Université de Montréal

À propos de le conjecture du coureur solitaire

par

Simon Lemieux

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en Discipline

June 28 2023

Université de Montréal

Faculté des arts et des sciences

Ce mémoire intitulé

À propos de le conjecture du coureur solitaire

présenté par

Simon Lemieux

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Matilde Lalin

(président-rapporteur)

Dimitris Koukoulopoulos

(directeur de recherche)

Andrew Granville

(membre du jury)

Résumé

La conjecture du coureur solitaire est un problème formulé indépendamment par J.M. Wills en (1972) et par Thomas Cusick (1973). Soit $\|\cdot\|$ la distance avec les entiers $\|x\| = \min_{k\in\mathbb{Z}}(|x-k|)$ pour pour $x \in \mathbb{R}$. La conjecture nous demande si pour un ensemble de $n+1$ réels $\{v_1,v_2 \ldots v_{n+1}\}$ distincts il existe pour tout $k \in \{1,2,3,\ldots,n,n+1\}$ un temps $t \in \mathbb{R}$ tel que pour toute autre vitesse $v_i, i \neq k$ on a $\|t(v_i - v_k)\| \geq \frac{1}{n+1}$. La conjecture a été montrée pour $n+1 \leq 7$, le cas $n+1 = 7$ montré en 2007 par Barajas et Serra. Plusieurs auteurs ont écrit à propos de ce sujet. Dans ce mémoire, il sera question d'exposer les différentes techniques qui ont été utilisées pour les cas $n+1 \leq 7$, certains scénarios dans lesquels la conjecture tient ainsi que les efforts pour trouver des meilleures bornes inférieures pour *l'écart de solitude*.

Mots-clés: recouvrement, combinatoire, analyse, conjecture du coureur solitaire, problème d'obstruction.

Abstract

The lonely runner conjecture was formulated by J.M. Wills en (1972) and Thomas Cusick (1973). If $\|\cdot\|$ denotes the distance from integers, for $x \in \mathbb{R}$ $\|x\| = \min_{k\in\mathbb{Z}}(|x-k|)$, this conjecture is asking whether or not for any set of $n+1$ distinct real numbers $\{v_1,v_2\dots v_{n+1}\}$ and for any $k \in \{1,2,3\dots,n+1\}$ there is a time $t \in \mathbb{R}$ such that for any other speed $v_i,i \neq k$ we have $\|t(v_i - v_k)\| \geq \frac{1}{n+1}$. It has been proven to be true for $n+1 \leq 7$, the last case $n+1 = 7$ was shown by Barajas and Serra in 2007. Many authors have wrote about this subject each bringing more knowledge. In this thesis, there will be an exposure on different techniques that have been used to prove the cases for $n+1 \leq 7$, differents cases in wich the conjecture holds and the problem of getting better lower bounds for the *gap of loneliness*.

Keywords: covering, combinatorics, analysis, lonely runner conjecture, obstruction problem.

Table des matières

Liste des sigles et des abréviations

Dans le problème du coureur solitaire, on considère les «coureurs» comme des entités qui parcourent une piste circulaire de longueur 1 et qui ont des vitesses V. Si on fixe un étiquetage des coureurs, on a naturellement que le $k-$ième coureur a une vitesse v_k. Il est à noter que lorsqu'il est question d'un coureur, étant donné que les vitesses sont distinctes, on peut le référer à sa vitesse. Par exemple, <le $k-$ième coureur> peut être formulé comme <le coureur v_k> et si $a = v_k$, on peut le référer comme <le coureur a. Cette convention nous évite de parler d'un coureur par son index mais plutôt par la vitesse qu'il a ce qui peut être bien pratique lorsque l'index n'est pas explicite.

Voici quelques conventions qui seront utilisées. À préciser que selon le contexte, par soucis de simplicité, certaines de ces notations prendront une toute autre signification. Beaucoup de redondances seront présentes dans les premières démonstrations question de s'habituer à la notation via des contextes plus concrets.

0.1. Normes et distances

- $\{x\}$**(Partie fractionnaire)**

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor = x - \max(k \in \mathbb{Z}, k \leq x) \tag{0.1.1}$$

- $d_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}(x,y)$**(Distance sur le cercle)**

$$d_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}(x,y) = \inf_{k \in \mathbb{Z}}(|y - x + k|) \tag{0.1.2}$$

- $\|x\|$ **ou** $\|x\|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$**, pour** $x \in \mathbb{R}$ **(Distance absolue "Norme")**

$$\|x\|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} = d_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}(x,0) \tag{0.1.3}$$

- $(x)_q$**, avec** $x \in \mathbb{Z}$ **(Résidu modulo q)**

- $|x|_q$**, avec** $x \in \mathbb{Z}$ **(Résidu modulo q en absolue)**

$$|x|_q = \inf_{k \in \mathbb{Z}}(|x + qk|) = \min(|(x)_q|, q - |(x)_q|) \tag{0.1.4}$$

0.2. Normes et distances (Vecteurs, Ensembles)

Soit $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$

- $\{\vec{v}\}$**(Partie fractionnaire)**

$$\{\vec{v}\} = (\{v_1\},\{v_2\},\{v_3\},\ldots,\{v_n\}) \tag{0.2.1}$$

- $\|\vec{v}\|$ **,** $\|\vec{v}\|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$ **ou** $\|\vec{v}\|_{(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n}$ **avec** $\vec{v}$ **un vecteur de** $\mathbb{R}^n$ **(Distance absolue "Norme")**

$$\|\vec{v}\| = \min_{i\leq n}(d_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}(v_i,0)) \tag{0.2.2}$$

- $\|V\|$ **ou** $\|V\|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$ **avec** V **un ensemble fini de réels (Distance absolue "Norme")**

$$\|V\| = \min_{v\in V}(d_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}(v,0)) \tag{0.2.3}$$

0.3. Terminologie

Définition 0.1. Coureur

Un coureur est un objet qui bouge sur le cercle unité avec une vitesse constante v. On identifie le cercle unité par le quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ puis on considère la position $x(t)$ du coureur au temps $t \in \mathbb{R}$ qui est donnée par

$$x(t) \equiv x(0) + tv \pmod 1.$$

Définition 0.2. Système

Un système est un ensemble de coureurs pour lequel on impose à chaque coureur la condition $x(0) = 0$. Un système de coureur se distingue d'un autre par le multiensemble des vitesses des coureurs qui le composent V.

Définition 0.3. Système relativisé

Un système relativisé est un système dans lequel un des coureurs a vitesse nulle et devient ainsi un nouveau point d'origine. On ignore ensuite le coureur à vitesse nulle.

Définition 0.4. (instant/moment/temps) de solitude

Pour un système relativisé V à n coureurs un (instant/moment/temps) de solitude est un temps $t \in \mathbb{R}$ pour lequel .

$$\|tV\| \geq \frac{1}{n+1}$$

Définition 0.5. Système qui respecte/satisfait la conjecture du coureur solitaire
Un système V à $n+1$ coureurs dans lequel tous les coureurs ont des vitesses non-nulles «respecte/satisfait CCL» si chacun de ses coureurs possède un instant de solitude.

Définition 0.6. Système qui respecte/satisfait la conjecture du coureur solitaire relative
Un système relativisé V à n coureurs dans lequel tous les coureurs ont des vitesses non-nulles «respecte/satisfait CCLR» s'il possède un instant de solitude.

Définition 0.7. (Écart de solitude) un système relativisé
L'Écart de solitude ,ou «gap of loneliness» en anglais, pour un *système relativisé* V, est donné par .

$$\delta(V) = \sup_{0 \leq \gamma \leq \frac{1}{2}} (\gamma, \exists t \in \mathbb{R} \forall i, \|tv_i\| \geq \gamma) \tag{0.3.1}$$

Définition 0.8. (Écart de solitude) pour les systèmes relativisés de n coureurs
L' écart de solitude pour *l'ensemble des systèmes relativisés* à n coureurs est donnée par δ_n. Soit $\Omega(n)$ la collection de tous les systèmes de n vitesses non-nulles,

$$\delta_n = \inf_{V \in \Omega(n)} \Big(\delta(V)\Big) \tag{0.3.2}$$

Définition 0.9. Instance lousse et serrée
Un système relativisé V à n coureurs est une instance lousse du coureur solitaire s'il existe $t \in \mathbb{R}$

$$\|tV\| > \frac{1}{n+1} \tag{0.3.3}$$

et on dit qu'on a une instance serrée du coureur solitaire si pour tous les t tels que $\|tV\| \geq \frac{1}{n+1}$ on a

$$\|tV\| = \frac{1}{n+1} \tag{0.3.4}$$

Remerciements

Je vise à remercier mon directeur Dimitris Koukoulopoulos de m'avoir pris sous son aile malgré mon parcours académique non exemplaire. Il a été très patient même aux moments où ça allait moins bien et a sut faire preuve de flexibilité à ce qui à trait à ma façon de travailler. Je souhaite aussi le remercier lui, le DMS ainsi que les bourses attribuées durant mon parcours pour le soutient financier.
Je voudrais dire un gros merci à toute ma famille et mes amis pour leur soutient moral et leur capacité à s'intéresser à ce que je faisais (même s'ils ne pouvaient pas toujours comprendre). Je voudrais plus particulièrement remercier mes collègues et amis Xavier et Jonah qui ont su me redonner des gains de motivation et des perspectives intéressantes. Jonah et moi avons travaillé sur les systèmes couvrants durant l'été 2020 et nos discussions concerant les systèmes couvrant m'ont éclairées sur un possible lien entre la conjecture du coureur solitaire et le problème du modulus minimal pour des systèmes couvrants.

Chapitre 1

Introduction

1.1. Définition du problème

Prenons $V = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n+1}\}$ un ensemble de réels distincts et un ensemble de $n+1$ coureurs tel que le $k-i\grave{e}me$ coureur a une vitesse v_k. Lorsque l'on parle du *coureur* v_k on réfère implicitement au $k-i\grave{e}me$ coureur. Prenons une piste circulaire de longueur 1 puis prenons un *point de départ* sur lequel tous les coureurs commencent la course. En un temps $t \in \mathbb{R}$, on a que la position du $k-i\grave{e}me$ coureur par rapport à ce point de départ est donnée $x_k(t) = \{t \cdot v_k\}$, la partie fractionnaire de la distance parcourue. La distance absolue entre le point d'origine et le $k-i\grave{e}me$ coureur est donnée par $\|t \cdot v_k\| = \min(\{t \cdot v_k\}, 1 - \{t \cdot v_k\})$.

Définition 1.1. Solitaire/distant
Un coureur au sein d'un système à $n+1$ coureur ayant une vitesse v_k est dit solitaire s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$\|t(v_k - v_i)\| \geq \frac{1}{n+1}, \forall i \neq k \tag{1.1.1}$$

Définition 1.2. (instant/moment/temps) de solitude
Pour un coureur au sein d'un système à $n+1$ coureurs un (instant/moment/temps) de solitude est un temps $t \in \mathbb{R}$ pour lequel ce coureur est solitaire.

Le problème du coureur solitaire peut être énoncé comme suit

Conjecture 1.1. **(Conjecture du coureur solitaire (CCL)** *Pour tous les* $n \geq 1$ *et tout système de* $n+1$ *vitesses réelles distinctes* $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}\}$ *, chacun des coureurs de* V *possède un instant de solitude.*

En d'autres mots la conjecture stipule que pour tout système V de $n+1$ coureurs à vitesses distinctes, on a que pour toute vitesse v_k un temps t_k qui lui est associé et qui est tel que

$$\|t_k(v_i - v_k)\| \geq \frac{1}{n+1}. \tag{1.1.2}$$

Quand tous les coureurs d'un système V avec $|V| = n+1$ possèdent un temps de solitude, on dit que V respecte ou satisfait la conjecture du coureur solitaire (CCL). Si tous les systèmes de $n+1$ vitesses distinctes satisfont CCL, on dit que *CCL est vraie pour n+1.*

Exemple 1.1. Pour $n+1 = 5$ et un ensemble de vitesses $V = \{2,6,9,10,15\}$, on a des temps de solitude pour chaque coureur

Le premier coureur a un temps de solitude en $t = \frac{1}{5}$ puisque

- $\|t \cdot (v_2 - v_1)\| = \left\|\frac{1}{5} \cdot (6-2)\right\| = \frac{1}{5}$
- $\|t \cdot (v_3 - v_1)\| = \left\|\frac{1}{5} \cdot (9-2)\right\| = \frac{2}{5}$
- $\|t \cdot (v_4 - v_1)\| = \left\|\frac{1}{5} \cdot (10-2)\right\| = \frac{2}{5}$
- $\|t \cdot (v_5 - v_1)\| = \left\|\frac{1}{5} \cdot (15-2)\right\| = \frac{2}{5}$

Chaque résultat est plus grand ou égale à $\frac{1}{5}$. En fait, le temps $t = \frac{1}{5}$ est un temps de solitude pour le premier, le deuxième et le troisième coureur mais pas pour les autres coureurs. Une raison pour laquelle $t = \frac{1}{5}$ n'est pas un instant de solitude pour les coureurs v_4, v_5 vient du fait que $v_4 - v_5 \equiv 0 \pmod 5$ et donc $\left\|\frac{1}{5}(v_4 - v_5)\right\| = 0$. Ce que l'on peut remarquer est que $v_4 - v_5 \not\equiv 0 \pmod{25}$ et donc on veut temps de la forme $t = \frac{k}{25}, pgcd(k,5) = 1$. En prenant $k = 11, t_4 = \frac{11}{25}$ on obtient un temps de solitude pour v_4

$$\{\|t_4 \cdot (v_i - v_4)\|, i \neq 4\} = \{\frac{12}{25}, \frac{6}{25}, \frac{11}{25}, \frac{1}{5}\} \tag{1.1.3}$$

Toutes les valeurs sont incluses dans $[\frac{1}{5}, \frac{4}{5}]$. En considérant qu'aucun nombre dans $\{v_i - v_5, i < 5\}$ n'est divisible par 4, on prend $t_5 = 1/4$ pour que

$$\{\|t_5 \cdot (v_i - v_5)\| \, i \neq 5\} = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\} \tag{1.1.4}$$

Qui sont toutes des valeurs $\geq \frac{1}{5}$ ce qui fait de t_5 un temps de solitude pour le coureur v_5. Puisque la condition (1.1.2) est respectée, on a que V est un ensemble de vitesses *qui respecte CCL*.

Théorème 1.2. *La conjecture du coureur solitaire pour $n+1$ coureurs est vraie pour $n+1 \leq 7$.*

1.2. Systèmes relativisés

On se rappelle que toutes les vitesses des coureurs sont distinctes par hypothèse. On peut remarquer que la notion d'être solitaire est toujours relative à un coureur en particulier. Une première réduction du problème peut être envisagée. En effet, si l'on prend l'un des $n+1$ coureurs que l'on souhaite voir solitaire et qui a une vitesse v_k, on peut l'utiliser comme référentiel positionnel. Ce coureur sera donc considéré immobile et les vitesses et positions des n autres coureurs seront prises relatives à celui-ci. On a que $\{v_i - v_k, i \neq k\}$ est l'ensemble de vitesses relatives au coureur k. En fait, on peut établir une correspondance entre l'ensemble des systèmes relativisés sans vitesse nulle à n coureurs et l'ensemble des systèmes à $n+1$ coureurs.

Conjecture 1.3. Conjecture du coureur solitaire relativisé (CCLR) *Pour tout $n \geq 1$, soit V un système à n vitesses non-nulles, alors il existe un temps t tel que*

$$\|tV\| \geq \frac{1}{n+1}. \tag{1.2.1}$$

Un système relativisé V avec $|V| = n$ satisfait $CCLR$ s'il existe un temps de solitude, c'est à dire un temps t tel que

$$\|tV\| \geq \frac{1}{n+1} \tag{1.2.2}$$

Similaire aux systèmes non-relativisés, on dit que $CCLR$ est vrai pour n coureurs quand tous les systèmes relativisés V avec $|V| = n$ satisfont $CCLR$.

Lemme 1.4. *CCLR pour n coureurs est vraie si et seulement si CCL est vraie pour $n+1$ coureurs.*

Ce lemme, quoique évident, sera démontré dans le chapitre 2 . À partir de maintenant, à moins qu'il ne soit spécifié, on utilisera uniquement des **systèmes relativisés** V. Lorsqu'il est question d'un systèmes à n coureurs, cela réfère aux systèmes relativisés V avec $|V| = n$.

Un résultat plus fort discuté dans le prochain chapitre nous permettra de restreindre notre recherche à des ensemble de vitesses naturelles.

Proposition 1.5. *Si CCLR est vraie pour un nombre de coureurs $\leqslant m$ et que pour tout ensemble de m vitesses naturelles V il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\|tV\| \geq \frac{1}{m+1} \tag{1.2.3}$$

Alors CCLR est vraie pour m coureurs.

1.3. Origine, problèmes d'obstruction et écart de solitude

Le problème du coureur solitaire a été formulé indépendamment par J.M. Wills en (1972) et par Thomas Cusick (1973). Cusick travaillait sur des problèmes d'obstruction en géométrie en n dimensions. Le problème d'obstruction sur lequel il travaillait consiste à prendre C un ensemble convexe fermé de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine α, un facteur de dilatation et un ensemble regroupant des copies de ces convexes

$$E(\alpha) = \bigcup_{\vec{h} \in (\mathbb{Z}+1/2)^n} (\alpha C + \vec{h})$$

Ce qu'il cherchait pour un tel ensemble C était le plus petit facteur de dilatation α pour lequel toute demi-droite partant de l'origine se trouvant dans $\mathbb{R}^n_{>0}$ intersecte au moins une fois l'ensemble $E(\alpha)$. C'est un problème d'obstruction au sens que les demi-droites seront , pour un bon choix de α, obstruées par $E(\alpha)$ les empêchant d'aller «à l'infini». Lorsque l'on prend comme ensemble C le cube $[-1,1]^n$ on a que toute demie-droite intersecte $E(\alpha)$ si pour tout vecteur $\vec{v}$ nous donnant la direction de la demie-droite, il existe $t > 0$

$$t\vec{v} \in [\frac{1}{2} - \alpha, \frac{1}{2} + \alpha]^n \pmod{\mathbb{Z}^n}. \tag{1.3.1}$$

Si on prend V l'ensemble des composantes de $\vec{v}$, on peut reformuler la condition d'inclusion par

$$\|tV\| \geq \frac{1}{2} - \alpha. \tag{1.3.2}$$

On obtient alors que si α_n est la plus petite valeur de α qui satisfait le problème d'obstruction et que $\alpha_n \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}$, alors pour tout ensemble de n valeurs positives non-nulles V, il existerait $t \in \mathbb{R}$

$$\|tV\| \geq \frac{1}{2} - \alpha_n \geq \frac{1}{n+1} \tag{1.3.3}$$

nous donnant ainsi le problème de coureur solitaire.

