Université de Montréal

Précession de la polarisation de la lumière dans le cadre de la gravitation conforme avec métrique de type Kerr

Par :
André Allan Méthot
Département de physique
Faculté des Arts et des Sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en physique

Novembre 2000

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé :

"Précession de la polarisation de la lumière dans le cadre de la gravitation conforme avec métrique de type Kerr"

présenté par :

André Allan Méthot

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

David London

(président rapporteur)

Manu Paranjape

(directeur de recherche)

Richard Mackenzie

(membre du jury)

Sommaire

La théorie gravitationnelle de Weyl, la gravitation conforme, connaît un second souffle depuis la fin des années 1980. En effet, les difficultés à expliquer les récents résultats galactiques et cosmologiques rencontrées par la relativité générale ont poussé plusieurs chercheurs à examiner et réexaminer des théories gravitationnelles alternatives. La gravitation conforme est justement l'une des candidates à remplacer la relativité générale, considérée pour sa simplicité et sa beauté.

Dans ce mémoire, nous tenterons d'établir une nouvelle prédiction de la gravitation conforme afin d'évaluer sa viabilité. Nous regarderons les effets dus à la rotation d'une source gravitationnelle sur la précession de la polarisation de la lumière. Alors que la lumière s'approche, est déviée de sa trajectoire initiale, puis s'éloigne à nouveau, la polarisation est affectée par la géométrie locale de l'espace-temps près de la source. Nous étudierons la précession de la polarisation au travers le transport parallèle d'un vecteur le long d'une géodésique.

La gravitation conforme ajoute un nouveau terme gravitationnel à l'ancien potentiel Newtonien. Nous espérons que ce nouveau terme produise un effet perturbatif aux prédictions de la relativité générale qui soit détectable.

Les calculs sont faits dans la limite perturbative où le moment cinétique de la

source gravitationnelle est petit et dans la limite d'un champ gravitationnel faible, donc à grande distance entre la source et la lumière.

Les résultats obtenus montrent en effet que le nouveau terme gravitationnel agit sur la précession de la polarisation de la lumière. Il ne restera plus qu'à l'expérience à confirmer ou infirmer cette prédiction, donnant ainsi plus grande viabilité à la gravitation conforme ou la reléguant à l'oubli.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Lors de cette introduction, nous verrons ce qui nous amène à étudier la précession de la polarisation de la lumière dans le cadre de la gravitation conforme avec une métrique de type Kerr. Depuis environ une décennie, quelques auteurs (voir[1, 2] ainsi que leurs références) ont entrepris une étude de la gravitation conforme. Certains demanderont : “Pourquoi devons-nous étudier la gravitation conforme ?” Avant de répondre à cette question, il faut d'abord examiner de plus près la théorie à laquelle cette dernière se veut une alternative. En effet, il existe une théorie de la gravitation grandement acceptée par la communauté scientifique appelée la relativité générale[3, 4]. Présentée par Einstein en 1916 et ayant une précision remarquable pour décrire les phénomènes gravitationnels de l'ordre du système solaire, la relativité générale grandit rapidement en popularité. De nos jours, il est irréfutable qu'une théorie classique décrivant la gravité se doit d'être covariante et relativiste (invariante sous les transformations de Lorentz locales). Elle se doit aussi de présenter la gravité comme une courbure de l'espace-temps, donc être une théorie basée sur l'usage de la métrique afin de décrire les phénomènes gravitationnels. Quant à la relativité générale, elle est maintenant reconnue comme la théorie universelle de la gravitation.

La relativité générale est issue de trois suppositions. Premièrement, la validité du principe d'équivalence, principe fondé sur l'égalité entre la masse inertielle et la masse gravitationnelle. Le principe d'équivalence force la théorie à être une théorie covariante, ce qui implique que l'action doit être un scalaire. Deuxièmement, on prend pour acquis que nous devons retrouver le potentiel Newtonien à grande échelle. Troisièmement, en imposant que les équations du mouvement doivent être au maximum de deuxième ordre dans les dérivés de la métrique, on obtient l'action de Einstein-Hilbert :

$$I_E = -\frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{-g}\,R^{\alpha}_{\alpha} \tag{1.1}$$

où $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci. À partir de cette équation nous prendrons les unités tel que $G = c = 1$. Dans ce mémoire, nous utiliserons la convention que les indices latins vont de 1 à 3 et les indices grecques de 0 à 3 ainsi que la métrique de Minkowski ayant une signature $-+++$. Nous utiliserons aussi la convention que les indices répétés sont sommés. De cette action, nous pouvons dériver la métrique pour une source statique et sphériquement symmétrique, appelée la métrique de Schwarzschild[3] :

$$ds^2 = -B(r)dt^2 + \frac{1}{B(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{1.2}$$

où $B(r) = 1 - 2m/r$, r étant le rayon, t le temps et Ω comprend les angles des coordonées sphériques, ainsi que la métrique pour une source ayant une symétrie cylindrique (comme une sphère en rotation autour d'un axe fixe), appelée la métrique de Kerr tel que donnée par Carter[5] :

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2}(dt - asin^2\theta d\phi)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{sin^2\theta}{\rho^2}(adt - (r^2+a^2)d\phi)^2 \tag{1.3}$$

où $\Delta = r^2 - 2mr + a^2$ et $\rho^2 = r^2 + a^2cos^2\theta$, r étant le rayon, θ l'angle polaire, ϕ l'angle autour de l'axe de symétrie, t le temps et a est le moment cinétique de la source. Nous voyons que (1.3) devient (1.2) dans la limte $a \to 0$. C'est à l'aide de ces deux métriques qu'il nous est possible de trouver les résultats précis de la relativité générale (par exemple l'orbite de Mercure, la courbure de la trajectoire de la lumière par le soleil, etc). Toutefois, le potentiel que Newton a trouvé afin de décrire le système solaire et qui se retrouve dans la relativité générale ne donne plus d'aussi bonnes prédictions une fois étendu aux phénomènes galactiques et extra-galactiques si nous supposons que la seule matière présente est celle que nous voyons (comme les courbes de rotation des galaxies, la courbure de la trajectoire de la lumière par une galaxie, etc).

En effet, la théorie prédit que les vitesses de rotation des étoiles en orbite autour du centre de la galaxie diminuent, selon la loi de Keper, en fonction du rayon après avoir atteint un maximum alors que les observations montrent clairement qu'elles restent, à peu près, constantes suite à ce même maximum. Afin de pallier à cette énorme différence entre théorie et observation, la proposition fut lancée que les galaxies pourraient être composées principalement de matière qui nous est invisible (matière sombre), et qui de plus se doit d'être distribuée d'une facon très précise. Deux candidats ont été suggérés, soit les MACHOs (MAssive Compact Halo Objects) et les WIMPs (Weakly Interacting Massive Particles). Alors que les WIMPs ne sont à ce jour pas détectés[6], on peut affirmer de façon presque certaine que les MACHOs ne peuvent pas expliquer cette différence, car ils sont trop peu nombreux[7]. Certains argumenteront que l'existence de cette matière sombre suffit pour régler le problème des courbes de rotation des galaxies et le problème de la surdéviation de la trajectoire de la lumière par une galaxie par rapport à celle prédite par la théorie, mais il ne s'agit pas d'une solution unique.

