

**Volatilité stochastique du taux de  
change nominal canadien dans une  
perspective de long et court terme**

Said ABIDOUNE

Dirigé par William J. McCausland

Département des Sciences Économiques

Faculté des Arts et Sciences

Université de Montréal

April 30, 2009

## 0.1 Sommaire

Cette recherche traite, dans une perspective de court et long terme, le cas univarié de la volatilité stochastique du taux de change nominal canadien. Son but est de capturer la persistance, de cette volatilité, pour le long terme et sa dynamique pour le court terme.

Les paramètres du modèle ainsi que les volatilités latentes sont estimés selon l'approche bayésienne.

Les données traitées sont relatives au taux de change nominal du dollar canadien. La base de données est constituée de 2968 observations journalières. La source des données est le Fédéral Reserve Bank of New York.

La démarche utilisée est basée sur la méthode, développée par William J. McCausland, qui permet le tirage des volatilités à partir de leurs distributions à posteriori.

L'outil de simulation, pour certains paramètres, est en particulier l'algorithme de Metropolis-Hasting qui fait partie de la Chaîne Markovienne de Monte Carlo (MCMC) dont la loi de ses tirages converge en distribution vers la loi à posteriori.

L'analyse bayésienne est gourmande au niveau computationnelle. Le logiciel utilisé pour générer le code est Matlab. D'autres programmes développés en langage C, par Monsieur William J. McCausland, ont été utilisés dans le cadre de la présente étude.

# Table des matières

|       |   |    |
|-------|---|----|
| 0.1   | Sommaire . . . . .  | i  |
| 0.2   | Introduction . . . . .  | 1  |
| 0.3   | Revue de littérature . . . . .  | 4  |
| 0.4   | Aspect théorique . . . . .  | 6  |
| 0.4.1 | Éléments de l'analyse bayésienne . . . . .  | 6  |
| 0.4.2 | l'algorithme de Metropolis-Hasting . . . . .  | 8  |
| 0.4.3 | Densité à priori de $\theta$ . . . . .  | 9  |
| 0.4.4 | Dynamique des facteurs de la volatilité $\lambda^{(1)}$ , $\lambda^{(2)}$ et de la<br>densité des données $r$ . . . . . | 10 |
| 0.4.5 | lois à posteriori de $\omega_\lambda^{(1)}$ , $\omega_\lambda^{(2)}$ et $\omega_r$ . . . . .                            | 11 |
| 0.4.6 | lois à posteriori de $\phi^{(1)}$ et $\phi^{(2)}$ . . . . .   | 12 |
| 0.4.7 | Algorithme de simulation des paramètres . . . . .   | 13 |
| 0.5   | Analyse empirique . . . . .   | 14 |
| 0.5.1 | Données . . . . .   | 14 |
| 0.5.2 | Metropolis-Hasting pour simuler $\lambda^{(1)}$ et $\lambda^{(2)}$ . . . . .  | 14 |
| 0.5.3 | Metropolis-Hasting pour simuler $\phi^{(1)}$ et $\phi^{(2)}$ . . . . .  | 14 |
| 0.5.4 | Graphiques . . . . .  | 15 |
| 0.6   | Conclusion . . . . .  | 26 |

## 0.2 Introduction

L'impact de la volatilité stochastique sur la l'aspect économique et financier n'est plus à prouver. Les applications dans ces domaines sont nombreuses.

La volatilité stochastique affecte directement :

- La détermination de la valeur de l'option et les autres produits dérivés;
- La gestion du risque de la couverture optimale en matière de devise à laquelle sont confrontées beaucoup d'entreprises actuellement. En effet, pour une option la différence entre la valeur de l'option et le prix de l'exercice dépend de la volatilité, ce qui rend l'étude de cette volatilité et sa prévision nécessaires.

La littérature, pour les travaux liés à l'étude de la volatilité, est très diversifiée. Plusieurs approches ont été utilisées pour traiter ce sujet.

La plus grande partie de ces approches utilise une modélisation basée sur les outils des séries chronologiques pour évaluer et interpréter les données. Ces travaux utilisent, dans la majorité des cas, une version des modèles de type ARCH / GARCH. Ces modèles sont utilisés généralement pour des raisons de simplicité mais ils introduisent un déterminisme entre le rendement et la volatilité.

L'autre alternative est les modèles de la volatilité stochastique qui offrent une plus grande souplesse dans l'ajustement des données.

La plus part des travaux, concernant la volatilité stochastique, admet l'évidence qu'un seul facteur ne permet pas de capturer la dynamique de cette volatilité. À l'exception de quelques travaux réalisés par Gallant et al. (1997) qui, en utilisant une base de données plus large (1928-1987), trouvent des preuves de dynamique complexe du processus de volatilité. Leurs résultats suggèrent un modèle de volatilité basé sur un processus AR(2) différencié.

L'autre évidence qui caractérise cette volatilité est la persistance de sa longue mémoire. Les travaux de Bollerslev Mikkelsen (1996), Ding et al. (1993) viennent pour appuyer d'avantage la présence de cette persistance dans le rendement boursier.

Andersen et al. (2002), Chernov et al. (2003) et d'autres sont en faveur de l'utilisation d'un deuxième facteur de la volatilité.

Pour ce qui est de notre sujet, les indications empiriques montrent que le log-volatilité du taux de change se caractérise comme un processus dont la longue mémoire est persistante.

Un processus à mémoire longue se caractérise par le fait qu'au fur et à mesure que le retard s'accroît, la fonction d'autocorrélation décroît hyperboliquement, Il y a une persistance due à des autocorrélation qui décroissent faiblement.

Le modèle classique de la volatilité, basé sur un seul facteur, ne permet pas de capturer la persistance de la longue mémoire. En se basant sur cette évidence et en utilisant une approche bayésienne, on a essayé d'intégrer, durant notre recherche, deux facteurs. Le premier sert à capturer, pour le long terme, la persistance de la longue mémoire, et le second, sa dynamique du court terme.

L'approche bayésienne a été choisie car pour un échantillon fini, elle permet d'obtenir des résultats exacts et non asymptotiques, de même, elle tient en compte du caractère aléatoire des paramètres dans les prévisions.

Les outils de simulations utilisés dans le présent document sont robustes, de calcul efficace et faciles à s'adapter aux différents modèles.

Les algorithmes de simulation, développés par William J. McCausland, basés sur un seul facteur, ont été réadaptés afin d'introduire un deuxième facteur de persistance.

Les résultats sont générés sous forme de graphiques pour un nombre d'observation de 2968, relatives au taux de change nominal du dollar canadien, et un nombre

itérations qui s'élève à 400.000.

Le présent rapport est structuré de la manière suivante: La section 1, donne un résumé sur l'état de la question. Dans la section 2, on y trouve une brève introduction qui montre l'importance de traiter la question de la volatilité stochastique tant sur l'aspect économique que financier. Cette section présente également les caractéristiques de la volatilité stochastique du taux de change nominal ainsi que l'approche utilisée pour traiter ce sujet. La section 3, fait état des principaux articles qui ont traité la question de la volatilité stochastique. Dans la section 4, on y trouve une brève introduction des éléments de l'analyse bayésienne, des algorithmes de Metropolis Hasting qui relèvent de la chaîne Markovienne de Monte Carlo (MCMC). On y trouve également la partie spécification du modèle qui décrit les lois à priori choisies pour les paramètres de notre recherche, la dynamique des volatilités latentes et la densité des données. Cette section présente aussi la partie inférence qui présente les densités à posteriori de nos paramètres et leurs caractéristiques, à savoir s'elles sont conjuguées ou non. La section 5, présente l'aspect empirique du sujet, à savoir, les données, les algorithmes de Metropolis-Hasting qui ont permis de simuler la distribution à posteriori d'un paramètre dans le cas où sa loi à priori n'est pas conjuguée à sa loi à posteriori. On y trouve également la présentation et l'analyse des principaux résultats de cette étude sous forme de graphiques. Finalement, la section 7 constitue la conclusion du sujet exposé.

## 0.3 Revue de littérature

La variance conditionnelle du taux de rendement d'un actif financier, qu'on appelle souvent la volatilité, a été capturée pour la première fois, en 1982, par Engle moyennant un modèle de type ARCH. Depuis, plusieurs modèles ont été développés dans le but de généraliser et capturer ce phénomène.

Avant Engel, on utilise des approximations pour traiter ce genre de problème.

Cependant tous ces modèles qui ont été développés introduisent un déterminisme entre le rendement et cette volatilité alors que celle ci est un processus stochastique latente.

Le premier modèle de base de la volatilité stochastique a été proposé par Eric Jacquier, Nicholas G. Polson, Peter E. Rossi dans leurs articles, Bayesian analysis of stochastic volatility models dans le Journal of Business and Economic Statistics, Octobre 1994. Ces auteurs comparent l'approche ARCH avec celle de type bayésien, montrent le caractère réaliste des modèles de type SV, la difficulté de connaître la fonction de maximum de vraisemblance pour ce genre de modèle. Ainsi et afin de détourner ce problème, ces auteurs exploitent l'avantage que présente la Chaîne Markovienne de Monte Carlo (MCMC) qui permet de simuler les distribution à posteriori d'un paramètre, malgré que le fait qu'on ne connaît pas la forme exacte de la distribution. Ces auteurs, simulent la volatilité d'une seule observation pour un temps donné, proposent ensuite des améliorations de ce modèle de base en introduisant des queues épaisses dans la distribution des  $\epsilon$  et un effet de levier avec une corrélation entre la moyenne conditionnelle et la variance conditionnelle des erreurs.