Dans le contexte du problème du coureur solitaire, la valeur $\frac{1}{2} - \alpha_n$ est appellée *écart de solitude* que l'on dénote par δ_n. Pour un système en particulier, on dénote son *écart de* *solitude* par $\delta(V) = \sup_\delta(\{\delta, \exists t \, \|tV\| \geq \delta\})$. On définit donc δ_n comme

$$\delta_n = \inf_{V,|V|=n} \Big(\delta(V)\Big). \tag{1.3.4}$$

Montrer CCLR pour n coureurs est équivalent à montrer que $\delta_n \geq \frac{1}{n+1}$. C'est pour cette raison que plusieurs ouvrages se penchent sur une borne inférieure pour δ_n. Un résultat préliminaire est le suivant

Lemme 1.6. *Soit V un système avec $|V| = n$. On a que*

$$\delta(V) \geq \frac{1}{2n}. \tag{1.3.5}$$

Démonstration. Soit m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un ensemble de vitesses positives. Supposons que $\delta = \delta_n \in (0, \frac{1}{2n})$ $B_i(T) = \{t \in [0,T], \|tv_i\| < \delta\}$. On a que tout ensemble $B_i(T)$ a une mesure $m(B_i(T)) \sim 2\delta \cdot T$. S'il n'existait pas de temps t tels que $\|tV\| \geq \delta$, alors on aurait que $E(T) = \bigcup_{i\leq n} B_i(T)$ recouvrirait $[0,T]$. Cependant, si on pose $v_1 > v_2 > \cdots > v_n$ pour $T > \frac{\delta}{v_n}$ on peut constater que pour $i \leq n$,

$$m(B_i(T)) - \frac{\delta}{v_i} < 2\delta T.$$

Prenons $i < j \leq n$, les temps $t \in [0, \frac{\delta}{v_i})$ font parti des temps tels que $\|tv_i\| < \delta$ mais, puisque $v_j < v_i$, on a $[0, \frac{\delta}{v_i}) \subset [0, \frac{\delta}{v_j})$ et donc t fait aussi parti des temps tels que $\|tv_j\| < \delta$. Par conséquent, pour $T > \frac{\delta}{v_n}$, on a

$$\begin{aligned} m(E(T)) &\leq \Big(\sum_i m(B_i(T))\Big) - \Big(\sum_{1<i\leq n} (n-i)(\frac{\delta}{v_i} - \frac{\delta}{v_{i-1}})\Big) \\ &= \Big(\sum_i m(B_i(T))\Big) - \Big(\sum_{1\leq i<n} \frac{\delta}{v_i})\Big) \end{aligned}$$

Et par conséquent , pour T assez grand, si on a $m(E(T)) = T$, alors

$$\begin{aligned} T &= m(E(T)) \\ &\leq \Big(\sum_i m(B_i(T))\Big) - \Big(\sum_{i\leq n} \frac{\delta}{v_i})\Big) + \frac{\delta}{v_n} \\ &\leq \Big(\sum_i m(B_i(T)) - \frac{\delta}{v_i}\Big) + \frac{\delta}{v_n} \\ T &\leq 2n\delta T + \frac{\delta}{v_n} \end{aligned}$$

Mais, si $\delta < \frac{1}{2n}$, alors l'inégalité $T \leq 2n\delta T + \frac{\delta}{v_n}$ tient si

$$T(1 - 2n\delta) \leq \frac{\delta}{v_n},$$

et puisque $\delta < \frac{1}{2n}$, il faut avoir

$$T \leq \frac{\delta}{(1-2n\delta)v_n}, \tag{1.3.6}$$

ce qui est impossible pour tout T assez grand. Il faut donc que $\delta(V) \geq \frac{1}{2n}$. □

Puisque pour tout ensemble de n vitesses V on a $\delta(V) \geq \delta_n$, on a $\delta_n \geq \frac{1}{2n}$. On peut aussi établir une borne supérieure pour δ_n en effectuant la remarque suivante:

Lemme 1.7. *L'ensemble $V = \{1,2,3,\ldots,n\}$ possède des temps de solitudes et pour tout temps de solitude t, on a $\|tV\| = \frac{1}{n+1}$*

Démonstration. Prenons $V = \{1,2,3\ldots n\}$ et prenons l'étiquetage $v_k = k$ pour $1 \leq k \leq n$. Si on prend $r = \frac{1}{n+1}$, on peut vérifier que $\|rV\| \geq \frac{1}{n+1}$. Supposons qu'il existe un temps t pour lequel $\|tV\| > \frac{1}{n+1}$. On peut déduire que la plus petite distance entre le coureur v_1 et un autre coureur v_i à l'instant t est $\|t(v_i - v_1)\| = \|tv_{i-1}\| > \frac{1}{n+1}$. De la même façon, on peut déduire que la distance entre deux coureurs distincts v_i,v_j est $\|t(v_i - v_j)\| = \|t(i-j)\| = \|t(j-i)\|$ et puisque $v_i,v_j \in V$, on a soit $i-j \in V$ ou $j-i \in V$ et donc il existe $k \in V$ $\|t(v_i - v_j)\| = \|t(v_k)\| > \frac{1}{n+1}$. Prenons au temps t un ensemble d'indices $I(t) = I = \{i_1,i_2,\ldots,i_n\} = \{1,2,3,\ldots,n\}$ pour lequel on a la relation suivante

$$\{tv_{i_1}\} \leq \{tv_{i_2}\} \leq \cdots \leq \{tv_{i_n}\} \tag{1.3.7}$$

Puisque l'on a supposé que $\|tV\| > \frac{1}{n+1}$, on a que $\Big\{\{tv_{i_1}\},\{tv_{i_2}\},\ldots,\{tv_{i_n}\}\Big\} \subset (\frac{1}{n+1},\frac{n}{n+1})$. Il faudrait donc que $\{tv_{i_n}\} - \{tv_{i_1}\} \leq \frac{n-1}{n+1}$. Puisque $I = V$ comme ensemble, on a que si $i_a \neq i_b$ alors $i_a - i_b \in V$ ou $i_b - i_a \in V$ et aussi, par symmétrie de $\|\cdot\|$ et par hypothèse sur t, $\|t(i_a - i_b)\| > \frac{1}{n+1}$. On a cependant que

$$\begin{aligned}
\{tv_{i_n}\} - \{tv_{i_1}\} &= \sum_{k<n} \left\{tv_{i_{k+1}}\right\} - \{tv_{i_k}\} \\
&= \sum_{k<n} \left\|tv_{i_{k+1}} - tv_{i_k}\right\| \\
&= \sum_{k<n} \|t(i_{k+1} - i_k)\| \\
\{tv_{i_n}\} - \{tv_{i_1}\} &> (n-1)\cdot\frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Mais on a que $\frac{n-1}{n+1} < \{tv_{i_n}\} - \{tv_{i_1}\} \leq \frac{n-1}{n+1}$, une impossibilité. On conclut donc que pour $V = \{1,2,3\ldots n\}$, tout les temps t tels que $\|tV\| \geq \frac{1}{n+1}$ ne peuvent pas satisfaire $\|tV\| > \frac{1}{n+1}$. Par conséquent on a que tout temps de solitude t est tel que $\|tV\| = \frac{1}{n+1}$ et en particulier, puisque $t = \frac{1}{n+1}$ est un temps de solitude pour V, on aurait que $\delta(V) = \frac{1}{n+1}$. □

Ce résultat nous permet d'obtenir une borne supérieure pour l'écart de solitude

$$\begin{aligned}\delta_n &= \inf_{V,|V|=n}(\delta(V)) \\ &\leq \delta(\{1,2,\ldots,n\}) \\ \delta_n &\leq \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

1.4. Historique des preuves pour $n \leqslant 6$

Le premier cas non trivial $n = 3$ à été montré par Cusick en 1971 en utilisant entre autres l'analyse harmonique pour trouver la mesure de l'intersection des temps de solitudes de deux coureurs $m(\{t \in [0,1), \|tv_i\| \geq \frac{1}{4}, \|tv_j\| \geq \frac{1}{4}\})$. Il utilise le premier fait qu'un système $V = \{v_1,v_2,v_3\}$ contredisant la conjecture devraient avoir $m(\{t \in [0,1), \|tV\| \geq \frac{1}{4}\}) = 0$. Une étude du recouvrement de $[0,1)$ par $\{t \in [0,1), \|tv_i\| < \frac{1}{4}\}$ permet de montrer que si $m(\{t \in \mathbb{R}, \|tV\| \geq \frac{1}{4}\}) = 0$ alors $V = \{c,2c,3c\}$ pour une certaine constante $c > 0$. $V = \{c,2c,3c\}$ possède un temps de solitude $\frac{1}{4c}$.

Le cas pour $n = 4$ a été montré par Cusick et Pomerance [**6**] en 1982 à l'aide d'une preuve assistée par ordinateur. La méthode utilisée montre que pour $k \geq 8$ tout système $V = \{5^k v_1',v_2',v_3',v_4'\}, pgcd(5,v_i') = 1, v_i' \pmod{5^k}$ possède un temps t tel que $\|tV\| \geq \frac{1}{5}$. La partie computationnelle réside dans la recherche pour chaque $k < 8$ et chaque $4-tuple$ modulo 5^k un temps de la forme $t = \frac{q}{5^{k+1}}, (q,5) = 1$ tel $\|tV\| \geq \frac{1}{5}$. Biena, Goddyn, Gvozdjak, Sebo et Tarsi [**2**] ont publié en 1996 une preuve qui utilise des idées assez élémentaires. En fait ils ont montré le cas $n = 4$ pour étudier le concept de *flot nulle part nul* d'un graphe non-orienté $G = (S,A)$. Un *flot nulle part nul* est un choix d'orientation et de poids f_a pour les arrêtes $a \in A$ du graphe pour lequel on a que pour chaque sommet $s \in S$, la somme des poids entrant est égale à la somme des poids sortant (il y a donc circulation). Ils résolvent CCRL pour $n = 4$ pour montrer que, pour $k = 4$, un graphe a un *flot nulle part nul* pour un ensemble de k poids différents, alors il existe un *flot nulle part nul* pour un choix de poids avec valeur absolue dans $\{1,2,3,\ldots,k\}$.

La situation où on a $n = 5$ coureur a été montrée une première fois en 2001 par Bohman, Holzman et Kleitman [**4**] dans une preuve impliquant un traitement de plusieurs cas spéciaux. Une preuve plus simple a été produite par Renault (2003) [**12**]. Le dernier cas montré à ce jour $n + 1 = 7$ est dû à Barajas et Serra en 2007 [**1**]. Leur preuve utilise une méthode de compression permettant dans certains cas de considérer un sous ensemble de coureurs sur la piste, en un certain temps, comme un petit segment qui agit bien sous certaines applications de *multiplicateurs* (voir section 5.4) .

Ce mémoire portera sur certains résultats, méthodes et concepts qui ont permis de prouver la conjecture jusqu'à $n = 6$, et qui permettent de caractériser certains types de systèmes. Un exemple de résultant portant sur un type de système est le suivant

Théorème (Théorème 3.12)**.** Si on a un système $V = \{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $\frac{v_{i+1}}{v_i} \geq 2$ alors V satisfait $CCLR$.

Les sujets principaux porteront sur

- La réduction du problème à des vitesses entières positives
- Des méthodes pour trouver des temps de solitudes
- Des constructions de systèmes ayant des instants de solitude
- Le problème de la borne inférieure de l'écart de solitude
- Preuves pour $n \in 1,2,3,4$
- Idées importantes pour traiter le cas à $n = 6$ coureurs

Chapitre 2

Réduction du problème aux vitesses entières positives

Montrons tout d'abord le lemme 1.4 qui nous dit que montrer CCLR est vrai pour n coureurs est équivalent à montrer que CCL est vrai pour $n+1$.

Démonstration du lemme 1.4. $\Leftarrow$ On suppose que CCL est vraie pour $n+1$ coureurs. Prenons U, un ensemble de n vitesses relatives. On prend alors le système $V = U \cup \{0\}$. Par hypothèse, on a qu'il existe un temps de solitude pour le coureur de V ayant une vitesse nulle. Il existe donc $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$\|t \cdot (U - 0)\| \geq \frac{1}{n+1}. \tag{2.0.1}$$

On a donc CCL est vraie pour $n+1$ coureurs implique que $CCLR$ est vraie pour n coureurs.

$\Rightarrow$ On suppose que CCLR est vraie pour tout système relativisé à n coureurs. Supposons que V est un ensemble de $n+1$ vitesses distinctes qui ne satisfait pas CCL. Pour $i \in \{1,2,\ldots,n+1\}$, on considère les ensembles suivant $U_i = \{v_j - v_i, j \neq i\}$. Si V ne satisfait pas CCL alors il existe $j \in \{1,2,\ldots,n+1\}$ pour lequel il n'existe pas de temps t tel que

$$\|tU_j\| \geq \frac{1}{n+1}. \tag{2.0.2}$$

Cependant, U_j est un système relativisé de n vitesses et par hypothèse il existe un tel temps t, une contradiction. On a donc $CCLR$ est vraie pour n coureurs implique que CCL est vraie pour $n+1$ coureurs. □

Un résultat très utile nous permet de montrer qu'il est suffisant de montrer la conjecture pour les systèmes ayant des vitesses entières.

Théorème 2.1. *Si CCLR est vraie pour tout système V avec $|V| \leq n$ vitesses entières positives alors elle est vraie pour tout système de n vitesses réelles non-nulles.*

Il y a un très grand avantage de travailler avec des systèmes de coureurs ayant des vitesses entières. Pour une vitesse entière v, la fonction de position $\|tv\|$ est $1-$périodique ce qui nous permet de se restreindre aux temps $\pmod 1$ (donc dans [0,1)). Comme il a été vu dans l'exemple de l'introduction, avoir des vitesses entières nous permet d'établir des liens entre la position de certains coureurs selon les diviseurs de leurs vitesses. Il sera plus tard question de séparer l'ensemble des vitesses en classe $p - adiques$, puis d'exploiter les propriétés du groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. Avoir des vitesses entières nous permet aussi d'utiliser des outils d'analyse comme la sommation de Poisson et la transformée de Fourier qui nous permettent d'obtenir des informations sur une course.

Notons que si on a un système de vitesses positives V avec $|V| = n$, puisque $\|tV\| = \|-tV\|$, on a que si t est un temps tel que $\|tV\| \geq \delta$, alors on a aussi $\|-tV\| \geq \delta$. On a donc que pour toute vitesse $v_i \in V$ que $\|tv_i\| \geq \delta$ et $\|t(-v_i)\| \geq \delta$. Cela nous permet alors de construire un autre système $V' = \{\pm v_1, \pm v_2, \ldots, \pm v_n\}$ qui possède le même ensemble de temps $\{t' \in \mathbb{R}, \|t'V'\| \geq \delta\} = \{t \in \mathbb{R}, \|tV\| \geq \delta\}$. Par conséquent, si V satisfait $CCLR$, V' satisfait aussi $CCLR$.

Notons aussi que pour une constante $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$ et un système V avec $|V| = n$ on a que V satisfait CCLR si et seulement si cV satisfait CCLR. Cela peut s'expliquer par le fait que si t est un temps de solitude de V, alors $\frac{t}{c}$ est un temps de solitude de cV et que si s est un temps de solitude de cV, alors $c \cdot s$ est un temps de solitude de V. Puisque que pour tout système à vitesses rationnelles $V = \{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}\}$ on a que le système $l \cdot V$ avec $l = ppcm(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ est un système à vitesses entières, on a que si tous les systèmes de n vitesses entières satisfont CCLR, alors tous les systèmes de n vitesses rationnelles satisfont CCLR et vice versa. Nous avons donc le schéma suivant pour V un système (donc $0 \notin V$):

$$\begin{aligned}(\text{CCLR vraie } \forall V \subset \mathbb{N} \text{ avec } |V| \leq n) &\iff (\text{CCLR vraie } \forall V \subset \mathbb{Z} \text{ avec } |V| \leq n)\\ &\iff (\text{CCLR vraie } \forall V \subset \mathbb{Q} \text{ avec } |V| \leq n).\end{aligned}$$

Pour montrer le théorème 2.1, la seule relation qui n'a pas été montrée est la suivant:

$$(\text{CCLR vraie } \forall V \subset \mathbb{Q} \text{ avec } |V| \leq n) \iff (\text{CCLR vraie } \forall V \subset \mathbb{R} \text{ avec } |V| \leq n).$$

La prochaine section portera sur cette relation manquante.

2.1. Vitesses réelles à vitesses rationnelles

Une réduction très importante nous permet de montrer que les systèmes ayant des vitesses indépendantes sur $\mathbb{Q}$ peuvent être approchés par des systèmes à vitesses rationnelles. On peut utiliser le théorème de Kronecker [**8**] d'approximation diophantienne

Théorème 2.2 (Théorème de Kronecker (Approximation diophantienne))**.** *Pour un ensemble $U = \{1,u_1,u_2 \dots ,u_n\}$ de vitesses $\mathbb{Q}-$ linéairement indépendantes et un ensemble $\{z_i\} \subset \mathbb{R}^n$, il existe un entier q tel que pour tout i*

$$\|qu_i - z_i\| < \epsilon.$$

Notons $\vec{u} = (u_1,u_2,u_3 \dots ,u_n)$. Définissions par la suite

$$M(\vec{u}) := \{t\vec{u} + \vec{h},t \in \mathbb{R},\vec{h} \in \mathbb{Z}^n\}. \tag{2.1.1}$$

En un temps t on a que l'ensemble $\{t\vec{u}+\vec{h},\vec{h} \in \mathbb{Z}^n\}$ est la classe d'équivalence de $t\vec{u} \pmod{\mathbb{Z}^n}$. Si on définit $\{t\vec{u}\} = (\{tu_1\}, \{tu_2\}, \dots, \{tu_n\})$, avec $\{x\}$ la partie fractionnaire de x, on a

$$\begin{aligned}\{\left\{t\vec{u} + \vec{h},\vec{h}\right\} &= \{(\{tu_1\} + h_1, \{tu_2\} + h_2, \dots, \{tu_n\} + h_n), h_i \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{(tu_1 + h_1', tu_2 + h_2', \dots, tu_n + h_n'), h_i' \in \mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

Ce qui nous permet d'écrire

$$M(\vec{u}) = \{\{t\vec{u}\} + \vec{h},t \in \mathbb{R},\vec{h} \in \mathbb{Z}^n\}. \tag{2.1.2}$$

Donc $M(\vec{u})$ est un ensemble de droites qui, dans le cas où au moins deux vitesses sont indépendantes sur $\mathbb{Q}$, sera un sous-ensemble dense de $\mathbb{R}^n$ de dimension ≥ 2 (par Kronecker).

Lemme 2.3. *Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, $X = \vec{u}^\perp \cap \mathbb{Q}^n = \{\vec{x} \in \mathbb{Q}^n : \vec{x} \cdot \vec{u} = \vec{0}\}$ et $K = X^\perp = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n : \vec{v} \cdot \vec{x} = \vec{0},$ pour tout $\vec{x} \in X\}$. On a que*

$$\overline{M(\vec{u})} = K + \mathbb{Z}^n \tag{2.1.3}$$

et en particulier $\vec{u} \in V$.

Qui sera démontré dans la section suivante. Le lemme principal nous permettant de convertir un système de vitesses réelles à un système de vitesses rationnelles est le suivant.

Lemme 2.4. *(Conversion des vitesses) Soit $\delta \in (0,\frac{1}{2})$ et $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2}$. Supposons que pour tout $V \subset \mathbb{Q}$ avec $|V| < n$ il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\|tV\| > \delta. \tag{2.1.4}$$

Alors pour tout système $U \subset \mathbb{R}$ de n vitesses telles que $\dim_{\mathbb{Q}}(U) > 1$ *il existe un temps t' tel que*

$$\|t'U\| > \delta. \tag{2.1.5}$$

Démonstration. On s'inspire ici de la preuve de [**4**, Lemme 8]. Supposons que pour tout $V \subset \mathbb{Q}$, tels que $|V| < n$ il existe un tel t. Or, on considère un ensemble $U = \{u_1,u_2 \ldots ,u_n\}$, de vitesses $\mathbb{Q}-$ linéairement indépendantes et le vecteur $\vec{u} = (u_1,u_2 \ldots ,u_n,)$. On voudrait montrer que, pour un certain $t' \in \mathbb{R}$,

$$\|t'U\| > \delta. \tag{2.1.6}$$

De façon équivalente, il suffit de montrer que $M(\vec{u})$ intersecte $(\delta,1-\delta)^n$ en au moins un point. Puisque $(\delta,1-\delta)^n$ est un ensemble ouvert, il suffit de montrer que $\overline{M(\vec{u})} \cap (\delta,1-\delta)^n \neq \emptyset$.

Par définition de U il existe $i_1 \neq i_2, u_{i_1}/u_{i_2} \notin \mathbb{Q}$. On peut réarranger les éléments de U de sorte à ce que $i_1 = 1, i_2 = 2$ et donc $u_1/u_2 \notin \mathbb{Q}$. On se rappelle du lemme 2.3 qui nous permet de dire que $\overline{M(\vec{u})} = K + \mathbb{Z}^n$, où $K = X^{\perp}$ et $X = \vec{u}^{\perp} \cap \mathbb{Q}^n$. $\vec{u} \in K$ et donc $\dim_{\mathbb{R}}(K) \geqslant 1$. Puisque $X \subset \mathbb{Q}^n$ il existe $\vec{r} \in K \cap \mathbb{Q}^n$[1].

De plus, on a $u_1/u_2 \notin \mathbb{Q}$, alors $\vec{r} \neq \lambda\vec{u}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et donc $\vec{u}$ et $\vec{r}$ ne sont pas colinéaires. Par conséquent, $\dim_{\mathbb{R}}(K) \geqslant 2$, ce qui veut aussi dire que $\dim_{\mathbb{Q}}(K \cap \mathbb{Q}^n) \geqslant 2$.

Finalement, puisque $\vec{u} > 0$ ('>0' qui veut dire que toutes ses coordonnées sont positives), alors $K \cap (0,+\infty)^n \neq \emptyset$. Il existe donc, $\vec{r},\vec{s} \in K \cap \mathbb{Q}^n_{>0}$ qui sont $\mathbb{R}$-indépendants. On pose alors $\vec{r} > 0, \vec{s} > 0$ deux vecteurs rationnels de K qui sont indépendants. Par la suite, on construit un nouveau vecteur $\vec{w} \in K$ qui aura deux composantes non-nulles égales en valeur absolue. On considère l'ensemble des rapports des composantes de $\vec{s},\vec{r}$, $\{\frac{s_i}{r_i}, i \leq n\}$. On prend alors i,j tels que $\frac{s_i}{r_i} < \frac{s_j}{r_j}$ et pour lesquels il n'existe pas k tel que $\frac{s_i}{r_i} < \frac{s_k}{r_k} < \frac{s_j}{r_j}$. Il est possible de choisir de tels i,j puisque l'on considère que $\vec{s},\vec{r}$ sont deux vecteurs non-colinéaire. On peut alors prendre un nouveau vecteur

$$\vec{w} = (r_i + r_j)\vec{s} - (s_i + s_j)\vec{r} \tag{2.1.7}$$

qui a la propriété que $w_i = -w_j$ et $w_k \neq 0$ pour tout k. Notons que $\frac{s_i}{r_i} < \frac{s_i+s_j}{r_i+r_j} < \frac{s_j}{r_j}$ et donc il faut que $\frac{s_k}{r_k} \neq \frac{s_i+s_j}{r_i+r_j}$ pour tout k. Le nouveau vecteur $\vec{w}$ est rationnel. Soit $W' = \{|w_k|, 1 \leqslant k \leqslant n\}$. On a que $\|tW\| = \|tW'\|$. De plus, $|W'| < n$, car $w_i = -w_j$. Par hypothèse, il faut alors qu'il existe t tel que $\|tW'\| > \delta$ qui est aussi tel que $\|tW\| > \delta$. Par

[1] En effet, si B est une base de X sur $\mathbb{Q}$, alors K est le noyau de la matrice dont les lignes sont éléments de B. Par élimination gaussienne, on trouve alors qu'il existe des vecteurs indépendants $\vec{r}_1,\vec{r}_2, \ldots \vec{r}_m$ tels que $K = Vect_{\mathbb{R}}(\vec{r}_1, \ldots ,\vec{r}_m)$.

conséquent, on a qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $t\vec{w} \in (\delta,1-\delta)^n + \mathbb{Z}^n$. Mais $t\vec{w} \in K$, donc on conclut que $K + \mathbb{Z}^n$ intersecte de façon non-triviale l'hypercube $(\delta,1-\delta)^n$. D'après le lemme 2.3, on en déduit que $\overline{M(\vec{u})} \neq \emptyset$, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

On peut par la suite spécialiser le lemme en choisissant l'écart de solitude attendu comme valeur de δ et donc poser $\delta = \frac{1}{n+1}$. Cela nous permet d'obtenir le lien manquant

$$(\text{CCLR vraie } \forall V \subset \mathbb{Q} \text{ avec } |V| \leq n) \iff (\text{CCLR vraie } \forall V \subset \mathbb{R} \text{ avec } |V| \leq n).$$

La seule chose qui nous manque est la preuve de 2.3.

