

Université de Montréal

États Cohérents et Comprimés

Par

Nibaldo Alvarez

Département de Physique

Faculté des Arts et des Sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de  
Maître ès sciences (M.Sc.)  
en Physique

Juin, 2000

©Nibaldo Alvarez, 2000



QC  
3  
U54  
2000  
V.015

Université de Montréal

Faculté des Arts et des Sciences

En

Physique

Département de Physique

Faculté des Arts et des Sciences

Mémoire présenté à la Faculté des Arts et des Sciences

en vue de l'obtention du grade de

Maîtrise en sciences (M.Sc.)

en Physique

1998

1998



Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

”États Cohérents et Comprimés”

présenté par:

Nibaldo Alvarez

a été évalué par un jury composé de personnes suivantes:

Richard Mackenzie

(président rapporteur)

Véronique Hussin

(directrice de recherche)

Bernard Goulard

(membre du jury)

*À mes parents et mes enfants.*

# Table des matières

Sommaire	i
Table des figures	iv
Remerciements	vi
Introduction	1
<b>1 États minimaux d'incertitude</b>	<b>4</b>
1.1 Relations d'incertitude de Schrödinger-Robertson et de Heisenberg . . .	5
1.2 États cohérents et comprimés de l'oscillateur harmonique quantique . .	8
1.3 États cohérents et comprimés associés aux opérateurs de moment angulaire	16
1.4 Système d'états cohérents généralisés . . . . .	26
<b>2 Les états propres d'algèbre et l'algèbre des opérateurs</b>	<b>33</b>
2.1 Les états propres d'algèbre associés à l'algèbre $su(2)$ . . . . .	34
2.2 Les états propres d'algèbre associés à l'algèbre $su(1, 1)$ . . . . .	41
<b>3 États cohérents et comprimés associés à l'algèbre de Lie <math>h(1) \oplus su(2)</math></b>	<b>46</b>
3.1 Les états super-cohérents . . . . .	46
3.2 États propres d'algèbre associés à $h(1) \oplus su(2)$ . . . . .	51
3.3 États cohérents et comprimés associés à l'opérateur de super-position $\hat{X}$ et de super-impulsion $\hat{P}$ . . . . .	54
3.4 États cohérents et comprimés de l'oscillateur harmonique déplacé généralisé	63

<b>4 Des quantités physiques</b>	<b>70</b>
4.1 Le modèle de Jaynes-Cummings et le lien avec l'oscillateur harmonique supersymétrique . . . . .	71
4.2 Valeurs moyennes et dispersions $\hat{H}_{JC}$ dans les états super-cohérents . .	75
4.3 Valeurs moyennes et dispersions de $\hat{H}_{JC}$ dans les états comprimés . . .	82
<b>A Recherche des états propres d'algèbre par la méthode des équations différentielles</b>	<b>90</b>
A.1 La représentation de Fock-Bargmann . . . . .	90
A.2 Résolution d'un système d'équations différentielles ordinaires de premier ordre . . . . .	92
A.3 Résolution d'une équation différentielle aux dérivées partielles de premier ordre . . . . .	95
<b>B Les polynômes de Jacobi</b>	<b>101</b>
<b>C Valeurs moyennes des opérateurs <math>J_+</math>, <math>J_-</math> et <math>J_3</math> dans les états propres d'algèbre associés à <math>su(2)</math></b>	<b>107</b>
C.1 Valeurs moyennes des opérateurs $J_+$ , $J_-$ et $J_3$ . . . . .	107
C.2 Valeur moyenne de $J_3$ en fonction de l'angle $\theta$ et du paramètre $q$ . . .	111
<b>Conclusion</b>	<b>117</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>119</b>

# Sommaire

L'objet de ce travail est d'étudier les états cohérents et comprimés, associés à des couples d'opérateurs hermitiens engendrant une algèbre de Lie déterminée. Ces états sont définis comme les états rendant minimale la relation d'incertitude générale de Schrödinger-Robertson. Plus précisément, ce travail met l'accent sur l'obtention des états cohérents et comprimés associés aux algèbres de Lie  $h(1)$ ,  $su(2)$  et  $h(1) \oplus su(2)$ . Ces algèbres sont liées à des systèmes physiques fondamentaux comme l'oscillateur harmonique quantique, les systèmes atomiques et l'oscillateur harmonique quantique supersymétrique respectivement.

Il existe au moins trois définitions, qui ne sont en général pas tout-à-fait équivalentes, de ce qu'est un état cohérent. On peut les considérer comme des états propres d'un opérateur d'annihilation donné ou comme des états résultant de l'application d'un opérateur du type déplacement sur un état arbitraire d'une représentation d'une certaine algèbre ou encore comme des états minimaux d'incertitude. Ces trois définitions ainsi que celle concernant les états comprimés à partir des états minimaux d'incertitude ont été récemment rassemblées dans le concept d'états propres d'algèbre associés à une algèbre de Lie déterminée.

Dans ce travail, nous construirons, en utilisant autant la technique des opérateurs ordonnés que celle des équations différentielles, les états propres d'algèbre des algèbres mentionnées plus haut. Notamment, dans le cas de l'algèbre  $h(1) \oplus su(2)$ , nous obtiendrons des résultats importants concernant les états super-cohérents et comprimés de l'oscillateur harmonique supersymétrique et ceux de, ce que nous appellerons, l'oscillateur harmonique déplacé généralisé.

## Table des figures

1.1	Graphique des dispersions $(\Delta\hat{x})^2$ et $(\Delta\hat{p})^2$ en fonction de l'angle $\phi$ , $\delta = 0.5$ .	16
1.2	Graphique des dispersions $(\Delta\hat{x})^2$ , $(\Delta\hat{p})^2$ et du facteur $\Delta$ en fonction de $\delta$ pour $\phi = \frac{\pi}{6}$ .	17
1.3	Graphique des dispersions $\left((\Delta\hat{J}_1)^2\right)_\pm$ et $\left((\Delta\hat{J}_2)^2\right)_\pm$ en fonction de l'angle $\phi$ pour $\delta = 0.5$ , $j = \frac{1}{2}$ .	25
1.4	Graphique des dispersions $\left((\Delta\hat{J}_1)^2\right)_\pm$ et $\left((\Delta\hat{J}_2)^2\right)_\pm$ en fonction de $\delta$ pour $\phi = \frac{\pi}{6}$ et $j = \frac{1}{2}$ .	25
1.5	Graphique des dispersions $\left((\Delta\hat{J}_1)^2\right)_0^1$ et $\left((\Delta\hat{J}_2)^2\right)_0^1$ en fonction de $\delta$ pour $\phi = \frac{\pi}{6}$ , $j = 1$ et $m = 0$ .	26
3.1	Graphique des dispersions $(\Delta\hat{X}^2)$ et $(\Delta\hat{P}^2)$ et du facteur $\Delta$ en fonction de l'angle $\phi = x$ , $\delta = 0.005$ , $ \tau  =  \mu  = 1$ , $j = \frac{1}{2}$ .	58
3.2	Graphique des dispersions $(\Delta\hat{X}^2)$ et $(\Delta\hat{P}^2)$ et du facteur $\Delta$ en fonction de l'angle $\phi = x$ , $\delta = 0.5$ , $ \tau  =  \mu  = 1$ , $j = \frac{1}{2}$ .	58
3.3	Graphique des dispersions $(\Delta\hat{X}^2)$ et $(\Delta\hat{P}^2)$ et du facteur $\Delta$ en fonction de l'angle $\phi = x$ , $\delta = 0.8$ , $ \tau  =  \mu  = 1$ , $j = \frac{1}{2}$ .	59
3.4	Graphique des dispersions $(\Delta\hat{X}^2)$ et $(\Delta\hat{P}^2)$ et du facteur $\Delta$ en fonction de l'angle $\phi = x$ , $\delta = 0.99$ , $ \tau  =  \mu  = 1$ , $j = \frac{1}{2}$ .	59
3.5	Graphique des dispersions $(\Delta\hat{X}^2)$ et $(\Delta\hat{P}^2)$ et du facteur $\Delta$ en fonction de $\delta = x$ pour $\phi = 0$ , $ \tau  =  \mu  = 1$ , $j = \frac{1}{2}$ .	61
3.6	Graphique des dispersions $(\Delta\hat{X}^2)$ et $(\Delta\hat{P}^2)$ et du facteur $\Delta$ en fonction de $\delta = x$ pour $\phi = \frac{\pi}{6}$ , $ \tau  =  \mu  = 1$ , $j = \frac{1}{2}$ .	61
3.7	Graphique des dispersions $(\Delta\hat{X}^2)$ et $(\Delta\hat{P}^2)$ et du facteur $\Delta$ en fonction de $\delta = x$ pour $\phi = \frac{\pi}{3}$ , $ \tau  =  \mu  = 1$ , $j = \frac{1}{2}$ .	62



3.8	Graphique des dispersions $(\Delta\hat{X}^2)$ et $(\Delta\hat{P}^2)$ et du facteur $\Delta$ en fonction de $\delta = x$ pour $\phi = \frac{\pi}{2}$ , $ \tau  =  \mu  = 1$ , $j = \frac{1}{2}$ . . . . .	62
3.9	L'action des opérateurs sur les états . . . . .	68
4.1	Graphique de $(\Delta\hat{H}_{JC})_+^2/w^2$ en fonction de $\delta$ et $x$ pour $\lambda = 8$ . . . . .	74
4.2	Graphique de $(\Delta\hat{H}_{JC})_+^2/w^2$ pour la résonance exacte ( $\delta = 0$ ). . . . .	75
4.3	Graphique de $(\Delta\hat{H}_{JC})_-^2/w^2$ en fonction de $\delta$ et $x$ pour $\lambda = 8$ . . . . .	76
4.4	Graphique de $(\Delta\hat{H}_{JC})_-^2/w^2$ pour la résonance exacte ( $\delta = 0$ ). . . . .	76
4.5	Graphique de $(\Delta\hat{H}_D)_-^2/w^2$ en fonction de $\delta$ et $x$ pour $\lambda = 8$ , $ \tau  = 40$ . . . . .	79
4.6	Graphique de $(\Delta\hat{H}_D)_-^2/w^2$ pour la résonance exacte ( $\delta = 0$ ) lorsque $ \tau  = 40$ . . . . .	80
4.7	Graphiques de la dispersion $\left((+\Delta\hat{H}_{JC})^2\right)/w^2$ en fonction de $\delta$ et $\lambda$ pour $\phi = \frac{3\pi}{4}$ , $\varphi = \frac{\pi}{4}$ , $\tau =  \beta  = \sqrt{x} = 1$ et $w_0 = \epsilon = 0$ . . . . .	85
4.8	Graphiques de la dispersion $\left((+\Delta\hat{H}_{JC})^2\right)/w^2$ en fonction de l'angle $\phi$ pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , $\delta = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ , $\tau =  \beta  = \sqrt{x} = \lambda = 1$ et $w_0 = \epsilon = 0$ . . . . .	86
4.9	Graphiques de la dispersion $\left((+\Delta\hat{H}_{JC})^2\right)/w^2$ en fonction des angles $\phi$ pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , $\delta = 0.5, 0.6, 0.7$ , $\tau =  \beta  = \sqrt{x} = \lambda = 1$ et $w_0 = \epsilon = 0$ . . . . .	86
4.10	Graphiques de la dispersion $\left((+\Delta\hat{H}_{JC})^2\right)/w^2$ en fonction de l'angle $\phi$ pour $\varphi = \frac{\pi}{4}$ , $\delta = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ , $\tau =  \beta  = \sqrt{x} = \lambda = 1$ et $w_0 = \epsilon = 0$ . . . . .	87
4.11	Graphiques de la dispersion $\left((+\Delta\hat{H}_{JC})^2\right)/w^2$ en fonction des angles $\phi$ pour $\varphi = \frac{\pi}{4}$ , $\delta = 0.5, 0.6, 0.7$ , $\tau =  \beta  = \sqrt{x} = \lambda = 1$ et $w_0 = \epsilon = 0$ . . . . .	87
4.12	Graphiques de la dispersion $\left((+\Delta\hat{H}_{JC})^2\right)/w^2$ en fonction de l'angle $\phi$ pour $\varphi = 0$ , $\delta = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ , $\tau =  \beta  = \sqrt{x} = \lambda = 1$ et $w_0 = \epsilon = 0$ . . . . .	88
4.13	Graphiques de la dispersion $\left((+\Delta\hat{H}_{JC})^2\right)/w^2$ en fonction des angles $\phi$ pour $\varphi = 0$ , $\delta = 0.5, 0.6, 0.7$ , $\tau =  \beta  = \sqrt{x} = \lambda = 1$ et $w_0 = \epsilon = 0$ . . . . .	88
B.1	Graphique des polynômes de Jacobi $P_2^{1,2}(x)$ , $P_3^{1,2}(x)$ et $P_4^{1,2}(x)$ pour $ x  \leq 1$ . . . . .	103

# Remerciements

Je tiens à remercier ma directrice de recherche, Madame Véronique Hussin, pour ses conseils, sa grande disponibilité et ses suggestions qui m'ont permis l'élaboration de ce travail.

# Introduction

Une façon nouvelle de définir les états cohérents et comprimés associés à des opérateurs hermitiens  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$ , satisfaisant la relation de commutation  $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}$ , est de dire que ce sont les états rendant minimale la relation d'incertitude générale de Schrödinger-Robertson plutôt que celle mieux connue de Heisenberg. Rappelons que cette relation d'incertitude de Schrödinger-Robertson s'écrit:

$$(\Delta\hat{A})^2(\Delta\hat{B})^2 \geq \frac{1}{4} (\langle\hat{C}\rangle^2 + \langle\hat{F}\rangle^2),$$

où  $(\Delta\hat{A})^2 = \langle(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle)^2\rangle$  représente la variance de l'opérateur  $\hat{A}$  et  $\langle\hat{F}\rangle = \langle\{\hat{A}, \hat{B}\}\rangle - \langle\hat{A}\rangle\langle\hat{B}\rangle$  est une mesure de la corrélation entre les opérateurs  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$ . On trouve que les états d'incertitude minimaux satisfont l'équation aux valeurs propres:

$$[\hat{A} + i\lambda\hat{B}]\psi = \beta|\psi\rangle, \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0 \quad \text{et} \quad \beta = \langle\hat{A}\rangle + i\lambda\langle\hat{B}\rangle.$$

Il faut noter que de tels états ont reçu une attention toute particulière au cours de ces dernières années ([Pu 94, Tr 99]) et donnent de nouveaux résultats notamment dans le cas où l'opérateur  $\hat{C}$  n'est pas un multiple de l'identité et peut donc être tel que  $\langle\hat{C}\rangle = 0$ .

Dans un cadre plus général, nous sommes intéressés à trouver les états propres d'algèbre pour des opérateurs représentant les générateurs d'une algèbre de Lie déterminée. Ces états ont été définis par C. Brif [Br 97] comme étant les solutions de l'équation aux valeurs propres

$$\vec{\beta} \cdot \vec{Z}|\psi\rangle = \Gamma|\psi\rangle,$$

où  $\vec{\beta} = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$  est un vecteur dont les  $n$  composantes sont complexes et les

composantes de  $\vec{Z} = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}$  représentent les générateurs de l'algèbre de Lie de dimension  $n$ . Nous allons étudier des différentes méthodes de résolution de cette équation pour les algèbres de Lie de Heisenberg-Weyl  $h(1)$ ,  $su(2)$  et  $su(1, 1)$ . Notamment, nous allons analyser les avantages et les inconvénients de différentes méthodes de résolution de telles équations aux valeurs propres. Ainsi, nous utiliserons, par exemple, le développement de l'état propre dans des bases surcomplètes d'états cohérents standards et nous comparerons ces résultats à ceux obtenus grâce à la technique des opérateurs ordonnés. Nous considérerons aussi la somme directe  $h(1) \oplus su(2)$ , en profitant des résultats obtenus pour les algèbres  $h(1)$  et  $su(2)$  prises séparément.

Dans le chapitre 1, nous étudierons les états cohérents et comprimés associés à l'oscillateur harmonique quantique standard. Ceux-ci correspondent à des états propres associés à une combinaison des opérateurs de création et d'annihilation habituels. Ils sont donc basés sur l'algèbre de Heisenberg-Weyl  $h(1)$ . Dans le même ordre d'idée, nous étudierons de tels états pour les opérateurs de moment angulaire  $\hat{J}_1$  et  $\hat{J}_2$  associés à l'algèbre  $su(2)$ . Nous terminerons ce chapitre en rappelant le concept de systèmes d'états cohérents généralisés, introduit par A. M. Perelomov [Pe 86], dont les états cohérents constituent un cas spécial.

Dans le chapitre 2, nous déterminerons les états propres d'algèbre associés aux algèbres  $su(2)$  et  $su(1, 1)$ . Nous rappellerons que ces états ont été obtenus par C. Brif [Br 97] en développant les états propres d'algèbre dans la base des états cohérents standards correspondants et en transformant ainsi les équations aux valeurs propres en des équations différentielles ordinaires. La méthode que nous utiliserons, à la différence de celle utilisée par C. Brif, se base encore sur la technique des opérateurs ordonnés. Nous transformerons le problème de solutionner les équations aux valeurs propres à celui de résoudre une équation algébrique du deuxième degré. De plus, nous obtiendrons les états propres d'algèbre à partir de l'action d'un opérateur agissant sur un état appartenant à la base de l'espace de représentation en question.

Dans le chapitre 3, nous généraliserons les considérations sur les états propres d'algèbre au cas de  $h(1) \oplus su(2)$ . Nous construirons des opérateurs hermitiens en fai-

sant de combinaisons linéaires d'opérateurs engendrant cette algèbre et établirons ainsi un lien entre les états propres d'algèbre respectifs et les états cohérents et comprimés associés à ces opérateurs. En particulier, pour un choix spécial des coefficients, ceux-ci correspondront à des opérateurs de super-position et de super-impulsion. Nous obtiendrons ainsi une généralisation des états super-cohérents introduits par C. Aragone and F. Zypman [AZ 86] ainsi que des états super-comprimés correspondants introduits par V. Hussin [Hu 00].

Dans le chapitre 4, nous donnerons une application physique des résultats précédents en travaillant avec le modèle de Jaynes-Cummings [JC 63] important en optique quantique. La plupart des approches connues traitent d'états cohérents du champ radiatif associé à ce modèle qui interagissent avec le système atomique. Dans notre approche on considère non seulement des états cohérents mais aussi comprimés, ce qui est nouveau. Nous faisons aussi le lien avec les états proposés récemment par Y. Bérubé-Lauzière, V. Hussin and L.M. Nieto [BHN 94].

Dans l'appendice A, nous rechercherons les états propres d'algèbre associés à l'algèbre  $\mathfrak{h}(1) \oplus \mathfrak{su}(2)$  par la méthode des équations différentielles. Dans ce cas, nous sommes capables de reproduire tous les résultats que nous avons obtenus par la méthode des opérateurs ordonnés, ce qui vient légitimer davantage ces deux méthodes. Dans l'appendice B, nous présenterons un rappel des polynômes de Jacobi et de quelques-unes de leurs propriétés qui seront d'une grande utilité lors de la construction des états propres d'algèbre associés aux algèbres  $\mathfrak{su}(2)$  et  $\mathfrak{su}(1, 1)$ . Ensuite, dans l'appendice C, nous calculerons les valeurs moyennes des opérateurs  $\hat{J}_3$ ,  $\hat{J}_-$  et  $\hat{J}_+$  de  $\mathfrak{su}(2)$  dans les états propres d'algèbre correspondants. Nous constaterons que le fait d'avoir exprimé les états propres d'algèbre sous la forme d'un opérateur agissant sur un état pur de la représentation nous permet d'obtenir des expressions explicites pour les valeurs moyennes des opérateurs d'échelle  $\hat{J}_-$  et  $\hat{J}_+$ . Ce qui est un avantage par rapport à l'approche de C. Brif [Br 97].

# Chapitre 1

## États minimaux d'incertitude

On se rappelle que le principe d'incertitude de Heisenberg impose une limite naturelle sur la précision avec laquelle on peut mesurer simultanément deux quantités physiques représentées par des opérateurs hermitiens qui ne commutent pas.

Si, par exemple,  $\hat{x}$  représente l'opérateur de position et  $\hat{p}$  l'opérateur d'impulsion d'une particule, on sait que ceux-ci satisfont la relation de commutation canonique  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \hat{I}$ . Alors le principe d'incertitude de Heisenberg nous dit qu'on ne peut pas préparer une expérience qui nous permette de déterminer simultanément la position et l'impulsion exactes de cette particule. Plus précisément, on peut connaître simultanément la position et l'impulsion de la particule seulement avec la précision permise par la relation d'incertitude de Heisenberg :

$$\Delta\hat{x}\Delta\hat{p} \geq \frac{\hbar}{2},$$

où  $(\Delta\hat{x})^2 = \langle\psi|(\hat{x} - \langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle)^2|\psi\rangle$  et  $(\Delta\hat{p})^2 = \langle\psi|(\hat{p} - \langle\psi|\hat{p}|\psi\rangle)^2|\psi\rangle$  sont les dispersions de  $\hat{x}$  et de  $\hat{p}$  respectivement. Les quantités  $\langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle$  et  $\langle\psi|\hat{p}|\psi\rangle$  sont les valeurs moyennes de  $\hat{x}$  et  $\hat{p}$  respectivement, calculées dans l'état  $|\psi\rangle$  représentant l'évolution la particule.

Dans le cas de deux opérateurs hermitiens quelconques  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$  qui représentent des observables physiques satisfaisant la relation de commutation  $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}$ ,  $\hat{C} \neq \hat{0}$ , la relation d'incertitude de Heisenberg s'écrit:

$$(\Delta\hat{A})^2 (\Delta\hat{B})^2 \geq \frac{1}{4}\langle\hat{C}\rangle^2,$$

pour le produit des dispersions de  $\hat{A}$  et de  $\hat{B}$ . On remarque que pour des opérateurs non-canoniques, c'est-à-dire tels que  $\hat{C}$  n'est pas un multiple de  $\hat{I}$ , on peut avoir  $\langle\hat{C}\rangle = 0$ .

Dans ce cas, la relation précédente ne nous apprend rien sur le produit des dispersions de  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$ . On utilise alors la relation d'incertitude générale de Schrödinger-Robertson [Me 98],

$$(\Delta\hat{A})^2(\Delta\hat{B})^2 \geq \frac{1}{4} \left( \langle \hat{C} \rangle^2 + \langle \hat{F} \rangle^2 \right),$$

où  $\langle \hat{F} \rangle$  est une mesure de la corrélation entre  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$ , que nous allons définir plus loin. Les états d'incertitude minimale satisfont alors l'égalité et donneront lieu à des états cohérents et comprimés dont nous allons discuter dans ce qui suit.

## 1.1 Relations d'incertitude de Schrödinger-Robertson et de Heisenberg

Reprenons les deux opérateurs  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$  introduits précédemment et mettons en évidence la relation d'incertitude de Schrödinger-Robertson. En vertu de l'inégalité de Schwarz, on sait que  $(\Delta\hat{A})^2$  et  $(\Delta\hat{B})^2$  satisfont

$$(\Delta\hat{A})^2(\Delta\hat{B})^2 = \langle \hat{A}^2 \rangle \langle \hat{B}^2 \rangle \geq |\langle \hat{A}\hat{B} \rangle|^2, \quad (1.1)$$

où on a défini  $\hat{\mathbf{A}} = \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \hat{I}$  et  $\hat{\mathbf{B}} = \hat{B} - \langle \hat{B} \rangle \hat{I}$ . Le produit  $\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}$  peut bien sûr s'écrire comme la demi-somme du commutateur et de l'anticommutateur des opérateurs  $\hat{\mathbf{A}}$  et  $\hat{\mathbf{B}}$ , c'est-à-dire

$$\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}} = \frac{1}{2}[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}] + \frac{1}{2}\{\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}\}. \quad (1.2)$$

En insérant (1.2) dans (1.1), on trouve:

$$(\Delta\hat{A})^2(\Delta\hat{B})^2 \geq \left| \frac{1}{2}\langle [\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}] \rangle + \frac{1}{2}\langle \{\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}\} \rangle \right|^2. \quad (1.3)$$

Comme  $[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}] = [\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}$ , où l'opérateur  $\hat{C}$  est hermitien et  $\{\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}\} = \hat{F}$  est hermitien, on écrit finalement

$$(\Delta\hat{A})^2(\Delta\hat{B})^2 \geq \frac{1}{4} \left( \langle \hat{C} \rangle^2 + \langle \hat{F} \rangle^2 \right), \quad (1.4)$$

car la valeur moyenne d'un opérateur hermitien est réelle. C'est la relation d'incertitude générale de Schrödinger-Robertson.

La valeur moyenne de  $\hat{F}$ , qui peut encore s'écrire

$$\langle \hat{F} \rangle = \langle \{\hat{A}, \hat{B}\} \rangle = \langle \{\hat{A}, \hat{B}\} \rangle - 2\langle \hat{A} \rangle \langle \hat{B} \rangle, \quad (1.5)$$

est une mesure de la corrélation [MW 95] entre  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$ . S'il n'y a pas de corrélation entre ces deux quantités, c'est-à-dire si  $\langle \hat{F} \rangle = 0$ , la relation d'incertitude générale (1.4) devient celle de Heisenberg:

$$(\Delta \hat{A})^2 (\Delta \hat{B})^2 \geq \frac{\langle \hat{C} \rangle^2}{4}. \quad (1.6)$$

Nous sommes intéressés à trouver les états qui minimisent (1.4), ce qui a lieu si et seulement si les états  $\hat{A}|\psi\rangle$  et  $\hat{B}|\psi\rangle$  sont multiples l'un de l'autre. On peut exprimer cette condition sous la forme:

$$\hat{A}|\psi\rangle = -i\lambda\hat{B}|\psi\rangle \iff [\hat{A} + i\lambda\hat{B}]|\psi\rangle = \beta|\psi\rangle, \quad (1.7)$$

avec

$$\beta = [\langle \hat{A} \rangle + i\lambda\langle \hat{B} \rangle], \quad \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0. \quad (1.8)$$

Il faut remarquer qu'à partir de l'équation (1.7), on peut obtenir quelques relations générales se rapportant aux valeurs moyennes et aux dispersions des opérateurs  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$  dans les états d'incertitude minimale et cela sans avoir à résoudre l'équation aux valeurs propres. En effet, en multipliant les deux membres de l'équation (1.7) par  $\hat{A}$ , ensuite en les projetant sur l'état  $|\psi\rangle$  et en tenant compte de l'équation (1.2), on trouve

$$(\Delta \hat{A})^2 = \frac{\lambda}{2} (\langle \hat{C} \rangle - i\langle \hat{F} \rangle). \quad (1.9)$$

Cela implique ( $(\Delta \hat{A})^2$  étant réel positif):

$$(\Delta \hat{A})^2 = \frac{1}{2} (\text{Re}\lambda\langle \hat{C} \rangle + \text{Im}\lambda\langle \hat{F} \rangle) \quad \text{et} \quad \text{Im}\lambda\langle \hat{C} \rangle = \text{Re}\lambda\langle \hat{F} \rangle. \quad (1.10)$$

D'autre part, de l'égalité



$$(\Delta\hat{A})^2(\Delta\hat{B})^2 = \frac{1}{4} \left( \langle\hat{C}\rangle^2 + \langle\hat{F}\rangle^2 \right), \quad (1.11)$$

en tenant compte de (1.9), on trouve

$$(\Delta\hat{B})^2 = \frac{1}{2\lambda} \left( \langle\hat{C}\rangle + i\langle\hat{F}\rangle \right). \quad (1.12)$$

Cela donne (  $(\Delta\hat{B})^2$  étant réel positif) encore

$$(\Delta\hat{B})^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\text{Re}\lambda\langle\hat{C}\rangle + \text{Im}\lambda\langle\hat{F}\rangle}{|\lambda|^2} \right) \quad \text{et} \quad \text{Im}\lambda\langle\hat{C}\rangle = \text{Re}\lambda\langle\hat{F}\rangle. \quad (1.13)$$

Ainsi, on conclut que

$$(\Delta\hat{A})^2 = |\lambda|^2(\Delta\hat{B})^2 \quad (1.14)$$

et que

$$\text{Re}\lambda = \frac{\langle\hat{C}\rangle}{2(\Delta\hat{B})^2}, \quad \text{Im}\lambda = \frac{\langle\hat{F}\rangle}{2(\Delta\hat{B})^2}. \quad (1.15)$$

L'équation (1.14) nous permet de classifier les solutions de l'équation aux valeurs propres (1.7) en deux catégories d'états:

- Les **états cohérents**, associés aux opérateurs  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$ , sont les états vérifiant (1.7) pour lesquels les dispersions de  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$  sont égales, ou encore ceux pour lesquels  $|\lambda| = 1$ .
- Les **états comprimés**, associés aux opérateurs  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$ , sont les états vérifiant (1.7) avec  $|\lambda| \neq 1$ .

De cette classification, on déduit que les états cohérents sont tels que

$$(\Delta\hat{A})^2 = (\Delta\hat{B})^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\langle\hat{C}\rangle^2 + \langle\hat{F}\rangle^2}. \quad (1.16)$$

Les états comprimés satisfont soit  $(\Delta\hat{A})^2 < \frac{1}{2} \sqrt{\langle\hat{C}\rangle^2 + \langle\hat{F}\rangle^2} < (\Delta\hat{B})^2$ , soit  $(\Delta\hat{B})^2 < \frac{1}{2} \sqrt{\langle\hat{C}\rangle^2 + \langle\hat{F}\rangle^2} < (\Delta\hat{A})^2$  dépendant du fait que  $|\lambda|$  est  $< 1$  ou  $> 1$ . Pour exprimer quantitativement ce que nous venons de dire, nous pouvons définir le facteur  $\Delta$  tel que:

$$(\Delta \hat{A})^2 = |\lambda| \Delta \quad \text{et} \quad (\Delta \hat{B})^2 = \frac{1}{|\lambda|} \Delta, \quad (1.17)$$

c'est-à-dire

$$\Delta = \sqrt{(\Delta \hat{A})^2 (\Delta \hat{B})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\langle \hat{C} \rangle^2 + \langle \hat{F} \rangle^2}. \quad (1.18)$$

D'autre part de (1.7), on peut exprimer les valeurs moyennes  $\langle \hat{A} \rangle$  et  $\langle \hat{B} \rangle$  en fonction de  $\lambda$  et de  $\beta$ . En effet, on a

$$\langle \hat{A} \rangle - \text{Im} \lambda \langle \hat{B} \rangle = \text{Re} \beta, \quad \text{Re} \lambda \langle \hat{B} \rangle = \text{Im} \beta. \quad (1.19)$$

Si  $\text{Re} \lambda \neq 0$ , on obtient

$$\langle \hat{A} \rangle = \text{Re} \beta + \frac{\text{Im} \lambda}{\text{Re} \lambda} \text{Im} \beta, \quad \langle \hat{B} \rangle = \frac{\text{Im} \beta}{\text{Re} \lambda}. \quad (1.20)$$

Si  $\text{Re} \lambda = 0$  alors  $\text{Im} \beta = 0$  et la seule relation qui reste est

$$\langle \hat{A} \rangle = \text{Re} \beta + \text{Im} \lambda \langle \hat{B} \rangle. \quad (1.21)$$

## 1.2 États cohérents et comprimés de l'oscillateur harmonique quantique

Nous considérons les opérateurs de position  $\hat{x}$  et d'impulsion  $\hat{p}$  satisfaisant la relation de commutation canonique (lorsque  $\hbar = 1$ )

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hat{I}. \quad (1.22)$$

Alors, la relation (1.4), donne

$$(\Delta \hat{x})^2 (\Delta \hat{p})^2 \geq \frac{1}{4} \left( 1 + \langle \hat{F} \rangle^2 \right), \quad (1.23)$$

avec

$$\langle \hat{F} \rangle = \langle \{\hat{x}, \hat{p}\} \rangle = \langle \{\hat{x}, \hat{p}\} \rangle - 2\langle \hat{x} \rangle \langle \hat{p} \rangle. \quad (1.24)$$

Les états qui minimisent la relation d'incertitude (1.23) satisfont l'équation aux valeurs propres:

$$[\hat{x} + i\lambda\hat{p}]|\psi\rangle = [\langle\hat{x}\rangle + i\lambda\langle\hat{p}\rangle]|\psi\rangle, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (1.25)$$

Si on définit les opérateurs de création  $\hat{a}^\dagger$  et d'annihilation  $\hat{a}$  comme

$$\hat{a}^\dagger = \frac{\hat{x} - i\hat{p}}{\sqrt{2}}, \quad \hat{a} = \frac{\hat{x} + i\hat{p}}{\sqrt{2}}, \quad (1.26)$$

tels que  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ , alors l'équation (1.25) devient

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[(1 - \lambda)\hat{a}^\dagger + (1 + \lambda)\hat{a}]|\psi\rangle = \beta|\psi\rangle, \quad (1.27)$$

avec  $\beta = [\langle\hat{x}\rangle + i\lambda\langle\hat{p}\rangle]$ .

Dans le cas particulier où  $\lambda = 1$ , l'état  $|\psi\rangle$  est un état propre de l'annihilateur  $\hat{a}$ , c'est-à-dire l'état cohérent de l'oscillateur harmonique de hamiltonien  $\hat{H}_{osc}^0 = \hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}$ . Dans le cas où  $\lambda = -1$ ,  $|\psi\rangle$  est un état propre de l'opérateur de création  $\hat{a}^\dagger$  qui, comme nous le savons n'est pas normalisable. Ce dernier cas sera donc éliminé de nos considérations.

Proposons-nous, à présent, de résoudre l'équation générale (1.27). Pour cela, exprimons la fonction  $|\psi\rangle$  comme une superposition des états propres  $|n\rangle$  de l'énergie de  $\hat{H}_{osc}^0$ . On se rappelle que

$$\hat{H}_{osc}^0|n\rangle = E_n^0|n\rangle, \quad \text{avec} \quad E_n^0 = \left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (1.28)$$

Un tel état  $|n\rangle$  peut s'obtenir comme

$$|n\rangle = \frac{\hat{a}^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}|0\rangle, \quad (1.29)$$

où  $|0\rangle$  est l'état fondamental. Les opérateurs  $\hat{a}$  et  $\hat{a}^\dagger$  satisfont les relations habituelles:

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (1.30)$$

Ainsi, si nous écrivons

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle, \quad C_n \in \mathbb{C}, \quad (1.31)$$

en insérant (1.31) dans (1.27), et en tenant compte (1.30), nous trouvons le système d'équations suivant, servant à déterminer les coefficients  $C_n$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (1 - \lambda) C_{n-1} + \sqrt{n+1} (1 + \lambda) C_{n+1} \right] &= \beta C_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \\ \frac{(1 + \lambda)}{\sqrt{2}} C_1 &= \beta C_0. \end{aligned} \quad (1.32)$$

- Si  $\lambda = 1$ , la relation de récurrence des coefficients  $C_n$  est donnée par

$$C_{n+1} = \frac{\beta}{\sqrt{2}} \frac{C_n}{\sqrt{n+1}} \quad \rightarrow \quad C_n = \left( \frac{\beta}{\sqrt{2}} \right)^n \frac{C_0}{\sqrt{n!}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.33)$$

En utilisant (1.30), on en déduit rien d'autre que les états cohérents de l'oscillateur harmonique standard:

$$|E.C\rangle = C_0 \exp\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}} \hat{a}^\dagger\right) |0\rangle. \quad (1.34)$$

Pour avoir des états normalisés, c'est-à-dire tels que  $\langle E.C | E.C \rangle = 1$ , il faut que  $C_0 = e^{-\frac{|\beta|^2}{4}}$ . Cela nous donne

$$|E.C\rangle = \exp\left(-\frac{|\tilde{\beta}|^2}{2}\right) \exp(\tilde{\beta} \hat{a}^\dagger) |0\rangle, \quad (1.35)$$

avec  $\tilde{\beta} = \frac{\beta}{\sqrt{2}}$  que l'on peut encore écrire sous la forme suivante [Pe 86]:

$$|E.C\rangle = \hat{D}(\tilde{\beta}) |0\rangle, \quad \text{où} \quad \hat{D}(\tilde{\beta}) = \exp(\tilde{\beta} \hat{a}^\dagger - \tilde{\beta} \hat{a}) \quad (1.36)$$

est un opérateur unitaire de déplacement qui satisfait

$$\hat{D}(\tilde{\beta}) \hat{a} \hat{D}^\dagger(\tilde{\beta}) = \hat{a} - \tilde{\beta}. \quad (1.37)$$

Les dispersions des opérateurs  $\hat{x}$  et  $\hat{p}$  dans ces états sont données par

$$(\Delta\hat{x})^2 = (\Delta\hat{p})^2 = \frac{1}{2}. \quad (1.38)$$

On peut ici faire un lien avec l'oscillateur harmonique déplacé dont l'hamiltonien est donné par

$$\hat{H} = \hat{A}^\dagger \hat{A} + \frac{1}{2}, \quad \text{où } \hat{A} = \hat{a} + \tilde{\beta}, \quad (1.39)$$

qui est tel que

$$[\hat{H}, \hat{A}] = -\hat{A}, \quad \text{car } [\hat{A}, \hat{A}^\dagger] = 1, \quad (1.40)$$

ce qui nous dit que  $\hat{A}$  continue d'être un opérateur d'annihilation. Les états propres de l'énergie de cet hamiltonien sont  $|\tilde{n}\rangle$  tels que

$$\hat{H}|\tilde{n}\rangle = \tilde{E}_n|\tilde{n}\rangle. \quad (1.41)$$

On a alors

$$|\tilde{n}\rangle = \frac{\hat{A}^{\dagger n}}{\sqrt{n!}} |\tilde{0}\rangle, \quad \tilde{E}_n = n + \frac{1}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.42)$$

où  $|\tilde{0}\rangle$  est la solution normalisée de l'équation aux valeurs propres (1.41) correspondant à la valeur propre  $\tilde{E}_0 = \frac{1}{2}$ , c'est-à-dire

$$(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \tilde{\beta} \hat{a} + \tilde{\beta} \hat{a}^\dagger + |\tilde{\beta}|^2)|\tilde{0}\rangle = 0. \quad (1.43)$$

Si on écrit l'état  $|\tilde{0}\rangle$  comme une série d'états propres de l'oscillateur harmonique standard, à savoir:

$$|\tilde{0}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_n |n\rangle \quad (1.44)$$

et qu'on insère cette expression dans l'équation (1.43), on obtient la relation de récurrence suivante pour les coefficients  $\tilde{C}_n$ :

$$\tilde{C}_n = \frac{(-\tilde{\beta})^n}{\sqrt{n!}} \tilde{C}_0, \quad (1.45)$$

ce qui nous dit que l'état  $|\tilde{0}\rangle = \tilde{C}_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\tilde{\beta})^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$  n'est autre que l'état cohérent de l'oscillateur harmonique standard et

$$|\tilde{0}\rangle = \hat{D}(\tilde{\beta})|0\rangle, \quad \text{avec} \quad \hat{D}(\tilde{\beta}) = \exp(\tilde{\beta}\hat{a} - \tilde{\beta}\hat{a}^\dagger). \quad (1.46)$$

Les états propres correspondant à l'hamiltonien de l'oscillateur harmonique déplacé sont donc donnés par

$$|\tilde{n}\rangle = \frac{\hat{A}^{\dagger n}}{\sqrt{n!}} \hat{D}(\tilde{\beta})|0\rangle, \quad (1.47)$$

ou encore, en tenant compte de la propriété (1.37) mais sur  $\hat{a}^\dagger$ :

$$|\tilde{n}\rangle = \hat{D}(\tilde{\beta}) \frac{\hat{a}^{\dagger n}}{\sqrt{n!}} |0\rangle = \hat{D}(\tilde{\beta}) |n\rangle, \quad (1.48)$$

c'est-à-dire, les états propres de  $\hat{H}_{osc}^0$  mais déplacés par l'opérateur unitaire  $\hat{D}(\tilde{\beta})$ .

De plus, les valeurs propres associées à ces états (les énergies) restent les mêmes que pour le cas de l'oscillateur non déplacé.

- Si  $\lambda \neq \pm 1$  et que  $\beta = 0$  (cas dégénéré), la relation de récurrence des coefficients  $C_n$  est

$$C_{2k+1} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$C_{2k} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{\sqrt{(2k)!}} \left( \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \right)^k C_0, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (1.49)$$

On peut alors poser

$$\left( \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \right) = \delta e^{i\phi}, \quad \delta \in \mathbb{R}_+, \phi \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \quad (1.50)$$

et les états propres sont donnés par

$$|\psi\rangle = C_0 \left[ |0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2!}} \delta e^{i\phi} |2\rangle + \frac{3}{\sqrt{4!}} \delta^2 e^{2i\phi} |4\rangle + \dots \right]. \quad (1.51)$$

Cette dernière équation peut s'écrire sous la forme d'un opérateur exponentiel agissant sur l'état vide:

$$|\psi\rangle = C_0 \exp\left(-\delta e^{i\phi} \frac{\hat{a}^{\dagger 2}}{2}\right) |0\rangle. \quad (1.52)$$

- Pour le cas général où  $\lambda \neq \pm 1$  et  $\beta \neq 0$ , il est difficile de trouver une expression simple pour la relation de récurrence des coefficients  $C_n$  en utilisant l'équation (1.32), mais on peut construire la solution en profitant des résultats particuliers que nous venons d'étudier. En effet, à l'aide de la relation de commutation

$$e^{-\eta \hat{a}^{\dagger 2}} \hat{a} e^{\eta \hat{a}^{\dagger 2}} = \hat{a} + 2\eta \hat{a}^{\dagger}, \quad (1.53)$$

on peut démontrer facilement que

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[(1-\lambda)\hat{a}^{\dagger} + (1+\lambda)\hat{a}] \exp\left(-\delta e^{i\phi} \frac{\hat{a}^{\dagger 2}}{2}\right) = \exp\left(-\delta e^{i\phi} \frac{\hat{a}^{\dagger 2}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{(1+\delta e^{i\phi})}\hat{a}\right), \quad (1.54)$$

d'où on tire, en regardant (1.34), que la solution générale de l'équation aux valeurs propres (1.27) est de la forme

$$|\psi; \lambda, \beta\rangle = (C_{\lambda, \beta})^{-1/2} \exp\left(-\delta e^{i\phi} \frac{\hat{a}^{\dagger 2}}{2}\right) \exp\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}}(1+\delta e^{i\phi})\hat{a}^{\dagger}\right) |0\rangle. \quad (1.55)$$

Les constantes de normalisation  $C_{\lambda, \beta}$  telles que  $\langle \psi | \psi \rangle = 1$  sont données par:

$$C_{\lambda, \beta} = (1 - \delta^2)^{-1/2} \exp\left[\frac{|\eta_2|^2 - \delta \operatorname{Re}(e^{-i\phi} \eta_2^2)}{1 - \delta^2}\right], \quad (1.56)$$

où

$$\eta_2 = \frac{\beta}{\sqrt{2}} (1 + \delta e^{i\phi}). \quad (1.57)$$

En principe, ces constantes peuvent s'obtenir en prenant directement la norme des états (1.55), mais il existe une méthode plus facile pour les obtenir, basée sur la représentation de Fock-Bargmann de ces états (voir appendice A).