Par contre, la constante de couplage de la relativité générale n'est pas sans dimensions. Ceci entraîne la non-renormalisabilité de la relativité générale, ce qui engendre de grandes difficultés (voire impossibilités) à obtenir une théorie quantique viable de la gravité. En effet, la non-renormalisabilité d'une théorie implique une mauvaise compréhension de la physique décrite par cette théorie. Historiquement, nous pouvons voir que pour chaque théorie non-renormalisable, il a toujours existé une théorie renormalisable plus fondamentale dont la théorie non-renormalisable en est une limite de basse énergie, comme ce fut le cas pour la théorie Weinberg-Salam et de sa limite à basse energie, la théorie de Fermi. En fait, la non-renormalisabilité d'une théorie est due au fait que l'on a intégré sur les modes d'énergies supérieures à un seuil d'une théorie renormalisable alors qu'ils étaient non-négligeables. La théorie devient donc dépendante de l'énergie du seuil à partir de laquelle nous avons commencé à intégrer sur les modes.

De plus, pour rendre la relativité générale une théorie complète, il n'est pas satisfaisant de passer d'un univers où la matière est majoritairement visible (que l'on connait et que nous avons détecté) vers un univers dominé par la présence de matière sombre. En effet, les derniers résultats démontrant l'évidence d'une répulsion cosmique[2] poussent à nouveau les adeptes de la relativité générale à trouver une nouvelle source de gravitation exotique afin de pouvoir reproduire ces résultats. Deux nouvelles idées sont émises. La première propose que l'univers soit composé principalement de quintessences, matières non-lumineuses ayant une pression négative[8, 9]. On se rappelle que cette nouvelle matière doit aussi, telle la matière sombre, interagir que très faiblement (autrement que gravitationnellement) afin d'expliquer que nous ne l'ayons pas encore détectée lors d'une expérience avec un accélérateur. De plus cette matière doit être majoritaire au niveau extra-galactique alors que les galaxies sont dominées par la matière sombre et les systèmes solaires par la matière décrite par le modèle standard. La deuxième idée est d'expliquer ce nouveau phénomène par une constante cosmologique. Vu le manque d'un principe d'invariance à la base de la relativité générale, il est en effet possible d'ajouter une constante dite cosmologique aux équations d'Einstein. Malheureusement, cette dernière solution n'est pas sans son lot de problèmes[10].

Il est maintenant évident au lecteur que l'extension de la relativité générale, du système solaire vers les échelles galactiques et extra-galactiques, ne va pas de soi. En effet, le potentiel utilisé par la relativité n'est en fait nul autre que celui trouvé par Newton afin de décrire la rotation des planètes autour du soleil. Rien ne laisse présager que ce potentiel est toujours le potentiel dominant à de plus grandes échelles. C'est pourquoi il est intéressant d'étudier des théories alternatives à celle proposée par Einstein depuis bientôt un siècle.

Plusieurs théories ont été proposées afin de remplacer, ou du moins de corriger, la relativité générale. Cette nouvelle théorie devra, tout en maintenant les excellentes prédictions de la relativité générale à l'échelle du système solaire, proposer des solutions élégantes aux problèmes galactiques et extra-galactiques. Entre autres, lors de cette quête, la théorie de Milgrom[11], nommée MOND (MOdified Nonrelativistic Dynamics), fut lancée. Par contre, cette théorie n'est pas invariante sous une transformation de Lorentz (non-relativiste), elle jouit donc de peu d'intérêt. Le modèle de Bekenstein-Sanders[12] a vu le jour avec le même but, mais malgré le fait que cette théorie peut expliquer les courbes de rotation des galaxies, elle ne peut expliquer l'extra-déviation de la lumière par une galaxie.

C'est avec la même intention que la gravitation conforme fut ressortie des tablettes et remise sur la machine à tisser. En effet, cette théorie date de 1920, seulement quatre ans après la sortie de la relativité générale, et fut originellement le travail de Weyl. Elle fut d'abord écartée comme possible théorie de la gravitation parce que la présence de matière massive brise explicitement l'invariance conforme qui est à la base même de la théorie. Il est par contre possible d'obtenir cette brisure de symétrie par une une brisure spontanée. Ce n'est qu'à la venue du modèle standard qu'elle reprit un second souffle. Grâce au modèle standard et au mécanisme de Higgs, il est maintenant évident que l'apparition de masses est justement due au phénomène de brisure spontanée de la symétrie.

La gravitation conforme a aussi pour fondement le principe d'équivalence, mais on n'impose pas que les équations du mouvement soient du deuxième ordre dans les dérivés de la métrique. En fait, on choisit d'imposer le groupe le plus général qui laisse le cône de lumière invariant, soit le groupe conforme (qui inclut le groupe de Poincaré). Ceci nous mène à une théorie du quatrième ordre dans les dérivés de la métrique, donc d'ordre supérieur à la relativité générale. La symétrie conforme a pour effet de laisser les équations du mouvement invariantes sous la transformation :

$$g_{\mu\nu}(x) \to \Omega(x) g_{\mu\nu}(x) \tag{1.4}$$

Le choix de l'invariance conforme nous amène à une action unique :

$$\begin{aligned} I_W =& \alpha \int d^4x \sqrt{-g}\, C_{\mu\nu\rho\tau} C^{\mu\nu\rho\tau} \\ =& -2\alpha \int d^4x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{(R^\alpha_{\ \alpha})^2}{3} \right) \end{aligned} \tag{1.5}$$

où $C_{\mu\nu\rho\tau}$ est la partie sans trace du tenseur de Riemann et α est une constante de couplage sans dimensions. Contrairement à la relativité générale, l'absence d'échelle pourrait impliquer que la théorie est renormalisable[13, 14] et donc d'intérêt comme théorie quantique de la gravité. Il est évidemment possible de trouver les métriques analogues à celles fournies par la relativité générale pour une source statique et sphériquement symmétrique, soit [15] :

$$ds^2 = -\tilde{B}(r)dt^2 + \frac{1}{\tilde{B}(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{1.6}$$

où $\tilde{B}(r)$ est égal à $1 - 2m/r + \gamma r - \kappa r^2$, et pour une source statique ayant une symétrie axiale[1] :

$$\begin{aligned} ds^2 =& \frac{1}{r^2 + a^2cos^2\theta}[\Psi((a^2 + r^2)d\phi - adt)^2 - \tilde{\Delta}(a(sin^2\theta)d\phi - dt)^2] \\ &+ (r^2 + a^2cos^2\theta)\left(\frac{dr^2}{\tilde{\Delta}} + \frac{sin^2\theta d\theta^2}{\Psi}\right) \end{aligned} \tag{1.7}$$