2.2. Preuve du lemme 2.3

Or montrons le lemme 2.3 qui est un résultat clé pour montrer le lemme 2.4.

Démonstration. On note que $\overline{M(\vec{u})} = \overline{\{t\vec{u}/\mathbb{Z}^n, t \in \mathbb{R}\} + \mathbb{Z}^n}$. Tout d'abord, on peut supposer que $u_1 = 1$; sinon, on remplace $\vec{u}$ par $\vec{u}/u_1$ en observant que $M(\vec{u}) = M(\vec{u}/u_1)$. Décrivons en premier lieu l'ensemble X et l'espace vectoriel K.

Soit $\{u_{j_1}, u_{j_2}, \ldots, u_{j_k}\}$ un sous-ensemble maximal de U qui est linéairement indépendant sur $\mathbb{Q}$. En réarrangeant les indices si nécessaire, on peut supposer que $j_i = i$ pour tout i.
Il existe donc, une matrice $B \in M_{(n-k)\times k}(\mathbb{Q})$ telle que si

$$H = (h_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n, \\ 1 \leqslant j \leqslant k}} := \begin{bmatrix} I_k \\ B \end{bmatrix},$$

où I_k est la matrice idéntité de taille $k \times k$, alors

$$u_i = \sum_{j=1}^{k} h_{ij} u_j \quad \text{pour tout } i = 1,2,\ldots,n. \tag{2.2.1}$$

Considèrons aussi la matrice

$$A := \begin{bmatrix} B & -I_{n-k} \end{bmatrix} \in M_{(n-k)\times n}(\mathbb{Q}).$$

On affirme qu'on les deux idéntités suivantes :

$$K = \ker(A) = H\mathbb{R}^n. \tag{2.2.2}$$

Prenons H la matrice à composantes rationnelles $n \times k$ telle que

$$H\vec{\alpha} = \vec{x} \tag{2.2.3}$$

H est unique par la définition que α est une base sur $\mathbb{Q}$ ce qui permet de construire chaque composante de $\vec{x}$ comme une unique combinaison linéaire rationnelle

$$x_i = \sum_{j \leq k} c_{i,j} \alpha_j, c_{i,j} \in \mathbb{Q} \tag{2.2.4}$$

Le fait que l'on puisse considérer les k premières composantes de $\vec{x}$ comme $\mathbb{Q}$ linéairement indépendantes nous permet alors d'exprimer H

$$H = \begin{bmatrix} I_{k\times k} \\ B, \end{bmatrix} \tag{2.2.5}$$

où B est une sous-matrice à composantes rationnelles n'ayant aucune ligne ou colonne nulle. Avec la définition de H on peut construire la matrice A de l'énoncé.

On a que $\vec{x} \in X$ s-si $\sum_{i=1}^{n} x_i u_i = 0$. En utilsant la relation (2.2.1), on trouve que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{k} h_{ij} u_j = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i h_{ij} \right) u_j.$$

Puisque les nombres $u_1, \ldots, u_k$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, on déduit que $\vec{x} \in X$ s-si

$$\sum_{i=1}^{n} x_i h_{ij} = 0 \quad \text{pour tout } j = 1,2,\ldots,k. \tag{2.2.6}$$

Maintenant, on veut trouver un critère qui détermine quand un vecteur $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ est élément de $K = X^{\perp}$. On sait que $H = \begin{bmatrix} I_k \\ B \end{bmatrix}$ pour une matrice $B \in M_{(n-k)\times k}(\mathbb{Q})$, où I_k dénote la matrice identité de dimension $k \times k$. Donc, la relation (2.2.6) peut s'écrire comme

$$\vec{x} = (x_{k+1}, \ldots, x_n) \cdot \begin{bmatrix} -B & I_{(n-k)\times(n-k)} \end{bmatrix}.$$

Les nombres $x_{k+1}, \ldots, x_n$ bougent librement et sans restrictions dans $\mathbb{Q}$. Par la suite, $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{0}$ pour tout $\vec{x} \in X$ s-si

$$(x_{k+1}, \ldots, x_n) \cdot \begin{bmatrix} -B & I_{(n-k)\times(n-k)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \vec{0}$$

pour tout $x_{k+1}, \ldots, x_n \in \mathbb{Q}$. Il faut alors que

$$\begin{bmatrix} -B & I_{n-k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

Ceci montre notre affirmation que K est le noyau de la matrice A.

Finalement, montrons la deuxième partie de (2.2.2). Par la définition de A, on a que $A\vec{y} = 0$ s-si

$$y_i = \sum_{j=1}^{k} h_{ij} y_j \quad \text{pour tout } i = k+1, \ldots, n.$$

On peut réécrire cette relation comme

$$\vec{y} = H \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} \tag{2.2.7}$$

Donc, $\vec{y} \in H\mathbb{R}^k$, comme il faut. Vice versa, supposons que $\vec{y} \in H\mathbb{R}^k$. Donc, $\vec{y} = H\vec{z}$ pour un vecteur $\vec{z} \in \mathbb{R}^k$. Puisque $H = \begin{bmatrix} I_k \\ B \end{bmatrix}$, il faut que $z_i = y_i$ pour tout i, donc $\vec{y}$ satisfait (2.2.7). En renversant la déduction de cette relation, on voit que $\vec{y} \in \ker(A) = K$. Ceci termine la preuve. $\square$

Puisque ceci était ce qui manquait pour montrer le lemme 2.3, on a la relation suivant qui tient:

$$(\text{CCLR vraie } \forall V \subset \mathbb{Q} \text{ avec } |V| \leq n) \iff (\text{CCLR vraie } \forall V \subset \mathbb{R} \text{ avec } |V| \leq n).$$

Cela nous permet donc d'obtenir la dernière relation manquante pour le théorème 2.1.

Chapitre 3

Quelques remarques et résultats préliminaires

3.1. Recouvrement et obstruction

On a beaucoup employé la formulation du problème du coureur solitaire à $n+1$ coureurs comme un problème d'obstruction dans $\mathbb{R}^n$. Il est en fait possible de formuler le problème comme un problème de recouvrement d'une surface de $\mathbb{R}^n$ par des projections. Prenons $G_n := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n, x_i > 0, \sum_{i\leq n} x_i^2 = 1\}$ une partie ouverte d'une hypersphère qui représente, à une dilatation près, la collection de tous les ensembles de n vitesses non-nulles. Le problème du coureur solitaire est équivalent à se demander si l'ensemble $G'_n = \{\vec{x} \in G_n, \exists t \in \mathbb{R} \, \|t\vec{x}\| \geq \frac{1}{n+1}\}$ est égal à G_n et donc si la projection sur la sphère unité de l'ensemble $E = \{C_n + \mathbb{Z}^n_{\geq 0} + \frac{1}{2}\vec{1}\} = \{[-\frac{n-1}{2(n+1)}, \frac{n-1}{2(n+1)}]^n + \mathbb{Z}^n_{\geq 0} + \frac{1}{2}\vec{1}\}$ nous donne G_n. Cette reformulation du problème permet de considérer les grandeurs angulaires des hypercubes de E par rapport à l'origine. Dans le cas $n+1 = 4$, le problème du coureur solitaire devient un problème de recouvrement du huitième de sphère $\{(x,y,z), x,y,z > 0, x^2+y^2+z^2 = 1\}$. Le cube $[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]^3$ projeté sur la sphère est un hexagone sphérique avec sommets $\{\frac{4}{\sqrt{19}}(\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{4}), \frac{4}{\sqrt{19}}(\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{3}{4}), \frac{4}{\sqrt{19}}(\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4}), \frac{4}{\sqrt{11}}(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{3}{4}), \frac{4}{\sqrt{11}}(\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{4}), \frac{4}{\sqrt{11}}(\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})\}$. Dans cette situation, chaque cube non singulier (qui n'est pas à l'infini) de E sera projeté en un hexagone sphérique. En général, on a que les $n-$*cubes* seront projetés sur la $n-$ sphère formant un polygone à $2^n - 2$ sommets.

Un point intéressant de cette approche est que si on dénote par $C_{j,n} = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n, \|\vec{v}\|_j = 1\}$ on peut considérer la fonction $r(j,n)$ nous donnant le facteur de dilatation optimal pour que la

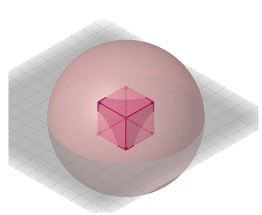

Fig. 3.1. Projection du cube $[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]^3$ sur la sphère de rayon 1 centrée à l'origine.

projection de $E = \{C_{j,n}r(j,n) + \mathbb{Z}^n_{\geq 0} + \frac{1}{2}\vec{1}\}$ sur G_n recouvre G_n. Les boules de la norme $\|\cdot\|_\infty$ sont des hypercubes et donc le facteur de dilatation $\limsup_{s\to\infty} r(s,n)$ serait le facteur de dilatation pour les hypercubes C_n. Puisqu'il y a une relation entre le facteur de dilatation et l'écart de solitude, connaître la croissance de $r(j,n)$ en fonction de j pourrait nous permettre d'estimer δ_n.

3.2. Discrétisation du temps et étude de la structure

Il est souvent plus pratique de travailler avec un nombre restreint de temps afin d'éviter à sur-analyser le problème qui n'est déjà pas évident. En se réduisant par exemple à des temps de la forme $\frac{k}{q}, 1 \leqslant k < q$, on peut transformer l'ensemble des vitesses en effectuant une réduction $\pmod q$ ce qui peut nous permet d'éviter de considérer la magnitude des vitesses et de travailler plûtot avec leurs classes $\pmod q$. Lorsque $q \leq n+1$, ce type de réduction nous permet de tester plus facilement quels systèmes pourraient échapper à la condition qu'il existe un temps t tel que $\|tV\| \geq \frac{1}{n+1}$.
Utilser la réduction de l'ensemble des vitesses $\pmod q$ et des ensembles de temps de la forme $t = \frac{k}{q}$ permet de définir des actions de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ sur l'ensemble des temps. Ces actions nous permettront de trouver certaines conditions sur V pour lesquelles il existe t tel que $\|tV\| \geq \frac{c}{q}$ et plus particulièrement, si $\frac{c}{q} \geq \frac{1}{|V|+1}$, des conditions pour l'existence d'un t tel que $\|tV\| \geq \frac{1}{|V|+1}$.
On peut aussi capitaliser davantage sur la réduction modulo q quand q est une puissance d'un premier p en regroupant les vitesses ayant les mêmes valuations $p-adiques$. Ce principe sera utilisé dans le cas à 4 coureurs et nous permettra de construire des temps de la forme $\frac{k}{5^{m+1}}$ pour lesquels $\|tV\| \geq \frac{5^m}{5^{m+1}} = \frac{1}{5}$ en considérant des transformations sur l'ensemble des temps qui affectent la positions des coureurs selon leur valuation $5-adique$. On cherche ici à avoir une meilleure idée de la nature des ensembles de temps $t, \|tV\| \geq \frac{1}{n+1}$

Lemme 3.1. *Pour un système de vitesses entières V avec $|V| = n$, s'il existe un temps $t \in \mathbb{R}$ tel que $\|tV\| \geq \frac{1}{n+1}$, alors il existe un temps $t' \in \mathbb{Q}$ tel que $\|t'V\| \geq \frac{1}{n+1}$ (possiblement $t = t'$). De plus, t se trouve dans un intervalle de la forme*

$$[\frac{1}{v(n+1)} + \frac{k}{v}, \frac{n}{v'(n+1)} + \frac{k'}{v'}] \tag{3.2.1}$$

avec $v,v' \in V$, $k,k' \in \mathbb{Z}, 0 \leq k < v, 0 \leq k' < v'$ dans lequel tous les éléments sont des temps de solitude. À noter que ces intervalles peuvent être des points.

Démonstration. Prenons C_i l'ensemble des temps pour lesquels le coureur v_i a une distance d'au moins $\frac{1}{n+1}$ de l'origine. S'il existe un temps de solitude alors il existe $t \in [0,1]$ qui est aussi un temps de solitude et donc

$$t \in [0,1] \cap \bigcap_{i \leq n} \Big(C_i\Big). \tag{3.2.2}$$

On a que C_i peut être exprimé comme

$$C_i = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}} \Big([\frac{1}{v_i(n+1)}, \frac{n}{v_i(n+1)}] + \frac{k}{v_i}\Big) = [\frac{1}{v_i(n+1)}, \frac{n}{v_i(n+1)}] + \frac{\mathbb{Z}}{v_i} \tag{3.2.3}$$

On peut alors déduire que s'il y a un temps de solitude $t \in [0,1)$, alors il existe une unique combinaison $k_1, k_2, \ldots, k_n$ avec $k_h \in \{0,1,2 \ldots v_h - 1\}$ pour laquelle, si $g_i = \frac{1}{v_i(n+1)} + \frac{k_i}{v_i}$ et $d_i = \frac{n}{v_i(n+1)} + \frac{k_i}{v_i}$ alors

$$t \in \bigcap_{i \leq n} \Big([\frac{1}{v_i(n+1)}, \frac{n}{v_i(n+1)}] + \frac{k_i}{v_i}\Big) = \bigcap_{i \leq n} \Big([g_i, d_i]\Big) \subset [0,1] \cap \bigcap_{i \leq n} \Big(C_i\Big). \tag{3.2.4}$$

Par conséquent, il existe $j_1, j_2 \in \{1,2,3 \ldots, n\}$ tels que

$$t \in [g_{j_1}, d_{j_2}] \subset [0,1] \cap \bigcap_{i \leq n} \Big(C_i\Big). \tag{3.2.5}$$

Puisque $t \in [g_{j_1}, d_{j_2}] \neq \emptyset$ et que $[g_{j_1}, d_{j_2}] \subset \bigcap_{i \leq n} \Big(C_i\Big)$ on peut prendre $t' = g_{j_1}$ qui est un rationnel et qui serait aussi un temps de solitude. Pour la deuxième affirmation, $[g_{j_1}, d_{j_2}] \subset \bigcap_{i \leq n} \Big(C_i\Big)$ et par conséquent les membres de $[g_{j_1}, d_{j_2}] = [\frac{1}{v_{j_1}(n+1)} + \frac{k_{j_1}}{v_{j_1}}, \frac{n}{v_{j_2}(n+1)} + \frac{k_{j_2}}{v_{j_2}}]$ sont des temps de solitude. □

3.3. Trouver un temps de solitude par force brute

Dans cette section, on verra que la condition de solitude pour un système de vitesses entières V avec $|V| = n$, peut être vérifiée en testant la condition $\|tV\| \geq \frac{1}{n+1}$ pour une quantité finie de valeur t dépendante de V. Si M est une méthode/algorithme nous permettant d'établir une propriété pour un système V de n coureurs, on dénote par $C_M(n)$ le nombre maximal de fois que l'on vérifie la condition

$$\|v_i t\| \geq \frac{1}{n+1}.$$

Deux méthodes seront traitées. Une qui est exhaustive et une autre qui repose sur un critère de divisibilité. On fait tout d'abord la remarque que certains événements doivent se produire lorsque l'on a un système qui possède un instant de solitude.

Lemme 3.2. *Soit V avec $|V| = n$ un système à vitesses entières. Alors il existe un temps de solitude pour V si et seulement si il existe un temps $t \in E = \{\frac{1}{(n+1)v} + \frac{k}{v}, v \in V, 0 \leq k < v\}$ qui est un temps de solitude pour V.*

DÉMONSTRATION. $\Leftarrow$ Trivial puisqu'un temps de solitude dans E est un temps de solitude. $\Rightarrow$Par la deuxième affirmation du lemme 3.1, si t est un temps de solitude alors il existe $v,v' \in V$ et $k,k' \in \mathbb{Z}, 0 \leq k < v, 0 \leq k' < v'$ tel que $t \in [\frac{1}{v(n+1)} + \frac{k}{v}, \frac{n}{v'(n+1)} + \frac{k'}{v'}]$ dont tous les éléments de l'intervalle sont des temps de solitude, en particulier le temps $\frac{1}{v(n+1)} + \frac{k}{v}$. On conclut puisque $\frac{1}{v(n+1)} + \frac{k}{v} \in E$. □

3.3.1. Méthode exhaustive $C_M(n) = O(n \sum_{v \in V} v)$

Ce qui a été soulevé par le lemme 3.2 est qu'un système V avec $|V| = n$ possède un temps de solitude si et seulement si il existe un temps de solitude $t \in E, E = \{\frac{1}{(n+1)v} + \frac{k}{v}, v \in V, 0 \leq k < v\}$. On considère alors la méthode qui consiste à vérifier chaque temps de E jusqu'à ce qu'il y en ait un qui vérifie la condition $\|tV\| \geq \frac{1}{n+1}$. Par construction on a que pour $v_i \in V$ et pour $0 \leq k < v_i$ que le temps $t = \frac{1}{(n+1)v_i} + \frac{k}{v_i}$ vérifie la condition $\|tv_i\| \geq \frac{1}{n+1}$, il suffit de le vérifier pour ces temps si $\left\|t \cdot (V \backslash \{v_i\}) \geq \frac{1}{n+1}\right\|$. Cette méthode nécessite au plus

$$(n-1) \cdot |E| \leq (n-1) \cdot \sum_{i \leq n} v_i$$

vérifications. Elle est exhaustive ce qui nous permet en un temps fini, de trouver un temps de solitude ou de montrer que la conjecture est fausse.

3.3.2. Méthode par critère de divisibilité

On peut déduire qu'un système $V, |V| = n$ respecte CCLR s'il existe $k \in \{2,3 \ldots, n+1\}$ tel que toute vitesse de V n'est pas divisible par k étant donné que pour $t = \frac{1}{k}$ on aurait $\|tV\| \geq \frac{1}{k} \geq \frac{1}{n+1}$ ce qui ferait de t un temps de solitude. Un test M pourrait donc être construit en vérifiant pour toutes les valeurs de k dans $\{2, 3, \ldots, n+1\}$ s'il existe une vitesse v dans V qui est divisible par k. On aurait dans ce cas un test de complexité $C_M(n) \leq n^2$. Cette borne supérieure peut être légèrement améliorée en considérant que si d divise $v \in V$, alors tous les diviseur propres de d diviseront aussi v nous donnant en fait une complexité d'au plus $C_M(n) \leq n \cdot \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$. À noter que les deux estimations de $C_M(n)$ sont $O(n^2)$. En fait, on peut construire d'autres tests en considérant un sous ensemble $A \subset \{2, 3 \ldots, n+1\}$ pour lequel on vérifie pour chaque membre $k \in A$ si l'une des vitesse est divisible par k.

Un tel exemple de test est si on prend $A = \{p, p\ premier, p \leq n+1\}$ l'ensemble des premiers plus petits ou égaux à $n+1$. Le critère est non concluant pour le système V si chaque premier $p < n+1$ divise au moins l'une des vitesses. Si de plus on veut forcer la condition $pgcd(V) = 1$, on peut exclure les cas où toutes les vitesses sont divisibles par un même premier p. On aurait dans ce cas une complexité $C_M(n) = O(\frac{n^2}{\log(n+1)})$. La proportion des systèmes à vitesses entières pour lesquels cette méthode est non concluante peut être bornée supérieurement. Soit X une variable aléatoire uniforme sur $\mathbb{Z}$, les événements $D_p(X) = \{X, p \text{ divise } X\}$ sont indépendants pour des premiers distincts. Si on représente les n coureurs par n variables aléatoires indépendantes X_i, étant donné que $pgcd(V) = 1$, on voudrait connaître la probabilité que p divise au moins une vitesse mais pas toutes. Cette probabilité est donnée par

$$1 - \Big(P(\bigcap_{i \le n} D_p(X_i)^c) + P(\bigcap_{i \le n} D_p(X_i))\Big) = 1 - (1 - \frac{1}{p})^n - \frac{1}{p^n}.$$

Par indépendance, la probabilité que ces événements se produisent pour chaque premier $\le n+1$ est le produit des probabilités. La proportion des systèmes à vitesses entières pour lesquels le critère de divisibilité est non-concluant est bornée supérieurement par

$$\prod_{p \le n+1} \Big(1 - (1 - \frac{1}{p})^n - \frac{1}{p^n}\Big), \tag{3.3.1}$$

qui peut être bornée supérieurement par

$$\prod_{p \le n+1} \Big(1 - (1 - \frac{1}{p})^n\Big). \tag{3.3.2}$$

Une version alternative du critère de divisibilité peut être construite en prenant un sous ensemble $A \subseteq \{2, 3, 4, \ldots, n+1\}$ de nombres copremiers deux à deux . Le nouveau critère de divisibilité est donc de tester pour chaque $v \in V$ s'il existe $a \in A, a|v$. On pourrait alors construire d'autres événements $D_a, a \in A$ qui seront indépendants par coprimalité. Un exemple de tel choix d'ensemble A serait $A = \{p^{\lfloor \log(n+1)/\log(p) \rfloor}, p \le n+1\}$, on obtient un test légèrement plus rigide que le précédent et permet, pour des n assez grands, d'obtenir une meilleure borne supérieure de la proportion des systèmes à vitesses entières pour lesquels le critère de divisibilité est non-concluant. La nouvelle borne que l'on obtient est

$$\prod_{p \le n+1} \Big(1 - (1 - \frac{1}{p^{\lfloor \log(n+1)/\log(p) \rfloor}})^n\Big). \tag{3.3.3}$$

À l'aide d'estimations simples, on peut obtenir le résultat ci-contre

Lemme 3.3. *Soit P_n la probabilité que le test de divisibilité utilisant $A = \{p, p \le n+1\}$ ne soit pas concluant sur les ensembles de n vitesses. Il existe une constante $c > 0$ telle que, si $n \ge 2$,*

$$P_n \le e^{\frac{-c \cdot n}{\log(n)}}.$$

Démonstration. Notons que nous avons une façon de borner P_n

$$P_n \leq \prod_{p \leq n+1} (1 - (1 - \frac{1}{p})^n). \tag{3.3.4}$$

On peut alors considérer les premiers $\{\frac{n}{2} < p \leq n+1\}$

$$\begin{aligned} P_n &\leq \prod_{\frac{n}{2} < p \leq n+1} \left(1 - (1 - \frac{1}{p})^n\right) \\ &\leq \prod_{\frac{n}{2} < p \leq n+1} (1 - (1 - \frac{2}{n})^n). \end{aligned}$$

Et puisque $\frac{n}{2}$ tend vers l'infini, on a que $\frac{(1-\frac{2}{n})^n}{e^{-2}} = 1 + o(1)$ avec $\frac{2}{3} \leq 1 + o(1) \leq \frac{3}{2}$ et par conséquent

$$\begin{aligned} P_n &\leq \prod_{\frac{n}{2} < p \leq n+1} \left(1 - (1 - \frac{1}{p})^n\right) \\ &\leq \prod_{\frac{n}{2} < p \leq n+1} \left(1 - (1 + o(1))e^{-2}\right) \\ &\leq \left(1 - (1 + o(1))e^{-2}\right)^{\pi(n+1) - \pi(n/2)} \\ &\leq (1 - \frac{2}{3}e^{-2})^{\pi(n+1) - \pi(n/2)}. \end{aligned}$$

On peut par la suite utiliser le fait qu'il existe une constante c_1 telle que $c_1 \frac{n}{\log(n)} \leq \pi(n + 1) - \pi(n/2)$ et une constante c_2 telle que $e^{-c_2} = 1 - \frac{2}{3}e^{-2}$ pour obtenir l'inégalité

$$P_n \leq (1 - \frac{2}{3}e^{-2})^{\pi(n+1) - \pi(n/2)} \leq e^{-\frac{c_1 c_2 \cdot n}{\log(n)}}.$$

On pose alors $c = c_1 \cdot c_2$ et on obtient ce qu'il nous fallait. □

L'estimation est très brute mais on peut l'ajuster en considérant un modèle A incluant une assez bonne proportion de nombres copremiers deux à deux.

