

2m11.2978.3

Université de Montréal

Études sur l'application de méthodes
géométriques en hydrodynamique

par

Olivier Major

Département de physique
Faculté des arts et des sciences

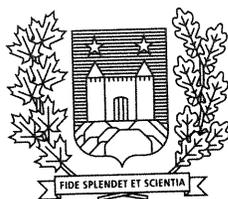
Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en physique

décembre 2001

© Olivier Major, 2001



QC
3
U54
2002
v.011



Université de Montréal

Bibliothèque



1983 02/04 4-1

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Études sur l'application de méthodes
géométriques en hydrodynamique

présenté par

Olivier Major

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Alain Vincent

(président-rapporteur)

Véronique Hussin

(directeur de recherche)

Jiri Teichmann

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

SOMMAIRE

Le but de ce mémoire est de présenter certains travaux illustrant bien l'application de la géométrie différentielle et symplectique à l'hydrodynamique dans un langage accessible autant aux géomètres qu'aux physiciens. Dans un premier temps, nous explorerons les propriétés géométriques de l'équation de Schrödinger non-linéaire. Par la suite, nous mettrons en évidence la nature hamiltonienne de l'équation d'Euler pour un fluide incompressible et nous nous intéresserons finalement aux liens existant entre l'action de Nambu-Goto, le gaz de Chaplygin et l'action de Born-Infeld.

Mots clés: Géométrie différentielle, géométrie symplectique, équation d'Euler, équation de Schrödinger non-linéaire, équation de chaîne d'Heisenberg, filaments de vorticité, gaz de Chaplygin, action de Born-Infeld, action de Nambu-Goto.

ABSTRACT

The aim of this master's paper is to present some works that illustrate well the application of differential and symplectic geometry to hydrodynamic in a language accessible to mathematicians as well as to physicists. In the first part of this work, we will study the geometrical properties of the nonlinear Schrödinger equation. In the second part, we will show the hamiltonian nature of the Euler equation for incompressible fluids and, finally, we will discuss the links between the Nambu-Goto action, the Chaplygin gaz and the Born-Infeld action.

Key words: Differential geometry, symplectic geometry, Euler equation, non-linear Schrödinger equation, Heisenberg chain equation, filament equation, Chaplygin gaz, Born-Infeld action, Nambu-Goto action.

REMERCIEMENTS

J'aimerais remercier tout d'abord ma directrice, Véronique Hussin, qui fit preuve, tout au long de ce travail, d'une disponibilité, d'une ouverture d'esprit et d'une rigueur scientifique exemplaire. Sans son support scientifique et financier, ce travail n'aurait pas vu le jour. Je dois aussi une gratitude sans borne à mes parents qui m'ont encouragé et aider financièrement tout au long des mes études. Je tiens à remercier Miguel Tremblay, Ervig Lapalme, Philippe St-Jean, Diego Clonda et Alexandre Girouard pour leur précieux support informatique et moral de tous les jours. J'aimerais finalement remercier Diane Poulin pour avoir bien voulu dactylographier une partie de ce document.

Table des matières

Sommaire	iii
Abstract	iv
Remerciements	v
Table des figures	x
Introduction	1
Chapitre 1. Système hamiltonien sur l'espace des lacets	4
1.1. L'équation de Shrödinger non-linéaire (ESNL).....	4
1.2. Formulation hydrodynamique de ESNL.....	5
1.3. Structure symplectique de l'espace des lacets.....	6
1.3.1. L'espace des lacets.....	6
1.3.2. $T_\gamma\mathcal{C}$: Espaces tangents à \mathcal{C}	7
1.3.3. Structure symplectique de Marsden-Weinstein.....	8
1.4. Equations d'Hamilton sur \mathcal{C} et filament de vorticité.....	8
1.5. L'équation de chaîne de spin de Heisenberg.....	12
1.6. Structure géométrique de ESNL.....	14
1.7. Solution particulière pour un filament de vorticité.....	18
1.8. Récapitulation.....	19
Chapitre 2. Équation d'Euler pour un fluide incompressible sur les orbites coadjointes du groupe $\text{SDiff}(\mathbb{R}^3)$	21

2.1. Représentations adjointes et coadjointes d'un groupe et d'une algèbre de Lie	22
2.2. Structure symplectique de Kirillov-Kostant	24
2.3. Système hamiltonien sur $O_x^*(G)$	25
2.4. Équation d'Euler pour un fluide incompressible	25
2.5. L'espace des lacets et orbites coadjointes de $\text{SDiff}(\mathbb{R}^3)$	30
2.6. Récapitulation	32
Chapitre 3. Membranes relativistes et hydrodynamique	33
3.1. Dérivation classique du modèle de Chaplygin sans vorticité	34
3.2. L'action de Nambu-Goto	37
3.3. Dérivation du modèle de Chaplygin à partir de l'action de Nambu-Goto	39
3.4. L'action de Born-Infeld	43
3.5. Dérivation du modèle de Born-Infeld à partir de l'action de Nambu-Goto	46
3.6. Transformation des solutions du gaz de Chaplygin vers des solutions du modèle de Born-Infeld	48
3.7. Récapitulation	50
Conclusion	51
Annexe A. Quelques notions de géométrie différentielle	53
A.1. Motivation	53
A.2. Variétés différentielles	55
A.2.1. Espace topologique	55

A.2.2.	Espace topologique séparé (ou d’Hausdorff).....	55
A.2.3.	Variété différentielle.....	55
A.3.	Applications entre variétés.....	56
A.3.1.	Difféomorphisme.....	57
A.3.2.	Homéomorphisme.....	57
A.4.	Vecteur tangent et espace tangent à une variété.....	58
A.4.1.	Vecteur tangent comme opérateur différentiel.....	58
A.5.	Espace cotangent T_p^*M	59
A.6.	Fibré tangent et cotangent d’une variété.....	60
A.6.1.	Projection et section sur un fibré tangent.....	61
A.7.	Algèbre tensorielle sur les espaces tangents.....	62
A.7.1.	Produit tensoriel.....	62
A.7.2.	Tenseurs contravariants.....	63
A.7.3.	Tenseurs mixtes.....	63
A.7.4.	Champs de tenseurs.....	63
A.8.	Algèbre extérieure et forme différentielle.....	64
A.8.1.	Produit extérieur.....	64
A.8.2.	La dérivée extérieure.....	65
A.9.	Applications induites F_* et F^*	66
A.9.1.	Le “pullback” F^*	67
A.9.2.	Immersion.....	67
A.9.3.	Plongement.....	68
A.10.	Flot d’un champ de vecteurs et courbes intégrales.....	68
A.11.	Dérivée de Lie d’un champ de vecteur.....	68
A.12.	Produit intérieur.....	70

A.13. Groupe de Lie.....	71
A.13.1. Champs de vecteurs invariants à gauche sur un groupe de Lie.....	71
A.14. Algèbre de Lie.....	71
A.15. Tenseur métrique.....	72
A.15.1. Métrique induite.....	73
A.16. La forme volume sur une variété.....	74
A.17. Intégration d'une forme différentielle sur une variété.....	74
A.17.1. Variété orientable.....	74
A.18. Système hamiltonien et géométrie symplectique.....	75
A.18.1. Structure symplectique.....	77
A.18.2. Variété symplectique.....	77
A.18.3. Système hamiltonien.....	77
A.18.4. Équations d'Hamilton.....	77
Bibliographie.....	80

Table des figures

1.3.1	Élément $u(s)$ de l'espace tangent $T_\gamma\mathcal{C}$	7
1.3.2	Interprétation géométrique de la forme symplectique de M.W.....	8
1.4.1	Chemin $\Gamma(s,\tau)$ dans \mathcal{C} passant par γ	9
3.2.1	Mouvement d'une corde en 2+1 dimensions	38
3.3.1	Différentes paramétrisations de la membrane	40
A.1.1	Espace de configuration du pendule	54
A.2.1	Variété différentielle	56
A.3.1	Application entre variétés	57
A.4.1	Espace tangent à une variété	59
A.6.1	Espace de configuration du pendule sphérique	61
A.11.1	Dérivée de Lie de Y le long du flot de X	69

INTRODUCTION

Durant ce dernier siècle, la physique et la géométrie ont évolué en synergie comme jamais auparavant. L'un des premiers exemples de cette étroite complicité fut, sans contredit, l'utilisation de la géométrie Riemannienne comme fondement mathématique de la relativité générale.

Aujourd'hui, il ne fait aucun doute que la géométrie fournit aux physiciens de puissants outils non seulement pour la résolution et l'analyse d'équations différentielles mais aussi pour poser les bases de certaines théories. En effet, une plus grande compréhension de la géométrie des théories physiques modernes a souvent mené à la découverte de structures mathématiques sous-jacentes reliant plusieurs théories physiques semblant distinctes à prime abord, remettant ainsi en question les fondements même de ces théories.

Les échanges entre mathématiciens et physiciens sont loin d'être unidirectionnels. Le mathématicien trouve en effet une source inépuisable d'inspiration dans les problèmes physiques. Par exemple, le développement des théories de jauge en terme de connections sur des fibrés principaux en physique a amené l'apparition d'une nouvelle théorie purement mathématique sur la classification des variétés de dimension quatre. L'étude des systèmes hamiltoniens en mécanique classique fit naître la géométrie symplectique. Finalement, les théories des super-cordes et des super-membranes furent non seulement l'arène de développements importants en physique des hautes énergies mais aussi en mathématiques pures et particulièrement en géométrie.

Récemment, certains développements concernant la géométrie des groupes de Lie de dimension infinie et, plus particulièrement, du groupe des difféomorphismes d'une variété amenèrent un regain d'intérêt pour l'utilisation de la géométrie en hydrodynamique. Certains travaux publiés dans les années soixante-dix ([Lak], [Tur]) furent repris en utilisant la machinerie de la géométrie symplectique ([LaPe1-2]).

Jusqu'à présent, la littérature sur ce sujet s'adressait presque exclusivement à des mathématiciens spécialistes de la géométrie symplectique. Le défi que nous nous sommes donné dans ce travail est donc de combler l'écart entre mathématicien et physicien en présentant certains travaux de ce domaine dans un langage accessible aux deux parties. Nous avons donc pris soin d'inclure une annexe donnant les rudiments de la géométrie différentielle et symplectique. Nous conseillons au lecteur n'étant pas familié avec ces notions de lire d'abord cette annexe avant d'aborder le texte principal. Nous avons enrichi les travaux de base en présentant exhaustivement les preuves et développements ne figurant pas la plupart du temps dans les documents originaux en espérant ainsi aider le lecteur à mieux apprécier la matière.

Lorsque nous étudions la dynamique d'un fluide où les particules qui le compose interagissent selon certains potentiels particuliers, l'équation d'Euler associée peut révéler, dans certains cas, des propriétés géométriques surprenantes. Dans le premier chapitre, nous allons nous intéresser aux travaux de R. Hasimoto, J. Langer et R. Perline [LaPe1-2], J. Marsden et A. Weinstein [MaWe] et de M. Lakshmanan, Th. W. Ruijgrok et C.J. Thompson [LRT] concernant la version hydrodynamique de l'équation de Schrödinger non-linéaire (ESNL) unidimensionnelle. Il est en effet possible, en séparant la partie réelle et imaginaire de l'ESNL, d'obtenir un système de deux équations différentielles ayant la forme d'équations décrivant la dynamique d'un fluide compressible où les particules de ce dernier interagissent selon un potentiel que l'on retrouve dans l'étude des superfluides. Nous allons montrer par la suite que ce système d'équations aux dérivées partielles

en une dimension spatiale peut être géométriquement interprété comme étant les équations d'évolution de la courbure et de la torsion d'un filament de vorticité dans un fluide incompressible. Nous montrerons aussi dans ce chapitre que ces équations proviennent d'un système hamiltonien ayant comme fonction hamiltonienne la longueur d'une courbe de \mathbb{R}^3 et comme espace de phase l'ensemble des lacets de \mathbb{R}^3 . Nous verrons que l'équation de chaîne d'Heisenberg découle de ce même système hamiltonien.

Dans le chapitre suivant, nous montrerons que l'équation d'Euler pour un fluide incompressible sans viscosité peut être déduite d'un système hamiltonien construit sur les orbites coadjointes du groupe des difféomorphismes de \mathbb{R}^3 préservant les volumes. Nous allons voir que la structure symplectique de ce système hamiltonien est équivalente à celle du système hamiltonien donnant la version hydrodynamique de l'ESNL. Ce sont principalement J. Marsden et A. Weinstein [MaWe] qui ont développé la théorie expos e dans ce chapitre.

Finalement, nous allons nous intéresser aux travaux de R. Jackiw [Jac1], D. Bazeia [JacBaz], M. Bordemann et J. Hoppe [BoHo] concernant le lien surprenant qui existe entre l'action de Nambu-Goto, le gaz de Chaplygin et l'action de Born-Infeld. Le modèle de Chaplygin est une théorie non-relativiste décrivant l'évolution d'un gaz dans lequel les particules interagissent selon un potentiel inversement proportionnel à la densité du gaz. L'action de Born-Infeld est la version relativiste du modèle de Chaplygin. Nous allons montrer dans ce dernier chapitre que ces deux modèles peuvent être obtenus à partir d'une unique action: l'action de Nambu-Goto. Cette action provient de la physique des hautes énergies et décrit le mouvement de cordes et de membranes relativistes.

Chapitre 1

SYSTÈME HAMILTONIEN SUR L'ESPACE DES LACETS

1.1. L'ÉQUATION DE SHRÖDINGER NON-LINÉAIRE (ESNL)

L'équation de Shrödinger non-linéaire est une équation très étudiée dans la littérature en physique et en mathématique. D'un point de vue mathématique, cette équation est intéressante puisqu'elle possède des solutions solitoniques et qu'elle est (en 1+1 dimensions) un bon exemple de système intégrable de dimension infinie. En optique, l'ESNL peut être vue comme une extension, pour les milieux non-linéaires, de l'approximation paraxiale utilisée dans la description de la propagation d'ondes linéaires dans des milieux aléatoires [Sul]. Nous allons restreindre notre étude de cette équation à une dimension de temps et une dimension d'espace. Cette dernière prend donc la forme suivante:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x,t) + \frac{1}{2} |\psi(x,t)|^2 \psi(x,t) = 0, \quad (1.1.1)$$

où $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$.

Le but de ce chapitre est de montrer que cette équation peut être déduite d'un système hamiltonien ayant une interprétation géométrique fort simple. Ensuite, nous pourrons lier l'équation de Shrödinger non-linéaire à d'autres systèmes physiques découlant de ce même système hamiltonien.

Notons encore que l'on peut obtenir l'équation (1.1.1) à partir de la densité lagrangienne suivante:

$$\mathcal{L} = \frac{-i}{2}(\psi^* \dot{\psi} - \dot{\psi} \psi^*) + \frac{1}{2} \partial_x \psi \cdot \partial_x \psi^* - \frac{1}{4} (\psi^* \psi)^2, \quad (1.1.2)$$

où $\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}$, $\dot{\psi} \equiv \frac{\partial \psi}{\partial t}$ et $*$ est la transposée conjuguée.

1.2. FORMULATION HYDRODYNAMIQUE DE ESNL

Pour aborder l'aspect géométrique de l'équation de Schrödinger non-linéaire, il faut d'abord l'exprimer dans sa formulation hydrodynamique en effectuant le remplacement suivant dans la densité lagrangienne (1.1.2):

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\rho(x,t)} \exp(i\theta(x,t)) \quad \text{avec} \quad \partial_x \theta = v. \quad (1.2.1)$$

Nous obtenons alors la densité lagrangienne suivante:

$$\mathcal{L} = \rho \dot{\theta} + \frac{1}{8\rho} (\partial_x \rho)^2 + \frac{1}{2} \rho (\partial_x \theta)^2 - \frac{1}{8} \rho^2. \quad (1.2.2)$$

Les équations d'Euler-Lagrange pour les champs ρ et θ sont respectivement:

$$\dot{\theta} + \frac{1}{2} (\partial_x \theta)^2 = \frac{1}{4} \rho + \frac{1}{2\rho^{1/2}} \partial_x^2 (\rho^{1/2}), \quad (1.2.3)$$

$$\partial_t \rho + \partial_x (\rho v) = 0. \quad (1.2.4)$$

En dérivant l'équation (1.2.3) par rapport à x et en remplaçant $\partial_x \theta$ par v , nous obtenons:

$$\dot{v} + v \partial_x v = \partial_x \left[\frac{\rho}{4} + \frac{1}{2\rho^{1/2}} \partial_x^2 (\rho^{1/2}) \right]. \quad (1.2.5)$$

Si nous interprétons maintenant v comme étant le champ de vitesse d'un fluide et ρ comme étant le champ de densité de ce dernier, les équations (1.2.4) et (1.2.5) décrivent la dynamique d'un fluide. L'équation (1.2.4) est simplement l'équation de continuité et (1.2.5) l'équation d'Euler pour un fluide compressible avec une interaction un peu particulière. C'est R. Hasimoto [**Hasi**] qui mis en évidence pour la première fois la version hydrodynamique de ESNL. Ces équations furent utilisées avec succès dans la description de la dynamique de superfluides [**Gro**].

1.3. STRUCTURE SYMPLECTIQUE DE L'ESPACE DES LACETS

Jusqu'à présent, nous avons donné deux descriptions de l'ESNL en termes de densités lagrangiennes. Nous allons maintenant bâtir un système hamiltonien duquel nous pourrions déduire l'ESNL. Pour ce faire, nous ne procéderons pas en appliquant une transformée de Legendre aux densités lagrangiennes obtenues dans les sections précédentes. Nous allons plutôt construire un système hamiltonien plus abstrait mais ayant le grand avantage théorique de dégager une structure géométrique très simple venant unifier plusieurs systèmes physiques. Cette section est en majeure partie basée sur les travaux de J. Marsden et A. Weinstein [MaWe], J. Langer et R. Perline [LaPe1-2] et repris par V.I. Arnold et B. A. Khesin [ArKh].

1.3.1. L'espace des lacets

L'espace des lacets \mathcal{C} est l'ensemble des courbes fermées et non paramétrisées dans \mathbb{R}^3 .

$$\mathcal{C} = \{\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \partial_s \gamma(s) \neq 0, \forall s \in S^1, \gamma(s_1) = \gamma(s_2) \Leftrightarrow s_1 = s_2\} / \gamma \sim (\gamma \circ \phi),$$

où "s" est ici le paramètre de longueur d'arc, S^1 le cercle unité et ϕ une paramétrisation quelconque du cercle. La relation d'équivalence $\gamma \sim (\gamma \circ \phi)$ indique que deux courbes γ ayant la même image dans \mathbb{R}^3 mais une paramétrisation différente sont considérées équivalentes dans \mathcal{C} .

On peut montrer que \mathcal{C} possède une structure de variété différentielle de dimension infinie. L'étude de ce type d'espace étant un domaine en soit, nous prendrons ce fait pour acquis. Ceci nous permettra de définir $T_\gamma \mathcal{C}$, l'espace tangent à \mathcal{C} en γ . Par la suite, nous verrons que \mathcal{C} peut aussi être muni d'une structure symplectique.

1.3.2. $T_\gamma\mathcal{C}$: Espaces tangents à \mathcal{C}

Pour définir $T_\gamma\mathcal{C}$, nous allons nous inspirer de la définition de l'espace tangent pour une variété de dimension finie.