D'autre part, si on introduit les opérateurs  $\hat{K}_{\pm}$  et  $\hat{K}_3$ , quadratiques en  $\hat{a}$  et  $\hat{a}^{\dagger}$ ,

$$\hat{K}_+ = \hat{K}_1 + i\hat{K}_2 = \frac{\hat{a}^{\dagger 2}}{2}, \quad \hat{K}_- = \hat{K}_1 - i\hat{K}_2 = \frac{\hat{a}^2}{2}, \quad \hat{K}_3 = \frac{1}{4}(\hat{a}\hat{a}^{\dagger} + \hat{a}^{\dagger}\hat{a}), \quad (1.58)$$

qui satisfont l'algèbre de Lie  $\mathfrak{su}(1,1)$ :

$$[\hat{K}_1, \hat{K}_2] = -i\hat{K}_3, \quad [\hat{K}_2, \hat{K}_3] = -i\hat{K}_1, \quad [\hat{K}_3, \hat{K}_1] = i\hat{K}_2, \quad (1.59)$$

on peut écrire la décomposition [MW 72]

$$\begin{aligned} \exp(\sigma_1 \hat{K}_+ - \sigma_2 \hat{K}_-) &= \exp\left(\frac{\sigma_1 \tanh(\sqrt{\sigma_1 \sigma_2})}{\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}} \hat{K}_+\right) \times \\ &\exp\left(2 \ln [(\cosh(\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}))^{-1}] \hat{K}_3\right) \exp\left(-\frac{\sigma_2 \tanh(\sqrt{\sigma_1 \sigma_2})}{\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}} \hat{K}_-\right). \end{aligned} \quad (1.60)$$

On obtient ainsi l'état  $|\psi; \lambda, \beta\rangle$  en agissant sur un état cohérent avec l'opérateur unitaire

$$\hat{S}(\chi) = \exp\left(\chi \frac{\hat{a}^{\dagger 2}}{2} - \bar{\chi} \frac{\hat{a}^2}{2}\right), \quad \text{où} \quad \frac{\chi}{|\chi|} \tanh |\chi| = -\delta e^{i\phi}. \quad (1.61)$$

On s'aperçoit que le paramètre  $\delta$  est restreint à l'intervalle  $[0, 1[$ . En effet, si on multiplie l'état  $|\psi; \lambda, \beta\rangle$  par une constante, cet état continue d'être une solution de l'équation aux valeurs propres (1.27). En particulier, en profitant du fait que l'action de l'opérateur  $\hat{a}$  sur l'état cohérent  $\exp(\eta_2 \hat{a}^\dagger) |0\rangle$  ne produit qu'une constante, on peut écrire  $|\psi; \lambda, \beta\rangle$  sous la forme:

$$|\psi; \lambda, \beta\rangle = (\tilde{C}_{\lambda, \beta})^{-1/2} \underbrace{\exp(-\delta e^{i\phi} \hat{K}_+) \exp(\nu \hat{K}_3) \exp(-\gamma \hat{K}_-)} \exp(\eta_2 e^{-\nu/2} \hat{a}^\dagger) |0\rangle, \quad (1.62)$$

où  $\nu$  et  $\gamma$  sont des constantes. Si l'on choisit les constantes  $\nu$  et  $\gamma$  de manière à rendre unitaire le produit des opérateurs signalés par la parenthèse, c'est-à-dire, qu'on le remplace par l'opérateur unitaire  $\hat{S}(\chi)$ , par une simple comparaison des termes, on trouve que  $\frac{\chi}{|\chi|} \tanh |\chi| = -\delta e^{i\phi} = \bar{\gamma}$  et  $e^{-\nu/2} = \cosh |\chi|$ . Les états comprimés deviennent (voir, par exemple, [Tr 92]) donc

$$|\psi; \lambda, \beta\rangle = (\tilde{C}_{\lambda, \beta})^{-1/2} \hat{S}(\chi) \exp\left[\frac{\beta}{\sqrt{2}} (1 + \delta e^{i\phi}) \cosh(|\chi|) \hat{a}^\dagger\right] |0\rangle \quad (1.63)$$

et les constantes de normalisation,  $\tilde{C}_{\lambda, \beta}$ , peuvent maintenant se calculer facilement. Elles s'écrivent



$$\tilde{C}_{\lambda,\beta} = \exp \left[ \frac{|\beta|^2}{2} (1 + 2\delta \cos \phi + \delta^2) \cosh^2(|\lambda|) \right]. \quad (1.64)$$

On se rappelle que pour des valeurs de  $\lambda$  telles que  $|\lambda| \neq 1$ , les solutions des équations aux valeurs propres s'appellent des états comprimés car, dans ces états, la dispersion de l'un des opérateurs  $\hat{x}$  ou  $\hat{p}$  est plus petite que  $\frac{1}{2}\sqrt{1 + \langle \hat{F} \rangle^2}$ . Si  $|\lambda| = 1$ , on a des états cohérents.

Le calcul des valeurs de  $(\Delta\hat{x})^2$  et  $(\Delta\hat{p})^2$  se fait aisément. En effet, à partir de l'équation (1.50), nous pouvons démontrer que

$$\lambda = \left[ \frac{(1 - \delta^2)}{1 + 2\delta \cos \phi + \delta^2} - i \frac{2\delta \sin \phi}{1 + 2\delta \cos \phi + \delta^2} \right], \quad (1.65)$$

ce qui nous dit que  $\text{Re}\lambda$  est toujours différent de zéro. Grâce à (1.10), la valeur moyenne de  $\hat{F}$  dans les états comprimés est donnée par:

$$\langle \hat{F} \rangle = \frac{\text{Im} \lambda}{\text{Re} \lambda} = \frac{-2\delta \sin \phi}{(1 - \delta^2)} \quad (1.66)$$

et les dispersions de  $\hat{x}$  et  $\hat{p}$  sont obtenues de (1.10) et (1.13) comme étant:

$$(\Delta\hat{x})^2 = \frac{|\lambda|^2}{2 \text{Re} \lambda} = \frac{(1 - 2\delta \cos \phi + \delta^2)}{2(1 - \delta^2)}, \quad (1.67)$$

et

$$(\Delta\hat{p})^2 = \frac{1}{2 \text{Re} \lambda} = \frac{(1 + 2\delta \cos \phi + \delta^2)}{2(1 - \delta^2)}. \quad (1.68)$$

Selon l'équation (1.18), le facteur  $\Delta$  est donnée par

$$\Delta = \frac{\sqrt{(1 - \delta^2)^2 + 4\delta^2 \sin^2 \phi}}{2(1 - \delta^2)}. \quad (1.69)$$

Le quotient entre les dispersions  $(\Delta\hat{x})^2$  et  $(\Delta\hat{p})^2$ , à savoir:

$$\frac{(\Delta\hat{x})^2}{(\Delta\hat{p})^2} = |\lambda|^2 = \frac{(1 - 2\delta \cos \phi + \delta^2)}{(1 + 2\delta \cos \phi + \delta^2)}, \quad (1.70)$$

nous dit qu'on aura des états cohérents lorsque  $\phi = -\frac{\pi}{2}$  ou  $\phi = \frac{\pi}{2}$ , tandis qu'on aura des états  $\hat{x}$ -comprimés lorsque  $\phi \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  et  $\hat{p}$ -comprimés lorsque  $\phi \in ]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ .

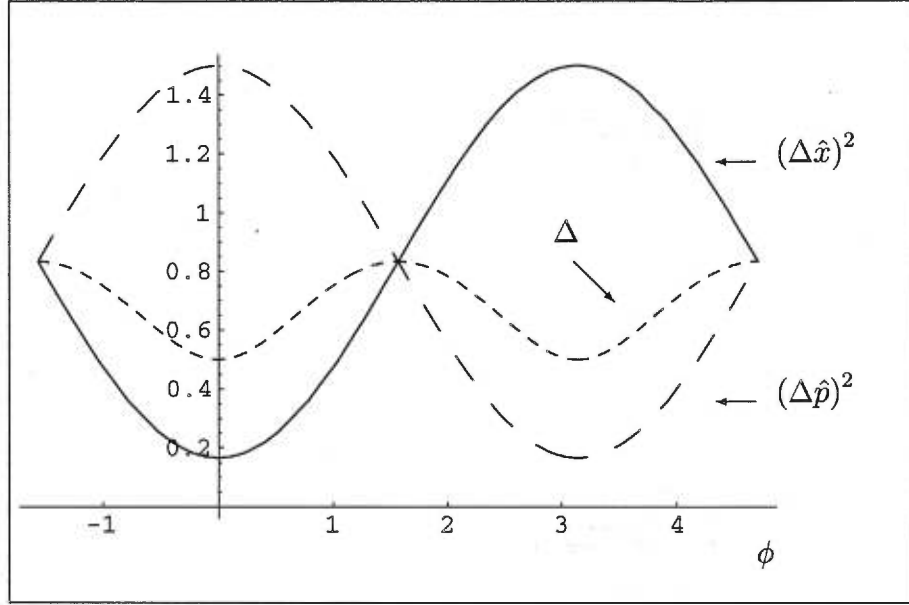


FIG. 1.1 – Graphique des dispersions  $(\Delta \hat{x})^2$  et  $(\Delta \hat{p})^2$  en fonction de l'angle  $\phi$ ,  $\delta = 0.5$ .

La figure 1.1 montre les graphiques des dispersions de  $\hat{x}$  et  $\hat{p}$ , données par les équations (1.67) et (1.68), en fonction de l'angle  $\phi$  pour  $\delta = 0.5$ . Dans cette figure, on peut observer le comportement prédit par l'équation (1.70). Les deux courbes s'intersectent lorsque l'angle  $\phi = -\frac{\pi}{2}$  et  $\phi = \frac{\pi}{2}$ , ce qui correspond bien aux états cohérents.

La figure 1.2 montre le comportement des dispersions de  $\hat{x}$  et  $\hat{p}$  en fonction du paramètre  $\delta$  pour l'angle  $\phi = \frac{\pi}{6}$ . Nous y observons que dans cette région  $\hat{x}$  est comprimé et que pour  $\delta \mapsto 0$  les deux courbes coïncident en un point. En fait, ce point représente un état cohérent particulier, à savoir l'état avec  $\lambda = 1$ .

### 1.3 États cohérents et comprimés associés aux opérateurs de moment angulaire

Dans cette section, nous allons présenter les états cohérents et les états comprimés associés aux opérateurs de moment angulaire  $\hat{J}_1$  et  $\hat{J}_2$  satisfaisant la relation de commutation

$$[\hat{J}_1, \hat{J}_2] = i\hat{J}_3. \quad (1.71)$$

En d'autres termes, nous allons trouver les états propres solutionnant l'équation aux

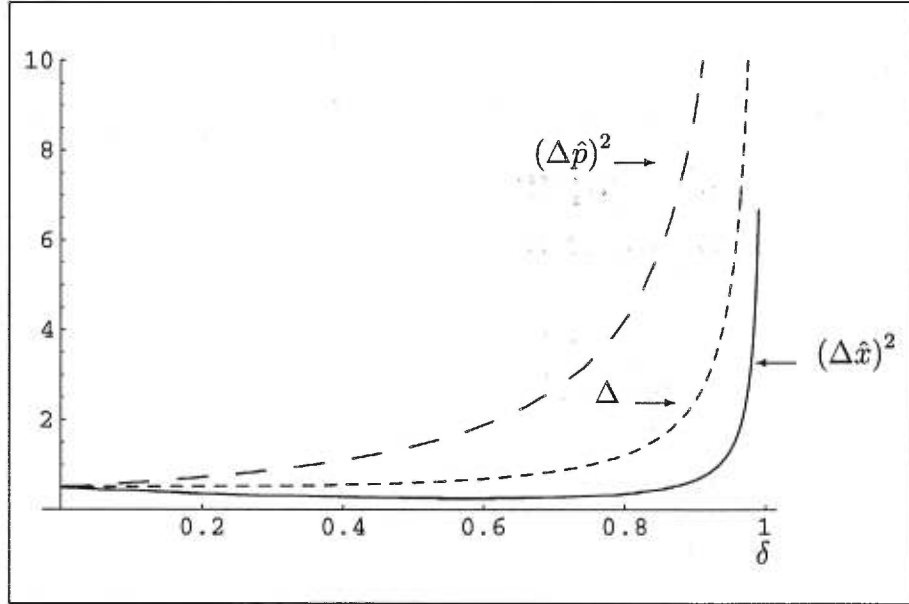


FIG. 1.2 – Graphique des dispersions  $(\Delta\hat{x})^2$ ,  $(\Delta\hat{p})^2$  et du facteur  $\Delta$  en fonction de  $\delta$  pour  $\phi = \frac{\pi}{6}$ .

valeurs propres

$$[\hat{J}_1 + i\lambda\hat{J}_2]|\psi\rangle = \beta|\psi\rangle, \quad (1.72)$$

avec  $\beta = [\langle\hat{J}_1\rangle + i\lambda\langle\hat{J}_2\rangle]$ . Nous ne donnerons pas tous les détails de calcul car, dans le chapitre suivant, nous allons résoudre une équation aux valeurs propres dont l'équation (1.72) est un cas particulier. Par contre, ce qui est intéressant de retenir de cette section, c'est la méthode de résolution qui est tout-à-fait différente de celle que nous utiliserons dans le prochain chapitre.

Si nous introduisons les opérateurs d'échelle  $\hat{J}_+$  et  $\hat{J}_-$  tels que  $\hat{J}_\pm = \hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2$  avec les relations de commutation:

$$[\hat{J}_-, \hat{J}_+] = -2J_3, \quad [\hat{J}_3, \hat{J}_\pm] = \pm\hat{J}_\pm, \quad (1.73)$$

l'équation (1.72) devient

$$\frac{1}{2}[(1+\lambda)\hat{J}_+ + (1-\lambda)\hat{J}_-]|\psi\rangle = \beta|\psi\rangle. \quad (1.74)$$

Exprimons les solutions de cette équation comme une combinaison linéaire des états

$|j, m\rangle$  de la représentation irréductible  $T^j(g)$  du groupe  $SU(2)$ , à savoir:

$$|\psi\rangle = \sum_{m=-j}^j C_m^j |j, m\rangle. \quad (1.75)$$

En insérant (1.75) dans (1.74) et en tenant compte des relations

$$\hat{J}_\pm |j, m\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j, m \pm 1\rangle, \quad (1.76)$$

on trouve le système d'équations suivant servant à déterminer les coefficients  $C_m^j$ :

$$(1 + \lambda) \sqrt{(j + m)(j - m + 1)} C_{m-1}^j + (1 - \lambda) \sqrt{(j - m)(j + m + 1)} C_{m+1}^j = 2\beta C_m^j, \quad (1.77)$$

lorsque  $m = -j, \dots, j$  et que  $C_{j+1}^j = C_{-(j+1)}^j = 0$ .

- Si  $\lambda = 1$ , l'équation aux valeurs propres (1.74) devient  $\hat{J}_+ |\psi\rangle = \beta |\psi\rangle$  et la relation de récurrence pour les coefficients  $C_m^j$  en termes du coefficient  $C_j^j$  est donnée par

$$C_{j-n}^j = \beta^n \sqrt{\frac{(2j-n)!}{(2j)!n!}} C_j^j, \quad n = 0, 1, \dots, 2j-1 \quad \text{et} \quad \beta C_{-j}^j = 0. \quad (1.78)$$

Alors la seule possibilité de solution est la valeur propre  $\beta = 0$ , le seul coefficient non nul étant  $C_j^j$ . L'état propre correspondant est l'état  $|\psi\rangle = |j, j\rangle$ .

- Si  $\lambda = -1$ , l'équation aux valeurs propres (1.74) devient  $\hat{J}_- |\psi\rangle = \beta |\psi\rangle$  et la relation de récurrence pour les coefficients  $C_m^j$  en termes du coefficient  $C_{-j}^j$  est donnée par

$$C_{-j+n}^j = \beta^n \sqrt{\frac{(2j-n)!}{(2j)!n!}} C_{-j}^j, \quad n = 0, 1, \dots, 2j-1 \quad \text{et} \quad \beta C_j^j = 0. \quad (1.79)$$

Alors la seule possibilité de solution est encore la valeur propre  $\beta = 0$ , le seul coefficient non nul étant  $C_{-j}^j$ . L'état propre correspondant est l'état  $|\psi\rangle = |j, -j\rangle$ .

- Si  $\lambda \neq \pm 1$ , le système d'équations (1.77) présente la symétrie suivante:

$$(1 - \lambda)^m C_m^j = \pm (1 + \lambda)^m C_{-m}^j, \quad (1.80)$$

ce qui va aider à la résolution. Lorsque  $\beta = 0$ , la relation de récurrence pour les coefficients  $C_m^j$  en termes des coefficients  $C_j^j$  est donnée par

$$C_{j-2k}^j = (-1)^k \left( \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \right)^k \sqrt{\binom{2j}{2k}} \left[ \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{(2j-1) \cdot (2j-3) \cdots (2j-2k+1)} \right] C_j^j \quad (1.81)$$

et l'état propre correspondant est

$$|\psi\rangle_0^j = C_j^j e^{i(j\phi/2)} \sum_{k=0}^j (-1)^k \sqrt{\binom{2j}{2k}} \times \left[ \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{(2j-1) \cdot (2j-3) \cdots (2j-2k+1)} \right] \delta^k e^{-i(j-2k)\phi/2} |j, j-2k\rangle, \quad (1.82)$$

où on a utilisé la relation (1.50) exprimant  $\lambda$  en fonction de  $\delta$  et  $\phi$ . Cet état peut encore s'exprimer sous la forme

$$|\psi\rangle_0^j = C_j^j e^{i(j\phi/2)} \delta^{j/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \ln(\delta) \hat{J}_3\right) \sum_{k=0}^j (-1)^k \sqrt{\binom{2j}{2k}} \times \left[ \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{(2j-1) \cdot (2j-3) \cdots (2j-2k+1)} \right] e^{-i(j-2k)\phi/2} |j, j-2k\rangle. \quad (1.83)$$

Si  $\lambda$  est imaginaire pur, on a  $\delta = 1$  et  $\lambda = -i \tan(\frac{\phi}{2})$ , le résultat (1.83) se réduit à celui trouvé par R.R. Puri [Pu 94], à savoir :

$$|\psi\rangle_0^j = \hat{U} |j, 0\rangle, \quad \hat{U} = \exp\left(-\frac{\pi}{4} (e^{-i\phi/2} \hat{J}_+ - e^{i\phi/2} \hat{J}_-)\right). \quad (1.84)$$

Pour  $\lambda$  un nombre complexe quelconque, nous combinons les informations données en (1.83) et (1.84) pour trouver une expression simple de la forme:

$$|\psi\rangle_0^j = C_0^j \exp\left[-\frac{1}{2} \ln(\delta) \hat{J}_3\right] \exp\left[-\frac{\pi}{4} (e^{-i\phi/2} \hat{J}_+ - e^{i\phi/2} \hat{J}_-)\right] |j, 0\rangle, \quad (1.85)$$

où les termes constants ont été rassemblés dans la constante  $C_0^j$ .

- En général, si  $\lambda \neq \pm 1$ , l'analyse du système d'équations (1.77) nous dit que pour chaque  $j$ , il existe  $(2j+1)$  valeurs permises de la valeur propre  $\beta$ . Ces valeurs sont

$$\beta_m^j = m\sqrt{1 - \lambda^2}, \quad m = -j, \dots, j. \quad (1.86)$$

Nous pouvons alors démontrer que les états propres associés à ces valeurs propres, solutionnant l'équation (1.74), sont donnés par

$$|\psi\rangle_m^j = C_m^j \exp\left[-\frac{1}{2} \ln(\delta) \hat{J}_3\right] \hat{U} |j, m\rangle, \quad (1.87)$$

lorsque  $m = -j, \dots, j$  et  $\hat{U}$  est donné par la formule (1.84). En effet, en utilisant l'algèbre des opérateurs, il est aisé de voir que l'on a

$$[\hat{J}_1 + i\lambda\hat{J}_2] \left[ \exp\left(-\frac{1}{2} \ln(\delta) \hat{J}_3\right) \hat{U} \right] = \left[ \exp\left(-\frac{1}{2} \ln(\delta) \hat{J}_3\right) \hat{U} \right] [\sqrt{1 - \lambda^2} \hat{J}_3]. \quad (1.88)$$

Nous réalisons alors que si nous appliquons  $|j, m\rangle$  aux deux membres de cette dernière équation, nous obtenons comme solutions de (1.72), les états (1.87) lorsque les valeurs propres  $\beta$  sont données par (1.86).

On peut démontrer que les états (1.87) exprimés en termes des polynômes de Jacobi (voir appendice B) prennent la forme suivante:

$$|\psi\rangle_m^j = C_m^j \exp\left(-\frac{1}{2} \ln(\delta) \hat{J}_3\right) \times \quad (1.89)$$

$$e^{im\phi/2} e^{-i\frac{\phi}{2} \hat{J}_3} \sum_{r=-j}^j 2^r \sqrt{\frac{(j+r)!(j-r)!}{(j-m)!(j+m)!}} P_{j+r}^{-r+m, -r-m}(0) |j, r\rangle.$$

On s'intéresse, à présent, aux dispersions des opérateurs  $\hat{J}_1$  et  $\hat{J}_2$  dans les états associés à  $\lambda \neq \pm 1$  et  $\beta \neq 0$ . Si  $\text{Re } \lambda \neq 0$ , les valeurs moyennes des opérateurs  $\hat{J}_1$  et  $\hat{J}_2$  dans les états  $|\psi\rangle_m^j$ , sont obtenues à l'aide de l'équation (1.20) avec  $\beta$  donné par (1.86). Ainsi on trouve:

$$\langle \hat{J}_1 \rangle_m^j = m \left[ \text{Re}(1 - \lambda^2)^{1/2} + \frac{\text{Im } \lambda}{\text{Re } \lambda} \text{Im}(1 - \lambda^2)^{1/2} \right] \quad (1.90)$$

et

$$\langle \hat{J}_2 \rangle_m^j = \frac{m}{\text{Re } \lambda} \text{Im}(1 - \lambda^2)^{1/2}. \quad (1.91)$$

Comme l'équation (1.50) nous donne

$$\sqrt{1 - \lambda^2} = 2\delta^{1/2} \left[ \frac{(\delta + 1) \cos(\frac{\phi}{2})}{1 + 2\delta \cos \phi + \delta^2} + i \frac{(1 - \delta) \sin(\frac{\phi}{2})}{1 + 2\delta \cos \phi + \delta^2} \right], \quad (1.92)$$

nous pouvons donc simplifier les expressions données en (1.90) et (1.91). On obtient:

$$\langle \hat{J}_1 \rangle_m^j = 2m \frac{\delta^{1/2}}{(\delta + 1)} \cos(\frac{\phi}{2}), \quad \langle \hat{J}_2 \rangle_m^j = 2m \frac{\delta^{1/2}}{(\delta + 1)} \sin(\frac{\phi}{2}). \quad (1.93)$$

D'autre part, les équations (1.13) et (1.15) nous disent que les dispersions  $(\Delta \hat{J}_1)^2$  et  $(\Delta \hat{J}_2)^2$  ainsi que la valeur moyenne de  $\hat{F}$  dans les états  $|\psi\rangle_m^j$  se rapportent à la valeur moyenne de l'opérateur  $\hat{J}_3$  de la façon suivante:

$$\langle \hat{F} \rangle_m^j = \frac{\text{Im } \lambda}{\text{Re } \lambda} \langle \hat{J}_3 \rangle_m^j, \quad \left( (\Delta \hat{J}_1)^2 \right)_m^j = \frac{|\lambda|^2}{2 \text{Re } \lambda} \langle \hat{J}_3 \rangle_m^j, \quad \left( (\Delta \hat{J}_2)^2 \right)_m^j = \frac{1}{2 \text{Re } \lambda} \langle \hat{J}_3 \rangle_m^j. \quad (1.94)$$

Selon l'équation (1.87), la valeur moyenne de  $\hat{J}_3$  dans les états  $|\psi\rangle_m^j$  s'écrit:

$$\langle \hat{J}_3 \rangle_m^j = \frac{\langle j, m | \hat{U}^\dagger e^{-(\frac{q}{2})\hat{J}_3} \hat{J}_3 e^{-(\frac{q}{2})\hat{J}_3} \hat{U} | j, m \rangle}{\langle j, m | \hat{U}^\dagger e^{-q\hat{J}_3} \hat{U} | j, m \rangle} = \left[ - \frac{\partial}{\partial q} \ln \left( \langle j, m | \hat{U}^\dagger e^{-q\hat{J}_3} \hat{U} | j, m \rangle \right) \right], \quad (1.95)$$

où nous avons défini  $q = \ln(\delta)$ . L'opérateur unitaire  $\hat{U}$ , donné par (1.84), peut s'exprimer sous la forme

$$\hat{U} = e^{-i\frac{\phi}{2}\hat{J}_3} e^{-i\frac{\pi}{2}\hat{J}_2} e^{i\frac{\phi}{2}\hat{J}_3}, \quad (1.96)$$

car

$$e^{-i\frac{\phi}{2}\hat{J}_3} \hat{J}_\pm e^{i\frac{\phi}{2}\hat{J}_3} = e^{\mp i\frac{\phi}{2}} \hat{J}_\pm, \quad e^{i\frac{\pi}{2}\hat{J}_2} \hat{J}_3 e^{-i\frac{\pi}{2}\hat{J}_2} = -\hat{J}_1. \quad (1.97)$$

Nous pouvons alors écrire:

$$\langle j, m | \hat{U}^\dagger e^{-q\hat{J}_3} \hat{U} | j, m \rangle = \langle j, m | e^{q\hat{J}_1} | j, m \rangle. \quad (1.98)$$

Si nous décomposons  $e^{q\hat{J}_1}$  de la façon habituelle

$$e^{q\epsilon\hat{J}_1} = e^{q\epsilon\left(\frac{j_+ + j_-}{2}\right)} = e^{\tanh\left(\frac{q\epsilon}{2}\right)\hat{J}_\pm} e^{\mp 2\ln\left(\cosh\left(\frac{q\epsilon}{2}\right)\right)\hat{J}_3} e^{\tanh\left(\frac{q\epsilon}{2}\right)\hat{J}_\mp}, \quad (1.99)$$

ou bien de la façon plus convenable

$$e^{q\epsilon\hat{J}_1} = e^{q\epsilon\left(\frac{j_+ + j_-}{2}\right)} = e^{\tanh\left(\frac{q\epsilon}{2}\right)\hat{J}_\pm} e^{\frac{1}{2}\sinh(q\epsilon)\hat{J}_\mp} e^{\mp 2\ln\left(\cosh\left(\frac{q\epsilon}{2}\right)\right)\hat{J}_3}, \quad (1.100)$$

et utilisons les relations

$$(\hat{J}_\pm)^n |j, m\rangle = \sqrt{\frac{(j \mp m)!(j \pm m + n)!}{(j \pm m)!(j \mp m - n)!}} |j, m \pm n\rangle, \quad (1.101)$$

nous obtenons alors les valeurs suivantes pour les éléments de matrice (1.98) :

$$\langle j, m | e^{q\hat{J}_1} | j, m \rangle = \cosh\left(\frac{q}{2}\right)^{\mp 2m} \frac{(j \pm m)!}{(j \mp m)!} \sum_{n=0}^{j \pm m} (-1)^n \frac{(j \mp m + n)!}{(j \pm m - n)! n! n!} \left(\frac{1 - \cosh q}{2}\right)^n. \quad (1.102)$$

Ces éléments peuvent s'exprimer en termes des polynômes de Jacobi (Voir appendice B):

$$\langle j, m | e^{q\hat{J}_1} | j, m \rangle = \cosh\left(\frac{q}{2}\right)^{\mp 2m} P_{j \pm m}^{0, \mp 2m}(\cosh q). \quad (1.103)$$

En insérant (1.103) dans (1.95) et en utilisant la règle de dérivation des polynômes de Jacobi (Voir appendice B):

$$\frac{d}{dx} P_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{(n + \alpha + \beta + 1)}{2} P_{n-1}^{\alpha+1, \beta+1}(x), \quad (1.104)$$

nous arrivons au résultat

$$\langle \hat{J}_3 \rangle_m^j = \pm m \tanh\left(\frac{q}{2}\right) - \frac{1}{2} \sinh(q) (j \mp m + 1) \frac{P_{j \pm m - 1}^{1, 1 \mp 2m}(\cosh q)}{P_{j \pm m}^{0, \mp 2m}(\cosh q)} \quad (1.105)$$

ou bien,

$$\langle \hat{J}_3 \rangle_m^j = -|m| \tanh\left(\frac{q}{2}\right) - \frac{1}{2} \sinh(q) (j + |m| + 1) \frac{P_{j - |m| - 1}^{1, 1 + 2|m|}(\cosh q)}{P_{j - |m|}^{0, 2|m|}(\cosh q)}, \quad (1.106)$$



car (1.105) nous dit que la valeur moyenne de  $\hat{J}_3$  dans les états  $|\psi\rangle_m^j$  ne dépend pas du signe de  $m$ .

En insérant (1.106) dans les équations (1.94) et tenant compte de l'équation (1.65) et de la définition de  $q$ , nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} \left( (\Delta \hat{J}_1)^2 \right)_m^j &= (1 - 2\delta \cos \phi + \delta^2) \left[ \frac{|m|}{2(1+\delta)^2} + \frac{(j+|m|+1)}{8\delta} \frac{P_{j-|m|-1}^{1,1+2|m|} \left( \frac{1+\delta^2}{2\delta} \right)}{P_{j-|m|}^{0,2|m|} \left( \frac{1+\delta^2}{2\delta} \right)} \right], \\ \left( (\Delta \hat{J}_2)^2 \right)_m^j &= (1 + 2\delta \cos \phi + \delta^2) \left[ \frac{|m|}{2(1+\delta)^2} + \frac{(j+|m|+1)}{8\delta} \frac{P_{j-|m|-1}^{1,1+2|m|} \left( \frac{1+\delta^2}{2\delta} \right)}{P_{j-|m|}^{0,2|m|} \left( \frac{1+\delta^2}{2\delta} \right)} \right], \\ \langle \hat{F} \rangle_m^j &= -\sin \phi \left[ \frac{2\delta|m|}{(1+\delta)^2} + \frac{(j+|m|+1)}{2} \frac{P_{j-|m|-1}^{1,1+2|m|} \left( \frac{1+\delta^2}{2\delta} \right)}{P_{j-|m|}^{0,2|m|} \left( \frac{1+\delta^2}{2\delta} \right)} \right]. \end{aligned} \quad (1.107)$$

Le passage à la limite  $\text{Re } \lambda \rightarrow 0$  équivaut au cas  $\delta = 1$  et  $\lambda = -i \tan \frac{\phi}{2}$ . Dans ce cas, les équations (1.93) se réduisent à

$$\langle \hat{J}_1 \rangle_m^j = m \cos\left(\frac{\phi}{2}\right), \quad \langle \hat{J}_2 \rangle_m^j = m \sin\left(\frac{\phi}{2}\right), \quad (1.108)$$

tandis que les équations (1.107) deviennent

$$\begin{aligned} \left( (\Delta \hat{J}_1)^2 \right)_m^j &= \frac{1}{2} [j(j+1) - m^2] \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ \left( (\Delta \hat{J}_2)^2 \right)_m^j &= \frac{1}{2} [j(j+1) - m^2] \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ \langle \hat{F} \rangle_m^j &= -\frac{1}{2} [j(j+1) - m^2] \sin \phi, \end{aligned} \quad (1.109)$$

en tenant compte du fait que

$$P_n^{\alpha,\beta}(1) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}{n!}. \quad (1.110)$$

Ce sont exactement les résultats obtenus par R.R. Puri [Pu 94] après le changement  $\phi \mapsto -2\phi$ . On se rappelle que c'est le cas où  $\langle \hat{J}_3 \rangle = 0$ , permis ici car les opérateurs  $\hat{J}_1$  et  $\hat{J}_2$  ne sont pas canoniques.

Pour le cas  $j = \frac{1}{2}$ , les équations (1.107) se réduisent à :

$$\begin{aligned} \left( (\Delta \hat{J}_1)^2 \right)_{\pm} &= \frac{(1 - 2\delta \cos \phi + \delta^2)}{4(1 + \delta)^2}, \\ \left( (\Delta \hat{J}_2)^2 \right)_{\pm} &= \frac{(1 + 2\delta \cos \phi + \delta^2)}{4(1 + \delta)^2}, \\ \langle \hat{F} \rangle_m^j &= -\frac{\delta \sin \phi}{(1 + \delta)^2}, \end{aligned} \quad (1.111)$$

et les facteurs  $\Delta$  respectifs sont donnés par :

$$\Delta_{\pm} = \frac{\sqrt{(1 - \delta^2)^2 + 4\delta^2 \sin^2 \phi}}{4(1 + \delta)^2}. \quad (1.112)$$

La figure 1.3 montre les graphiques des dispersions de  $\hat{J}_1$  et de  $\hat{J}_2$  en fonction de l'angle  $\phi$  pour  $\delta = 0.5$  et  $j = \frac{1}{2}$ . Les courbes sont pratiquement les mêmes que celles que nous avons obtenues dans le cas des dispersions  $\hat{x}$  et  $\hat{p}$  de l'oscillateur harmonique, cela parce que le quotient entre les dispersions est toujours  $|\lambda|^2$  et que le facteur commun de ces dispersions ne dépend pas de  $\phi$ . Cependant, il est évident que, pour une valeur fixée de  $\phi$ , le comportement des dispersions par rapport à la variable  $\delta$  est complètement différente. En effet, la figure 1.4 montre le comportement des dispersions de  $\hat{J}_1$  et  $\hat{J}_2$  en fonction du paramètre  $\delta$  lorsque l'angle  $\phi = \frac{\pi}{6}$  et  $j = \frac{1}{2}$ . Nous observons que dans cette région  $\hat{J}_1$  est comprimé et, qu'au fur et à mesure que  $\delta \mapsto 0$ , les deux courbes se rapprochent jusqu'à coïncider en un point. Ce point représente un état cohérent avec  $\lambda = 1$ , à savoir, l'état  $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ , c'est-à-dire l'état propre de l'opérateur  $\hat{J}_+$ . D'autre part, nous observons que pour des valeurs de  $\delta$  plus grandes que 1, au fur et à mesure que  $\delta$  croît, les deux courbes se rapprochent encore. Dans la limite  $\delta \mapsto \infty$ , les deux courbes coïncideront en un point. Ce point correspond à l'état cohérent avec  $\lambda = -1$ . En fait, il s'agit de l'état  $|\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\rangle$ , c'est-à-dire l'état propre de l'opérateur  $\hat{J}_-$ .

Lorsque  $j = 1$ , les dispersions de  $\hat{J}_1$  et  $\hat{J}_2$  sont données par :

$$\begin{aligned} \left( (\Delta \hat{J}_1)^2 \right)_{\pm 1}^1 &= \frac{(1 - 2\delta \cos \phi + \delta^2)}{2(1 + \delta)^2}, & \left( (\Delta \hat{J}_2)^2 \right)_{\pm 1}^1 &= \frac{(1 + 2\delta \cos \phi + \delta^2)}{2(1 + \delta)^2}, \\ \left( (\Delta \hat{J}_1)^2 \right)_0^1 &= \frac{(1 - 2\delta \cos \phi + \delta^2)}{2(1 + \delta^2)}, & \left( (\Delta \hat{J}_2)^2 \right)_0^1 &= \frac{(1 + 2\delta \cos \phi + \delta^2)}{2(1 + \delta^2)}, \end{aligned} \quad (1.113)$$

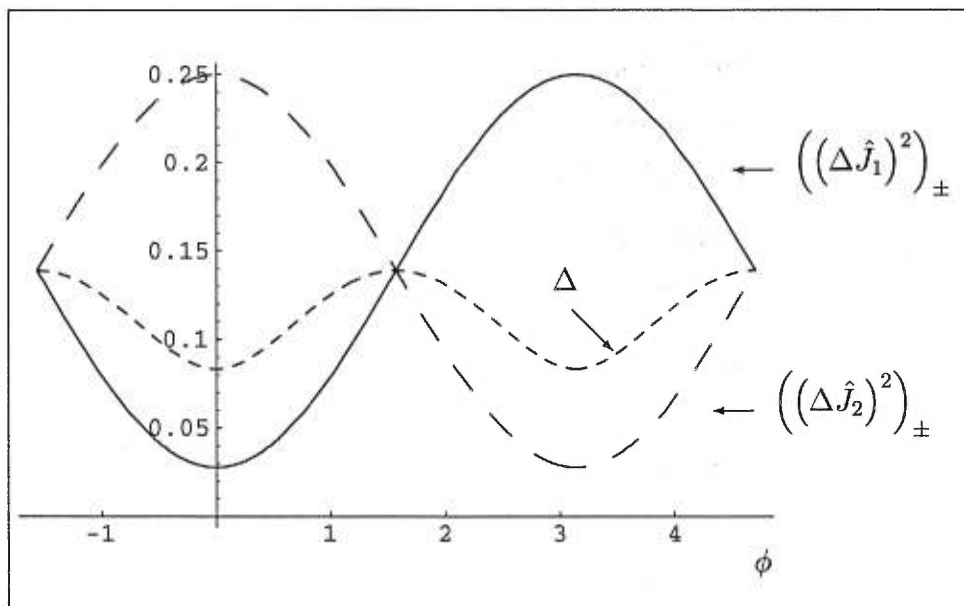


FIG. 1.3 – Graphique des dispersions  $((\Delta \hat{J}_1)^2)_\pm$  et  $((\Delta \hat{J}_2)^2)_\pm$  en fonction de l'angle  $\phi$  pour  $\delta = 0.5$ ,  $j = \frac{1}{2}$ .

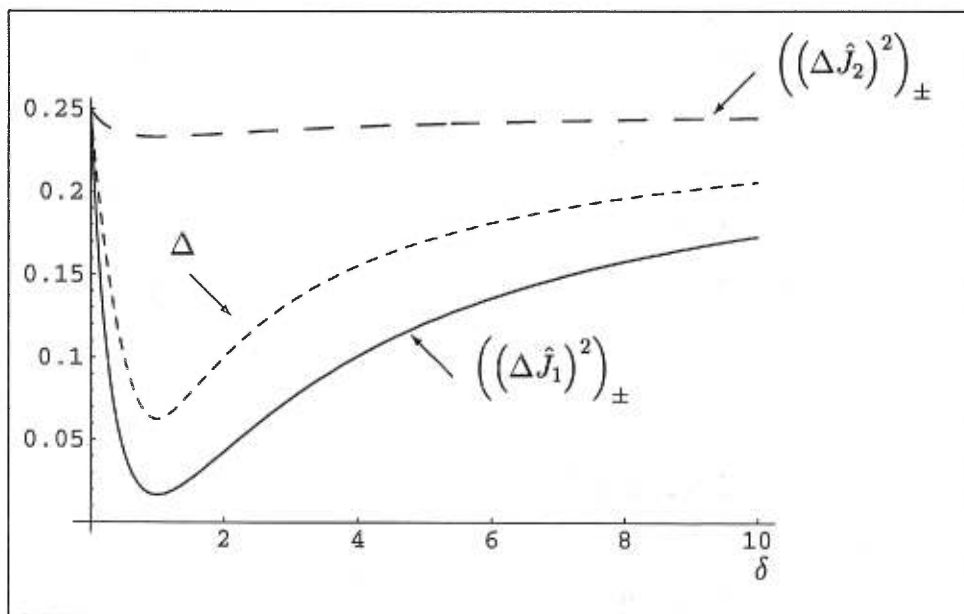


FIG. 1.4 – Graphique des dispersions  $((\Delta \hat{J}_1)^2)_\pm$  et  $((\Delta \hat{J}_2)^2)_\pm$  en fonction de  $\delta$  pour  $\phi = \frac{\pi}{6}$  et  $j = \frac{1}{2}$ .

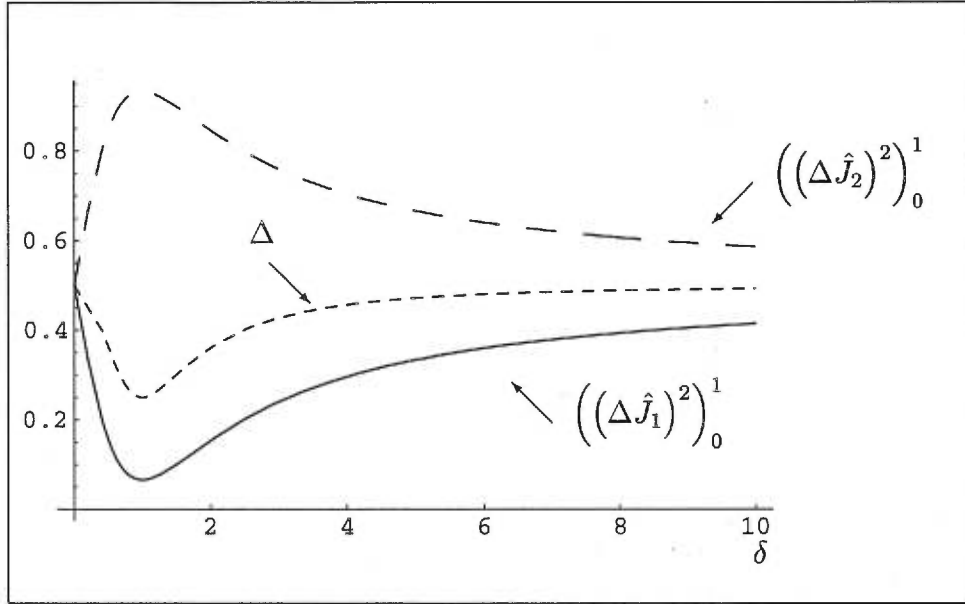


FIG. 1.5 – Graphique des dispersions  $\left((\Delta \hat{J}_1)^2\right)_0^1$  et  $\left((\Delta \hat{J}_2)^2\right)_0^1$  en fonction de  $\delta$  pour  $\phi = \frac{\pi}{6}$ ,  $j = 1$  et  $m = 0$ .

tandis que les facteurs  $\Delta$  respectifs sont donnés par:

$$\Delta_{\pm 1}^1 = \frac{\sqrt{(1 - \delta^2)^2 + 4\delta^2 \sin^2 \phi}}{2(1 + \delta)^2} \quad (1.114)$$

et

$$\Delta_{\pm 0}^1 = \frac{\sqrt{(1 - \delta^2)^2 + 4\delta^2 \sin^2 \phi}}{2(1 + \delta^2)} \quad (1.115)$$

La figure 1.5 montre le comportement des dispersions de  $\hat{J}_1$  et  $\hat{J}_2$  et du facteur  $\Delta$  en fonction du paramètre  $\delta$  lorsque l'angle  $\phi = \frac{\pi}{6}$ ,  $j = 1$  et  $m = 0$ . Les différences avec les courbes de la figure antérieure proviennent essentiellement des termes contenant les polynômes de Jacobi.

## 1.4 Système d'états cohérents généralisés

Pour que notre discussion soit complète, il est utile de faire le lien avec le travail de Perelomov [Pe 86] qui établit les fondements de la notion de système d'états cohérents généralisés (SECG) basés sur l'action d'une représentation irréductible d'un groupe de Lie sur certains états privilégiés d'un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ .

Si on se donne  $G$  un groupe de Lie arbitraire et  $T(g)$ ,  $g \in G$ , une représentation irréductible agissant sur les états de l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , on peut définir un système d'états cohérents généralisés comme étant  $\{|\psi_g\rangle\}$  tels que  $|\psi_g\rangle = T(g)|\psi_0\rangle$  lorsque  $|\psi_0\rangle$  est un vecteur fixé de  $\mathcal{H}$ . De plus, si  $H$  est le sous-groupe d'isotropie de l'état  $|\psi_0\rangle$ , c'est-à-dire si on a

$$T(h)|\psi_0\rangle = e^{\alpha(h)}|\psi_0\rangle, \quad \forall h \in H, \quad (1.116)$$

alors un état cohérent  $|\psi_g\rangle$  est déterminé par un point  $x = x(g)$  dans l'espace quotient  $G/H$  correspondant à l'élément  $g$ :  $|\psi_g\rangle = e^{\alpha(h)}|x\rangle$ .

- **Remarque 1:** Pour sélectionner l'état  $|\psi_0\rangle$  engendrant des états aussi proches que possible des états classiques, il faut trouver l'extension complexe  $\bar{L}$  de l'algèbre de Lie  $L$  du groupe  $G$ , et considérer dans  $\bar{L}$  la sous-algèbre d'isotropie  $\bar{L}_0$  de l'état  $|\psi_0\rangle$ . Les états engendrés à partir des vecteurs  $|\psi_0\rangle$  pour lesquels la sous-algèbre  $\bar{L}_0$  est maximale sont les plus proches des états classiques, on parle de systèmes d'états cohérents standards. Pour un groupe semi-simple compact, ces états auront aussi l'incertitude minimale.
- **Remarque 2:** Une propriété non usuelle des **SECG** est qu'ils sont surcomplets, c'est-à-dire, que ces systèmes contiennent plus d'états que ceux qui sont nécessaires pour décomposer un état arbitraire appartenant à  $\mathcal{H}$ .