Lemme 3.4. *Prenons $K > 1$, alors il existe, pour n assez grand, un ensemble $A \subset (n/K, n+1]$ de nombres copremiers deux à deux. Plus particulièrement, on a une borne supérieure de la proportion des systèmes de n coureurs échouant le test donnée par*

$$P < (1 - e^{-K + o(1)})^{|A|} \tag{3.3.5}$$

Démonstration. Tout d'abord, on a que si $A \subset (n/K, n+1]$ alors pour tout $a \in A, (1-\frac{1}{a})^n \geq (1-\frac{K}{n})^n = e^{K\cdot(-1+O(\frac{K}{n}))}$ et donc pour n assez grand

$$(1-\frac{1}{a})^n \geq e^{(-K+o(1))} \tag{3.3.6}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}\prod_{a\in A}(1-(1-\frac{1}{a})^n) &\leq \prod_{a\in A}(1-e^{(-K+o(1))})\\ &\leq (1-e^{(-K+o(1))})^{|A|}.\end{aligned}$$

□

On peut montrer que pour $0 < l < 1$ qu'utiliser les premiers $p \leq n^l$ ainsi que la borne inférieure $p^{\left\lfloor \frac{\log(n)}{\log(p)} \right\rfloor} \geq \frac{n}{p}$ n'est pas assez fort pour étudier l'impact des premiers $p \leq n^l$ sur la décroissance de $\prod_{p\leq n^l}(1-(1-\frac{1}{p^{\left\lfloor \frac{\log(n)}{\log(p)} \right\rfloor}})^n)$.

Lemme 3.5. *En utilisant le modèle $A = \{p^{\lfloor \log(n+1)/\log(p) \rfloor}, p \leq n+1\}$, pour n assez grand, on a que si on borne supérieurement $(1-(1-\frac{1}{p^{\left\lfloor \frac{\log(n)}{\log(p)} \right\rfloor}})^n)$ par $(1-(1-\frac{p}{n})^n)$ pour les premiers $p \leq n^l$, avec $l < 1$, alors on aurait une constante c qui pour n assez grand est telle que*

$$\prod_{p\leq n^l}(1-(1-\frac{p}{n})^n) > c. \tag{3.3.7}$$

Démonstration. On note tout d'abord que pour $p \leq n+1$ et $a = p^{\lfloor \log(n+1)/\log(p) \rfloor}$ que l'on a $\frac{n}{p} < a \leq n+1$ ce qui nous permet d'établir une borne supérieure sur $1 - P(\bigcap_{i\leq n} D_a(X_i))$

$$\begin{aligned}1 - P(\bigcap_{i\leq n} D_a(X_i)) &\leq 1-(1-\frac{1}{a})^n\\ &\leq 1-(1-\frac{p}{n})^n\\ &= 1-(1-\frac{p}{n})^{p\cdot\frac{n}{p}}\end{aligned}$$

Puisque par hypothèse on suppose que $p \leq n^l$, on a que $\frac{n}{p} \geq n^{1-l}$. On voudrait borner inférieurement $(1-\frac{p}{n})^{p\cdot\frac{n}{p}}$ ce qui peut être effectué en prenant le développement du logarithme.

$$\begin{aligned}
\log((1-\frac{p}{n})^{\frac{n}{p}}) &= -\frac{n}{p}\sum_{k\geq 1}\frac{(\frac{p}{n})^k}{k} \\
&\geq -\frac{n}{p}(\frac{p}{n}+\frac{1}{2}\frac{(p/n)^2}{1-p/n}) \\
&\geq -\frac{n}{p}(\frac{p}{n}+\frac{1}{2n}\frac{p^2}{n-p}) \\
&= -(1+\frac{1}{2}\frac{p}{n-p}) \\
&= -(1+O(\frac{1}{n^{1-l}})),
\end{aligned}$$

ce qui nous permet d'obtenir la borne inférieure

$$(1-\frac{p}{n})^{p\cdot\frac{n}{p}} \geq exp(-p(1+\frac{p}{2n}\cdot\frac{1}{1-\frac{p}{n}})).$$

On peut utiliser le fait que $p \leq n^{1-l}$ ce qui nous permet de trouver une constante C dépendante de l telle que

$$exp(-p) \geq (1-\frac{p}{n})^{p\cdot\frac{n}{p}} \geq exp(-p(1+C))$$

et par conséquent

$$1-exp(-p) \leq 1-(1-\frac{p}{n})^n \leq 1-exp(-p(1+C)). \tag{3.3.8}$$

Mais puisque $\prod_p(1-exp(-p))$ converge du fait que la fonction $F(x)=\prod_{p\leq x}(1-exp(-p))$ est décroissante et en étudiant des estimations par développement logarithmique, on peut trouver que le produit est borné inférieurement par une constante.

$$\begin{aligned}\prod_p (1-\exp(-p)) &= \exp(-\sum_{k\geq 1}\sum_p \frac{1}{ke^{k\cdot p}})\\ &\geq \exp(-(\sum_p \frac{1}{e^p}) - \sum_{k\geq 2}\sum_p \frac{1}{ke^{k\cdot p}})\\ &\geq \exp(-(\sum_p \frac{1}{e^p}) - \frac{1}{2}\sum_{k\geq 2}\sum_{j\geq 2} \frac{1}{e^{k\cdot j}})\\ &\geq \exp(-(\sum_p \frac{1}{e^p}) - \frac{1}{2}(\sum_{j\geq 2} \frac{1}{e^j(e^j-1)}))\\ &\geq \exp(-(\sum_p \frac{1}{e^p}) - \frac{1}{2}\frac{1}{(e^2-1)^2})\end{aligned}$$

On a donc que $\prod_p (1-\exp(-p))$ est borné inférieurement par la constante $e^{-H}, H = \sum_p \frac{1}{e^p} + \frac{1}{2}\frac{1}{(e^2-1)^2} \leq \frac{1}{e(e-1)} + \frac{1}{2}\frac{1}{(e^2-1)^2}$ et donc la limite $lim_{n\to\infty} \prod_{p\leq n}(1-\exp(-p))$ existe et est > 0. Par conséquent, $\prod_{p\leq n^l}(1-\exp(-p)) = c_{l,n} \geq e^{-H}$. On prend alors $c = e^{-H}$

□

On n'a donc pas la possibilité d'obtenir une bonne estimation de l'influence des premiers $p \leq n^l$ dans le produit $\prod_{p\leq n^l}(1-(1-\frac{1}{p^{\lfloor \frac{\log(n+1)}{\log(p)} \rfloor}})^n)$ en bornant supérieurement le produit par $\prod_{p\leq n^l}(1-(1-\frac{p}{n})^n)$.

Si on travaille sur un ensemble de diviseurs A qui ne sont pas nécessairement copremiers mais qui respectent la condition

$$P\Big((\bigcap_{i\leq n} D_a(X_i)^c) \cap (\bigcap_{i\leq n} D_b(X_i)^c)\Big) \approx P\Big((\bigcap_{i\leq n} D_a(X_i)^c)\Big) \cdot P\Big((\bigcap_{i\leq n} D_b(X_i)^c)\Big),$$

alors des estimations similaires à celles faite précédemment pourraient être faites.

3.4. Systèmes et conditions suffisantes pour l'existence d'une instance de solitude

Certaines constructions et tests peuvent être faits pour vérifier si certains types de systèmes possèdent des instants de solitude

3.4.1. Temps de solitude de sous-système et divisibilité

Il est commun d'utiliser certaines informations sur les sous systèmes afin d'obtenir des informations sur le système.

Lemme 3.6. *Soit V un système à n vitesses entières tel que pgcd$(V) = 1$. Soit $p \leq n+1$ un nombre premier et soit $V_p = \{v \in V : p|v\}$. S'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\|tV_p\| \geq \frac{1}{n+1}$ et que*

$$|V_p| > \begin{cases} n-p & si\ p \leq (n+1)/2, \\ n - \frac{p}{2} & si\ (n+1)/2 < p \leqslant n+1, \end{cases}$$

alors V satisfait la CCLR.

Démonstration. On remarque que si $\|tV_p\| \geq \frac{1}{n+1}$, alors $\left\|(t+\frac{k}{p})V_p\right\| = \|tV_p\|$. Si le lemme était faux, alors pour tout $0 \leq k < p$ on aurait qu'il existe $v \in V \backslash V_p$ tel que $\left\|(t+\frac{k}{p})v\right\| < \frac{1}{n+1}$. Pour chaque $y \in \mathbb{R}$, on définit $E(y) = \{0 \leq k < p : \left\|y + \frac{k}{p}\right\| < \frac{1}{n+1}\}$ et on observe que si $v \in V\backslash V_p$, alors $|\{0 \leq k < p : \left\|(t+\frac{k}{p})v\right\| < \frac{1}{n+1}\}| = |E(tv)|$. On pose par la suite

$$\gamma = \sup_{y \in \mathbb{R}}(|E(y)|). \tag{3.4.1}$$

Cela nous permet d'obtenir l'inégalité $|E(tv)| \leq \gamma$. La cardinalité de l'ensemble des valeurs de $0 \leq k < p$ pour lesquelles $(t + \frac{k}{p})$ n'est pas un temps de solitude pour V peut être bornée comme suit:

$$\begin{aligned} \left|\{0 \leq k < p : \exists v \in V\backslash V_p, \left\|(t+\frac{k}{p})v\right\| < \frac{1}{n+1}\}\right| &\leq \sum_{v \in V\backslash V_p} \left|\{0 \leq k < p : \left\|(t+\frac{k}{p})v\right\| < \frac{1}{n+1}\}\right| \\ &= \sum_{v \in V\backslash V_p} |E(tv)| \\ &\leq |V\backslash V_p|\gamma. \end{aligned}$$

Donc si $(n - |V_p|)\cdot\gamma < p$, on serait forcé d'avoir un temps $t' \in \{t + \frac{k}{p}, 0 \leq k < p\}$ qui serait un temps de solitude pour V. On peut reformuler cette condition comme $n - \frac{p}{\gamma} < |V_p|$.

Quand $p \leq (n+1)/2$, l'intervalle $(\frac{-1}{n+1}, \frac{1}{n+1})$ ne peut pas recouvrir un intervalle fermé de longueur $\frac{1}{p}$. On a donc $\gamma \leq 1$ et puisque $|E(0)| = 1$, on a que $\gamma = 1$ et alors

$$|V_p| > n - p$$

est une condition suffisante pour que V puisse satisfaire $CCLR$.

Quand $n+1 \geq p > (n+1)/2$, l'intervalle $(\frac{-1}{n+1}, \frac{1}{n+1})$ peut recouvrir au plus un intervalle fermé de longueur $\frac{1}{p}$. On a donc $\gamma \leq 2$ et puisque $|E(0)| = 2$, on a que $\gamma = 2$ et alors

$$|V_p| > n - \frac{p}{2}$$

est une condition suffisante pour que V puisse satisfaire $CCLR$. $\square$

Remarque 3.1. En fait, la preuve montre qu'il existe $k \in \{0,1,2,\ldots,p-1\}$ tel que $\|t'V\| \geqslant \frac{1}{n+1}$ avec $t' = t + k/p$. On peut donc utiliser ce lemme pour tester si V satisfait $CCLR$.

Des versions plus spécialisées de ce lemme sont courants dans la littérature. La preuve de Renault pour $n = 5$ [**12**] utilise des versions plus adaptées des arguments précédents afin de déduire que les seuls possibles contre-exemples à CCLR pour $n = 5$ sont les systèmes ayant une seule vitesse divisible par 2, par 3 et par 6. En d'autres mots les systèmes de la forme $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_5\}$ avec 6 qui divise v_1 et $pgcd(v_j,6) = 1$ pour tout $2 \leq j \leq 5$.

3.4.2. Première condition d'ajout d'un coureur

Lorsque l'on passe de l'étude de $CCLR$ pour $n-1$ coureurs à l'étude de la conjecture pour n coureurs on a un allègement de l'écart de solitude qui passe de $\frac{1}{n}$ à $\frac{1}{n+1}$ mais un coureur est ajouté au système ce qui vient contrer ce même allègement. On peut cependant avoir des situations où si un système V de $n-1$ vitesses respecte CCLR, alors l'ajout d'un coureur ayant une vitesse assez grande au sein du système nous donne un nouveau système $U = V \cup \{v_n\}$ qui respecte à son tour CCLR (pour n coureurs dans ce cas). Posons alors un ensemble V de $n-1$vitesses entières et non-nulles satisfaisant $CCLR$. Quelles conditions pourrait-on avoir sur V afin que le système de n vitesses $U = V \cup \{v_n\}$ respecte $CCLR$ pour n coureurs? On étiquette les vitesses pour que $v_1 < v_2 \ldots < v_n$. On peut utiliser le «lousse» qui se crée dans le sous-système $V \subset U$ lorsque l'on change la condition $\exists t$, $\|tV\| \geq \frac{1}{n}$ par la condition moins restrictive $\exists t, \|tV\| \geq \frac{1}{n+1}$.

Lemme 3.7. *Soit* $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}, 0 < v_1 < v_2 \cdots < v_{n-1}$ *un ensemble de* $n-1$ *vitesses satisfaisant* $CCLR$. *Alors si on prend l'ensemble* $U = V \cup \{v_n\}$ *et que* $v_n \geq n \cdot v_{n-1}$ *on a que* U *satisfait aussi* $CCLR$.

Démonstration. Soit un temps t tel que pour tout $v_i \in V$ on a $\{tv_i\} \in [\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}] \pmod 1$. Il suffit de considérer Δ le temps qui s'écoule entre t et le temps où l'un des coureurs de V quitte l'arc $[\frac{1}{n+1}, \frac{n}{n+1}]$. Si $\Delta \cdot v_i < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ alors tous les coureurs de $v_i \in V$ resteront dans $[\frac{1}{n+1}, \frac{n}{n+1}]$ pour tous les temps dans $[t, t+\Delta]$. Puisque v_{n-1} est le coureur le plus vite, si $\Delta = \frac{1}{(n(n+1)v_{n-1})}$, alors tous les coureurs $v_1, \ldots, v_{n-1}$ se trouveront dans $[\frac{1}{n+1}, \frac{n}{n+1}]$ pour tous les temps de $[t-\Delta, t+\Delta]$. Il faut s'assurer qu'il existe $t' \in [t, t+\Delta]$ tel que $\|t'v_n\| \geq \frac{1}{n+1}$. On veut aussi qu'il existe un temps dans $[t-\Delta, t+\Delta]$ pour lequel le coureur v_n se trouve dans $[\frac{1}{n+1}, \frac{n}{n+1}]$. La distance parcourue par v_n durant $[t-\Delta, t+\Delta]$ est $2\Delta v_n$. Pour qu'il existe un temps de $[t-\Delta, t+\Delta]$ pour lequel v_n se trouve dans $[\frac{1}{n+1}, \frac{n}{n+1}]$, il suffit donc que la distance parcourue $2\Delta v_n$ soit plus grande ou égale à la taille de $[\frac{-1}{n+1}, \frac{1}{n+1}]$. On a donc la condition $2\Delta v_n \geq \frac{2}{n+1}$ est suffisante et puisque $\Delta = \frac{1}{(n(n+1)v_{n-1})}$, on a la condition $v_n \geq n \cdot v_{n-1}$ qui est celle de l'énoncé. □

3.4.3. Deuxième condition d'ajout d'un coureur

La première condition peut être raffinée en prenant en compte de grandeur de la deuxième plus grande vitesse du système V.

Lemme 3.8. *Soit $V = \{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ avec $0 < v_1 < \cdots < v_{n-1}$ satisfaisant CCLR. Si $v_n \geqslant \max\left(\frac{4v_{n-1}}{n-1}, 2nv_{n-2}\right)$, alors $U = V \cup \{v_n\}$ satisfait aussi CCLR.*

Démonstration. En effet si on prend le cas extrême dans la preuve du lemme 3.7 avec le coureur v_{n-1} sur la frontière $\{\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}\}$ en un temps t, rien n'empêche le coureur de quitter l'arc $[\frac{1}{n+1},\frac{n}{n+1}]$ de la manière la moins efficace en traversant le segment $[\frac{1}{n},\frac{n-1}{n}]$ puis le segment $[\frac{n-1}{n},\frac{n}{n+1}]$ de longueur $\frac{1}{(n+1)(n)}$. On suppose sans perte de généralité et par symmétrie qu'au temps t on a $\{tv_{n-1}\} \in [\frac{1}{n},\frac{1}{2}]$. On désigne par Δ_1 le temps que met v_{n-1} à quitter l'arc $[\frac{1}{n+1},\frac{n}{n+1}]$ après le temps t. Plus simplement, pour $t' \in [t,t+\Delta_1]$, on a$\{t'v_{n-1}\} \in [\frac{1}{n},\frac{n-1}{n}]$. On obtient la première inégalité

$$\begin{aligned}\Delta_1 &\geq \frac{1}{v_{n-1}}(\frac{n}{n+1} - \frac{1}{2})\\ &= \frac{n-1}{2v_{n-1}(n+1)}.\end{aligned}$$

Il faut toutefois considérer qu'entre t et $t+\Delta_1$, il se peut qu'un autre coureur de V quitte l'arc $[\frac{1}{n+1},\frac{n}{n+1}]$. On considère alors la pire situation, celle où le deuxième coureur le plus vite de V, v_{n-2}, est sur la frontière $\{\frac{n-1}{n}\}$ au temps t. On utilise les résultats de la première estimation pour estimer le temps que met v_{n-2} à quitter l'arc $[\frac{1}{n+1},\frac{n}{n+1}]$ que l'on dénote par Δ_2. On obtient

$$\Delta_2 \geq \frac{1}{v_{n-2}n(n+1)}. \tag{3.4.2}$$

On prend alors l'intervalle de temps le plus restrictif $[t,t+\Delta]$ avec $\Delta = \min(\Delta_1,\Delta_2)$ puis on a une condition suffisante pour satisfaire $CCLR$ pour U

$$v_n \geq \frac{2}{\Delta \cdot (n+1)}, \tag{3.4.3}$$

mais puisque $\min\left(\Delta_1,\Delta_2\right) \geq \min\left(\frac{n-1}{2v_{n-1}(n+1)},\frac{1}{v_{n-2}n(n+1)}\right)$, on obtient la condition

$$v_n \geq \max\left(\frac{4v_{n-1}}{n-1}, 2nv_{n-2}\right) \tag{3.4.4}$$

ce qui est la condition de l'énoncé. □

Cette petite amélioration quoique faible, nous permet de comparer v_n à la deuxième vitesse la plus grande de V au lieu de la première. En combinant les deux critères

Corollaire 3.9. *Soit $V = \{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ avec $v_1 < \dots < v_{n-1}$ satisfaisant CCLR. Si*

$$v_n \geq \min\Big(\max\big(\frac{4v_{n-1}}{n-1}, 2nv_{n-2}\big), nv_{n-1}\Big),$$

alors $U = V \cup \{v_n\}$ satisfait aussi CCLR.

3.4.4. Instance du coureur solitaire selon le rapport entre les vitesses consécutives

On peut souligner un résultat assez simple concernant le rapport des vitesses croissantes d'un systèmes.

Théorème 3.10. *Si on a un système $V = \{v_1, v_2 \dots, v_n\}$, $\frac{v_{i+1}}{v_i} \geq 2\frac{n+1}{n-1}$ alors V satisfait CCLR.*

Démonstration. Pour tout j, on pose $C_j = \{t \in [0,1) : \|tv_j\| < 1/(n+1)\}$ et on observe que $m(C_j) = 2/(n+1)$. On veut montrer que la réunion des ensembles C_j ne couvre pas $[0,1)$. Supposons que l'on a un système de vitesses entières $|V| = n$ respectant l'hypothèse pour lequel l'énoncé ne tient pas. On aurait que

$$\bigcup_{j\leq n} C_j = \bigcup_{j\leq n} \{t \in [0,1), \|tv_j\| < \frac{1}{n+1}\} = [0,1). \tag{3.4.5}$$

On montre qu'il existe une suite d'intervalles $I_n \subset I_{n-1} \subset \dots I_2 \subset I_1 \subset E_0 = [0,1)$ qui possède les propriétés suivantes pour tout k :

(a) $I_k \cap \left(\bigcup_{j\leqslant k} C_j\right) = \emptyset$;

(b) $m(I_k) = \frac{(n-1)}{(n+1)v_k}$.