Soit $\gamma \in \mathcal{C}$, l'espace tangent en ce point de \mathcal{C} est défini de la façon suivante:

$$T_\gamma\mathcal{C} = \{\Gamma(s,\tau) \mid \Gamma(s,0) = \gamma(s)\} / \sim$$

où \sim est la relation d'équivalence définie comme suit:

$$\Gamma_1 \sim \Gamma_2 \Leftrightarrow \frac{d}{d\tau}\Gamma_1|_{\tau=0} = \frac{d}{d\tau}\Gamma_2|_{\tau=0}, \quad \forall s.$$

Plongé dans \mathbb{R}^3 , $\Gamma(s,\tau)$ est un tube tel que $\Gamma(s,0) = \gamma(s)$. Par conséquent, $\frac{d}{d\tau}\Gamma|_{\tau=0}$ définit un champ de vecteur $u(s)$ le long de γ . Si nous poursuivons l'analogie avec les variétés de dimension finie, chaque γ est un point de \mathcal{C} , les Γ sont des "chemins" dans \mathcal{C} paramétrisés par τ et u représente une classe d'équivalence de chemins dans \mathcal{C} au point γ .

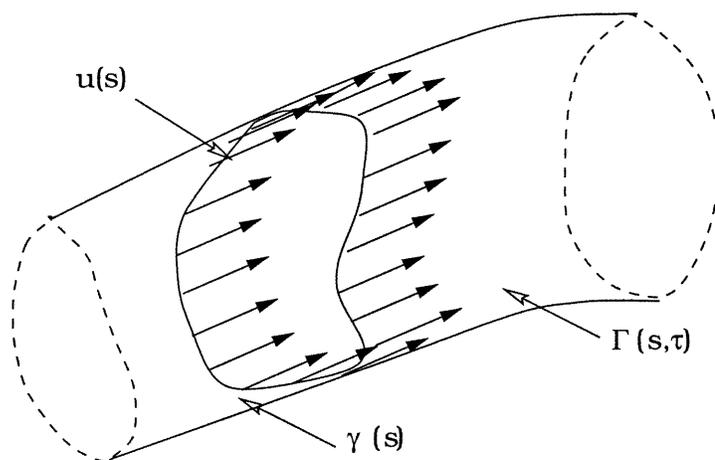


FIG. 1.3.1 -. Élément $u(s)$ de l'espace tangent $T_\gamma\mathcal{C}$

1.3.3. Structure symplectique de Marsden-Weinstein

Pour construire un système hamiltonien sur l'espace des lacets, il faut d'abord montrer que ce dernier peut être doté d'une structure symplectique. C'est précisément ce qu'on fait Marsden et Weinstein [MaWe]. Nous noterons cette forme différentielle qui porte d'ailleurs leur nom, $\beta_\gamma : T_\gamma\mathcal{C} \times T_\gamma\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$. Cette dernière est définie de la façon suivante:

$$\beta_\gamma(u,v) = \int_{S^1} \mu(\partial_s\gamma(s), u(s), v(s)) ds, \quad \text{où } u, v \in T_\gamma\mathcal{C}, \quad (1.3.1)$$

μ étant la forme volume sur \mathbb{R}^3 .

Géométriquement, cette forme différentielle exprime le volume d'un "tube rectangulaire" engendré par les champs de vecteurs u et v le long de γ .

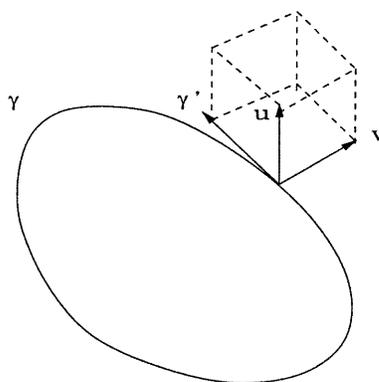


FIG. 1.3.2 –. *Interprétation géométrique de la forme symplectique de M.W.*

1.4. EQUATIONS D'HAMILTON SUR \mathcal{C} ET FILAMENT DE VORTICITÉ

Maintenant que nous savons que \mathcal{C} possède une structure symplectique, il nous est possible d'y construire un système hamiltonien.

L'hamiltonien $H : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ que nous allons proposer sera simplement la fonctionnelle donnant la longueur de la courbe sur laquelle elle agit. On peut écrire

cet hamiltonien de façon intrinsèque avec la forme volume (voir annexe section A.16 pour plus de détails concernant la forme volume):

$$H = \int_{S^1} \mu^{(1)} = \int_{S^1} \sqrt{g} ds.$$

Nous allons prendre comme métrique sur γ celle induite par le plongement de la courbe dans \mathbb{R}^3 , on a ainsi

$$H = \int_{S^1} \langle \partial_s \gamma(s), \partial_s \gamma(s) \rangle^{1/2} ds, \quad (1.4.1)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire ordinaire dans \mathbb{R}^3 .

Nous voulons maintenant écrire l'équation d'Hamilton associée:

$$\frac{d}{d\tau} \Gamma(s, \tau) = X_H. \quad (1.4.2)$$

avec $dH = \beta(X_H, \cdot)$.

Pour cela, il nous faut d'abord calculer $dH(\xi)|_\gamma$ pour $\xi \in T_\gamma \mathcal{C}$. Prenons le "chemin" suivant dans \mathcal{C} passant par γ à $\tau = 0$: $\Gamma(s, \tau) = \tau \xi(s) + \gamma(s)$.

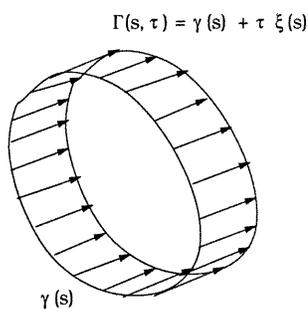


FIG. 1.4.1 – Chemin $\Gamma(s, \tau)$ dans \mathcal{C} passant par γ

Nous avons donc

$$\begin{aligned}
 dH(\xi)|_{\gamma} &= \frac{d}{d\tau} H \Big|_{\tau=0}, \\
 &= \int_{S^1} \frac{d}{d\tau} (\partial_s \Gamma \cdot \partial_s \Gamma)^{1/2} ds \Big|_{\tau=0}, \\
 &= \int_{S^1} (\partial_s \Gamma \cdot \partial_s \Gamma)^{-1/2} \frac{d}{d\tau} (\partial_s \Gamma) \cdot \partial_s \Gamma ds \Big|_{\tau=0}, \\
 &= \int_{S^1} [\tau^2 (\partial_s \xi)^2 + (\partial_s \gamma)^2 + 2\tau \partial_s \xi \cdot \partial_s \gamma]^{-1/2} (\tau (\partial_s \xi)^2 + \partial_s \xi \cdot \partial_s \gamma) ds \Big|_{\tau=0}, \quad \checkmark \\
 &= \int_{S^1} (\partial_s \gamma \cdot \partial_s \gamma)^{-1/2} (\partial_s \xi \cdot \partial_s \gamma) ds.
 \end{aligned}$$

Puisque "s" est le paramètre de longueur d'arc, $(\partial_s \gamma \cdot \partial_s \gamma)^{-1/2} = 1$ et nous obtenons

$$dH(\xi) \Big|_{\gamma} = \int_{S^1} \partial_s \xi \cdot \partial_s \gamma ds.$$

D'autre part, nous avons:

$$\begin{aligned}
 \int_{S^1} \frac{d}{ds} (\partial_s \gamma \cdot \xi) ds &= \int_{S^1} (\partial_s^2 \gamma \cdot \xi) ds + \int_{S^1} (\partial_s \xi \cdot \partial_s \gamma) ds, \\
 &= \partial_s \gamma \cdot \xi \Big|_0^l = 0,
 \end{aligned}$$

où l est la longueur de la courbe γ et $\partial_s \gamma(0) = \partial_s \gamma(l)$.

Par conséquent, nous obtenons:

$$dH(\xi)|_\gamma = - \int_{S^1} (\partial_s^2 \gamma \cdot \xi) ds.$$

Nous allons maintenant introduire le référentiel mobile de Frenet pour notre courbe γ . Rappelons que les équations de Frenet sont données par:

$$e_1' = \kappa e_2, \quad (1.4.3)$$

$$e_2' = -\kappa e_1 + \sigma e_3, \quad (1.4.4)$$

$$e_3' = -\sigma e_2, \quad (1.4.5)$$

$$e_3 = e_1 \times e_2, \quad (1.4.6)$$

$$\kappa = (e_1' \cdot e_1')^{1/2}, \quad (1.4.7)$$

$$\sigma = \frac{e_1 \cdot (e_1' \times e_2'')}{\kappa^2}, \quad (1.4.8)$$

où κ est la courbure et σ la torsion de la courbe. Nous utilisons la notation suivante: $\frac{d}{ds}\gamma \equiv e_1$ et $\frac{d}{ds}e \equiv e'$. Nous pouvons donc écrire:

$$\begin{aligned} dH(\xi)|_\gamma &= - \int_{S^1} \kappa e_2 \cdot \xi ds, \\ &= \int_{S^1} (e_1 \times \kappa e_3) \cdot \xi ds, \quad \text{par (1.4.6),} \\ &= \int_{S^1} \mu(e_1, \kappa e_3, \xi) ds, \\ &= \beta(\kappa e_3, \xi), \\ &= \beta(X_H, \xi). \end{aligned}$$

On en déduit donc que $X_H = \kappa e_3$ et l'équation d'Hamilton prend alors la forme:

$$\left. \frac{d}{d\tau} \Gamma(s, \tau) \right|_{\tau=0} = \kappa e_3 = \kappa e_1 \times e_2 = \frac{d\gamma}{ds} \times \frac{d^2\gamma}{ds^2}. \quad (1.4.9)$$

Nous avons ici le premier cadeau que nous offre notre détour. Si nous associons le paramètre τ au temps, l'équation (1.4.9) est une approximation locale de la dynamique d'un filament de vorticité dans un fluide [Lam]! Un filament de vorticité étant une courbe intégrale du champ de vorticité d'un fluide défini par $\nabla \times \vec{v}$.

1.5. L'ÉQUATION DE CHAÎNE DE SPIN DE HEISENBERG

Consid rions maintenant la situation physique suivante: nous disposons, à égale distance l'une de l'autre, n particules sur un cercle. Chaque particule possède un moment magnétique \vec{T} et nous prenons comme hamiltonien pour ce système

$$H = \sum_{(i,j)} \vec{T}_i \cdot \vec{T}_j,$$

où la somme est effectu e sur les paires de particules consécutives.

Nous allons maintenant faire tendre le nombre de particules vers l'infini: $\vec{T}_i \rightarrow \vec{T}(s)$ où s est un paramètre continu le long du cercle que l'on peut fixer comme étant la longueur d'arc. Il a été montré [LRT] que l'évolution dans le temps du champ $\vec{T}(s, t)$ est donn e par l'équation suivante:

$$\frac{d}{dt} \vec{T}(s, t) = \vec{T}(s, t) \times \frac{d^2}{ds^2} \vec{T}(s, t). \quad (1.5.1)$$

C'est l'équation de chaîne de spin de Heisenberg.

Nous allons maintenant montrer que cette équation est équivalente à (1.4.9). Pour ce faire, nous allons d'abord faire l'identification suivante: $\vec{T} \equiv e_1$. Nous identifions donc \vec{T}   un champ de vecteurs unitaires tangents le long d'une courbe γ . L'équation (1.5.1) devient donc

$$\dot{e}_1 = e_1 \times e_1'', \quad \text{où} \quad e_1'' \equiv \frac{d^2}{ds^2} e_1. \quad (1.5.2)$$

Reprenons l'équation (1.4.9) en associant τ au temps, nous avons ainsi

$$\frac{d\gamma}{dt} = \kappa e_3.$$

Dérivons chaque côté de cette équation par s et nous obtenons:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = \frac{d}{ds} (\kappa e_3),$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d\gamma}{ds} \right) = \kappa' e_3 + \kappa e_3'.$$

On en déduit que:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \kappa' e_3 + \kappa \frac{d}{ds} (e_1 \times e_2), \quad \text{par (1.4.6),} \\ &= \kappa' e_3 + \kappa e_1' \times e_2 + \kappa e_1 \times e_2'. \end{aligned}$$

puisque les vecteurs de Frenet sont orthogonaux, nous obtenons encore:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \kappa' e_3 + \kappa e_1 \times e_2', \\ &= \kappa' e_3 + \kappa \left[e_1 \times \frac{d}{ds} \left(\frac{e_1'}{\kappa} \right) \right], \quad \text{par (1.4.3),} \\ &= \kappa' e_3 + \kappa \left[e_1 \times \left(-\frac{\kappa'}{\kappa^2} e_1' + \frac{e_1''}{\kappa} \right) \right], \\ &= \kappa' e_3 + \kappa \left[e_1 \times \left(-\frac{\kappa'}{\kappa} e_2 + \frac{e_1''}{\kappa} \right) \right], \quad \text{par (1.4.3),} \end{aligned}$$

et enfin,

$$\dot{e}_1 = e_1 \times e_1''.$$

C'est l'équation de chaîne de spin de Heisenberg! C'est le deuxième cadeau que nous donne notre approche géométrique.

1.6. STRUCTURE GÉOMÉTRIQUE DE ESNL

Nous sommes maintenant en mesure de revenir sur notre préoccupation originelle qui est de dégager la structure géométrique de ESNL. Pour ce faire, nous allons étudier le comportement dans le temps de la courbure et de la torsion d'un lacet se déplaçant dans \mathbb{R}^3 et dont la dynamique est régie par l'équation (1.4.9). Nous allons donc extraire la dynamique de $\sigma(s,t)$ et $\kappa(s,t)$ de l'équation de chaîne de Heisenberg que nous savons être équivalente à (1.4.9).

Notre première étape consiste à déduire l'équation suivante:

$$\dot{e}_1 = -\kappa\sigma e_2 + \kappa' e_3. \quad (1.6.1)$$

Pour ce faire, partons de l'équation de chaîne d'Heisenberg (1.5.2):

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_1 \times e_1'', \\ &= e_1 \times (\kappa' e_2 + \kappa e_2'), \quad \text{par (1.4.3),} \\ &= \kappa' e_3 + \kappa e_1 \times (\sigma e_3 - \kappa e_1), \quad \text{par (1.4.4) et (1.4.5)} \\ &= -\kappa\sigma e_2 + \kappa' e_3. \end{aligned}$$

Nous devons ensuite établir l'équation

$$\dot{e}_2 = \kappa \sigma e_1 + \left(\frac{\kappa''}{\kappa} - \sigma^2 \right) e_3. \quad (1.6.2)$$

Partons avec (1.4.3) et dérivons par rapport à t :

$$e_2 = \frac{e'_1}{\kappa},$$

$$\dot{e}_2 = \frac{1}{\kappa^2} (\dot{e}'_1 \kappa - e'_1 \dot{\kappa}),$$

$$= \frac{1}{\kappa^2} \left[(-\kappa \sigma e_2 + \kappa' e_3)' \kappa - e'_1 \dot{\kappa} \right], \quad \text{par (1.6.1),}$$

$$= \frac{1}{\kappa^2} \left[(-\kappa' \sigma e_2 - \kappa \sigma' e_2 - \kappa \sigma e'_2 + \kappa'' e_3 + \kappa' e'_3) \kappa - e'_1 \dot{\kappa} \right],$$

$$= \frac{1}{\kappa} \left[(-\kappa' \sigma - \kappa \sigma') e_2 - \kappa \sigma e'_2 + \kappa'' e_3 + \kappa' e'_3 \right] - \frac{e'_1 \dot{\kappa}}{\kappa^2},$$

$$= \frac{1}{\kappa} \left[(-\kappa' \sigma - \kappa \sigma') e_2 - \kappa \sigma (-\kappa e_1 + \sigma e_3) + \right. \\ \left. + \kappa'' e_3 - \kappa' \sigma e_2 - \dot{\kappa} e_2 \right],$$

$$= \frac{1}{\kappa} (-2\kappa' \sigma - \kappa \sigma' - \dot{\kappa}) e_2 + \left(\frac{\kappa''}{\kappa} - \sigma^2 \right) e_3 + \kappa \sigma e_1 \quad (*)$$

Développons maintenant $\dot{\kappa}$

$$\begin{aligned}
 \dot{\kappa} &= (e'_1 \cdot e'_1)^{-1/2} (\dot{e}'_1 \cdot e'_1), \\
 &= \frac{1}{\kappa} (\dot{e}'_1 \cdot e'_1), \quad \text{par (1.4.3),} \\
 &= \frac{1}{\kappa} (-\kappa\sigma e_2 + \kappa' e_3)' \cdot e'_1, \quad \text{par (1.6.1),} \\
 &= \frac{1}{\kappa} (-\kappa'\sigma e_2 - \kappa\sigma' e_2 - \kappa\sigma e'_2 + \kappa'' e_3 + \kappa' e'_3) \cdot e'_1, \\
 &= (-\kappa'\sigma e_2 - \kappa\sigma' e_2 - \kappa\sigma(-\kappa e_1 + \sigma e_3) + \\
 &\quad + \kappa'' e_3 - \kappa' \sigma e_2) \cdot e_2,
 \end{aligned}$$

Par conséquent nous avons:

$$\dot{\kappa} = -2\kappa'\sigma - \kappa\sigma'. \quad (1.6.3)$$

Cette dernière équation nous donne l'évolution au cours du temps de la courbure en un point "s" de notre lacet. Insérons-la maintenant dans l'équation (*) pour obtenir facilement l'éq. (1.6.2).

Nous devons maintenant trouver l'évolution de la torsion au cours du temps. Commençons par dériver la deuxième equation de Frenet (1.4.4) par rapport à t :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} e_3 &= \dot{e}'_2 + \dot{\kappa} e_1 + \kappa \dot{e}_1 - \sigma \dot{e}_3, \\ &= \left[\kappa \sigma e_1 + \left(\frac{\kappa''}{\kappa} - \sigma^2 \right) e_3 \right]' + \dot{\kappa} e_1 + \kappa^2 \sigma \dot{e}_2 + \kappa \kappa' e_3 - \sigma \dot{e}_3, \quad \text{par (1.6.2),} \\ &= \kappa' \sigma e_1 + \kappa \sigma' e_1 + \kappa \sigma e'_1 + \left(\frac{\kappa''}{\kappa} - \sigma^2 \right)' e_3 + \left(\frac{\kappa''}{\kappa} - \sigma^2 \right) e'_3 + \\ &\quad + \dot{\kappa} e_1 - \kappa^2 \sigma \dot{e}_2 + \kappa \kappa' e_3 - \sigma \dot{e}_3, \end{aligned}$$

Multiplions chaque côté de l'équation par e_3 :

$$\dot{\sigma} = \left(\frac{\kappa''}{\kappa} - \sigma^2 \right)' + \kappa \kappa'. \quad (1.6.4)$$

Nous avons maintenant l'équation donnant l'évolution de la torsion et de la courbure au cours du temps.

Nous sommes maintenant en position de montrer que les équations (1.6.3) et (1.6.4) sont équivalentes aux équations de mouvement de la version hydrodynamique de l'ESNL. Nous allons d'abord associer la vitesse et la densité du fluide aux quantités suivantes:

$$\rho(s,t) = 4\kappa^2(s,t), \quad (1.6.5)$$

$$v(s,t) = 2\sigma(s,t). \quad (1.6.6)$$

Nous devons aussi faire la reparamétrisation suivante:

$$s \rightarrow 2x, \quad t \rightarrow 2t.$$

Procédons au remplacement dans (1.6.3):

$$\frac{1}{2} \partial_t \kappa = -\sigma \partial_x \kappa - \frac{1}{2} \kappa \partial_x \sigma,$$

$$\partial_t \rho = -v \partial_x \rho - \rho \partial_x v.$$

Cette dernière équation étant équivalente à l'équation de continuité (1.2.4).

