

2m11.2592.8

Université de Montréal

Etude des instabilités de cisaillement dans une couche de mélange compressible anélastique et stratifiée. Simulation numérique directe et modèles de sous-maille.

par

Daniel Weill

Département de physique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en physique

Octobre, 1997

©Daniel Weill, 1997



8 OC 11ms
3
U54
1998
v.004

Université de Montréal

Les données de ce dossier ont été transférées dans une base de données
et sont disponibles en ligne sur le site de l'Université de Montréal.
et les autres de sous-carte.

pour
l'année 2000

Le présent document est le résultat
d'une recherche effectuée par les services

Le présent document est le résultat
d'une recherche effectuée par les services
de l'Université de Montréal.

Document 1007



Document 1007

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

Etude des instabilités de cisaillement dans une couche de mélange compressible anélastique et stratifiée. Simulation numérique directe et modèles de sous-maille.

présenté par:

Daniel Weill

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

Katie Coughlin, président-rapporteur
Alain Vincent, directeur de recherche
Andrei Malevsky, membre du jury

Mémoire accepté le: 17.12.1997

RÉSUMÉ

Au moyen de simulations numériques, nous regardons comment se développe une instabilité de type Kelvin-Helmoltz dans une couche de fluide compressible stratifiée en densité subissant un cisaillement à mi-hauteur. Le nombre de Mach étant petit, nous avons utilisé l'approximation anélastique. La méthode numérique est une méthode aux volumes finis d'ordre 4. Non seulement la stratification mais aussi la compressibilité ont un effet stabilisateur. On observe également un effet de piégeage de la concentration de traceur dans les zones de forte vorticité. Nous avons tenu compte des erreurs dûes au schéma numérique dans l'interprétation des simulations directes. Elles se manifestent sous la forme d'une diffusion de grille, et retardent l'apparition de l'instabilité si la résolution est trop petite. Par comparaison avec les simulations directes à haute résolution, nous avons testé deux modèles de sous-mailles. Le modèle de Smagorinsky et le modèle auto-similaire. Le second montre le meilleur comportement. Ceci nous permet de prendre en compte des nombres de Reynolds plus grands et donc des fluides plus turbulents. La stratification crée un effet d'étirement et d'empilement des rouleaux.

Mots clés:

Fluide stratifié, Instabilités de cisaillement, Compressibilité, Modèles de sous-mailles.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ	iii
TABLE DES MATIÈRES	iv
LISTE DES TABLEAUX	v
LISTE DES FIGURES	vi
CHAPITRE 1: Introduction:	1
CHAPITRE 2: Théorie physique.	4
2.1 Instabilité de Kelvin-Helmoltz dans le cas incompressible.	4
2.2 Approximation anélastique des équations de Navier-Stokes	7
2.2.1 Adimensionnement des équations	9
2.2.2 Développement en nombre de Mach	11
2.2.3 Le cas d'un gaz Polytrope	13
2.3 Généralités sur la turbulence.	20
2.4 Modélisation des sous-mailles	22
2.4.1 Simulation numérique directe ("DNS").	22
2.5 Tenseurs de Reynolds des équations de Navier-Stokes moyennées ("RANS").	24

2.6	Simulation des grandes échelles, (L.E.S).	26
2.6.1	Modèle de Smagorinsky	30
2.6.2	Modèle de Smagorinsky anisotrope	35
2.6.3	Modèle Dynamique de Germano	36
2.6.4	Modèle de Bardina	39
2.6.5	Modèle auto-similaire.	39
CHAPITRE 3: Expérimentation numérique.		41
3.1	Analyse physique de l'instabilité de Kelvin-Helmoltz sur un écoulement compressible stratifié en densité.	41
3.1.1	Influence de la stratification sur le développement de l'instabilité.	55
3.1.2	Validation des résultats obtenus numériquement: Comparaison avec des simulations de résolution plus basse.	56
3.1.3	Simulation des grandes échelles, modèles de Smagorinsky et auto-similaire.	59
3.1.4	Simulation numérique à grand nombre de Reynolds ($Re = 10^6$).	66
CONCLUSION		74
BIBLIOGRAPHIE		77
APPENDICE A: Résolution des équations de Navier-Stokes par méthode aux volumes finis.		viii
A.1	Shéma d'évolution dans le temps.	viii

A.2	Méthode des volumes finis	ix
A.2.1	Moyennes sur les cellules	x
A.2.2	Moyennes sur les surfaces	xii
A.2.3	Reconstruction des champs	xii
A.3	Calcul de la pression	xiv
A.4	Calcul de la correction de pression	xvi
A.5	Conditions aux bords des équations différentielles.	xvii
A.6	Schéma général de l'algorithme	xix
	REMERCIEMENTS	xxiii

LISTE DES TABLEAUX

I	Valeurs de l'indice polytropique en fonction de H et β	15
---	--	----

LISTE DES FIGURES

1	Conditions de déclenchement de l'instabilité de Kelvin-Helmoltz	4
2	Profils moyens de densité (H=1 et H=10).	15
3	Profils moyens de pression (H=1 et H=10).	16
4	Profils moyens de température (H=1 et H=10).	16
5	Spectre théorique de la turbulence isotrope à grand nombre de Reynolds.	31
6	Coupe verticale de la concentration (128 × 128 × 64).	43
7	Coupe verticale de la densité (128 × 128 × 64).	43
8	Coupe verticale de la température (128 × 128 × 64).	45
9	Coupe verticale de la pression (128 × 128 × 64).	45
10	Coupe verticale de l'énergie cinétique (128 × 128 × 64).	45
11	Coupe verticale de la vortacité (128 × 128 × 64).	46
12	Evolution de la pression en fonction du temps au centre du Vortex.	46
13	Evolution de la vitesse verticale au centre du Vortex.	47
14	Distribution moyenne verticale, $\langle c \rangle (z)$, de la concentration.	47
15	Flux moyen d'advection verticale, $\langle \rho v_z c \rangle (z)$, de la concentration.	49

16	Flux moyen de la diffusion verticale, $\langle \rho_s \partial_z c \rangle (z)$, de la concentration.	49
17	Evolution du maximum du flux moyen d'advection verticale, $\langle \rho v_z c \rangle (z)$, pour $H = 1$ et $H = 10$.	50
18	Evolution du nombre de Richardson, pour $H=1$ et $H=10$.	50
19	Evolution de l'anisotropie, pour $H=1$ et $H=10$.	51
20	Profil de viscosité turbulente $\nu_T(z)$ ($H=1$).	52
21	Evolution de la viscosité turbulente moyenne ν_{Tm} .	53
22	Spectre de l'énergie cinétique.	54
23	Distribution verticale de la concentration.	57
24	Flux advectif vertical moyen de la concentration pour une résolution de $(64 \times 64 \times 32)$ points de grille.	58
25	Comparaison après 1000 pas d'une coupe verticale (plan xz) de la pression entre la simulation de référence (à gauche) et celle faite en LES (modèle de Smagorinsky, à droite).	61
26	Carte de corrélation de la divergence (selon z) du tenseur de sous- maille τ_{ij} , soit $\partial_i(\tau_{iz})$, entre les simulations DNS (128^3 , filtrée) et LES (32^3) pour le modèle de Smagorinsky.	62
27	Contributions relative de la composante yz des termes d'inertie ($\overline{\rho_s \tilde{v}_y \tilde{v}_z}$), de contraintes ($\tilde{\sigma}_{yz}$) et de sous-maillages (τ_{yz}) dans le flux de quantité de mouvement.	63
28	Profils verticaux de viscosité turbulente $\nu_T(z)$ pour le modèle de Smagorinsky ($H=1$).	64

29	Carte de corrélation de la divergence (selon x) du tenseur de sous-maille τ_{ij} , soit $\partial_i(\tau_{ix})$, entre les simulations DNS (128^3 , filtrées) et LES (32^3) pour le modèle auto-similaire.	65
30	Spectres (normalisés) de l'énergie cinétique pour la simulation avec le modèle auto-similaire et la simulation directe.	66
31	Comparaison des spectres (normalisés) de l'énergie cinétique pour les simulations avec le modèle auto-similaire (AS) et les simulations directes (DNS) pour $H=1$ et $H=10$	67
32	Coupe verticale de la concentration. $H=1$, Condition initiale ($32 \times 32 \times 32$). Profil de densité ρ_s (en abscisses).	68
33	Coupe verticale de la concentration ($32 \times 32 \times 32$). $H=1$, Temps t_1 . Profil de densité ρ_s (en abscisses).	69
34	Coupe verticale de la concentration ($32 \times 32 \times 32$). $H=10$, temps t_1 . Profil de densité ρ_s (en abscisses).	70
35	Coupe verticale de la concentration ($32 \times 32 \times 32$). $H=1$, temps t_2 . Profil de densité ρ_s (en abscisses).	70
36	Coupe verticale de la concentration ($32 \times 32 \times 32$). $H=10$, temps t_2 . Profil de densité ρ_s (en abscisses).	71
37	Coupe verticale de la concentration ($32 \times 32 \times 32$). $H=10$, temps $t_3 = 1.0 \times 10^{-3}$. Profil de densité ρ_s (en abscisses).	71
38	Flux advectif vertical moyenné, $\langle \rho v_z c \rangle (z)$, ($H=10$).	72
39	Evolution de l'anisotropie en fonction du temps.	72
40	Profils de viscosité turbulente $\nu_T(z)$ ($H=1$).	73

41	Convergence des schémas de Jacobi et de Gauss-Seidel pour l'équation de Poisson.	xv
----	--	----

A ma très chère Maman

CHAPITRE 1

Introduction:

Nous nous intéressons dans le présent travail à étudier la façon dont la diffusion verticale de la quantité de mouvement est affectée par la présence de stratification lors de l'apparition d'une instabilité de cisaillement de type Kelvin-Helmoltz dans un écoulement anélastique c'est-à-dire dépouillé d'ondes sonores. Nous cherchons également à tester et valider deux modèles de sous-mailles, qui sont le modèle de Smagorinsky (1963), et le modèle auto-similaire (Bardina et *al.*, 1980), sur des critères physiques. Leur implémentation doit permettre de voir dans quelle mesure ces modèles sont aptes à rendre compte des caractéristiques de l'écoulement étudié.

La physique des instabilités dues au cisaillement dans un fluide a été étudiée par Kelvin et Helmholtz (1868). Depuis, nombre de recherches et d'études ont été effectuées à ce sujet. Chandrasekhar (1961) donne un argument physique simple qui aboutit à poser que le nombre de Richardson (qui représente le rapport entre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique) devrait, dans le cas incompressible, être supérieur à 0.25 pour qu'un écoulement non borné reste stable. Batchelor (1967) présente une théorie de la stabilité linéaire et donne la condition d'instabilité pour deux couches de fluide superposées et séparées par une interface infiniment petite. Drazin et Reid (1981) font la même étude, et trouvent que dans le cas incompressible, toute perturbation aboutit à une instabilité, quelque soit le nombre d'onde. Menkes (1959) prend une interface où les vitesses varient continuellement sur une certaine épaisseur. Il aboutit au fait que les perturbations

dont les longueurs d'onde sont plus petites que l'épaisseur de la couche intermédiaire, restent stables. Dans des situations plus réalistes, comme par exemple les courants océaniques, on doit aussi prendre en compte que la stratification du milieu tend à inhiber le développement de l'instabilité (Hopfinger, 1987). Expérimentalement, Park, Whitehead et Gnanadeskian (1994), ont montré que la turbulence engendrée par le déplacement d'une barre verticale dans un bassin rempli d'eau salée, donc stratifié en densité, inhibe les composantes verticales des vitesses. Mais la stratification n'est pas la seule à réduire les modes verticaux. La compressibilité du fluide y contribue aussi. Gerwin (1968) présente une comparaison entre les cas incompressible et compressible de l'instabilité de Kelvin-Helmoltz. Il déduit que, contrairement au cas incompressible de Drazin et Reid, il existe dans le cas compressible, une gamme de nombres d'onde pour lesquelles une perturbation ne donne pas lieu à de l'instabilité. Le cas où la vitesse caractéristique est beaucoup moins grande que celle du son, et où le fluide est stratifié en densité est traité par Fröhlich (1990) qui utilise l'approximation anélastique des équations de Navier-Stokes. Cette approximation permet de ne plus prendre en considération les ondes acoustiques que l'on veut exclure dans cette expérience car elles n'interagissent pas avec l'écoulement, mais elles imposent sur le plan numérique un pas de temps trop petit (Taverne, 1993). Gough (1969) a proposé une présentation théorique plus détaillée dans le cas convectif.

Les expériences numériques faites en trois dimensions demandent beaucoup de temps de calcul et de moyens techniques, ainsi que des algorithmes numériques évolués, qu'en deux dimensions. Avec l'amélioration rapide des capacités des ordinateurs, il devient à présent possible de décrire des écoulements en trois dimensions. La grille envisagée est de type cartésienne structurée. Nous avons fait varier la résolution de 32^3 à 128^3 points de grille. D'un point de vue purement numérique, nous avons utilisé tout au long de nos simulations un schéma aux volumes finis d'ordre 4 en espace (Manzini, 1994, Hirsch, 1988, LeVèque, 1990), et un schéma Runge-Kutta d'ordre 2 en temps.

Cette étude à été financée en grande partie par l'industrie chimique (Olorell: contrat CERCA C96-4).

CHAPITRE 2

Théorie physique.

2.1 Instabilité de Kelvin-Helmoltz dans le cas incompressible.

Il est à l'heure actuelle impossible de pouvoir donner une théorie complète de la façon dont se développe la turbulence *ab initio*. Cela est dû en grande partie au caractère fortement non-linéaire des équations à résoudre. Nous pouvons cependant développer une théorie linéaire valable au déclenchement de l'instabilité, lorsque seulement quelques modes sont présents. Dans cette partie nous nous limitons à un fluide incompressible et dépourvu de viscosité. Nous étudions l'instabilité de Kelvin-Helmoltz qui se produit lorsque deux fluides superposés se déplacent à des vitesses relatives différentes (Figure 1). Si on impose une perturbation à

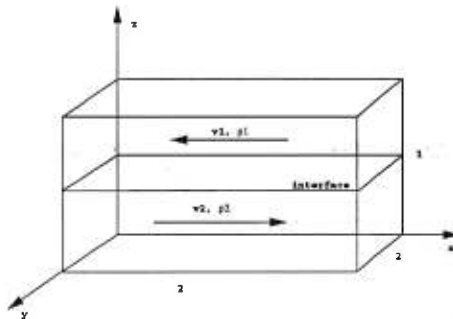


Figure 1. Conditions de déclenchement de l'instabilité de Kelvin-Helmoltz

la couche intermédiaire entre les deux fluides, nous pouvons évaluer la vitesse à laquelle elle se développe (Drazin et Reid, 1981). La partie supérieure de l'écoulement est définie par: v_1, ρ_1 , (vitesse et densité), et la partie inférieure par

v_2, ρ_2 . On ajoute aussi comme hypothèse le cas d'un écoulement non rotationnel. La raison de ce choix est que l'on peut alors définir un potentiel ϕ tel que la vitesse s'exprime comme (Landau et Lifchitz, 1989): $\vec{v} = \nabla\phi$

Nous imposons trois conditions (Drazin et Reid, 1981):

a. La pression est continue à l'interface.

On utilise l'équation de bilan d'énergie de Bernouilli pour exprimer la pression (en $z = \xi$):

$$\rho_1(C_1 - \frac{1}{2}(\nabla\phi_1)^2 - \frac{\partial\phi_1}{\partial t} - gz) = \rho_2(C_2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi_2)^2 - \frac{\partial\phi_2}{\partial t} - gz) \quad (2.1)$$

où les indices "1" et "2" réfèrent aux interface inférieure et supérieure, g est la constante de gravité et z la coordonnée verticale.

Les deux constantes C_1 et C_2 sont reliées par:

$$\rho_1(C_1 - \frac{1}{2}U_1^2) = \rho_2(C_2 - \frac{1}{2}U_2^2)$$

b. L'interface doit bouger avec les particules de fluides qui y sont voisines.

Ceci se traduit par (en $z = \xi$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial\xi} \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial y}{\partial\xi} \frac{d\xi}{dt} \\ &= \frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{d\xi}{dt} \end{aligned} \quad (2.2)$$

c. Loin de l'interface, le fluide n'est pas influencé par la perturbation.

$$\nabla(\phi) = \vec{v} \text{ pour } z \rightarrow \pm\infty \quad (2.3)$$

Nous décomposons ϕ_i ($i=1,2$) selon :

$$\phi_i = U_i x + \phi'_i$$

où U_i est l'intensité de la vitesse loin de l'interface de chacun des écoulements (haut et bas). ϕ'_i est une perturbation imposée proche de l'interface. On remplace ϕ_i dans les équations (2.1, 2.2 et 2.3) et on trouve:

$$\rho_1(U_1 \partial\phi'_1/\partial x + \partial\phi'_1/\partial t + g\xi) = \rho_2(U_2 \partial\phi'_2/\partial x + \partial\phi'_2/\partial t + g\xi) \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \phi'_i}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + U_i \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (2.5)$$

$$\Delta \phi'_i = 0 \quad (2.6)$$

L'équation (2.6) est une équation de Laplace, avec pour conditions aux limites: $\nabla(\phi'_i) = 0$ quand $z \rightarrow \pm\infty$.

La perturbation que l'on impose pour le potentiel est de la forme:

$$\phi'_i(x, y, t) = \hat{\phi}_i \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r}) + \sigma t) \quad (2.7)$$

où \vec{k} est le vecteur d'onde (k, l) et \vec{r} la coordonnée (x, y) . Et de même pour l'amplitude ξ à l'interface. Ici $\sigma (= \sigma_r + i\sigma_i)$ est le taux de croissance de la perturbation. Lorsque la partie réelle σ_r est positive, la déformation va croître de façon exponentielle. La stabilité aura lieu si σ_r est négative. On remplace ϕ'_i dans (2.4, 2.5 et 2.6) et on déduit un système de trois équations algébriques à trois inconnues. Ces équations ont une solution si le déterminant est nul. On aboutit alors à la condition d'instabilité suivante (Drazin et Reid, 1981):

$$|k| (\rho_1^2 - \rho_2^2) < k^2 \rho_1 \rho_2 (v_1 - v_2)^2 \quad (2.8)$$

où $|k|$ est la norme du vecteur d'onde, et k est la première composante de $\vec{k} = (k, l)$. Pourvu que v_2 soit différent de v_1 , on a toujours instabilité, quelque soit la longueur d'onde de la perturbation. Cette description, si elle est simple, n'est pas très proche de la réalité. Prendre une couche de transition d'épaisseur nulle, c'est-à-dire où la vitesse passe brutalement d'une direction à la direction opposée, n'est pas très réaliste. Si nous faisons varier la vitesse à travers l'interface entre les deux écoulements de façon continue (Menkes, 1959), on trouve certaines restrictions sur les valeurs que peuvent prendre les nombres d'onde de la perturbation, à savoir que seules les longueurs d'ondes de taille plus grande que la largeur de l'interface donnent lieu à des instabilités. Si on ajoute les effets de compressibilité et de stratification, on accroît encore la gamme de longueurs d'onde stables (Chandrasekhar, 1961).

Le mécanisme principal qui aboutit à l'instabilité est la conversion de l'énergie

cinétique contenue dans l'écoulement moyen en énergie cinétique perturbative dont le rôle est de franchir la barrière d'énergie potentielle gravitationnelle pour élever (ou descendre) un élément de fluide. Du point de vue du bilan d'énergie, l'énergie potentielle nécessaire pour échanger deux éléments de fluide à hauteur z et $z + \delta z$ est $\delta W = -g\delta\rho\delta z$ où ρ est la densité à la hauteur z . L'élément de fluide qui se trouvait au niveau z avec une vitesse u se retrouve alors en $z + \delta z$ avec une vitesse $u + \xi\delta u$, et l'élément initialement en $z + \delta z$, aura en z une vitesse finale de $u + (1 - \xi)\delta u$. La présence de ξ est due au fait que l'on admet qu'il y a eu échange de quantité de mouvement entre les deux "particules", et que de plus, la quantité de mouvement est conservée dans ce processus. Ce nombre positif est inférieur à un. Dès lors, l'énergie cinétique perdue par l'écoulement lors de cet échange est:

$$\delta K = \frac{1}{2}\rho u^2 + \frac{1}{2}(\rho + \delta\rho)(u + \delta u)^2 - \frac{1}{2}(\rho + \delta\rho)(u + (1 - \xi)\delta u)^2 \quad (2.9)$$

$$- \frac{1}{2}\rho(u + \xi\delta u)^2 \quad (2.10)$$

$$= \xi(1 - \xi)\rho(\delta u)^2 + u\delta u\delta\rho \quad (2.11)$$

$$\leq \frac{1}{4}\rho(\delta u)^2 + u\delta u\delta\rho \quad (2.12)$$

Une condition suffisante pour que l'instabilité ait lieu est que $\delta W \leq \delta K$, on aboutit alors à (Chandrasekhar, 1961):

$$-g \frac{d\rho}{dz} / \rho \left(\frac{du}{dz} \right)^2 \leq \frac{1}{4} \quad (2.13)$$

Ce critère est un critère de stabilité, pas d'instabilité. Remarquons que le membre de gauche n'est autre que le nombre de Richardson. Bien entendu ce développement ne prend en compte ni les effets de la compressibilité (Gerwin, 1968), ni ceux de la viscosité. Il se peut, dans ce cas, que cette inégalité ne soit plus respectée.

2.2 Approximation anélastique des équations de Navier-Stokes

Le fluide que nous étudions se déplace à des vitesses bien plus petites que la vitesse du son. Tous les phénomènes acoustiques qui peuvent avoir lieu dans

cette expérience ne nous intéressent pas. Dans l'approximation anélastique, nous nous affranchissons de résoudre les fluctuations qui se produisent sur les échelles de temps acoustiques, et qui numériquement demandent un pas de temps trop petit. Cela ne risque pas d'influencer les résultats étant donné que les interactions associées aux ondes sonores sont négligeables dans notre cas (Taverne, 1993). Sous forme conservative, les équations du problème sont les suivantes: (le "tilde" sur les grandeurs signifie qu'elles sont dimensionnées).

$$\tilde{P} = \tilde{\rho}\tilde{R}\tilde{T} \quad (2.14)$$

$$\partial_t(\tilde{\rho}) + \partial_j(\tilde{\rho}\tilde{v}_j) = 0 \quad (2.15)$$

$$\partial_t(\tilde{v}_j) + \partial_j(\tilde{v}_i\tilde{v}_j + \delta_{ij}\tilde{P} - \tilde{\tau}_{ij}) = -\tilde{\rho}\tilde{g}\hat{z}\delta_{i3} + F_j \quad (2.16)$$

$$\partial_t(\tilde{e}) + \partial_j((\tilde{e} + \tilde{P})\tilde{v}_j - \partial_j(\tilde{T}) - \tilde{v}_k\tilde{\tau}_{ik}) = 0 \quad (2.17)$$

$$\partial_t(\tilde{\rho}\tilde{c}) + \partial_j(\tilde{\rho}\tilde{v}_j\tilde{c} - \tilde{\rho}\partial_j\tilde{c}) = 0 \quad (2.18)$$

On a dans l'ordre, l'équation d'état des gaz parfaits (2.14), l'équation de la conservation de masse (2.15), l'équation de la conservation de la quantité de mouvement (2.16), de la conservation de la densité d'énergie (2.17), et enfin l'équation de diffusion-advection de la concentration du traceur injecté dans le fluide (2.18). La densité d'énergie s'exprime de la façon suivante:

$$\tilde{e} = \tilde{\rho}\tilde{E} = \tilde{\rho}\left(\frac{1}{2}\tilde{v}^2 + \tilde{c}_v\tilde{T} + \tilde{g}\tilde{z}\right)$$

Elle représente la somme de l'énergie cinétique, interne (thermodynamique, caractéristique des gaz parfaits) et potentielle. Le tenseur de contraintes est donné par:

$$\tilde{\tau}_{ij} = \tilde{\mu}(\partial_j\tilde{v}_i^{(0)} + \partial_i\tilde{v}_j^{(0)} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\partial_k\tilde{v}_k^{(0)}) \quad (2.19)$$

où $\tilde{\mu}$ est la viscosité dynamique du fluide. Le terme \vec{F} dans l'équation de la quantité de mouvement (2.16), est une force extérieure autre que la gravitation. Dans notre cas, il correspond à la force de cisaillement imposée au fluide.

2.2.1 Adimensionnement des équations

Avant d'en arriver à la résolution proprement dite, la première étape à suivre est de rendre les équations sans dimensions. Le but de cette opération a plusieurs avantages. D'abord elle permet de rendre tous les termes de chaque équation du même ordre de grandeur. Ceci est très important car selon la précision que l'on exige dans nos calculs, on ne pourra pas additionner deux nombres ayant trop d'ordre de grandeur de différence, sinon on tombe dans l'erreur d'arrondi de la machine, d'où perte d'informations. L'autre avantage est qu'en adimensionnant les équations, on permet d'élargir la diversité de cas que l'on étudie puisque qu'on peut associer plusieurs jeux d'unités pour la même équation. Il suffira seulement de redéfinir les nombres sans dimensions qui apparaissent. Pour adimensionner nous allons poser (Fröhlich, 1990) de manière très générale que toute grandeur peut s'écrire sous la forme:

$$\tilde{x} = x x^*$$

où \tilde{x} représente la grandeur dimensionnée, x^* une grandeur dimensionnée de référence, prise de façon à ce que x soit de l'ordre de l'unité. En particulier, nous pouvons fixer les constantes adimensionnées $R = 1$ (constante des gaz parfaits) et $g = 1$ (gravitation), puisqu'elles ne varient pas dans notre problème.