Clairement, si une telle suite existe, les ensembles $C_1, \dots, C_n$ ne couvrent pas $[0,1)$, et donc le théorème est montré. Fixons $q \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ et supposons qu'on a construit $I_1, \dots, I_q$ satisfaisant les propriétés (a) et (b). Prenons I_q et considérons la distance parcourue par le coureur v_{q+1} durant I_q. On obtient que la distance parcourue est donnée par

$$v_{q+1} \cdot m(I_q) = \frac{(n-1)v_{q+1}}{(n+1)v_q} \geq 2.$$

On a alors que le coureur v_{q+1} parcours au moins 2 fois le cercle unitaire durant $I_q = [a,b]$. On peut alors définir

$$x = \inf\left\{t \in I_q : \{tv_{q+1}\} = \frac{1}{n+1}\right\}$$

et

$$y = \sup\left\{t \in I_q : t \geqslant x,\ \{sv_{q+1}\} \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{n}{n+1}\right] \text{ pour tout } s \in [x,t]\right\}.$$

On sait que $v_{q+1}(x-a) \leq 1$ et que $v_{q+1}(y-x) = 1 - 2/(n+1) = (n-1)/(n+1)$ par notre hypothèse que $v_{q+1}m(I_q) \geqslant 2$. Donc, si on définit

$$I_{q+1} = [x,y],$$

on a que $m(I_{q+1}) = \frac{n-1}{(n+1)v_{q+1}}$. Puisque $I_q \cap (C_1 \cup \cdots \cup C_q) = \emptyset$ et $I_{q+1} \subset I_q$ par construction, il faut aussi que $I_{q+1} \cap (C_1 \cup \cdots \cup C_q) = \emptyset$. De plus, on a que $I_{q+1} \cap C_{q+1} = \emptyset$ par le choix de x et de y, donc I_{q+1} satisfait les propriétés (a) et (b). Ceci conclut l'étape inductive de la construction des I_q, et on conclut par induction sur q. $\square$

On remarque un aspect important de la preuve réside dans le fait que l'on ne suit pas scrupuleusement les coureurs et leurs positions mais seulement la distance qu'ils peuvent parcourir durant certains intervalles de temps I_k. Un ajustement de la preuve précédente nous permet d'obtenir un résultat plus fort

Théorème 3.11. *Soit un système de vitesses entières $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ tel que $\frac{v_{i+1}}{v_i} \geqslant 2\frac{n+1}{n-1}$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n-1$, et soient $r_1, \ldots, r_n$ quelques nombres réels. Alors, il existe un nombre $t \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\|tv_i + r_i\| \geqslant \frac{1}{n+1} \quad \textit{pour tout } i = 1,2,\ldots,n.$$

Le rapport r entre deux vitesses consécutives était au moins $r = \frac{2(n+1)}{(n-1)}$. La méthode de recouvrement utilisée dans la preuve précédente peut être améliorée en considérant que le dernier pas d'induction doit tout simplement respecter $m(I_{n-1}) \cdot v_n > \frac{1}{2(n+1)}$ afin de permettre $m(I_n) > 0$. En considérant que les C_j sont des ensembles d'intervalles ouverts, on peut même choisir $m(I_{n-1}) \cdot v_n = \frac{2}{(n+1)} \leq 2$ qui nous permettrait dans le pire des cas de prendre $I_n = \{x\}$, $m(I_n) = 0$. Il est possible de réduire r à être égal à 2. Pour le faire, on observe que la condition que $m(I_k)v_{k+1} \geqslant 2$ est beaucoup trop exigeante et peut être remplacée par $m(I_k) \cdot v_{k+1} \geq 2\epsilon_k + \frac{2}{n+1}$ pour un ensemble de poids $0 \leq \epsilon_k \leq \frac{n-1}{n+1}$ avec $\epsilon_{n-1} = 0$.

Théorème 3.12. *Soit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ un ensemble de vitesses entières. Si $v_{i+1} \geqslant 2v_i$ pour tout $i = 1,2,\ldots,n-1$, alors V satisfait la CCLR.*

Démonstration. Comme dans la preuve du théorème 3.10, on pose $C_j = \{t \in [0,1) : \|tv_j\| < 1/(n+1)\}$ et on construit une suite d'invervalles fermés et non-vides qui satisfont pour tout k les condtions suivantes :

(a) $I_k \cap C_k = \emptyset$;
(b) $m(I_k)v_{k+1} \geqslant 2\frac{n-k+1}{n+1}$.

On pose $I_1 = [\frac{1}{v_1(n+1)}, \frac{n}{v_1(n+1)}]$. Puis, supposons qu'on a construit $I_1, \ldots, I_q$ pour un quelconque $q \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Construisons I_{q+1}. On sait que $m(I_q)v_{q+1} \geqslant 2\frac{n-q+1}{n+1} = \frac{2}{n+1} + 2\frac{n-q}{n+1}$. Donc, il existe un intervalle $I_{q+1} \subset I_q$ tel que $I_{q+1} \cap C_{q+1} = \emptyset$ et $m(I_{q+1})v_{q+1} = \frac{n-q}{n+1}$. On a donc que

$$m(I_{q+1})v_{q+2} \geqslant 2m(I_{q+1})v_{q+1} \geqslant 2\frac{n-q}{n+1}, \tag{3.4.6}$$

comme il faut. Ceci conclut l'étape inductive et, donc, la preuve du théorème. □

Une amélioration substantielle a été trouvée en considérant une progression arithmétique d'indices pour laquelle on impose une condition sur le rapport des vitesses d'indices consécutifs au sein de cette progression. Un résultat de Dubickas [**7**] utilise cette idée et permet pour n assez grand d'avoir que la condition $\frac{v_{i+1}}{v_i} \geq 1 + \frac{33\log(n)}{n} = r$ est suffisante pour l'existence t tel que$\|tV\| \geq \frac{1}{n+1}$. L'élément important de la preuve est un lemme permettant de borner inférieurement $\sup_t(\|tV\|) \geq f(h)$,

Lemme 3.13. *Soit h un entier positif et $c(h)$ un réel $c(h) \geq 4eh$. Si $\{x_k\}_1^\infty$ est une suite croissante telle que $x_{k+h} \geq c(h)x_k$ alors il existe t tel que*

$$\|tx_k\| \geq \frac{1}{8eh} - \frac{1}{2c(h)} =: f(h) \quad \textit{pour tout } n \geqslant k \geqslant 1 \tag{3.4.7}$$

(ici e est la constante d'Euler $e \approx 2.718$).

En posant $v_k = x_k$, on cherche des valeurs de h et de $c(h)$ afin que $f(h) \geq \frac{1}{n+1}$ et on trouve que $c(h) = n+1$ et $h = \left\lfloor \frac{n+1}{12e} \right\rfloor$ nous donnent $f(h) \geq \frac{1}{n+1}$. Puis, on observe que si $v_{i+1}/v_i \geqslant r$ pour tout i, alors $v_{i+h}/v_i \geqslant r^h$ pour tout i. Donc, si $r = c(h)^{1/h} = \exp(\frac{\log c(h)}{h})$, on voit que V satisfait la CCLR. Ici $\frac{\log c(h)}{h} \sim \frac{12e\log n}{n}$ lorsque $n \to \infty$. En choisissant r de façon plus précise, Dubickas montre son théorème.

Chapitre 4

À propos de la borne inférieure de l'écart de solitude

Rappelons nous que l'écart de solitude δ_n est la plus grande valeur pour laquelle pour tout système V avec $|V| = n, \exists t \in \mathbb{R}, \|tV\| \geq \delta_n$. On a déduit dans l'introduction que $\frac{1}{2n} \leq \delta_n \leq \frac{1}{n+1}$ où la borne inférieure $\delta_n \geqslant f(n) = \frac{1}{2n}$ avait été trouvée à l'aide d'un argument simple basé sur les recouvrements.

Certaines améliorations ont été apportées à la borne inférieure de l'écart de solitude. Une amélioration notable a été trouvée par Terence Tao [**14**]. Il a montré qu'il existait une constante $c > 0$ pour laquelle on aurait que $f(n) = \frac{1}{2n} + \frac{c\log(n)}{n^2 \log\log(n)^2}$ serait une borne inférieure pour l'écart de solitude δ_n pour des n assez grands. Ces estimations sont toutefois bien loin de celle de la conjecture du coureur solitaire qui nous dit que $f(n) = \frac{1}{n+1}$ est un choix valide de f . La difficulté du problème consistant à trouver une meilleure borne sur l'écart de solitude est qu'il faut avoir une méthode assez puissante pour pouvoir quantifier, pour $I \subseteq \{1, 2, 3, 4 \ldots, n\}$,

$$\bigcap_{i \in I} \{t \in [0,1), \|tv_i\| < f(n)\} \tag{4.0.1}$$

afin d'obtenir une meilleure estimation de $m(\bigcup_{i \leq n} \{t \in [0,1), \|tv_i\| < f(n)\})$ via inclusion-exclusion. L'argument de Tao se base sur une étude de

$$m(\bigcap_{i \in I} \{t \in [0,1), \|tv_i\| < f(n)\}). \tag{4.0.2}$$

Pour certains ensembles $I \subseteq \{1, 2, 3, 4 \ldots, n\}$ avec $|I| \in \{2, 3\}$ en passant entre autres par une étude du deuxième et troisième moments de la fonction

$$F(t) = \sum_{v \in V} 1_{\|tv\| < f(n)}. \tag{4.0.3}$$

Il utilise aussi le fait qu'il existe, pour $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}, I \subset \{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$ une relation entre la mesure des ensembles de la forme $\bigcap_{i\in I}\{t \in [0,1), \|tv_i\| < f(n)\}$ et la quantité

$$\#\{(c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_m}), c_j \in \mathbb{Z}, |c_j| \leq \frac{1}{\delta_n}, \sum_{k\leq m} c_{i_k} \cdot v_{i_k} = 0\}$$

.

Chapitre 5

Les cas pour 1,2,3 et 4 coureurs

Dans cette section, nous allons montrer CCLR pour 4 coureurs ou moins.

Théorème 5.1. *Si* $|V| \leqslant 4$*, alors* V *satisfait la CCLR.*

Les résultats montrés dans les sections précédentes nous permettent de se restreindre aux systèmes $V \subset \mathbb{N}$.

5.1. Le cas pour un coureur

Ce cas est évident puisque $|V| = 1$ et donc un temps de solitude serait $t = \frac{1}{2(v_1)}$ puisque $\left\| \frac{1}{2v_1} \cdot v_1 \right\| = \frac{1}{2}$.

5.2. Pour deux coureurs

Démonstration. Pour ce cas, on peut supposer qu'il existe un système pour lequel il n'existe pas de temps de solitude. Prenons $V = \{v_1, v_2\}$ deux vitesses copremières. Si $pgcd(v_1,3) = pgcd(v_2,3) = 1$ alors on pourrait choisir un temps $t = \frac{1}{3}$ (critère de divisibilité) ce qui nous donnerait

$$\|tv_1\|, \|tv_2\| \in \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$$

ce qui serait une contradiction avec l'hypothèse que le coureur n'est jamais solitaire. Supposons alors qu'une des deux vitesses est divisible par 3 . Écrivons $v_1 = u_1 3^m$ et $v_2 = u_2 3^l$, avec $pgcd(u_1,3) = pgcd(u_2,3) = 1$. SPGD, supposons que $m \geqslant l$. Puisque $pgcd(v_1,v_2) = 1$, on peut poser $l = 0$. Considérons des temps de la forme $t' = \frac{t}{3^m}$,

$$\|t'v_1\| = \|tu_1\|$$

$$\|t'v_2\| = \left\| t\frac{u_2}{3^m} \right\|$$

On remarque que si on prend c un entier copremier à 3, alors pour $t = \frac{c}{3}$, $\|tu_1\| \in \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$. Il suffit donc de trouver c tel que

$$\left\|\frac{c}{3}\frac{u_2}{3^m}\right\| \geq \frac{1}{3}.$$

On voudrait une valeur de c qui nous donnerait une situation idéale c'est à dire une valeur de c qui nous permet d'approcher la position $\frac{1}{2}$ sur le cercle et donc

$$\left\|\frac{cu_2}{3^{m+1}}\right\| \approx \frac{1}{2}. \tag{5.2.1}$$

Pour y arriver, on prend un entier k assez près de $\frac{3^{m+1}}{2}$

$$k = \left\lfloor 3^{m+1}/2 \right\rfloor = \frac{3^{m+1}-1}{2}, \tag{5.2.2}$$

et on impose une valeur de c telle que $cu_2 \equiv k \pmod{3^{m+1}}$ ce qui est possible puisque $pgcd(u_2{,}3) = 1$. On a donc un temps $t = \frac{c}{3} = \frac{u_2^{-1}(3^{m+1-l}-1)/2}{3}$.

$$\begin{aligned}\left\|t\frac{u_2}{3^m}\right\| &= \left\|\frac{cu_2}{3^{m+1}}\right\| \\ &= \left\|\frac{k}{3^{m+1}}\right\|\end{aligned}$$

On utilise ensuite l'inégalité inverse du triangle nous permettant d'obtenir l'inégalité

$$\begin{aligned}\left\|\frac{k}{3^{m+1}}\right\| &= \left\|\frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 3^{m+1}}\right\| \\ &\geq \left\|\frac{1}{2}\right\| - \left\|\frac{1}{2\cdot 3^{m+1}}\right\|\end{aligned}$$

et puisque $m \geq 1$ on a que $\left\|\frac{1}{2\cdot 3^{m+1}}\right\| \leq \frac{1}{2\cdot 3^2}$ et en remplaçant on obtient

$$\begin{aligned}\left\|\frac{k}{3^{m+1}}\right\| &\geq \frac{1}{2} - \frac{1}{18} \\ &> \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Puisque tous les cas ont été traités, on conclut que chaque système de deux vitesses entières satisfait $CCLR$.

$\square$

5.3. Trois coureurs: analyse de Fourier

On s'inspire de [**5**] qui est une preuve historique de Cusick. Une preuve plus élémentaire a été faite pour ce cas dans [**2**]. On prend $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ puis on suppose qu'il est un contre-exemple de CCLR pour le cas à 3 coureurs. On peut supposer sans perte de généralité que $pgcd(v_1,v_2,v_3) = 1$. Par hypothèse on suppose que l'ensemble des temps pour lequels $\|tV\| \geq \frac{1}{4}$ a mesure nulle et donc

$$\int_0^1 1_{\|tv_1\|\geq 1/4} 1_{\|tv_2\|\geq 1/4} 1_{\|tv_3\|\geq 1/4} dt = 0. \tag{5.3.1}$$

Il faut noter que certains ensembles de vitesses respectent (5.3.1) mais ne sont pas des contre-exemples. Ces ensembles de vitesses devraient par conséquent être des instances serrées qui ont des temps de solitude ponctuels et ont donc de mesure nulle. Il sera donc important de montrer que les seuls ensembles V qui respectent (5.3.1) sont les instances serrées.
Si tous les membres de V étaient impairs, alors on aurait que $\|\frac{1}{2}V\| = 1/2 > 1/4$, ce qui est un contradiction. Donc, il faut que V contient au moins un nombre pair. On pose $k \geq 1$ ainsi que deux étiquetages possibles que l'on va appeler «pré-étiquetages »

cas 1

- $v_1 = 2^k v_1' \quad v_1'$ impaire

- v_2,v_3 non divisibles par 2^k

cas 2

- v_1 impaire

- $v_2 = 2^k v_2'$,$v_3 = 2^k v_3'$,v_2' et v_3' impaires

Le choix d'étiquetage est pratique puisque v_1 a des propriétés qui le distinguent de v_2,v_3 permettant ainsi de calculer la mesure de $\{t, \|\{v_1, v_i\}t\| \geq \frac{1}{4}\}$ pour $i \in \{2, 3\}$. Le lemme suivant va nous permettre d'obtenir des valeurs explicites pour la mesure de tels ensembles.

Lemme 5.2. *Soit G la fonction 1-périodique donnée par $G(x) = x^2 - x + 1/6$ quand $x \in [0,1)$. Elle a le developpement suivant en séries de Fourier :*

$$G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi k x)}{\pi^2 k^2}. \tag{5.3.2}$$

Et soit v_i,$v_j \in \mathbb{N}$ et $\gamma = pgcd(v_i,v_j)$ alors on a

$$\int_0^1 \prod_{v\in\{v_i,v_j\}} (1_{\|tv\|\geqslant\delta} - (1-2\delta))dt = \frac{\gamma^2}{v_i v_j}(G(\delta(v_i - v_j)/\gamma) - G(\delta(v_i + v_j)/\gamma)) \tag{5.3.3}$$

Démonstration. On a une façon d'exprimer les fonctions indicatrices dans les intégrales comme suit

$$1_{(\|x\|\geq\delta)} - (1-2\delta) = 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi m\delta)}{\pi m}\cos(2\pi m x) \tag{5.3.4}$$

Soit $f(t) = 1_{\|tv_i\|\geq\delta} - (1-2\delta)$ et $g(t) = 1_{\|tv_j\|\geq\delta} - (1-2\delta)$. On a par Plancherel [**9**] qui nous dit que si $f(t) = \sum_{k_i\in\mathbb{Z}} a_{k_i} e^{2\pi i k_i v_i x}$, $g(t) = \sum_{k_j\in\mathbb{Z}} b_{k_j} e^{2\pi i k_j v_j x}$, $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^2 < \infty$ et que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |b_k|^2 < \infty$, alors

$$\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt = \sum_{k_i,k_j\in\mathbb{Z}, k_iv_i=k_jv_j} a_{k_i} b_{k_j}.$$

On a en fait que $a_k = b_k$ et puisque f et g peuvent être écrites comme une série de cosinus, on a que $a_k = a_{-k} = \frac{\sin(2\pi k\delta)}{\pi k}$. On peut donc appliquer Plancherel puisque $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^2 < \infty$. Par conséquent, si $pgcd(v_i,v_j) = 1$ alors

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(t)g(t)dt &= \sum_{k_i,k_j\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}, k_iv_i=k_jv_j} \frac{\sin(2\pi k_i\delta)}{\pi k_i}\frac{\sin(2\pi k_j\delta)}{\pi k_j} \\
&= \sum_{k_i,k_j\geq 1, k_iv_i=k_jv_j} 2\frac{\sin(2\pi k_i\delta)}{\pi k_i}\frac{\sin(2\pi k_j\delta)}{\pi k_j} \\
&= \sum_k \frac{\cos(2\pi k\delta(v_i-v_j)) - \cos(2\pi k\delta(v_i+v_j))}{v_iv_j(\pi k)^2}.
\end{aligned} \tag{5.3.5}$$

On observe aussi que le développement de la fonction $G(x)$ en série de Fourier nous donne a un terme constant $\int_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{6})dx = 0$, que puisque, pour $k \geq 1$ on a

$$2\int_0^1 x^2\cos(2\pi kx)dx = \frac{1}{(\pi k)^2}$$
$$2\int_0^1 x\cos(2\pi kx)dx = 0$$

et que

$$2\int_0^1 x^2\sin(2\pi kx)dx = \frac{-1}{(2\pi k)}$$
$$2\int_0^1 x\sin(2\pi kx)dx = \frac{-1}{(2\pi k)},$$

nous permet d'avoir

$$G(x) = \sum_{k\geq 1} \frac{\cos(2\pi kx)}{(\pi k)^2}.$$

En utilisant le développement de G dans (5.3.5), on obtient alors

$$\sum_{k\geq 1} \frac{\cos(2\pi k\delta(v_i - v_j)) - \cos(2\pi k\delta(v_i + v_j))}{v_i v_j (\pi k)^2} = \frac{1}{v_i v_j}(G(\delta(v_i - v_j)) - G(\delta(v_i + v_j))). \quad (5.3.6)$$

Dans le cas où $pgcd(v_i,v_j) \neq 1$, on a que le changement de variable à (5.3.5) $k = k'/pgcd(v_i,v_j) = k'/\gamma$ nous donne.

$$\int_0^1 f(t)g(t)dt = \frac{\gamma^2}{v_i v_j}(G(\delta(v_i - v_j)/\gamma) - G(\delta(v_i + v_j)/\gamma)).$$

□

On peut ainsi spécialiser ce résultat en prenant $\delta = \frac{1}{4}$.