Remplaçons maintenant dans (1.6.4):

$$\begin{aligned}
 \partial_t \sigma &= \partial_x \left(\frac{1}{4} \frac{\partial_x^2 \kappa}{\kappa} - \sigma^2 \right) + \kappa \partial_x \kappa, \\
 &= \partial_x \left(\frac{1}{4} \frac{\partial_x^2 \kappa}{\kappa} \right) - 2\sigma \partial_x \sigma + \partial_x \left(\frac{1}{2} \kappa^2 \right), \\
 &= \partial_x \left(\frac{1}{4} \frac{\partial_x^2 \kappa}{\kappa} + \frac{1}{2} \kappa^2 \right) - 2\sigma \partial_x \sigma, \\
 \partial_t v &= \partial_x \left(\frac{1}{2} \frac{\partial_x^2 (\rho^{1/2})}{\rho^{1/2}} + \frac{\rho}{4} \right) - v \partial_x v.
 \end{aligned}$$

Nous retrouvons donc l'équation d'Euler (1.2.5) associée à l'ESNL:

$$\dot{v} + v \partial_x v = \partial_x \left(\frac{\rho}{4} + \frac{1}{2} \frac{\partial_x^2 (\rho^{1/2})}{\rho^{1/2}} \right).$$

Les liens existant entre l'équation de chaîne d'Heisenberg, l'équation de mouvement d'un filament de vorticité et la version hydrodynamique de ESNL présentés dans les deux dernières sections ont été développés par M. Lakshmanan [Lak], Th. W. Ruigrok, C.J. Thompson [LRT] et L.A. Turski [Tur].

1.7. SOLUTION PARTICULIÈRE POUR UN FILAMENT DE VORTICITÉ

Il est intéressant de regarder maintenant comment le travail que nous avons fait jusqu'à maintenant nous permet de trouver des solutions particulières au problème du filament de vorticité.

Il est bien connu que l'équation de Schrödinger non-linéaire (1.1.1) possède des solutions solitoniques de la forme suivante:

$$\psi(x,t) = 2\alpha^{1/2} \operatorname{sech}(\alpha^{1/2}(x - Vt - x_o)) \exp \left[i \left(\frac{V}{2}x + \left(\alpha - \frac{V^2}{4} \right) t + \phi_o \right) \right], \quad (1.7.1)$$

α étant une constante réelle, V la vitesse de propagation du soliton, x_o la position initiale du soliton et ϕ_o une phase arbitraire. Si on compare cette expression avec (1.2.1), on voit que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\rho(x,t)^{1/2} &= (2\alpha)^{1/2} \operatorname{sech}(\alpha^{1/2}(x - Vt - x_o)), \\ \theta(x,t) &= \frac{V}{2}x + \left(\alpha - \frac{V^2}{4} \right) t + \phi_o, \\ v(x,t) &= \partial_x \theta = \frac{V}{2}. \end{aligned}$$

En appliquant maintenant les changements de variables (1.6.5) et (1.6.6), on obtient la courbure et la torsion d'un filament de vorticité répondant à l'équation du mouvement (1.4.9):

$$\begin{aligned} \kappa(s,t) &= (2\alpha)^{1/2} \operatorname{sech}(\alpha^{1/2}(s - Vt - s_o)), \\ \sigma(s,t) &= \frac{V}{4}. \end{aligned}$$

Cette solution est donc une courbe hélicoïdale de torsion constante.

1.8. RÉCAPITULATION

Dans ce chapitre, nous avons montr e que l'équation de Schrödinger non-linéaire en une dimension d'espace et une dimension de temps, l'équation d'Euler pour un superfluide compressible associ e, l'équation de mouvement d'un filament de vorticité ainsi que l'équation de cha ene de spin de Heisenberg peuvent toutes être obtenues à partir d'un système hamiltonien très simple. Ce système est construit sur l'espace des lacets dans \mathbb{R}^3 et a comme hamiltonien la fonctionnelle donnant la longueur d'un lacet.

Le fait que tous ces modèles soit réunis dans le cadre d'un même système hamiltonien nous donne des transformations exactes entre les solutions des différents systèmes. Ils deviennent donc simultanément résolubles.

Chapitre 2

ÉQUATION D'EULER POUR UN FLUIDE INCOMPRESSIBLE SUR LES ORBITES COADJOINTES DU GROUPE $\text{SDIFF}(\mathbb{R}^3)$

Nous allons d'abord présenter dans ce chapitre un bref rappel sur les représentations adjointes et coadjointes d'un groupe et d'une algèbre de Lie.

Nous allons montrer dans un deuxième temps que l'équation d'Euler donnant l'évolution d'un fluide incompressible peut être obtenue à partir d'un système hamiltonien dont l'espace de phase est formé des orbites coadjointes du groupe de Lie ayant comme éléments les difféomorphismes dans \mathbb{R}^3 préservant les volumes ([Arn], [ArKh]).

Nous allons par la suite montrer que la structure symplectique de Kirillov-Kostant sur \mathcal{C} est équivalente à la structure symplectique de Marsden-Weinstein sur les orbites coadjointes du groupe de Lie des difféomorphismes préservant les volumes. Ces travaux ont été faits pour la première fois par J. Marsden et A. Weinstein [MaWe].

2.1. REPRÉSENTATIONS ADJOINTES ET COADJOINTES D'UN GROUPE ET D'UNE ALGÈBRE DE LIE

Soit G un groupe de Lie, \mathfrak{g} son algèbre associée, $End(\mathfrak{g})$ l'ensemble des applications linéaires de \mathfrak{g} dans \mathfrak{g} et e l'identité du groupe de Lie.

Définition 1. L'opérateur adjoint Ad est un opérateur allant de $G \rightarrow End(\mathfrak{g})$ tel que son action sur un élément \mathfrak{g} de G est donnée par

$$Ad_g \equiv (R_{g^{-1}}L_g)_*|_e.$$

Ad_g est donc une application de $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$. L'ensemble $\{Ad_g \mid g \in G\}$ forme une représentation de G agissant sur \mathfrak{g} . C'est ce qu'on appelle la représentation adjointe de G .

Définition 2. L'opérateur ad est la différentielle de Ad évaluée à l'identité du groupe :

$$ad \equiv Ad_*|_e.$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned} ad : T_e G &\rightarrow T_e(End(\mathfrak{g})), \\ &: \mathfrak{g} \rightarrow End(\mathfrak{g}). \end{aligned}$$

L'action de ad sur un élément a de \mathfrak{g} est donnée par

$$ad_a \equiv \left. \frac{d}{dt} Ad_{e^{ta}} \right|_{t=0}.$$

ad_a est donc un opérateur de $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$. L'ensemble $\{ad_a \mid a \in \mathfrak{g}\}$ forme une représentation de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} que l'on nomme la représentation adjointe de l'algèbre.

Nous allons noter l'action de ad_a sur un élément $\eta \in \mathfrak{g}$ comme suit:

$$ad_a \eta = [a, \eta].$$

Cette notation s'inspire du fait que si \mathfrak{g} est de dimension finie, ad_a se représente sous forme matricielle et $[a, \eta]$ est le commutateur habituel des matrices.

Définition 3. L'opérateur coadjoint Ad^* est un opérateur allant de G vers $End(\mathfrak{g}^*)$ dont l'action sur un élément g de G est

$$Ad_g^* \equiv (R_{g^{-1}} L_g)^*|_e.$$

Ad_g^* est donc un opérateur de $\mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$. L'ensemble $\{Ad_g^* | g \in G\}$ forme une co-représentation de G , c'est-à-dire que $Ad_{gh}^* = Ad_h^* Ad_g^*$.

Définition 4. L'opérateur coadjoint ad^* est un opérateur allant de \mathfrak{g} vers \mathfrak{g}^* dont l'action sur un élément a de \mathfrak{g} est donnée par

$$ad_a^* \equiv \left. \frac{d}{dt} Ad_{e^{ta}}^* \right|_{t=0}.$$

ad_a^* est donc un opérateur de $\mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$. L'ensemble $\{ad_a^* | a \in \mathfrak{g}\}$ forme une co-représentation de \mathfrak{g} . Nous allons noter $ad_a^* \eta \equiv \{a, \eta\}$ où $\eta \in \mathfrak{g}^*$.

Remarque. Soit $v \in V$ un élément d'un espace vectoriel et $\alpha \in V^*$ un élément du dual, nous allons noter dans ce chapitre $\alpha(v) \equiv (\alpha, v)$.

Nous pouvons donc écrire:

$$\begin{aligned} (\{a, \eta\}, \lambda) &= (ad_a^* \eta, \lambda), \\ &= (\eta, ad_a \lambda), \quad (\text{voir annexe p.60 section A.9.1}) \\ &= (\eta, [a, \lambda]), \end{aligned}$$

où $a, \lambda \in \mathfrak{g}$ et $\eta \in \mathfrak{g}^*$.

Définition 5. L'orbite coadjointe d'un groupe de Lie G passant par le point $x \in \mathfrak{g}^*$ de G est définie de la façon suivante:

$$O_x^*(G) \equiv \{m = Ad_g^* x | x \in \mathfrak{g}^*, \forall g \in G\}.$$

Proposition 1. La quantité $\xi = \{a, x\} \in T_x O_x^*(G)$, c'est-à-dire que ξ est un vecteur tangent à l'orbite $O_x^*(G)$ au point x .

Preuve: On a:

$$\{a, x\} = ad_a^* x = \left. \frac{d}{dt} Ad_{e^{ta}}^*(x) \right|_{t=0} \equiv \xi.$$

Comme $\gamma(t) = Ad_{e^{ta}}^*(x)$ est une courbe sur $O_x^*(G)$ passant par x , ξ est un vecteur tangent à la courbe $\gamma(t)$.

2.2. STRUCTURE SYMPLECTIQUE DE KIRILLOV-KOSTANT

Proposition 2. Sur une orbite coadjointe d'un groupe de Lie, il existe toujours une structure symplectique naturelle $\Omega_x(\xi_1, \xi_2)$ avec $\xi_1, \xi_2 \in TO_x^*(G)$. C'est la structure symplectique de Kirillov-Kostant.

Cette structure symplectique est définie de la façon suivante. On commence par définir $\Phi_x : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$ telle que:

$$\Phi_x(a) = \{a, x\} = ad_a^* x = \xi.$$

Φ_x est donc une bijection naturelle entre \mathfrak{g} et \mathfrak{g}^* . De la même façon qu'une métrique Riemannienne induit une bijection entre T^*M et TM , on peut construire une 2-forme sur $O_x^*(G)$ à l'aide de Φ_x :

$$\begin{aligned} \Omega_x(\xi_1, \xi_2) &\equiv (\xi_1, \Phi_x^{-1}(\xi_2)), \\ &= (\xi_1, a_2), \\ &= (ad_{a_1}^* x, a_2), \\ &= (x, ad_{a_1} a_2), \\ \Omega_x(\xi_1, \xi_2) &= (x, [a_1, a_2]). \end{aligned}$$

Les orbites coadjointes des groupes de Lie munies de la structure symplectique de Kirillov-Kostant sont donc des variétés symplectiques potentiellement candidates pour supporter un système hamiltonien.

2.3. SYSTÈME HAMILTONIEN SUR $O_x^*(G)$

Nous allons maintenant écrire l'équation d'Hamilton générale pour un système ayant comme espace de phase $O_x^*(G)$ pour un groupe de Lie quelconque. Prenons nous d'abord un hamiltonien $H : O_x^*(G) \rightarrow \mathbb{R}$. La différentielle de H sera une application linéaire $dH : TO_x^*(G) \rightarrow \mathbb{R}$. Puisque $O_x^*(G) \subset \mathfrak{g}^*$, les éléments de $TO_x^*(G)$ sont aussi des éléments de \mathfrak{g}^* . On peut donc dire que dH est un élément de \mathfrak{g} .

Proposition 3. Le champ de vecteur $\xi(x) = ad_{dH}^*x$ est le champ de vecteurs hamiltonien relatif à la structure symplectique de Kirillov-Kostant.

Preuve: Nous avons en effet:

$dH(\xi) = \Omega_x(X_H, \xi) = (\Phi_x^{-1}(X_H), \xi)$, d'où l'on déduit que $dH = \Phi_x^{-1}(X_H)$ ou encore que $X_H = \Phi_x(dH) = ad_{dH}^*x$.

Nous pouvons maintenant écrire la forme générale de l'équation d'Hamilton définie sur une orbite coadjointe d'un groupe de Lie:

$$\frac{dm(t)}{dt} = X_H, \quad \text{où } m : \mathbb{R} \rightarrow O_x^*(G),$$

ou encore,

$$\frac{dm(t)}{dt} = ad_{dH}^*m. \quad (2.3.1)$$

C'est ce que l'on nomme l'équation d'Euler générale.

2.4. ÉQUATION D'EULER POUR UN FLUIDE INCOMPRESSIBLE

Dans cette section, nous allons montrer que l'équation d'Euler pour un fluide incompressible peut être déduite d'un système hamiltonien construit sur les orbites coadjointes d'un groupe de Lie de dimension infinie munies de la structure symplectique de Kirillov-Kostant. Donnons d'abord quelques définitions.

Définition 6. $\text{SDiff}(\mathbb{R}^3)$ est l'ensemble des difféomorphismes de \mathbb{R}^3 vers \mathbb{R}^3 préservant les volumes. Cet ensemble possède la structure d'un groupe de Lie de dimension infinie.

Définition 7. $SVect(\mathbb{R}^3)$ est l'algèbre de Lie de $SDiff(\mathbb{R}^3)$. Ses éléments sont les champs de vecteurs \vec{w} de divergence nulle $\vec{\nabla} \cdot \vec{w} = 0$ tel que $\vec{w}(\infty) = 0$. L'opération dans cette algèbre est la dérivée de Lie:

$$[\vec{w}, \vec{z}] = \mathcal{L}_{\vec{w}}\vec{z}.$$

Dans \mathbb{R}^3 , cette opération prend une forme relativement simple. Premièrement, la dérivée de Lie peut s'écrire comme

$$\mathcal{L}_{\vec{w}}\vec{z} = (\vec{w} \cdot \nabla)\vec{z} - (\vec{z} \cdot \nabla)\vec{w}, \quad (\text{voir annexe p. 63}).$$

Nous avons aussi l'identité vectorielle suivante:

$$\nabla \times (\vec{w} \times \vec{z}) = (\nabla \cdot \vec{z})\vec{w} - (\nabla \cdot \vec{w})\vec{z} + (\vec{z} \cdot \nabla)\vec{w} - (\vec{w} \cdot \nabla)\vec{z},$$

ou encore

$$\nabla \times (\vec{w} \times \vec{z}) = (\nabla \cdot \vec{z})\vec{w} - (\nabla \cdot \vec{w})\vec{z} - [\vec{w}, \vec{z}].$$

Par ailleurs, pour tout \vec{w} et $\vec{z} \in SVect(\mathbb{R}^3)$, nous avons $\nabla \cdot \vec{w} = \nabla \cdot \vec{z} = 0$

$$[\vec{w}, \vec{z}] = \nabla \times (\vec{z} \times \vec{w}). \quad (2.4.1)$$

Proposition 4. Il existe un isomorphisme naturel entre les éléments de $SVect(\mathbb{R}^3)$ et l'ensemble des 2-formes différentielles exactes $Z^2(\mathbb{R}^3)$ que voici:

$$i_{\vec{w}}\mu = \beta,$$

où $\vec{w} \in SVect(\mathbb{R}^3)$, $\beta \in Z^2(\mathbb{R}^3)$ et μ est la forme volume sur \mathbb{R}^3 .

Comme la preuve de cette proposition nécessite des notions de topologie algébrique, nous prendrons ce résultat pour acquis.

Nous avons aussi que $Z^2(\mathbb{R}^3)$ est isomorphe à $\Omega^1(\mathbb{R}^3)/d\Omega^0(\mathbb{R}^3)$, c'est-à-dire l'espace des 1-formes sur \mathbb{R}^3 modulo la différentielle d'une fonction. On peut effectivement envoyer tous les éléments de cet espace vers $Z^2(\mathbb{R}^3)$ par l'application de la différentielle extérieure sans perdre d'information. Nous allons donc associer le dual de $SVect(\mathbb{R}^3)$ à $\Omega^1(\mathbb{R}^3)/d\Omega^0(\mathbb{R}^3)$.

Définissons maintenant un opérateur linéaire A associant à chaque champ de vecteurs de $SVect(\mathbb{R}^3)$ une fonctionnelle linéaire sur cet espace. L'action de cette fonctionnelle étant définie de la façon suivante:

$$A\vec{v}(\vec{w}) \equiv (A\vec{v}, \vec{w}) \equiv \int_{\mathbb{R}^3} (\vec{v} \cdot \vec{w}) \mu,$$

(\cdot) est le produit scalaire habituel dans \mathbb{R}^3 . Cet opérateur définit en fait un produit scalaire dans $SVect(\mathbb{R}^3)$:

$$(A\vec{v}, \vec{w}) \equiv \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle .$$

Nous sommes maintenant en mesure de montrer l'une des propositions les plus importantes de ce chapitre.

Proposition 5. L'équation d'Euler donnant l'évolution du champ de vitesse d'un fluide incompressible est une équation d'Hamilton sur les orbites coadjointes du groupe $SDiff(\mathbb{R}^3)$.

Notation 1. Nous allons introduire la notation suivante: Soit \vec{u} un champ de vecteurs, u^\flat sera la 1-forme associée de composante $u_1 dx + u_2 dy + u_3 dz$. Nous allons aussi définir l'opération inverse $(u^\flat)^\sharp = \vec{u}$.

Preuve:

Soit $\alpha \in O_x^*(SDiff(\mathbb{R}^3))$ et $\vec{w}, \vec{z} \in SVect(\mathbb{R}^3)$ avec $A^{-1}\alpha = \vec{w}$. Dotons-nous d'abord d'un hamiltonien $H : O_x^*(SDiff(\mathbb{R}^3)) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$H(\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha, A^{-1}\alpha).$$

La différentielle de H est $dH = A^{-1}\alpha$. Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d\alpha}{dt}, \vec{z} \right) &= (ad_{A^{-1}\alpha}^*, \vec{z}), \quad (\text{par 2.3.1}), \\
 &= (\alpha, ad_{A^{-1}\alpha}\vec{z}), \\
 &= \langle \vec{w}, [\vec{w}, \vec{z}] \rangle, \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} ([\vec{w}, \vec{z}] \cdot \vec{w}) \mu, \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} i_{[\vec{w}, \vec{z}]} w^b \mu, \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{L}_{\vec{w}} i_{\vec{z}} w^b \mu - \int_{\mathbb{R}^3} i_{\vec{z}} \mathcal{L}_{\vec{w}} w^b \mu.
 \end{aligned}$$

Regardons la première intégrale de plus près en posant $f = i_{\vec{z}} w^b$:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{L}_{\vec{w}} f \mu = \int_{\mathbb{R}^3} (i_{\vec{w}} d - di_{\vec{w}}) f \mu.$$

La première intégrale s'annule puisque $d(f\mu) = 0$. Par le théorème de Stokes il nous reste:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{L}_{\vec{w}} f \mu &= - \int_{\mathbb{R}^3} d(fi_{\vec{w}}\mu), \\
 &= - \int_S fi_{\vec{w}}\mu = 0.
 \end{aligned}$$

puisque $f = i_{\vec{z}} w^b = 0$ lorsqu'on prend S à l'infini. Nous avons donc:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d\alpha}{dt}, \vec{z} \right) &= - \int_{\mathbb{R}^3} i_{\vec{z}} \mathcal{L}_{\vec{w}} w^b \mu, \\
 &= - \langle (\mathcal{L}_{\vec{w}} w^b)^\sharp, \vec{z} \rangle, \\
 &= - (A((\mathcal{L}_{\vec{w}} w^b)^\sharp), \vec{z}).
 \end{aligned}$$

Comme on a aussi

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}, \vec{z} \right) = \left(A \frac{d\vec{w}}{dt}, \vec{z} \right),$$

on peut donc dire que:

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = -(\mathcal{L}_{\vec{w}}w^b)^\sharp + \vec{v}, \quad (2.4.2)$$

où \vec{v} est un vecteur orthogonal à \vec{z} . On peut maintenant montrer que \vec{v} est déterminé uniquement en demandant que $-(\mathcal{L}_{\vec{w}}w^b)^\sharp + \vec{v}$ soit un champ de vecteurs de divergence nulle (puisque $\frac{d\vec{w}}{dt}$ est de divergence nulle). Premièrement, la décomposition de Hodge nous permet d'écrire tout champ de vecteurs de façon unique en la somme d'un champ de divergence nulle et du gradient d'une fonction. On a donc

$$\vec{v}_o = -(\mathcal{L}_{\vec{w}}w^b)^\sharp - \nabla p,$$

où $\nabla \cdot \vec{v}_o = 0$. Il nous reste à montrer que ∇p est orthogonal à \vec{z} . Nous avons

$$\begin{aligned} \langle \nabla p, \vec{z} \rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla p \cdot \vec{z}) \mu, \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla \cdot (p\vec{z}) - p(\nabla \cdot \vec{z})) \mu, \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \cdot (p\vec{z}) \mu, \\ &= \int_S p\vec{z} \, d\vec{S} = 0, \quad (\text{en prenant } S \text{ à l'infini}). \end{aligned}$$

Ceci nous permet de prendre $\vec{v} = -\nabla p$. L'équation (2.4.2) devient donc:

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = -(\mathcal{L}_{\vec{w}}w^b)^\sharp - \nabla p. \quad (2.4.3)$$

En utilisant la définition de la dérivée de Lie d'une 1-forme (annexe section A.11) et le fait que nous travaillons toujours avec des champs de vecteurs de divergence nulle, on trouve facilement que notre dernière expression s'exprime comme:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{w}}{dt} + (\vec{w} \cdot \nabla)\vec{w} + \frac{1}{2}\nabla(\vec{w} \cdot \vec{w}) &= -\nabla p, \\ \frac{d\vec{w}}{dt} + (\vec{w} \cdot \nabla)\vec{w} &= -\nabla\left(\frac{1}{2}\vec{w} \cdot \vec{w} + p\right). \end{aligned}$$

Si nous définissons $P \equiv \frac{1}{2}\vec{w} \cdot \vec{w} + p$, nous avons alors:

$$\frac{d\vec{w}}{dt} + (\vec{w} \cdot \nabla)\vec{w} = -\nabla P. \quad (2.4.4)$$

On reconnaît l'équation d'Euler pour un fluide parfait incompressible où P est le champ de pression. Nous avons fixé ici la densité du fluide à 1.

