Université de Montréal

# UN QUASI-CRISTAL VU COMME UN ENSEMBLE MODÈLE

par

**Roman Grodzicky**

Département de physique
Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de PhilosophiæDoctor (Ph.D.)
en physique

septembre 1998

**Université de Montréal**

Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée

# UN QUASI-CRISTAL VU COMME UN ENSEMBLE MODÈLE

présentée par

**Roman Grodzicky**

a été evaluée par un jury composé des personnes suivantes :

*nom du président* Luc Vinet

(président-rapporteur)

*Jiří Patera*

(directeur de recherche)

~~nom du co-directeur~~ Pavel Winternitz

~~(co-directeur)~~ membre du jury

~~nom du membre de jury~~

~~(membre du jury)~~

*examinateur externe* Edita Pelantova

(examinateur externe)

représentant du doyen : Richard Leonelli.

Thèse acceptée le :

*jour mois année* 08.12.1998

# SOMMAIRE

Cette thèse abordera certains éléments mathématiques associés à la considération d'un quasi-cristal comme un ensemble modèle, d'après la théorie développée par Y. Meyer et R. V. Moody. Un algorithme permettant le calcul exact de l'image de diffraction d'un quasi-cristal décrit par un ensemble modèle sera présenté. Un exemple unidimensionnel sera donné. La notion d'$\epsilon$-dual d'un ensemble sera introduite, avec une description de son lien avec l'image de diffraction d'un quasi-cristal physique. Les propriétés mathématiques des $\epsilon$-duaux seront explorées. L'exemple unidimensionnel sera refait à l'aide des $\epsilon$-duaux, et les résultats obtenus concorderont avec le calcul exact initial.

# REMERCIEMENTS

L'auteur désire exprimer sa reconnaissance au professeur Jiří Patera pour son assistance, ainsi qu'aux professeurs R.V. Moody et E. Pelantová, de même qu'à Z. Masáková.

J'aimerais également remercier mon épouse, Madeleine, pour son support.

# TABLE DES MATIÈRES


**SOMMAIRE** **iii**

**REMERCIEMENTS** **iv**

**INTRODUCTION** **1**

**CHAPITRE 1. L'image de diffraction d'un quasi-cristal obtenu par la méthode "coupe et projection"** **3**

1. **Considérations théoriques** **3**

2. **Méthode de calcul** **5**

3. **Algorithme** **7**

4. **Exemple: quasi-cristal unidimensionnel basé sur $\mathbb{Z}[\tau]$** **8**

**CHAPITRE 2. Les quasi constantes** **9**

1. **L'approche des quasi constantes** **10**

2. Limites du modèle 14

3. Concordance avec l'expérimentation 20

4. Le quasi-cristal (ou cristal) complet 22

5. Prédictions physiques du modèle 25

**CHAPITRE 3. $\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}$-dual d'un ensemble** **27**

1. Résultats 27

**CHAPITRE 4. $\epsilon_{<}^{\mathbb{R}^n}$-dual d'un ensemble** **50**

1. Résultats 50

**CHAPITRE 5. $\epsilon_{<}^{\mathbb{D}_j}$-dual d'un ensemble** **52**

1. Résultats 52

**CHAPITRE 6. $\epsilon_{\leq}^{\mathbb{D}^j}$-dual d'un ensemble** **55**

1. Résultats 55

2. **Exemple: quasi-cristal unidimensionnel basé sur $\mathbb{Z}[\tau]$** **61**

**APPENDICE A. Ensemble polaire et $\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}$-dual** **63**

1. Résultats 63

**CONCLUSION** **65**

**RÉFÉRENCES** **66**

# INTRODUCTION

En 1984, quatre chercheurs (Dany Shechtman, Ilan Blech, John W. Cahn et Denis Gratias) ont découvert un alliage d'aluminium et de manganèse possédant une image de diffraction de rayons X discrète mais avec une symétrie rotationnelle d'ordre 5. Rappelons qu'on dit qu'une figure possède une symétrie rotationnelle d'ordre $n$ lorsqu'il existe un axe autour duquel une rotation de $\frac{360^0}{n}$ de la figure la rend indiscernable d'elle-même avant l'opération. Les cristaux, de même que toute structure discrète ayant une symétrie translationnelle (périodicité), ne peuvent avoir une symétrie rotationnelle d'ordre autre que 1,2,3,4, ou 6. La symétrie d'ordre 5 n'étant pas compatible avec une structure cristalline, le terme quasi-cristal fut proposé.

La disposition des atomes d'un cristal (structure discrète et périodique) est bien connue: Les sites atomiques peuvent être représentés par des points dans un système de coordonnées cartésiennes (e.g. à deux ou trois dimensions), où les repères de chaque point sur chacun des axes est un entier positif, négatif, ou 0. Notons que les axes ne sont pas nécessairement orthogonaux, et la graduation peut différer d'un axe à l'autre. L'ensemble de points ainsi obtenus s'appelle réseau de Bravais, et cette notion peut être généralisée à un nombre arbitraire de dimensions.

Les modèles représentant les quasi-cristaux diffèrent de ceux décrivant des cristaux: on y fait intervenir un "cristal" (réseau de Bravais) de $2n$ dimensions afin d'obtenir un quasi-cristal en $n$ dimensions. Plus précisément, l'espace $2n$-dimensionnel est scindé en deux sous-espaces à $n$ dimensions (choisis d'avance) qui sont mutuellement orthogonaux. L'un des sous-espaces est appelé espace "physique"; c'est à l'intérieur de celui-ci que se trouve le quasi-cristal. Le second sous-espace est l'espace de la "fenêtre". Sa pertinence intervient ainsi:

La construction du quasi-cristal repose sur la projection dans l'espace physique des points du cristal $2n$-dimensionnel. Cependant si on projetait tous les points du cristal sans exception, la structure obtenue dans l'espace physique ne constituerait pas un quasi-cristal car celle-ci ne serait pas discrète. Afin que la projection donne un ensemble discret, une sélection doit être effectuée. Celle-ci fait intervenir l'espace "fenêtre". Dans cet espace, on détermine une région (d'habitude bornée, connexe, dont l'intérieur n'est pas vide) appelée fenêtre. Une seconde projection du cristal est établie, cette fois-ci dans l'espace fenêtre. Munis des deux projections, nous pouvons définir le processus de sélection nécessaire:

*La projection dans l'espace physique d'un point du cristal sera gardée si et seulement si la projection du même point dans l'espace "fenêtre" se retrouve dans la fenêtre pré-établie.*

Cette méthode de générer un quasi-cristal, où l'on scinde un espace en deux, et on projette ensuite, est appelée méthode "coupe et projection" ("cut and project scheme"). Le quasi-cristal ainsi obtenu est appelé **ensemble modèle**. La projection dans l'espace physique est bijective sur le cristal. La fonction inverse (définie sur le quasi-cristal) suivie de la projection dans l'espace fenêtre nous donne une application appelée $*$ ("star map"). Cette application établit un lien plus direct entre les deux espaces $n$-dimensionnels.

L'image de diffraction d'un tel quasi-cristal est moins triviale à déterminer que dans le cas d'un cristal. En s'inspirant de certains travaux antérieurs [E1], [H1], [KD], [Mo], un algorithme permettant le calcul exact de l'image de diffraction d'un quasi-cristal décrit par un ensemble modèle sera présenté dans cette thèse. Un exemple unidimensionnel sera traité. L'une des étapes de l'algorithme (l'étape 4) souvent ne peut être calculée explicitement, d'où la pertinence d'examiner une autre approche. La notion d'$\epsilon$-dual d'un ensemble sera alors définie, et son lien avec l'image de diffraction d'un quasi-cristal physique sera exposé. Les propriétés mathématiques des $\epsilon$-duaux seront explorées. L'exemple unidimensionnel sera refait à l'aide des $\epsilon$-duaux, et les résultats obtenus seront en accord avec le calcul exact initial.

# CHAPITRE 1

## L'image de diffraction d'un quasi-cristal obtenu par la méthode "coupe et projection"

### 1. Considérations théoriques

Soient p l'espace physique, w l'espace de la fenêtre ("window"), avec

$$p = \mathbb{R}^n, w = \mathbb{R}^n, p \times w = \mathbb{R}^{2n}.$$

Soit L le réseau de Bravais cristallographique dans $\mathbb{R}^{2n}$ sur lequel on base le schème "coupe et projection" ("cut and project scheme"). Représentons les projections associées par $p_p$ et $p_w$. Posons $\mathbb{D}_1 := p_p(L) \subseteq \mathbb{R}^n$. $\mathbb{D}_1$ contient le quasi-cristal $\Lambda$ du schème.

Cherchons maintenant les points de l'image de diffraction de $\Lambda$ dont l'intensité est non nulle, i.e.

$$\{z \in \mathbb{R}^n || \sum_{x \in \Lambda} e^{\pm 2\pi i x \cdot z}|^2 > 0\}.$$

(Le résultat est le même avec le signe $+$ ou $-$ dans l'exposant.)

Selon A. Hof [H1], pour

$$\nu := \sum_{x \in \Lambda} \delta_x,$$

on a

$$\hat{\nu} := \sum_{\xi \in X^*} c_\xi \delta_\xi$$

où $c_\xi \in \mathbb{C}$, et $X^*$ est un ensemble dénombrable. (Ici le symbole $*$ ne fait **PAS** allusion à l'application $*$ ("star map").) Ainsi les points $z \in \mathbb{R}^n$ recherchés doivent se retrouver parmi les $\xi \in \mathbb{R}^n$ apparaissant dans l'expression ci-dessus décrivant $\hat{\nu}$.

En suivant l'exemple de A. Hof [H1] (pages 248-249), on peut poser

$$S_\Omega := \{x \in p \times w | p_w(x) \in \Omega\}$$

où $\Omega$ est un ensemble borné de w. (Notons que le volume de $\Omega$ est fini et peut être calculé par une intégrale de Riemann.) On peut maintenant définir

$$\nu_\Omega := \sum_{x \in S_\Omega \cap L} \delta_{p_p(x)}.$$

On constate que $\nu_\Omega$ peut être réécrit de la façon suivante:

$$\nu_\Omega = \int_w \mathbf{1}_s \sum_{x \in L} \delta_x$$

où

$$1_S := \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}_\Omega$$

(c'est le produit tensoriel de la fonction constante $\mathbf{1}$ sur p et $\mathbf{1}_\Omega$ sur w), et on a

$$(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}_\Omega)\hat{} = \delta_0 \otimes \hat{\mathbf{1}_\Omega}.$$

Nous allons maintenant utiliser

$$(\sum_{x \in L} \delta_x)\hat{} = \sum_{\lambda \in Dual(L)} \delta_\lambda$$

(utilisée en cristallographie classique), où $Dual(L)$ est le “dual cristallographique classique” de L:

$$Dual(L) := \{\lambda \in \mathbb{R}^{2n} | x \cdot \lambda \in \mathbb{Z}, \forall x \in L\}.$$

Nous obtenons alors

$$(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}_\Omega \sum_{x \in L} \delta_x)\hat{} = (\delta_0 \otimes \hat{\mathbf{1}_\Omega}) * \sum_{\lambda \in Dual(L)} \delta_\lambda. \qquad (*)$$

Toujours en suivant l'exemple de A. Hof, si $f$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}^{2n}$ qui est absolument intégrable, et $g$ est la fonction sur p définie par $g := \int_w f \, d\lambda$, alors $\forall \xi \in p \times w$, $\hat{g}(p_p(\xi)) = \hat{f}(p_p(\xi) \times p_w(0))$. Pour une somme (finie ou infinie) de telles fonctions $f_j$, i.e. $\sum_j f_j$, où

$$g_j := \int_w f_j \, d\lambda$$

(supposons, par ailleurs, que les $f_j$ et les $g_j$ sont non négatifs et mesurables), on aura

$$\begin{aligned} &(\sum_j g_j(p_p(\xi)))\hat{} \\ &= \sum_j \hat{f}_j(p_p(\xi) \times p_w(0)) \\ &= (\sum_j f_j)\hat{}(p_p(\xi) \times p_w(0)). \end{aligned}$$

Dans ce cas, $\hat{\nu}_\Omega$ peut être obtenu en évaluant $(*)$ à $p_p(\lambda) \times p_w(0)$, i.e.

$$\hat{\nu}_\Omega = \sum_{\lambda \in Dual(L)} \hat{\mathbf{1}_\Omega}(-p_w(\lambda)) \delta_{p_p(\lambda)}$$

qui est de la forme

$$\hat{\nu} := \sum_{\xi \in X^*} c_\xi \delta_\xi$$

avec $X^* = p_p(Dual(L))$.

Il suffit donc de vérifier uniquement les points $z \in p_p(Dual(L))$ afin de retrouver tous les pics de l'image de diffraction de $\Lambda$. Ce sont les seuls "candidats"; l'intensité est nulle ailleurs.

## 2. Méthode de calcul

En calculant l'intensité $I(z)$, l'expression

$$|\sum_{x\in\Lambda} e^{\pm 2\pi i x\cdot z}|^2$$

peut diverger. Ceci arrive en particulier pour $z = 0$. (La "sévérité " de la divergence en $z = 0$ ne peut jamais être dépassée.)

Afin d'éviter un tel problème, définissons une version normalisée de l'intensité tel que, pour $z = 0$, l'intensité vaut 1. On supposera que $int(\Omega) \neq \emptyset$.

Puisque $\Lambda$ est un ensemble dénombrable, étiquetons ses éléments ainsi: $x_1, x_2, x_3, ...$

Posons comme intensité "normalisée"

$$I'(z) := \lim_{N\to\infty} \frac{|\sum_{j=1}^N e^{\pm 2\pi i x_j\cdot z}|^2}{|\sum_{j=1}^N e^{\pm 2\pi i x_j \cdot 0}|^2}.$$

Dans la section précédente on a vu que l'intensité en un point est bien définie. $I'(z)$ permet d'exprimer celle-ci comme une fraction du pic en 0. On a alors $I'(z) \in [0,1]$ et $I'(z)$ est bien défini, donc la limite ci-dessus existe.

**Si l'application $*$ est bijective sur $\Lambda$:**

Calculons maintenant la valeur de la limite définissant $I'(z)$:

Il suffit de considérer $u \in Dual(L)$ tel que $p_p(u) = z$. (L'intensité est nulle ailleurs.) Nous avons alors

$$\begin{aligned} I'(z) &:= \lim_{N\to\infty} \frac{|\sum_{j=1}^N e^{\pm 2\pi i x_j\cdot p_p(u)}|^2}{|\sum_{j=1}^N 1|^2} \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{|\sum_{j=1}^N e^{\mp 2\pi i x_j^*\cdot p_w(u)}|^2}{|\sum_{j=1}^N 1|^2} \end{aligned}$$

(Cette étape est permise puisque $*$ est une application bijective sur $\Lambda$, et $x_j \cdot p_p(u) + x_j^* \cdot p_w(u) \in \mathbb{Z}$ étant donné que $u \in Dual(L)$.)

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{|V_N \sum_{j=1}^{N} e^{\mp 2\pi i x_j^* \cdot p_w(u)}|^2}{|V_N \sum_{j=1}^{N} 1|^2}$$

($V_N \neq 0$)

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{|\sum_{j=1}^{N} e^{\mp 2\pi i x_j^* \cdot p_w(u)} V_N|^2}{|\sum_{j=1}^{N} 1 \cdot V_N|^2}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{|\sum_{j=1}^{N} e^{\mp 2\pi i x_j^* \cdot p_w(u)} \Delta V_{j,N}|^2}{|\sum_{j=1}^{N} 1 \cdot \Delta V_{j,N}|^2}$$

où les $\Delta V_{j,N}$ sont des éléments de volume cubiques, tous de volume $V_N$, de façon à ce que $|\Delta V_{j,N}| = V_N \to 0$ lorsque $N \to \infty$.

Les $\Delta V_{j,N}$ sont choisis afin de remplir l'intérieur de $\Omega$ afin d'approximer $|\Omega|$ (qui est non nul puisque $int(\Omega) \neq \emptyset$, et fini puisque $\Omega$ est borné). L'étiquetage initial des éléments de $\Lambda$ aurait pu avoir été fait, au moins en principe, de façon à avoir un $x_j^*$ dans chaque $\Delta V_{j,N}$, peu importe la valeur de N. (On peut accomplir ceci, par exemple, en choisissant chaque $x_j^*$ au centre de chaque $\Delta V_{j,N}$ correspondant. En subdivisant chacun des $\Delta V_{j,N}$ en $3^n$ cubes (ou hypercubes), les $x_j^*$ demeureront au centre de chaque nouvel élément de volume (plus petit), qui retiendra son ancienne étiquette $j$. Les nouveaux $\Delta V_{j,N}$ seront obtenus: a) en subdivisant les anciens, et b) en remplissant davantage le volume libre restant de $\Omega$ à l'aide de nouveaux éléments de volume. La subdivision de plus en plus fine de $\Omega$ définira la procédure d'étiquetage des éléments de $\Lambda$.)

Nous avons maintenant

$$I'(z) = \lim_{N\to\infty} \frac{|\sum_{j=1}^{N} e^{\mp 2\pi i x_j^* \cdot p_w(u)} |\Delta V_{j,N}||^2}{|\sum_{j=1}^{N} 1 \cdot |\Delta V_{j,N}||^2}.$$

Pour un certain ensemble (infini) $S \subseteq \mathbb{N}$, pour $N \in S$, l'expression ci-dessus fait référence à des partitions de plus en plus fines servant à approximer $\Omega$. Étant donné l'existence de $I'(z)$, nous pouvons évaluer la limite ci-dessus en étudiant les valeurs de $N$ sur n'importe quel sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$, notamment sur $S$. L'expression ci-dessus s'écrit alors ainsi:

$$I'(z) = \lim_{\substack{N\to\infty \\ N\in S}} \frac{|\sum_{j=1}^{N} e^{\mp 2\pi i x_j^* \cdot p_w(u)} |\Delta V_{j,N}||^2}{|\sum_{j=1}^{N} 1 \cdot |\Delta V_{j,N}||^2}$$

$$= \frac{|\lim_{\substack{N\to\infty \\ N\in S}} \sum_{j=1}^{N} e^{\mp 2\pi i x_j^* \cdot p_w(u)} |\Delta V_{j,N}||^2}{|\lim_{\substack{N\to\infty \\ N\in S}} \sum_{j=1}^{N} 1 \cdot |\Delta V_{j,N}||^2}.$$

Dans l'expression précédente on retrouve deux sommes de Riemann, dont les deux existent, et celle au dénominateur est non nulle. Donc

$$I'(z) = \frac{|\int_\Omega e^{\mp 2\pi i y \cdot p_w(u)}\, d^n y|^2}{|\Omega|^2}.$$

## 3. Algorithme

On suppose que $\Omega$ est borné, que son intérieur est non vide, et que l'application $*$ est bijective sur $\Lambda$.

1) Trouver L, si inconnu. ($L = \mathbb{D}_1 \times \mathbb{D}_1^*$ lorsque $*$ est définie sur $\mathbb{D}_1$.) Exprimer L en coordonnées orthonormales usuelles.

2) Trouver $Dual(L)$: prendre les vecteurs de la base de L obtenus en 1); placer ceux-ci sous forme de colonnes dans une matrice $A$ qui sera 2n par 2n; trouver $A^{-1}$; les rangées de $A^{-1}$ sont les vecteurs de la base du réseau réciproque, exprimées en coordonnées orthonormales usuelles.

3) Etablir un seuil d'intensité (normalisée), dénotée $I'_{seuil}$, au-dessous duquel les intensités ne peuvent être détectées.

4) Trouver

$$S_1 := \{v \in \mathbb{R}^n | \frac{|\int_\Omega e^{\mp 2\pi i y \cdot v}\, d^n y|^2}{|\Omega|^2} \geq I'_{seuil}\}.$$

5) Trouver

$$S_2 := \{u \in Dual(L) | p_w(u) \in S_1\}.$$

6) Trouver

$$S_3 := p_p(S_2)$$

et $S_3$ nous donnera l'image de diffraction.

(Si $p_p$ et $p_w$ sont deux applications bijectives sur $Dual(L)$, alors $*$ est bijective sur $p_p(Dual(L))$, avec "$-*$" (l'application inverse) étant bijective sur $p_w(Dual(L))$, et $S_3 = (S_1 \cap (p_p(Dual(L))^*)^{-*} = (S_1 \cap p_w(Dual(L)))^{-*}$.)

## 4. Exemple: quasi-cristal unidimensionnel basé sur $\mathbb{Z}[\tau]$

$\mathbb{D}_1 = \mathbb{Z}[\tau], \Omega \in \{[a,b], (a,b], [a,b), (a,b)\}$.