Corollaire 5.3. *En conservant la notation du lemme* 5.2*, si on a* $2|v_i v_j/\gamma^2$*, alors*

$$\int_0^1 (1_{\|tv_i\|\geq\frac{1}{4}} - 1/2)(1_{\|tv_j\|\geq\frac{1}{4}} - 1/2)dt = 0. \quad (5.3.7)$$

Si $2 \nmid v_i v_j/\gamma^2$*,*

$$\int_0^1 (1_{\|tv_i\|\geq\frac{1}{4}} - 1/2)(1_{\|tv_j\|\geq\frac{1}{4}} - 1/2)dt = \begin{cases} \frac{\gamma^2}{4v_iv_j} & si\ \frac{v_i - v_j}{\gamma} \equiv 0 \pmod 4, \\ \frac{-\gamma^2}{4v_iv_j} & si\ \frac{v_i - v_j}{\gamma} \equiv 2 \pmod 4, \end{cases}. \quad (5.3.8)$$

Démonstration. En utilisant le lemme 5.2 avec $\delta = \frac{1}{4}$, on peut récrire l'intégrale comme suit:

$$\int_0^1 (1_{\|tv_i\|\geq\frac{1}{4}} - 1/2)(1_{\|tv_j\|\geq\frac{1}{4}} - 1/2)dt = \frac{\gamma^2}{v_iv_j}\Big(G\Big(\frac{(v_i - v_j)/\gamma}{4}\Big) - G\Big(\frac{(v_i + v_j)/\gamma}{4}\Big)\Big).$$

Posons par la suite les entiers $x = (v_i - v_j)/\gamma \pmod 4$ et $y = (v_i + v_j)/\gamma \pmod 4$. Puisque G est 1 périodique, il suffit de considérer les valeurs que peuvent prendre $G(0), G(\frac{1}{4}), G(\frac{2}{4})$ et $G(\frac{3}{4})$. On utilise le fait que $G(t) = t^2 - t - \frac{1}{6}$ pour $t \in [1,0)$ ce qui nous permet de trouver $G(0) = -\frac{1}{6}$, $G(\frac{1}{4}) = \frac{-3}{16} - \frac{1}{6}$, $G(\frac{2}{4}) = \frac{-4}{16} - \frac{1}{6}$ et $G(\frac{3}{4}) = \frac{-3}{16} - \frac{1}{6}$.

Si $2|v_iv_j/\gamma^2$, on a que puisque $pgcd(v_i,v_j) = 1$, alors $x \pmod 4 \in \{1,3\}$ et alors, puisque $y = x + \frac{2v_j}{\gamma}$, on aurait aussi $y \pmod 4 \in \{1,3\}$. Étant donné que $G(\frac{1}{4}) = G(\frac{3}{4})$, on aurait que $\frac{\gamma^2}{v_iv_j}\Big(G(\frac{x}{4}) - G(\frac{y}{4})\Big) = 0$.

Lorsque $2 \nmid v_iv_j/\gamma^2$, on a que $\frac{v_i}{\gamma} \equiv \frac{v_j}{\gamma} \equiv 1 \pmod 2$ et donc $x \pmod 4 \in \{0,2\}$. Puisque $y = x + 2v_j \pmod 4$, on a que $y \pmod 4 \in \{2,0\}$. Si $x \equiv 0 \pmod 4$, alors $y \equiv 2 \pmod 4$ ce qui nous donne

$$\frac{\gamma^2}{v_iv_j}\Big(G(\frac{x}{4}) - G(\frac{y}{4})\Big) = 0 + \frac{\gamma^2}{4v_iv_j}.$$

Si de l'autre côté on a $x \equiv 2 \pmod 4$, on a que $y \equiv 0 \pmod 4$ ce qui nous permet d'obtenir

$$\frac{\gamma^2}{v_i v_j}\Big(G(\frac{x}{4}) - G(\frac{y}{4})\Big) = -\frac{\gamma^2}{4v_i v_j} + 0.$$

Tous les cas étant traités, on conclut. □

5.3.1. Mesure d'événements

Pour simplifier la notation, prenons

$$I_A := \prod_{a \in A} 1_{\|tv_a\| \geq \frac{1}{4}} \tag{5.3.9}$$

et considérons implicitement I_A comme une fonction de t. De plus, si on a un ensemble $A = \{a, b, c \dots\}$, on utilise la notation $I_A = I_{a,b,c,\dots}$. On considère ensuite les événements suivants $(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3) := \{t \in [0,1), 1_{\|tv_i\| \geq \frac{1}{4}} = \epsilon_i \forall i\}$. On peut alors faire un tableau de la mesure de tels évenements. Le tableau sera rempli à l'aide des lemmes précédents ainsi qu'à l'aide d'autres outils.

Lemme 5.4. *Soit v_1, v_2, v_3 des vitesses entières comme identifiées dans le début de la section et telles que $\int_0^1 I_{1,2,3} = 0$, alors les mesures des ensembles$\{(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3), \epsilon_i \in \{0,1\}\}$ sont données par le tableau suivant*

ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	$m((\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3))$
1	1	1	0
1	1	0	$\frac{1}{4}$
1	0	1	$\frac{1}{4}$
0	1	1	$\frac{1}{4} - \frac{pgcd(v_2,v_3)}{4v_2v_3}$
1	0	0	0
0	1	0	$\frac{pgcd(v_2,v_3)}{4v_2v_3}$
0	0	1	$\frac{pgcd(v_2,v_3)}{4v_2v_3}$
0	0	0	$\frac{1}{4} - \frac{pgcd(v_2,v_3)}{4v_2v_3}$

Tableau 5.1. Tableau des mesures possibles pour les tuples $(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3)$

Démonstration. Certaines mesures dans le tableau peuvent être trouvées en considérant le pré-étiquetage de v_1, v_2, v_3 ainsi que le corollaire 5.3. Par hypothèse on aurait que $m((1,1,1)) = 0$. Si on se base sur les deux pré-étiquetages ,on a que v_1 n'est jamais paire en même temps que v_2,v_3. Cela nous permet donc d'utiliser le corollaire (5.3) qui nous permet de dire que $m((1,1,0)) = \frac{1}{4}$ et $m((1,0,1)) = \frac{1}{4}$. Le fait que $m(\{t, \|v_1 t\| \geq \frac{1}{4}\}) = \frac{1}{2}$ nous permet de déduire $m((1,0,0)) = 0$. Puisque

$$m((1,0,0)) + m((1,1,1)) + m((1,0,1)) + m((1,1,0)) = \frac{1}{2}, \tag{5.3.10}$$

les deux derniers termes du côté à gauche sont égaux à 1/4, d'où on déduit que $m(1,0,0) = 0$. De la même façon, on peut déduire que

$$m((0,1,1)) + m((0,0,1)) = \frac{1}{4} \tag{5.3.11}$$

et

$$m((0,0,0)) + m((0,1,0)) = \frac{1}{4}. \tag{5.3.12}$$

On utilise une autre fois le corollaire 5.3 pour trouver $m((0,1,1))$ en considérant que par hypothèse on a que $m((1,1,1)) = 0$ et puisque

$$\begin{aligned} m((0,1,1)) + m((1,1,1)) &= \int_0^1 I_{2,3} dt \\ &= \frac{1}{4} \text{ ou } \frac{1}{4} \pm \frac{pgcd(v_2,v_3)^2}{4v_2v_3}, \end{aligned}$$

on déduit que $m((0,1,1)) = \frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{4} \pm \frac{pgcd(v_2,v_3)^2}{4v_2v_3}$. On décompose par la suite $m((0,0,0))$

$$\begin{aligned} m((0,0,0)) &= \int_0^1 (1 - 1_{\|tv_1\| \geq \frac{1}{4}})(1 - 1_{\|tv_2\| \geq \frac{1}{4}})(1 - 1_{\|tv_3\| \geq \frac{1}{4}}) dt \\ &= \int_0^1 (1 - I_1)(1 - I_2)(1 - I_3) dt \\ &= \int_0^1 1 - I_1 - I_2 - I_3 + I_{1,2} + I_{1,3} + I_{2,3} - I_{1,2,3} dt \\ &= 1 - (1/2 + 1/2 + 1/2) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \int_0^1 I_{2,3}) - 0 \\ &= \int_0^1 I_{2,3} \\ &= m((0,1,1)) + m((1,1,1)) \\ &= m((0,1,1)). \end{aligned}$$

On va montrer qu'il est impossible que $m((0,1,1)) \geq \frac{1}{4}$. Par (5.3.11), on a $m((0,0,1)) = \frac{1}{4} - m((0,1,1)) \leq 0$. La mesure ne pouvant pas être négative, on peut supposer $m((0,0,1)) = 0$. On aussi $m((0,0,0)) = m((0,1,1))$ et par (5.3.12), on a $m((0,1,0)) = \frac{1}{4} - m((0,0,0)) \leq 0$. La mesure ne pouvant pas être négative, on peut supposer $m((0,1,0)) = 0$. On a déjà que $m((1,0,0)) = 0$ et par conséquent, on aurait que toutes les mesures $\{m((1,0,0)), m((0,1,0)), m((0,0,1))\}$ seraient nulles. Mais dans ce cas, si $x \in V$ est le coureur le plus rapide et que $y \in V$ est le deuxième coureur le plus rapide, le premier temps t pour lequel $\|tx\| \geq \frac{1}{4}$ (resp. $\|ty\| \geq \frac{1}{4}$) est à $t_1 = \frac{1}{4x}$ (resp. $t_2 = \frac{1}{4y}$). Alors, s'il existe $\Delta > 0$ pour lequel pour tout $t \in [t_1, \frac{1}{4x} + \Delta)$ on a $\|tx\| \geq \frac{1}{4}$ ainsi que $\|ty\| < \frac{1}{4}$. Il faut que $(\frac{1}{4x} + \Delta) \cdot y < \frac{1}{4}$ et que $(\frac{1}{4x} + \Delta) \cdot x \leq \frac{3}{4}$. Ce que l'on obtient alors est une valeur de Δ qui doit satisfaire

$$\Delta < \min(\frac{1}{2x}, \frac{x-y}{4xy}) \tag{5.3.13}$$

Puisque $x > y$, on peut prendre $\Delta = \frac{1}{2} \cdot \min(\frac{1}{2x}, \frac{x-y}{4xy})$ nous donnant une valeur $\Delta > 0$ telle que pour tout $t \in [\frac{1}{4x}, \frac{1}{4x} + \Delta)$, le coureur x est dans $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ tandis que les autres coureurs sont dans $(\frac{-1}{4}, \frac{1}{4})$. Il est donc impossible que toutes les mesures $\{m((1,0,0)), m((0,1,0)), m((0,0,1))\}$ soient nulle. La seule possibilité est alors

$$m((0,1,1)) = \frac{1}{4} - \frac{pgcd(v_2,v_3)^2}{4v_2v_3},$$

et par l'égalité $m((0,1,1)) = m((0,0,0))$, nous permet de déduire que

$$m((0,0,0)) = \frac{1}{4} - \frac{pgcd(v_2,v_3)^2}{4v_2v_3}.$$

On peut alors trouver $m((0,0,1))$ et $m((0,1,0))$ en utilisant (5.3.11) et (5.3.12).

$$\begin{aligned} m((0,0,1)) &= \frac{1}{4} - m((0,1,1)) \\ &= \frac{pgcd(v_2,v_3)^2}{4v_2v_3} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} m((0,1,0)) &= \frac{1}{4} - m((0,0,0)) \\ &= \frac{pgcd(v_2,v_3)^2}{4v_2v_3}. \end{aligned}$$

On a donc toutes les entrées du tableau. □

5.3.2. Relations d'ordre sur v_1,v_2,v_3 et conséquences sur le tableau des mesures

Il est possible d'ordonner les vitesses selon leur taille ce qui nous permet entre autres de vérifier si $m(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3) = 0$ est possible pour un triplet $(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3)$. En fait, on va montrer que toute façon d'ordonner v_1,v_2 et v_3 nous conduit soit à l'impossibilité que $v_1.v_2.v_3$ puissent former un tableau 5.1 ou a des instances serrées du coureur solitaire.

Puisque les vitesses v_2,v_3 dans les deux pré-étiquetages ne sont pas distinguables, on peut prendre un étiquetage unique $\mathfrak{E}$ pour lequel on a la relation d'ordre $v_2 > v_3$. On a alors 3 façons d'ordonner v_1,v_2,v_3 :

(a) $v_1 > v_2 > v_3$;

(b) $v_2 > v_3 > v_1$;

(c) $v_2 > v_1 > v_3$;

Cas 1: $v_1 > v_2 > v_3$.

Dans ce cas-ci, on montre que $\|tV\| \geqslant 1/4$.

Remarque 5.1. Si V est un ensemble de trois vitesses entières avec étiquetage $\mathfrak{E}$ et telles que $\|tV\| < \frac{1}{4} \forall t \in \mathbb{R}$, on ne peut pas avoir l'ordonnement $v_1 > v_2 > v_3$

Comme il a été fait lors du remplissage du tableau, si v_1 est le plus rapide des coureur, alors il existerait $\Delta = \frac{1}{2} \cdot \min(\frac{1}{2v_1}, \frac{v_1 - v_2}{4v_1v_2})$ tel que pour tout $t \in [\frac{1}{4v_1}, \frac{1}{4v_1} + \Delta)$, $\|tv_1\| \geq \frac{1}{4}$ et $\|tv_3\| < \|tv_2\| < \frac{1}{4}$. Cela voudrait donc dire que $m((1{,}0{,}0)) \geq \Delta > 0$ ce qui est une contradiction avec l'entrée du tableau $m((1{,}0{,}0)) = 0$.

Cas 2: $v_2 > v_3 > v_1$.

On va montrer que ce cas est incompatible avec notre hypothèse que $m(1{,}1{,}1) = 0$. On commence avec le résultat suivant:

Lemme 5.5. *Si $\int_0^1 I_V dt = 0$ et que $\frac{3v_1}{2} \geq v_3 \geq v_1$, alors*

$$v_2 \leq \frac{v_1}{2}.$$

Démonstration. Les bornes $\frac{3v_1}{2} \geq v_3 \geq v_1$ nous donnent un bon contrôle. En effet, v_3 n'est pas bien plus vite que v_1. Or, le premier instant où v_3 quitte $[1/4{,}3/4]$ est au plus tôt à $t = \frac{3}{4v_3} \geq \frac{1}{2v_1}$. Le premier instant où v_1 entre dans l'arc est à $t = \frac{1}{4v_1}$. Par conséquent, il ne faut pas que v_2 soit dans l'arc $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ pour tout $t \in [\frac{1}{4v_1}, \frac{1}{2v_1}]$ à défaut de contredire l'hypothèse. Il faut donc que la mesure de l'intervalle de temps pour lequel $\|tv_2\| < \frac{1}{4}$ soit plus grande que $\frac{1}{4v_1}$ ce qui nous permet conclure que $\frac{1}{2v_2} \geq \frac{1}{4v_1}$ et donc que $2v_1 \geq v_2$.

Maintenant que l'on a un contrôle sur la taille de v_2 en par v_1, on considère le moment $t' := \frac{3}{4v_2}$ qui est le premier moment où v_2 quitte l'arc $(1/4, 3/4)$. Puisque $2v_1 \geq v_2$, on a que $\frac{3}{8v_1} \leqslant \frac{3}{4v_2}$. Alors, si on avait $v_2 > v_1$, on aurait un ensemble de mesure non-nulle autour de $t'' = \frac{3}{8v_1} \in (\frac{1}{4v_2}, \frac{3}{4v_2})$ pour lequel v_2 est dans $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ ce qui serait une contradiction puisque v_3 aussi s'y retrouverait, ce qui nous donnerait $m(1{,}1{,}1) > 0$. Il faut donc que $v_2 < v_1$ ce qui force le premier temps d'entré de v_2 dans l'arc $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ à être au moins plus grand que le temps de sortie minimal de v_3. On obtient par la suite la relation suivante

$$\frac{1}{4v_2} \geq \frac{3}{4v_3} \geq \frac{1}{2v_1}$$

qui nous permet de conclure que $v_2 \leq \frac{v_1}{2}$. $\square$

Le lemme précédent implique que si $m((1,1,1)) = 0$ et que l'on a le cas $v_2 > v_3 > v_1$, alors on doit avoir

$$v_3 > \frac{3v_1}{2}.$$

On utilise les valeurs du tableau (5.1) puis on utilise le fait que $m((1,0,0)) = m((1,1,1)) = 0$ afin de déterminer d'autres conditions sur v_1,v_2,v_3.

Cherchons des intervalles de temps pour lesquels v_1 est dans l'arc $[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$ et dans lesquels se trouve un intervalles de temps de mesure $\frac{1}{2v_3}$ durant lequel v_3 est uniquement dans $(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$ ou dans $(\frac{-1}{4},\frac{1}{4})$. On cherche alors des intervalles de temps de la forme $[\frac{4k_1+1}{4v_1},\frac{4k_1+3}{4v_1}]$ et $\frac{2k_3+1}{4v_3},\frac{2k_3+3}{4v_3})$ pour quelques $k_1,k_3 \in \mathbb{Z}$ qui satisfont les inégalités suivantes :

$$\frac{4k_1+1}{4v_1} \leq \frac{2k_3+1}{4v_3} \leq \frac{2k_3+3}{4v_3} \leq \frac{4k_1+3}{4v_1} \tag{5.3.14}$$

Lemme 5.6. *Soit 3 vitesses naturelles $v_2 > v_3 > \frac{3v_1}{2}$. Alors il existe toujours des entiers k_1,k_3 satisfaisant* (5.3.14)*.*

Démonstration. Soit $r = \frac{v_3}{v_1}$. On peut reformuler la condition (5.3.14) par

$$(4k_1+1)\cdot r \leq 2k_3+1 \leq 2k_3+3 \leq (4k_1+3)\cdot r \tag{5.3.15}$$

Considérons d'abord le cas où $r \geq 2$. Dans ce cas-ci, on peut facilement voir que si on pose $k_1 = 0$, afin que (5.3.15) tienne, il faut que k_3 soit un entier qui appartenant à $[\frac{r-1}{2},\frac{3(r-1)}{2})$. Étant donné que $m\Big([\frac{r-1}{2},\frac{3(r-1)}{2})\Big) = \frac{r}{2} \geq 1$, on assure l'existence d'un tel entier k_3.

Supposons alors que $r \in (3/2,2)$. Choisissons $k_3 = 3k_1+1$ et observons que, avec ce choix, les inégalités (5.3.15) sont équivalentes aux inégalités

$$\frac{5-3r}{4r-6} \leq k_1 \leq \frac{3-r}{4r-6}, \tag{5.3.16}$$

du fait que si $r > 3/2$, alors $6k_1+5 \leq (4k_1+3)r$, donc $(6-4r)k_1 \leq (3r-5)$, $\frac{5-3r}{4r-6} \leq k_1$. Similairement, $(4k_1+1)r \leq 6k_1+3$ nous donne $(4r-6)k_1 \geq 3-r$ et puisque $r \in (3/2,2)$, on a $k_1 \leq \frac{3-r}{4r-6}$. Il existe un tel $k_1 \in \mathbb{Z}$ qui satisfait 5.3.16, car

$$\frac{3-r}{4r-6} - \frac{5-3r}{4r-6} = \frac{r-1}{2r-3} > 1.$$

On a donc une solution pour $r > 3/2$. Autrement dit, on a une solution quand $v_3 > \frac{3v_1}{2}$, qui est l'hypothèse du lemme. $\square$

Remarque 5.2. Le lemme 5.6 nous permet donc de dire qu'il y a toujours un intervalle T de mesure $\frac{1}{2v_3}$ pour lequel au moins l'un des énoncés suivant est vrai:

- pour tout $t \in T$, on a $\|tv_1\| \geq \frac{1}{4}$ et $\|tv_3\| \geq \frac{1}{4}$;
- pour tout $t \in T$, on a $\|tv_1\| \geq \frac{1}{4}$ et $\|tv_3\| < \frac{1}{4}$.

On a les outils nécessaires pour montrer que les inégalités $v_2 > v_3 > v_1$ ne sont pas compatibles avec l'hypothèse $m((1{,}1{,}1)) = 0$.

Lemme 5.7. *Si V est un ensemble de trois vitesses entières avec étiquetage $\mathfrak{C}$ et telles que $\|tV\| < \frac{1}{4} \forall t \in \mathbb{R}$, on ne peut pas avoir l'ordonnement $v_2 > v_3 > v_1$.*

Démonstration. On suppose qu'il existe un contre-exemple, c'est à dire un ensemble de trois vitesses entières $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ avec un des étiquetages de l'énoncé pour lequel $v_2 > v_3 > v_1$ et tel que pour tout $t \in [0{,}1)$ $\|tV\| < \frac{1}{4}$. En appliquant le lemme 5.6, on peut trouver un intervalle T avec $m(T) \geq \frac{1}{2v_3}$ tel que $T \subset \{t \in [0{,}1) : \|tv_1\| \geq 1/4$ et $\|tv_3\| \geq 1/4\}$ ou $T \subset \{t \in [0{,}1) : \|tv_1\| \geq \frac{1}{4}$ et $\|tv_3\| < \frac{1}{4}\}$. On observe que si I est un intervalle inclus soit dans $\{t \in \mathbb{R} : \|tv_2\| < \frac{1}{4}\}$ ou dans $\{t \in \mathbb{R} : \|tv_2\| \geq \frac{1}{4}\}$, alors sa taille est $\leq \frac{1}{2v_2}$. De plus, les intervalles de temps R où $\|tv_2\| \geq \frac{1}{4}$ et ceux où $\|tv_2\| < \frac{1}{4}$ sont en alternance et donc une analyse des chevauchements est nécessaire. Soit E, intervalle de temps avec $m(E) < 1$, si on prend

- $N := \#\{\text{composantes connexes de } E\}$
- $N_1(E) := \#\{\text{composantes connexes de } E \cap \{t \in \mathbb{R} : \|tv_2\| < \frac{1}{4}\}\}$
- $N_2(E) := \#\{\text{composantes connexes de} E \cap \{t \in \mathbb{R} : \|tv_2\| > \frac{1}{4}\}\}$

Les conditions de chevauchement nous dit que $|N_1(E) - N_2(E)| \leq 1$. Prenons $J := T \cap \{t \in [0{,}1) : \|tv_2\| > \frac{1}{4}\}$ et $J' := T \cap \{t \in [0{,}1) : \|tv_2\| < \frac{1}{4}\}$. On a que $m(J) + m(J') = m(T)$. Supposons SPDG que $m(J) = 0$. On aurait alors que $N_1(J) = 0$. Puisque $m(T) = m(J')$ et que chaque composante connexe L de J' a mesure au plus $\frac{1}{2v_2} < \frac{1}{2v_3}$, on aurait que $N(J') \geq 2$. Mais puisque $N(J) = N_1(T) = 0$ et que $N(J') = N_2(T) \geq 2$, on a $|N_1(T) - N_2(T)| \geq 2$ ce qui vient en contradiction avec le critère de chevauchement. Par conséquent, $m(J) \neq 0$. On répète le processus mais en supposant cette fois-ci $m(J') = 0, m(T) = m(J)$ nous menant à la conclusion que $m(J') > 0$.

