

2m11. 2822.2

Université de Montréal

Propagation d'impulsions laser polarisées dans les fibres optiques
biréfringentes

par

Stefan Michalowski

Département de physique

Faculté des arts et sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en physique



Université de Montréal

Bibliothèque

Juin, 2000

© Stefan Michalowski , 2000



Handwritten text at the top of the page, possibly a date or reference number.

University of Michigan

Department of Psychology

Ann Arbor, Michigan

QC
3
254
2000
N. 023

Psychology Department
Ann Arbor, Michigan
48106-1101

Psychology Department
Ann Arbor, Michigan
48106-1101

Ann Arbor, Michigan



Psychology Department

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

Propagation d'impulsions laser polarisées dans les fibres optiques
biréfringentes

présenté par:

Stefan Michalowski

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

| | |
|-----------------------|------------------------|
| Mme Joëlle Margot, | président-rapporteur |
| M. Jiri Teichmann, | directeur de recherche |
| M. Louis André Hamel, | membre du jury |

Mémoire accepté le: 28-09-2000

Sommaire

Du téléphone à la télévision, les télécommunications font partie de notre vie quotidienne. De nouvelles formes de télécommunication sont apparues durant ces dernières décennies qui permettent des moyens d'échanges beaucoup plus sophistiqués (ex.: la vidéo conférence, les téléphones cellulaires et l'Internet). Ces dernières, cependant, demandent un taux de transmission beaucoup plus important que celui offert par les fils de cuivre utilisés par le passé. Ainsi, la fibre optique, avec ses avantages un taux de transmission grandement supérieur, a commencé par remplacer les fils de cuivre. On est passé des impulsions électriques aux impulsions photoniques (avec l'aide des lasers).

Même si la fibre est une technologie bien établie, le plein potentiel offert par celle-ci n'est pas encore utilisé car le phénomène de la propagation d'impulsions laser dans les fibres optiques n'est pas entièrement compris. Avec la venue des nouvelles formes de télécommunication exigeant des taux de transfert encore plus importants, la nécessité de comprendre à fond ces phénomènes se fait sentir.

Pour ces raisons, ce mémoire approfondit l'étude d'un des processus peu connus dans la transmission par la fibre. En utilisant une approche théorique et une approche numérique, le problème de l'évolution d'une impulsion polarisée dans une fibre optique biréfringente sera attaqué. On considère aussi que la fibre présente des effets non-linéaires pour le type de signal envoyé. Une fibre possède la propriété de biréfringence quand, pour un signal polarisé, la vitesse de propagation est différente entre les deux

composantes de polarisation.

Quand on transmet de l'information par fibre, on envoie des impulsions laser avec une certaine forme, dépendant des propriétés de la fibre et de l'impulsion, cette forme va changer au cours de son évolution. Évidemment, dans un système de communication on recherche un signal de sortie similaire au signal d'entrée ou du moins un signal de sortie qui peut être prédit et qui varie peu. S'il n'y avait pas d'effet non-linéaire, les deux composantes de polarisation de l'impulsion envoyées dans la fibre s'éloigneraient l'une de l'autre, et la forme initiale serait perdue. Les résultats de l'analyse théorique et numérique montrent que les effets non-linéaires ajoutent un couplage entre les deux composantes de la polarisation et permettent ainsi d'avoir une impulsion qui se propage sans déformation. Ces résultats montrent aussi que si la forme initiale ne correspond pas exactement à la forme idéale de propagation mais que, si la puissance initiale est satisfaisante, une déformation initiale aura lieu pour donner une forme qui continuera dans la fibre sans déformation.

Ce mémoire comporte en trois parties principales. La première partie, soit les deux premiers chapitres, sert à obtenir les équations mathématiques qui décrivent l'évolution d'impulsions polarisées dans une fibre optique biréfringente.

La deuxième partie explique le fonctionnement d'une méthode numérique originale et présente les résultats des simulations réalisées grâce à cette méthode.

La troisième partie, par l'application d'une méthode mathématique de perturbation, analyse le comportement de quelques paramètres, soient l'amplitude et la phase, d'une impulsion lancée dans une fibre optique.

Table des matières

| | |
|--|-------------|
| Sommaire | iii |
| Liste des abréviations | xii |
| Remerciements | xiii |
| Introduction | 1 |
| 1 Les équations en une dimension | 3 |
| 1.1 Avant-propos | 3 |
| 1.2 L'équation vectorielle d'évolution | 4 |
| 1.2.1 Approximation linéaire | 5 |
| 1.2.2 Approximation non-linéaire | 6 |
| 1.3 Équation différentielle d'évolution de l'enveloppe | 8 |
| 1.4 Longueur de dispersion et longueur non-linéaire | 11 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 2 | La polarisation | 13 |
| 2.1 | Avant-propos | 13 |
| 2.2 | Un signal polarisé | 13 |
| 3 | Calcul numérique | 18 |
| 3.1 | Avant-propos | 18 |
| 3.2 | Normalisation des équations couplées | 19 |
| 3.3 | Résultats des simulations | 22 |
| 3.3.1 | Deux sécantes hyperboliques | 25 |
| 3.3.2 | Deux supergaussiennes | 28 |
| 3.3.3 | Deux sécantes hyperboliques perturbées | 29 |
| 4 | Solution analytique | 35 |
| 4.1 | Avant-propos | 35 |
| 4.2 | Première méthode de perturbation | 36 |
| 4.2.1 | Étude de l'évolution | 39 |
| 4.3 | Deuxième méthode de perturbation | 41 |
| 4.3.1 | Étude de l'évolution | 42 |

| | |
|---|------------|
| | vii |
| 5 Comparaison entre les résultats théoriques et numériques | 48 |
| 5.1 Avant-propos | 48 |
| 5.2 Deux sécantes hyperboliques perturbées | 49 |
| 5.3 Deux supergaussiennes | 50 |
| Conclusion | 52 |
| Bibliographie | xiv |
| A Graphiques en 3 dimensions | xvi |

Table des figures

| | | |
|-----|--|----|
| 2.1 | Schéma d'une impulsion polarisée | 14 |
| 3.1 | Sécante hyperbolique | 23 |
| 3.2 | Supergaussienne d'ordre 8 | 23 |
| 3.3 | Sécante hyperbolique perturbée par une supergaussienne | 24 |
| 3.4 | Évolution du maximum de l'amplitude par rapport à ξ pour la sécante hyperbolique pure | 26 |
| 3.5 | Comparaison entre la forme initiale et la forme finale pour la sécante hyperbolique pure | 26 |
| 3.6 | Évolution du maximum de l'amplitude par rapport à ξ pour la sécante hyperbolique pure avec $P_0 = 10 \times 10^{-3} W$ | 26 |
| 3.7 | Comparaison entre la forme initiale et la forme finale pour la sécante hyperbolique pure avec $P_0 = 10 \times 10^{-3} W$ | 26 |

| | | |
|------|--|----|
| 3.8 | Évolution du maximum de l'amplitude par rapport à ξ pour la sécante hyperbolique pure avec $P_{0x} = 70 \times 10^{-3} W$ et $P_{0y} = 10 \times 10^{-3} W$ — axe rapide | 30 |
| 3.9 | Comparaison entre la forme initiale et la forme finale pour la sécante hyperbolique pure avec $P_{0x} = 70 \times 10^{-3} W$ et $P_{0y} = 10 \times 10^{-3} W$ — axe rapide | 30 |
| 3.10 | Évolution du maximum de l'amplitude par rapport à ξ pour la sécante hyperbolique pure avec $P_{0x} = 70 \times 10^{-3} W$ et $P_{0y} = 10 \times 10^{-3} W$ — axe lent | 30 |
| 3.11 | Comparaison entre la forme initiale et la forme finale pour la sécante hyperbolique pure avec $P_{0x} = 70 \times 10^{-3} W$ et $P_{0y} = 10 \times 10^{-3} W$ — axe lent | 30 |
| 3.12 | Évolution du maximum de l'amplitude par rapport à ξ pour la supergaussienne | 31 |
| 3.13 | Comparaison entre la forme initiale et la forme finale pour la supergaussienne | 31 |
| 3.14 | Évolution du maximum de l'amplitude par rapport à ξ pour la supergaussienne avec $P_0 = 10 \times 10^{-3} W$ | 31 |
| 3.15 | Comparaison entre la forme initiale et la forme finale pour la supergaussienne avec $P_0 = 10 \times 10^{-3} W$ | 31 |
| 3.16 | Évolution du maximum de l'amplitude par rapport à ξ pour la supergaussienne avec $P_{0x} = 70 \times 10^{-3} W$ et $P_{0y} = 10 \times 10^{-3} W$ — axe rapide | 32 |

- 3.17 Comparaison entre la forme initiale et la forme finale pour la supergaussienne avec $P_{0x} = 70 \times 10^{-3} W$ et $P_{0y} = 10 \times 10^{-3} W$ — axe rapide . . . 32
- 3.18 Évolution du maximum de l'amplitude par rapport à ξ pour la supergaussienne avec $P_{0x} = 70 \times 10^{-3} W$ et $P_{0y} = 10 \times 10^{-3} W$ — axe lent 32
- 3.19 Comparaison entre la forme initiale et la forme finale pour la supergaussienne avec $P_{0x} = 70 \times 10^{-3} W$ et $P_{0y} = 10 \times 10^{-3} W$ — axe lent 32
- 3.20 Évolution du maximum de l'amplitude par rapport à ξ pour la sécante hyperbolique perturbée 33
- 3.21 Comparaison entre la forme initiale et la forme finale pour la sécante hyperbolique perturbée 33
- 3.22 Évolution du maximum de l'amplitude par rapport à ξ pour la sécante hyperbolique perturbée avec $P_{0x} = 70 \times 10^{-3} W$ et $P_{0y} = 10 \times 10^{-3} W$ — axe rapide 33
- 3.23 Comparaison entre la forme initiale et la forme finale pour la sécante hyperbolique perturbée avec $P_{0x} = 70 \times 10^{-3} W$ et $P_{0y} = 10 \times 10^{-3} W$ — axe rapide 33
- 3.24 Évolution du maximum de l'amplitude par rapport à ξ pour la sécante hyperbolique perturbée avec $P_{0x} = 70 \times 10^{-3} W$ et $P_{0y} = 10 \times 10^{-3} W$ — axe lent 34
- 3.25 Comparaison entre la forme initiale et la forme finale pour la sécante hyperbolique perturbée avec $P_{0x} = 70 \times 10^{-3} W$ et $P_{0y} = 10 \times 10^{-3} W$ — axe lent 34

| | |
|---|-------|
| | xi |
| 3.26 Comparaison entre la forme finale de la sécante hyperbolique pure et la sécante hyperbolique perturbée — axe rapide | 34 |
| 4.1 La forme théorique | 41 |
| 5.1 Comparaison entre la forme théorique et la forme numérique | 49 |
| A.1 Évolution d'une forme solitonique - axe rapide | xvi |
| A.2 Évolution d'une forme solitonique à puissance faible- axe rapide | xvii |
| A.3 Évolution d'une forme solitonique à puissance faible - axe lent | xviii |
| A.4 Évolution d'une forme suppergaussienne - axe rapide | xix |
| A.5 Dessin précis de la déformation de la suppergaussienne en soliton | xx |
| A.6 Évolution d'une forme suppergaussienne à puissance faible - axe lent | xx |
| A.7 Évolution d'une forme solitonique perturbée - axe rapide | xxi |
| A.8 Évolution d'une forme solitonique perturbée à puissance faible - axe lent | xxii |

Liste des abréviations

XPM: modulation de phase couplée (cross-phase modulation)

NLS: Schrödinger non-linéaire (Nonlinear Schrödinger)

LMH: largeur à la mi-hauteur (FWMH en anglais)

Remerciements

Ce mémoire n'aurait pu voir le jour sans le support autant au niveau académique qu'au niveau moral de mon directeur de recherche, le Pr. Jiri Teichmann. C'est donc en premier lieu que j'aimerais le remercier pour son assistance tout au long de mes études post-graduées.

J'aimerais aussi remercier ma famille pour leur support lors de l'écriture de ce document, ainsi que le département de physique de l'Université de Montréal pour m'avoir donné une telle occasion et d'aussi bon souvenirs.

Introduction

Dans le domaine des télécommunications, la transmission de données au moyen de la fibre optique prend présentement une place majeure. Les autres méthodes de transfert de données ne peuvent atteindre le taux offert par les systèmes optiques. De plus, avec l'avènement de l'Internet et des nouveaux moyens d'échange tels que la vidéo-conférence, la bande passante demandée grandit de façon quasi-exponentielle. Ainsi, on recherche maintenant des méthodes pour optimiser le taux de transfert déjà important des systèmes optiques.

Pour maximiser la bande passante dans un système, il y a trois points importants à surveiller: l'opération de l'émetteur, la transmission par un guide et l'opération du récepteur. Ce mémoire traite de la transmission de données par impulsions laser polarisées dans la fibre optique biréfringente.

Il y a plusieurs phénomènes présents dans le milieu de la fibre de silice: absorptivité, dispersion, addition de fréquences. Beaucoup d'études ont été faites sur la majorité de ces effets, mais peu de travaux ont étudié l'évolution d'impulsions polarisées de forme non-solitonique dans un milieu biréfringent. D'où le choix d'une étude de l'évolution de ces formes dans un milieu où sont présents des effets de non-linéarité et de couplage entre les composantes de polarisation de l'impulsion.

Le sujet sera présenté de la façon suivante: dans les deux premiers chapitres, le système d'équations différentielles décrivant la propagation d'une impulsion polarisée

dans une fibre optique biréfringente sera dérivé; le chapitre suivant décrira la méthode numérique qui a été utilisée pour simuler la propagation de l'impulsion dans le milieu de la fibre, et présentera les résultats obtenus; l'avant-dernier chapitre présentera une analyse théorique du problème; et finalement, le dernier chapitre fera une comparaison entre les résultats théoriques et numériques, avec quelques résultats expérimentaux servant à l'appui.

Chapitre 1

Les équations en une dimension

1.1 Avant-propos

Ce premier chapitre va introduire les équations et variables qui seront utilisées dans tout le travail. Le but de ce chapitre est de trouver une équation différentielle décrivant la propagation d'une impulsion linéairement polarisée dans une fibre mono-mode non biréfringente. Le choix de la fibre étudiée vient de deux facteurs: ce choix simplifie les calculs et de plus, cette approximation est présentement utilisée dans l'industrie. L'équation différentielle résultante permettra de mieux comprendre la signification physique des variables et constantes qui la composent et qui se retrouveront dans les équations ultérieurement étudiées.

Ce chapitre se décompose en trois parties:

1. en utilisant la forme linéaire et ensuite la forme non-linéaire du déplacement électrique, certaines variables qui composeront l'équation finale seront définies;
2. en partant d'une équation générale décrivant les phénomènes électromagnétiques, et en utilisant les résultats obtenus dans la première partie, une équation diffé-

- rentielle décrivant l'évolution de l'enveloppe de l'impulsion envoyée sera trouvée;
3. finalement, des changements de variables seront effectués pour pouvoir introduire la longueur de dispersion et la longueur non-linéaire.

1.2 L'équation vectorielle d'évolution

Comme tout phénomène électromagnétique, l'évolution d'une impulsion laser dans une fibre optique est décrite par les équations de Maxwell. Comme dans le milieu de la fibre il n'y a aucune charge libre (donc $\rho_0 = 0$ et $\mathbf{J}_f = \mathbf{0}$) et que le milieu est non magnétique (donc $\mathbf{M} = \mathbf{0}$), les équations de Maxwell se réduisent à:

$$-\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{H}) = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

Une équation différentielle dépendant seulement du champ électrique est désirée, donc il faut trouver une manière d'exprimer le déplacement électrique (\mathbf{D}) en fonction du champ électrique (\mathbf{E}).

\mathbf{D} peut être écrit sous la forme arbitraire suivante:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \quad (1.2)$$

La polarisation (\mathbf{P}) peut être décomposée en ses parties linéaire et non-linéaire comme suit:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, t) \quad (1.3)$$

Pour simplifier les calculs plus tard, \mathbf{P}_{NL} est traité comme une perturbation dans l'expression de la polarisation. Cette approximation est justifiée dans le milieu de la fibre où $|\mathbf{P}_{NL}| \ll |\mathbf{P}_L|$ est toujours vérifié [1].

Dans un milieu diélectrique comme celui de la fibre optique, l'équation complète qui décrit la relation entre la polarisation et le champ électrique se présente comme une somme d'intégrales sur le champ électrique et le tenseur de susceptibilité électrique (χ). Les termes de cette somme dont l'ordre du tenseur de susceptibilité électrique est supérieur à 3 sont négligeables. De plus, le terme dont le tenseur est d'ordre 2 s'annule par symétrie. Ainsi, la dépendance de la polarisation sur le champ électrique s'écrit [1]:

$$\mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{-\infty} \chi^{(1)}(t - t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt' \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \int \int \int_{-\infty}^{-\infty} \chi^{(3)}(t - t_1, t - t_2, t - t_3) \\ \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_1) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_2) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_3) dt_1 dt_2 dt_3 \end{aligned} \quad (1.5)$$

où $\chi^{(j)}$ représente le tenseur d'ordre j de la susceptibilité électrique. La partie dominante de la contribution du champ électrique à la polarisation est donnée par le tenseur de premier ordre ($\chi^{(1)}$) de la susceptibilité électrique.