L'adimensionnalisation aboutit aux équations suivantes:

$$P = \rho T \quad (2.20)$$

$$Sr \partial_t(\rho) + \partial_j(\rho v_j) = 0 \quad (2.21)$$

$$\rho(Sr \partial_t(v_j) + \partial_j(v_i v_j) + \frac{1}{\gamma M^2} \delta_{ij} P - \frac{1}{Re} \tau_{ij}) = -\frac{1}{Fr} \rho g \hat{z} \delta_{ij} + F_j \quad (2.22)$$

$$\partial_t(e) + \partial_j((e + P)v_j - \partial_j(\frac{1}{Re Pr} \frac{\gamma}{\gamma - 1} T)) - \frac{1}{Re} v_k \tau_{ik} = 0 \quad (2.23)$$

$$\partial_t(\rho c) + \partial_j(\rho v_j c - \frac{1}{Pe} \rho \partial_j c) = 0 \quad (2.24)$$

Parmi les nombres sans dimensions qui ressortent de nos équations on reconnaît le nombre de Strouhal (Sr), qui représente le rapport entre une distance caractéristique du problème et la distance parcourue par une quantité dans l'écoulement au

cours du temps. Le nombre de Reynolds (Re) représente le rapport entre les forces d'inerties et de viscosité. Le nombre de Froude (Fr), est le rapport entre la vitesse d'un volume élémentaire du fluide et celle des ondes de gravité. Le nombre de Prantl (Pr), est le rapport entre la viscosité cinématique et la diffusivité thermique. Le nombre de Mach (M) est le rapport entre la vitesse du fluide et celle du son. Enfin, γ est l'indice adiabatique. Ces nombres s'écrivent:

$$Sr = \frac{L^*}{v^* t^*} \quad (2.25)$$

$$Re = \frac{L^* v^*}{\mu^* / \rho^*} \quad (2.26)$$

$$Fr^2 = \frac{v^{*2}}{g^* L^*} \quad (2.27)$$

$$Pr = \frac{\mu^* / \rho^*}{\kappa^*} \quad (2.28)$$

$$M = \frac{v^*}{c^*} \quad (2.29)$$

$$\gamma = \frac{c_p^*}{c_v^*} \quad (2.30)$$

où g^* est la constante de gravitation au niveau du sol, μ^* la viscosité dynamique, ν^* la viscosité cinématique, κ^* le coefficient de diffusivité thermique et $c^* = (\gamma R^* T^*)^{1/2}$ la vitesse du son (dans un gaz parfait). Tous ces coefficients seront considérés constants dans l'espace comme dans le temps. L'écoulement est complètement caractérisé par l'ensemble de ces nombres sans dimensions. t^* , v^* , et L^* représentent un temps, une vitesse et une longueur de référence dimensionnée. Suivant le phénomène que nous étudions, nous devons leur attribuer une valeur déterminée, caractéristique de notre problème. On peut en quelque sorte voir les choses à la manière d'un zoom qui focalise sur un aspect spécifique d'un écoulement, dans l'espace et le temps. Il n'est pas nécessaire pour l'instant de leur donner des valeurs physiques précises. Cependant, il est possible de pouvoir imposer quelques restrictions sur les valeurs que peuvent prendre certains nombres sans dimensions. Nous allons donc commencer par fixer le nombre de Strouhal, $Sr = 1$, ce qui signifie que toute variation d'une quantité est transportée dans le domaine, de longueur L^* , avec la vitesse caractéristique v^* . Nous allons faire aussi l'hypothèse

(Gonze, 1994) que, (en accord avec les théories spectrales de la turbulence), la viscosité est reliée à la diffusivité thermique par un nombre de Prantl constant et de l'ordre de 1. Nous poserons: $Pr = 1$.

En reprenant les équations adimensionnées, on voit que le nombre de Mach M intervient au numérateur de certains termes. Si M est beaucoup plus petit que 1, il apparait un effet d'amplification sur le terme qu'il pondère, d'où la possibilité de problèmes numériques, comme par exemple le fait que le rapport des ordres de grandeur des différents termes de nos équations soit alors plus petit que l'erreur d'arrondi de la machine, ou encore de voir apparaitre des instabilités liées au schéma numérique utilisé. Cet inconvénient va être résolu en se débarrassant des ondes acoustiques qui sont présentes implicitement dans les équations de Navier-Stokes. On peut déduire analytiquement les équations d'onde des équations d'Euler (Landau et Lifschitz, 1989). Une onde acoustique, est représentée dans notre système d'équations par la relation qui existe entre la pression et la densité locale dans le fluide. Fröhlich (1990) montre l'existence d'un cycle dans le système d'équations à résoudre, il est représenté par les flèches qui relient les variables en question entre les équations (2.20-2.23). Une variation de pression impose une variation de vitesse qui, à son tour engendre une variation de densité, qui, finalement fait varier la pression, et le cycle est bouclé. Pour empêcher les phénomènes acoustiques de se produire, il faut que ce cycle soit brisé. La méthode employée est dite anélastique (Gough, 1969).

2.2.2 Développement en nombre de Mach

Puisque le nombre de Mach est très petit, nous allons faire un développement selon ce nombre, pour toutes les quantités physiques représentées, comme le propose Gough (1969). Cela donne par exemple:

$$\rho = \rho^{(0)} + \gamma M^2 \rho^{(1)} + (\gamma M^2)^2 \rho^{(2)} + \dots \quad (2.31)$$

$$P = P^{(0)} + \gamma M^2 P^{(1)} + (\gamma M^2)^2 P^{(2)} + \dots \quad (2.32)$$

$$T = T^{(0)} + \gamma M^2 T^{(1)} + (\gamma M^2)^2 T^{(2)} + \dots \quad (2.33)$$

et de même pour toutes les autres grandeurs de notre problème, e (énergie), c (concentration d'un traceur chimique), u_x , u_y , et u_z (quantité de mouvement). Les hypothèses que nous devons respecter pour que ce développement soit valide, sont:

$$\gamma M^2 \ll 1 \quad (2.34)$$

de façon à ce que les fluctuations des variables thermodynamiques soient petites par rapport aux termes du premier ordre que l'on prend comme profils moyens. On ne tient compte que des fluctuations dont l'échelle de temps est plus grande que celle des ondes sonores. De plus on veut que dans le cas anélastique:

$$\frac{\gamma M^2}{Fr} = o(1) \quad (2.35)$$

où $\frac{\gamma M^2}{Fr} = H$ est le coefficient de stratification (hauteur d'échelle). Cette dernière hypothèse signifie que la stratification est de l'ordre de l'unité, comme nous le désirons. On introduit alors ces expressions dans nos équations et on sépare les termes selon les différents ordres de grandeur de γM^2 :

- A l'ordre $o(1/\gamma M^2)$, on obtient l'équation hydrostatique:

$$\partial_z(P^{(0)}) = \frac{\gamma M^2}{Fr} \rho^{(0)} \hat{z} \quad (2.36)$$

Posons $T^{(0)} = T_s$, $P^{(0)} = P_s$, $\rho^{(0)} = \rho_s$.

- A l'ordre suivant, $o((1/\gamma M^2)^0)$ (ordre zéro) on aboutit aux équations suivantes ($u_j = \rho_s v_j^{(0)}$ définit la quantité de mouvement par unité de volume):

$$\frac{P^{(1)}}{P_s} = \frac{\rho^{(1)}}{\rho_s} + \frac{T^{(1)}}{T_s} \quad (2.37)$$

$$e^{(1)} = \rho_s \left(\frac{1}{2} v^{(0)2} + \frac{T^{(1)}}{\gamma - 1} \right) + \rho^{(1)} \left(\frac{T_s}{\gamma - 1} + \frac{\gamma M^2}{Fr} z \right) \quad (2.38)$$

$$\partial_j(u_j^{(0)}) = 0 \quad (2.39)$$

$$\partial_i(u_j^{(0)}) + \partial_j \left(\frac{u_i^{(0)} u_j^{(0)}}{\rho_s} + \delta_{ij} P^{(1)} - \frac{1}{Re} \tau_{ij}^{(0)} \right) = -\frac{\gamma M^2}{Fr} \rho^{(1)} \hat{z} \delta_{i3} + F_j \quad (2.40)$$

$$\partial_t(e^{(1)}) + \partial_j((e^{(1)} + P^{(1)})v_j - \frac{1}{RePr} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \partial_j(T^{(1)}) - \frac{1}{Re} v_k^{(0)} \tau_{ik}^{(0)}) = 0 \quad (2.41)$$

$$\partial_t(\rho_s c^{(1)}) + \partial_j(\rho_s v_j^{(0)} c^{(1)} - \frac{1}{Pe} \rho_s \partial_j c^{(1)}) = 0 \quad (2.42)$$

Ce sont ces équations que l'on doit résoudre numériquement. Du point de vue de la physique, (2.37) est l'équation d'état des gaz parfaits sous l'approximation anélastique, (2.38) définit l'énergie totale de notre système par unité de volume. On y reconnaît l'énergie cinétique (1er terme), l'énergie potentielle de gravitation (dernier terme), et le reste est l'énergie thermodynamique interne. L'équation différentielle (2.39) découle de la conservation de la masse du fluide sous forme anélastique (dans la vraie forme il faudrait bien sûr remplacer ρ_s par ρ). (2.40) est l'équation de Navier-Stokes, c'est-à-dire la conservation de la quantité de mouvement. Le tenseur des contraintes pour un fluide Newtonien s'écrit:

$$\tau_{ij}^{(0)} = \partial_j v_i^{(0)} + \partial_i v_j^{(0)} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \partial_k v_k^{(0)}$$

L'équation (2.41) donne la conservation de l'énergie totale. Enfin (2.42) exprime la conservation de la concentration du traceur (non réactif) présent dans le fluide.

2.2.3 Le cas d'un gaz Polytrope

Nous avons vu que le premier ordre en γM^2 nous donne l'équation d'équilibre hydrostatique:

$$\partial_z(P) = \frac{\gamma M^2}{Fr} \rho \hat{z} \quad (2.43)$$

A ce niveau, nous avons une certaine liberté de choix pour pouvoir nous placer dans des situations physiques particulières. Nous allons prendre le cas polytrope, ce qui revient à garder constante la capacité calorifique $c = dQ/dT$ de notre fluide (où Q est la quantité de chaleur transmise, et T la température). Pour un gaz parfait comme fluide, la loi d'état est: $PV = RT$. De plus, lors d'une transformation thermodynamique quasi-statique (réversible), la variation d'énergie

interne U du fluide s'exprime uniquement en fonction de la température, selon $dU = c_v T$. Enfin, la constante des gaz parfaits est: $R = c_p - c_v$. En utilisant la première loi de la thermodynamique, on déduit alors l'équation (d'expansion ou de compression) polytropicque:

$$\frac{p}{\rho^m} = \text{const}$$

où m est l'indice polytropicque (toujours positif):

$$m = \frac{c_p - c}{c_v - c}$$

Lorsque $c = 0$, nous sommes dans une situation adiabatique. Dès lors, si $m \geq 1$, une expansion du gaz s'accompagne d'une baisse de température, alors qu'une compression s'accompagne d'une hausse de température.

Ayant choisi la situation thermodynamique qui nous intéresse, on résoud maintenant l'ensemble d'équations suivantes :

$$P_s = \rho_s T_s \quad (2.44)$$

$$\partial_z(P_s) = \frac{\gamma M^2}{Fr} \rho_s \hat{z} \quad (2.45)$$

$$\Delta T_s = 0 \quad (2.46)$$

où (2.45, 2.46) représentent notre système d'équations (2.40, 2.41) dans l'état stationnaire ($\vec{v} = 0$ et $\partial_t = 0$). La solution de ce système est:

$$T_s(z) = \beta z + T_0 \quad (2.47)$$

$$\rho_s(z) = \rho_0 (T_s/T_0)^m \quad (2.48)$$

$$P_s(z) = P_0 (T_s/T_0)^{m+1} \quad (2.49)$$

(nous mettons l'indice "s" pour rappeler qu'il s'agit du cas hydrostatique). où T_0 est la température en $z = z_0 = 0$ ($T_0 = 5.0$ et $\rho_0 = 1.0$ dans notre cas), β est la différence de température entre la surface $z = z_0 = 0$ et $z = z_{max}$ et m est l'indice polytropicque donné par:

$$m = -\frac{H}{\beta} - 1 \quad (2.50)$$

$H \setminus \beta$	-0.2	-0.5	-0.80	-1.0	-2.00
0.5	1.50	0.00	-0.38	-0.50	-0.75
1.0	4.00	1.00	0.25	0.00	-0.50
2.0	9.00	3.00	1.50	1.00	0.00
5.0	24.00	9.00	5.25	4.00	1.50
10.0	49.00	19.00	11.50	9.00	4.00

TABLEAU I. Valeurs de l'indice polytropique en fonction de H et β .

Nous présentons sur le tableau I quelques cas en fonction de H et de β . Plus la stratification augmente (pour un $\beta < 0$ fixé), plus m augmente et plus nous aurons des variations élevées de densité et de pression sur la hauteur du domaine. En revanche si, pour une valeur de H fixée, on augmente trop β en valeur absolue, nous allons obtenir des valeurs de m négatives impliquant une inversion des gradients de pression et de densité. Le système risque alors d'être instable.

Les figures 2, 3 et 4 représentent les profils de densité, de pression et de température pour $m = 1$ ($H = 1$ et $\beta = -0.5$) et $m = 19$ ($H = 10$ et $\beta = -0.5$).

Nous avons choisi le cas où le gradient vertical de température est négatif. Cela

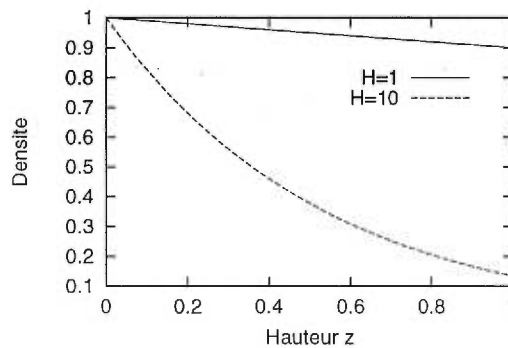


Figure 2. Profils moyens de densité ($H=1$ et $H=10$).

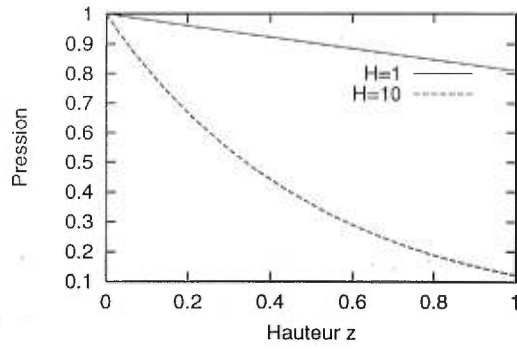


Figure 3. Profils moyens de pression (H=1 et H=10).

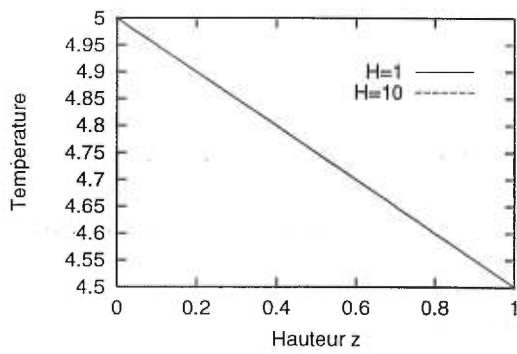


Figure 4. Profils moyens de température (H=1 et H=10).

signifie que la température possède une valeur plus grande en bas qu'en haut de notre domaine. Néanmoins le nombre de Rayleigh ¹ correspondant, utilisé normalement pour décrire les phénomènes convectifs, est sous-critique (Taverne, 1993, pour la cas compressible), ce qui nous évite de faire apparaitre tout effets de convection. Ces lois pour la pression, la température, et la densité vont être prises comme profils moyens du système que l'on étudie. Dès lors, les équations (2.37-2.42), qui déterminent l'évolution dans le temps du système, vont porter sur les fluctuations de ces mêmes grandeurs par rapport aux profils donnés. En plus de l'étude des grandeurs conventionnelles de la simulation (P, T, e, ρ , C) il existe tout un ensemble de paramètres qui nous donnent des informations sur l'état du système:

L'anisotropie:

$$A = \frac{V_{horizontale}}{V_{verticale}} = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\sum (u_x^2 + u_y^2)}{\sum u_z^2}}$$

où Σ est la somme prise sur tous les points de grille du domaine.

Elle est une mesure du rapport entre les composantes horizontale et la composante verticale de la quantité de mouvement. Lorsqu'une instabilité commence à se manifester, ce nombre doit diminuer.

La fréquence de Brunt-Väisälä:

En déplaçant verticalement une particule de fluide par rapport à sa position d'équilibre dans le cas hydrostatique, le bilan des forces de gravitation donne $-g\Delta z d\rho_s/dz$. En utilisant la seconde loi de Newton, on aboutit à l'équation du mouvement: $g\Delta z \frac{d\rho_s}{dz} = \rho_s \frac{d^2\Delta z}{dt^2}$. C'est l'équation de l'oscillateur harmonique. La fréquence caractéristique est donnée par (Drazin et Reid, 1981):

$$N^2 = -\frac{g}{\rho_s} \frac{d\rho_s}{dz} \quad (2.51)$$

¹Le nombre de Rayleigh (dans le cas incompressible) $Ra^* = \frac{\Delta T/T g^* d^{*3}}{\kappa^* \nu^*}$, est le rapport entre l'énergie associée à la poussée d'Archimède et l'énergie perdue sous forme de viscosité et de diffusivité thermique.

où ρ_s est le profil moyen de densité. Cette fréquence n'intervient qu'en présence de stratification. Elle donne une estimation moyenne sur la rapidité avec laquelle les éléments de fluide oscillent autour de leur position d'équilibre potentiel. Nous pouvons exprimer cette fréquence en fonction des paramètres de caractéristiques de notre problème, la stratification, H , β et l'indice polytropique, m . On part de la définition de la hauteur d'échelle, $H = \frac{\gamma M^2}{Fr}$. La vitesse du son dans un gaz parfait étant donnée par, $c^2 = \gamma RT$, et le nombre de Froude par l'équation (2.27), on déduit que,

$$H = \frac{gL}{RT} \quad (2.52)$$

L est une dimension typique de notre problème; nous avons choisi de prendre la taille des plus grands tourbillons que nous estimons être de la même grandeur que la hauteur de notre boîte de contrôle. g est la constante de gravitation adimensionnée. En dérivant (2.48) par rapport à z , on trouve que,

$$\frac{1}{\rho_s} \frac{d\rho_s}{dz} = \frac{m\beta}{T} \quad (2.53)$$

Introduisant (2.52) et (2.53) dans (2.51), et en éliminant la température T , on trouve:

$$N^2 = -g \frac{HR\beta m}{gL} = -\frac{HR\beta m}{L}$$

Sachant que $L = 1$ et $R = 1$, on a finalement:

$$N^2 = -H\beta m$$

Le nombre de Richardson:

$$Ri = \frac{g}{(v/L)^2} \frac{1}{\rho_s} \left| \frac{d\rho_s}{dz} \right|$$

c'est le rapport entre l'énergie potentielle et énergie cinétique (Drazin et Reid, 1981). v est la vitesse moyenne, ρ_s le profil moyen de densité. Ri est l'inverse du carré du nombre de Froude. Nous pouvons aussi exprimer le nombre de Richardson en fonction H , β et m . Puisque $gL = H\bar{T}$, et en tenant compte de l'expression

de la fréquence de Brunt-Väisälä, on aboutit à:

$$Ri = \frac{Hm\beta}{\sqrt{\frac{1}{3n} \sum (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)}}$$

où Σ dénote la somme sur tous les points de grille du domaine.

n est le nombre total de points de grille dans une direction. Tel qu'il est défini ici, le nombre de Richardson est global, c'est donc un nombre que l'on moyenne sur tout le domaine.

Le coefficient de viscosité turbulente:

On s'intéresse au flux vertical de quantité de mouvement moyenne qui s'écrit: $\rho V_q V_z$ (V_q est la vitesse quadratique moyenne (rms), et V_z , la vitesse verticale). Si on se place au-dessus d'une échelle donnée (échelle de coupure), ce flux, dont la contribution principale provient des tourbillons qui se situent en-dessous de la coupure, peut être modélisé comme une diffusion de quantité de mouvement: $\nu_T \frac{\partial(\rho V_q)}{\partial z}$. Alors ν_T peut s'écrire: $\nu_T(z) = (\rho V_q V_z) / \partial_z(\rho V_q)$. (c'est le rapport entre le flux vertical de quantité de mouvement, et le gradient vertical de quantité de mouvement). Si nous prenons enfin la moyenne sur un plan horizontal de cette expression, nous obtenons:

$$\nu_T(z) = \frac{\langle \rho V_q V_z \rangle (z)}{\langle \partial(\rho V_q / \partial z) \rangle (z)}$$

où $\langle \rangle$ dénote la moyenne prise sur un plan horizontal (xy), pour une hauteur z donnée. $\nu_T(z)$ est une mesure de l'effet de freinage que provoquent les tourbillons sur l'écoulement moyen. Il exprime en quelque sorte la manière dont est dispersée la quantité de mouvement dans le fluide. Une grande valeur de ν_T signifie donc que la quantité de mouvement est rapidement dispersée à travers le fluide sous la forme de petits tourbillons. Cela a pour conséquence une perte d'énergie cinétique de l'écoulement.

2.3 Généralités sur la turbulence.

La plupart des écoulements dans la nature sont de type turbulent. La turbulence a lieu pour des nombres de Reynolds élevés. On y trouve un large spectre d'échelles de tourbillons. A ce spectre d'échelles (spatiales) on peut associer un spectre de fréquences (temporelles) de fluctuations. Les tourbillons les plus grands, qui sont en général du même ordre de grandeur que la taille globale de l'écoulement, ont des basses fréquences. Ils sont, de plus, influencés par les conditions aux limites imposées par le problème, alors que les petits tourbillons, qui sont délimités par l'échelle de viscosité, ont de grandes fréquences de fluctuation. Plus le nombre de Reynolds augmente, plus le spectre est étendu (Tennekes et Lumley, 1972). On peut décrire actuellement les choses de la manière suivante. Les grands tourbillons tirent l'énergie cinétique de l'écoulement moyen, et l'injectent dans le mouvement turbulent des grandes échelles. On peut représenter les grands tourbillons comme des vortex en interaction les uns avec les autres. Cette interaction va les déformer, par effet d'étirement, au point qu'il vont se décomposer en tourbillons plus petits. Ceux-ci à leur tour vont s'étirer et donner lieu à des tourbillons de tailles plus petite encore et ainsi de suite jusqu'aux plus petites échelles de tourbillons. C'est donc un phénomène de cascade qui a lieu (Tennekes et Lumley, 1972). En même temps, l'énergie va être transmise en cascade jusqu'à l'échelle la plus petite, soit celle de dissipation. Le taux de dissipation de l'énergie dépend des grandes échelles, malgré le fait que la dissipation se fait aux plus petites échelles. De plus, il apparaît que la viscosité ne détermine pas la quantité d'énergie dissipée. Elle ne fait que définir l'échelle à laquelle aura lieu la dissipation. Cette vision des choses n'est cependant que partielle car de récentes recherches (Lesieur, 1987) ont montré que non seulement les grandes échelles de tourbillons ont un effet sur les petites, mais il s'avère que les petites échelles influencent également les grandes, par effet de recombinaison et de rétrodiffusion notamment. On ne peut actuellement pas donner une définition précise de la turbulence, du

fait de sa complexité. Mais on peut cependant en donner certaines caractéristiques génériques, (Tennekes et Lumley, 1972):

-Comportement stochastique et irrégulier:

Toute description déterministe est actuellement impossible. C'est la raison pour laquelle on fait souvent appel à des outils statistiques pour l'analyse turbulente.

-Diffusivité turbulente:

Elle permet le transfert rapide de quantité de mouvement, d'énergie, de chaleur et de masse. C'est une caractéristique très intéressante pour l'industrie. C'est elle aussi qui évite aux avions de décrocher lorsque l'angle d'attaque est relativement grand, alors que pour le même angle en régime laminaire la couche limite se décollerait (Tennekes et Lumley, 1972).

-Haut nombre de Reynolds:

Par définition de ce nombre, la turbulence apparaît en présence de grandes forces d'inertie et, comparativement, à de petites forces de viscosité. En fait la turbulence est engendrée par des instabilités dans l'écoulement, ces dernières étant la conséquence de l'interaction entre les termes d'inertie non-linéaires et ceux de viscosité dans les équations de Navier-Stokes. Remarquons que c'est le rapport entre ces deux termes qui donne le nombre de Reynolds.

