Contents

Jeux fictifs et mesure de probabilité

Présenté par : Fantcho Joseph-Emmanuel,
Dirigé par : Poitevin Michel,
Département de Sciences Économiques de l'Université De Montréal

October 19, 2005

Abstract

A l'origine, le but du jeu fictif n'est pas de rassembler toute l'information revélée par le jeu, mais de déceler la fréquence de jeu des adversaires ; les joueurs ne cherchent pas à influencer les jeux de leurs adversaires. En présence d'un grand nombre de joueurs, à l'issue de leurs interactions stratégiques, ce qui paraît simple à observer, c'est le résultat des actions des participants au jeu. Nous modifions la définition du jeu fictif, pour prendre en compte seulement les résultats des actions des joueurs. Nous trouvons une notion de mesure de probabilité rigoureuse, proche dans la pratique des fréquences empiriques, fondée essentiellement sur les réaliations d'un processus de variables aléatoires. Nous donnons l'expression de l'espérence mathématique d'une variable aléatoire sous la mesure fictive déduite du jeu. Les calculs sont faits en temps discret et en temps continu. Une chose qui nous réconforte est que, la connaissance des fréquences de jeux des stratégies, permet de reconstituer un autre espace d'informations. Les informations initiales contenues dans les variables aléatoires, ne se perdent pas. Elles se trouvent transférées dans les fractiles des mesures de probabilité fictives. Nous donons quelques résultats de jeux fictifs se rapportant aux équilibres de Nash.

1 Introduction

Si chaque jour, tous les phénomènes étaient nouveaux, la vie serait pratiquement impossible. Le "learning", comme la statistique et science cherche à faire ressortir les régularités dans l'histoire des événements afin de dégager des lois. La théorie du Learning a été initialement développée par des biologistes qui cherchaient à comprendre le comportement des animaux. La théorie a été par la suite étendue aux sciences sociales, et particulièrement aux sciences de l'éducation. A propos de l'éducation, les behavioristes[1] considèrent qu'à la naissance, l'esprit de l'enfant est une table rase, et c'est l'environnement qui viendra y inscrire ce qu'il veut. Trois facteurs sont essentiels pour comprendre le comportement des Hommes : l'histoire, l'environnement et l'hérédité. C'est autour des années 1960 que le Learning a véritablement pris forme en économie, avec les travaux de Brown[3], Miyassawa[7], Shapley[8] .

Nous utilisons le "Learning in game (la théorie de l'apprentissage dans les jeux)" pour analyser les comportements de certains phénomènes, comme par exemple le mouvement des prix des actifs. En effet, les prix observés sont souvent très différents de ce que prévoient les théories de l'équilibre. Au fil du temps, on note un écart important et persistant entre les prix des titres et leurs prévisions ; pourtant un nombre impressionnant d'acteurs, avec des stratégies et des croyances différentes interagissent sur le marché. Alan Greenspan en 1996 a qualifié les mouvements des prix des actifs sur le marché boursier " d'exubérance irrationnelle". Comment capter ces mouvements qui semblent déraisonnables ? Deux approches sont souvent proposées. L'approche par les modèles d'équilibre et l'approche probabiliste.

En effet, en spécifiant les préférences des agents économiques et en utilisant les modèles d'équilibre, on peut trouver des équilibres de Nash, des situations optimales au sens de Pareto. Mais, ces modèles en général ne disent rien sur la manière dont un équilibre particulier est sélectionné ; ils donnent tout au plus l'ensemble des équilibres, sans décrire les interactions et les comportements des agents qui permettent d'arriver à un équilibre particulier[2].

L'approche probabiliste en général spécifie à l'avance la loi des mouvements ; elle suppose connue les lois de probabilité qui gouvernent le processus de variables aléatoires étudiées. Mais en réalité, il est difficile de reconnaître les lois

[1] Les théoriciens de la science du comportement des animaux et des hommes.

[2] La plupart des modèles traditionnels qui s'intéressent aux jeux non coopératifs, supposent que les joueurs sont rationnels, et que les fonctions de payement sont de connaissance commune. Sous ces hypothèses, ils déterminent les équilibres de Nash. On pourrait se poser la question : quand et pourquoi un équilibre spécifique est choisi ? En présence d'équilibres multiples, les modèles traditionnels ne disent rien sur la façon dont les joueurs arrivent à sélectionner ensemble un même équilibre. Par ailleurs, l'hypothèse de connaissance commune des fonctions de payement n'est pas vérifiée pour beaucoup de jeux (dans la réalité). Relâchant cette hypothèse, les conclusions deviennent incertaines.

de probabilité d'un processus de variables aléatoires et l'attribution d'une loi a priori à un phénomène peut être erronée ex-post. La théorie de l'apprentissage légèrement modifiée permet de reconnaître un phénomène, par ses manifestations antérieures. La loi de probabilité d'un processus des variables aléatoires est déduite simplement des réalisations antérieures du processus. Sous des hypothèses simples (variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées), cette distribution, proche de la distribution empirique converge vers la vraie distribution du processus.

Face à l'incapacité des modèles d'équilibre à expliquer certains phénomènes récurrents, des auteurs tels que Drew Fudenberg et David Levine[5], Xavier Vives[11], Bogaçhan Çelen et Shachar Kariv[3] se sont tournés vers la théorie de l'apprentissage “Learning ” pour expliquer la formation des équilibres. Nous nous intéressons à l'apprentissage dans les jeux. Nous définissons les modèles d'apprentissage comme des modèles qui spécifient les règles (comportements, croyances,...) utilisées par chaque joueur et qui analysent les interactions dans les jeux répétés. Signalons que, dans les modèles d'apprentissage, les joueurs, au lieu d'être totalement rationnels, tâtonnent pour arriver à l'équilibre. Le learning insiste sur la répétition, qui est la source de l'apprentissage. Nous prêtons particulièrement attention à un aspect de l'apprentissage dans les jeux, à savoir : les jeux fictifs (fictious plays).

A l'origine, le but du jeu fictif n'est pas de rassembler toutes l'information revélée par le jeu, mais de déceler la fréquence de jeu des adversaires ; les joueurs ne cherchent pas à influencer les jeux de leurs adversaires. En présence d'un grand nombre de joueurs, à l'issue de leurs interactions stratégiques, ce qui semble simple à observer, c'est le résultat des actions des participants au jeu. Nous modifions la définition du jeu fictif, pour prendre en compte seulement les résultats des actions des joueurs. Nous trouvons une notion de mesure de probabilité rigoureuse, proche dans la pratique des fréquences empiriques, fondée essentiellement sur les réalisations d'un processus de variables aléatoires. Nous donnons l'expression de l'espérance mathématique d'une variable aléatoire sous la mesure fictive déduite du jeu. Les calculs sont faits en temps discret et en temps continu. Une chose qui nous reconforte est que, la connaissance des fréquences de jeux des stratégies permet de reconstituer un autre espace d'information. Les informations initiales contenues dans les variables aléatoires ne se perdent pas. Elles se trouvent transférées dans les fractiles des mesures de probabilité fictives.

Notre travail est organisé de la façon suivante : nous nous intéressons d'abord sommairement à la mesure dans les jeux dans la partie 2, puis nous proposons quelques applications dans la section 3. La section 4 est consacrée aux extentions de la théorie et la section 5 est la conclusion.

2 Jeux Imaginaires

Dans les jeux imaginaires, les joueurs se comportent comme s'ils étaient à l'état stationnaire. Dans ces jeux, les joueurs cherchent simplement à obtenir les informations sur la fréquence de jeu des stratégies de leurs adversaires. Une remarque importante est qu'ici, les joueurs n'essayent pas d'influencer les jeux futurs de leurs adversaires. On parle de jeu fictif ou imaginaire parce que tout se passe comme si les joueurs coordonnaient leurs actions suivant un jeu qui avait déjà eu lieu.