Par exemple, prenons le groupe de Heisenberg-Weyl dont l'algèbre de Lie peut être réalisée par les opérateurs de création et d'annihilation  $\hat{a}^\dagger$  et  $\hat{a}$  et l'opérateur identité  $\hat{I}$  et dont l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  peut être pris comme l'espace des états propres  $|n\rangle$  de l'hamiltonien de l'oscillateur harmonique standard. Le sous-groupe d'isotropie  $H$  laissant invariant un état  $|\psi_0\rangle$  quelconque dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  est constitué des éléments

$$\hat{T}(h) = e^{it\hat{I}}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.117)$$

La représentation unitaire irréductible  $T(g)$  du groupe de Heisenberg-Weyl est donnée par l'ensemble des opérateurs  $\hat{T}(g)$  de la forme

$$\hat{T}(g) = e^{(\alpha\hat{a}^\dagger - \bar{\alpha}\hat{a})} e^{i\hat{I}}, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \quad (1.118)$$

Les systèmes d'états cohérents généraux sont donc obtenus par l'application de l'opérateur unitaire  $\hat{D}(\alpha)$  comme donné en (1.36) sur l'état  $|\psi_0\rangle$ , à savoir :

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha) |\psi_0\rangle. \quad (1.119)$$

L'algèbre de Lie complexe  $\bar{L}$  est engendrée par les opérateurs  $\hat{a}^\dagger$ ,  $\hat{a}$  et  $\hat{I}$ . Dans ce cas, la sous-algèbre d'isotropie maximale est donnée pour des états  $|\phi_0\rangle \in \mathcal{H}$  tels que  $\hat{a}|\phi_0\rangle = 0$ . Pour ces états  $L_0 = \{\hat{a}, \hat{I}\}$ ,  $\bar{L}_0 = \{\hat{a}^\dagger, \hat{I}\}$  et  $L_0 \oplus \bar{L}_0 = \bar{L}$ . Les systèmes d'états cohérents standards associés au groupe de Heisenberg-Weyl sont donc tous ceux engendrés par l'application de l'opérateur unitaire  $\hat{D}(\alpha)$  sur les états  $|\phi_0\rangle$  tels que  $\hat{a}|\phi_0\rangle = 0$ . Le vide  $|0\rangle$  satisfait notamment cette propriété, alors les systèmes d'états cohérents standards correspondent à ceux trouvés en (1.36) et ils ont en plus la propriété de minimiser la relation d'incertitude de Heisenberg

$$\Delta\hat{x}\Delta\hat{p} \geq \frac{1}{2}. \quad (1.120)$$

Un autre exemple est celui qui concerne le groupe SU(2). Ce dernier est le groupe des matrices unitaires  $2 \times 2$ , de déterminant 1 qui peuvent être paramétrées de la façon suivante :

$$U(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad (1.121)$$

qui nous dit que SU(2) est homéomorphe à la sphère  $S^3$ . En effet, si on écrit

$$\alpha = x_0 + ix_3, \quad \beta = x_2 + ix_1, \quad x_\nu \text{ réel}, \nu = 0, 1, 2, 3, \quad (1.122)$$

alors la matrice  $U$  prend la forme

$$U(x_0, \vec{x}) = x_0 I + i\vec{x} \cdot \vec{\sigma}, \quad x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \quad (1.123)$$

où  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  et  $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  sont les matrices de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.124)$$

satisfaisant les relations de commutation

$$[\sigma_j, \sigma_k] = 2i \epsilon_{jkl} \sigma_l, \quad j, k, l = 1, 2, 3, \quad (1.125)$$

ainsi que les relations d'anticommutation

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} I, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.126)$$

Si  $U(x_0, \vec{x})$  et  $U(y_0, \vec{y})$  représentent deux éléments quelconques appartenant à  $SU(2)$ , à l'aide des équations (1.126), on peut démontrer que le produit:

$$U(X_0, \vec{X}) = U(x_0, \vec{x}) U(y_0, \vec{y}) \quad (1.127)$$

est un élément de  $SU(2)$  avec

$$X_0 = x_0 y_0 - \vec{x} \cdot \vec{y}, \quad \vec{X} = x_0 \vec{y} + y_0 \vec{x} - \vec{x} \times \vec{y}, \quad (1.128)$$

satisfaisant

$$X_0^2 + |\vec{X}|^2 = 1. \quad (1.129)$$

Si on choisit la paramétrisation

$$x_0 = \cos \frac{\theta}{2}, \quad x_1 = n_1 \sin \frac{\theta}{2}, \quad x_2 = n_2 \sin \frac{\theta}{2}, \quad x_3 = n_3 \sin \frac{\theta}{2}, \quad (1.130)$$

telle que  $\theta \in [-2\pi, 2\pi]$  et que:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1, \quad (1.131)$$

alors la matrice  $U(x_0, \vec{x})$  devient

$$U(\theta, \vec{n}) = \cos \frac{\theta}{2} I + i \sin \frac{\theta}{2} \vec{n} \cdot \vec{\sigma}, \quad \vec{n} = (n_1, n_2, n_3). \quad (1.132)$$

De plus, grâce aux propriétés des matrices de Pauli (1.126), on peut exprimer  $U$  sous la forme exponentielle

$$U(\theta, \vec{n}) = \exp\left(i \frac{\theta}{2} \vec{n} \cdot \vec{\sigma}\right). \quad (1.133)$$

Pour les éléments  $U(x_0, \vec{x})$  et  $U(y_0, \vec{y})$  déterminés par:

$$\begin{aligned} x_0 = \cos \frac{\theta}{2}, \quad x_1 = \sin \frac{\theta}{2} \sin \varphi, \quad x_2 = -\sin \frac{\theta}{2} \cos \varphi, \quad x_3 = 0, \\ y_0 = \cos \frac{\psi}{2}, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = \sin \frac{\psi}{2}, \end{aligned} \quad (1.134)$$

respectivement, lorsque  $\varphi \in [0, 2\pi]$  et  $\psi \in [-2\pi, 2\pi]$ , en tenant compte des équations (1.128), on trouve

$$\begin{aligned} X_0 = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2}, \quad X_1 = \sin \frac{\theta}{2} \sin\left(\varphi + \frac{\psi}{2}\right), \\ X_2 = -\sin \frac{\theta}{2} \cos\left(\varphi + \frac{\psi}{2}\right), \quad X_3 = \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2}. \end{aligned} \quad (1.135)$$

De cette dernière équation, on peut remarquer que si on restreint l'angle  $\theta$  à l'intervalle  $[0, \pi]$ , on obtient une nouvelle paramétrisation qui décrit tous les éléments de  $SU(2)$ . D'autre part, les représentations unitaires irréductibles  $T^j(g)$  de  $SU(2)$ ,  $j$  étant un entier ou un demi-entier non négatif, agissant sur les états de l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  dont la base est formée des états propres des opérateurs  $\vec{J}^2$  et  $\hat{J}_3$ , sont données par les opérateurs unitaires

$$T^j\left(e^{i\frac{\theta}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma}}\right) = \exp\left(i\theta\vec{n}\cdot\vec{J}\right), \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \quad (1.136)$$

où  $\vec{J} = (\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3)$  sont les opérateurs de moment angulaire déjà introduits précédemment. En tant que représentation,  $T^j(g)$  a la propriété

$$T^j(g_1 g_2) = T^j(g_1) T^j(g_2), \quad g_1, g_2 \in SU(2), \quad (1.137)$$



ce qui nous dit que si on choisit la paramétrisation (1.135), en tenant compte des équations (1.136) et (1.134), on peut écrire les représentations irréductibles de  $SU(2)$  sous la forme

$$T^j(g) = \exp\left(i\theta\left[\sin\varphi\hat{J}_1 - \cos\varphi\hat{J}_2\right]\right) \exp\left(i\frac{\psi}{2}\hat{J}_3\right), \quad (1.138)$$

qui, à l'aide des relations  $\hat{J}_\pm = \hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2$ , se transforment en

$$T^j(g) = \exp\left(-\frac{\theta}{2}\left[e^{-i\varphi}\hat{J}_+ - e^{i\varphi}\hat{J}_-\right]\right) \exp\left(i\frac{\psi}{2}\hat{J}_3\right). \quad (1.139)$$

En conséquence, les systèmes d'états cohérents généralisés engendrés par l'application de la représentation irréductible  $T^j(g)$  sur les états de base  $|j, m\rangle$ ,  $m = -j, \dots, j$ , sont donnés par :

$$|\theta, \varphi, \psi\rangle_m^j = T^j(g)|j, m\rangle = \exp\left(-\frac{\theta}{2}\left[e^{-i\varphi}\hat{J}_+ - e^{i\varphi}\hat{J}_-\right]\right) \exp\left(i\frac{\psi}{2}\hat{J}_3\right) |jm\rangle. \quad (1.140)$$

Pour un état  $|j, m\rangle$  fixé, l'opérateur exponentiel  $\exp\left(i\frac{\psi}{2}\hat{J}_3\right)$  n'ajoute qu'une phase superflue aux différents états dans le **SECG**, alors on aura des classes équivalentes et on pourra donc sélectionner un représentant de chaque classe pour obtenir ainsi le système d'états cohérents associés à l'état  $|j, m\rangle$  fixé. C'est ainsi qu'on peut définir le **SECG** associé à l'état  $|j, m\rangle$  comme

$$|\theta, \varphi\rangle_m^j = \exp\left(-\frac{\theta}{2}\left[e^{-i\varphi}\hat{J}_+ - e^{i\varphi}\hat{J}_-\right]\right) |j, m\rangle. \quad (1.141)$$

Si  $m = \pm j$ , on obtient les systèmes d'états cohérents standards:

$$|j, \zeta\rangle = \exp\left(-\frac{\theta}{2}\left[e^{-i\varphi}\hat{J}_+ - e^{i\varphi}\hat{J}_-\right]\right) |j, \pm j\rangle. \quad (1.142)$$

Si on décompose l'opérateur

$$\exp\left(-\frac{\theta}{2}\left[e^{-i\varphi}\hat{J}_+ - e^{i\varphi}\hat{J}_-\right]\right) = \exp(\zeta\hat{J}_+) \exp\left[\ln(1 + |\zeta|^2)\hat{J}_3\right] \exp(-\zeta\hat{J}_-), \quad (1.143)$$

avec  $\zeta = -\tan(\frac{\theta}{2})e^{-i\varphi}$  et si on agit sur l'état  $|j, -j\rangle$ , on trouve que les états cohérents standards sont donnés par

$$|j, \zeta\rangle = (1 + |\zeta|^2)^{-j} \sum_{\mu=-j}^j \sqrt{\frac{(2j!)}{(j+\mu)!(j-\mu)!}} \zeta^{j+\mu} |j, \mu\rangle. \quad (1.144)$$

Dans ce cas, on peut démontrer [Pe 86] que les états cohérents engendrés par les états  $|\phi_0\rangle = |j, \pm j\rangle$ , sélectionnés au moyen de la technique de l'extension complexe de l'algèbre  $su(2)$ , minimisent la dispersion de l'opérateur de Casimir  $\vec{J}^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ .

## Chapitre 2

# Les états propres d'algèbre et l'algèbre des opérateurs

Les états propres d'algèbre (**EPA**) associés à un groupe de Lie arbitraire ont été défini [Br 97] comme l'ensemble des états propres d'une combinaison linéaire des éléments de l'algèbre de Lie (complexe) correspondante.

Si  $G$  est un groupe de Lie arbitraire et  $\mathcal{L}$ , son algèbre de Lie, vue comme un espace vectoriel réel, on considère  $\bar{\mathcal{L}}$  l'algèbre de Lie complexe associée, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des éléments de l'algèbre réelle avec des coefficients complexes. Si nous choisissons une base  $\{X_1, X_2, \dots, X_p\}$  pour l'algèbre de Lie  $\bar{\mathcal{L}}$ , alors, un élément de l'algèbre de Lie complexe peut être écrit comme le produit scalaire euclidien dans l'espace vectoriel de dimension  $p$ :

$$\vec{\beta} \cdot \vec{X} = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_p X_p,$$

où  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$  sont des coefficients complexes. Alors les **EPA** sont définis comme les solutions de l'équation aux valeurs propres:

$$[\vec{\beta} \cdot \vec{X}]|\psi\rangle = \Gamma|\psi\rangle, \quad \Gamma \in \mathbb{C}, \quad |\psi\rangle \in \mathcal{H},$$

$\mathcal{H}$  étant l'espace de Hilbert sur lequel agit l'algèbre  $\bar{\mathcal{L}}$ .

Les valeurs admissibles de  $\vec{\beta}$  et  $\Gamma$  dépendent de la structure du groupe. Un cas spécial de l'équation aux valeurs propres est l'équation de Schrödinger indépendante du temps pour des hamiltoniens qui s'expriment comme combinaison linéaire des générateurs

de l'algèbre  $\mathcal{L}$ . Par ailleurs, nous allons voir que parmi les sous-ensembles d'états appartenant à l'ensemble des états propres d'algèbre, on peut compter les systèmes d'états cohérents généralisés et ceux obtenus en minimisant la relation d'incertitude de Schrödinger-Robertson. Nous allons détailler, en utilisant une méthode originale basée complètement sur l'algèbre des opérateurs, les exemples des algèbres  $su(2)$  et  $su(1, 1)$ . Les états propres d'algèbre associés à l'algèbre de Heisenberg-Weyl, qui correspondent essentiellement aux états cohérents et comprimés de l'oscillateur harmonique standard que nous avons déjà étudiés dans le chapitre antérieur, seront considérés dans le prochain chapitre. Nous allons, en effet, nous placer dans une situation plus générale, à savoir, étudier le problème de trouver les états propres d'algèbre pour l'algèbre formée de la somme directe des algèbres de Heisenberg-Weyl et  $su(2)$ , c'est-à-dire  $h(1) \oplus su(2)$ .

## 2.1 Les états propres d'algèbre associés à l'algèbre $su(2)$

On se rappelle que les générateurs de  $su(2)$  satisfont

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = \epsilon_{ijk} \hat{J}_k \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad (2.1)$$

où  $\epsilon_{ijk}$  est le symbole de Levi-Civita et on suppose une somme sur les indices répétés. Dans ce cas, les EPA vérifient l'équation aux valeurs propres:

$$[\vec{\beta} \cdot \vec{\hat{J}}]|\psi\rangle = [\beta_1 \hat{J}_1 + \beta_2 \hat{J}_2 + \beta_3 \hat{J}_3]|\psi\rangle = \Gamma|\psi\rangle, \quad \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbf{C}. \quad (2.2)$$

On peut encore écrire (2.2) en termes des opérateurs d'échelle  $\hat{J}_\pm = \hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2$  que nous avons introduit dans le chapitre 1. On a alors

$$[\beta_- \hat{J}_+ + \beta_+ \hat{J}_- + \beta_3 \hat{J}_3]|\psi\rangle = \Gamma|\psi\rangle, \quad (2.3)$$

où on a défini  $\beta_\pm = \frac{\beta_1 \pm i\beta_2}{2}$ .

Nous présentons ici une méthode pour trouver les états propres satisfaisant (2.3), qui est différente de celle utilisée par C. Brif [Br 97], et qui met l'accent sur l'algèbre

des opérateurs et leurs règles de commutation plutôt que sur le développement de l'état  $|\psi\rangle$  dans la base des états cohérents standards. C'est ainsi que nous supposons que les solutions de l'équation aux valeurs propres (2.3) prennent la forme suivante :

$$|\psi\rangle_m^j = (N_m^j)^{-1/2} \hat{T} |j, m\rangle, \quad (2.4)$$

où  $N_m^j$  est une constante de normalisation,  $m = -j, \dots, j$  et  $\hat{T}$  est l'opérateur (qui généralise l'opérateur unitaire  $\hat{U}$  introduit en (1.84)) :

$$\hat{T} = \exp\left(-\frac{\tilde{\theta}}{2}[e^{-i\tilde{\phi}} \hat{J}_+ - e^{i\tilde{\phi}} \hat{J}_-]\right), \quad (2.5)$$

avec  $\tilde{\phi}$ ,  $\tilde{\theta}$  des quantités, en général, complexes, déterminées en insérant (2.4) dans (2.3) et en exigeant que les valeurs propres  $\Gamma_m^j$  soient égales à :

$$\Gamma_m^j = mb, \quad b = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}, \quad (2.6)$$

c'est-à-dire que l'on ait :

$$[\vec{\beta} \cdot \vec{J}] \hat{T} |j, m\rangle = mb \hat{T} |j, m\rangle. \quad (2.7)$$

Afin de calculer le membre de gauche de (2.7), on utilise la décomposition habituelle pour l'opérateur  $\hat{T}$ , à savoir :

$$\hat{T} = \exp\left(-e^{-i\tilde{\phi}} \tan\left(\frac{\tilde{\theta}}{2}\right) \hat{J}_+\right) \exp\left(\ln \sec^2\left(\frac{\tilde{\theta}}{2}\right) \hat{J}_3\right) \exp\left(e^{i\tilde{\phi}} \tan\left(\frac{\tilde{\theta}}{2}\right) \hat{J}_-\right) \quad (2.8)$$

et les relations

$$\begin{aligned} e^{\eta \hat{J}_3} \hat{J}_\pm e^{-\eta \hat{J}_3} &= e^{\pm \eta} \hat{J}_\pm, \\ e^{\eta \hat{J}_\pm} \hat{J}_3 e^{-\eta \hat{J}_\pm} &= \hat{J}_3 \mp \eta \hat{J}_\pm, \\ e^{\eta \hat{J}_\pm} \hat{J}_\mp e^{-\eta \hat{J}_\pm} &= \hat{J}_\mp \pm 2\eta \hat{J}_3 - \eta^2 \hat{J}_\pm. \end{aligned} \quad (2.9)$$

C'est ainsi qu'on peut démontrer que

$$\begin{aligned}
\left[ \vec{\beta} \cdot \vec{J} \right] \hat{T} &= \hat{T} \left[ \left\{ \beta_3 \cos \tilde{\theta} + 2 \sin \left( \frac{\tilde{\theta}}{2} \right) \cos \left( \frac{\tilde{\theta}}{2} \right) \left( \beta_+ e^{-i\tilde{\phi}} + \beta_- e^{i\tilde{\phi}} \right) \right\} \hat{J}_3 + \right. \\
&\quad \left. \left\{ \beta_- \cos^2 \left( \frac{\tilde{\theta}}{2} \right) - \beta_+ \sin^2 \left( \frac{\tilde{\theta}}{2} \right) e^{-2i\tilde{\phi}} - \beta_3 \sin \left( \frac{\tilde{\theta}}{2} \right) \cos \left( \frac{\tilde{\theta}}{2} \right) e^{-i\tilde{\phi}} \right\} \hat{J}_+ + \right. \\
&\quad \left. \left\{ \beta_+ \cos^2 \left( \frac{\tilde{\theta}}{2} \right) - \beta_- \sin^2 \left( \frac{\tilde{\theta}}{2} \right) e^{2i\tilde{\phi}} - \beta_3 \sin \left( \frac{\tilde{\theta}}{2} \right) \cos \left( \frac{\tilde{\theta}}{2} \right) e^{i\tilde{\phi}} \right\} \hat{J}_- \right].
\end{aligned} \tag{2.10}$$

En conséquence, si l'on veut que (2.7) se vérifie, il faut que les coefficients de  $\hat{J}_+$  et de  $\hat{J}_-$  soient égaux à zéro et que le coefficient de  $\hat{J}_3$  soit égal à  $b$ . Cela nous donne le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}
\beta_- \cos^2 \left( \frac{\tilde{\theta}}{2} \right) - \beta_+ \sin^2 \left( \frac{\tilde{\theta}}{2} \right) e^{-2i\tilde{\phi}} - \beta_3 \sin \left( \frac{\tilde{\theta}}{2} \right) \cos \left( \frac{\tilde{\theta}}{2} \right) e^{-i\tilde{\phi}} &= 0, \\
\beta_+ \cos^2 \left( \frac{\tilde{\theta}}{2} \right) - \beta_- \sin^2 \left( \frac{\tilde{\theta}}{2} \right) e^{2i\tilde{\phi}} - \beta_3 \sin \left( \frac{\tilde{\theta}}{2} \right) \cos \left( \frac{\tilde{\theta}}{2} \right) e^{i\tilde{\phi}} &= 0, \\
\beta_3 \cos \tilde{\theta} + 2 \sin \left( \frac{\tilde{\theta}}{2} \right) \cos \left( \frac{\tilde{\theta}}{2} \right) \left( \beta_+ e^{-i\tilde{\phi}} + \beta_- e^{i\tilde{\phi}} \right) &= b.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Dans le cas où  $\beta_+ \neq 0$  et  $\beta_- \neq 0$ , les deux premières équations en (2.11) donnent

$$e^{i\tilde{\phi}} = \sqrt{\frac{\beta_+}{\beta_-}}. \tag{2.12}$$

Si l'on insère (2.12) dans la troisième équation en (2.11), on obtient l'équation algébrique du second degré:

$$x^2(b + \beta_3) - 2x\sqrt{b^2 - \beta_3^2} + (b - \beta_3) = 0, \quad x = \tan \left( \frac{\tilde{\theta}}{2} \right), \tag{2.13}$$

qui admet la racine double

$$x = \sqrt{\frac{b - \beta_3}{b + \beta_3}} \quad \longleftrightarrow \quad \frac{\tilde{\theta}}{2} = \arctan \left( \sqrt{\frac{b - \beta_3}{b + \beta_3}} \right). \tag{2.14}$$

En insérant les résultats (2.12) et (2.14) dans (2.8), nous obtenons

$$\hat{T} = \exp \left( -\frac{2\beta_-}{b + \beta_3} \hat{J}_+ \right) \exp \left( \ln \left( \frac{2b}{b + \beta_3} \right) \hat{J}_3 \right) \exp \left( \frac{2\beta_+}{b + \beta_3} \hat{J}_- \right), \quad b \neq 0. \tag{2.15}$$

La forme originale (2.5) de l'opérateur  $\hat{T}$ , nous permet de visualiser plus facilement les cas spéciaux que sont les **SECG** de Perelomov [Pe 86] ainsi que les systèmes d'états cohérents et comprimés rendant minimale la relation d'incertitude de Schrödinger-Robertson ([Pu 94, Tr 99]):

- Les **SECG** de Perelomov sont engendrés par l'application d'un opérateur unitaire sur des états arbitraires de la représentation irréductible  $T^j(g)$  du groupe  $SU(2)$ . Pour obtenir cet opérateur, il suffit de prendre le cas particulier  $\vec{\beta} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ , ce qui implique que  $\beta_{\pm} = \frac{1}{2}e^{\pm i\varphi} \sin \theta$  et  $b = 1$ . En se servant de (2.12) et (2.14) on en déduit que  $\tilde{\phi} = \varphi$  et  $\tilde{\theta} = \theta$ . C'est ainsi que  $\hat{T}$  devient l'opérateur unitaire

$$\hat{T} = \exp \left( -\frac{\theta}{2} [e^{-i\varphi} \hat{J}_+ - e^{i\varphi} \hat{J}_-] \right). \quad (2.16)$$

- Les états intelligents généraux, sont les états comprimés qui minimisent la relation d'incertitude de Schrödinger-Robertson. Pour les opérateurs  $\hat{J}_1$  et  $\hat{J}_2$  cela signifie qu'ils vérifient l'équation aux valeurs propres (1.72). C'est un cas particulier de (2.2), si on prend  $\beta_1 = 1$ ,  $\beta_2 = i\lambda$ ,  $\beta_3 = 0$  ou encore  $\beta_{\pm} = \frac{1 \mp \lambda}{2}$ ,  $b = \sqrt{1 - \lambda^2}$ . Cela implique encore que  $e^{i\tilde{\phi}} = \sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}} = \delta^{1/2} e^{i\phi/2}$  et  $\tilde{\theta} = \frac{\pi}{2}$  et, en conséquence, l'opérateur  $\hat{T}$  s'écrit:

$$\hat{T} = \exp \left[ -\frac{1}{2} \ln(\delta) \hat{J}_3 \right] \exp \left[ -\frac{\pi}{4} (e^{-i\phi/2} \hat{J}_+ - e^{i\phi/2} \hat{J}_-) \right]. \quad (2.17)$$

- Dans le cas où  $\lambda$  est un nombre imaginaire pur, on a  $\delta = 1$  et  $\lambda = -i \tan(\frac{\phi}{2})$ , donc (2.17) devient l'opérateur unitaire  $\hat{U}$  défini dans l'équation (1.84).
- Lorsque  $|\lambda| = 1$ , c'est-à-dire  $\lambda = e^{i\varphi}$  avec  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , alors

$$\delta \cos \phi = 0, \quad \delta \sin \phi = -\frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi}. \quad (2.18)$$

Cela implique que si  $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$  alors  $\delta = \mp \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi}$  avec  $\pi < \varphi < 2\pi$  et  $0 < \varphi < \pi$  respectivement. On a donc

$$\hat{T} = \exp \left[ -\frac{1}{2} \ln \left( \frac{\mp \sin \varphi}{1 + \cos \varphi} \right) \hat{J}_3 \right] \exp \left[ -\frac{\pi}{4} (e^{\mp i\pi/4} \hat{J}_+ - e^{i\pm\pi/4} \hat{J}_-) \right]. \quad (2.19)$$

Si on applique cet opérateur sur un état quelconque  $|j, m\rangle$  on obtient les états cohérents associés aux opérateurs  $\hat{J}_1$  et  $\hat{J}_2$ . D'autre part, si  $\lambda = \pm 1$  les états cohérents correspondent à  $|j, \pm j\rangle$  respectivement, c'est-à-dire les états propres des opérateurs  $\hat{J}_{\pm}$  avec la valeur propre 0.

Si on revient à la forme décomposée (2.15) et qu'on tient compte du fait que l'opérateur  $\hat{T}$  dans (2.4) agit sur l'état  $|j, m\rangle$ , on peut toujours ajouter et supprimer des termes qui, à la fin, seront considérés dans la constante de normalisation  $N_m^j$ .  $\hat{T}$  peut alors se mettre sous la forme

$$\hat{T}_{eff} = \left( \frac{b}{\beta_+} \right)^{j+m} \sqrt{\frac{(j+m)!(j-m)!}{(2j)!}} \exp \left( -\frac{2\beta_-}{b+\beta_3} \hat{J}_+ \right) \exp \left( \frac{\beta_+}{b} \hat{J}_- \right), \quad (2.20)$$

ce qui nous permet de calculer plus facilement les états  $|\psi\rangle_m^j$  et faire une analyse plus poussée de certains cas spéciaux:

- Si  $\beta_+ = 0$ ,  $\beta_3 \neq 0$  alors  $b = \beta_3$ . Dans ce cas, l'opérateur  $\hat{T}_{eff}$  en (2.20) devient

$$\hat{T}_{eff} = \exp \left( -\frac{\beta_-}{\beta_3} \hat{J}_+ \right). \quad (2.21)$$

Les états propres sont donnés par

$$|\psi\rangle_m^j = Cte \sum_{u=m}^j \sqrt{\frac{(j+u)!}{(j-u)!}} \frac{1}{(u-m)!} \left( -\frac{\beta_-}{\beta_3} \right)^{u-m} |j, u\rangle, \quad (2.22)$$

qui deviennent les états cohérents standards lorsque  $m = -j$ . Par ailleurs, si  $\beta_- = 0$ ,  $\beta_3 \neq 0$ , on a des résultats similaires. En effet, on a

$$\hat{T}_{eff} = \exp \left( \frac{\beta_+}{\beta_3} \hat{J}_- \right) \quad (2.23)$$



et

$$|\psi\rangle_m^j = Cte \sum_{u=-j}^m \sqrt{\frac{(j-u)!}{(j+u)!}} \frac{1}{(m-u)!} \left(\frac{\beta_+}{\beta_3}\right)^{u-m} |j, u\rangle, \quad (2.24)$$

qui deviennent les états cohérents standards lorsque  $m = j$ .

- Dans le cas dégénéré où  $b = 0$ , la seule solution valide de l'équation aux valeurs propres est  $|\psi\rangle_{-j}^j = Cte \hat{T}_{eff} |j, -j\rangle$  avec  $\hat{T}_{eff} = \exp(-2\beta_- \hat{J}_+ / \beta_3)$ , c'est-à-dire, les états cohérents standards de SU(2).
- Dans le cas où  $\{\beta_+ = 0 \text{ et } \beta_3 = 0\}$  ou  $\{\beta_- = 0 \text{ et } \beta_3 = 0\}$ , seuls les états  $|j, \pm j\rangle$  représentent des solutions normalisables valides de l'équation aux valeurs propres.

Pour calculer les états propres  $|\psi\rangle_m^j$  pour le cas général  $b \neq 0$ , on met  $\hat{T}_{eff}$ , donné par (2.20), à la place de  $\hat{T}$  dans (2.4). En redéfinissant les indices des sommes, on trouve

$$|\psi\rangle_m^j = (\tilde{N}_m^j)^{-1/2} \sum_{u=-j}^j \sqrt{\frac{(j+u)!(j-u)!}{(2j)!}} \left(\frac{b}{\beta_+}\right)^{j+u} \frac{(j+m)!}{(j-u)!} \sum_{n=0}^{j+u} (-1)^n \frac{(j-u+n)!}{n!(m-u+n)!(j+u-n)!} \left(\frac{(1-\frac{\beta_3}{b})}{2}\right)^n |j, u\rangle. \quad (2.25)$$

En termes des polynômes de Jacobi, on a alors, (voir appendice B):

$$|\psi\rangle_m^j = (\tilde{N}_m^j)^{-1/2} \sum_{u=-j}^j \sqrt{\frac{(j+u)!(j-u)!}{(2j)!}} \left(\frac{b}{\beta_+}\right)^{j+u} P_{j+u}^{-u+m, -u-m} \left(\frac{\beta_3}{b}\right) |j, u\rangle \quad (2.26)$$

et on retrouve le résultat obtenu par Brif [Br 97]. La constante de normalisation  $\tilde{N}_m^j$  est donnée par

$$\tilde{N}_m^j = \sum_{n=0}^{2j} \frac{n!(2j-n)!}{(2j)!} \left| P_n^{j+m-n, j-m-n} \left(\frac{\beta_3}{b}\right) \right|^2 \left| \frac{b}{\beta_+} \right|^{2n}. \quad (2.27)$$

Celle-ci a été calculée par Brif [Br 97], premièrement continuant la somme en (2.27) à l'infini, deuxièmement en utilisant le théorème de sommation pour les polynômes de Jacobi [SM 84], pour l'exprimer en termes des fonctions hypergéométriques et, troisièmement, en utilisant la relation entre ces dernières et les polynômes de Jacobi [Er 53]. Cela donne

$$\tilde{N}_m^j = (-)^{j-|m|} S_+^{j+m} S_-^{j-m} \frac{(j+m)!(j-m)!}{(2j)!} P_{j-|m|}^{(-2j-1,0)} \left( 1 - \frac{2t}{S_+ S_-} \right), \quad (2.28)$$

où

$$S_{\pm} = 1 + \left| \frac{2\beta_{\mp}}{\beta_3 \mp b} \right|^2, \quad t = \left| \frac{b}{\beta_+} \right|^2. \quad (2.29)$$

Notons pour terminer que la valeur moyenne de  $\hat{J}_3$  dans les états (2.26) est donnée par

$$\langle \hat{J}_3 \rangle_m^j = \frac{t}{\tilde{N}_m^j} \frac{\partial \tilde{N}_m^j}{\partial t} - j. \quad (2.30)$$

Elle a été calculée par Brif en utilisant (2.28) et la règle de dérivation (B.12) des polynômes de Jacobi, on obtient

$$\langle \hat{J}_3 \rangle_m^j = \frac{jY + m(S_+ - S_-)}{S_+ S_-} - \frac{(j + |m|)Yt}{S_+^2 S_-^2} \Omega, \quad (2.31)$$

où

$$Y = S_+ S_- - S_+ - S_-, \quad (2.32)$$

et

$$\Omega = \frac{P_{j-|m|-1}^{(-2j,1)} \left( 1 - \frac{2t}{S_+ S_-} \right)}{P_{j-|m|}^{(-2j-1,0)} \left( 1 - \frac{2t}{S_+ S_-} \right)}, \quad \text{si } |m| < j; \quad \Omega = 0, \quad \text{si } |m| = j. \quad (2.33)$$

Le calcul de la valeur moyenne des opérateurs  $\hat{J}_{\pm}$  dans les états (2.26) est pratiquement impossible à réaliser en utilisant la constante de normalisation de Brif. Une méthode différente de calcul de la valeur moyenne de  $\hat{J}_3$  ainsi que de celles de  $\hat{J}_{\pm}$  dans ces états est décrite dans l'appendice C. En réalité, le fait d'avoir trouvé la forme explicite de l'opérateur  $\hat{T}$  nous permet d'appliquer aisément la méthode de l'ordonnancement des opérateurs et par la suite de trouver des expressions adéquates pour les constantes de normalisation des états (2.26) servant à calculer ces valeurs moyennes.

## 2.2 Les états propres d'algèbre associés à l'algèbre $su(1, 1)$

Les états propres d'algèbre associés à l'algèbre  $su(1, 1)$  peuvent être déterminés en adaptant convenablement les équations utilisées pour obtenir les états propres correspondants associés à l'algèbre  $su(2)$ . En effet, on se rappelle que les générateurs  $J_1, J_2, J_3$  de  $su(2)$  satisfont les relations de commutation (2.1). Si on pose alors:

$$\hat{J}_j = i\hat{K}_j, \quad j = 1, 2, \quad \hat{J}_3 = \hat{K}_3, \quad (2.34)$$

les générateurs  $K_1, K_2, K_3$  forment l'algèbre de Lie  $su(1, 1)$ , avec les relations de commutation:

$$[\hat{K}_1, \hat{K}_2] = -i\hat{K}_3, \quad [\hat{K}_2, \hat{K}_3] = i\hat{K}_1, \quad [\hat{K}_3, \hat{K}_1] = i\hat{K}_2. \quad (2.35)$$

Par définition, les états propres d'algèbre associés à l'algèbre  $su(1, 1)$  vérifient l'équation aux valeurs propres suivante:

$$[\vec{\alpha} \cdot \vec{\hat{K}}] |\psi\rangle = [\alpha_1 \hat{K}_1 + \alpha_2 \hat{K}_2 + \alpha_3 \hat{K}_3] |\psi\rangle = \tilde{\Gamma} |\psi\rangle, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbf{C}. \quad (2.36)$$

On peut encore introduire les opérateurs d'échelle  $\hat{K}_\pm = (\hat{K}_1 \pm i\hat{K}_2)$  satisfaisant les relations de commutation

$$[\hat{K}_3, \hat{K}_\pm] = \pm \hat{K}_\pm, \quad [\hat{K}_3, \hat{K}_\pm] = 2\hat{K}_3 \quad (2.37)$$

et écrire (2.36) sous la forme:

$$[\alpha_+ \hat{K}_- + \alpha_- \hat{K}_+ + \alpha_3 \hat{K}_3] |\psi\rangle = \tilde{\Gamma} |\psi\rangle, \quad (2.38)$$

où  $\alpha_\pm = \frac{\alpha_1 \pm i\alpha_2}{2}$ .

L'opérateur de Casimir  $\vec{\hat{K}}^2 = \hat{K}_3^2 - \hat{K}_1^2 - \hat{K}_2^2 = \hat{K}_3^2 - \frac{1}{2}(\hat{K}_+ \hat{K}_- + \hat{K}_- \hat{K}_+)$  commute avec chaque  $\hat{K}_i$  pour  $i = 1, 2, 3$  et, en vertu du lemme de Schur, pour chaque représentation irréductible, cet opérateur est un multiple de l'opérateur identité:

$$\vec{K}^2 = k(k-1)\hat{I}. \quad (2.39)$$

C'est ainsi qu'une représentation irréductible de  $SU(1,1)$  est déterminée par le nombre  $k$ . Dans le cas des séries discrètes, ce nombre prend les valeurs  $k = 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots$ . Les vecteurs de l'espace sur lequel la représentation  $T^k(g)$  agit sont alors identifiés par ce nombre  $k$  et un autre nombre  $n$  qui est une valeur propre de l'opérateur  $\hat{K}_3$ :

$$\hat{K}_3|k, n\rangle = n|k, n\rangle, \quad n = k + m, \quad (2.40)$$

où  $m$  est un entier  $\geq 0$ . Les opérateurs d'échelle  $\hat{K}_\pm$  agissent sur ces états de la façon suivante:

$$\hat{K}_\pm|k, n\rangle = \sqrt{(n \pm k)(n \mp k \pm 1)}|k, n \pm 1\rangle, \quad n = k, k+1, \dots \quad (2.41)$$

Si on ne s'intéresse qu'aux solutions de l'équation aux valeurs propres (2.36) associées à la série discrète, on prend les solutions sous la forme:

$$|\psi\rangle_n^k = (N_n^k)^{-1/2} \hat{T} |k, n\rangle, \quad (2.42)$$

où  $N_n^k$  est une constante de normalisation,  $n = k, k+1, \dots$  et

$$\hat{T} = \exp\left(-\frac{\tilde{\chi}}{2}[e^{-i\tilde{\phi}} \hat{K}_+ - e^{i\tilde{\phi}} \hat{K}_-]\right), \quad (2.43)$$

avec  $\tilde{\phi}$ ,  $\tilde{\chi}$  des quantités, en général, complexes. Ces dernières sont déterminées en insérant (2.42) dans (2.36) et en exigeant que les valeurs propres  $\tilde{\Gamma}_n^k$  soient égales à:

$$\tilde{\Gamma}_n^k = n\tilde{b}, \quad \text{avec} \quad \tilde{b} = \sqrt{\alpha_3^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2}, \quad (2.44)$$

c'est-à-dire que

$$[\vec{\alpha} \cdot \vec{K}] \hat{T} |k, n\rangle = n\tilde{b} \hat{T} |k, n\rangle. \quad (2.45)$$

En fait, dans le cas où  $\tilde{b} \neq 0$ , nous avons trois classes d'éléments d'algèbre  $(\vec{\alpha} \cdot \vec{K})$ . La première classe consiste en des éléments ayant un spectre continu, ce qui n'impose

aucune restriction sur  $\tilde{\Gamma}$ . La deuxième classe consiste en des éléments ayant un spectre discret équidistant. Dans ce dernier cas, il y a deux sous-classes, à savoir, une avec  $\tilde{\Gamma} = n\tilde{b}$  et l'autre avec  $\tilde{\Gamma} = -n\tilde{b}$ . Pour ce qui concerne le cas discret, il suffit de trouver les solutions avec le spectre positif, car les solutions avec le spectre négatif s'obtiennent des antérieures en faisant le changement  $\tilde{b} \mapsto -\tilde{b}$ .

En vertu des équations (2.34), on peut s'apercevoir que l'équation aux valeurs propres (2.36) devient pratiquement la même que pour le cas  $su(2)$ , lorsqu'on identifie

$$\beta_j = -i\alpha_j, \quad j = 1, 2, \quad \beta_3 = \alpha_3. \quad (2.46)$$

De plus, vu que dans la procédure suivie pour trouver l'opérateur  $\hat{T}$ , lors du traitement de l'algèbre  $su(2)$ , l'état de référence  $|j, m\rangle$  n'intervient que d'une façon passive et qu'il serait de même pour le rôle que jouerait l'état  $|k, n\rangle$  dans un processus direct de résolution de l'équation aux valeurs propres associée à l'algèbre  $su(1, 1)$ , on peut en déduire, en utilisant les équations (2.12) et (2.14), que dans le cas où  $\alpha_+ \neq 0$  et  $\alpha_- \neq 0$ :

$$e^{i\tilde{\phi}} = \sqrt{\frac{\alpha_+}{\alpha_-}} \quad (2.47)$$

et que l'équation de deuxième degré correspondante est

$$y^2(\tilde{b} + \alpha_3) + 2y\sqrt{\alpha_3^2 - \tilde{b}^2} + (\alpha_3 - \tilde{b}) = 0, \quad y = \tanh\left(\frac{\tilde{\chi}}{2}\right). \quad (2.48)$$

En solutionnant cette équation, on trouve:

$$\tanh\frac{\tilde{\chi}}{2} = -\sqrt{\frac{\alpha_3 - \tilde{b}}{\alpha_3 + \tilde{b}}}. \quad (2.49)$$

Si on utilise la décomposition habituelle (1.60), l'opérateur  $\hat{T}$  prend la forme:

$$\hat{T} = \exp\left(-e^{-i\tilde{\phi}} \tanh\left(\frac{\tilde{\chi}}{2}\right) \hat{K}_+\right) \exp\left(-2\left[\ln \cosh\left(\frac{\tilde{\chi}}{2}\right)\right] \hat{K}_3\right) \exp\left(e^{i\tilde{\phi}} \tanh\left(\frac{\tilde{\chi}}{2}\right) \hat{K}_-\right), \quad (2.50)$$

ou bien, en utilisant (2.47) et (2.49),

$$\hat{T} = \exp\left(\frac{2\alpha_-}{\tilde{b} + \alpha_3} \hat{K}_+\right) \exp\left(\ln\left(\frac{2\tilde{b}}{\tilde{b} + \alpha_3}\right) \hat{K}_3\right) \exp\left(-\frac{2\alpha_+}{\tilde{b} + \alpha_3} \hat{K}_-\right). \quad (2.51)$$

C'est ainsi que les états propres d'algèbre que nous cherchons sont donnés par:

$$|\psi\rangle_m^k = (\tilde{N}_m^k)^{-1/2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sqrt{\frac{\Gamma(2k)\ell!}{\Gamma(2k+\ell)}} \left(-\frac{\tilde{b}}{\alpha_+}\right)^\ell \times \quad (2.52)$$

$$\frac{m!}{(-(\ell+2k))!} \sum_{s=0}^{\ell} \frac{(-1)^s (-\ell-2k+s)! \left((1-\alpha_3/\tilde{b})/2\right)^s}{s!(m-\ell+s)!(\ell-s)!} |k, k+\ell\rangle,$$

lorsque  $n = k + m$ , avec  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Alors en vertu de l'équation (B.28), on obtient le même développement que Brif [Br 97] en séries de polynômes de Jacobi, à savoir:

$$|\psi\rangle_m^k = (\tilde{N}_m^k)^{-1/2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sqrt{\frac{\Gamma(2k)\ell!}{\Gamma(2k+\ell)}} \left(-\frac{\tilde{b}}{\alpha_+}\right)^\ell P_\ell^{(m-\ell, -2k-m-\ell)}(\alpha_3/\tilde{b}) |k, k+\ell\rangle. \quad (2.53)$$

La forme de l'opérateur (2.51) nous dit que les états (2.52) sont normalisables si et seulement si  $\left|\frac{2\alpha_-}{\tilde{b}+\alpha_3}\right| < 1$  et  $\left|\frac{\tilde{b}+\alpha_3}{2\alpha_+}\right| \geq 1$ .