1) L:

$$L = \{v \in \mathbb{R}^2 | v = m(1,1) + n(\tau, \tau'), \forall m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

2) On cherche $Dual(L)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 1 & \tau' \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\tau^2} & \frac{1}{(\tau')^2+1} \\ \frac{\tau}{1+\tau^2} & \frac{\tau'}{(\tau')^2+1} \end{pmatrix}$$

$$Dual(L) = \{v \in \mathbb{R}^2 | v = m(\frac{1}{1+\tau^2}, \frac{1}{(\tau')^2+1}) + n(\frac{\tau}{1+\tau^2}, \frac{\tau'}{(\tau')^2+1}), \forall m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

(Cet ensemble est $\mathbb{Z}[\tau]^0 \times (\mathbb{Z}[\tau]^0)'$.)

3) On choisit $I'_{seuil}$ "grand" (proche de 1).

4) $S_1$:

$$\begin{aligned} S_1 &:= \{v \in \mathbb{R}^n | \frac{|\int_a^b e^{\mp 2\pi i v y}\, dy|^2}{(b-a)^2} \geq I'_{seuil}\} \\ &= \{v \in \mathbb{R}^n | \left(\frac{sin(\pi v(b-a))}{\pi v(b-a)}\right)^2 \geq I'_{seuil}\} \\ &= [-\theta(I'_{seuil}), \theta(I'_{seuil})] \end{aligned}$$

où

$$\left(\frac{sin(\pi\theta(I'_{seuil})(b-a))}{\pi\theta(I'_{seuil})(b-a)}\right)^2 = I'_{seuil}.$$

On a ensuite

$$\begin{aligned} S_3 &= ([-\theta(I'_{seuil}), \theta(I'_{seuil})] \cap \mathbb{Z}[\tau]^0)^{-*} \\ &= ([-\theta(I'_{seuil}), \theta(I'_{seuil})] \cap \mathbb{Z}[\tau]^0)' \\ &= \frac{1}{\tau^2+1} \sum \left([-((\tau')^2+1)\theta(I'_{seuil}), ((\tau')^2+1)\theta(I'_{seuil})]\right) \end{aligned}$$

ce qui nous donne l'image de diffraction.

Notons qu'au niveau de l'algorithme général, l'étape 4) peut être difficile ou même impossible d'effectuer de façon exacte. Les prochains chapitres développeront une méthode approximative pour obtenir l'image de diffraction d'un quasi-cristal dans le contexte d'un seuil d'intensité élevé pour qu'il y ait détection.

# CHAPITRE 2

## Les quasi constantes

Soit $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ un quasi-cristal ou un cristal. Dans une expérience de diffraction de rayons X par $\Lambda$, l'amplitude $A(\mu)$ de l'onde diffractée obtenue à un point $\mu \in \mathbb{R}^n$ est donnée par

$$A(\mu) = c \sum_{x \in \Lambda} e^{2\pi i x \cdot \mu}$$

où c est une constante quelconque. (On supppose que les atomes du quasi-cristal ou du cristal peuvent être représentés par des points.)

L'intensité $I(\mu)$ au point $\mu$ est donnée par

$$I(\mu) = |A|^2.$$

En suivant l'exemple de certains auteurs [E1], [H1], [KD], [M2], [Mo], nous supposons que l'aspect discret de l'image de diffraction dépend de la sensibilité limitée des instruments de mesure, i.e. que l'intensité lumineuse en un point doit être au-dessus d'un certain seuil pour être captée.

Considérons le cas le plus simple, c'est-à-dire où seulement les points les plus intenses sont perçus. Ceux-ci correspondent clairement aux $\mu$ tels que $e^{2\pi i x \cdot \mu}$ est une constante. Celle-ci doit forcément être de la forme $e^{2\pi i \alpha}$, avec $\alpha \in [0, 1)$.

Constatons que, sans perte de généralité, on peut poser $\alpha \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Nous obtenons alors

$$A(\mu) = ce^{2\pi i \alpha} \sum_{x \in \Lambda} 1.$$

Pour un quasi-cristal (ou un cristal) physique, celui-ci est fini, et la somme ci-dessus converge. Si $N$ est le nombre d'atomes du quasi-cristal (ou du cristal), on obtiendra

$$A(\mu) = ce^{2\pi i \alpha} N$$

et l'intensité en $\mu$ sera maximale. Elle s'écrira alors ainsi:

$$I(\mu) = N^2|c|^2.$$

## 1. L'approche des quasi constantes

Pour obtenir un point $\mu$ quelconque de l'image de diffraction observée, $I(\mu)$ doit être élevée (quasi maximale); ceci se produira lorsque $e^{2\pi i x\cdot\mu}$ est *quasiment constant* pour tout $x \in \Lambda$, i.e. lorsque $e^{2\pi i x\cdot\mu}$ est une **"quasi constante"**. En d'autres mots, il existe $\alpha \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ tel que

$$|e^{2\pi i x\cdot\mu} - e^{2\pi i\alpha}| \leq \epsilon$$

pour tout $x \in \Lambda$.

Cette même condition peut être réécrite ainsi:

$$\exists\alpha \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

tel que

$$|e^{2\pi i(\mu\cdot x-\alpha)} - 1| \leq \epsilon, \forall x \in \Lambda.$$

Définissons maintenant l'ensemble suivant pour $\epsilon \in [0, 2)$:

$$\Lambda^{\alpha}{}^{\epsilon}{\leq}^{\mathbb{R}^n} := \{\mu \in \mathbb{R}^n||e^{2\pi i(\mu\cdot x-\alpha)} - 1|$$

$$= 2|sin(\pi(\mu \cdot x - \alpha))| \leq \epsilon, \forall x \in \Lambda\}.$$

L'image de diffraction correspondra alors à

$$\bigcup_{\alpha\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \Lambda^{\alpha}{}^{\epsilon}{\leq}^{\mathbb{R}^n}.$$

Notons que, pour $\epsilon$ assez petit, l'ensemble ci-dessus sélectionnera les points les plus lumineux (donc visibles) et donnera ainsi l'image de diffraction.

Ajoutons maintenant les deux hypothèses suivantes en s'inspirant de considérations physiques:

1) $0 \in \Lambda$ (plausible puisque l'origine de notre système de coordonnées devrait pouvoir être placé n'importe où dans le quasi-cristal (ou dans le cristal), en autant qu'il soit loin des $\mu$ observés (les modèles de diffraction par des structures cristallines et quasi cristallines supposent

que $\mu >> 0$)). (Si $0 \notin \Lambda$, on utilise le fait que, dans les expériences de diffraction, $\mu >> x$ (les $\mu$ étant les valeurs observées), d'où $x \approx 0$ à l'échelle des $\mu$, $\forall x \in \Lambda$. Donc, de façon approximative, $0 \in \Lambda$.)

2) $\epsilon < \sqrt{2}$ (plausible puisque nous supposons que $\epsilon$ est petit).

La proposition suivante nous donnera une écriture équivalente mais grandement simplifiée de l'image de diffraction.

Proposition 1.1. *Supposons que $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ (par exemple, $\Lambda$ est un quasi-cristal ou un cristal), avec $0 \in \Lambda$, $\epsilon \in [0, \sqrt{2})$.*

*Définissons*

$$\Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} := \{\mu \in \mathbb{R}^n \| e^{2\pi i \mu \cdot x} - 1| \leq \epsilon', \forall x \in \Lambda\}$$

*où $\epsilon' \in [0, 2)$.*

*Alors:*

*a)*

$$\bigcup_{\alpha \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \Lambda^{\alpha \epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} = \Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}},$$

*où*

$$\epsilon' = 2\epsilon\sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4}}$$

*b) $\epsilon' \in [0, 2)$.*

Démonstration. 1) Écrivons

$$\bigcup_{\alpha \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \Lambda^{\alpha \epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$$

sous la forme

$$\bigcup_{\alpha \in [0, \frac{1}{2}]} (\Lambda^{\alpha \epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} \cup \Lambda^{-\alpha \epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}).$$

2) Notons que $0 \in \Lambda$

$$\Longrightarrow \forall \mu \in \Lambda^{\pm \alpha \epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}, \alpha \in [0, \frac{1}{2}],$$

$$\epsilon \geq 2|sin(\pi(\mu \cdot 0 \mp \alpha))| = 2|sin(\pi\alpha)|$$

$$\Longrightarrow \alpha \in \big(\big[-\frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi}, \frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi}\big] + \mathbb{Z}\big) \bigcap [0, \frac{1}{2}]$$
$$= \big[0, \frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi}\big]$$

(puisque $0 \leq \epsilon < \sqrt{2} < 2$).

Nous avons ainsi

$$\bigcup_{\alpha \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \Lambda^{\alpha\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} = \bigcup_{\alpha \in \left[0, \frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi}\right]} (\Lambda^{\alpha\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} \cup \Lambda^{-\alpha\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}).$$

3) $\mu \in \big(\Lambda^{\alpha\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} \bigcup \Lambda^{-\alpha\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}\big)$ (avec $\alpha \in [0, \frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi}]$)

$$\Longleftrightarrow 2|sin(\pi(\mu \cdot x \mp \alpha))| \leq \epsilon, \forall x \in \Lambda$$

(avec $\mu \in \mathbb{R}^n$)

$$\Longleftrightarrow \pi(\mu \cdot x \mp \alpha) \in \big(\big[-arcsin(\frac{\epsilon}{2}), arcsin(\frac{\epsilon}{2})\big] + \pi\mathbb{Z}\big), \forall x \in \Lambda$$

(avec $\mu \in \mathbb{R}^n$)

$$\Longleftrightarrow \pi\mu \cdot x \in \Big(\big(\big[-arcsin(\frac{\epsilon}{2}) + \pi\alpha, arcsin(\frac{\epsilon}{2}) + \pi\alpha\big] + \pi\mathbb{Z}\big)$$
$$\bigcup \big(\big[-arcsin(\frac{\epsilon}{2}) - \pi\alpha, arcsin(\frac{\epsilon}{2}) - \pi\alpha\big] + \pi\mathbb{Z}\big)\Big)$$
$$= \big[-arcsin(\frac{\epsilon}{2}) - \pi\alpha, arcsin(\frac{\epsilon}{2}) + \pi\alpha\big] + \pi\mathbb{Z},$$

$\forall x \in \Lambda$ (avec $\mu \in \mathbb{R}^n$)

(i.e. $(A + \pi\mathbb{Z}) \cup (B + \pi\mathbb{Z}) = (A \cup B) + \pi\mathbb{Z}$)

$$\Longleftrightarrow 2|sin(\pi\mu \cdot x)| \in \big[0, 2|sin(arcsin(\frac{\epsilon}{2}) + \pi\alpha)|\big],$$

$\forall x \in \Lambda$ (avec $\mu \in \mathbb{R}^n$).

Ainsi

$$\bigcup_{\alpha \in \left[0, \frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi}\right]} (\Lambda^{\alpha\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} \cup \Lambda^{-\alpha\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}})$$
$$= \{\mu \in \mathbb{R}^n | \forall x \in \Lambda,$$
$$2|sin(\pi\mu \cdot x)|$$
$$\in \bigcup_{\alpha \in \left[0, \frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi}\right]} [0, 2|sin(arcsin(\frac{\epsilon}{2}) + \pi\alpha)|]\}$$
$$= \{\mu \in \mathbb{R}^n | \forall x \in \Lambda, 2|sin(\pi\mu \cdot x)|$$

$$\in [0, 2|sin(2arcsin(\frac{\epsilon}{2}))|]\}$$

$$= \{\mu \in \mathbb{R}^n | \forall x \in \Lambda, 2|sin(\pi\mu \cdot x)|$$

$$\in [0, 2\epsilon\sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4}}]\}.$$

(Posons $\epsilon' := 2\epsilon\sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4}}$. Pour $\epsilon \in [0, \sqrt{2})$ on a $2\epsilon \geq 0$ et $\sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4}} > 0$, d'où $\epsilon' \geq 0$. Montrons que $\epsilon' < 2$:

Supposons le contraire: $\exists t \in [0, \sqrt{2})$ tel que $2t\sqrt{1 - \frac{t^2}{4}} \geq 2$

$$\implies 4t^2(1 - \frac{t^2}{4}) \geq 4$$

$$\implies -t^4 + 4t^2 - 4 \geq 0$$

$$\implies t^2 = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$\implies t = \pm\sqrt{2}$$

ce qui est absurde car $t \in [0, \sqrt{2})$. Donc $\epsilon' < 2$.

On a alors $\epsilon' \geq 0$ et $\epsilon' < 2$, ce qui prouve la partie b) de la proposition.)

Nous pouvons maintenant écrire

$$\{\mu \in \mathbb{R}^n | \forall x \in \Lambda, 2|sin(\pi\mu \cdot x)|$$

$$\in [0, 2\epsilon\sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4}}]\}$$

$$= \{\mu \in \mathbb{R}^n | \forall x \in \Lambda, 2|sin(\pi\mu \cdot x)|$$

$$\leq 2\epsilon\sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4}} = \epsilon' < 2\}$$

$$= \{\mu \in \mathbb{R}^n | \forall x \in \Lambda, |e^{2\pi i\mu \cdot x} - 1| \leq \epsilon' < 2\}$$

$$= \{\mu \in \mathbb{R}^n || e^{2\pi i\mu \cdot x} - 1| \leq \epsilon', \forall x \in \Lambda\}$$

(avec $\epsilon' \in [0, 2)$)

$$= \Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$$

$$\implies \bigcup_{\alpha \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \Lambda^{\alpha \epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} = \Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}},$$

où

$$\epsilon' = 2\epsilon\sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4}},$$

ce qui prouve a). $\square$

## 2. Limites du modèle

a) Constatons que le modèle précédent nous donne des conditions suffisantes pour obtenir un point d'intensité élevée (pour $\epsilon$ assez petit) ($\epsilon \in [0,1]$):

$$\mu \in \bigcup_{\alpha \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \Lambda^{\alpha \epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}}$$

$$\Longrightarrow \exists \alpha \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

tel que

$$\begin{aligned}
\epsilon &\geq |e^{2\pi i x \cdot \mu} - e^{2\pi i \alpha}| \\
\Longrightarrow \sum_{x \in \Lambda} \epsilon &\geq \sum_{x \in \Lambda} |e^{2\pi i x \cdot \mu} - e^{2\pi i \alpha}| \\
&\geq |\sum_{x \in \Lambda} (e^{2\pi i x \cdot \mu} - e^{2\pi i \alpha})| \\
&= |(\sum_{x \in \Lambda} e^{2\pi i x \cdot \mu}) - (\sum_{x \in \Lambda} e^{2\pi i \alpha})| \\
&\geq || \sum_{x \in \Lambda} e^{2\pi i x \cdot \mu}| - | \sum_{x \in \Lambda} e^{2\pi i \alpha}|| \\
&= || \sum_{x \in \Lambda} e^{2\pi i x \cdot \mu}| - N| \\
&= N - | \sum_{x \in \Lambda} e^{2\pi i x \cdot \mu}| \\
&= N - \frac{|A(\mu)|}{|c|} \\
&(c \neq 0) \\
\Longrightarrow N\epsilon &\geq N - \frac{|A(\mu)|}{|c|} \\
\Longrightarrow \frac{|A(\mu)|}{|c|} &\geq N(1-\epsilon).
\end{aligned}$$

Cependant, on doit toujours avoir

$$N^2 |c|^2 \geq I(\mu) = |A(\mu)|^2$$

ce qui implique

$$N \geq \frac{|A(\mu)|}{|c|} \geq N(1-\epsilon)$$

d'où, pour $\epsilon \in [0,1]$,

$$N^2 |c|^2 (1-\epsilon)^2 \leq I(\mu) \leq N^2 |c|^2.$$

Soit **l'image de diffraction physique (IDP)**

$$IDP := \{\mu \in \mathbb{R}^n \| \sum_{x \in \Lambda} e^{2\pi i x \cdot \mu}|^2 \geq I_{seuil}\}$$

pour un $I_{seuil} \geq 0$ (seuil d'intensité).

Notons que l'IDP dépend de $I_{seuil}$:

$IDP = IDP(I_{seuil})$.

Notons que, en ce qui concerne l'IDP,

$$I_{seuil} \leq \inf_{\mu \in \bigcup_{\alpha \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \Lambda^{\alpha \epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}} I(\mu)$$

$$\Longrightarrow \bigcup_{\alpha \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \Lambda^{\alpha \epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} \subseteq IDP(I_{seuil}).$$

Constatons aussi que

$$\epsilon \to 0 \implies I(\mu) \to N^2|c|^2.$$

b)

Proposition 2.1. *Soit* $\tilde{\epsilon} \in [0, \sqrt{2})$.

*Alors*

$$\exists I_{seuil} = I_{seuil}(\tilde{\epsilon}) \not\equiv N^2|c|^2$$

*tel que*

$$I(\mu) \geq I_{seuil}(\tilde{\epsilon})$$

$$\Longrightarrow \mu \in \bigcup_{\alpha \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \Lambda^{\alpha \tilde{\epsilon}^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}.$$

Démonstration. Soit, $\forall x \in \Lambda, \forall \alpha \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \forall \mu \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x, \mu, \alpha) := |e^{2\pi i x \cdot \mu} - e^{2\pi i \alpha}|.$$

Soit

$$n'_{\tilde{\epsilon},\mu,\alpha} := Card\{x \in \Lambda | f(x, \mu, \alpha) > \tilde{\epsilon}\}.$$

Soit

$$n'_{\tilde{\epsilon},\mu} := \inf_{\alpha \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} n'_{\tilde{\epsilon},\mu,\alpha}.$$

Soit

$$S := \{\mu \in \mathbb{R}^n | n'_{\tilde{\epsilon},\mu} \neq 0\}.$$

Soit, pour $S \neq \emptyset$,

$$n'_{\tilde{\epsilon}} := \inf_{\mu \in S} n'_{\tilde{\epsilon},\mu}.$$

Il y a deux cas à considérer:

1)

$$\begin{aligned} & S = \emptyset \\ \implies & \forall \mu \in \mathbb{R}^n, n'_{\tilde{\epsilon},\mu} = 0 \\ \implies & \forall \mu \in \mathbb{R}^n, \exists \tilde{\alpha}(\mu) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \end{aligned}$$

tel que

$$\begin{aligned} & \forall x \in \Lambda, f(x, \mu, \tilde{\alpha}(\mu)) \leq \tilde{\epsilon} \\ \implies & \mu \in \Lambda^{\tilde{\alpha}(\mu)\,\tilde{\epsilon}_{\leq}^{\mathbb{R}^n}} \\ \subseteq & \bigcup_{\alpha \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \Lambda^{\alpha\,\tilde{\epsilon}_{\leq}^{\mathbb{R}^n}} \\ \implies & \forall \mu \in IDP(0), \mu \in \bigcup_{\alpha \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \Lambda^{\alpha\,\tilde{\epsilon}_{\leq}^{\mathbb{R}^n}} \\ \implies & I_{seuil} = 0 \neq N^2 |c|^2. \end{aligned}$$

(D'autres choix pour $I_{seuil}(\tilde{\epsilon})$ sont possibles: il suffit d'avoir

$$I_{seuil}(\tilde{\epsilon}) \leq \inf_{\mu \in \bigcup_{\alpha \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \Lambda^{\alpha\,\tilde{\epsilon}_{\leq}^{\mathbb{R}^n}} = \mathbb{R}^n} I(\mu).$$

Pour $\tilde{\epsilon} \in [0, 1]$, un choix particulier (en s'inspirant de a) ci-dessus) est:

$$I_{seuil}(\tilde{\epsilon}) = N^2 |c|^2 (1 - \tilde{\epsilon})^2.)$$

2) $S \neq \emptyset$:

Constatons que, dans ce cas,

$$n'_{\tilde{\epsilon}} \in \{1, 2, ..., N - 1\}.$$

Posons

$$I_{seuil}(\tilde{\epsilon}) = |c|^2 |N^2 - \tilde{\epsilon}^2 (n'_{\tilde{\epsilon}})(N - n'_{\tilde{\epsilon}})|.$$

(Constatons que

$$I_{seuil}(\tilde{\epsilon}) \neq N^2 |c|^2.)$$

Pour montrer que $I_{seuil}(\tilde{\epsilon})$ satisfait l'énoncé de la proposition, il suffit de montrer que

$$\mu \notin \bigcup_{\alpha \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \Lambda^{\alpha \tilde{\epsilon}^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$$

tel que

$$I(\mu) \geq I_{seuil}(\tilde{\epsilon})$$

est absurde.