2.1 Description

Pour faciliter la compréhension des jeux fictifs, nous commençons notre présentation par la description d'un jeu simple à deux joueurs. Appelons S^1 l'espace des stratégies du joueur 1 et S^2 l'espace des stratégies du joueur 2. Nous supposons S^1 et S^2 sont finis. Nous notons u^1 et u^2 les fonctions de payement des joueurs 1 et 2 respectivement. Initialement les jeux fictifs supposent que chaque joueur choisit une action qui maximise son payement espéré étant donné sa prédiction ou ses croyances (assessment) sur la distribution des actions de l'autre joueur. Plus précisément, cette prédiction a la forme suivante :

Initialement, chaque joueur i dispose d'une mesure (croyance) $k_o^i : S^{-i} \longrightarrow \Re_+$; cette mesure est régulièrement mise à jour en ajoutant 1 à la mesure de la stratégie qui a été jouée[3].

$$k_t^i\left(s^{-i}\right) = k_{t-1}^i\left(s^{-i}\right) + \begin{cases} 1 & \text{si} \quad s_{t-1}^{-i} = s^{-i} \\ 0 & \text{si} \quad s_{t-1}^{-i} \neq s^{-i} \end{cases}$$

La probabilité induite par le joueur i, pour la stratégie s^{-i} de son adversaire est :

$$\gamma_t^i\left(s^{-i}\right) = \frac{k_t^i\left(s^{-i}\right)}{\sum_{\widetilde{s}^{-i} \in S^{-i}} k_t^i\left(\widetilde{s}^{-i}\right)}$$

Le jeu fictif (imaginaire) est donc défini comme une règle (distribution) $\rho_t^i\left(\gamma_t^i\right)$, meilleure réponse à γ_t^i. C'est-à-dire $\rho_t^i\left(\gamma_t^i\right) \in BR^i\left(\gamma_t^i\right)$.[4] Remarquons qu'il n'y a pas un unique jeu imaginaire, puisqu'il pourrait avoir plusieurs meilleures réponses à la stratégie γ_t^i. A côté de la prédiction du joueur, on peut définir la distribution marginale de j par :

[3] S^{-i} désigne l'ensemble des stratégies des joueurs autres que i. s^{-i} est un élément de S^{-i}.

[4] $BR^i\left(\gamma_t^i\right)$ désigne l'ensemble des meilleure réponse du joueur i, à la stratégie γ_t^i des autres joueurs.

$$d_t^j\left(s^j\right)=\frac{k_t\left(s^j\right)-k_o\left(s^j\right)}{t}=\frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t}\left(k_s\left(s^j\right)-k_{s-1}\left(s^j\right)\right)$$

$d_t^j\left(s^j\right)$ est le nombre de fois que la stratégie s^j a été jouée, divisée par t.

Il arrive souvent qu'un très grand nombre d'acteurs interagissent dans un même jeu, de sorte qu'un joueur isolé ait de la peine à capter la stratégie combinée de ses adversaires. En présence d'un grand nombre de joueurs, à l'issue de leurs interactions stratégiques, ce qui paraît simple à observer, c'est le résultat des actions des participants au jeu. Pour la suite de notre travail, nous modifions la définition du jeu fictif, pour désormais prendre en compte seulement les résultats des actions des joueurs. Nous nous intéressons d'abord sommairement de la mesure dans les jeux.

2.2 La mesure dans le jeu modifié

Rappelons qu'initialement, le but du jeu fictif n'est pas de rassembler toutes l'information revélée par le jeu, mais de déceler la fréquence de jeu des adversaires ; les joueurs ne cherchent pas à influencer les jeux de leurs adversaires. Mais, en général en théorie des probabilité, si (Ω, F) est un espace mesurable et $(X_t)_{t\geq 0}$ une suite de variables aléatoires sur (Ω, F), on définit $\sigma(X_t)$, comme la plus petite sous tribu de (Ω, F) qui rend X_t mesurable. La tribu $\sigma(X_s, s\leq t)$ engendrée par les $(X_s)_{s\leq t}$ est l'information disponible à la date t. Dans les jeux fictifs, on ne s'intéresse pas aux ensembles d'informations disponibles, mais simplement à la mesure de probabilité (que nous notons désormais μ_{X_t}) disponible à date $t-1$, et définie sur (Ω, F). Les questions que nous nous posons sont les suivantes : Est-ce que la seule connaissance de la fréquence de jeu des événements passés (traduite dans les μ_{X_t}) capte bien toute l'information disponible à chaque date ? Comment se traduit une espérance mathématique dans l'espace mesuré (probabilisé) (Ω, F) ?...Pour commencer, définissons pour un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ les mesures $\left(\mu_{X_t}\right)_{t\geq 0.}$ Mais avant, nous faisons deux hypothèses qui garantissent l'existence de certaines expressions que l'utilisons.

Hypohèse H1 : Si (Ω, F) est notre espace probabilisable, la tribu F est telle que : $\forall A\in F,$ on a :

$$\lim_{t\longrightarrow\infty}\left(\frac{1}{t}\sum_{j=0}^{t-1}\delta_{x_j^*}(A)\right)\qquad\text{existe et est fini}$$

NB : H1 sera vrai dans la plupart des cas. H1 est trivialement vrai pour $A=\Omega$, dans ce cas $\lim\limits_{t\longrightarrow\infty}\frac{1}{t}\sum_{j=0}^{t-1}\delta_{x_j^*}(A)=1$et pour $A=\emptyset$ dans cas on a:

$$\lim_{t\longrightarrow\infty}\frac{1}{t}\sum_{j=0}^{t-1}\delta_{x_j^*}(A)=0$$

Dans tous les on a toujours :

$$0 \leq \lim_{t \longrightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} \sum_{j=0}^{t-1} \delta_{x_j^*}(A) \right) \leq 1$$

Donc de la suite $\left(\frac{1}{t} \sum_{j=0}^{t-1} \delta_{x_j^*}(A) \right)_{t \geq 0}$, on peut toujours extraire une sous suite qui converge. L'hypothèse 1 est importante lorque l'ensemble A et la suite $(x_t^*)_{t \geq 0}$ sont quelconques. Si la série de terme général $\left(\delta_{x_j^*}(A) \right)$ n'a qu,un nombre fini de terme non nuls, alors : $\lim\limits_{t \longrightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{j=0}^{t-1} \delta_{x_j^*}(A) = 0$ .Si cette série a pour limite $+\infty$, l'ordre des x_t^* intervenants dans le calcul de la limite sera déterminant. En général, pour A et $(x_t^*)_{t \geq 0}$ quelconques l'existence de la limite n'est plus garantie. Le plus important est que si A est un ensemble mesurable, alors :

$$\left\{ w \in \Omega, \lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{j=0}^{t-1} \delta_{X_j^*(w)}(A) \text{ n'existe pas} \right\} \text{ est de mesure nulle, } \forall A \in F$$

C'est ce dernier résultat qui est le plus exploité, moyennant quelques considérations sur l'espace probabilisé. Dans le cas général, nous nous débarassons de H1, la convergence exacte, est simplement remplacée par la convergence presque sûre, grâce au lemme de Glivenko-Cantelli ou même plus simplement grâce à l'inégalité de Hoeffding ou avec la borne de Chernoff. Signalons que l'on arrive aussi aux mêmes résultats avec le théorème de l'ergodicité. Dans, le cas général, les résultats seront plus puisants, mais il faudrait avant tout faire l'hypothèse que la suite $(X_t)_{t \geq 0}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi[5].

Hypothèse (H2)[6] : Si $(X_t)_{t \geq 0}$ est une suite de variables aléatoires sur (Ω, F) et (x_t^*) les réalisations du processus, nous supposons que :

a)

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} \sum_{j=0}^{t-1} x_t^* \right) \qquad \text{existe et est fini}$$

b) Si f est une variable aléatoire sur nous supposons que :

$$E_{\mu_{X_o}}(f) \text{ existe et est fini}$$

Soient Ω un ensemble non vide, F une tribu de partie des Ω; $(X_t)_{t \geq 0}$ une suite de variables aléatoires sur (Ω, F). Soient $x_1^*, x_2^*, ..., x_{t-1}^* \in \Re$, les réalisations de

[5] Tous les lemmes et théorèmes énumérés seront précisés dans la suite au passage au cas général. Nous donnerons quelques hypothèses et résultats qui assurent la convergence.

[6] L,hypothèse 2, n'est pas le plus important, elle servira simplement à affirmer que l'espérance mathématique existe.

$X_1, X_2, ..., X_{t-1}$, aux dates $1, 2, ..., t-1$ ($t > 1$). Soit $A \in F$, partant d'une mesure initiale ϕ_o et d'une valeur $x_o^* \in \Omega$, sur $(\Omega, \mathcal{F})$ nous définissons :

$$\mu_{X_t}(A) = \frac{\phi_o(\Omega) + t - 1}{\phi_o(\Omega) + t} \mu_{X_{t-1}}(A) + \frac{1}{\phi_o(\Omega) + t} \delta_{x_t^*}(A) \tag{1}$$

μ_{X_o} est une mesure de probabilité définie à partir de ϕ_o, lorsque $\mu_{X_o} = \delta_{x_o^*}$, $x_o \in \Omega$ nous disons que nous avons un jeu fictif pur (mesure fictive pure). Rappelons que δ_a est la mesure dictatoriale de Dirac au point $a \in \Omega$.