Maintenant, si $T \subset \{t \in [0{,}1) : \|tv_1\| \geq 1/4$ et $\|tv_3\| \geq 1/4\}$, puisque $m(J' \cap T) = m(J') > 0$, on aurait que $J' \subset (1{,}1{,}1)$ ce qui est impossible puisque par hypothèse, on a

$m((1{,}1{,}1)) = 0$. Si $T \subset \{t \in [0{,}1) : \|tv_1\| \geq 1/4$ et $\|tv_3\| < 1/4\}$ puisque $m(J \cap T) = m(J) > 0$, on aurait que $J \subset (1{,}0{,}0)$ ce qui est impossible puisque $m((1{,}0{,}0)) = 0$. $\square$

Cas 3: $v_2 > v_1 > v_3$.

Lemme 5.8. *Si V est un ensemble de trois vitesses entières avec étiquetage $\mathfrak{E}$ et telles que $\|tV\| < \frac{1}{4} \forall t \in \mathbb{R}$, on ne peut pas avoir l'ordonnement $v_2 > v_1 > v_3$*

Démonstration. On suppose le contraire et donc que l'on a un ensemble V étiqueté tel que $v_2 > v_1 > v_3$ pour lequel on a pour tout $t \in [0{,}1)$ $\|tV\| < \frac{1}{4}$. S'il existe des entiers k_1,k_3 tels que

$$\frac{4k_3+1}{4v_3} \leq \frac{4k_1+1}{4v_1} < \frac{4k_1+3}{4v_1} \leq \frac{4k_3+3}{4v_3} \tag{5.3.17}$$

alors il existe un intervalle $I \subset \{t \in [0{,}1) : \|tv_1\|, \|tv_3\| \geqslant 1/4\}$ de longueur $\frac{1}{2v_1}$. Mais puisque $\frac{1}{2v_2} < \frac{1}{2v_1}$, il y aura un sous ensemble J de I qui aura une mesure non-nulle et tel que pour tout $t \in J$, $\|tv_2\| \geq \frac{1}{4}$. Mais cela impliquerait alors que $J \subset (1{,}1{,}1)$, ce qui contredit l'hypothèse $m((1{,}1{,}1)) = 0$.

Dans le cas où V est un contre-exemple, il ne faut pas qu'il puisse y exister de tels entier k_1,k_3 qui satisfont 5.3.17. Prenons $r := \frac{v_1}{v_3}$ et trouvons pour quelles valeurs de r il n'existe pas de solution entière k_1,k_3 qui satisfaisant (5.3.17).

Cas 1: $r \leq 3/2$. Dans ce cas-ci, on peut utiliser le lemme 5.5 en interchangeant les rôles de v_1,v_3 dans l'énoncé. On arrive alors à une contradiction.

Cas 2: $r \geq 7/3$. Dans ce cas-ci, on affirme que l'intervalle $[\frac{1}{4v_3}, \frac{3}{4v_3}]$ contient un intervalle de la forme $[\frac{4k_1+1}{4v_1}, \frac{4k_1+3}{4v_1}]$. En effet, il faut avoir que l'intervalle $[\frac{r-1}{4}, \frac{3(r-1)}{4}]$ contienne un entier k_1. Cet entier existe lorsque $r \geqslant 3$, car l'intervalle a longueur ≥ 1. Quand $7/3 \leq r < 3$, on voit que l'intervalle contient le nombre 1.

On a trouve alors $k_1 \in \mathbb{Z}$ tel que $I := [\frac{4k_1+1}{4v_1}, \frac{4k_1+3}{4v_1}] \subset [\frac{1}{4v_3}, \frac{3}{4v_3}]$. Donc $\|tv_1\|, \|tv_2\| \geq 1/4$ pour tout $t \in I$. Mais puisque $m(I) = \frac{1}{2v_1} > \frac{1}{2v_2}$, on a que I contient un sous-ensemble I' de mesure positive tel que $\|tv_2\| \geq 1/4$ pour tout $t \in I'$. Donc, $m(1{,}1{,}1) \geq m(I') > 0$, ce qui est une contradiction.

Cas 3: $2 < r < 7/3$.

On prend $r = \frac{a}{b}$ en fraction réduite et ce qu'il faut trouver est un couple de valeurs $k_1.k_3$ telles que

$$4k_3a + a \leq 4k_1b + b$$

$$4k_3a + 3a \geq 4k_1b + 3b$$

Nous avons donc les deux inégalités suivantes

$$a - b \leq 4(k_1 b - k_3 a)$$

$$3(a - b) \geq 4(k_1 b - k_3 a)$$

puisque $\frac{a}{b} > 2$ on considère l'ensemble $H = \{a - b, \frac{a}{b} \in (2, \frac{7}{3})\}$ et on déduit que puisqu'on a $a > 2b$, alors $\min(H) \geq 2$. Étant donné que $pgcd(a,b) = 1$ on peut, pour tout entier c prendre des entiers $k_1, k_3 \geq 0$ tels que $k_1 b - k_3 a = c$. Une nouvelle inéquation est à vérifier.

$$a - b \leq 4c \leq 3(a - b) \tag{5.3.18}$$

Il y a au moins 5 entiers dans $[a - b, 3(a - b)]$ puisque

$$\begin{aligned}\big(3(a - b) - (a - b)\big) + 1 &= 2(a - b) + 1 \\ &\geq 2 \cdot 2 + 1 \\ &= 5\end{aligned}$$

et par conséquent il existe au moins un entier $x \in [a - b, 3(a - b)]$ tel que x est divisible par 4. On choisi alors $c = \frac{x}{4}$ ce qui nous permet d'avoir

$$a - b \leq 4\frac{x}{4} \leq 3(a - b) \tag{5.3.19}$$

et puisqu'il existe un couple d'entiers k_1, k_3 tel que $k_1 b - k_3 a = c$, on a en particulier qu'il existe un couple k_1, k_3 satisfaisant l'inégalité

$$(4k_3 + 1)r \leq (4k_1 + 1) < (4k_1 + 3) \leq (4k_3 + 3)r \quad \text{pour } 7/3 > r > 2. \tag{5.3.20}$$

On a donc conclut le traitement du cas $2 < r < 7/3$.

Cas 4: $\frac{3}{2} < r < 2$.

On utilise ensuite le fait que $m((1,0,0)) = 0$ pour trouver les conditions sur v_1, v_3 pour qu'un intervalle pour lequel $I_1(1 - I_3) = 1$ n'intersecte pas un intervalle pour lequel $I_2 = 0$. On cherche alors pour $r \in (\frac{3}{2}, 2)$ des entiers h_1, h_3 tels que

$$\frac{4h_3 + 3}{4v_3} \leq \frac{4h_1 + 1}{4v_1} < \frac{4h_1 + 3}{4v_1} \leq \frac{4h_3 + 5}{4v_3} \tag{5.3.21}$$

On peut donc poser $h_1 = 2h_3 + 1$ un choix provenant du fait que la valeur maximale que peut prendre r est 2. On obtient alors un nouvelle inégalité

$$(4h_3 + 3)r < 8h_3 + 5 < 8h_3 + 7 < (4h_3 + 5)r. \tag{5.3.22}$$

Elle est équivalente à

$$\frac{3r - 5}{8 - 4r} < h_3 < \frac{5r - 7}{8 - 4r}.$$

Notons que les fonctions $a(r) := \frac{3r-5}{8-4r}$ et $b(r) := \frac{5r-7}{8-4r}$ sont croissantes. De plus, $a(r) < 0 < b(r)$ quand $3/2 < r < 5/3$, donc on peut prendre $h_3 = 0$ dans ce cas-ci. Finalement, quand

$5/3 \leqslant r < 2$, on a que $b(r) - a(r) = \frac{r-1}{4-2r} \geqslant 1$, donc il existe un entier $h_3 \in [a(r),b(r)]$ qui satisfait l'inégalité. La seule valeur de r possible suite aux traitements des différents cas est donc $r = 2$ ce qui nous donne $2v_3 = v_1$.

On voudrait que $m((1,1,1)) = 0$ et par conséquent on voudrait que le premier temps où v_2 quitte l'arc $[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$ se produise avant le premier temps pour lequel le coureur le plus lent ,v_3, entre dans $[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$.

$$\begin{aligned} \frac{3}{4v_2} &\leq \frac{1}{4v_3} \\ 3v_3 &\leq v_2 \end{aligned} \tag{5.3.23}$$

ce qui nous donne $v_2 \geq 3v_3$. Par la suite, nous avons que $I_{1,3} = 1$ pour $t \in T = [\frac{1}{4v_3},\frac{3}{8v_3}] \cup [\frac{5}{8v_3},\frac{3}{4v_3}]$. Si on voulait recouvrir T avec des intervalles pour lesquels $I_2 = 0$, puisqu'ils ont mesure $\frac{1}{2v_2} < \frac{1}{2v_3}$ et que T peut être recouvert par un intervalle minimal $L = [\frac{1}{4v_3},\frac{3}{4v_3}]$ de mesure $\frac{1}{2v_3}$, on a qu'au moins 2 intervalles avec $I_2 = 0$ doivent être utilisés. On peut alors déduire qu'il existe un intervalle $T' \subset [\frac{3}{8v_3},\frac{5}{8v_3}]$ sur lequel $I_2 = 1$. On peut alors constater que L peut se faire recouvrir par $3+2x$ intervalles de mesure $\frac{1}{2v_2}$ pour $x \in \mathbb{N}$ et donc $\frac{3+2x}{2v_2} \geq \frac{1}{2v_3}$. On peut noter que puisque $\frac{1}{8v_3} \leq \frac{1}{2v_2}$ on ne pourrait pas avoir deux intervalles distincts dans $[\frac{3}{8v_3},\frac{5}{8v_3}]$ pour lesquels $I_2 = 1$, car sinon cela impliquerait que $\frac{3}{2v_2} \leq \frac{1}{4v_3}$, une contradiction. On peut alors recouvrir L avec 3 intervalles de mesure $\frac{1}{2v_2}$ nous donnant l'inégalité

$$\begin{aligned} \frac{3}{2v_2} &\geq \frac{1}{2v_3} \\ 3v_3 &\geq v_2. \end{aligned}$$

En combinant avec (5.3.23) on peut déduire que $v_2 = 3v_3,v_1 = 2v_3$ et en factorisant $pgcd(v_1,v_2,v_3) = v_3$, on a le système $U = \{1, 2, 3\}$ qui est une instance serrée de $CCLR$ pour $n = 3$. □

Puisque toutes les façons valides d'ordonner les vitesses v_1,v_2 et v_3 d'un système $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ ayant $m((1,1,1)) = 0$ nous conduisent à une instance serrée de $CCLR$, il n'existe pas de système V ne satisfaisant pas $CCLR$. En d'autres mots, $CCLR$ est vraie pour $n = 3$.

5.4. Quatre coureurs: compression et multiplicateurs

Finalement, on étudie le cas $n = 4$ de la CCLR, ce qui veut dire la CCL pour 5 coureurs. On discute d'abord le cas plus général où $n+1$ est un nombre premier p. On se concentre sur les temps de la forme $\frac{x}{p^{m+1}}$ avec $x \in \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z}$ où $m = \max_{u \in V} v_p(u)$. Pour chaque $x \in \mathbb{Z}$, posons

$$q(x) := \left\lfloor \frac{x}{p^m} \right\rfloor , \pmod p$$

et notons que si $x \equiv y \pmod{p^{m+1}}$, alors $q(x) \equiv q(y) \pmod p$. De plus, on a que

$$\frac{x}{p^{m+1}} \pmod 1 \in \left[\frac{q(x)}{p}, \frac{q(x)+1}{p}\right) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{Z}.$$

En particulier, on a que

$$\frac{x}{p^{m+1}} \in \left(-\frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad q(x) \equiv 0, -1 \pmod p.$$

En conclusion, la CCLR est vraie pour $V = \{v_1, \dots, v_{p-1}\}$ s'il existe $\lambda \pmod{p^{m+1}}$ tel que

$$q(\lambda v_i) \not\equiv 0, -1 \pmod p \quad \text{pour tout } i = 1{,}2, \dots, p-1.$$

Pour construire un tel λ, on introduit la notion des ensembles de *multiplicateurs*

$$\Lambda_j = \{1 + kp^{m-j}, 0 \leq k \leq p-1\} \text{pour } j = 0, 1, \dots, m-1$$

$$\Lambda_m = \{k, 1 \leq k \leq p-1\}$$

Ces ensembles de multiplicateurs ont des propriétés remarquables qui vont nous permettre dans certaines situations de construire un λ en «étages» en correspondance avec les valuations $p-$*adiques* de l'ensemble des vitesses.

Lemme 5.9. *Soit $\lambda = 1 + kp^{m-j}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $0 \leqslant j < m$. Soit aussi $x \in \mathbb{Z}$ tel que $j \leqslant v_p(x) \leqslant m$. Alors,*

$$q(\lambda x) \equiv \begin{cases} q(x) \pmod p & \text{si } v_p(x) > j, \\ q(x) + kr(x) \pmod p & \text{si } v_p(x) = j, \end{cases}$$

où $r(x) = x/p^{v_p(x)} \pmod p$.

Démonstration. Tout d'abord, supposons que $v_p(x) > j$. Donc, il existe $y \in \mathbb{Z}$ tel que $x = p^{j+1}y$. Par la suite,

$$\begin{aligned} q(\lambda x) &= \left\lfloor \frac{(1+kp^{m-j})x}{p^m} \right\rfloor \pmod p \\ &= \left\lfloor \frac{x + ykp^{m+1+c}}{p^m} \right\rfloor \pmod p \\ &= \left\lfloor \frac{x}{p^m} \right\rfloor + ykp^{1+c} \pmod p \\ &= \left\lfloor \frac{x}{p^m} \right\rfloor \pmod p \\ &= q(x) \pmod p \end{aligned}$$

ce qu'il fallait montrer. Finalement, supposons que $v_p(x) = j$ et posons $r = r(x) \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ tel que $r(x) \equiv x/p^j \pmod p$. Donc,

$$q(\lambda x) = \left\lfloor \frac{(1 + kp^{m-j})x}{p^m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{p^m} \right\rfloor + kr(x) = q(x) + kr(x).$$

Ceci termine la preuve. □

Or, on utilise le lemme précedent pour construire un temps de solitude de la forme λ/p^m de façon itérative. Soit $s_0 > s_1 > \cdots > s_k$ les membres de l'ensemble $\{v_p(u) : u \in V\}$ en ordre croissante, avec $s_0 = m$. On commence en trouvant $\lambda_0 \in \Lambda_{s_0}$ de sorte à ce que

$$q(\lambda_0 u) \not\equiv 0, -1 \pmod p \quad \text{pour tout } u \in V \text{ avec } v_p(u) = s_0. \tag{5.4.1}$$

Puis, on construit $\lambda_1 = \lambda_0 \cdot \lambda_1'$ avec $\lambda_1' \in \Lambda_{s_1}$ de sorte à ce que

$$q(\lambda_1 u) \not\equiv 0, -1 \pmod p \quad \text{pour tout } u \in V \text{ avec } v_p(u) = s_1. \tag{5.4.2}$$

La propriété *b*) du lemme 5.4 nous permet de dire que,

$$q(\lambda_1 u) = q(\lambda_0 \lambda_1' u) \equiv q(\lambda_0 u) \not\equiv 0, -1 \pmod p$$

pour tout $u \in V$ avec $v_p(u) = s_0$, où on a appliqué le lemme 5.4 avec $j = s_1$ et $x = \lambda_0 u$.

On continue de cette façon pour produire une suite λ_1',λ_2', $\ldots$,λ_k' qui, pour tout j, satisfait les propriétés suivantes :

- $\lambda_j' \in \Lambda_{s_j}$ pour tout j;
- Si on le pose $\lambda_j = \lambda_0 \prod_{i=1}^{j} \lambda_j'$, alors

$$q(\lambda_j u) \not\equiv 0, -1 \pmod p \quad \text{pour tout } u \in U \text{ avec } v_p(u) = s_j. \tag{5.4.3}$$

Si $u \in V$ avec $v_p(u) = s_i$, alors le lemme 5.4, appliqué de façon itérative, implique que

$$q(\lambda_j u) \equiv q(\lambda_i u) \notin 0, -1 \pmod p \quad \text{pour tout } j > i.$$

On conclu alors que

$$q(\lambda_k u) \not\equiv 0, -1 \pmod p \quad \text{pour tout } u \in V, \tag{5.4.4}$$

ce qui montre que V satisfait la CCLR (si des λ_j' satisfaisant (5.4.3) existent pour tout j).

Cette construction introduit une sorte d'indépendance qui nous permet de changer les valeurs des $q(x)$ des x ayant les plus grandes valuations aux x ayant les plus petites valuations.

Une analogie serait le mécanisme d'un cadenas à combinaison qui, lorsque l'on fait bouger son cadran, fait bouger tous ses disques jusqu'à ce que l'on arrive au numéro désiré de la combinaison (λ_0). En tournant le cadran dans l'autre direction, tous ses disques sauf le premier se mettent à bouger jusqu'à ce que l'on arrête sur le 2ième numéro de la combinaison

(λ'_1). En tournant dans la direction originale, tous ses disques sauf le premier et de deuxième bougent et ainsi de suite. Ici, les disques sont les différentes valuations et bouger le cadran est analogue à prendre un multiplicateur adapté.

Un lemme simple et convénient exploite cette construction

Lemme 5.10. *(Lemme filtrant premier) Soit p un premier, soit V un ensemble fini de nombres naturels, et soit $m = \max_{u\in V} v_p(u)$. Soit p un premier et $m = \max_{u\in V}(v_p(u))$. Pour chaque $u \in V$, soit F_u un sous-ensemble de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Supposons que*

$$\sum_{\substack{u\in V\\ v_p(u)=i}} |F_u| \leqslant p-1 \quad \textit{pour tout } i<m,$$

et que

$$\sum_{\substack{u\in V\\ v_p(u)=m}} |F_u| \leqslant p-2.$$

Alors, il existe $\lambda \in \mathbb{Z}$ tel que

$$q(\lambda u) \notin F_u \quad \textit{pour tout } u \in V.$$

Démonstration. Pour chaque $j \leqslant m$, soit $V_j = \{u \in V : v_p(u) = j\}$. Fixons $u \in V_m$. On a que $u = p^m u'$ avec $p \nmid u'$. Avec cette notation, on trouve que $q(ku) \equiv ku' \pmod p$. Puisque $p \nmid u'$, on voit que $q(ku)$ couvre $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ lorsque k bouge dans le même ensemble. Si $C_u = \{k \in (Z/p\mathbb{Z})^* : q(ku) \in F_u\}$, on a alors que $|C_u| = |F_u|$. Donc,

$$\left|\bigcup_{u\in V_m} C_u\right| \leqslant \sum_{u\in V_m} |C_u| = \sum_{u\in V_m} |F_u| \leqslant p-2 = \#(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* - 1$$

par les hypothèses de l'enoncé du lemme. On voit donc qu'il existe $k \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \setminus \bigcup_{u\in V_m} C(u)$.

Par la suite, $q(ku) \notin F_u$ pour tout $u \in V_m$. On pose $\lambda_0 = k$; il est notre premier multiplicateur. Puis, on construit $\lambda'_j \in \Lambda_j$ pour tout $j < m$ tel que

$$q(\lambda_j u) \notin F_u \quad \text{pour tout } u \in V_j,$$

où $\lambda_j = \lambda_0 \prod_{i=1}^{j} \lambda'_i$. Supposons qu'on a construit $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_{j-1}$ pour un quelconque $j \geqslant 1$, et puis construisons λ'_j. Fixons pour l'instant $u \in V_j$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, le lemme 5.4 implique que $q(\lambda_{j-1}u(1+kp^{m-j})) \equiv q(\lambda_{j-1}u) + kr$, où $r = \lambda_{j-1}u/p^j$. Ici il faut noter que $p \nmid \lambda_{j-1}$, donc $v_p(\lambda_{j-1}u) = v_p(u) = j$. Puisque $p \nmid r$, alors les nombres $q(\lambda_{j-1}u) + kr$ couvre $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ lorsque k bouge dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Donc, si $C_u = \{k \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} : q(\lambda_{j-1}u(1+kp^{m-j})) \in F_u\}$, alors $|C_u| = |F_u|$. Puisque $\sum_{u\in V_j} |F_u| \leqslant p-1$, on déduit qu'il existe $k \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tel que

$q(\lambda_{j-1}u(1+kp^{m-j})) \notin F_u$ pour tout $u \in V_j$. En prenant $\lambda'_j = 1+kp^{m-j}$, on termine l'étape inductive de la construction.

L'existence des λ'_j avec l'argument avant le lemme implique que $q(\lambda_k u) \notin F_u$ pour tout $u \in V$, ce qui termine la preuve en prenant $\lambda = \lambda_k$.

$\square$

À chaque système on peut associer un $(m+1)-$ *tuples* $(|V_0|,|V_1|,\ldots,|V_m|)$. Le lemme précédent nous permet de réduire considérablement les types de $(m+1)-$ *tuples* d'un système contredisant la conjecture du coureur solitaire.