En effet:

$$\mu \notin \bigcup_{\alpha \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \Lambda^{\alpha \tilde{\epsilon}^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$$

$$\Longrightarrow \forall \alpha \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \exists x \in \Lambda$$

tel que

$$f(x, \mu, \alpha) > \tilde{\epsilon}$$

$$\Longrightarrow \mu \in S.$$

Cependant, $\forall \mu \in S$, $I(\mu)$ ne peut jamais dépasser

$$|c|^2 |(N - n'_{\tilde{\epsilon}}) e^{2\pi i \alpha} + n'_{\tilde{\epsilon}} (e^{2\pi i \beta})|^2 \tag{$*$}$$

ce qui correspondrait à la situation ("utopique", en ce qui concerne la grandeur de l'intensité associée) où $n'_{\tilde{\epsilon}}$ termes seraient parfaitement en phase, de la forme $e^{2\pi i \beta}$, et les $N - n'_{\tilde{\epsilon}}$ termes qui restent seraient de la forme $e^{2\pi i \alpha}$, avec

$$|e^{2\pi i \alpha} - e^{2\pi i \beta}| = \tilde{\epsilon}.$$

(Notons que le plus petit nombre de termes de la forme $e^{2\pi i \beta}$ ne peut jamais être inférieur à $n'_{\tilde{\epsilon}}$, et le déphasage entre ces $n'_{\tilde{\epsilon}}$ termes et les $N - n'_{\tilde{\epsilon}}$ autres termes correspond à

$$|e^{2\pi i \alpha} - e^{2\pi i \beta}| > \tilde{\epsilon}.$$

Ainsi $(*)$ est une surestimation de l'intensité en $\mu$.)

(La surestimation ci-dessus est basée sur l'idée que maximiser une expression de la forme

$$|\sum_{p=1}^{N} A_p e^{i\theta_p}|, \theta_p \in \mathbb{R},$$

$$A_p \geq 0, p \in \{1, 2, ..., N\},$$

s'effectue en minimisant le déphasage entre les différents termes de la forme $A_p e^{i\theta_p}$.

Ceci peut être vu ainsi:

Afin de maximiser $|\sum_{p=1}^{N} A_p e^{i\theta_p}|$, il suffit de maximiser

$$|\sum_{p=1}^{N} A_p e^{i\theta_p}|^2.$$

On a cependant

$$|\sum_{p=1}^{N} A_p e^{i\theta_p}|^2$$

$$= |\sum_{p=1}^{N} A_p(cos\theta_p + isin\theta_p)|^2$$

$$= |\sum_{p=1}^{N} A_p^2 + 2 \sum_{\substack{p,q\in\{1,\ldots,N\}\\ p<q}} A_p A_q (cos\theta_p cos\theta_q + sin\theta_p sin\theta_q)|$$

$$= |\sum_{p=1}^{N} A_p^2 + 2 \sum_{\substack{p,q\in\{1,\ldots,N\}\\ p<q}} A_p A_q cos(\theta_p - \theta_q)|.$$

L'expression ci-dessus sera maximale lorsque chacune des expressions

$$\theta_p - \theta_q$$

sera rapprochée le plus possible de 0 (ou de $k(2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$), c'est-à-dire en minimisant le déphasage entre les termes $A_p e^{i\theta_p}$, C.Q.F.D.)

On peut réécrire $(*)$ ainsi:

$$|c|^2|\{(N - n'_{\tilde{\epsilon}}) + n'_{\tilde{\epsilon}}(1 - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2})\}^2 + (n'_{\tilde{\epsilon}})^2\{1 - (1 - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2})^2\}|^1$$

$$= |c|^2|(N - n'_{\tilde{\epsilon}})^2 + 2n'_{\tilde{\epsilon}}(N - n'_{\tilde{\epsilon}})(1 - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{2}) + (n'_{\tilde{\epsilon}})^2|$$

$$= |c|^2|N^2 - \tilde{\epsilon}^2(n'_{\tilde{\epsilon}})(N - n'_{\tilde{\epsilon}})|$$

$$= I_{seuil}(\tilde{\epsilon}).$$

Donc

$$\mu \notin \bigcup_{\alpha\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \Lambda^{\alpha\tilde{\epsilon}^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$$

tel que

$$I(\mu) \geq I_{seuil}(\tilde{\epsilon})$$

est impossible, ce qui termine la preuve.

$\square$

c) Soient $\tilde{\epsilon} \in [0,1), \epsilon \in [0,1)$.

Constatons que, si $\epsilon$ correspond à celui obtenu en a) par la méthode des quasi constantes, on aura alors

$$\bigcup_{\alpha \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \Lambda^{\alpha}{}^{\tilde{\epsilon}^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} \subseteq IDP(I_{seuil}(\tilde{\epsilon})) \subseteq \bigcup_{\alpha \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \Lambda^{\alpha}{}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} \qquad (**)$$

où

$$\epsilon \leq 1 - \frac{(I_{seuil}(\tilde{\epsilon}))^{\frac{1}{2}}}{N|c|}.$$

Il s'ensuit que $\tilde{\epsilon} \geq \epsilon$.

Pour $\tilde{\epsilon} \to 0$, on aura alors $\epsilon \to 0$, donc

$$\tilde{\epsilon} \to 0 \implies \tilde{\epsilon} \to \epsilon,$$

et $\bigcup_{\alpha \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \Lambda^{\alpha}{}^{\tilde{\epsilon}^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$ ressemblera de plus en plus à $\bigcup_{\alpha \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \Lambda^{\alpha}{}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$ pour $\tilde{\epsilon} \to 0$.

Puisque $(**)$ doit être satisfait aussi,

$$\bigcup_{\alpha \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \Lambda^{\alpha}{}^{\tilde{\epsilon}^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$$

et

$$\bigcup_{\alpha \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \Lambda^{\alpha}{}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$$

ressembleront de plus en plus à $IDP(I_{seuil}(\tilde{\epsilon}))$ pour $\tilde{\epsilon} \to 0$.

En changeant de notation, on peut écrire $\epsilon$ au lieu de $\tilde{\epsilon}$.

Donc, pour $\epsilon$ petit,

$$\bigcup_{\alpha \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \Lambda^{\alpha}{}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} = \Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$$

sera une bonne approximation de l'IDP pour un $I_{seuil}$ quelconque (assez grand), avec

$$\epsilon' = 2\epsilon\sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4}},$$

i.e. $\epsilon'$ est petit puisque $\epsilon$ est petit.

## 3. Concordance avec l'expérimentation

1) Supposons que $\Lambda$ est un cristal (dans le sens d'être un réseau de Bravais).

Dans une base appropriée l'image de diffraction est donnée par

$$\begin{aligned}&\{\mu \in \mathbb{R}^n | \mu \cdot x \in \mathbb{Z}, \forall x \in \Lambda\}\\&= \{\mu \in \mathbb{R}^n | \forall x \in \Lambda, |e^{2\pi i \mu \cdot x} - 1| \leq 0\}\\&= \Lambda^{0^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}.\end{aligned}$$

Pour $\epsilon' \in (0, \sqrt{3})$, nous avons [M1]:

$$\Lambda^{0^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} = \Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$$

permettant ainsi plusieurs expressions (une pour chaque valeur permise d'$\epsilon'$) pour l'image de diffraction d'un réseau de Bravais dans le contexte du présent modèle.

2) Supposons que $\Lambda$ est un quasi-cristal.

Lorsque $\Lambda$ a une symétrie rotationnelle de $\theta$ par rapport à un axe passant par l'origine, alors $\Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$ a aussi cette même symétrie rotationnelle, ce qui est en accord avec l'expérimentation. Ceci peut être vu de la façon suivante:

$\Lambda$ a une symétrie rotationnelle de $\theta$ par rapport à un axe passant par l'origine

$$\iff \Lambda = R_\theta \Lambda$$

où $R_\theta$ est la matrice de rotation de $\theta$ radians autour de l'axe en question.

a) Constatons que $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}(R_\theta u) \cdot v &= (R_\theta u)^T v\\&= u^T R_\theta^T v = u^T R_{-\theta} v\\&= u^T (R_{-\theta} v) = u \cdot (R_{-\theta} v)\end{aligned}$$

(ici il est sous-entendu que l'identification d'un point de $\mathbb{R}^n$ se fait par le vecteur-colonne correspondant).

b) Nous pouvons maintenant écrire:

$$\Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} = \{\mu \in \mathbb{R}^n | |e^{2\pi i \mu \cdot x} - 1| \leq \epsilon', \forall x \in \Lambda\}$$

$$= \{\mu \in \mathbb{R}^n \| e^{2\pi i \mu\cdot x} - 1| \leq \epsilon', \forall x \in R_\theta \Lambda\}$$

(i.e. $\Lambda = R_\theta\Lambda$)

$$= \{\mu \in \mathbb{R}^n \| e^{2\pi i \mu\cdot R_\theta t} - 1| \leq \epsilon', \forall R_\theta t \in R_\theta \Lambda\}$$

(on pose $t := R_{-\theta}x$, d'où $x = R_\theta t$)

$$= \{\mu \in \mathbb{R}^n \| e^{2\pi i \mu\cdot R_\theta t} - 1| \leq \epsilon', \forall t \in \Lambda\}$$

$$= \{\mu \in \mathbb{R}^n \| e^{2\pi i \mu\cdot R_\theta x} - 1| \leq \epsilon', \forall x \in \Lambda\}$$

(on a effectué un changement de notation)

$$= \{\mu \in \mathbb{R}^n \| e^{2\pi i (R_{-\theta}\mu)\cdot x} - 1| \leq \epsilon', \forall x \in \Lambda\}$$

(ici on a utilisé a))

$$= \{R_\theta z \in \mathbb{R}^n \| e^{2\pi i z\cdot x} - 1| \leq \epsilon', \forall x \in \Lambda\}$$

(ici on a posé $z := R_{-\theta}\mu$, d'où $\mu = R_\theta z$)

$$= \{R_\theta z \in R_\theta\mathbb{R}^n \| e^{2\pi i z\cdot x} - 1| \leq \epsilon', \forall x \in \Lambda\}$$

(on a utilisé le fait que $R_\theta\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$)

$$= R_\theta\{z \in \mathbb{R}^n \| e^{2\pi i z\cdot x} - 1| \leq \epsilon', \forall x \in \Lambda\}$$

$$= R_\theta\{\mu \in \mathbb{R}^n \| e^{2\pi i \mu\cdot x} - 1| \leq \epsilon', \forall x \in \Lambda\}$$

(on a effectué un changement de notation)

$$= R_\theta \Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}.$$

Donc $\Lambda = R_\theta\Lambda \implies \Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} = R_\theta\Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$.

3) Supposons que $\Lambda$ est un quasi-cristal qui peut être représenté par un schéme "coupe et projection" ("cut and project scheme") (i.e. $\Lambda$ est un "ensemble modèle" ("model set") [M1]). Lorsque $0 < \epsilon' < 2$, $\Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$ peut être représenté par un schéme "coupe et projection" ("cut and project scheme") et est aussi un "ensemble modèle" ("model set") [M1]. En particulier, $\Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$ est Delone [M1], il est donc discret. De plus, lorsque $\theta$ exprime une symétrie rotationnelle non cristallographique du quasi-cristal (et donc de $\Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$), $\Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$ est apériodique.

## 4. Le quasi-cristal (ou cristal) complet

Supposons que $\Lambda$ est un cristal ou un quasi-cristal avec une image de diffraction $\Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$. Jusqu'à quel point peut-on ajouter des éléments à $\Lambda$ (et **quels** éléments) sans changer l'image de diffraction? La réponse est la suivante: $\Lambda$ peut être agrandi jusqu'à $\Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$ sans modifier l'image de diffraction. Par ailleurs, lorsque $\Lambda = \Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$, $\Lambda$ a la propriété suivante: $(\Lambda')^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} = \Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} \implies \Lambda' \subseteq \Lambda$.

Établissons la vérité de ces deux affirmations.

La deuxième découle de la remarque suivante:

Remarque 4.1. *Soit $\Lambda$ un ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$ (en particulier, on peut supposer que $\Lambda$ est un cristal ou un quasi-cristal) satisfaisant*

$$\Lambda = \Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$$

*($\epsilon' \in [0,2)$.)*

*Alors*

$$(\Lambda')^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} = \Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$$

$$\implies \Lambda' \subseteq \Lambda.$$

Démonstration. Écrivons

$$(\Lambda')^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} = \Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}.$$

Nous avons alors

$$(\Lambda')^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} = \Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$$

mais

$$\Lambda' \subseteq (\Lambda')^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$$

ce qui implique

$$\Lambda' \subseteq (\Lambda')^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$$

$$= \Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$$

$$= \Lambda.$$

$\square$

La première affirmation découle de la proposition suivante (dans celle-ci la partie a) établit que $\Lambda$ peut être agrandi jusqu'à $\Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$, et la partie b) montre qu'on ne peut pas agrandir au-delà de $\Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$):

PROPOSITION 4.1. *Soit*

$$\emptyset \neq \Lambda \subseteq \mathbb{R}^n.$$

*a)*

$$\Lambda \subseteq \Lambda' \subseteq \Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$$
$$\Longrightarrow \Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} = (\Lambda')^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}.$$

*b)*

$$\Lambda \subseteq \Lambda'$$

*tel que*

$$\Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} = (\Lambda')^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$$

*implique*

$$\Lambda' \subseteq \Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}.$$

DÉMONSTRATION. a) Constatons que

$$\Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} = \Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$$

(i.e. $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^n \implies A \subseteq A^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$. En particulier, pour $A = \Lambda$, on a

$$\Lambda \subseteq \Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$$

ce qui implique

$$\Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} \supseteq \Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}.$$

Cependant, pour $A = \Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$, on obtient

$$\Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} \subseteq \Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}.$$

Nous pouvons maintenant conclure que

$$\Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} \supseteq \Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} \supseteq \Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$$

d'où

$$\Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} = \Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}.)$$

On a alors

$$\Lambda \subseteq \Lambda' \subseteq \Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$$

$$\Longrightarrow \Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} \supseteq (\Lambda')^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} \supseteq \Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$$
$$= \Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$$

d'où

$$\Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} = (\Lambda')^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}.$$

b)

$$\Lambda \subseteq \Lambda'$$

tel que

$$\Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} = (\Lambda')^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$$

implique

$$\Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} = (\Lambda')^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}.$$

Cependant

$$\Lambda' \subseteq (\Lambda')^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$$
$$= \Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$$

d'où

$$\Lambda' \subseteq \Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}.$$

□

REMARQUE 4.2. *La proposition précédente peut être réécrite ainsi:*

*Pour* $\emptyset \neq \Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$*:*

$\Lambda \subseteq \Lambda'$ *et* $\Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} = (\Lambda')^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\Lambda \subseteq \Lambda' \subseteq \Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}.$$

Nous pouvons maintenant introduire la définition suivante:

DÉFINITION 4.1. $\Lambda$ *est un cristal, quasi-cristal ou ensemble* ***complet*** *ssi*

$$\Lambda = \Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}.$$

## 5. Prédictions physiques du modèle

1) Puisque

$$\Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} = \{\mu \in \mathbb{R}^n | |e^{2\pi i \mu \cdot x} - 1| \leq \epsilon', \forall x \in \Lambda\}$$

$$= \{\mu \in \mathbb{R}^n | 2|sin(\pi\mu \cdot x)| \leq \epsilon', \forall x \in \Lambda\}$$

nous avons alors

$$\mu \in \Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$$

$$\iff 2|sin(\pi\mu \cdot x)| \leq \epsilon', \forall x \in \Lambda$$

$$\iff 2|sin(\pi(-\mu) \cdot x)| \leq \epsilon', \forall x \in \Lambda$$

$$\iff (-\mu) \in \Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}.$$

Donc l'image de diffraction doit être symétrique par rapport à l'origine. (La symétrie de l'icosaèdre constatée chez les quasi-cristaux physiques est en accord avec ceci puisque l'icosaèdre est symétrique par rapport à son centre.)

2) Supposons que $\Lambda$ possède une symétrie type "réflexion et/ou inflation" exprimée par

$$r\Lambda \subseteq \Lambda$$

($r \in \mathbb{R}$, avec $|r| \geq 1$ (car $\Lambda$ est un ensemble discret))

alors

$$r\Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} \subseteq \Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}.$$

En voici la preuve:

$$z \in r\Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$$

$$\implies z = r\mu$$

pour un $\mu \in \Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$

$$\implies |e^{2\pi i z \cdot x} - 1| = |e^{2\pi i r \mu \cdot x} - 1| = |e^{2\pi i \mu \cdot r x} - 1| \leq \epsilon', \forall x \in \Lambda$$

(i.e. $r\Lambda \subseteq \Lambda$ implique que $rx \in \Lambda, \forall x \in \Lambda$)

$$\implies |e^{2\pi i z \cdot x} - 1| \leq \epsilon', \forall x \in \Lambda$$

$$\implies z \in \Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$$

$$\implies r\Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} \subseteq \Lambda^{(\epsilon')^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}.$$

3) Il est plausible de croire que le modèle élaboré ci-dessus (plus précisément l'approche des quasi constantes) puisse décrire d'autres systèmes de diffraction.

# CHAPITRE 3

## $\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}$-dual d'un ensemble

### 1. Résultats

Dans le reste de cette thèse, la notation sera simplifiée en remplaçant $\epsilon'$ par $\epsilon$. On appliquera maintenant les idées développées précédemment à une famille de modèles mathématiques de quasi-cristaux caractérisés par certains aspects communs, énumérés ci-dessous (un exemple d'un tel modèle a déjà été développé par J. Patera [P1]):

On suppose l'existence de deux ensembles $\mathbb{D}_1$ et $\mathbb{D}_2$ avec

$\mathbb{D}_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbb{D}_2 \subseteq \mathbb{R}^n$, où $\mathbb{D}_1$ et $\mathbb{D}_2$ sont denses dans $\mathbb{R}^n$, et une application

$$* : \mathbb{D}_j \longrightarrow \mathbb{D}_j^* \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$m \longmapsto m^*$$

$$(j \in \{1, 2\})$$

definie partout sur $\mathbb{D}_j$ qui satisfait

$$m \cdot n \in \pm m^* \cdot n^* + \mathbb{Z},$$

$$\forall m \in \mathbb{D}_j, n \in \mathbb{D}_{(j \mod 2)+1}.$$

(Possiblement $\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}_2$.)

On suppose également que $\mathbb{D}_1^*$ et $\mathbb{D}_2^*$ sont denses dans $\mathbb{R}^n$.

Les ensembles $\mathbb{D}_j$ joueront un rôle important dans l'étude de la diffraction des rayons X par un quasicristal lorsque, en employant la notation du chapitre 1, on aura:

$$\mathbb{D}_1 = p_p(L)$$

et

$$\mathbb{D}_2 = p_p(Dual(L)).$$

Un tel exemple est donné à la fin du chapitre 6.

Considérons $\epsilon \in (0, 2)$.

On suppose aussi que

$$\widetilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n,$$

$$\Lambda^* = \widetilde{\Omega}|_{\mathbb{D}_1^\bullet}.$$

Le chapitre 6 explorera $\widetilde{\Lambda}^{\epsilon \overset{\mathbb{R}^n}{\leq}}|_{\mathbb{D}_2}$, tandis que les chapitres 3, 4 et 5 répertorient certains résultats intermédiaires et/ou intéressants.

PROPOSITION 1.1. *Si $\widetilde{\Omega}$ est connexe par arcs et contient 0, alors $\widetilde{\Omega}^{\epsilon \overset{\mathbb{R}^n}{\leq}}$ est symétrique par rapport à l'origine, contient 0, et est convexe.*

DÉMONSTRATION. 1) $\widetilde{\Omega}^{\epsilon \overset{\mathbb{R}^n}{\leq}}$ est symétrique par rapport à l'origine, puisque $|e^{2\pi i\mu \cdot x} - 1| = |e^{2\pi i(-\mu)\cdot x} - 1|$, ainsi $|e^{2\pi i\mu \cdot x} - 1| \leq \epsilon \Leftrightarrow |e^{2\pi i(-\mu)\cdot x} - 1| \leq \epsilon$. Ceci implique que $\mu \in \widetilde{\Omega}^{\epsilon \overset{\mathbb{R}^n}{\leq}} \Leftrightarrow (-\mu) \in \widetilde{\Omega}^{\epsilon \overset{\mathbb{R}^n}{\leq}}$.

2) $\widetilde{\Omega}^{\epsilon \overset{\mathbb{R}^n}{\leq}}$ contient 0 puisque $|e^{2\pi i 0\cdot x} - 1| = 0 \leq \epsilon$.