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 \text{ si } a \in A \\ 0 \text{ si } a \notin A \end{cases}, \forall A \in \mathcal{F}$$

En développant l'expression de $\mu_{X_t}(A)$, on obtient :

$$\mu_{X_t}(A) = \frac{\phi_o(\Omega)}{\phi_o(\Omega) + t} \mu_{X_o}(A) + \frac{1}{\phi_o(\Omega) + t} \sum_{j=0}^{t-1} \delta_{x_j^*}(A) \tag{2}$$

Si $\phi_o(\Omega) = 1$, alors :

$$\mu_{X_t}(A) = \frac{1}{1+t} \mu_{X_o}(A) + \frac{1}{1+t} \sum_{j=0}^{t-1} \delta_{x_j^*}(A)$$

Cette dernière expression nous permet de voir clairement que : $\forall t \geq 0$, μ_{X_t} est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$, et on peut dont calculer pour tout t, l'expression de l'espérance mathéatique d'une variable aléatoire f.

2.3 L'espérance d'une variable aléatoire

Le calcul d'une espérance mathématique est très utile, il permet de retrouver et de recalculer la majorité des résultats de la théorie financière (CAPM, CCAPM,...) et de la théorie de la décision. La seule chose qui diffère est la mesure de probabilité, qui, ici est bien spécifié et simple dans la pratique, puisqu'elle se rapproche des fréquences empiriques. Ici, l'espérance est comme déjà conditionnée sur toutes les réalisations passées. L'espérance qui se déduit des mesures fictives est très intuitive.

En effet, si $a \in \Omega$, et f une variable aléatoire sur[7] $(\Omega, \mathcal{F})$ alors $E_{\delta_a}(f) = f(a)$.[8] Ainsi :

[7] Si $(\Omega, \mathcal{F}) = (\Re, \mathcal{B}_\Re)$, $\mathcal{B}_\Re$ est la tribu des Borélien, c'est-à-dire la tribu engendrée par les intervalles de $\Re$.sans aucune précision sur $\mathcal{F}$, on peut la considerer $\mathcal{F}$ comme l'ensemble des parties de Ω.

[8] Si $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace probabilisé, $E_P(f)$ désigne l'espérance sous la probabilité P, d'une variable aléatoire f.

$$E_{\mu_{X_t}}(f) = \frac{\phi_o(\Omega)}{\phi_o(\Omega)+t} E_{\mu_{X_o}}(f) + \frac{1}{\phi_o(\Omega)+t} \sum_{j=0}^{t-1} f\left(x_j^*\right) \tag{3}$$

Pour $\phi_o(\Omega) = 1$, on a :

$$E_{\mu_{X_t}}(f) = \frac{1}{1+t} E_{\mu_{X_o}}(f) + \frac{1}{1+t} \sum_{j=0}^{t-1} f\left(x_j^*\right) \tag{4}$$

En particulier, si Ω est une partie de $\Re$ (ensemble des nombres réels) et $f = I_d$ (l'identité, $I_d(x) = x, \forall x \in \Omega$), en notant $E_\mu(X_t) \doteqdot E_{\mu_{X_t}}(I_d)$ on a :

$$E_\mu(X_t) = \frac{\phi_o(\Omega)}{\phi_o(\Omega)+t} E_\mu(X_o) + \frac{1}{\phi_o(\Omega)+t} \sum_{j=0}^{t-1} x_j^* \tag{5}$$

Ainsi $E_\mu(X_t)$ dépend fortement des réalisations passées du processus $(X_t)_{t\geq 0}$. $E_\mu(X_t)$ est une moyenne pondérée des réalisations passées et d'une espérance subjective qui dépend des croyances initiale du joueur. Si $E_\mu(X_o)$ est fini, alors lorsque t devient très grand $E_\mu(X_t)$ dépend uniquement des réalisations passées du processus.

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} E_\mu(X_t) = \lim_{t\longrightarrow\infty} \left(\frac{1}{t} \sum_{j=0}^{t-1} x_t^* \right) \tag{6}$$

Proposition 1 : Pour tout $A \in \mathcal{F}$, la suite $\left(\mu_{X_t}(A)\right)_{t\geq 0}$ est une suite converge dans $\Re$, en particulier si $\Omega \subset \Re$ et $A =]-\infty, x]$, $x \in \Re$, les fonctions de distributions associées aux mesures μ_{X_t} convergent.

Preuve : La preuve de ce théorème découle simplement de (H1) et de la définition de $\mu_{X_t}(A)$ telle qu'écrite dans (2). Mais nous verons par la suite que l'on peut se passer de l'hypothèse H1, en se situant dans un cadre plus générale en considérant plutôt la notion de convergence presque sûre.

Proposition 2 :
a) $\mu_{X_t} \Longrightarrow \mu_X$ [9]

$$\mu_X(A) \doteqdot \lim_{t\longrightarrow\infty} \left(\frac{1}{t} \sum_{j=0}^{t-1} \delta_{x_j^*}(A) \right)$$

Les fonctions de distributions F_X, F_{X_t} associées à μ_X, μ_{X_t}sont définies par :

[9] $\Longrightarrow$ désigne la convergence faible. C'est-à-dire qu'en définissant pour tout $x \in \Re$, $F_X(x) = \mu_X(]-\infty, x])$, on a que, en tout point de continuité x_o de F_X, $(F_{Xt}(x_o))_{t\geq 0}$ converge vers $F_X(x_o)$.

$$\forall x \in \Re, \quad F_X(x) = \mu_X(]-\infty, x]) = \lim_{t \longrightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} \sum_{j=0}^{t-1} \delta_{x_j^*}(]-\infty, x]) \right)$$

$$\forall x \in \Re, \quad F_{X_t}(x) = \mu_{X_t}(]-\infty, x])$$

b) Si Ω est une partie de $\Re$, alors il existe une suite de variables aléatoires $(Y_t)_{t \geq 0}$; une variable aléatoire Y et un espace probabilisé commun $(\Omega^*, \digamma^*, P^*)$ tels que sous la probabilité P^*, les Y_t ont la même distribution que les μ_{X_t} et Y a la sous P^* la même distribution que μ_X ; De plus pour tout $w \in \Omega^*$ on a que $(Y_t(w))_{t \geq 0}$ converge vers $Y(w)$.

c) Pour toute fonction f continue, bornée on a : $E_{\mu_{X_t}}(f) \longrightarrow E_{P^Y}(f)$, c'est-à-dire :

$$\int_\Omega f d\mu_{X_t} \longrightarrow \int_{\Omega^*} f dP^{*Y} \doteqdot \int_{\Omega^*} f(Y)\, dP^* = \lim_{t \longrightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} \sum_{j=0}^{t-1} f(x_t^*) \right) \tag{7}$$

Preuve : La proposition 1, permet de dire que : $\forall x \in \Re,\ \mu_{X_t}(]-\infty, x]) \longrightarrow \mu_X(]-\infty, x])$, c'est-à-dire $F_{X_t}(x) \longrightarrow F_X(x)$. Pour achever la preuve du a) il reste à monter que F_X est une fonction de répartition. En effet, $F_X(x) = \mu_X(]-\infty, x]) = \lim_{t \longrightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} \sum_{j=0}^{t-1} \delta_{x_j^*}(]-\infty, x]) \right)$, et donc :

$$F_X(+\infty) = \mu_X(]-\infty, +\infty[) = 1 \ ; \quad F_X(-\infty) = \mu_X(\emptyset) = 0.$$

F_X est croissante, car si $x \leq y$:

$$F_X(y) - F_X(x) = \lim_{t \longrightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} \sum_{j=0}^{t-1} \delta_{x_j^*}(]x, y]) \right) \geq 0.$$

F_X est continue à droite : [10].

$$F_X(x^+) - F_X(x) = \lim_{t \longrightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} \sum_{j=0}^{t-1} \delta_{x_j^*}\left(]x, x^+]\right) \right) = 0$$

Ainsi, F_X est bien une fonction de répartition.