où $\tilde{\Delta}$ est égal à $a^2 + r^2 - 2mr + \gamma r^3 - \kappa r^4$ et $\Psi = 1 + p\,cos\theta - cos^2\theta + s\,cos^3\theta - a^2\kappa\,cos^4\theta$, r étant le rayon, ϕ l'angle autour de l'axe de symétrie, t le temps, θ représente l'angle polaire et γ, κ, p et s sont des constantes d'intégration. Dans les deux cas (1.6) et (1.7), si nous imposions que $\gamma = \kappa = p = s = 0$, nous retrouverions (1.2) et (1.3) respectivement et (1.7) devient (1.6) dans la limite où $a = p = s = 0$. Il est donc naturel de poser les constantes γ et κ très petites, afin de pouvoir jouir à petit rayon du succès de la relativité générale dans le plan de rotation de la source. En effet, à l'échelle solaire, les termes en γ et κ deviennent négligeables et on retrouve les mêmes prédictions que celles de la théorie d'Einstein. Il est à noter que les termes en κ dans les équations (1.6) et (1.7) représentent un arrière-plan de de Sitter qui est une solution du vide. Nous voyons donc l'apparition d'un nouveau terme ajouté au potentiel, le terme γr. Il est aussi à noter que les métriques (1.6) et (1.7) ont plus de constantes que (1.2) et (1.3) respectivement. Ce phénomène est dû au fait que les équations dans le cadre de la gravitation conforme sont du quatrième ordre dans les dérivés de la métrique. Par contre, la signification physique de ces paramètres ne provient pas des équations, il s'agit en effet de constantes d'intégration. Leurs conséquences physiques viendront seulement que lorsque nous aurons compris tous les effets qu'ils engendrent.

C'est à l'aide de ce nouveau terme gravitationnel que certains auteurs[15, 16] ont tenté, avec bon succès, de reproduire les courbes de rotation des galaxies. En effet, γ peut être suffisamment petit pour ne pas jouer un rôle important au niveau du système solaire, mais toutefois être important au niveau galactique. Il existe donc une solution élégante pour expliquer ce phénomène sans avoir recours à de grandes quantités de matière sombre distribuées de façon très précise.

Par contre, lorsque l'on calcule la déviation de la trajectoire causée par une galaxie, une ambiguïté sur le signe de γ apparaît[17]. Afin d'obtenir l'extra-déviation de la lumière, on doit prendre le signe de γ négatif. Par contre, on ne peut plus reproduire les courbes de rotation des galaxies avec ce choix. Il serait par contre naïf de rejeter la gravitation conforme à ce point. En effet, la présence de matière brise l'invariance conforme. Les équations du mouvement ne sont donc plus invariantes sous une transformation conforme. Il est donc possible de choisir une gauge conforme[18] (voir appendice 1 pour consulter l'article) faisant en sorte de changer le signe devant γ pour la matière, rendant ainsi la théorie compatible avec les deux phénomènes.

De plus, la symétrie de la théorie interdit l'ajout d'une constante cosmologique au Lagrangien. Elle assure aussi qu'une constante cosmologique induite soit du même ordre de grandeur que la densité de matière[19]. Cela nous donne donc une équation de Friedmann qui n'engendre aucun problème d'âge ou d'horizon et qui nous montre un univers non-plat [20] :

$$\dot{R}^2 + \kappa = -\frac{2R^2\rho}{S^2} - 2R^2 g S^2 \tag{1.8}$$

où g est la constante de couplage du scalaire avec lui-même, ρ est la densité d'énergie et S est la valeur moyenne dans le vide du scalaire brisant spontanément la symétrie conforme. Brisant ainsi la symétrie, S donne une masse aux autres particules. Ce phénomène, appelé mécanisme de Higgs, est le même phénomène qui génère les masses des particules dans le modèle standard et ce, de façon dynamique.

Par définition, la gravitation conforme, par son terme en κr^2, engendre un univers courbe expliquant ainsi naturellement la répulsion cosmique. Contrairement à la relativité générale, il n'est donc pas nécessaire d'y ajouter une époque d'inflation[2, 20].

Par contre, pour qu'une théorie en remplace une autre bien établie depuis longtemps, il ne suffit pas de prédire des résultats semblables de façon plus élégante et de trouver des solutions simples aux problèmes qui demeurent toujours inexpliqués (pour un résumé des problèmes auxquels la gravitation conforme doit faire face, voir[21]). Il faut que la nouvelle théorie soit capable de faire de nouvelles prédictions vérifiables et que celles-ci soient mesurées. C'est justement dans le but d'évaluer la viabilité de la gravitation conforme que ce mémoire est redigé. En effet, le dit mémoire tentera de prédire de nouveaux effets dus au terme γr sur la polarisation de la lumière lorsque celle-ci est déviée par une source gravitationnelle en rotation. Il y aura évidement une contribuation provenant de la relativité générale, mais il se peut que le terme γr produise un effet dominant, car les composantes de la connection affine pertinentes à la précession croient avec la distance dans le cadre de la gravitation conforme. Par contre, nous ne sommes pas arrivés à l'étape de calculer la précession physique, cela pourrait être un exemple de prédiction physique de la gravitation conforme qui pourrait être vérifié par l'observation.

Lorsque l'action est un scalaire, il est toujours possible de satisfaire l'identité de Bianchi, ce qui a comme conséquence que le tenseur $T^{\mu\nu}$ est toujours conservé de façon covariante (${T^{\mu\nu}}_{;\nu} = 0$). Ceci implique que les particules se déplacent tous sur des géodésiques. Donc nous pouvons voir les effets du champ gravitationnel sur la polarisation de la lumière traversant ce champ par l'équation du transport parallèle :

$$\frac{dS_\mu}{d\lambda} = \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\lambda}S_\sigma \tag{1.9}$$

où $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ est la connection affine et S_μ est le quadri-vecteur de polarisation. S_μ est défini par le tri-vecteur de polarisation habituel étendu pour comprendre une quatrième composante S_0, qui satisfait l'équation covariante d'orthogonalité avec le quadri-vecteur tangent au mouvement[3] :

$$S_\mu\frac{dx^\mu}{d\lambda} = 0 \rightarrow S_0\frac{dx^0}{d\lambda} = -\frac{dx^i}{d\lambda}S_i \tag{1.10}$$

Le but de ce mémoire est donc de calculer l'équation (1.9) pour un vecteur de polarisation défini par (1.10). Le calcul se fera de façon perturbative afin de voir quels sont les termes dominants.

Même si un effet semblable (précession géodétique de "de Sitter" et effet Lense-Thirring) pour la précession de la rotation d'un gyroscope massif sera vérifié expérimentalement par des expériences comme "Gravity Probe B"[22], aucune expérience n'a été tenté ou envisagé jusqu'à maintenant afin d'observé un tel effet pour la lumière. Cet effet existe pourtant dans le cadre de la théorie de la relativité générale.

Chapitre 2

Théorie de la perturbation

Lors de ce chapitre, nous tenterons de définir la notion de perturbation. La théorie de la perturbation permet de développer les functions en puissances de paramètres qui sont petits par rapport aux autres quantités physiques et de ne garder que les quelques premiers termes. En effet, les paramètres étant petits, les termes de l'expansion deviennent rapidement négligeables. Il est donc physiquement possible d'affirmer que les premiers termes renferment les effets physiques les plus dominants.