3) Convexité:

$\forall x \in \widetilde{\Omega}, \forall m \in \widetilde{\Omega}^{\epsilon \overset{\mathbb{R}^n}{\leq}}$, nous avons

$$|e^{2\pi i m\cdot x} - 1| = 2|sin(\pi m \cdot x)| \leq \epsilon < 2.$$

Nous prenons une courbe continue $X(t)$ dans $\widetilde{\Omega}$ avec $X(0) = 0$ et $X(1) = x$. Alors $\pi m \cdot X(t)$ est continu en t et son image lorsque t parcourt $[0, 1]$ est un sous-ensemble connexe de $\mathbb{R}$. Cette image doit appartenir à $(-\pi/2, \pi/2)$: si ceci n'était pas le cas, par connexité $-\pi/2$ et/ou $\pi/2$ doit (doivent) appartenir à l'image en question. Ceci impliquerait que, quelque part sur la courbe $X(t) \subseteq \widetilde{\Omega}$, pour un $t' \in [0, 1]$,

$$2|sin(\pi m \cdot X(t'))| = 2 > \epsilon,$$

ce qui est absurde. Ainsi $\forall m, n \in \widetilde{\Omega}^{\epsilon \overset{\mathbb{R}^n}{\leq}}$, $\forall x, y \in \widetilde{\Omega}$, nous avons soit $[m \cdot x, n \cdot y] \subseteq (-\pi/2, \pi/2)$ ou $[n \cdot y, m \cdot x] \subseteq (-\pi/2, \pi/2)$.

Maintenant, pour tout $t \in [0, 1]$, $tm + (1-t)n$ est le segment unissant $m$ et $n$. Alors

$$(tm) \cdot x + (1-t)n \cdot y$$

est le segment unissant les nombres réels $m \cdot x$ et $n \cdot y$.

Considérons la fonction

$$u(v) := 2|sin(v)|.$$

Sa dérivée n'est jamais nulle sur $(-\pi/2, \pi/2)$ (et $u$ n'est pas differentiable à 0). Ainsi sa valeur maximale sur tout intervalle fermé I de $(-\pi/2, \pi/2)$ est atteinte à une extrémité de I ou lorsque $v = 0$ (si $0 \in I$). Puisque $u(0) = 0$, la valeur maximale est atteinte à une extrémité de I. Ceci implique que, $\forall t \in [0, 1]$,

$$2|sin(tm \cdot x + (1-t)n \cdot y)| \leq Max\{2|sin(m \cdot x)|, 2|sin(n \cdot y)\} \leq \epsilon.$$

Ainsi le segment unissant $m$ et $n$ se retrouve dans $\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$, et on en déduit la convexité de $\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$.

□

PROPOSITION 1.2. *Supposons que $\widetilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n$ est un polytope fermé, convexe et symétrique par rapport à 0. Énumérons les faces de $\widetilde{\Omega}$ de 1 à k; considérons l'ensemble de tous les hyperplans $\{h_i\}, i \in \{1, ..., k\}$, où $h_i$ contient la i-ème face $f_i$ de $\widetilde{\Omega}$. Soit $l_i$ la distance de l'origine à l'hyperplan $h_i$; considérons $\{v_i\}$, le vecteur orthogonal à $h_i$ (nous pouvons supposer que ce vecteur est dirigé vers l'extérieur de $\widetilde{\Omega}$), de longueur*

$$\frac{|arccos(1 - \frac{\epsilon^2}{2})|}{2\pi l_i} = \frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi l_i}.$$

*Prenons le plus petit ensemble convexe contenant les vecteurs $\{v_i\}, i \in \{1, ..., k\}$, et dénotons le polytope résultant par $\widetilde{P}$. Nous avons alors:*

$$\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} = \widetilde{P}$$

*et*

$$\widetilde{P}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} = \widetilde{\Omega}$$

*ce qui implique*

$$\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} = \widetilde{\Omega}.$$

DÉMONSTRATION. • Constatons que, pour tout point p appartenant à $h_i$ (et notamment lorsque p appartient à la i-ème face),

$$|e^{2\pi i p \cdot v_i} - 1| = 2|sin(\pi p \cdot v_i)|$$

$$= 2\big|sin(\pi|p||v_i|cos(\alpha_{p,v_i})\big|$$

(où $cos(\alpha_{p,v_i}) = \frac{p \cdot v_i}{|p||v_i|} \neq 0$)

$$= 2\big|sin(\pi \frac{l_i}{cos(\alpha_{p,v_i})})|v_i|cos(\alpha_{p,v_i}))\big|$$

(puisque $|p| = \frac{l_i}{cos(\alpha_{p,v_i})}$)

$$= 2\big|sin(arcsin(\frac{\epsilon}{2}))\big|$$

$$= \epsilon.$$

(Constatons que $\forall p \in h_i$,

$$p \cdot v_i = \frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi}.) \tag{*}$$

• Puisque $\widetilde{\Omega}$ est symétrique par rapport à l'origine, il existe une face $f_j$ d'$\widetilde{\Omega}$ pour chaque face $f_i$ tel que $l_j = l_i$, et $v_j = -v_i$.

• Pour tout point p de $h_j$, $|e^{2\pi i p \cdot v_j} - 1| = \epsilon = |e^{2\pi i p \cdot v_i} - 1|$.

• Puisque $arcsin(\frac{\epsilon}{2}) \in (0, \pi/2)$, pour $\theta$ $t.q.$ $|\theta| < \big|arcsin(\frac{\epsilon}{2})\big|$, nous avons $2|sin(\theta)| < \epsilon$.

• Choisissons n'importe quel hyperplan $h_i$ et son hyperplan correspondant $h_j$. Maintenant prenons n'importe quel point $p' \in \widetilde{\Omega}$ entre $h_i$ et $h_j$ (ou appartenant à $h_i$ ou $h_j$). Si $p' \cdot v_i = 0$, alors

$$\epsilon \geq |e^{2\pi i p' \cdot v_i} - 1| = 0.$$

Autrement, il existe un point q de $h_i$ ou $h_j$ tel que $p'$ appartient au segment de droite allant de 0 à q. Soit $h_l$ l'hyperplan contenant q. On a alors

$$\pi|p' \cdot v_i| = \pi|p' \cdot v_j| = \pi|p' \cdot v_l|$$

$$= \pi \frac{|p'|}{|q|}|q \cdot v_l|$$

(où $\frac{|p'|}{|q|} \leq 1$)

$$= |\frac{|p'|}{|q|} arcsin(\frac{\epsilon}{2})| \leq |arcsin(\frac{\epsilon}{2})| \tag{**}$$

et nous avons (en utilisant l'un des énoncés précédents)

$$\epsilon \geq 2\big|sin(\frac{|p'|}{|q|} arcsin(\frac{\epsilon}{2}))\big| = 2\big|sin(\pi \frac{|p'|}{|q|}|q||v_l|cos(\alpha_{p',v_l}))\big|$$

$$= 2\big|sin(\pi \frac{|p'|}{|q|}|q||v_l||cos(\alpha_{p',v_l})|)\big| = 2\big|sin(\pi|p' \cdot v_l|)\big|$$

$$= 2|sin(\pi p' \cdot v_l)| = |e^{2\pi i p' \cdot v_l} - 1|.$$

Puisque

$$|p' \cdot v_l| = |p' \cdot v_i| = |p' \cdot v_j|$$

nous avons

$$\epsilon \geq 2\big|sin(\pi|p' \cdot v_i|)\big| = 2|sin(\pi p' \cdot v_i)| = |e^{2\pi i p' \cdot v_i} - 1|$$

et

$$\epsilon \geq 2\big|sin(\pi|p' \cdot v_j|)\big| = 2|sin(\pi p' \cdot v_j)| = |e^{2\pi i p' \cdot v_j} - 1|.$$

• Puisque $\widetilde{\Omega}$ est un polytope fermé et convexe, il se situe entre (ou sur) $h_i$ et $h_j$. Ainsi $\forall p \in \widetilde{\Omega}$, $|e^{2\pi i p \cdot v_i} - 1| \leq \epsilon$, et $|e^{2\pi i p \cdot v_j} - 1| \leq \epsilon$. Nous avons alors

$$v_i \in \widetilde{\Omega}^{\epsilon \mathbb{R}^n}_{\leq}, i \in \{1, ..., k\}.$$

• Maintenant considérons n'importe quel point $\tilde{q} \in \widetilde{P}$. Il est possible d'exprimer $\tilde{q}$ ainsi:

$$\tilde{q} = (...((v_1 t_1 + (1 - t_1)v_2)t_2 + (1 - t_2)v_3)t_3 + (1 - t_3)v_4)t_4 + ... + (1 - t_{k-1})v_k$$

avec $t_m \in [0, 1], m \in \{1, ..., k - 1\}$.

• Considérons un point $p \in \widetilde{\Omega}$. On a alors

$$\pi p \cdot \tilde{q} = (...((w_1 t_1 + (1 - t_1)w_2)t_2 + (1 - t_2)w_3)t_3 + (1 - t_3)w_4)t_4 + ... + (1 - t_{k-1})w_k$$

où $w_i := \pi p \cdot v_i$. Les sommets d'$\widetilde{\Omega}$ peuvent être dénotées de n'importe quelle façon, notamment tel que $w_1 \leq w_2 \leq ... \leq w_k$.

• Maintenant regardons l'énoncé suivant:

Pour

$$f_{k-1}(t_1, ..., t_{k-1}) := (...((w_1 t_1 + (1 - t_1)w_2)t_2$$
$$+(1 - t_2)w_3)t_3 + (1 - t_3)w_4)t_4 + ... + (1 - t_{k-1})w_k,$$

avec

$$t_m \in [0, 1], m \in \{1, ..., k - 1\}, k \geq 2,$$
$$w_1 \leq w_2 \leq ... \leq w_k,$$

on a

$$\min_{t_i \in [0,1], i \in \{1,...,k\}} f_{k-1} = w_1$$

et

$$\max_{t_i \in [0,1], i \in \{1,...,k\}} f_{k-1} = w_k.$$

Preuve par récurrence:

Pour $k = 2$:

$$w_1 t_1 + (1 - t_1) w_2 = w_1 t_1 + (1 - t_1)(w_1 + \Delta)$$

(où $\Delta := w_2 - w_1 \geq 0$)

$$= w_1 + (1 - t_1)\Delta,$$

dont la valeur est maximale pour $t_1 = 0$ ($\Delta > 0$), ou constante pour $\Delta = 0$. Dans les deux cas, la valeur maximale est $w_2$. De même, la valeur minimale est $w_1$.

On suppose que l'énoncé est vrai pour $k = l$ (ce qui fait allusion à $f_{l-1}$), et maintenant nous devons vérifier l'énoncé pour $k = l + 1$:

$$f_l(t_1, ..., t_l) = [f_{l-1}(t_1, ..., t_{l-1})]t_l + (1 - t_l) w_{l+1}$$

atteint (évident par inspection) sa valeur minimale pour la valeur minimale de $f_{l-1}$ (par hypothèse, cette valeur est $w_1$), ce qui nous amène à examiner $w_1 + (1 - t_l) w_{l+1}$, qui, de façon analogue, a une valeur minimale de $w_1$. De même, la valeur maximale de $f_l$ exige l'étude de $w_l + (1 - t_l) w_{l+1}$, qui a une valeur maximale de $w_{l+1}$. Ainsi l'énoncé est vrai par récurrence.

Nous avons alors $\pi p \cdot \tilde{q} \in [w_1, w_k]$, où

$$-\pi/2 < -arcsin(\frac{\epsilon}{2}) \leq w_1 \leq w_k \leq arcsin(\frac{\epsilon}{2}) < \pi/2$$

(i.e. pour $p \cdot v_i = 0$, on a

$$\pi p \cdot v_i = 0 \in [-arcsin(\frac{\epsilon}{2}), arcsin(\frac{\epsilon}{2})];$$

pour $p \cdot v_i \neq 0$, on a, d'après (**),

$$\pi p \cdot v_i \in [-arcsin(\frac{\epsilon}{2}), arcsin(\frac{\epsilon}{2})]$$

aussi.)

Ceci implique

$$2|sin(\pi p \cdot \tilde{q})| \leq \epsilon$$

$$\Longrightarrow |e^{2\pi i p \cdot \tilde{q}} - 1| \leq \epsilon$$

$$\forall p \in \widetilde{\Omega}, \forall \tilde{q} \in \widetilde{P}$$

ce qui implique

$$\widetilde{P} \subseteq \widetilde{\Omega}^{\epsilon \mathbb{R}^n}_{\leq}$$

et

$$\widetilde{\Omega} \subseteq \widetilde{P}^{\epsilon \leq^{\mathbb{R}^n}}.$$

- Énoncé:

$$\widetilde{\Omega} = \widetilde{P}^{\epsilon \leq^{\mathbb{R}^n}}.$$

Preuve: supposons le contraire, i.e. $\widetilde{\Omega} \subset \widetilde{P}^{\epsilon \leq^{\mathbb{R}^n}}$ avec $\widetilde{\Omega} \neq \widetilde{P}^{\epsilon \leq^{\mathbb{R}^n}}$. Ainsi il existe $p \in \widetilde{P}^{\epsilon \leq^{\mathbb{R}^n}}$ $t.q.$ $p \notin \widetilde{\Omega}$. Cependant, $\widetilde{P}$ est convexe et contient 0, alors il est connexe par arcs et contient 0. Donc $\widetilde{P}^{\epsilon \leq^{\mathbb{R}^n}}$ contient 0, est convexe et symétrique par rapport à 0. Ainsi le segment de droite $\{tp|t \in [0,1]\}$ doit appartenir à $\widetilde{P}^{\epsilon \leq^{\mathbb{R}^n}}$, où ce segment intersecte une face d'$\widetilde{\Omega}$ à $t'p$ pour un $t' \in (0,1)$. Cependant, on a vu que pour chaque point q de n'importe quelle face $f_i$ d'$\widetilde{\Omega}$ nous avons un point $v_i \in \widetilde{P}$ tel que $|e^{2\pi i q \cdot v_i} - 1| = \epsilon$. En particulier, pour $q = t'p \in f_j \subseteq \widetilde{\Omega}$ pour un j quelconque, nous avons $|e^{2\pi i t' p \cdot v_j} - 1| = \epsilon$.

Par ailleurs, $p \in P^{\epsilon \leq^{\mathbb{R}^n}}$, donc

$$|e^{2\pi i p \cdot v_j} - 1| \leq \epsilon.$$

Ainsi

$$|e^{2\pi i t p \cdot v_j} - 1| = 2\big|sin(\pi |tp||v_j||cos(\alpha_{p,v_j})|\big|$$

vaut 0 pour $t = 0$, augmente jusqu'à $\epsilon$ pour $0 < t' < 1$ et est plus petit ou égal à $\epsilon$ pour $t = 1$. Ainsi $\exists t'' \in (t', 1)$ $t.q.$ $|e^{2\pi i t'' p \cdot v_j} - 1| = 2\big|sin(\pi |t''p||v_j||cos(\alpha_{p,v_j})|\big| = 2 > \epsilon$, avec $t''p \in \widetilde{P}^{\epsilon \leq^{\mathbb{R}^n}}$, ce qui est absurde. Ainsi l'énoncé est vrai.

- Maintenant considérons le vecteur position $u$ de n'importe quel sommet de $\widetilde{\Omega}$. Constatons que ce vecteur (ou son prolongement) intersecte au moins un hyperplan h qui contient une face de $\widetilde{P}$. Constatons que s'il existe un tel hyperplan h tel que l'angle d'intersection est $\pi/2$, alors un tel hyperplan est unique (puisque $\widetilde{P}$ est un polytope). Nous appellerons un tel hyperplan spécial $\tilde{h}$. (Il peut y avoir plus d'un h pour un $u$ donné, mais seulement un $\tilde{h}$ (s'il existe).)

- Énoncé: $\tilde{h}$ existe pour tout $u$.

Preuve: Considérons toutes les faces $f_j$ d'$\widetilde{\Omega}$ qui contiennent $u$; considérons les vecteurs $v_j$ qui représentent les sommets de $\widetilde{P}$ qui sont orthogonaux aux hyperplans $h_j$ qui contiennent les $f_j$ (en conformité avec la construction de $\widetilde{P}$). Les $v_j$ determinent une face de $\widetilde{P}$, qui est contenue dans un hyperplan unique $\widetilde{H}$, qui est le $\tilde{h}$ que l'on cherche. En effet, $\widetilde{H} = \tilde{h}$:

Choisissons deux des $v_j$, que nous appelerons $A$ et $B$. Considérons l'espace à deux dimensions $P_2$ engendré par $A$ et $B$. Projetons $u$ sur $P_2$, obtenant ainsi $u_{P_2}$. Nous pouvons maintenant établir un système de coordonnées $x' - y'$ sur $P_2$ tel que $u_{P_2}$ soit dirigé dans le sens des $x'$ positifs, $A$ se situe dans le demi-plan supérieur (axe $x'$ inclus) et $B$ est contenu dans le demi-plan inférieur (axe $x'$ inclus). Considérons les coordonnées polaires usuelles associées au système cartésien $x' - y'$ ci-dessus. Soit $\alpha \in [0, \pi]$ l'angle polaire servant à repérer $A$, et $\beta \in [-\pi, 0]$ l'angle polaire servant à repérer $B$. Considérons le point d'intersection de $A$ (ou de sa prolongation) avec une face (ou un hyperplan contenant une face) de $\widetilde{\Omega}$. Appelons ce point $A'$. Definissons $B'$ de façon analogue. Selon la construction de $\widetilde{P}$, les angles d'intersection de $A'$ et $B'$ avec leurs hyperplans correspondants valent $\frac{\pi}{2}$ chacun. Comme le quadrilatère $0, A', u_{P_2}, B'$ est contenu dans le plan $x'$-$y'$ (constatons que les origines des systèmes $x'$-$y'$ et du système de coordonnées initial coincident), on a alors

$$\alpha \in (0, \pi/2)$$

et

$$\beta \in (-\frac{\pi}{2}, 0).$$

Constatons que

$$|A'||A| = \frac{arcsin(\frac{\varepsilon}{2})}{\pi} = |B'||B|.$$

On peut maintenant écrire, en coordonnées polaires,

$$A = (|A|cos\alpha, |A|sin\alpha)$$

et

$$B = (|B|cos\beta, |B|sin\beta).$$

Nous avons aussi

$$|u_{P_2}| = \frac{|A'|}{cos\alpha} = \frac{|B'|}{cos\beta}$$

ce qui nous donne

$$\frac{|A'|}{|B'|} = \frac{cos\alpha}{cos\beta} = \frac{|B|}{|A|},$$

d'où

$$|B| = |A|\frac{cos\alpha}{cos\beta}.$$

Donc $\tilde{l} := B - A$ a 0 comme coordonnée $x'$, d'où $\tilde{l}$ est orthogonal à $u_{P_2}$. Ceci implique que $\tilde{l}$ est orthogonal à u.

On peut répéter l'exercice en laissant A tel quel, et en laissant B parcourir chacun des $v_j$ reliés à A par une arête de $\widetilde{P}$. Les $\tilde{l}$ ainsi obtenus engendrent $\widetilde{H}$, et tous sont orthogonaux à u; ainsi $\widetilde{H}$ est normal à u, et $\widetilde{H} = \tilde{h}$.

• Constatons que, puisque u et $\tilde{h}$ sont orthogonaux,

$$u \cdot \tilde{p} = constante, \forall \tilde{p} \in \tilde{h}.$$

• Cette constante peut être évaluée pour $\tilde{p} = A$, et a déjà été calculée en $(*)$:

$$\frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi}.$$

Pour $\tilde{p} = l_{\tilde{h}} :=$ le vecteur qui s'étend de l'origine jusqu'à $\tilde{h}$ dans la direction u (ainsi $|l_{\tilde{h}}|$ est la distance de 0 à $\tilde{h}$), nous avons

$$u \cdot l_{\tilde{h}} = \frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi}$$

$$\Longrightarrow |u| = \frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi |l_{\tilde{h}}|}.$$

Ainsi les sommets d'$\widetilde{\Omega}$ peuvent être construits de $\widetilde{P}$ de la même façon que les sommets de $\widetilde{P}$ sont obtenus de $\widetilde{\Omega}$. En prenant le plus petit ensemble convexe contenant les sommets d'$\widetilde{\Omega}$, on obtient $\widetilde{\Omega}$.

Donc $\widetilde{\Omega}$ peut être construit de $\widetilde{P}$ de la même façon que $\widetilde{P}$ est construit de $\widetilde{\Omega}$.

Donc tous les résultats obtenus auparavant concernant $\widetilde{P}$ par rapport à $\widetilde{\Omega}$ sont valables lorsqu'on interchange $\widetilde{P}$ et $\widetilde{\Omega}$.

Plus précisément, puisque nous avions

$$\widetilde{\Omega} = \widetilde{P}^{\epsilon \leq^{\mathbb{R}^n}},$$

nous devons aussi avoir

$$\widetilde{P} = \widetilde{\Omega}^{\epsilon \leq^{\mathbb{R}^n}}$$

ce qui implique

$$\widetilde{\Omega}^{\epsilon \leq^{\mathbb{R}^n} \epsilon \leq^{\mathbb{R}^n}} = \widetilde{\Omega}$$

et ceci termine la preuve.