1.2.1 Approximation linéaire

L'équation 1.4 est en fait une convolution, ce qui dans l'espace de Fourier est une multiplication:

$$\tilde{\mathbf{P}}_L(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \tilde{\chi}^{(1)}(\omega) \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \quad (1.6)$$

où $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$ est la transformée de Fourier du champ électrique et se définit par:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{-\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} dt \quad (1.7)$$

La transformée de Fourier de l'équation 1.2 donne:

$$\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) + \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) \quad (1.8)$$

Pour la première approximation, la polarisation est remplacée par seulement \mathbf{P}_L . Ainsi, avec l'équation 1.6, la dernière équation devient:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{r},\omega) &= \varepsilon_0 \left(1 + \tilde{\chi}^{(1)}(\omega)\right) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega) \\ &= \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega)\end{aligned}\quad (1.9)$$

où ε_r est défini:

$$\varepsilon_r(\omega) \equiv (\mathbf{n}(\omega) + i\alpha(\omega) c/2\omega)^2 \quad (1.10)$$

avec $\mathbf{n}(\omega)$ représentant l'indice de réfraction du milieu et $\alpha(\omega)$ le coefficient d'absorption du milieu. Il faut remarquer que l'indice de réfraction et le coefficient d'absorption dépendent de la fréquence. Il est utile de pouvoir exprimer ces deux valeurs en fonction de $\tilde{\chi}^{(1)}(\omega)$, une valeur qui peut être mesurée expérimentalement. À partir de la dernière relation, s'obtiennent les expressions suivantes:

$$n_L(\omega) = 1 + \frac{1}{2} \text{Re} [\tilde{\chi}^{(1)}(\omega)] \quad (1.11)$$

$$\alpha(\omega) = \frac{\omega}{nc} \text{Im} [\tilde{\chi}^{(1)}(\omega)] \quad (1.12)$$

1.2.2 Approximation non-linéaire

Afin de poursuivre, une restriction est appliquée sur la forme qu'aura l'impulsion arrivant dans la fibre. On pose que le signal possède une polarisation linéaire orientée selon l'axe des $\hat{\mathbf{x}}$, ce qui revient à dire que l'onde est dans le plan xz :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2} \hat{x} E(\mathbf{r},t) \quad (1.13)$$

De plus, comme les effets non-linéaires se produisent en 1-10 fs dans la fibre, et que la largeur à la mi-hauteur (LMH) des impulsions étudiées est plus grande que 0.1 ps, il est possible de considérer la réponse non-linéaire du milieu comme instantanée. Ainsi, la dépendance en temps du tenseur $\chi^{(3)}$ s'exprime par des deltas de Dirac, et

l'intégrale triple de 1.5 se résoud facilement. En considérant ces approximations ainsi que les propriétés de la fibre [1], la polarisation non-linéaire prend la forme:

$$\mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r},t) = \hat{\mathbf{x}} \frac{3}{4} \varepsilon_0 \chi_{xxxx}^{(3)} |E|^2 E(\mathbf{r},t) \quad (1.14)$$

$$= \hat{\mathbf{x}} \varepsilon_0 \varepsilon_{NL} E(\mathbf{r},t) \quad (1.15)$$

où $\varepsilon_{NL} = \frac{3}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} |E|^2$.

La transformée de Fourier est appliquée sur cette dernière relation en considérant que le terme $|E|^2$ dans ε_{NL} est constant [1]. Cette opération donne:

$$\tilde{\mathbf{P}}_{NL}(\mathbf{r},\omega) = \hat{\mathbf{x}} \varepsilon_0 \varepsilon_{NL}(\omega) \tilde{E}(\mathbf{r},\omega) \quad (1.16)$$

Avec les équations 1.6, 1.8 et 1.16, on obtient une nouvelle expression pour $\tilde{\mathbf{D}}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r},\omega) &= \hat{\mathbf{x}} \varepsilon_0 \left(1 + \tilde{\chi}^{(1)}(\omega) + \varepsilon_{NL}(\omega)\right) \tilde{E}(\mathbf{r},\omega) \\ &= \hat{\mathbf{x}} \varepsilon_0 \bar{\varepsilon}_r(\omega) \tilde{E}(\mathbf{r},\omega) \\ &= \hat{\mathbf{x}} \varepsilon(\omega) \tilde{E}(\mathbf{r},\omega) \end{aligned} \quad (1.17)$$

où $\bar{\varepsilon}_r$ peut être approximé par:

$$\bar{\varepsilon}_r = (n_L + \Delta n)^2 \approx n_L^2 + 2n_L \Delta n \quad (1.18)$$

Il est possible d'appliquer la dernière approximation parce que la valeur Δn est petite comparée à n_L . La valeur Δn est définie comme:

$$\Delta n = n_{NL} |E|^2 + i\alpha c / 2\omega \quad (1.19)$$

de plus,

$$n(\omega) = n_L(\omega) + n_{NL}(\omega) |E|^2 \quad (1.20)$$

et avec les équations 1.10, 1.11 et 1.12, n_{NL} prend la forme suivante:

$$n_{NL}(\omega) = \frac{3}{8n_L} \tilde{\chi}_{xxxx}^{(3)}(\omega) \quad (1.21)$$

1.3 Équation différentielle d'évolution de l'enveloppe

En utilisant les propriétés de l'opérateur ∇ et le fait que $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ dans le milieu de la fibre, la transformée de Fourier de l'équation 1.1 est:

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}} = -\mu_0 \omega_0^2 \tilde{\mathbf{D}} \quad (1.22)$$

Avec l'expression 1.17 et l'hypothèse sur la forme du signal (l'équation 1.13) la dernière relation devient:

$$\hat{\mathbf{x}} \nabla^2 \tilde{E} = -\hat{\mathbf{x}} \mu_0 \varepsilon_0 \omega_0^2 \bar{\varepsilon}_r(\omega) \tilde{E} \quad (1.23)$$

Comme cette équation n'affecte pas l'orientation de l'onde, il est possible de poursuivre les calculs en laissant de côté les indices vectoriels. La dernière équation devient simplement:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \tilde{E} &= -\frac{\omega_0^2}{c^2} \bar{\varepsilon}_r(\omega) \tilde{E} \\ &= -k_0^2 \bar{\varepsilon}_r(\omega) \tilde{E} \end{aligned} \quad (1.24)$$

où on a utilisé les définitions pour la vitesse de la lumière et la constante de propagation: $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ et $k_0 = \frac{\omega_0}{c}$.

Pour simplifier les calculs, on introduit la quantité suivante:

$$\bar{\beta}^2(\omega) = k_0^2 \bar{\varepsilon}_r(\omega) \quad (1.25)$$

de sorte que l'équation 1.24 devient:

$$\nabla^2 \tilde{E} + \bar{\beta}^2(\omega) \tilde{E} = 0 \quad (1.26)$$

Pour résoudre la dernière équation, on utilise la méthode de séparation des variables. La transformée de Fourier du champ électrique (\tilde{E}) est exprimée sous la forme:

$$\tilde{E}(\mathbf{r}, \omega) = F(x, y) \tilde{A}(z, \omega) e^{i\beta_0 z} \quad (1.27)$$

où \tilde{A} est une fonction à variation lente selon z , et où β_0 est le nombre d'onde (la fréquence spatiale). En remplaçant cette dernière expression dans l'équation différentielle, et en négligeant la dérivée seconde spatiale de la fonction \tilde{A} (puisque'elle varie lentement en z), les deux relations suivantes sont obtenues:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + [\tilde{\beta}^2(\omega) - \lambda^2]F = 0 \quad (1.28)$$

$$2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} + (\lambda^2 - \beta_0^2)\tilde{A} = 0 \quad (1.29)$$

La première équation donne le profil des modes propres transversaux de la fibre (F), et la deuxième équation décrit l'évolution de l'enveloppe de l'impulsion envoyée dans la fibre (\tilde{A}). C'est cette dernière équation qui est d'intérêt ici.

Il est nécessaire de connaître la valeur de λ pour pouvoir résoudre l'équation 1.29. Pour ce faire il faut solutionner l'équation 1.28. Ceci est fait par la théorie des perturbations, en posant que la première approximation est égale à $\bar{\varepsilon}_r = n_L^2$, ou plus simplement en remplaçant $\tilde{\beta}(\omega)$ par $k_0^2 n_L^2$. Cette étape fournit une fonction pour le mode propre (F) et une valeur propre correspondante qui sera dénotée par $\beta(\omega)$. Dans la prochaine étape de la méthode de perturbation, soit à l'ordre 1, $\bar{\varepsilon}_r$ est donné par l'approximation 1.18. Le mode propre n'est pas modifié mais la valeur propre devient:

$$\lambda = \beta(\omega) + \Delta\beta(\omega) \quad (1.30)$$

où

$$\Delta\beta = \frac{k_0 \int \int_{-\infty}^{\infty} \Delta n |F(x,y)|^2 dx dy}{\int \int_{-\infty}^{\infty} |F(x,y)|^2 dx dy} \quad (1.31)$$

Le développement complet est fait dans [1]. En utilisant l'approximation $\lambda^2 - \beta_0^2 \approx 2\beta_0(\lambda - \beta_0)$ et après quelques manipulations algébriques, l'équation 1.29 devient:

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} = i[\beta(\omega) + \Delta\beta - \beta_0]\tilde{A} \quad (1.32)$$

Pour continuer, $\beta(\omega)$ sera décomposé en série de Taylor autour de ω_0 :

$$\beta(\omega) = \beta_0 + (\omega - \omega_0)\beta_1 + \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2\beta_2 + \frac{1}{6}(\omega - \omega_0)^3\beta_3 + \dots \quad (1.33)$$

dans ce développement,

$$\beta_n = \left[\frac{d^n \beta}{d\omega^n} \right]_{\omega=\omega_0} \quad (1.34)$$

Et par définition:

$$\beta_1 = \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_0} = \frac{1}{v_g} \quad (1.35)$$

On choisit l'approximation quasi-monochromatique. Dans cette approximation $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$ ou encore $(\omega - \omega_0)/\omega_0 \ll 1$, les termes supérieurs à β_2 sont donc négligeables, et en sachant que:

$$A(z,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(z,\omega - \omega_0) e^{-i(\omega - \omega_0)t} d\omega, \quad (1.36)$$

l'équation 1.32 devient:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + i\Delta\beta A \quad (1.37)$$

Le terme $\Delta\beta$ peut être décomposé en utilisant les éq. 1.19 et 1.31, la dernière équation devient:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{2} A = i\gamma |A|^2 A \quad (1.38)$$

où le coefficient non-linéaire est défini comme:

$$\gamma = \frac{n_{NL}\omega_0}{cA_{eff}} \quad (1.39)$$

Avec la section efficace définie par:

$$A_{eff} = \frac{\left[\int \int_{-\infty}^{\infty} |F(x,y)|^2 dx dy \right]^2}{\int \int_{-\infty}^{\infty} |F(x,y)| dx dy} \quad (1.40)$$

A_{eff} dépend du mode fondamental dans la fibre (F). Si la dépendance radiale de ce mode est représentée par une gaussienne (ce qui est une très bonne approximation pour de la fibre monomode), on obtient l'expression suivante:

$$A_{eff} = \pi w^2 \quad (1.41)$$

où w est le rayon de la fibre.

L'équation 1.38 est l'équation recherchée depuis le début de ce développement. Cette équation possède les variables et constantes suivantes:

- z : la position longitudinale dans la fibre;
- t : le temps;
- $A(z)$: l'amplitude de l'enveloppe du champ électrique. Cette variable varie lentement sur z ;
- β_1 : l'inverse de la vitesse de groupe v_g , responsable de la vitesse de l'impulsion;
- β_2 : la dispersion;
- α : absorptivité de la fibre;
- γ : coefficient de non-linéarité qui va permettre l'existence de solutions solitoniques [22].

1.4 Longueur de dispersion et longueur non-linéaire

Il est possible de simplifier encore plus l'équation 1.38. Si on se positionne dans le référentiel de l'impulsion, celui qui se propage à la vitesse de groupe (v_g), la transformation suivante a lieu:

$$T = t - z/v_g = t - \beta_1 z \quad (1.42)$$

Ici la relation $\beta_1 = 1/v_g$ a été utilisée. L'équation 1.38 devient alors:

$$i \frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{i}{2} \alpha A + \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} - \gamma |A|^2 A \quad (1.43)$$

Il est pratique de normaliser les variables, ainsi le temps est normalisé par rapport

à la largeur initiale de l'impulsion (T_0):

$$\tau = \frac{T}{T_0} = \frac{t - z/v_g}{T_0} \quad (1.44)$$

L'amplitude normalisée ($U(z,\tau)$) sera définie par la relation suivante:

$$A(z,\tau) = \sqrt{P_0} e^{-\alpha z/2} U(z,\tau) \quad (1.45)$$

où P_0 est la puissance maximale de l'onde incidente. Avec ces deux normalisations, l'équation 1.43 devient:

$$i \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\text{sgn}(\beta_2)}{2L_D} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \frac{e^{-\alpha z}}{L_{NL}} |U|^2 U \quad (1.46)$$

où deux longueurs ont été introduites, soient:

$$L_D = \frac{T_0^2}{|\beta_2|}, \quad \text{longueur de dispersion} \quad (1.47)$$

et

$$L_{NL} = \frac{1}{\gamma P_0}, \quad \text{longueur non-linéaire} \quad (1.48)$$

Respectivement, ces longueurs représentent la distance minimale nécessaire pour avoir un effet important de dispersion et un effet important de non-linéarité. Par exemple, si la longueur de la fibre (L) est plus petite que la longueur de dispersion ($L \ll L_D$), alors la déformation produit par l'effet de dispersion sera si infime qu'on ne pourrait la détecter. Il est donc important de choisir les bons paramètres (longueur, β_2 , etc.) quand on étudie ce type de phénomène.

Avec ces simplifications, la dernière équation ne contient plus de dérivée simple dans le temps. L'équation 1.46 est de la forme de l'équation non-linéaire de Schrödinger (NLS). Ce type d'équation a déjà été étudié [22] et il possède une famille de solutions qu'on appelle solitons. Les solitons possèdent plusieurs propriétés intéressantes pour le domaine de la télécommunication dont celle de conserver leur forme quand ils se propagent.

Chapitre 2

La polarisation

2.1 Avant-propos

Dans ce chapitre, un système d'équations couplées décrivant l'évolution d'un signal polarisé envoyé dans une fibre mono-mode biréfringente sera trouvé. Le point de départ sera le même que celui du dernier chapitre. En utilisant quelques propriétés du signal ainsi que du milieu, et en faisant des approximations sur la transformation de l'onde au cours de sa propagation, un système d'équations différentielles couplées sera déduit. Ce système possède des solutions aux propriétés solitoniques pour certaines valeurs de ces constantes (voir [6] et [7]).

2.2 Un signal polarisé

Le développement de ce chapitre suit les mêmes étapes que celui du dernier chapitre. En effet, la première partie, soit le développement jusqu'à l'équation 1.12, est la même pour les deux chapitres puisque cette partie ne dépend pas de la forme que prend

l'impulsion. Ce développement ne sera donc pas reproduit ici, et le point de départ est la recherche d'une expression simplifiée pour la polarisation non-linéaire.

Le signal envoyé est une impulsion laser polarisée. On peut représenter le signal par un champ électrique qui se propage dans la fibre. Pour représenter la polarisation, on décompose le champ électrique en deux composantes perpendiculaires. La figure 2.1 schématise cette représentation.

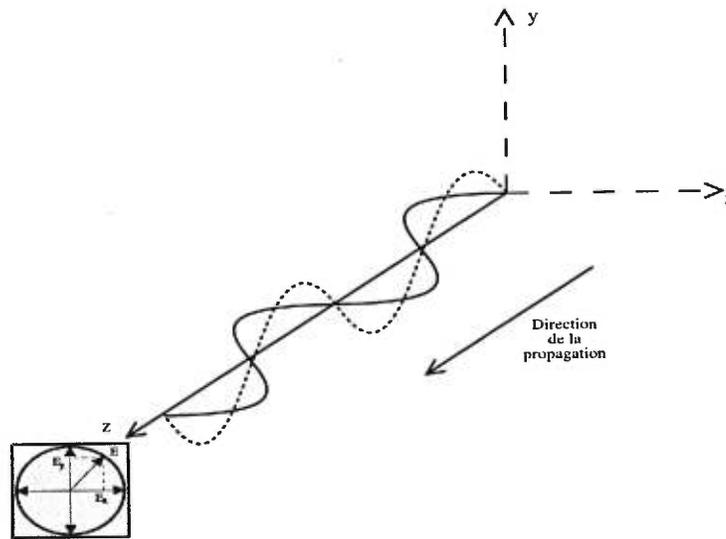


FIG. 2.1 – Schéma d'une impulsion polarisée

Cette dernière décomposition permet d'écrire:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2} (\hat{x}E_x(\mathbf{r},t) + \hat{y}E_y(\mathbf{r},t)) \quad (2.1)$$

où le choix des axes (\hat{x} et \hat{y}) est arbitraire.

Comme dans le premier chapitre, la polarisation non-linéaire est approximée par 1.14 et la réponse non-linéaire du milieu est considérée instantanée. Avec la nouvelle expression pour le champ électrique (éq. 2.1), la polarisation non-linéaire devient:

$$\mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2} (\hat{x}P_x(\mathbf{r},t) + \hat{y}P_y(\mathbf{r},t)) \quad (2.2)$$

où

$$P_i = \frac{3\varepsilon_0}{2} \sum_j \left[\chi_{xxyy}^{(3)} E_i E_j E_j^* + \chi_{xyxy}^{(3)} E_j E_i E_j^* + \chi_{xyyx}^{(3)} E_i E_j E_j^* \right] \quad (2.3)$$

avec i et j prenant les valeurs x ou y chacun.

Les trois composantes de la susceptibilité électrique ($\chi^{(3)}$) qui se trouvent dans la dernière équation sont reliées à $\chi_{xxxx}^{(3)}$ par:

$$\chi_{xxxx}^{(3)} = \chi_{xxyy}^{(3)} + \chi_{xyxy}^{(3)} + \chi_{xyyx}^{(3)} \quad (2.4)$$

Les valeurs des composantes sont déterminées par les propriétés du milieu qui est étudié. Dans le milieu de la fibre en silice, ces trois composantes ont des valeurs de même magnitude [1]. Pour simplifier le problème, il est approximé que ces trois valeurs sont identiques [1]. Donc ces valeurs peuvent être remplacées par $\chi_{xxxx}^{(3)}$.