Les paramètres physiquement petits de notre problème sont le moment cinétique de la source gravitationnelle ainsi que les corrections apportées à la métrique de la relativité générale par la gravitation conforme. Il est physiquement raisonnable de faire une telle supposition sur ces paramètres. En premier lieu, très peux d'objets célestes ont un moment cinétique élevé, les étoiles à neutrons ou pulsars et d'hypothétiques trous noirs extrêmes. En effet la faiblesse de la force gravitationnelle ne permet pas aux objets compacts liés gravitationnellement (compact à l'échelle cosmologique) d'acquérir un moment cinétique élevé. Il est donc physiquement raisonnable de poser le moment cinétique d'une galaxie ou d'une étoile petit. En deuxième lieu, il est aussi physiquement raisonnable de considérer le champs gravitationnel à l'extérieur d'une galaxie (donc essentiellement dans l'espace vide) comme étant petit, spécialement la contribution de la gravitation conforme. Cette contribution doit en effet être très petite, car le contraire annoncerait une modification radicale aux prédictions Einstein-Newton. Cette modification radicale n'étant pas motivée par une observation, nous nous devons donc de contraindre la contribution au champs gravitationnel de la gravitation conforme à être petite.

Il devient donc mathématiquement justifiable de poser les paramètres correspondants aux quantités physiques petites et de développer ainsi toutes les formules en séries perturbatives. Cependant, cet artifice n'est pas dénudé de subtilités physiques. En effet, les paramètres considérés comme petits apparaissent à trois endroits dans la théorie. Premièrement, ils apparaissent directement dans le calcul des géodésiques dans l'arrière-plan Kerr-conforme. Deuxièmement, dans les équations du transport parallèle, mais de deux façons ; directement dans le calcul de la connection affine ($\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$), indirectement par la dépendence implicite de la position géodésique sur laquelle nous calculons le transport parallèle.

Notre stratégie comporte donc trois étapes. En premier lieu, nous calculons les géodésiques jusqu'au premier ordre dans les paramètres petits. Puis les équations de transport parallèle jusqu'au même ordre. Finalement, puisque notre théorie est linéaire, nous ne gardons que les termes comprenant un effet dû à la gravitation conforme.

Définissons tout d'abord L_i^j, afin de simplifier les calculs, de la façon suivante :

$$L_i^j = \Gamma^j_{i\nu}\dot{x}^\nu - \Gamma^0_{i\nu}\dot{x}^\nu\dot{x}^j \tag{2.1}$$

où $\dot{x}^\nu = dx^\nu/d\lambda$. Il est ensuite facile d'obtenir, de (1.9), (1.10) et (2.1), l'équation de transport parallèle pour le vecteur de polarisation écrite sous la forme :

$$\dot{S}_i = L_i^j S_j. \tag{2.2}$$

Le but de ce mémoire est donc de calculer L_i^j jusqu'au premier ordre dans les paramètres petits et de trouver une solution à (2.2). (2.2) étant une équation différentielle linéaire du premier ordre, on s'attend donc à une solution du type :

$$\vec{S}(\lambda) = R(\lambda)\vec{S}_0 \tag{2.3}$$

où

$$R(\lambda) = Pe^{\int_0^\lambda L(\lambda')d\lambda'} \tag{2.4}$$

où P est l'opérateur de chemin ordonné. Tel que vu ci-haut, il nous est possible, pour une source ayant un moment cinétique petit, de développer L en puissances du moment cinétique a :

$$L = L_{sch} + aL_1 + a^2L_2 + \dots \tag{2.5}$$

où L_{sch} est le résultat donné par la métrique de Schwarzschild. Étant donné que la physique décrite par une source statique et sphériquement symmétrique (métrique de Schwarzschild) dans le cadre de la gravitation conforme est bien documentée [2, 15, 16, 17, 20], nous ne pouvons nous intéresser qu'aux effets dus à la rotation de la source sur la précession de la polarisation de la lumière et laisser tomber L_{sch}. Il est à noter que ce mémoire ce veut l'étude de la précession de la polarisation de la lumière par une source gravitationnelle telle qu'une étoile ou une galaxie, donc une source ayant un moment cinétique petit. Donc pour a petit, il n'y a que le terme dominant du développement qui nous intéresse. L devient donc :

$$L \approx aL_1. \tag{2.6}$$

L étant devenu proportionnel au paramètre a (a est petit), nous pouvons développer R en puissances de a :

$$R(\lambda) = 1 + a \int_0^{\lambda} L_1(\lambda')d\lambda' + \ldots \tag{2.7}$$

Il sera donc possible à l'intérieur de ce mémoire de trouver une solution du type :

$$\vec{S}_f = R_{TOT}\vec{S}_0 \tag{2.8}$$

où $\vec{S}_0$ est la polarisation initiale, $\vec{S}_f$ est la partie spatiale du vecteur de polarisation finale et R_{TOT} représente la matrice totale qui sera décrite par l'équation :

$$R_{TOT} = 1 + 2a \int_{\lambda(r_0)}^{\lambda(r_f)} L_1(\lambda')d\lambda' \tag{2.9}$$

où r_0 est la distance minimum entre la trajectoire de la lumière et la source gravitationnelle et r_f est le rayon à partir duquel la source n'affecte plus la précession de la polarisation de façon significative. Le facteur 2 vient du fait que la lumière s'approche de la source puis s'éloigne, elle est donc influencée sur l'équivalent de deux fois le trajet entre r_0 et r_f.

Chapitre 3

Équations du mouvement

Maintenant que la structure mathématique est établie, la prochaine étape consiste à calculer les géodésiques. Il est important de se rappeler que le calcul se fera de façon perturbative, c'est-à-dire en développant toutes les équations en puissances des petits paramètres de notre théorie. Rappelons nous qu'un tel développement est physiquement justifiable. En fait, il permettera, dans notre cas, de mieux cibler les effets dominants dus à la gravitation conforme. Nous développerons donc nos équations jusqu'au termes linéaires en a et γ. Une fois les géodésiques trouvés, nous calculerons la précession de la polarisation de lumière dans le cadre de notre théorie. Afin d'être capable de calculer les géodésiques, il nous faut d'abord considérer le Lagrangien d'une particule libre dans un champs gravitationnel :

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu} \tag{3.1}$$

où $\dot{x}^{\mu} = dx^{\mu}/d\lambda$. Dans le cadre de notre développement perturbatif, nous avons besoin de la métrique (1.7) jusqu'aux termes linéaires en a et γ. Nous effectuerons d'abord la transformation de Boyer-Lindquist[23] (rappelons nous que $\theta = \pi/2$) :

$$
\begin{aligned}
dt &= du - \frac{dr}{\tilde{B}(r)} \\
d\phi &= d\varphi - \frac{adr}{r^2\tilde{B}(r)}
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

afin d'obtenir une forme de la métrique facilement inversible et de pouvoir utiliser les résultats de[5] qui sont dans les coordonées de Boyer-Lindquist. Nous utiliserons ce système de coordonées dans tout ce qui suit. Puis nous développerons la métrique jusqu'aux termes linéaires en a et γ, nous trouvons :

$$
\begin{aligned}
ds^2 = &- \left(1 - \frac{2m}{r} + \gamma r\right) du^2 + 2drdu + r^2 d\theta^2 - 2adrd\varphi + r^2 d\varphi^2 \\
&- 2a\left(\frac{2m}{r} - \gamma r\right) d\varphi du
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

et nous trouvons son inverse :