Pour la preuve du b), nous choisissons $\Omega^* =]0,1[$, $\digamma^*$ est l'ensemble des Boréliens de $]0,1[$, et P^* est la mesure de Lebesgue sur $]0,1[$; définissons :

[10] Si $(x_t)_{t \geq 0}$ est une suite décroissante qui converge vers x, et μ une mesure sur $(\Omega^*, \digamma^*)$, $\Omega \subset \Re$, $\mu\left(]x, x^+]\right) = \lim_{t \to \infty} \mu(]x, x_t]) = 0$.

$$\forall w \in \left]0,1\right[,\ Y_t\left(w\right) = \inf\left\{x \in \Omega : w \leq F_{X_t}\left(x\right)\right\}$$

$$\forall w \in \left]0,1\right[,\ Y\left(w\right) = \inf\left\{x \in \Omega : w \leq F_X\left(x\right)\right\}$$

On a que : $Y_t\left(w\right) \leq x \Longleftrightarrow w \leq F_{X_t}\left(x\right)$, ainsi :

$$P^*\left(\left\{w \in \left]0,1\right[: Y_t\left(w\right) \leq x\right\}\right) = P^*\left(\left\{w \in \left]0,1\right[: w \leq F_{X_t}\left(x\right)\right\}\right) = F_{X_t}\left(x\right)$$

Ainsi, Y_t a pour distribution $F_{X_t}\left(x\right)$; de la même manière, on montre que : Y a pour distribution $F_X\left(x\right)$. Pour achever la preuve du b) il reste à prouver que $\left(Y_t\left(w\right)\right)_{t\geq 0}$ converge vers $Y(w)$. Soient $0 < w < 1$, et $\varepsilon > 0$, choisissons x un point de continuité de $F_X\left(x\right)$ tel que $Y(w) - \varepsilon < x < Y(w)$. On a donc : $F_X\left(x\right) < w$, et puisque $\left(F_{X_t}\left(x\right)\right)_{t\geq 0}$ converge vers $F_X\left(x\right)$, alors pour t assez grand nous avons : $F_{X_t}\left(x\right) < w$. Ainsi, pour t assez grand, on a : $x < Y_t(w)$, et on peut donc déduire : $\liminf_t\ Y_t(w) \geq x > Y(w) - \varepsilon$. Comme cette dernière inégalité est vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on déduit que : $\liminf_t\ Y_t(w) \geq Y(w)$.

Montrons que : $\limsup_t Y_t(w) \leq Y(w)$. Soit w', tel que $0 < w < w'$, soit $\varepsilon > 0$, choisissons y un point de continuité de F_X tel que : $Y(w') < y < Y(w') + \varepsilon$. On a donc : $w < w' \leq F_X\left(y\right)$, et donc pour t assez grand on a aussi : $w < F_{X_t}\left(y\right)$, et par la suite on déduit pour t grand : $Y_t(w) \leq y < Y(w') + \varepsilon$. Ainsi $\limsup_t\ Y_t(w) \leq Y\left(w'\right)$, dès $w < w'$. Pour les points de continuité w de Y, on a donc : $Y_t\left(w\right) \longrightarrow Y(w)$. Puisque Y est non décroissante sur $\left]0,1\right[$, Y ne peut avoir qu'un nombre dénombrable de points de discontinuité. Pour les points de discontinuité w de Y, on peut redéfinir $Y_t\left(w\right) = Y\left(w\right) = 0$. Avec ce changement, on a : $Y_t\left(w\right) \longrightarrow Y\left(w\right),\ \forall w \in \left]0,1\right[$. Comme le changement, n'affecte qu'un ensemble négligeable (pour la mesure de Lebesgue), alors les distributions de $Y_t\left(w\right)$ et de $Y\left(w\right)$ restent inchangées.

Pour la preuve du c), notons que comme f est continue et bornée, f est intégrable (pour toutes les mesures de probabilité). Si f est une fonction simple, $f = \alpha \P_A$,[11] $\alpha \in \Re,\ A \in \digamma,\quad \int f d\mu_{X_t} = \alpha\mu_{X_t}\left(A\right) \longrightarrow \alpha\mu_X\left(A\right)$

Pour $A = \left]-\infty, x\right],\ x \in \Re$, nous avons vu que : $\mu_X\left(A\right) = P^{*Y}\left(A\right) = P^*\left(Y \in A\right)$.

De même pour $A = \left]x,y\right] = \left]-\infty,y\right] \setminus \left]-\infty,x\right], x \leq y$, on a :

$$\mu_X\left(A\right) = \mu_X\left(\left]-\infty,y\right]\right) - \mu_X\left(\left]-\infty,x\right]\right) = P^{*Y}\left(\left]-\infty,x\right]\right) - P^{*Y}\left(\left]-\infty,x\right]\right)$$

Ainsi : $\mu_X\left(\left]x,y\right]\right) = P^{*Y}\left(\left]x,y\right]\right)$ pour tous $x, y \in \Re,\ x \leq y$.

---

[11] $\P_A\left(x\right) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$

Puisque : $\mathcal{P} = \{\ ]a, b]\ ,\ a, b \in \Re \cup \{-\infty\}\}$ est un[12] $\pi - système$ de la tribu des Boréliens, et que μ_X et P^{*Y} coïncident sur $\mathcal{P}$ alors μ_X et P^{*Y} coïncident[13] sur la $\sigma-$algèbre engendrée par $\mathcal{P}$. Ainsi $\mu_X = P^{*Y}$ sur la tribu des Boréliens. Par la suite, nous déduisons : $\int f d\mu_X = \int f dP^{*Y}$, pour $f = \alpha \P_A$.

Si f est une fonction étagée : $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \P_{A_i}$, $\alpha_i \in \Re$, $A_i \in \mathcal{B}$, $i = 1, 2, ..., n \in \aleph^*$, le résultat se déduit par linéarité de l'intégrale. Si f est mesurable positive, il existe une suite croissante, de fonctions étagées, mesurables, positives qui converge vers f, dans ce cas le résultat se déduit avec le théorème de convergence monotone (de Beppo Levi).

Moralité : Nous avons trouvé un espace probabilisé commun $(\Omega^*, \digamma^*, P^*)$ dans lequel nous retrouvons la théorie de probabilité habituel. Dans cet espace, l'information à la date t est contenue dans $\sigma(Y_s, s \leq t)$ (les $(Y_t)_{t\geq 0}$ ont été construits dans la première partie de la preuve du théorème ci-dessus).

Si $(x_t^*)_{t\geq 0}$ sont les réalisations du processus $(X_t)_{t\geq 0}$ de variables aléatoires sur $(\Omega, \digamma)$, et T une variable aléatoire définie sur une partie de $\Re$ à valeurs dans $\Re$, nous définissons $(T(x_t^*))_{t\geq 0}$, comme étant les réalisations de $(T(X_t))_{t\geq 0}$.

Théorème : (de changement de variable)

a) Pour tout $A \in \digamma$, $\mu_{T(X_t)}(A) = \mu_{X_t}\left(T^{-1}(A)\right)$

b) Si f est une fonction mesurable réelle, alors :

$$E_{\mu_{T(X_t)}}(f) = E_{\mu_{X_t}}(f(T))$$

Preuve : La preuve de ce théorème est assez simple, il suffit de se rappeler du théorème de transfert. Mais, dans la réalité, l'application de ce théorème est utile pour éviter de nombreuses confusions. Si par exemple $Z_t = (X_t, Y_t)$, $t = 0, 1, ...$ et $T(X, Y) = X + Y$, on peut écrire :

$$E_\mu(X_t + Y_t) = \frac{\phi_o(\Omega) E_\mu(X_o + Y_o) + \sum_{j=0}^{t-1}(x_t^* + y_t^*)}{t + \phi_o(\Omega)}$$

[12] $\mathcal{P}$ est un $\pi - système$ si :

$$A, B \in \mathcal{P} \quad alors \quad A \cap B \in \mathcal{P}$$

C'est-à-dire que $\mathcal{P}$ est stable pour l'intersection.

[13] La conclusion découle du théorème d'unicité sur les $\pi - \lambda - système$. Pour plus d'informations, voir le $\pi - \lambda - théorème$ du livre de Patrick Billingsley, «Probability and measure», (1979), pages 33-34.

2.4 Les calculs en temps continu

Nous nous intéressons maintenant au cas continu. Comment s'écrit μ_{X_t} ? μ_{X_t} est-elle toujours une mesure de probabilité ? Que devient l'expression de l'espérance mathématique ? Ce sont là quelques unes des questions que nous répondons dans les paragraphes qui suivent. S'il n'y a pas de confusion sur le processus $(X_t)_{t\geq 0}$, nous écrivons ici simplement μ_t pour désigner μ_{X_t}.