Si on s'intéresse au cas particulier où le vecteur  $\vec{\alpha}$  est donné par:

$$\vec{\alpha} = (\sinh \chi \cos \varphi, \sinh \chi \sin \varphi, \cosh \chi), \quad (2.54)$$

alors  $\tilde{b} = 1$ . L'équation (2.47) implique que  $\tilde{\varphi} = \varphi$  et l'équation (2.49) implique que  $\tilde{\chi} = \chi$ , alors l'opérateur  $\hat{T}$  prend la forme

$$\hat{T} = \exp\left(-\frac{\chi}{2}[e^{-i\varphi} \hat{K}_+ - e^{i\varphi} \hat{K}_-]\right). \quad (2.55)$$

Si on applique ce dernier sur l'état de référence  $|k, k\rangle$ , on obtient les états cohérents standards associés à la série discrète de  $su(1, 1)$ , à savoir:

$$|k; \zeta\rangle = \exp(\epsilon \hat{K}_+ - \bar{\epsilon} \hat{K}_-) |k, k\rangle, \quad (2.56)$$

où  $\epsilon = -\frac{\chi}{2} e^{-i\varphi}$ , ou encore, si on utilise la forme décomposée (2.50) pour  $\tilde{T}$ :

$$|k; \zeta\rangle = (1 - |\zeta|^2)^k \exp(\zeta \hat{K}_+) |k, k\rangle, \quad (2.57)$$

où  $\zeta = -e^{-i\varphi} \tanh(\frac{\chi}{2})$  est un paramètre complexe tel que  $|\zeta| < 1$ . En vertu de l'équation (2.41), les états cohérents standards (2.57) prennent ainsi la forme:

$$|k; \zeta\rangle = (1 - |\zeta|^2)^k \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{\frac{\Gamma(2k+m)}{m! \Gamma(2k)}} \zeta^m |k, k+m\rangle. \quad (2.58)$$

# Chapitre 3

## États cohérents et comprimés associés à l'algèbre de Lie $h(1) \oplus su(2)$

Notre but dans ce chapitre est de généraliser les considérations sur les états propres d'algèbre au cas de l'algèbre  $h(1) \oplus su(2)$  qui est la somme directe de l'algèbre de Weyl-Heisenberg  $h(1)$  avec  $su(2)$ . Nous voulons aussi faire le lien avec les états supercohérents de l'oscillateur harmonique supersymétrique, introduits par divers auteurs (Aragone et Zypman [AZ 86] et Nieto [Ni 92]).

Nous commencerons, en fait, par rappeler la construction de ces derniers états, en généralisant les considérations de Aragone et Zypman afin d'inclure la recherche d'états comprimés dans notre discussion. Nous aborderons ensuite la discussion des états propres de l'algèbre  $h(1) \oplus su(2)$ . Finalement, la considération des états cohérents et comprimés pour les opérateurs de super-position et de super-impulsion nous permettra de faire le lien mentionné précédemment.

### 3.1 Les états super-cohérents

Commençons par rappeler qu'un oscillateur harmonique quantique supersymétrique est la combinaison d'oscillateurs bosonique et fermionique (spin  $\frac{1}{2}$ ) de telle sorte que l'hamiltonien s'écrive

$$\hat{H}_{susy} = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \hat{x}^2) + \frac{1}{2}\sigma_3 = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{f}^\dagger \hat{f}, \quad (3.1)$$

où  $a^\dagger$  et  $\hat{a}$  sont définis en (1.26) et



$$\hat{f}^\dagger = \sigma_+ = \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2), \quad \hat{f} = \sigma_- = \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2). \quad (3.2)$$

Notons que le caractère supersymétrique vient du fait que l'hamiltonien peut être écrit comme l'anticommutateur des supercharges conservées  $\hat{Q}$  et  $\hat{Q}^\dagger$ :

$$\hat{H}_{susy} = \{\hat{Q}, \hat{Q}^\dagger\}, \quad \hat{Q} = i\hat{a}^\dagger \hat{f}, \quad \hat{Q}^\dagger = i\hat{a} \hat{f}^\dagger. \quad (3.3)$$

Pour décrire les états super-cohérents pour un tel modèle, nous prenons l'espace de représentation  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_b \otimes \mathcal{F}_f = \{|n, +\rangle = \binom{n}{0}, |n, -\rangle = \binom{0}{n}\}, n = 0, 1, 2, \dots\}$ . Les états super-cohérents sont ainsi définis [AZ 86] comme les états propres de l'opérateur

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{a} & 0 \\ 1 & \hat{a} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

qui est appelé l'opérateur d'annihilation supersymétrique. Ces états sont donnés par

$$|\psi\rangle_+ = \exp(\tilde{\beta}\hat{a}^\dagger) |0; +\rangle, \quad |\psi\rangle_- = \exp(\tilde{\beta}\hat{a}^\dagger) [a^\dagger|0; +\rangle - |0; -\rangle]. \quad (3.5)$$

À partir de ces états, nous pouvons construire des états propres orthogonaux tout en remplaçant  $\hat{a}^\dagger$  par  $\hat{A}^\dagger = \hat{a}^\dagger - \tilde{\beta}\hat{I}$  dans le facteur non exponentiel de l'état représenté par  $|\psi\rangle_-$ , à savoir:

$$|\psi\rangle_+ = \exp(\tilde{\beta}\hat{a}^\dagger) |0; +\rangle, \quad |\psi\rangle_- = \exp(\tilde{\beta}\hat{a}^\dagger) [A^\dagger|0; +\rangle - |0; -\rangle]. \quad (3.6)$$

Nous voulons ici présenter une généralisation de ces états pour un spin quelconque en décrivant les solutions de l'équation aux valeurs propres

$$[\hat{a} + \tilde{\tau}\hat{J}_+]|\psi\rangle = \tilde{\beta}|\psi\rangle, \quad (3.7)$$

où  $\hat{a}$  est l'opérateur d'annihilation habituel et  $\hat{J}_+$  l'opérateur d'échelle défini auparavant.

En général, les états solutions de (3.7), pour un  $j$  déterminé, peuvent s'écrire

$$|\psi\rangle^j = \sum_{m=-j}^j \sum_{n=0}^{\infty} C_{n;m}^j |n; j, m\rangle, \quad (3.8)$$

où les états  $|n; j, m\rangle = |n\rangle \otimes |j, m\rangle$  sont le produit direct des états propres  $|n\rangle$  de l'oscillateur harmonique usuel et des états  $|j; m\rangle$  de la représentation irréductible  $T^j(g)$  du groupe  $SU(2)$ . Ainsi, on a:

$$\begin{aligned}\hat{a} |n; j, m\rangle &= \sqrt{n} |n-1; j, m\rangle, \\ \hat{a}^\dagger |n; j, m\rangle &= \sqrt{n+1} |n+1; j, m\rangle, \\ \hat{J}_\pm |n; j, m\rangle &= \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |n; j, m \pm 1\rangle,\end{aligned}\quad (3.9)$$

avec

$$\langle n_1; j, m_1 | n_2; j, m_2 \rangle = \delta_{n_1, n_2} \delta_{m_1, m_2}. \quad (3.10)$$

En vertu de (3.9) et (3.10), l'insertion de (3.8) dans (3.7) produit un système d'équations qui nous permet de trouver la valeur des coefficients  $C_{n,m}^j$  et d'écrire (3.8) sous la forme:

$$|\psi\rangle^j = \sum_{m=-j}^j C_{0,m}^j |\psi\rangle_m^j, \quad (3.11)$$

où les coefficients  $C_{0,m}^j$  sont arbitraires et les états  $|\psi\rangle_m^j$  sont des solutions indépendantes de l'équation aux valeurs propres (3.7), donnés par

$$|\psi\rangle_m^j = (C_m^j)^{(-1/2)} \left[ \sum_{k=0}^{j-m} (-1)^k \binom{j-m}{k} \frac{(2j-k)!}{(2j)!} \hat{a}^{\dagger(j-m-k)} \left(\frac{\hat{J}_-}{\tilde{\tau}}\right)^k \right] \exp(\tilde{\beta} \hat{a}^\dagger) |0; j, j\rangle, \quad (3.12)$$

où  $C_m^j$  ( $m = -j, \dots, j$ ) sont des constantes de normalisation.

Que les états (3.12) soient des solutions de (3.7) se déduit directement du fait qu'en général, nous avons

$$\hat{a}^r \hat{a}^{\dagger s} = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \frac{d^k}{d\hat{a}^{\dagger k}} \hat{a}^{\dagger s} \hat{a}^{r-k}, \quad \text{où } r, s \text{ sont des entiers } \geq 0 \quad (3.13)$$

et

$$\hat{a} \exp(\tilde{\beta} \hat{a}^\dagger) |0; j, m\rangle = \tilde{\beta} \exp(\tilde{\beta} \hat{a}^\dagger) |0; j, m\rangle. \quad (3.14)$$

À l'aide des équations (3.9), (3.10), (3.13) et (3.14), on peut calculer les constantes  $C_m^j$ . Celles-ci sont données par

$$C_m^j = \frac{(j-m)!}{(2j)!} \exp(|\tilde{\beta}|^2) \sum_{k=0}^{j-m} \binom{j-m}{k} (2j-k)! \left(\frac{1}{|\tilde{\tau}|^2}\right)^k L_{j-m-k}^0(-|\tilde{\beta}|^2), \quad (3.15)$$

où  $L_{j-m-k}^0(-|\tilde{\beta}|^2)$  sont des polynômes de Laguerre.

Des expressions générales pour les valeurs moyennes des opérateurs  $\hat{J}_3$ ,  $\hat{J}_-$  et  $\hat{J}_+$  dans les états (3.12) sont données par:

$$\langle \psi | \hat{J}_3 | \psi \rangle_m^j = j + |\tilde{\tau}|^2 \frac{\partial}{\partial |\tilde{\tau}|^2} \ln(C_m^j), \quad m = -j, \dots, j, \quad (3.16)$$

$$\langle \psi | \hat{J}_- | \psi \rangle_m^j = -\frac{\tilde{\tau}}{|\tilde{\tau}|^2} \frac{|\tilde{\beta}|^2 \sum_{k=0}^{j-m-1} \binom{j-m}{k} (2j-k)! \left(\frac{1}{|\tilde{\tau}|^2}\right)^k L_{j-m-k-1}^1(-|\tilde{\beta}|^2)}{\tilde{\beta} \sum_{k=0}^{j-m} \binom{j-m}{k} (2j-k)! \left(\frac{1}{|\tilde{\tau}|^2}\right)^k L_{j-m-k}^0(-|\tilde{\beta}|^2)}, \quad (3.17)$$

avec  $m = -j, \dots, j-1$ . Quand  $m = j$ , on a  $\langle \psi | \hat{J}_- | \psi \rangle_j^j = 0$ . Par ailleurs, on a

$$\langle \psi | \hat{J}_+ | \psi \rangle_m^j = -\frac{1}{\tilde{\tau}} \frac{\tilde{\beta} \sum_{k=0}^{j-m-1} \binom{j-m}{k} (2j-k)! (j-m-k)! \left(\frac{1}{|\tilde{\tau}|^2}\right)^k L_{j-m-k}^{-1}(-|\tilde{\beta}|^2)}{|\tilde{\beta}|^2 \sum_{k=0}^{j-m} \binom{j-m}{k} (2j-k)! \left(\frac{1}{|\tilde{\tau}|^2}\right)^k L_{j-m-k}^0(-|\tilde{\beta}|^2)}, \quad (3.18)$$

avec  $m = -j, \dots, j-1$ . Quand  $m = j$ , on a  $\langle \psi | \hat{J}_+ | \psi \rangle_j^j = 0$ .

On s'aperçoit que cette dernière expression donne les résultats corrects pour la valeur moyenne de  $\hat{J}_+$ , même si les polynômes de Laguerre  $L_n^\alpha(x)$  ne sont définis que pour  $n$  entier,  $n \geq 0$  et  $\alpha$  réel,  $\alpha > -1$ . Pour être correct, on devrait utiliser l'expression suivante pour la valeur moyenne de  $\hat{J}_+$ :

$$\langle \psi | \hat{J}_+ | \psi \rangle_m^j = -\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\tau}} \times \frac{\sum_{k=0}^{j-m-1} \binom{j-m}{k} (2j-k)! \left(\frac{1}{|\tilde{\tau}|^2}\right)^k \left\{ L_{j-m-k-1}^0(-|\tilde{\beta}|^2) + \frac{\partial}{\partial |\tilde{\beta}|^2} L_{j-m-k-1}^0(-|\tilde{\beta}|^2) \right\}}{\sum_{k=0}^{j-m} \binom{j-m}{k} (2j-k)! \left(\frac{1}{|\tilde{\tau}|^2}\right)^k L_{j-m-k}^0(-|\tilde{\beta}|^2)}, \quad (3.19)$$

avec  $m = -j, \dots, j-1$ . Quand  $m = j$ , on a  $\langle \psi | \hat{J}_+ | \psi \rangle_j^j = 0$ .

Les calculs se simplifient énormément si, au lieu d'utiliser directement les états (3.12) pour faire les calculs, on considère plutôt un ensemble de solutions orthonormales et indépendantes de l'équation aux valeurs propres (3.7). On va donc prendre:

$$|\tilde{\psi}\rangle_m^j = (\tilde{C}_m^j)^{(-1/2)} \left[ \sum_{k=0}^{j-m} (-1)^k \binom{j-m}{k} \frac{(2j-k)!}{(2j)!} \hat{A}^{\dagger(j-m-k)} \left( \frac{\hat{J}_-}{\tilde{\tau}} \right)^k \right] \exp(\tilde{\beta} \hat{a}^\dagger) |0; j, j\rangle, \quad (3.20)$$

où  $m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$  et  $\hat{A} = \hat{a} - \tilde{\beta} \hat{I}$  est l'opérateur d'annihilation décalé qui a été défini dans le chapitre 1.

Les constantes de normalisation  $\tilde{C}_m^j$  sont données par

$$\tilde{C}_m^j = \frac{(j-m)!}{(2j)!} \exp\left(|\tilde{\beta}|^2\right) \sum_{k=0}^{j-m} \binom{j-m}{k} (2j-k)! \left(\frac{1}{|\tilde{\tau}|^2}\right)^k, \quad (3.21)$$

de telle sorte à obtenir  $\langle \tilde{\psi} | \tilde{\psi} \rangle_m^j = 1$ .

La valeur moyenne de l'opérateur  $\hat{J}_3$  dans les états (3.20) est alors donnée par

$$\langle \tilde{\psi} | \hat{J}_3 | \tilde{\psi} \rangle_m^j = j + |\tilde{\tau}|^2 \frac{\partial}{\partial |\tilde{\tau}|^2} \ln(\tilde{C}_m^j), \quad m = -j, \dots, j, \quad (3.22)$$

expression qui est visiblement indépendante de  $\tilde{\beta}$ . Pour les valeurs moyennes des opérateurs  $\hat{J}_\pm$ , on a

$$\langle \tilde{\psi} | \hat{J}_\pm | \tilde{\psi} \rangle_m^j = 0, \quad m = -j, \dots, j, \quad (3.23)$$

car

$$\hat{A} \exp(\tilde{\beta} \hat{a}^\dagger) |0; j, m\rangle = 0, \quad m = -j, \dots, j. \quad (3.24)$$

D'autre part, en utilisant les résultats que nous venons d'obtenir, il est aisé de déterminer les solutions de l'équation aux valeurs propres

$$[\hat{a} + \tilde{\tau} \hat{J}_-] |\psi\rangle = \tilde{\beta} |\psi\rangle, \quad (3.25)$$

qui diffère de (3.7) par le remplacement de  $\hat{J}_+$  par  $\hat{J}_-$  et  $\tilde{\tau}$  par  $\bar{\tau}$ . En effet, un ensemble de solutions orthonormales et indépendantes de cette équation s'obtient directement,

par analogie avec (3.20), comme

$$|\tilde{\psi}\rangle_m^j = (\tilde{C}_m^j)^{(-1/2)} \left[ \sum_{k=0}^{j-m} (-1)^k \binom{j-m}{k} \frac{(2j-k)!}{(2j)!} \hat{A}^{\dagger(j-m-k)} \left(\frac{\hat{J}_+}{\bar{\tau}}\right)^k \right] \exp(\bar{\beta}\hat{a}^\dagger) |0; j, -j\rangle, \quad (3.26)$$

où  $m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$ . Les constantes de normalisation  $(\tilde{C}_m^j)$  sont encore données par (3.21) et la valeur moyenne de l'opérateur  $\hat{J}_3$  dans ces états est alors

$$\langle \tilde{\psi} | \hat{J}_3 | \tilde{\psi} \rangle_m^j = -j + |\bar{\tau}|^2 \frac{\partial}{\partial |\bar{\tau}|^2} \ln(\tilde{C}_m^j), \quad m = -j, \dots, j. \quad (3.27)$$

### 3.2 États propres d'algèbre associés à $h(1) \oplus su(2)$

L'algèbre de Lie  $h(1) \oplus su(2)$  est la somme directe de l'algèbre  $h(1)$  engendrée par  $\{\hat{x}, \hat{p}, \hat{I}\}$  et de  $su(2)$  engendrée par  $\{\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3\}$ . En termes des opérateurs de création et d'annihilation usuels, on peut encore prendre l'ensemble de générateurs  $\{\hat{a}, \hat{a}^\dagger, \hat{I}; \hat{J}_+, \hat{J}_-, \hat{J}_3\}$ . Ces opérateurs obéissent aux règles de commutation suivantes :

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad [\hat{J}_3, \hat{J}_\pm] = \pm \hat{J}_\pm, \quad [\hat{J}_-, \hat{J}_+] = -2\hat{J}_3, \quad (3.28)$$

tous les autres commutateurs étant nuls.

La forme la plus générale d'un opérateur hermitien  $\hat{A}$  construit à partir de la combinaison linéaire de tels opérateurs est :

$$\hat{A} = A_1 \hat{a} + \bar{A}_1 \hat{a}^\dagger + A_2 \hat{I} + A_3 \hat{J}_+ + \bar{A}_3 \hat{J}_- + A_4 \hat{J}_3, \quad (3.29)$$

où  $A_2$  et  $A_4$  sont des nombres réels, tandis que  $A_1$  et  $A_3$  sont des nombres complexes.

Si on prend deux opérateurs hermitiens quelconques,  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$ , de la forme (3.29), leur commutateur est donné par  $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}$ , où  $\hat{C}$  est l'opérateur hermitien

$$\hat{C} = \left[ i \left( \bar{A}_1 B_1 - A_1 \bar{B}_1 \right) \hat{I} + 2i \left( B_3 \bar{A}_3 - \bar{B}_3 A_3 \right) \hat{J}_3 + \right. \\ \left. i \left( A_3 B_4 - A_4 B_3 \right) \hat{J}_+ + i \left( A_4 \bar{B}_3 - \bar{A}_3 B_4 \right) \hat{J}_- \right]. \quad (3.30)$$

Nous sommes intéressés à minimiser la relation d'incertitude générale de Schrödinger-Robertson pour de tels opérateurs  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$ , c'est-à-dire à chercher les états  $|\psi\rangle$  qui sont

solutions de l'équation (1.7), avec les conditions (1.8). À l'aide de l'équation (3.29), on obtient donc

$$[\alpha_- \hat{a} + \alpha_+ \hat{a}^\dagger + \alpha_3 \hat{I} + \beta_- \hat{J}_+ + \beta_+ \hat{J}_- + \beta_3 \hat{J}_3] |\psi\rangle = \beta |\psi\rangle, \quad (3.31)$$

où

$$\begin{aligned} \alpha_- &= A_1 + i\lambda B_1, & \alpha_+ &= \bar{A}_1 + i\lambda \bar{B}_1, & \alpha_3 &= A_2 + i\lambda B_2, \\ \beta_- &= A_3 + i\lambda B_3, & \beta_+ &= \bar{A}_3 + i\lambda \bar{B}_3, & \beta_3 &= A_4 + i\lambda B_4. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Les solutions de l'équation aux valeurs propres (3.31) correspondent aux états propres d'algèbre associés à l'algèbre  $\mathfrak{h}(1) \oplus \mathfrak{su}(2)$ . Dans le cas spécial (3.32), si  $|\lambda| \neq 1$ , ces états correspondent aux états comprimés associés aux opérateurs  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$  tandis que si  $|\lambda| = 1$ , ce seront les états cohérents associés.

Afin de résoudre (3.31), on peut écrire l'état  $|\psi\rangle$  comme une superposition des états fondamentaux  $|n; j, m\rangle$  représentant le produit direct des états fondamentaux  $|n\rangle$  de l'oscillateur harmonique standard (  $n$  entier positif ou nul ) et les états  $|j, m\rangle$  (  $j$  entier ou demi-entier,  $m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$  ) de la représentation irréductible  $T^j(g)$  du groupe  $SU(2)$ . Pour un  $j$  fixé, on écrit donc l'état cherché sous la forme:

$$|\psi\rangle^j = \sum_{m=-j}^j \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,m}^j |n; j, m\rangle. \quad (3.33)$$

En insérant (3.33) dans l'équation (3.31) et, en tenant compte des équations (3.9) et (3.10), on obtient un système d'équations pour les coefficients  $C_{n,m}^j$  dont la résolution nous permet de déterminer  $|\psi\rangle^j$ . Cependant, cette procédure devient de plus en plus compliquée au fur et à mesure que la valeur de  $j$  augmente.

Une manière plus efficace consiste à utiliser les résultats que nous avons décrits précédemment ( chapitres 1 et 2 ) pour les états propres d'algèbre de l'algèbre de Heisenberg et de  $\mathfrak{su}(2)$ . En effet, un ensemble de solutions des équations (3.31) est alors donné par:

$$|\psi\rangle_m^j = Cte \exp\left(\frac{-\alpha_+}{2\alpha_-} \hat{a}^{\dagger 2}\right) \exp\left(\frac{\rho}{\alpha_-} \hat{a}^\dagger\right) \hat{T}_{eff} |0; j, m\rangle, \quad (3.34)$$

lorsque  $\alpha_- \neq 0$ ;  $m = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j$  et que

$$\rho = \beta - \alpha_3 - mb, \quad (3.35)$$

avec  $b = \sqrt{4\beta_+\beta_- + \beta_3^2}$ ;  $b \neq 0$ . De plus, dans (3.34),  $\hat{T}_{eff}$  est donné par

$$\hat{T}_{eff} = \left(\frac{b}{\beta_+}\right)^{j+m} \sqrt{\frac{(j+m)!(j-m)!}{(2j)!}} \exp\left(\frac{-2\beta_-}{b+\beta_3}\hat{J}_+\right) \exp\left(\frac{\beta_+}{b}\hat{J}_-\right). \quad (3.36)$$

Un cas particulier important, non inclu complètement dans la solution (3.34), est obtenu quand  $\beta_+ = 0$ ,  $\beta_3 = 0$  et  $\alpha_+ = 0$ , ce qui implique  $b = 0$ . Dans un tel cas, on résout l'équation aux valeurs propres (3.7), où  $\tilde{\tau} = \left(\frac{\beta_-}{\alpha_-}\right)$ ,  $\tilde{\beta} = \left(\frac{\beta_- \alpha_3}{\alpha_-}\right)$  et  $\alpha_- \neq 0$ . L'ensemble des solutions orthogonales et indépendantes de cette équation est alors donné par l'équation (3.20). Revenant au cas particulier de l'équation (3.32), en comparant l'équation (3.7) avec (3.31), on s'aperçoit que, pour une valeur fixée du paramètre  $\lambda$ , les coefficients  $A_i, B_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) des opérateurs  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$  ont un rapport spécial entre eux. En effet, les conditions  $\beta_+ = 0$ ,  $\beta_3 = 0$  et  $\alpha_+ = 0$ , insérées dans (3.32) impliquent:

- si  $\text{Re } \lambda \neq 0$ , on a

$$A_4 = B_4 = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_0 = i\frac{\bar{A}_1}{B_1} = i\frac{\bar{A}_3}{B_3}. \quad (3.37)$$

- si  $\text{Re } \lambda = 0$ ,  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$  sont essentiellement des multiples l'un de l'autre.

Mais, si nous voulons que, pour une valeur fixée du paramètre  $\lambda$ , se vérifient les conditions  $\beta_- = 0$ ,  $\beta_3 = 0$  et  $\alpha_+ = 0$ , c'est-à-dire qu'on ait à résoudre l'équation aux valeurs propres (3.25), il faut choisir les coefficients  $A_i$  et  $B_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) de la façon suivante:

- si  $\text{Re } \lambda \neq 0$ , on a

$$A_4 = B_4 = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_0 = i\frac{\bar{A}_1}{B_1} = i\frac{A_3}{B_3}. \quad (3.38)$$

- si  $\text{Re } \lambda = 0$ ,  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$  sont essentiellement des multiples l'un de l'autre.

Il faut remarquer que les cas décrits par les équations (3.37) et (3.38) sont les seuls cas non triviaux pour lesquels le commutateur  $[\hat{A}, \hat{B}] = iC$  présente la forme canonique généralisée, c'est-à-dire,

$$\hat{C} = i(\bar{A}_1 B_1 - A_1 \bar{B}_1) \hat{I} + 2i(B_3 \bar{A}_3 - \bar{B}_3 A_3) \hat{J}_3. \quad (3.39)$$

Un cas particulièrement intéressant se présente lorsqu'on choisit les coefficients  $A_i$  et  $B_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) de la façon suivante:

$$\frac{A_4}{B_4} = \frac{A_3}{B_3}. \quad (3.40)$$

Dans ce cas, le commutateur des opérateurs  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$  présente la forme canonique

$$[\hat{A}, \hat{B}] = (A_1 \bar{B}_1 - \bar{A}_1 B_1) \hat{I}, \quad \mapsto \quad \hat{C} = i(\bar{A}_1 B_1 - A_1 \bar{B}_1) \hat{I}. \quad (3.41)$$

Ce cas sera analysé dans la section 3.4.

En général, pour calculer la valeur moyenne de l'opérateur  $\hat{C}$ , donné en (3.30), il faut calculer les valeurs moyennes des opérateurs  $\hat{I}$ ,  $\hat{J}_3$ ,  $\hat{J}_+$  et  $\hat{J}_-$  dans les états  $|\psi\rangle_m^j$  comme donnés par l'équation (3.34). Par ailleurs, si le cas pour lequel  $\hat{C}$  est donné par l'équation (3.39) se présente, il faudra aussi calculer les valeurs moyennes des opérateurs  $\hat{I}$  et  $\hat{J}_3$  pour une valeur donnée de  $\lambda$  en utilisant les états donnés par l'équation (3.20) ou ceux donnés par l'équation (3.26). Ces valeurs moyennes se calculent sur la base des résultats présentés dans l'appendice C et la section précédente respectivement.

### 3.3 États cohérents et comprimés associés à l'opérateur de super-position $\hat{X}$ et de super-impulsion $\hat{P}$

Si les coefficients des opérateurs  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$  sont donnés par

$$\begin{aligned} A_4 = B_4 = A_2 = B_2 = 0, \\ A_1 = \frac{\mu}{\sqrt{2}}, \quad B_1 = -i A_1, \\ A_3 = \frac{\tau}{\sqrt{2}}, \quad B_3 = -i A_3, \end{aligned} \quad (3.42)$$



$\hat{A}$  représente l'opérateur de super-position  $\hat{X}$  et  $\hat{B}$  l'opérateur de super-impulsion  $\hat{P}$ :

$$\begin{aligned}\hat{X} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (\mu \hat{a} + \bar{\mu} \hat{a}^\dagger) + (\tau \hat{J}_+ + \bar{\tau} \hat{J}_-) \right], \\ \hat{P} &= \frac{i}{\sqrt{2}} \left[ (\bar{\mu} \hat{a}^\dagger - \mu \hat{a}) + (\bar{\tau} \hat{J}_- - \tau \hat{J}_+) \right]\end{aligned}\tag{3.43}$$

et l'équation aux valeurs propres (1.7) correspond donc à:

$$[\hat{X} + i\lambda \hat{P}] |\psi\rangle = \beta |\psi\rangle.\tag{3.44}$$

L'opérateur  $\hat{C}$  devient

$$\hat{C} = |\mu|^2 \hat{I} + 2|\tau|^2 \hat{J}_3.\tag{3.45}$$

Dans ce cas, on a:

$$\begin{aligned}\alpha_- &= \frac{\mu(1+\lambda)}{\sqrt{2}}, & \alpha_+ &= \frac{\bar{\mu}(1-\lambda)}{\sqrt{2}}, & \alpha_3 &= 0, \\ \beta_- &= \frac{\tau(1+\lambda)}{\sqrt{2}}, & \beta_+ &= \frac{\bar{\tau}(1-\lambda)}{\sqrt{2}}, & \beta_3 &= 0.\end{aligned}\tag{3.46}$$

On a, par ailleurs,

$$b = \sqrt{2} |\tau| \sqrt{1 - \lambda^2}.\tag{3.47}$$

Étant donné que les coefficients en (3.42) vérifient l'équation (3.37), pour la valeur fixée de  $\lambda = 1$ , les solutions de l'équation aux valeurs propres (3.7), qui sont des états super-cohérents associés aux opérateurs  $\hat{X}$  et  $\hat{P}$ , sont données par les équations (3.20) avec  $\hat{A} = \hat{a} - \tilde{\beta}$ ,  $\tilde{\beta} = \frac{\beta}{\sqrt{2}\mu}$  et  $\tilde{\tau} = \frac{\tau}{\mu}$ , c'est-à-dire

$$|\psi\rangle_m^j = (C_m^j)^{(-1/2)} \times \left[ \sum_{k=0}^{j-m} (-1)^k \binom{j-m}{k} \frac{(2j-k)!}{(2j)!} \left( \hat{a}^\dagger - \frac{\tilde{\beta}}{\mu\sqrt{2}} \right)^{(j-m-k)} \left( \frac{\mu \hat{J}_-}{\tau} \right)^k \right] \exp \left( \frac{\beta \hat{a}^\dagger}{\mu\sqrt{2}} \right) |0; j, j\rangle,\tag{3.48}$$

où  $m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$ ;  $\mu \neq 0$  et

$$C_m^j = (j-m)! \exp\left(\frac{|\beta|^2}{2|\mu|^2}\right) \left[ \sum_{k=0}^{j-m} \binom{j-m}{k} \frac{(2j-k)!}{(2j)!} \left(\frac{|\mu|^2}{|\tau|^2}\right)^k \right]. \quad (3.49)$$

La valeur moyenne de  $\hat{C}$  dans les états (3.48) est

$$\langle \hat{C} \rangle_m^j = |\mu|^2 + 2|\tau|^2 \left[ j + |\tau|^2 \frac{\partial}{\partial |\tau|^2} \ln \left( \sum_{k=0}^{j-m} \binom{j-m}{k} \frac{(j-m)!(2j-k)!}{(2j)!} \left(\frac{|\mu|^2}{|\tau|^2}\right)^k \right) \right]. \quad (3.50)$$

En particulier, quand  $j = \frac{1}{2}$ , les équations (3.48) et (3.50) se réduisent à:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle^+ &= \exp\left(\frac{-|\beta|^2}{4|\mu|^2}\right) \exp\left(\frac{\beta \hat{a}^\dagger}{\mu\sqrt{2}}\right) |0; +\rangle, \\ |\psi\rangle^- &= \frac{|\tau|}{\sqrt{|\mu|^2 + |\tau|^2}} \exp\left(\frac{-|\beta|^2}{4|\mu|^2}\right) \exp\left(\frac{\beta \hat{a}^\dagger}{\mu\sqrt{2}}\right) \left[ \left(\hat{a}^\dagger - \frac{\bar{\beta}}{\mu\sqrt{2}}\right) |0; +\rangle - \frac{\mu}{\tau} |0; -\rangle \right] \end{aligned} \quad (3.51)$$

et

$$\langle \hat{C} \rangle^+ = |\mu|^2 + |\tau|^2, \quad \langle \hat{C} \rangle^- = \frac{(|\mu|^4 + |\tau|^4)}{(|\mu|^2 + |\tau|^2)}. \quad (3.52)$$

Lorsque  $\mu = 1$ , ces résultats reproduisent ceux obtenus par V. Hussin [Hu 00]. Les dispersions de  $\hat{X}$  et  $\hat{P}$  dans ces états sont données par:

$$(\Delta \hat{X}^2)_+ = (\Delta \hat{P}^2)_+ = \frac{1}{2} (|\mu|^2 + |\tau|^2) \quad (3.53)$$

et

$$(\Delta \hat{X}^2)_- = (\Delta \hat{P}^2)_- = \frac{1}{2} \left[ (|\mu|^2 + |\tau|^2) - \frac{2|\mu|^2|\tau|^2}{(|\mu|^2 + |\tau|^2)} \right]. \quad (3.54)$$

On s'aperçoit donc que les dispersions de  $\hat{X}$  et  $\hat{P}$  calculées dans les états  $|\psi\rangle^-$  sont plus petites que celles calculées dans les états  $|\psi\rangle^+$ . Nous pouvons dire que les états  $|\psi\rangle^-$  constituent les états le plus proches aux états classiques pour l'oscillateur harmonique supersymétrique.

Selon les équations (3.34), (3.35) et (3.36), dans le cas où  $\lambda \neq 1$ , les états qui minimisent la relation d'incertitude générale associée aux opérateurs  $\hat{X}$  et  $\hat{P}$  sont donnés par

$$|\psi\rangle_m^j = Cte. \exp\left(\frac{-|\mu|^2 \delta e^{i\phi} \hat{a}^{\dagger 2}}{2\mu^2}\right) \exp\left(\frac{1}{\mu} \left\{ \frac{\beta(1+\delta e^{i\phi})}{\sqrt{2}} - 2m|\tau| \delta^{1/2} e^{i\phi/2} \right\} \hat{a}^\dagger\right) \times \exp\left(\frac{-\tau \delta^{-1/2} e^{-i\phi/2}}{|\tau|} \hat{J}_+\right) \exp\left(\frac{\bar{\tau} \delta^{1/2} e^{i\phi/2}}{2|\tau|} \hat{J}_-\right) |0; j, m\rangle, \quad (3.55)$$

lorsque  $m = -j, \dots, j$ . La valeur moyenne de  $\hat{C}$  dans ces états est

$$\langle \hat{C} \rangle_m^j = |\mu|^2 + 2|\tau|^2 \frac{(1-\delta)}{(1+\delta)} \left( j - \frac{4(j+|m|)\delta}{(1+\delta)^2} \Omega \right), \quad (3.56)$$

où  $\Omega$  s'exprime en termes des polynômes de Jacobi sous la forme:

$$\Omega = \frac{P_{j-|m|-1}^{(-2j,1)} \left(1 - \frac{8\delta}{(1+\delta)^2}\right)}{P_{j-|m|}^{(-2j-1,0)} \left(1 - \frac{8\delta}{(1+\delta)^2}\right)}, \quad m = -j+1, \dots, j-1, \quad (3.57)$$

tandis que  $\Omega = 0$  pour  $m = \pm j$ . Dans ce dernier cas, on a

$$\langle \hat{C} \rangle_{\pm j}^j = |\mu|^2 + 2j|\tau|^2 \frac{(1-\delta)}{(1+\delta)} \quad (3.58)$$

et, si  $j = \frac{1}{2}$ ,

$$\langle \hat{C} \rangle^\pm = |\mu|^2 + |\tau|^2 \frac{(1-\delta)}{(1+\delta)}, \quad (3.59)$$

ce qui correspond bien aux résultats obtenus par V. Hussin [Hu 00] dans le cas où  $\mu = 1$ .

Dans le cas où  $j = \frac{1}{2}$ , les dispersions de  $\hat{X}$  et  $\hat{P}$  dans ces états sont données par:

$$\begin{aligned} (\Delta \hat{X}^2)_\pm &= \frac{(1 - 2\delta \cos \phi + \delta^2)}{2(1 - \delta^2)} \left[ |\mu|^2 + |\tau|^2 \frac{(1 - \delta)}{(1 + \delta)} \right], \\ (\Delta \hat{P}^2)_\pm &= \frac{(1 + 2\delta \cos \phi + \delta^2)}{2(1 - \delta^2)} \left[ |\mu|^2 + |\tau|^2 \frac{(1 - \delta)}{(1 + \delta)} \right]. \end{aligned} \quad (3.60)$$

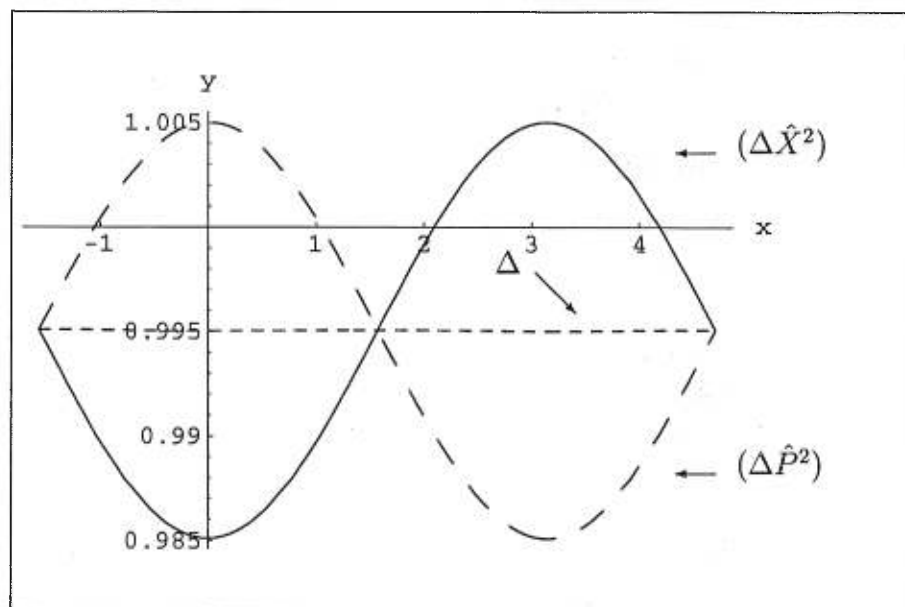


FIG. 3.1 – Graphique des dispersions  $(\Delta \hat{X}^2)$  et  $(\Delta \hat{P}^2)$  et du facteur  $\Delta$  en fonction de l'angle  $\phi = x$ ,  $\delta = 0.005$ ,  $|\tau| = |\mu| = 1$ ,  $j = \frac{1}{2}$ .

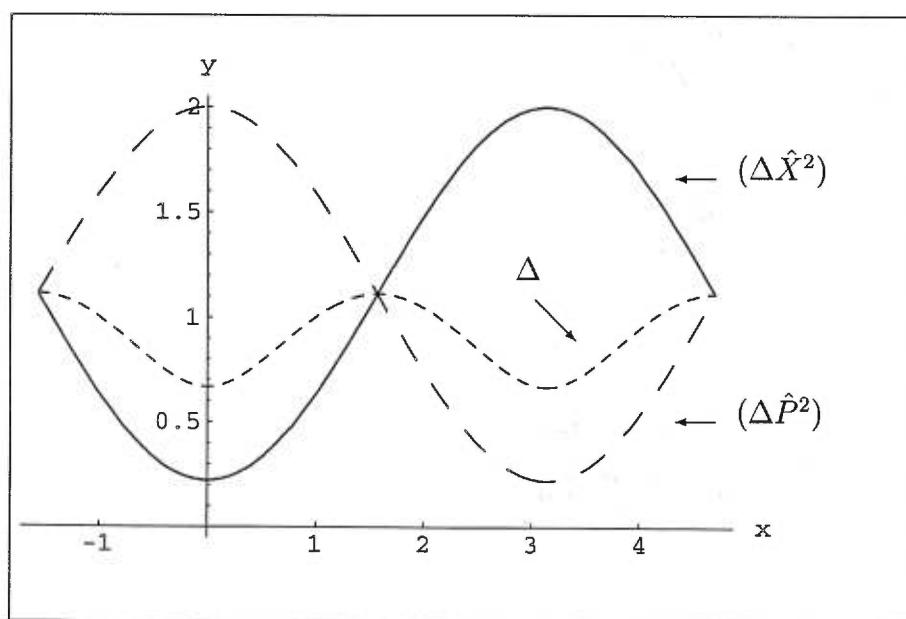


FIG. 3.2 – Graphique des dispersions  $(\Delta \hat{X}^2)$  et  $(\Delta \hat{P}^2)$  et du facteur  $\Delta$  en fonction de l'angle  $\phi = x$ ,  $\delta = 0.5$ ,  $|\tau| = |\mu| = 1$ ,  $j = \frac{1}{2}$ .

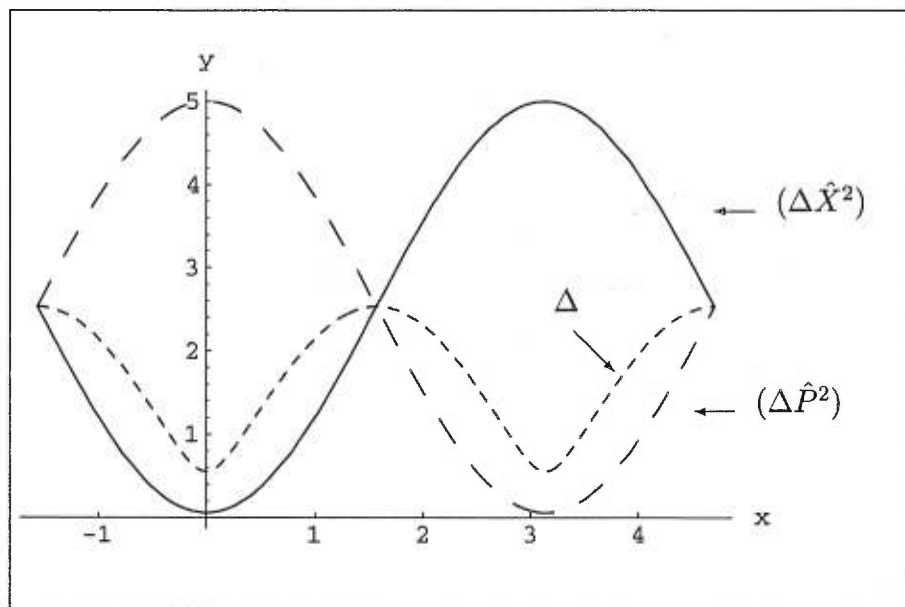


FIG. 3.3 – Graphique des dispersions  $(\Delta \hat{X}^2)$  et  $(\Delta \hat{P}^2)$  et du facteur  $\Delta$  en fonction de l'angle  $\phi = x$ ,  $\delta = 0.8$ ,  $|\tau| = |\mu| = 1$ ,  $j = \frac{1}{2}$ .

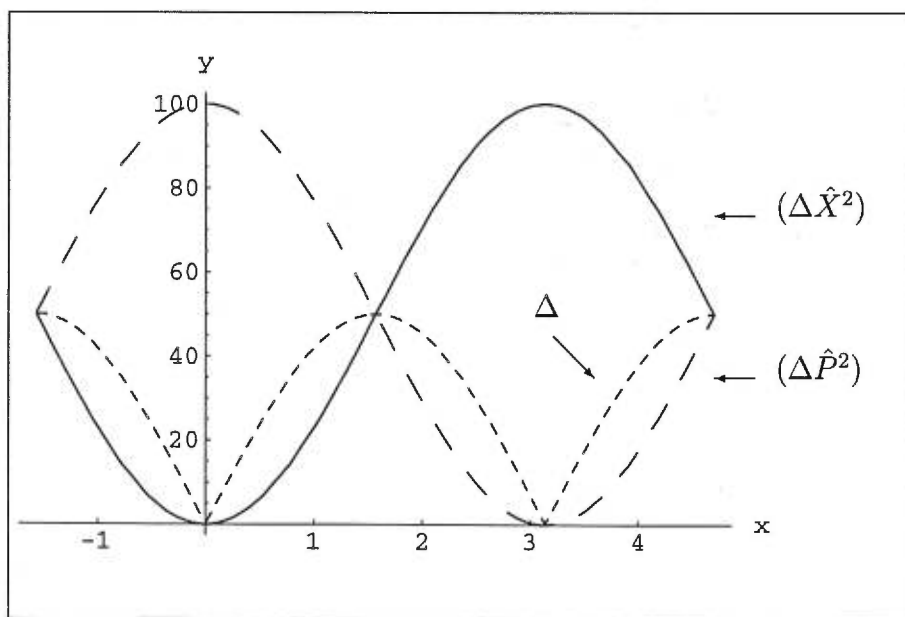


FIG. 3.4 – Graphique des dispersions  $(\Delta \hat{X}^2)$  et  $(\Delta \hat{P}^2)$  et du facteur  $\Delta$  en fonction de l'angle  $\phi = x$ ,  $\delta = 0.99$ ,  $|\tau| = |\mu| = 1$ ,  $j = \frac{1}{2}$ .