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) + \frac{2a}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \\
+ \frac{2a}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{\tilde{\Delta}}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 .
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Nous savons que la lumière se déplace le long des géodésiques nulles[4], trajectoires empruntées par les particules sans masse :

$$
g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \tag{3.5}
$$

où $x(\lambda)$ est la paramétrisation de la géodésique. L'Hamiltonien prend la forme suivante :

$$H = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = 0. \tag{3.6}$$

Ceci implique que l'énergie est conservée, et ce tout le long de la géodésique. L'invariance de la métrique sous une rotation autour de l'axe de symétrie, donc de l'Hamiltonien, implique que la quantité p_φ soit une quantité conservée Φ. Par le même raisonnement, l'invariance sous une translation dans le temps implique que la quantité p_u soit conservée. Si nous voulons que nos équations du mouvement égalent celles dérivées à l'aide de la métrique de Schwarzschild[3] dans le cas où $a = \gamma = 0$, p_u doit être égal à -1. Posons que la lumière se propage dans le plan de rotation de la source, donc $p_\theta = 0$. Ceci permettra de ne pas encombrer nos résultats d'une dépendance en θ, donc de mieux discerner les effets dus au terme γr. Il est maintenant facile de calculer p_u, p_φ et p_r :

$$p_u = \dot{r} - a\left(\frac{2m}{r} - \gamma r\right)\dot{\varphi} - \left(1 - \frac{2m}{r} - \gamma r\right)\dot{u} = -1 \tag{3.7}$$

$$p_\varphi = r^2\dot{\varphi} - a\dot{r} - a\left(\frac{2m}{r} - \gamma r\right)\dot{u} \equiv \Phi \tag{3.8}$$

$$p_r = \dot{u} - a\dot{\varphi} \tag{3.9}$$

Afin d'être capable de résoudre ce système de trois équations différentielles, il nous faut trois constantes du mouvement. Les équations (3.7) et (3.8) nous donnent déjà les deux premières. La troisième provient de l'Hamiltonien même :

$$H = \frac{1}{r^2}(\tilde{\Delta} p_r^2 + 2r^2 p_u p_r + 2a p_\varphi p_r + p_\varphi^2 + 2a p_\varphi p_u) = 0 \tag{3.10}$$

où $\tilde{\Delta} = r^2 - 2mr + \gamma r^3$. Le terme κr^4 dans $\tilde{\Delta}$ étant un très petit terme d'arrière-plan non-intéressant qui n'a effet que sur les phénomènes cosmologiques, nous l'avons supprimé. On peut réécrire (3.10) sous la forme :

$$H = \tilde{B}(r)p_r^2 + 2p_u p_r + \frac{2a}{r^2}p_\varphi p_r + \frac{\Phi^2}{r^2} + 2\frac{a}{r^2}p_\varphi p_u = 0 \tag{3.11}$$

où $\tilde{B}(r) = 1 - 2m/r + \gamma r$. Insérons (3.7), (3.8) et (3.9) dans (3.11) :

$$H = 2\dot{r}\dot{u} - \tilde{B}(r)\dot{u}^2 + \frac{\Phi^2}{r^2}. \tag{3.12}$$

De (3.7), nous pouvons isoler $\dot{u}$ facilement :

$$\dot{u} = (1 + \dot{r} - a(1 - \tilde{B}(r))\dot{\varphi})\tilde{A}(r) \tag{3.13}$$

où $\tilde{A}(r) = \tilde{B}^{-1}(r)$. L'Hamiltonien prend donc la forme suivante :

$$\begin{aligned} H =& \frac{\Phi^2}{r^2} + 2\dot{r}\tilde{A}(r)[1 + \dot{r} - a(1 - \tilde{B}(r))\dot{\varphi}] \\ &- \tilde{B}(r)\tilde{A}^2(r)[1 + \dot{r} - a(1 - \tilde{B}(r))\dot{\varphi}]^2. \end{aligned} \tag{3.14}$$

En gardant les termes de (3.14) jusqu'aux termes linéaires en a :

$$H = \frac{\Phi^2}{r^2} + \tilde{A}(r)\dot{r}^2 - \tilde{A}(r) + 2a(\tilde{A}(r) - 1)\dot{\varphi}. \tag{3.15}$$

Et de (3.8), nous pouvons isoler $\dot{\varphi}$:

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{r^2}\{\Phi + a(\dot{r} + (1 - \tilde{B}(r))\dot{u})\} \tag{3.16}$$

et l'Hamiltonien prend la forme :

$$H = \frac{\Phi^2}{r^2} + \tilde{A}(r)\dot{r}^2 - \tilde{A}(r) + 2a(\tilde{A}(r) - 1)\frac{\Phi}{r^2} = 0 \tag{3.17}$$

et nous obtenons l'équation différentielle pour $\dot{r}$:

$$\dot{r} = \sqrt{1 - \frac{\Phi^2}{r^2}\tilde{B}(r) - \frac{2a\Phi}{r^2}(1 - \tilde{B}(r))}. \tag{3.18}$$

De (3.13), (3.16) et (3.18), nous obtenons :

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{r^2}\{\Phi + a\tilde{A}(r)[1 - \tilde{B}(r) + \dot{r}]\} \tag{3.19}$$

$$\dot{u} = \tilde{A}(r)\left(1 + \sqrt{1 - \frac{\Phi^2}{r^2}\tilde{B}(r) - \frac{2a\Phi}{r^2}(1 - \tilde{B}(r))} - \frac{a(1 - \tilde{B}(r))\Phi}{r^2}\right). \tag{3.20}$$

En développant (3.18) et (3.13) jusqu'au terme linéaire en a, nous obtenons :

$$\dot{r} = \sqrt{1 - \frac{\Phi^2}{r^2}\tilde{B}(r)}\left[1 - \frac{2a\Phi}{r^2}\frac{(1 - \tilde{B}(r))}{(1 - \frac{\Phi^2}{r^2}\tilde{B}(r))}\right] \tag{3.21}$$

$$\dot{u} = \tilde{A}(r)\left[1 + \sqrt{1 - \frac{\Phi^2}{r^2}\tilde{B}(r)} - \frac{a\Phi(1 - \tilde{B}(r))}{r^2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\Phi^2}{r^2}\tilde{B}(r)}}\right)\right]. \tag{3.22}$$

Afin d'avoir nos équations différentielles exprimées sous la forme dr/du et $d\varphi/du$, représentant ainsi le mouvement de la lumière dans le temps, nous trouvons $d\lambda/du$ jusqu'au terme linéaire en a :

$$\frac{d\lambda}{du} = \frac{1}{\tilde{A}(r)\left(1+\sqrt{1-\frac{\Phi^2}{r^2}\tilde{B}(r)}\right)} + \frac{a\Phi(1-\tilde{B}(r))\left(1+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\Phi^2}{r^2}\tilde{B}(r)}}\right)\tilde{A}(r)}{r^2\tilde{A}^2(r)\left(1+\sqrt{1-\frac{\Phi^2}{r^2}\tilde{B}(r)}\right)^2} \tag{3.23}$$

Il ne reste plus qu'à multiplier (3.21) par (3.23) :

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{du} = &\frac{\Phi}{r^2\tilde{A}(r)\left(1+\sqrt{1-\frac{\Phi^2}{r^2}\tilde{B}(r)}\right)} + \frac{a}{r^2\left(1+\sqrt{1-\frac{\Phi^2}{r^2}\tilde{B}(r)}\right)} \\ &\times\left[1-\tilde{B}(r)+\sqrt{1-\frac{\Phi^2}{r^2}\tilde{B}(r)}+\frac{\Phi^2(1-\tilde{B}(r))(1+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\Phi^2}{r^2}\tilde{B}(r)}})}{r^2\tilde{A}(r)\left(1+\sqrt{1-\frac{\Phi^2}{r^2}\tilde{B}(r)}\right)}\right].\end{aligned} \tag{3.24}$$