-Tridimensionnalité:

Les écoulements turbulents sont fortement rotationnels et en trois dimensions. Le champ de vorticité est distribué dans l'espace de façon aléatoire. C'est un caractère qui donne aux simulations numériques tridimensionnelles toute leur importance. De plus, il y règne une vorticité très fluctuante.

-Dissipatif:

L'énergie cinétique de l'écoulement moyen va être dissipée vers les plus petites échelles, celle où la dissipation va se manifester. La turbulence, par son caractère dissipatif, ne peut exister que si on lui fournit continuellement de l'énergie sans quoi elle s'éteint.

-Écoulement:

La nature de la turbulence est une caractéristique non pas d'un fluide mais bien du type d'écoulement que l'on analyse, c'est cela qui rend leur caractère difficile à décrire de façon universelle.

2.4 Modélisation des sous-mailles

Les simulations d'écoulements de fluides turbulents ont fait, depuis quelques années des progrès considérables, dûs en grande partie à l'avancée rapide des capacités mémoire ainsi que de la puissance des ordinateurs. On peut voir de façon générale que l'évolution historique a permis de passer progressivement des équations de Navier-Stokes globalement moyennées, qui ne décrivent pas le comportement des petites échelles de tourbillons, aux simulations directes où toutes les échelles d'espace sont résolues, et qui représente l'approche la plus réaliste.

2.4.1 Simulation numérique directe ("DNS").

Dans les simulations numériques directes (DNS, "direct numerical simulation") les équations de Navier-Stokes sont résolues sans faire appel à des moyennes ni à des approximations. On se rapproche de l'expérimentation proprement dite.

Toutes les échelles sont résolues. Il existe cependant encore aujourd'hui une limite qui nous empêche de pouvoir simuler de manière directe et à suffisamment grande résolution, des écoulements trop complexes (Ferziger et *al.*, 1996). Prenons l'échelle intégrale, L , comme étant la taille des plus grands tourbillons. L'échelle de dissipation correspond à la taille des tourbillons les plus petits, η . Le rapport de ces deux quantités nous donne, si on prend une grille uniforme, le nombre de points minimum nécessaires dans chaque direction pour décrire correctement l'écoulement turbulent, soit L/η . On montre que ce rapport peut être relié au nombre de Reynolds par $Re^{3/4}$ (Tennekes et Lumley, 1972). Sachant que ce nombre doit être employé dans les trois directions on aboutit à un nombre total de points qui doit être de l'ordre de $Re^{9/4}$ (Ferziger et *al.*, 1996). De plus, il faut tenir compte que numériquement le pas en temps décroît lorsque la résolution augmente (critère de Courant). On voit tout de suite la limitation en résolution à laquelle on est confronté matériellement. Pour la capacité en mémoire et la vitesse de calcul des ordinateurs actuels, la gamme de Reynolds que l'on peut simuler en DNS ne peut pas dépasser quelques milliers, on est aussi restreint à des géométries simples. Malgré cette limitation, les DNS seront souvent présentes où des recherches fondamentales sur les propriétés physiques de certains types d'écoulements sont nécessaires. On peut ainsi obtenir des détails sur les structures les plus fines, et en déduire des lois nouvelles. Elles sont donc un domaine privilégiés de l'étude de la turbulence, depuis sa création à sa dissipation en passant par la manière dont elle est transmise à travers les diverses échelles du fluide. Elles peuvent également servir comme expérience de référence pour des comparaisons ultérieures avec des simulations utilisant des modèles de type RANS ("Reynolds average Navier-Stokes") ou de sous-maille.

2.5 Tenseurs de Reynolds des équations de Navier-Stokes moyennées ("RANS").

Au niveau de l'ingénieur, les DNS contiennent en général bien plus d'informations qu'il n'est nécessaire d'obtenir lors d'études pratiques. On ne s'intéresse qu'à un petit nombre de propriétés comme la distribution des forces moyennes sur une surface par exemple. Il est souhaitable dans ce cas de faire des simplifications adéquates afin de réduire le temps de calcul. On en arrive aux simulations impliquant des approximations. La première est appelée RANS, Reynolds Averaged Navier-Stokes. L'idée est de décomposer les champs (vitesse, pression, température, etc...) en une valeur moyennée plus une fluctuation autour de celle-ci, $v = \bar{v} + v'$ (Abbott et Basco, 1989). Les fluctuations dont nous parlons, qui sont dûes aux instabilités, sont considérées ici comme faisant partie intégrante de la turbulence. Les équations qui en découlent portent alors sur les moyennes. Il apparait cependant des termes impliquant encore les fluctuations et qui proviennent de la partie non-linéaire de nos équations (termes de type $\overline{v'_i v'_j}$). A ce point, le problème qui se pose est que l'on aboutit à un système avec plus d'inconnues que d'équations: c'est le problème de la fermeture. Pour remédier à cet inconvénient, il est nécessaire de modéliser les termes contenant les fluctuations. Ces termes peuvent être vus comme des contraintes supplémentaires imposées au système. On les inclus dans tenseur de rang deux. Pour définir un modèle moins compliqué que l'équation initiale, on va exprimer ce tenseur en terme de valeurs moyennes. La première suggestion que l'on peut faire est de représenter ces termes sous la même forme que celle du tenseur de contraintes laminares, τ_{ij} (eq. 2.19) que l'on trouve dans l'équation de Navier-Stokes (Peyret et Taylor, 1983):

$$-R_{ij} = \frac{\mu_T}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2\delta_{ij}}{3} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \quad (2.54)$$

On appelle R_{ij} le tenseur des contraintes de Reynolds. On peut considérer qu'au premier ordre l'influence de la turbulence sur l'écoulement moyen s'exprime sous forme d'une viscosité. C'est un choix naturel si on raisonne par analogie avec le

cas laminaire où, le transport de masse, de quantité de mouvement et d'énergie normal aux lignes de courant est dû à la présence de la viscosité. La différence est que la viscosité moléculaire que l'on trouve dans le tenseur des contraintes τ_{ij} est remplacée par une viscosité "turbulente" dans le tenseur de Reynolds, R_{ij} . On définit donc un autre coefficient de viscosité, turbulente cette fois, μ_T , qui est ajoutée à la viscosité laminaire. En fournissant cette viscosité, on va permettre de rendre le système insensible aux perturbations extérieures. C'est par elle que l'on modélise l'effet des fluctuations sur l'écoulement moyen. Le résultat que l'on obtient, est un écoulement laminaire effectif débarrassé de toute turbulence apparente. On peut exprimer le tenseur de Reynolds par (Peyret et Taylor, 1983):

$$-R_{ij} = \frac{\mu_T}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2\delta_{ij}k}{3} \quad (2.55)$$

où k est l'énergie cinétique turbulente $\frac{1}{2}\overline{v'_i v'_i}$. Cette énergie est une mesure des contraintes turbulentes normales au volume élémentaire de fluide; c'est l'équivalent de la pression statique présente dans le tenseur des contraintes pour un écoulement laminaire. La présence de ces deux paramètres (k et μ_T) nécessite deux autres équations pour que la fermeture soit réalisée. Une analyse dimensionnelle montre que μ_T peut être relié à l'échelle intégrale par (Ferziger et al., 1996): $\mu_T = C_\mu \rho \sqrt{k} L$. Résoudre pour μ_T revient donc à résoudre L . Mais le choix de L n'est pas si aisé que cela. Pour palier à cet inconvénient, on se sert du fait que dans le cas d'écoulement turbulent en "équilibre", le taux de dissipation de turbulence ϵ est compensé par le taux de production (Ferziger, 1995) selon:

$$\epsilon \approx \frac{k^{3/2}}{L} \quad (2.56)$$

Résoudre L revient à résoudre ϵ . A partir de là, en partant des équations de Navier-Stokes, on peut déduire deux équations différentielles, l'une pour ϵ , l'autre pour k . Le modèle basé sur ces équations est appelé, $k - \epsilon$. Finalement on a un système fermé d'équations différentielles à résoudre pour un écoulement "laminaire" ayant une certaine viscosité effective (et deux équations différentielles en plus). Il faut préciser quand-même que ce modèle a certains inconvénients.

On observe une singularité pour k quand on se situe près d'un mur, un des termes pour ϵ ayant son dénominateur nul. En effet, on a $k = 0$ aux murs si on prend des conditions aux bords homogènes ("Dirichlet"). Dans ce cas, il faut faire appel à certaines techniques ("fonctions de parois" par exemple) qui traitent spécifiquement le comportement des équations aux bords. Nous n'entrerons pas plus dans les détails, mais notons encore qu'il existe à ce jour plusieurs modèles de RANS, mais aucun ne peut pour l'instant prétendre être universel (Ferziger et *al.*, 1996).

2.6 Simulation des grandes échelles, (L.E.S).

Les LES ("Large Eddy Simulation") ne sont ni des simulations directes, ni des modèles de moyennes globales. Elle se situent entre ces deux catégories. En mécanique des fluides, les grandes structures sont souvent caractéristiques du type d'écoulement que l'on étudie. Elles sont en très grande partie responsables du transport de quantité de mouvement et d'énergie ainsi que de masse (Ferziger, 1995). De plus, elles sont encore passablement déterministes. Cependant, elles sont très difficile à modéliser car elles sont loin de suivre un comportement général. En ce qui concerne les petites structures, elles ont un caractère universel, et sont principalement responsables de la dissipation d'énergie. De plus, elles se comportent de façon aléatoire. Elle peuvent donc, en principe, être modélisées plus facilement. Ce sont ces caractéristiques qui permettent aux LES de se situer entre DNS et RANS. Les modèles de sous-maille semblent bien plus universels que ceux des RANS, du fait qu'ils ne modélisent qu'une partie de la turbulence (Ferziger, 1995). Les LES résolvent les grandes échelles de la turbulence de façon directe et modélisent les petites échelles de la turbulence. Ces termes de sous-maille peuvent être vus comme des interactions entre les grandes et les petites échelles de l'écoulement, interactions qui vont se manifester sous la forme d'un transfert d'énergie des grandes vers les petites échelles, ou inversement. Pour

bien distinguer entre les deux, on définit une longueur d'échelle, Δ , qui sépare ces deux domaines. Grossièrement tous les tourbillons plus petits que Δ , seront considérés comme les petits tourbillons de sous-maille et seront modélisés, et tous les tourbillons plus grands que Δ , seront des grands tourbillons, et seront résolus directement. Les LES sont en quelque sorte une première approche vers la résolution complète à toutes les échelles, des équations de Navier-Stokes. Elle coûtent beaucoup moins cher que les DNS mais rendent bien mieux compte que les RANS de ce qui se passe vraiment dans un écoulement turbulent. Les LES découlent naturellement du besoin actuel de modéliser la turbulence aux petites échelles (voir par exemple Gonze, 1994). Il faut préciser que les termes de sous-maille sont le résultat de la présence des termes non-linéaires dans les équations de Navier-Stokes. Contrairement aux RANS, on ne moyenne ici que les petites échelles. Cela se fait par une technique de filtrage.

$$\overline{u_i}(x) = \int H(x, x') u_i(x') dx'$$

où $H(x, x')$ est la fonction filtre. C'est une sorte de moyenne locale. On peut aussi le voir comme un produit de convolution. Il existe plusieurs types de filtres, selon le type de fonction que l'on utilise (Piomelli, 1994). En une dimension, x , on écrit:

-Fonction carrée:

Elle est simple à utiliser.

$$H(x) = \begin{cases} 1/\Delta, & \text{si } |x| \leq \Delta/2; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.57)$$

où Δ est le volume d'intégration de la moyenne.

-Fonction Gaussienne:

Elle pondère le champ à moyenner avec une courbe en cloche. Elle a l'avantage d'être lisse et régulière.

$$H(x) = \sqrt{\frac{6}{\pi \Delta^2}} \exp -\frac{6x^2}{\Delta^2}$$

-Fonction de coupure (ou de Fourier):

Celle-ci est utile quand on se met dans l'espace de Fourier, car elle élimine toutes les composantes dont le nombre d'onde est supérieur à une certaine valeur seuil $k_c = \frac{\pi}{\Delta}$. C'est un filtre adapté aux méthodes spectrales. Son utilisation est difficile dans le cas d'écoulement non-homogènes (Ferziger, 1995).

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } k \leq k_c; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.58)$$

Ces fonctions doivent être normalisées, pour respecter leur rôle de filtre. De ces trois filtres, on cherche celui qui est le plus efficace pour moyennner les échelles de sous-maille tout en étant le plus fidèle dans la représentation des plus petites échelles résolues de tourbillons. Il existe une étroite relation entre le type de filtre et la méthode numérique employée pour simuler l'écoulement. Dans le cas des volumes finis (Ferziger, 1995), on peut prendre la fonction carrée dont le volume d'intégration est celui d'une cellule de la grille. Alors \bar{u}_i représente une fonction constante par morceaux. Dans les situations où la compressibilité intervient, On préfère utiliser la fonction filtre de Favre:

$$\tilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}}$$

Dès lors, il suffit de filtrer les équations que l'on étudie. En ce qui concerne le choix du Δ , selon Ferziger (1995), il n'y pas de raison de le choisir en fonction de la grandeur du pas en espace δ de la grille, il faut seulement respecter l'inégalité $\Delta > \delta$ qui est triviale. L'intégration sur une cellule de taille δ semble un choix logique.

Lorsque l'on filtre notre système d'équations (2.37-2.42) (auxquelles nous avons enlevé les indices d'ordre (0) et (1), aucune confusion n'étant possible), on aboutit aux équations suivantes:

$$\bar{P} - \bar{\rho T}_s = \bar{\rho}_s \tilde{T} + (\overline{\rho T}_s - \bar{\rho T}_s) \quad (2.59)$$

$$\partial_j (\bar{\rho}_s \tilde{v}_j) = 0 \quad (2.60)$$

$$\partial_t(\bar{\rho}_s \tilde{v}_j) + \partial_j(\bar{\rho}_s \tilde{v}_i \tilde{v}_j + \delta_{ij} \bar{P} - \frac{1}{Re} \tilde{\sigma}_{ij} + \tau_{ij}) = -H \bar{\rho} \hat{z} \delta_{i3} + \bar{F}_j \quad (2.61)$$

$$\partial_t(\bar{\rho}_s \tilde{E}) + \partial_j[(\bar{\rho}_s \tilde{E} + \bar{P}) \tilde{v}_j] - \frac{1}{Re Pr} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \partial_j(\tilde{T}) - \frac{1}{Re} \tilde{v}_k \tilde{\sigma}_{ik} = \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Re} (\overline{\sigma_{ij} \partial_j v_i} - \bar{\sigma}_{ij} \partial_j \tilde{v}_j) - (\overline{P \partial_j v_j} - \bar{P} \partial_j \tilde{v}_j) - \overline{\tilde{v}_i \partial_j \tau_{ij}} \\ & \partial_t(\bar{\rho}_s \tilde{c}) + \partial_j(\bar{\rho}_s \tilde{v}_j \tilde{c} - \frac{1}{Pe} \bar{\rho}_s \partial_j \tilde{c}) = \partial_j[\bar{\rho}_s (\tilde{v}_j \tilde{c} - \overline{\tilde{v}_j c})] \end{aligned} \quad (2.63)$$

Le filtrage de la densité d'énergie donne:

$$e = \bar{\rho}_s (\frac{1}{2} \tilde{v}_j \tilde{v}_j + \bar{P} + H \rho \tilde{z}) \quad (2.64)$$

Ces équations régissent l'évolution dans le temps des grandes échelles, transporteuses principalement de l'énergie. Le terme de contrainte s'écrit:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \partial_j \tilde{v}_i + \partial_i \tilde{v}_j - \frac{2}{3} \delta_{ij} \partial_k \tilde{v}_k$$

Le tenseur de sous-maille de Reynolds de l'équation de Navier-Stokes s'écrit:

$$\tau_{ij} = \bar{\rho}_s (\overline{\tilde{v}_i \tilde{v}_j} - \tilde{v}_i \tilde{v}_j)$$

Tous les termes situés dans le membre de droite de l'équation (2.62) pour l'énergie, issus du filtrage appliqué à cette équation, représentent des termes de sous-maille qui expriment l'effet local des petites échelles sur l'écoulement moyen. Une étude faite précédemment par Vreman et *al.* (1995), a montré que pour des nombres de Mach suffisamment petits, ce qui est le cas ici, ces termes peuvent être négligés. Dans le même ordre d'idées, nous ferons également l'hypothèse que les termes de sous mailles qui apparaissent dans l'équation pour la conservation de la concentration (second membre) et dans l'équation d'état seront aussi négligés. Il ne reste finalement que τ_{ij} découlant du filtrage des termes non-linéaires de l'équation de Navier-Stokes, que nous devons modéliser, car nous ne pouvons pas poser que: $\overline{\tilde{v}_i \tilde{v}_j} = \tilde{v}_i \tilde{v}_j$ sans quoi le problème serait résolu. La solution la plus courante à ce jour (1997) est donc de modéliser le tenseur τ_{ij} (Piomelli, 1994). Il est possible de décomposer le vecteur vitesse \vec{v} selon (en reprenant la notation originale pour dénoter la moyenne): $v_i = \bar{v}_i + v'_i$ où v'_i représente les fluctuations

et $\overline{v_i}$ est la valeur filtrée de la quantité de mouvement. En l'introduisant dans τ_{ij} on trouve (Ferziger et *al.*, 1996),

$$\tau_{ij} = \overline{\overline{v_i v_j}} - \overline{v_i} \overline{v_j} + \overline{\overline{v_i v'_j}} + \overline{v'_i \overline{v_j}} + \overline{v'_i v'_j}$$

Chaque terme de ce tenseur représente un sens physique bien précis.

Les deux premiers termes dits de Léonard (1974), expriment l'interaction entre deux échelles résolues. On les appelle aussi termes croisés. Ce sont les seuls termes que l'on peut calculer directement. Les troisième et quatrième termes expriment l'interaction entre les échelles résolues et les petites échelles. Ces termes correspondent principalement au transfert d'énergie des grandes échelles vers les petites, bien que le transfert inverse soit aussi possible. Le dernier terme met en évidence l'interaction entre deux tourbillons des petites échelles avec un tourbillon des grandes échelles. Il exprime le transfert d'énergie des petites échelles vers les grandes (rétrodiffusion). Idéalement il faudrait que chaque groupe de termes de ce tenseur soit modélisé, mais il s'avère aujourd'hui que l'on peut se faciliter la tâche en modélisant le tout, d'un coup (Ferziger, 1995). Remarquons encore que les grandes échelles transportent la majorité de l'énergie de l'écoulement, alors que l'énergie associée aux échelles de sous-maille, c'est-à-dire filtrée, ne représente qu'un petit pourcentage de cette énergie (Ferziger, 1995). L'intervention des petites échelles se fait par l'intermédiaire du terme de contraintes de sous-maille. La modélisation n'exige donc pas autant de méticulosité que dans le cas des RANS, où il est nécessaire de modéliser toutes les échelles. C'est un avantage non négligeable.

2.6.1 Modèle de Smagorinsky

Parmi les modèles disponibles aujourd'hui, le plus connu est sans doute celui dû à Smagorinsky (1963), qui a été inventé dans le cadre de recherches sur les prévisions météorologiques. Il s'agit ici d'un modèle basé sur la viscosité turbulente. L'idée dans ce type de modèle est que les tenseurs de Reynolds des sous

mailles ajoutent de la dissipation ainsi que du transport au système, de manière à mieux simuler le comportement dissipatif des petites échelles sur les grandes. On peut établir une relation de proportionnalité entre le tenseur de sous-maille, τ_{ij} , et le tenseur des déformations S_{ij} sous la forme suivante (Gonze,1994):

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3}\tau_{kk}\delta_{ij} = -\nu_t\left(\frac{\partial\bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\bar{v}_j}{\partial x_i}\right) = -2\nu_t\bar{S}_{ij} \quad (2.65)$$

La loi utilisée ici est très similaire à celle utilisée en RANS, de plus, elle s'inspire de la situation laminaire. Il existe plusieurs théories mathématiques qui aboutissent comme conclusion à ce résultat (Ferziger, 1995). Au lieu de les introduire dans la présente revue, nous allons plutôt fournir un argument intuitif et physique nous permettant de trouver une expression pour le coefficient de viscosité turbulente. Revenons à notre description de la turbulence. On se réduit pour un instant au cas isotrope, homogène et où le nombre de Reynolds est élevé (le cas le plus aisé à décrire à ce jour). Dans cette situation, les grandes échelles reçoivent l'énergie fournie par l'écoulement, alors qu'au niveau des plus petites échelles, on voit l'énergie se dissiper sous forme de frottement. Entre ces deux échelles, se situe une gamme où l'énergie n'est ni créée ni perdue, mais simplement transférée des grandes vers les petites échelles, c'est le domaine inertiel. Dans le domaine

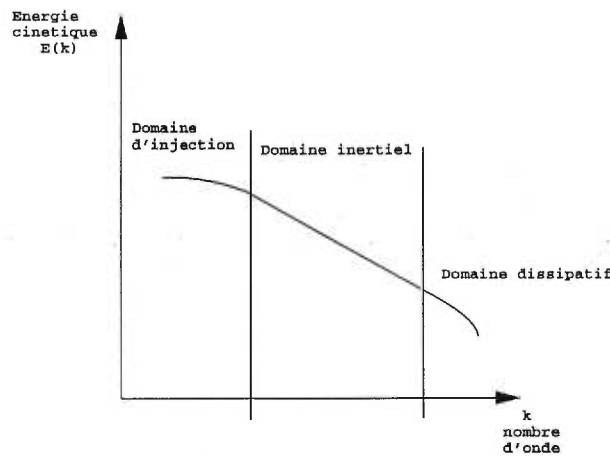


Figure 5. Spectre théorique de la turbulence isotrope à grand nombre de Reynolds.

inertiel il y a un "état d'équilibre" entre le taux de transfert d'énergie et le

taux de dissipation turbulente (Lesieur, 1987). Cette hypothèse d'équilibre peut s'exprimer aussi de la façon suivante. Les petits tourbillons ont des échelles de temps caractéristique bien plus petites que celles des grands tourbillons (Piomelli, 1994). On peut alors faire la supposition que ces petits tourbillons reviennent à leur situation d'équilibre plus rapidement quand on les perturbe. Ceci nous permet de simplifier l'équation de transport pour l'énergie cinétique de sous-maille (Tennekes et Lumley, 1972). Cette équation à la forme suivante (Piomelli, 1994):

$$\frac{\partial(q_{sgs}^2)}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{v_j} q_{sgs}^2)}{\partial x_j} = [\text{transport turbulent}] + [\text{diffusion de pression}] + [\text{diffusion visqueuse}] + [\text{diffusion de sous-maille}] - 2\tau_{ij}\overline{S}_{ij} - 2\epsilon$$

A l'équilibre tous les termes vont disparaître sauf les deux derniers. On aboutit alors à la relation:

$$-2\tau_{ij}\overline{S} = 2\epsilon$$

où ϵ est la dissipation d'énergie visqueuse due à la sous-maille.

En ce qui concerne l'équation (2.62), le terme qui correspond au transfert d'énergie cinétique est le terme advectif non-linéaire, $\partial_i(\frac{1}{2}\tilde{v}_j\tilde{v}_j\tilde{v}_i)$.

Sachant que ce sont les échelles les plus grandes qui fournissent le plus d'énergie, l'ordre de grandeur de ce terme est (Ferziger, 1995):

$$\epsilon \approx \frac{Q^3}{L}$$

où Q est l'échelle des vitesses des tourbillons les plus grands. L est l'échelle intégrale associée à ces vitesses. Si on se place à l'échelle en question, on peut représenter ϵ comme étant la dissipation d'énergie à cette échelle vers les plus petites échelles. Ce raisonnement peut encore s'appliquer aux échelles qui sont proches de la taille des plus grands tourbillons de la sous-maille (pour autant que celle-ci soit loin de l'échelle de dissipation physique).

On peut à nouveau écrire: $\epsilon \approx \frac{q^3}{\Delta}$ où q , comme avant, est l'échelle des vitesses correspondantes à Δ . Ayant ainsi posé que ϵ peut être vu comme une dissipation,

on peut la modéliser également comme une dissipation physique, soit de la forme:

$$\epsilon \approx \nu_t \frac{q^2}{\Delta^2}.$$

Maintenant, on peut égaliser, et on trouve: $\nu_t = Q\Delta^{4/3}L^{-1/3}$.