Partant de l'expression (1) on a pour Δt très petit :

$$\mu_{X_{t+\Delta t}}(A) = \frac{\phi_o(\Omega) + t}{\phi_o(\Omega) + t + \Delta t}\mu_{X_t}(A) + \frac{\Delta t}{\phi_o(\Omega) + t + \Delta t}\delta_{x_t^*}(A)$$

C'est-à-dire :

$$\mu_{X_{t+\Delta t}}(A) - \mu_{X_t}(A) = \frac{-\Delta t}{\phi_o(\Omega) + t + \Delta t} + \frac{\Delta t}{\phi_o(\Omega) + t + \Delta t}\delta_{x_t^*}(A)$$

Au passage à la limite, on déduit :

$$\frac{d\mu_t(A)}{dt} = \frac{-1}{t + \phi_o(\Omega)}\mu_t(A) + \frac{1}{t + \phi_o(\Omega)}\delta_{x_t^*}(A) \tag{8}$$

Cette dernière expression est une équation différentielle assez simple à résoudre, sa solution est donnée par[14] :

$$\mu_{t^+}(A) = \begin{cases} \frac{t + \mu_o(A)\phi_o(\Omega)}{t + \phi_o(\Omega)} \text{ si } x_t^* \in A \\ \frac{\mu_o(A)\phi_o(\Omega)}{t + \phi_o(\Omega)} \text{ si } x_t^* \notin A \end{cases} \tag{9}$$

On vérifie facilement que μ_t (C'est-à-dire μ_{X_t}) est encore bien une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$. Si $\phi_o(\Omega) = 1$, on a :

$$\mu_{t^+}(A) = \begin{cases} \frac{t + \mu_o(A)}{1 + t} \text{ si } x_t^* \in A \\ \frac{\mu_o(A)}{1 + t} \text{ si } x_t^* \notin A \end{cases} \tag{10}$$

Soit f une variable aléatoire, nous calculons l'espérance de f sous la mesure de probabilité μ_t (C'est-à-dire μ_{X_t}). Sans nuire à la généralité et pour simplifier les expressions dans les calculs, nous supposons $\phi_o(\Omega) = 1$. Soit $(A_i)_{i=1,\ldots,n}$ une partition de Ω d'ensemble mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(\alpha_i)_{i=1,\ldots,n}$ une suite de scalaires (α_i sont possitifs ou nuls). Posons $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \P_{A_i}$, f est une fonction mesurable et intégrable. En utilisant la définition de la mesure μ_t et en tenant compte que $\phi_o(\Omega) = 1$, on a :

[14] $t^+ = \lim_{s \downarrow t} s$

$$\int f d\mu_{t^+} = \frac{t + \mu_o\left(A_{i_0}\right)}{1+t}\alpha_{i_0} + \frac{\sum\limits_{i \neq i_0}^{n} \alpha_i \mu_o\left(A_i\right)}{1+t}$$

Où A_{i_0} est l'unique ensemble de la partition tel que $x_t \in A_{i_0}$. développant cette dernière expression, on a :

$$\int f d\mu_{t^+} = \frac{\alpha_{i_0} t + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_o\left(A_i\right)}{1+t}$$

C'est-à-dire finalement :

$$\int f d\mu_{t^+} = \frac{tf\left(x_t\right) + E_{\mu_0}\left(f\right)}{1+t} \tag{11}$$

Ainsi, si nous disposons d'un jeu fictif pur, c'est-à-dire si $\mu_o\left(A\right) = \mu_{X_0}\left(A\right) = \delta_{x_o^*}\left(A\right), \forall A \in \digamma$, alors :

$$\int f d\mu_{t^+} = \frac{f\left(x_o^*\right) + tf\left(x_t^*\right)}{1+t} \tag{12}$$

Si f est une fonction mesurable positive, les deux derniers résultats se déduisent grâce au théorème de convergence monotone (car il existe dans ce cas un suite de fonctions étagées mesurables positives qui converge vers f).

En temps continu, la valeur de l'intégrale est assez différente de ce que l'on trouve en temps discret. L'intégrale dépend uniquement de deux valeurs. Pour les jeux fictifs purs, elle dépend fortement de la valeur prise par f à la dernière réalisation en date du processus (x_t^*) et faiblement de la valeur prise par f en x_o^* (qui n'est pas une réalisation, mais une valeur subjective donnée en début du jeu).

Voilà présenté assez sommairement la mesure dans les jeux fictifs. Dans les paragraphes qui suivent, nous nous intéressons à la mesure de la satisfaction d'un joueur et à l'estimation de paramètre dans les jeux fictifs.

3 Application

3.1 Comportement dans les jeux fictifs

Nous revenons aux jeux fictifs purs, nous notons S^i l'espace des stragégies purs du joueur i ; S^{-i} l'espace des stratégies purs des joueurs autres que i ; S est l'espace de toutes les stratégies de jeu des joueurs, $S = S^i * S^{-i}$. Pour simpliefier, nous supposons que tous les S^i sont finis. Nous considérons $\mathcal{F}^i$

comme l'ensemble des parties de S^i et $\mathcal{F}^{-i}$ l'ensemble des parties de S^{-i} ; $\mathcal{F}$ est l'ensemble des parties de S. Nous nous limitons aux jeux fictifs purs. A la date t et pour un joueur i, les réalisations des stratéfies des autres joueurs sont les s_j^{-i}, $j = 1, 2, ..., t-1$. La croyance du joueur i, γ_t^i coïncide exactement avec la mesure fictive $\mu_{S_t^{-i}}$ définie sur $\left(S^{-i}, \mathcal{F}^{-i}\right)$. Pour les jeux fictifs purs, cette croyance coïncide aussi avec la distribution empirique des autres joueurs :

$$\gamma_t^i\left(s^{-i}\right) = \mu_{S_t^{-i}}\left(\left\{s^{-i}\right\}\right) = d_t^{-i}\left(s^{-i}\right)$$

Proposition 3 :

i) Si un équilibre de Nash s est observée à la date t, s sera jouée à toutes les dates après t.

ii) Tout état stationnaire de stratégies pures dans un jeu imaginaire est un équilibre de Nash.

Preuve : La preuve du *ii*) est trivial puisque chaque joueur optimise son choix de stratégie et à la possibilité de dévier. La preuve du *i*) est simple. En effet, supposons qu'à la date t les prédictions γ_t^i des joueurs sont telles leur choix correspond à un équilibre de Nash. En vêtu de la formulation des croyances, nous pouvons écrire : $\gamma_{t+1}^i = \alpha_t 1_{\{\widehat{s}^{-i}\}} + (1-\alpha_t).\gamma_t^i$. Puisque l'utilié espérée est une linéaire des probabilités, nous avons :

$$u^i\left(\widehat{s}^i, \gamma_{t+1}^i\right) = \alpha_t . u^i\left(\widehat{s}^i, \widehat{s}^{-i}\right) + (1-\alpha_t).u^i\left(\widehat{s}^i, \gamma_t^i\right)$$

Comme $\widehat{s}^i$ est meilleure réponse à γ_t^i, alors nous déduisons le résultat.

exemple 1 : Considérons le jeu pile ou face suivant (joueur 1 en ligne et joueur 2 en colone) :

	H	T
H	$(1,-1)$	$(-1,1)$
T	$(-1,1)$	$(1,-1)$

Avec les mesures initiales (1.5, 2) pour le joueur 1, et (2, 1.5) pour le joueur 2. Pour ce jeu simple, les choix des joueurs sont cycliques et décrits comme suit : Au premier jeu, les deux joueurs choisissent T et les poids deviennent (1.5, 3) pour le joueur 1 et (2, 2.5) pour le joueur 2. Au second jeu, compte tenu des nouvelles croyances, 1 choisit H et 2 choisit T. Les poids deviennent (2.5, 3) pour 1, et (2, 3.5) pour 2. Au troisième jeu, les choix sont les-mêmes qu'au second, les poids sont maintenant : (3.5, 3) et (2, 4.5). Pour les trois prochains jeu à partir du $4^{ème}$ les choix sont (H, H) , les deux joueurs choisissent H. Les trois prochains jeux après, on observe (H, T) et ensuite (T, H) pour les trois jeux après, et ainsi de suite... Pour cet exemple, les distributions marginales d_t^i convergent vers $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ pour $i = 1, 2$. Le produit des distributions marginales convergent vers $\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$ qui est l'unique équilibre de Nash du jeu.