De même pour (3.19) :

$$\begin{aligned}\frac{dr}{du} = &\frac{\sqrt{1-\frac{\Phi^2}{r^2}\tilde{B}(r)}}{\tilde{A}(r)\left(1+\sqrt{1-\frac{\Phi^2}{r^2}\tilde{B}(r)}\right)} \\ &- \frac{a\Phi(1-\tilde{B}(r))}{r^2\tilde{A}(r)\left(1+\sqrt{1-\frac{\Phi^2}{r^2}\tilde{B}(r)}\right)}\times\left[\frac{2-\sqrt{1-\frac{\Phi^2}{r^2}\tilde{B}(r)}}{2\sqrt{1-\frac{\Phi^2}{r^2}B(r)}}\right]\end{aligned} \tag{3.25}$$

Nous avons donc maintenant les équations du mouvement jusqu'au termes linéaires en a et γ nécessaire à calculer (2.1).

Chapitre 4

Précession

La première étape terminée, nous pouvons maintenant étudier les équations de transport parallèle. Il est à noter que cette étude se fera aussi dans la limite physique où a et γ sont petits. Dû à la linéarité de notre théorie, il nous sera possible de ne garder que les termes représentants une modification (ou ajout) à la précession calculable pour une source gravitationnelle de type Kerr ayant un potentiel gravitationnel Newtonien. Nous devons donc trouver une solution à l'équation :

$$\frac{dS_\mu}{du} = \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{du}S_\sigma \tag{4.1}$$

où $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ est la connection affine et nous prenons maintenant u comme paramètre affine. Cette équation représente le taux de variation dans le temps d'un vecteur transporté parallèlement. Si nous prenons ce vecteur pour la polarisation, nous devons définir la dimension temporelle de S_μ ($S_0 = -v^i S_i$). Nous pouvons remplacer S_0 par $S_0 = -v^i S_i$ dans le membre de droite et le laisser tomber dans la partie gauche, sa variation dans le temps n'est pas d'intérêt physique, car le vecteur de polarisation est réellement tridimensionnel. L'équation (4.1) devient donc :

$$\dot{S}_j = [\Gamma^i_{j\nu}\dot{x}^\nu - \Gamma^0_{j\nu}\dot{x}^\nu\dot{x}^i]S_i \tag{4.2}$$

où $\dot{x}^\mu$ sont maintenant des dériv'ees par rapport à u (dx^μ/du), les $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ sont facilement calculables par :

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}). \tag{4.3}$$

En ne gardant que les $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ non-nuls, nous trouvons :

$$\begin{aligned}\dot{S}_i =&[\Gamma^\theta_{ir}\dot{r}]S_\theta + [\Gamma^r_{i\varphi}\dot{\varphi} + \Gamma^r_{ir}\dot{r} + \Gamma^r_{iu} - \Gamma^u_{i\varphi}\dot{\varphi}\dot{r} - \Gamma^u_{ir}\dot{r}^2 - \Gamma^u_{iu}\dot{r}]S_r \\ &+ [\Gamma^\varphi_{i\varphi}\dot{\varphi} + \Gamma^\varphi_{ir}\dot{r} - \Gamma^u_{ir}\dot{r}\dot{\varphi} - \Gamma^u_{i\varphi}\dot{\varphi}^2 - \Gamma^u_{iu}\dot{\varphi}]S_\varphi\end{aligned} \tag{4.4}$$

qui peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$\dot{\vec{S}} = L\vec{S} \tag{4.5}$$

où

$$L_{rr} = \Gamma^r_{r\varphi}\dot{\varphi} + \Gamma^r_{ru} - \Gamma^u_{r\varphi}\dot{\varphi}\dot{r} \tag{4.6}$$

$$L_{r\varphi} = \Gamma^\varphi_{r\varphi}\dot{\varphi} - \Gamma^u_{r\varphi}\dot{\varphi}^2 \tag{4.7}$$

$$L_{\varphi r} = \Gamma^r_{\varphi r}\dot{r} + \Gamma^r_{\varphi\varphi}\dot{\varphi} + \Gamma^r_{\varphi u} - \Gamma^u_{\varphi\varphi}\dot{\varphi}\dot{r} - \Gamma^u_{\varphi r}\dot{r}^2 - \Gamma^u_{\varphi u}\dot{r} \tag{4.8}$$

$$L_{\varphi\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi r}\dot{r} + \Gamma^\varphi_{\varphi\varphi}\dot{\varphi} - \Gamma^u_{\varphi r}\dot{r}\dot{\varphi} - \Gamma^u_{\varphi\varphi}\dot{\varphi}^2 - \Gamma^u_{\varphi u}\dot{\varphi} \tag{4.9}$$

$$L_{\theta\theta} = \Gamma^{\theta}_{\theta r}\dot{r} \tag{4.10}$$

et les autres termes sont nuls. Étant donné que le rayon de lumière doit passer très loin du centre d'une galaxie (ou d'une étoile) pour qu'il nous parvienne sans interférence (condition nécessaire pour obtenir de bonnes observations valides), il nous est possible de prendre la limite physique où r est très grand. Nous pouvons donc développer L de façon perturbative en ne gardant que les termes dominants de l'expansion (les autres termes ne seront que très difficilement observés) :

$$L_{rr} \approx \frac{a\Phi}{4r^3}(1+\gamma r) \tag{4.11}$$

$$L_{r\varphi} \approx \frac{a}{2r^3}(1-\gamma r) \tag{4.12}$$

$$L_{\varphi r} \approx \frac{a\gamma}{2} \tag{4.13}$$

$$L_{\varphi\varphi} \approx \frac{-a\Phi}{4r^3} \tag{4.14}$$

$$L_{\theta\theta} \approx \frac{a\Phi\gamma}{4r^2} \tag{4.15}$$

Il ne reste plus qu'à intégrer l'équation (2.9) afin d'obtenir l'évolution totale du vecteur de polarisation le long de sa trajectoire :

$$R_{rr} = 1 + \frac{a\Phi}{4r_f^2 r_0^2}[r_f^2 - r_0^2 + 2\gamma r_0 r_f^2 - 2\gamma r_0^2 r_f] \tag{4.16}$$

$$R_{r\varphi} = \frac{a}{2r_f^2 r_0^2}[r_f^2 - r_0^2 + 2\gamma r_0 r_f^2 - 2\gamma r_0^2 r_f] \tag{4.17}$$

$$R_{\varphi r} = \frac{a\gamma}{2}[r_f - r_0] \tag{4.18}$$

$$R_{\varphi\varphi} = 1 - \frac{2a\Phi}{8r_f^2 r_0^2}[r_0^2 - r_f^2] \tag{4.19}$$

$$R_{\theta\theta} = 1 + \frac{a\Phi\gamma}{2r_f r_0}[r_f - r_0] \tag{4.20}$$

où r_0 est la plus petite distance entre la source et la lumière, paramètre d'impact, et r_f est la distance où la source cesse d'agir de façon significative sur la polarisation de la lumière. R est la matrice décrivant l'évolution totale du vecteur de polarisation dû au transport parallèle. r_f est donc la distance à laquelle la métrique cesse d'être dominée par les termes de potentiel gravitationnel $-2m/r + \gamma r$ et est dominée par le terme d'arrière-plan κr^2. On peut donc déterminer approximativement que $r_f \approx \gamma/\kappa$.