Dans ce cas, le facteur  $\Delta$ , défini par l'équation (1.18), est donné par:

$$\Delta_{\pm} = \frac{\sqrt{(1 - \delta^2)^2 + 4\delta^2 \sin^2 \phi}}{2(1 - \delta^2)} \left[ |\mu|^2 + |\tau|^2 \frac{(1 - \delta)}{(1 + \delta)} \right]. \quad (3.61)$$

Nous observons que dans la limite  $\delta \mapsto 0$ , les dispersions de  $\hat{X}$  et  $\hat{P}$  coïncident avec celles qu'ils avaient dans l'état super-cohérent  $|\psi\rangle^+$ . Les figures 3.1 à 3.4 montrent le comportement de  $(\Delta\hat{X}^2)_{\pm}$ ,  $(\Delta\hat{P}^2)_{\pm}$  et  $\Delta_{\pm}$  lorsque l'angle  $\phi$  varie et  $\delta$  est fixé. On voit clairement la position des états cohérents pour lesquels  $(\Delta\hat{X}^2) = (\Delta\hat{P}^2) = \Delta$ . Par ailleurs, les figures 3.5 à 3.8 donnent le comportement des mêmes fonctions lorsque l'angle  $\phi$  est fixé et que  $\delta$  varie entre 0 et 1.

Dans le cas  $j = 1$ , les dispersions de  $\hat{X}$  et  $\hat{P}$  dans les états super-cohérents correspondants sont données par

$$\begin{aligned} (\Delta\hat{X}^2)_1^1 &= (\Delta\hat{P}^2)_1^1 = \frac{1}{2} (|\mu|^2 + 2|\tau|^2), \\ (\Delta\hat{X}^2)_0^1 &= (\Delta\hat{P}^2)_0^1 = \frac{1}{2} \left[ (|\mu|^2 + 2|\tau|^2) - \frac{2|\mu|^2|\tau|^2}{(|\mu|^2 + 2|\tau|^2)} \right], \\ (\Delta\hat{X}^2)_{-1}^1 &= (\Delta\hat{P}^2)_{-1}^1 = \frac{1}{2} \left[ (|\mu|^2 + 2|\tau|^2) - \frac{2|\mu|^2|\tau|^2}{(|\mu|^2 + |\tau|^2)} \right], \end{aligned} \quad (3.62)$$

et les dispersions dans les états comprimés par:

$$\begin{aligned} (\Delta\hat{X}^2)_1^1 &= (\Delta\hat{X}^2)_{-1}^1 = \frac{(1 - 2\delta \cos \phi + \delta^2)}{2(1 - \delta^2)} \left[ |\mu|^2 + 2|\tau|^2 \frac{(1 - \delta)}{(1 + \delta)} \right], \\ (\Delta\hat{P}^2)_1^1 &= (\Delta\hat{P}^2)_{-1}^1 = \frac{(1 + 2\delta \cos \phi + \delta^2)}{2(1 - \delta^2)} \left[ |\mu|^2 + 2|\tau|^2 \frac{(1 - \delta)}{(1 + \delta)} \right], \end{aligned} \quad (3.63)$$

et

$$\begin{aligned} (\Delta\hat{X}^2)_0^1 &= \frac{(1 - 2\delta \cos \phi + \delta^2)}{2(1 - \delta^2)} \left[ |\mu|^2 + 2|\tau|^2 \frac{(1 - \delta^2)}{(1 + \delta^2)} \right], \\ (\Delta\hat{P}^2)_0^1 &= \frac{(1 + 2\delta \cos \phi + \delta^2)}{2(1 - \delta^2)} \left[ |\mu|^2 + 2|\tau|^2 \frac{(1 - \delta^2)}{(1 + \delta^2)} \right]. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Nous observons que dans la limite  $\delta \mapsto 0$  toutes les dispersions des opérateurs  $\hat{X}$  et  $\hat{P}$  données par les équations (3.63) et (3.64) tendent vers les valeurs calculées dans les états super-cohérents  $|\psi\rangle_1^1$ .

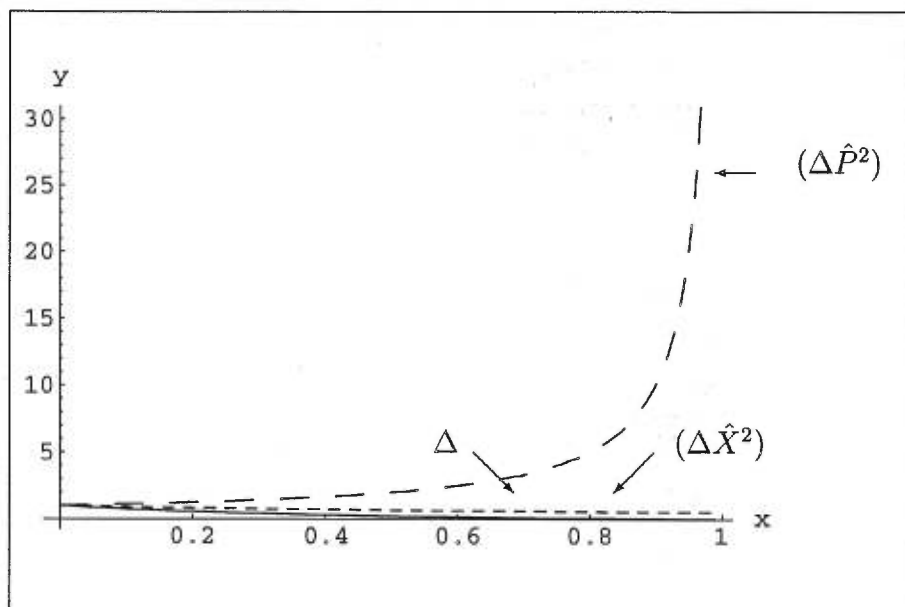


FIG. 3.5 – Graphique des dispersions  $(\Delta \hat{X}^2)$  et  $(\Delta \hat{P}^2)$  et du facteur  $\Delta$  en fonction de  $\delta = x$  pour  $\phi = 0$ ,  $|\tau| = |\mu| = 1$ ,  $j = \frac{1}{2}$ .

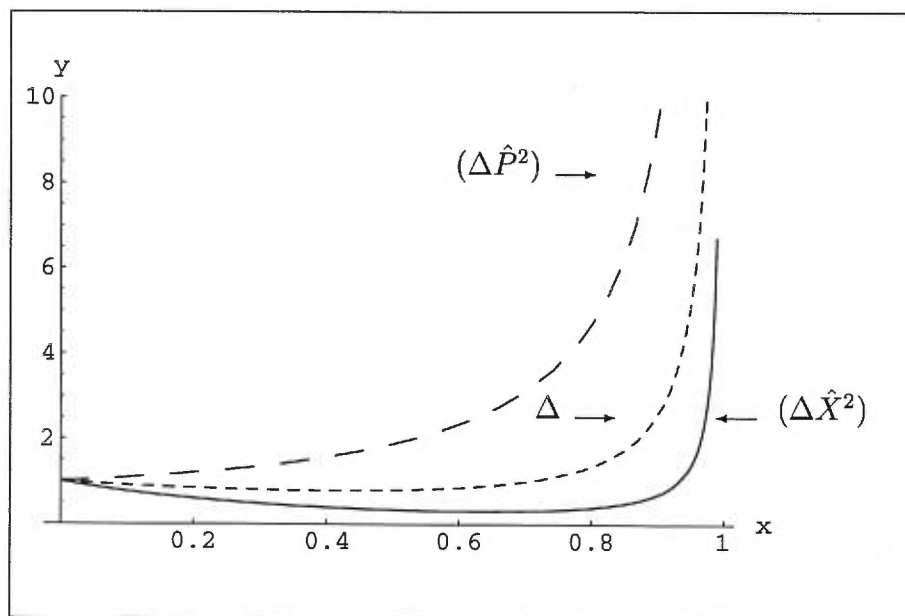


FIG. 3.6 – Graphique des dispersions  $(\Delta \hat{X}^2)$  et  $(\Delta \hat{P}^2)$  et du facteur  $\Delta$  en fonction de  $\delta = x$  pour  $\phi = \frac{\pi}{6}$ ,  $|\tau| = |\mu| = 1$ ,  $j = \frac{1}{2}$ .

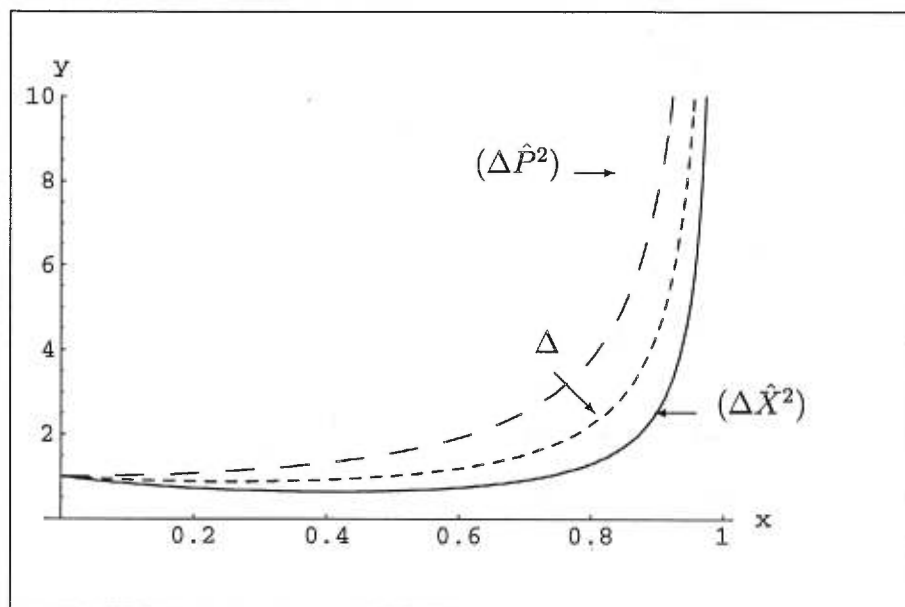


FIG. 3.7 – Graphique des dispersions  $(\Delta \hat{X}^2)$  et  $(\Delta \hat{P}^2)$  et du facteur  $\Delta$  en fonction de  $\delta = x$  pour  $\phi = \frac{\pi}{3}$ ,  $|\tau| = |\mu| = 1$ ,  $j = \frac{1}{2}$ .

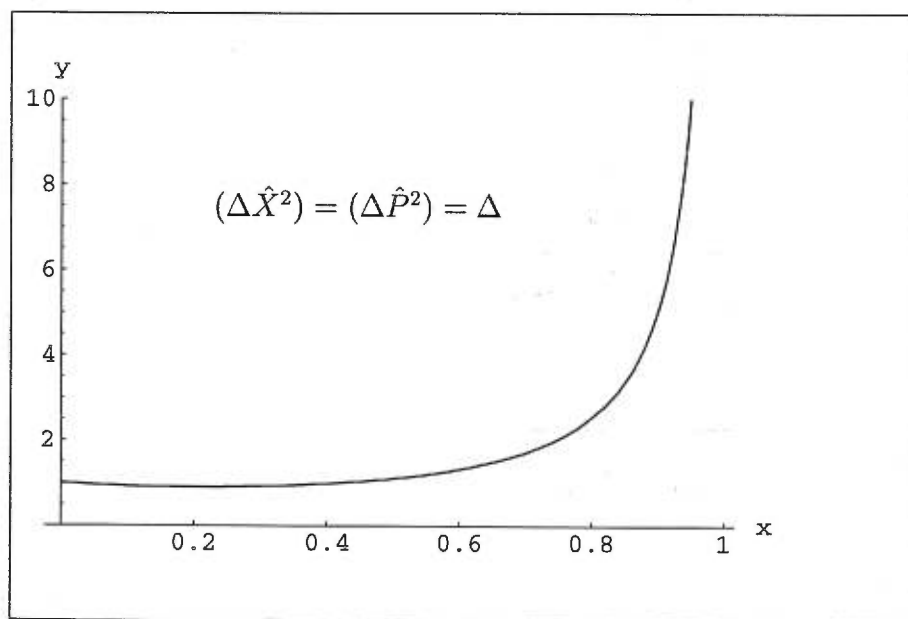


FIG. 3.8 – Graphique des dispersions  $(\Delta \hat{X}^2)$  et  $(\Delta \hat{P}^2)$  et du facteur  $\Delta$  en fonction de  $\delta = x$  pour  $\phi = \frac{\pi}{2}$ ,  $|\tau| = |\mu| = 1$ ,  $j = \frac{1}{2}$ .



Dans le cas  $j = 1$ ,  $m = \pm 1$ , le facteur  $\Delta$  est donné par

$$(\Delta)_{\pm 1}^1 = \frac{\sqrt{(1 - \delta^2)^2 + 4\delta^2 \sin^2 \phi}}{2(1 - \delta^2)} \left[ |\mu|^2 + 2|\tau|^2 \frac{(1 - \delta)}{(1 + \delta)} \right], \quad (3.65)$$

tandis que si  $j = 1$  et  $m = 0$ , il est donné par

$$(\Delta)_0^1 = \frac{\sqrt{(1 - \delta^2)^2 + 4\delta^2 \sin^2 \phi}}{2(1 - \delta^2)} \left[ |\mu|^2 + 2|\tau|^2 \frac{(1 - \delta^2)}{(1 + \delta^2)} \right]. \quad (3.66)$$

### 3.4 États cohérents et comprimés de l'oscillateur harmonique déplacé généralisé

Si les coefficients des opérateurs  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$  satisfont les conditions données par l'équation (3.40), on peut écrire

$$\begin{aligned} \hat{A} &= A_1 \hat{a} + \bar{A}_1 \hat{a}^\dagger + A_2 I + A_3 \hat{J}_+ + \bar{A}_3 \hat{J}_- + A_4 \hat{J}_3, \\ \hat{B} &= B_1 \hat{a} + \bar{B}_1 \hat{a}^\dagger + B_2 I + \frac{B_4}{A_4} (A_3 \hat{J}_+ + \bar{A}_3 \hat{J}_-) + B_4 \hat{J}_3. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Cela correspond à la forme la plus générale des opérateurs  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$  donnant des relations de commutation canoniques. Par exemple, si les coefficients de  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$  sont choisis de la façon suivante

$$A_2 = 0, \quad B_2 = 0 \quad (3.68)$$

et

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\mu}{\sqrt{2}}, & B_1 &= -iA_1, \\ A_3 &= \frac{\tau}{\sqrt{2}}, & B_3 &= -A_3, \\ A_4 &= \frac{\sigma}{\sqrt{2}}, & B_4 &= -A_4, \end{aligned} \quad (3.69)$$

ces opérateurs deviennent

$$\hat{\mathcal{X}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mu \hat{a} + \bar{\mu} \hat{a}^\dagger) \hat{I} + \frac{1}{\sqrt{2}} (\tau \hat{J}_+ + \bar{\tau} \hat{J}_-) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma \hat{J}_3 \quad (3.70)$$

et

$$\hat{\mathcal{P}} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\mu}\hat{a}^\dagger - \mu\hat{a})\hat{I} - \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau\hat{J}_+ + \bar{\tau}\hat{J}_-) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma\hat{J}_3 \quad (3.71)$$

respectivement. Ils satisfont la relation de commutation canonique

$$[\hat{\mathcal{X}}, \hat{\mathcal{P}}] = i|\mu|^2\hat{I}. \quad (3.72)$$

Si on définit les opérateurs de création et d'annihilation de la façon habituelle, à savoir:

$$\hat{\mathcal{A}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\mathcal{X}} + i\hat{\mathcal{P}}), \quad \hat{\mathcal{A}}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\mathcal{X}} - i\hat{\mathcal{P}}), \quad (3.73)$$

on trouve

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{A}} &= \mu\hat{a}\hat{I} + \frac{1}{2}\tau(1-i)\hat{J}_+ + \frac{1}{2}\bar{\tau}(1-i)\hat{J}_- + \frac{1}{2}\sigma(1-i)\hat{J}_3 \\ \hat{\mathcal{A}}^\dagger &= \bar{\mu}\hat{a}^\dagger\hat{I} + \frac{1}{2}\bar{\tau}(1+i)\hat{J}_+ + \frac{1}{2}\tau(1+i)\hat{J}_- + \frac{1}{2}\sigma(1+i)\hat{J}_3. \end{aligned} \quad (3.74)$$

On s'aperçoit que ces opérateurs satisfont les relations de commutation

$$[\hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathcal{A}}^\dagger] = |\mu|^2. \quad (3.75)$$

Nous pouvons donc définir un hamiltonien ayant le même spectre que celui de l'oscillateur harmonique standard, à savoir:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{A}}^\dagger\hat{\mathcal{A}} &= |\mu|^2\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}[\sigma^2 - 2|\tau|^2]\hat{J}_3^2 + |\tau|^2\hat{\mathcal{J}}^2 \\ &+ \frac{1}{2}[\bar{\tau}^2\hat{J}_-^2 + \tau^2\hat{J}_+^2] + \frac{1}{2}\sigma[\mu(1+i)\hat{a} + \bar{\mu}(1-i)\hat{a}^\dagger]\hat{J}_3 \\ &+ \frac{1}{2}[\tau\mu(1+i)\hat{a}\hat{J}_+ + \bar{\tau}\bar{\mu}(1-i)\hat{a}^\dagger\hat{J}_-] + \frac{1}{2}[\tau\bar{\mu}(1-i)\hat{a}^\dagger\hat{J}_+ + \bar{\tau}\mu(1+i)\hat{a}\hat{J}_-] \\ &+ \frac{\sigma}{2}[\tau(\hat{J}_+\hat{J}_3 + \hat{J}_3\hat{J}_+) + \bar{\tau}(\hat{J}_3\hat{J}_- + \hat{J}_-\hat{J}_3)], \end{aligned} \quad (3.76)$$

où  $\hat{\mathcal{J}}^2$  est l'opérateur de Casimir de l'algèbre  $su(2)$ .

Pour trouver les états cohérents et comprimés associés à ce système, il suffit de résoudre l'équation aux valeurs propres

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [(1-\lambda)\hat{\mathcal{A}}^\dagger + (1+\lambda)\hat{\mathcal{A}}] |\psi\rangle = \beta |\psi\rangle. \quad (3.77)$$

Comme nous l'avons déjà consigné, lorsque  $\sigma^2 + 4|\tau|^2 \neq 0$ , ces solutions correspondent aux états propres (3.34) avec

$$\begin{aligned} \alpha_- &= \mu \frac{(1+\lambda)}{\sqrt{2}}, & \alpha_+ &= \bar{\mu} \frac{(1-\lambda)}{\sqrt{2}}, & \alpha_3 &= 0 \\ \beta_- &= \tau \frac{(1-i\lambda)}{\sqrt{2}}, & \beta_+ &= \bar{\tau} \frac{(1-i\lambda)}{\sqrt{2}}, & \beta_3 &= \sigma \frac{(1-i\lambda)}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (3.78)$$

et

$$\rho = \beta - mb, \quad \mapsto \quad b = \sqrt{4\beta_+\beta_- + \beta_3^2} = \frac{(1-i)}{\sqrt{2}} \sqrt{\sigma^2 + 4|\tau|^2}. \quad (3.79)$$

Dès maintenant, nous étudierons les états cohérents associés à ce système pour la valeur fixée du paramètre  $\lambda = 1$ . Notamment, nous analyserons le cas  $j = \frac{1}{2}$ . En effet, ces états correspondent aux états propres de l'opérateur d'annihilation  $\hat{\mathcal{A}}$  donné par l'équation (3.74). Dans la représentation  $j = \frac{1}{2}$ , l'hamiltonien du système se simplifie pour donner:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{A}}^\dagger \hat{\mathcal{A}} &= |\mu|^2 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{8} [\sigma^2 + 4|\tau|^2] \hat{I} + \frac{1}{2} \sigma [\mu(1+i)\hat{a} + \bar{\mu}(1-i)\hat{a}^\dagger] \hat{J}_3 \\ &+ \frac{1}{2} [\tau\mu(1+i)\hat{a} \hat{J}_+ + \bar{\tau}\bar{\mu}(1-i)\hat{a}^\dagger \hat{J}_-] + \frac{1}{2} [\tau\bar{\mu}(1-i)\hat{a}^\dagger \hat{J}_+ + \bar{\tau}\mu(1+i)\hat{a} \hat{J}_-]. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Les états cohérents orthonormaux associés à ce système sont donnés par

$$\begin{aligned} |\psi\rangle^+ &= \exp \left[ -\frac{|\tilde{\beta}|^2 + \frac{1}{8}[g(\sigma, |\tau|)]^2 - \frac{|\tilde{\beta}|}{2}g(\sigma, |\tau|)(\cos \varphi - \sin \varphi)}{2|\mu|^2} \right] \\ &\times \exp \left[ \frac{(|\tilde{\beta}| - \frac{(1-i)}{4}g(\sigma, |\tau|))}{\mu} \hat{a}^\dagger \right] \frac{g(\sigma, |\tau|)}{\sqrt{2}} \frac{[|0; +\rangle + \frac{2\bar{\tau}}{\sigma + g(\sigma, |\tau|)}|0; -\rangle]}{\sqrt{[g(\sigma, |\tau|)]^2 + \sigma g(\sigma, |\tau|)}} \end{aligned} \quad (3.81)$$

et

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle^- &= \exp \left[ -\frac{|\tilde{\beta}|^2 + \frac{1}{8}[g(\sigma, |\tau|)]^2 + \frac{|\tilde{\beta}|}{2}g(\sigma, |\tau|)(\cos \varphi - \sin \varphi)}{2|\mu|^2} \right] \\
&\times \exp \left[ \frac{(|\tilde{\beta}| + \frac{(1-i)}{4}g(\sigma, |\tau|))}{\mu} \hat{a}^\dagger \right] \sqrt{2}|\tau| \frac{[|0; +\rangle - \frac{\sigma+g(\sigma, |\tau|)}{2\tau}|0; -\rangle]}{\sqrt{[g(\sigma, |\tau|)]^2 + \sigma g(\sigma, |\tau|)}}, \quad (3.82)
\end{aligned}$$

où  $\tilde{\beta} = |\tilde{\beta}|e^{i\varphi}$  et

$$g(\sigma, |\tau|) = \sqrt{\sigma^2 + 4|\tau|^2} \neq 0. \quad (3.83)$$

Dans la limite  $\tilde{\beta} \mapsto 0$ , ces états deviennent évidemment les états propres de l'opérateur  $\hat{\mathcal{A}}$  avec la valeur propre 0, c'est-à-dire les états vide du système, à savoir:

$$\begin{aligned}
|\tilde{0}\rangle^+ &= \exp \left[ -\frac{[g(\sigma, |\tau|)]^2}{16|\mu|^2} \right] \exp \left[ -\frac{(1-i)}{4\mu}g(\sigma, |\tau|)\hat{a}^\dagger \right] \\
&\times \frac{g(\sigma, |\tau|)}{\sqrt{2}} \frac{[|0; +\rangle + \frac{2\bar{\tau}}{\sigma+g(\sigma, |\tau|)}|0; -\rangle]}{\sqrt{[g(\sigma, |\tau|)]^2 + \sigma g(\sigma, |\tau|)}} \quad (3.84)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
|\tilde{0}\rangle^- &= \exp \left[ -\frac{[g(\sigma, |\tau|)]^2}{16|\mu|^2} \right] \exp \left[ \frac{(1-i)}{4\mu}g(\sigma, |\tau|)\hat{a}^\dagger \right] \\
&\times \sqrt{2}|\tau| \frac{[|0; +\rangle - \frac{\sigma+g(\sigma, |\tau|)}{2\tau}|0; -\rangle]}{\sqrt{[g(\sigma, |\tau|)]^2 + \sigma g(\sigma, |\tau|)}}. \quad (3.85)
\end{aligned}$$

Ces états continuent d'être orthonormaux.

En vertu de la relation de commutation (3.75) et de la définition de  $\hat{\mathcal{H}}$  donnée par (3.80), nous avons

$$[\hat{\mathcal{H}}, \hat{\mathcal{A}}] = -|\mu|^2 \hat{\mathcal{A}}, \quad (3.86)$$

et nous pouvons donc construire les états propres de  $\hat{\mathcal{H}}$  de la manière habituelle:

$$|\tilde{n}\rangle^+ = \frac{(\hat{\mathcal{A}}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |\tilde{0}\rangle^+, \quad |\tilde{n}\rangle^- = \frac{(\hat{\mathcal{A}}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |\tilde{0}\rangle^-. \quad (3.87)$$

Ces états sont tels que

$$\hat{\mathcal{H}}|\tilde{n}\rangle^\pm = n|\mu|^2|\tilde{n}\rangle^\pm, \quad (3.88)$$

c'est-à-dire que nous avons un système ayant le même spectre que celui de l'oscillateur harmonique standard représenté par l'hamiltonien  $\hat{H}_{osc} = |\mu|^2\hat{a}^\dagger\hat{a}$ , mais dégénéré.

D'autre part, les états cohérents de ce système peuvent s'obtenir par l'application de l'opérateur unitaire de déplacement

$$\hat{\mathcal{D}}(\tilde{\beta}, \mu) = \exp \left[ \frac{(\tilde{\beta}\hat{\mathcal{A}}^\dagger - \bar{\tilde{\beta}}\hat{\mathcal{A}})}{|\mu|^2} \right] \quad (3.89)$$

sur les états vide (3.84) et (3.85). En effet, si l'on écrit cet opérateur sous la forme

$$\hat{\mathcal{D}}(\tilde{\beta}, \mu) = \exp \left[ \frac{(\tilde{\beta}\bar{\mu}\hat{a}^\dagger - \bar{\tilde{\beta}}\mu\hat{a})}{|\mu|^2} \right] \exp \left[ i \frac{(\text{Re}\tilde{\beta} + \text{Im}\tilde{\beta})}{|\mu|^2} (\bar{\tau}\hat{J}_- + \tau\hat{J}_+ + \sigma\hat{J}_3) \right], \quad (3.90)$$

et qu'on l'applique sur les états (3.84) et (3.85), on s'aperçoit que

$$[\bar{\tau}\hat{J}_- + \tau\hat{J}_+ + \sigma\hat{J}_3]|\tilde{0}\rangle^\pm = \pm \frac{g(\sigma, |\tau|^2)}{2}|\tilde{0}\rangle^\pm, \quad (3.91)$$

ce qui veut dire que l'action de la partie unitaire de  $\hat{\mathcal{D}}(\tilde{\beta}, \mu)$  contenant les opérateurs de  $su(2)$  ne contribue à la construction des états cohérents qu'avec une phase superflue.

C'est ainsi que les états cohérents associés à ce système sont donnés par:

$$|\psi\rangle^\pm = \exp \left[ \frac{(\tilde{\beta}\bar{\mu}\hat{a}^\dagger - \bar{\tilde{\beta}}\mu\hat{a})}{|\mu|^2} \right] |\tilde{0}\rangle^\pm, \quad (3.92)$$

qui correspondent exactement aux états cohérents donnés par les équations (3.81) et (3.82).

On peut toujours utiliser la forme (2.5) pour l'opérateur  $\hat{T}$ . Les équations (2.12) et (2.14) impliquent:

$$e^{i\bar{\phi}} = \frac{\bar{\tau}}{|\tau|}, \quad \frac{\bar{\theta}}{2} = \left[ \sqrt{\frac{g(\sigma, |\tau|) - \sigma}{g(\sigma, |\tau|) + \sigma}} \right], \quad (3.93)$$

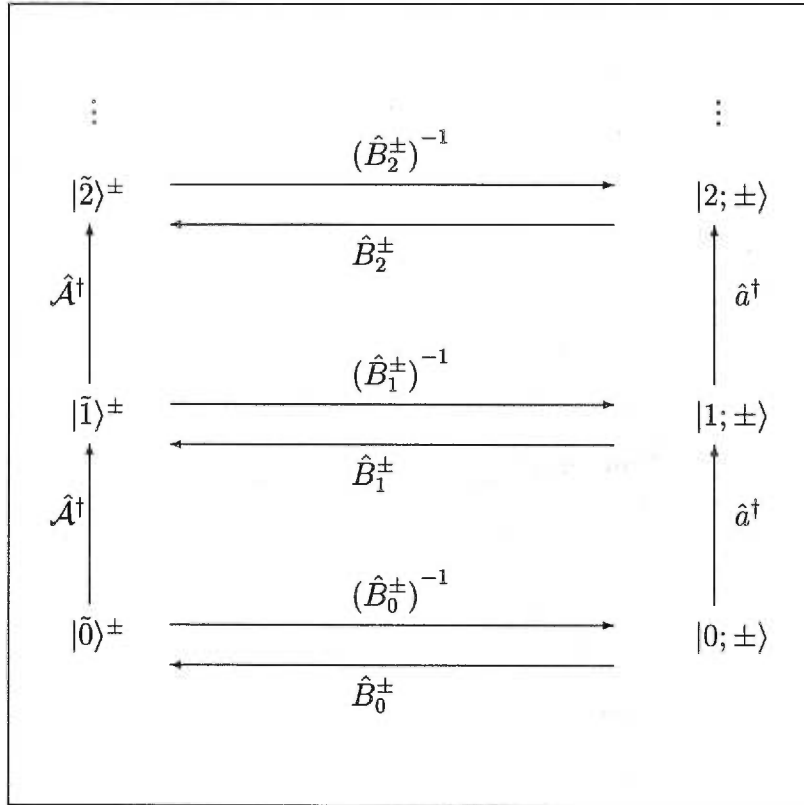


FIG. 3.9 – L'action des opérateurs sur les états

d'où on déduit que l'opérateur unitaire s'écrit

$$\hat{T} = \exp \left[ -\frac{\left( \sqrt{\frac{g(\sigma, |\tau|) - \sigma}{g(\sigma, |\tau|) - \sigma}} \right)}{|\tau|^2} [\tau \hat{J}_+ - \bar{\tau} \hat{J}_-] \right]. \quad (3.94)$$

Les états vide  $|\tilde{0}\rangle^\pm$  peuvent donc s'écrire sous la forme:

$$|\tilde{0}\rangle^\pm = \hat{B}^\pm |0; \pm\rangle, \quad (3.95)$$

où  $\hat{B}^\pm$  est un opérateur unitaire donné par:

$$\hat{B}^\pm = \hat{D}^\pm \hat{T}, \quad (3.96)$$

avec l'opérateur de déplacement

$$\hat{D}^\pm = \exp \left[ \mp \frac{g(\sigma, |\tau|)}{4|\mu|^2} [(1 - i)\bar{\mu}\hat{a}^\dagger - (1 + i)\mu\hat{a}] \right]. \quad (3.97)$$

En utilisant (3.91), on peut démontrer facilement que

$$|\tilde{n}\rangle^\pm = \frac{(\hat{\mathcal{A}}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |\tilde{0}\rangle^\pm = \frac{\left[\bar{u} \pm \frac{(1+i)}{4} g(\sigma, |\tau|)\right]^n}{\sqrt{n!}} |\tilde{0}\rangle^\pm. \quad (3.98)$$

D'autre part, il est aisé de vérifier que

$$\bar{u}^n \hat{B}^\pm \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} = \frac{\left[\bar{u} \pm \frac{(1+i)}{4} g(\sigma, |\tau|)\right]^n}{\sqrt{n!}} \hat{B}^\pm, \quad (3.99)$$

En insérant (3.95) dans (3.98) et en tenant compte de (3.99) on trouve que

$$|\tilde{n}\rangle^\pm = \bar{u}^n \hat{B}^\pm |n; \pm\rangle, \quad (3.100)$$

ce qui veut dire que les états propres de  $\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{A}}^\dagger \hat{\mathcal{A}}$  s'obtiennent de ceux de l'oscillateur harmonique standard en appliquant l'opérateur unitaire  $\hat{B}_n^\pm = \bar{\mu}^n \hat{B}^\pm$  sur ces derniers et viceversa. Le diagramme dessiné dans la figure 3.9 montre l'action des opérateurs sur les états. Cette sorte de diagramme est typique lorsqu'on analyse les états cohérents pour des hamiltoniens iso-spectraux [FHN 94].

# Chapitre 4

## Des quantités physiques

Nous allons calculer dans ce chapitre les valeurs moyennes et les dispersions de l'hamiltonien de Jaynes-Cummings [JC 63],  $\hat{H}_{JC}$ , dans les états cohérents et comprimés associés aux opérateurs de super-position  $\hat{X}$  et de super-impulsion  $\hat{P}$  que nous avons étudiés dans le chapitre précédent.

Le modèle de Jaynes-Cummings, dont on connaît exactement le spectre ainsi que les états propres [NSE 81, BHN 94], a été l'objet d'études diverses. Ce modèle, rappelons-le décrit l'interaction entre un champ fermionique et un champ radiatif. En ce qui concerne les états cohérents, expérimentalement, c'est le champ radiatif qui est préparé dans un état cohérent et qui interagit avec le système atomique. Plusieurs informations sont déduites de là. Mentionons que l'évolution temporelle de l'inversion atomique présente les fameuses oscillations de Rabi [NSE 81]. Comme nous avons construit des états qui généralisent ceux décrits dans ces approches, nous voulons étudier les comportements des valeurs moyennes et dispersion de  $\hat{H}_{JC}$  dans ces états afin de les comparer avec les approches précédentes. Une analyse plus approfondie est en cours [AH 00] afin de rendre compte du comportement d'autres quantités physiques, comme l'inversion atomique dans des états comprimés du champ radiatif.

Nous commencerons le chapitre en donnant une description du modèle de Jaynes-Cummings, en particulier, nous trouverons le spectre et les états propres associés. Nous reproduirons aussi les résultats obtenus par Bérubé et al [BHN 94]. Ensuite, dans les sections qui suivent, nous calculerons les quantités physiques dont nous avons parlé plus haut.



## 4.1 Le modèle de Jaynes-Cummings et le lien avec l'oscillateur harmonique supersymétrique

Le modèle de Jaynes-Cummings décrit l'interaction d'un fermion de spin  $\frac{1}{2}$  avec un champ magnétique qui a une composante oscillatoire le long de l'axe  $x$  et une composante constante le long de l'axe  $z$ . Ce champ magnétique s'écrit explicitement:

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{w_0}{\gamma} \hat{k} + c(\kappa) [\hat{a} \exp(i(\kappa y - wt)) + \hat{a}^\dagger \exp(-i(\kappa y - wt))] \hat{i}, \quad (4.1)$$

où  $c(\kappa)$  est une constante dépendant de  $\kappa$  et d'autres paramètres [Lo 73] et  $\gamma$  est la constante gyromagnétique. De plus,  $w$  est la fréquence du champ et  $w_0$  est la fréquence atomique. Dans l'approximation d'onde-tournante, ce système peut être décrit par l'hamiltonien

$$\hat{H}_{JC} = w \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \sigma_0 + \frac{w_0}{2} \sigma_3 + \kappa (\hat{a}^\dagger \sigma_- + \hat{a} \sigma_+). \quad (4.2)$$

Dans cette expression,  $\kappa$  s'interprète comme une constante de couplage,  $\hat{a}^\dagger$  et  $\hat{a}$  sont les opérateurs de création et d'annihilation de photons,  $\sigma_\pm = \sigma_1 \pm i\sigma_2$ , où  $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$  sont les matrices de Pauli usuelles and  $\sigma_0$  est la matrice identité.

On peut écrire  $\hat{H}_{JC}$  sous la forme d'une combinaison d'opérateurs de  $su(2)$  et de l'identité comme suit

$$\hat{H}_{JC} = w \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \hat{I} + w_0 \hat{J}_3 + \kappa (\hat{a}^\dagger \hat{J}_- + \hat{a} \hat{J}_+). \quad (4.3)$$

En effet, lorsqu'on se restreint à la représentation de  $su(2)$  avec  $j = \frac{1}{2}$ , on trouve (4.2). On peut encore écrire les éléments de matrice de  $\hat{H}_{JC}$  comme:

$$\begin{aligned} \langle + | \hat{H}_{JC} | + \rangle &= w \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) + \frac{w_0}{2}, & \langle + | \hat{H}_{JC} | - \rangle &= \kappa \hat{a}, \\ \langle - | \hat{H}_{JC} | + \rangle &= \kappa \hat{a}^\dagger, & \langle - | \hat{H}_{JC} | - \rangle &= w \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) - \frac{w_0}{2}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

avec  $|\pm\rangle = |\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle$ .

Pour déterminer les états propres de l'énergie, il suffit de résoudre

$$\hat{H}_{JC}|E\rangle = E|E\rangle, \quad (4.5)$$

avec

$$|E\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} [c_{n,+}|n;+\rangle + c_{n,-}|n;-\rangle], \quad (4.6)$$

où  $|n; \pm\rangle = |n; \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\rangle$ . En insérant (4.6) dans (4.5), on obtient les systèmes d'équations suivants pour les coefficients  $c_{n;\pm}$ :

$$\begin{aligned} E_0^- &= \frac{(w - w_0)}{2}, \quad c_{0,-} \neq 0; \\ \left[ E - (n+1)w - \frac{(w - w_0)}{2} \right] c_{n+1,-} - [\kappa\sqrt{n+1}] c_{n,+} &= 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \\ [\kappa\sqrt{n+1}] c_{n+1,-} - \left[ E - (n+1)w + \frac{(w - w_0)}{2} \right] c_{n,+} &= 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.7)$$

Pour chaque  $n$ , on a un système d'équations aux valeurs propres indépendant. C'est ainsi qu'en résolvant chacun de ces systèmes, on trouve les énergies correspondantes:

$$\begin{aligned} E_0^- &= \frac{(w - w_0)}{2}, \quad c_{0,-} \neq 0, \\ E_{n+1}^- &= (n+1)w + \kappa\sqrt{(n+1) + \left(\frac{w - w_0}{2\kappa}\right)^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ E_n^+ &= (n+1)w - \kappa\sqrt{(n+1) + \left(\frac{w - w_0}{2\kappa}\right)^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.8)$$

En insérant d'abord (4.8) dans (4.7), on trouve les relations de récurrence pour les coefficients  $c_{n;\pm}$  et ensuite, en insérant ceux-ci dans (4.6), on obtient les vecteurs propres normalisés correspondants:

$$\begin{aligned}
|E_0^-\rangle &= |0; -\rangle, \\
|E_{n+1}^-\rangle &= \frac{[\kappa\sqrt{n+1}] |n; +\rangle + \left[\kappa\sqrt{(n+1) + \left(\frac{w-w_0}{2\kappa}\right)^2 + \left(\frac{w-w_0}{2}\right)}\right] |n+1; -\rangle}{\sqrt{\kappa^2(n+1) + \left[\kappa\sqrt{(n+1) + \left(\frac{w-w_0}{2\kappa}\right)^2 + \left(\frac{w-w_0}{2}\right)}\right]^2}}, \\
|E_n^+\rangle &= \frac{\left[\kappa\sqrt{(n+1) + \left(\frac{w-w_0}{2\kappa}\right)^2 + \left(\frac{w-w_0}{2}\right)}\right] |n; +\rangle - [\kappa\sqrt{n+1}] |n+1; -\rangle}{\sqrt{\kappa^2(n+1) + \left[\kappa\sqrt{(n+1) + \left(\frac{w-w_0}{2\kappa}\right)^2 + \left(\frac{w-w_0}{2}\right)}\right]^2}}, \quad (4.9)
\end{aligned}$$

lorsque  $n = 0, 1, 2, \dots$

On peut démontrer [BHN 94] que l'hamiltonien  $\hat{H}_{JC}$  peut être diagonalisé et écrit sous la forme matricielle:

$$\hat{H}_D = \hat{O}^\dagger \hat{H}_{JC} \hat{O} = \begin{pmatrix} w(N+1) - \kappa r(N+1) & 0 \\ 0 & wN + \kappa r(N) \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

où  $N = \hat{a}^\dagger \hat{a}$  et  $\hat{O}$  est l'opérateur unitaire:

$$\hat{O} = \exp \left[ -(\hat{a}^\dagger f(N+1) \sigma_- - f(N+1) \hat{a} \sigma_+) \right], \quad (4.11)$$

avec

$$f(N) = -\frac{1}{\sqrt{N}} \arctan \left( \frac{2\kappa\sqrt{N}}{\Delta + 2\kappa r(N)} \right), \quad \Delta = w - w_0, \quad (4.12)$$

et

$$r(n) = (\bar{\delta} + n)^{1/2}, \quad \bar{\delta} = \left( \frac{\Delta}{2\kappa} \right)^2. \quad (4.13)$$

Un annihilateur pour le système Jaynes-Cummings peut être défini comme suit:

$$\hat{Q} = \hat{O} \hat{a} \hat{O}^\dagger. \quad (4.14)$$

C'est ainsi que, si

$$|\bar{\beta}; \pm\rangle_D = e^{-|\bar{\beta}|^2/2} e^{\bar{\beta} \hat{a}^\dagger} |0; \pm\rangle \quad (4.15)$$

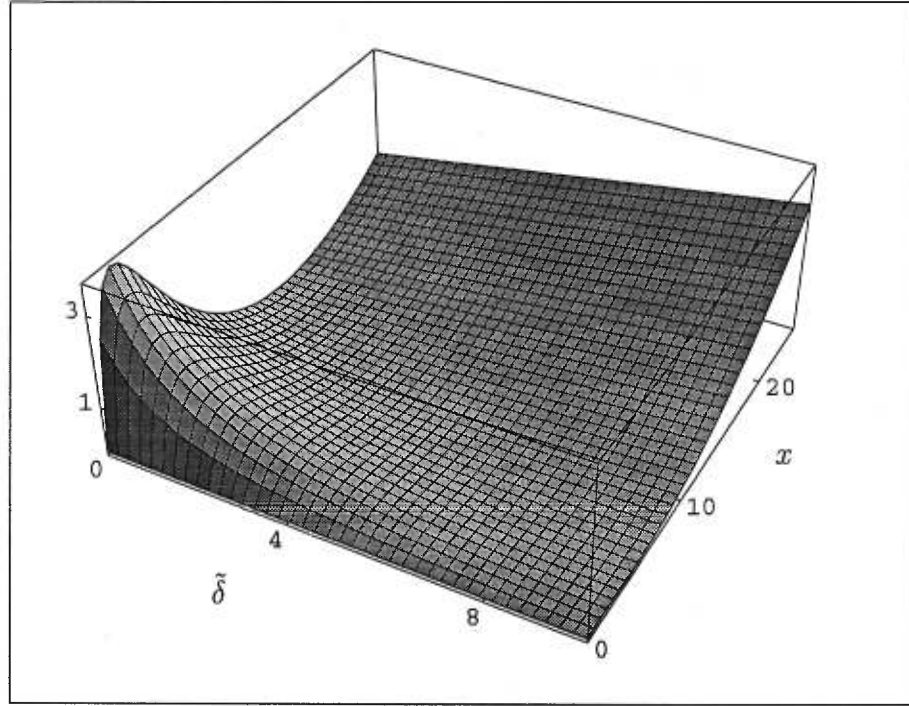


FIG. 4.1 - Graphique de  $(\Delta \hat{H}_{JC})_+^2 / w^2$  en fonction de  $\tilde{\delta}$  et  $x$  pour  $\tilde{\lambda} = 8$ .

représentent les états cohérents de l'oscillateur harmonique standard, c'est-à-dire, les états propres de l'opérateur d'annihilation  $\hat{a}$ , alors, en vertu de (4.14), les états cohérents associés au système de Jaynes-Cummings qui sont des états propres de l'opérateur d'annihilation  $\hat{Q}$ , sont donnés par:

$$|\tilde{\beta}; \pm\rangle = \hat{O}|\tilde{\beta}; \pm\rangle_D. \quad (4.16)$$

Les valeurs moyennes de  $\hat{H}_{JC}$  dans les états (4.16) sont données par:

$$\langle \tilde{\beta}; + | \hat{H}_{JC} | \tilde{\beta}; + \rangle = w[(x+1) - \tilde{\lambda}G(\tilde{\delta}, x)], \quad (4.17)$$

$$\langle \tilde{\beta}; - | \hat{H}_{JC} | \tilde{\beta}; - \rangle = w[x + \tilde{\lambda}G(\tilde{\delta} - 1, x)],$$

où  $\tilde{\lambda} = \frac{\kappa}{w}$  et

$$G(\tilde{\delta}, x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} r(n+1) = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sqrt{\tilde{\delta} + n + 1}, \quad x = |\tilde{\beta}|^2. \quad (4.18)$$

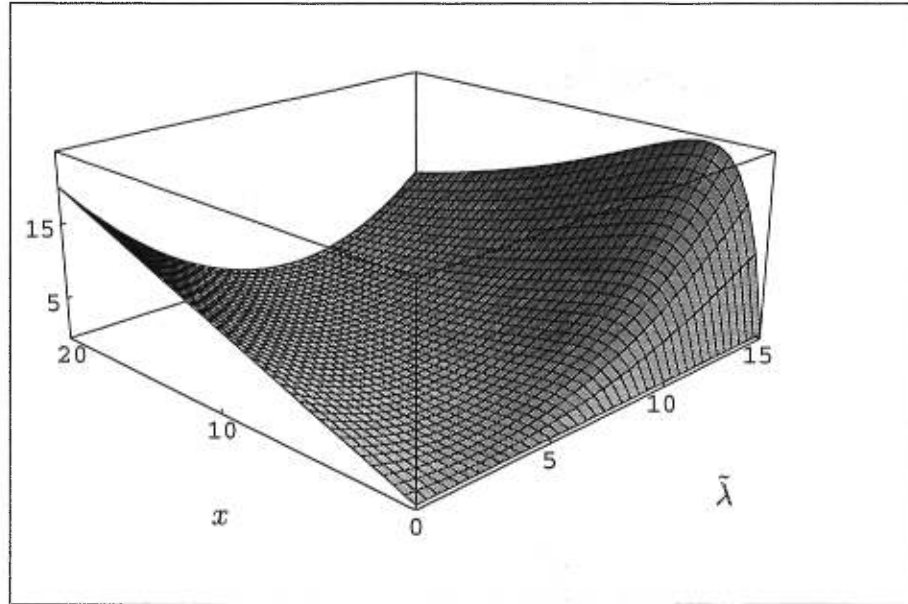


FIG. 4.2 – Graphique de  $(\Delta\hat{H}_{JC})_+^2/w^2$  pour la résonance exacte ( $\tilde{\delta} = 0$ ).