(Par ailleurs, on a aussi

$$\widetilde{P}^{\epsilon \leq^{\mathbb{R}^n} \epsilon \leq^{\mathbb{R}^n}} = \widetilde{P}.)$$

Afin de vérifier l'exactitude de certains de nos arguments et résultats, obtenons

$$\widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}} = \widetilde{\Omega}$$

d'une façon un peu différente, i.e. sans utiliser

$$\widetilde{P} = \widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}}.$$

On peut procéder ainsi:

Constatons que pour tout ensemble $S \subseteq \mathbb{R}^n$, nous avons

$$S \subseteq S^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}}.$$

Ainsi

$$\widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}} \supseteq \widetilde{\Omega}.$$

Cependant, nous avions $\widetilde{P} \subseteq \widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}}$ ce qui implique

$$\widetilde{P}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}} \supseteq \widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}}$$

on obtient (en utilisant l'énoncé précédent)

$$\widetilde{\Omega} = \widetilde{P}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}} \supseteq \widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}} \supseteq \widetilde{\Omega}$$

ce qui implique

$$\widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}} = \widetilde{\Omega}.$$

□

DÉFINITION 1.1. $\forall A \subseteq \mathbb{R}^m, \forall B \subseteq \mathbb{R}^m, m \in \{0, 1, 2, ...\}$,

$$A \oplus B := \{x + y | x \in A, y \in B\}.$$

DÉFINITION 1.2. *Supposons que* $0 \in \widetilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n$.

$\widetilde{\Omega}$ *est* ***dégénéré et contient 0*** $\iff$ $\widetilde{\Omega} \subseteq S$, *où* $S$ *est un espace vectoriel dans* $\mathbb{R}^n$ *et* $dim(S) = m < n$. *(*$S$ *est choisi tel que* $dim(S)$ *est minimale.)*

*(*$\widetilde{\Omega}$ *est* ***dégénéré*** $\iff$ *il existe un translaté de* $\widetilde{\Omega}$ *qui est dégénéré et contient 0.)*

PROPOSITION 1.3. *Supposons que* $0 \in \widetilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n$.

*Si* $\widetilde{\Omega}$ *est dégénéré et contient 0, alors*

$$\widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}} = \widetilde{\Omega}_S^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n},S} \oplus S^{\perp},$$

*où* $S^{\perp}$ *est le complément orthogonal de* $S$, *et* $\widetilde{\Omega}_S^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n},S}$ *est le* $\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}$*-dual dans* $S$ *de* $\widetilde{\Omega}_S$ *(*$\widetilde{\Omega}_S$ *étant la projection de* $\widetilde{\Omega}$ *sur* $S$*):*

$$\widetilde{\Omega}_S^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n},S} := \{\mu' \in S \| e^{2\pi i \mu' \cdot x'} - 1| \leq \epsilon, \forall x' \in \widetilde{\Omega}_S\}.$$

DÉMONSTRATION. Puisque $\widetilde{\Omega}$ contient 0 et est dégénéré, nous avons $\widetilde{\Omega}_S = \widetilde{\Omega}$, et $\widetilde{\Omega}_{S^{\perp}} = 0$. Donc, $\forall z \in \mathbb{R}^n, \forall x \in \widetilde{\Omega}$, nous avons

$$z \cdot x = z_S \cdot x_S + z_{S^{\perp}} \cdot x_{S^{\perp}} = z_S \cdot x_S$$

(où $z_S$ est la projection de $z$ sur $S$ et $z_{S^{\perp}}$ est la projection de $z$ sur $S^{\perp}$, et, de même pour $x_S$ et $x_{S^{\perp}}$). On peut maintenant écrire:

1)

$$\begin{aligned} &\mu \in \widetilde{\Omega}_S^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n},S} \oplus S^{\perp} \\ \Longrightarrow\ & |e^{2\pi i \mu_S \cdot x_S} - 1| \leq \epsilon, \forall x \in \widetilde{\Omega} \\ \Longrightarrow\ & |e^{2\pi i \mu \cdot x} - 1| \leq \epsilon, \forall x \in \widetilde{\Omega} \end{aligned}$$

(puisque $\mu \cdot x = \mu_S \cdot x_S$)

$$\begin{aligned} \Longrightarrow\ & \mu \in \widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}} \\ \Longrightarrow\ & \widetilde{\Omega}_S^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n},S} \oplus S^{\perp} \subseteq \widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}}. \end{aligned}$$

2) $\mu \in \widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}} \Longrightarrow \forall x \in \widetilde{\Omega},\ |e^{2\pi i \mu \cdot x} - 1| \leq \epsilon$

$$\Longrightarrow |e^{2\pi i \mu_S \cdot x_S} - 1| \leq \epsilon$$

(puisque $\mu \cdot x = \mu_S \cdot x_S$)

$$\begin{aligned} \Longrightarrow\ & \mu_S \in \widetilde{\Omega}_S^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n},S} \\ \Longrightarrow\ & \mu \in \widetilde{\Omega}_S^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n},S} \oplus S^{\perp} \\ \Longrightarrow\ & \widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}} \subseteq \widetilde{\Omega}_S^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n},S} \oplus S^{\perp}. \end{aligned}$$

De 1) et 2), nous obtenons

$$\widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}} = \widetilde{\Omega}_S^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n},S} \oplus S^{\perp}.$$

□

PROPOSITION 1.4. *Supposons que* $0 \in \widetilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n$.

*Supposons que*

$$\widetilde{\Omega} = \widetilde{\Omega}_S \oplus S^{\perp}$$

*(où* $S \oplus S^{\perp} = \mathbb{R}^n$*).*

*Nous avons alors*

$$\widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}} = \widetilde{\Omega}_S^{\epsilon_{\leq,S}^{\mathbb{R}^n}}.$$

DÉMONSTRATION. 1) $\mu \in \widetilde{\Omega}_S^{\epsilon_{\leq,S}^{\mathbb{R}^n}} \implies \forall x \in \widetilde{\Omega} = \widetilde{\Omega}_S \oplus S^{\perp}$,

$$|e^{2\pi i \mu \cdot x} - 1| = |e^{2\pi i(\mu_S \cdot x_S + \mu_{S^\perp} \cdot x_{S^\perp})} - 1|$$

$$= |e^{2\pi i \mu_S \cdot x_S} - 1| \leq \epsilon$$

(puisque $\mu \in S$ d'après la definition de $\widetilde{\Omega}_S^{\epsilon_{\leq,S}^{\mathbb{R}^n}}$)

$$\implies \mu \in \widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}}$$

$$\implies \widetilde{\Omega}_S^{\epsilon_{\leq,S}^{\mathbb{R}^n}} \subseteq \widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}}.$$

2) $\mu \in \widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}} \implies \forall x \in \widetilde{\Omega} = \widetilde{\Omega}_S \oplus S^{\perp}$, $|e^{2\pi i \mu \cdot x} - 1| \leq \epsilon$

$$\implies |e^{2\pi i(\mu_S \cdot x_S + \mu_{S^\perp} \cdot x_{S^\perp})} - 1| \leq \epsilon$$

Il y a deux cas à considérer:

i) $\mu_{S^\perp} = 0$:

Nous avons alors, $\forall x \in \widetilde{\Omega}$,

$$\epsilon \geq |e^{2\pi i \mu \cdot x} - 1|$$

$$= |e^{2\pi i(\mu_S \cdot x_S + 0 \cdot x_{S^\perp})} - 1|$$

$$= |e^{2\pi i \mu_S \cdot x_S} - 1|$$

$$\implies \forall x' \in \widetilde{\Omega}_S, |e^{2\pi i \mu_S \cdot x'} - 1| \leq \epsilon$$

(puisque $\forall u \in \widetilde{\Omega}_S, \exists x \in \widetilde{\Omega}_S \oplus S^{\perp} = \widetilde{\Omega}$ tel que $x_S = u$, et notre choix de $x \in \widetilde{\Omega}$ est arbitraire)

$$\implies \mu_S \in \widetilde{\Omega}_S^{\epsilon_{\leq,S}^{\mathbb{R}^n}}.$$

Cependant, nous avons $\mu \in S$, ce qui implique $\mu_S = \mu$. Nous obtenons alors

$$\mu \in \widetilde{\Omega}_S^{\epsilon_{\leq,S}^{\mathbb{R}^n}}.$$

ii) Supposons que $\mu_{S^\perp} \neq 0$:

Nous avons alors $\mu_{S^\perp} = v \neq 0$. Là, pour $x \in \{u\} \oplus \{tv\}$ (où $u$ est un vecteur quelconque dans $\widetilde{\Omega}_S$, et $t$ est n'importe quel nombre réel), nous avons $x \in \widetilde{\Omega}_S \oplus S^\perp = \widetilde{\Omega}$, ce qui implique

$$\begin{aligned} \epsilon &\geq |e^{2\pi i \mu \cdot x} - 1| \\ &= |e^{2\pi i(\mu_S \cdot u + v \cdot tv)} - 1|. \end{aligned}$$

Ceci doit être vrai pour tout $t \in \mathbb{R}$, notamment pour $t = \frac{\frac{1}{2} - \mu_S \cdot u}{|v|^2}$ (qui existe puisque $v \neq 0$). Pour cette valeur spéciale de $t$, nous obtenons $\epsilon \geq 2$, ce qui est absurde puisque $\epsilon \in [0, 2)$.

Ainsi i) est la seule possibilité, et nous avons

$$\begin{aligned} \mu \in \widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} &\implies \mu \in \widetilde{\Omega}_S^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq, S}} \\ &\implies \widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} \subseteq \widetilde{\Omega}_S^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq, S}}. \end{aligned}$$

En combinant 1) et 2), nous obtenons

$$\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} = \widetilde{\Omega}_S^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq, S}}.$$

$\square$

PROPOSITION 1.5. *Supposons que*

$$\widetilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n$$

*est un polytope qui est fermé, convexe, symétrique par rapport à 0, non dégénéré , non borné, ou* $\widetilde{\Omega} = \mathbb{R}^n$. *Alors* $\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}\,\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} = \widetilde{\Omega}$.

DÉMONSTRATION. a) Supposons que $\widetilde{\Omega} = \mathbb{R}^n$:

i) Nous avons alors $0 \in (\mathbb{R}^n)^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$, puisque $\forall x \in \mathbb{R}^n, |e^{2\pi i 0 \cdot x} - 1| = 0 \leq \epsilon$. Pour $\mu \neq 0$, nous pouvons choisir $x = \frac{\mu}{2|\mu|^2} \in \mathbb{R}^n$, et nous avons $|e^{2\pi i \mu \cdot x} - 1| = 2 > \epsilon$, ce qui implique $\mu \notin (\mathbb{R}^n)^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$. Ainsi $\{0\} = (\mathbb{R}^n)^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$.

ii)

$$\begin{aligned} &\forall \mu \in \mathbb{R}^n, |e^{2\pi i \mu \cdot 0} - 1| = 0 \leq \epsilon \\ &\implies \{0\}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} = \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Ainsi on a

$$(\mathbb{R}^n)^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}\,\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} = \mathbb{R}^n.$$

b) $\widetilde{\Omega} \neq \mathbb{R}^n$:

• Constatons que $\widetilde{\Omega}$ est convexe et symétrique par rapport à 0, donc il doit contenir 0. Puisque il est non dégénéré, il est "non dégénéré et contient 0".

• Puisque $\widetilde{\Omega}$ est convexe, symétrique par rapport à 0 et n'est pas borné, on peut écrire

$$\widetilde{\Omega} = \widetilde{\Omega}_S \oplus S^{\perp}$$

où $\widetilde{\Omega}_S$ est un polytope dans $S$ qui est borné dans $S$, non dégénéré dans $S$, symétrique par rapport à 0 dans $S$, convexe dans $S$ et fermé dans $S$ (puisque $\widetilde{\Omega}_S$ est symétrique par rapport à 0 dans $\mathbb{R}^n$, convexe dans $\mathbb{R}^n$ et fermé dans $\mathbb{R}^n$). En utilisant la proposition précédente, nous obtenons

$$\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} = \widetilde{\Omega}_S^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq,S}}.$$

Cependant $\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$ est "dégénéré et contient 0" dans $\mathbb{R}^n$, avec

$$\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} = (\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}})_S.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} &= (\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}})^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} \\
&= (\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}})_S^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} \\
&= (\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}})_S^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq,S}} \oplus S^{\perp}
\end{aligned}$$

(obtenu en utilisant la proposition 1.3 du chapitre 3)

$$= (\widetilde{\Omega}_S^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq,S}})_S^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq,S}} \oplus S^{\perp}$$

(puisque nous avons déjà vu que $\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} = \widetilde{\Omega}_S^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq,S}}$)

$$= (\widetilde{\Omega}_S^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq,S}})^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq,S}} \oplus S^{\perp}$$

(puisque $(\widetilde{\Omega}_S^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq,S}})_S = \widetilde{\Omega}_S^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq,S}}$)

$$\begin{aligned}
&= \widetilde{\Omega}_S^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq,S}\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq,S}} \oplus S^{\perp} \\
&= \widetilde{\Omega}_S \oplus S^{\perp}
\end{aligned}$$

(obtenu en utilisant la proposition 1.2 du chapitre 3)

$$= \widetilde{\Omega}.$$

$\square$

PROPOSITION 1.6. *Supposons que nous avons* $0 \in \widetilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n$, *où* $\widetilde{\Omega}$ *est un polytope symétrique par rapport à 0, fermé, convexe, dégénéré (borné ou non borné). (Constatons que, puisqu'il est symétrique par rapport à 0 et convexe, il doit contenir 0, donc il est "dégénéré et contient 0".) On a alors*

$$\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}\,\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} = \widetilde{\Omega}.$$

DÉMONSTRATION. a) $\widetilde{\Omega}$ est borné:

On peut donc écrire

$$\widetilde{\Omega} = \widetilde{\Omega}_S$$

où $dim(S) < n$, et $\widetilde{\Omega}$ est fermé dans $S$, convexe dans $S$, symétrique par rapport à 0 dans $S$, borné dans $S$, contient l'origine dans $S$ et est non dégénéré dans $S$.

On a alors, en utilisant la proposition 1.3 du chapitre 3,

$$\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} = \widetilde{\Omega}_S^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq,S}} \oplus S^{\perp},$$

et, en utilisant la proposition 1.4 du chapitre 3, nous obtenons

$$\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}\,\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} = (\widetilde{\Omega}_S^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq,S}})^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq,S}}$$

$$= \widetilde{\Omega}_S^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq,S}\,\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq,S}}$$

$$= \widetilde{\Omega}_S$$

(en employant la proposition 1.2 du chapitre 3)

$$= \widetilde{\Omega}.$$

b) $\widetilde{\Omega}$ n'est pas borné:

On peut écrire

$$\widetilde{\Omega} = \widetilde{\Omega}_S \oplus T$$

où $dim(S) + dim(T) < n$, et $\widetilde{\Omega}_S$ est fermé dans $S$, convexe dans $S$, symétrique par rapport à 0 dans $S$, borné dans $S$ et contient 0 dans $S$, et est non dégénéré dans $S$.

Nous avons alors, en utilisant la proposition 1.3 du chapitre 3,

$$\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} = (\widetilde{\Omega}_S \oplus T)^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq,S\oplus T}} \oplus (S \oplus T)^{\perp}.$$

On a alors

$$\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}\,\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} = ((\widetilde{\Omega}_S \oplus T)^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq,S\oplus T}})^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq,S\oplus T}}$$

(obtenu en utilisant la proposition 1.4 du chapitre 3)

$$= (\widetilde{\Omega}_S^{\epsilon_{\leq,S}^{\mathbb{R}^n}})^{\epsilon_{\leq,S\oplus T}^{\mathbb{R}^n}}$$

(obtenu en utilisant la proposition 1.4 du chapitre 3)

$$= \widetilde{\Omega}_S^{\epsilon_{\leq,S}^{\mathbb{R}^n}\epsilon_{\leq,S}^{\mathbb{R}^n}} \oplus T$$

(obtenu en utilisant la proposition 1.3 du chapitre 3)

$$= \widetilde{\Omega}_S \oplus T$$

(obtenu en utilisant la proposition 1.2 du chapitre 3)

$$= \widetilde{\Omega}.$$

$\square$

REMARQUE 1.1. *En combinant la proposition 1.2 du chapitre 3, la proposition 1.5 du chapitre 3, et la proposition 1.6 du chapitre 3, on peut conclure que si $\widetilde{\Omega}$ est un polytope convexe, fermé, symétrique par rapport à 0 (contenant l'origine, dégénéré ou non dégénéré, borné ou non borné), ou $\widetilde{\Omega} = \mathbb{R}^n$, nous avons*

$$\widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}} = \widetilde{\Omega}.$$

PROPOSITION 1.7. *Supposons que $\widetilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n$ est non vide, convexe, fermé et symétrique par rapport à 0. Considérons toutes les relations d'inclusion possibles (finies ou infinies) de la forme*

$$\ldots \subseteq \tilde{P}_i \subseteq \widetilde{\Omega} \subseteq \tilde{P}_j \subseteq \ldots$$

*où $\tilde{P}_i, \tilde{P}_j$ sont des polytopes fermés, convexes, symétriques par rapport à 0 (contenant l'origine, dégénérés ou non dégénérés, bornés ou non bornés, incluant le cas $\{0\}$), ou $\mathbb{R}^n$. Appelons cet ensemble de relations d'inclusion $S_{\widetilde{\Omega}}(\widetilde{\Omega})$. (Constatons que cet ensemble est non vide, puisque nous pouvons toujours écrire $0 \subseteq \widetilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n$.) Représentons par $S_{\widetilde{\Omega}}(X)$ ce même ensemble après avoir remplacé $\widetilde{\Omega}$ par $X$ dans chaque relation d'inclusion de $S_{\widetilde{\Omega}}(\widetilde{\Omega})$. Nous allons dire que $S_{\widetilde{\Omega}}(X)$ est vrai $\Longleftrightarrow$ chacune des relations de la forme*

$$\ldots \subseteq \tilde{P}_i \subseteq X \subseteq \tilde{P}_j \subseteq \ldots$$

*constituant $S_{\widetilde{\Omega}}(X)$ est vraie.*

*Nous avons alors*

$$S_{\widetilde{\Omega}}(X) \quad vrai \Longleftrightarrow X = \widetilde{\Omega} \quad vrai$$

*(i.e.* $S_{\widetilde{\Omega}}(\widetilde{\Omega})$ *"caractérise"* $\widetilde{\Omega}$*.)*

Démonstration. 1) Pour $X = \widetilde{\Omega}$, nous avons, par définition, $S_{\widetilde{\Omega}}(X)\quad vrai$. Ainsi

$$X = \widetilde{\Omega} \implies S_{\widetilde{\Omega}}(X) \quad vrai.$$

2) Afin de voir que $S_{\widetilde{\Omega}}(X) \quad vrai \implies X = \widetilde{\Omega} \quad vrai$, supposons le contraire:

$$\exists \tilde{X} \subseteq \mathbb{R}^n, \tilde{X} \neq \widetilde{\Omega}, \ t.q.\ S_{\widetilde{\Omega}}(\tilde{X}) \quad vrai.$$

i) Supposons que $\exists p \in \widetilde{\Omega}$ t.q. $p \notin \tilde{X}$. Considérons une relation (vraie) quelconque de la forme $\tilde{P}_i \subseteq \tilde{X} \subseteq \tilde{P}_j$. puisque $p \notin \tilde{X}$, nous devons avoir $p \notin \tilde{P}_i$. Nous devons cependant avoir $\tilde{P}_i \subseteq \widetilde{\Omega} \subseteq \tilde{P}_j$. Maintenant considérons le polytope $\tilde{P}_k$, que nous allons construire en prenant le plus petit ensemble convexe contenant $\tilde{P}_i$, $p$ et $-p$. $\tilde{P}_k$ est convexe, fermé et symétrique par rapport à 0. Puisque $\widetilde{\Omega}$ est convexe, nous avons $\tilde{P}_k \subseteq \widetilde{\Omega} \subseteq \tilde{P}_j$. Puisque $S_{\widetilde{\Omega}}(\tilde{X})$ est vrai, ceci implique que $\tilde{P}_k \subseteq \tilde{X} \subseteq \tilde{P}_j$ est vrai. Cependant, $p \in \tilde{P}_k$, ce qui nous donne $p \in \tilde{X}$ (absurde).

ii) Supposons que $\exists p \in \tilde{X}$ t.q. $p \notin \widetilde{\Omega}$. On doit avoir $p \neq 0, p \in \mathbb{R}^n \setminus \widetilde{\Omega}$. Puisque $\widetilde{\Omega}$ est convexe et $p \notin \widetilde{\Omega}$, il existe un hyperplan $H$ t.q. $p \notin H$, et $p$ et $\widetilde{\Omega}$ sont de part et d'autre de $H$ (dans le sens de ne pas se retrouver dans le même demi-espace fermé determiné par $H$).