Ainsi, pour chacun des axes, l'équation 2.3 devient:

$$P_x = \frac{3\varepsilon_0}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} \left[\left(|E_x|^2 + \frac{2}{3} |E_y|^2 \right) E_x + \frac{1}{3} (E_x^* E_y) E_y \right] \quad (2.5)$$

et

$$P_y = \frac{3\varepsilon_0}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} \left[\left(|E_y|^2 + \frac{2}{3} |E_x|^2 \right) E_y + \frac{1}{3} (E_y^* E_x) E_x \right] \quad (2.6)$$

En utilisant ces équations et de 1.2 et 1.3, $\tilde{\mathbf{D}}$ devient:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{D}} = & \hat{x} \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon_0 \left(1 + \tilde{\chi}^{(1)} \right) \tilde{E}_x + \right. \\ & \left. \frac{3}{4} \tilde{\chi}_{xxxx}^{(3)} \left[\left(|\tilde{E}_x|^2 + \frac{2}{3} |\tilde{E}_y|^2 \right) \tilde{E}_x + \frac{1}{3} (\tilde{E}_x^* \tilde{E}_y) \tilde{E}_y \right] \right\} + \\ & \hat{y} \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon_0 \left(1 + \tilde{\chi}^{(1)} \right) \tilde{E}_y + \right. \\ & \left. \frac{3}{4} \tilde{\chi}_{xxxx}^{(3)} \left[\left(|\tilde{E}_y|^2 + \frac{2}{3} |\tilde{E}_x|^2 \right) \tilde{E}_y + \frac{1}{3} (\tilde{E}_y^* \tilde{E}_x) \tilde{E}_x \right] \right\} \quad (2.7) \end{aligned}$$

La variation de l'indice de réfraction entre le cas linéaire non-couplé et le cas non-linéaire couplé est donnée par:

$$\Delta n_x = n_2 \left(|E_x|^2 + \frac{2}{3} |E_y|^2 \right) \quad (2.8)$$

$$\Delta n_y = n_2 \left(|E_y|^2 + \frac{2}{3} |E_x|^2 \right) \quad (2.9)$$

Ainsi, en remplaçant les termes de l'équation 1.22 du chapitre 1 par les valeurs qui ont été trouvées ici, et en appliquant la séparation de variables (équation 1.27) sur le champ électrique, le système d'équations suivant est obtenu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_x}{\partial z} + \beta_{1x} \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{i}{2} \beta_{2x} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{2} A_x = \\ i\gamma \left[|A_x|^2 + \frac{2}{3} |A_y|^2 \right] A_x + \frac{i\gamma}{3} A_x^* A_y^2 e^{-2i\Delta\beta z} \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_y}{\partial z} + \beta_{1y} \frac{\partial A_y}{\partial t} + \frac{i}{2} \beta_{2y} \frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{2} A_y = \\ i\gamma \left[|A_y|^2 + \frac{2}{3} |A_x|^2 \right] A_y + \frac{i\gamma}{3} A_y^* A_x^2 e^{-2i\Delta\beta z} \end{aligned} \quad (2.11)$$

où A_x est l'amplitude à variation lente dans le plan xz et A_y est l'amplitude à variation lente dans le plan yz . Le terme $\Delta\beta$ est la différence de l'indice de réfraction entre l'axe rapide et l'axe lent dans la fibre:

$$\Delta\beta = \beta_{1x} - \beta_{1y}$$

mais pour de la fibre faiblement biréfringente cette valeur est très petite et le terme qui la contient peut être négligé [1]. Ainsi:

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} + \beta_{1x} \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{i}{2} \beta_{2x} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{2} A_x = i\gamma \left[|A_x|^2 + \frac{2}{3} |A_y|^2 \right] A_x \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial z} + \beta_{1y} \frac{\partial A_y}{\partial t} + \frac{i}{2} \beta_{2y} \frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{2} A_y = i\gamma \left[|A_y|^2 + \frac{2}{3} |A_x|^2 \right] A_y \quad (2.13)$$

Les variables qui composent le système d'équations 2.12 et 2.13 sont:

- A_x, A_y : amplitudes des enveloppes de l'impulsion;
- β_{1x}, β_{1y} : inverse de la vitesse de groupe pour chacun des axes de propagation dans la fibre;
- β_{2x}, β_{2y} : dispersion pour chacun des axes de propagation dans la fibre;

- α : absorptivité (qui est la même pour les deux composantes de polarisation);
- γ : facteur qui vient de la polarisation non-linéaire du milieu ($\chi^{(3)}$). Cette variable est responsable de deux effets: le couplage entre les deux composantes de polarisation de l'impulsion (XPM) et les effets non-linéaires qui permettraient la formation de solutions à comportement solitonique.

Il est important de noter qu'il y a deux types de polarisation: la polarisation intrinsèque de l'impulsion qui arrive dans la fibre et la polarisation non-linéaire, un effet qui est induit dans le milieu de la fibre et qui va modifier l'évolution de l'impulsion initiale.

Les deux équations qui composent ce système ressemblent beaucoup à l'équation du dernier chapitre. Donc l'existence de solitons ou d'impulsions à comportement solitonique serait peut-être possible. Dans les prochains chapitres, en utilisant des simulations numériques et une analyse théorique, cette possibilité va être explorée.

Chapitre 3

Calcul numérique

3.1 Avant-propos

Dans le but de résoudre le système d'équations du dernier chapitre, une méthode numérique sera développée dans ce chapitre. Cette méthode permettra de voir l'évolution de la forme et de l'amplitude d'une impulsion lancée dans une fibre mono-mode biréfringente. Le développement théorique et l'implémentation informatique de cette méthode sont de création originale basé sur des méthodes existantes pour les équations de type NLS.

Les résultats obtenus par les simulations numériques seront présentés dans la deuxième section de ce chapitre.

3.2 Normalisation des équations couplées

Les équations 2.12 et 2.13 sont réécrites ici:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_x}{\partial z} + \beta_{1x} \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{i}{2} \beta_{2x} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{2} A_x = \\ i\gamma \left[|A_x|^2 + \frac{2}{3} |A_y|^2 \right] A_x \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_y}{\partial z} + \beta_{1y} \frac{\partial A_y}{\partial t} + \frac{i}{2} \beta_{2y} \frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{2} A_y = \\ i\gamma \left[|A_y|^2 + \frac{2}{3} |A_x|^2 \right] A_y \end{aligned} \quad (3.2)$$

On applique le changement de variable suivant:

$$\begin{aligned} \mu(\xi, \tau) &= \frac{A_x(z, t)}{\sqrt{P_{0x}}} \\ \nu(\xi, \tau) &= \frac{A_y(z, t)}{\sqrt{P_{0y}}} \\ \xi(z, t) &= \frac{(\beta_{2x} + \beta_{2y})}{2T_0^2} z \\ \tau(z, t) &= \frac{1}{T_0} \left(t - \frac{(\beta_{1x} + \beta_{1y})}{2} z \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

ce qui donne:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial \xi} + \left(\frac{T_0(\beta_{1x} - \beta_{1y})}{\beta_{2x} + \beta_{2y}} \right) \frac{\partial \mu}{\partial \tau} + i \left(\frac{\beta_{2x}}{\beta_{2x} + \beta_{2y}} \right) \frac{\partial^2 \mu}{\partial \tau^2} + \\ \frac{\alpha}{2} \left(\frac{2T_0^2}{\beta_{2x} + \beta_{2y}} \right) \mu - i \left(\frac{2\gamma T_0^2 P_{0x}}{\beta_{2x} + \beta_{2y}} \right) \left[|\mu|^2 + \frac{2}{3} \frac{P_{0y}}{P_{0x}} |\nu|^2 \right] \mu = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nu}{\partial \xi} - \left(\frac{T_0(\beta_{1x} - \beta_{1y})}{\beta_{2x} + \beta_{2y}} \right) \frac{\partial \nu}{\partial \tau} + i \left(\frac{\beta_{2y}}{\beta_{2x} + \beta_{2y}} \right) \frac{\partial^2 \nu}{\partial \tau^2} + \\ \frac{\alpha}{2} \left(\frac{2T_0^2}{\beta_{2x} + \beta_{2y}} \right) \nu - i \left(\frac{2\gamma T_0^2 P_{0y}}{\beta_{2x} + \beta_{2y}} \right) \left[|\nu|^2 + \frac{2}{3} \frac{P_{0x}}{P_{0y}} |\mu|^2 \right] \nu = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Ces changements de variable ont pour effet de normaliser les variables par rapport à la largeur initiale de l'impulsion (T_0) et la longueur de dispersion pour la fibre étudiée ($L_D = \frac{T_0^2}{|\beta_2|}$). De plus, on se place dans le référentiel du paquet d'onde qui se propage dans la fibre [1].

Comme les deux équations 3.4 et 3.5 sont presque identiques, seul le développement pour la première sera présenté ici. Pour simplifier la numérisation, l'équation 3.4 est décomposé en deux parties:

$$\frac{\partial \mu}{\partial \xi} = -2 \left\{ \delta \frac{\partial \mu}{\partial \tau} + \sigma \mu \right\} \quad (3.6)$$

et,

$$\frac{\partial \mu}{\partial \xi} = -2i \left\{ \Omega \frac{\partial^2 \mu}{\partial \tau^2} - \Gamma [|\mu|^2 + \Upsilon |\nu|^2] \mu \right\} \quad (3.7)$$

où

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{T_0 (\beta_{1x} - \beta_{1y})}{\beta_{2x} + \beta_{2y}} \\ \sigma &= \frac{\alpha}{2} \left(\frac{2T_0^2}{\beta_{2x} + \beta_{2y}} \right) \\ \Omega &= \frac{\beta_{2x}}{\beta_{2x} + \beta_{2y}} \\ \Gamma &= \frac{2\gamma T_0^2 P_{0x}}{\beta_{2x} + \beta_{2y}} \\ \Upsilon &= \frac{2 P_{0y}}{3 P_{0x}} \end{aligned}$$

Si on fait la somme des deux équations 3.6 et 3.7, on retrouve l'équation 3.4. Voici comment se passera la simulation numérique: pour chaque pas dans l'espace ξ , une valeur intermédiaire sera trouvée à partir de l'équation 3.6, cette valeur intermédiaire étant ensuite utilisée dans l'équation 3.7 pour calculer la valeur finale pour ce pas.

L'équation 3.6 est hyperbolique, donc une méthode parfaitement adaptée pour ce type d'équation différentielle est utilisée: la méthode Lax-Wendroff. Cette méthode possède une précision d'ordre $O(\Delta \tau^2)$ sur le temps normalisé et d'ordre $O(\Delta \xi^2)$ sur l'espace normalisée. Pour l'équation 3.7, une variation de la méthode numérique Crank-Nickolson sera utilisée. Cette dernière s'applique bien sur des équations différentielles paraboliques et elle a une précision d'ordre $O(\Delta \tau^2)$ et $O(\Delta \xi^2)$. La discrétisation des équations 3.6 et 3.7 est de la forme:

$$\mu_n^{(m+1/2)} = A \mu_{n+1}^{(m)} + B \mu_n^{(m)} + C \mu_{n-1}^{(m)} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned}
D\mu_{n+1}^{(m+1)} + (1 - 2D)\mu_n^{(m+1)} + D\mu_{n-1}^{(m+1)} = \\
\mu_n^{(m+1/2)} - D\left(\mu_{n+1}^{(m+1/2)} - 2\mu_n^{(m+1/2)} + \mu_{n-1}^{(m+1/2)}\right) - \\
E\left(\left|\mu_n^{(m+1/2)} + \mu_n^{(m+1)}\right|^2 + F\left|\nu_n^{(m+1/2)}\right|^2\right)\left(\mu_n^{(m+1/2)} + \mu_n^{(m+1)}\right)
\end{aligned} \quad (3.9)$$

où n est l'indice sur τ , et

$$\begin{aligned}
A &= \delta\Delta\xi \frac{\delta\Delta\xi + \Delta\tau\Delta\xi(\sigma - \Delta\tau)}{2\Delta\tau^2} \\
B &= \frac{2\Delta\tau^2 - 2\delta^2\Delta\xi^2 - 2\sigma\Delta\xi\Delta\tau^2 + \sigma^2\Delta\xi^2\Delta\tau^2}{2\Delta\tau^2} \\
C &= \delta\Delta\xi \frac{\delta\Delta\xi + \Delta\tau - \sigma\Delta\xi\Delta\tau}{2\Delta\tau^2} \\
D &= \frac{i}{2}\Omega \frac{\Delta\xi}{\Delta\tau^2} \\
E &= \frac{i}{4}\Gamma\Delta\xi \\
F &= \Upsilon
\end{aligned}$$

Les valeurs A, B et C sont trouvées en utilisant le développement décrit dans [19]. Les termes D, E et F sont trouvés par le développement décrit dans [17] et [18].

Contrairement à l'équation 3.8, l'équation 3.9 ne donne pas explicitement la valeur inconnue en fonction des valeurs connues, $\mu_n^{(m+1)}$ dépend aussi de $\mu_{n+1}^{(m+1)}$ et $\mu_{n-1}^{(m+1)}$. De plus, le côté droit de l'équation contient des termes en $\mu^{(m+1)}$. Il faut donc utiliser la méthode décrite dans [17]. La méthode s'applique comme suit: on introduit un autre paramètre (k) sur la variable $\mu^{(m+1)}$, ce qui donne ${}^{(k)}\mu_n^{(m+1)}$, et l'équation 3.9 est transformée en:

$$\begin{aligned}
D^{(k+1)}\mu_{n+1}^{(m+1)} + (1 - 2D)^{(k+1)}\mu_n^{(m+1)} + D^{(k+1)}\mu_{n-1}^{(m+1)} = \\
\mu_n^{(m+1/2)} - D\left(\mu_{n+1}^{(m+1/2)} - 2\mu_n^{(m+1/2)} + \mu_{n-1}^{(m+1/2)}\right) - \\
E\left(\left|\mu_n^{(m+1/2)} + {}^{(k)}\mu_n^{(m+1)}\right|^2 + F\left|\nu_n^{(m+1/2)}\right|^2\right) \\
\left(\mu_n^{(m+1/2)} + {}^{(k)}\mu_n^{(m+1)}\right)
\end{aligned} \quad (3.10)$$

Pour trouver la solution de cette équation, une boucle est créée sur le facteur k jusqu'à ce que :

$$\left| {}^{(k+1)}\mu_i^{(m+1)} - {}^{(k)}\mu_i^{(m+1)} \right| < \Delta r \quad (3.11)$$

en supposant que initialement ${}^{(0)}\mu_{n+1}^{(m)} = \mu_n^{(m)}$. Δr est choisi en fonction de la précision nécessaire et se situe normalement autour de 10^{-4} . Ainsi, avec l'équation 3.8 et 3.10 la forme de l'impulsion à la position $\xi = (m + 1) \Delta \xi$ est retrouvée à partir de la forme connue à la position $\xi = (m) \Delta \xi$.

3.3 Résultats des simulations

Dans cette section on présente les graphiques des résultats des simulations numériques. Quelques commentaires seront fait sur ces résultats, mais une analyse plus approfondie sera faite dans un chapitre ultérieur alors que les solutions analytiques seront disponibles à des fins de comparaison. Pour alléger le texte, les graphiques en trois dimensions représentant l'évolution dans l'espace de l'impulsion envoyée dans la fibre ont été placés en annexes. Sur ces graphiques, les trois axes sont:

- la position normalisée (ξ);
- le temps normalisé (τ);
- l'amplitude normalisée de l'impulsion ($|U_x|$).

La position est normalisée par rapport à la longueur de dispersion qui est donnée par l'équation 1.47. Le temps est normalisé par rapport à la LMH initiale de l'impulsion. L'amplitude est normalisée par rapport à la valeur initiale de la puissance qui est donnée à l'impulsion. Ce sont les normalisations du système d'équations 3.3.

Il y a deux types de graphiques en 2 dimensions dans cette section:

- les graphiques donnant la forme de l'impulsion envoyée dans la fibre. Ces graphiques dessinent la dépendance de l'amplitude normalisée ($|U_i|$) par rapport au temps normalisé (τ);
- les graphiques donnant l'évolution de l'amplitude le long de la fibre. Ces graphiques dessinent la dépendance de l'amplitude normalisée ($|U_i|$) par rapport à la position normalisée (ξ);

Les figures 3.1, 3.2, 3.3, 3.5, 3.7, 3.9, 3.11, 3.13, 3.15, 3.17, 3.19, 3.21, 3.23, 3.25, 3.26 sont du premier type et les figures 3.4, 3.6, 3.8, 3.10, 3.12, 3.14, 3.16, 3.18, 3.20, 3.22, 3.24 sont du deuxième.

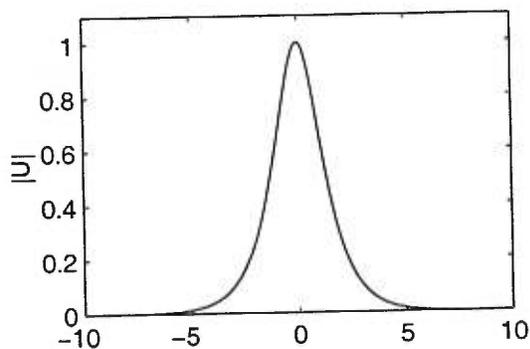


FIG. 3.1 - *Sécante hyperbolique*

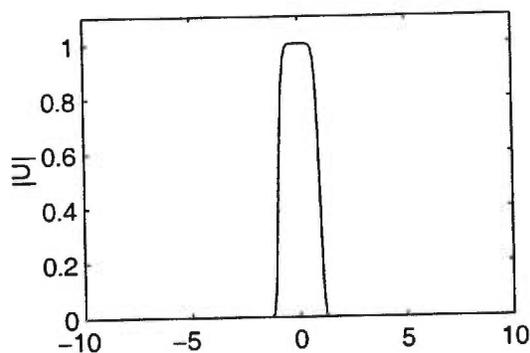


FIG. 3.2 - *Supergaussienne d'ordre 8*

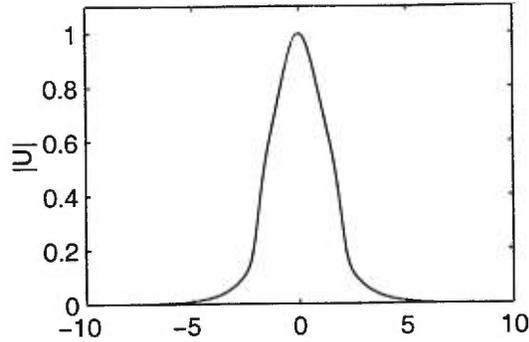


FIG. 3.3 – *Sécante hyperbolique perturbée par une supergaussienne*

Trois types de formes différentes ont été utilisées pour les conditions initiales: la sécante hyperbolique (figure 3.1), la supergaussienne (figure 3.2) et la sécante hyperbolique perturbée par une supergaussienne (figure 3.3). Les équations qui décrivent ces formes sont respectivement:

$$\begin{aligned}
 \psi(x) &= \operatorname{sech}(x) \\
 \psi(x) &= \exp\{-x^{2s}\} \\
 \psi(x) &= (1 - \eta) \operatorname{sech}(x) + \eta \exp\{-x^{2s}\}
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

où $\eta \ll 1$.