Proposition 4 : Pour les jeux fictifs, si les distributions empiriques d_t^i convergent, alors le profile correspondant au produit des distributions limites est un équilibre de Nash.

Preuve : La preuve est semblable à la précédente. En effet, si le produit des distributions marginales convergent vers un profile $\widehat{\sigma}$ et si $\widehat{\sigma}$ n'est pas un équilibre de Nash, alors il y aurait au moins un joueur qui aurait intérêt à dévier.

Exemple 2 : (exemple de mauvaise coordination)

	A	B
A	$(0,0)$	$(1,1)$
T	$(1,1)$	$(0,0)$

Cet exemple est dû à Fudenberg et à kreps[6]. Supposons que ce jeu soit joué comme un jeu fictif avec les croyances initiales $\left(1, \sqrt{2}\right)$ pour les deux joueurs. Au premier jeu, chaque joueur pense que l'autre joueur jouera B, et donc les deux joueurs jouent A. Les croyances deviennent $\left(2, \sqrt{2}\right)$ pour les deux joueurs. Au second jeu, les deux joueurs choisissent A. Les résultats alternent entr (B, B), (A, A), (B, B), (A, A),... Les fréquences empiriques convergent vers $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ qui est un équilibre de Nash en stratégie mixte. Le paiement de chaque joueur est 0 à tous les jeux. Les choix sont toujours sur la première diagonale. Les actions choisies en utilisant la distribution jointe sont différentes de celles déduites du produit des distributions marginales empiriques.

Moralité : Même si le produit des distributions marginales empiriques convergent vers un équilibre de Nash en stratégie mixte, les actions issus du jeux fictifs ne coïndent pas toujours avec les actions déduites de l'équilibre de Nash. En effet, utiliser le produit des distributions empiriques, revient à supposer que les actions des joueurs sont indépendantes.

Comment est le niveau de satsfaction d'un joueur à long-terme lorsqu'il utilise les jeux fictifs ? . Notons :

$$
\begin{aligned}
\widehat{U}_t^i &= \max_{\sigma^i} u_t^i \left(\sigma^i, d_t^{-i}\right) \\
U_t^i &= \frac{1}{t} \sum_{\tau=1}^{t} u\left(s_\tau^i, s_\tau^{-i}\right) \\
U_t^{*i} &= \max_{\sigma^i} u_t^i \left(\sigma_t^i, \gamma_t^i\right)
\end{aligned}
$$

$\widehat{U}_t^i$ est le niveau de satisfaction lorsque le joueur i optimise son choix en utilisant la distribution empirique (supposé connue à l'avance) des autres joueurs . U_t^i est simplement l'utilité moyenne après t périodes, en utilisant les jeux fictifs. U_t^{*i} est le niveau de satisfaction retiré du jeu fictif la date t.

Définition : Un jeu fictif est dit $\varepsilon-$*consistant* le long d'une histoire, s'il existe $T \geq 0$, tel que pour tout $t \geq T$, $U_t^i + \varepsilon \geq \widehat{U}_t^i$ pour chaque joueur i. Appelons η_t^i la fréquence des changements, c'est-à-dire la fraction de période $\tau \leq t$ où : $s_\tau^i \neq s_{\tau-1}^{-i}$. Nous disons que le jeu à des changements non-fréquents le long d'une histoire si les η_t^i convergent vers 0 lorsque t devient grand.

Proposition 5 : Si un jeu fictif a des changement non-fréquents les long d'une histoire, alors pour tout $\varepsilon > 0$, le jeu est $\varepsilon-$*consistant* le long de cette histoire.

Preuve : Nous faisons pour le jeu fictif pur. La généralisation est immédiate. En effet, pour le jeu fictif pur, nous avons :

$$U_{t+1}^{*i} = \; u_t^i\left(\sigma_{t+1}^i, \gamma_{t+1}^i\right) = \frac{1}{1+t} u^i\left(\sigma_{t+1}^i, s_t^{-i}\right) + \frac{t}{1+t} u^i\left(\sigma_{t+1}^i, \gamma_t^i\right)$$

$$U_{t+1}^{*i} \leq \frac{1}{1+t} u^i\left(\sigma_{t+1}^i, s_t^{-i}\right) + \frac{t}{1+t} u^i\left(\sigma_t^i, \gamma_t^i\right)$$

$$U_{t+1}^{*i} \leq \frac{1}{1+t} u^i\left(\sigma_{t+1}^i, s_t^{-i}\right) + \frac{t}{1+t} U_t^{*i}$$

En itérant cette dernière relation, nous déduisons :

$$U_{t+1}^{*i} \leq \frac{1}{1+t} \sum_{\tau=0}^{t} u^i\left(\sigma_{\tau+1}^i, s_\tau^{-i}\right) + \frac{1}{1+t} U_0^{*i}$$

$$U_{t+1}^{*i} \leq \frac{1}{1+t} \sum_{\tau=0}^{t} u^i\left(\sigma_\tau^i, s_\tau^{-i}\right) + \frac{1}{1+t} \sum_{\tau=0}^{t} \left[u^i\left(\sigma_{\tau+1}^i, s_\tau^{-i}\right) - u^i\left(\sigma_\tau^i, s_\tau^{-i}\right)\right] + \frac{1}{1+t} U_0^{*i}$$

Nous déduisons le résultat, puisque le jeu a des changements non-fréquents.

Proposition 6 : Si un jeu a des changements non-fréquents le long d'une histoire, alors il existe une suite $(\varepsilon_t)_{t \geq 1}$ possitive qui converge vers zéro telle que : $U_t^i + \varepsilon_t \geq \widehat{U}_t^i$.

Preuve : La preuve est semblable à la précédente, il suffit de choisir $\varepsilon_t \leq \frac{1}{t} \max u^i\left(.,.\right)$.

Moralité : En utilisant les jeux fictifs, les joueurs obtiennent un niveau de satisfaction de long-terme proche du niveau de satisfaction atteint si la distribution empirique était connue à l'avance.

3.2 Estimation de paramètres

Comment apprécier la satisfaction d'un joueur dans les jeux fictifs ? Une façon de répondre à cette question est d'envisager qu'un joueur sera satisfait si la mesure μ_{X_t} lui permet de prendre de bonnes décisions et de faire de bonnes prévisions. Si θ est une valeur non-observée et $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus dont les réalisations permettent d'estimer θ. Le joueur prend de bonnes décisions, si à chaque date t, son estimateur $\widehat{\theta}_{t+1}$ de θ, est proche de θ. L'objectif du joueur peut donc être de minimiser sa fonction de perte quadratique. A la date t, son problème s'écrit (lorsque t est discret) :

$$\min_{\theta} E_{\mu}\left[(X_{t+1}-\theta)^2\right] \tag{13}$$

Si t est continu, le problème est :

$$\min_{\theta} E_{\mu}\left[(X_{t^+}-\theta)^2\right] \tag{14}$$

Lorsque le temps est discret, la solution du problème est :

$$\widehat{\theta}_{t+1} = E_{\mu}\left(X_{t+1}\right) = \frac{\phi_o\left(\Omega\right)}{t+1+\phi_o\left(\Omega\right)} E_{\mu}\left(X_0\right) + \frac{1}{t+1+\phi_o\left(\Omega\right)} \sum_{j=0}^{t} x_t^*$$

Si $\phi_o\left(\Omega\right) = 1$,

$$\widehat{\theta}_{t+1} = \frac{1}{2+t} E_{\mu}\left(X_o\right) + \frac{1}{2+t} \sum_{j=0}^{t} x_t^*$$

Si on a un jeu fictif pur,

$$\widehat{\theta}_{t+1} = \frac{1}{2+t} x_o^* + \frac{1}{2+t} \sum_{j=0}^{t} x_t^*$$

lorsque le temps est continu, en supposant toujours $\phi_o\left(\Omega\right) = 1$, on a :

$$\widehat{\theta}_{t^+} = \frac{E_{\mu}\left(X_o\right) + t x_t}{1+t}$$

Pour le jeu fictif pur et t continu on a :

$$\widehat{\theta}_{t^+} = \frac{x_o^* + t x_t^*}{1+t}$$

3.3 Troisième application

Nous supposons ici que tous les joueurs utilisent les jeux fictifs pour mettre à jour leur croyances sur la distribution des prix. Nous supposnsons que trois types d'agents interviennent sur le marché : les agents dits rationnels, les fondamentalistes et les chartistes. Les joueurs n'ont que deux actions : acheter ou vendre. La décision d'achat ou de vente de chaque type de joueur est décrite comme suit :

A la date t, les joueurs rationels achètent le titre si et seulement si $E_{\mu_{t+1}^R}(R_{t+1}) < \rho_R$. ρ_R est le taux de rentabilité exigé, il peut être inspiré par le rendement d'un actif sans risque. $E_{\mu_{t+1}^R}$ est l'opérateur d'espérance mathématique sous la probabilité μ_{t+1}^R induite par ϕ_0^R. R_{t+1} est le rendement du titre attentu à la date $t+1$. Les fondamentalistes sont vendeurs si et seulement si : $E_{\mu_{t+1}^f}(P_{t+1}) > f_t$. f_t est la valeur fondamentale du titre. P_{t+1} est le prix du titre à la date $t+1$. Les chartistes, sont vendeurs si et seulement si $R_t < \rho_C$.