Les dispersions de  $\hat{H}_{JC}$  dans les états (4.16) s'écrivent:

$$(\Delta\hat{H}_{JC})_+^2 = w^2\{\tilde{\lambda}^2(1 + \tilde{\delta}) + (1 + \tilde{\lambda}^2)x + 2\tilde{\lambda}x[G(\tilde{\delta}, x) - G(\tilde{\delta} + 1, x)] - \tilde{\lambda}^2[G(\tilde{\delta}, x)]^2\}, \quad (4.19)$$

$$(\Delta\hat{H}_{JC})_-^2 = w^2\{\tilde{\lambda}^2\tilde{\delta} + (1 + \tilde{\lambda}^2)x - 2\tilde{\lambda}x[G(\tilde{\delta} - 1, x) - G(\tilde{\delta}, x)] - \tilde{\lambda}^2[G(\tilde{\delta} - 1, x)]^2\}.$$

La figure 4.1 montre le comportement de la dispersion  $(\Delta\hat{H}_{JC})_+^2$  en fonction des paramètres  $\tilde{\delta}$  et  $x$  pour  $\tilde{\lambda} = 8$ . La figure 4.2 montre que dans la résonance exacte ( $\tilde{\delta} = 0$ ), le minimum de la section  $\tilde{\lambda} = \text{constante}$  s'approche de zéro lorsque  $\tilde{\lambda} \mapsto 0$ .

La dispersion de  $(\Delta\hat{H}_{JC})_-^2$  a un comportement similaire à celui de  $(\Delta\hat{H}_{JC})_+^2$ , comme le montre les figures 4.3 et 4.4. Mais on s'aperçoit que les dispersions, pour les mêmes valeurs des paramètres  $(\tilde{\delta}, x)$  ou  $(x, \tilde{\lambda})$  sont plus grandes.

## 4.2 Valeurs moyennes et dispersions $\hat{H}_{JC}$ dans les états super-cohérents

Dans cette section, nous allons calculer les valeurs moyennes et les dispersions de l'hamiltonien de Jaynes-Cummings dans les états cohérents associés aux opérateurs de

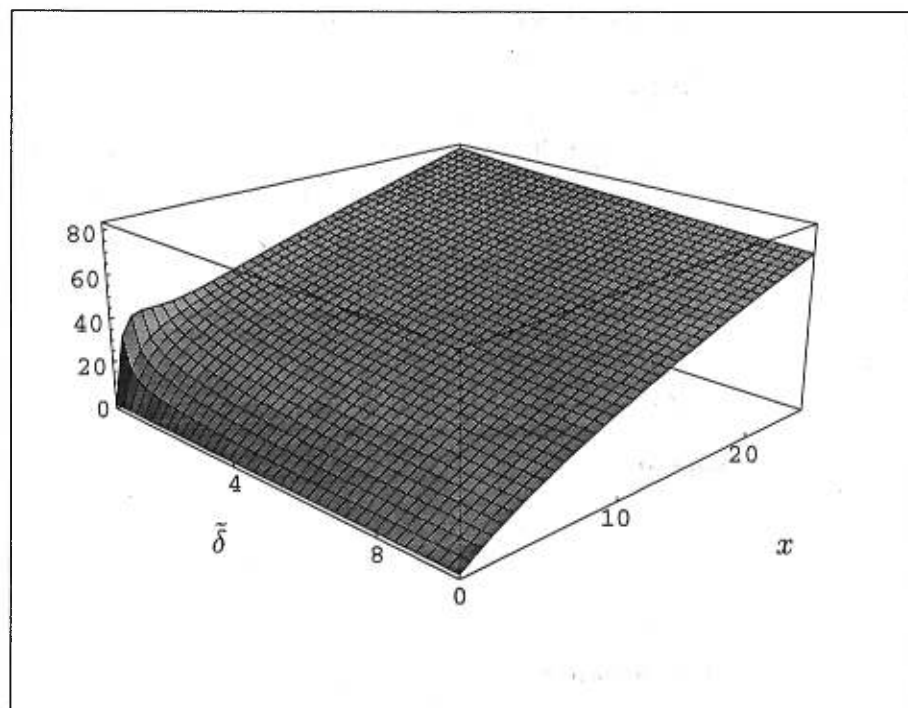


FIG. 4.3 – Graphique de  $(\Delta \hat{H}_{JC})^2/w^2$  en fonction de  $\tilde{\delta}$  et  $x$  pour  $\tilde{\lambda} = 8$ .

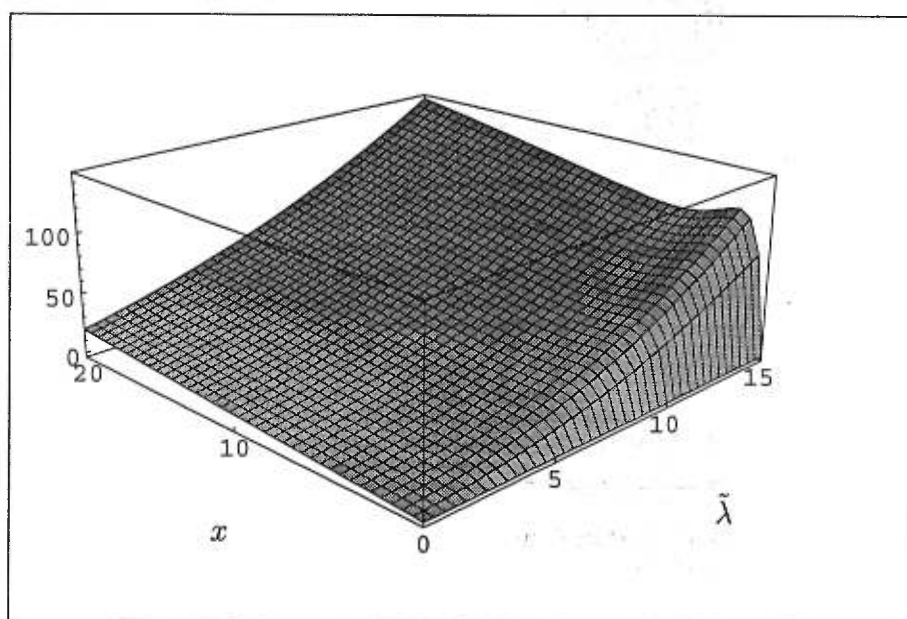


FIG. 4.4 – Graphique de  $(\Delta \hat{H}_{JC})^2/w^2$  pour la résonance exacte ( $\tilde{\delta} = 0$ ).

super-position  $\hat{X}$  et de super-impulsion  $\hat{P}$ , que nous avons étudiés dans le chapitre 3. Nous calculerons aussi les valeurs moyennes et les dispersions de la version diagonalisée  $\hat{H}_D$  dans ces états et comparerons les résultats avec ceux de la section précédente.

Rappelons que les états super-cohérents orthonormalisés solutionnant l'équation aux valeurs propres:

$$(\hat{a} + \tau \hat{J}_+) |\psi\rangle = \tilde{\beta} |\psi\rangle, \quad \tau \neq 0, \quad (4.20)$$

dans la représentation  $j = \frac{1}{2}$ , sont donnés par ( voir équation (3.51) dans le cas où  $\mu = 1$  et  $\tilde{\beta} = \frac{\beta}{\sqrt{2}}$  ) :

$$|\psi\rangle^+ = \exp\left(-|\tilde{\beta}|^2/2\right) \exp\left(\tilde{\beta} \hat{a}^\dagger\right) |0; +\rangle \quad (4.21)$$

et

$$|\psi\rangle^- = \frac{|\tau|}{\sqrt{1+|\tau|^2}} \exp\left(-|\tilde{\beta}|^2/2\right) \exp\left(\tilde{\beta} \hat{a}^\dagger\right) \left[ (\hat{a}^\dagger - \tilde{\beta}) |0; +\rangle - \frac{1}{\tau} |0; -\rangle \right], \quad (4.22)$$

où nous notons que  $|\psi\rangle^+$  est en réalité état propre de  $\hat{a}$  de valeur propre  $\tilde{\beta}$  et de  $\hat{J}_+$ , de valeur propre 0.

Calculons maintenant la valeur moyenne et la dispersion de  $\hat{H}_{JC}$  dans les états  $\hat{O}|\psi\rangle^-$ , ou ce qui revient au même, la valeur moyenne et la dispersion de  $\hat{H}_D$  dans les états  $|\psi\rangle^-$ . Les résultats dans les états  $\hat{O}|\psi\rangle^+$  ont été obtenus dans Bérubé et al [BHN 94]. Si on écrit  $\hat{H}_D$ , donné par l'équation (4.10), sous la forme:

$$\hat{H}_D = F_1(N) \hat{J}_+ \hat{J}_- + F_2(N) \hat{J}_- \hat{J}_+, \quad (4.23)$$

avec

$$F_1(N) = [w(N+1) - \kappa r(N+1)] \quad \text{et} \quad F_2(N) = [wN + \kappa r(N)], \quad (4.24)$$

on s'aperçoit que le calcul de la valeur moyenne se réduit essentiellement au calcul des éléments de matrice:

$$\langle 0; + | \exp(\tilde{\beta}\hat{a}) (\hat{a} - \tilde{\beta}) F_1(N) (\hat{a}^\dagger - \tilde{\beta}) \exp(\tilde{\beta}\hat{a}) | 0; + \rangle \quad (4.25)$$

et

$$\langle 0; - | \exp(\tilde{\beta}\hat{a}) F_2(N) \exp(\tilde{\beta}\hat{a}) | 0; - \rangle. \quad (4.26)$$

En faisant les calculs nous obtenons les résultats suivants:

$$\begin{aligned} & \langle 0; + | \exp(\tilde{\beta}\hat{a}) (\hat{a} - \tilde{\beta}) F_1(N) (\hat{a}^\dagger - \tilde{\beta}) \exp(\tilde{\beta}\hat{a}) | 0; + \rangle = \\ & e^x \left\{ w(x+2) - \kappa \left[ x \left( G(\tilde{\delta}, x) - G(\tilde{\delta} + 1, x) \right) + G(\tilde{\delta} + 2, x) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.27)$$

et

$$\langle 0; - | \exp(\tilde{\beta}\hat{a}) F_2(N) \exp(\tilde{\beta}\hat{a}) | 0; - \rangle = e^x \left\{ wx + \kappa G(\tilde{\delta} - 1, x) \right\}. \quad (4.28)$$

Donc, la valeur moyenne de  $\hat{H}_D$  dans les états (4.22) est donnée par:

$$\begin{aligned} -\langle \psi | \hat{H}_D | \psi \rangle = & \frac{|\tau|^2}{(1+|\tau|^2)} \left\{ w \left[ 2 + \frac{(1+|\tau|^2)}{|\tau|^2} x \right] - \right. \\ & \left. \kappa \left[ x \left( G(\tilde{\delta}, x) + G(\tilde{\delta} + 2, x) \right) + (1-2x)G(\tilde{\delta} + 1, x) - \frac{1}{|\tau|^2} G(\tilde{\delta} - 1, x) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

De manière analogue, on peut calculer la dispersion de  $\hat{H}_D$  dans les états (4.22), cela donne:

$$\begin{aligned} (\Delta \hat{H}_D)^2 = & w^2 \left\{ [1 + 2f(|\tau|)]x + 4f(|\tau|)[1 - f(|\tau|)] \right\} + \\ & 2w\kappa f(|\tau|) \left\{ \left[ x^2 + \frac{(1+|\tau|^4)}{|\tau|^2(1+|\tau|^2)} x \right] G(\tilde{\delta}, x) - x^2 G(\tilde{\delta} + 3, x) - \right. \\ & \left[ 3x^2 - x + 2[1 - f(|\tau|)][1 - 2x] \right] G(\tilde{\delta} + 1, x) + \left[ 3x^2 - 2[2 - f(|\tau|)] \right] G(\tilde{\delta} + 2, x) - \\ & \left. \frac{1}{|\tau|^2} [x + 2f(|\tau|)] G(\tilde{\delta} - 1, x) \right\} + \kappa^2 \left\{ [2f(|\tau|) + (\tilde{\delta} + x)] - \right. \\ & \left. [f(|\tau|)]^2 \left[ x[G(\tilde{\delta}, x) + G(\tilde{\delta} + 2, x)] + [1 - 2x]G(\tilde{\delta} + 1, x) - \frac{1}{|\tau|^2} G(\tilde{\delta} - 1, x) \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (4.30)$$



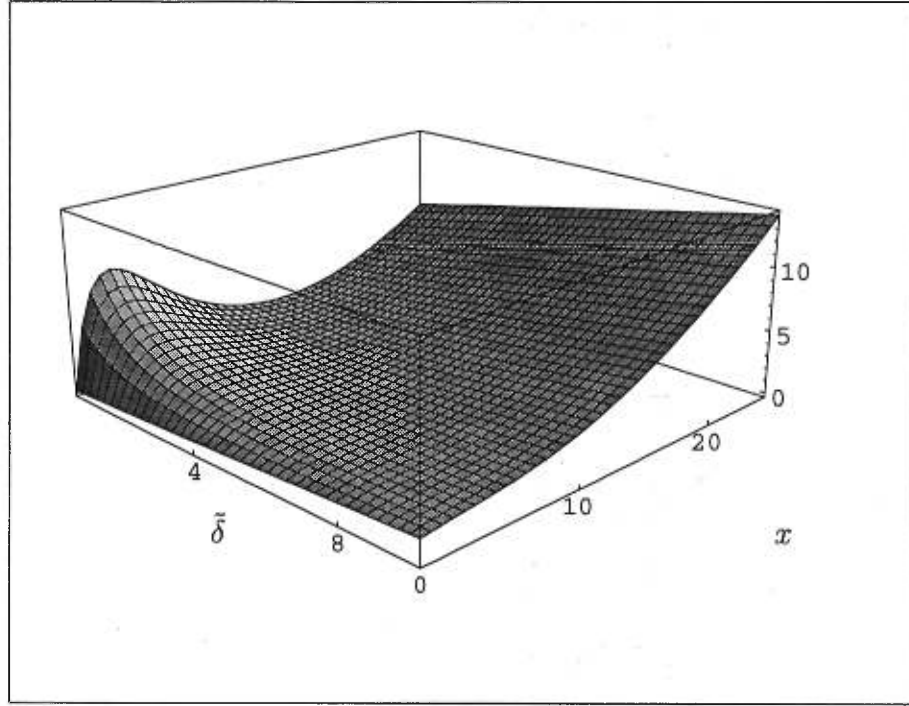


FIG. 4.5 – Graphique de  $(\Delta \hat{H}_D)_-^2 / w^2$  en fonction de  $\tilde{\delta}$  et  $x$  pour  $\tilde{\lambda} = 8$ ,  $|\tau| = 40$ .

où

$$f(|\tau|) = \frac{|\tau|^2}{(1 + |\tau|^2)}. \quad (4.31)$$

Les figures 4.5 et 4.6 donnent le comportement de  $(\Delta \hat{H}_D)_-^2 / w^2$  lorsque  $|\tau| = 40$  et on constate aisément la similarité avec les figures 4.1 et 4.2.

D'autre part, un calcul simple nous permet d'écrire la valeur moyenne de  $\hat{H}_{JC}$  dans l'état super-cohérent  $|\psi\rangle^+$  donné par l'équation (4.21), cela donne:

$${}^+\langle \psi | \hat{H}_{JC} | \psi \rangle^+ = w \left( |\tilde{\beta}|^2 + 1 \right) - \frac{(w - w_0)}{2}. \quad (4.32)$$

De la même façon, on peut calculer la valeur moyenne de l'énergie dans l'état super-cohérent  $|\psi\rangle^-$  donné par l'équation (4.22), on obtient:

$${}^-\langle \psi | \hat{H}_{JC} | \psi \rangle^- = w \left( |\tilde{\beta}|^2 + 1 \right) + \frac{(w + w_0)}{2} \left( \frac{|\tau|^2 - 1}{|\tau|^2 + 1} \right). \quad (4.33)$$

Les deux valeurs moyennes (4.32) et (4.33), ne dépendent donc pas de la constante de couplage  $\kappa$ .

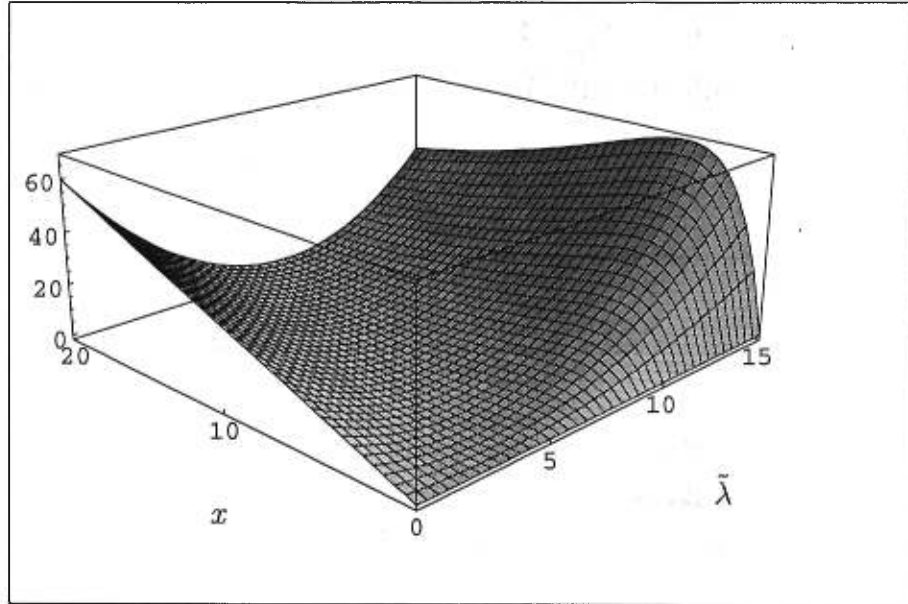


FIG. 4.6 – Graphique de  $(\Delta \hat{H}_D)^2/w^2$  pour la résonance exacte ( $\tilde{\delta} = 0$ ) lorsque  $|\tau| = 40$ .

Le calcul des dispersions s'avère plus laborieux, mais direct. Pour ce faire, écrivons  $\hat{H}_{JC}$  sous la forme:

$$\hat{H}_{JC} = \hat{H}_S + \hat{H}_I, \quad (4.34)$$

avec

$$\hat{H}_S = w \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) + w_0 \hat{J}_3 \quad \text{et} \quad \hat{H}_I = \kappa \left( \hat{a}^\dagger \hat{J}_- + \hat{a} \hat{J}_+ \right). \quad (4.35)$$

Dans cette dernière expression  $\hat{H}_S$ , lorsque  $w_0 = -w$ , correspond à l'hamiltonien de l'oscillateur harmonique supersymétrique et  $\hat{H}_I$  tient compte de l'interaction du fermion avec le champ magnétique.

À l'aide de l'équation (4.34), la dispersion de  $\hat{H}_{JC}$  dans un état quelconque  $|\psi\rangle$  s'écrit:

$$(\Delta \hat{H}_{JC})^2 = (\Delta \hat{H}_S)^2 + (\Delta \hat{H}_I)^2 + [\langle (\hat{H}_S \hat{H}_I + \hat{H}_I \hat{H}_S) \rangle - 2 \langle \hat{H}_S \rangle \langle \hat{H}_I \rangle]. \quad (4.36)$$

Il est alors aisé de trouver la dispersion de  $\hat{H}_{JC}$  dans l'état supercohérent  $|\psi\rangle^+$  car on a:

$$\left(+\Delta\hat{H}_{JC}\right)^2 = w^2|\tilde{\beta}|^2 + \kappa^2(|\tilde{\beta}|^2 + 1). \quad (4.37)$$

Dans l'état  $|\psi\rangle^-$ , les calculs donnent:

$$\left(-\Delta\hat{H}_S\right)^2 = w^2|\tilde{\beta}|^2 \left(\frac{1+3|\tau|^2}{1+|\tau|^2}\right) + \left(\frac{|\tau|}{1+|\tau|^2}\right)^2 (w+w_0)^2, \quad (4.38)$$

$$\left(-\Delta\hat{H}_I\right)^2 = \kappa^2 \left(|\tilde{\beta}|^2 + \frac{2|\tau|^2}{(1+|\tau|^2)}\right), \quad (4.39)$$

et

$$\left[\langle(\hat{H}_S\hat{H}_I + \hat{H}_I\hat{H}_S)\rangle - 2\langle\hat{H}_S\rangle\langle\hat{H}_I\rangle\right] = \frac{-2w\kappa}{(1+|\tau|^2)} \left(\tau\tilde{\beta}^2 + \bar{\tau}\tilde{\beta}^2\right). \quad (4.40)$$

En écrivant  $\tilde{\beta} = |\tilde{\beta}|e^{i\varphi}$  et  $\tau = |\tau|e^{i\epsilon}$ , nous obtenons:

$$\left[\langle(\hat{H}_S\hat{H}_I + \hat{H}_I\hat{H}_S)\rangle - 2\langle\hat{H}_S\rangle\langle\hat{H}_I\rangle\right] = -4w\kappa|\tilde{\beta}|^2 \left(\frac{|\tau|}{(1+|\tau|^2)}\right) \cos(2\varphi - \epsilon). \quad (4.41)$$

Afin de comparer ces résultats avec ceux de la section précédente, exprimons-les en termes des variables  $x$ ,  $\tilde{\lambda}$  et  $\tilde{\delta}$ . Cela donne:

$$\left(+\Delta\hat{H}_{JC}\right)^2 = w^2\{x + (x+1)\tilde{\lambda}^2\}, \quad (4.42)$$

$$\left(-\Delta\hat{H}_{JC}\right)^2 = w^2\left\{x \left(\frac{1+3|\tau|^2}{1+|\tau|^2}\right) + \left(\frac{2|\tau|}{1+|\tau|^2}\right)^2 (1 + \epsilon_{w_0}\tilde{\lambda}\tilde{\delta}^{1/2})^2 + \right. \quad (4.43)$$

$$\left.\tilde{\lambda}^2 \left(x + \frac{2|\tau|^2}{(1+|\tau|^2)}\right) - 4\tilde{\lambda}x \left(\frac{|\tau|}{(1+|\tau|^2)}\right) \cos(2\varphi - \epsilon)\right\},$$

où  $\epsilon_{w_0} = 1$  si  $w_0 > w$  et  $\epsilon_{w_0} = -1$  si  $w_0 < w$ .

Dans l'expression (4.43), on observe un comportement linéaire en  $x$  et quadratique en  $\tilde{\lambda}$  lorsque  $\tilde{\delta} = 0$  et linéaire en  $x$  et quadratique en  $\tilde{\delta}^{\frac{1}{2}}$  lorsque la valeur de  $\tilde{\lambda}$  est fixée. Ce comportement est plus simple que celui donné en (4.19). De plus,  $(-\Delta\hat{H}_{JC})^2/w^2$  présente des minima en  $\tilde{\lambda}$  et  $\tilde{\delta}^{\frac{1}{2}}$ .

### 4.3 Valeurs moyennes et dispersions de $\hat{H}_{JC}$ dans les états comprimés

Dans la représentation  $j = \frac{1}{2}$ , les états comprimés normalisés associés aux opérateurs de super-position  $\hat{X}$  et de super-impulsion  $\hat{P}$ , que nous avons étudiés dans le chapitre 3 (voir équation (3.55) avec  $\mu = 1$ ), sont donnés par:

$$|\psi\rangle^{\pm} = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}|\tilde{\eta}_2^{\pm}|^2 \cosh^2(|\chi|)\right]}{\sqrt{1+\delta}} \times \hat{S}(\chi) \exp\left(\tilde{\eta}_2^{\pm} \cosh(|\chi|) \hat{a}^{\dagger}\right) \left[|0; +\rangle \pm \frac{|\tau|}{\tau} \delta^{1/2} e^{i\frac{\phi}{2}} |0; -\rangle\right], \quad (4.44)$$

où  $\hat{S}(\chi)$  est l'opérateur unitaire

$$\hat{S}(\chi) = \exp\left(\chi \frac{\hat{a}^{\dagger 2}}{2} - \bar{\chi} \frac{\hat{a}^2}{2}\right), \quad (4.45)$$

avec

$$\frac{\chi}{|\chi|} \tanh(|\chi|) = -\delta e^{i\phi}. \quad (4.46)$$

et

$$\tilde{\eta}_2^{\pm} = \frac{\beta}{\sqrt{2}} (1 + \delta e^{i\phi}) \mp |\tau| \delta^{1/2} e^{i\frac{\phi}{2}}. \quad (4.47)$$

Pour calculer les valeurs moyennes de  $\hat{H}_{JC}$  dans ces états, l'identité suivante va nous être utile:

$$\hat{S}^{\dagger}(\chi) \hat{a} \hat{S}(\chi) = \left(\hat{a} \cosh(|\chi|) + \frac{\chi}{|\chi|} \sinh(|\chi|) \hat{a}^{\dagger}\right), \quad (4.48)$$

qu'il est facile de démontrer en séparant l'opérateur unitaire  $\hat{S}(\chi)$  de la manière habituelle. On se sert aussi du fait que la valeur moyenne de  $\hat{H}_{JC}$  dans les états  $|\psi\rangle^\pm$  est donnée par:

$${}^\pm\langle\psi|\hat{H}_{JC}|\psi\rangle^\pm = {}^\pm\langle\psi|\hat{H}_S|\psi\rangle^\pm + {}^\pm\langle\psi|\hat{H}_I|\psi\rangle^\pm, \quad (4.49)$$

en séparant  $\hat{H}_{JC}$  comme en (4.34). Après quelques calculs, nous trouvons:

$${}^\pm\langle\psi|\hat{H}_S|\psi\rangle^\pm = w \left\{ \sinh^2(|\chi|) + |\tilde{\eta}_2^\pm|^2 \cosh^2(|\chi|) \left( \cosh^2(|\chi|) + \sinh^2(|\chi|) \right) - \left( e^{i\phi} \tilde{\eta}_2^{\pm 2} + e^{-i\phi} \tilde{\eta}_2^{\pm 2} \right) \sinh(|\chi|) \cosh^3(|\chi|) + \frac{1}{2} \right\} + \frac{w_0}{2} \left( \frac{1-\delta}{1+\delta} \right) \quad (4.50)$$

et

$${}^\pm\langle\psi|\hat{H}_I|\psi\rangle^\pm = \frac{\kappa\delta^{1/2}}{1+\delta} \left\{ \left[ \frac{|\tau|}{\bar{\tau}} e^{-i\phi/2} \tilde{\eta}_2^{\pm} + \frac{|\tau|}{\tau} e^{i\phi/2} \tilde{\eta}_2^{\pm} \right] \cosh^2(|\chi|) - \left[ \frac{|\tau|}{\bar{\tau}} e^{-i3\phi/2} \tilde{\eta}_2^{\pm} + \frac{|\tau|}{\tau} e^{i3\phi/2} \tilde{\eta}_2^{\pm} \right] \sinh(|\chi|) \cosh(|\chi|) \right\}. \quad (4.51)$$

En insérant (4.47) dans (4.50) et (4.51) et en tenant compte de (4.46), on peut expliciter davantage la nature réelle des valeurs moyennes, à savoir:

$${}^\pm\langle\psi|\hat{H}_S|\psi\rangle^\pm = \frac{1}{2} w_0 \left( \frac{1-\delta}{1+\delta} \right) + \frac{w}{(1-\delta^2)^2} \times \left\{ \frac{1}{2} (1-\delta^4) + (1-\delta)^2 \delta^{1/2} |\tau| \left[ \delta^{1/2} |\tau| \mp 2|\tilde{\beta}| \left( \cos\left(\frac{\phi-2\varphi}{2}\right) + \delta \cos\left(\frac{\phi+2\varphi}{2}\right) \right) \right] + |\tilde{\beta}|^2 \left[ (1+\delta^2)(1+\delta^2+2\delta\cos\phi) - 2\delta \left( \cos(\phi-2\varphi) + \delta^2 \cos(\phi+2\varphi) + 2\delta \cos(2\varphi) \right) \right] \right\} \quad (4.52)$$

et

$$\begin{aligned} \pm \langle \psi | \hat{H}_I | \psi \rangle^\pm &= \pm \frac{2\kappa\delta^{1/2}}{(1+\delta)(1-\delta^2)} \times \\ \left\{ |\tilde{\beta}| \left[ \cos\left(\frac{\phi+2\varphi-2\epsilon}{2}\right) - 2\delta \sin\left(\frac{3\phi-2\epsilon}{2}\right) \sin\varphi - \delta^2 \cos\left(\frac{\phi-2\varphi-2\epsilon}{2}\right) \right] \mp \right. \\ &\quad \left. \delta^{1/2} |\tau| (1-\delta) \cos(\phi-\epsilon) \right\}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Pour les valeurs permises de  $\delta$ , c'est-à-dire  $0 < \delta < 1$ , ces expressions sont bien définies. Dans la limite  $\delta \mapsto 0$ , les valeurs moyennes  $\pm \langle \psi | \hat{H}_I | \psi \rangle^\pm \mapsto 0$  et les valeurs moyennes  $\pm \langle \psi | \hat{H}_S | \psi \rangle^\pm$  tendent vers la valeur moyenne de  $\hat{H}_{JC}$  dans l'état super-cohérent  $|\psi\rangle^+$  donné par l'équation (4.32). On a, par contre, perdu  $-\langle \psi | \hat{H}_{JC} | \psi \rangle^-$ , car dans le processus du passage à la limite, on peut juste récupérer l'état super-cohérent  $|\psi\rangle^+$ .

Le calcul de la dispersion de l'hamiltonien  $\hat{H}_{JC}$  dans les états comprimés  $|\psi\rangle^\pm$  donnés par l'équation (4.44) est nettement plus compliqué que dans le cas des états super-cohérents mais en procède de façon similaire, pour obtenir:

$$\begin{aligned} (\pm \Delta \hat{H}_S)^2 &= \frac{\delta w_0^2}{(1+\delta)^2} + \frac{w^2}{(1-\delta^2)^2} \times \\ \left\{ 2\delta^2 + \frac{(1-\delta)^3}{(1+\delta)} \left[ \delta |\tau|^2 \mp 2|\tilde{\beta}| |\tau| \delta^{1/2} \left( \cos\left(\frac{\phi-2\varphi}{2}\right) + \delta \cos\left(\frac{\phi+2\varphi}{2}\right) \right) \right] + \right. \\ &\quad \frac{|\tilde{\beta}|^2}{(1-\delta^2)} \left[ (1+\delta^2 + 2\delta \cos\phi) \left( (1+\delta^2)^2 + 4\delta^2 \right) - \right. \\ &\quad \left. \left. 4\delta(1+\delta^2) \left( \cos(\phi-2\varphi) + \delta^2 \cos(\phi+2\varphi) + 2\delta \cos(2\varphi) \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} (\pm \Delta \hat{H}_I)^2 &= \frac{\kappa^2}{(1-\delta^2)^2} \left\{ (1-\delta+\delta^2)(1-\delta^2) + \right. \\ &\quad (1-\delta)^2 \delta^{1/2} |\tau| \left[ \delta^{1/2} |\tau| \mp 2|\tilde{\beta}| \left( \cos\left(\frac{\phi-2\varphi}{2}\right) + \delta \cos\left(\frac{\phi+2\varphi}{2}\right) \right) \right] + |\tilde{\beta}|^2 \times \\ &\quad \left[ (1-\delta)^2 (1+\delta^2 + 2\delta \cos\phi) + 4\delta \left( \sin\left(\frac{\phi-2\varphi}{2}\right) - \delta \sin\left(\frac{\phi+2\varphi}{2}\right) \right)^2 \right] - \frac{4\delta}{(1+\delta)^2} \\ &\quad \times \left[ |\tilde{\beta}| \left[ \cos\left(\frac{\phi+2\varphi-2\epsilon}{2}\right) - 2\delta \sin\left(\frac{3\phi-2\epsilon}{2}\right) \sin\varphi - \delta^2 \cos\left(\frac{\phi-2\varphi-2\epsilon}{2}\right) \right] \mp \right. \\ &\quad \left. \delta^{1/2} |\tau| (1-\delta) \cos(\phi-\epsilon) \right]^2 \left. \right\} \end{aligned} \quad (4.55)$$

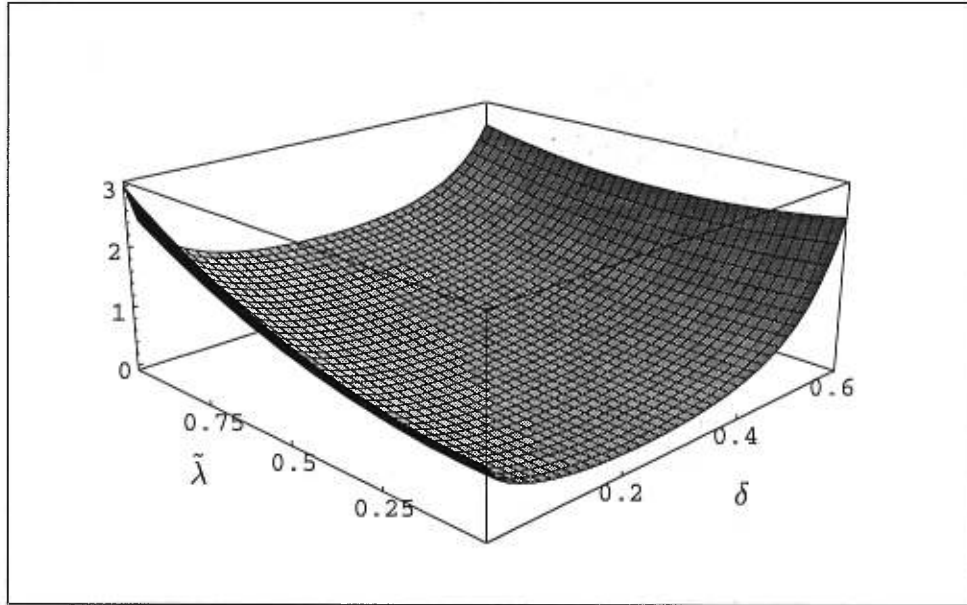


FIG. 4.7 - Graphiques de la dispersion  $\left( (+\Delta\hat{H}_{JC})^2 \right) / w^2$  en fonction de  $\delta$  et  $\tilde{\lambda}$  pour  $\phi = \frac{3\pi}{4}$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ,  $\tau = |\tilde{\beta}| = \sqrt{x} = 1$  et  $w_0 = \epsilon = 0$ .

et

$$\begin{aligned} \left[ \langle (\hat{H}_S \hat{H}_I + \hat{H}_I \hat{H}_S) \rangle - 2 \langle \hat{H}_S \rangle \langle \hat{H}_I \rangle \right]^\pm = & \pm \frac{2w\kappa\delta^{1/2}}{(1+\delta)(1-\delta^2)^2} \times \\ & \left\{ (1-\delta)^3 \cos(\phi - \epsilon) \left[ |\tilde{\beta}| \left( \cos\left(\frac{\phi - 2\varphi}{2}\right) + \delta \cos\left(\frac{\phi + 2\varphi}{2}\right) \right) \mp |\tau|\delta^{1/2} \right] + \right. \\ & \left. (1+\delta)^3 \sin(\phi - \epsilon) |\tilde{\beta}| \left( \sin\left(\frac{\phi - 2\varphi}{2}\right) - \delta \sin\left(\frac{\phi + 2\varphi}{2}\right) \right) \right\}. \quad (4.56) \end{aligned}$$

Il faut remarquer que pour les valeurs permises de  $\delta$ , ces expressions sont bien définies et des nombres réels  $> 0$ . De plus, dans la limite  $\delta \mapsto 0$ , la dispersion de  $\hat{H}_{JC}$  dans les états comprimés  $|\psi\rangle^\pm$  tend vers le résultat (4.37) comme attendu.

La figure 4.7 montre le comportement  $\left( (+\Delta\hat{H}_{JC})^2 \right) / w^2$  en fonction de  $\delta$  et  $\tilde{\lambda}$  pour  $\phi = \frac{3\pi}{4}$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ,  $\tau = |\tilde{\beta}| = \sqrt{x} = 1$  et  $w_0 = \epsilon = 0$ . On constate le comportement parabolique en  $\tilde{\lambda}$  lorsque  $\delta = \text{cte}$ . Notamment, lorsque  $\delta = 0$ , on observe le comportement prédit par l'équation (4.42).

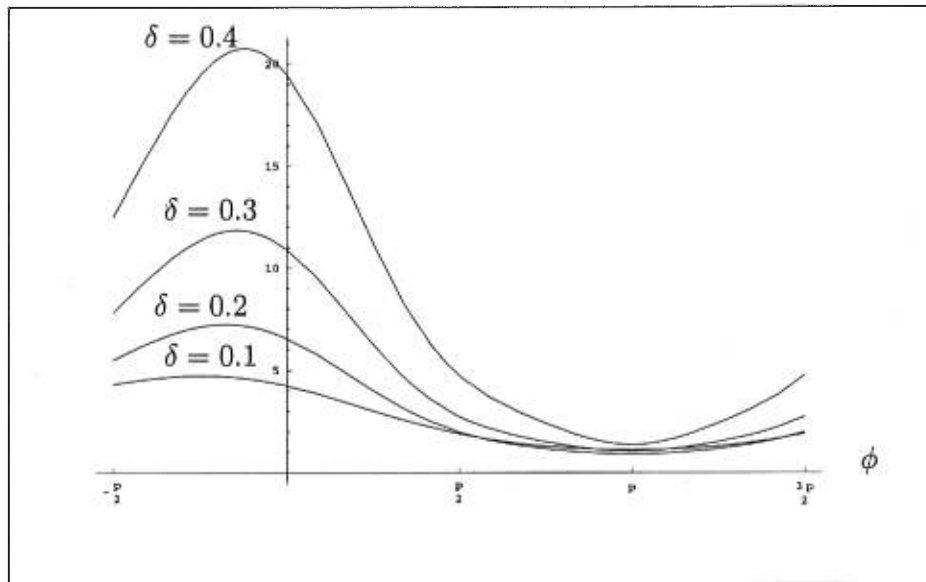


FIG. 4.8 – Graphiques de la dispersion  $\left( (+\Delta\hat{H}_{JC})^2 \right) / w^2$  en fonction de l'angle  $\phi$  pour  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\delta = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ ,  $\tau = |\tilde{\beta}| = \sqrt{x} = \tilde{\lambda} = 1$  et  $w_0 = \epsilon = 0$ .

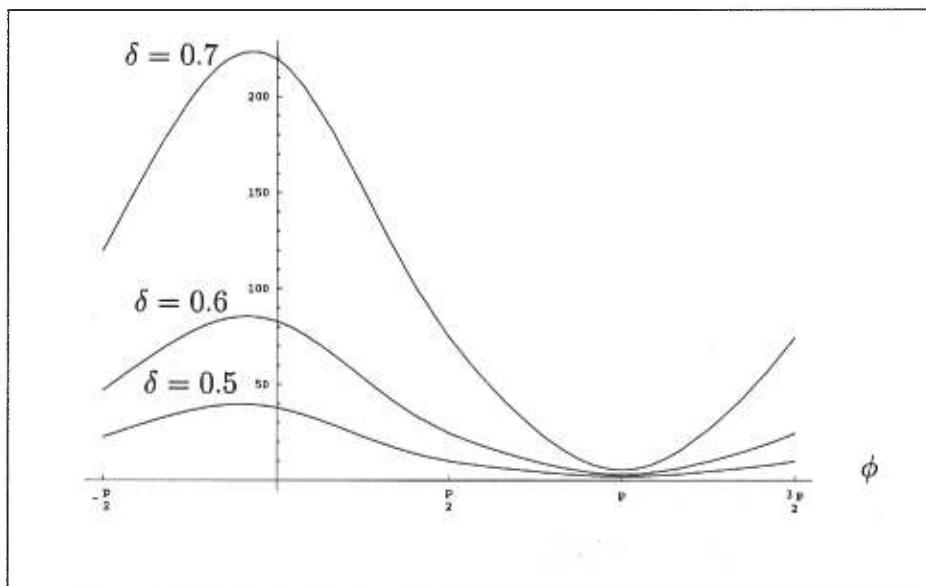


FIG. 4.9 – Graphiques de la dispersion  $\left( (+\Delta\hat{H}_{JC})^2 \right) / w^2$  en fonction des angles  $\phi$  pour  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\delta = 0.5, 0.6, 0.7$ ,  $\tau = |\tilde{\beta}| = \sqrt{x} = \tilde{\lambda} = 1$  et  $w_0 = \epsilon = 0$ .



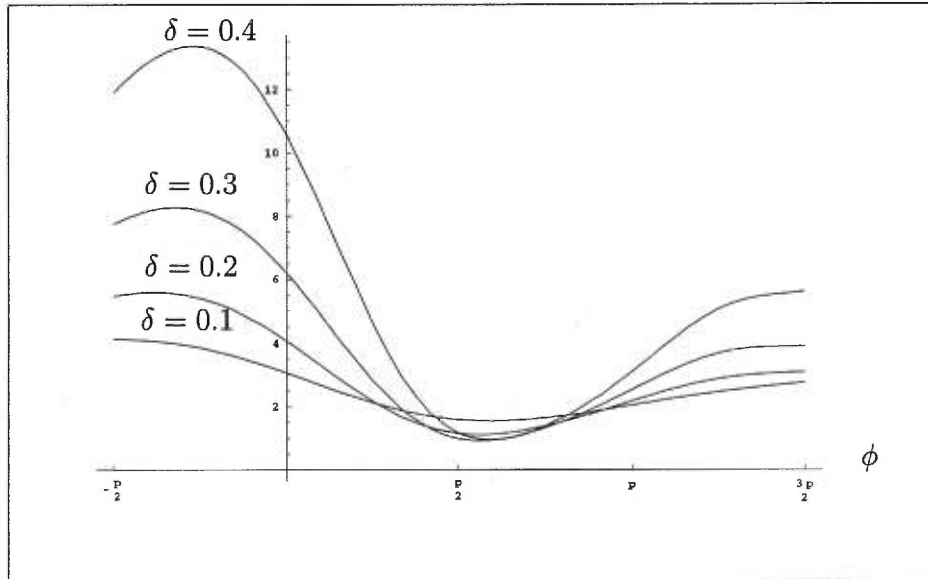


FIG. 4.10 – Graphiques de la dispersion  $\left( (+\Delta\hat{H}_{JC})^2 \right) / w^2$  en fonction de l'angle  $\phi$  pour  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ,  $\delta = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ ,  $\tau = |\tilde{\beta}| = \sqrt{x} = \tilde{\lambda} = 1$  et  $w_0 = \epsilon = 0$ .