Avec l'apparition des termes en γ dans les equations (4.16) à (4.20), il est maintenant clair que la gravitation conforme a un effet perturbatif distinct de la relativité générale sur la précession de la polarisation de la lumière.

Chapitre 5

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons calculé la précession de la polarisation de la lumière par une source gravitationnelle de type Kerr dans le cadre de la gravitation conforme.

Nous avons fait ce calcul dans la limite où le moment cinétique de la source est petit. Nous avons aussi pris la limite où le champ gravitationnel est faible, donc à grande distance entre la source et le rayon lumineux. Cette limite est physiquement justifiable. En effet, très peu d'objets extra-planétaires ont un moment cinétique élevé. Nous sommmes intéressés à la précession causée par les galaxies ou les étoiles. Ces dernières, ayant un champs gravitationnel trop faible loin de leurs centre, ont un moment cinétique petit. De plus, il est nécessaire que la lumière contourne la source gravitationnelle loin de son centre afin d'éviter toute interférence (condition nécessaire à l'expérience). Nous avons donc pu utiliser la théorie de la perturbation afin de ne garder que les termes dominants. Nous avons aussi pris la limite où le champ gravitationnel est faible, donc à grande distance entre la source et le rayon lumineux.

Nos résultats montrent que le terme γr ajouté au potentiel Newtonien dans le cadre de la gravitation conforme agit effectivement sur la précession de la polarisation de la lumière.

Toutefois, avant de comparer nos prédictions avec une expérience il faut extraire du calcul la précession physique du vecteur de polarisation. Cette extraction est composée de plusieurs étapes et sera l'étude d'un travail ultérieur. En premier lieu, nous devons trouver le vecteur tangent à la géodésique et calculer les directions spatiales orthogonales à ce vecteur tangent. Celui-ci doit être un vecteur "null" ($g_{\mu\nu}v^{\mu}v^{\nu} = 0$) et nous devons nous assurer que cette qualité n'est pas détruite par le développement perturbative. Nous devons ensuite trouver le système de référence local de Lorentz, dans lequel le vecteur de polarisation est complement spatial, au point où nous désirons faire l'observation. En dernier lieu, nous devons comparer le vecteur transporté parallèlement aux deux directions spatialement transverse afin d'extraire la précession physique de la polarisation. Il est donc à noter qu'il est toujours possible qu'aucun effet physique ne soit réellement détectable. Il faut aussi, avant toute expérience, calculer l'effet dû au terme Schwarzschild, car celui-ci sera aussi détecté.

Il est à noter qu'il s'agit d'une prédiction faite avant toute apparition de résultats expérimentaux. C'est pourquoi nous croyons que la confirmation ou l'infirmation de notre prédiction aura une grande portée quant à la viabilité de la gravitation conforme.

Bibliographie

[1] P. D. Mannheim, Physical Review D, volume 44, numéro 2, 1991.

[2] P. D. Mannheim, Physical Review D, volume 58, 1998.

[3] S. Weinberg, *Gavitation and Cosmology : Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley and Sons, New York, 1972.

[4] R. M. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press, Chicago, 1984.

[5] B. Carter, Physical Review, volume 174, numéro 5, 1968.

[6] D. Spergel, *Unsolved Problems in Astrophysics*, Princeton University Press, Princeton, 1997.

[7] C. Alcock et al., Astrophysical Journal, volume 445, 1995.

[8] T. Matos et F. S. Guzman, Annalen Phys., volume 9, 2000.

[9] P. Brax et J. Martin, Phys. Rev. D, volume 61, 2000.

[10] S. Weinberg, Review of Modern Physics, volume 61, 1989.

[11] M. Milgrom, Astrophysical Journal, volume 270, 1983.

[12] J. D. Bekenstein et R. H. Sanders, Astrophysical Journal, volume 429, 1994.

[13] K. S. Stelle, Physical Review D, volume 16, 1977.

[14] E. S. Fradkin et A. A. Tseyltlin, Nuclear Physics, volume B201, 1982.

[15] P. D. Mannheim, Astrophysical Journal, volume 342, 1989.

[16] P. D. Mannheim, Astrophysical Journal, volume 479, 1997.

[17] A. Edery et M. B. Paranjape, Physical Review D, volume 58, 1998.

[18] A. Edery, A. A. Méthot et M. B. Paranjape, astro-ph/0006173.

[19] P. D. Mannheim, astro-ph/9807122.

[20] P. D. Mannheim, Astrophysical Journal, volume 391, 1992.

[21] P. D. Mannheim, AIP Confernce Procedings, numéro 222, New York, 1991.

[22] http ://einstein.stanford.edu.

[23] R. H. Boyer et R. W. Lindquist, Journal of Mathematical Physics, volume 8, numéro 2, 1967.

Appendice 1 : Article

Gauge choice and geodetic deflection in conformal gravity

A. Edery[1], A. A. Méthot[2] and M. B. Paranjape[3]

[1] *Center for High Energy Physics, Department of Physics, McGill University, 3600 University Street, Montréal, Québec, Canada, H3A 2T8*

[2,3] *Groupe de Physique des Particules, Département de Physique, Université de Montréal, C.P. 6128, succ. centre-ville, Montréal, Québec, Canada, H3C 3J7*

[3] *National Center for Theoretical Sciences, Physics Division, National Tsing Hua University Hsinchu, Taiwan 300, ROC*

Abstract

Conformal gravity has been proposed as an alternative theory of gravity which can account for flat galactic rotation curves without recourse to copious quantities of dark matter. However it was shown that for the usual choice of the metric, the result is catastrophic for null or highly relativistic geodesics, the effect is exactly the opposite yielding an effective repulsion and less deflection in this case. It is the point of this paper, that any result for massive geodesics depends on the choice of conformal gauge, in contradistinction to the case of null geodesics. We show how it is possible to choose the gauge so that the theory is attractive for all geodesics.

[1] edery@hep.physics.mcgill.ca
[2] methot@lps.umontreal.ca
[3] paranj@lps.umontreal.ca

One of the most important problems facing astrophysics is that of missing matter. All observations indicate that particles, massive or massless, are attracted more strongly by cosmological sources than would be expected on the basis of the observable (luminous) mass of the source, together with the use of Newton/Einstein gravity[1]. There are two evident potential solutions to this problem. We can postulate the existence of (copious) quantities of non-luminous matter (dark matter), in just the right distribution, to account for the excess attraction, or we can reject Einstein gravity and propose an alternative theory of gravity[2, 3, 4, 5] chosen to better reflect the cosmological phenomenology. Either solution implies a radical departure from our present understanding of cosmology. Conformal gravity, in recent years, has been proposed as such an alternative theory of gravitation.