On peut se demander maintenant : À quel moment les agents seront-ils vendeurs ? Quand seron-ils tous acheteurs ? quelle est la persitance de tels états ?

Proposition 7. Si $\rho_C > 0$ et si $\lim\limits_{t \longrightarrow \infty} (1+\rho_C)^t \longrightarrow 0$, alors tous les agents ne peuvent pas être tous acheteurs (ou tous vendeurs) après un certain temps.

Preuve : Sans nuire à la généralité, supposons que tous les joueurs prennent la décision d'achat depuis le début du jeu. Les chartistes sont achèteurs si : $P_t^* > (1+\rho_C) P_{t-1}^*$. P_t^* est la réalisation du prix à la date t. Le taux de rendement entre t et $t+1$ est :

$$R_{t+1} = \frac{P_{t+1} - P_t^*}{P_t^*}$$

$$E_{\mu_{t+1}^R}(R_{t+1}) = \frac{E_{\mu_{t+1}^R}(P_{t+1}) - P_t^*}{P_t^*}$$

$$E_{\mu_{t+1}^R}(R_{t+1}) = \frac{\frac{\phi_0(\Omega) E_{\mu_0^R}(P_0)}{1+t+\phi_0(\Omega)} + \frac{\sum_{j=0}^{t} P_j^*}{1+t+\phi_0(\Omega)} - P_t^*}{P_t^*}$$

Les agents rationels achètent le titre si $E_{\mu_{t+1}^R}(R_{t+1}) > \rho_R$, c'est-à-dire si :

$$\frac{\phi_0(\Omega) E_{\mu_0^R}(P_0)}{1+t+\phi_0(\Omega)} + \frac{\sum\limits_{j=0}^{t} P_j^*}{1+t+\phi_0(\Omega)} > (1+\rho_R) P_t^* > (1+\rho_R)(1+\rho_C)^t P_0^* \quad (15)$$

Les fondamentalistes achètent le titre si : $E_{\mu^f_{t+1}}(P_{t+1}) < f_t$, c'est-à-dire si :

$$\frac{\phi_0(\Omega) E_{\mu_0^R}(P_0)}{1+t+\phi_0(\Omega)} + \frac{\sum_{j=0}^{t} P_j^*}{1+t+\phi_0(\Omega)} < f_t \tag{16}$$

En divisant les deux dernières équations par $(1+\rho_C)^t$ et en faisant tendre t vers l'infini on a une contradiction.

3.4 Autres Applications

La mesure fictive, déduite des jeux fictifs modifiés sont utiles dans toutes les situations où on est amené à calculer l'espérance d'une variable aléatoire ou à approcher la loi de probabilité d'un processus. Puisque nous avons appris à faire les calculs avec cette mesure de probabilité, nous ne recommençons pas tous les calculs qui peuvent utiliser cette notion. Nous rappelons qu'elle peut être appliquée en particulier en finance dans la théorie de choix des portefeuilles en environnement incertain et de façon général dans la théorie de la décision. L'avantage est que les calculs sont simples et intuitifs. Nous n'avons pas besoin d'imaginer une loi a priori pour un processus donné. Nous utilisons les réalisation du processus pour apprendre à le connaître. Mais, pour que cette méthode soit efficace, nous avons besoin que le processus se reproduise de façons identique et pour généraliser les résultats nous avons en plus besoin que les variables aléatoires soient indédépendantes. Mais, avant de penser à la généralisation et à l'extension de la méthode nous faisons une dernière remarque.

Remarque : La mesure issue des jeux fictifs modifiés cadre bien lorsqu'on souhaite faire une prévision à briève échéance, elle a été à l'origine pensée pour calculer à la date t l'espérance d'une variable aléatoire f ayant observé les réalisations $x_1^*, x_2^*, ..., x_t^*$ d'une processus $(X_t)_{t\geq 0}$. Lorsque f est l'identité et l'espace de départ $\Re$ comment calculer à la date t, $E_\mu(X_{t+2})$ lorsqu'on a pas encore observé x_{t+1}^* ? Si nous estimons x_{t+1}^* par $E_\mu(X_{t+1})$ en nous référant à la relation (5) nous avons :

$$E_\mu(X_{t+2}) = E_\mu(X_{t+1}) = \frac{\phi_o(\Omega)}{\phi_o(\Omega)+t+1} E_\mu(X_o) + \frac{1}{\phi_o(\Omega)+t+1}\sum_{j=0}^{t} x_j^* \tag{17}$$

La mesure fictive regarde le futur comme constant, la prévision de ce qui arrivera à la date $t+1$ est identique de la prévision de la date $t+2$. Les cette mesure de probalité est inapte à anticiper les sauts et les discontinûtés dans un processus. Elles prend en compte les événements inattendus seulement après leur réalisation.

4 Généralisation et extension

Nous avons bien besoin de nouveaux outils, de nouvelles définitions et de nouvelles hypothèses pour généraliser la méthode. Nous nous limitons ici aux jeux fictifs purs, où la croyance initiale à la forme $\phi_0 = \delta_{x_0^*}$. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et $X = (X_t)_{t \geq 0}$, une suite de variables aléatoires de même lois, définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeur dans $\Re$. Soit $A \in \mathcal{F}$, nous aimerions bien estimer $P(X \in A)$. Pour $w \in \Omega$, l'idée est de compter le nombre de fois où $X_t(w) \in A$, $t = 1, 2, ...$ Après T réalisation de X, on souhaite estimer $P(X \in A)$ par :

$$\widehat{P}(A) = \frac{nombre\ de\ fois\ où\ X_t(w) \in A}{T+1}$$

Notre inquiétude est de savoir si $\widehat{P}(A)$ approxime assez bien la vraie probabilité $P(X \in A)$, et si tel est le cas, dans quel sens pourrait-on dire que $\widehat{P}(A)$ converge vers $P(A)$. Pour élucider la question, considérons $X_0, X_1, ..., X_t ...$ une suite de variables aléatoires de même loi. Appelons $I_A(.)$ la fonction indicatrice c'est-à-dire :

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si x} \in A \\ 0 \text{ si x} \notin A \end{cases}$$

Définissons la probabilité empirique comme :

$$\widehat{P}_T(A, w) = \frac{1}{T+1} \sum_{t=0}^{T} I_A(X_t(w)), \quad w \in \Omega, \quad A \in \mathcal{F}$$

Nous voyons clairement que $w \longmapsto \widehat{P}_T(A, w)$ est une variable aléatoire. Nous disons que $\widehat{P}_T(A, .)$ converge en probabilité vers $P^X(A) = P(X \in A)$, si : Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble

$$\left\{ w \in \Omega, \left| \widehat{P}_T(A, w) - P^X(A) \right| > \varepsilon \right\}$$

est négligeable (de mesure nulle). La convergence en probabilité est équivalente à :

$$\forall \varepsilon, \delta > 0, \quad \exists m_0 = m_0(\varepsilon, \delta) \text{ tel que } \forall m \geq m_0, \ P\left(\left\{ w \in \Omega, \left| \widehat{P}_T(A, w) - P^X(A) \right| > \varepsilon \right\} \right) < \delta$$

Nous disons que $\widehat{P}_T(A, .)$ converge presque sûrement vers $P(A)$ si :

$$P\left(\left\{ w \in \Omega : \widehat{P}_T(A, w) \longrightarrow P^X(A) \right\} \text{ quand } T \longrightarrow +\infty \right) = 1$$

Exemple 1 : On peut regarder $I_A(x)$ comme une variable aléatoire de Bernouilli et définir :

$$P(X \in A) = p$$

Si en plus d'avoir la même loi, $(X_t)_{t\geq 0}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, alors en utilisant la borne de Chernoff, on a [15]:

$$P\left(\left\{w\in\Omega:\left|\widehat{P}_{T-1}\left(A,w\right)-P(A)\right|>\varepsilon\right\}\right)\leq 2\exp\left(-2T\varepsilon\right)$$

On voit immédiatement que si la suite $(X_t)_{t\geq 0}$ est i.i.d. alors $\widehat{P}_T\left(A,.\right)$ converge en probabilité vers $P(A)$; puisque le membre droit de l'inégalité ci-dessus ne dépend pas de P, on montre facilement que $\widehat{P}_T\left(A,.\right)$ converge aussi presque sûrement vers $P(A)$. Comme dans la théorie de probabilité, ici aussi il n'est pas compliqué de remarquer que la convergence presque sûre entraîne la convergence en probabilité.