La forme en sécante hyperbolique représente la première forme de soliton qui peut exister pour une équation du type NLS [8]. Ce type de forme est très difficile à produire expérimentalement, un laser à semi-conducteur produit plutôt des formes proche de la supergaussienne [20], ce qui explique le choix de la deuxième forme. Le problème dans la production de forme en sécante hyperbolique par un laser réside dans la courbure abrupte que cette forme possède, d'où le choix de la troisième forme d'essai qui est une sécante hyperbolique avec sa courbure adoucie par une supergaussienne. La dernière forme, ainsi que la forme supergaussienne, seront utilisées dans l'analyse théorique du prochain chapitre.

En plus de la forme, il y a plusieurs autres constantes qui déterminent les conditions initiales. La majorité des simulations partagent les mêmes valeurs pour ces constantes, les voici:

- $\beta_{1x} = 10.5$ ps/km et $\beta_{1y} = 10.0$ ps/km;
- $\beta_{2x} = \beta_{2y} = -20.4$ ps²/km;
- $\alpha = 2 \times 10^{-4}$ dB/km;
- $\gamma = 2.05$ km⁻¹ W⁻¹ est donné par les deux valeurs suivantes: $A_{eff} = 63.205 \times 10^{-12}$ m², la surface effective de la distribution transversale de l'impulsion et $\lambda = 1.55 \times 10^{-6}$ m, la longueur d'onde;
- Puissance initiale $P_{0x} = 70 \times 10^{-3}$ W et $P_{0y} = 70 \times 10^{-3}$ W;
- LMH initiale $L_{0x} = 10.0$ ps et $L_{0y} = 10.0$ ps;
- Longueur de la fibre, $L = 300$ km;

Pour chacun des types de forme possible, plusieurs simulations ont été effectuées. Les résultats les plus intéressants sont présentés dans les trois sections suivantes, une section pour chaque type de forme initiale.

3.3.1 Deux sécantes hyperboliques

Deux sécantes hyperboliques identiques sont envoyées dans les deux axes (axes rapide et lent). Les constantes prennent les valeurs indiquées plus tôt. Ce type de simulation a déjà été étudié ([23], [7] et plusieurs autres), mais l'expérience a été refaite pour tester le logiciel de simulation et pour examiner certaines propriétés intéressantes.

Dans le cas unidimensionnel non biréfringent, quand la puissance initiale est plus grande ou égale à une valeur limite, un soliton se forme. Le surplus d'énergie entre l'impulsion initiale et le soliton est irradié vers l'extérieur. Alors, l'impulsion devient moins large et plus haute [23]. La valeur seuil pour la puissance est donnée par la

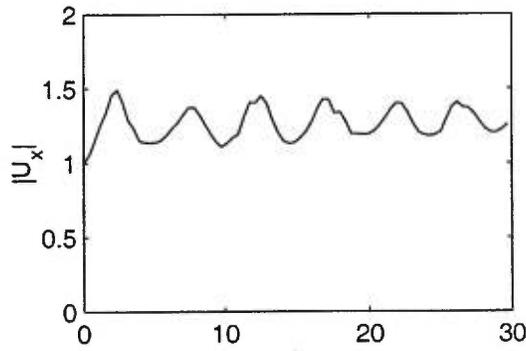


FIG. 3.4 - Évolution du maximum de l'amplitude par rapport à ξ pour la sécante hyperbolique pure

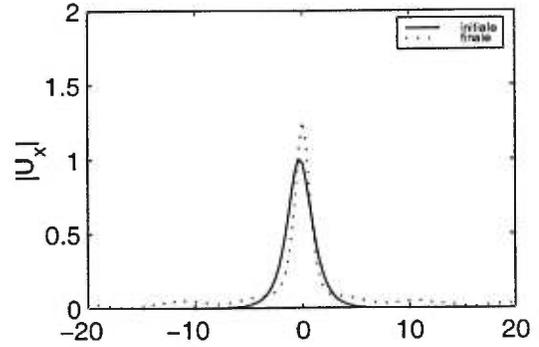


FIG. 3.5 - Comparaison entre la forme initiale et la forme finale pour la sécante hyperbolique pure

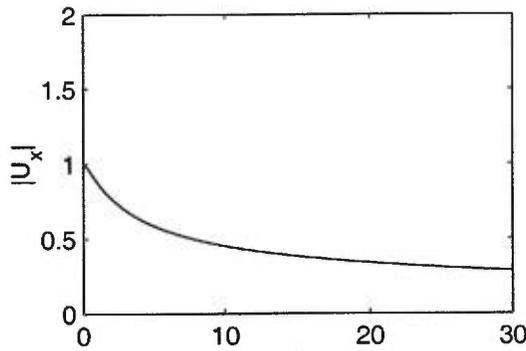


FIG. 3.6 - Évolution du maximum de l'amplitude par rapport à ξ pour la sécante hyperbolique pure avec $P_0 = 10 \times 10^{-3} W$

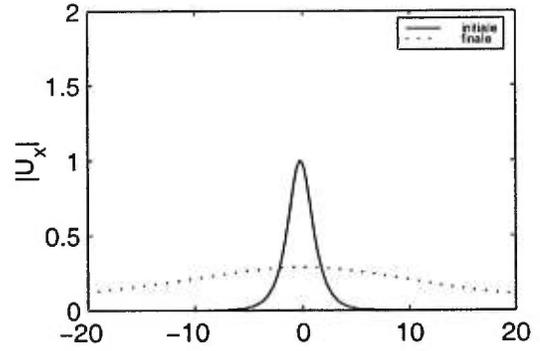


FIG. 3.7 - Comparaison entre la forme initiale et la forme finale pour la sécante hyperbolique pure avec $P_0 = 10 \times 10^{-3} W$

relation suivante [1]:

$$P_{\text{seuil}} = \frac{|\beta_{2x} + \beta_{2y}|}{\gamma T_0^2} \quad (3.13)$$

Avec le choix de conditions initiales pris dans ces simulations, $P_{\text{seuil}} \approx 30 \times 10^{-3} W$.

Dans le cas bi-dimensionnel biréfringent, une situation similaire se produit comme on peut voir sur la figure 3.5 qui compare la forme initiale avec la forme finale. Si la puissance est au-dessus du seuil, un soliton se forme. On voit sur la figure 3.4 et A.1 qu'il y a une oscillation de l'amplitude tout au long de la progression. Cette oscillation est normale et elle est en accord avec la littérature [22]. Seuls les résultats pour un axe sont présentés parce que ceux de l'autre sont identiques.

Si la puissance initiale est en dessous du seuil ($P_0 = 10 \times 10^{-3} W$), dans le cas unidimensionnel il n'y a pas de soliton. Comme on peut le voir sur les figures A.2, 3.6 et 3.7, la même chose se produit dans le cas bi-dimensionnel. La forme initiale s'écrase en distribuant son énergie à l'ensemble de la fibre [7].

Une chose qui est intéressante avec le cas d'une fibre biréfringente est d'examiner ce qui se passe quand la puissance suivant un axe est assez grande pour générer un soliton et que la puissance transmise dans l'autre axe n'est pas assez grande. Les prochaines figures (3.8, 3.9, A.3, 3.10 et 3.11) sont les résultats d'une simulation avec les puissances initiales suivantes:

- $P_{0x} = 70 \times 10^{-3} W$
- $P_{0y} = 10 \times 10^{-3} W$

Ainsi, suivant l'axe x (l'axe rapide) la puissance est assez élevée pour avoir un soliton, mais dans l'axe y ce n'est pas le cas. Suivant l'axe rapide, un soliton se forme comme dans le premier cas, alors que pour l'axe lent, un phénomène assez intéressant se passe. Bien que dans l'axe lent la puissance ne soit pas assez grande pour entretenir un

soliton, une forme semblable à une sécante hyperbolique est gardée, et l'amplitude reste presque constante (voir les figures A.3, 3.10 et 3.11 et comparer avec les figures A.2, 3.6 et 3.7). Par le terme d'interaction dans les équations qui décrivent ce phénomène (éq. 3.1 et 3.2), l'impulsion suivant l'axe lent est "capturée" par l'impulsion dans l'axe rapide [1]. Il y a quand même une diminution de l'amplitude pour la composante dans l'axe lent (celui où il y a moins de puissance initiale).

3.3.2 Deux supergaussiennes

Si deux impulsions de formes supergaussiennes sont envoyées dans les deux axes de la fibre, on obtient, pour les conditions initiales mentionnées plus haut, les figures A.4, 3.12 et 3.13. Comme dans le cas des deux sécantes hyperboliques avec une puissance au dessus du seuil, l'impulsion se déforme en soliton. L'excès d'énergie est irradié hors de la fibre, mais la déformation est plus longue, ce qui explique la grandeur des oscillations dans le début du graphique de l'évolution de l'amplitude. La figure A.5 dans l'annexe donne une vue plus précise sur la déformation de la forme initiale supergaussienne à la forme solitonique.

Si les deux composantes de l'impulsion n'ont pas assez de puissance, aucun soliton ne se forme et l'énergie est dissipée (figures 3.14 et 3.15).

Si seulement une des deux composantes de l'impulsion a assez d'énergie, les graphiques 3.16, 3.17, A.6, 3.18 et 3.19 sont obtenus. Le phénomène est le même que dans le cas de la sécante hyperbolique. L'impulsion dans l'axe rapide "attrape" l'impulsion dans l'axe lent et permet à celui-ci de garder une forme solitonique. Contrairement à la sécante hyperbolique, l'amplitude finale est plus grande que l'amplitude initiale pour la composante de l'axe lent.

3.3.3 Deux sécantes hyperboliques perturbées

Lorsque les formes des impulsions envoyées dans la fibre sont données par la troisième équation du système 3.12, les graphiques A.7, 3.20 et 3.21 sont obtenus après la simulation quand la puissance est au-dessus du seuil décrit plus haut. Les résultats sont très proches de ce qui est obtenu pour la forme en sécante hyperbolique. C'est pourquoi les graphiques avec l'impulsion dont les deux composantes ont leur puissance inférieure au seuil ne sont pas présents.

Les figures 3.22, 3.23, A.8, 3.24 et 3.25 présentent les figures pour le cas d'une composante au-dessus du seuil et une composante en dessous. Le résultat est un compromis entre la solution pour le cas de la sécante hyperbolique et la solution dans le cas de la supergaussienne. L'amplitude de la composante de l'impulsion dans l'axe lent diminue mais pas autant que dans le cas de la sécante hyperbolique pure (la figure 3.26 donne la comparaison de ces deux formes).

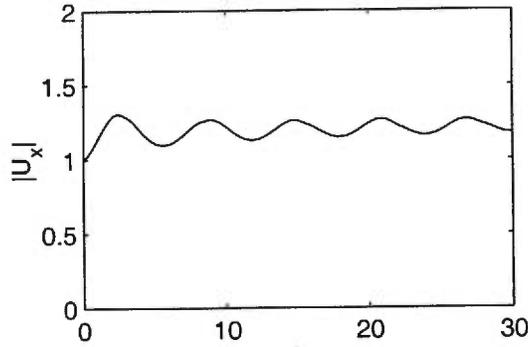


FIG. 3.8 - Évolution du maximum de l'amplitude par rapport à ξ pour la sécante hyperbolique pure avec $P_{0x} = 70 \times 10^{-3} W$ et $P_{0y} = 10 \times 10^{-3} W$ — axe rapide

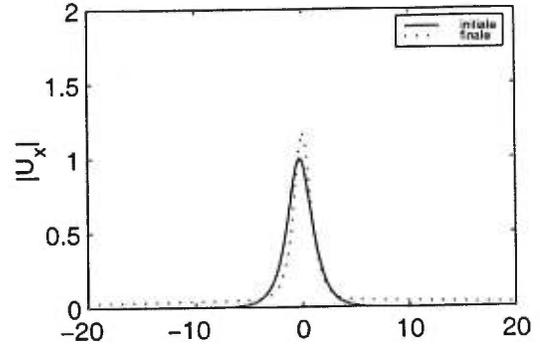


FIG. 3.9 - Comparaison entre la forme initiale et la forme finale pour la sécante hyperbolique pure avec $P_{0x} = 70 \times 10^{-3} W$ et $P_{0y} = 10 \times 10^{-3} W$ — axe rapide

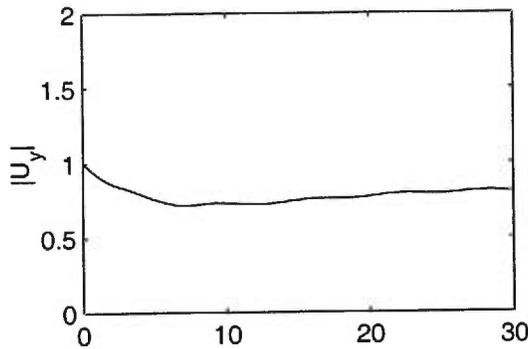


FIG. 3.10 - Évolution du maximum de l'amplitude par rapport à ξ pour la sécante hyperbolique pure avec $P_{0x} = 70 \times 10^{-3} W$ et $P_{0y} = 10 \times 10^{-3} W$ — axe lent

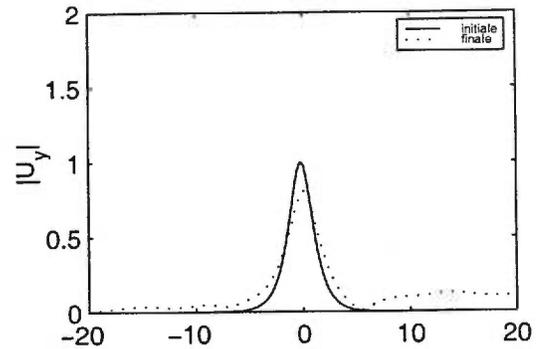


FIG. 3.11 - Comparaison entre la forme initiale et la forme finale pour la sécante hyperbolique pure avec $P_{0x} = 70 \times 10^{-3} W$ et $P_{0y} = 10 \times 10^{-3} W$ — axe lent

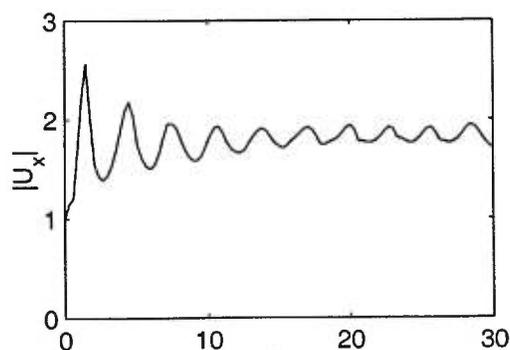


FIG. 3.12 - Évolution du maximum de l'amplitude par rapport à ξ pour la supergaussienne

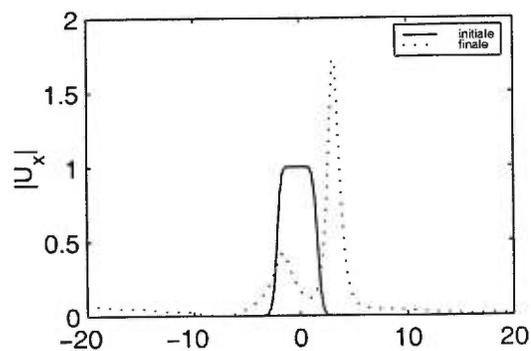


FIG. 3.13 - Comparaison entre la forme initiale et la forme finale pour la supergaussienne

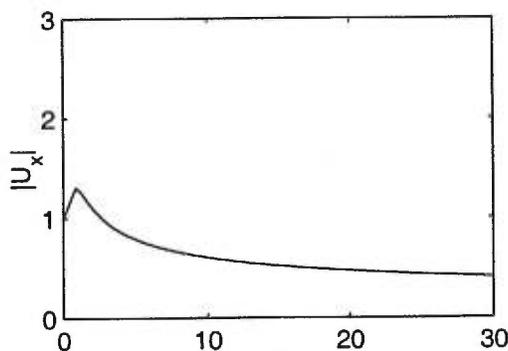


FIG. 3.14 - Évolution du maximum de l'amplitude par rapport à ξ pour la supergaussienne avec $P_0 = 10 \times 10^{-3} W$

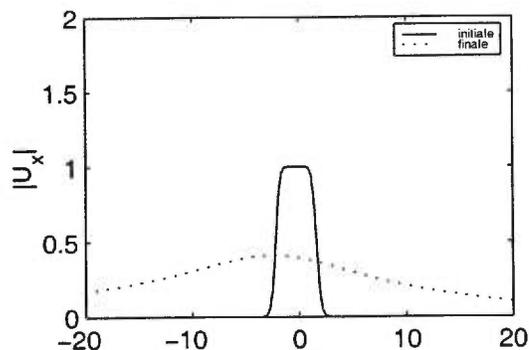


FIG. 3.15 - Comparaison entre la forme initiale et la forme finale pour la supergaussienne avec $P_0 = 10 \times 10^{-3} W$

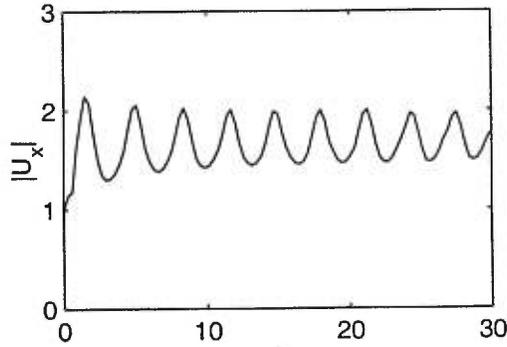


FIG. 3.16 - Évolution du maximum de l'amplitude par rapport à ξ pour la supergaussienne avec $P_{0x} = 70 \times 10^{-3} W$ et $P_{0y} = 10 \times 10^{-3} W$ — axe rapide

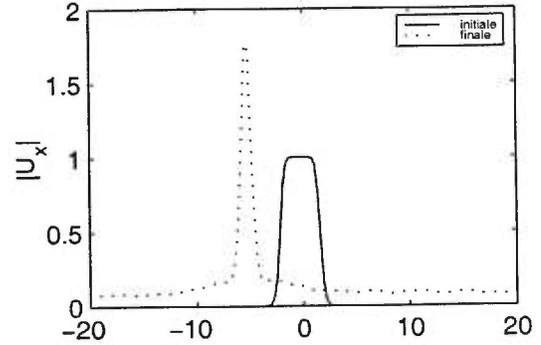


FIG. 3.17 - Comparaison entre la forme initiale et la forme finale pour la supergaussienne avec $P_{0x} = 70 \times 10^{-3} W$ et $P_{0y} = 10 \times 10^{-3} W$ — axe rapide