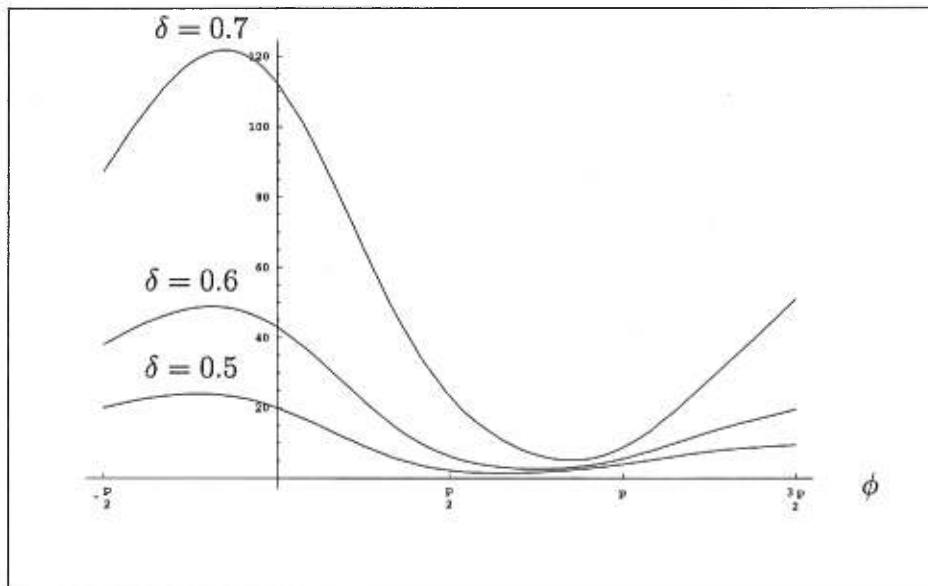


FIG. 4.11 – Graphiques de la dispersion  $\left( (+\Delta\hat{H}_{JC})^2 \right) / w^2$  en fonction des angles  $\phi$  pour  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ,  $\delta = 0.5, 0.6, 0.7$ ,  $\tau = |\tilde{\beta}| = \sqrt{x} = \tilde{\lambda} = 1$  et  $w_0 = \epsilon = 0$ .

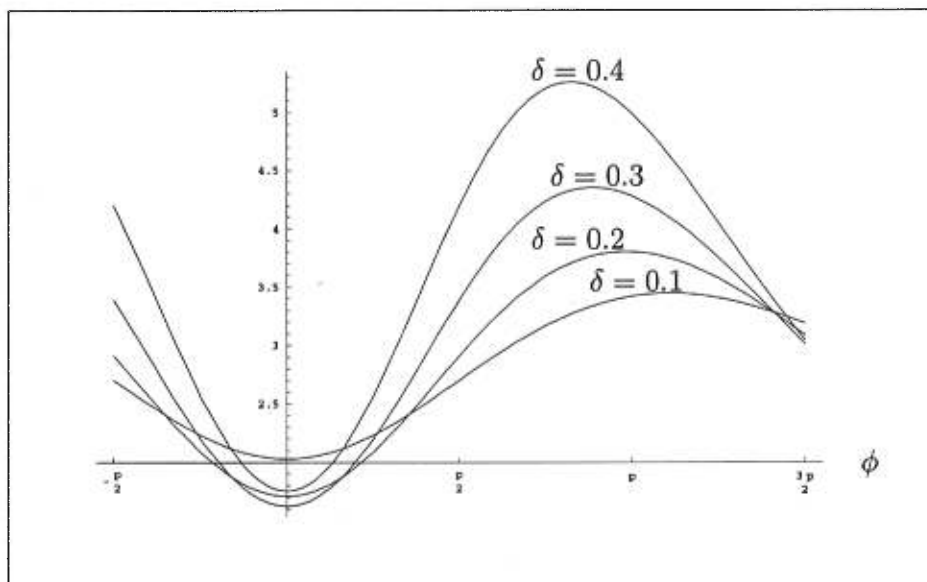


FIG. 4.12 – Graphiques de la dispersion  $\left( (+\Delta\hat{H}_{JC})^2 \right) / w^2$  en fonction de l'angle  $\phi$  pour  $\varphi = 0$ ,  $\delta = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ ,  $\tau = |\tilde{\beta}| = \sqrt{x} = \tilde{\lambda} = 1$  et  $w_0 = \epsilon = 0$ .

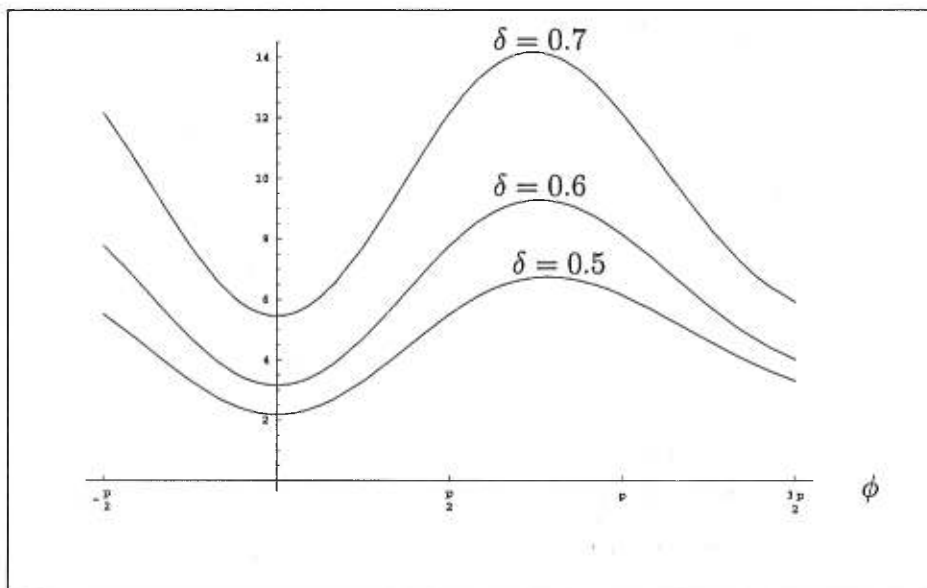


FIG. 4.13 – Graphiques de la dispersion  $\left( (+\Delta\hat{H}_{JC})^2 \right) / w^2$  en fonction des angles  $\phi$  pour  $\varphi = 0$ ,  $\delta = 0.5, 0.6, 0.7$ ,  $\tau = |\tilde{\beta}| = \sqrt{x} = \tilde{\lambda} = 1$  et  $w_0 = \epsilon = 0$ .

Les figures 4.8 à 4.13 donnent le comportement de  $\left((+\Delta\hat{H}_{JC})^2\right)/w^2$  en fonction des angles  $\phi$  et  $\varphi$  pour des valeurs du paramètre  $\delta$  comprises entre 0.1 et 0.7. Au fur et à mesure que  $\delta$  augmente, on observe une croissance plus rapide de la dispersion dans la région  $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$  que dans la région  $\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{3\pi}{2}$  lorsque  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Par contre, c'est le contraire lorsque  $\varphi = 0$ . Par exemple, les minima de la dispersion lorsque  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , se trouvent approximativement à la valeur de l'angle  $\phi = \pi$ , comme le montrent les figures 4.8 et 4.9. Ces minima se déplacent vers  $\phi = \frac{\pi}{2}$  lorsque l'angle  $\varphi$  diminue et finalement, lorsque  $\varphi = 0$  les minima de la dispersion se trouvent approximativement à la valeur de l'angle  $\phi = 0$ , comme le montrent les figures 4.12 et 4.13.

# Appendice A

## Recherche des états propres d'algèbre par la méthode des équations différentielles

Nous présentons, dans cet appendice, une façon alternative de résoudre les équations aux valeurs propres qui permettent de générer les états propres considérés dans les chapitres 1, 2 et 3. On commence par rappeler la représentation de Fock-Bargmann des états quantiques de l'oscillateur harmonique et la résolution des états cohérents et comprimés associés. Nous allons ensuite discuter la résolution des états propres d'algèbre basée sur  $h(1) \oplus su(2)$  de deux façons différentes. Dans un premier temps, en mettant en évidence un système d'équations différentielles ordinaires et, dans un second temps, un système d'équations aux dérivées partielles.

### A.1 La représentation de Fock-Bargmann

Soit  $\chi$  l'espace des fonctions analytiques  $f(\bar{z})$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , muni du produit scalaire

$$(f_1, f_2) = \int_C \bar{f}_1(\bar{z}) f_2(\bar{z}) e^{-\bar{z}z} \frac{d\bar{z}dz}{2\pi i}, \quad \forall f_1, f_2 \in \chi, \quad (\text{A.1})$$

où le domaine d'intégration comprend tout le plan complexe. En général, une fonction analytique  $f(\bar{z})$  quelconque peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des fonctions  $\varphi_n(\bar{z}) = \frac{\bar{z}^n}{\sqrt{n!}}$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots$ , satisfaisant

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \int_C \bar{\varphi}_n(\bar{z}) \varphi_m(\bar{z}) e^{-\bar{z}z} \frac{d\bar{z}dz}{2\pi i} = \delta_{nm}, \quad (\text{A.2})$$

c'est-à-dire

$$f(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \varphi_n(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{\bar{z}^n}{\sqrt{n!}}. \quad (\text{A.3})$$

Si on exprime l'état  $|f\rangle$  comme une combinaison linéaire des états propres  $|n\rangle$  de l'hamiltonien de l'oscillateur harmonique standard, c'est-à-dire si

$$|f\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f_n |n\rangle \quad (\text{A.4})$$

et que l'on définit les états cohérents

$$|z\rangle = e^{z\hat{a}^\dagger} |0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (\text{A.5})$$

alors l'équation (A.3) représente la projection de l'état  $|f\rangle$  sur l'état  $|z\rangle$ . L'action des opérateurs de création et d'annihilation  $\hat{a}^\dagger$  et  $\hat{a}$  dans l'espace des fonctions analytiques est donné par

$$\langle z|\hat{a}^\dagger|f\rangle = \bar{z}f(\bar{z}), \quad \langle z|\hat{a}|f\rangle = \frac{d}{d\bar{z}}f(\bar{z}). \quad (\text{A.6})$$

On se rappelle que les états cohérents et les états comprimés peuvent être obtenus en résolvant l'équation aux valeurs propres (1.27) qui peut encore s'écrire sous la forme:

$$[\hat{a} + \eta_1 \hat{a}^\dagger]|\psi\rangle = \eta_2 |\psi\rangle, \quad (\text{A.7})$$

où  $\eta_1 = \delta e^{i\phi}$  et  $\eta_2 = \frac{\beta}{\sqrt{2}}(1 + \delta e^{i\phi})$ . En projetant les deux membres de cette équation sur l'état  $|z\rangle$  et en utilisant les relations (A.6), on obtient l'équation différentielle:

$$\left( \frac{d}{d\bar{z}} + \eta_1 \bar{z} \right) \psi(\bar{z}) = \eta_2 \psi(\bar{z}). \quad (\text{A.8})$$

Une solution normalisable de cette équation est donnée par

$$\psi(\bar{z}; \delta, \phi, \beta) = \psi(0) \exp\left(\eta_2 \bar{z} - \frac{\eta_1}{2} \bar{z}^2\right), \quad (\text{A.9})$$

avec  $0 \leq \delta < 1$ . En vertu de (A.1), la normalisation se calcule comme suit:

$$\langle \psi; \delta, \phi, \beta | \psi; \delta, \phi, \beta \rangle = \int_C \bar{\psi}(\bar{z}; \delta, \phi, \beta) \psi(\bar{z}; \delta, \phi, \beta) e^{-\bar{z}z} \frac{d\bar{z}dz}{2\pi i} =$$

$$|\psi(0)|^2 \int_C \exp\left(\bar{\eta}_2 z - \frac{\bar{\eta}_1}{2} z^2\right) \exp\left(\eta_2 \bar{z} - \frac{\eta_1}{2} \bar{z}^2\right) e^{-z\bar{z}} \frac{d\bar{z}dz}{2\pi i}. \quad (\text{A.10})$$

On complète d'abord le carré par rapport à la variable  $z$  et on résout l'intégrale gaussienne qui en résulte. Ensuite, on fait de même avec  $\bar{z}$ , ce qui donne finalement:

$$\langle \psi; \delta, \phi, \beta | \psi; \delta, \phi, \beta \rangle = |\psi(0)|^2 \sqrt{\frac{1}{1 - |\eta_1|^2}} \exp\left(\frac{|\eta_2|^2 - \text{Re}(\bar{\eta}_1 \eta_2^2)}{1 - |\eta_1|^2}\right). \quad (\text{A.11})$$

En exigeant que la norme de l'état  $\psi(z; \delta, \phi, \beta)$  soit égal à 1, on obtient l'état normalisé

$$\psi(\bar{z}; \delta, \phi, \beta) = (1 - |\eta_1|^2)^{1/4} \exp\left(-\frac{1}{2} \left[ \frac{|\eta_2|^2 - \text{Re}(\bar{\eta}_1 \eta_2^2)}{1 - |\eta_1|^2} \right]\right) \exp\left(\eta_2 \bar{z} - \frac{\eta_1}{2} \bar{z}^2\right). \quad (\text{A.12})$$

Cette dernière expression est en accord avec les résultats du chapitre 1, notamment, avec les équations (1.55) et (1.56).

## A.2 Résolution d'un système d'équations différentielles ordinaires de premier ordre

Dans le chapitre 3, nous avons résolu l'équation aux valeurs propres (3.31), en écrivant la solution sous la forme

$$|\psi\rangle = \sum_{m=-j}^j \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,m}^j |n; j, m\rangle. \quad (\text{A.13})$$

Dans la représentation de Fock-Bargmann, la projection de  $|\psi\rangle$  sur les états  $|z; j, m\rangle = |z\rangle \otimes |j, m\rangle$  peut s'écrire

$$\langle z; j, m | \psi \rangle = \psi_m^j(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,m}^j \varphi_n(\bar{z}). \quad (\text{A.14})$$

C'est ainsi que si on projette (3.31) sur les états  $|z; j, m\rangle$  et que l'on tient compte des relations:

$$\begin{aligned} \langle z; j, m | \hat{a}^\dagger | \psi \rangle &= \bar{z} \psi_m^j(\bar{z}), & \langle z; j, m | \hat{a} | \psi \rangle &= \frac{d}{d\bar{z}} \psi_m^j(\bar{z}), \\ \langle z; j, m | \hat{J}_3 | \psi \rangle &= m \psi_m^j(\bar{z}), & \langle z; j, m | \hat{J}_\pm | \psi \rangle &= \sqrt{(j \mp m + 1)(j \pm m)} \psi_{m \mp 1}^j(\bar{z}), \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

on peut transformer l'équation (3.31) en un système d'équations différentielles de premier ordre:

$$\begin{aligned} \left( \alpha_- \frac{d}{d\bar{z}} + \alpha_+ \bar{z} + \alpha_3 \right) \psi_m^j(\bar{z}) + \left[ \beta_- \sqrt{(j - m + 1)(j + m)} \psi_{m-1}^j(\bar{z}) + \right. \\ \left. \beta_+ \sqrt{(j + m + 1)(j - m)} \psi_{m+1}^j(\bar{z}) + \beta_3 m \psi_m^j(\bar{z}) \right] = \beta \psi_m^j(\bar{z}), \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

où  $m = -j, \dots, j$ . Pour résoudre ce système d'équations, on peut utiliser la méthode de diagonalisation des matrices.

En effet, si on définit l'opérateur différentiel

$$L = \alpha_- \frac{d}{d\bar{z}} + \alpha_+ \bar{z} + \alpha_3 - \beta \quad (\text{A.17})$$

et que nous rassemblons les  $\psi_m^j$ , pour  $m = -j, \dots, j$ , dans le vecteur

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_{-j}^j \\ \psi_{-j+1}^j \\ \vdots \\ \psi_{j-1}^j \\ \psi_j^j \end{pmatrix}, \quad (\text{A.18})$$

alors le système d'équations (A.16) correspond à:

$$L\Psi = -A\Psi, \quad (\text{A.19})$$

avec la matrice  $A$  donnée par

$$A = \begin{pmatrix} -j\beta_3 & \sqrt{2j}\beta_+ & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sqrt{2j}\beta_- & (-j+1)\beta_3 & \sqrt{(2j-1)2}\beta_+ & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{(2j-1)2}\beta_- & (-j+2)\beta_3 & \sqrt{(2j-2)3}\beta_+ & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \sqrt{(2j-2)3}\beta_- & (j-2)\beta_3 & \sqrt{(2j-1)2}\beta_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{(2j-1)2}\beta_- & (j-1)\beta_3 & \sqrt{2j}\beta_+ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2j}\beta_- & j\beta_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.20})$$

Si on trouve une matrice  $S$  qui diagonalise la matrice  $A$ , de telle sorte que la matrice  $D = S^{-1}AS$  soit donnée par

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_{-j}^j & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{-j+1}^j & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{-j+2}^j & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{j-2}^j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{j-1}^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_j^j \end{pmatrix}, \quad (\text{A.21})$$

alors le système d'équations peut se mettre sous la forme

$$L\tilde{\Psi} = -D\tilde{\Psi}, \quad (\text{A.22})$$

avec  $\tilde{\Psi} = S^{-1}\Psi$ . Si  $\alpha_- \neq 0$ , de l'intégration directe de (A.22), on trouve que les fonctions  $\tilde{\psi}_m$  sont données par

$$\tilde{\psi}_m^j = \tilde{\psi}_m^j(0) \exp\left(\frac{\beta - \alpha_3 - \lambda_m^j \bar{z}}{\alpha_-} - \frac{\alpha_+}{2\alpha_-} \bar{z}^2\right), \quad (\text{A.23})$$

où les  $\tilde{\psi}_m^j(0)$  sont des constantes arbitraires. Donc les solutions de l'équation aux valeurs propres (A.19) sont

$$\begin{pmatrix} \psi_{-j}^j \\ \psi_{-j+1}^j \\ \vdots \\ \psi_{j-1}^j \\ \psi_j^j \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_{-j}^j \\ \tilde{\psi}_{-j+1}^j \\ \vdots \\ \tilde{\psi}_{j-1}^j \\ \tilde{\psi}_j^j \end{pmatrix} = \sum_{m=-j}^j \tilde{\psi}_m^j(0) \exp\left(\frac{\beta - \alpha_3 - \lambda_m^j \bar{z}}{\alpha_-} - \frac{\alpha_+}{2\alpha_-} \bar{z}^2\right) \begin{pmatrix} S_{-j m} \\ S_{-j+1 m} \\ \vdots \\ S_{j-1 m} \\ S_{j m} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.24})$$



Pour résoudre (A.16), il suffit donc de calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice A. Dans le cas non dégénéré, les valeurs propres  $\lambda_m^j$  sont données par

$$\lambda_m^j = m\sqrt{4\beta_+\beta_- + \beta_3^2} = mb \quad , \quad m = -j, \dots, j, \quad (\text{A.25})$$

tandis que les composantes des vecteurs propres, pour  $m$  fixé, exprimées en termes des polynômes de Jacobi, correspondent à:

$$S_{u m} = \sqrt{\frac{(j+u)!(j-u)!}{(2j)!}} \left(\frac{b}{\beta_+}\right)^{j+u} P_{j+u}^{-u+m, -u-m} \left(\frac{\beta_3}{b}\right), \quad u = -j, \dots, j, \quad (\text{A.26})$$

lorsque  $\beta_- \neq 0, \beta_+ \neq 0$  et  $\beta_3 \neq 0$  ou  $\beta_- = 0, \beta_+ \neq 0$  et  $\beta_3 \neq 0$  et

$$S_{u m} = \sqrt{\frac{(j+u)!}{(j-u)!}} \frac{1}{(u-m)!} \left(-\frac{\beta_-}{\beta_3}\right)^{u-m}, \quad m \leq u \leq j, \quad S_{u m} = 0, \quad -j \leq u < m, \quad (\text{A.27})$$

lorsque  $\beta_- \neq 0, \beta_+ = 0$  et  $\beta_3 \neq 0$ .

### A.3 Résolution d'une équation différentielle aux dérivées partielles de premier ordre

On se rappelle que les états cohérents standards de SU(2) sont donnés par

$$|j, \zeta\rangle = (1 + |\zeta|^2)^{-j} \sum_{m=-j}^j \sqrt{\frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!}} \zeta^{j+m} |j, m\rangle, \quad (\text{A.28})$$

où  $\zeta = -\tan(\frac{\theta}{2})e^{-i\varphi}$ . Ils sont normalisés mais ils ne sont pas orthogonaux car on a:

$$\langle j, \zeta_1 | j, \zeta_2 \rangle = (1 + |\zeta_1|^2)^{-j} (1 + |\zeta_2|^2)^{-j} (1 + \bar{\zeta}_1 \zeta_2)^{2j}. \quad (\text{A.29})$$

La résolution de l'identité s'écrit dans ce cas:

$$\hat{I} = \sum_{m=-j}^j |j, m\rangle \langle j, m| = \int_C d\mu(j, \zeta) |j, \zeta\rangle \langle j, \zeta| \quad \text{où} \quad d\mu(j, \zeta) = \frac{2j+1}{\pi} \frac{d\zeta^2}{(1 + |\zeta|^2)^2}. \quad (\text{A.30})$$

Pour un état  $|\Phi\rangle = \sum_{m=-j}^j C_m |j, m\rangle$  donné dans l'espace de Hilbert, on peut alors construire une fonction analytique  $\tilde{\phi}(\bar{\zeta})$  de la forme

$$\tilde{\phi}(\bar{\zeta}) = (1 + |\zeta|^2)^j \langle j, \zeta | \Phi \rangle = \sum_{m=-j}^j \sqrt{\frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!}} \bar{\zeta}^{j+m}. \quad (\text{A.31})$$

De cette façon, l'état  $|\Phi\rangle$  peut être développé dans la base des états cohérents standards de SU(2):

$$|\Phi\rangle = \int_C d\mu(j, \zeta) (1 + |\zeta|^2)^{-j} \tilde{\phi}(\bar{\zeta}) |j, \zeta\rangle. \quad (\text{A.32})$$

L'action des opérateurs  $\hat{J}_+$ ,  $\hat{J}_-$ ,  $\hat{J}_3$  dans l'espace des fonctions analytiques  $\tilde{\phi}(\bar{\zeta})$  est donnée par:

$$\langle j, \zeta | \hat{J}_+ | \tilde{\Phi} \rangle = \left( -\bar{\zeta}^2 \frac{d}{d\bar{\zeta}} + 2j\bar{\zeta} \right) \tilde{\phi}(\bar{\zeta}), \quad (\text{A.33})$$

$$\langle j, \zeta | \hat{J}_- | \tilde{\Phi} \rangle = \frac{d}{d\bar{\zeta}} \tilde{\phi}(\bar{\zeta}), \quad (\text{A.34})$$

$$\langle j, \zeta | \hat{J}_3 | \tilde{\Phi} \rangle = \left( \bar{\zeta} \frac{d}{d\bar{\zeta}} - j \right) \tilde{\phi}(\bar{\zeta}), \quad (\text{A.35})$$

où on a défini  $|\tilde{\Phi}\rangle = (1 + |\zeta|^2)^j |\Phi\rangle$ .

On peut aussi transformer l'équation aux valeurs propres (3.31) en une équation aux dérivées partielles. Pour ce faire, nous définissons  $|z; j, \zeta\rangle = |z\rangle \otimes |j, \zeta\rangle$  comme étant le produit direct entre les états cohérents de l'oscillateur harmonique standard  $|z\rangle$  et les états cohérents standard de SU(2) que l'on note  $|j, \zeta\rangle$ .

Revenons, à présent, à l'équation (3.31) et agissons avec l'état  $|z; j, \zeta\rangle$  à gauche sur les deux membres de l'équation. En tenant compte des relations (A.15) et (A.35), nous obtenons l'équation aux dérivées partielles suivante:

$$\alpha_- \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \bar{z}} + \alpha_+ \bar{z} \tilde{\psi} + \alpha_3 \tilde{\psi} + \beta_- \left( -\bar{\zeta}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} + 2j\bar{\zeta} \right) \tilde{\psi} + \beta_+ \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \tilde{\psi} + \beta_3 \left( \bar{\zeta} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} - j \right) \tilde{\psi} = \beta \tilde{\psi}, \quad (\text{A.36})$$

avec

$$\tilde{\psi}(\bar{z}, \bar{\zeta}) = \langle z; j, \zeta | \tilde{\psi} \rangle, \quad |\tilde{\psi}\rangle = (1 + |\zeta|^2)^{-j} |\psi\rangle. \quad (\text{A.37})$$

La résolution de l'équation (A.36) peut se faire en utilisant, par exemple, la méthode de Monge [CH 62]. Cette méthode consiste à trouver les équations caractéristiques et à bien poser les conditions initiales le long d'une courbe non caractéristique.

Si nous définissons  $p = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \bar{z}}$  et  $q = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \bar{\zeta}}$ , l'équation (A.36) peut se mettre sous la forme

$$F(\bar{z}, \bar{\zeta}, \tilde{\psi}, p, q) = 0 \quad (\text{A.38})$$

et les équations caractéristiques sont données par:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{z}}{d\tau} &= \frac{\partial F}{\partial p}, & \frac{d\bar{\zeta}}{d\tau} &= \frac{\partial F}{\partial q}, & \frac{d\tilde{\psi}}{d\tau} &= p \frac{\partial F}{\partial p} + q \frac{\partial F}{\partial q}, \\ \frac{dp}{d\tau} &= -\left(\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} + p \frac{\partial F}{\partial \tilde{\psi}}\right), & \frac{dq}{d\tau} &= -\left(\frac{\partial F}{\partial \bar{\zeta}} + q \frac{\partial F}{\partial \tilde{\psi}}\right), \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

où on suppose que  $\bar{z}, \bar{\zeta}, p, q$  et  $\tilde{\psi}$  dépendent des paramètres  $s$  et  $\tau$ . Les conditions initiales, pour  $\tau = 0$ , le long d'une courbe non caractéristique doivent satisfaire:

$$F(\bar{z}(s, 0), \bar{\zeta}(s, 0), \tilde{\psi}(s, 0), p(s, 0), q(s, 0)) = 0; \quad p \frac{d\bar{z}}{ds} + q \frac{d\bar{\zeta}}{ds} = \frac{d\tilde{\psi}}{ds}. \quad (\text{A.40})$$

De plus, pour assurer l'inversion des variables, elles doivent être choisies de telle sorte que

$$\det \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{z}}{\partial s} & \frac{\partial \bar{z}}{\partial \tau} \\ \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial s} & \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \tau} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (\text{A.41})$$

- Commençons par prendre le cas particulier  $\alpha_+ = 0$ ,  $\beta_+ = 0$  et  $\beta_3 = 0$  et écrivons  $\tilde{\beta} = \beta - \alpha_3$ . Avec ces restrictions, l'équation (A.36) devient

$$F(\bar{z}, \bar{\zeta}, \tilde{\psi}, p, q) = \alpha_- p - \bar{\zeta}^2 \beta_- q + (2j\beta_- \bar{\zeta} - \tilde{\beta}) \tilde{\psi} = 0. \quad (\text{A.42})$$

Les équations caractéristiques sont, dans ce cas:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{z}}{d\tau} &= \alpha_-, & \frac{d\bar{\zeta}}{d\tau} &= -\bar{\zeta}^2\beta_-, & \frac{d\tilde{\psi}}{d\tau} &= -(2j\beta_-\bar{\zeta} - \tilde{\beta})\tilde{\psi}, \\ \frac{dp}{d\tau} &= -p(2j\beta_-\bar{\zeta} - \tilde{\beta}), & \frac{dq}{d\tau} &= (q[\tilde{\beta} + 2\beta_-\bar{\zeta}(1-j)] - 2j\beta_-\tilde{\psi}). \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

La résolution des équations (A.43) pour  $\bar{z}(s, \tau)$ ,  $\bar{\zeta}(s, \tau)$  et  $\tilde{\psi}(s, \tau)$  est aisée et donne:

$$\begin{aligned} \bar{z}(s, \tau) &= \alpha_-\tau + \bar{z}(s, 0), & \bar{\zeta}(s, \tau) &= \frac{\bar{\zeta}(s, 0)}{1 + \tau\bar{\zeta}(s, 0)\beta_-}, \\ \tilde{\psi}(s, \tau) &= \tilde{\psi}(s, 0) \left(1 + \beta_-\bar{\zeta}(s, 0)\tau\right)^{-2j} e^{\tilde{\beta}\tau}. \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

Un bon choix des conditions initiales correspond à:

$$\bar{\zeta}(s, 0) = 1, \quad \bar{z}(s, 0) = s, \quad \tilde{\psi}_m^j(s, 0) = \exp\left(\frac{\tilde{\beta}}{\alpha_-}s\right) \left(s - \frac{\alpha_-}{\beta_-}\right)^{j-m}, \quad (\text{A.45})$$

lorsque  $m = -j, \dots, j$ . En effet, avec le choix (A.45) et en vertu de l'inversion des équations (A.44), on obtient l'ensemble des solutions indépendantes de l'équation (A.42), à savoir:

$$\tilde{\psi}_m^j(\bar{z}, \bar{\zeta}) = \exp\left(\frac{\tilde{\beta}}{\alpha_-}\bar{z}\right) \left(\bar{z} - \frac{\alpha_-}{\beta_-\bar{\zeta}}\right)^{j-m} (\bar{\zeta})^{2j}, \quad m = -j, \dots, j. \quad (\text{A.46})$$

En fait, ce sont exactement celles trouvées par la méthode de l'algèbre des opérateurs.

Pour avoir la correspondance, il suffit de projeter les états  $|\psi\rangle_m^j$ , donnés par l'équation (3.12) (avec les changements  $\tilde{\tau} = \frac{\beta_-}{\alpha_-}$  et  $\tilde{\beta} \mapsto \frac{\tilde{\beta}}{\alpha_-}$ ), sur les états  $|z; j, \zeta\rangle$  et les comparer avec  $(1 + |\zeta|^2)^j \tilde{\psi}_m^j(\bar{z}, \bar{\zeta})$ .

- Pour le cas général  $b = \sqrt{4\beta_+\beta_- + \beta_3^2} \neq 0$ , on peut trouver un ensemble de solutions indépendantes de l'équation (A.36) en utilisant la méthode de séparation des variables. Ces solutions correspondent à un choix spécial des conditions initiales lorsqu'on utilise la méthode de Monge. En effet, supposons que la solution de l'équation aux valeurs propres (A.36) soit de la forme:

$$\tilde{\psi} = \phi_1(\bar{z})\phi_2(\bar{\zeta}). \quad (\text{A.47})$$

Alors, en insérant (A.47) dans (A.36), on obtient deux équations différentielles ordinaires de premier ordre découplées:

$$\begin{aligned} \alpha_- \frac{d\phi_1}{d\bar{z}} + [\alpha_+ \bar{z} + \alpha_3 - \Gamma_1] \phi_1 &= 0, \\ [\beta_+ + \beta_3 \bar{\zeta} - \beta_- \bar{\zeta}^2] \frac{d\phi_2}{d\bar{\zeta}} + [2j\beta_- \bar{\zeta} - j\beta_3 - \Gamma_2] \phi_2 &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

où

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 = \beta. \quad (\text{A.49})$$

Les solutions sont données par

$$\begin{aligned} \phi_1(\bar{z}) &= \phi_1(0) \exp\left(\frac{\Gamma_1 - \alpha_3}{\alpha_-} \bar{z} - \frac{\alpha_+}{2\alpha_-} \bar{z}^2\right), \\ \phi_2(\bar{\zeta}) &= N_2 (1 - \tau_- \bar{\zeta})^{j+m} (1 - \tau_+ \bar{\zeta})^{j-m}, \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

avec

$$\tau_{\pm} = \frac{2\beta_-}{\beta_3 \pm b}, \quad \Gamma_2 = mb, \quad \Gamma_1 = \beta - mb, \quad m = -j, \dots, j. \quad (\text{A.51})$$

On en déduit que:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_m^j(\bar{z}, \bar{\zeta}) &= \text{Cte.} \times \\ \exp\left(\frac{\beta - mb - \alpha_3}{\alpha_-} \bar{z} - \frac{\alpha_+}{2\alpha_-} \bar{z}^2\right) &(1 - \tau_- \bar{\zeta})^{j+m} (1 - \tau_+ \bar{\zeta})^{j-m}, \quad m = -j, \dots, j, \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

ce qui correspond à l'ensemble des solutions trouvées en utilisant l'algèbre des opérateurs. Si on veut établir la correspondance exacte, on doit à nouveau projeter les états  $|\psi\rangle_m^j$ , donnés par l'équation (3.34), sur les états  $|z; j, \zeta\rangle$  et les comparer avec  $(1 + |\zeta|^2)^j \tilde{\psi}_m^j(\bar{z}, \bar{\zeta})$ .

Le fait que  $\phi_2(\bar{\zeta})$  soit un polynôme en  $\bar{\zeta}$ , normalisable et analytique dans tout le plan  $\bar{\zeta}$ , détermine les valeurs admissibles de  $\vec{\beta}$  et de  $\Gamma_2$  [Br 97]. Si  $b \neq 0$ , il existe

$(2j + 1)$  états propres avec un spectre symétrique  $\Gamma_2 = -jb, (-j + 1)b, \dots, (j - 1)b, jb$ .

- Si nous résolvons le cas général en utilisant la méthode de Monge, nous trouvons les équations caractéristiques suivantes:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{z}}{d\tau} &= \alpha_-, & \frac{d\bar{\zeta}}{d\tau} &= [\beta_+ + \beta_3\bar{\zeta} - \beta_-\bar{\zeta}^2], \\ \frac{d\tilde{\psi}}{d\tau} &= [\beta + j\beta_3 - 2j\beta_-\bar{\zeta} - \alpha_3 - \alpha_+\bar{z}]\tilde{\psi}, \\ \frac{dp}{d\tau} &= -[\alpha_+\tilde{\psi} + p(\alpha_+\bar{z} + \alpha_3 + 2j\beta_-\bar{\zeta} - j\beta_3 - \beta)], \end{aligned} \tag{A.53}$$

$$\frac{dq}{d\tau} = -[(\beta_3 - 2\beta_-\bar{\zeta})q + 2j\beta_-\tilde{\psi} + q(\alpha_+\bar{z} + \alpha_3 + 2j\beta_-\bar{\zeta} - j\beta_3 - \beta)].$$

La résolution des équations (A.53) pour  $\bar{z}(s, \tau)$ ,  $\bar{\zeta}(s, \tau)$  et  $\tilde{\psi}(s, \tau)$  donne

$$\begin{aligned} \bar{z}(s, \tau) &= \alpha_-\tau + \bar{z}(s, 0), \\ \bar{\zeta}(s, \tau) &= \frac{1 - C_1(s)e^{-b\tau}}{\tau_+ - \tau_-C_1(s)e^{-b\tau}}, & C_1(s) &= \frac{1 - \tau_+\bar{\zeta}(s, 0)}{1 - \tau_-\bar{\zeta}(s, 0)}, \\ \tilde{\psi}(s, \tau) &= \tilde{\psi}(s, 0) \exp\left([\beta_+ + j\beta_3 - \alpha_3 - \alpha_+\bar{z}(s, 0)]\tau - \frac{\alpha_+\alpha_-}{2}\tau^2\right) \times \\ &\quad \exp\left(\left(-b\tau\right)\frac{2j\beta_-}{b\tau_+}\right) \left(\frac{\tau_+ - \tau_-C_1(s)}{\tau_+ - \tau_-C_1(s)e^{-b\tau}}\right)^{2j}. \end{aligned} \tag{A.54}$$

Le choix des conditions initiales:

$$\begin{aligned} \bar{\zeta}(s, 0) &= 1, & \bar{z}(s, 0) &= s, \\ \tilde{\psi}_m^j(s, 0) &= \exp\left(\frac{\beta - mb - \alpha_3}{\alpha_-}s - \frac{\alpha_+}{2\alpha_-}s^2\right) (1 - \tau_-)^{j+m}(1 - \tau_+)^{j-m}, \end{aligned} \tag{A.55}$$

lorsque  $m = -j, \dots, j$ , nous donne, en fait, les solutions (A.52).

# Appendice B

## Les polynômes de Jacobi

Si on se donne trois fonctions continues  $p(x)$ ,  $q(x)$  et  $\rho(x)$  sur un intervalle fermé borné  $[a, b]$ , vérifiant  $p(x) > 0$  de classe  $C^1$  et  $\rho(x) > 0$ , on veut résoudre le problème aux valeurs propres et fonctions propres suivant:

$$\frac{1}{\rho(x)} \left[ \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{d}{dx} \right) - q(x) \right] \mu(x) = \lambda \mu(x), \quad (\text{B.1})$$

avec les conditions aux bords de l'intervalle:

$$a_0 \mu(a) + a_1 \frac{d\mu}{dx}(a) = 0, \quad |a_0| + |a_1| > 0, \quad (\text{B.2})$$

$$b_0 \mu(b) + b_1 \frac{d\mu}{dx}(b) = 0, \quad |b_0| + |b_1| > 0,$$

ou encore:

$$p(a) = p(b) = 0, \quad \mu \text{ est régulière sur } [a, b]. \quad (\text{B.3})$$

La recherche des nombres  $\lambda$  et des fonctions  $\mu(x)$  non identiquement nulles, solutions de (B.1), vérifiant les conditions (B.2) ou (B.3), s'appelle un problème régulier de Sturm-Liouville. Le théorème de Sturm-Liouville [Lu 69] affirme que les polynômes orthogonaux de degré  $n$  sont des solutions du problème de Sturm-Liouville avec les conditions (B.3). C'est le cas, par exemple, des polynômes de Jacobi dont nous allons donner les propriétés ici.

Les polynômes de Jacobi vérifient l'équation (B.1) lorsqu'on se restreint à l'intervalle  $[a, b] = [-1, 1]$  et qu'on choisit

$$\rho(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta, \quad \text{avec} \quad \alpha > -1, \beta > -1. \quad (\text{B.4})$$

L'intervalle  $[a, b]$  et la fonction  $\rho(x)$  fixés, la fonction  $p(x)$  prend la forme

$$p(x) = (1-x^2)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta. \quad (\text{B.5})$$

C'est ainsi qu'on peut démontrer que les polynômes de Jacobi de degré  $n$ , notés  $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ , satisfont l'équation aux valeurs propres:

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}P_n^{\alpha,\beta}(x) + [(\beta-\alpha) - (\alpha+\beta+2)x]P_n^{\alpha,\beta}(x) = \lambda_n P_n^{\alpha,\beta}(x), \quad (\text{B.6})$$

avec

$$\lambda_n = -n(n+\alpha+\beta+1). \quad (\text{B.7})$$

La formule de Rodriguez [Ca 77]:

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} \left[ (1-x)^\alpha (1+x)^\beta (1-x^2)^n \right], \quad (\text{B.8})$$

nous donne la forme explicite des polynômes de Jacobi satisfaisant l'équation (B.6). En utilisant la règle de dérivation de Leibniz, on trouve

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{\alpha+n}{k} \binom{\beta-n}{n-k} (x-1)^{n-k} (1+x)^k. \quad (\text{B.9})$$

Par exemple, les polynômes de Jacobi de degré 0, 1 et 2 sont donnés par:

$$P_0^{\alpha,\beta}(x) = 1, \quad P_1^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{2} [(\alpha-\beta) + (\alpha+\beta+2)x], \quad (\text{B.10})$$

$$P_2^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{8} \left\{ [(\alpha-\beta)^2 - (\alpha+\beta+4)] + 2(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+3)x + (\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+4)x^2 \right\}.$$



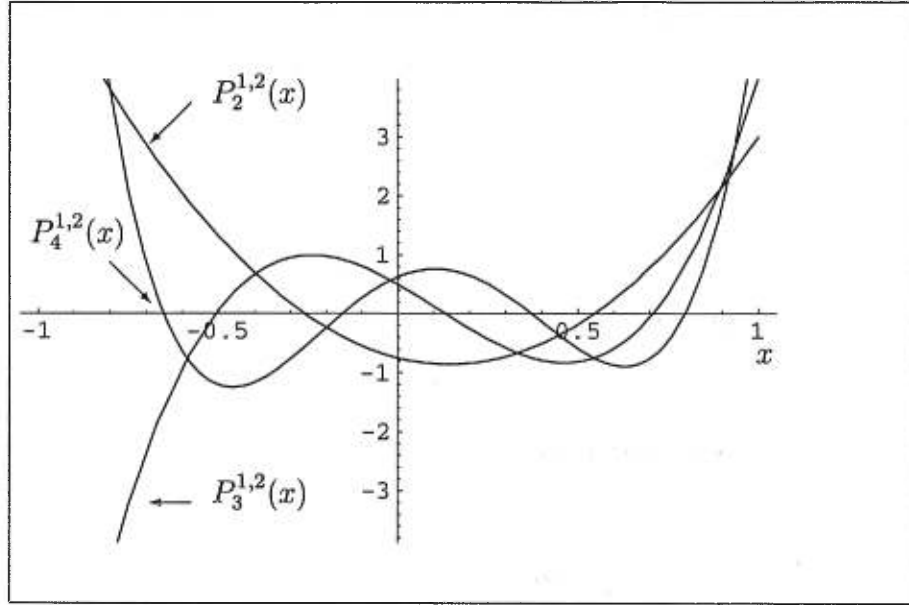


FIG. B.1 – Graphique des polynômes de Jacobi  $P_2^{1,2}(x)$ ,  $P_3^{1,2}(x)$  et  $P_4^{1,2}(x)$  pour  $|x| \leq 1$ .

La figure B.1 montre les graphes des polynômes de Jacobi  $P_2^{1,2}(x)$ ,  $P_3^{1,2}(x)$  et  $P_4^{1,2}(x)$  dans l'intervalle  $[-1, 1]$ . Nous pouvons observer que le nombre de zéros d'un polynôme de Jacobi de degré  $n$  est égal à  $n$ , ce qui nous dit qu'au fur et à mesure que le degré du polynôme augmente le comportement de celui-ci devient plus oscillatoire.