Sephard et Pitt (1997) simulent des blocs de log-volatilités en utilisant un algorithme de Metropolis-Hasting plus à jours. Ils génèrent une variable aléatoire pour le bloc des log-volatilités, l'accepte ou la rejette avec une probabilité donnée,

généralement, par le ratio de Hasting.

Garland B.Durham dans son article, Monte Carlo methods for estimating, smoothing and filtering one- and two-factor stochastic volatility models, Journal of Econometrics, Mars 2005, décrit une approche qui permet de capturer le log-volatilité, pour un et deux facteurs . En s'appuyant sur le travail de Kim et al.(1998), Pitt et Shephard (1997), Durbin et Koopman (1997, 2000) et Sandmann et Koopman (1998), l'auteur décrit, pour un et deux facteurs, les outils d'une analyse fondée sur la fonction de vraisemblance de la volatilité stochastique appliquée dans le domaine de la finance. L'estimation de la fonction de vraisemblance est effectuée en utilisant la simulation qui intègre une variable auxiliaire non observée (le processus de la volatilité) et en maximisant cette fonction de vraisemblance approximative. Cette approche, communément appelée simulation de l'estimation de maximum de vraisemblance (SMLE), a beaucoup d'affinité avec l'approche bayésienne et la Chaîne Markovienne de Monte Carlo (MCMC), mais elle est vaguement liée à la méthode des moments.

William J.McCausland dans son article, Drawing Stochastic Volatility, publié à l'Université Montréal, CIREQ and CIRANO, 3 Mai 2008, propose une méthode de tirage des paramètres et des log-volatilités à partir de leurs distributions à posteriori et essaie de les améliorer par la suite en introduisant des raffinements. L'avantage de cette méthode est dû à l'importance de ses résultats théoriques et pratiques qui proposent. Les outils de simulations sont robustes, de calcul efficace pour un nombre d'observations raisonnable. Ce document reste la principale référence pour notre étude.

## 0.4 Aspect théorique

L'objectif de la présente section est de spécifier le modèle de base de cette étude. Elle décrit les lois à priori des paramètres, la dynamique des volatilités latentes et la densité des données.

En terme de notation on va utiliser l'indice (1) pour désigner le court terme et l'indice (2) pour le long terme.

Suppose que le logarithme de la volatilité conditionnelle suit un AR(1).

**Le modèle de base :**

l'équation du log-volatilité est :

$$\lambda_t = \phi\lambda_{t-1} + \epsilon_t \quad (1)$$

L'équation du taux de rendement est :

$$r_t = \exp\left(\frac{\lambda_t}{2}\right)\eta_t \quad (2)$$

Les erreurs  $\epsilon_t$  et  $\eta_t$  sont des bruits blancs Gaussiens qui sont mutuellement indépendants. Leurs précisions sont  $\omega_\lambda$  et  $\omega_r$ . On suppose que  $\lambda_t$  est stationnaire et on définit le vecteur des paramètres comme suit :

$$\theta = (\omega_{\lambda^{(1)}}, \omega_{\lambda^{(2)}}, \phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \omega_r) \quad (3)$$

### 0.4.1 Éléments de l'analyse bayésienne

L'analyse bayésienne devient de plus en plus populaire grâce au développement de l'outil informatique qui devient de plus en plus puissant, à l'implémentation de la Chaîne Markovienne de Monte Carlo (MCMC) et le développement de l'algorithme de Gibbs sampling et de Metropolis-Hasting. Cette analyse repose sur des concepts clés à savoir, la densité à priori, la densité à posteriori, la proportionnalité qu'on note par  $\propto$ , la précision qui est défini comme étant l'inverse

de la variance et qu'on note généralement par  $\omega_X$  ou  $h_X$  etc.

Contrairement aux autres approches classiques, adoptées dans le domaine de l'inférence statistique, à savoir le Maximum likelihood estimation (MLE) et les moindres carrés ordinaire (MCO), qui considèrent les paramètres comme étant vraies, l'approche bayésienne considère ces paramètres comme une variable aléatoire qui suit une loi à priori pour tenir compte de l'incertitude.

Dans l'analyse bayésienne, on choisit un vecteur dont les paramètres sont des variables aléatoires qui suivent une loi à priori, on obtient, au fur et à mesure que les s'ajustent, une distribution à posteriori. Soit  $Y$  un vecteur des paramètres inconnus qu'on cherche à estimer et  $X$  le vecteur représentant les données.

$$f(Y|X) = \frac{f(X, Y)}{f(X)} \quad (4)$$

$$f(X|Y) = \frac{f(X, Y)}{f(Y)} \quad (5)$$

$$f(X, Y) = f(X|Y) \cdot f(Y) \quad (6)$$

$$f(Y|X) = \frac{f(X|Y) \cdot f(Y)}{f(X)} \quad (7)$$

Puisque la constante de normalisation n'est pas importante, on peut ignorer  $f(X)$ , ce qui permet de réécrire le théorème de Bayés comme suit :

$$f(Y|X) \propto f(X|Y) \cdot f(Y) \quad (8)$$

$f(Y)$  est la fonction à priori.

$f(Y|X)$  est la fonction à posteriori.

$f(X|Y)$  est la fonction de la densité des données.

On dit que la fonction à posteriori est proportionnelle à la fonction à priori fois la vraisemblance.

Soient :

$\theta = (\omega_{\lambda^{(1)}}, \omega_{\lambda^{(2)}}, \phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \omega_r)$ , le vecteur des paramètres.

$\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}$ , les volatilités latentes.

$r$ , le vecteur représentant les données.

Puisqu'on cherche à estimer aussi bien les paramètres et les volatilités latentes, le vecteur  $Y$ , représentant les inconnues englobe aussi bien ces paramètres ainsi que les volatilités latentes de notre modèle. L'équation (8) peut s'écrire ainsi de la manière suivante :

$$f(\theta, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)} | r) \propto f(r | \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \theta) f(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \theta) \cdot f(\theta) \quad (9)$$

### 0.4.2 l'algorithme de Metropolis-Hasting

L'objectif de l'analyse bayésienne revient à calculer l'expression suivante :

$$E(h(\theta) | X) = \int_{\theta} h(\theta) p(\theta | X) d\theta \quad (10)$$

Avec  $h(\theta)$  est une fonction quelconque où l'espérance existe.

Le problème qui se pose en général, c'est qu'il est difficile de trouver une solution analytique à l'équation(10). Pour résoudre ce problème, on a recours à des algorithmes de simulations qui relèvent de la Chaîne Markovienne de Monte Carlo, en particulier l'algorithme de Metropolis-Hasting. Ce genre d'algorithme est utilisé généralement dans le cas où la densité à priori et à posteriori ne sont pas conjuguées.

La méthode générale de Monte Carlo consiste à tirer un  $\theta^{(m)}$  pour  $m=1, \dots, M$ , de  $p(\theta | X)$  et utiliser le fait que lorsque  $M \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{M} \left( \sum_{m=1}^M h(\theta^{(m)}) \right) \xrightarrow{ps} E(h(\theta) | X) \quad (11)$$

La méthode de MCMC consiste à construire un processus markovien  $p(\theta^{(m+1)} | \theta^{(m)})$  qui assurent la convergence vers la loi stationnaire unique  $p(\theta | X)$ .

L'algorithme de Metropolis-Hasting qui relève de la MCMC sert à construire une chaîne de Markov dont la loi stationnaire et unique est la loi à posteriori. Cet algorithme peut être présenté brièvement comme suit :

- Choisir une valeur initiale  $\theta^{(0)}$ ;
- Tirer un candidat  $\theta^{(*)}$  selon une loi de proposition.
- Calculer le ratio de Hasting  $\alpha(\theta^{(m-1)}, \theta^*)$ , définit par la probabilité :
 
$$\alpha(\theta^{(m-1)}, \theta^*) = \min\left(\frac{p(\theta=\theta^*|X)}{p(\theta=\theta^{(m-1)}|X)}, 1\right)$$
- Tirer une variable aléatoire  $u$  d'une loi uniforme  $\mathcal{U}[0, 1]$  et le comparer au ratio de Hasting  $\alpha(\theta^{(m-1)}, \theta^*)$ .  
 Si  $u < \alpha$ ,  $\theta^{(m)} = \theta^*$ , le candidat est accepté  
 Si non  $\theta^{(m)} = \theta^{(m-1)}$ , le candidat est rejeté
- Répéter les trois étapes précédentes  $M$  fois
- Utiliser l'équation (11) afin d'approximer  $E(h(\theta)|X)$  pour n'importe quelle fonction  $h(\theta)$  où l'espérance existe.

La règle d'acceptation ou du rejet du candidat sert généralement à s'assurer que la chaîne se déplace dans la bonne direction.

Cet algorithme va nous servir de pour simuler la dynamique des volatilités latentes  $\lambda^{(1)}$ ,  $\lambda^{(2)}$  et les paramètres  $\phi^{(1)}$  et  $\phi^{(2)}$ .

### 0.4.3 Densité à priori de $\theta$

La densité à priori  $f(\theta)$  est la fonction de densité des paramètres avant d'intégrer les données.