A ce point, on peut encore estimer Q comme: $Q \approx L(\overline{S_{ij}}\overline{S_{ij}}) = L|\overline{S}|$

Ce qui nous donne: $\nu_t = C_s\Delta^{4/3}L^{2/3}|\overline{S}|$. La présence du terme L rend son estimation difficile. On préfère dans ce cas faire appel à l'approximation suivante: $\Delta^{4/3}L^{2/3} \rightarrow \Delta^2$, d'où (Ferziger, 1995),

$$\nu_t = (C_s\Delta)^2|\overline{S}|$$

Il nous reste encore à calculer le facteur de proportionnalité C_s . Pour cela, il nous faut faire quelques simplifications. Tout d'abord répétons-le, on ne traite dans ce développement que la turbulence isotrope. On peut ainsi utiliser les spectres d'énergie de la loi de Kolmogorov $E(k) = C_K\epsilon^{2/3}k^{-5/3}$. Il est possible à partir de là, de déduire (Lilly, 1967) que le carré de la moyenne du tenseur des contraintes est donné par:

$$|\overline{S}|^2 = 2 \int_0^{k_c} k^2 E(k) dk \approx \frac{3}{2} C_K \epsilon^{2/3} k_c^4 \quad (2.66)$$

Signalons que nous avons utilisé le filtre de coupure ici, avec comme nombre d'onde seuil $k_c = \pi/\Delta$. De plus, Lilly (1967) a montré que la dissipation ϵ est reliée à la norme du tenseur de contrainte $|\overline{S}|$ par:

$$\epsilon = C_s |\overline{S}|^3 \Delta^2 \quad (2.67)$$

En combinant les équations (2.67) et (2.66) on trouve:

$$C_s = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{3C_K} \right)^{3/4}$$

Prenant pour la constante $C_K = 1.6$, on déduit pour $C_s = 0.165$. Cette valeur théorique semble bien correspondre avec les expériences qui ont été faites (Vreman *et al.*, 1995), pour autant que les hypothèses soient proches du type d'écoulement théorique étudié (isotropique, Reynolds assez grand pour que la zone inertielle soit suffisamment étendue, équilibre entre énergie de cascade et de dissipation) (Piomelli, 1994). Il faut cependant dire que le coefficient C_s n'a aucune raison

d'être universel, et peut même dépendre de la méthode numérique employée (Gonze, 1994). Il se peut d'ailleurs qu'il ne soit pas une constante, mais une fonction du Reynolds (Ferziger, 1995). On remarque aussi que dans des régions proches des bords, ce coefficient doit être réduit de façon significative. Il existe une formule empirique qui donne des résultats raisonnables (Piomelli, 1994):

$$C_s = C_{s0}(1 - e^{-y^+/A^+})^2$$

où A^+ est une constante dont la valeur est généralement 25. C_{s0} est la constante de Smagorinsky donnée ci-dessus. Enfin y^+ est la distance par rapport à la paroi, donnée en unités de viscosité. Bien que très utile, cette formule ne donne aucune justification physique du comportement asymptotique de la constante de Smagorinsky. Elle s'oppose de plus au caractère local que l'on cherche à donner au modèle de sous-maille utilisé, étant donné qu'elle s'exprime en fonction de la distance au mur y^+ . L'idée est donc d'inclure la variation du coefficient dans le modèle même. Enfin dans le cas d'écoulements stratifiés la constante de Smagorinsky devrait encore une fois être réduite, malgré le fait que la stratification n'affecte semble-t-il que les plus grandes échelles. Il faudrait donc que C_s soit fonction du nombre de Richardson (Ferziger, 1995). D'autres études ont montré que cette constante peut-être beaucoup plus petite pour des écoulements cisailés (Piomelli, 1994). Ajoutons que ce modèle ne décrit en rien le transfert d'énergie des petites échelles vers les grandes. Nous verrons plus loin dans quelle mesure cet effet physique contribue au comportement des grandes échelles.

Finalement, le tenseur des contraintes de sous-mailles que nous allons implémenter en prenant le filtre de Favre s'exprime comme:

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3}\tau_{kk}\delta_{ij} = -2\overline{\rho_s}(C_s\Delta)^2 |\tilde{S}| (\tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3}\tilde{S}_{kk}\delta_{ij}) \quad (2.68)$$

(La présence de ρ_s provient du filtre employé).

$$|\tilde{S}| = (2\tilde{S}_{ij}\tilde{S}_{ij})^{1/2}$$

et,

$$\tilde{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_i} \right)$$

Tel qu'il est introduit dans l'équation (2.61), le tenseur de sous-maille τ_{ij} s'ajoute à celui des contraintes, $\tilde{\sigma}_{ij}$, ce qui signifie que l'on ajoute principalement de la viscosité à l'écoulement moyen (étant donné que le modèle de Smagorinsky est un modèle de viscosité turbulente). On peut alors s'attendre à un effet de freinage et à une augmentation du coefficient de viscosité turbulente global.

A côté du modèle de Smagorinsky il existe bien d'autres modèles disponibles, chacun adapté à des situations physiques particulières. A la demande de l'industrie nous faisons ci-dessous une rapide revue de quatre modèles de sous-mailles qui représentent une alternative aux modèle de Smagorinsky. Seul le dernier d'entre eux sera également testé. Dans ce qui suit nous allons prendre $C_s = 0.165$.

2.6.2 Modèle de Smagorinsky anisotrope

Le modèle de Smagorinsky que nous avons présenté est valable pour des grilles dont les points sont distribués de façon isotrope. Dès lors que l'on veut utiliser une grille anisotrope, le modèle précédent demande quelques modifications. On observe par exemple que proche d'un mur, un écoulement turbulent devient très anisotrope. Scotti et *al.* (1993) en sont venus à la conclusion que la viscosité turbulente doit contenir un coefficient supplémentaire, f , qui doit dépendre du rapport d'aspect de la grille. Elle sera définie par:

$$\nu_t = (C_s \Delta f(a_1, a_2))^2 |\overline{S}| \quad (2.69)$$

L'échelle de longueur employée dans le cas anisotrope peut être définie en général par $\Delta = (\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3)^{1/3}$. Le calcul du coefficient f se fait de la manière suivante: On pose d'abord,

$$\Delta_{max} = \max(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3) \quad (2.70)$$

$$a_1 = \Delta_1 / \Delta_{max} \quad (2.71)$$

$$a_2 = \Delta_2 / \Delta_{max} \quad (2.72)$$

a_1 , et a_2 étant les rapports d'aspect dans les deux autres directions que celles correspondant à Δ_{max} . $f(a_1, a_2)$ s'exprime par la formule:

$$f(a_1, a_2) = (a_1 a_2)^{-1/3} [\mathbf{L}(\Delta) / L(\Delta, \Delta, \Delta)] \quad (2.73)$$

Le calcul de $\mathbf{L}(\Delta)$ n'est pas très aisé à faire. Dans le cas où la loi de Kolmogorov s'applique (nombre de Reynolds élevé et turbulence isotrope), on peut l'exprimer comme:

$$\mathbf{L}(\Delta) = \left(\frac{C_k}{2\pi} \int |\mathbf{F}(\mathbf{k})|^2 k^{-5/3} d\mathbf{k} \right)^{-3/4} \quad (2.74)$$

où $\mathbf{F}(\mathbf{k})$ est la fonction filtre. L'intégrale porte sur le spectre en énergie de l'écoulement. Selon le type d'écoulement auquel on a à faire, il faudra changer l'expression de l'intégrant. Il faut remarquer que le calcul de (2.74) prenant en compte le comportement en $k^{-5/3}$, n'est peut être pas adéquat dans le cas d'un écoulement stratifié. Pour savoir si le résultat de cette intégrale est utilisable dans notre cas, nous devrions vérifier comment se comportent les spectres de l'instabilité de Kelvin-Helmoltz en milieu stratifié lors des simulations numériques, nous pouvons alors décider s'il faudrait corriger ou conserver la forme donnée ci-dessus.

2.6.3 Modèle Dynamique de Germano

Ce type de modèle est plus considéré comme une procédure appliquée sur d'autres modèles (comme celui de Smagorinsky), qu'un modèle proprement dit (Ferziger, 1995). L'idée physique sous-jacente à ce modèle est de penser que le comportement des échelles de tourbillons qui se situent juste un peu en-dessus et en-dessous d'une certaine échelle de longueur Δ dans la zone intertielle, est très similaire. L'avantage de ce type de procédure est de pouvoir réajuster les paramètres caractéristiques du modèle utilisé (par exemple le coefficient C_s dans

le modèle de Smagorinsky) au fur et à mesure que la simulation avance. L'idée est la suivante. Au filtre que l'on applique aux équations de Navier-Stokes, on ajoute un autre filtre, que l'on nomme filtre test dont la largeur $\hat{\Delta}$ est supérieure à celle du filtre original, $\Delta < \hat{\Delta}$. Comme dans le cas de ce dernier, où le tenseur de Reynolds prend la forme $\tau_{ij} = \overline{v_i v_j} - \overline{v_i} \overline{v_j}$, on peut définir un autre ensemble de tenseurs de sous-maille associés au nouveau filtre, T_{ij} . Ces deux types de tenseurs sont reliés par le tenseur des contraintes turbulentes à grande échelle ζ_{ij} , qui représente la contribution des plus petites échelles résolues sur le tenseur de sous-maille (ou tenseur de Reynolds), selon:

$$\zeta_{ij} \equiv T_{ij} - \hat{\tau}_{ij} = \widehat{\overline{v_i v_j}} - \hat{v}_i \hat{v}_j \quad (2.75)$$

où $T_{ij} \equiv \widehat{\overline{v_i v_j}} - \hat{v}_i \hat{v}_j$. On peut le calculer ζ_{ij} directement à partir du champ des vitesses des grandes échelles.

C'est à ce point que l'on fait intervenir l'idée de similarité. On exprime le tenseur T_{ij} de façon analogue à τ_{ij} dans l'équation (2.65) c'est-à-dire (Piomelli, 1994):

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \tau_{kk} \delta_{ij} = -2C(\vec{r}, t) \Delta^2 | \overline{S} | \overline{S}_{ij} = -2C(\vec{r}, t) b_{ij} \quad (2.76)$$

$$T_{ij} - \frac{1}{3} T_{kk} \delta_{ij} = -2C(\vec{r}, t) \hat{\Delta}^2 | \hat{S} | \hat{S}_{ij} = -2C(\vec{r}, t) a_{ij} \quad (2.77)$$

On fait appel ici au modèle de Smagorinsky, mais d'autres modèles de viscosité turbulente font aussi l'affaire. En substituant (2.76) et (2.77) dans ζ_{ij} (2.75) on trouve:

$$\zeta_{ij} = \zeta_{ij} - \frac{1}{3} \zeta_{kk} \delta_{ij} = -2C a_{ij} + 2\widehat{C} b_{ij} \quad (2.78)$$

Cela représente un système de 6 équations indépendantes (à cause de la symétrie des tenseurs présents) à résoudre pour l'inconnue C , en chaque point de la grille. A ce point, il n'est pas possible de pouvoir calculer le coefficient $C(\vec{r}, t)$ directement (qui est une fonction des trois coordonnées de l'espace) car il figure sous l'opération filtrage test (deuxième terme du membre de droite de l'équation (2.78)). Si cependant on fait l'hypothèse qu'il ne varie que peu dans l'espace, on peut se permettre de le sortir de l'intégrale de filtrage (cette hypothèse n'est malheureusement

pas toujours vérifiée, il faut donc faire attention). Hormis C , tous les termes de l'équation (2.78) sont directement calculables à partir du champ des vitesses de la simulation aux grandes échelles. On a alors un vrai système d'équations algébriques. Une façon commune et aisée de calculer ce coefficient, est proposée par Lilly (1992) (référéncé par Piomelli, 1994), et utilise une méthode des moindres carrés. On contracte (2.78) avec $(a_{ij} - \hat{b}_{ij})$ et on trouve:

$$C = -\frac{1}{2} \frac{\langle \zeta_{kl}(a_{kl} - \hat{b}_{kl}) \rangle}{\langle (a_{mn} - \hat{b}_{mn})(a_{mn} - \hat{b}_{mn}) \rangle} \quad (2.79)$$

où $\langle \rangle$ représente ici la moyenne spatiale. Le modèle dynamique possède des propriétés qui sont très appréciées (Piomelli, 1994). Il n'est plus nécessaire d'amortir le coefficient C proche des murs de façon à obtenir le comportement asymptotique généralement escompté, comme il faut le faire pour le modèle de Smagorinsky par exemple. Pour des écoulements laminaires, la constante C est effectivement nulle, comme on le souhaite. Il remporte aussi du succès dans le cas d'écoulements cisailés. De plus, les valeurs que peut prendre C sont soit positives soit négatives, dans ce dernier cas, cela correspond au cas où l'on a un transfert inverse d'énergie des petites échelles vers les grandes (rétrodifusion), ce qui n'est pas le cas du modèle de Smagorinsky. Cependant certaines études ont montré que si la partie spatiale ou temporelle correspondant à des valeurs plus petites que zéro est trop dominante, on risque de d'aboutir à des instabilité numériques (Ferziger, 1995). Pour les inconvénients, on notera, comme nous l'avons mentionné plus haut, que le coefficient peut varier de manière non négligeable dans l'espace et dans le temps, ce qui peut rendre notre hypothèse $\widehat{C}\hat{b} = C\hat{b}$ incorrecte.

Pour terminer avec ce modèle, il faut remarquer que le coefficient C a été calculé à partir de la simulation des grandes échelles directement, sans faire appel à un quelconque test à priori de référence, sur une simulation DNS par exemple. De ce fait il peut être calculé à tous les pas de temps dans notre simulation. C'est ce qui en fait un modèle dynamique.

2.6.4 Modèle de Bardina

L'idée de ce modèle (Bardina, 1980) se base sur le fait que le transfert d'énergie entre les échelles résolues et celles de sous-mailles, provient en majeure partie de l'échange entre les tourbillons de tailles voisines de celle de l'échelle de coupure. On fait de plus l'hypothèse qu'il existe une grande similarité dans le comportement de ces deux échelles. Alors, par extrapolation on peut déduire une modélisation du tenseur de sous-maille à partir de l'information que l'on a sur les plus petites échelles résolues (juste un peu au-dessus de la coupure). L'utilisation d'un filtre test semble donc ici adéquate. Le tenseur à la forme suivante (Gonze, 1994):

$$\tau_{ij} = \widehat{\overline{v_i v_j}} - \overline{v_i v_j}$$

Un point intéressant ici réside dans le fait que τ_{ij} peut être directement modélisé, puisque seulement des produits de moyennes sont présents ici. Ses aptitudes ne sont cependant pas très bonnes si l'on se réfère aux calculs effectués par Gonze (1994).

2.6.5 Modèle auto-similaire.

Ce modèle est une variante de celui inventé par Bardina (1980), mais possède semble-t-il des aptitudes meilleures que lui (Gonze, 1994). Il s'exprime de la façon suivante:

$$\tau_{ij} = C(\widetilde{\overline{v_i v_j}} - \overline{v_i v_j})$$

où le "tilde" représente un filtre test.

Son avantage, comme le modèle de Bardina est que l'on peut directement le modéliser. Il est déduit de l'observation que l'interaction et les échanges d'énergie entre les échelles de tourbillons résolues et celles qui sont modélisées, se fait principalement au niveau des échelles de part et d'autre de la coupure Δ . De plus, le tenseur de contraintes se comporte de la même manière en-dessus et

en-dessous de la coupure, justifiant le nom "auto-similaire" qu'on lui a donné. Son inconvénient majeur est qu'il n'est pas dissipatif, contrairement au modèle de Smagorinsky. Cet inconvénient peut cependant être outre-passé simplement en le combinant avec d'autres modèles de type dissipatif. En ce qui concerne la constante C , on lui donne généralement la valeur de 1, ce que l'on déduit de principes d'invariance Galiléenne (Ferziger, 1995). Cependant, il est parfois intéressant d'introduire un peu de flexibilité dans ce type de modèle, et l'on préfère jouer sur la valeur de cette constante (Gonze, 1994).

Ce modèle possède d'autres qualités. Il est anisotrope et permet aussi le transfert d'énergie en retour des petites échelles vers les grandes. Enfin, il se comporte bien dans les cas où des contraintes extérieures sont présentes (comme un cisaillement par exemple).

CHAPITRE 3

Expérimentation numérique.

3.1 Analyse physique de l'instabilité de Kelvin-Helmoltz sur un écoulement compressible stratifié en densité.

La résolution du système d'équations se fait par une méthode numérique aux volumes finis d'ordre 4 en espace et d'ordre 2 en temps (cf. appendice). Rappelons les équations que nous résolvons:

$$\frac{P}{P_s} = \frac{\rho}{\rho_s} + \frac{T}{T_s} \quad (3.1)$$

$$e = \rho_s \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{T}{\gamma - 1} \right) + \rho \left(\frac{T_s}{\gamma - 1} + \frac{\gamma M^2}{Fr} z \right) \quad (3.2)$$

$$\partial_j(u_j) = 0 \quad (3.3)$$

$$\partial_t(u_j) + \partial_j \left(\frac{u_i u_j}{\rho_s} + \delta_{ij} P - \frac{1}{Re} \tau_{ij} \right) = - \frac{\gamma M^2}{Fr} \rho \hat{z} \delta_{i3} + F_j \quad (3.4)$$

$$\partial_t(e) + \partial_j((e + P)v_j - \frac{1}{Re Pr} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \partial_j(T) - \frac{1}{Re} v_k \tau_{ik}) = 0 \quad (3.5)$$

$$\partial_t(\rho_s c) + \partial_j(\rho_s v_j c - \frac{1}{Pe} \rho_s \partial_j c) = 0 \quad (3.6)$$

Les conditions aux limites sont périodiques selon les composantes x et y, et de type free-slip selon la composante z, en $z_0 = 0$ et $z_1 = 1$. Le forçage que l'on impose, $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(z)$ se caractérise par:

$$\begin{cases} F_x(z) = 5\rho_s(z) \tanh(16(z - 1/2)) \\ F_y(z) = 0 \\ F_z(z) = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Notre domaine d'étude est une boîte rectangulaire de rapport d'aspect $x \in [0, 2], y \in [0, 2], z \in [0, 1]$. La grille est de type rectangulaire cartésienne. La

résolution est fixée au début à $128 \times 128 \times 64$ points de grille. La simulation est faite en double précision (64 bits). L'écoulement se fait dans la direction x . On impose un cisaillement sur toute la longueur de la boîte (selon x). Afin de visualiser comment se comporte l'écoulement sur la diffusion d'un traceur, une distribution initiale gaussienne est lâchée autour de la couche $z=1/2$. Pour un nombre de Reynolds de $Re = 2500$, on fixe le pas de temps adimensionné à $dt = 5.0 \times 10^{-4}$. Nous ne pouvons pas trop excéder cette valeur à cause du critère de Courant car plus la grille est fine en résolution, plus il va falloir que la résolution en temps soit petite. Pour la résolution de l'équation de Poisson, on effectue 96 itérations pour converger. Le nombre de Peclet est infini, soit $Pe = 10^6$, de manière à ce que la diffusion de grille soit la plus réduite possible, et que nous puissions observer l'advection du colorant. Pour le déclenchement de l'instabilité, nous avons essayé d'imposer au début d'une simulation, une perturbation sous forme de petits rouleaux artificiels pour accélérer l'apparition de l'instabilité, mais le mieux est qu'elle se déclenche toute seule. Pour la résolution de grille que nous utilisons dans le cadre de cette expérience, la perturbation qui se développe provient principalement des erreurs numériques ainsi que de l'instabilité associées au schéma spatial et temporel. La stratification est égale à 1 et la force de cisaillement à 10. Le nombre de Prantl est égal à 1.

Nous présentons tout d'abord ici quelques images de coupes verticales de plusieurs grandeurs associées à notre simulation. Elle sont prises au temps $t = 1.0$ (adimensionné). Le profil de la force (de forme tangente hyperbolique), fait que l'écoulement moyen va de gauche à droite dans la partie supérieure de l'image et dans le sens contraire pour la partie inférieure. Les tons clairs correspondent aux grandes valeurs alors que les tons foncés correspondent aux petites valeurs des grandeurs associées. Bien que notre grille soit discrète, le logiciel de visualisation IDL du département de physique permet de faire des interpolations de façon à ce que les champs apparaissent en continu. Précisons encore que les champs que nous présentons ici, sont les variations par rapport aux profils moyens initialement

calculés, et non les valeurs totales.

a. Les rouleaux.

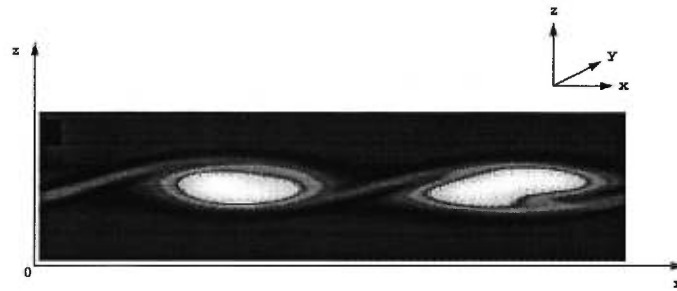


Figure 6. Coupe verticale de la concentration ($128 \times 128 \times 64$).

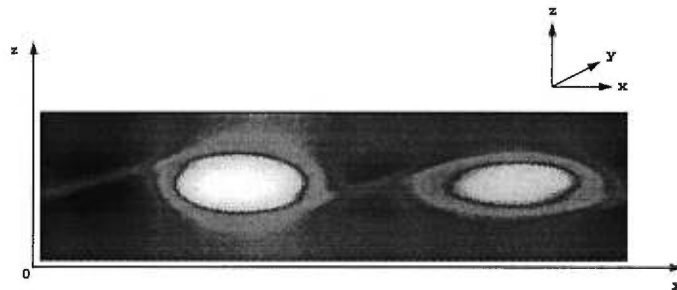


Figure 7. Coupe verticale de la densité ($128 \times 128 \times 64$).

L'instabilité de Kelvin-Helmoltz (dans un plan xz) est bien visible sur la figure 6 (concentration de traceur) ainsi que sur la figure 7 (densité), où l'on voit apparaître clairement les deux rouleaux autour de l'interface. Le nombre de rouleaux est lié au nombre d'onde de l'instabilité et donc au rapport d'aspect de la boîte. Plus on se rapproche des centres des rouleaux, plus la valeur de la concentration et de la densité tend à augmenter. Dès que l'on s'éloigne du rouleau, ces deux quantités chutent rapidement, ce que l'on voit de façon plus claire sur les courbes de la distribution verticale de concentration (figure 14). Pour que les rouleaux n'explosent pas sous la présence des forces centrifuges dûes à la rotation, il faut que ces forces soient compensées par des forces de pression dirigées vers

l'intérieur des rouleaux. Il est donc nécessaire que la pression en dehors des vortex soit supérieure à celle à l'intérieur. C'est bien ce que l'on trouve sur la figure 9, où les parties foncées, correspondant aux faibles pressions sont situées aux mêmes endroits que les rouleaux sur la figure 6. Ailleurs, la pression est effectivement plus élevée. On observe également que la concentration s'accumule là où la pression est la plus basse. Puisque la pression est plus petite dans le centre du rouleau, c'est dans cette direction que l'advection se fait de manière préférentielle. En ramenant les "particules" de traceur vers le centre du vortex, la conservation du moment cinétique implique que la vitesse de rotation proche du milieu du rouleau va augmenter, ce qui va conduire à une augmentation de la force centrifuge locale, qui nécessite que la pression baisse afin de garder le rouleau stable. Lorsque le temps avance, la tendance de la pression au centre du vortex va baisser, alors que la vitesse va augmenter jusqu'à l'apparition de la stationnarité. On le confirme sur les figures 12 et 13 de l'évolution de la pression et de la vitesse verticale moyennée au voisinage du centre des deux vortex (la vitesse verticale moyennée est calculée en prenant la moyenne sur un plan horizontal (xy) en $z = 1/2$ de $v_z(x, y, 1/2)$ à un temps donné). Le palier que l'on voit au début des deux courbes montre que l'instabilité n'a pas encore démarré. La composante transverse de la distribution de vorticité, ω_y est montrée à la figure 11. Les zones de forte vorticité sont situées là où se trouvent les deux rouleaux.

Une autre interprétation de cet effet de blocage et de piégeage de la concentration dans les tubes de vorticité utilise la conservation de la vorticité potentielle (Richard, 1996; Vincent et *al.*, 1997; Pedlosky, 1979).

b. La température.

Elle se comporte comme la pression. Lorsque la pression est faible, la température l'est aussi et vice-versa. En effet, notre gaz est un polytrophe sous l'approximation adiabatique, et donc une chute de pression va s'accompagner d'une baisse de température, comme on peut bien le voir sur les figures 8 et 9.

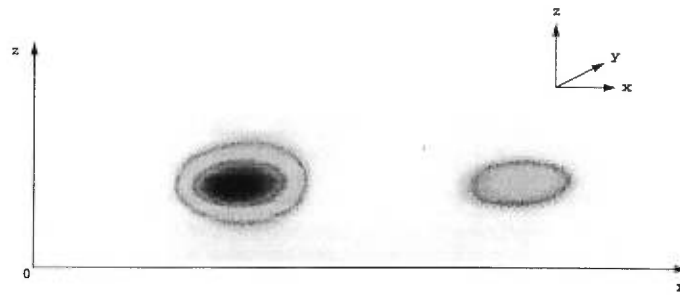


Figure 8. Coupe verticale de la température ($128 \times 128 \times 64$).

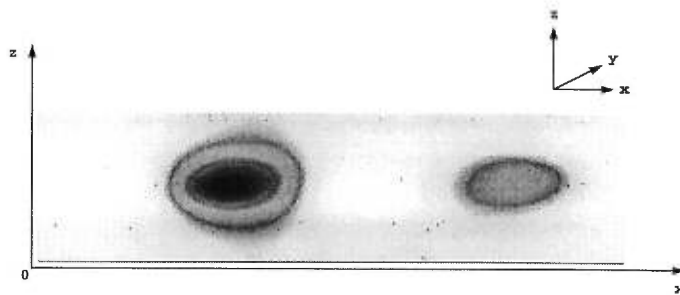


Figure 9. Coupe verticale de la pression ($128 \times 128 \times 64$).