Kazanas and Mannheim[2] have had reasonable success in fitting galactic rotation curves. They consider the spherically symmetric vacuum solution in conformal gravity

$$d\tau^2 = B(r)\,dt^2 - \frac{dr^2}{B(r)} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2\right) \tag{1}$$

with

$$B(r) = 1 - \frac{2\beta}{r} + \gamma\,r - kr^2 \tag{2}$$

where β, γ and k are constants. kr^2 corresponds to a cosmological solution (conformal to a Robertson-Walker background) so that k is chosen small enough not to have any effect at galactic scales while β and γ are chosen such that they do influence the gravitation exactly at these scales. Then for weak fields, at galactic scales, the effective Newtonian potential for non-relativistic matter is given by

$$\phi(r) = -\frac{2\beta}{r} + \gamma\,r. \tag{3}$$

Clearly for $\gamma > 0$ this gives an additional attractive linear potential. Fixing γ phenomenologically yields reasonable fits to galactic rotation curves[2]. However, it was recently pointed out that a positive sign for γ yields repulsion for null and highly relativistic geodesics[6] in blatant contradiction with observation. The deflection is given by $\Delta\varphi = \frac{4\beta}{r_0} - \gamma r_0$ where r_0 is the radius of closest approach[6]. This seems to arrest the development of the Kazanas-Mannheim program.

Our point in this paper is that it is possible to circumvent this difficulty by an appropriate choice of the conformal gauge. The key observation is that while massless geodesics are conformally invariant, massive geodesics are not. A massless geodesic satisfies

$$d\tau^2 = 0 = B(r)\,dt^2 - \frac{dr^2}{B(r)} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2\right) \tag{4}$$

hence conformal rescaling $d\tau^2 \to \Omega d\tau^2$, evidently, has no effect on the geodesic equation. Massive geodesics are, however, sensitive to the conformal factor Ω.

Take the sign of γ in (2) to be negative, $\gamma < 0$, so that the conformal gravity implies additional attraction for the null geodesics ($\Delta\varphi = \frac{4\beta}{r_0} + |\gamma| r_0$). The metric

$$d\tau^2 = \Omega(r)\left(B(r)\,dt^2 - \frac{dr^2}{B(r)} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2\right)\right) \tag{5}$$

will continue to be a vacuum solution of conformal gravity with the same massless geodesics. We will show how to find $\Omega(r)$ so that non-relativistic massive geodesics will also exhibit additional attraction. We will work to first order in the weak field approximation, however, it is clear that our idea is not restricted to this domain. Massless geodesics are insensitive to the conformal gauge whatever the gravitational field, while massive geodesics are always sensitive to the conformal factor, since the coupling of mass to the theory necessarily breaks the conformal invariance.

To identify the effective Newtonian potential that non-relativistic matter will feel, we must make a change of coordinates bringing the metric back to the standard spherically symmetric form. We make the transformation

$$r' = r\sqrt{\Omega(r)} \tag{6}$$

which is imposed to yield

$$d\tau^2 = B'(r')\,dt^2 - \frac{dr'^2}{B'(r')} - r'^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2\right) \tag{7}$$

with

$$B'(r') = 1 - \frac{2\beta}{r'} - \gamma\, r' - k r'^2, \tag{8}$$

since γ is now negative. This yields the set of equations

$$\Omega(r)B(r) = B'(r') \tag{9}$$

$$\frac{\Omega(r)dr^2}{B(r)} = \frac{dr'^2}{B'(r')}. \tag{10}$$

These equations can be easily solved in first order, weak field perturbation theory. The weak field limit is phenomenologically, abundantly justified. We take $\Omega(r) = 1 + \psi(r)$ and assume that all r dependent functions are small compared to 1. Then expanding (9) to first order immediately yields the solution

$$\psi(r) = -2\gamma r. \tag{11}$$

Using

$$\frac{dr'}{dr} = \frac{d}{dr}\sqrt{1 - 2\gamma r r} \approx \frac{d}{dr}(1 - \gamma r)r = 1 - 2\gamma r \tag{12}$$

and using (6) and noting that r may be replaced with r' in terms that are already of first order, yields,

$$\frac{\Omega(r)dr^2}{B(r)} \approx \frac{(1 - 2\gamma r)dr^2}{1 - \frac{2\beta}{r} + \gamma r - kr^2} \tag{13}$$

$$\approx \frac{dr'^2}{1 - \frac{2\beta}{r'} - \gamma r' - kr'^2} = \frac{dr'^2}{B'(r')} \tag{14}$$

verifying (10).

Thus we see that the sign of γ can be reversed with a coordinate change and a concomitant change of the conformal gauge in first order weak field perturbation. The null geodesics are insensitive to these transformations, indeed, if $r = r(\theta)$ is the original orbit equation for the null geodesic, then it is just transformed to $r'(\theta) = r'(r(\theta))$. The range of θ in the orbit equation, which determines the scattering angle, is unchanged, hence neither is the scattering angle or the deflection. The sign of γ being negative, this choice corresponds to the null geodesics behaving as if there is additional attraction in comparison to the usual Newton/Einstein case. There are of course local changes in the trajectory, but these do not affect the global behaviour of the null orbits.

The massive geodesics on the other hand are sensitive to conformal transformations. Indeed the non-relativistic massive geodesics for the metric (7) are also deflected as if there is additional attraction since the sign of γ is negative, as observed in [2] and which consequently served as the cornerstone of the conformal gravity program.

In conclusion, it is possible to choose a metric and conformal gauge for which conformal gravity will yield additional attraction above the Newton/Einstein result for both massless and non-relativistic, massive particles. Hence the possibility that conformal gravity could give a solution of the missing matter problem is not closed. Much work should be done, however, before embracing this theory as a viable phenomenological alternative. The exact scenario of the spontaneous or explicit breaking of the conformal invariance must be examined in detail. Unless we understand the mechanism, the theory will remain of only nominal theoretical interest.

Acknowledgements

We thank NSERC of Canada for partial financial support and the Department of Physics, National Central University, Chungli, Taiwan, where this paper was written.

References

[1] For a review of the evidence see V. Trimble, *ARA& A* **25**(1987) 425.

[2] D. Kazanas and P.D. Mannheim, *ApJ* **342** (1989) 635, P.D. Mannheim, *ApJ* **479** (1997) 659 and references therein, P.D. Mannheim, *Gen. Rel. Grav.* **25** (1993) 697, P.D. Mannheim and D. Kazanas, *Gen. Rel. Grav.* **26** (1994) 337.

[3] M. Milgrom, *ApJ* **270** (1983) 365; *ApJ* **270** (1983) 371; *ApJ* **270** (1983) 384.

[4] J.D. Bekenstein and R.H. Sanders, *ApJ* **429** (1994) 480.

[5] R.H. Sanders, *ApJ* **473** (1996) 117.

[6] A. Edery and M. B. Paranjape, Phys. Rev. D **58** 024011(1998).

Remerciements

J'aimerais remercier Manu Paranjape qui a accepté d'être mon directeur de recherche et sans qui rien de cela n'aurait été possible. Ses conseils et encouragements ont été grandement appréciés.

J'aimerais aussi remercier Ervig Lapalme pour son aide.

Je tiens aussi à remercier ma famille qui m'a toujours encouragé à atteindre les plus hauts sommets.

Je réserve mes derniers remerciements à Annie qui a su me supporter et m'encourager tout au long de ce travail et grâce à qui ma productivité a été doublée.