Soit  $\theta = (\omega_{\lambda(1)}, \omega_{\lambda(2)}, \phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \omega_r)$  le vecteur représentant les paramètres de la présente étude. Les lois à priori, qui ont été choisies pour les paramètres peuvent être présentées comme suit :

$$\bar{S}_{\lambda(1)}^2 \omega_{\lambda(1)} \sim \chi^2(\bar{\nu}_{\lambda(1)}) \quad (12)$$

$$\bar{S}_{\lambda(2)}^2 \omega_{\lambda(2)} \sim \chi^2(\bar{\nu}_{\lambda(2)}) \quad (13)$$

$$\bar{S}_r^2 \omega_r \sim \chi^2(\bar{\nu}_r) \quad (14)$$

$$\phi^{(1)} \sim N(\bar{\phi}^{(1)}, \omega_{\phi^{(1)}}^{-1}) \quad (15)$$

$$\phi^{(2)} \sim N(\bar{\phi}^{(2)}, \omega_{\phi^{(2)}}^{-1}) \quad (16)$$

Nous avons choisit d'utiliser ces lois pour des raisons de simplicité et les résultats théoriques et pratiques qu'elles présentent.

On supposant l'indépendance entre les paramètres, on peut écrire :

$$f(\theta) = f((\omega_{\lambda(1)}, \omega_{\lambda(2)}, \phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \omega_r)) \quad (17)$$

$$= f(\omega_{\lambda(1)}) f(\omega_{\lambda(2)}) f(\phi^{(1)}) f(\phi^{(2)}) f(\omega_r) \quad (18)$$

$$f(\theta) = \prod_{i=1}^2 \left( \frac{\bar{S}_{\lambda^{(i)}}^2}{2} \right)^{\frac{\bar{\nu}_{\lambda^{(i)}}}{2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{\bar{\nu}_{\lambda^{(i)}}}{2})} \omega_{\lambda^{(i)}} \left( \frac{\bar{\nu}_{\lambda^{(i)}} - 2}{2} \right) \exp\left( -\frac{\bar{S}_{\lambda^{(i)}}^2 \omega_{\lambda^{(i)}}}{2} \right) \quad (19)$$

$$\prod_{i=1}^2 \frac{1}{\Phi(\sqrt{\bar{\omega}_{\phi^{(i)}}}(1 - \bar{\phi}^{(i)})) - \Phi(\sqrt{\bar{\omega}_{\phi^{(i)}}}(-1 - \bar{\phi}^{(i)}))} \sqrt{\bar{\omega}_{\phi^{(i)}}(-1 - \bar{\phi}^{(i)})} \sqrt{\frac{\bar{\omega}_{\phi^{(i)}}}{2\Pi}} \exp\left( -\frac{\bar{\omega}_{\phi^{(i)}}}{2} (\phi^{(i)} - \bar{\phi}^{(i)})^2 \right) \quad (20)$$

$$\cdot \left( \frac{\bar{S}_r^2}{2} \right)^{\frac{\bar{\nu}_r}{2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{\bar{\nu}_r}{2})} \omega_r \left( \frac{\bar{\nu}_r - 2}{2} \right) \exp\left( -\frac{\bar{S}_r^2 \omega_r}{2} \right) \quad (21)$$

#### 0.4.4 Dynamique des facteurs de la volatilité $\lambda^{(1)}$ , $\lambda^{(2)}$ et de la densité des données $r$

$$f(\lambda^{(1)}|\theta) = \left( \frac{\omega_{\lambda(1)}(1 - \phi^{(1)^2})}{2\Pi} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left( -\frac{\omega_{\lambda(1)}(1 - \phi^{(1)^2})\lambda_1^{(1)}}{2} \right) \quad (22)$$

$$\cdot \prod_{t=2}^T \left( \frac{\omega_{\lambda^{(1)}}}{2\Pi} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\omega_{\lambda^{(1)}}(\lambda_t^{(1)} - \phi^{(1)}\lambda_{t-1}^{(1)})^2}{2}\right) \quad (23)$$

$$f(\lambda^{(2)}|\theta) = \left( \frac{\omega_{\lambda^{(2)}}(1 - \phi^{(2)^2})}{2\Pi} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\omega_{\lambda^{(2)}}(1 - \phi^{(2)^2})\lambda_1^{(2)}}{2}\right) \quad (24)$$

$$\cdot \prod_{t=2}^T \left( \frac{\omega_{\lambda^{(2)}}}{2\Pi} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\omega_{\lambda^{(2)}}(\lambda_t^{(2)} - \phi^{(2)}\lambda_{t-1}^{(2)})^2}{2}\right) \quad (25)$$

$$f(r|\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \theta) = \prod_{t=1}^T \left( \frac{\omega_r \exp -(\lambda_t^{(1)} + \lambda_t^{(2)})}{2\Pi} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (26)$$

$$\exp\left(-\frac{\omega_r \exp -(\lambda_t^{(1)} + \lambda_t^{(2)})r_t^2}{2}\right) \quad (27)$$

#### 0.4.5 lois à posteriori de $\omega_{\lambda^{(1)}}$ , $\omega_{\lambda^{(2)}}$ et $\omega_r$

L'objectif de la présente section est de décrire la partie inférence de notre étude. Elle décrit aussi bien les densités à posteriori de nos paramètres ainsi que leurs caractéristiques, à savoir s'elles sont conditionnelement conjuguées ou non. On définit la densité à posteriori comme étant la fonction de densité une fois que les données sont intégrées.

pour  $i=1,2$

$$\overline{S}_{\lambda^{(i)}\omega_{\lambda^{(i)}}}^2 \propto \chi^2(\overline{\nu}_i) \quad (28)$$

avec

$$\overline{\nu}_i = \overline{\nu}_{\lambda^{(i)}} + T \quad (29)$$

et

$$\overline{S}_{\lambda^{(i)}}^2 = [(\overline{S}_{\lambda^{(i)}}^2 + (1 - \phi^{(i)^2})\lambda_1^{(i)} + \sum_{t=1}^T (\lambda_t^{(i)} - \phi^{(i)}\lambda_{t-1}^{(i)}))^2] \quad (30)$$

La loi à priori de  $\omega_{\lambda^{(i)}}$  et sa loi à posteriori suivent la même loi ( $\chi^2$ ).

Ces deux lois sont dites conditionnellement conjuguées.

La même chose pour  $\omega_r$  :

$$\overline{S}_r \omega_r \propto \chi^2(\overline{\nu}_r) \quad (31)$$

$$\bar{\bar{v}}_r = \bar{v}_r + T \quad (32)$$

$$\bar{\bar{S}}_r^2 = \bar{S}_r^2 + \sum_{t=1}^T \exp(-(\lambda_t^{(1)} + \lambda_t^{(2)})r_t^2) \quad (33)$$

#### 0.4.6 lois à posteriori de $\phi^{(1)}$ et $\phi^{(2)}$

$$f(\phi^{(1)}|\phi^{(2)}, \omega_r, \omega_\lambda^{(1)}, \lambda, r) \propto \quad (34)$$

$$(1 - \phi^{(1)^2})^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\omega_\lambda(1 - \phi^{(1)^2})\lambda^{(1)^2}}{2} - \sum_{t=2}^T \frac{\omega_\lambda}{2} (\lambda_t - \phi^{(1)}\lambda_{(t-1)})^2\right) \quad (35)$$

$$\propto (1 - \phi^{(1)^2})^{\frac{1}{2}} \exp(h(\phi^{(1)})1_{(-1,1)}(\phi^{(1)})) \quad (36)$$

Avec

$$h(\phi^{(1)}) = -\frac{\omega_\lambda(1 - \phi^{(1)^2})\lambda^{(1)^2}}{2} - \sum_{t=2}^T \frac{\omega_\lambda}{2} (\lambda_t - \phi^{(1)}\lambda_{(t-1)})^2 - \frac{\omega_{\phi^{(1)}}}{2} (\phi^{(1)} - \bar{\phi}^{(1)})^2 \quad (37)$$

On remarque que la fonction h est quadratique en terme de  $\phi$ , ce qui nous aidera à chercher sa forme compacte.

$$h(\phi^{(1)}) \propto -\frac{1}{2}[(\omega_{\phi^{(1)}} - \omega_\lambda\lambda^{(1)^2} + \sum_{t=2}^T \lambda_{(t-1)}^2 \omega_\lambda)\phi^{(1)^2} - (2\omega_{\phi^{(1)}}\bar{\phi}^{(1)} + 2\sum_{t=2}^T \lambda_t \lambda_{(t-1)} \omega_\lambda)\phi^{(1)}] \quad (38)$$

$$\propto (\omega_{\phi^{(1)}} + \sum_{t=2}^{T-1} \lambda_t^2 \omega_\lambda)\phi^{(1)^2} - 2(\omega_{\phi^{(1)}}\bar{\phi}^{(1)} + \sum_{t=2}^T \lambda_t \lambda_{(t-1)} \omega_\lambda)\phi^{(1)} + K \quad (39)$$

$$\propto (\omega_{\phi^{(1)}} + \sum_{t=2}^{T-1} \lambda_t^2 \omega_\lambda)(\omega_{\phi^{(1)}} - \frac{(\omega_{\phi^{(1)}}\bar{\phi}^{(1)} + \sum_{t=2}^T \lambda_t \lambda_{(t-1)} \omega_\lambda)}{\omega_{\phi^{(1)}} + \sum_{t=2}^{T-1} \lambda_t^2 \omega_\lambda})^2 + K \quad (40)$$

Si nous posons que :

$$\bar{\bar{\phi}}^{(1)} = \frac{(\omega_{\phi^{(1)}}\bar{\phi}^{(1)} + \sum_{t=2}^T \lambda_t \lambda_{(t-1)} \omega_\lambda)}{\omega_{\phi^{(1)}} + \sum_{t=2}^{T-1} \lambda_t^2 \omega_\lambda} \quad (41)$$

$$\bar{\omega}_{\phi^{(1)}} = (\omega_{\phi^{(1)}} + \sum_{t=2}^{T-1} \lambda_t^2 \omega_\lambda) \quad (42)$$