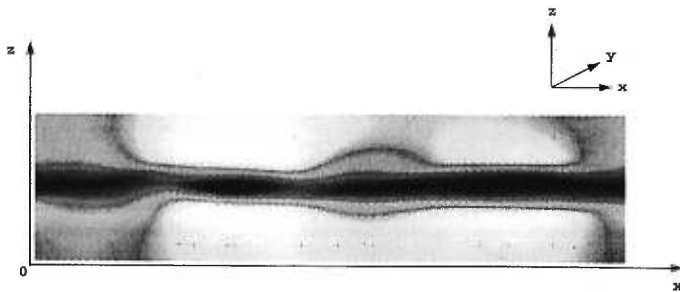


Figure 10. Coupe verticale de l'énergie cinétique ($128 \times 128 \times 64$).



Figure 11. Coupe verticale de la vorticité (128 × 128 × 64).

c. L'énergie cinétique.

Elle est représentée sur la figure 10. On peut voir que les parties où elle est la plus petite sont celles qui se situent à l'interface, tandis qu'elle est maximale de chaque côté de celle-ci. Cela est dû au profil en tangente hyperbolique du forçage extérieur que l'on impose à l'écoulement et qui rend l'énergie très petite à l'interface. Les halos clairs qui apparaissent autour des centres des vortex principaux, montrent que l'énergie cinétique est plus élevée à l'intérieur des rouleaux que loin de ceux-ci. L'énergie cinétique fournie par l'écoulement, semble se concentrer et s'emmagasiner en partie à l'intérieur, ralentissant d'autant l'écoulement moyen.

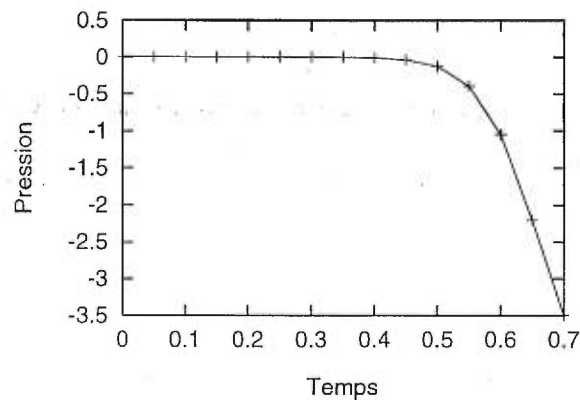


Figure 12. Evolution de la pression en fonction du temps au centre du Vortex.

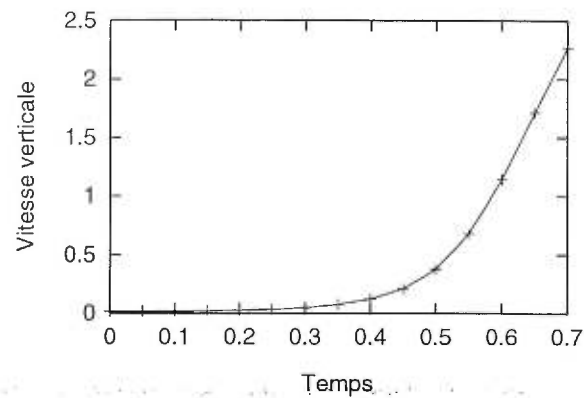


Figure 13. Evolution de la vitesse verticale au centre du Vortex.

La figure 14 présente le profil vertical de la distribution moyenne, $\langle c \rangle (z)$, de la concentration. Le symbole $\langle \rangle$ signifie ici que nous prenons la moyenne (horizontale) selon un plan xy pour une valeur de la hauteur z donnée. Les

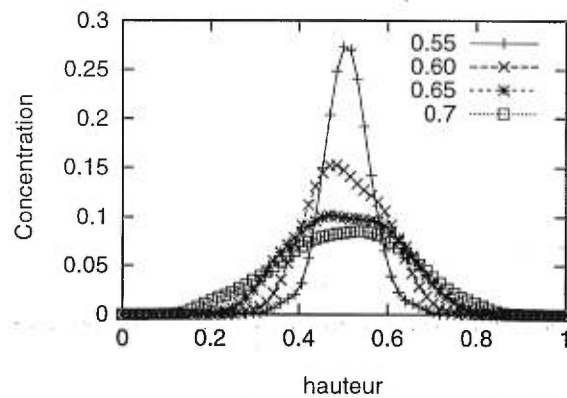


Figure 14. Distribution moyenne verticale, $\langle c \rangle (z)$, de la concentration.

différentes courbes correspondent à divers instants de la simulation. A l'instant initial, la concentration suit une loi gaussienne autour de l'interface, avec son maximum au centre. Au fur et à mesure que le temps avance, la gaussienne tend à s'aplatir et à s'étaler en largeur. On remarque aussi que le maximum de la

courbe ne descend pas jusqu'à zéro mais qu'il a tendance à s'accumuler à une hauteur de $z = 0.07$ à partir du temps $t = 0.65$. De même, la concentration ne s'étale pas sur toute la hauteur z de la boîte mais semble rester bloquée entre $z = 0.25$ et $z = 0.75$. On observe aussi qu'avec le temps la courbe devient asymétrique.

Ces courbes correspondent successivement à la formation des deux rouleaux que l'on voit sur la figure 6. En se formant, le rouleau va emprisonner les "particules" de traceur, d'où cet effet d'accumulation vers 0.07. On incombe le caractère asymétrique de la concentration à la stratification du milieu, plus dense en bas qu'en haut (voir figure 2). La figure 15 nous donne les courbes pour différents temps, du flux moyen d'advection verticale $\langle \rho v_z c \rangle (z)$ de la concentration. Au temps $t = 0$, le flux est proche de zéro, l'instabilité ne s'étant pas encore manifestée. Dès que celle-ci se déclenche, on voit la forme en "dos de chameau" apparaitre progressivement de part et d'autre de l'interface (ceci n'est pas montré sur la figure). Le flux vertical $\langle \rho v_z c \rangle (z)$ est positif au-dessus de l'interface et négatif en-dessous de l'interface. Ceci veut dire que le traceur est advecté à la fois vers la haut pour $z > 0.5$ et vers le bas pour $z < 0.5$. Cela correspond à l'amorce des deux vagues en-dessus et en-dessous de l'interface qui vont donner lieu au rouleau final. Après le temps 0.5, l'advection atteint un maximum. Alors les maxima de flux décroissent, signifiant que la vague a commencé à déferler. La figure 17, montre l'évolution du maximum absolu du flux moyen d'advection verticale, $\langle \rho v_z c \rangle (z)$, de la concentration. A la fin de la simulation ($t=1$) l'amplitude atteint une valeur dix fois inférieure au maximum atteint au temps $t = 0.5$. Le rouleau est alors définitivement formé et on atteint la quasi-stationnarité. Le traceur est à ce moment-là complètement emprisonné dans les rouleaux. A cause de la stratification, la densité moyenne n'est pas homogène sur le domaine, c'est principalement elle qui provoque la perte de symétrie évoquée ci-dessus, mais cet effet n'apparait de façon nette que pour les temps avancés. La figure 16 montre le flux moyen de diffusion verticale $\langle \rho_s \partial_z c \rangle (z)$. Les valeurs atteintes sont

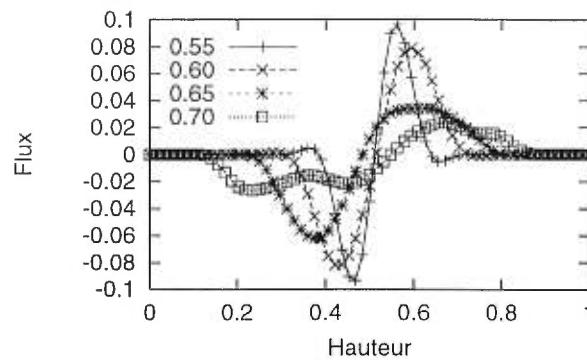


Figure 15. Flux moyen d'advection verticale, $\langle \rho v_z c \rangle (z)$, de la concentration.

beaucoup plus petites que celles du flux moyen d'advection verticale, $\langle \rho v_z c \rangle (z)$, étant donné que le Peclet est infini ($Pe = 10^6$). On retrouve la même forme de courbe que pour l'advection, mais le signe est opposé, c'est-à-dire que le flux est positif pour les $z < 0.5$ et négatifs pour $z > 0.5$, signifiant que la diffusion se dirige vers le centre du vortex. Son effet est cependant négligeable dans cette simulation sur le comportement de l'instabilité. La figure 19 donne l'évolution dans le temps

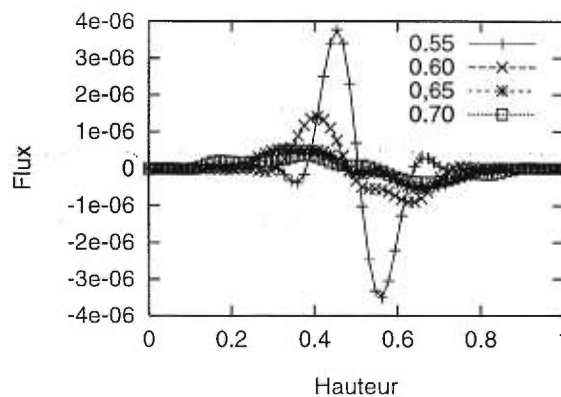


Figure 16. Flux moyen de la diffusion verticale, $\langle \rho_s \partial_z c \rangle (z)$, de la concentration.

de l'anisotropie. Les vitesses sont initialement essentiellement horizontales, selon

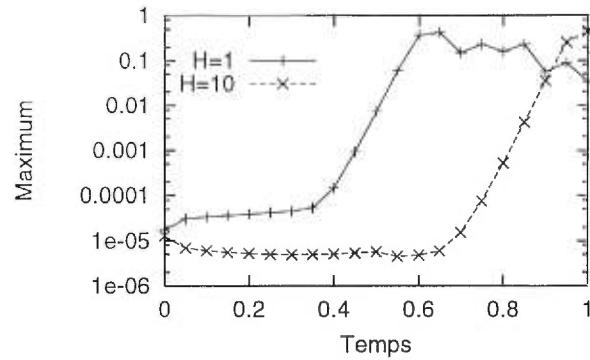


Figure 17. Evolution du maximum du flux moyen d'advection verticale, $\langle \rho v_z c \rangle (z)$, pour $H = 1$ et $H = 10$.

la direction du forçage, ce qui explique la forte valeur de l'anisotropie au début de la simulation. Cette valeur n'est pas infinie à cause des erreurs numériques. L'anisotropie va rapidement décroître, ce qui est le signe que l'instabilité est amorcée, puisqu'alors la vitesse verticale moyenne augmente par rapport à la vitesse moyenne horizontale. On donne à la figure 18 l'évolution du nombre

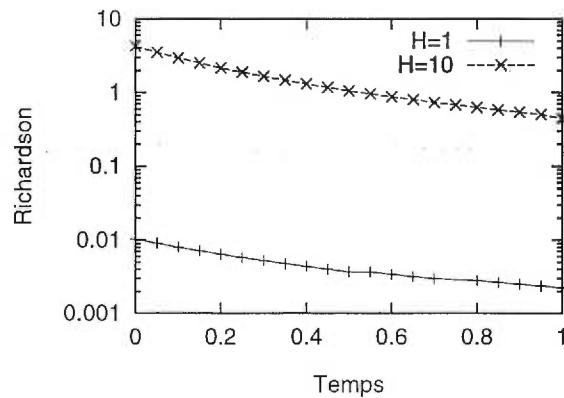


Figure 18. Evolution du nombre de Richardson, pour $H=1$ et $H=10$.

de Richardson. Il décroît de façon monotone tout au long de la simulation. Au

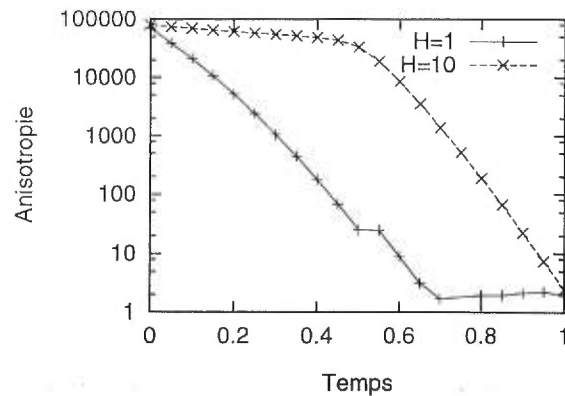


Figure 19. Evolution de l'anisotropie, pour $H=1$ et $H=10$.

moment où l'instabilité se déclenche, (au temps $t = 0.4$, $H=1$), il est de l'ordre de 0.0045. Le domaine de stabilité se situe donc pour les valeurs du nombre de Richardson telles que $Ri \geq 0.0045$, ce qui est beaucoup plus petit que la valeur 0.25 proposée dans le cas incompressible (Drazin et Reid, 1981). Il est possible que ceci soit dû à la diffusion de la grille. Pour en être certain, il faudrait réaliser des études avec des grilles de plus en plus fines et contrôler si cette valeur varie de manière significative, ou si elle reste stable. Astruc (1993) a montré que l'instabilité est retardée, voire même supprimée si la résolution est insuffisante. Si ce n'est pas un effet de grille, il faut déduire de cette observation que le cas compressible stratifié rend un écoulement cisailé plus stable en inhibant toute perturbation dont l'intensité est plus petite qu'un certain seuil défini par le Richardson critique (Harindra, 1991). La contribution de la compressibilité dans cette différence peut s'expliquer par le fait qu'une partie de l'énergie fournie par le cisaillement est absorbée par le fluide (au niveau de l'interface) sous l'effet de la compression adiabatique locale (ainsi que, dans une moindre mesure, sous forme de dissipation visqueuse) et est emmagasinée sous forme d'énergie potentielle, et ce jusqu'à un certain seuil (un peu à la manière d'un ressort que l'on comprime). Une fois ce seuil dépassé, c'est sous forme d'énergie potentielle de gravitation

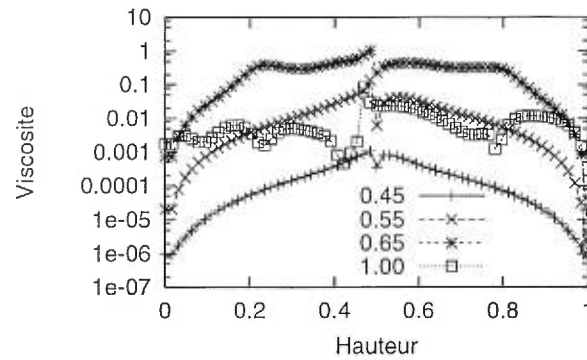


Figure 20. Profil de viscosité turbulente $\nu_T(z)$ ($H=1$).

qu'elle se transforme. Pour atteindre et dépasser ce seuil, le cisaillement doit fournir d'autant plus d'énergie cinétique, raison pour laquelle le nombre de Richardson est si réduit par rapport au cas incompressible qui, lui, transforme tout de suite l'énergie cinétique en potentielle. On remarque sur la figure 20 le comportement de la viscosité turbulente en fonction de la hauteur ($H=1$). Chaque courbe est prise à un instant différent. Pour toutes les courbes, en $z = 0.5$, $\nu_T(z)$ a une valeur indéterminée car le gradient vertical de concentration s'annule. L'aspect asymétrique de ces courbes provient principalement de la stratification en densité du milieu. Globalement on voit que $\nu_T(z)$ est plus grand au-dessus de l'interface qu'en-dessous. Une fois que l'instabilité est déclenchée, elle va progressivement donner lieu à un comportement turbulent pour lequel l'écoulement va créer des tourbillons de différentes échelles. Ces échelles vont absorber une partie de l'énergie de la force de cisaillement selon le spectre d'énergie de la figure 22. On peut penser qu'il y a une sorte de régime stationnaire issu de l'équilibre entre, d'un côté l'énergie de l'écoulement moyen, et de l'autre, l'énergie contenue dans les tourbillons. En fait, ces tourbillons agissent comme un frein contre l'écoulement moyen, et ceci peut être représenté justement par le coefficient de viscosité turbulente ν_T . La figure 21 donne l'évolution du facteur de viscosité turbulente moyen, que

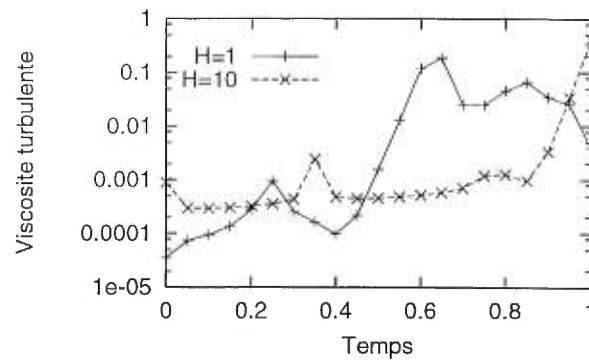


Figure 21. Evolution de la viscosité turbulente moyenne ν_{Tm} .

nous noterons ν_{Tm} . Il se calcule en prenant la moyenne des valeurs du profil de viscosité turbulente (figure 20) entre $z = 0.2$ et $z = 0.8$ (en évitant la singularité en $z = 1/2$), à un temps donné. Initialement ν_{Tm} est très petite, de l'ordre de 10^{-3} , ce qui est normal car l'écoulement est encore laminaire. Dès qu'une perturbation suffisamment grande déstabilise l'écoulement, l'interface commence à onduler fortement. Cela se manifeste sur la figure 21 par un premier pic, relativement petit. La face descendante du pic provient d'une phase de latence. L'instabilité continue ensuite à s'amplifier et amorce la vague qui va donner lieu au rouleau final. ν_{Tm} augmente alors de façon brutale sur plusieurs ordres de grandeurs. La pente abrupte qui correspond à l'instabilité en fait un moyen efficace pour déterminer précisément le moment où celle-ci va surgir. On remarque à la fin de la simulation que l'on atteint un palier ($H=1$). Celui-ci correspond à la formation finale du rouleau. A ce moment l'énergie cinétique issue du cisaillement est transformée de manière constante en moment cinétique. Sur la figure 22, nous montrons le spectre de l'énergie cinétique. De façon générale, on remarque que le spectre ne prend en compte qu'un petit nombre de modes, ceci étant normal en regard de la résolution prise. Puisque nous n'avons poussé le nombre de Reynolds basé sur la hauteur de la couche de fluide que jusqu'à 2500, cela représente à

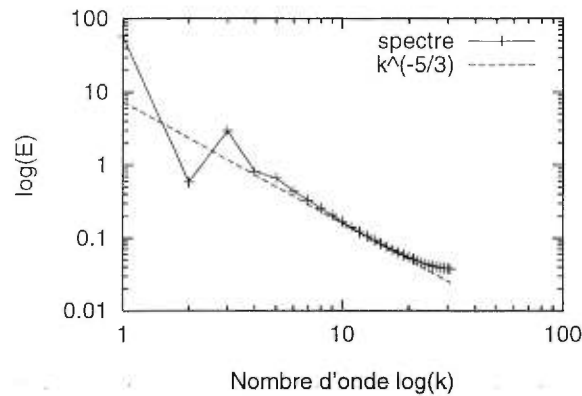


Figure 22. Spectre de l'énergie cinétique.

peine un régime de transition vers la turbulence (Gonze, 1994). Il n'en reste pas moins que nous pouvons tirer quelques idées génériques. Ainsi on dénote dans la gamme des nombres d'ondes élevés, un comportement de type inertiel $k^{-5/3}$ comme on le sait de la turbulence isotrope tridimensionnelle (Kolmogorov, 1941). Cette gamme dans le cas présent correspond aux petites échelles de tourbillons, c'est-à-dire celles que nous voulons justement modéliser avec des sous-maillages. On en déduit donc que les considérations physiques que nous avons développées dans le chapitre théorique, où nous avons fait l'hypothèse que nous sommes dans le cas isotrope et homogène, sont encore passablement valables dans le cas d'un écoulement anisotrope sans parois et provenant d'un cisaillement, pour permettre d'être appliquées dans le cadre de la modélisation des sous-maillages, même si il faut admettre que nous sommes loin d'avoir une zone inertielle suffisamment développée (au moins une décade). Au niveau numérique, on voit aussi que la queue du spectre présente une légère remontée d'énergie, ce qui ne devrait pas être le cas si l'on se réfère aux spectres obtenus expérimentalement (Saddoughi *et al.*, 1994) et pour lesquels on n'a plutôt une forme de décroissance en loi de puissance exponentielle (Tennekes et Lumley, 1972). On impute cet effet à la simulation numérique qui a tendance à accumuler l'énergie aux petites échelles. Le schéma

numérique des volumes finis, atténue cet inconvénient en dissipant plus l'énergie aux plus petites échelles (Hirsch, 1988). En ce sens, il constitue déjà à ce titre une première approche vers un modèle de sous-maille que nous qualifierons de "bon marché". C'est une caractéristique que d'autres schémas ne possèdent pas. Par exemple la méthode spectrale possède l'inconvénient majeur d'accumuler toute l'énergie des petites échelles si la résolution n'est pas assez poussée. Cela est analogue à un ensemble d'équilibre absolu (Lesieur, 1987) qui fait "exploser" la simulation. Les modèles de viscosité turbulente comme celui de Smagorinsky sont conçus pour dissiper l'énergie aux petites échelles et devraient théoriquement résoudre ce problème.

3.1.1 Influence de la stratification sur le développement de l'instabilité.

Les remarques faites jusqu'à présent expliquent le comportement physique de l'instabilité de Kelvin-Helmoltz. Cependant pour mieux comprendre dans quelle mesure l'effet de la stratification influence l'écoulement, il nous faut comparer notre simulation de référence avec d'autres simulations pour lesquelles nous gardons les mêmes paramètres qu'auparavant, mais où nous faisons varier la valeur de la stratification, de $H=1$ à $H=10$. Les deux cas ne provoquent pas l'instabilité au même moment. Pour $H=1$, elle commence à se manifester en $t=0.50$, alors que pour $H=10$, c'est en $t=0.90$ (figure 21). La courbe à faible stratification amorce une montée avant celle à plus forte stratification. De plus, une fois que l'instabilité a commencé à se développer, on voit que, de manière globale, la viscosité turbulente moyenne, ν_{Tm} , pour $H=10$ monte plus haut (env. 0.5, et elle montait encore à la fin de la simulation) que celle à $H=1$ (env. 0.25, au maximum). Le développement de l'instabilité de Kelvin-Helmoltz est freinée de manière plus prononcée quand la stratification augmente. Ce résultat est également confirmé par l'évolution de l'anisotropie (figure 19). Sa valeur en tout temps est bien supérieure pour $H=10$ que pour $H=1$, étant donné que la stratification veut

confiner le mouvement des particules de fluide dans la direction horizontale. On observe aussi comme pour le coefficient de viscosité turbulente, qu'il y a bien un effet de retard, puisque la courbe pour $H=1$ chute avant celle pour $H=10$. Ce retard peut s'expliquer de la manière suivante. Le forçage est fixé de façon constante tout au long de la simulation, et est le même pour les deux cas. L'accélération du fluide, $\vec{a} = \vec{F}/\rho$, serait donc plus grande là où la densité est plus petite. La densité étant plus grande en bas qu'en haut de l'interface, la vitesse du fluide va être supérieure en haut. Le seuil de destabilisation de l'écoulement dépendant de la différence entre les vitesses relatives des deux couches de fluide (eq. 2.8), on déduit que pour une plus grande hauteur d'échelle, le mécanisme se mettra en marche plus tard, puisque les différences de densités sont alors plus prononcées ($H=10$) et que l'accélération de la couche inférieure est plus petite. On voit sur les courbes d'évolution du Richardson (figure 18), que la forme des courbes ne change pas mais que par contre les valeurs deviennent globalement bien plus élevées pour $H=10$ que pour $H=1$. Ceci est normal car l'énergie potentielle est comparativement plus élevée lorsque la stratification augmente par rapport à l'énergie cinétique associée au cisaillement. Pour une grande stratification ($H=10$), le Richardson critique pour lequel l'instabilité se développe est estimé à $Ri_c = 0.7$, alors que pour $H=1$ elle était de $Ri_c = 0.0045$.