2.5. L'ESPACE DES LACETS ET ORBITES COADJOINTES DE $SDIFF(\mathbb{R}^3)$

Proposition 6. Il existe une injection l entre l'espace des lacets \mathcal{C} et $SVect^*(\mathbb{R}^3)$. l associe une fonctionnelle linéaire à tous les lacets de \mathcal{C} . L'action de la fonctionnelle associée à un lacet sur un élément $\vec{w} \in SVect(\mathbb{R}^3)$ est le flux de ce champ de vecteurs à travers une surface σ ayant comme bord le lacet γ :

$$l_\gamma(\vec{w}) = (l_\gamma, \vec{w}) = \int_\sigma i_{\vec{w}}\mu.$$

L'action de l_γ sur un champ de vecteurs ne dépend pas de la surface σ choisie mais seulement du lacet γ . En effet, nous avons, par la proposition 4, que

$$l_\gamma(\vec{w}) = \int_\sigma d\alpha, \quad \text{où } \alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^3),$$

et en utilisant le théorème de Stokes, nous obtenons:

$$l_\gamma(\vec{w}) = \int_\gamma \alpha.$$

Il est possible de montrer que les fonctionnelles l_γ ainsi définies sont bel et bien des éléments de $SVect(\mathbb{R}^3)^*$.

Considérons maintenant une orbite coadjointe de $SDiff(\mathbb{R}^3)$ passant par le point l_{γ_1} , c'est-à-dire l'ensemble $O_{l_{\gamma_1}}^* = \{Ad_g^*(l_{\gamma_1}), \forall g \in SDiff(\mathbb{R}^3)\}$. On peut aussi montrer que cette orbite est en bijection avec l'ensemble des lacets isotopes à γ_1 . Deux lacets sont dit isotopes s'il est possible de les déformer continuellement l'un sur l'autre sans permettre les auto-intersections ni les coupures des lacets. En d'autres termes, les sous-ensembles de lacets isotopes de \mathcal{C} sont les ensembles de noeuds équivalents.

Les sous-ensembles de lacets isotopes de \mathcal{C} sont non seulement en bijection avec les orbites coadjointes de $SDiff(\mathbb{R}^3)$ mais possèdent aussi la même structure symplectique. En effet, la structure symplectique de Marsden-Weinstein sur les orbites coadjointes de $SDiff(\mathbb{R}^3)$ est équivalente à la structure symplectique de Kirillov-Kostant sur \mathcal{C} . Pour montrer cette dernière affirmation, prenons donc la forme de Kirillov-Kostant évaluée au point l_γ d'une orbite coadjointe:

$$\begin{aligned}
\Omega_{l_\gamma} &= (l_\gamma, [\vec{v}, \vec{w}]), \quad \vec{v}, \vec{w} \in SVect(\mathbb{R}^3), \\
&= (l_\gamma, \nabla \times (\vec{w} \times \vec{v})), \\
&= \int_\sigma i_{\nabla \times (\vec{w} \times \vec{v})} \mu, \\
&= \int_\sigma d\eta, \quad \text{où } \eta = (\vec{w} \times \vec{v})_1 dx_1 + (\vec{w} \times \vec{v})_2 dx_2 + (\vec{w} \times \vec{v})_3 dx_3, \\
&= \int_\gamma \eta, \\
&= \int_\gamma (\vec{w} \times \vec{v}) \cdot \frac{d\gamma}{ds} ds, \\
&= \beta(\vec{w}, \vec{v}).
\end{aligned}$$

La forme symplectique de Kirillov-Kostant est donc bel et bien équivalente à la forme symplectique de Marsden-Weinstein.

2.6. RÉCAPITULATION

Dans ce chapitre, nous avons d'abord vu que l'équation d'Euler pour un fluide incompressible est une équation hamiltonienne ayant comme espace de phase les orbites coadjointes du groupe de Lie $SDiff(\mathbb{R}^3)$. Nous avons par la suite remarqué que cet espace de phase peut être mis en correspondance avec l'espace des lacets de \mathbb{R}^3 et que la structure symplectique de Marsden-Weinstein utilisée pour construire le système hamiltonien du premier chapitre est équivalente à la structure symplectique naturelle des orbites coadjointes: la structure de Kirillov-Kostant.

Chapitre 3

MEMBRANES RELATIVISTES ET HYDRODYNAMIQUE

Dans le premier chapitre, nous avons déduit une famille de modèles physiques à partir d'un système hamiltonien central bâti sur l'espace des lacets plongés dans \mathbb{R}^3 .

Nous allons maintenant nous intéresser à un système lagrangien décrivant l'évolution de cordes et de membranes dans un espace de Minkowski. L'action de la théorie sera la surface ou l'hypervolume engendré par le mouvement de l'objet géométrique. Cette action se nomme l'action de Nambu-Goto.

En choisissant deux paramétrisations particulières de nos membranes, nous obtiendrons de façon surprenante deux modèles d'hydrodynamique: le gaz de Chaplygin et l'action relativiste de Born-Infeld. En d'autres termes, le gaz de Chaplygin et l'action de Born-Infeld possèdent un ancêtre commun: l'action de Nambu-Goto.

C'est M. Bordemann et J. Hoppe [**BoHo**] qui montrèrent pour la première fois qu'il est possible en exprimant l'action de Nambu-Goto dans la paramétrisation du cône de lumière d'obtenir l'action d'une théorie hydrodynamique non-relativiste d'un gaz compressible. Ce n'est que récemment que R. Jackiw et D. Bazeia ([**JacBaz**],[**Jac1-2**]) montrèrent le lien existant avec l'action de Born-Infeld.

3.1. DÉRIVATION CLASSIQUE DU MODÈLE DE CHAPLYGIN SANS VORTICITÉ

Nous allons d'abord dériver le lagrangien décrivant la dynamique du gaz de Chaplygin.

Le gaz de Chaplygin est un fluide compressible pour lequel l'interaction entre les particules est proportionnelle à $\frac{\lambda}{\rho}$ où $\rho(\vec{r},t)$ est le champ de densité du fluide. Considérons pour l'instant un flux continu de particules d'énergie cinétique:

$$K = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\vec{r},t) v^2(\vec{r},t), \quad (3.1.1)$$

où $\rho(\vec{r},t)$ et $v(\vec{r},t)$ sont respectivement le champ de densité et de vitesse du fluide. Si nous définissons le courant $\vec{j} = \vec{v}\rho$, on peut donc écrire l'énergie cinétique en termes de ce dernier:

$$K = \frac{1}{2} \int d^3r \frac{j^2}{\rho}. \quad (3.1.2)$$

Nous allons maintenant imposer au système la conservation du flot de matière:

$$\nabla \cdot \vec{j} + \dot{\rho} = 0. \quad (3.1.3)$$

Pour obtenir l'équation de continuité comme équation d'Euler-Lagrange, nous allons proposer le lagrangien suivant:

$$L = \int d^3r \left[\frac{j^2}{2\rho} + \theta(\vec{r},t)(\nabla \cdot \vec{j} + \dot{\rho}) \right]. \quad (3.1.4)$$

Trouvons les équations de mouvement pour chaque champ. Débutons avec l'équation d'Euler-Lagrange selon \vec{j} :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^3 \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \vec{j})} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{j}} &= 0, \\ \Rightarrow \nabla \theta &= \frac{\vec{j}}{\rho}. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

De cette dernière équation et de la définition de \vec{j} , on déduit que

$$\nabla \theta = \vec{v}. \quad (3.1.6)$$

On considérera donc θ comme étant le “potentiel scalaire de vitesse”. L'équation (3.1.6) nous apprend aussi que le lagrangien que nous avons proposé décrit un fluide sans vorticité. En effet, on a:

$$\nabla \times \vec{v} = \nabla \times (\nabla\theta) = 0.$$

Poursuivons avec l'équation d'Euler-Lagrange selon ρ :

$$\sum_{i=0}^3 \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \rho)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} = 0,$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} + \frac{j^2}{2\rho^2} = 0. \quad (3.1.7)$$

Exprimons maintenant notre lagrangien (3.1.4) en termes de ρ et du potentiel scalaire θ :

$$L = \int d^3r \left[\theta \dot{\rho} + \frac{1}{2} \rho (\nabla\theta)^2 + \theta \nabla \cdot (\rho \nabla\theta) \right].$$

En explicitant le dernier terme sous la forme:

$$\theta \nabla \cdot (\rho \nabla\theta) = \nabla \cdot (\theta \rho \nabla\theta) - \rho (\nabla\theta)^2,$$

nous obtenons:

$$L = \int d^3r \left[-\frac{1}{2} \rho (\nabla\theta)^2 + \theta \dot{\rho} \right] + \int d^3r \nabla \cdot (\theta \rho \nabla\theta),$$

$$= \int d^3r \left[-\frac{1}{2} \rho (\nabla\theta)^2 + \theta \dot{\rho} \right] + \int_S d\vec{S} \theta \rho \nabla\theta.$$

En demandant que $\rho(\infty) = 0$ et $\theta(\infty) = 0$, le terme de surface s'annule et nous obtenons, par conséquent,

$$L = \int d^3r \left[-\frac{1}{2} \rho (\nabla\theta)^2 + \theta \dot{\rho} \right].$$

Nous avons ainsi obtenu le lagrangien d'un flot de particules n'interagissant pas entre elles. Nous allons maintenant introduire un terme d'interaction $\frac{\lambda}{\rho}$ pour obtenir le lagrangien décrivant la dynamique du gaz de Chaplygin:

$$L = \int d^3r \left[-\frac{1}{2}\rho(\nabla\theta)^2 + \theta \dot{\rho} - \frac{\lambda}{\rho} \right]. \quad (3.1.8)$$

L'équation (3.1.7) d'Euler-Lagrange selon ρ devient donc

$$\dot{\theta} + \frac{(\nabla\theta)^2}{2} = \frac{\lambda}{\rho^2}. \quad (3.1.9)$$

Exprimons cette dernière équation en termes du champ de vitesse \vec{v} . Pour ce faire, prenons le gradient de (3.1.9):

$$\nabla \dot{\theta} + \frac{1}{2}\nabla(\nabla\theta)^2 = \nabla \left(\frac{\lambda}{\rho^2} \right),$$

$$\dot{\vec{v}} + \frac{1}{2}\nabla(\vec{v} \cdot \vec{v}) = -\frac{2\lambda}{\rho^3}\nabla\rho,$$

$$\dot{\vec{v}} + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{2\lambda}{\rho^3}\nabla\rho.$$

Puisque nous sommes dans le cas où $\nabla \times \vec{v} = 0$, l'équation devient

$$\dot{\vec{v}} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \frac{-2\lambda}{\rho^3}\nabla\rho. \quad (3.1.10)$$

C'est l'équation d'Euler pour le gaz de Chaplygin.

L'équation (3.1.9) nous permet d'écrire l'action (3.1.8) uniquement en termes du potentiel de vitesse θ . Remarquons que ceci est possible dû à la forme particulière de l'interaction propre au gaz de Chaplygin. En isolant ρ de (3.1.9) et en remplaçant dans (3.1.8), on obtient:

$$L = 2\lambda \int d^3r \sqrt{\dot{\theta} + \frac{1}{2}(\nabla\theta)^2}. \quad (3.1.11)$$

3.2. L'ACTION DE NAMBU-GOTO

L'action de Nambu-Goto est apparue en physique des hautes énergies. Elle décrit le mouvement de cordes ou de membranes dans un espace de Minkowski. Cette action est l'extension naturelle de l'action relativiste d'une particule ponctuelle libre. Commençons donc par trouver le lagrangien pour une telle particule.

Avant toutes choses, nous utiliserons dans ce chapitre $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $\beta = \frac{u}{c}$ où u est la vitesse de la particule et c est la vitesse de la lumière. Nous allons aussi utiliser la métrique de Minkowski $\eta = \text{diag}(1, -1, \dots, -1)$ et la convention $\eta_{\mu\nu}X^\nu \equiv X_\mu$.

L'impulsion généralisée est, par définition,

$$\frac{\partial L}{\partial u_i} = \gamma m u_i = P_i. \quad (3.2.1)$$

Pour une particule libre, le lagrangien s'écrit $L = T(\vec{u})$ où T est l'énergie cinétique de cette dernière. Nous trouvons donc que

$$T = L = -mc^2 \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (3.2.2)$$

La longueur de la trajectoire Γ de la particule dans l'espace de Minkowski sera donnée par:

$$l = \int_{\Gamma} \mu^{(1)} = \int_{\Gamma} \sqrt{g} ds,$$

où g est le déterminant de la métrique sur Γ induite par la métrique de Minkowski de l'espace ambiant. Cette intégrale ne dépend évidemment pas de la paramétrisation de la trajectoire Γ . On peut donc choisir de la calculer dans la paramétrisation suivante:

$\Gamma(t) = (X^1, X^2, X^3, X^4) \equiv (ct, \vec{r}(t))$. On obtient:

$$l = \int \sqrt{\partial_t X^\mu \partial_t X_\mu} dt,$$

$$= c \int \sqrt{1 - \beta^2} dt,$$

$$= \frac{-1}{mc} \int L dt = \frac{-1}{mc} S.$$

L'action d'une particule libre relativiste est donc proportionnelle à la longueur de sa trajectoire dans l'espace de Minkowski.

La trajectoire physique que prendra la particule libre sera donc celle qui minimise l'action et, par conséquent, la longueur de sa trajectoire entre son point de départ et d'arrivée dans l'espace de Minkowski.

Considérons maintenant le mouvement d'un lacet fermé dans un espace de Minkowski. Pour nous donner une idée intuitive du phénomène, nous pouvons (de façon non rigoureuse) dessiner le mouvement de ce lacet dans un espace de Minkowski à une dimension de temps et deux dimensions d'espace.

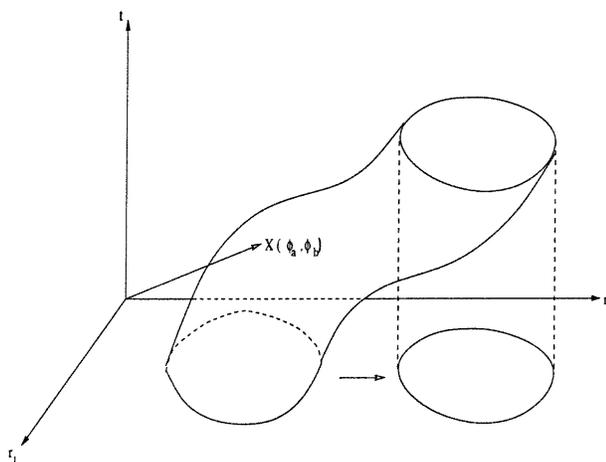


FIG. 3.2.1 –. *Mouvement d'une corde en 2+1 dimensions*

L'action proposée pour décrire la dynamique d'un tel objet fut inspirée de l'action d'une particule libre relativiste. Nambu et Goto proposèrent de considérer l'aire de la surface engendrée par le mouvement de la corde dans l'espace-temps comme action de la théorie

$$S = \int_U \sqrt{\det \left(\eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \phi_\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \phi_\beta} \right)} d\phi_1 d\phi_2. \quad (3.2.3)$$

La surface engendrée par le mouvement de la corde est habituellement nommée "surface d'univers" que l'on note ici U . L'action (3.2.3) a été écrite en utilisant une paramétrisation de la surface d'univers telle que

$$\varphi^{-1}(\phi_1, \phi_2) = (X^1(\phi_1, \phi_2), X^2(\phi_1, \phi_2), X^3(\phi_1, \phi_2)) \equiv (ct(\phi_1, \phi_2), r^1(\phi_1, \phi_2), r^2(\phi_1, \phi_2)).$$

Il est important de noter que l'action de Nambu-Goto est indépendante du choix de paramétrisation de la surface U . Elle peut donc être exprimée intrinsèquement sur la variété U sans faire explicitement référence à un système de coordonnées particulier:

$$S = \int_U \mu, \quad (3.2.4)$$

avec μ la forme volume sur U . La métrique choisie ici sur U est la métrique induite par le plongement de U dans l'espace de Minkowski (voir annexe A, sections A.15.1. et A.16 pour avoir plus de détails sur la forme volume et la métrique induite).

D'un point de vue strictement mathématique, l'action de Nambu-Goto est l'intégrale de la forme volume sur une variété de dimension d plongée dans un espace de Minkowski de dimension $d + 1$.

3.3. DÉRIVATION DU MODÈLE DE CHAPLYGIN À PARTIR DE L'ACTION DE NAMBU-GOTO

Nous allons montrer dans cette section que l'action de Chaplygin peut être obtenue à partir de celle de Nambu-Goto.

Il est important de signaler que dans la section précédente, les variables X^μ représentaient les coordonnées de l'espace physique et les ϕ^α étaient les paramètres décrivant la surface d'univers engendrée par le mouvement de la corde où de la membrane évoluant dans l'espace. Dans cette section, l'interprétation des variables physiques sera totalement différente. Les ϕ^α seront associés aux variables temporelle et spatiales et l'espace de Minkowski ambiant ne sera utilisé que pour induire une métrique sur la membrane par plongement de cette dernière dans l'espace de Minkowski.