Les coefficients binomiaux satisfaisant la relation:

$$\binom{l}{s} s = \binom{l}{s-1} (l-s+1), \quad (\text{B.11})$$

on peut démontrer que:

$$\frac{d}{dx} P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(n+\alpha+\beta+1)}{2} P_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x) \quad (\text{B.12})$$

et, par récurrence sur  $m$ , que

$$\frac{d^m}{dx^m} P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{((n+\alpha+\beta+1), m)}{2^m} P_{n-m}^{\alpha+m,\beta+m}(x). \quad (\text{B.13})$$

La notation  $(a, b)$  signifie:

$$(a, b) = (a+1)(a+2) \cdots (a+b-2)(a+b-1). \quad (\text{B.14})$$

À l'aide de la formule de Rodriguez, on peut démontrer que les polynômes de Jacobi satisfont les relations d'orthogonalité suivantes:

$$\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{\alpha,\beta}(x) P_m^{\alpha,\beta}(x) dx = h_n \delta_{nm}, \quad (\text{B.15})$$

avec  $h_n$  donné par

$$h_n = \frac{2^{(\alpha+\beta+1)}}{n!} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)}. \quad (\text{B.16})$$

Si on suppose qu'une fonction  $f(x)$  peut être développée en série de polynômes de Jacobi, de la façon suivante:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n^{\alpha,\beta}(x), \quad (\text{B.17})$$

comme c'est le cas des fonctions analytiques dans l'intervalle  $|x| < 1$  ou bien des fonctions continues par morceaux dans  $|x| < 1$  avec des dérivées continues, alors on peut utiliser les relations d'orthogonalité (B.15) pour déterminer les coefficients  $c_n$ . Ces coefficients sont alors donnés par:

$$c_n = \frac{1}{h_n} \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{\alpha,\beta}(x) f(x) dx. \quad (\text{B.18})$$

Nous sommes intéressés, à présent, à examiner le lien entre les polynômes de Jacobi et les polynômes de Legendre associés généralisés. Pour ce faire, écrivons les polynômes de Jacobi sous la forme

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = (1-x)^{-\alpha/2} (1+x)^{-\beta/2} \Phi_n^{\alpha,\beta}(x), \quad (\text{B.19})$$

en termes d'une fonction  $\Phi_n^{\alpha,\beta}(x)$  que nous voulons déterminer. En insérant (B.19) dans (B.6), on trouve que les fonctions  $\Phi_n^{\alpha,\beta}(x)$  satisfont les équations

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{d}{dx} \Phi_n^{\alpha,\beta}(x) \right] + \left\{ \left[ \left( \frac{\alpha}{2} \right)^2 + \left( \frac{\beta}{2} \right)^2 + \frac{(\alpha+\beta+\alpha\beta)}{2} \right] - \right. \\ \left. \frac{2}{(1-x^2)} \left( \left[ \left( \frac{\alpha}{2} \right)^2 + \left( \frac{\beta}{2} \right)^2 \right] + \left[ \left( \frac{\alpha}{2} \right)^2 - \left( \frac{\beta}{2} \right)^2 \right] x \right) \right\} \Phi_n^{\alpha,\beta}(x) = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Si nous nous restreignons au cas où  $\alpha = m - k$ ,  $\beta = m + k$  et  $n = l - m$  avec  $m, k$  et  $l$  des entiers, alors (B.20) devient

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{d}{dx} \Phi_{l-m}^{m-k, m+k}(x) \right] + \left[ l(l+1) - \frac{(m^2 - k^2)}{(1-x^2)} + \frac{2mkx}{(1-x^2)} \right] \Phi_{l-m}^{m-k, m+k}(x) = 0. \quad (\text{B.21})$$

Les polynômes satisfaisant cette équation, écrits sous la forme:

$$P_{mk}^l(x) = \frac{i^{m-k}}{2^m} \sqrt{\frac{(l-m)!(l+m)!}{(l-k)!(l+k)!}} \Phi_{l-m}^{m-k, m+k}(x), \quad (\text{B.22})$$

sont, en fait, les éléments de matrice de la représentation irréductible  $T^l(g)$  du groupe  $SU(2)$  [Vi 68]. Ces polynômes sont donnés par:

$$P_{mk}^l(x) = \frac{i^{(m-k)}}{2^m} \sqrt{\frac{(l-m)!(l-k)!}{(l+m)!(l+k)!}} (1+x)^{(m+k)/2} (1-x)^{(m-k)/2} \times \sum_{s=0}^{l-m} \frac{(-1)^s (l+m+s)!}{s! (m-k+s)! (l-m-s)!} \left( \frac{1-x}{2} \right)^s. \quad (\text{B.23})$$

De plus, pour  $k = 0$ , (B.21) est l'équation pour les polynômes de Legendre associés,  $P_l^m(x)$ , à savoir:

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{d}{dx} \Phi_{l-m}^{m, m}(x) \right] + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{(1-x^2)} \right] \Phi_{l-m}^{m, m}(x) = 0. \quad (\text{B.24})$$

On a alors:

$$\Phi_{l-m}^{m, m}(x) \equiv P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x), \quad (\text{B.25})$$

où  $P_l(x)$  sont les polynômes de Legendre usuels qui sont donnés par:

$$P_l(x) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (1-x^2)^l. \quad (\text{B.26})$$

C'est ainsi qu'en comparant les équations (B.19) et (B.22), on trouve que:

$$P_{l-m}^{m-k, m+k}(x) = (i)^{k-m} 2^m \sqrt{\frac{(l-k)!(l+k)!}{(l-m)!(l+m)!}} (1-x)^{(k-m)/2} (1+x)^{-(k+m)/2} P_{mk}^l(x), \quad (\text{B.27})$$

ou encore, si on insère (B.23) dans cette dernière équation, on obtient finalement:

$$P_{l-m}^{m-k, m+k}(x) = \frac{(l-k)!}{(l+m)!} \sum_{s=0}^{l-m} \frac{(-1)^s (l+m+s)!}{s! (m-k+s)! (l-m-s)!} \left(\frac{1-x}{2}\right)^s. \quad (\text{B.28})$$

# Appendice C

## Valeurs moyennes des opérateurs $J_+$ , $J_-$ et $J_3$ dans les états propres d'algèbre associés à $su(2)$

Nous calculons, dans cet appendice, les valeurs moyennes des opérateurs  $J_+$ ,  $J_-$  et  $J_3$  dont nous avons fait référence dans les chapitres 2 et 3. La méthode que nous allons utiliser est basée entièrement sur l'algèbre des opérateurs ordonnés. Cette technique nous permettra de calculer à partir des mêmes expressions autant la valeur moyenne de l'opérateur  $\hat{J}_3$  que celle des opérateurs  $J_+$  et  $J_-$ . Il faut remarquer qu'avec les expressions trouvées par C. Brif [Br 97], on peut seulement calculer facilement les valeurs moyennes des puissances entières de l'opérateur  $\hat{J}_3$ . De plus, le calcul des valeurs moyennes des opérateurs  $J_+$  et  $J_-$  s'avère plus compliqué, sinon impossible, dû au fait que ces expressions sont nettement symétrisées par rapport à l'indice  $m$ . Nous utiliserons une deuxième méthode pour calculer la valeur moyenne de  $J_3$ , encore basée sur l'algèbre des opérateurs ordonnés, mais cette-fois-ci nous ferons référence au concept de représentation d'un groupe pour simplifier les expressions. Nous aboutirons de cette façon à la généralisation des résultats du chapitre 1, notamment, les équations (1.103) et (1.106) ainsi que les résultats apparus dans [Gi 94].

### C.1 Valeurs moyennes des opérateurs $J_+$ , $J_-$ et $J_3$

Pour calculer les valeurs moyennes des opérateurs  $J_+$ ,  $J_-$  et  $J_3$  dans les états (2.4), nous allons agir avec l'opérateur  $\hat{T}_{eff}$ , donné par l'équation (2.20), à la place

de l'opérateur  $\hat{T}$ . Dans le but d'obtenir une expression commune servant à calculer ces valeurs moyennes, on peut d'abord calculer les éléments de matrice suivants

$$N_m^j(\rho) = \langle j, m | e^{\beta \hat{J}_+} e^{\bar{\alpha} \hat{J}_-} e^{\rho \hat{J}_3} e^{\alpha \hat{J}_+} e^{\beta \hat{J}_-} | j, m \rangle, \quad (\text{C.1})$$

avec

$$\alpha = -\frac{2\beta_-}{b + \beta_3} = -\frac{(b - \beta_3)}{2\beta_+} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\beta_+}{b}. \quad (\text{C.2})$$

En effet, les valeurs moyennes des opérateurs  $\hat{J}_3$ ,  $\hat{J}_+$  et  $\hat{J}_-$  dans les états (2.4) sont alors données respectivement par

$${}^j_m \langle \psi | \hat{J}_3 | \psi \rangle_m^j = \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \ln (N_m^j(\rho)) \right] \Big|_{\rho=0}, \quad (\text{C.3})$$

$${}^j_m \langle \psi | \hat{J}_+ | \psi \rangle_m^j = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \left[ \ln (N_m^j(\rho)) \right] \Big|_{\rho=0} \right\} \quad (\text{C.4})$$

et

$${}^j_m \langle \psi | \hat{J}_- | \psi \rangle_m^j = \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} \left\{ \left[ \ln (N_m^j(\rho)) \right] \Big|_{\rho=0} \right\}. \quad (\text{C.5})$$

Le calcul de  $N_m^j(\rho)$  peut être effectué comme suit:

$$\begin{aligned} N_m^j(\rho) &= e^{m\rho} \langle j, m | e^{\beta \hat{J}_+} e^{\bar{\alpha} \hat{J}_-} e^{\alpha e^\rho \hat{J}_+} e^{\beta e^{-\rho} \hat{J}_-} | j, m \rangle \\ &= e^{m\rho} \langle j, m | e^{\beta \hat{J}_+} e^{\alpha e^\rho [\hat{J}_+ - 2\bar{\alpha} \hat{J}_3 - \bar{\alpha}^2 \hat{J}_-]} e^{[\bar{\alpha} + \beta e^{-\rho}] \hat{J}_-} | j, m \rangle \\ &= e^{m\rho} \langle j, m | e^{\beta \hat{J}_+} e^{\frac{\alpha e^\rho}{(1+|\alpha|^2 e^\rho)} \hat{J}_+} e^{-2 \ln(1+|\alpha|^2 e^\rho) \hat{J}_3} e^{-\frac{\bar{\alpha} |\alpha|^2 e^\rho}{(1+|\alpha|^2 e^\rho)} \hat{J}_-} e^{[\bar{\alpha} + \beta e^{-\rho}] \hat{J}_-} | j, m \rangle \\ &= e^{m\rho} [1 + |\alpha|^2 e^\rho]^{-2m} \langle j, m | e^{\frac{[\alpha e^\rho + \beta(1+|\alpha|^2 e^\rho)]}{(1+|\alpha|^2 e^\rho)} \hat{J}_+} e^{[\bar{\alpha} + \beta e^{-\rho}(1+|\alpha|^2 e^\rho)](1+|\alpha|^2 e^\rho) \hat{J}_-} | j, m \rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

La dernière égalité dans l'équation (C.6) correspond à:

$$N_m^j(\rho) = e^{m\rho} [1 + |\alpha|^2 e^\rho]^{-2m} \frac{(j+m)!}{(j-m)!} \sum_{k=0}^{j+m} (-1)^k \frac{(j-m-k)!}{(j+m-k)! k! k!} \left( \frac{(1-Z(\rho))}{2} \right)^k, \quad (\text{C.7})$$

avec

$$Z(\rho) = 1 + 2[\alpha e^\rho + \bar{\beta}(1 + |\alpha|^2 e^\rho)][\bar{\alpha} + \beta e^{-\rho}(1 + |\alpha|^2 e^\rho)].$$

En comparant la somme de l'équation (C.7) avec l'équation (B.28), on arrive à exprimer  $N_m^j(\rho)$  en termes des polynômes de Jacobi, à savoir:

$$N_m^j(\rho) = e^{m\rho} [1 + |\alpha|^2 e^\rho]^{-2m} P_{j+m}^{0,-2m}(Z(\rho)). \quad (\text{C.9})$$

En insérant (C.9) dans (C.3) et en tenant compte de l'équation (B.12), on trouve:

$${}_m^j \langle \psi | \hat{J}_3 | \psi \rangle_m^j = m \left( \frac{1 - |\alpha|^2}{1 + |\alpha|^2} \right) + \frac{(j - m + 1)}{2} \frac{P_{j+m-1}^{1,-2m+1}(Z(0))}{P_{j+m}^{0,-2m}(Z(0))} \left. \frac{\partial Z(\rho)}{\partial \rho} \right|_{\rho=0}, \quad (\text{C.10})$$

où

$$Z(0) = 1 + 2 |\alpha + \bar{\beta}(1 + |\alpha|^2)|^2 \quad (\text{C.11})$$

et

$$\left. \frac{\partial Z(\rho)}{\partial \rho} \right|_{\rho=0} = 2 [|\alpha|^2(1 + \alpha\beta + \bar{\alpha}\bar{\beta}) + |\beta|^2(|\alpha|^4 - 1)]. \quad (\text{C.12})$$

En insérant (C.9) dans (C.4) et en tenant compte de l'équation (B.12), on trouve:

$${}_m^j \langle \psi | \hat{J}_+ | \psi \rangle_m^j = -\frac{2m\bar{\alpha}}{1 + |\alpha|^2} + \frac{(j - m + 1)}{2} \frac{P_{j+m-1}^{1,-2m+1}(Z(0))}{P_{j+m}^{0,-2m}(Z(0))} \frac{\partial Z(0)}{\partial \alpha}, \quad (\text{C.13})$$

où

$$\frac{\partial Z(0)}{\partial \alpha} = 2[\bar{\alpha} + \beta(1 + |\alpha|^2)] + 4\bar{\alpha} \operatorname{Re} [\beta (\alpha + \bar{\beta}(1 + |\alpha|^2))]. \quad (\text{C.14})$$

En insérant (C.9) dans (C.5) et en tenant compte de l'équation (B.12), on trouve:

$${}_m^j \langle \psi | \hat{J}_- | \psi \rangle_m^j = -\frac{2m\alpha}{1 + |\alpha|^2} + \frac{(j - m + 1)}{2} \frac{P_{j+m-1}^{1,-2m+1}(Z(0))}{P_{j+m}^{0,-2m}(Z(0))} \frac{\partial Z(0)}{\partial \bar{\alpha}}, \quad (\text{C.15})$$

où

$$\frac{\partial Z(0)}{\partial \bar{\alpha}} = 2[\alpha + \bar{\beta}(1 + |\alpha|^2)] + 4\alpha \operatorname{Re} \left[ \beta \left( \alpha + \bar{\beta}(1 + |\alpha|^2) \right) \right]. \quad (\text{C.16})$$

Il faut remarquer que si nous étions partis de l'expression

$$\tilde{N}_m^j(\rho) = \langle j, m | e^{\bar{\beta} \hat{J}_-} e^{\bar{\alpha} \hat{J}_+} e^{\rho \hat{J}_3} e^{\bar{\alpha} \hat{J}_-} e^{\bar{\beta} \hat{J}_+} | j, m \rangle, \quad (\text{C.17})$$

avec

$$\tilde{\alpha} = \frac{2\beta_+}{b + \beta_3} = \frac{(b - \beta_3)}{2\beta_-} \quad \text{et} \quad \tilde{\beta} = -\frac{\beta_-}{b} \quad (\text{C.18})$$

et que nous avons suivi le même traitement, nous arriverions à exprimer  $\tilde{N}_m^j(\rho)$  sous la forme

$$\tilde{N}_m^j(\rho) = e^{m\rho} [1 + |\tilde{\alpha}|^2 e^{-\rho}]^{2m} P_{j-m}^{0,2m}(\tilde{Z}(\rho)), \quad (\text{C.19})$$

avec

$$\tilde{Z}(\rho) = 1 + 2[\tilde{\alpha} e^{-\rho} + \bar{\tilde{\beta}}(1 + |\tilde{\alpha}|^2 e^{-\rho})][\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} e^{\rho}(1 + |\tilde{\alpha}|^2 e^{-\rho})].$$

La valeur moyenne de  $\hat{J}_3$  prend alors la forme

$${}^j_m \langle \psi | \hat{J}_3 | \psi \rangle_m^j = m \left( \frac{1 - |\tilde{\alpha}|^2}{1 + |\tilde{\alpha}|^2} \right) + \frac{(j - m + 1)}{2} \frac{P_{j-m-1}^{1,2m+1}(\tilde{Z}(0))}{P_{j-m}^{0,2m}(\tilde{Z}(0))} \frac{\partial \tilde{Z}(\rho)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=0}, \quad (\text{C.21})$$

avec

$$\tilde{Z}(0) = 1 + 2|\tilde{\alpha} + \bar{\tilde{\beta}}(1 + |\tilde{\alpha}|^2)|^2 \quad (\text{C.22})$$

et

$$\frac{\partial \tilde{Z}(\rho)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=0} = -2 \left[ |\tilde{\alpha}|^2 (1 + \tilde{\alpha} \bar{\tilde{\beta}} + \bar{\tilde{\alpha}} \tilde{\beta}) + |\tilde{\beta}|^2 (|\tilde{\alpha}|^4 - 1) \right]. \quad (\text{C.23})$$

La valeur moyenne de  $\hat{J}_-$  s'écrit

$${}^j_m \langle \psi | \hat{J}_- | \psi \rangle_m^j = \frac{2m\bar{\tilde{\alpha}}}{1 + |\tilde{\alpha}|^2} + \frac{(j - m + 1)}{2} \frac{P_{j-m-1}^{1,2m+1}(\tilde{Z}(0))}{P_{j-m}^{0,2m}(\tilde{Z}(0))} \frac{\partial \tilde{Z}(0)}{\partial \tilde{\alpha}}, \quad (\text{C.24})$$



où

$$\frac{\partial \tilde{Z}(0)}{\partial \tilde{\alpha}} = 2[\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}(1 + |\tilde{\alpha}|^2)] + 4\tilde{\alpha} \operatorname{Re} \left[ \tilde{\beta} \left( \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}(1 + |\tilde{\alpha}|^2) \right) \right]. \quad (\text{C.25})$$

Enfin, la valeur moyenne de  $\hat{J}_+$  admet l'expression

$${}^j_m \langle \psi | \hat{J}_+ | \psi \rangle_m^j = \frac{2m\tilde{\alpha}}{1 + |\tilde{\alpha}|^2} + \frac{(j - m + 1)}{2} \frac{P_{j-m-1}^{1,2m+1}(\tilde{Z}(0))}{P_{j-m}^{1,2m}(\tilde{Z}(0))} \frac{\partial \tilde{Z}(0)}{\partial \tilde{\alpha}}, \quad (\text{C.26})$$

où

$$\frac{\partial \tilde{Z}(0)}{\partial \tilde{\alpha}} = 2[\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}(1 + |\tilde{\alpha}|^2)] + 4\tilde{\alpha} \operatorname{Re} \left[ \tilde{\beta} \left( \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}(1 + |\tilde{\alpha}|^2) \right) \right]. \quad (\text{C.27})$$

Ces dernières expressions pour les valeurs moyennes de  $\hat{J}_3$ ,  $\hat{J}_+$  et  $\hat{J}_-$  sont les mêmes que celles que nous avons trouvées plus haut mais avec un ordonnancement différent des variables. Le choix d'utiliser l'une ou l'autre dépendra du calcul à effectuer. Par exemple, si nous voulons calculer la valeur moyenne de  $\hat{J}_3$  dans l'état  $|\psi\rangle_{-j}^j$ , il vaut mieux utiliser l'expression (C.10) car, dans ce cas, on sait que le terme contenant les polynômes de Jacobi s'annule tandis que si l'on veut calculer la valeur moyenne de  $\hat{J}_3$  dans l'état  $|\psi\rangle_j^j$ , pour une raison similaire, il vaut mieux utiliser l'expression (C.21).

## C.2 Valeur moyenne de $J_3$ en fonction de l'angle $\tilde{\theta}$ et du paramètre $q$

Dans cette section, nous présentons une autre façon de calculer la valeur moyenne de  $\hat{J}_3$  dans les états  $|\psi\rangle_m^j$ . En utilisant l'équation (2.4), on peut écrire

$$\langle \hat{J}_3 \rangle_m^j = \frac{\langle j, m | \hat{T}^\dagger \hat{J}_3 \hat{T} | j, m \rangle}{\langle j, m | \hat{T}^\dagger \hat{T} | j, m \rangle}. \quad (\text{C.28})$$

En décomposant  $\hat{T}$  donné par l'équation (2.5), sous la forme:

$$\hat{T} = e^{-i\tilde{\phi}\hat{J}_3} e^{-i\tilde{\theta}\hat{J}_2} e^{i\tilde{\phi}\hat{J}_3}, \quad (\text{C.29})$$

l'équation (C.28) devient

$$\langle \hat{J}_3 \rangle_m^j = \frac{\langle j, m | e^{i\tilde{\theta}\hat{J}_2} \hat{J}_3 e^{i(\tilde{\phi}-\phi)\hat{J}_3} e^{-i\tilde{\theta}\hat{J}_2} | j, m \rangle}{\langle j, m | e^{i\tilde{\theta}\hat{J}_2} e^{i(\tilde{\phi}-\phi)\hat{J}_3} e^{-i\tilde{\theta}\hat{J}_2} | j, m \rangle}. \quad (\text{C.30})$$

Si on écrit

$$\tilde{\phi} = \text{Re } \tilde{\phi} - i\frac{q}{2}, \quad q = -2\text{Im } \tilde{\phi} = \ln \left( \frac{|\beta_+|}{|\beta_-|} \right), \quad (\text{C.31})$$

alors l'équation (C.30) peut se résumer à

$$\langle \hat{J}_3 \rangle_m^j = -\frac{\partial}{\partial q} \left[ \ln \left( \langle j, m | e^{i\tilde{\theta}\hat{J}_2} e^{-q\hat{J}_3} e^{-i\tilde{\theta}\hat{J}_2} | j, m \rangle \right) \right]. \quad (\text{C.32})$$

À l'aide de la relation

$$e^{i\tilde{\theta}\hat{J}_2} \hat{J}_3 e^{-i\tilde{\theta}\hat{J}_2} = \cos \tilde{\theta} \hat{J}_3 - \sin \tilde{\theta} \hat{J}_1, \quad (\text{C.33})$$

on réduit le problème de calculer la valeur moyenne de  $\hat{J}_3$  au calcul suivant

$$\langle \hat{J}_3 \rangle_m^j = -\frac{\partial}{\partial q} \left[ \ln \left( \langle j, m | e^{i(\tilde{\theta}-\tilde{\theta})\hat{J}_2} e^{q(\sin \tilde{\theta} \hat{J}_1 - \cos \tilde{\theta} \hat{J}_3)} | j, m \rangle \right) \right]. \quad (\text{C.34})$$

Le produit des opérateurs exponentiels dans cette dernière équation peut s'écrire sous la forme d'un seul opérateur exponentiel en exploitant conceptuellement les propriétés données dans la section 1.4 concernant le produit des représentations. En effet, si on considère les paramétrisations des facteurs exponentiels des expressions  $e^{i(\tilde{\theta}-\tilde{\theta})\hat{J}_2}$  et  $e^{q(\sin \tilde{\theta} \hat{J}_1 - \cos \tilde{\theta} \hat{J}_3)}$ , on a

$$x_0 = \cos \left( \frac{\tilde{\theta} - \tilde{\theta}}{2} \right), \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \sin \left( \frac{\tilde{\theta} - \tilde{\theta}}{2} \right), \quad x_3 = 0, \quad (\text{C.35})$$

et

$$y_0 = \cos \left( \frac{-iq}{2} \right), \quad y_1 = \sin \tilde{\theta} \sin \left( \frac{-iq}{2} \right), \quad y_2 = 0, \quad y_3 = -\cos \tilde{\theta} \sin \left( \frac{-iq}{2} \right), \quad (\text{C.36})$$

respectivement, alors selon l'équation (1.128), on peut écrire

$$\exp \left[ i(\tilde{\theta} - \tilde{\theta})\hat{J}_2 \right] \exp \left[ q(\sin \tilde{\theta} \hat{J}_1 - \cos \tilde{\theta} \hat{J}_3) \right] = \exp \left[ i\alpha \vec{n} \cdot \vec{J} \right], \quad (\text{C.37})$$

avec

$$\begin{aligned} X_0 &= \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \cosh \tilde{\theta}_I \cosh\left(\frac{q}{2}\right), & X_1 &= n_1 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -i \sin \tilde{\theta}_R \sinh\left(\frac{q}{2}\right), \\ X_2 &= n_2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -i \sinh \tilde{\theta}_I \cosh\left(\frac{q}{2}\right), & X_3 &= n_3 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = i \cos \tilde{\theta}_R \sinh\left(\frac{q}{2}\right), \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

où les  $n_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sont réels tels que  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ ,  $\alpha$  est un nombre imaginaire pur et  $\tilde{\theta}_R$  et  $\tilde{\theta}_I$  sont les parties réelle et imaginaire de  $\tilde{\theta}$  respectivement.

L'opérateur exponentiel  $e^{i\alpha\vec{n}\cdot\vec{J}}$  peut se décomposer de la manière habituelle

$$\begin{aligned} e^{i\alpha\vec{n}\cdot\vec{J}} &= \exp\left(\frac{(1+n_3^2)(n_2+in_1)}{(n_1^2+n_2^2)} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \hat{J}_+\right) \times \\ &\exp\left(2 \ln\left[\frac{1}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - in_3 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right] \hat{J}_3\right) \exp\left(-\frac{(1+n_3^2)(n_2-in_1)}{(n_1^2+n_2^2)} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \hat{J}_-\right) = \\ &\exp\left(-\frac{(1+n_3^2)(n_2-in_1)}{(n_1^2+n_2^2)} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \hat{J}_-\right) \times \\ &\exp\left(-2 \ln\left[\frac{1}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + in_3 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right] \hat{J}_3\right) \exp\left(\frac{(1+n_3^2)(n_2+in_1)}{(n_1^2+n_2^2)} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \hat{J}_+\right) \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

ou bien

$$\begin{aligned} e^{i\alpha\vec{n}\cdot\vec{J}} &= \exp\left(\frac{(1+n_3^2)(n_2+in_1)}{(n_1^2+n_2^2)} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \hat{J}_+\right) \times \\ &\exp\left(-\frac{(1+n_3^2)(n_2-in_1)}{(n_1^2+n_2^2)} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) [\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - in_3 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)]^2 \hat{J}_-\right) \times \\ &\exp\left(2 \ln\left[\frac{1}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - in_3 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right] \hat{J}_3\right) = \\ &\exp\left(-\frac{(1+n_3^2)(n_2-in_1)}{(n_1^2+n_2^2)} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \hat{J}_-\right) \times \\ &\exp\left(\frac{(1+n_3^2)(n_2+in_1)}{(n_1^2+n_2^2)} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) [\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + in_3 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)]^2 \hat{J}_+\right) \times \\ &\exp\left(-2 \ln\left[\frac{1}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + in_3 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right] \hat{J}_3\right). \end{aligned} \quad (\text{C.40})$$

C'est ainsi qu'en utilisant l'équation (1.101), on trouve

$$\begin{aligned} \langle j, m | \exp \left( i \alpha \vec{n} \cdot \vec{J} \right) | j, m \rangle &= [\cos(\frac{\alpha}{2}) - i \epsilon n_3 \sin(\frac{\alpha}{2})]^{-2m\epsilon} \times \\ &\frac{(j + \epsilon m)!}{(j - \epsilon m)!} \sum_{n=0}^{j+\epsilon m} (-)^n \frac{(j - \epsilon m + n)!}{(j + \epsilon m - n)! n! n!} \left[ \frac{(1 + n_3^2)^2}{(n_1^2 + n_2^2)} \tan^2(\frac{\alpha}{2}) [\cos(\frac{\alpha}{2}) - i \epsilon n_3 \sin(\frac{\alpha}{2})]^2 \right]^n \end{aligned} \quad (C.41)$$

où  $\epsilon = \pm 1$ .

Si on identifie

$$Z(\epsilon) = 1 - 2 \frac{(1 + n_3^2)^2}{(n_1^2 + n_2^2)} \tan^2(\frac{\alpha}{2}) [\cos(\frac{\alpha}{2}) - i \epsilon n_3 \sin(\frac{\alpha}{2})]^2, \quad (C.42)$$

on peut exprimer la somme dans (C.41) en termes des polynômes de Jacobi,

$$\langle j, m | \exp \left( i \alpha \vec{n} \cdot \vec{J} \right) | j, m \rangle = [\cos(\frac{\alpha}{2}) - i \epsilon n_3 \sin(\frac{\alpha}{2})]^{-2m\epsilon} P_{j+\epsilon m}^{0, -2\epsilon m}(Z(\epsilon)). \quad (C.43)$$

À l'aide des équations (C.38), on peut revenir aux variables originales, ce qui donne

$$\begin{aligned} \langle j, m | e^{i(\tilde{\theta} - \tilde{\theta}) \hat{J}_2} e^{q(\sin \tilde{\theta} \hat{J}_1 - \cos \tilde{\theta} \hat{J}_3)} | j, m \rangle &= \\ &[\cosh \tilde{\theta}_I \cosh(\frac{q}{2}) + \epsilon \cos \tilde{\theta}_R \sinh(\frac{q}{2})]^{-2\epsilon m} P_{j+\epsilon m}^{0, -2\epsilon m}(Z(\epsilon)), \end{aligned} \quad (C.44)$$

avec maintenant,

$$Z(\epsilon) = 1 + 2 \frac{[\sinh^2 \tilde{\theta}_I + \sinh^2(\frac{q}{2})(\cosh^2 \tilde{\theta}_I + \cos^2 \tilde{\theta}_R)]^2 [\cosh \tilde{\theta}_I + \epsilon \cos \tilde{\theta}_R \tanh(\frac{q}{2})]^2}{\cosh^2 \tilde{\theta}_I [\sinh^2 \tilde{\theta}_I + \sinh^2(\frac{q}{2})(\cosh^2 \tilde{\theta}_I - \cos^2 \tilde{\theta}_R)]}. \quad (C.45)$$

La valeur moyenne de  $\hat{J}_3$  s'obtient de l'équation (C.34), en utilisant la règle de dérivation des polynômes de Jacobi (1.104):

$$\langle \hat{J}_3 \rangle_m^j = \epsilon m \frac{[\cosh \tilde{\theta}_I \sinh(\frac{q}{2}) + \epsilon \cos \tilde{\theta}_R \cosh(\frac{q}{2})]}{[\cosh \tilde{\theta}_I \cosh(\frac{q}{2}) + \epsilon \cos \tilde{\theta}_R \sinh(\frac{q}{2})]} - \frac{(j - \epsilon m + 1)}{2} \frac{P_{j+\epsilon m-1}^{1, 1-2\epsilon m}(Z(\epsilon))}{P_{j+\epsilon m}^{0, -2\epsilon m}(Z(\epsilon))} \frac{\partial Z(\epsilon)}{\partial q}. \quad (C.46)$$

Ceci représente le même résultat que ceux donnés par les équations (C.10) et (C.21), sauf que cette-fois-ci nous avons réussi à tout exprimer en fonction de la variable angulaire  $\tilde{\theta}$  et du paramètre  $q = \ln\left(\frac{|\beta_+|}{|\beta_-|}\right)$ .

Donnons pour terminer quelques relations afin de mettre en évidence quelques cas particuliers qui recourent des résultats obtenus par ailleurs. À partir de l'équation (2.14), on peut démontrer facilement que  $\cos \tilde{\theta} = \frac{\beta_3}{b}$  et que  $\sin \tilde{\theta} = 2\frac{\sqrt{|\beta_+\beta_-|}}{b}$ , alors

$$\begin{aligned}\cos \tilde{\theta} &= \cos \tilde{\theta}_R \cosh \tilde{\theta}_I - i \sin \tilde{\theta}_R \sinh \tilde{\theta}_I = \frac{\beta_3}{b}, \\ \sin \tilde{\theta} &= \sin \tilde{\theta}_R \cosh \tilde{\theta}_I + i \cos \tilde{\theta}_R \sinh \tilde{\theta}_I = \frac{\beta_3}{b} = 2\frac{\sqrt{|\beta_+\beta_-|}}{b}.\end{aligned}\tag{C.47}$$

En prenant la norme au carré de ces deux expressions et en utilisant des identités trigonométriques de base, on obtient les relations

$$\begin{aligned}\cosh^2 \tilde{\theta}_I + \cos^2 \tilde{\theta}_R &= \frac{(|b|^2 + |\beta_3|^2)}{|b|^2}, \\ \cosh^2 \tilde{\theta}_I - \cos^2 \tilde{\theta}_R &= \frac{4|\beta_+||\beta_-|}{|b|^2},\end{aligned}\tag{C.48}$$

d'où on déduit que

$$\begin{aligned}\cosh^2 \tilde{\theta}_I &= \frac{[|b|^2 + |\beta_3|^2 + 4|\beta_+||\beta_-|]}{2|b|^2}, \\ \cos^2 \tilde{\theta}_R &= \frac{[|b|^2 + |\beta_3|^2 - 4|\beta_+||\beta_-|]}{2|b|^2}.\end{aligned}\tag{C.49}$$

D'autre part, de la première relation en (C.47), on peut démontrer que

$$|1 - \cos \tilde{\theta}|^2 = \frac{|b - \beta_3|^2}{|b|^2} = (\cosh \tilde{\theta}_I - \cos \tilde{\theta}_R)^2\tag{C.50}$$

et, de l'équation (2.12), en tenant compte de la définition de  $q$ , on a

$$\sinh\left(\frac{q}{2}\right) = \frac{(|\beta_+| - |\beta_-|)}{2\sqrt{|\beta_+||\beta_-|}}, \quad \cosh\left(\frac{q}{2}\right) = \frac{(|\beta_+| + |\beta_-|)}{2\sqrt{|\beta_+||\beta_-|}}.\tag{C.51}$$

On est en mesure d'analyser quelques cas particuliers:

- Si on calcule la valeur moyenne de  $\hat{J}_3$  pour  $m = j$ , en utilisant la formule (C.46) avec  $\epsilon = -1$ , on obtient

$$\langle \hat{J}_3 \rangle_j^j = -j \frac{[\cosh(\tilde{\theta}_I) \sinh(\frac{q}{2}) - \cos(\tilde{\theta}_R) \cosh(\frac{q}{2})]}{[\cosh(\tilde{\theta}_I) \cosh(\frac{q}{2}) - \cos(\tilde{\theta}_R) \sinh(\frac{q}{2})]}, \quad (\text{C.52})$$

qui, à l'aide des relations antérieures, donne:

$$\langle \hat{J}_3 \rangle_j^j = j \frac{[4|\beta_-|^2 - |b - \beta_3|^2]}{[4|\beta_-|^2 + |b - \beta_3|^2]} = j \left( \frac{1 - |\tilde{\alpha}|^2}{1 + |\tilde{\alpha}|^2} \right) = \left( 1 - \frac{2}{S_+} \right), \quad (\text{C.53})$$

c'est-à-dire, l'expression obtenue par C. Brif [Br 97] dans ce cas particulier.

- De la même façon, si on calcule la valeur moyenne de  $\hat{J}_3$  pour  $m = -j$ , en utilisant la formule (C.46) avec  $\epsilon = 1$ , on obtient

$$\langle \hat{J}_3 \rangle_{-j}^j = -j \frac{[\cosh(\tilde{\theta}_I) \sinh(\frac{q}{2}) + \cos(\tilde{\theta}_R) \cosh(\frac{q}{2})]}{[\cosh(\tilde{\theta}_I) \cosh(\frac{q}{2}) + \cos(\tilde{\theta}_R) \sinh(\frac{q}{2})]}, \quad (\text{C.54})$$

ce qui donne un résultat analogue (obtenu par C. Brif également) au précédent:

$$\langle \hat{J}_3 \rangle_{-j}^j = -j \frac{[4|\beta_+|^2 - |b - \beta_3|^2]}{[4|\beta_+|^2 + |b - \beta_3|^2]} = -j \left( \frac{1 - |\alpha|^2}{1 + |\alpha|^2} \right) = \left( 1 - \frac{2}{S_-} \right). \quad (\text{C.55})$$

- Si on considère le cas  $\frac{|\beta_+|}{|\beta_-|} = 1$ , c'est-à-dire  $q = 0$ , et  $\tilde{\theta}_I = 0$ , alors  $\left. \frac{\partial Z(\epsilon)}{\partial q} \right|_{q=\tilde{\theta}_I=0} = 0$ , on obtient

$$\langle \hat{J}_3 \rangle_m^j = m \cos \tilde{\theta}_R. \quad (\text{C.56})$$

En particulier, pour les systèmes d'états cohérents généraux, le vecteur  $\vec{\beta}$  est donné par  $\vec{\beta} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ , d'où  $\beta_{\pm} = \frac{\sin \theta}{2} e^{\pm i\phi}$ ,  $b = 1$ ,  $\tilde{\phi} = \frac{\phi}{2}$ ,  $\tilde{\theta} = \theta$  et la valeur moyenne de  $\hat{J}_3$  est donnée par

$$\langle \hat{J}_3 \rangle_m^j = m \cos \theta. \quad (\text{C.57})$$

# Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudié les états minimaux d'incertitude associés à des couples d'opérateurs hermitiens. Ces états, définis comme les états rendant minimale la relation d'incertitude générale de Shrödinger-Robertson, s'obtiennent en solutionnant une équation aux valeurs propres. Dans le cas des opérateurs de moment angulaire  $\hat{J}_1$  et  $\hat{J}_2$ , nous avons construit les états propres de  $\hat{J}_1 + i\lambda\hat{J}_2$  en utilisant la technique des opérateurs ordonnés. C'est ainsi que nous avons trouvé la forme explicite de l'opérateur qui, agissant directement sur les états  $|j, m\rangle$ , de la représentation irréductible  $T^j(g)$  de  $SU(2)$ , donne les états cohérents et comprimés. Il faut remarquer que la forme explicite de cet opérateur n'était connue que partiellement, c'est-à-dire seulement pour des valeurs de  $\lambda$  imaginaires pures. Nous avons, par la même technique, trouvé les états propres d'algèbre de l'algèbre de Lie  $su(2)$ . Nous avons réussi à simplifier ce problème à la résolution d'une équation algébrique de deuxième degré. Nous avons ainsi obtenu la forme explicite de l'opérateur qui, agissant directement sur les états  $|j, m\rangle$ , donne comme résultat les états requis. Cela nous a permis de calculer de différentes façons la valeur moyenne de l'opérateur  $\hat{J}_3$  dans ces états et de donner des expressions explicites similaires pour les valeurs moyennes des opérateurs d'échelle  $\hat{J}_\pm$  qui n'avaient pas encore été calculées. Nous avons obtenu les états propres d'algèbre pour l'algèbre  $su(1, 1)$ . La forme explicite des états propres d'algèbre de ces algèbres était déjà connue mais notre travail a permis de mettre en évidence les opérateurs en question.

Dans un cadre plus général, nous avons étudié les états cohérents et comprimés associés à des opérateurs hermitiens associés l'algèbre de Lie  $h(1) \oplus su(2)$ . Nous

avons interprété ces états comme les solutions d'une équation aux valeurs propres donnant les états propres d'algèbre. Nous avons trouvé les solutions de cette équation pour différentes valeurs des paramètres. En particulier, nous avons résolu complètement le problème de trouver les états propres de l'opérateur d'annihilation super-symétrique, introduit par Aragone et Zipman, pour  $j$  arbitraire. Cela impliquait de connaître, pour tout  $j$ , les états super-cohérents associés aux opérateurs de super-position et de super-impulsion. De plus, nous avons obtenu les états comprimés associés à ces opérateurs. En outre, nous avons trouvé les états cohérents et comprimés, pour tout  $j$ , de ce que nous avons défini comme le système de l'oscillateur harmonique quantique déplacé généralisé. Notamment, nous avons explicité les résultats pour  $j = \frac{1}{2}$  et nous avons établi les correspondances usuelles entre les états propres d'hamiltoniens iso-spectraux.

Nous avons calculé les valeurs moyennes et les dispersions de l'hamiltonien de Jaynes-Cummings dans les états super-cohérents et comprimés. En vertu de la forme simple que nous avons donné à ces états, ces valeurs moyennes ont été obtenues de façon directe.

Finalement, nous avons réussi à solutionner, par la méthode des équations différentielles, les équations aux valeurs propres déterminant les états super-cohérents et comprimés ainsi que celles déterminant les états propres d'algèbre de l'algèbre  $\mathfrak{h}(1) \oplus \mathfrak{su}(2)$ . Nous avons bien établi le lien entre cette dernière procédure et la méthode des opérateurs ordonnés. Les avantages et les inconvénients ont été mis en évidence.



# Bibliographie

- [AH 00] N. Alvarez and V. Hussin, *Generalized coherent and squeezed states based on the algebra  $\mathfrak{h}(1) \oplus \mathfrak{su}(2)$* , en préparation, septembre (2000).
- [AZ 86] C. Aragone and F.Zypman, *Supercoherent States*, J. Phys. A, Math. Gen., vol. **19**, 2267, 1986.
- [BHN 94] Y. Bérubé-Lauzière, V. Hussin and L.M. Nieto, *Annihilation operators and coherent states for the Jaynes-Cummings model*, Physical Review A, vol. **50**, 3, 1725, 1994.
- [Br 97] C. Brif,  *$SU(2)$  and  $SU(1,1)$  Algebra Eigenstates : A Unified Analytic Approach to Coherent and Intelligent States*, International Journal of theoretical physics, vol.**36**, 1651, 1997.
- [Ca 77] B. C. Carson, *Special functions of applied mathematics*, Academic Press, New York, San Francisco London, 1977.
- [CH 62] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of mathematical physics, vol. 2, Partial differential equations*, Intersciences, New York, 1962.
- [Er 53] A Erdélyi et al., *Higher Transcendental Functions*, Bateman Manuscript Project, Vol. 2, Sec. 10.8, McGraw-Hill, New York, 1953.
- [FHN 94] D. J. Fernández, V. Hussin and L. M. Nieto, *Coherent states for isospectral oscillator Hamiltonians*, J. Phys. A: Math. Gen. **27** (1994).
- [Gi 94] R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras, and some of their Applications*, Krieger, Malabar, 1994.
- [Hu 00] V. Hussin, *Generalized minimum uncertainty relation and a new class of super-squeezed states*, Proceed. " 6<sup>th</sup> Int. Conf. on Squeezed States and uncertainty relation, Naples, Italy, May 1999", to be published, 2000.
- [JC 63] E.T. Jaynes and F.W. Cummings, *Comparison of Quantum and Semiclassical Radiation Theories with Application to the Beam Maser*,

- Proc. IEEE, 51:89, 1963.
- [Lo 73] W. H. Louisdell, *Quantum Statistical Properties of Radiation*, Wiley Series in Pure and Applied Optics, Wiley, New York, 1973.
- [Lu 69] Yudell L. Luke, *The Special functions and their approximations*, Vol I,II, Academic Press, New York, 1969.
- [Me 98] E. Merzbacher, *Quantum mechanics*, John Wiley, New York, 1998.
- [MW 72] L. Mandel and E. Wolf, Proceed. "Third Rochester conference on Coherence and Quantum optics held at the University of Rochester", June 21-23, 1972.
- [MW 95] L. Mandel and E. Wolf, *Optical coherence and quantum optics*, Cambridge University Press, 1995.
- [Ni 92] M. M. Nieto, *Supersqueezed States from Squeezed States*, Proceed. "Second International Workshop on Squeezed States and Uncertainty Relations" . P.N. Lebedev Physics Institute, Moscow, Russia, May 25-29,1992.
- [NSE 81] N.B. Narozhny, J.J. Sanchez-Mondragon and J.H. Eberly, Phys. Rev A **23**, 236 (1981).
- [OS 88] M. Orszag and S. Salamó, *Squeezing and minimum uncertainty states in the supersymmetric harmonic oscillator*, J. Phys. A: Gen. vol. **21**, L1059, 1988.
- [Pe 86] A. M. Perelomov, *Generalized Coherent States and their Applications*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [Pu 94] R. P. Puri, *Minimum-uncertainty states for noncanonical operators*, Physical Review A, vol. **49**, number 3, 2178, 1994.
- [SM 84] H. M. Srivastava and H. L. Manocha, *A Treatise on Generating Functions*, Ellis Horwood, Chichester, Sec. 2.3, Eqs. 60,62, 1984.
- [Tr 92] D.A. Trifonov, *Completeness properties of the minimum uncertainty states*, Proceed. "Second International Workshop on Squeezed States and Uncertainty Relations" . P.N. Lebedev Physics Institute, Moscow, Russia, May 25-29,1992.
- [Tr 99] D. A. Trifonov, *The uncertainty way of generalization of coherent states*, Preprint, 1999.

- [Vi 68] N.J.Vilenkin, *Special functions and the theory of group representation*, The American Mathematical society, 1968.