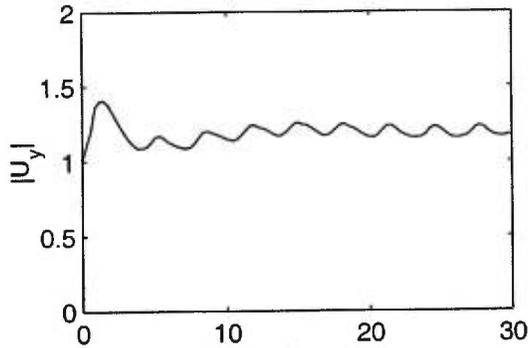


FIG. 3.18 - Évolution du maximum de l'amplitude par rapport à ξ pour la supergaussienne avec $P_{0x} = 70 \times 10^{-3} W$ et $P_{0y} = 10 \times 10^{-3} W$ — axe lent

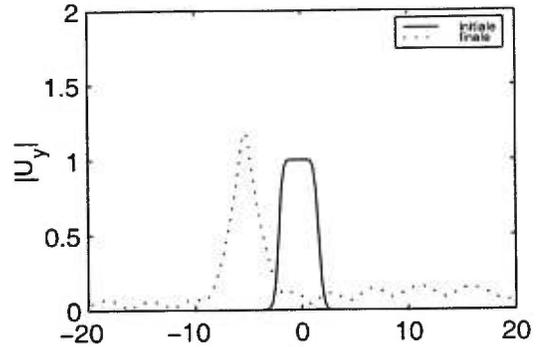


FIG. 3.19 - Comparaison entre la forme initiale et la forme finale pour la supergaussienne avec $P_{0x} = 70 \times 10^{-3} W$ et $P_{0y} = 10 \times 10^{-3} W$ — axe lent

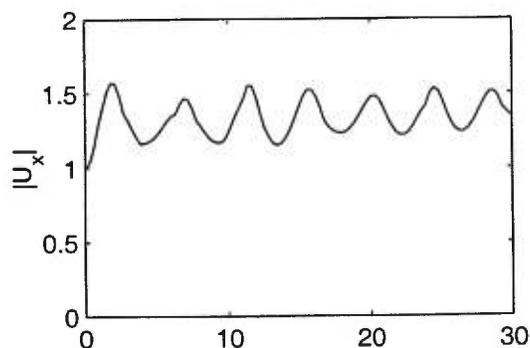


FIG. 3.20 – Évolution du maximum de l'amplitude par rapport à ξ pour la sécante hyperbolique perturbée

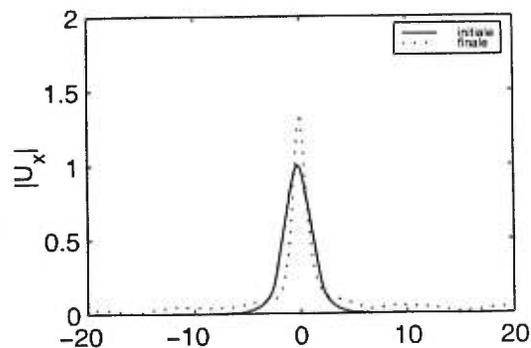


FIG. 3.21 – Comparaison entre la forme initiale et la forme finale pour la sécante hyperbolique perturbée

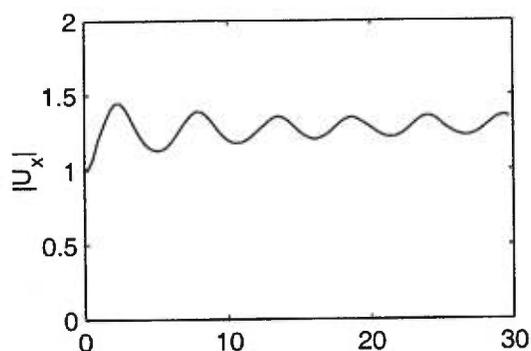


FIG. 3.22 – Évolution du maximum de l'amplitude par rapport à ξ pour la sécante hyperbolique perturbée avec $P_{0x} = 70 \times 10^{-3} W$ et $P_{0y} = 10 \times 10^{-3} W$ — axe rapide

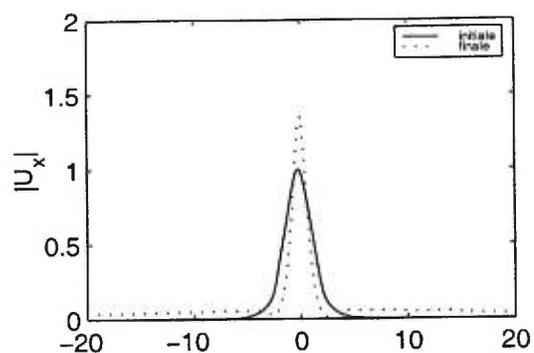


FIG. 3.23 – Comparaison entre la forme initiale et la forme finale pour la sécante hyperbolique perturbée avec $P_{0x} = 70 \times 10^{-3} W$ et $P_{0y} = 10 \times 10^{-3} W$ — axe rapide

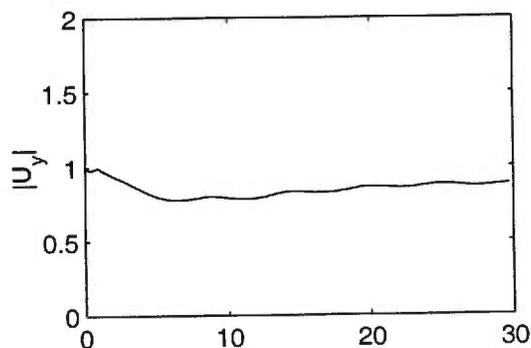


FIG. 3.24 – Évolution du maximum de l'amplitude par rapport à ξ pour la sécante hyperbolique perturbée avec $P_{0x} = 70 \times 10^{-3} W$ et $P_{0y} = 10 \times 10^{-3} W$ — axe lent

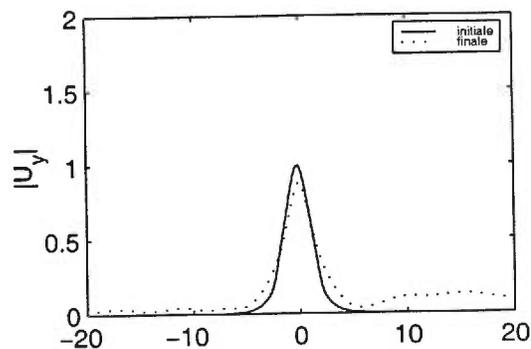


FIG. 3.25 – Comparaison entre la forme initiale et la forme finale pour la sécante hyperbolique perturbée avec $P_{0x} = 70 \times 10^{-3} W$ et $P_{0y} = 10 \times 10^{-3} W$ — axe lent

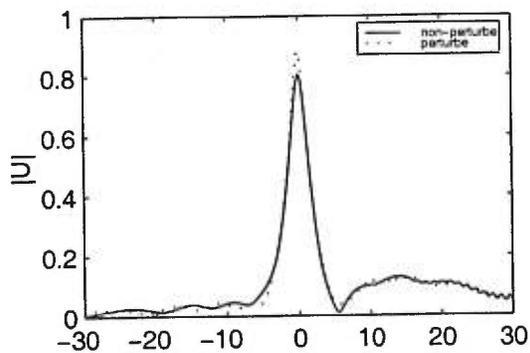


FIG. 3.26 – Comparaison entre la forme finale de la sécante hyperbolique pure et la sécante hyperbolique perturbée — axe rapide

Chapitre 4

Perturbation adiabatique des solitons vecteurs

4.1 Avant-propos

Afin de pouvoir mieux comprendre les résultats numériques, une analyse théorique du système d'équations obtenu dans le chapitre 2 est nécessaire. C'est ce qui sera fait dans ce chapitre en deux sections: une première pour le développement et l'application d'une méthode qui permettra de trouver l'évolution des paramètres d'une forme solitonique initialement perturbée; et une seconde pour le développement et l'application d'une méthode de perturbation pour trouver l'évolution des paramètres d'une forme initiale supergaussienne.

4.2 Première méthode de perturbation

Une forme générale pour un système d'équations couplées du type NLS comme celui qui se trouve dans le chapitre 2 (équations 2.12 et 2.13), a été suggérée dans [5]:

$$\begin{aligned} i \left(\frac{\partial A_x}{\partial \tau} + \delta_1 \frac{\partial A_x}{\partial \xi} \right) + p_1 \frac{\partial^2 A_x}{\partial \xi^2} + (a_1 |A_x|^2 + b |A_y|^2) A_x &= 0 \\ i \left(\frac{\partial A_y}{\partial \tau} + \delta_1 \frac{\partial A_y}{\partial \xi} \right) + p_2 \frac{\partial^2 A_y}{\partial \xi^2} + (b |A_x|^2 + a_2 |A_y|^2) A_y &= 0 \end{aligned}$$

où $\delta_1, \delta_2, p_1, p_2, a_1$ and a_2 sont des constantes réelles. Si $p_1 = p_2$ et $a_1 = a_2 = b$, ces équations se réduisent à l'équation de Manakov [6], équation qui est intégrable par la méthode de diffusion inversée (IST). Par contre, si $\delta_1 = -\delta_2 = \delta, p_1 = p_2 = 1, a_1 = a_2 = 1$ et $b = 2/3$, une autre solution a été suggérée [7]. Dans les fibres à biréfringence linéaire, la constante b prend la valeur $2/3$. Dans le travail présent, le système suivant sera considéré:

$$\begin{aligned} i \left(\frac{\partial A_x}{\partial \tau} + \delta \frac{\partial A_x}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial \xi^2} + (|A_x|^2 + \beta |A_y|^2) A_x &= 0 \\ i \left(\frac{\partial A_y}{\partial \tau} - \delta \frac{\partial A_y}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A_y}{\partial \xi^2} + (|A_y|^2 + \beta |A_x|^2) A_y &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

où les variables dans le temps et l'espace sont normalisées. Ce système ne peut être intégré par la méthode de diffusion inversée. Donc, plusieurs des outils mathématiques d'analyse de perturbation par fonctions propres venant de cette méthode ne peuvent être utilisés ici. Le dernier système d'équations possède, pour toutes valeurs positives des constantes δ et β , la solution suivante:

$$\begin{aligned} A_x(\xi, \tau) &= \eta \operatorname{sech} \left(\eta(1 + \beta)^{1/2} \tau \right) \exp \left[\frac{i}{2} \left(\eta^2 + \beta \eta^2 + \delta^2 \right) \xi - i \delta \tau \right] \\ A_y(\xi, \tau) &= \eta \operatorname{sech} \left(\eta(1 + \beta)^{1/2} \tau \right) \exp \left[\frac{i}{2} \left(\eta^2 + \beta \eta^2 + \delta^2 \right) \xi + i \delta \tau \right] \end{aligned} \quad (4.2)$$

ce qui représente un système de solitons vecteurs ayant un angle de polarisation de $\theta = 45^\circ$.

Le système (4.1) peut être obtenu à partir de la densité lagrangienne, \mathcal{L} , suivante:

$$\delta \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L} d\tau = 0 \quad (4.3)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(A_j) = & \frac{i}{2} (A_x A_{x,\xi}^* - A_{x,\xi} A_x^*) + \frac{i}{2} (A_y A_{y,\xi}^* - A_{y,\xi} A_y^*) - \\ & \frac{i}{2} \delta (A_x^* A_{x,\tau} - A_{x,\tau} A_x^*) + \frac{i}{2} \delta (A_y^* A_{y,\tau} - A_{y,\tau} A_y^*) + \\ & \frac{1}{2} |A_{x,\tau}|^2 + \frac{1}{2} |A_{y,\tau}|^2 - \frac{1}{2} |A_x|^4 - \frac{1}{2} |A_y|^4 - \beta |A_x|^2 |A_y|^2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Le deuxième indice sur la variable A indique une dérivée par rapport à cet indice. L'application des équations d'Euler-Lagrange sur la densité lagrangienne \mathcal{L} permet de retrouver le système (4.1) et son complexe conjugué. Pour obtenir la densité hamiltonienne, les moments conjugués des variables $A_{j,j=x,y}$ doivent être calculés:

$$\Pi_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{x,\xi}} = -iA_x^*, \quad \Pi_2 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{y,\xi}} = -iA_y^*$$

La densité hamiltonienne devient alors:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \left(\Pi_1 A_{x,\xi} + \Pi_1^* A_{x,\xi}^* + \Pi_2 A_{y,\xi} + \Pi_2^* A_{y,\xi}^* \right) - \mathcal{L} \\ = & -\frac{1}{2} |A_{x,\tau}|^2 - \frac{1}{2} |A_{y,\tau}|^2 + \frac{1}{2} |A_x|^4 + \frac{1}{2} |A_y|^4 + \beta |A_x|^2 |A_y|^2 \\ & + \frac{i}{2} \delta (A_x^* A_{x,\tau} - A_{x,\tau} A_x^*) - \frac{i}{2} \delta (A_y^* A_{y,\tau} - A_{y,\tau} A_y^*) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Les équations d'Hamilton qui donnent l'évolution dans l'espace-temps des amplitudes A_j sont:

$$A_{j,\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Pi_j} d\tau = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta A_j^*} d\tau$$

où $\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Pi}$ est une dérivée fonctionnelle. Les équations d'Hamilton peuvent être réécrites sous la forme suivante:

$$A_{j,\xi} = [A_j, \mathcal{H}] \quad , j = x, y \quad (4.6)$$

où $[\cdot, \mathcal{H}]$ est le crochet de Poisson. Celui-ci peut être considéré comme un opérateur agissant sur la fonction A_j , ainsi:

$$A_{j,\xi} = \hat{P}(A_j), \quad \hat{P}(A_j) = [A_j, \mathcal{H}] \quad (4.7)$$

Pour étudier l'évolution adiabatique de l'amplitude et de la phase d'un soliton initialement perturbé, il est nécessaire de décomposer l'amplitude en une somme de termes:

$$A_j(\xi, \tau) = \sum_{n=0} \epsilon^n A_j^{(n)}(\xi, \tau), \epsilon \ll 1 \quad (4.8)$$

avec

$$A_j^{(n)} = \int_0^\xi d\xi [A_j, H] \quad (4.9)$$

les quatre premières valeurs de cette expression sont:

$$\begin{aligned} A_x^{(0)} &= i \int_0^\xi d\xi \left[A_x^{(0)} |A_x^{(0)}|^2 + \beta A_x^{(0)} |A_y^{(0)}|^2 + i\sigma A_{x,\tau}^{(0)} + \frac{1}{2} A_{x,\tau\tau}^{(0)} \right] \\ A_y^{(0)} &= i \int_0^\xi d\xi \left[A_y^{(0)} |A_y^{(0)}|^2 + \beta A_y^{(0)} |A_x^{(0)}|^2 - i\sigma A_{y,\tau}^{(0)} + \frac{1}{2} A_{y,\tau\tau}^{(0)} \right] \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} A_x^{(1)} &= i \int_0^\xi d\xi \left[2 |A_x^{(0)}|^2 A_x^{(1)} + (A_x^{(0)})^2 A_x^{*(1)} + i\sigma A_{x,\tau}^{(1)} + \frac{1}{2} A_{x,\tau\tau}^{(1)} \right. \\ &\quad \left. + \beta (A_x^{(0)} A_y^{(0)} A_x^{*(1)} + A_x^{(0)} A_y^{*(0)} A_y^{(1)} + |A_y^{(0)}|^2 A_x^{(1)}) \right] \\ A_y^{(1)} &= i \int_0^\xi d\xi \left[2 |A_y^{(0)}|^2 A_y^{(1)} + (A_y^{(0)})^2 A_y^{*(1)} - i\sigma A_{y,\tau}^{(1)} + \frac{1}{2} A_{y,\tau\tau}^{(1)} \right. \\ &\quad \left. + \beta (A_y^{(0)} A_x^{(0)} A_y^{*(1)} + A_y^{(0)} A_x^{*(0)} A_x^{(1)} + |A_x^{(0)}|^2 A_y^{(1)}) \right] \end{aligned} \quad (4.11)$$

Il est possible de réécrire la relation (4.9) comme une équation d'opérateur-matrice en mettant sous forme de vecteur ζ les amplitudes A_j et A_j^* (ici $j = x, y$):

$$\zeta^{(n)} = i \int_0^\xi d\xi \hat{P} \zeta^{(n)} \quad (4.12)$$

où \hat{P} est l'opérateur linéarisé défini comme suit:

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} 2 |A_x^{(0)}|^2 + |A_y^{(0)}|^2 + i\delta \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} & (A_x^{(0)})^2 & \beta A_x^{(0)} A_y^{*(0)} & \beta A_x^{(0)} A_y^{(0)} \\ -2 |A_x^{(0)}|^2 - |A_y^{(0)}|^2 - i\delta \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} & -(A_x^{*(0)})^2 & -\beta A_x^{*(0)} A_y^{(0)} & -\beta A_x^{*(0)} A_y^{*(0)} \\ 2 |A_y^{(0)}|^2 + |A_x^{(0)}|^2 - i\delta \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} & (A_y^{(0)})^2 & \beta A_y^{(0)} A_x^{*(0)} & \beta A_y^{(0)} A_x^{(0)} \\ -2 |A_y^{(0)}|^2 - |A_x^{(0)}|^2 + i\delta \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} & -(A_y^{*(0)})^2 & -\beta A_y^{*(0)} A_x^{(0)} & -\beta A_y^{*(0)} A_x^{*(0)} \end{bmatrix}$$

et

$$\zeta^{(n)} = \left(A_x^{(n)}, A_x^{*(n)}, A_y^{(n)}, A_y^{*(n)} \right)^T$$

Comme l'intérêt principal ici est l'évolution de l'amplitude du soliton vecteur initialement perturbé, le système d'équations 4.12 peut être résolu en utilisant la méthode d'approximations consécutives:

$${}^{(m)}\zeta^{(n)}(\xi, \tau) = i \int_0^\xi d\xi \hat{P} {}^{(m-1)}\zeta^{(n)}(\xi, \tau) \quad (4.13)$$

avec la perturbation initiale ${}^{(0)}\zeta^{(n)}$ donnée.

4.2.1 Étude de l'évolution

Dans cette section, considérant un signal imparfait (non-solitonique) envoyé à $t = 0$ et $z = 0$, l'évolution de la déformation de l'amplitude solitonique correspondante sera étudiée.