Écrivons d'abord l'action de Nambu-Goto (3.2.3) pour une "surface" U de dimension d plongée dans un espace de Minkowski de dimension $d+1$ en utilisant comme paramétrisation pour cette surface

$$\varphi^{-1}(\phi_1, \dots, \phi_d) = (X^1(\phi_1, \dots, \phi_d), \dots, X^{d+1}(\phi_1, \dots, \phi_d))$$

$$S = \int_U \sqrt{\det \left(\eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \phi_\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \phi_\beta} \right)} d\phi_1 \dots d\phi_d, \quad (3.3.1)$$

où $\mu, \nu = 1, \dots, d+1$, $\alpha, \beta = 1, \dots, d$.

Nous allons maintenant écrire l'action (3.3.1) dans de nouvelles paramétrisations que nous allons construire de la façon suivante:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbb{R} & & M \\
 & & \uparrow & \nearrow \psi_2 & \downarrow pr_d \\
 & S_{N.G.} & & & \\
 & & (U \subset M) & \xrightarrow{\varphi_2} & \mathbb{R}^d \\
 & \swarrow \psi_1 & \downarrow \varphi_1 & & \\
 M & \xrightarrow{pr_d} & \mathbb{R}^d & &
 \end{array}$$

FIG. 3.3.1 –. *Différentes paramétrisations de la membrane*

– M : espace de Minkowski de dimension $d+1$;

- U : variété (corde ou membrane) de dimension d plongée dans l'espace de Minkowski;
- $\psi_1(X^1, \dots, X^{d+1}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(X^1 + X^{d+1}), X^2, \dots, X^d, \frac{1}{\sqrt{2}}(X^1 - X^{d+1}) \right) \equiv (t, \vec{x}, \theta)$: changement de coordonnées de l'espace ambiant vers les coordonnées du cône de lumière;
- $\varphi_1 = pr_d \circ \psi_1 = (\phi_1, \dots, \phi_d) \equiv (t, \vec{x})$: première paramétrisation de la variété par projection sur les d premières coordonnées du cône de lumière;
- $\psi_2(X^1, \dots, X^{d+1}) = \left(\frac{X^1}{ac}, X^2, \dots, X^d, X^{d+1} \right) \equiv \left(\frac{t}{a}, \vec{x}, \frac{\theta}{c} \right)$: deuxième changement de paramétrisation de l'espace ambiant, où a est un paramètre réel;
- $\varphi_2 = pr_d \circ \psi_2 = \left(\frac{X^1}{ac}, \dots, X^d \right) = (\phi_1, \dots, \phi_d) \equiv \left(\frac{t}{a}, \vec{x} \right)$: deuxième paramétrisation de la variété par projection sur les d premières coordonnées de l'espace ambiant (de Minkowski);
- $S_{N.G.}$: Action de Nambu-Goto.

Nous allons maintenant montrer que l'action de Nambu-Goto dans la première paramétrisation $S_{N.G.} \circ \varphi_1^{-1}$ est équivalente à l'action du gaz de Chaplygin (3.1.11).

Calculons d'abord $\varphi_1^{-1} = \psi_1^{-1} \circ pr_d^{-1}$. On a

$$\psi_1^{-1}(t, \vec{x}, \theta) = \left(\frac{t + \theta}{\sqrt{2}}, \vec{x}, \frac{t - \theta}{\sqrt{2}} \right),$$

ce qui implique que:

$$\varphi_1^{-1}(t, \vec{x}) = \left(\frac{t + \theta(t, \vec{x})}{\sqrt{2}}, \vec{x}, \frac{t - \theta(t, \vec{x})}{\sqrt{2}} \right) = (X^1, X^2, \dots, X^d, X^{d+1}).$$

Posons $G_{\alpha\beta} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \phi_\alpha} \frac{\partial X_\mu}{\partial \phi_\beta}$ et calculons G_{11} . On a

$$\begin{aligned}
G_{11} &= \frac{\partial X^\mu}{\partial t} \frac{\partial X_\mu}{\partial t}, \\
&= \left(\frac{\partial X^1}{\partial t} \right)^2 - \left[\sum_{i=1}^d \frac{\partial X^i}{\partial t} \frac{\partial X^i}{\partial t} + \left(\frac{\partial X^{d+1}}{\partial t} \right)^2 \right], \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_t \theta \right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_t \theta \right)^2, \\
&= 2\partial_t \theta.
\end{aligned}$$

Calculons maintenant G_{1i} , pour $i = 1, \dots, d$,

$$\begin{aligned}
G_{1i} &= \frac{\partial X^\mu}{\partial t} \frac{\partial X_\mu}{\partial x^i}, \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_t \theta \right) \frac{\partial \theta}{\partial x^i} - \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \frac{\partial \vec{x}}{\partial x^i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_t \theta \right) \frac{\partial \theta}{\partial x^i}, \\
&= \frac{\partial \theta}{\partial x^i}.
\end{aligned}$$

Par symétrie de la métrique, nous avons $G_{1i} = G_{i1}$. Par ailleurs G_{ij} est simplement donné par

$$G_{ij} = \frac{\partial X^\mu}{\partial x^i} \frac{\partial X_\mu}{\partial x^j} = \delta_{ij}.$$

Nous sommes maintenant en mesure de calculer le déterminant de $G_{\alpha\beta}$ que nous allons noter g . On peut aisément montrer que

$$g = \det(G_{ij}) \left[G_{11} + \sum_{i,j=1}^d G_{ij} G_{1i} G_{j1} \right],$$

et donc que

$$\begin{aligned} g &= 2\partial_t\theta + \sum_{i,j=1}^d G_{1i}\delta_{ij}G_{j1}, \\ &= 2\partial_t\theta + (\nabla\theta)^2. \end{aligned}$$

Si nous identifions le paramètre t au “temps physique” et les paramètres \vec{x} à la position, $g = 2\dot{\theta} + (\nabla\theta)^2$. L’action de Nambu-Goto devient donc

$$\begin{aligned} S &= \int_U \sqrt{g} \, d\phi_1 \dots d\phi_d, \\ &= \int_U \sqrt{2\dot{\theta} + (\nabla\theta)^2} \, d^3x dt, \\ &= \sqrt{2} \int_U \sqrt{\dot{\theta} + \frac{1}{2}(\nabla\theta)^2} \, d^3x dt. \end{aligned}$$

L’action de Chaplygin (3.1.11) correspond donc à l’action de Nambu-Goto exprimée dans la paramétrisation φ_1 , à une constante multiplicative près qui n’affecte pas les équations de mouvement associées!

3.4. L’ACTION DE BORN-INFELD

L’action de Chaplygin est une théorie classique non-relativiste. Nous allons maintenant construire une action relativiste ayant comme limite classique lorsque $c \rightarrow \infty$ l’action de Chaplygin. Nous allons procéder de façon similaire à la démarche proposée à la section 3.1.

L’énergie cinétique d’un flux de particules relativistes est:

$$T = \int d^3r (-c^2 \rho \sqrt{1 - \beta^2}).$$

Proposons le lagrangien suivant pour un flux de particules libres sans interaction où on impose la conservation du flux de masse:

$$L = \int d^3r \left(-c^2 \rho \sqrt{1 - \beta^2} + \theta (\dot{\rho} + \nabla \cdot (\rho \vec{v})) \right). \quad (3.4.1)$$

Ce dernier lagrangien peut être écrit sous une forme rendant explicite son caractère relativiste. En fonction du quadri-vecteur courant $j^\mu = (c\rho, \rho\vec{v})$, on peut exprimer le lagrangien (3.4.1) de la façon suivante:

$$L = \int d^3r \left(-j^\mu \partial_\mu \theta - c \sqrt{j^\mu j_\mu} \right) \quad (3.4.2)$$

Nous utilisons ici le quadri-vecteur gradient $\partial_\mu = (\frac{1}{c} \frac{d}{dt}, \nabla)$. Comme dans le cas du gaz de Chaplygin, il est possible d'écrire le lagrangien de Born-Infeld seulement en fonction du potentiel de vitesse θ . Pour ce faire, calculons l'équation d'Euler-Lagrange relativement à j^μ :

$$\sum_{i=0}^3 \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i j^\mu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial j^\mu} = 0.$$

On obtient alors:

$$\partial_\mu \theta - \frac{c j_\mu}{\sqrt{j^\mu j_\mu}} = 0,$$

$$\partial_\mu \theta = \frac{\gamma}{\rho} j_\mu,$$

ou encore,

$$\partial_\mu \theta = \frac{\gamma}{\rho} (c\rho, \rho\vec{v}) = \left(\frac{1}{c} \dot{\theta}, \nabla \theta \right).$$

Par conséquent

$$\nabla \theta = \gamma \vec{v} = \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \vec{v} = \frac{\nabla \theta}{\sqrt{1 + \frac{(\nabla \theta)^2}{c^2}}}.$$

Remplaçons maintenant cette dernière expression pour \vec{v} dans le lagrangien (3.4.1).

On obtient alors:

$$L = \int d^3r \left(\theta \dot{\rho} - \rho c^2 \sqrt{1 + \frac{(\nabla\theta)^2}{c^2}} \right). \quad (3.4.3)$$

Ce dernier lagrangien décrit donc la dynamique d'un flux de particules libres relativistes. Nous allons maintenant ajouter un terme d'interaction à ce dernier lagrangien tout en préservant son invariance relativiste et de façon à ce qu'il tende vers l'action du gaz de Chaplygin dans la limite classique $c \rightarrow \infty$:

$$L = \int d^3r \left(\theta \dot{\rho} - \sqrt{\rho^2 c^2 + a^2} \sqrt{c^2 + (\nabla\theta)^2} \right), \quad (3.4.4)$$

le paramètre a étant propre à l'interaction introduite.

Il nous est dès lors possible d'éliminer ρ dans la dernière expression. Pour ce faire, calculons d'abord l'équation d'Euler-Lagrange selon ρ pour ce dernier lagrangien:

$$\sum_{i=0}^3 \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \rho)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} = 0.$$

On obtient alors

$$\rho^2 = \frac{a^2 \dot{\theta}^2}{c^4 (c^2 + (\nabla\theta)^2) - \dot{\theta}^2 c^2}. \quad (3.4.5)$$

En remplaçant cette expression dans (3.4.3), on obtient:

$$L = \int d^3r a \sqrt{c^2 - (\partial_\mu \theta)^2}, \quad (3.4.6)$$

qui est le lagrangien associé à l'action de Born-Infeld.

Montrons maintenant que cette action se réduit à celle de Chaplygin dans la limite classique. Cette limite ne s'obtient pas directement, il faut d'abord faire une translation du champ θ dans le lagrangien (3.4.6), que nous allons noter ici θ_R :

$$\theta_R = \theta + c^2 t. \quad (3.4.7)$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} L &= \int d^3r a \sqrt{c^2 - (\partial_\mu \theta_R)^2}, \\ &= \int d^3r a \sqrt{\frac{\dot{\theta}^2}{c^2} + 2 \dot{\theta} + (\nabla \theta)^2}. \end{aligned}$$

Lorsqu'on prend la limite $c \rightarrow \infty$, on obtient

$$\begin{aligned} L &= \int d^3r \sqrt{2 \dot{\theta} + (\nabla \theta)^2}, \\ &= \int d^3r \sqrt{2} \sqrt{\dot{\theta} + \frac{1}{2} (\nabla \theta)^2}, \end{aligned}$$

qui correspond bien l'action de Chaplygin à une constante multiplicative près, ce qui ne modifie pas les équations de mouvement associées.

3.5. DÉRIVATION DU MODÈLE DE BORN-INFELD À PARTIR DE L'ACTION DE NAMBU-GOTO

Nous allons maintenant montrer que l'action de Born-Infeld est, de la même façon que l'action de Chaplygin, une représentation de l'action de Nambu-Goto dans une paramétrisation particulière. Plus précisément, si l'on fait référence à la figure 3.3.1, l'action de Born-Infeld est $S_{N.G.} \circ \varphi_2^{-1}$. Rappelons que l'on a

$$\varphi_2(X^1, \dots, X^{d+1}) = (\phi_1, \dots, \phi_d) = (X^1/ac, \dots, X^d).$$

Par conséquent, on peut écrire

$$\varphi_2^{-1}(\phi_1, \dots, \phi_d) = (X^1, \dots, X^{d+1}) = (ac\phi_1, \dots, \phi_d, X^{d+1}(\phi_1, \dots, \phi_d)),$$

avec $\phi_1 = \frac{t}{a}$, $(\phi_2, \dots, \phi_d) = \vec{x}$ et $X^{d+1} = \frac{\theta}{c}$.

Calculons maintenant $g = \det(G_{\alpha\beta})$ dans cette paramétrisation. Nous allons restreindre ici nos calculs à l'action de Nambu-Goto pour une membrane de dimension 2.

$$\begin{aligned} G_{11} &= \frac{\partial X^\mu}{\partial \phi_1} \frac{\partial X_\mu}{\partial \phi_1} = \frac{\partial X^1}{\partial \phi_1} \frac{\partial X^1}{\partial \phi_1} - \frac{\partial X^2}{\partial \phi_1} \frac{\partial X^2}{\partial \phi_1} - \frac{\partial X^3}{\partial \phi_1} \frac{\partial X^3}{\partial \phi_1}, \\ &= (ac)^2 - \frac{a^2}{c^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{12} &= \frac{\partial X^1}{\partial \phi_1} \frac{\partial X^1}{\partial \phi_2} - \frac{\partial X^2}{\partial \phi_1} \frac{\partial X^2}{\partial \phi_2} - \frac{\partial X^3}{\partial \phi_1} \frac{\partial X^3}{\partial \phi_2}, \\ &= \frac{a}{c^2} \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial \theta}{\partial x}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{22} &= -1 - \left(\frac{\partial X^3}{\partial \phi_2} \right)^2, \\ &= -1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2; \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
 g &= \det(G_{\alpha\beta}) = G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21}, \\
 &= -a^2c^2 - a^2 \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right)^2 + \frac{a^2}{c^2} \left(\frac{\partial\theta}{\partial t} \right)^2, \\
 &= a^2 \left(-c^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right)^2 \right), \\
 &= -a^2(c^2 - (\partial_\mu\theta)^2).
 \end{aligned}$$

L'action de Nambu-Goto dans cette paramétrisation est donc

$$\begin{aligned}
 S &= \int \sqrt{g} \, d\phi_0 d\phi_1, \\
 &= -a^2 \int \sqrt{c^2 - (\partial_\mu\theta)^2} \, dxdt.
 \end{aligned}$$

C'est l'action de Born-Infeld à une constante près, ce qui ne modifie pas les équations de mouvement associées.

3.6. TRANSFORMATION DES SOLUTIONS DU GAZ DE CHAPLYGIN VERS DES SOLUTIONS DU MODÈLE DE BORN-INFELD

Il est clair que les transformations que nous avons étudiées entre l'action de Chaplygin et celle de Born-Infeld nous donnent directement des transformations exactes entre les solutions des deux modèles. Nous allons donc maintenant illustrer ce fait en transformant une solution du gaz de Chaplygin vers une solution de son extension relativiste.

Prenons la solution suivante pour le gaz de Chaplygin [Jac1]:

$$\theta(\vec{x}, t) = \frac{x^2}{2(d-1)t}, \quad (3.6.1)$$

où $x \equiv |\vec{x}|$ et d est la dimension de l'espace physique. Par souci de simplicité, posons $\beta = 2(d-1)$. Nous noterons $\theta'(\vec{x}, t')$ une solution de l'action de Born-Infeld.

Pour obtenir $\theta'(\vec{x}, t')$, il nous suffit d'appliquer le changement de coordonnées suivant (voir figure 3.3.1):

$$\begin{aligned} \psi_2 \circ \psi_1^{-1}(t, \vec{x}, \theta) &= \left(\frac{t'}{a}, \vec{x}, \frac{\theta'}{c} \right), \\ &= \left(\frac{1}{ac\sqrt{2}}(\theta + t), \vec{x}, \frac{1}{\sqrt{2}}(t - \theta) \right). \end{aligned}$$

Nous avons donc:

$$t' = \frac{1}{c\sqrt{2}}(\theta + t), \quad (3.6.2)$$

$$\theta' = \frac{c}{\sqrt{2}}(t - \theta). \quad (3.6.3)$$

En remplaçant la solution (3.6.1) dans (3.6.2), nous obtenons:

$$t' = \frac{1}{c\sqrt{2}} \left(\frac{x^2}{\beta t} + t \right).$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{2} \left[b + \sqrt{b^2 - 4\frac{x^2}{\beta}} \right], \\ &= \frac{1}{2}(b + \Delta), \end{aligned}$$

où $b = c\sqrt{2}t'$.

Nous obtenons finalement une solution du modèle de Born-Infeld en remplaçant cette dernière expression dans (3.6.3):

$$\theta'(\vec{x}, t') = \frac{c}{2\sqrt{2}} \left[(b + \Delta) - \frac{4x^2}{\beta(b + \Delta)} \right]. \quad (3.6.4)$$

3.7. RÉCAPITULATION

Nous avons donc vu dans ce chapitre que l'action de Chaplygin et de Born-Infeld possèdent la même nature géométrique. Dans les deux cas, les actions représentent l'hypervolume d'une membrane plongée dans un espace de Minkowski. C'est le choix de la paramétrisation de cette membrane qui vient fixer l'interprétation physique des variables et, par conséquent, le modèle physique. Ce qui est surprenant, c'est que les deux modèles que nous avons obtenus sont aussi des cas limites l'un de l'autre. Le gaz de Chalpygin étant la limite classique de l'action de Born-Infeld. Le fait d'avoir identifié un ancêtre commun à ces deux modèles nous permet de croire qu'il est possible d'obtenir des transformations exactes entre les solutions de chacun des modèles.

CONCLUSION

L'histoire de la physique moderne est parsemée d'exemples montrant le rôle unificateur qu'a joué l'étude des fondements mathématiques et géométriques des théories physiques. L'exemple le plus spectaculaire est sans contredit l'avènement des théories de jauge qui nous ont permis de comprendre trois des quatre interactions fondamentales par le biais d'un seul mécanisme. À une échelle beaucoup plus modeste, nous pouvons dire que chacun des trois sujets que nous avons traités dans ce travail illustre bien le pouvoir unificateur de l'étude des fondements géométriques des théories physiques.

Dans le premier chapitre, nous avons montré que l'équation de Schrödinger non-linéaire, l'équation d'un filament de vorticité dans un fluide incompressible, l'équation de chaîne de Heisenberg et l'équation d'Euler pour un superfluide unidimensionnel peuvent tous être déduits d'un seul et unique système hamiltonien. De plus, l'hamiltonien de ce système est d'une simplicité surprenante: c'est la longueur d'un lacet. Cette unification ne tisse pas de liens "physiques" entre ces modèles mais nous permet mathématiquement d'affirmer l'existence de transformations exactes entre les solutions de chacun des modèles les rendant ainsi simultanément résolubles.

Dans le second chapitre, nous avons d'abord montré que l'équation d'Euler pour un fluide incompressible est une équation hamiltonienne découlant directement de l'étude du groupe des difféomorphismes de \mathbb{R}^3 préservant les volumes. Nous avons, par la suite, montré qu'il existe une correspondance entre l'espace de phase de ce système (les orbites coadjointes de $SDiff(\mathbb{R}^3)$ muni de la structure symplectique de Kirillov-Kostant et l'espace de phase du système hamiltonien

étudié au premier chapitre (l'espace des lacets de \mathbb{R}^3 muni de la structure symplectique de Marsden-Weinstein).

Finalement, nous avons montré dans le dernier chapitre, qu'il est possible d'obtenir l'action non-relativiste de Chaplygin et sa version relativiste, l'action de Born-Infeld, par des reparamétrisations de l'action de Nambu-Goto. Cette constatation nous a donné directement des transformations exactes entre les solutions des deux modèles. Le lien existant avec l'action de Nambu-Goto nous a aussi permis d'interpréter géométriquement les solutions des deux modèles comme étant des surfaces minimales plongées dans un espace de Minkowski. Nous avons alors interprété les transformations nous permettant de passer d'une solution à l'autre comme étant des reparamétrisations de ces surfaces.