Lemme 5.11. *Soit V, p et m comme dans le lemme 5.10. Pour tout $j \leqslant m$, posons $V_j = \{u \in V : v_p(u) = j\}$ et $V_{\geqslant j} = \bigcup_{i \geqslant j} V_i$. Supposons qu'il existe un $j \leqslant m$ tel que $|V_i| \leqslant \frac{p-1}{2}$ pour tout $i < j$, et que $\left\|\frac{1}{p^{m+1}} V_{\geqslant j}\right\| \geq \frac{1}{p}$. Alors, V satisfait la CCLR.*

Démonstration. Pour chaque choix de $\lambda'_i \in \Lambda_i$ pour $i < j$, on a que le produit $\lambda = \prod_{i<j} \lambda'_i$ est tel que

$$q(\lambda u) \equiv q(u) \,(\mathrm{mod}\, p) \quad \text{pour tout } u \in V_{\geqslant j}.$$

En effet, on a que $p^j | u$, donc on peut appliquer le de façon itérative pour conclure que

$$q(\lambda u) \equiv q(\lambda'_{j-2} \cdots \lambda'_1 u) \equiv \cdots \equiv q(\lambda'_1 u) \equiv q(u) \,(\mathrm{mod}\, p).$$

En particulier, puisque on a supposé que $\left\|\frac{1}{p^{m+1}u} \geq \frac{1}{p}\right\|$ pour tout $u \in V_{\geqslant j}$, il faut aussi que $\left\|\frac{\lambda}{p^{m+1}} u\right\| \geq \frac{1}{p}$ pour tout $u \in V_{\geqslant j}$ et pour tout choix de λ comme ci-dessus.

Or, on montre qu'il existe un choix de $\lambda'_i \in \Lambda_i$ pour $i < j$ tel que $\left\|\frac{\prod_{i<j} \lambda'_i}{p^{m+1} V_{<j}}\right\|$, où $V_{<j} := V \setminus V_{\geqslant j} = \bigcup_{i<j} V_i$. On pose $F_u = \{0 \,(\mathrm{mod}\, p), -1 \,(\mathrm{mod}\, p)\}$ pour chaque $u \in V_{<j}$ et on note que

$$\sum_{u \in V_i} |F_u| = 2|V_i| \leqslant p-1$$

par hypothèse. Donc, une modification facile de la preuve du lemme 5.10 nous permet de trouver un choix approprié de $\lambda'_i \in \Lambda_i$ pour $i < j$. Ce qui conclut la preuve. $\square$

Pour tout ce qui suit, on suppose que $p = 5$ et que $V \subset \mathbb{N}$ avec $|V| = 4$. On veut montrer que V satisfait la CCLR. Sans perte de généralité, on peut supposer que $pgcd(V) = 1$; sinon, on remplace V par $V/pgcd(V)$. Si la CCLR est vraie pour ce dernier ensemble, alors est elle aussi vraie pour tout V. Or, considérons plusieurs cas.

Cas 1: $5 \nmid v$ pour tout $v \in V$.

Donc, $\|\frac{1}{5}V\| \geqslant \frac{1}{5}$, ce qui montre la CCLR pour V.

Cas 2: il existe $v \in V$ divisible par 5. En particulier, on a que

$$m = \max\{v_p(u) : u \in V\} \geqslant 1.$$

Posons également $V_i = \{u \in V : v_p(u) = i\}$ pour tout $i = 0{,}1,\ldots,m$, et $F_u = \{0 \pmod 5, -1 \pmod 5\}$.

Cas 2a: $|V_m| \geqslant 2$.

Observons que $\|\frac{1}{5^{m+1}}u\| \geqslant \frac{1}{5}$ si $v_5(u) = m$, car ceci veut dire que $u = 5^m u'$ avec $5 \nmid u'$. De plus, on a que $|V_i| \leqslant |V| - |V_m| \leqslant 2$ pour tout $i < m$. Donc, les hypothèse du lemme 5.11 sont satisfaites. On voit donc que V satisfait la CCLR.

Cas 2b: $|V_m| = 1$ et $|V_i| \leqslant 2$ pour tout $i < m$.

Dans ce cas-ci, on peut tout de suite utilise le lemme 5.11 afin de trouver $\lambda \in \mathbb{Z}$ tel que $q(\lambda u) \notin F_u$ pour tout $u \in V$, donc la CCLR est vraie pour V.

Cas 2c: $|V_m| = 1$ et il existe $i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ tel que $|V_i| = 3$.

On a que les multiplicateurs Λ_m et Λ_0 agissent de façon différentes. Si $p \nmid x$, alors chaque élément $1 + kp^m$ de Λ_0 agit comme une translation:

$$q((1 + kp^m)x) \equiv q(x) + kr(x) \pmod 5.$$

De l'autre côté, les éléments λ de Λ_m permettent d'effectuer une action du groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times$ sur l'ensemble $q(V_0)$ avec un certain terme d'erreur provenant du fait que pour un x générique, on a $\lfloor \lambda x \rfloor \neq \lambda \lfloor x \rfloor$. Cette action permet entre autres de *brasser* $q(V)$ en créant de nouveaux ensembles $q(\lambda V)$.
Notre objectif est de trouver $\lambda \in \Lambda_m$ et $\lambda' \in \Lambda_0$ tels que $q(\lambda' \lambda V_0) \not\equiv 0, -1 \pmod 5$. Voici un lemme qui va nous permettre de se restreindre aux systèmes V pour lesquels toute vitesse v dans V_0 sera dans $\{1, 2\} \pmod 5$

Lemme 5.12. *Si on prend V un ensemble de 4 vitesses entières et que l'on pose $A_i = \{u \in V_0, u \equiv i \pmod 5\}$, on a*

$$V = V_{>0} \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

. Posons alors un nouvel ensemble

$$V' = V_{>0} \cup A_1 \cup A_2 \cup -A_3 \cup -A_4$$

. Alors on a $V_0' = A_1' \cup A_2'$ avec $A_1' = A_1 \cup (-A_4)$ et $A_2' = A_2 \cup (-A_3)$ et que V satisfait CCLR si et seulement si V' satisfait CCLR.

Démonstration. $\Longrightarrow$ Si V satisfait CCLR, alors on fixe t tel que $\|tV\| \geq \frac{1}{5}$. Ce qui veut aussi dire que

$$\|tA_i\| \geq \frac{1}{5} \quad \text{pour tout } i \in \{1,2,3,4\} \text{ tel que } A_i \neq \emptyset.$$

Par la symmétrie de $\|\cdot\|$, on a aussi

$$\|-tA_i\| \geq \frac{1}{5} \quad \text{pour tout } i \in \{1,2,3,4\} \text{ tel que } A_i \neq \emptyset.$$

On peut alors construire $V' = V_{>0} \cup A_1 \cup A_2 \cup -A_3 \cup -A_4$ qui aura t comme temps de solitude et donc V' satisfait $CCLR$. Les éléments de $-A_4$ auront des restes de $1 \pmod 5$ et ceux de $-A_3$, des restes de $2 \pmod 5$. $\Longleftarrow$ On prend s tel que $\|sV'\| \geq \frac{1}{5}$. On a en particulier que

$$\|s(A_i)\| \geq \frac{1}{5} \quad \text{pour tout } i \in \{1,2\} \text{ tel que } A_i \neq \emptyset$$

et

$$\|s(-A_i)\| \geq \frac{1}{5} \quad \text{pour tout } i \in \{3,4\} \text{ tel que } A_i \neq \emptyset.$$

Par symétrie de $\|\cdot\|$:

$$\|-s(A_i)\| \geq \frac{1}{5} \quad \text{pour tout } i \in \{1,2\} \text{ tel que } A_i \neq \emptyset$$

et

$$\|-s(-A_i)\| \geq \frac{1}{5} \quad \text{pour tout } i \in \{3,4\} \text{ tel que } A_i \neq \emptyset.$$

Nous permettant de construire $V'' = V_{>0} \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ qui sera un sytème ayant un temps de solitude s. On conclut puisque $V'' = V'$. $\square$

On va montrer le cas $|V_0| = 3$ à l'aide des deux lemmes qui suivent.

Lemme 5.13. *Supposons que V est un ensemble de quatre vitesses entières tel que $V_0 = A_1 \cup A_2$ avec ensembles A_i du lemme* 5.12. *Si on a qu'il existe $s \in \{1,2\}$ tel que $|A_s| = 3$ alors V satisfait la CCLR.*

Démonstration. Tout d'abord, considérons le cas où $q(A_s)$ est contenu dans un intervalle de taille 3. On a que

$$q((1+k5^m)u) \equiv q(u) + kr(u) \equiv q(u) + ks \pmod 5 \tag{5.4.5}$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $u \in A_s$. Il existe donc k tel que $q((1+k5^m)A_s) \subseteq \{1,2,3\} \pmod 5$. On a aussi que $\left\|\frac{1+k5^m}{5^{m+1}}v\right\| \geqslant \frac{1}{5}$ si $5^m \| v$, donc on voit que V satisfait la CCLR dans ce cas-ci.

Or supposons que $q(A_s)$ n'est pas couvert par un intervalle de taille 3. En utilisant (5.4.5), on voit qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $q((1+k5^m)A_s) = \{0,2,3\}$. Soit $A' = (1+k5^m)A_s = \{u_1, u_2, u_3\}$ où $q(u_1) = 0$, $q(u_2) = 2$ et $q(u_3) = 3$.

La prochaine étape est d'analyser $q(jA')$ pour certaines valeurs de j. On utilise le fait que $\lfloor x+y \rfloor \in \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \{0,1\}$ qui nous permet de déduire la propriété suivant pour la fonction q

$$q((j+1)v) \in q(jv) + q(v) + \{0,1\} \subset \cdots \subset (j+1)q(v) + \{0,1,\ldots,j\} \tag{5.4.6}$$

pour tout $j \in \mathbb{N}, v \in \mathbb{Z}$. Ceci nous permet de faire l'analyse de $q(j\lambda' A_s)$. Trouvons les possibilités pour l'ensemble $q(2\lambda' A_s)$

- $q(2u_1) \in 2q(u_1) + \{0,1\} = \{0,1\}$;
- $q(2u_2) \in 2q(u_2) + \{0,1\} = \{0,4\}$;
- $q(2u_3) \in 2q(u_3) + \{0,1\} = \{1,2\}$;.

Si $q(2A')$ est contenu dans un intervalle de taille 3, on a fini car il doit exister $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $q\Big((1+k5^m)2A'\Big) \subset \{1,2,3\} \pmod 5$, comme voulu.

Le seul cas où $q(2A')$ n'a pas cette propriété est quand $q(2u_2) = 4$ et $q(2u_3) = 2$. Dans ce cas-ci, on considère l'ensemble $3A'$:

- $q(3u_1) \in 3q(u_1) + \{0,1,2\} = \{0,1,2\}$;
- $q(3u_2) \in q(u_2) + q(2u_2) + \{0,1\} = \{1,2\}$;
- $q(3u_3) \in q(u_3) + q(2u_3) + \{0,1\} = \{0,1\}$;

On arrive donc à montrer que $q(3A')$ peut être recouvert par un intervalle de taille 3. On peut donc trouver $k'' \in \mathbb{Z}$ tel que $q((1+k''5^m)3A') \subset \{1,2,3\}$, ce qui termine la preuve. ☐

Lemme 5.14. *Supposons que V est un ensemble de quatre vitesses entières tel que $V_0 = A_1 \cup A_2$ avec ensembles A_i du lemme* 5.12. *Si on a qu'il existe $s \in \{1,2\}$ tel que $|A_s| = 2$ alors V satisfait la CCLR.*

Démonstration. On affirme qu'il existe une valeur $j \in \{1,2,3,4\}$ et une valeur $\lambda' \in \Lambda_0$ telles que $q(j\lambda' A_s) \subset \{1,2\}$. Cette affirmation sera montrée plus tard mais supposons qu'elle est vraie.

On a pour x tel que $5 \nmid x$ que $r(\lambda' x) = r(x)$. Prenons par la suite $\lambda'_k = 1 + k(sj)^{-1}5^m$, où a^{-1} dénote la classe inverse de a modulo 5 (si elle existe). Si $u \in A_s$, alors

$$\begin{aligned} q(j\lambda'\lambda'_k u) &\equiv q(j\lambda' u) + r(j\lambda' u)\cdot k(sj)^{-1}\lambda' u \\ &\equiv q(j\lambda' u) + jr(u)\cdot k(sj)^{-1}\lambda' u \\ &\equiv q(j\lambda' u) + k \pmod 5 \end{aligned}$$

pour tout $u \in A_s$. Donc, $q(j\lambda'_k\lambda A_s) \in \{1,2,3\}$ pour $k \in \{0,1\}$. Si tel était le cas , soit x le seul élément de V_0 qui n'est pas dans A_s, on aurait que

$$q(j\lambda'_1\lambda x) - q(j\lambda'_2\lambda x) \equiv r(jx)(sj)^{-1} \equiv r(x)s^{-1} \pmod 5.$$

Puisque $r(x) \not\equiv s \pmod 5$ et que $r(x) \equiv 2s$ ou $3s \pmod 5$, $r(x)\cdot s^{-1} \in \{2,-2\} \pmod 5$. Par conséquent l'ensemble $[q(j\lambda'_1\lambda x)$,$q(j\lambda'_2\lambda x)]$ peut être minimalement recouvert par un intervalle de taille 3 dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et puisque l'ensemble $\{0,-1\}$ est minimalement recouvert par un intervalle de taille 2, au moins un élément dans l'ensemble$\{q(j\lambda'_1\lambda x), q(j\lambda'_2\lambda x)\}$ n'est pas dans $\{0,-1\}$. On aurait donc que si $q(j\lambda' A_s) \in \{1,2\}$, alors il existerait $\lambda'_k \in \Lambda_0$ tel que $q(j\lambda'\lambda'_k V_0) \cap \{0,-1\}$ est vide, ce qui conclurait le lemme.

Montrons alors que l'affirmation au début de la preuve est vraie et donc qu'il existe $j \in \{1,2,3,4\}$ et λ' tels que $q(j\lambda' A_s) \subset \{1,2\}$. On considère les situations pour lesquelles il n'existe pas de recouvrement de $A_s = \{u_1, u_2\}$ par un intervalle de taille 2. Si tel était le cas, on peut supposer sans perte de généralité le cas $q(u_1) = 0$,$q(u_2) = 2$. On considère alors les valeurs que peuvent prendre $q(2A_s)$ en appliquant la relation (5.4.6)

- $q(2u_1) \in 2q(u_1) + \{0,1\} = \{0,1\}$;
- $q(2u_2) \in 2q(u_2) + \{0,1\} = \{0,4\}$;.

La collection des possibilités pour $q(2A_s)$ est données par

$$q(2A_s) \in \Big\{\{0\},\{0,4\},\{1,0\},\{1,4\}\Big\}.$$

Chaque ensemble de la collection sauf $\{1,4\}$ peut être recouvert par un intervalle de taille 2 et donc on peut poser $q(2u_1) = 1$ et $q(2u_2) = 4$. On considère de façon similaire les valeurs que peuvent prendre $q(3A_s)$ en appliquant la relation (5.4.6)

- $q(3u_1) \in q(2u_1) + q(u_1) + \{0,1\} = \{1,2\}$;
- $q(3u_2) \in q(2u_2) + q(u_2) + \{0,1\} = \{1,2\}$.;

. $q(3A_s)$ peut donc être recouvert par un intervalle de taille 2. Il existe alors $j \in \{1,2,3,4\}$ et λ' tels que $q(j\lambda' A_s) \subset \{1,2\}$. □

Les lemmes 5.14 et 5.13 nous permettent alors de dire que tout ensemble de 4 vitesses entières V tel que $|V_0| = 3$ et $V_0 \subset \{1,2\} \pmod 5$ possèdent des instants de solitudes.

Prenons V un ensemble de 4 vitesses entières avec $|V_0| = 3$. Construisons, à l'aide de V, l'ensemble V' du lemme 5.12. V' est tel que $|V'| = 4$, $|V_0'| = 3$ et $V_0' = A_1' \sqcup A_2'$. Puisque V' a cette forme, on peut appliquer les lemmes 5.14 et 5.13 qui nous disent V' satisfait $CCLR$. Le lemme 5.12 nous dit que dans ce cas, V respecte aussi $CCLR$. Par conséquent, on a montré que tout système de 4 vitesses entières V tel que $|V_0| = 3$ satisfait $CCLR$.

Tous les cas ont été traités et par conséquent, tout ensemble de 4 entiers V satisfait $CCLR$ et donc $CCLR$ est vraie pour quatre coureurs.

5.5. Six coureurs : réduction du problème via la compression

Même si le cas pour $n = 6$ coureurs ne sera pas traité en profondeur, il est à noter que certaines méthodes bien astucieuses permettent de réduire le nombre de cas à vérifier. Une remarque que l'on a pu faire dans le cas $n + 1 = 5$ était que les vitesses à valuation nulles qui ont les mêmes résidus modulo 5 conservent leur positions relatives sous l'action de multiplicateurs de Λ_0.

$$q((1 + k5^m)u) \equiv q(u) + kr(u) \pmod p$$

pour tout $u \in A_s := \{v \in V_0 : v \equiv s \pmod p\}$. Une idée qui a été utilisée était celle de compression en considérant des choix de multiplicateurs $\lambda \in \Lambda_m$ nous permettant de recouvrir les $q(\lambda A_i)$ par des segments assez petits. Dans le cas $n + 1 = 7$, on a la même propriété $q(x) = \left\lfloor \frac{x}{7^m} \right\rfloor \pmod 7$ et $m = \max_{u \in V}(\nu(u))$

$$q((1 + c7^m)A_k) = q(A_k) + ck \tag{5.5.1}$$

De plus, étant donné que l'on peut générer $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times$ avec $\{2, -1\}$, on peut supposer que les vitesses de $V_0 = \{u \in V, 7 \nmid u\}$ sont, à un facteur de -1 près, réparties dans les 3 classes de résidus $\{1, 2, 4\} \pmod 7$ nous permettant de partitionner les vitesses à valuations nulles parmis les 3 ensembles A_1,A_2 et A_4. En utilisant le principe de *compression* qui permet aux ensembles $q(A_1)$,$q(A_2)$,$q(A_4)$ de se comporter comme des segments S_1,S_2,S_4 avec $q(A_i) \subseteq S_i$, on peut trouver des conditions suffisantes pour lesquellles il existe k

$$(S_1 + k) \cup (S_2 + 2k) \cup (S_4 + 4k) \cap \{-1, 0\} = \emptyset \tag{5.5.2}$$

Pour A_i on définit $l(A_i)$ comme la taille minimale de la plus petite progression arithmétique de raison 1 dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ qui recouvre $q(A_i)$, en d'autre mot, la taille du plus petit segment S_i qui recouvre $q(A_i)$. Voici un résultat (qui ne sera pas démontré) inspiré du lemme 5 de [**1**]:

Lemme 5.15. *Soit un ensemlbe de 6 vitesses V pour lequel $V_0 = A_1 \cup A_2 \cup A_4$ avec $|V_0| = 5$. Si*

$$l(A_1) + l(A_2) + l(A_4) \leq 5$$

alors il existe λ un multiplicateur tel que

$$q(\lambda A) \cap \{0, 6\} = \emptyset$$

Sauf si $(l(A_1), l(A_2), l(A_4)) = (3,1,1)$

On peut tout de suite voir que la condition $l(A_1) + l(A_2) + l(A_4) \leq 5$ est très facile à vérifiée ce qui permet de vérifier facilement que V avec $|V_0| = 5$ satisfait $CCLR$. Il y a bien sûr. Plusieurs autres résultats nécessaires pour montrer $CCLR$ pour $n = 6$.

L'ensembles des techniques développées dans [**1**] permettent de réduire beaucoup le nombre de cas échappant aux critères utilisant la compression ce qui permet de réduire considérablement les vérifications. Seuls 969 systèmes $\pmod{49}$ sont de potentiels contre-exemple à $CCLR$ pour $n = 6$. Les temps de solitude de tels systèmes peuvent être trouvés par force brute à l'aide d'un ordinateur. À titre de comparaison, la première preuve de $CCLR$ pour $n = 4$ demandait de trouver des temps de solitudes pour au moins un milliard de systèmes $\pmod{78125}$.

Références bibliographiques

[1] Barajas, J.; Serra, O. *The lonely runner with seven runners.* Electron. J. Combin. 15 (2008), no. 1, Research paper 48, 18 pp.

[2] Bienia, Wojciech; Goddyn, Luis; Gvozdjak, Pavol; Sebő, András; Tarsi, Michael, *Flows, view obstructions, and the lonely runner.* J. Combin. Theory Ser. B 72 (1998), no. 1, 1–9.

[3] Bohman, Tom; Peng, Fei, *Coprime mappings and lonely runners.* Mathematika 68 (2022), no. 3, 784–804.

[4] Bohman, Tom; Holzman, Ron; Kleitman, Dan, *Six lonely runners.* In honor of Aviezri Fraenkel on the occasion of his 70th birthday. Electron. J. Combin. 8 (2001), no. 2, Research Paper 3, 49 pp

[5] Cusick, T. W. *View-obstruction problems in n-dimensional geometry.* J. Combinatorial Theory Ser. A 16 (1974), 1–11.

[6] Cusick, T. W.; Pomerance, Carl, *View-obstruction problems. III.* J. Number Theory 19 (1984), no. 2, 131–139.

[7] Dubickas, Artūras ,*The lonely runner problem for many runners.* Glas. Mat. Ser. III 46(66) (2011), no. 1, 25–30.

[8] A.L. Onishchik, *Kronecker theorem.*Encyclopedia of Mathematics,(2020)

[9] Folland, Gerald B. *Fourier analysis and its applications.* The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Pacific Grove, CA, 1992. x+433 pp. ISBN: 0-534-17094-3

[10] Goddyn, Luis; Wong, Erick B. *Tight instances of the lonely runner.* Integers 6 (2006), A38, 14 pp.

[11] Green, Ben; Ruzsa, Imre Z. *Freiman's theorem in an arbitrary abelian group.* J. Lond. Math. Soc. (2) 75 (2007), no. 1, 163–175.

[12] Renault, Jérôme ,*View-obstruction: a shorter proof for 6 lonely runners.* Discrete Math. 287 (2004), no. 1-3, 93–101.

[13] Rifford, Ludovic, *On the time for a runner to get lonely.* Acta Appl. Math. 180 (2022), Paper No. 15, 66 pp.

[14] Tao, Terence, *Some remarks on the lonely runner conjecture.* Contrib. Discrete Math. 13 (2018), no. 2, 1–31.