3.1.2 Validation des résultats obtenus numériquement: Comparaison avec des simulations de résolution plus basse.

Nous avons effectué des simulations en reprenant exactement les mêmes paramètres et rapports d'aspect que la simulation en $128 \times 128 \times 64$ et $H=1$, mais cette fois en prenant des grilles de $(64 \times 64 \times 32)$, $(32 \times 32 \times 32)$ et $(32 \times 32 \times 16)$ points. Pour la simulation $(32 \times 32 \times 32)$, nous avons pris le même rapport d'aspect que celui de la simulation de référence en $128 \times 128 \times 64$ soit $(2,2,1)$. La distribution de concentration pour la simulation en 64^3 (figure 23) s'étale plus en fonction de

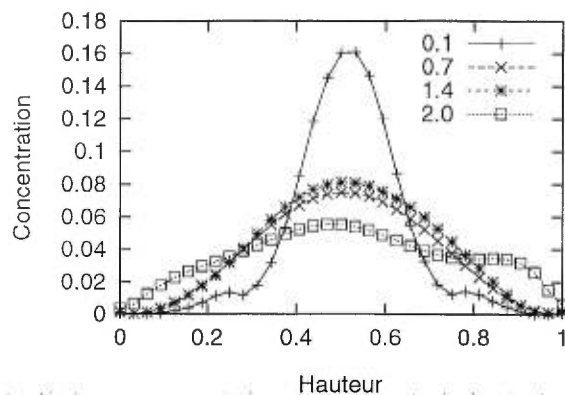


Figure 23. Distribution verticale de la concentration.

z , alors qu'en 128^3 elle restait localisée proche de l'interface. On impute cet étalement à la diffusion numérique de la grille. Plus la résolution est basse, plus cet effet devient prépondérant. La raison pourquoi cela apparaît vient du fait que lorsque l'on discrétise nos équations jusqu'à un certain ordre de précision (quatre dans notre cas), il apparaît de manière implicite des termes (comme des hyper-laplacien) provenant d'ordres supérieurs dont la forme est semblable à ceux que l'on trouve par exemple dans l'équation de diffusion moléculaire. On peut bien sûr trouver bien d'autres formes que celle-ci. L'effet de ces termes est qu'ils se manifestent sous la forme d'un phénomène physique supplémentaire à ceux qui sont modélisés par les équations analytiques initiales. C'est la raison pour laquelle des tests à plusieurs résolutions sont nécessaires. Si l'on veut connaître la forme analytique des termes d'erreurs dus au schéma numérique, on doit faire le développement en série de Taylor pour toutes les variables de tous les opérateurs qui apparaissent dans les équations et ensuite reporter les expressions dans les équations discrétisées, mais cette tâche va bien au-delà du cadre de cette étude. D'autres techniques sur l'estimation d'erreur existent, (voir par exemple Zhang, 1996). La diffusion de grille ne peut pas être réduite de manière physique, comme dans notre cas en augmentant le nombre de Peclet jusqu'à 10^6 . Elle ne peut

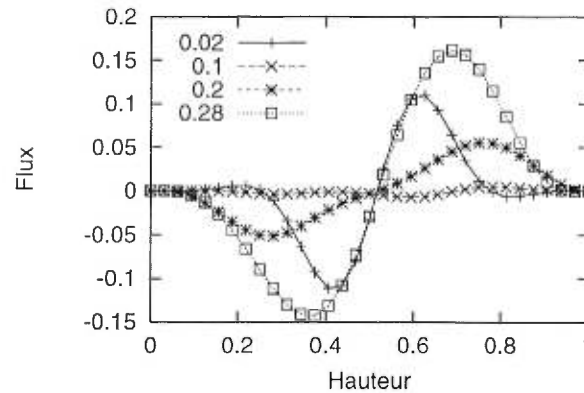


Figure 24. Flux advectif vertical moyen de la concentration pour une résolution de $(64 \times 64 \times 32)$ points de grille.

être détruite qu'en changeant le schéma numérique (par exemple en ajoutant des termes anti-diffusion) ou en augmentant la résolution. Lorsque la résolution est de $(32 \times 32 \times 32)$ points de grille l'instabilité se déclenche après plus de 2000 pas de temps alors que pour celle en $(128 \times 128 \times 64)$ nous avons l'apparition des rouleaux dès 1000 pas. Il semble ainsi que plus la grille est de petite résolution, plus l'instabilité est retardée. Pas seulement l'effet de retard est influencé par la résolution, on s'aperçoit également que l'intensité avec laquelle l'instabilité se développe est plus petite dans les cas $(32 \times 32 \times 32)$ que pour $(128 \times 128 \times 64)$. Une autre simulation faite cette fois-ci en $(32 \times 32 \times 16)$ points de résolution avec une condition initiale identique n'a même donné naissance à aucune instabilités après 7000 pas de temps, ce qui nous laisse penser que la grille peut aussi inhiber l'apparition d'une instabilité si la résolution est trop petite. Un effet similaire de retard de l'instabilité par manque de résolution est également observé pour la couche de mélange compressible (mais non anélastique) (Astruc, 1993).

3.1.3 Simulation des grandes échelles, modèles de Smagorinsky et auto-similaire.

Lorsque l'on effectue une simulation en LES on veut pouvoir la comparer si possible avec des données expérimentales obtenues *in vivo* pour un certain type d'écoulement. C'est ce que l'on appelle dans ce cas un test *à posteriori*. La difficulté de ce genre de démarche est que nous devons simuler l'écoulement en question dans des conditions exactement identiques à celles de l'expérience proprement dite. C'est une tâche très difficile à entreprendre. La seconde possibilité, beaucoup plus facile à effectuer, est celle du test dit *à priori*. Elle consiste à prendre une simulation directe, à haute résolution, que nous considérons comme notre référence, et de la comparer avec une simulation en LES en prenant le même ensemble de paramètres. On peut alors adapter les constantes du modèle utilisé de façon à être le plus fidèle à la simulation de référence. Pour ce faire, on filtre le champ de quantité de mouvement \vec{u} issu de la DNS ($128 \times 128 \times 64$). Dès lors, nous pouvons calculer le tenseur de sous-mailles $\tau_{ij} = \overline{v_i v_j} - \overline{v_i} \overline{v_j}$ "exacte", en chaque point de la grille et le comparer avec les mêmes valeurs du tenseur de sous-maille que nous avons obtenues à partir notre modèle LES. On peut alors donner une estimation des constantes qui s'y réfèrent, et les ajuster au mieux. Mathématiquement, la comparaison se fait en calculant la fonction de corrélation entre les deux grandeurs obtenues selon:

$$Corr = \frac{\langle a b \rangle}{(\langle a^2 \rangle \langle b^2 \rangle)^{\frac{1}{2}}}$$

où a et b sont les valeurs des grandeurs obtenues (soit τ_{ij} pour i et j fixés) respectivement en LES et en DNS en un point et un temps donné. La moyenne $\langle \rangle$ utilisée ici est la moyenne arithmétique prise sur tous les points du parallélépipède rectangle de dimension ($16 \times 21 \times 23$) entourant le rouleau de Kelvin-Helmoltz et centré en son milieu. Plus $Corr$ se rapproche de l'unité, plus la corrélation sera meilleure et donc on pourra considérer notre modèle comme étant bon. Dans notre cas, au lieu de calculer la corrélation pour τ_{ij} , nous prendrons plutôt la

composante z de la divergence du tenseur, soit $\partial_i(\tau_{iz})$.

En ce qui concerne la fonction filtre proprement dite, on choisit la suivante:

$$H(\xi - \mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta^3}, & \text{si } -\Delta/2 \leq (\xi_i - x_i) \leq \Delta/2; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.8)$$

où Δ dénote la largeur de filtre.

Bien sur, il va falloir discrétiser le filtrage. Nous avons procédé de la manière suivante. À partir du champ issu de la simulation de référence sur les points de grille, nous calculons chacun des termes du tenseur de sous-maille τ_{ij} en utilisant la même moyenne que celle prise dans la méthode des volumes finis pour effectuer le passage du champ ponctuel au champ moyenné (cf. équations (A.8-A.10)). et en prenant la largeur du filtre comme étant celle du pas de la grille.

Une fois le champs τ_{ij} obtenu, nous choisissons un point sur quatre dans les directions x et y , et un point sur deux selon z (afin de préserver le rapport d'aspect) afin de nous ramener à une grille de $(32 \times 32 \times 32)$. Ceci effectué, nous comparons avec le tenseur de sous-maille calculé dans la simulation LES en $(32 \times 32 \times 32)$.

Afin que la démarche soit correcte du point de vue expérimental, nous devons partir pour les deux simulations, en $(128 \times 128 \times 64)$ et en $(32 \times 32 \times 32)$, de même conditions initiales et prendre exactement les mêmes paramètres physiques. Pour ce faire, nous prenons simplement une condition initiale de la simulation de référence et nous la réduisons à la taille de la grille $(32 \times 32 \times 32)$. Le modèle auto-similaire demande un second filtrage. Le filtre test pris en chaque cellule est donné par la moyenne arithmétique sur les 27 cellules voisines. La comparaison se fait après 1000 pas de temps à $dt = 5.0 \times 10^{-4}$. Le Reynolds est de 2500. Nous ne pouvons pas prendre un coefficient de Reynolds plus grand ici car il nous faut faire un choix entre, d'un côté résoudre toutes les échelles de tourbillons, y compris celles de dissipation, mais en gardant un Reynolds petit, correspondant à peine à un régime de transition vers la turbulence, et faire monter le Reynolds pour être plus proche d'un domaine turbulent et en même temps perdre l'information sur les

plus petites échelles, ce que nous ne voulons pas puisque c'est justement elles que nous voulons comparer avec les simulations LES en $(32 \times 32 \times 32)$ points. On ne sait pas, dans ce cas, comment le modèle de sous-maille, initialement prévu pour des nombres de Reynolds élevés, se comporte. Le temps initial de la simulation a été choisi juste un peu avant que l'instabilité ne se développe.

En lançant une première simulation, on s'aperçoit qu'après 1000 pas de temps ($dt = 5.0 \times 10^{-4}$), le comportement de la couche de mélange en $(32 \times 32 \times 32)$ points est très semblable à celle de référence et laisse entrevoir un comportement apparemment identique quand nous visualisons le film de l'évolution d'une coupe de la concentration de traceur et de la pression, par exemple (figure 25). Nous

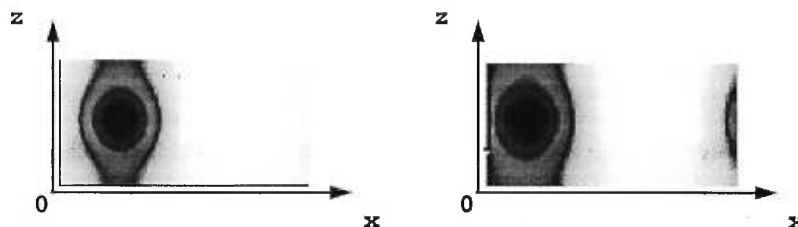


Figure 25. Comparaison après 1000 pas d'une coupe verticale (plan xz) de la pression entre la simulation de référence (à gauche) et celle faite en LES (modèle de Smagorinsky, à droite).

calibrons cette simulation sur celle de référence afin de pouvoir estimer au mieux la valeur de la constante C_s de Smagorinsky. Après filtrage de la simulation de référence ($128 \times 128 \times 64$), nous calculons le coefficient de corrélation pour la divergence selon la direction z du tenseur de sous-maille τ_{ij} . La comparaison se fait après 1000 pas de temps, dans une région qui représente un parallélépipède rectangle de dimension $(16 \times 21 \times 23)$. Cette région est centrée sur le minimum du champ de pression, qui est aussi situé au voisinage du centre du rouleau de Kelvin-Helmoltz. Cette région est donc fortement rotationnelle.

La comparaison des divergences des tenseurs de sous-maille entre la simulation de référence et celle en LES aboutit à la carte de corrélation de la figure 26.

L'accumulation de points autour de l'axe des ordonnées signifie que les deux

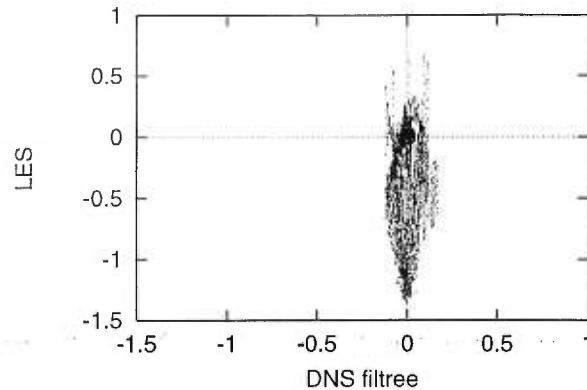


Figure 26. Carte de corrélation de la divergence (selon z) du tenseur de sous-maille τ_{ij} , soit $\partial_i(\tau_{iz})$, entre les simulations DNS (128^3 , filtrée) et LES (32^3) pour le modèle de Smagorinsky.

champs τ_{yz} ne sont que très peu corrélés, le coefficient de corrélation n'étant que de 27 %. La viscosité turbulente induite par les plus petites échelles de tourbillons y est bien présente, mais est trop élevée. De plus, nous devons prendre en compte le fait que les développements théoriques qui ont aboutit à la forme du modèle de Smagorinsky partent de l'hypothèse d'un nombre de Reynolds infini, pour que le spectre soit réellement complètement développé, ce qui n'est pas le cas ici. Enfin, il apparaît que pour des modèles de viscosité turbulente comme celui que nous étudions, leur comportement est radicalement inapte à rendre correctement compte de ce qui se passe dans des régions rotationnelles d'un écoulement (Gonze, 1994). Le modèle de Smagorinsky ne rend finalement pas bien compte de la vraie nature de ce qui se passe aux petites échelles de longueur dans un écoulement instable stratifié anélastique à petit nombre de Reynolds. Cela ne veut pas dire pour autant que ce modèle est inutilisable. Il est cependant à notre avis incomplet dans le cas présent. Finalement, la valeur de la constante de Smagorinsky qui a donné les meilleurs résultats de corrélation est de $C_s = 0.14$. Nous présentons

à la figure 27 l'évolution dans le temps du maximum des termes de flux de quantité de mouvement présents dans l'équation de Navier-Stokes (eq. 2.61), et provenant respectivement du tenseur de contrainte ($\tilde{\sigma}_{yz} = (\partial_y \tilde{v}_z + \partial_z \tilde{v}_y)$), du tenseur de sous-maille ($\tau_{yz} = -(C_s \Delta)^2 | \tilde{S} | (\partial_y \tilde{v}_z + \partial_z \tilde{v}_y)$) et du terme d'inertie ($\tilde{v}_y \tilde{v}_z$). La contribution provenant du tenseur des contraintes est très

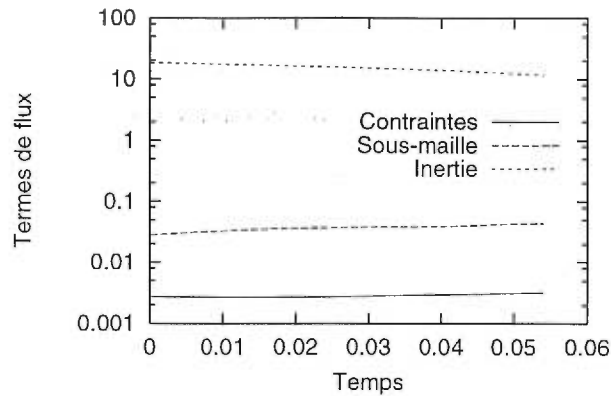


Figure 27. Contributions relative de la composante yz des termes d'inertie ($\overline{\rho_s \tilde{v}_y \tilde{v}_z}$), de contraintes ($\tilde{\sigma}_{yz}$) et de sous-mailles (τ_{yz}) dans le flux de quantité de mouvement.

petite ce qui est normal étant donné que ce terme est pondéré par le nombre de Reynolds, qui est de 2500 ici. Nous pourrions presque le négliger dans la résolution de nos équations puisqu'il est à peu près égal à l'ordre d'erreur du schéma de notre algorithme, soit env. 10^{-2} en simple précision (imposé principalement par l'équation de Poisson qui est d'ordre 2). Négliger ce terme revient à réduire complètement la viscosité laminaire qui existe dans le fluide. Le fluide n'oppose alors presque aucun frottement (physique) à l'écoulement moyen. Le terme de sous-maille est de l'ordre de 10^{-1} soit dix fois plus grand que le tenseur des contraintes. Il est aussi dix fois plus élevé que l'erreur du schéma. Cela impose une valeur plancher pour la constante de Smagorinsky, C_s , puisque si nous la baissions trop, l'effet du tenseur de sous-maille ne serait plus perceptible. Enfin nous avons le terme d'inertie qui domine les autres, étant donné qu'il est de l'ordre

de 10^1 . Il est normal que sa valeur soit relativement grande, puisque l'écoulement est quasiment dépourvu de frottement physique. Par conséquent toute l'énergie qui est transmise à l'écoulement sous l'effet du cisaillement, est transformée principalement en mouvement (sous forme de tourbillons par exemple) et en énergie interne, plutôt que sous forme de chaleur, (sans oublier la viscosité de grille). Cependant, nous considérons quand même dans ce cas un effet de viscosité, mais celui-ci uniquement dû à la transformation de l'énergie cinétique disponible en énergie de rotation emmagasinée dans les tourbillons des échelles les plus petites, et en particulier de la sous-maille. La viscosité en question étant ν_T , la viscosité turbulente. Cette contribution, qui représente le comportement des tourbillons de taille plus petite que celle d'une cellule de la grille, est incluse dans la viscosité turbulente (figure 28) calculée au cour de la simulation LES. L'erreur globale du schéma numérique étant estimée à 10^{-2} , cela signifie que lorsque la viscosité turbulente se situent en-dessous de cette valeur elle en réalité nulle. Le fait que c'est surtout en $z = 0$ et en $z = 1$ que $\nu_T(z)$ est nulle, provient des conditions aux limites imposées à la vitesse.

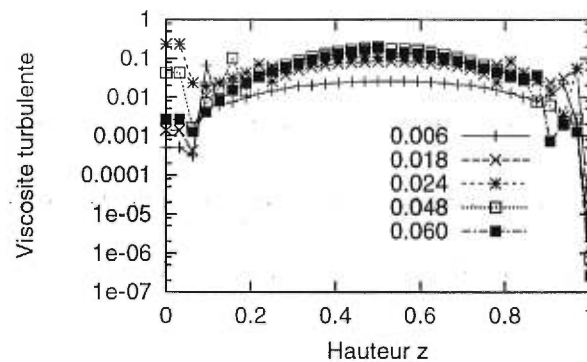


Figure 28. Profils verticaux de viscosité turbulente $\nu_T(z)$ pour le modèle de Smagorinsky ($H=1$).

Le modèle auto-similaire donne de bien meilleurs résultats. Lors du test à

priori la corrélation est montée à 83 %. La carte de corrélation correspondante se trouve sur la figure 29. Le nuage de points s'accumule autour de l'axe $x = y$. Son

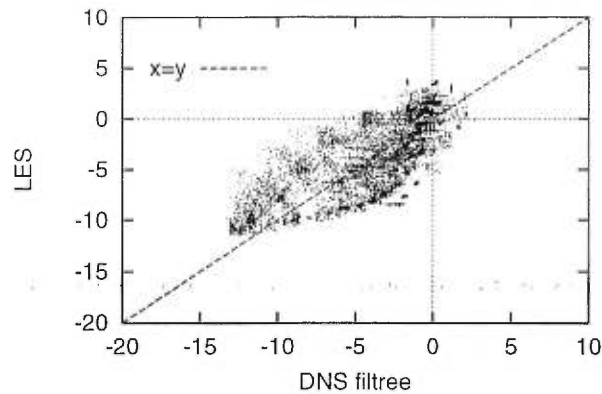


Figure 29. Carte de corrélation de la divergence (selon x) du tenseur de sous-maille τ_{ij} , soit $\partial_i(\tau_{ix})$, entre les simulations DNS (128^3 , filtrées) et LES (32^3) pour le modèle auto-similaire.

avantage est que nous n'avons pas besoin de régler une quelconque constante, ce modèle s'adaptant par lui-même. Le présence du modèle de sous-maille a permis d'obtenir également un spectre en énergie cinétique (figure 30) plus régulière que pour la simulation de référence, qui a tendance à avoir peu d'énergie pour certains modes dans les grandes échelles. Le spectre LES est globalement plus élevé que celui de la simulation directe. C'est un résultat prévisible du fait que le modèle auto-similaire est non dissipatif, puisqu'il ne prend en compte que le comportement des échelles proches de la coupure Δ . Une manière de palier à cet inconvénient serait de combiner ce modèle avec un autre qui serait, lui, de type dissipatif. On peut à ce titre prendre le modèle de Smagorinsky.

Les tests faits jusqu'ici, ont été effectués avec une stratification de $H=1$. Nous avons mené un autre test avec une stratification plus élevée, soit $H=10$. Les résultats on fait apparaître une dégradation globale du spectre de sous-maille (figure 31), accumulant proportionnellement plus d'énergie par rapport à la simulation de

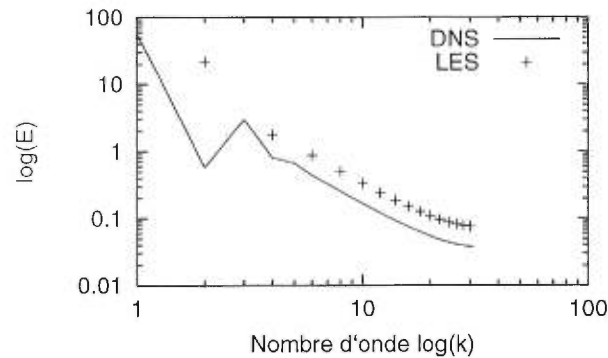


Figure 30. Spectres (normalisés) de l'énergie cinétique pour la simulation avec le modèle auto-similaire et la simulation directe.

référence à $H=10$. Ceci laisse entrevoir la nécessité de devoir développer un modèle plus adapté à des écoulements à forte stratification.

3.1.4 Simulation numérique à grand nombre de Reynolds ($Re = 10^6$).

Nous avons précédemment testé et calibré le modèle auto-similaire pour un nombre Reynolds de 2500. Nous l'utilisons par la suite dans une série de simulations en prenant cette fois un nombre de Reynolds de 1 million, et analysons le comportement physique du système dans des situations plus proches de la turbulence. Cette démarche est correcte si nous faisons l'hypothèse que le modèle auto-similaire est encore valable dans la plage d'écoulements étudiée. Nous ne pouvons bien sûr pas faire à ce niveau un test *à priori* par rapport à une simulation directe de référence comme auparavant, vu le nombre de Reynolds élevé que nous prenons. Nous faisons donc l'hypothèse que la validation à $Re = 2500$ est encore valable pour un Reynolds infini.

Nous avons effectué une simulation avec $H=1$ et une seconde avec $H=10$, en partant d'une même condition initiale (figure 32), et en prenant des paramètres

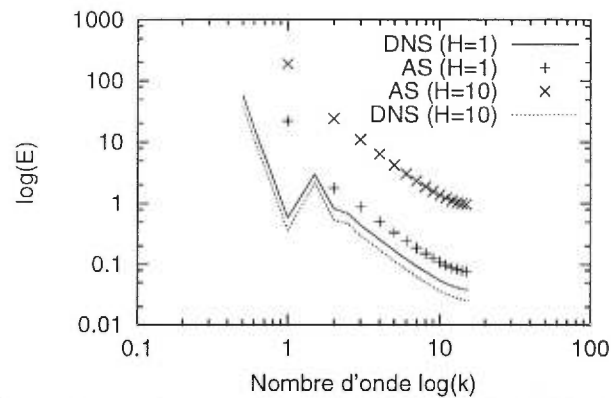


Figure 31. Comparaison des spectres (normalisés) de l'énergie cinétique pour les simulations avec le modèle auto-similaire (AS) et les simulations directes (DNS) pour $H=1$ et $H=10$.

identiques. La présence du modèle auto-similaire devrait permettre de simuler les effets des petites échelles sur l'écoulement moyen, sans pour autant les faire apparaître. La condition initiale est dans un état déjà déstabilisé. Les rouleaux sont complètement formés. A un temps $t_1 = 2.0 \times 10^{-4}$ la coupe de la concentration, pour $H=1$ et $H=10$ est montrée sur les figures 33 et 34. Pour une meilleure visualisation des figures nous les avons doublées selon la direction x (elles apparaissent continues à cause des conditions aux limites périodiques imposées selon cette direction). On remarque un net aplatissement de la couche pour la grande stratification, alors que celle pour $H=1$ n'a que peu changé. Cela donne à penser que l'effet de la stratification est de confiner le mouvement des instabilités dans un plan horizontal et à inhiber la composante verticale de la vitesse. Encore plus tard, au temps $t_2 = 6.0 \times 10^{-4}$ (figures 35 et 36), les rouleaux se sont complètement étirés et aplatis pour $H=10$ alors que pour $H=1$ on voit enfin l'effet de tassement se produire, mais avec une moins grande amplitude que pour la forte stratification. On voit donc apparaître en même temps un étirement des rouleaux dans la direction du cisaillement et provoqué par celui-ci, et par voie de

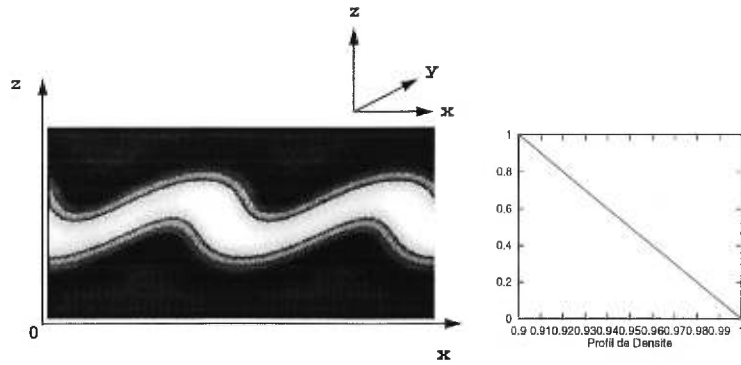


Figure 32. Coupe verticale de la concentration. $H=1$, Condition initiale $(32 \times 32 \times 32)$. Profil de densité ρ_s (en abscisses).

conséquence, un effet d'empilement de ceux-ci en couches superposées.