La même démarche peut être suivie pour le calcul de  $f(\phi^{(2)}|\phi^{(1)}, \omega_r, \omega_\lambda^{(1)}, \lambda, r)$

### 0.4.7 Algorithme de simulation des paramètres

On s'est basé sur l'analyse des données artificielles pour vérifier l'algorithme. On veut confirmer que les vraies valeurs se trouvent dans la région de haute probabilité à posteriori. Les résultats s'avèrent sont concluants. L'algorithme qui a servi pour simuler les paramètres et les volatilités latentes peut être décrite brièvement de la manière suivante :

1. chercher la loi à deux facteurs
2. Boucle pour  $m=1:M$ 
  - Simuler  $\omega_\lambda^{(1)} | \omega_\lambda^{(2)}, \omega_r, \phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \lambda, r$
  - Simuler  $\omega_\lambda^{(2)} | \omega_\lambda^{(1)}, \omega_r, \phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \lambda, r$
  - Simuler  $\omega_r | \omega_\lambda^{(1)}, \omega_\lambda^{(2)}, \phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \lambda, r$
  - Simuler  $\phi^{(1)} | \omega_\lambda^{(1)}, \omega_\lambda^{(2)}, \omega_r, \phi^{(2)}, \lambda, r$
  - Simuler  $\phi^{(2)} | \omega_\lambda^{(1)}, \omega_\lambda^{(2)}, \omega_r, \phi^{(1)}, \lambda, r$

Pour les paramètres  $\phi^{(1)}$  et  $\phi^{(2)}$ , nous sommes parti d'une loi à priori de type normale. On obtient des lois à posteriori qui ne suivent pas exactement une loi normale. On peut conclure, par conséquent, que ces deux lois ne sont pas conditionnellement conjuguées, d'où la nécessité d'utiliser l'algorithme de Metropolis-Hasting afin de simuler ses lois à posteriori.

## 0.5 Analyse empirique

### 0.5.1 Données

- Les données traitées sont relatives au taux de change nominal du dollar canadien.
- Notre base de données est constituée de 2968 observations journalières.
- La source des données est le Fédéral Reserve Bank of New York.

Puisqu'on s'intéresse au rendement, ces données feront l'objet d'une transformation. En effet, soit  $p(t)$  le prix d'un actif financier, on définit le rendement comme étant la différence entre  $\log p_t - \log p_{(t-1)}$ .

### 0.5.2 Metropolis-Hasting pour simuler $\lambda^{(1)}$ et $\lambda^{(2)}$

1. On tire  $\lambda^{(1)}$  selon la loi conditionnelle,  $g(\lambda^{(1)}|\lambda^{(2)}, \theta, r)$ , proposée par William McCAUSLAND.
2. On Calcule la probabilité  $\alpha$  :
3. On tire une variable aléatoire  $u$  d'une loi uniforme  $\mathcal{U}[0, 1]$  et on le compare au ratio Hasting  $\alpha$ .  
Si  $u < \alpha$ ,  $\lambda^{(1)'} = \lambda^{(1)*}$  (acceptation)  
Si non  $\lambda^{(1)'} = \lambda^{(1)}$  (rejet)

La même démarche sera appliquée pour simuler  $\lambda^{(2)}$ .

### 0.5.3 Metropolis-Hasting pour simuler $\phi^{(1)}$ et $\phi^{(2)}$

$$f(\phi^{(1)}|\phi^{(2)}, \omega_r, \omega_\lambda^{(1)}, \lambda, r) \propto (1 - \phi^{(1)2})^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\omega_{\phi^{(1)}}}{2}(\phi^{(1)} - \bar{\phi}^{(1)})^2\right) 1_{(-1,1)}(\phi^{(1)}) \quad (43)$$

On remarque que  $f(\phi^{(1)}|\phi^{(2)}, \omega_r, \omega_\lambda^{(1)}, \lambda, r)$  ne suit pas une loi normale à cause de la présence de  $(1 - \phi^{(1)2})^{\frac{1}{2}}$ , d'où l'utilité d'utiliser l'algorithme de Metropolis-Hasting pour simuler  $\phi^{(1)}$  et  $\phi^{(2)}$ .

$$g(\phi^{(1)}) = \exp\left(-\frac{\omega_{\bar{\phi}}^{(1)}}{2}(\phi^{(1)} - \bar{\phi}^{(1)})^2\right) \quad (44)$$

$$g(\phi^{(1)}) \propto N(\bar{\phi}^{(1)}, \omega_{\bar{\phi}}^{-1}) \quad (45)$$

1. Tirer  $\phi^{(1)*} \propto g(\phi^{(1)})$

2. Calculer la probabilité :

$$\alpha = \min\left(\frac{f(\phi^{(1)*})}{g(\phi^{(1)*})} \cdot \frac{g(\phi^{(1)})}{f(\phi^{(1)})}, 1\right) \quad (46)$$

3. Tirer une variable aléatoire  $u$  d'une loi uniforme  $\mathcal{U}[0, 1]$  et on le compare au ratio Hasting  $\alpha$ .

Si  $u < \alpha$ ,  $\phi^{(1)'} = \phi^{(1)*}$  (acceptation)

Si non  $\phi^{(1)'} = \phi^{(1)}$  (rejet)

La même démarche sera appliquée pour simuler  $\phi^{(2)}$ .

## 0.5.4 Graphiques

Les figures ci-après représentent les traces des paramètres pour  $M = 40.000$  et  $M = 400.000$  ainsi que leurs distributions à posteriori.