Soit,

$$\begin{aligned} A_x(\xi, \tau) &= \{ \eta(1 - \epsilon) \operatorname{sech}(\rho) + \epsilon \phi(\tau) \} \exp(\sigma_1) \\ A_y(\xi, \tau) &= \{ \eta(1 - \epsilon) \operatorname{sech}(\rho) + \epsilon \phi(\tau) \} \exp(\sigma_2) \end{aligned} \quad (4.14)$$

où

$$\begin{aligned} \rho &= \eta(1 + \beta)^{1/2} \tau \\ \sigma_1 &= \frac{i}{2} (\eta^2 + \beta\eta^2 + \delta^2) \xi - i\delta\tau \\ \sigma_2 &= \frac{i}{2} (\eta^2 + \beta\eta^2 + \delta^2) \xi + i\delta\tau. \end{aligned}$$

Pour reproduire un type d'onde semblable à celui qu'une source intermittente a tendance à générer, une supergaussienne sera prise pour la fonction $\phi(\tau)$ — ce qui

rendra la forme de l'impulsion plus rectangulaire. Dans le but d'éviter des termes séculaires, la forme de la perturbation sur le soliton est choisie de façon à ce que cette perturbation se déplace avec le soliton, soit que $\phi = \phi(\tau)$. Ainsi:

$$\phi(\tau) = \exp(-\tau^{2s}), \quad s = 1, 2, \dots \quad (4.15)$$

Les amplitudes $A_j^{(0)}$ et $A_j^{(1)}$ prennent les formes suivantes:

$$\begin{aligned} A_x^{(0)} &= \eta \operatorname{sech}(\rho) \exp(\sigma_1) \\ A_y^{(0)} &= \eta \operatorname{sech}(\rho) \exp(\sigma_2) \\ A_x^{(1)} &= (\phi - \eta \operatorname{sech}(\rho)) \exp(\sigma_1) \\ A_y^{(1)} &= (\phi - \eta \operatorname{sech}(\rho)) \exp(\sigma_2) \end{aligned} \quad (4.16)$$

et, en introduisant (4.14) dans (4.13):

$$\begin{aligned} A_x^{(1)} = i \int_0^\xi d\xi & \left[3\eta(1 + \beta) (\phi - \eta \operatorname{sech}(\rho)) \operatorname{sech}^2(\rho) - \eta \delta^2 \operatorname{sech}(\rho) \right. \\ & + \delta^2 \phi + \frac{1}{2} (\eta^3 (1 + \beta) \operatorname{sech}(\rho) (2 \operatorname{sech}^2(\rho) - 1)) \\ & \left. + \eta \delta^2 \operatorname{sech}(\rho) - \delta^2 \phi + \phi_{\tau\tau} \right] \exp(\sigma_1) \end{aligned}$$

Comme la phase n'est pas perturbée et que le terme à l'intérieur des crochets [] dans l'intégrale de la dernière équation est réel, l'argument $\bar{A}_j^{(1)} \exp(\sigma_k)$ peut être écrit comme:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{A}_x^{(1)} \exp(\sigma_1)) = i \int_0^\xi d\xi \operatorname{Re} \{F_1(\tau)\}$$

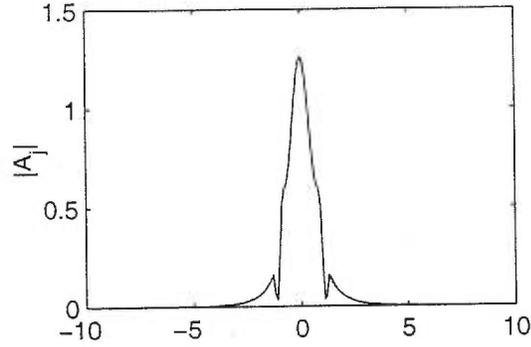
et, l'intégration donne:

$$\bar{A}_x(\tau) = 2 (\eta^2 + \beta \eta^2 + \delta^2)^{-1} \operatorname{Re} \{F_1(\tau)\} \quad (4.17)$$

de la même façon:

$$\bar{A}_y(\tau) = 2 (\eta^2 + \beta \eta^2 + \delta^2)^{-1} \operatorname{Re} \{F_2(\tau)\} \quad (4.18)$$

avec $F_1(\tau) = F_2(\tau)$.

FIG. 4.1 – *La forme théorique*

La figure 4.1 présente la forme de $\bar{A}_x(\tau)$. Avec la forme de perturbation qui a été choisie ici, $\mathcal{I}m\{F_j(\tau)\} = 0$. Ainsi, les phases internes des deux solitons ne changent pas avec τ , et donc le signal se propage sans glissement de fréquence additionnel dans les deux polarisations.

Dans un cas plus général $\mathcal{I}m\{F_j(\tau)\} \neq 0$, alors les phases internes des solitons varient avec τ .

$$\phi_j(\xi, \tau) = \text{atan} \left(\frac{\mathcal{I}m\{F_j(\xi, \tau)\}}{\mathcal{R}e\{F_j(\xi, \tau)\}} \right) \quad (4.19)$$

ce qui produit le glissement de fréquence ($\Delta\omega$) suivant:

$$\Delta\omega_j = -\frac{\partial}{\partial\tau}\phi_j = -\frac{\partial}{\partial\tau}\phi_j$$

ou plus explicitement:

$$\Delta\omega_j = -\frac{(\mathcal{R}e\{F_j(\xi, \tau)\}\mathcal{I}m\{F_{j,\tau}(\xi, \tau)\} - \mathcal{R}e\{F_{j,\tau}(\xi, \tau)\}\mathcal{I}m\{F_j(\xi, \tau)\})}{[\mathcal{R}e\{F_j(\xi, \tau)\}]^2 + [\mathcal{I}m\{F_j(\xi, \tau)\}]^2} \quad (4.20)$$

4.3 Deuxième méthode de perturbation

Dans cette section, l'évolution des paramètres solitoniques (amplitude, largeur et phase) sera analysée au moyen de la méthode de perturbation proposée par Anderson

[4]. Cette méthode utilise la variation du Lagrangien moyenné de Whitham [2]. Contrairement aux études qui ont été faites précédemment ([4], [9], [3], [13] et [16]), la fonction test, qui représente l'enveloppe de l'amplitude de l'impulsion, sera une supergaussienne d'ordre $s \geq 2$ au lieu d'une gaussienne simple. La méthode qui sera appliquée ici est essentiellement une procédure d'optimisation de Ritz. La fonctionnelle lagrangienne (eq. 4.4), qui correspond à la solution solitonique de l'équation différentielle 4.1, est calculée pour une fonction d'essai arbitraire. La moyenne sur le temps τ de cette valeur est donnée par:

$$\langle L(\xi) \rangle_\tau = \int \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(\xi, \tau) d\tau$$

Maintenant, en utilisant le principe variationnel pour chacun des paramètres $(p(\xi))$ de l'impulsion initiale,

$$\frac{\delta}{\delta p} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle L(\xi) \rangle_\tau d\xi = 0 \quad (4.21)$$

les équations d'évolution de ces paramètres sont obtenues.

4.3.1 Étude de l'évolution

Il est pratique de prendre pour la fonction d'essai la forme arbitraire suivante:

$$A_j(\xi, \tau) = \eta_j(\xi) \exp \left\{ - \left[\frac{\tau}{W_j(\xi)} \right]^{2s} \right\} \exp \{ i\phi_j(\xi) \tau^2 \} \quad (4.22)$$

où $\eta_j(\xi)$ est l'amplitude de l'impulsion, $W_j(\xi)$ est la largeur de l'impulsion et $\phi_j(\xi) \tau$ est le glissement de la fréquence.

La densité lagrangienne pour cette fonction d'essai est:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{i}{2} \exp \{ 2G_1 \} \left(\eta_1 \eta_{1,\xi}^* + \eta_1 \eta_1^* \sigma_{1,\xi}^* - \eta_1^* \eta_{1,\xi} - \eta_1^* \eta_1 \sigma_{1,\xi} \right) \\ & + \frac{i}{2} \exp \{ 2G_2 \} \left(\eta_2 \eta_{2,\xi}^* + \eta_2 \eta_2^* \sigma_{2,\xi}^* - \eta_2^* \eta_{2,\xi} - \eta_2^* \eta_2 \sigma_{2,\xi} \right) \\ & - \frac{i}{2} \delta \eta_1 \eta_1^* \exp \{ 2G_1 \} \left(\sigma_{1,\tau} - \sigma_{1,\tau}^* \right) + \frac{i}{2} \delta \eta_2 \eta_2^* \exp \{ 2G_2 \} \left(\sigma_{2,\tau} - \sigma_{2,\tau}^* \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \eta_1 \eta_1^* \exp \{2G_1\} \left(G_{1,\tau}^2 + \delta_{1,\tau} G_{1,\tau} + \delta_{1,\tau}^* G_{1,\tau} + \sigma_{1,\tau} \sigma_{1,\tau}^* \right) \\
& + \frac{2}{2} \eta_2 \eta_2^* \exp \{2G_2\} \left(G_{2,\tau}^2 + \delta_{2,\tau} G_{2,\tau} + \delta_{2,\tau}^* G_{2,\tau} + \sigma_{2,\tau} \sigma_{2,\tau}^* \right) \\
& - \frac{1}{2} |\eta_1|^4 \exp \{4G_1\} - \frac{1}{2} |\eta_2|^4 \exp \{4G_2\} \\
& - \beta |\eta_1|^2 |\eta_2|^2 \exp \{2G_1\} \exp \{2G_2\}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

où $G_j = - \left[\frac{\tau}{W_j(\xi)} \right]^{2s}$ et $\sigma_j = i \phi_j(\xi) \tau^2$.

En intégrant sur le temps τ , on obtient le Lagrangien moyenné sur le temps suivant:

$$\begin{aligned}
\langle L(\xi) \rangle_\tau &= \frac{i}{2} W_1 K_1 \left(\eta_1 \eta_{1,\xi}^* - \eta_1^* \eta_{1,\xi} \right) + \frac{i}{2} W_2 K_1 \left(\eta_2 \eta_{2,\xi}^* - \eta_2^* \eta_{2,\xi} \right) \\
& \quad + \frac{1}{4} W_1^3 K_4 |\eta_1|^2 \phi_{1,\xi} + \frac{1}{4} W_2^3 K_4 |\eta_2|^2 \phi_{2,\xi} + \frac{1}{2} |\eta_1|^2 \left\{ \frac{K_2}{W_1} + W_1^3 K_4 \phi_1^2 \right\} \\
& \quad + \frac{1}{2} |\eta_2|^2 \left\{ \frac{K_2}{W_2} + W_2^3 K_4 \phi_2^2 \right\} - \frac{W_1 K_5}{2} |\eta_1|^4 - \frac{W_2 K_5}{2} |\eta_2|^4 \\
& \quad - \beta \bar{W} K_1 |\eta_1|^2 |\eta_2|^2
\end{aligned} \tag{4.24}$$

où

$$\begin{aligned}
\bar{W} &\equiv \frac{W_1 W_2}{(W_1^{2s} + W_2^{2s})^{\frac{1}{2s}}}, \quad K_1 \equiv \frac{1}{s} 2^{-\frac{1}{2s}} \Gamma\left(\frac{1}{2s}\right) \\
K_2 &\equiv s 2^{\frac{1}{2s}} \Gamma\left(2 - \frac{1}{2s}\right), \quad K_3 \equiv 2 \cdot 2^{-\frac{1}{2s}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{2s}\right) \\
K_4 &\equiv \frac{4}{s} 2^{-\frac{3}{2s}} \Gamma\left(\frac{3}{2s}\right), \quad K_5 \equiv \frac{1}{s} 4^{-\frac{1}{2s}} \Gamma\left(\frac{1}{2s}\right)
\end{aligned}$$

L'évolution de l'impulsion est décrite par 6 équations différentielles ordinaires couplées venant des paramètres η , W_j et ϕ_j , avec $j = 1, 2$. Ces équations se déduisent à partir du principe variationnel réduit donné par l'éq. 4.21. Ainsi, à partir de la variation de:

- η_1 et η_1^* , on trouve:

$$\begin{aligned}
\frac{i}{2} K_1 \left[W_1 \eta_{1,\xi}^* + (W_1 \eta_1^*)_\xi \right] + \eta_1^* \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{K_2}{W_1} + K_4 W_1^3 \phi_1^2 \right) - |\eta_1|^2 K_5 W_1 \right. \\
\left. + \frac{1}{4} K_4 W_1^3 \phi_{1,\xi} - \beta |\eta_2|^2 K_1 \bar{W} \right\} = 0
\end{aligned} \tag{4.25}$$

$$-\frac{i}{2}K_1 [W_1\eta_{1,\xi} + (W_1\eta_1)_\xi] + \eta_1 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{K_2}{W_1} + K_4W_1^3\phi_1^2 \right) - |\eta_1|^2 K_5W_1 + \frac{1}{4}K_4W_1^3\phi_{1,\xi} - \beta |\eta_2|^2 K_1\bar{W} \right\} = 0 \quad (4.26)$$

- W_1 et ϕ_1 , on trouve:

$$\frac{i}{2}K_1 (\eta_1\eta_{1,\xi}^* - \eta_1^*\eta_{1,\xi}) + |\eta_1|^2 \left\{ -\frac{K_2}{2W_1^2} + \frac{3}{2}K_4W_1^2\phi_1^2 + \frac{3}{4}K_4W_1^2\phi_{1,\xi} - \frac{K_5}{2}|\eta_1|^2 - \beta K_1 |\eta_2|^2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial W_1} \right\} = 0 \quad (4.27)$$

$$|\eta_1|^2 W_1^3 K_4 \phi_1 - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{W_1^3 K_4}{4} |\eta_1|^2 \right) = 0 \quad (4.28)$$

Si on multiplie l'éq. 4.25 par η_1 et l'éq. 4.26 par η_1^* , on obtient les invariants suivants:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} W_1 |\eta_1|^2 = 0 \quad \frac{\partial}{\partial \xi} W_2 |\eta_2|^2 = 0 \quad (4.29)$$

ou tout simplement $W_j |\eta_j|^2 = K_j = \text{constante}$. Ces constantes du mouvement sont en fait les invariants bien connus suivants:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |A_j|^2 d\tau, \quad j = x, y \quad (4.30)$$

Si on additionne les équations η_1 (éq. 4.25) et η_1^* (éq. 4.26), on obtient:

$$\frac{i}{2}K_1 (\eta_1\eta_{1,\xi}^* - \eta_1^*\eta_{1,\xi}) = -|\eta_1|^2 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{K_2}{W_1^2} + K_4W_1^3\phi_1^2 \right) - |\eta_1|^2 K_5 + \frac{K_4}{4}W_1^3\phi_{1,\xi} - \beta |\eta_2|^2 K_1 \frac{\bar{W}}{W_1} \right\} \quad (4.31)$$

En appliquant la dérivée de l'équation 4.28 et en utilisant l'équation 4.29, la relation suivante est trouvée:

$$W_{1,\xi} = 2W_1\phi_1 \quad (4.32)$$

et si $W_1(\xi)$ est connue, l'évolution du glissement de fréquence est donnée par:

$$\phi_j(\xi) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} \ln [W_j(\xi)], \quad j = 1, 2 \quad (4.33)$$

En comparant l'équation 4.27 et 4.31, on trouve:

$$\frac{K_2}{\bar{W}_1^2} - K_4 W_1^2 \phi_1^2 - \frac{K_4}{2} W_1^2 \phi_{1,\xi} - \frac{K_5}{2} |\eta_1|^2 - \beta |\eta_2|^2 K_1 \frac{\bar{W}}{W_1} + \beta K_1 |\eta_2|^2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial W_1} = 0 \quad (4.34)$$

La dérivée de l'équation 4.32 est calculée pour pouvoir éliminer les termes avec la phase ϕ_j dans l'équation 4.34:

$$\frac{d^2 W_1}{d\xi^2} = 2 \left(\frac{dW_1}{d\xi} \phi_1 + W_1 \frac{d\phi_1}{d\xi} \right) \quad (4.35)$$

avec cette dernière relation et l'équation 4.32, l'équation d'évolution de la largeur de l'impulsion est trouvée:

$$\frac{d^2 W_1}{d\xi^2} = 4 \frac{K_2}{K_4 W_1^3} - \frac{2K_5 E_1}{K_1 K_4 W_1^2} - \frac{4\beta E_2 \bar{W}}{K_4 W_2 W_1^2} + \frac{4\beta E_2}{K_4 W_2 W_1} \frac{\partial \bar{W}}{\partial W_1} \quad (4.36)$$

$$\frac{d^2 W_2}{d\xi^2} = 4 \frac{K_2}{K_4 W_2^3} - \frac{2K_5 E_1}{K_1 K_4 W_2^2} - \frac{4\beta E_2 \bar{W}}{K_4 W_1 W_2^2} + \frac{4\beta E_2}{K_4 W_2 W_1} \frac{\partial \bar{W}}{\partial W_2} \quad (4.37)$$

où l'équation 4.29 a été utilisée pour définir les invariants:

$$E_j = K_1 W_j |\eta_j|^2 \quad (4.38)$$

L'amplitude complexe η_j peut être exprimée sous la forme $\eta_j = A_j(\xi) e^{i\Phi_j(\xi)}$. Ainsi, on trouve que la valeur absolue de l'amplitude réelle A_j est déterminée par les constantes E_j . La valeur Φ_j est trouvée à partir des équations 4.31 et 4.34:

$$\frac{d\Phi_1}{d\xi} = -\frac{K_2}{K_1 W_1^2} + \frac{5K_5 E_1}{4K_1^2 W_1} + \frac{2\beta E_2 \bar{W}}{3K_1 W_1 W_2} - \frac{\beta E_2}{2K_1 W_2} \frac{\partial \bar{W}}{\partial W_1} \quad (4.39)$$

$$\frac{d\Phi_2}{d\xi} = -\frac{K_2}{K_1 W_2^2} + \frac{5K_5 E_2}{4K_1^2 W_2} + \frac{2\beta E_1 \bar{W}}{3K_1 W_1 W_2} - \frac{\beta E_1}{2K_1 W_1} \frac{\partial \bar{W}}{\partial W_2} \quad (4.40)$$

Le système d'équations constitué des équations 4.33, 4.36, 4.37, 4.39 et 4.40 représente un ensemble complet d'équations d'évolution pour la fonction d'essai 4.22. Dans l'équation 4.36, le terme $\frac{\partial \bar{W}}{\partial W_1}$ équivaut à:

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial W_1} = W_2 \left(W_1^{2s} + W_2^{2s} \right)^{-\frac{1}{2s}} \left\{ 1 - W_1^{2s} \left(W_1^{2s} + W_2^{2s} \right)^{-1} \right\}$$

Pour résoudre le système composé des équations 4.36 et 4.37, en premier, il faut trouver le point critique $W_{j,0}$ défini par:

$$K_2 - \frac{K_5 W_1 E_1}{2K_1} - \frac{W_1 E_2 \bar{W}}{W_2} + \frac{\beta W_1^2 E_2}{W_2} \frac{\partial \bar{W}}{\partial W_1} = 0$$

$$K_2 - \frac{K_5 W_2 E_2}{2K_1} - \frac{W_2 E_1 \bar{W}}{W_1} + \frac{\beta W_2^2 E_1}{W_1} \frac{\partial \bar{W}}{\partial W_2} = 0$$

ensuite, le système est linéarisé autour de ce point critique. Dans le cas général, quand $W_1 \neq W_2$, les derniers termes des équations du système (éq. 4.36 et 4.37) deviennent difficiles à manipuler mathématiquement. L'analyse complète ne sera donc pas présentée ici mais deux cas limites seront explorés: quand les largeurs dans les deux directions de polarisation ont la relation initiale $W_1 \ll W_2$ ou $W_2 \ll W_1$, et quand $W_1 \approx W_2$ initialement.