Mais il n'y a pas que cela. A cause de la distribution non-homogène de densité dans chaque rouleau (comme nous l'avons remarqué dans la simulation de référence), le maximum de celle-ci, qui était initialement situé au centre des rouleaux, se déplace progressivement vers le bas. Une plus grande densité signifiant un poids plus élevé, ce seront justement les parties de haute densité qui, sous l'effet de la gravitation, et pour autant que la densité environnante soit plus petite, auront tendance à tomber en premier. C'est pour cette raison que l'on aperçoit une goutte au bas de la couche du traceur. Sur la figure 38 ($H=1$) on voit qu'avec le temps l'advection verticale chute. Le mouvement devient de plus en plus ralenti selon la direction z . Cela provient de l'influence de la stratification sur le mouvement vertical des particules de fluide. Le blocage du flux vertical de concentration est dû en premier lieu à la suppression des modes verticaux sous l'effet de la stratification. Cependant, pour une même vitesse verticale, la propagation du traceur peut être bloquée par l'effet de mélange dû à une turbulence horizontale fortement anisotrope (Vincent et *al.*, 1996). Le nombre de Richardson a atteint la saturation à $Ri=0.0085$ ($H=1$) et $Ri=0.14$ ($H=10$). On montre sur la figure 40 les profils de la viscosité turbulente pour différents temps. On voit globalement

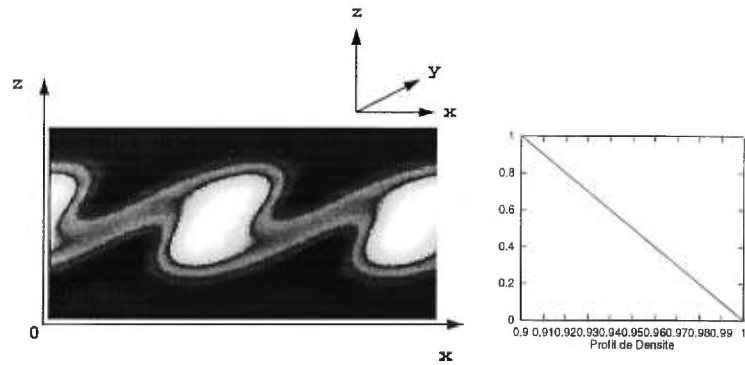


Figure 33. Coupe verticale de la concentration ($32 \times 32 \times 32$). $H=1$, Temps t_1 . Profil de densité ρ_s (en abscisses).

que $\nu_T(z)$ est toujours supérieur en-dessous de la couche $z = 0.5$. Cela signifie que la présence de la stratification, qui rend la densité plus grande dans les régions basses, a tendance à disperser plus la quantité de mouvement dans la direction verticale. Cet effet agit donc comme un frein sur l'évolution de la perturbation, aboutissant à l'inhiber en fin de compte. Finalement, comme on le voit sur l'image de la concentration au temps $t_3 = 1.0 \times 10^{-3}$ l'instabilité se tasse. Pour lui permettre de reprendre, il faudrait lui fournir plus d'énergie extérieure sous forme de cisaillement. La figure 39 de l'anisotropie montre aussi que nous avons atteint la saturation.

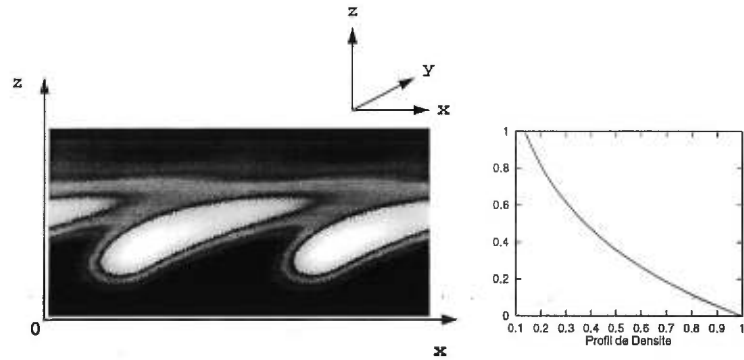


Figure 34. Coupe verticale de la concentration ($32 \times 32 \times 32$). $H=10$, temps t_1 .
Profil de densité ρ_s (en abscisses).

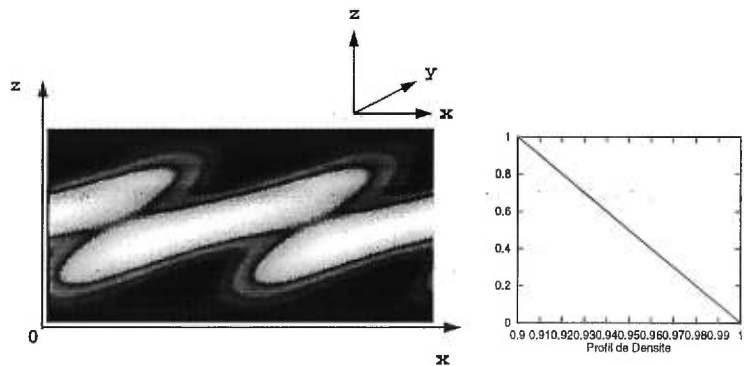


Figure 35. Coupe verticale de la concentration ($32 \times 32 \times 32$). $H=1$, temps t_2 .
Profil de densité ρ_s (en abscisses).

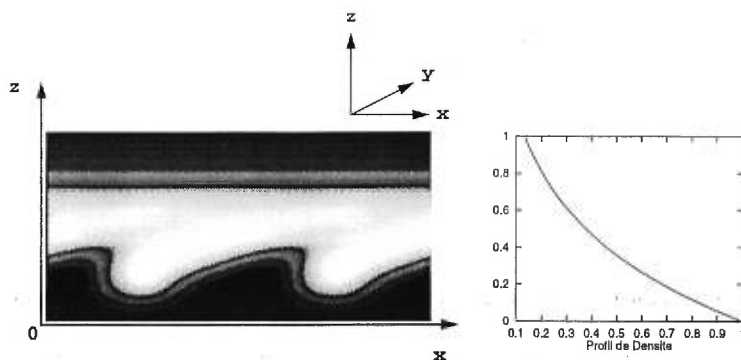


Figure 36. Coupe verticale de la concentration ($32 \times 32 \times 32$). $H=10$, temps t_2 . Profil de densité ρ_s (en abscisses).

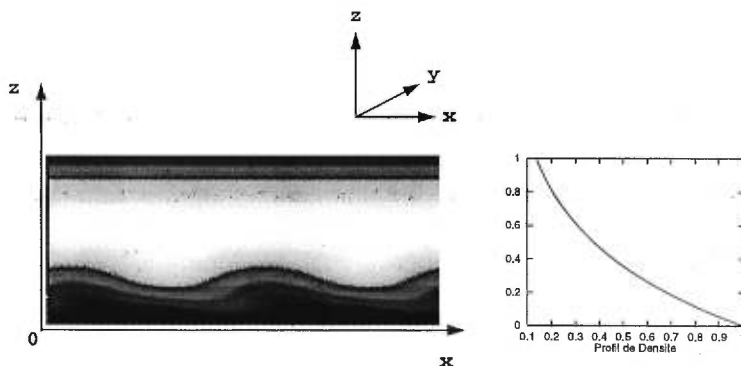


Figure 37. Coupe verticale de la concentration ($32 \times 32 \times 32$). $H=10$, temps $t_3 = 1.0 \times 10^{-3}$. Profil de densité ρ_s (en abscisses).

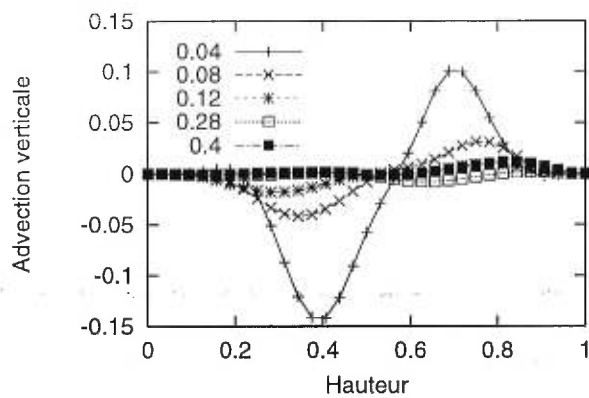


Figure 38. Flux advectif vertical moyenné, $\langle \rho v_z c \rangle(z)$, ($H=10$).

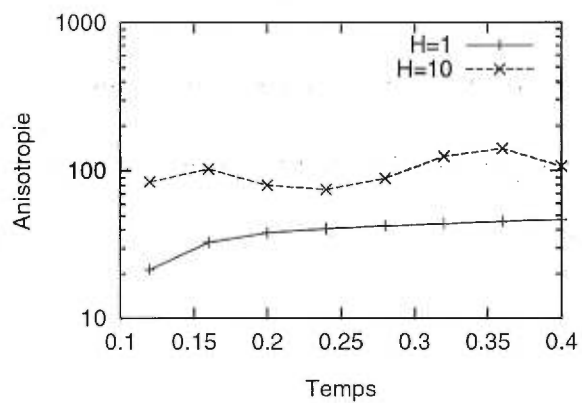


Figure 39. Evolution de l'anisotropie en fonction du temps.

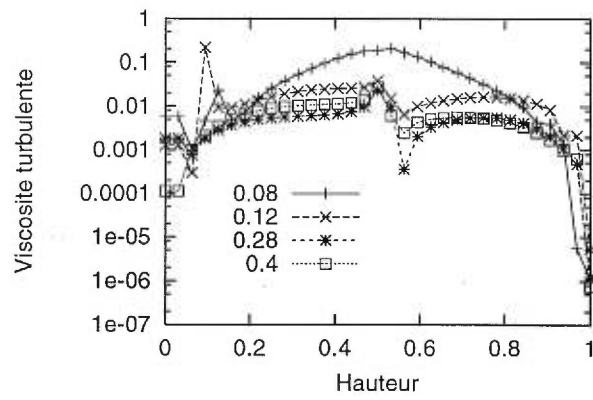


Figure 40. Profils de viscosité turbulente $\nu_T(z)$ ($H=1$).

CONCLUSION

Les simulations directes en $128 \times 128 \times 64$ points de résolution montrent que l'effet de la stratification consiste à la fois à retarder l'apparition de l'instabilité, mais aussi à provoquer un effet de freinage bien plus prononcé sur l'écoulement moyen, caractérisé par la viscosité turbulente $\nu_T(z)$. Le nombre de Richardson critique atteint $Ri_c = 0.0045$ pour $H=1$, alors que pour une stratification plus élevée ($H=10$) il atteint $Ri_c = 0.7$. Le nombre de Richardson est, dans ce dernier cas supérieur au critère établi dans le cas incompressible, mais ce résultats demande cependant à être vérifié de manière plus rigoureuse car il se peut que les effets numériques dus à la grille jouent ici un rôle non négligeable. On remarque aussi que le spectre suit un comportement de type $k^{-5/3}$ pour les échelles les plus petites, ce qui est un aspect positif pour l'implémentation des modèles de sous-maille. Hormis l'influence de la stratification, on remarque que la présence des vortex bloque tout passage de produit traceur à travers leur ceinture extérieure quand la diffusion est négligeable ($Pe = \infty$). A ce titre, on peut imaginer des applications prometteuses au niveau de l'industrie en ce qui concerne le confinement de certains produits chimiques.

On constate du point de vue purement numérique que plus la résolution est faible, plus il faut tenir compte de la diffusion de grille qui vient s'ajouter à la diffusion physique. Elle se manifeste en particulier sur le spectre de l'énergie cinétique par une remontée non physique pour les grands nombres d'ondes. Il s'avère aussi que la résolution de la grille affecte de façon prononcée l'instabilité (sous forme de viscosité numérique), en retardant son développement et même en l'inhibant si la résolution est vraiment trop basse.

Le test à priori du modèle de Smagorinsky implémenté n'a pas donné de bonnes

corrélations entre la simulation directe de référence en 128^3 filtrée et la simulation des grandes échelles en 32^3 . Le coefficient de corrélation atteint 27 %. Ce modèle apparaît ne pas être adapté aux situations impliquant des contraintes extérieures ainsi que de la stratification. De plus, les hypothèses de départ (isotropie, et $Re = \infty$) sont loin d'être respectées. Aussi, il s'avère que ce modèle ne se comporte pas bien dans les zones de forte vorticité comme dans le voisinage des rouleaux de Kelvin-Helmoltz. On peut s'y attendre car le modèle s'inspire de la définition du tenseur de contrainte pour un écoulement visqueux et laminaire. Ce modèle a aussi un tendance à trop dissiper d'énergie vers les plus petites échelles. Enfin, un inconvénient majeur réside dans la valeur de la "constante" de Smagorinsky, qui peut varier fortement d'un endroit à l'autre du domaine. Dans notre cas, nous estimons que la valeur la plus adaptée du coefficient de Smagorinsky est $C_s = 0.14$.

Le modèle auto-similaire donne des résultats bien meilleurs. Le taux de corélation du tenseur de sous-mailles s'élève à 83 %. Il est bien adapté pour des situations anisotropes comme c'est la cas ici. Son inconvénient majeur est de ne pas être dissipatif, ce qui peut être corrigé en le combinant avec un autre modèle dissipatif, comme celui de Smagorinsky. Ce modèle apparait aussi être sensible aux variations de la valeur de la stratification. Plus celle-ci augmente, plus le modèle perd de ses qualités. Son domaine de validité se réduit aux petites valeurs de la stratification H . Une fois la calibration du modèle de sous-maille effectuée, nous avons refait une série de simulations à $Re = \infty$ en 32^3 , pour deux stratifications de respectivement $H=1$ et $H=10$ afin d'analyser comment se développe l'instabilité une fois que les rouleaux se sont formés. On observe clairement un effet d'aplatissement et de superposition des rouleaux de Kelvin-Helmoltz sous l'influence de la stratification. En même temps, les zones de fortes densités dans ces rouleaux parviennent à tomber sous l'effet de la gravité. La viscosité turbulente est globalement plus élevée au-dessous qu'en-dessus de l'interface impliquant un tassement du développement de la perturbation. Pourvu qu'il soit validé sur une simulation directe avec une

résolution suffisante, l'implémentation d'un modèle de sous-maille permet en définitive de retrouver le même type de comportement qu'une simulation directe pour un temps de calcul bien moindre. C'est incontestablement un moyen d'avenir pour une meilleure approche et une plus grande compréhension de la turbulence.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **Abbott, M., B., Basco, D., R., 1989**, 'Computational Fluid Dynamics: An Introduction for Engineers', *Longman Scientific et Technical*, Wiley.
- [2] **Astruc, D., 1993**, 'Instabilité de Kelvin-Helmoltz en régime subsonique: Développement spatial et conditions aux limites ouvertes', Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse.
- [3] **Batchelor, G., K., 1967**, 'An introduction to fluid dynamics', Cambridge University Press.
- [4] **Bardina, J. Ferziger, J., H., Reynolds, W., C., 1980**, 'Improved subgrid scale for large eddy simulation', *AIAA paper No. 80-1357*.
- [5] **Chandrasekhar, S., 1961**, 'Hydrodynamic and hydromagnetic stability', Dover.
- [6] **Deardoff, J., W., 1971**, 'On the magnitude of the subgrid scale eddy viscosity', *J. Comp. Phys.*, Vol. 7, pp. 120-133.
- [7] **Cain, A., B., Reynolds, W., C., Ferziger, J., H., 1981**, 'A three-dimensional simulation of transition and early turbulence in time-developing mixing layer', NASA, NCC 2-15, report No TF-14, chapter 2, pp. 12-19.
- [8] **Drazin, P., G., Reid, W., H., 1981**, 'Hydrodynamic stability', Cambridge University Press.
- [9] **Dubuis, G., 1995**, 'Approximation anélastique et modélisation de l'atmosphère jovienne', Rapport de stage de DEA au DESPA, Observatoire de Paris.

- [10] Erlbacher, G., Hussaini, M., Y., Speziale, C., G., Zang, T., A., 1990, 'Toward the large-eddy simulation of compressible turbulent flows' NASA, Rapport ICASE No 187460.
- [11] Harindra J., S., F., 1991, 'Turbulent mixing in stratified fluids' *Annual review of fluid mechanics*, 23, pp. 455-93
- [12] Ferziger, J., H., Perić, M., 1996, 'Computational methods for fluid dynamics', Springer.
- [13] Ferziger, J., H., 1985, 'Large eddy simulation: its role in turbulence research', *Ann. Rev. Fluid Mech.*
- [14] Ferziger, J., H., 1995, 'Direct and Large eddy simulation of Turbulence', in "Numerical methods in Fluid Mechanics", CRM Proceedings and Lecture Notes, Vincent, A. and Meneguzzi M., *The American Mathematical Society*, in press.
- [15] Fröhlich, J., 1990, 'Résolution numérique des équations de Navier-Stokes à faible nombre de Mach par méthode spectrale', Thèse de doctorat de l'Université de Nice-Sophia-Antipolis.
- [16] Gerwin, R., A., 1968, 'Stability of interface between two fluids', *Review of modern physique*, Vol. 40, numéro 3.
- [17] Gonze, M-A., 1994, 'Revue, amélioration et validation de modélisation de sous-maille', Rapport technique CERCA R95-2.
- [18] Gough, D., O., 1968, 'The anelastic approximation to thermal convection', *Journal of atmospheric sciences*, Vol. 26, pp 448-456.
- [19] Hirsch, C., 1988, 'Numerical Computation of internal and external flows', Vol 1., John Wiley and Sons.
- [20] Hopfinger, E.J., 1987, 'Turbulence in stratified fluids: a review', *Journal of geophysical research*, Vol. 92, C5, pp. 5287-5303.

- [21] Kolmogorov, A., N., 1941, 'Local structure of turbulence in an incompressible fluid at very high Reynolds numbers', Dokl. AN SSSR 30, 299.
- [22] Landau, L., Lifchitz, E., 1989, 'Mécanique des fluides', MIR.
- [23] Lesieur, M., 1987, 'Turbulence in fluids', Martinus Nijhoff Publishers.
- [24] LeVèque, R., J., 1991, 'Numerical Methodes for Conservation Laws' *Lectures in Mathematics*, ETH Zurich, pp. 193-199.
- [25] Lilly, D., K., 1967, 'The representation of small-scale turbulence in numerical simulation experiments', *Proc. of the tenth IBM sci. comp. symp. on environmental sciences*, Thomas J. Watson research center, Yorktown Heights, NY, pp. 195-210.
- [26] Lump, T., 1994, 'Numerical simulations of compressible mixing layers with high-order ENO schemes', Rapport de recherche No 2379, INRIA (Sophia Antipolis).
- [27] Manzini, G., 1992, 'Application de schémas de capture de choc à haute résolution à des problèmes d'astrophysique et de géophysique', Thèse de doctorat, Université de Toulouse, CERFACS.
- [28] Mason, P., J., 1994, 'Large-eddy simulation: A critical review of the technique', *Q.J.R. Meteorol. soc.*, Vol. 120, pp. 1-26.
- [29] Menkes, J., 1959, 'On the stability of a shear layer', *Journal of fluid mechanics*, Vol. 6, pp. 518.
- [30] Park, Y.-G., Whitehead, J., A., Gnadadeskian, A., 1994, 'Turbulent mixing in stratified fluids layer formation and energetics', *Journal of fluid mechanics*, Vol. 279, pp. 279-311.
- [31] Pedlosky, J., 1979, 'Geophysical fluid dynamics', Springer Verlag.

- [32] **Peyret, R., Taylor, Th., D., 1983**, 'Computational Methods for Fluid Flow', Springer Verlag.
- [33] **Piomelli, U., 1994**, 'Large-eddy simulation of flow turbulence flows', *TAM report* no. 767, UILU-ENG-94-6023.
- [34] **Piomelli, U., Moin, P., Ferziger, J., H., 1987**, 'Model consistency in the large eddy simulation of turbulent channel flow', *AIAA*, Vol. 87, pp. 1446.
- [35] **Press, W., H., Teukolsky, S., A., Vetterling, W., T., Flannery, B., P., 1992**, 'Numerical Recipes in C', Cambridge.
- [36] **Saddoughi, S., G., Veeravalli, S., V., 1994**, 'Local isotropy in turbulent boundary layers at high Reynolds number', *Journal of fluid mechanics*, Vol. 268, pp. 333-372.
- [37] **Scotti, A., Meneveau, C., 1993**, 'Generalized Smagorinsky model for anisotropic grids', *Phys. Fluids*, Vol. A 5 (9), pp. 2306-2308.
- [38] **Taverne, V., 1993**, 'Simulation numérique de la convection thermique tridimensionnelle et compressible', thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse.
- [39] **Tennekes, H., Lumley, J., L., 1972**, 'A first course in turbulence', M.I.T press.
- [40] **Tritton, D., J., 1988**, 'Physical fluid dynamics', Second edition, Clarendon Press, Oxford.
- [41] **Vincent, A., Michaud, G., Ménéguzzi, M., 1996**, 'On the turbulent transport of passive scalar by anisotropic turbulence', *Phys. Fluids*, Vol. 8 (5), pp. 1312-1320.
- [42] **Vreman, B., Geurts, B., Kuerten, H., 1995**, 'Subgrid-modelling in LES of compressible flow', *Applied scientific research*, Vol. 54, pp. 191-203.

- [43] Zhang, X., D., Trépanier, J.-Y., Camarero, R., 1996, 'An error estimation of finite volume method for hyperbolic equations', Rapport technique CERCA R96-7.

APPENDICE A

Résolution des équations de Navier-Stokes par méthode aux volumes finis.

Le schéma que nous décrivons ci-dessous a été écrit originellement par Maurice Ménéguzzi pour les écoulements diphasiques (Ménéguzzi, 1995).

A.1 Schéma d'évolution dans le temps.

Pour l'évolution temporelle, on utilise un schéma Runge-Kutta du second ordre. On part d'une équation différentielle de type:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = F(f) \quad (\text{A.1})$$

Runge-Kutta se constitue de deux parties:

-Un demi-pas Euler avant:

$$f^{n+1/2} = f^n + \delta t/2 F(f)^n + o(\delta t^2) \quad (\text{A.2})$$

précis à l'ordre un. Quand on dit "demi-pas" cela signifie que l'on fait une évolution de $\delta t/2$.

-Un demi-pas Leapfrog.

Le schéma Leapfrog centré est donné par,

$$\frac{f^{n+1/2} - f^{n-1/2}}{2\delta t} = F(f)^n + o(\delta t^2) \quad (\text{A.3})$$

ce qui donne finalement pour le demi-pas Leapfrog,

$$\frac{f^{n+1} - f^n}{\delta t} = F(f)^{n+1/2} + o(\delta t^2) \quad (\text{A.4})$$

Le choix de ce type de schéma est dû principalement à sa stabilité et à la capacité du Leapfrog à mieux conserver l'énergie (Hirsch, 1988). L'évolution dans notre cas concerne directement la quantité de mouvement, l'énergie totale, et la concentration du traceur.

A.2 Méthode des volumes finis

La méthode utilisée est celle des volumes finis (Hirsch, 1988). Elle tire avantage de la forme conservative des équations que l'on étudie, lesquelles se met généralement sous la forme intégrale suivante:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U \, d\Omega + \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} Q \, d\Omega \quad (\text{A.5})$$

Elle signifie que toute grandeur U qui varie dans le volume Ω est égale à ce qui est transféré à travers les surfaces qui délimitent Ω (flux \vec{F}), plus un terme de source-puits. Remarquons que si on décompose Ω en sous-volumes Ω_i, Ω_j , la conservation doit être valable également pour les deux sous-volumes indépendamment. Une propriété importante est la suivante:

$$\oint_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{S} = - \oint_{BA} \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad (\text{A.6})$$

Elle exprime le fait que si l'on décompose Ω en sous volumes Ω_i, Ω_j , alors les flux respectifs à travers la surface commune aux deux volumes doivent être les mêmes et de signes opposés. Cette propriété est importante pour notre méthode car, si elle n'est pas vérifiée, elle va faire apparaître des termes d'erreur parasite qui vont se manifester dans nos équations conservatives sous la forme de termes de création ou de destruction. On définit chaque volume Ω_i comme celui d'une cellule unité du domaine d'étude. Etant donné que les volumes finis traitent de

valeurs "centrales" et de flux sur des surfaces, il va falloir à partir des champs donnés sur les points de grille, déduire les distributions de champs moyennés pour chaque cellule et pour chaque face de ces cellules. Les coordonnées cartésiennes sont bien sur les plus appropriées ici. Discrétisée, notre équation se met sous la forme suivante (pour une cellule) (Hirsch, 1988):

$$\frac{\partial}{\partial t}(U_J \Omega_J) + \sum_{\text{cotés}} (\vec{F} \cdot \vec{S}) = Q_J \Omega_J \quad (\text{A.7})$$

où J défini l'indice d'une cellule. On somme sur les cotés de la cellule. Il faut maintenant donner une signification mathématique aux différentes grandeurs qui apparaissent dans cette expression. U_J est associé à une cellule donnée, on peut considérer que c'est la valeur située au centre de la cellule. Elle représente une moyenne de u_i sur toute la cellule. En ce qui concerne la calcul du flux de \vec{F} à travers les surfaces, nous allons aussi moyenner sur les faces de notre cellule. Pour notre expérience, le terme de source (membre de droite) sera nul. A ce stade nous pouvons choisir entre plusieurs définitions de moyennes.