Figure 1: Trace du paramètre  $\omega_\lambda^{(1)}$  pour  $M=40000$

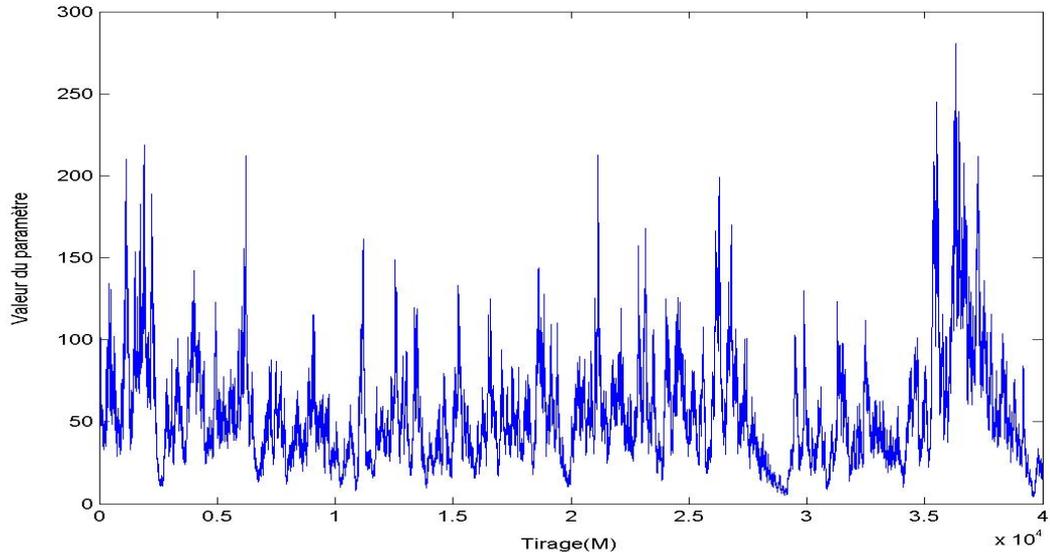


Figure 2: Trace du paramètre  $\omega_\lambda^{(1)}$  pour  $M=400000$

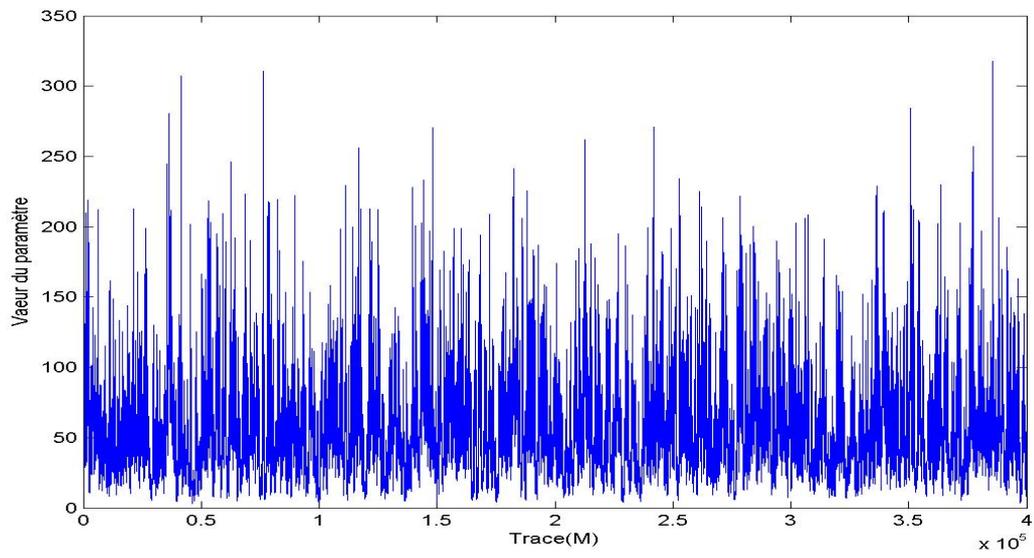


Figure 3: Trace du paramètre  $\omega_\lambda^{(2)}$  pour M=40000

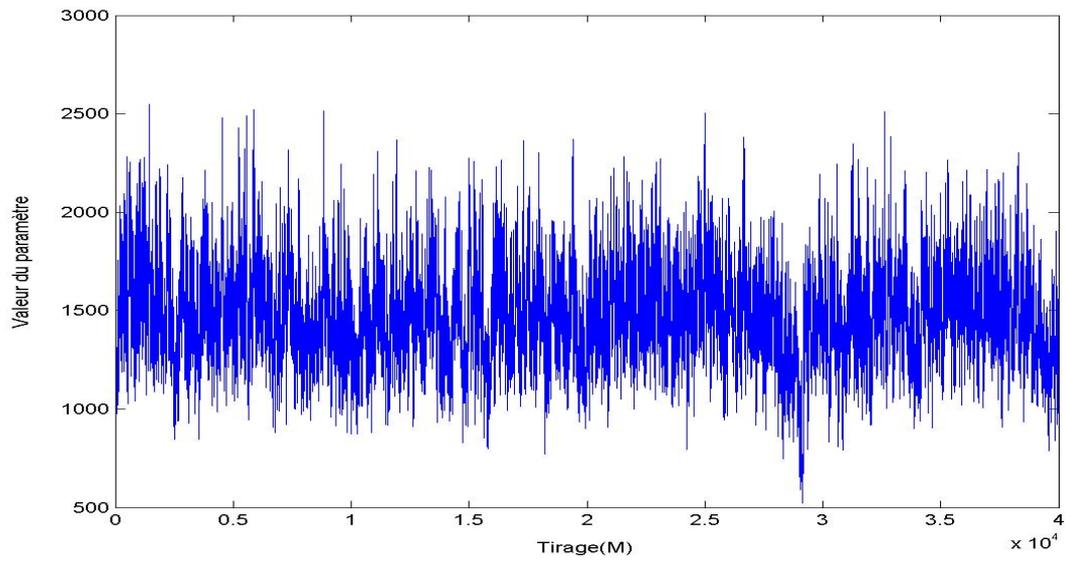


Figure 4: Trace du paramètre  $\omega_\lambda^{(2)}$  pour M=400000

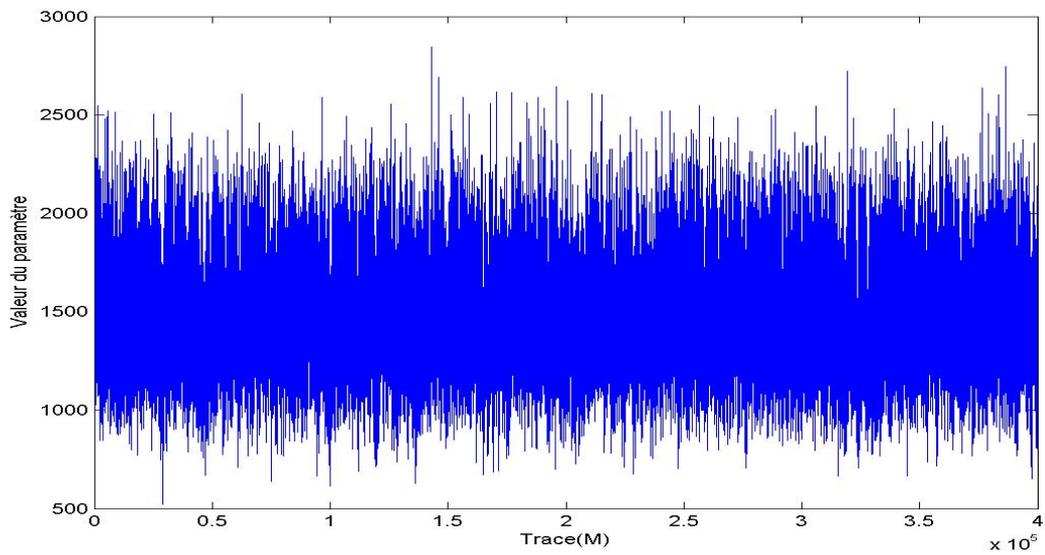


Figure 5: Trace du paramètre  $\omega_r$  pour M=40000

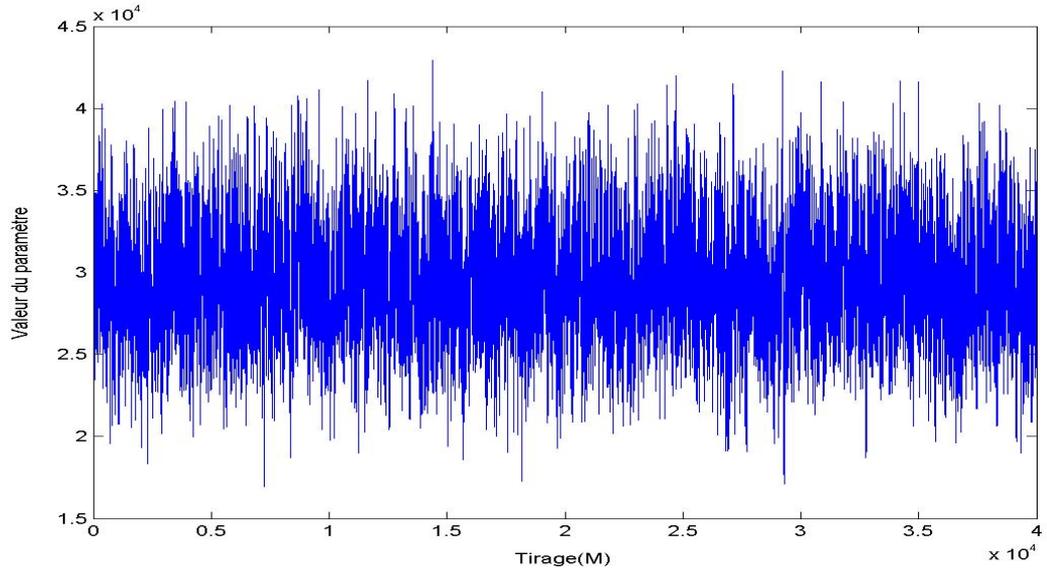


Figure 6: Trace du paramètre  $\omega_r$  pour M=400000

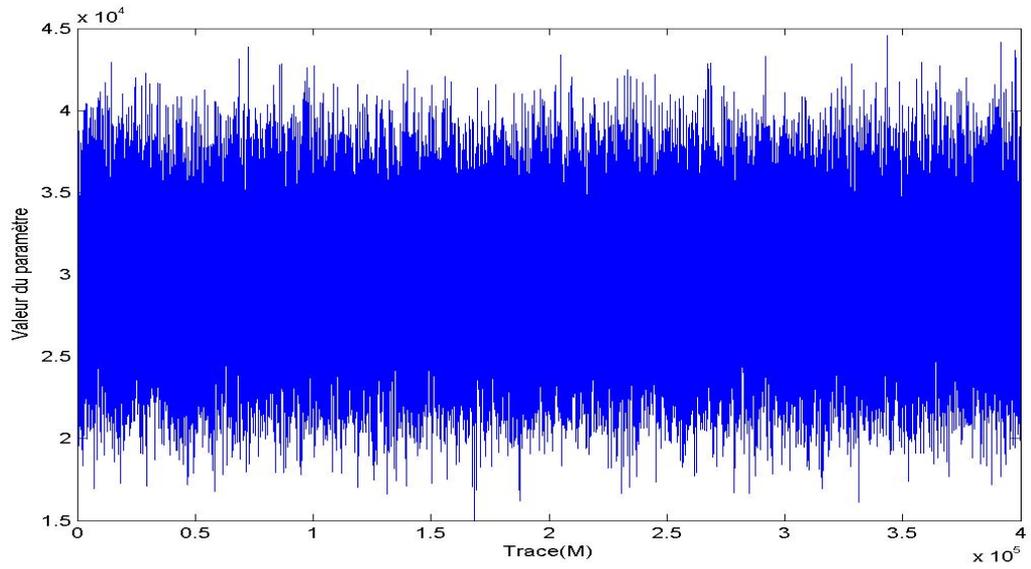


Figure 7: Trace du paramètre  $\phi^{(1)}$  pour  $M=40000$

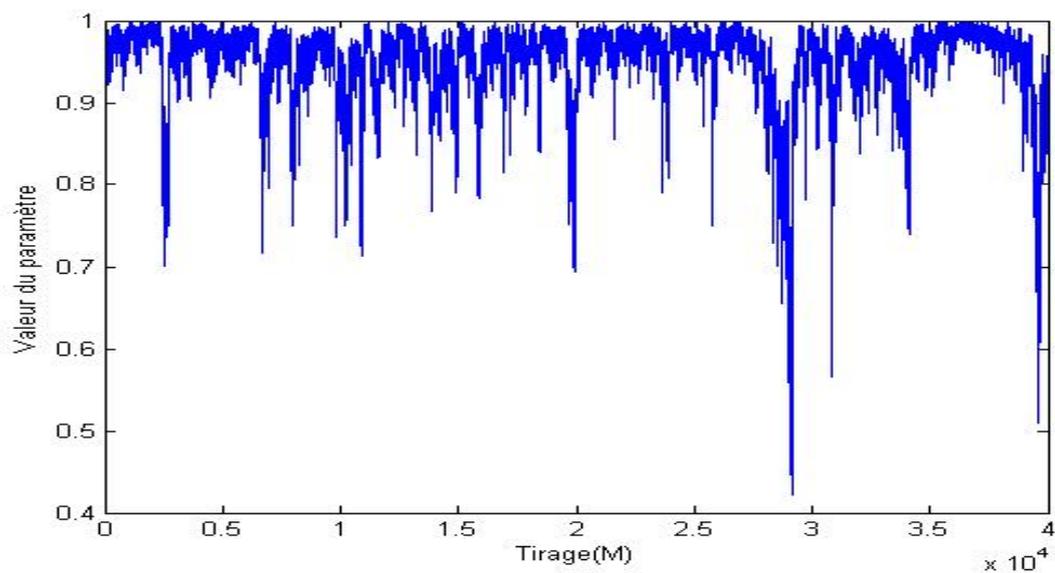


Figure 8: Trace du paramètre  $\phi^{(1)}$  pour  $M=400000$

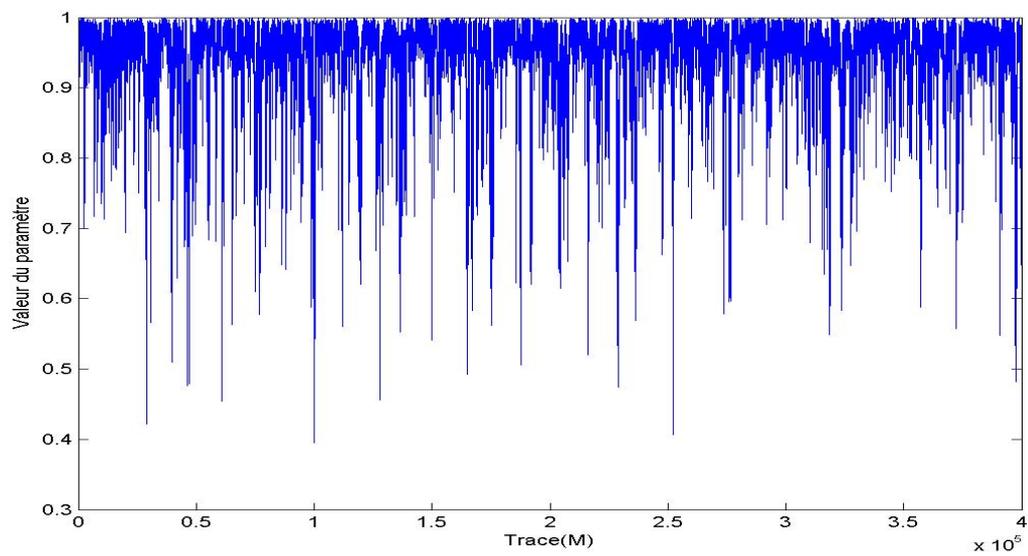


Figure 9: Trace du paramètre  $\phi^{(2)}$  pour  $M=40000$