Annexe A

QUELQUES NOTIONS DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Cette annexe a pour but de donner le vocabulaire de base de la géométrie différentielle et symplectique utilisée dans ce mémoire. Nous référons le lecteur voulant approfondir ses notions aux ouvrages suivants: *Geometry, Topology and Physics* de Nakahara [Nak], *The Geometry of Physics An Introduction* de Theodore Frankel [Fra] pour la géométrie différentielle et les livres *Foundation of Mechanics* de Ralph Abraham et Jerrold E. Marsden [AbMa] et *Mathematical Methods of Classical Mechanics* de V.I. Arnold [Arn] pour la géométrie symplectique.

A.1. MOTIVATION

Les développements de la mécanique classique furent très souvent accompagnés d'avancements mathématiques en géométrie. La géométrie différentielle et, plus particulièrement, la géométrie symplectique s'est imposée comme étant le cadre théorique naturel dans lequel nous devons étudier les fondements de la mécanique classique.

Nous appellerons ici l'ensemble des états d'un système physique l'espace des configurations E . L'état d'un système est associé à un point de cet espace spécifié par n -variables indépendantes décrivant la configuration spatiale du système et n -variables correspondant à leur taux de variation dans le temps¹. Autrement dit, $q \in E$; $q = \{x^1(t), \dots, x^n(t); \dot{x}^1(t), \dots, \dot{x}^n(t)\}$, où $\dot{x} = dx(t)/dt$.

1. Nous n'utilisons pas ici la nomenclature la plus répandue selon laquelle l'espace des configurations est seulement l'ensemble des configurations spatiale de l'objet.

Par exemple, l'état d'un pendule simple est spécifié par un point d'un cercle $\theta \in S^1$ (que l'on peut fixer de rayon un) et une vitesse angulaire $\dot{\theta}$. L'espace de configuration peut donc être associé au cylindre infini $E = S^1 \times \mathbb{R}$.

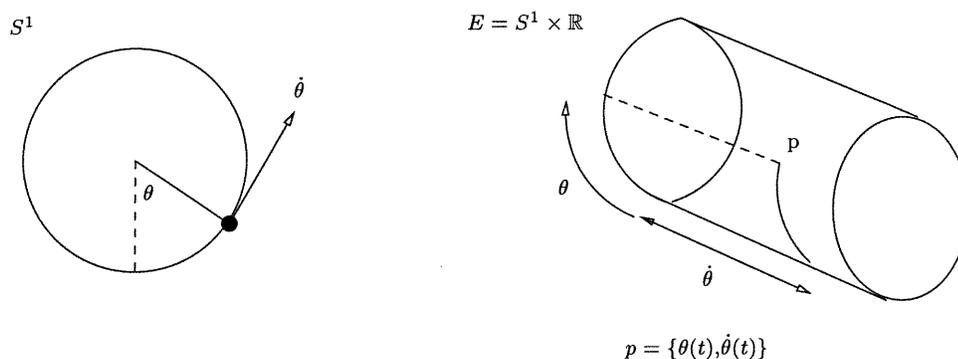


FIG. A.1.1 -. Espace de configuration du pendule

Rappelons qu'un espace E muni d'un produit scalaire est dit Euclidien s'il est globalement isomorphe à \mathbb{R}^n . En d'autres termes, il existe une bijection continue entre E et \mathbb{R}^n transportant la structure d'espace vectoriel de \mathbb{R}^n , c'est-à-dire

$$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow E; \quad \varphi(av + b\omega) = a\varphi(v) + b\varphi(\omega) \quad v, \omega \in \mathbb{R}^n, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Si une telle application n'existe pas globalement entre E et \mathbb{R}^n , mais qu'il est possible de trouver pour tout point $p_i \in E$, un ouvert $U_i \subset E$ contenant p_i et un homéomorphisme (bijection continue et inversible) $\varphi_i : (U_i \subset E) \rightarrow (V_i \subset \mathbb{R}^n)$ (où V_i est un ouvert de \mathbb{R}^n), nous disons alors que E possède une structure de *variété*. En d'autres termes une variété est un espace qui est localement homéomorphe à \mathbb{R}^n mais pas nécessairement globalement.

Dans notre exemple, il n'existe pas d'isomorphisme entre $S^1 \times \mathbb{R}$ et \mathbb{R}^2 . Par contre, le cylindre est localement homéomorphe à \mathbb{R}^2 .

En physique, les espaces de configuration ne sont donc pas des espaces euclidiens mais plutôt des *variétés différentielles* et plus particulièrement, des *variétés symplectiques*.

A.2. VARIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES

Nous sommes maintenant prêts à donner une définition plus rigoureuse de variété différentielle.

Une variété différentielle est tout d'abord un espace *topologique séparé*.

A.2.1. Espace topologique

Soit X un ensemble et $\tau = \{U_i\}$ une collection de sous-ensembles de X , la paire (X, τ) est un espace topologique si τ satisfait les énoncés suivants:

- i) $\emptyset, X \in \tau$.
- ii) L'union d'un nombre fini ou infini d'éléments de τ redonne un élément de τ .
- iii) L'intersection d'un nombre fini d'éléments de τ redonne un élément de τ .

A.2.2. Espace topologique séparé (ou d'Hausdorff)

C'est un espace topologique (X, τ) tel que pour toute paire d'éléments $x, x' \in X$, il existe toujours des voisinages de chaque point U_x et $U_{x'}$ tel que $U_x \cap U_{x'} = \emptyset$.

A.2.3. Variété différentielle

Une variété différentielle M de dimension n est:

- i) Un espace topologique d'Hausdorff.
- ii) M est équipé d'une famille de sous-ensembles $\{U_i\}$ tel que $\bigcup_i U_i = M$.
Chacun de ces sous-ensembles est homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^n , c'est-à-dire qu'il existe une bijection continue φ_i entre chaque ouvert U_i et un ouvert U'_i de \mathbb{R}^n . Le couple (φ_i, U_i) se nomme une carte de M et l'ensemble des cartes $\{(\varphi_i, U_i)\}$ couvrant M se nomme un atlas de M .
- iii) Si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, nous imposons que l'application $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \equiv \psi_{ij}$ soit un difféomorphisme (une bijection C^∞ inversible). C'est cette restriction qui rend la variété différentiable. On dit alors que nous avons une variété différentielle.

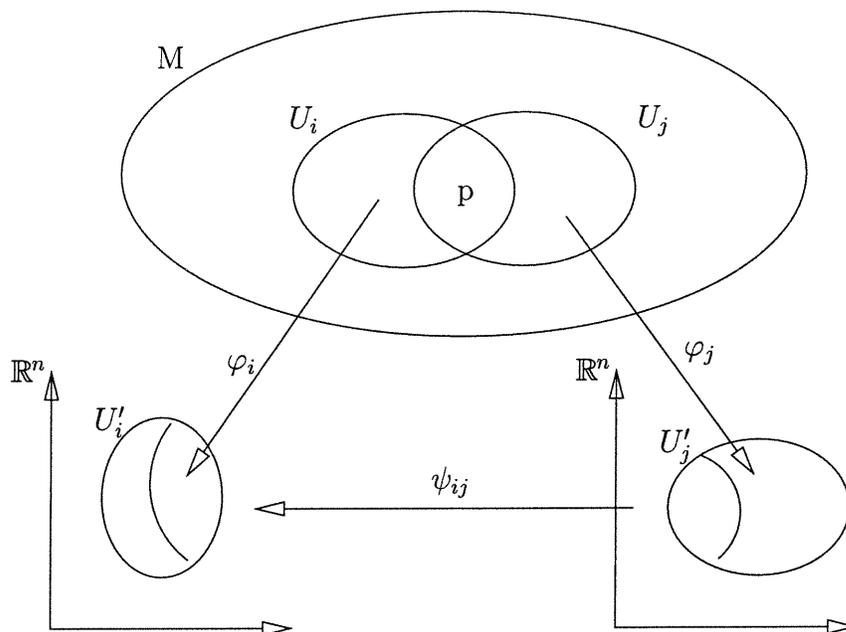


FIG. A.2.1 – Variété différentielle

Les applications $\varphi_i(p) = \{x^1(p), \dots, x^n(p)\}$, $p \in M$, donnent donc des coordonnées au point p . ψ_{ij} est un changement de coordonnées pour les points dans $U_i \cap U_j$. Par exemple $p = \{x^1_{(2)}, \dots, x^n_{(2)}\} \xrightarrow{\psi_{12}} \{x^1_{(1)}, \dots, x^n_{(1)}\}$.

A.3. APPLICATIONS ENTRE VARIÉTÉS

L'analyse standard est grossièrement l'étude des fonctions entre espaces euclidiens. Nous allons dès lors définir les notions de continuité et de différentiabilité d'applications entre variétés en nous basant sur nos connaissances de l'analyse standard.

Soit $F : M \rightarrow N$ une application entre deux variétés de dimension m et n respectivement, celle-ci envoie donc un point $p \in M$ vers un ou plusieurs points $F(p) \in N$.

Prenons une carte (U, φ) sur M avec $p \in U$ et (V, ψ) une autre carte sur N . F induit une fonction f dans les cartes de la forme:

$$f = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}, \quad f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$f(x_1, \dots, x_m) = (y_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_n(x_1, \dots, x_m)).$$

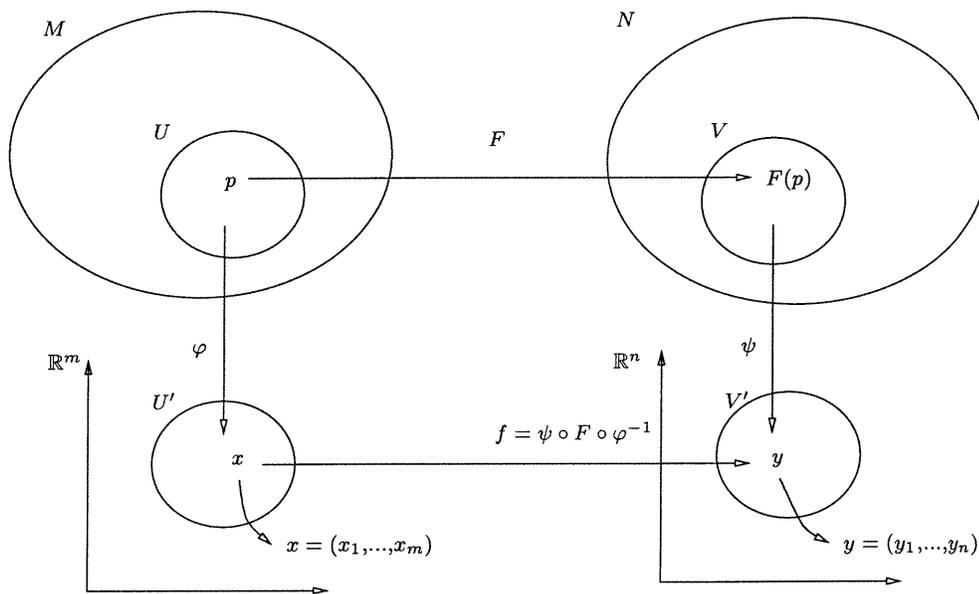


FIG. A.3.1 — Application entre variétés

Nous allons utiliser fréquemment la notation abrégée $x \equiv (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $y \equiv (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ est alors $f(x) = y$. F est donc différentiable ou continue si f l'est dans les cartes selon l'analyse standard dans \mathbb{R}^n et ce, peu importe les cartes utilisées sur M et N .

A.3.1. Difféomorphisme

Une application $F : M \rightarrow N$ entre deux variétés est un difféomorphisme si les applications induites dans les cartes f et f^{-1} sont C^∞ et bijectives.

A.3.2. Homéomorphisme

Une application $F : M \rightarrow N$ entre deux variétés est un homéomorphisme si les applications induites dans les cartes f et f^{-1} sont continues et bijectives.

A.4. VECTEUR TANGENT ET ESPACE TANGENT À UNE VARIÉTÉ

Le théorème de Whitney nous dit que toute variété de dimension n peut être réalisée par un sous-ensemble de \mathbb{R}^{2n} . Par contre, toute variété de dimension n peut être complètement déterminée sans l'interpréter comme étant un sous-ensemble d'un espace euclidien de dimension plus grande que n . Lorsqu'on travaille avec des variétés sans les plonger dans un espace de plus grande dimension, on dit que l'on travaille dans un langage *intrinsèque*. Nous allons donc définir ici la notion de vecteur et d'espace tangent à une variété de façon intrinsèque.

Soit M une variété différentielle de dimension n , $p \in M$ et Γ_p l'ensemble des chemins $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ qui applique le point 0 sur p . On définit sur Γ_p la relation d'équivalence suivante: soit $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_p$, contenue dans la carte (φ, U) , γ_1 est équivalent à γ_2 si

$$\left. \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_2) \right|_{t=0}.$$

On note alors $\gamma_1 \sim \gamma_2$.

L'ensemble $\Gamma_p / \sim \equiv T_p M$ est, par définition, l'espace tangent à M au point p . Un élément de cet espace est un vecteur tangent à M au point p . $T_p M$ est un espace vectoriel.

A.4.1. Vecteur tangent comme opérateur différentiel

Soit une courbe $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ et une fonction $F : M \rightarrow \mathbb{R}$. La dérivée directionnelle de F le long de la courbe γ au point p s'écrit

$$\begin{aligned} D_\gamma F &\equiv \left. \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) \right|_{t=0}, \quad \text{avec } \gamma(0) = p, \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial x^i} (F \circ \varphi^{-1}) \frac{dx^i}{dt}(\gamma(t)) \right|_{t=0}, \\ &\equiv \left. \frac{\partial x^i}{\partial t}(\gamma(t)) \right|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^i} f, \\ &\equiv X^i \frac{\partial}{\partial x^i} f \equiv D_X f \equiv X(f). \end{aligned}$$

La dérivée de l'application F le long de la courbe γ est donc exprimée dans les cartes comme la dérivée de la fonction f le long du vecteur $\vec{X} = (X^1, \dots, X^n)$ avec $X^i \equiv dx^i(\gamma(t))/dt|_{t=0}$.

On identifie donc les X^i comme étant les coordonnées dans la carte (U, φ) du vecteur tangent associée à la classe d'équivalence $[\gamma]$ au point p . Les $\partial/\partial x^i \equiv \partial_i$ seront interprétés comme les vecteurs de base de l'espace tangent $T_p M$ dans la carte (φ, u) .

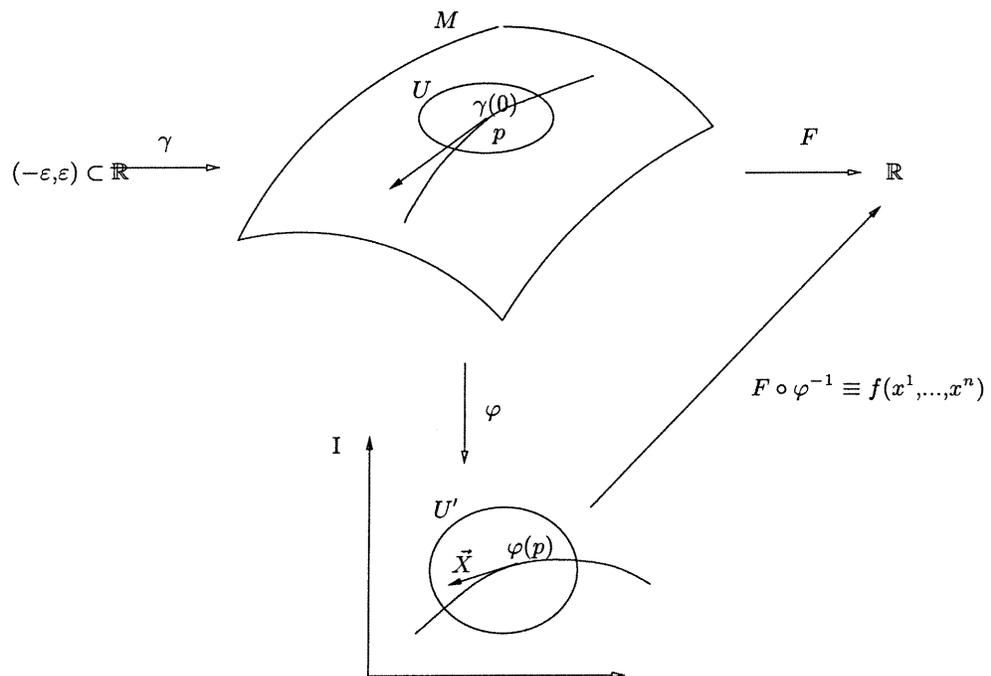


FIG. A.4.1 -. Espace tangent à une variété

A.5. ESPACE COTANGENT $T_p^* M$

Puisque $T_p M$ est un espace vectoriel, il est possible de donner le dual de ce dernier que l'on nomme l'espace cotangent $T_p^* M$.

Rappelons que le dual d'un espace vectoriel est l'ensemble des fonctionnelles linéaires sur cet espace, c'est-à-dire l'ensemble des transformations linéaires de cet espace vers \mathbb{R} .

T_p^*M forme aussi un espace vectoriel et les éléments de T_p^*M se nomment covecteurs ou 1-formes.

Exprimons maintenant un covecteur en coordonnées. Nous prendrons les $\{dx^i, \dots, dx^n\}$ comme base canonique de T_p^*M , ceux-ci étant définis de la façon suivante: soit $X \in T_pM$, $dx^i(X) = x^i$. On peut facilement montrer que tous les éléments de T_p^*M peuvent alors s'écrire $\omega = \omega_i dx^i$.

A.6. FIBRÉ TANGENT ET COTANGENT D'UNE VARIÉTÉ

Le fibré tangent d'une variété M est défini comme étant l'union disjointe de tous les espaces tangents à cette dernière:

$$TM \equiv \bigcup_{p \in M} T_pM.$$

TM forme aussi une variété différentielle de dimension $2n$ (où n est la dimension de M).

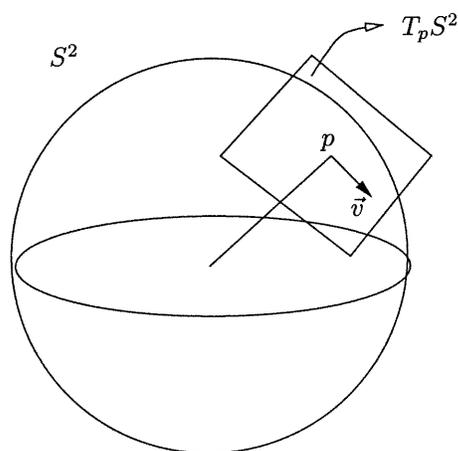
Un point de TM est donné par (p, X) où $p \in M$ et $X \in T_pM$. De la même façon, le fibré cotangent est défini comme $T^*M \equiv \bigcup_{p \in M} T_p^*M$. En physique, les espaces de configuration sont des fibrés tangents.

Dans notre exemple du pendule, le cylindre est le fibré tangent du cercle S^1 . T_pM pour le cercle est une droite tangente au point p . Par conséquent, $\bigcup_{p \in S^1} T_pS^1 = \mathbb{R} \times S^1$.

En général, l'espace tangent d'une variété n'est pas décomposable globalement en un produit cartésien $TM = \mathbb{R}^m \times M$. Si cette décomposition est possible on dit que le fibré est trivial.

Le cercle possède un fibré non-trivial: le ruban de Möbius. Il est impossible d'écrire le ruban de Möbius comme le produit cartésien de S^1 avec \mathbb{R} globalement.