A.2.1 Moyennes sur les cellules

Sachant qu'une moyenne est une intégrale,

$$\bar{f}(x) = \frac{\int_0^1 \rho f(x) dx}{\int_0^1 \rho dx} \quad (\text{A.8})$$

Numériquement, en une dimension d'espace, et pour les points qui se situent près des bords, la moyenne donne (Ménéguzzi, 1995):

$$\bar{f}_0(x) = \frac{9}{24}f_0 + \frac{19}{24}f_1 - \frac{5}{24}f_3 + \frac{1}{24}f_4 \quad (\text{A.9})$$

ici $\rho = 1$ et $f_i = f(x_i)$.

Et pour ceux se situant à l'intérieur de la grille:

$$\bar{f}_i(x) = -\frac{1}{24}f_{i-1} + \frac{13}{24}f_i + \frac{13}{24}f_{i+1} - \frac{1}{24}f_{i+2} \quad (\text{A.10})$$

Ce sont des formules à quatre points. Nous aurions pu utiliser la moyenne arithmétique sur tous les huit coins de notre cellule (qui est un parallélépipède rectangle dans notre cas), mais la précision pour ce genre de moyenne s'est avérée peu concluante. On préfère prendre un ordre plus élevé. Ces moyennes se font pour les trois coordonnées de l'espace. D'abord on fait la moyenne selon l'axe x pour tous les points de la grille, cela définit un champ de moyennes locales selon x , puis on fait la même chose pour y à partir de ce nouveau champ, et enfin de même pour z . Pour x , y et z le dernier point N est nul: $\bar{f}_N(x) = 0$. On peut maintenant considérer qu'une moyenne locale correspond à la valeur au point central de la cellule de la variable considérée. Ces expressions utilisent une version un peu modifiée (Ménéguzzi, 1995) des formules de Press et *al.* (1992). Expliquons en quelques mots comment nous arrivons à la formule (A.9) par exemple. Sans perte de généralité, prenons un intervalle d'intégration $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$. Substituons successivement $f(x)$ ainsi que les valeurs $f_0 = f(0)$, $f_1 = f(1h)$, $f_2 = f(2h)$ et $f_3 = f(3h)$ ($h=1$) par les fonctions $f(x) = 1$ $f(x) = x$ $f(x) = x^2$ $f(x) = x^3$. En calculant l'intégrale de la fonction f dans chaque cas, et en remplaçant le coefficient par les paramètres a , b , c et d , on obtient un ensemble de quatre équations à quatre inconnues:

$$\int_0^1 1 dx = 1 = 1a + 1b + 1c + 1d \quad (\text{A.11})$$

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2} = 0a + 1b + 2c + 3d \quad (\text{A.12})$$

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} = 0a + 1b + 4c + 9d \quad (\text{A.13})$$

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4} = 0a + 1b + 8c + 27d \quad (\text{A.14})$$

$$(\text{A.15})$$

En résolvant ce système on trouve pour $a = \frac{9}{24}$, $b = \frac{19}{24}$, $c = \frac{-5}{24}$ et $d = \frac{1}{24}$. Notons que l'intégrale sur l'intervalle $[0, 1]$ est calculée à partir de points intérieurs et aussi extérieurs à celui-ci.

A.2.2 Moyennes sur les surfaces

Elles sont données sur une face par (Ménéguzzi, 1995):

Pour les points se situant à l'intérieur de la grille (en une dimension):

$$\bar{f}_j(x) = -\frac{1}{24}f_{j-1} + \frac{13}{24}f_j + \frac{13}{24}f_{j+1} - \frac{1}{24}f_{j+2} \quad (\text{A.16})$$

Et pour les points aux bords:

$$\bar{f}_0(x) = \frac{9}{24}f_0 + \frac{19}{24}f_1 - \frac{5}{24}f_2 + \frac{1}{24}f_3 \quad (\text{A.17})$$

Une fois notre champ moyenné, (pour u , la quantité de mouvement, e , l'énergie, et s , la concentration du traceur), on peut appliquer nos équations sous forme conservative comme défini plus haut, sur chaque cellule de notre domaine. Une fois cette opération réalisée, il nous faudra encore revenir au champ initial, aux points de grilles.

A.2.3 Reconstruction des champs

Pour ce faire, on fait appel à un schéma de reconstruction appelé "méthode par primitives" (LeVêque, 1991). Rappelons que la moyenne sur une cellule que l'on utilise ici est (en une dimension):

$$\overline{u_j(t)} = \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t) dx \quad (\text{A.18})$$

où h est la largeur de la cellule que nous fixons à 1 dans notre cas, j définit l'indice d'une cellule alors que $j \pm 1/2$ sont les points délimitant la cellule. Si $u(x, t)$ est un champ ponctuel, la primitive de u , w , est:

$$w(x) = \int_{x_{1/2}}^x u(\eta, t) d\eta \quad (\text{A.19})$$

où $x_{1/2}$ est un point arbitraire sur la grille. Le théorème fondamental du calcul intégral, nous dit aussi que la dérivée de w nous redonne u .

$$u(x, t) = w'(x) \quad (\text{A.20})$$

Maintenant si on connaît le champ moyenné de u , on pourra déduire la valeur ponctuelle de w en $x_{j+1/2}$ (j dénotant l'indice de la cellule), On pose donc,

$$w(x) = \int_{x_{1/2}}^{x_{j+1/2}} u(\eta, t) d\eta \quad (\text{A.21})$$

En utilisant la propriété de sommation des intégrales on a:

$$w_j(x) = \sum_{n=0}^j \int_{x_{1/2+n}}^{x_{n+1/2}} u(\eta, t) d\eta \quad (\text{A.22})$$

Comme on peut le voir, l'intégrale est en fait une somme de moyennes sur les cellules allant de $I=1$ à $I=j$ par définition de la moyenne utilisée (à un facteur h près). Donc,

$$w_j(x) = h \sum_{n=1}^j \overline{u_n(x)} \quad (\text{A.23})$$

On a exprimé w en un point $x_{j+1/2}$ en fonction de u moyenné. Il suffit maintenant de dériver w pour déduire le champ u ponctuel en ce même point (Hirsch, 1988). Dans le cadre de notre expérience, on utilisera cette méthode pour les champs de quantité de mouvement, de concentration et d'énergie. Avant de conclure avec cette méthode ajoutons encore quelques remarques. Tout d'abord, il faut dire que cette méthode bien que moins précise que les méthodes spectrales, tient son avantage dans la souplesse à pouvoir s'adapter à quasiment toutes sortes de géométries. De plus, les volumes finis font apparaître une viscosité artificielle qui joue un peu le rôle d'évacuation d'énergie au niveau des petites échelles. Cela empêche l'accumulation d'énergie parasite sur les petites échelles et donc une "explosion" numérique (Hirsch, 1988). Dans des situations où la résolution de la grille n'est pas très grande, ce qui signifie que les erreurs de calculs sont plus importantes, on peut clairement voir cet effet sur les spectres d'énergie. Une même simulation à basse résolution en méthode spectrale ferait rapidement exploser la simulation, car dans ce type de méthode, on ne peut pas évacuer l'énergie par dissipation.

A.3 Calcul de la pression

Le calcul de la pression intervient sous la forme d'une équation de Poisson.

$$\Delta P = -\partial_i \partial_j \left(\frac{u_i u_j}{\rho_s} \right) + \frac{1}{Re} \partial_i \partial_j (\tau_{ij}) + H \partial_z \rho \equiv q(x, y, z) \quad (\text{A.24})$$

(on utilise la sommation implicite sur les indices i et j).

Pour l'obtenir, on prend la divergence de l'équation de Navier-Stokes. Pour résoudre cette équation, la méthode que nous avons employée est de type itérative (Press *et al.*, 1992). L'idée est la suivante. On ajoute à notre équation un terme dépendant du temps:

$$\Delta P - f = \frac{\partial P}{\partial t} \quad (\text{A.25})$$

et on résoud cette dernière en itérant jusqu'à ce que l'on converge vers la solution de cette équation. Un fois la convergence atteinte, la dérivée par rapport au temps de notre solution devra nécessairement être égale à zéro, puisque l'on a alors atteint la stationnarité. Ainsi cette solution sera aussi la solution de notre équation initiale. Deux types de schémas itératifs sont présentés ici (dans notre cas à trois dimensions $dx = dy \neq dz$).

-Schéma de Jacobi. En trois dimensions cela donne:

$$u_{i,j,k}^{n+1} = \frac{1}{6} \left[\frac{\gamma}{dx^2} (u_{i+1,j,k}^n + u_{i-1,j,k}^n) + \frac{\gamma}{dy^2} (u_{i,j+1,k}^n + u_{i,j-1,k}^n) \right] \quad (\text{A.26})$$

$$+ \frac{\gamma}{dz^2} (u_{i,j,k+1}^n + u_{i,j,k-1}^n) - \Delta^2 \gamma q_{i,j,k}] \quad (\text{A.27})$$

où,

$$\gamma \equiv 1 / \left(\frac{1}{dx^2} + \frac{1}{dy^2} + \frac{1}{dz^2} \right) \quad (\text{A.28})$$

Ce schéma a pour inconvénient de converger lentement. De plus, il nécessite l'utilisation de deux tableaux, un pour le temps n , l'autre pour le temps $n+1$.

-Schéma de Gauss-Seidel:

$$u_{i,j,k}^{n+1} = \frac{1}{6} \left[\frac{\gamma}{dx^2} (u_{i+1,j,k}^n + u_{i-1,j,k}^{n+1}) + \frac{\gamma}{dy^2} (u_{i,j+1,k}^n + u_{i,j-1,k}^{n+1}) \right] \quad (\text{A.29})$$

$$+ \frac{\gamma}{dz^2} (u_{i,j,k+1}^n + u_{i,j,k-1}^{n+1}) - \Delta^2 \gamma q_{i,j,k}] \quad (\text{A.30})$$

Comme on le voit, à la différence de Jacobi, dans Gauss-Seidel, dès qu'un $u_{i,j,k}$ est calculé, on le réinjecte tout de suite dans le calcul des autres éléments $u_{i,j,k}$ de la grille. On en tire un gain accru de la vitesse de convergence. De plus, Gauss-Seidel n'utilise qu'un seul tableau qui est constamment régénéré d'où un gain appréciable de place. Notre code passant 36% de son temps dans la résolution de l'équation de poisson, on comprend pourquoi on cherche à faire un effort pour gagner du temps. Un teste rapide en deux dimensions (128×128 points) de la résolution de l'équation de Poisson avec une solution analytique et des conditions aux bords homogènes, nous a permis de comparer les deux méthodes. On trouve que sur 1000 pas Gauss-Seidel converge environ 50% plus rapidement (en nombre de pas) que Jacobi. En mesurant le temps que mettent les deux méthodes pour faire un pas de temps, on peut estimer que globalement Gauss-Seidel va environ deux fois plus vite que Jacobi pour converger. Nos simulations se feront donc avec Gauss-Seidel. Voici un graphique de l'erreur en fonction du pas en temps pour les deux méthodes: Comme on peut le voir sur la figure 41, il ne suffit de mettre le

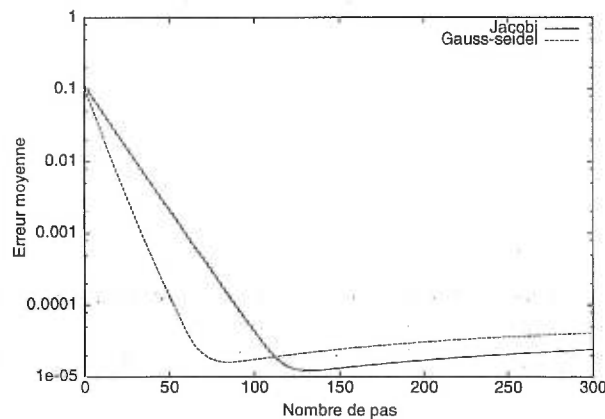


Figure 41. Convergence des schémas de Jacobi et de Gauss-Seidel pour l'équation de Poisson.

maximum d'itérations pour obtenir la meilleure convergence, mais au contraire, il est nécessaire de bien choisir le nombre d'itérations afin que la convergence donne l'erreur la plus petite (qui correspond au minimum sur les deux courbes). Si on

prend trop d'itérations on perdra à la fois en précision et en temps.

A.4 Calcul de la correction de pression

Nous avons déjà vu que l'une des conditions d'anélasticité s'écrit sous la forme suivante:

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho_s \vec{v}) = 0 \quad (\text{A.31})$$

Numériquement, cette condition doit bien sur être respectée en tout temps. Cela dit, le calcul des grandeurs physiques à chaque pas de temps amène l'apparition d'erreurs dues aux schéma numérique. Ces erreurs auront pour conséquence que notre condition ne pourra plus être vérifiée. On fait donc appel à un artifice mathématique afin qu'au début de chaque pas de temps on ait bien (A.31). On part des équations de Navier-Stokes. Lorsque l'on discrétise le membre de gauche on trouve:

$$\frac{\vec{u}^* - \vec{u}^t}{\delta t} = \nabla \cdot \left(\frac{1}{Re} \tau_{ij} - \frac{u_i u_j}{\rho_s} \right) - \nabla \cdot (\delta_{ij} P) + H \rho z \quad (\text{A.32})$$

$\vec{u}^t \equiv \rho_s \vec{v}$ est la valeur de la quantité de mouvement au temps t , mais ici \vec{u}^* ne représente pas \vec{u} au temps $t + \delta t$, c'est une sorte de valeur intermédiaire qui ne vérifie plus la condition (A.31). Afin de respecter cette hypothèse du cas anélastique, nous devons résoudre l'équation suivante (Ferziger et *al.*, 1996):

$$\Delta \phi = \frac{\nabla \cdot \vec{u}^*}{\delta t} \quad (\text{A.33})$$

C'est une équation de Poisson pour ϕ à laquelle on ajoute des conditions aux limites homogènes. ϕ représente la correction apportée à la pression. Cette équation est déduite en prenant la divergence de l'équation (A.32) où nous imposons tous les termes du membre de droite de à zéro sauf celui de la pression, étant donné que c'est elle que nous voulons uniquement varier. Sous la forme présentée dans (A.32), ce terme apparait comme la divergence de la pression (nous le faisons pour satisfaire la méthode des volumes finis), mais en fait il s'agit bien du gradient, auquel on applique la divergence, c'est-à-dire le Laplacien. Dans le membre de

gauche, le terme $\nabla \cdot u^t$ est nul par hypothèse. Cette technique de correction est valable car mathématiquement nous pouvons considérer la pression comme un multiplicateur de Lagrange dont les valeurs sont imposées en fonction des contraintes qu'on lui fixe (la contrainte étant (A.31) dans ce cas-là). Une fois la solution trouvée, on pourra déduire \vec{u} au temps $t + \delta t$ selon l'expression:

$$\frac{u^{t+\delta t} - u^*}{\delta t} = -\nabla\phi \quad (\text{A.34})$$

d'où,

$$u^{t+\delta t} = u^* - \delta t \nabla\phi \quad (\text{A.35})$$

et,

$$P \rightarrow P + \phi \quad (\text{A.36})$$

En ajoutant cette correction à la quantité de mouvement, on peut alors vérifier le critère (A.31).

A.5 Conditions aux bords des équations différentielles.

Nous avons le choix entre plusieurs types de conditions aux bords.

-Dirichlet:

On fixe la variable sur les bords du domaine. Nous le faisons pour la direction de la verticale, l'axe z.

-Von Neuman:

On rend la dérivée de la variable nulle sur les bords du domaine.

-Périodique:

Nous avons dans ce cas:

$$f(x + L) = f(x)$$

On peut trouver des avantages à utiliser ce type de conditions. La première est que nous nous évitons de devoir imposer à l'entrée de notre domaine les conditions

d'entrée de l'écoulement, plus ou moins compliquées à implémenter (Piomelli, 1994). La seconde est que, dans le cas de turbulence homogène, pour lesquelles chaque propriété locale est statistiquement équivalente aux autres parties du fluide (Ferziger, 1985), il suffit de n'étudier qu'une portion caractéristique de l'espace pour connaître les propriétés et la dynamique de l'écoulement. Notre expérience est, à priori, de ce point de vue bien homogène dans les directions x et y (horizontale).

Dans le cadre de notre expérience, nous avons choisi les conditions aux limites suivantes:

a. Pour la quantité de mouvement:

Elles sont de type Dirichlet pour la composante $u_z = 0$, et de type Von Neuman pour les composantes u_x et u_y , en $z = z_0$ et $z = z_1$ (free-slip). Elles sont périodiques dans les directions x (sens de l'écoulement) et y (transversale) pour u_x , u_y et u_z .

b. Pour la pression:

Elles sont exprimées en isolant la dérivée selon z de la pression dans les équations de Navier-Stokes, et à partir de l'expression trouvée, en la calculant sur les surfaces définies par $z = z_0$ et $z = z_1$, sachant que $u_{z0,z1} = 0$. Selon les directions x et y on impose les conditions périodiques

$$\partial_z P = \frac{1}{Re} (\partial_x \tau_{xz} + \partial_y \tau_{yz} + \partial_z \tau_{zz}) - H\rho$$

On a aussi périodicité dans les directions x et y .

c. Pour la température et la densité:

Von Neuman selon l'axe z et périodique selon les axes x et y en ce qui concerne la température. La densité est déduite de l'équation d'état.

d. Pour l'énergie:

Elle est aussi périodique selon les axes x et y . Pour les plans $z = z_0$ et $z = z_1$, la

condition au bord est calculée à partir de la définition que nous avons donnée de la densité d'énergie totale (anélastique):

$$e = \left(\rho_s \frac{1}{2} v^2 + \frac{3}{2} P + \rho H z\right)$$

A.6 Schéma général de l'algorithme

Les paramètres sont les suivants:

Re: Le nombre Reynolds, soit l'inverse de la viscosité. *Pe*: Le nombre de Peclet.
Pr: Nombre de Prantl. *H*: La hauteur d'échelle. *F*: Amplitude de la force de cisaillement qui est imposée à l'écoulement moyen.

1. Conditions initiales (t=0):

On initialise les grandeurs \vec{u} (quantité de mouvement), \mathbf{P} , \mathbf{T} , \mathbf{e} , ρ et la concentration du traceur, \mathbf{C} . Cela se fait de deux façons possibles:

-On part d'un champ aléatoire gaussien pour \vec{u} , ρ et \mathbf{P} . L'énergie se déduit des lois physiques, ainsi que \mathbf{T} . La concentration \mathbf{C} suit un profil vertical gaussien autour de l'interface.

-On raccroche la solution précédente pour une nouvelle simulation. La simulation précédente a sauvé les derniers champs moyennés des grandeurs. Ce sont ces valeurs que l'on prend comme nouvelles conditions initiales.

2. Shéma en temps de Runge-Kutta:

Calcule l'évolution dans le temps des variables moyennées \mathbf{e} , \mathbf{C} , et \vec{u} , les autres grandeurs, \mathbf{T} , \mathbf{P} , et ρ , étant calculées à partir des lois physiques. La boucle principale de ce shéma se compose des étapes suivantes:

a. Reconstruction:

On reconstruit les champs ponctuels de nos variables \vec{u} , \mathbf{e} , \mathbf{C} à partir des champs moyennés.

b. Correction de pression:

La correction de pression se fait de la façon suivante. On calcule d'abord la divergence de \vec{u} (champ ponctuel), qui représente le second membre de l'équation de Poisson que l'on doit résoudre, avec conditions aux bords homogènes. Une fois la solution ϕ de cette équation trouvée, on peut corriger \mathbf{P} et \vec{u} en utilisant le gradient de la solution, afin que la condition d'anélasticité soit vérifiée. Tous les calculs se font ici sur les quantités ponctuelles.

c. Flux:

On commence par imposer les conditions aux limites pour \vec{u} . On calcule le tenseur des contraintes, et l'énergie cinétique.

c.1 Flux: Poisson:

On résout l'équation de Poisson pour la pression \mathbf{P} .

c.2 Flux: Mise à jour des grandeurs thermodynamiques:

On déduit la température et la densité dans tout le domaine. Ensuite sont calculées les conditions aux bords de l'énergie totale \mathbf{e} . Jusque là, les calculs se sont faits sur les valeurs aux points de grille.

c.3 Flux: Flux moyennés:

On calcule maintenant les flux moyennés sur les cellules à partir des champs ponctuels. S'appliquent sur les grandeurs \vec{u} , \mathbf{e} et \mathbf{C} .

d. Premier demi-pas de temps, en Euler:

Pour l'énergie \mathbf{e} , la quantité de mouvement \vec{u} et la concentration de traceur \mathbf{C} , l'évolution se fait dans l'espace moyenné.

$$\begin{aligned} u_{x1} &= u_x - \frac{dt}{2dV} Flux(u_x) \\ u_{y1} &= u_y - \frac{dt}{2dV} Flux(u_y) \\ u_{z1} &= u_z - \frac{dt}{2dV} Flux(u_z) - H\rho dt \end{aligned}$$

$$e_1 = e - \frac{dt}{2dV} Flux(e)$$

$$C_1 = C - \frac{dt}{2dV} Flux(C)$$

où V est le volume d'une cellule, dt le pas de temps, et H la hauteur d'échelle.

e. Reconstruction:

On entre dans cette routine encore une fois pour reconstruire les champs ponctuels.

f. Flux:

On y repasse une seconde fois pour mettre à jour les variables intermédiaires P_1 , T_1 , et ρ_1 .

f.1 Flux: Poisson:

On résout l'équation de Poisson sur la pression P_1 .

f.2 Flux: Mise à jour des grandeurs thermodynamiques:

On déduit la température et la densité dans tout le domaine. Ensuite sont calculées les conditions aux bords de l'énergie totale e_1 .

f.3 Flux: Flux moyennés:

On recalcule les flux moyennés sur les cellules à partir des champs ponctuels. S'applique sur les variables intermédiaires \vec{u}_1 , e_1 et C_1 .

g. Second demi-pas de temps, en Leap-Frog:

Ce demi-pas effectué, un pas de Runge-Kutta complet est effectué.

$$u_x = u_x - \frac{dt}{dV} Flux(u_{x1})$$

$$u_y = u_y - \frac{dt}{dV} Flux(u_{y1})$$

$$u_z = u_z - \frac{dt}{dV} Flux(u_{z1}) - Hdt\rho$$

$$e = e - \frac{dt}{dV} Flux(e_1)$$

$$C = C - \frac{dt}{dV} Flux(C_1)$$

3. Programme principal:

On revient dans le programme principal et on effectue le traitement des données. On enregistre à chaque pas de temps, les séries en temps pour \vec{u} , \mathbf{P} , \mathbf{T} , \mathbf{e} , ρ et \mathbf{C} , qui donnent l'évolution dans le temps de nos variables en un certain point du volume. Ce point est choisi de façon que l'on ne se trouve pas sur un élément de symétrie du système. Les courbes obtenues nous donnent ainsi une bonne idée de l'évolution de la simulation (ne serait-ce que pour vérifier qu'elle n'a pas explosée). On enregistre tout les n pas de temps, des coupes verticales et horizontales des champs de données. Cela va nous permettre de visualiser (IDL) le film en couleurs artificielles de l'évolution de notre instabilité. On peut par exemple visualiser indépendamment \vec{u} , \mathbf{P} , \mathbf{T} , \mathbf{e} , ρ , \mathbf{C} ainsi que la vorticité. Nous calculons aussi le spectre en énergie à partir des routines de FFT.

4. Force de cisaillement:

On réinjecte une force de cisaillement supplémentaire (de forme tangente hyperbolique) au système. C'est elle qui va alimenter le système en énergie extérieure, sans quoi l'instabilité finirait par s'éteindre. Le forçage est imposé en tout point du volume avec le même profil, on ne l'impose pas uniquement à l'entrée de notre système (ce qui est plus aisé à effectuer expérimentalement).

La fin d'une boucle est atteinte, on passe à l'itération suivante...

REMERCIEMENTS

Je tiens très vivement à remercier le Professeur Alain Vincent pour avoir encadré cette maîtrise, et pour sa constante présence dont j'ai pu profiter à bon escient. Je lui suis reconnaissant de m'avoir permis de partager ses vastes connaissances dans le domaine de la physique ainsi que du numérique. Le code utilisé (NSAA) a été écrit initialement par M. Ménéguzzi pour des écoulements diphasiques incompressible et modifié par A. Vincent et M. Ménéguzzi pour les gaz anélastiques stratifiés. M. Ménéguzzi a également formulé des remarques pertinentes sur ce manuscrit. Je tiens aussi à remercier le Professeur Andrei Malevsky pour les conseils numériques qu'il m'a donné sur la parallélisation du schéma Gauss-Seidel, ainsi que la Professeure Anne Bourlioux pour ses conseils sur le choix d'un schéma de résolution de l'équation de Poisson adapté à la divergence nulle. Je remercie également le CERCA où j'ai pu utiliser des ordinateurs SiliconGraphics R4000 et R8000 PowerChallenge de haute performance, ainsi que son gérant de système, Richard Lefèvre, pour son soutien technique. Une partie des simulations a été réalisée sur PowerChallenge (PHYSS1) de l'université de Montréal. Les graphiques ont été réalisés à l'aide des logiciels Gnuplot au CERCA, et IDL au département de physique de l'Université de Montréal.

Enfin, je remercie la compagnie **Olorell S.A.** pour avoir initié et financé cette étude.