(Ceci peut être vu comme suit:

Puisque $p \notin \widetilde{\Omega}, 0 \in \widetilde{\Omega}$, $\exists q$ sur le segment de droite $0p$ t.q. $q \in \partial\widetilde{\Omega}$. Puisque $\widetilde{\Omega}$ est convexe, il existe un hyperplan $H'$ t.q. $q \in H'$ et $\widetilde{\Omega}$ se situe, en entier, d'un seul côté de $H'$. Supposons que $p \notin H'$; là, $p$ et $0 \in \widetilde{\Omega}$ sont de part et d'autre de $H'$, ce qui signifie que $p$ et $\widetilde{\Omega}$ sont de part et d'autre de $H'$, et on peut poser $H := H'$.

Supposons que $p \in H'$; alors segment de droite $qp$ se retrouve dans $H'$, ainsi que le segment de droite $0qp$. Il en découle que $0 \in H'$. Puisque $\widetilde{\Omega}$ est symétrique par rapport à 0 et $\widetilde{\Omega}$ se situe d'un seul côté de $H'$, $\widetilde{\Omega}$ doit être entièrement confiné à $H'$ (si ce n'était pas le cas, $\exists t \neq 0, t \in \widetilde{\Omega}$ t.q. $t \notin H'$. On aurait alors $t \in \widetilde{\Omega}$ et $(-t) \in \widetilde{\Omega}$ par symétrie par rapport à l'origine, avec $t$ et $(-t)$ de part et d'autre de $H'$, ce qui est impossible). Ainsi $\widetilde{\Omega} \subseteq S$, où $S$ est un espace vectoriel quelconque dans $\mathbb{R}^n$, avec $dim(S) < n$. Choisissons maintenant $S$ tel que $dim(S)$ est minimal.

Considérons $A := \widetilde{\Omega} \oplus S^{\perp}$. $A$ est convexe, symétrique par rapport à 0 et à n dimensions. Nous avons aussi $q \in \partial A$. Il existe donc un hyperplan $H''$ passant par $q$ tel que $A$ (et donc $\widetilde{\Omega}$) est d'un seul côté de $H''$. Constatons que $0 \notin H''$ (i.e. puisque $A$ est convexe, symétrique par rapport à 0 et à n dimensions, $A$ doit contenir $n$ vecteurs linéairement indépendants $a_1, ..., a_n$, ainsi que $-a_1, ..., -a_n$. En prenant le plus petit ensemble convexe des points que ces vecteurs représentent, on obtient un polytope $B$ à n dimensions qui est convexe, symétrique par rapport à 0 avec $0 \in int(B) \subseteq A$. Si on avait $0 \in H''$, alors on aurait des points $u, v \in int(B) \subseteq A$ de part et d'autre de $H''$, avec $v \notin H''$, $w \notin H''$, ce qui est impossible). Ainsi le segment de droite $0q$ n'est pas contenu dans $H''$, et le segment de droite $qp$ n'est pas dans $H''$. Il en résulte que $p \notin H''$, et $p$ et $0 \in \widetilde{\Omega} \subseteq A$ sont de part et d'autre de $H''$. Ainsi $p$ et $\widetilde{\Omega}$ sont de part et d'autre de $H''$. On peut maintenant poser $H := H''$.)

(L'existence de $H'$ passant par $q \in \partial\widetilde{\Omega}$ t.q. $\widetilde{\Omega}$ se trouve d'un seul côté de $H'$ peut être vu ainsi:

Supposons le contraire, i.e. pour chaque hyperplan traversant $q$, il y a des points d'$\widetilde{\Omega}$ de part et d'autre de l'hyperplan en question. On peut alors prendre un hyperplan quelconque $h_0$; celui-ci doit obligatoirement passer par $q$. Selon notre hypothèse, $\exists q_1, q_1' \in \widetilde{\Omega}$ se trouvant de part et d'autre de $h_0$. Prenons un hyperplan $h_1$ contenant $q$ et $q_1$. On a alors $q_2, q_2' \in \widetilde{\Omega}$ de part et d'autre de $h_1$. Prenons maintenant $h_2$ contenant $q, q_1, q_2$. Continuons ainsi jusqu'à l'obtention de $q_n$. En prenant le plus petit ensemble convexe contenant $q, q_1, ..., q_n$, on obtient un polytope $P$ à n dimensions qui est convexe avec $P \in \widetilde{\Omega}$. Constatons que $q \notin int(P)$ (sinon il existerait un voisinage N contenant $q$ avec $N \subseteq P \subseteq \widetilde{\Omega}$, ce qui serait en contradiction avec $q \in \partial\widetilde{\Omega}$). On a donc $q \in \partial P$. Considérons l'angle "solide" à $q$ sous-tendu par $P$; cet angle doit correspondre à moins d'un demi-espace (sinon on aurait $q \in int(P)$, ce qui est impossible). Maintenant essayons d'accroître cet angle solide en agrandissant $P$: en emplyant notre hypothèse, nous constatons qu'il y a des points d'$\widetilde{\Omega}$ de part et d'autre de chacune des faces de $P$. Prenons maintenant au moins un point de $\widetilde{\Omega}$ à l'extérieur de $P$ pour chacune des faces de $P$; prenons le plus petit ensemble convexe contenant $P$ et les nouveaux points et ainsi agrandissons $P \subseteq \widetilde{\Omega}$. Répétons le processus maintes fois. Deux possibilités surviennent:

i) éventuellement l'angle solide à $q$ sous-tendu par $P$ correspondra à plus d'un demi-espace. On obtiendra ainsi $q \in int(P)$, ce qui est impossible;

ii) peu importe comment $P$ est initialement construit et agrandi, l'angle solide à $q$ sera toujours confiné à un demi-espace. Ceci implique l'existence d'un hyperplan $\tilde{h}$ t.q. tous les sommets de $P$ se situeront du même côté de $\tilde{h}$, peu importe combien de fois $P$ sera agrandi. Cependant, selon notre hypothèse, il existe un point d'$\widetilde{\Omega}$ de l'autre côté de $\tilde{h}$, qui peut devenir un nouveau sommet pour $P$, ce qui est absurde.

Ainsi $H'$ doit exister, avec les propriétés décrites précédemment.)

(Remarque: la preuve ci-dessus de l'existence de $H'$ a été rédigée avant de savoir que le résultat était déjà bien connu. Cet argument semble intéressant, donc il a été laissé dans le texte.)

Soit $h$ le demi-espace fermé borné par $H$ qui contient $\widetilde{\Omega}$. Considérons maintenant le demi-espace fermé $\tilde{h}$ qui est "l'image symétrique par rapport à 0" de $h$:

$$\tilde{h} := \{x \in \mathbb{R}^n | (-x) \in h\}.$$

Puisque $\widetilde{\Omega}$ est symétrique par rapport à 0, nous avons

$$\widetilde{\Omega} \subseteq h \cap \tilde{h}.$$

Cependant, $S_{\widetilde{\Omega}}(\widetilde{\Omega})$ est vrai, de même que $S_{\widetilde{\Omega}}(\tilde{X})$. Maintenant considérons l'expression suivante (qui est vraie):

$$\tilde{P}_i \subseteq \widetilde{\Omega} \subseteq \tilde{P}_j$$

ce qui implique que

$$\tilde{P}_i \subseteq \tilde{X} \subseteq \tilde{P}_j$$

est aussi vrai. Maintenant considérons $\tilde{P}_l$, le polytope défini par

$$\tilde{P}_l := \tilde{P}_j \cap (h \cap \tilde{h}).$$

$\tilde{P}_l$ est convexe, fermé et symétrique par rapport à 0. Constatons que $p \notin h$, ce qui implique $p \notin \tilde{P}_l$.

Nous avons alors $\widetilde{\Omega} \subseteq \tilde{P}_l$, ce qui implique

$$\tilde{P}_i \subseteq \widetilde{\Omega} \subseteq \tilde{P}_l,$$

donc

$$\tilde{P}_i \subseteq \tilde{X} \subseteq \tilde{P}_l.$$

Cependant, $p \notin \tilde{P}_l$, ce qui est absurde puisque $p \in \tilde{X} \subseteq \tilde{P}_l$. $\square$

Proposition 1.8. *Si* $\emptyset \neq \widetilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n$ *est fermé,convexe et symétrique par rapport à 0, alors*

$$\widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n} \epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}} = \widetilde{\Omega}.$$

Démonstration. Considérons chaque relation

$$\ldots \subseteq \tilde{P}_i \subseteq \tilde{\Omega} \subseteq \tilde{P}_j \subseteq \ldots$$

de $S_{\tilde{\Omega}}(\tilde{\Omega})$. En prenant l' $\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}$-dual de chacune de ces relations, on obtient

$$\ldots \supseteq \tilde{P}_i^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}} \supseteq \tilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}} \supseteq \tilde{P}_j^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}} \supseteq \ldots$$

En répétant cette opération, on a

$$\ldots \subseteq \tilde{P}_i^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}} \subseteq \tilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}} \subseteq \tilde{P}_j^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}} \subseteq \ldots$$

En utilisant la remarque 1.1 du chapitre 3, nous obtenons

$$\ldots \subseteq \tilde{P}_i \subseteq \tilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}} \subseteq \tilde{P}_j \subseteq \ldots$$

impliquant ainsi que $S_{\tilde{\Omega}}(\tilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}})$ est vrai, d'où

$$\tilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}} = \tilde{\Omega}.$$

□

Proposition 1.9. *Pour* $\{0\} \neq \tilde{\Omega} = \{x\} \subseteq \mathbb{R}^n$, *on a*

$$\tilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}} = \{\mu \in \mathbb{R}^n | \frac{\mu \cdot x}{|x|} \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [\frac{k}{|x|} - \frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi|x|}, \frac{k}{|x|} + \frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi|x|}]\}.$$

Démonstration. i)

$$\begin{aligned}
\frac{\mu \cdot x}{|x|} &\in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [\frac{k}{|x|} - \frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi|x|}, \frac{k}{|x|} + \frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi|x|}] \\
&\Longrightarrow |e^{2\pi i \mu \cdot x} - 1| = 2|sin(|\pi\mu \cdot x|)| \\
&\in [2|sin(0)|, 2|sin(arcsin(\frac{\epsilon}{2}))|] = [0, \epsilon] \\
&\Longrightarrow \mu \in \tilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}} \\
\Longrightarrow \{\mu \in \mathbb{R}^n | \frac{\mu \cdot x}{|x|} &\in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [\frac{k}{|x|} - \frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi|x|}, \frac{k}{|x|} + \frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi|x|}]\} \subseteq \tilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}}.
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
&\mu \in \tilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}} \\
&\Longrightarrow |e^{2\pi i \mu \cdot x} - 1| = 2|sin(|\pi\mu \cdot x|)| \\
&\in [0, \epsilon] \\
&\Longrightarrow \frac{\mu \cdot x}{|x|} \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [\frac{k}{|x|} - \frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi|x|}, \frac{k}{|x|} + \frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi|x|}]
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \widetilde{\Omega}^{\epsilon \overset{\mathbb{R}^n}{\leq}} \subseteq \{\mu \in \mathbb{R}^n | \frac{\mu \cdot x}{|x|} \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [\frac{k}{|x|} - \frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi|x|}, \frac{k}{|x|} + \frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi|x|}]\}.$$

De i) et ii) nous obtenons la conclusion désirée. □

COROLLAIRE 1.1. *Supposons que* $\widetilde{\Omega} \neq \emptyset$.
*Pour* $\{0\} \neq \widetilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n$, $\widetilde{\Omega}^{\epsilon \overset{\mathbb{R}^n}{\leq}}$ *est fermé.*

DÉMONSTRATION. Constatons que $\forall x \neq 0$, $\{x\}^{\epsilon \overset{\mathbb{R}^n}{\leq}}$ est constitué de la région fermée située entre les deux hyperplans orthogonaaux à $x$ qui sont de part et d'autre de 0 à une distance de $\frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi|x|}$ de 0, que nous appellerons $V$, et de tous les ensembles de la forme $V + k\frac{x}{|x|^2}$, $k \in \mathbb{Z}$ (translatés de $V$).

Ainsi $\{x\}^{\epsilon \overset{\mathbb{R}^n}{\leq}}$ est fermé.

Puisque

$$\widetilde{\Omega} = \bigcup_{x\in\widetilde{\Omega}} \{x\},$$

nous avons

$$\widetilde{\Omega}^{\epsilon \overset{\mathbb{R}^n}{\leq}} = \bigcap_{x\in\widetilde{\Omega}} \{x\}^{\epsilon \overset{\mathbb{R}^n}{\leq}}.$$

i) Pour $0 \notin \widetilde{\Omega}$, nous avons

$$\widetilde{\Omega}^{\epsilon \overset{\mathbb{R}^n}{\leq}} = \bigcap_{x\in\widetilde{\Omega}} \{x\}^{\epsilon \overset{\mathbb{R}^n}{\leq}}$$

qui est l'intersection d'un nombre arbitraire (possiblement infini) d'ensembles fermés, qui est fermée.

ii) Pour $0 \in \widetilde{\Omega}$, nous avons

$$\begin{aligned}\widetilde{\Omega}^{\epsilon \overset{\mathbb{R}^n}{\leq}} &= \bigcap_{x\in\widetilde{\Omega}} \{x\}^{\epsilon \overset{\mathbb{R}^n}{\leq}} \\ &= \{0\}^{\epsilon \overset{\mathbb{R}^n}{\leq}} \bigcap ( \bigcap_{x\in\widetilde{\Omega}\setminus\{0\}} \{x\}^{\epsilon \overset{\mathbb{R}^n}{\leq}}) \\ &= \mathbb{R}^n \bigcap ( \bigcap_{x\in\widetilde{\Omega}\setminus\{0\}} \{x\}^{\epsilon \overset{\mathbb{R}^n}{\leq}}) \\ &= \bigcap_{x\in\widetilde{\Omega}\setminus\{0\}} \{x\}^{\epsilon \overset{\mathbb{R}^n}{\leq}}\end{aligned}$$

qui est l'intersection d'un nombre arbitraire (possiblement infini) d'ensembles fermés, qui est fermée. □

Corollaire 1.2. *Supposons que* $\emptyset \neq \widetilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n$ *est connexe par arcs. Nous avons alors:*

$\widetilde{\Omega}$ *est fermé, convexe et symétrique par rapport à 0*

$$\iff \widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}\,\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} = \widetilde{\Omega}.$$

Démonstration. a) $\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}\,\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} = \widetilde{\Omega} \implies \widetilde{\Omega}$ est fermé, convexe et symétrique par rapport à 0:

Constatons que $\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$ contient toujours 0, et tel est le cas pour $\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}\,\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$. Puisque $\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}\,\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} = \widetilde{\Omega}$, alors $\widetilde{\Omega}$ doit contenir 0. Là, $\widetilde{\Omega}$ est connexe par arcs et contient 0. D'après la proposition 1.1 du chapitre 3, $\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$ est symétrique par rapport à 0, contient 0, et est convexe. Ceci implique que $\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$ est connexe par arcs et contient 0. En employant la proposition 1.1 du chapitre 3 une deuxième fois, nous trouvons que $\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}\,\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$ est symétrique par rapport à 0, contient 0, et est convexe.

En utilisant le corollaire 1.1 du chapitre 3, on trouve que $\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}\,\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} = \left(\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}\right)^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$ est fermé.

Donc $\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}\,\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} = \widetilde{\Omega}$ est fermé, convexe et symétrique par rapport à 0.

b) $\widetilde{\Omega}$ est fermé, convexe et symétrique par rapport à 0

$$\implies \widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}\,\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} = \widetilde{\Omega}:$$

Ceci est vrai selon la proposition 1.8 du chapitre 3. □

Proposition 1.10. *Supposons que* $\widetilde{\Omega}$ *est connexe par arcs et contient* 0. *Alors* $\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}\,\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$ *est le plus petit ensemble contenant* $\widetilde{\Omega}$ *ayant les propriétés suivantes: il contient l'origine; il est convexe; il est fermé; il est symétrique par rapport à* 0. *(Ici, "le plus petit ensemble contenant* $\widetilde{\Omega}$ *ayant les propriétés énumérées" signifie " l'intersection de tous les ensembles contenant* $\widetilde{\Omega}$ *ayant les propriétés énumérées".)*

Démonstration. Selon la proposition 1.1 de ce chapitre (appliquée deux fois), $\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}\,\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$ contient l'origine, est convexe et est symétrique par rapport à 0. En appliquant le corollaire 1.1 de ce chapitre deux fois, on trouve que $\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}\,\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$ est fermé. Constatons aussi que $\widetilde{\Omega} \subseteq \widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}\,\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$.

Afin de voir que c'est le plus petit ensemble contenant $\widetilde{\Omega}$ possédant toutes ces caractéristiques, supposons le contraire:

$\exists A \neq \widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\le}^{\mathbb{R}^n}\epsilon_{\le}^{\mathbb{R}^n}}$ ayant toutes les propriétés mentionnées mais qui satisfait $\widetilde{\Omega} \subseteq A \subseteq \widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\le}^{\mathbb{R}^n}\epsilon_{\le}^{\mathbb{R}^n}}$.

On a alors

$$\widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\le}^{\mathbb{R}^n}} \supseteq A^{\epsilon_{\le}^{\mathbb{R}^n}} \supseteq \widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\le}^{\mathbb{R}^n}\epsilon_{\le}^{\mathbb{R}^n}\epsilon_{\le}^{\mathbb{R}^n}}$$

d'où

$$\widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\le}^{\mathbb{R}^n}\epsilon_{\le}^{\mathbb{R}^n}} \subseteq A^{\epsilon_{\le}^{\mathbb{R}^n}\epsilon_{\le}^{\mathbb{R}^n}} \subseteq \widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\le}^{\mathbb{R}^n}\epsilon_{\le}^{\mathbb{R}^n}\epsilon_{\le}^{\mathbb{R}^n}\epsilon_{\le}^{\mathbb{R}^n}}.$$

Cependant, en employant le corollaire 1.2 de ce chapitre, on peut écrire

$$\widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\le}^{\mathbb{R}^n}\epsilon_{\le}^{\mathbb{R}^n}} \subseteq A \subseteq \widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\le}^{\mathbb{R}^n}\epsilon_{\le}^{\mathbb{R}^n}}$$

impliquant

$$A = \widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\le}^{\mathbb{R}^n}\epsilon_{\le}^{\mathbb{R}^n}}$$

ce qui est absurde, puisqu'on a supposé que $A \neq \widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\le}^{\mathbb{R}^n}\epsilon_{\le}^{\mathbb{R}^n}}$. □

REMARQUE 1.2. *Supposons que $\widetilde{\Omega}$ contient 0 et est connexe par arcs. Soit $A$ le plus petit ensemble contenant $\widetilde{\Omega}$ qui est à la fois fermé, symétrique par rapport à 0 et convexe. Nous savons alors que $A = \widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\le}^{\mathbb{R}^n}\epsilon_{\le}^{\mathbb{R}^n}}$ (selon la proposition précédente) et que $\widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\le}^{\mathbb{R}^n}} = A^{\epsilon_{\le}^{\mathbb{R}^n}}$ (puisqu'on a toujours $\widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\le}^{\mathbb{R}^n}} = \widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\le}^{\mathbb{R}^n}\epsilon_{\le}^{\mathbb{R}^n}\epsilon_{\le}^{\mathbb{R}^n}}$).*

# CHAPITRE 4

## $\epsilon_<^{\mathbb{R}^n}$-dual d'un ensemble

### 1. Résultats

Considérons $\epsilon \in (0, 2)$.

Definissons:

$$\widetilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n,$$

$$\widetilde{\Omega}^{\epsilon_<^{\mathbb{R}^n}} := \{\mu \in \mathbb{R}^n \mid |e^{2\pi i\mu\cdot x} - 1| < \epsilon, \forall x \in \widetilde{\Omega}\}.$$

Proposition 1.1. *Si $\widetilde{\Omega}$ est connexe par arcs et contient 0, alors $\widetilde{\Omega}^{\epsilon_<^{\mathbb{R}^n}}$ est symétrique par rapport à 0, contient 0, et est convexe.*

Démonstration. 1) $\widetilde{\Omega}^{\epsilon_<^{\mathbb{R}^n}}$ est symétrique par rapport à 0, puisque

$$|e^{2\pi i\mu\cdot x} - 1| = |e^{2\pi i(-\mu)\cdot x} - 1|,$$

ainsi

$$|e^{2\pi i\mu\cdot x} - 1| < \epsilon \Leftrightarrow |e^{2\pi i(-\mu)\cdot x} - 1| < \epsilon.$$

Ceci implique que

$$\mu \in \widetilde{\Omega}^{\epsilon_<^{\mathbb{R}^n}} \Leftrightarrow (-\mu) \in \widetilde{\Omega}^{\epsilon_<^{\mathbb{R}^n}}.$$

2) $\widetilde{\Omega}^{\epsilon_<^{\mathbb{R}^n}}$ contient 0 puisque $|e^{2\pi i0\cdot x} - 1| = 0 < \epsilon$.