Un autre exemple de fibré tangent non-trivial est l'espace de configuration du pendule sphérique. On peut effectivement montrer que TS^2 n'est pas globalement homéomorphe à $S^2 \times \mathbb{R}^2$. Par contre TS^2 est localement homéomorphe à $S^2 \times \mathbb{R}^2$.



$$E = TS^2 = \bigcup_{p \in S^2} T_p S^2 \neq S^2 \times \mathbb{R}^2$$

FIG. A.6.1 –. Espace de configuration du pendule sphérique

A.6.1. Projection et section sur un fibré tangent

La projection dans un fibré tangent est une application C^∞ $\pi : TM \rightarrow M$. Elle agit sur un point $u \in TM$, où $u = (p, V)$, $p \in M$, $V \in T_p M$ comme $\pi(u) = p$.

Une section dans un fibré tangent est une application bijective $S : M \rightarrow TM$ tel que $\pi \circ S = id$. Une section sur TM définit globalement un champ de vecteur tangent sur M .

En coordonnées, ce champ de vecteur s'exprime comme $X = X^i(p) \partial / \partial x^i$. On note $\mathcal{X}(M)$, l'ensemble des champs de vecteurs sur M .

A.7. ALGÈBRE TENSORIELLE SUR LES ESPACES TANGENTS

Une r -forme linéaire ou un tenseur covariant de degré r est une transformation linéaire sur ses r arguments que l'on note:

$$T_p^0 : \overbrace{T_p M \times \cdots \times T_p M}^{r \text{ fois}} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$T_r^0(v_1, \dots, av_i + a'v_i^1, \dots, v_r) = aT_r^0(v_1, \dots, v_i, \dots, v_r) + a'T_r^0(v_1, \dots, v_i^1, \dots, v_r)$$

où $v_1, \dots, v_r \in T_p M$. S'il n'y a pas de confusion possible, on laisse tomber les indices et $T_r^0 = T$.

On note $L^r(T_p M, \mathbb{R})$ l'ensemble des tenseurs covariants de degré r sur l'espace tangent de M au point p . C'est un espace vectoriel.

A.7.1. Produit tensoriel

Il est possible de construire des tenseurs covariants de degré r à partir de r covecteurs avec le produit tensoriel.

Par exemple, nous pouvons construire un tenseur covariant de degré 2 de la façon suivante: soit α et $\beta \in T_p^* M$, $v_1, v_2 \in T_p M$

$$\alpha \otimes \beta(v_1, v_2) \equiv \alpha(v_1)\beta(v_2), \quad \alpha \otimes \beta \in L^2(T_p M, \mathbb{R}).$$

Si $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ est une base de $T_p^* M$, les $\{dx^i \otimes dx^j, i, j = 1, \dots, n\}$ forment une base de $L^2(T_p M, \mathbb{R})$. Par exemple, pour $T \in L^2(T_p M, \mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} T(v_1, v_2) &= T(v_1^i \partial_i, v_2^j \partial_j) = v_1^i v_2^j T(\partial_i, \partial_j) \\ &\equiv v_1^i v_2^j T_{ij} \end{aligned}$$

et les $T_{ij} \equiv T(\partial_i, \partial_j)$ sont, par définition, les composantes du tenseur T . Puisque $v_1^i = dx^i(v_1)$ et $v_2^j = dx^j(v_2)$, nous avons

$$\begin{aligned} T(v_1, v_2) &= T_{ij} dx^i(v_1) dx^j(v_2), \\ &= T_{ij} dx^i \otimes dx^j(v_1, v_2). \end{aligned}$$

De façon générale les $\underbrace{\{dx^{\mu_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\mu_r}, \mu_i = 1, \dots, n\}}_{r \text{ fois}}$, avec $\dim(M) = n$ forment une base de $L^r(T_p M, \mathbb{R})$. Cet espace est un espace vectoriel de dimension n^r .

A.7.2. Tenseurs contravariants

Un tenseur contravariant de degré r est une transformation linéaire sur ses r arguments que l'on note:

$$T_0^r : T_p^* M \times \cdots \times T_p^* M \rightarrow \mathbb{R}.$$

Les $\{\partial_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{\mu_r}, \mu_1, \dots, \mu_r = 1, \dots, n\}$ forment une base de l'espace vectoriel des tenseurs contravariants $L_r(T_p^* M, \mathbb{R})$. Un tenseur contravariant en coordonnées s'écrit donc, pour $v_i \in T^* M$,

$$T_0^r(v_1, \dots, v_r) = T^{\mu_1 \dots \mu_r} \partial_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{\mu_r}(v_1, \dots, v_r), \text{ où } \mu_i = 1 \text{ à } n.$$

A.7.3. Tenseurs mixtes

Un tenseur mixte de degré $\binom{r}{q}$ est une transformation linéaire sur ses $(r + q)$ arguments que l'on note:

$$T_q^r : \underbrace{T_p^* M \times \cdots \times T_p^* M}_{r \text{ fois}} \times \underbrace{T_p M \times \cdots \times T_p M}_{q \text{ fois}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

En coordonnées, nous avons:

$$T_q^r = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_r} \partial_{i_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_q}.$$

A.7.4. Champs de tenseurs

Un champ de tenseurs est une application $T_q^r(p) : M \rightarrow L_q^r(T_p M, \mathbb{R})$ qui associe à chaque point d'une variété un tenseur de degré $\binom{r}{q}$.

A.8. ALGÈBRE EXTÉRIEURE ET FORME DIFFÉRENTIELLE

Une forme différentielle de degré r ou une r -forme anti-symétrique est un tenseur covariant anti-symétrique d'ordre r

$$T(v_1, \dots, v_i, v_j, \dots, v_r) = -T(v_1 \dots v_j, v_i, \dots, v_r).$$

A.8.1. Produit extérieur

Le produit extérieur de r 1-formes est défini de la façon suivante

$$dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} = \sum_p \operatorname{sgn}(P) dx^{i_{p(1)}} \otimes \dots \otimes dx^{i_{p(r)}},$$

où la somme est effectuée sur toutes les permutations P des indices $i_1 \dots i_r$ et $\operatorname{sgn}(P) = +1$ pour les permutations paires et $\operatorname{sgn}(P) = -1$ pour les permutations impaires.

Par exemple, on a

$$\begin{aligned} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 &= -dx^1 \otimes dx^3 \otimes dx^2 - dx^3 \otimes dx^2 \otimes dx^1 - dx^2 \otimes dx^1 \otimes dx^3 \\ &\quad + dx^3 \otimes dx^1 \otimes dx^2 + dx^2 \otimes dx^3 \otimes dx^1 + dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^3. \end{aligned}$$

Avec le produit extérieur, on peut donc construire des r -formes différentielles à partir de 1-formes. Par exemple, soit α et $\beta \in T_p^*M$ et $u, v \in T_pM$, on écrit

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta(u, v) &= \alpha \otimes \beta(u, v) - \beta \otimes \alpha(u, v) \\ &= \alpha(u)\beta(v) - \beta(u)\alpha(v), \\ &= \alpha_i dx^i(u) \beta_j dx^j(v) - \beta_j dx^j(u) \alpha_i dx^i(v), \\ &= \alpha_i \beta_j dx^i \wedge dx^j(u, v) = \sigma_{ij} dx^i \wedge dx^j(u, v) = \sigma(u, v). \end{aligned}$$

Les $\{dx^i \wedge dx^j, i, j = 1, \dots, n, i \neq j\}$ forment donc une base des 2-formes différentielles avec T_pM . Cet espace est un espace vectoriel que l'on note $\Omega_p^2(M)$.

De façon générale, on note $\Omega_p^r(M)$ l'ensemble des r -formes différentielles allant de $\overbrace{T_pM \times \dots \times T_pM}^{r \text{ fois}} \rightarrow \mathbb{R}$. Puisque $dx^i \wedge dx^i = 0$ et $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$, la

dimension de $\Omega_p^r(M)$ correspond au nombre d'ensembles (i_1, \dots, i_r) que l'on peut faire sans tenir compte de l'ordre et sans répétition, où chaque $i_\kappa = 1, \dots, n$. On trouve donc:

$$\dim(\Omega_p^r(M)) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

Nous allons aussi associer $\Omega_p^0(M) \equiv \mathcal{F}(M)$ à l'ensemble des fonctions C^∞ de M vers \mathbb{R} .

En résumé nous avons donc:

r -formes dif.	Base	Dimension
$\Omega_p^0(M) = \mathcal{F}(M)$	1	1
$\Omega_p^1(M) = T_p^*M$	$\{dx^{i_\kappa}\}$	n
$\Omega_p^2(M)$	$\{dx^{i_\mu} \wedge dx^{i_\nu}\}$	$n(n-1)/2$
$\Omega_p^3(M)$	$\{dx^{i_\kappa} \wedge dx^{i_\nu} \wedge dx^{i_\mu}\}$	$n(n-1)(n-2)/6$
:	\vdots	\vdots
$\Omega_p^n(M)$	$\{dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n\}$	1

On note $\Omega_p(M) = \bigoplus_{r=0}^n \Omega_p^r(M)$. Cet espace vectoriel muni de l'opération produit extérieur " \wedge " forme ce que l'on appelle une algèbre de Grassmann.

A.8.2. La dérivée extérieure

La dérivée extérieure est une application $d : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r+1}(M)$. Soit une r -forme différentielle

$$\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}.$$

Remarque. Plutôt que de faire la somme sur les permutations des $\{\mu_1, \dots, \mu_r\}$, nous pouvons faire la somme sur tous les indices et diviser par $1/r!$ pour éliminer les répétitions. Cela nous permet d'utiliser la notation d'Einstein.

L'action de la dérivée extérieure est définie de la façon suivante

$$d\omega \equiv \frac{1}{r!} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r}(x) \right) dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}.$$

La dérivée extérieure possède les propriétés suivantes:

- i) Pour $r = 0$, $f \in \Omega^0(M)$, df est la différentielle habituelle.
- ii) $d^2\omega = d(d\omega) = 0$.

Si $\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \in \Omega^r(M)$, on a

$$d^2\omega = \frac{1}{r!} \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^\lambda \wedge dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} = 0.$$

En effet, $\partial^2 \omega_{\mu_1, \dots, \mu_r} / \partial x^\lambda \partial x^\nu$ est symétrique sur les indices λ et ν alors que $dx^\lambda \wedge dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$ est anti-symétrique sur λ et ν .

On dit que ω est exacte s'il existe une $(r-1)$ -forme $\Psi \in \Omega^{r-1}(M)$ telle que $d\Psi = \omega$. D'autre part, ω est fermée si $d\omega = 0$. La propriété ii) de la dérivée extérieure implique que toutes les formes exactes sont fermées. Par contre, une forme peut être fermée sans nécessairement être exacte.

A.9. APPLICATIONS INDUITES F_* ET F^*

Soit F un difféomorphisme de M dans N . La différentielle F_* de F est une application de $T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ définie uniquement de la façon suivante:

Soit $V = V^\mu \partial / \partial x^\mu$ un vecteur de $T_p M$ exprimé dans une carte $\varphi(p) = (x^1(p) \dots x^m(p))$ de M et $\psi(p) = (y^1(p), \dots, y^n(p))$ une carte de N , nous avons la fonction

$$f = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} = f(x^1, \dots, x^m) = (y^1(x^1, \dots, x^m), \dots, y^n(x^1, \dots, x^m)).$$

On peut donc écrire

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\nu}.$$

Donc, on a

$$V = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = V^\mu \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\nu} \equiv W^\nu \frac{\partial}{\partial y^\nu} \in T_p N.$$

L'expression en coordonnées de F_* est donc $\partial y^\nu / \partial x^\mu = J_\mu^\nu$ la matrice jacobienne de f . C'est une application linéaire de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^n envoyant V^ν vers $V^\mu \partial y^\nu / \partial x^\mu$.

A.9.1. Le "pullback" F^*

Le pullback F^* de F est une application de $T_{F(p)}^*N \rightarrow T_p^*M$ définie uniquement de la façon suivante:

Soit $\omega \in T_{F(p)}^*N$ et $V \in T_pM$, on a

$$(F^*\omega)(V) \equiv \omega(F_*V).$$

$F^*\omega$ est donc la composition de $\omega \circ F_*$. En coordonnées, nous avons par exemple:

Soit $\omega \in T_{F(p)}^*N$ et $C \in T_pM$

$$\begin{aligned} (F^*\omega)(V) &= \omega(F_*V) \\ &= \omega_i dy^i \left(V^\mu \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \\ &= \omega_i V^\mu \frac{\partial y^i}{\partial x^\mu} \\ &= \omega_i \frac{\partial y^i}{\partial x^\mu} V^\mu \\ &= \bar{\omega}_\mu dx^\mu(V). \end{aligned}$$

Sous un difféomorphisme $F : M \rightarrow N$ les composantes de ω se sont transformées comme

$$\bar{\omega}_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} = \omega_i.$$

On peut naturellement définir le "pull-back" d'une n -forme par F comme

$$(F^*\omega)(V^{(1)}, \dots, V^{(n)}) \equiv \omega(F_*V^{(1)}, \dots, F_*V^{(n)}).$$

A.9.2. Immersion

Soit une application continue F de M vers N , avec $\dim M \leq \dim N$, F est une immersion de M dans N si F_* est une injection.

A.9.3. Plongement

F est un plongement de M dans N si F est une injection et une immersion.

A.10. FLOT D'UN CHAMP DE VECTEURS ET COURBES INTÉGRALES

Soit un champ de vecteurs $X(p)$ sur la variété M . Une courbe intégrale $\gamma(t) : (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ du champ de vecteurs $X(p)$ est une courbe telle que, pour une carte arbitraire (U, φ) autour du point $\gamma(0) = p$, on ait

$$\frac{d}{dt}x^\mu(t) = X^\mu(x(t)),$$

où $\varphi(\gamma(t)) = (x^1(\gamma(t)), \dots, x^n(\gamma(t))) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ et $X(p) = X^\mu(\varphi(p)) \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ dans la carte.

On note $\sigma(t, p_0)$ une courbe intégrale d'un champ de vecteur X passant par le point p_0 . σ induit donc un difféomorphisme $\sigma : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$. On nomme cette application le flot généré par le champ de vecteurs X . On le note aussi parfois $\sigma_t : M \rightarrow M$.

On peut montrer que σ possède les propriétés suivantes:

- i) $\sigma_t(\sigma_s(p)) = \sigma_{t+s}(p) = \sigma_t \circ \sigma_s(p) \therefore (\sigma_t \circ \sigma_s) \circ \sigma_r = \sigma_t \circ (\sigma_s \circ \sigma_r) = \sigma_{t+s+r}(p)$
(associativité),
- ii) $\sigma_0(\sigma_t(p)) = \sigma_t(p)$ (élément neutre),
- iii) $\sigma_t(\sigma_{-t}(p)) = I$ l'identité (inverse).

L'ensemble des σ_t générés par un champ de vecteur X forme donc un groupe de Lie à un paramètre pour la composition de fonctions.

A.11. DÉRIVÉE DE LIE D'UN CHAMP DE VECTEUR

Soit deux champs de vecteurs X et Y sur M . La variation du champ de vecteurs Y le long du flot du champ de vecteurs X est la dérivée de Lie de Y le long de X , que l'on notera $\mathcal{L}_X Y$.

Soit $\sigma_t(p)$ le flot de X . La dérivée de Lie $\mathcal{L}_X Y$ est définie comme suit

$$\mathcal{L}_X Y \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [(\sigma_{-\epsilon})_* Y|_{\sigma_\epsilon(p)} - Y|_p].$$

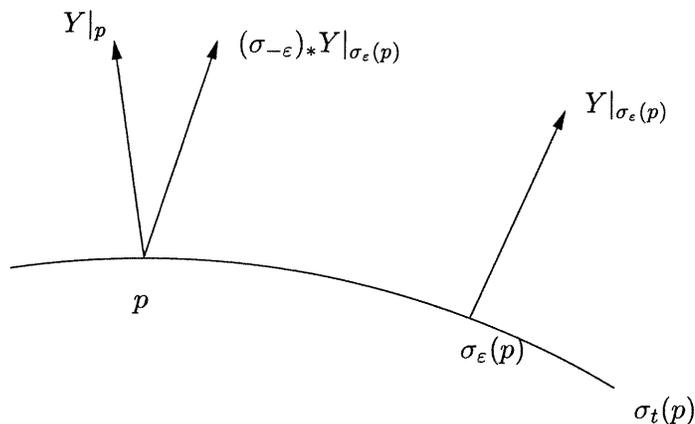


FIG. A.11.1 –. Dérivée de Lie de Y le long du flot de X

Puisque $Y|_p$ et $Y|_{\sigma_\epsilon(p)}$ ne font pas partie du même espace tangent, il faut ramener $Y|_{\sigma_\epsilon(p)}$ au point p par l'application induite $(\sigma_{-\epsilon})_*$ avant de pouvoir les soustraire.

Calculons maintenant $\mathcal{L}_X Y$ dans une carte (U, φ) de M où $Y = Y^\mu \partial / \partial x^\mu$, $X = X^\mu \partial / \partial x^\mu$. Prenons $\partial / \partial x^\mu = \partial_\mu = e_\mu$.

Infinitésimalement (ϵ est très petit), nous avons

$$\begin{aligned} Y|_{\sigma_\epsilon(p)} &= Y^\mu (x^\nu + \epsilon X^\nu(x)) e_\mu|_{x+\epsilon X}, \\ &\simeq [Y^\mu(x) + \epsilon X^\nu(x) \partial_\nu Y^\mu(x)]|_{x+\epsilon X}, \\ (\sigma_{-\epsilon})_*(Y|_{\sigma_\epsilon(p)}) &= [Y^\mu(x) + \epsilon X^\lambda(x) \partial_\lambda Y^\mu] \partial_\mu [x^\nu - \epsilon X^\nu(x)] e_\nu|_x, \\ &= [Y^\mu(x) + \epsilon X^\lambda(x) \partial_\lambda Y^\mu(x)] [\delta_\mu^\nu - \epsilon \partial_\mu X^\nu(x)] e_\nu|_x, \\ &= Y^\mu(x) e_\mu|_x + \epsilon [X^\lambda(x) \partial_\lambda Y^\nu(x) - Y^\mu(x) \partial_\mu X^\nu(x)] e_\nu|_x + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Par la définition de $\mathcal{L}_X Y$, nous avons

$$\mathcal{L}_X Y = [X^\lambda \partial_\lambda Y^\nu - Y^\mu \partial_\mu X^\nu] e_\nu|_x.$$

Nous voyons donc que $\mathcal{L}_X Y$ est aussi un champ de vecteurs:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X Y &= \left[X^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} Y^\nu - Y^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} X^\nu \right] \frac{\partial}{\partial x^\nu}, \\ &= X^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} Y^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} - Y^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} X^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}.\end{aligned}$$

On remarque aussi que $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$ où $[a, b] = ab - ba$.

On peut de la même façon définir la dérivée de Lie d'une 1-forme $\omega \in \Omega^1(M)$ le long du flot de $X \in M$:

$$\mathcal{L}_X \omega \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [(\sigma_\epsilon)^* \omega|_{\sigma_\epsilon(x)} - \omega|_x].$$

En coordonnées on obtient

$$\mathcal{L}_X \omega = (X^\nu \partial_\nu \omega_\mu + \omega_\nu \partial_\mu X^\nu) dx^\mu.$$

A.12. PRODUIT INTÉRIEUR

Le produit intérieur est une application $i_X : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r-1}(M)$, où $X \in \mathcal{X}(M)$. Cette application sur une 1-forme différentielle est définie de la façon suivante:

soit $\omega = \omega_i dx^i$, on a

$$i_X \omega = \omega_i dx^i(X) = \omega_i X^i.$$

Définissons maintenant l'action de i_X sur le produit extérieur de deux 1-formes différentielles α et β :

$$i_X(\alpha \wedge \beta) = (i_X \alpha) \wedge \beta - \alpha \wedge (i_X \beta).$$

Une application ayant une telle propriété est appelée une antidérivée.

