irréductible obtenue sous la restriction $\Phi_1 = \Phi_1(t)$ et $C = 0$. Une analyse approfondie du cas - jacobien de rang quatre, offre beaucoup de possibilités de recherche des solutions partiellement invariantes (réductibles ou irréductibles) ce qui pourrait servir à écrire un autre mémoire.

À ce qui concerne l'algèbre $\{C, D, P_0\}$ il faut remarquer que même pour $\lambda = 0$ si les fonctions $\eta_i(\omega)$ ne sont pas proportionnelles (ce cas est plus général que celui qui a été déjà traité) les chances de résoudre le système **(III.11)** sont négligeables.

Finissons par poser une question : Trouver un critère permettant de connaître si une solution préalablement donnée est invariante, partiellement invariante réductible ou partiellement invariante irréductible.

BIBLIOGRAPHIE

[1]Anderson R.L., Kumei S., Wulfman C.E., Invariants of the equations of wave mechanics I., *Revista Mexicana de Fisica, 21,1972, p. 1-33*

[2] Anderson R.L., Kumei S., Wulfman C.E., Invariants of the equations of wave mechanics II. One-particle Schrödinger equations, *Revista Mexicana de Fisica, 21,1972, p. 35-57*

[3] Beckers J., Harnad J., Perroud M., Winternitz P., Tensor fields invariant under subgroups of the conformal group of space-time, *J. Math. Phys., 19, 1978, p.2126-2153*

[4] Bluman G.W., Cole J.D., Similarity Methods for Differentiel Equations, *Springer, New York, 1986*

[5] Bluman G.W., Kumei S., Symmetries and Differential Equations, *Springer, Berlin, 1989*

[6] Bourbaki N., Eléments de Mathématiques, Groupes et algèbres de Lie, *Hermann, Paris VI, 1971,1972*

[7] Boyer C.P.,The maximal 'kinematical' invariance group for an arbitrary potential, *Helvetica Physica Acta, 47,1974, p. 489-605*

[8] Boyer C.P., Sharp R.T., Winternitz P., Symmetry breaking interactions for the time dependent Schrödinger equation, *J. Math. Phys, 17, 1976, p.1439-1451*

[9] Burdet G., Patera J., Perrin M., Winternitz P., Sous - algèbres de Lie de l'algèbre de Schrödinger, *Ann. Sc. Math. Québec, II, 1978, p.81-108*

[11] Byrd P.F., Friedman M.D., Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists, *Springer - Verlag, 1971*

[12] Cartan É., Sur la structure des groupes des transformations finis et continus, Thèse, 2 éd.,*Paris, Vuibert,1933*

[13] Dynkin E.B., Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras, *Amer.Math. Soc. Transl.,Ser.2, 6, 1957, p.245-378*

[14] Dynkin E.B., The maximal subgroups of the classical groups, *Amer.Math. Soc. Transl., Ser.2, 6, 1957, p.111-244*

[15] **Gagnon L., Winternitz P.,** Lie symmetry of a generalized non - linear Schrödinger equation : I. The symmetry group and its subgroups, *J. Phys. A : Math. Gen. 21,1988, p.1493-1511*

[16] **Gagnon L., Winternitz P.,** Lie symmetry of a generalized non - linear Schrödinger equation : II. Exact solutions, *J. Phys. A : Math. Gen. 22,1989, p.469-497*

[17] **Gagnon L., Grammaticos B., Ramani A., Winternitz P.,** Lie symmetry of a generalized non - linear Schrödinger equation : III.Reductions to third - order ordinary differential equations, *J. Phys. A : Math. Gen. 22,1989, p.499-509*

[18] **Gagnon L., Winternitz P.,** Exact solutions of the spherical quintic nonlinear Schrödinger equation, *Phys. Lett. A, 134, 1989, p.276-281*

[19] **Humphreys J.E.,** Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, *N.Y.,Springer - Verlag, 1972*

[20] **Ince E.L.,** Ordinary Differential Equations, *Dover, New York, 1956*

[21] **Jacobson N.,** Lie Algebras, *Dover, New York, 1979*

[22] **Martina L., Soliani G., Winternitz P.,** Partially invariant solutions of a class of nonlinear Schrödinger equations, *J.Phys.A : Math.Gen.25,1992, p.4425-4435*

[23] **Martina L., Winternitz P.,** Partially invariant solutions of nonlinear Klein - Gordon and Laplace equations, *J. Math. Phys, 33,1992, p.2718-2727*

[24] **Miller W. Jr**.,Symmetry and Separation of Variables, *Addison - Wesley Publishing Company,1977*

[25] **Niederer U**.,The maximal kinematical invariance group of the free Schrödinger equation, *Helvetica Physica Acta, 45,1972, p. 802-810*

[26] **Niederer U**.,The maximal kinematical invariance group of the harmonic oscillator, *Helvetica Physica Acta, 46,1973, p.191-200*

[27] **Niederer U**., The connection between the Schrödinger group and the conformal group, *Helvetica Physica Acta, 47,1974, p.119-129*

[28] **Olver P. J.,** Applications of Lie Groups to Differenttial Equations, *Springer, New York, 1986*

[29] **Овсянников Л. В.,** Групповой анализ дифференциальных уравнений, *Москва, «Наука», 1976*
Ovsiannikov L.V., Group Analysis of Differential Equations, *Academic,New York, 1982*

[30] Patera J., Winternitz P., A new basis for the representations of the rotation group. Lame and Heun polynomials, *J. Math. Phys, 14, 1973, p.1130-1139*

[31] Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., The maximal solvable subgroups of the SU(p,q) groups and all subgroups of SU(2, 1), *J. Math. Phys., 15, 1974, p.1378-1393*

[32] Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., The maximal solvable subgroups of the SO(p,q) groups, *J. Math. Phys , 15, 1974, p.1932-1937*

[33] Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuous subgroups of the fundamental groups of phisics. I.General method and the Poincare group, *J. Math. Phys., 16, 1975, p.1597-1614*

[34] Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuous subgroups of the fundamental groups of phisics. II. The similitude group, , *J. Math. Phis., 16, 1975, p.1615-1624*

[35] Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., Quantum numbers for particles in the Sitter space, *J. Math. Phys., 17, 1976, p.717-728*

[36] Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Zassenhaus H., Subgroup of the Poincaré group and their invariants, *J. Math. Phys., 17, 1976, p.977-985*

[37] Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Zassenhaus H., Invariants of real low dimension Lie algebras, *J. Math. Phys, 17, 1976, p.986-994*

[38] Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. III. The de Sitter groups, *J. Math. Phys., 18, 1977, p.2259-2288*

[39] Понтрягин Л. С. , Непрерывные группы, *Москва, «Наука», 1984*
Pontriagine L. S., Topological Groups, *N.Y., Gordon and Breach, 1966*

[40] Rand D., Winternitz P., Zassenhaus H., On the identification of a Lie algebra given by its structure constants, *Linear Algeba and its Applications,109, 1988, p. 197-246*

[41] Sciarrino A., Winternitz P., Symmetries and solutions of the vector nonlinear Schrödinger equation, *Il Nuovo Cimento, 112B,1997, p.853-871*

[42] Winternitz P., Lie groups and solutions of nonlinear partial diferential equations, *CRM - 1841,1993*

[43] Zassenhaus H., Lie Groups, Lie Algebras and Representation Theory, *Presses de l'Université de Montréal, 1981*