3) Convexité:

$\forall x \in \widetilde{\Omega}, \forall m \in \widetilde{\Omega}^{\epsilon_<^{\mathbb{R}^n}}$, nous avons

$$|e^{2\pi im\cdot x} - 1| = 2|sin(\pi m \cdot x)| < \epsilon < 2.$$

Prenons une courbe continue $X(t)$ dans $\widetilde{\Omega}$ avec $X(0) = 0$ et $X(1) = x$. Là, $\pi m \cdot X(t)$ est continu par rapport à t et son image lorsque t parcourt $[0, 1]$ est un sous-ensemble connexe de

$\mathbb{R}$. Cette image doit appartenir à $(-\pi/2, \pi/2)$: si tel n'était pas le cas, par connexité, $-\pi/2$ et/ou $\pi/2$ doit(doivent) appartenir à cette image. Ceci impliquerait que, quelque part sur la courbe $X(t) \subseteq \widetilde{\Omega}$, pour un $t' \in [0, 1]$,

$$2|sin(\pi m \cdot X(t'))| = 2 > \epsilon,$$

ce qui est absurde. Donc pour tout $m, n \in \widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{<}}$, pour tout $x, y \in \widetilde{\Omega}$, nous avons soit $[m \cdot x, n \cdot y] \subseteq (-\pi/2, \pi/2)$ ou $[n \cdot y, m \cdot x] \subseteq (-\pi/2, \pi/2)$.

Maintenant, pour tout $t \in [0, 1]$, $tm + (1-t)n$ est le segment de droite unissant $m$ et $n$. Là,

$$(tm) \cdot x + (1-t)n \cdot y$$

est le segment de droite unissant les nombres réels $m \cdot x$ et $n \cdot y$.

Considérons la fonction

$$u(v) := 2|sin(v)|.$$

Sa dérivée n'est jamais nulle sur $(-\pi/2, \pi/2)$ (et cette fonction n'est pas différentiable à 0). Ainsi sa valeur maximale sur tout intervalle fermé I contenu dans $(-\pi/2, \pi/2)$ survient soit à une extrémité de I ou lorsque $v = 0$ (si $0 \in I$). Puisque $u(0) = 0$, la valeur maximale survient à une extrémité de I. Ceci implique que, $\forall t \in [0, 1]$,

$$2|sin(tm \cdot x + (1-t)n \cdot y)| \leq Max\{2|sin(m \cdot x)|, 2|sin(n \cdot y)\} < \epsilon.$$

donc le segment de droite unissant $m$ et $n$ se situe à l'intérieur de $\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{<}}$, et nous avons la convexité.

# CHAPITRE 5

## $\epsilon_<^{\mathbb{D}_j}$-dual d'un ensemble

### 1. Résultats

Definissons:

$$\widetilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n,$$

$$\Omega := \widetilde{\Omega}|_{\mathbb{D}_1^*},$$

$$j \in \{1, 2\},$$

$$\widetilde{\Omega}^{\epsilon_<^{\mathbb{D}_j^*}} := \{\mu \in \mathbb{D}_j^* \mid |e^{2\pi i \mu \cdot x} - 1| < \epsilon, \forall x \in \widetilde{\Omega}\}.$$

Supposons que

$$\epsilon \in (0, 2)$$

et que $\exists \Lambda \subseteq \mathbb{D}_1, \Lambda \neq \emptyset$ tel que

$$\Lambda^* = \Omega.$$

Supposons aussi que l'application $*$ est bijective sur $\mathbb{D}_j$.

Dénotons l'application inverse de $*$ par $-*$:

$$-* : \mathbb{D}_j^* \longrightarrow \mathbb{D}_j$$

$$m \longmapsto m^{-*}$$

$$(j \in \{1, 2\}).$$

(Il en découle que $m \cdot n \in \pm m^{-*} \cdot n^{-*} + \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{D}_j^*, n \in \mathbb{D}_{(j \mod 2)+1}^*$.)

PROPOSITION 1.1. *Supposons que* $\widetilde{\Omega}, \Omega, \widetilde{\Omega}^{\epsilon \overset{\mathbb{R}^n}{<}}|_{\mathbb{D}_2^*}$ *et* $\Omega^{\epsilon \overset{\mathbb{D}_2^*}{<}}$ *sont tous non vides. Si* $\widetilde{\Omega}$ *est ouvert, connexe par arcs et contient 0, alors*

$$\left(\Lambda^{\epsilon \overset{\mathbb{D}_2}{<}}\right)^* = S|_{\mathbb{D}_2^*},$$

*où* $S$ *est convexe, contient 0, et est symétrique par rapport à 0.*

$$(S = \widetilde{\Omega}^{\epsilon \overset{\mathbb{R}^n}{<}}).$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que

$$\left(\Lambda^{\epsilon \overset{\mathbb{D}_2}{<}}\right)^* = \widetilde{\Omega}^{\epsilon \overset{\mathbb{R}^n}{<}}|_{\mathbb{D}_2^*},$$

et poser $S = \widetilde{\Omega}^{\epsilon \overset{\mathbb{R}^n}{<}}$. (On a déjà vu à la proposition 1.1 du chapitre 4 que $\widetilde{\Omega}^{\epsilon \overset{\mathbb{R}^n}{<}}$ est convexe, contient 0 et est symétrique par rapport à 0.)

a) $\left(\Lambda^{\epsilon \overset{\mathbb{D}_2}{<}}\right)^* = \Omega^{\epsilon \overset{\mathbb{D}_2^*}{<}}$ :

$$\begin{aligned}
& \mu \in \Omega^{\epsilon \overset{\mathbb{D}_2^*}{<}} \\
\iff & |e^{2\pi i \mu \cdot x^*} - 1| < \epsilon, \forall x^* \in \Omega, \mu \in \mathbb{D}_2^* \\
\iff & |e^{2\pi i \mu^{-*} \cdot x} - 1| < \epsilon, \forall x \in \Lambda, \mu^{-*} \in \mathbb{D}_2 \\
\iff & \mu^{-*} \in \Lambda^{\epsilon \overset{\mathbb{D}_2}{<}} \\
\iff & \mu \in \left(\Lambda^{\epsilon \overset{\mathbb{D}_2}{<}}\right)^*.
\end{aligned}$$

b) $\widetilde{\Omega}^{\epsilon \overset{\mathbb{R}^n}{<}}|_{\mathbb{D}_2^*} = \Omega^{\epsilon \overset{\mathbb{D}_2^*}{<}}$ :

1) $\tilde{\mu} \in \widetilde{\Omega}^{\epsilon \overset{\mathbb{R}^n}{<}}|_{\mathbb{D}_2^*} \Rightarrow \tilde{\mu} \in \widetilde{\Omega}^{\epsilon \overset{\mathbb{R}^n}{<}} \cap \mathbb{D}_2^* \Rightarrow |e^{2\pi i \tilde{\mu} \cdot x} - 1| < \epsilon, \forall x \in \widetilde{\Omega} \supseteq \Omega \Rightarrow \tilde{\mu} \in \Omega^{\epsilon \overset{\mathbb{D}_2^*}{<}} \Rightarrow \widetilde{\Omega}^{\epsilon \overset{\mathbb{R}^n}{<}}|_{\mathbb{D}_2^*} \subseteq \Omega^{\epsilon \overset{\mathbb{D}_2^*}{<}}$.

2) $\mu \in \Omega^{\epsilon \overset{\mathbb{D}_2^*}{<}} \Rightarrow |e^{2\pi i \mu \cdot x} - 1| < \epsilon, \forall x \in \Omega$.

Supposons que $\mu \notin \widetilde{\Omega}^{\epsilon \overset{\mathbb{R}^n}{<}}|_{\mathbb{D}_2^*}$; alors $\exists \tilde{x} \in \widetilde{\Omega}$ t.q. $|e^{2\pi i \mu \cdot \tilde{x}} - 1| = \tilde{\epsilon}$, $\tilde{\epsilon} \geq \epsilon$.

i) $\tilde{\epsilon} > \epsilon \Rightarrow \exists y \in \mathbb{D}_1^* \cap \widetilde{\Omega} = \widetilde{\Omega}|_{\mathbb{D}_1^*} = \Omega$ dans un voisinage de $\tilde{x}$ ($\mathbb{D}_1^*$ étant dense dans $\mathbb{R}^n$ et $\widetilde{\Omega}$ étant ouvert) t.q. $|e^{2\pi i \mu \cdot y} - 1| > \epsilon \Rightarrow \mu \notin \Omega^{\epsilon \overset{\mathbb{D}_2^*}{<}}$ (absurde).

ii) $\tilde{\epsilon} = \epsilon$ : $\widetilde{\Omega}$ étant ouvert, $\exists r_1 > 0$ *t.q.* $\exists \tilde{z}_1 \in \{\tilde{x} + r_1 \frac{\tilde{x}}{|\tilde{x}|}, \tilde{x} - r_1 \frac{\tilde{x}}{|\tilde{x}|}\} \subseteq \widetilde{\Omega}$ tel que $|e^{2\pi i \mu \cdot \tilde{z}_1} - 1| > \epsilon$. Ceci peut être vu comme suit:

Considérons le segment de droite unissant $\tilde{x} - r_1 \frac{\tilde{x}}{|\tilde{x}|}$ et $\tilde{x} + r_1 \frac{\tilde{x}}{|\tilde{x}|}$, qui peut être considéré comme l'image dans $\mathbb{R}^n$ de la fonction suivante:

$$u(t) := \tilde{x} + tr_1 \frac{\tilde{x}}{|\tilde{x}|}, t \in [-1, 1].$$

(On choisit $r_1$ assez petit pour que ce segment de droite demeure entièrement à l'intérieur de $\widetilde{\Omega}$ (ceci est possible puisque $\widetilde{\Omega}$ est ouvert).)

Considérons maintenant la fonction

$$v : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto |e^{2\pi i u(t) \cdot \mu} - 1|.$$

On a

$$v(t) = 2|sin(\pi|\mu||u(t)||cos\theta|)|$$

où $\theta$ est l'angle entre $\mu$ et $u(t)$, qui est une constante (puisque $u(t)$ se trouve toujours sur une droite passant par l'origine). Pour une valeur de $r_1$ assez petite, $|u(t)|$ est une fonction strictement croissante, et $v(t)$ est soit strictement croissante ou strictement decroissante pour $t \in [-1, 1]$. (Elle est strictement croissante (preuve non donnée ici), mais cette précision n'est pas pertinente dans le présent contexte.) Puisque $v(t)$ est continu, il atteint sa valeur maximale pour un $t = t_{Max} \in \{-1, 1\}$, et on peut poser $\tilde{z}_1 := u(t_{Max}) \in \widetilde{\Omega}$. Nous avons alors

$$\epsilon = v(0) < v(t_{Max}).$$

Puisque $\widetilde{\Omega}$ est ouvert, $\exists r_2 > 0$ t.q. $\forall \tilde{z} \in B_{r_2}(\tilde{z}_1) \subseteq \widetilde{\Omega}$, $|e^{2\pi i \mu \cdot \tilde{z}} - 1| > \epsilon$. $\mathbb{D}_1^*$ étant dense dans $\mathbb{R}^n$, $\exists z \in B_{r_2}(\tilde{z}_1) \cap \mathbb{D}_1^* \subseteq \widetilde{\Omega}|_{\mathbb{D}_1^*} = \Omega$ t.q. $|e^{2\pi i \mu \cdot z} - 1| > \epsilon \Rightarrow \mu \notin \Omega^{\epsilon <}_{\mathbb{D}_2^*}$ (absurde). $\square$

# CHAPITRE 6

## $\epsilon_{\leq}^{\mathbb{D}_j}$-dual d'un ensemble

### 1. Résultats

Definissons:

$$\widetilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n,$$

$$\Omega := \widetilde{\Omega}|_{\mathbb{D}_1^*},$$

$$j \in \{1, 2\},$$

$$\widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{D}_j^*}} := \{\mu \in \mathbb{D}_j^* \mid |e^{2\pi i \mu \cdot x} - 1| \leq \epsilon, \forall x \in \widetilde{\Omega}\}.$$

Supposons que nous avons

$$\epsilon \in (0, 2).$$

Lemme 1.1. *Supposons que $\widetilde{\Omega} \neq \emptyset$.*
*Si $\Omega$ est dense dans $\widetilde{\Omega}$, alors*

$$\widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}}|_{\mathbb{D}_2^*} = \Omega^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{D}_2^*}}.$$

Démonstration. $\widetilde{\Omega} \neq \emptyset \implies 0 \in \widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}} \implies \widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}} \neq \emptyset$. Maintenant si à la fois $\widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}}|_{\mathbb{D}_2^*}$ et $\Omega^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{D}_2^*}}$ sont vides, alors le lemme est vrai. Maintenant constatons:

1) $\tilde{\mu} \in \widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}}|_{\mathbb{D}_2^*} \Rightarrow \tilde{\mu} \in \widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}} \cap \mathbb{D}_2^* \Rightarrow |e^{2\pi i \tilde{\mu} \cdot x} - 1| \leq \epsilon, \forall x \in \widetilde{\Omega} \supseteq \Omega \Rightarrow \tilde{\mu} \in \Omega^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{D}_2^*}} \Rightarrow \widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}}|_{\mathbb{D}_2^*} \subseteq \Omega^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{D}_2^*}}$.

2) $\mu \in \Omega^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{D}_2^*}} \iff |e^{2\pi i \mu \cdot x} - 1| \leq \epsilon, \forall x \in \Omega, \mu \in \mathbb{D}_2^*$.

Supposons que $\mu \notin \widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}}|_{\mathbb{D}_2^*}$; là, $\exists \tilde{x} \in \widetilde{\Omega}$ t.q. $|e^{2\pi i \mu \cdot \tilde{x}} - 1| = \tilde{\epsilon}$, $\tilde{\epsilon} > \epsilon$.

Puisque la fonction $|e^{2\pi i\mu\cdot t}-1|$ est continue pour $t\in\mathbb{R}^n$, il existe un voisinage $N$ de $\tilde{x}$ t.q. $|e^{2\pi i\mu\cdot t}-1|>\epsilon$, $t\in N$. Puisque $\Omega$ est dense dans $\widetilde{\Omega}$, $\exists y\in N\cap\Omega$ t.q. $|e^{2\pi i\mu\cdot y}-1|>\epsilon$

$\Rightarrow \mu\notin \Omega^{\epsilon^{\mathbb{D}_2^*}_{\leq}}$ (absurde).

Ainsi il faut avoir $\mu\in\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}|_{\mathbb{D}_2^*}$, et $\Omega^{\epsilon^{\mathbb{D}_2^*}_{\leq}}\subseteq\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}|_{\mathbb{D}_2^*}$.

Supposons que:

a) $\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}|_{\mathbb{D}_2^*}\neq\emptyset$: alors $\Omega^{\epsilon^{\mathbb{D}_2^*}_{\leq}}\neq\emptyset$ de 1). Là, 2) s'applique, et nous obtenons le résultat voulu de 1) et 2).

b) $\Omega^{\epsilon^{\mathbb{D}_2^*}_{\leq}}\neq\emptyset$: alors 2) s'applique, et $\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}|_{\mathbb{D}_2^*}\neq\emptyset$. On peut maintenant utiliser 1), et combiner 1) et 2) afin d'obtenir la conclusion voulue. □

Proposition 1.1. *Supposons que $\widetilde{\Omega},\Omega,\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}|_{\mathbb{D}_2^*}$ et $\Omega^{\epsilon^{\mathbb{D}_2^*}_{\leq}}$ sont tous non vides.*

*Si $\widetilde{\Omega}$ est connexe par arcs, contient 0, et $\Omega$ est dense dans $\widetilde{\Omega}$, alors*

$$(\Lambda^{\epsilon^{\mathbb{D}_2}_{\leq}})^*=S|_{\mathbb{D}_2^*},$$

*où $S$ est convexe, contient 0, et est symétrique par rapport à 0.*

*($S=\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$.)*

Démonstration. Il suffit de montrer que

$$(\Lambda^{\epsilon^{\mathbb{D}_2}_{\leq}})^*=\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}|_{\mathbb{D}_2^*},$$

et poser $S=\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$. (On a déjà vu à la proposition 1.1 du chapitre 3 que $\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$ est convexe, contient 0 et est symétrique par rapport à 0.)

a) $(\Lambda^{\epsilon^{\mathbb{D}_2}_{\leq}})^*=\Omega^{\epsilon^{\mathbb{D}_2^*}_{\leq}}$ :

$$\mu\in\Omega^{\epsilon^{\mathbb{D}_2^*}_{\leq}}$$

$$\iff |e^{2\pi i\mu\cdot x^*}-1|\leq\epsilon,\forall x^*\in\Omega,\mu\in\mathbb{D}_2^*$$

$$\iff |e^{2\pi i\mu^{-*}\cdot x}-1|\leq\epsilon,\forall x\in\Lambda,\mu^{-*}\in\mathbb{D}_2$$

$$\iff \mu^{-*}\in\Lambda^{\epsilon^{\mathbb{D}_2}_{\leq}}$$

$$\iff \mu \in (\Lambda^{\epsilon^{\mathbb{D}_2}_{\leq}})^*.$$

b) $\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}|_{\mathbb{D}_2^*} = \Omega^{\epsilon^{\mathbb{D}_2^*}_{\leq}}$ : vrai selon le lemme 1.1 du chapitre 6. □

Corollaire 1.1. *Supposons que* $\widetilde{\Omega}, \Omega, \widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}|_{\mathbb{D}_2^*}$ *et* $\Omega^{\epsilon^{\mathbb{D}_2^*}_{\leq}}$ *sont non vides.*
*Si* $\widetilde{\Omega}$ *est ouvert, connexe par arcs et contient 0, alors*

$$(\Lambda^{\epsilon^{\mathbb{D}_2}_{\leq}})^* = S|_{\mathbb{D}_2^*},$$

*où* $S$ *est convexe, contient 0, et est symétrique par rapport à 0.*

*(*$S = \widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$*.)*

Démonstration. $\forall x \in \widetilde{\Omega}$, pour tout voisinage $N_x$ de $x$, il existe un voisinage $N'_x$ de $x$ t.q. $N'_x \subseteq N_x$ et $N'_x \subseteq \widetilde{\Omega}$. (Il suffit de trouver une boule ouverte $B_{r_1}(x) \subseteq \widetilde{\Omega}$ (qui doit exister, puisque $\widetilde{\Omega}$ est ouvert), une boule ouverte $B_{r_2}(x) \subseteq N_x$ (qui doit exister puisque $N_x$ est ouvert), et poser $N'_x := B_{r_1}(x) \cap B_{r_2}(x)$.) Puisque $\mathbb{D}_1^*$ est dense dans $\mathbb{R}^n$ et $N'_x$ est ouvert, $\exists y \in \mathbb{D}_1^* \cap N'_x = N'_x|_{\mathbb{D}_1^*}$. Puisque $N'_x \subseteq \widetilde{\Omega}$, nous avons $N'_x|_{\mathbb{D}_1^*} \subseteq \widetilde{\Omega}|_{\mathbb{D}_1^*} = \Omega$. Donc $y \in \Omega$. Cependant, $y \in N'_x \subseteq N_x$. Ainsi $\forall x \in \widetilde{\Omega}$, pour tout voisinage $N_x$ de $x$, $\exists y \in N_x \cap \Omega$. Donc $\Omega$ est dense dans $\widetilde{\Omega}$. Maintenant on peut utiliser la proposition 1.1 du chapitre 6 et obtenir la conclusion désirée. □

Lemme 1.2. $\forall A \subseteq \mathbb{D}_1$, *nous avons*

$$(A^{\epsilon^{\mathbb{D}_2}_{\leq}})^* = (A^*)^{\epsilon^{\mathbb{D}_2^*}_{\leq}}$$

*et* $\forall A \subseteq \mathbb{D}_1^*$, *nous avons*

$$(A^{\epsilon^{\mathbb{D}_2^*}_{\leq}})^{-*} = (A^{-*})^{\epsilon^{\mathbb{D}_2}_{\leq}}.$$

Démonstration. a) $(A^{\epsilon^{\mathbb{D}_2}_{\leq}})^* = (A^*)^{\epsilon^{\mathbb{D}_2^*}_{\leq}}$:

Si les deux sont vides, alors nous obtenons le résultat voulu. Autrement:

$$\mu \in (A^*)^{\epsilon^{\mathbb{D}_2^*}_{\leq}}$$

$$\iff |e^{2\pi i\mu\cdot x^*}-1|\leq\epsilon, \forall x^*\in(A^*), \mu\in\mathbb{D}_2^*$$
$$\iff |e^{2\pi i\mu^{-*}\cdot x}-1|\leq\epsilon, \forall x\in A, \mu^{-*}\in\mathbb{D}_2$$
$$\iff \mu^{-*}\in A^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{D}_2}}$$
$$\iff \mu\in\left(A^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{D}_2}}\right)^*.$$

b) $\left(A^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{D}_2^*}}\right)^{-*}=(A^{-*})^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{D}_2}}$:

Si les deux sont vides, alors nous obtenons le résultat voulu. Autrement:

$$\mu\in(A^{-*})^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{D}_2}}$$
$$\iff |e^{2\pi i\mu\cdot x^{-*}}-1|\leq\epsilon, \forall x^{-*}\in(A^{-*}), \mu\in\mathbb{D}_2$$
$$\iff |e^{2\pi i\mu^*\cdot x}-1|\leq\epsilon, \forall x\in A, \mu^*\in\mathbb{D}_2^*$$
$$\iff \mu^*\in A^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{D}_2^*}}$$
$$\iff \mu\in\left(A^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{D}_2^*}}\right)^{-*}.$$

□

PROPOSITION 1.2. *Supposons que* $\widetilde{\Omega}\neq\emptyset$.
*Si* $\Omega=\widetilde{\Omega}|_{\mathbb{D}_1^*}$, *où:*

*a)* $\widetilde{\Omega}\subseteq\mathbb{R}^n$ *est fermé, convexe et symétrique par rapport à 0;*

*b)* $\Omega$ *est dense dans* $\widetilde{\Omega}$*;*

*c)* $\widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}}|_{\mathbb{D}_2^*}$ *est dense dans* $\widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}}$*;*

*alors*

$$\Lambda^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{D}_2}\epsilon_{\leq}^{\mathbb{D}_1}}=\Lambda.$$

DÉMONSTRATION. $\widetilde{\Omega}$ est connexe par arcs, contient 0, et est fermé. Constatons aussi que $\Omega\neq\emptyset$ car $0\in\widetilde{\Omega}$ et $\Omega$ est dense dans $\widetilde{\Omega}$; $\widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}}\neq\emptyset$ puisque $0\in\widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}}$, et $\emptyset\neq\widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}}|_{\mathbb{D}_2^*}$ car celui-ci est dense dans $\widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}}\neq\emptyset$.