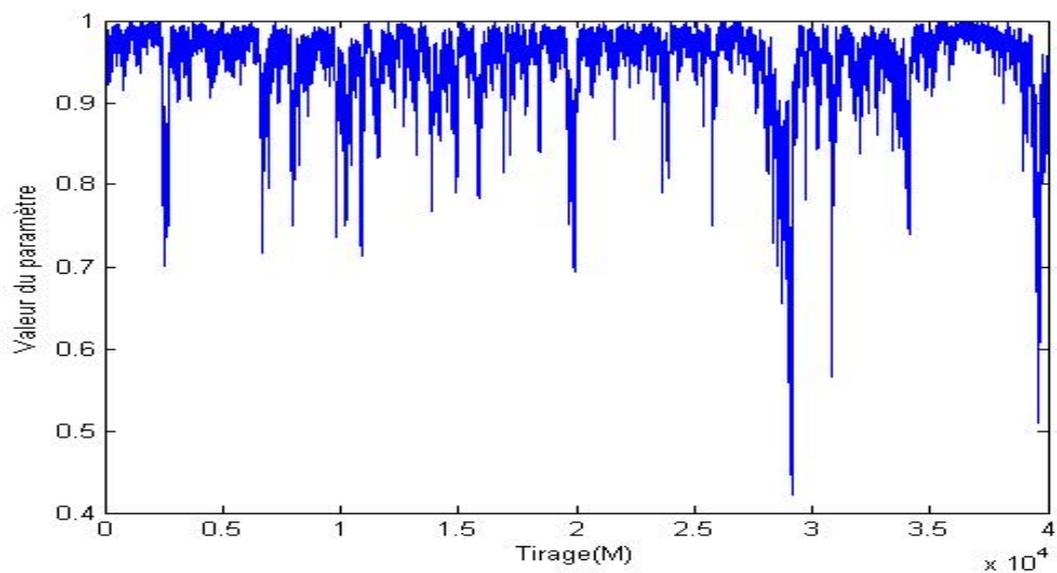


Figure 10: Trace du paramètre  $\phi^{(2)}$  pour  $M=400000$

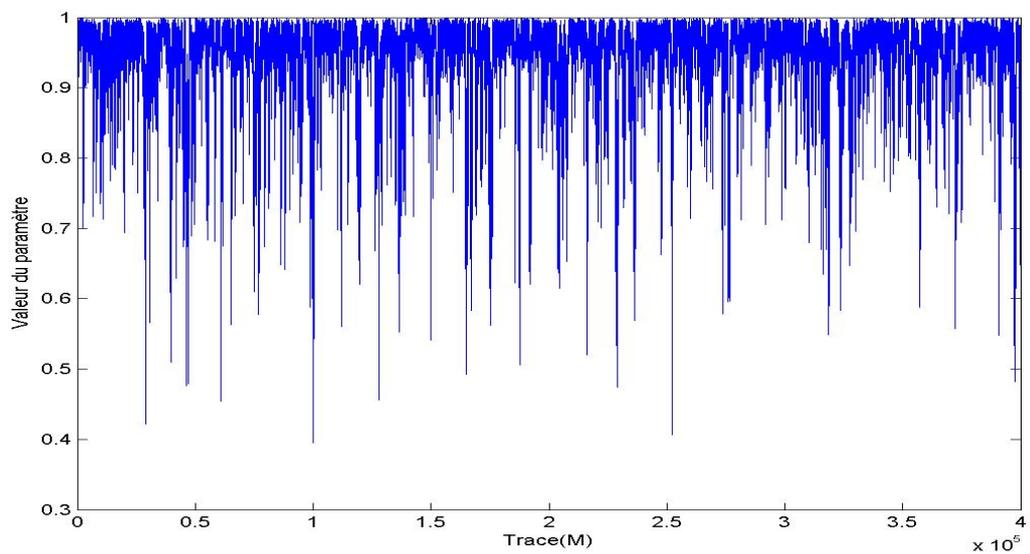


Figure 11: Distribution à posteriori du paramètre  $\omega_\lambda^{(1)}$

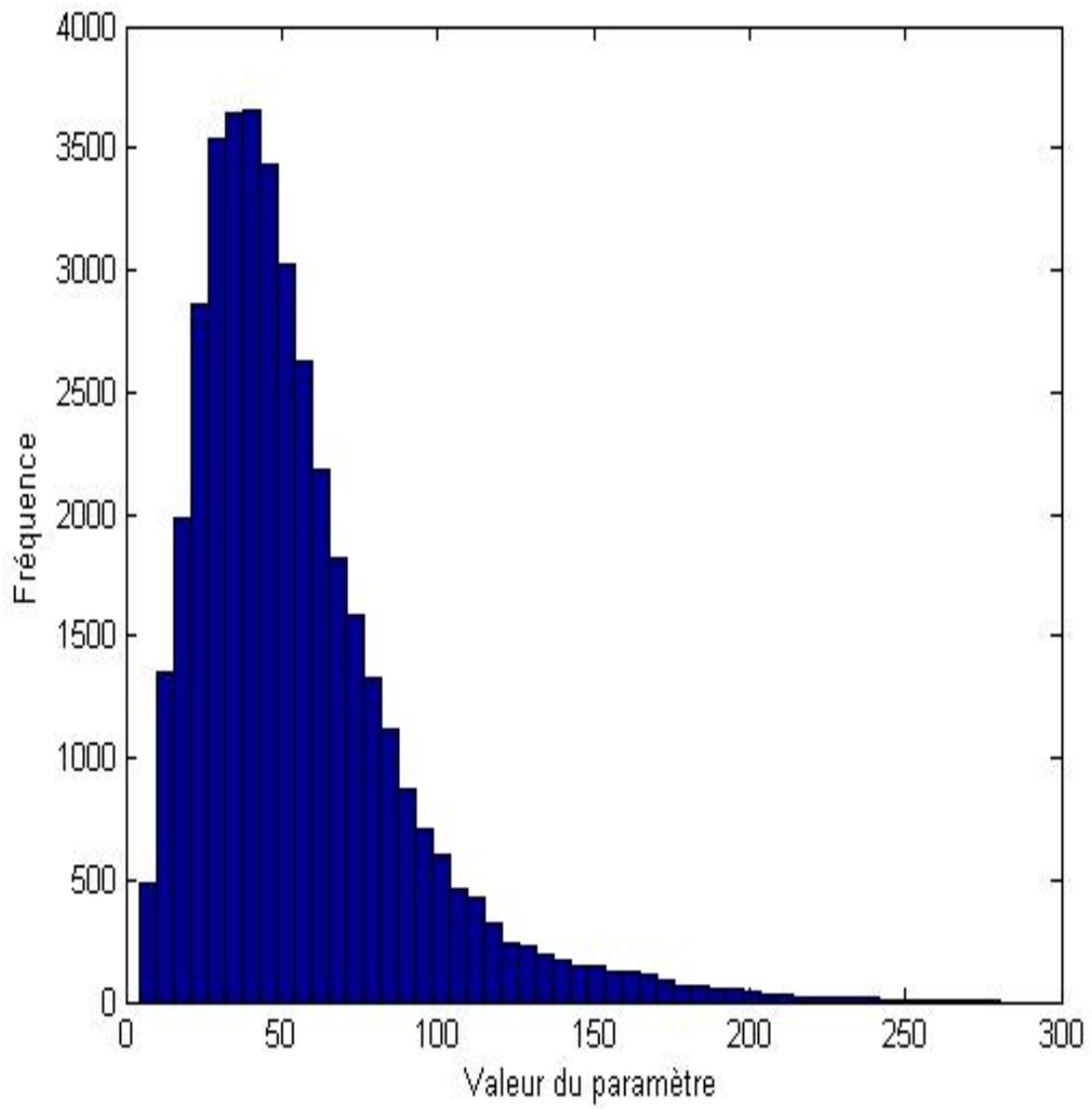


Figure 12: Distribution à posteriori du paramètre  $\omega_\lambda^{(2)}$

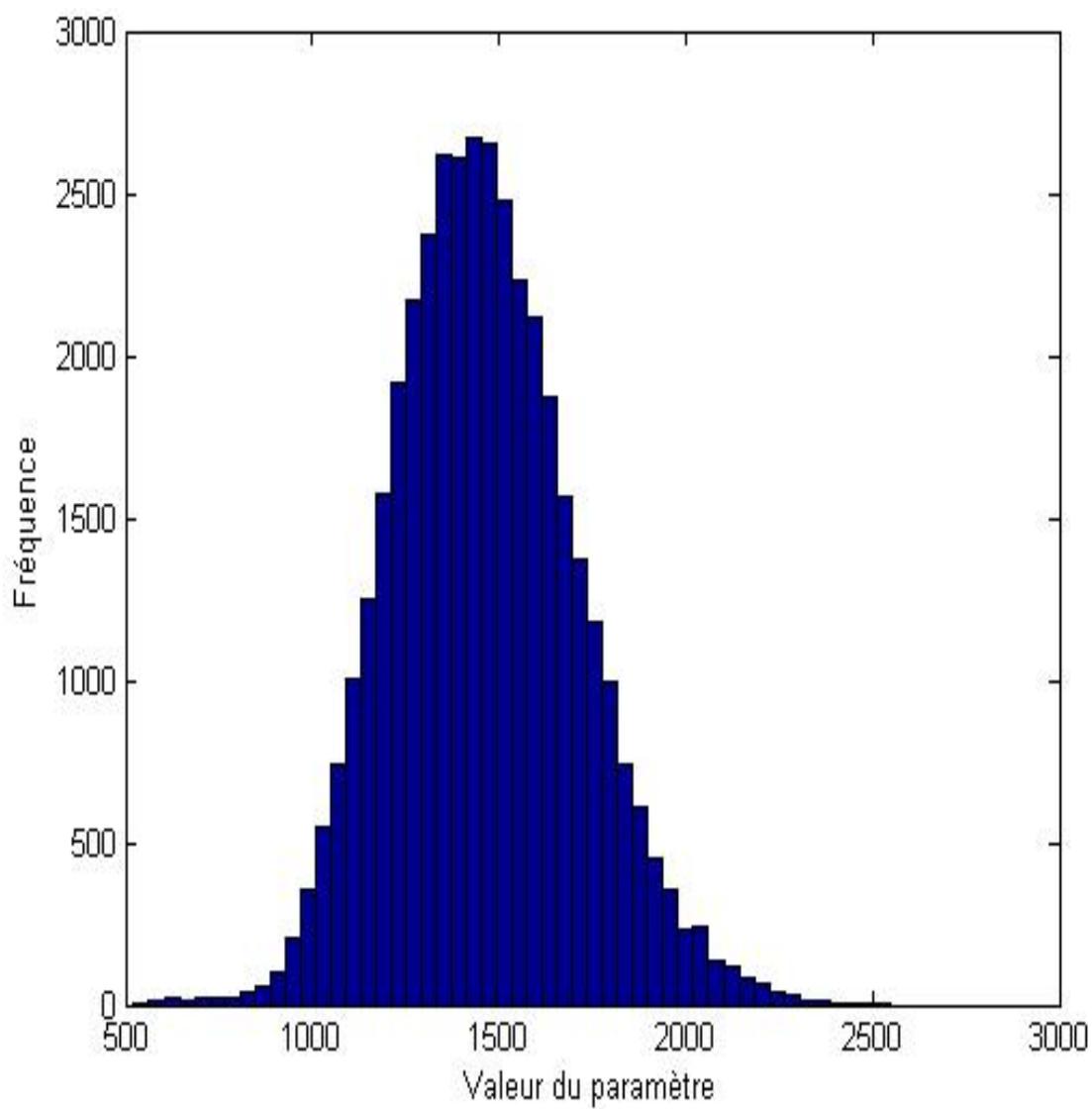


Figure 13: Distribution à posteriori du paramètre  $\omega_r$

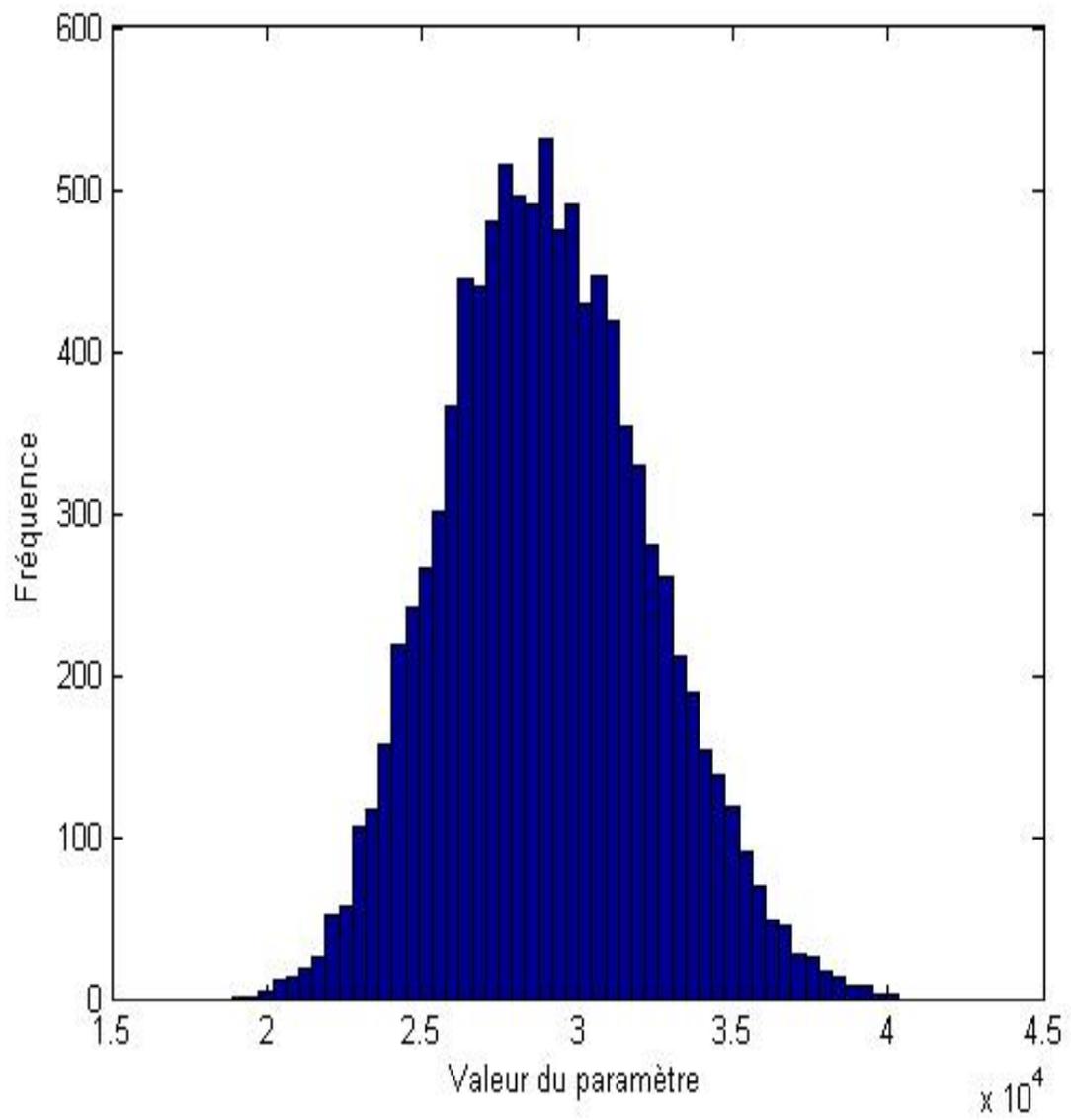


Figure 14: Distribution à posteriori du paramètre  $\phi^{(1)}$

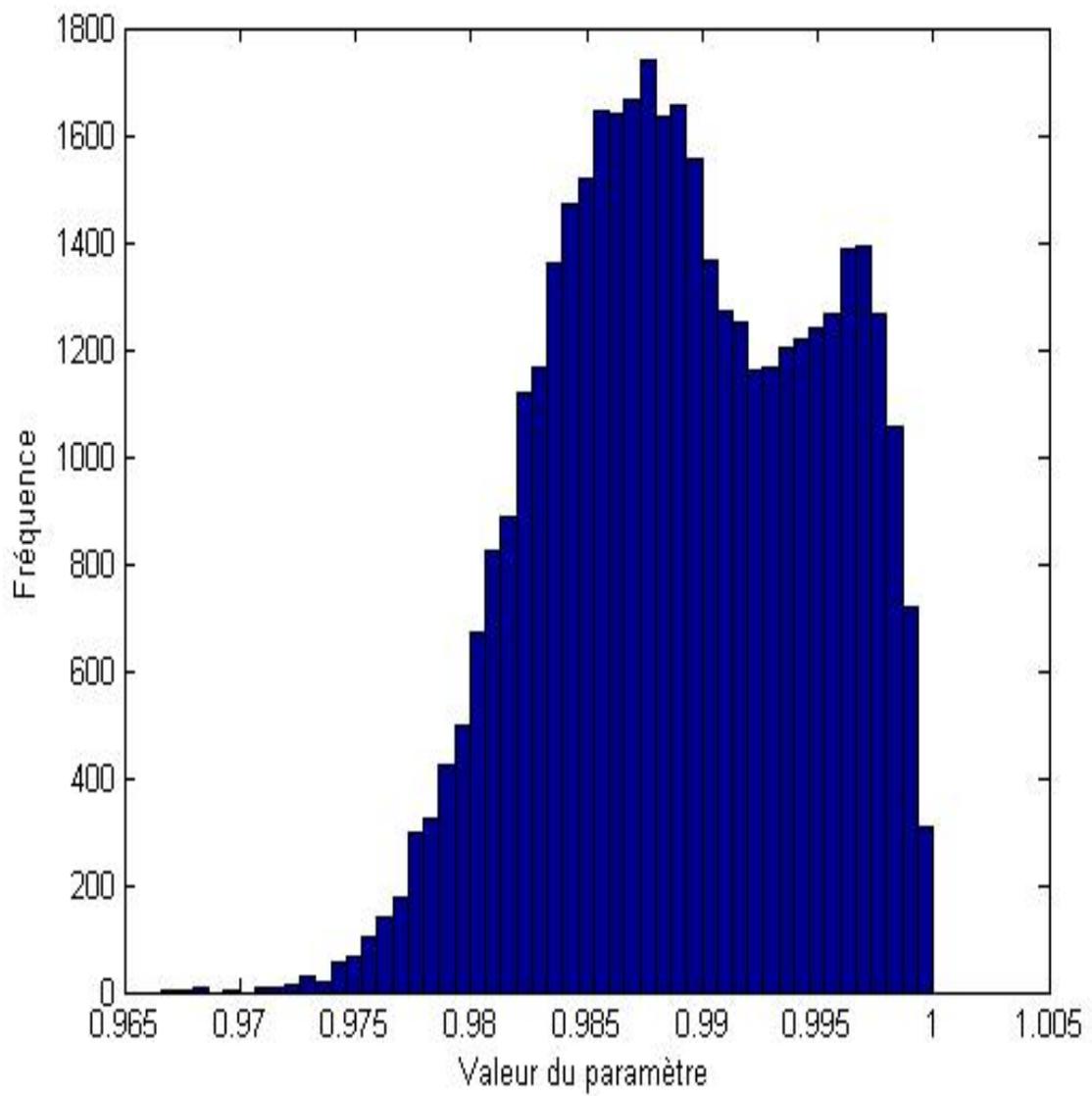
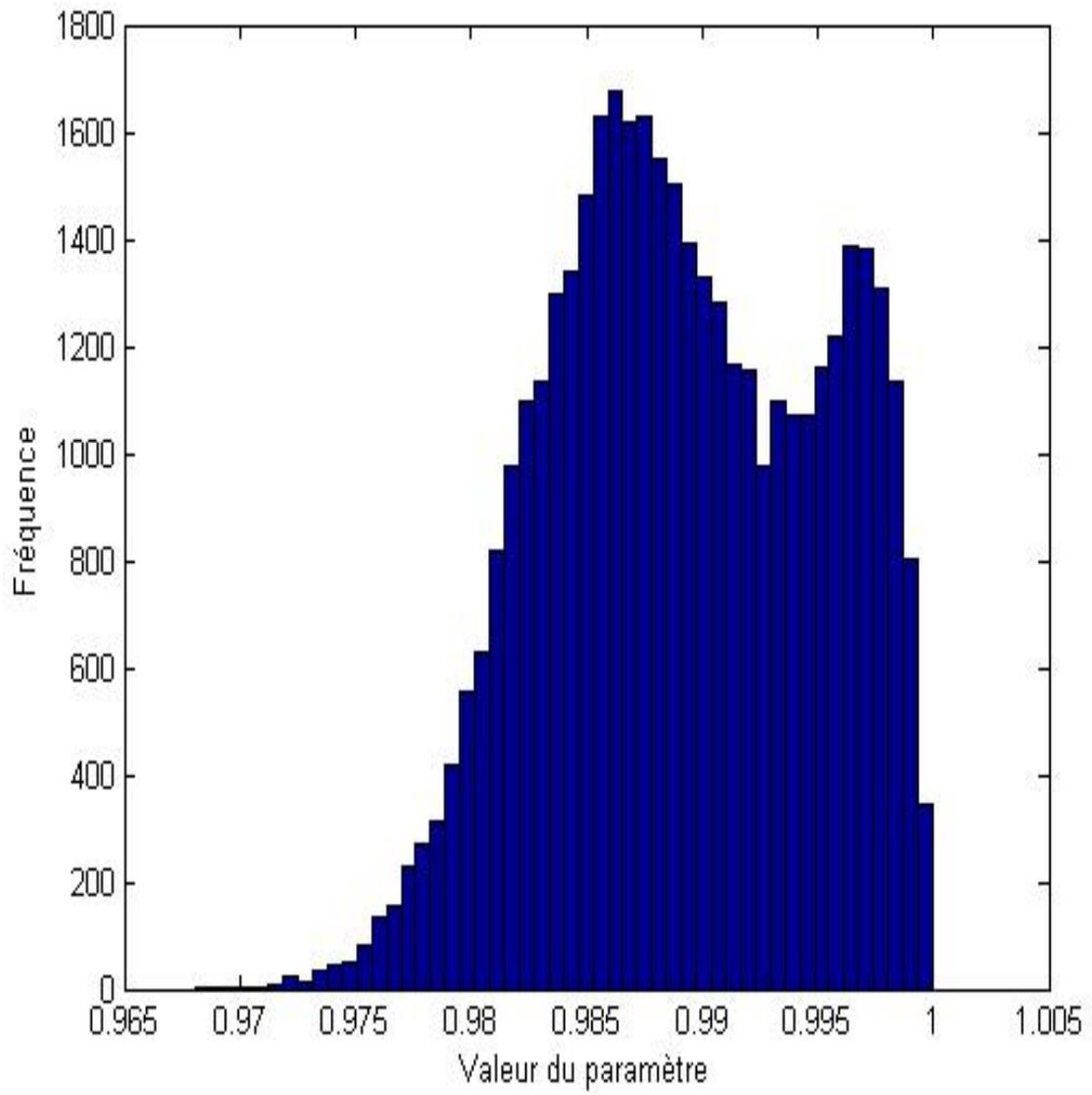


Figure 15: Distribution à posteriori du paramètre  $\phi^{(2)}$



## 0.6 Conclusion

Durant cette étude, nous nous sommes intéressés à capturer la persistance de la longue mémoire de la volatilité stochastique du taux de change nominal canadien, pour le long terme, et sa dynamique du court terme.