Avec les notations similaires à celles de Vapnik (1998), nous disons que les probabilités empiriques convergent uniformément sur une partie $\Pi\subset\mathcal{F}$ (Uniforme Convergence of Empirical Probability en abrégé : UCEP) si :

$$P\left(\left\{w\in\Omega,\sup_{\Pi}\left|\widehat{P}_{T-1}\left(A,w\right)-P(A)\right|>\varepsilon\right\}\right)\longrightarrow 0\quad\text{quand}\;\;T\longrightarrow+\infty$$

exemple 2 : (Lemme de Glivenko-Cantelli). Si $\Omega=\Re$ et $\mathcal{F}$ est la sigma-algèbre de Borel sur $\Re$. Si $\Pi=\{]-\infty,x]:x\in\Re\}$ et si la suite $(X_t)_{t\geq 0}$ est i.i.d. alors avec le Lemme de Glivenko-Cantelli[16], les probabilités empiriques convergent uniformement sur les ensembles $A_x=\left]-\infty,x\right]$.

Dans la définition précédente, Π pourrait aussi être une classe de fonction mesurable à valeur dans $\Re$. Dans ce cas, on pourrait définir la moyenne empirique comme suit :

$$\widehat{E}_T\left(f,w\right)\doteqdot\frac{1}{1+T}\sum_{t=0}^{T}f\left(X_t(w)\right)$$

[15]Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, alors sous la forme additivement les bornes de Chernoff se réduisent à :

$P\left(\left\{w\in\Omega,\widehat{P}_{T-1}\left(A,w\right)\geq P(A)+\varepsilon\right\}\right)\leq\exp\left(-2T\varepsilon\right)$

$P\left(\left\{w\in\Omega,\widehat{P}_{T-1}\left(A,w\right)\leq P(A)-\varepsilon\right\}\right)\leq\exp\left(-2T\varepsilon\right)$

Pour plus de détails sur la borne de Chernoff, se réferrer au théorème de Chernoff, dans le livre de Patrick Billingsley, Probability and measure, 1979. p.124 ; ou bien au livre Widyasagar (2003).

[16]Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même distribution inconnue F, alors la distribution empirique définie par :

$$F_n\left(x,w\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}I_{]-\infty,x]}\left(X_k(w)\right)$$

est telle que :

$$D_n\left(w\right)=\sup_x\left|F_n\left(x,w\right)-F(x)\right|$$

converge vers 0 avec la probabilité 1.

Appelons $E(f, P_0)$ l'espérance de f sous la probabilité P_0. Posons :

$$q(T, \varepsilon, P) \doteqdot P\left(\left\{w \in \Omega : \sup_{f \in \Pi}\left|\widehat{E}_T(f, w) - E(f, P_0)\right| > \varepsilon\right\}\right)$$

Le couple (Π, P) a la propriété UCEM (Uniforme Convergence of Empirical Mean) si $\forall \varepsilon > 0$, $q(T, \varepsilon, P) \longrightarrow 0$ quand $T \longrightarrow +\infty$. Si $\mathcal{P}$ est une famille de probabilités sur $(\Omega, \digamma)$, nous dirons que le triplet $(\Omega, \digamma, \mathcal{P})$ possède la propriété UCEMUP (Uniform Convergence of Empiracal Means in Uniform Probability) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \;\; \overline{q}(T, \varepsilon, \mathcal{P}) = \sup_{P \in \mathcal{P}} q(T, \varepsilon, P) \longrightarrow 0 \text{ quand } T \longrightarrow +\infty$$

Nous allons maintenant définir la notion d'algorithme approximativement correct. Nous supposons qu'il existe un objectif inconnu $f \in \Pi$, appelée fonction objective. Le but du jeu est d'utiliser les réalisations de $(X_t)_{t \geq 0}$ pour apprendre à connaître f. Un algorithme est une famille indexée $\{A_T\}_{T \geq 0}$ de fonctions où :

$$A_T : \Omega \text{ x } \Re^T \longrightarrow \Pi$$

Nous définissons donc le procédé d'apprentissage comme une suite $\{h_T\}$ de fonctions mesurables définies par :

$$h_T(f, w) \doteqdot A_T\left[\{X_1(w); f(X_1(w))\}, ..., \{X_T(w); f(X_T(w))\}\right]$$

Posons : [17]

$$r(T, \varepsilon, \mathcal{P}) \doteqdot \sup_{\widetilde{P} \in \mathcal{P}} \widetilde{P}\{w \in \Omega : d_P[f, h_T(f; X)] > \varepsilon\}$$

Un algorithme $\{A_T\}_{T \geq 0}$ est probablement approximativement correct avec la précision $\varepsilon > 0$, si $r(T, \varepsilon, \mathcal{P}) \longrightarrow 0$ quand $T \longrightarrow +\infty$.

Muni de ces nouveaux outils, définitions et hypothèses non peut regarder l'apprentissage de façon globale, comme vrai moyen de reconnaissance des phénomèmes. Pour en savoir davantages sur cette démarche statistique de l'apprentissge, on peut se référer aux travaux de Vapnik [9] ou à l'ouvrage de Vidyasagar[10].

[17] $d_P(a, b) \doteqdot \int |a(x) - b(x)|\, dP$

5 Conclusion

Le but de ce travail était de modifier les jeux fictifs pour trouver une mesure de probabilité essentiellement fondée sur les réalisations passées d'un processus de variables aléatoires. Nous avons déterminé les formulations analytiques de cette mesure et nous avons donné l'expression de l'espérance mathématique d'une variable aléatoire sous cette mesure fictive déduite du jeu. Les calculs ont été faits en temps discret et en temps continu. Une chose qui nous réconforte est que, la connaissance des fréquences de jeux, permet de reconstituer un autre espace d'information. Les informations initiales contenues dans les variables aléatoires, ne se perdent pas. Elles se trouvent transférées dans les fractiles des mesures de probabilité fictives. Nous avons aussi remarqué que cette notion de mesure s'adapte bien pour la prévision à très brève échéance. La mesure fictive regarde le futur comme constant, la prévision de ce qui arrivera à la date $t+1$ est identique de la prévision de la date $t+2$. Cette mesure de probalité est inapte à anticiper les sauts et les discontinûtés et à marquer clairement les cycles dans un processus. Elle prend en compte les événements inattendus seulement après leur réalisation. Nous avons donné quelques résultats des jeux fictifs se rapportant aux équilibres de Nash.

References

[1] Patrick Billingsley, Probability and measure, The Universiy of Chicago, 1979.

[2] Bogaçhan Çelen, Shachar Kariv, Distinguishing Informational Cascades from Behavior in the laboratory, 2003.

[3] Brown, G. W. , Iterative solutions of games by fictitious play, Activity Analysis of Production Allocation, Newyork : Willey, 1951.

[4] Emilio Buracci, Leornardo Landi, Speculative dynamics bounded rationality learning, European Journal of Operational research, 1996.

[5] Drew Fudenberg and David K. Levine, "The Theory of learning in games", MIT Press series on Economic Learning, 1998.

[6] Drew Fudenberg and D. kreps, Learning and mixted equilibria, Games and Economic ehaviour, 1993.

[7] Miyassawa, K. (1961), On the convergence of learning process in a 2 x 2 non-zero-person game, Research Memo 33, Princeton University

[8] Shapley, L. (1964), Some topics in two-person games, Advances in Games Theory, Princeton University Press.

[9] Vapnik, V. (1998), Statistical Learning Theory, Wiley.

[10] Vidyasagar (2003), Learning and generalisation : with applications to neural networks, 2nd ed. London ; New York : Springer.

[11] Xavier Vives, 1995, Learning from others: A Welfare analys, Institut d'Anàlis Econìmica.