Ainsi nous avons (en employant la proposition 1.1 du chapitre 6),

$$\left(\Lambda^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{D}_2^*}}\right)^*=\widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}}|_{\mathbb{D}_2},$$

où $\widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}}$ est convexe, contient 0, et est symétrique par rapport à 0. $\widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}}$ est aussi fermé (selon le corollaire 1.1 du chapitre 3).

On peut maintenant écrire

$$\left(\left(\Lambda^{\epsilon^{\mathbb{D}_2}_{\le}}\right)^*\right)^{\epsilon^{\mathbb{D}_1^*}_{\le}} = \left(\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\le}}|_{\mathbb{D}_2^*}\right)^{\epsilon^{\mathbb{D}_1^*}_{\le}}$$

$$= \left(\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\le}}\right)^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\le}}|_{\mathbb{D}_1^*}$$

(en employant le lemme 1.1 du chapitre 6, après avoir posé $\mathbb{D}_1' := \mathbb{D}_2, \mathbb{D}_2' := \mathbb{D}_1, \widetilde{\Omega'} := \widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\le}}$, avec $\Omega' = \widetilde{\Omega'}|_{\mathbb{D}_2^*} = \widetilde{\Omega'}|_{(\mathbb{D}_1')^*}$)

(i.e.

$$\widetilde{\Omega'}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\le}}|_{(\mathbb{D}_2')^*} = (\Omega')^{\epsilon^{(\mathbb{D}_2')^*}_{\le}}$$

$$\Longrightarrow \left(\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\le}}\right)^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\le}}|_{\mathbb{D}_1^*} = (\Omega')^{\epsilon^{(\mathbb{D}_2')^*}_{\le}}$$

$$\Longrightarrow \left(\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\le}}\right)^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\le}}|_{\mathbb{D}_1^*} = \left((\widetilde{\Omega'})|_{(\mathbb{D}_1')^*}\right)^{\epsilon^{(\mathbb{D}_2')^*}_{\le}}$$

$$\Longrightarrow \left(\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\le}}\right)^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\le}}|_{\mathbb{D}_1^*} = \left(\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\le}}|_{\mathbb{D}_2^*}\right)^{\epsilon^{\mathbb{D}_1^*}_{\le}}.)$$

Donc

$$\left(\left(\Lambda^{\epsilon^{\mathbb{D}_2}_{\le}}\right)^*\right)^{\epsilon^{\mathbb{D}_1^*}_{\le}} = \widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\le}\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\le}}|_{\mathbb{D}_1^*}$$

$$= \widetilde{\Omega}|_{\mathbb{D}_1^*}$$

(en utilisant la proposition 1.8 du chapitre 3)

$$= \Omega.$$

Cependant, en employant le lemme 1.2 du chapitre 6, nous avons

$$\left(\left(\Lambda^{\epsilon^{\mathbb{D}_2}_{\le}}\right)^*\right)^{\epsilon^{\mathbb{D}_1^*}_{\le}} = \left(\Lambda^{\epsilon^{\mathbb{D}_2}_{\le}\epsilon^{\mathbb{D}_1}_{\le}}\right)^*,$$

ce qui implique

$$\Omega = \left(\Lambda^{\epsilon^{\mathbb{D}_2}_{\le}\epsilon^{\mathbb{D}_1}_{\le}}\right)^*$$

et nous obtenons

$$\Omega^{-*} = \Lambda^{\epsilon^{\mathbb{D}_2}_{\le}\epsilon^{\mathbb{D}_1}_{\le}}$$

ce qui donne

$$\Lambda = \Lambda^{\epsilon^{\mathbb{D}_2}_{\le}\epsilon^{\mathbb{D}_1}_{\le}}.$$

□

PROPOSITION 1.3. *Si $\widetilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n$ est convexe et contient un ensemble ouvert non vide, alors $\Omega$ est dense dans $\widetilde{\Omega}$.*

Démonstration. Puisque $\widetilde{\Omega}$ contient un ensemble ouvert non vide, cet ensemble doit contenir un point $p$ et une boule ouverte $B_r(p)$. Considérons la boule **fermée** $X$ centrée à $p$ de rayon $r/2$. On a alors $X \subset B_r(p) \subseteq \widetilde{\Omega}$. Constatons que $X$ et $\widetilde{\Omega} \setminus X$ sont tous les deux non vides.

Considérons maintenant n'importe quel $x \in \widetilde{\Omega}$, et n'importe quel voisinage $N$ de $x$. Puisque $X$ et $\widetilde{\Omega} \setminus X$ sont tous les deux non vides, il est pertinent de considérer les deux cas ci-dessous:

a) $x \in X$:

Nous avons alors $x \in B_r(p)$ et $x \in N$, ce qui implique que $x \in B_r(p) \cap N$. Cependant, $B_r(p) \cap N$ est un ensemble ouvert et $B_r(p) \cap N \subseteq \widetilde{\Omega}$. Puisque $B_r(p) \cap N$ est ouvert et $\mathbb{D}_1^*$ est dense dans $R^n$, $\exists y \in \mathbb{D}_1^*$ t.q. $y \in B_r(p) \cap N \subseteq \widetilde{\Omega}$. Ainsi pour tout $x \in X$ et tout voisinage $N$ de $x$, $\exists y \in \widetilde{\Omega} \cap \mathbb{D}_1^* = \Omega$ t.q. $y \in N$.

b) $x \in \widetilde{\Omega} \setminus X$:

Considérons le plus petit ensemble convexe contenant $x$ et $X$, que nous appellerons $K$. (La surface de $K$ peut être imaginée comme étant un cornet de crème glacée à n dimensions.) Puisque $\widetilde{\Omega}$ est convexe, $K \subseteq \widetilde{\Omega}$. Nous avons $x \in \partial K$, ce qui implique $N \cap\ int(K) \neq \emptyset$. Cependant, $N \cap\ int(K)$ est ouvert. Puisque $\mathbb{D}_1^*$ est dense dans $\mathbb{R}^n$, $\exists y \in \mathbb{D}_1^*$ t.q. $y \in N \cap int(K)$. Constatons que $N \cap int(K) \subseteq \widetilde{\Omega}$, donc nous avons $y \in \widetilde{\Omega}$. Ainsi pour tout $x \in \widetilde{\Omega} \setminus X$ et tout voisinage $N$ de $x$, $\exists y \in \widetilde{\Omega} \cap \mathbb{D}_1^* = \Omega$ t.q. $y \in N$.

En combinant a) et b), nous obtenons ce qui suit:

$\forall x \in \widetilde{\Omega}$, pour tout voisinage $N$ de $x$, $\exists y \in \widetilde{\Omega} \cap \mathbb{D}_1^* = \Omega$ t.q. $y \in N$. Ceci implique que $\Omega$ est dense dans $\widetilde{\Omega}$. □

La proposition suivante nous donne des critères pratiques pour construire une fenêtre telle que le quasi-cristal correspondant est egal à son "double-dual" (dual pris deux fois).

Proposition 1.4. *Si $\widetilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n$ est fermé, convexe, symétrique par rapport à 0, borné et contient un ensemble ouvert non vide, alors*

$$\Lambda^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{D}_2}\epsilon_{\leq}^{\mathbb{D}_1}} = \Lambda.$$

DÉMONSTRATION. a) Puisque $\widetilde{\Omega}$ contient un ensemble ouvert non vide, la proposition 1.3 du chapitre 6 nous dit que $\Omega$ est dense dans $\widetilde{\Omega}$.

b) Maintenant considérons les $2^n$ $n$-tuplets ayant comme entrées $\pm d$ $(d > 0)$. Ces $n$-tuplets sont les sommets d'un hypercube à $n$ dimensions centré à l'origine. Appellons Cet hypercube $C$. Selon la proposition 1.2 du chapitre 3, $C^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$ est le plus petit ensemble convexe contenant l'ensemble de points ci-dessous (dont il y a $2n$):

{n-tuplets ayant 0 comme $n-1$ entrées, et l'entrée restante est soit $\frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi d}$ ou $-\frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi d}$.}

Ainsi $C^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$ est un polytope convexe à $n$ dimensions avec $int(C^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}) \neq \emptyset$.

Constatons que puisque $\widetilde{\Omega}$ est borné, nous avons $C \supseteq \widetilde{\Omega}$ si $d$ est assez grand. Pour une telle valeur de $d$, nous avons alors $C^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} \subseteq \widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$, ce qui implique $\emptyset \neq int(C^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}) \subseteq C^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} \subseteq \widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$. Ceci implique que $\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$ contient un ensemble ouvert non vide. $\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$ est convexe selon la proposition 1.1 du chapitre 3. En utilisant la proposition 1.3 du chapitre 6 (après avoir posé $\mathbb{D}_1' := \mathbb{D}_2, \widetilde{\Omega'} := \widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$, avec $\Omega' = \widetilde{\Omega'}|_{\mathbb{D}_2^*} = \widetilde{\Omega'}|_{(\mathbb{D}_1')^*}$), nous pouvons conclure que $\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}|_{\mathbb{D}_2^*}$ est dense dans $\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$.

Nous disposons maintenant de l'information suivante:

$\emptyset \neq \widetilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n$, $\widetilde{\Omega}$ est fermé, convexe, symétrique par rapport à 0, avec $\Omega$ étant dense dans $\widetilde{\Omega}$, et $\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}|_{\mathbb{D}_2^*}$ étant dense dans $\widetilde{\Omega}^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$. Nous pouvons maintenant utiliser la proposition 1.2 du chapitre 6, et obtenir le résultat désiré. □

## 2. Exemple: quasi-cristal unidimensionnel basé sur $\mathbb{Z}[\tau]$

Soit $\widetilde{\Omega} := [a, b]$, où $a \neq b$ et $a \leq 0 \leq b$.

Posons $\mathbb{D}_1 := \mathbb{Z}[\tau], \mathbb{D}_2 := \mathbb{Z}[\tau]^0$. Dans ce cas, $* = -* = \ '$ à la fois sur $\mathbb{D}_1$ et $\mathbb{D}_2$.

On a

$$\Omega = [a, b]|_{\mathbb{D}_1^*} = [a, b]|_{\mathbb{Z}[\tau]}$$

(ici $\mathbb{D}_1^* = \mathbb{D}_1 = \mathbb{Z}[\tau]$ et $\mathbb{D}_2^* = \mathbb{D}_2 = \mathbb{Z}[\tau]^0$) et

$$\Lambda = \Omega' =: \sum [a, b].$$

Soit $c := max(-a, b)$.

Selon la remarque 1.2 du chapitre 3,

$$[a, b]^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}} = [-c, c]^{\epsilon^{\mathbb{R}^n}_{\leq}}$$

$$= [-\frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi c}, \frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi c}].$$

Selon le lemme 1.1 de ce chapitre, on a

$$\widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}}|_{\mathbb{D}_2^*} = \Omega^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{D}_2^*}} = \Omega^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{Z}[\tau]^0}}.$$

D'après la proposition 1.1 de ce chapitre, on a

$$\Lambda^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{Z}[\tau]^0}} = ([-\frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi c}, \frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi c}] \cap \mathbb{Z}[\tau]^0)'$$

$$= \frac{1}{\tau^2+1} \sum \left( \left[ -((\tau')^2+1) \left( \frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi c} \right), ((\tau')^2+1) \left( \frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi c} \right) \right] \right)$$

qui est le même résultat que celui obtenu par un calcul exact à la fin du chapitre 1, avec

$$\theta = \frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi c}.$$

Constatons aussi que, pour $a = -b$, selon la proposition 1.4 du chapitre 6, on a

$$\Lambda^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{Z}[\tau]^0} \epsilon_{\leq}^{\mathbb{Z}[\tau]}} = \Lambda,$$

c'est-à-dire

$$(\sum[-b, b])^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{Z}[\tau]^0} \epsilon_{\leq}^{\mathbb{Z}[\tau]}} = \sum[-b, b].$$

# APPENDICE A

## Ensemble polaire et $\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}$-dual

### 1. Résultats

PROPOSITION 1.1. *Soit $\epsilon \in (0,2)$. Soit $\emptyset \neq \widetilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n$, où $\widetilde{\Omega}$ est connexe par arcs, contient 0, et est symétrique par rapport à l'origine.*

*Soit $\widetilde{\Omega}^0$ l'ensemble polaire de $\widetilde{\Omega}$:*

$$\widetilde{\Omega}^0 := \{\mu \in \mathbb{R}^n | \mu \cdot x \leq 1, \forall x \in \widetilde{\Omega}\}.$$

*Alors*

$$\widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}} = \frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi} \widetilde{\Omega}^0.$$

DÉMONSTRATION. a)

$$\mu \in \widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}}$$

$$\Longrightarrow |e^{2\pi i \mu \cdot x} - 1| \leq \epsilon, \forall x \in \widetilde{\Omega}$$

$$\Longrightarrow \mu \cdot x \in [-\frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi}, \frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi}] + k, k \in \mathbb{Z}.$$

Cependant, dans la démonstration de la proposition 1.1 du chapitre 3, on a vu que $\pi\mu \cdot x \in (-\pi/2, \pi/2)$, d'où

$$\mu \cdot x \in [-\frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi}, \frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi}]$$

$$\Longrightarrow \mu \cdot x \leq \frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi}$$

$$\Longrightarrow \mu \in \frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi} \widetilde{\Omega}^0$$

$$\Longrightarrow \widetilde{\Omega}^{\epsilon_{\leq}^{\mathbb{R}^n}} \subseteq \frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi} \widetilde{\Omega}^0.$$

b)

$$\mu \in \frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi}\widetilde{\Omega}^0$$
$$\Longrightarrow \mu \cdot x \leq \frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi}, \forall x \in \widetilde{\Omega}.$$

Constatons que, $\forall x \in \widetilde{\Omega}$,

$$\mu \cdot x \geq -\frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi}.$$

(I.e. si un $x' \in \widetilde{\Omega}$ existait tel que $\mu \cdot x' < -\frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi}$, on aurait alors $\mu \cdot (-x') > \frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi}$, avec $(-x') \in \widetilde{\Omega}$ ($\widetilde{\Omega}$ étant symétrique par rapport à l'origine), d'où une contradiction avec $\mu \in \frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi}\widetilde{\Omega}^0$.)

On a donc

$$\mu \cdot x \in \left[-\frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi}, \frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi}\right], \forall x \in \widetilde{\Omega}$$
$$\Longrightarrow |e^{2\pi i \mu \cdot x} - 1| \leq \epsilon, \forall x \in \widetilde{\Omega}$$
$$\Longrightarrow \mu \in \widetilde{\Omega}^{\epsilon \mathbb{R}^n}_{\leq}$$
$$\Longrightarrow \frac{arcsin(\frac{\epsilon}{2})}{\pi}\widetilde{\Omega}^0 \subseteq \widetilde{\Omega}^{\epsilon \mathbb{R}^n}_{\leq}.$$

En combinant a) et b), on obtient le résultat voulu.

□

Remarque 1.1. • *Pour $\epsilon = 0$, le résultat précédent n'est pas nécessairement valable. Voici un contre-exemple: $n = 2$, $\widetilde{\Omega}$ est l'axe des $x$. $\widetilde{\Omega}^{0 \mathbb{R}^2}_{\leq}$ = l'axe des $y$, mais $\frac{arcsin(\frac{0}{2})}{\pi}\widetilde{\Omega}^0 = \{0\}$.*

• *Pour $\epsilon = 2$, la proposition ne s'applique pas non plus. Contre-exemple: $n = 2$, $\widetilde{\Omega}$ est le disque fermé de rayon 1 centré à l'origine. $\widetilde{\Omega}^{2 \mathbb{R}^n}_{\leq} = \mathbb{R}^2$, mais $\frac{arcsin(\frac{2}{2})}{\pi}\widetilde{\Omega}^0$ est le disque fermé de rayon $\frac{1}{2}$ centré à l'origine.*

# CONCLUSION

L'auteur espère que ce travail a pu agrandir le champ des connaissances dans le domaine des quasi-cristaux, notamment en ce qui concerne leurs images de diffraction de rayons X.

# RÉFÉRENCES


[A] AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY, *$\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-LaTeX Version 1.1 User's Guide*, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1991.

[E1] V. ELSER, *The Diffraction Pattern of Projected Strutures*, *Acta Cryst.*(1986), A**42**, 36–43.

[F1] F. G. FRIEDLANDER, *Introduction to the theory of distributions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[H] J. HAHN, *LaTeX for Everyone: A reference guide and tutorial for typesetting documents using a computer*, Personal TeX, Inc., Mill Valley, CA., 1991.

[H1] A. HOF, *Diffraction by Aperiodic Structures*, in *Mathematics of Long Range Aperiodic Order*, Proc. NATO ASI, Waterloo, 1995, ed. R.V. Moody, Kluwer, (1997), 239–268.

[KD] A. KATZ ET M. DUNEAU, *Quasiperiodic patterns and icosahedral symmetry*, *J. Physique* **47** (1986), 36–43.

[L] LESLIE LAMPORT, *LaTeX – A Document Preparation System*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1986.

[M1] R. V. MOODY, *Meyer sets and their duals*, in *Mathematics of Long Range Aperiodic Order*, Proc. NATO ASI, Waterloo, 1995, ed. R.V. Moody, Kluwer, (1997), 403–442.

[M2] R. V. MOODY, *Meyer sets and the finite generation of quasicrystals*, in *Symmetries in Science, VIII*, ed. B. Gruber, Plenum, New York, (1995).

[Mo] EMANUEL MOOSER, *Introduction à la physique des solides*, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 1993.

[O] M. ALI OMAR, *Elementary Solid State Physics*, Addison-Wesley, Philippines, 1975.

[P1] J. PATERA, *Noncrystallographic root systems and quasicrystals*, in *Mathematics of Long Range Aperiodic Order*, Proc. NATO ASI, Waterloo, 1995, ed. R.V. Moody, Kluwer, (1997), 443–466.

[R1] H. L. ROYDEN, *Real Analysis, second edition, Macmillan Publishing Co., Inc., New York, 1968.*

*[S]* M. D. SPIVAK, The Joy of TeX, *second edition, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1990.*