Quand $W_1 \approx W_2$, le système linéarisé (éq. 4.36 et 4.37) prend la forme:

$$\frac{d^2 \Delta_1}{d\xi^2} = A_1(W_{10}, W_{20}) \Delta_1 + B_1(W_{10}, W_{20}) \Delta_2 \quad (4.41)$$

$$\frac{d^2 \Delta_2}{d\xi^2} = A_2(W_{10}, W_{20}) \Delta_2 + B_2(W_{10}, W_{20}) \Delta_1 \quad (4.42)$$

où $W_j = W_j (1 + \Delta_j)$ et

$$A_1 = -\frac{12K_2}{K_4 W_{10}^3} + \frac{4K_5 E_1}{K_1 K_4 W_{10}^2} + \frac{6\beta E_2 \bar{W}_0}{K_4 W_{20} W_{10}^2}$$

$$-\frac{2\beta E_2}{K_4} \left\{ \frac{3}{W_{10}} (W_{10}^{2s} + W_{20}^{2s})^{-\frac{1}{2s}} + 2W_{10}^{2s-1} (W_{10}^{2s} + W_{20}^{2s})^{-(1+\frac{1}{2s})} \left(s - \frac{3}{2}\right) \right\}$$

$$B_1 = \frac{2\beta E_2 \bar{W}_0}{K_4 W_{10}^2 W_{20}}$$

$$-\frac{2\beta E_2}{K_4} \left\{ \frac{1}{W_{10}} (W_{10}^{2s} + W_{20}^{2s})^{-\frac{1}{2s}} + 2W_{10}^{2s-1} (W_{10}^{2s} + W_{20}^{2s})^{-(1+\frac{1}{2s})} \left(s + \frac{1}{2}\right) \right\}$$

Les expressions pour A_2, B_2 sont trouvées en inversant les indices 1 \Leftrightarrow 2. Le système d'équations 4.41 et 4.42 possède les valeurs propres λ_k suivantes:

$$\lambda_{1,2} = \pm \left\{ \frac{A_1 + B_2}{2} + \left\{ \frac{(A_1 + B_2)^2}{4} + B_1 A_2 - A_1 B_2 \right\}^{1/2} \right\}^{1/2} \quad (4.43)$$

$$\lambda_{3,4} = \pm \left\{ \frac{A_1 + B_2}{2} - \left\{ \frac{(A_1 + B_2)^2}{4} + B_1 A_2 - A_1 B_2 \right\}^{1/2} \right\}^{1/2} \quad (4.44)$$

Par la symétrie des équations 4.41 et 4.42, quand $A_1 = B_2$ et $B_1 = A_2$, la valeur caractéristique λ devient simplement:

$$\lambda_{1,2} = \{A_1 \pm B_1\}^{1/2}, \quad \lambda_{3,4} = -\{A_1 \pm B_1\}^{1/2} \quad (4.45)$$

Ce sont donc des solutions qui augmenteront toujours. Le théorème de Routh-Herwitz prédit ce résultat aussi.

Les coefficients A_j, B_j dépendent de s , variable qui représente l'ordre de la super-gaussienne. L'évolution des largeurs W_j dépend fortement des énergies E_j . Il est à noter que le paramètre de différence de vitesses de groupe δ n'apparaît aucunement dans les équations finales.

Dans le cas d'une impulsion seule dans un des axes de polarisation, quand $W_1 \ll W_2$ ou $W_2 \ll W_1$, la largeur de l'impulsion oscille de façon périodique si:

$$\frac{3K_2}{W_{j0}} > \frac{K_5 E_j}{K_1} \quad (4.46)$$

ou plus simplement, si l'amplitude et la LMH de l'une des composantes de polarisation de l'impulsion sont inférieures à celles de l'autre composante.

Chapitre 5

Comparaison entre les résultats théoriques et numériques

5.1 Avant-propos

Les deux derniers chapitres ont présenté les résultats des recherches numériques et théoriques respectivement. Dans ce chapitre, ces résultats seront comparés. Les résultats expérimentaux décrits dans [20] permettront de voir si les prédictions numériques et théoriques correspondent bien avec la réalité.

Le chapitre se décompose en deux sections: dans une section, la comparaison des résultats quand les impulsions initiales sont en forme de sécante hyperbolique perturbée et dans l'autre quand les impulsions initiales sont en forme de supergaussienne. Comme le cas où les impulsions initiales sont en forme de sécante hyperbolique a déjà été étudié dans [14], [5] et [7], il ne sera pas abordé ici.

5.2 Deux sécantes hyperboliques perturbées

Dans cette section, le cas de deux impulsions initiales en forme de sécantes hyperboliques sera étudié. Les résultats de la section 3.3.3 et de la section 4.2.1 seront révisés.

La théorie prédit que le contour de l'impulsion initiale va se déformer de l'enveloppe décrite par l'équation 4.14 en l'enveloppe décrite par les équations 4.17 et 4.18. Les simulations numériques donnent, pour une forme initiale dessinée par la figure 3.3, une forme résultante dessinée par le profil pointillé de la figure 3.21. La prochaine figure (5.1) compare graphiquement ces deux résultats.

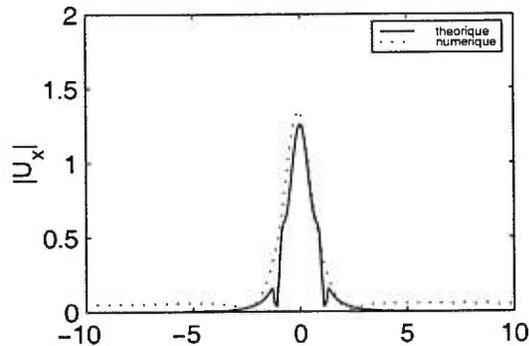


FIG. 5.1 – Comparaison entre la forme théorique et la forme numérique

Ces deux formes possèdent plusieurs éléments communs. Notamment, la largeur à la mi-hauteur (LMH) d'environ 3, un maximum d'environ 1.4 et les deux inflexions près des points -1.0 et 1.0 . Par contre, ces deux graphiques ne coïncident pas parfaitement. Cette différence entre les deux formes peut s'expliquer par l'erreur engendrée par la méthode numérique ou encore par les approximations utilisées lors du développement analytique. Malheureusement, il n'y a pas de résultats expérimentaux dans [20] avec lesquels comparer pour pouvoir déterminer si c'est la méthode numérique ou la méthode théorique qui fait défaut.

Si la dépendance de l'équation 4.17 ou 4.18 sur ξ est examinée, on conclut que celle-ci se résume en un terme d'oscillation ($\exp(\sigma_k)$). Donc, la théorie prédit une forme qui se propagera sans autre déformation qu'une petite oscillation. Ceci concorde bien avec les résultats numériques, soient les figures 3.20 et 3.22, où il y a aussi une oscillation mais pas de changement majeur de la forme.

5.3 Deux supergaussiennes

Dans cette section, le cas de deux formes initiales supergaussiennes sera traité. Les résultats de la section 3.3.2 et de la section 4.3.1 seront révisés.

Selon la théorie, si les largeurs temporelles des deux composantes de polarisation de l'impulsion sont équivalentes, alors l'énergie de l'impulsion va se disperser dans la fibre. Aucune impulsion avec des propriétés solitoniques n'apparaîtra. Les équations 4.38, 4.41 et 4.42 prédisent cet agrandissement de la largeur temporelle et cette diminution de l'amplitude. S'il y a une différence entre les largeurs temporelles des deux composantes de polarisation de l'impulsion, une impulsion à propriétés solitoniques peut se former si la différence d'amplitudes entre les deux composantes de polarisation satisfait à l'équation 4.46.

Les simulations numériques donnent des résultats différents. Le seul cas dans lequel une impulsion à propriétés solitoniques ne peut pas se former est lorsque les puissances initiales pour les deux composantes de polarisation ne satisfont pas à la condition 3.13, donc que les puissances sont trop faibles. Autrement, le contour initialement supergaussien des composantes de l'impulsion se déforme en un contour solitonique, proche de la forme de la sécante hyperbolique. La figure A.5 de l'Appendice A montre graphiquement ce phénomène de transformation.

Les résultats théoriques et numériques sont en désaccord. Selon les expériences dans [20], une impulsion dont les composantes de polarisation possèdent initialement des contours de forme gaussienne permettent des solitons même dans le cas où les deux composantes possèdent des largeurs temporelles similaires. L'analyse théorique ne peut pas prédire une déformation aussi drastique de la forme de l'impulsion que celle d'une supergaussienne qui se transforme en une sécante hyperbolique. L'analyse théorique est limitée par son utilisation d'une méthode perturbative qui considère que les changements de la forme initiale sont petits. La méthode numérique par contre, n'a pas ce type de restriction. C'est donc pourquoi les conclusions tirées de la partie théorique de cette thèse ne concordent pas avec les conclusions de la partie numérique.

En se basant uniquement sur les résultats numériques, il peut être conclu que si la puissance initiale est suffisante, une impulsion aux propriétés solitoniques se formera et se propagera dans la fibre, même si le contour des composantes de polarisation de l'impulsion n'est pas identique à la forme finale. De plus, seulement une des deux composantes peut avoir la puissance minimale requise pour créer une impulsion aux propriétés solitoniques.

Conclusion

En partant des équations de Maxwell, et en utilisant les propriétés diélectriques du milieu de la fibre, nous avons établi le système d'équations différentielles décrivant l'évolution des enveloppes des composantes de polarisation d'une impulsion laser. Ensuite, en utilisant une méthode numérique ce système a été intégré pour trois types de contours initiaux différents: la sécante hyperbolique, la supergaussienne d'ordre 8 et la sécante hyperbolique perturbée par une supergaussienne.

Les résultats de ces simulations ont montré que si la puissance initiale envoyée dans chacune des composantes de polarisation est suffisante, le système transforme le contour de l'impulsion initiale en une enveloppe qui ne se déforme pas lors de l'évolution à l'exception d'une petite oscillation. Un phénomène bien intéressant arrive quand seulement une des composantes de polarisation possède la puissance minimale requise. La composante de polarisation à la puissance insuffisante se fait "attraper" par la composante dans l'autre axe. L'énergie de la composante à la puissance insuffisante ne se dissipe pas dans la fibre, au contraire, elle reste prise dans une forme qui se propage sans grande déformation. L'amplitude de cette nouvelle impulsion dépend, entre autres, de la forme initiale de l'impulsion envoyée. À l'exception des cas où toute l'énergie envoyée dans la fibre se dissipe, les résultats numériques présentent une oscillation de l'amplitude des formes solitoniques.

Dans le chapitre suivant, deux méthodes analytiques pour étudier le comportement

du système d'équations ont été développées et utilisées sur deux formes différentes d'enveloppe initiale. Les deux formes d'essai étaient une supergaussienne d'ordre arbitraire et une sécante hyperbolique perturbée par une supergaussienne. Pour la première forme initiale, une impulsion à propriété solitonique ne s'obtient que s'il y a une différence dans la largeur temporelle et dans l'amplitude entre les deux composantes de polarisation du signal envoyé, et si cette différence satisfait l'équation 4.46. Pour la deuxième forme, une équation qui dépendait de ξ seulement par un terme d'oscillation a été obtenue. Donc, la forme décrite par cette équation se propage avec comme déformation une oscillation de l'amplitude selon ξ .

Dans le dernier chapitre, les résultats numériques et théoriques ont été comparés. Cette étude a montré que pour le cas de la sécante hyperbolique perturbée les deux méthodes prédisent des solutions similaires pour l'évolution de l'impulsion initiale. Pour le cas de la supergaussienne, les deux méthodes ne s'accordent pas sur les solutions pour l'évolution de l'impulsion initiale. En se basant sur les résultats expérimentaux décrits dans [20], on trouve que la méthode analytique utilisée pour cette forme initiale ne produit pas les résultats attendus.

Si la puissance envoyée dans la fibre est suffisante, une impulsion avec des propriétés solitoniques se forme même si le contour initial des composantes de polarisation de cette impulsion ne correspond pas à cette forme solitonique finale. De plus, seulement une des deux composantes de polarisation doit posséder une puissance supérieure à la puissance seuil. Ces deux propriétés très intéressantes permettront sûrement le développement d'applications relatives à la télécommunication.

Les fibres optiques possèdent plusieurs propriétés recherchées et elles occupent maintenant une place majeure dans le domaine de la télécommunication. Pourtant, il y a encore plusieurs phénomènes incompris dans le fonctionnement du guidage d'impulsion laser par la fibre optique. Il est donc entendu que la recherche dans ce domaine doit être approfondie. C'est donc dans le but de cet approfondissement que ce mémoire

a été rédigé.

Bibliographie

- [1] **Govind P. Agrawal**, *Nonlinear Fiber Optics 2nd edition*, Quantum Electronics Principles and Applications, Harcourt Brace Jovanovich, (1993)
- [2] **G. B. Whitham**, *Linear and Nonlinear Waves*, J. Wiley (1974), New York
- [3] **Tetsuji Veda, W. L. Kath**, *Dynamics of coupled solitons in nonlinear optical fibers*, Phys. Rev. A, **42**, (1990), p. 563-571
- [4] **D. Anderson**, *Variational Approach to Nonlinear Pulse Propagation in Optical Fibers*, Phys. Rev. A, **27**, (1983), p. 3135-3145
- [5] **M. Wadati, T. Iizuka, M. Hisakadu**, *A Coupled Nonlinear Schrödinger Equation and Optical Solitons*, J. Phys. Soc. Japan, **61**, (1992), p. 2241-2245
- [6] **S. V. Manakov**, *On the Theory of Two-dimensional Stationary Self Focussing of Electromagnetic Waves*, Sov. Phys. JETP, **38**, (1974), p. 248
- [7] **C. R. Menyuk**, *Stability of Solitons in Birefringent Optical Fibers. II. Arbitrary Amplitudes*, J. Opt. Soc. Am., **85**, (1988), p. 392
- [8] **C. R. Menyuk**, *Nonlinear Pulse Propagation in Birefringent Optical Fibers*, Optical Fibers, IEEE J. Quant. El., **QE-23**, (1987), p. 174-176
- [9] **A. Bondenson, M. Lisak, D. Anderson**, *Soliton Perturbations: A Variational Principle for the Soliton Parameters*, Physica Scripta, **20**, (1979), p. 479-485
- [10] **A. Ankiewicz, N. Akhmediev, G. P. Peng, P. L. Chu**, *Limitations of the Variational Approach in Soliton Propagation in Nonlinear Couplers*, Optics Comm., **103**, (1993), p. 410-416

- [11] J. P. Keener, D.W. McLaughlin, *Soliton Under Perturbations*, Phys. Rev. A, **16**, (1977), p. 777-790
- [12] J. P. Keener, D.W. McLaughlin, *A Green Function for a Linear Equation Associated with Solitons*, J. Mat. Phys., **18**, (1977), p. 2008-2013
- [13] D. J. Kamp, B. A. Malomed, R. S. Tagal, *Internal Dynamics of a Vector Soliton in a Nonlinear Optical Fiber*, Phys. Rev. E, **18**, (1993), p. 3049-3053
- [14] B. A. Malomed, *Polarisation Dynamics and Interaction of Solitons in a Birefringent Optical Fiber*, Phys. Rev. A, **43**, (1991), p.410-423
- [15] V. I. Karpman, *Soliton Evolution in the Presence of Perturbation*, Physica Scripta , **20**, (1979), p. 462-478
- [16] B. A. Malomed, R. S. Tagal, *Internal Vibrations of a Vector Soliton in the Coupled Nonlinear Schrödinger Equations*, Phys. Rev. E, **58**, (1998), p. 2564-2575
- [17] J. M. Sanz-Serna, J. G. Verwer, *Conservative and Nonconservative Schemes for the Solution of the Nonlinear Schrödinger Equation*, IMA J. Numer. Anal., **6**, (1986), p. 25-42
- [18] J. A. C. Weideman, B. M. Herbst, *Split-Step Methods for the Solution of the Nonlinear Schrödinger Equation*, SIAM J. Numer. Anal., **23**, (1986), p. 485-505
- [19] G. A. Sod, *Numerical Methods in Fluid Dynamics*, (1985)
- [20] J. U. Kang et al., *One-Dimensional Spatial Solitons in AlGaAs Waveguides*,
- [21] *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, (1988-1992)
- [22] V.E. Zakharov, A.B. Shabat, *Exact Theory of Two-Dimensional Self-Focusing and One-Dimensional Self-Modulation of Waves in Nonlinear Media*, Sov. Phys. JETP, **34**, (1972), p. 62
- [23] K. J. Blow, N. J. Doran, David Wood, *Polarization Instabilities for Solitons in Birefringent Fibers*, Opt. Lett., **12**, (1987), p. 204-206