Par cette définition on peut étendre l'action de i_X à une r -forme différentielle ω :

$$i_X \omega = \frac{1}{r!} \sum_{s=1}^r X^{\mu_s} \omega_{\mu_1 \dots \mu_s \dots \mu_r} (-1)^{s-1} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{\mu_s}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$$

ou $\widehat{dx^{\mu_s}}$ signifie que dx^{μ_s} est supprimé. $i_X\omega$ est donc élément de $\Omega^{r-1}(M)$.

A.13. GROUPE DE LIE

Un groupe de Lie G est une variété différentielle possédant une structure de groupe, c'est-à-dire une opération $\circ : G \times G \rightarrow G$ telle que $g_1 \circ g_2 \in G$ où g_1 et $g_2 \in G$, possédant les propriétés suivantes:

- i) cette opération est associative $(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$.
- ii) il existe un élément neutre $e \in G$ tel que $e \circ g = e \forall g \in G$.
- iii) tout $g \in G$ possède un inverse $g \circ g^{-1} = e$ avec $g^{-1} \in G$.

A.13.1. Champs de vecteurs invariants à gauche sur un groupe de Lie

Définissons tout d'abord l'action à gauche et à droite sur un groupe de Lie. L'action à droite est une application $R_a : G \rightarrow G$ qui agit de la façon suivante: $\forall a, g \in G, R_a(g) = g \circ a$. L'action à gauche $L_a : G \rightarrow G$ est définie de façon analogue: $\forall a, g, L_a(g) = a \circ g$. On dit d'un champ de vecteur $X \in \mathcal{X}(G)$ qu'il est invariant à gauche s'il satisfait

$$L_{a*}(X|_g) = X|_{a \circ g}.$$

Nous aurions pu définir un champ de vecteurs invariant à droite de la même façon.

A.14. ALGÈBRE DE LIE

Soit e l'identité du groupe de Lie. Tout vecteur $V \in T_e G$ définit uniquement un champ de vecteurs invariant à gauche sur G de la façon suivante:

$$X_V|_g = L_{g*}V, \quad g \in G.$$

Nous allons noter \mathfrak{g} l'ensemble des champs de vecteurs invariants à gauche sur un groupe de Lie G . Cet ensemble est en bijection avec les vecteurs de $T_e G$. \mathfrak{g} est un espace vectoriel de la dimension de G puisque $T_e G$ est un espace vectoriel de la

dimension de G . Si nous munissons \mathfrak{g} d'une opération supplémentaire définie de la façon suivante:

$$\forall X \text{ et } Y \in \mathfrak{g} \quad X \star Y \equiv \mathcal{L}_X Y \equiv [X, Y],$$

\mathfrak{g} devient une algèbre qui est appelée l'algèbre de Lie associée au groupe de Lie G . Cette opération possède les propriétés suivantes:

- i) $[X, Y]$ est bilinéaire;
- ii) $[X, Y] = -[Y, X]$ anti-symétrique;
- iii) elle répond à l'identité de Jacobi:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

A.15. TENSEUR MÉTRIQUE

Soit M une variété différentiable. Une métrique riemannienne g sur M est un champ de tenseurs covariants de degré 2 défini positif. En d'autres termes, un champ de tenseurs métriques satisfait les axiomes suivants:

- i) $g_p(u, v) = g_p(v, u)$, où u et $v \in T_p M$ (symétrique);
- ii) $g_p(u, u) \geq 0$, et $g_p(u, u) = 0$ ssi $u = 0$ (défini-positif).

Une métrique pseudo-riemannienne est une métrique riemannienne qui, plutôt qu'être définie positive, est non-dégénérée. On relâche donc l'axiome ii) en disant que

$$\text{ii')} \quad g_p(u, v) = 0, \quad \forall u \in T_p M \quad \text{ssi } v = 0.$$

Une métrique riemannienne induit donc un produit scalaire sur chaque espace tangent de M :

$$\langle u, v \rangle_p \equiv g_p(u, v).$$

En coordonnées, on peut écrire $g_p = g_{\mu\nu}(p) dx^\mu \otimes dx^\nu$ avec $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$.

Puisqu'une métrique riemannienne ou pseudo-riemannienne est non-dégénérée, elle induit naturellement un isomorphisme entre TM et T^*M :

$$\text{soit } u \in T_p M, \quad \phi = TM \rightarrow T^*M; \quad \phi : u \mapsto g_p(u, \cdot).$$

Si la métrique est riemannienne, il existe une base pour chaque espace tangent telle que $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, \dots, 1) = \delta_{ij}$. Si la métrique est pseudo-riemannienne, il existe une base pour chaque espace tangent telle que $g_{\mu\nu}$ est diagonale et possède i (-1) et j ($+1$) sur sa diagonale (où $j + i = n$). S'il y a un seul -1 sur la diagonale et $(n - 1) + 1$ ou l'inverse, on dit que la métrique est de type Minkowski.

A.15.1. Métrique induite

Soit une variété M de dimension m et une variété N de dimension n avec $m < n$, $F : M \rightarrow N$ un plongement de M dans N et supposons que N est munie d'une métrique g_N , alors le "pullback" de g_N par F induit une métrique sur M :

$$F^* g_N = g_M.$$

En coordonnées, nous avons $f(\phi_1 \dots \phi_m) = (X^1(\phi_1 \dots \phi_m), \dots, X^n(\phi_1 \dots \phi_m))$

$$g_{M\mu\nu} = g_{N\alpha\beta}(f(\phi_1 \dots, \phi_m)) \frac{\partial X^\alpha}{\partial \phi_\mu} \frac{\partial X^\beta}{\partial \phi_\nu}.$$

Par exemple, considérons comme variété la sphère de dimension 2 que l'on plonge dans \mathbb{R}^3 par

$$f(\theta, \phi) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) = (X^1, X^2, X^3).$$

\mathbb{R}^3 est équipé d'une métrique euclidienne de composante $\delta_{\alpha\beta}$. Le plongement de S^2 dans \mathbb{R}^3 par f induira la métrique $g_{\mu\nu}$ sur S^2

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} d\phi^\mu \otimes d\phi^\nu &= \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial X^\alpha}{\partial \phi_\mu} \frac{\partial X^\beta}{\partial \phi_\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \quad (\text{avec } \phi_1 = \theta, \phi_2 = \phi) \\ &= d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi. \end{aligned}$$

A.16. LA FORME VOLUME SUR UNE VARIÉTÉ

Dans un espace Euclidien $E(n)$, on peut remarquer que la n -forme

$$\mu^{(n)}(v^{(1)}, \dots, v^{(n)}) \equiv dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n(v^{(1)}, \dots, v^{(n)}) = \det(v_j^{(i)}),$$

où $v_j^{(i)}$ est la j^{me} composante du vecteur $v^{(i)}$. On peut interpréter $\det(v_j^{(i)})$ comme étant le volume engendré par les vecteurs $\{v^{(1)}, \dots, v^{(n)}\}$. Par exemple, pour $n = 2$, nous avons

$$dx^1 \wedge dx^2(v^{(1)}, v^{(2)}) = v_1^{(1)}v_2^{(2)} - v_2^{(1)}v_1^{(2)} = \begin{vmatrix} v_1^{(1)} & v_1^{(2)} \\ v_2^{(1)} & v_2^{(2)} \end{vmatrix} = \det(v_j^{(i)}).$$

Sur une variété Riemannienne de dimension n , la forme volume est donnée par:

$$\mu^{(n)} \equiv \sqrt{g} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

où $g = \det(G)$, G étant la métrique de la variété Riemannienne.

De façon générale, il est possible de définir une forme volume sur une variété ne possédant pas de métrique. Il suffit d'avoir une fonction $h \in \mathcal{F}(M)$ définie positive partout sur M . Dans ce cas nous avons

$$\mu^{(n)} = h(p) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

A.17. INTÉGRATION D'UNE FORME DIFFÉRENTIELLE SUR UNE VARIÉTÉ

Premièrement, notons que l'intégration n'est définie que sur les variétés orientables.

A.17.1. Variété orientable

Soit M une variété couverte par un atlas $\{(\varphi_i, U_i)\}$. M est orientable si pour tous les ouverts se chevauchant ($U_i \cap U_j \neq \emptyset$), il existe des coordonnées locales $\{x^\mu\}$ de U_i et $\{y^\alpha\}$ de U_j telles que le jacobien du changement de carte $J = |\partial x^\mu / \partial y^\alpha| > 0$.

Une variété orientable possède toujours une forme volume

$$\mu = h(p)dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Soit une application $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ et (φ_i, U_i) une carte de M , l'intégrale de F sur l'ouvert U_i est définie comme suit

$$\int_{U_i} F \mu = \int_{U_i} F(\varphi_i^{-1}(x)) h(\varphi_i^{-1}(x)) dx^1 \dots dx^n.$$

Si nous voulons intégrer F sur tout M , nous avons à intégrer sur plusieurs cartes. Il faut donc se doter d'une *partition de l'unité* pour éviter les redondances dans les recouvrements $U_i \cap U_j \neq \emptyset$.

Une partition de l'unité est une famille de fonctions différentiables $\{\epsilon_i(p)\}$ de $M \rightarrow \mathbb{R}$ tel que:

- i) $0 \leq \epsilon_i(p) \leq 1$;
- ii) $\epsilon_i(p) = 0$ si $p \notin U_i$;
- iii) $\epsilon_1(p) + \epsilon_2(p) + \cdots + \epsilon_\kappa(p) = 1$ pour $p \in U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_\kappa$.

Nous pouvons donc écrire $F(p) = \sum_i F(p)\epsilon_i(p)$ et l'intégrale sur M :

$$\int_M F \mu = \sum_i \int_{U_i} \epsilon_i(p) F(p) \mu.$$

A.18. SYSTÈME HAMILTONIEN ET GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE

Nous avons vu que l'espace des configurations d'un système physique est généralement le fibré tangent d'une variété différentielle $E = TM$. L'état d'un système dans une carte locale est donc donné par un point de ce fibré:

$$q = \{x^1(t), \dots, x^n(t); \dot{x}^1(t), \dots, \dot{x}^n(t)\} \equiv \{x(t), \dot{x}(t)\}.$$

Nous allons maintenant spécifier la dynamique du système physique par la construction d'un système hamiltonien. Ce système sera construit sur le fibré cotangent $E^* = T^*M$ plutôt que directement sur le fibré tangent. On nomme E^* l'espace des phases.

Dans la majorité des cas, l'énergie cinétique d'un système est donnée par une forme quadratique:

$$T = g_{ij}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j,$$

$g_{ij}(x)$ est une matrice symétrique non-dégénérée et définie positive. L'espace de configuration d'un système physique étant le fibré tangent d'une variété, $E = TM$, on peut donc écrire l'énergie cinétique en terme d'une métrique riemannienne sur M :

$$T = g_p(\dot{x}, \dot{x}), \quad p \in M, \quad \dot{x} \in T_pM.$$

Comme nous l'avons vu, cette métrique riemannienne induit un isomorphisme entre T_pM et T_p^*M

$$\phi : T_pM \rightarrow T_p^*M; \quad \dot{x} \mapsto g_p(\dot{x}, \cdot).$$

Nous allons définir $g_p(\dot{x}, \cdot) \equiv P \in \Omega^1(M)$ l'impulsion généralisée. Dans une carte, nous avons $P = p_i dx^i$. Par l'isomorphisme ϕ , un état du système peut être associé à un point de E^* :

$$a = \{x^1(t), \dots, x^n(t); p_1(t), \dots, p_n(t)\} \equiv \{x, P\}.$$

Dans le cas où le lagrangien du système $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ à la forme

$$L(x, \dot{x}) = g_{ij}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j - V(x),$$

où $V(x)$ est l'énergie potentielle dépendant seulement de la position. Nous avons alors

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = g_{ij}(x)\dot{x}^j = p_i = g(\dot{x}, \cdot).$$

Une fois l'espace des phases du système bien déterminé, il reste deux ingrédients pour construire notre système hamiltonien: une structure symplectique et un hamiltonien.

A.18.1. Structure symplectique

Une structure symplectique est une 2-forme différentielle lisse que l'on notera $\omega_a : T_a E^* \times T_a E^* \rightarrow \mathbb{R}$. ω_a est donc un élément de $\Omega^2(E^*)$ possédant les caractéristiques suivantes:

- i) $\forall a \in E^*$, ω_a est non-dégénérée;
- ii) ω est fermé, $d\omega = 0$.

A.18.2. Variété symplectique

Une variété symplectique est une variété différentielle munie d'une structure symplectique. On notera (E^*, ω) la variété symplectique munie de la structure symplectique ω .

A.18.3. Système hamiltonien

Un système hamiltonien est la donnée d'une fonction C^∞ d'une variété symplectique vers \mathbb{R} :

$$H : (E^*, \omega) \rightarrow \mathbb{R}.$$

A.18.4. Équations d'Hamilton

À partir de l'hamiltonien H , nous allons construire sur E^* le champ de vecteurs hamiltoniens X_H .

Nous prenons d'abord $dH \in T^*(E^*)$ la différentielle de H . Puisque ω est non-dégénérée, elle induit un isomorphisme entre $T(E^*)$ et $T^*(E^*)$ de la même façon qu'une métrique riemannienne:

$$\Phi_\omega : T(E^*) \rightarrow T^*(E^*); \quad v \mapsto \omega(v, \cdot) \quad v \in T(E^*).$$

$\Phi_\omega^{-1}(dH)$ est donc un champ de vecteurs sur E^* que nous noterons X_H . C'est le gradient symplectique de H relativement à la forme symplectique ω . On peut donc écrire $dH = \omega(X_H, \cdot)$.

Prenons maintenant une courbe $\gamma(t) : \mathbb{R} \rightarrow E^*$. Si cette courbe est une courbe intégrale de X_H , on a:

$$\frac{d}{dt}\gamma(t) = X_H(\gamma(t)).$$

On dit alors qu'elle répond aux équations d'Hamilton. En coordonnées locales, $\gamma(t) = \{x^1(t), \dots, x^n(t); p_1(t), \dots, p_n(t)\}$ décrit une trajectoire possible du système physique.

Le théorème de Darboux nous assure qu'il existe toujours une carte (φ, U) autour de chaque point a de E^* , où la forme symplectique ω s'écrit:

$$\omega = \sum_{i=1}^{\kappa} dx^i \wedge dx^{i+\kappa} \quad \text{où } dx^{i+\kappa} \equiv dp^i.$$

Par exemple, si E^* est de dimension 2, on a

$$\omega = dx \wedge dp.$$

Les coordonnées pour lesquelles ω prend cette forme se nomment les coordonnées canoniques du système. Trouvons les composantes de ω dans les coordonnées canoniques

$$\begin{aligned} \omega(\partial_i, \partial_j) &= dx^1 \wedge dx^2(\partial_i, \partial_j), \quad (x^1 \equiv x, x^2 \equiv p), \\ &= dx^1(\partial_i)dx^2(\partial_j) - dx^2(\partial_i)\partial dx^1(\partial_j), \\ &= J_{ij}, \end{aligned}$$

où

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour $\dim(E^*) = 2n$, $J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_{n \times n} \\ -\mathbf{1}_{n \times n} & 0 \end{pmatrix}$ où $\mathbf{1}_{n \times n}$, est la matrice identité $n \times n$.
 Dans une carte canonique $\omega(X_H, \cdot) = dH$ devient donc, pour $n=2$,

$$\begin{aligned} \omega(X_H, \cdot) &= dx^1(X_H)dx^2 - dx^2(X_H)dx^1, \\ &= X_H^{(1)}dx^2 - X_H^{(2)}dx^1, \\ &= dH = \frac{\partial H}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial H}{\partial x^2}dx^2, \\ \therefore X_H^{(1)} &= \frac{\partial H}{\partial x^2}, \quad X_H^{(2)} = -\frac{\partial H}{\partial x^1}. \end{aligned}$$

Écrivons maintenant l'équation d'Hamilton:

$$\frac{d\vec{\gamma}}{dt} = X_H(\gamma(t)), \quad \text{avec } \vec{\gamma} = \{x^1(t), x^2(t)\},$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} \frac{dx^1}{dt} &= X_H^{(1)} = \frac{\partial H}{\partial x^2} \Rightarrow \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \\ \frac{dx^2}{dt} &= X_H^{(2)} = -\frac{\partial H}{\partial x^1} \Rightarrow \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \end{aligned}$$

Nous retrouvons la forme habituelle des équations d'Hamilton qui sont en fait une expression pour un système de coordonnées particulier de E^* .

BIBLIOGRAPHIE

- [AbMa] R. ABRAHAM ET J. E. MARSDEN, *Fondation of Mechanics*, Adison-Wesley, 1985.
- [Arn] V. I. ARNOLD, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [ArKh] V. I. ARNOLD ET B. A. KHESIN, *Topological Methods in Hydrodynamics*, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [Baz] D. BAZEIA, *Galileo invariant system and the motion of relativistic d-branes*, Phys. Rev. **D59** (1999).
- [BoHo] M. BORDEMANN ET J. HOPPE, *The Dynamics of Relativistic Membranes I: Reduction to 2-dimensional Fluid Dynamics*, Phys. Lett. **B325** (1994) 359.
- [Fra] T. FRANKEL, *The Geometry of Physics*, Cambridge University Press, 1997.
- [Gro] E. P. GROSS, J. Math. Phys. **4** (1963) 195.
- [Hasi] R. HASIMOTO, *A soliton on a vortex filament*, J. Fluid Mechanics **51** (1972) 477.
- [Has] M. HASSAÏNE ET P. A. HORVATHY, *Field-dependent symmetries of a non-relativistic fluid model*, Ann. Phys. **282** (2000) 218.
- [Jac1] R. JACKIW, *A Particle Field Theorist's Lectures on Supersymmetric, Non-Abelian Fluid Mechanics and d-Branes*, 16 oct. 2000, preprint.
- [Jac2] R. JACKIW, *Hydrodynamic profiles and constants of motion from D-branes*, Theor. Math. Phys. **124** (2000) 1038.
- [JacBaz] R. JACKIW ET D. BAZEIA, *Nonlinear realization of a Dynamical Poincaré Symmetry Realized by Field-dependent Diffeomorphism*, Ann. Phys. **270** (1998) 246.
- [Lak] M. LAKSHMANAN, *Continuum Spin System as an Exactly Solvable Dynamical System*, Physics Letters **61A** (1977), no.1, 53.

- [Lam] G.L. LAMB JR., *Elements of soliton theory*, John Wiley, 1980.
- [LaPe1] J. LANGER ET R. PERLINE, *The Planar Filament Equation*, Fields Institute Communications **7** (1996) 171.
- [LaPe2] J. LANGER ET R. PERLINE, *The Localized Induction Equation, the Heisenberg Chain and the Non-linear Schrödinger Equation*, Field Institute Communications **7** (1996) 181.
- [LRT] M. LAKSHMANNAN, TH. W. RUIJGROK ET C.J. THOMPSON, *On the Dynamics of Continuum Spin System*, Physica **84A** (1976) 577.
- [MaWe] J. MARSDEN ET A. WEINSTEIN, *Coadjoint Orbits, Vortices, and Clebsch Variables for Incompressible Fluids*, Physica **7D** (1983) 305.
- [Nak] M. NAKAHARA, *Geometry, Topology and Physics*, Graduate Student Series in Physics, 1996.
- [Oga1] N. OGAWA, *A Note on Gauge Principle and Spontaneous Symmetry Breaking in Classical Particle Mechanics*, janv. 1998, preprint.
- [Oga2] N. OGAWA, *A Note on Cassical Solution of Chaplygin-gaz as d-Branes*, Phys. Rev. **D62** (2000).
- [Sul] C. SULEM ET P.-L. SULEM, *The Nonlinear Schrödinger Equation*, Springer Verlag, New York, 1999.
- [Tur] L.A. TURSKI, *Hydrodynamical description of continuous Heisenberg chain*, Canad. J. Phys. **59** (1981) 511.