Annexe A

Graphiques en 3 dimensions

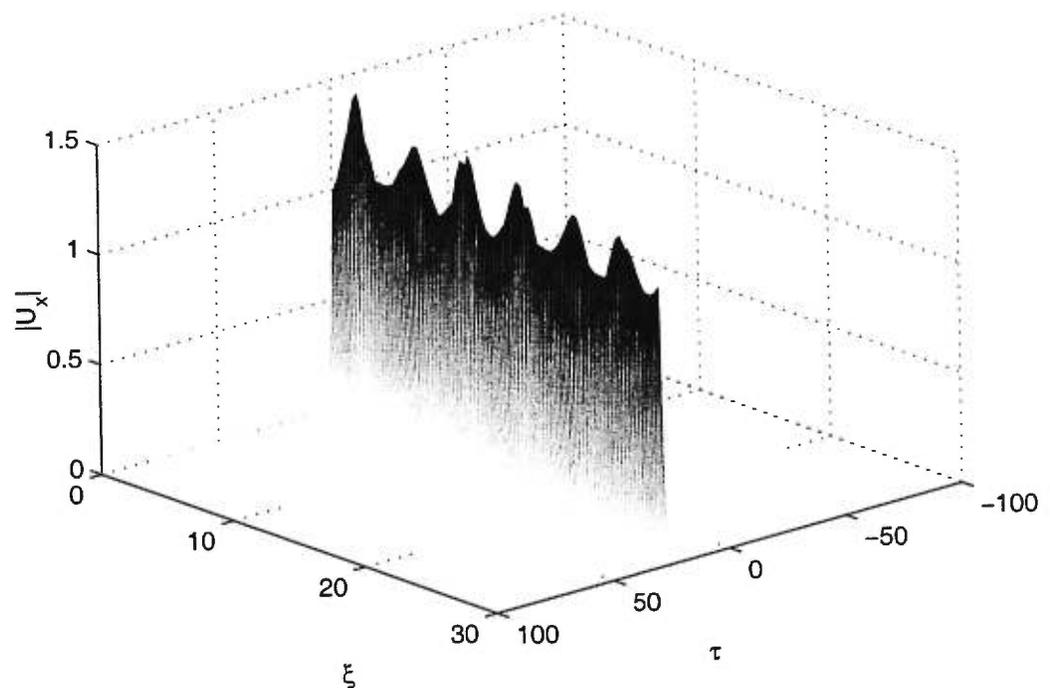


FIG. A.1 – *Évolution d'une forme solitonique - axe rapide*

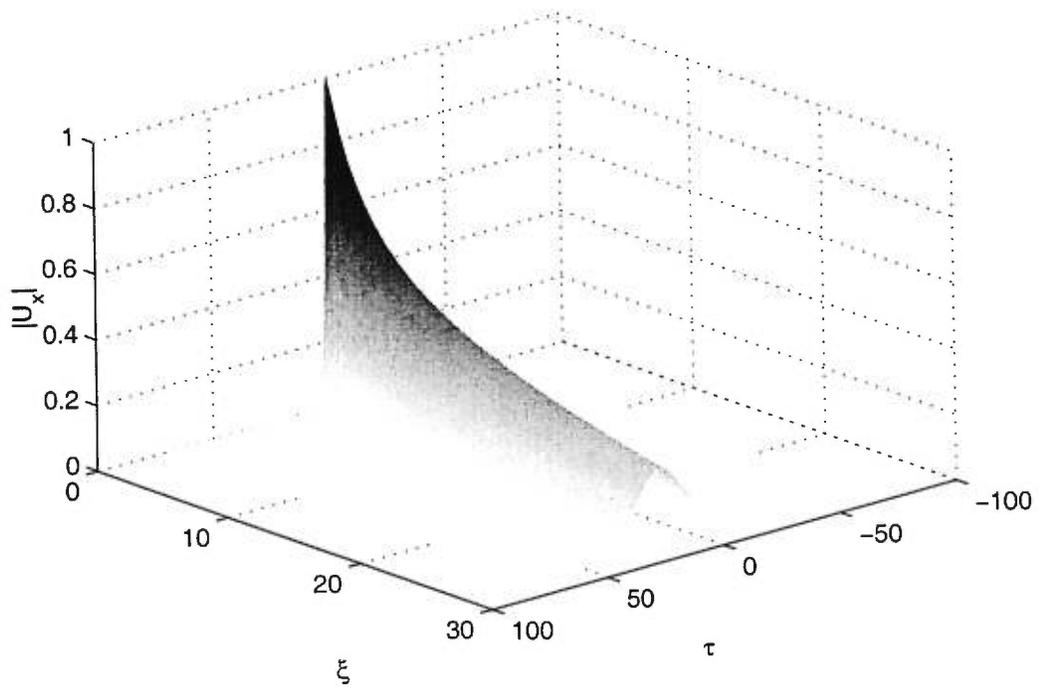


FIG. A.2 - Évolution d'une forme solitonique à puissance faible- axe rapide

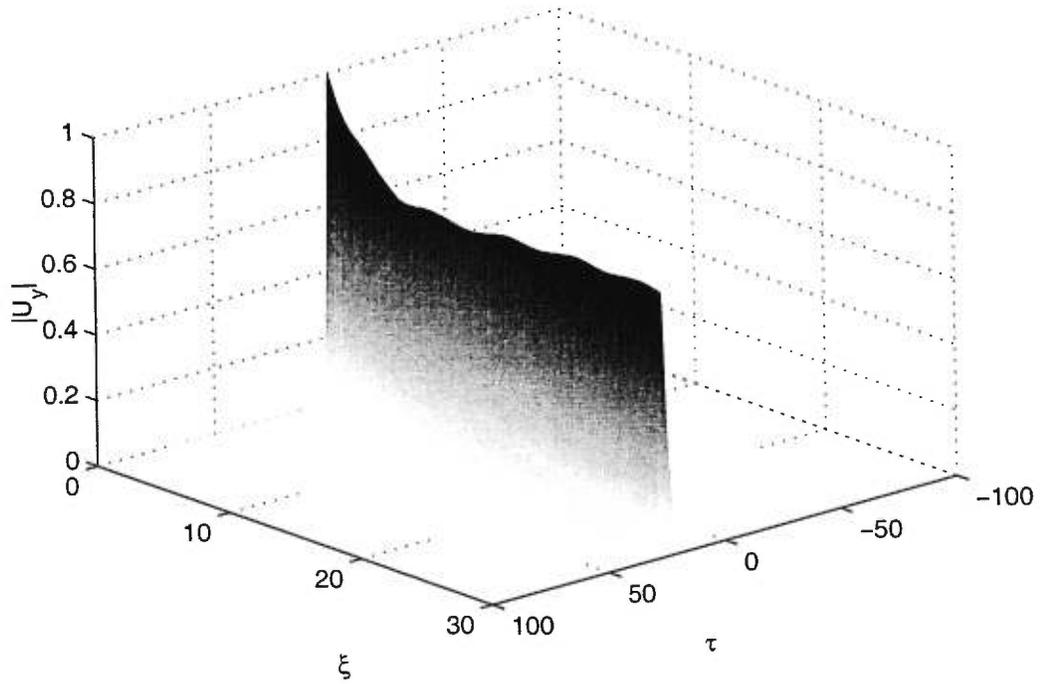


FIG. A.3 - Évolution d'une forme solitonique à puissance faible - axe lent

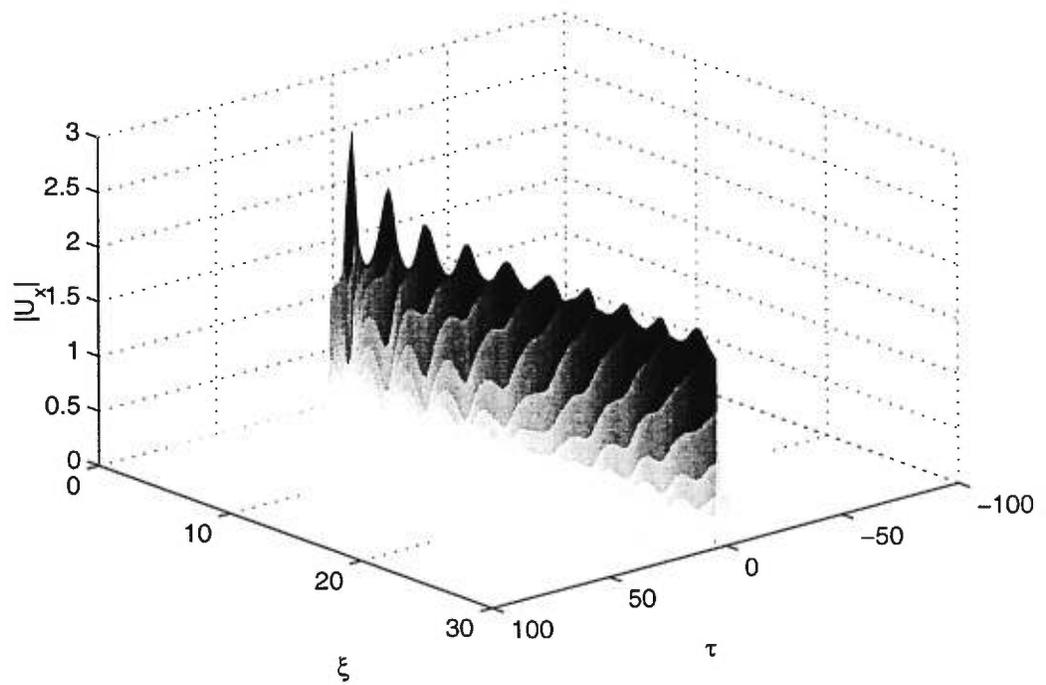


FIG. A.4 – Évolution d'une forme suppergaussienne - axe rapide

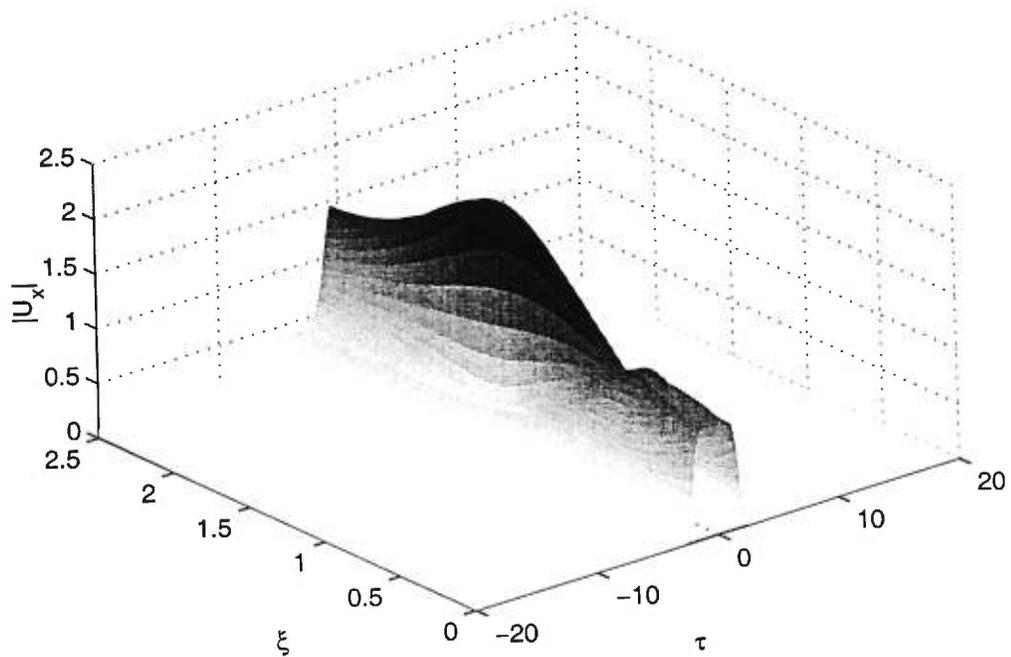


FIG. A.5 – Dessin précis de la déformation de la supergaussienne en soliton

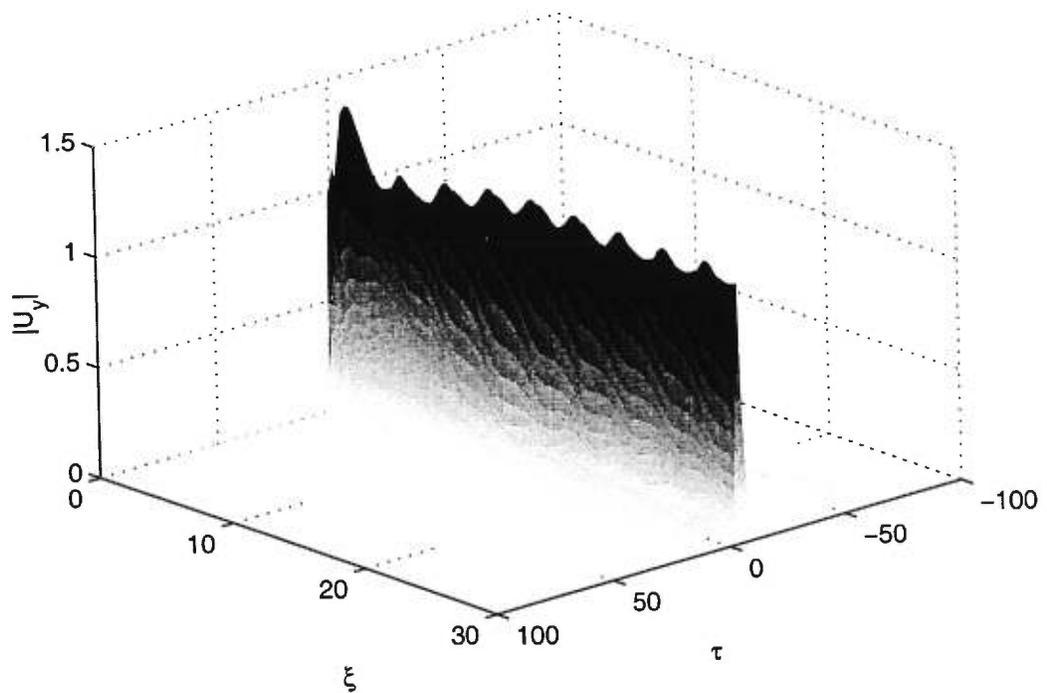


FIG. A.6 – Évolution d'une forme supergaussienne à puissance faible - axe lent

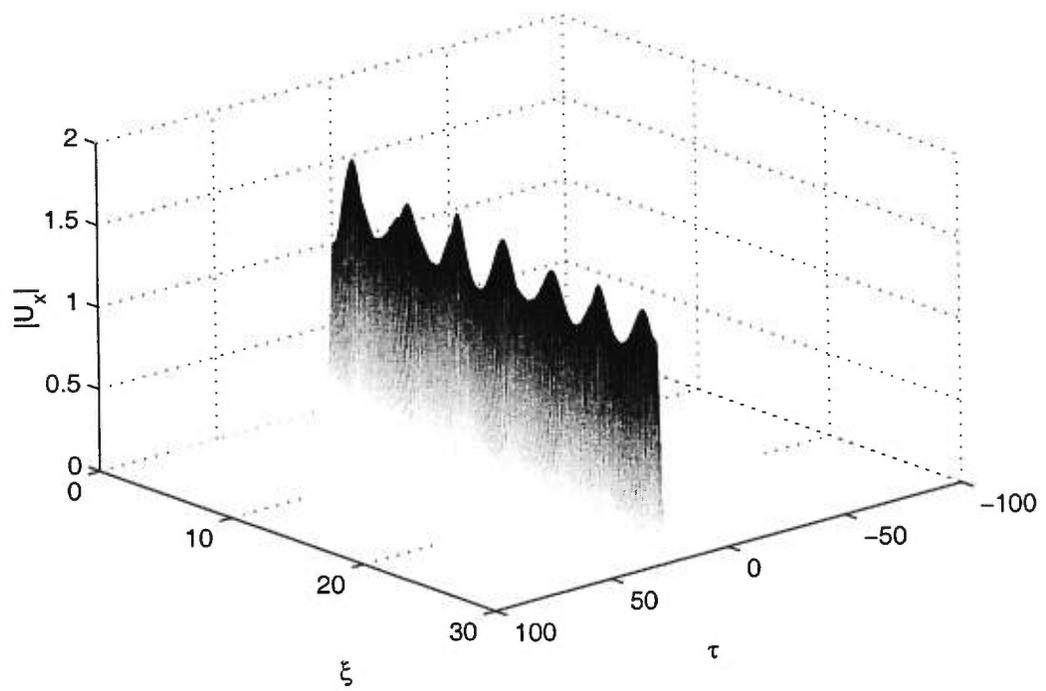


FIG. A.7 - Évolution d'une forme solitonique perturbée - axe rapide

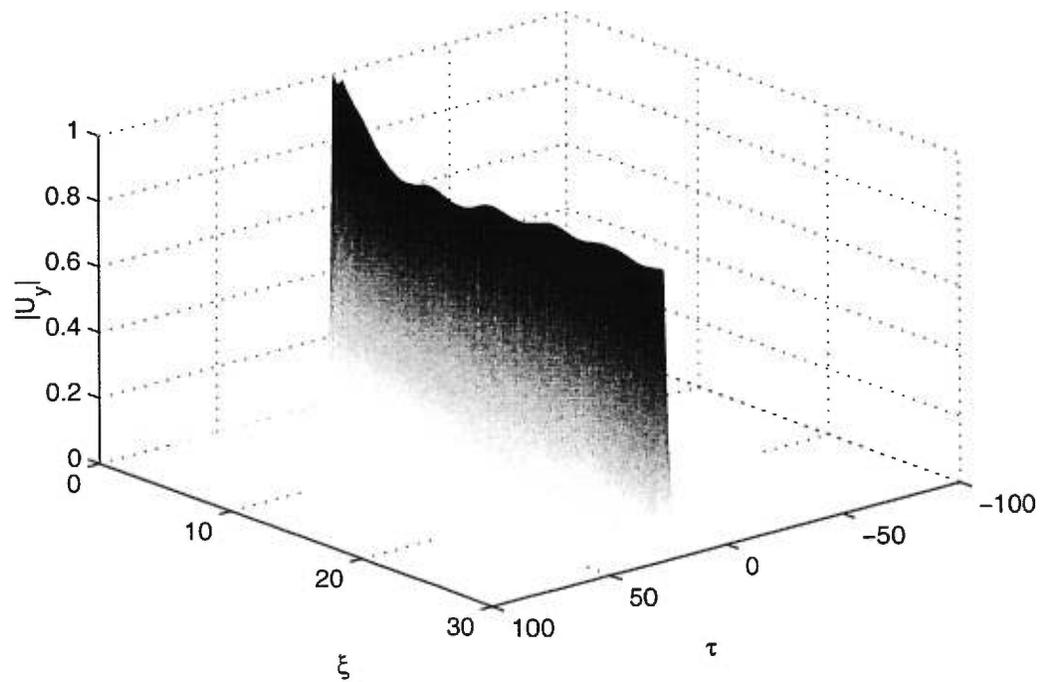


FIG. A.8 – Évolution d'une forme solitonique perturbée à puissance faible - axe lent