L'approche utilisée, pour estimer les paramètres et les volatilités latentes du modèle, est bayésienne qui a l'avantage de tenir compte de l'incertitude de ces paramètres, à l'opposé de la méthode des moindres carrés ordinaire et du maximum de vraisemblance qui considèrent ces paramètres comme vraies.

Nous partons d'une loi à priori de ces paramètres pour générer leurs distributions à posteriori. Le choix de la nature des lois à priori a été guidé par les motifs liés à la simplicité et les résultats théoriques et pratiques que présentent ces lois.

Pour les paramètres  $\omega_\lambda^{(1)}$ ,  $\omega_\lambda^{(2)}$  et  $\omega_r$ , nous partons d'une loi à priori de type  $\chi^2$ . Les distributions à priori et à posteriori pour ces paramètres sont conditionnellement conjuguées puisqu'elles suivent la même loi  $\chi^2$  avec des degrés de liberté différents.

Pour les paramètres  $\phi^{(1)}$  et  $\phi^{(2)}$ , nous partons d'une loi à priori de type normale, mais leurs distributions à posteriori ne sont pas exactement normales. Les distributions, à priori et posteriori, de ces deux paramètres ne sont pas donc conditionnellement conjugués, c'est pourquoi on a recouru à l'algorithme de Metropolis-Hasting afin de simuler leurs distributions à posteriori.

La vérification de l'algorithme a été basée sur des données artificielles. On veut confirmer que les vraies valeurs se trouvent dans la région de haute probabilité à posteriori. Les résultats s'avèrent concluants.

Les résultats pertinents qui découlent de cette étude peuvent être présentés sous forme des remarques suivantes :

- Il y a toujours la présence de l'autocorrélation pour les paramètres du modèle, à l'exception de  $\omega_r$  qui dispose d'une distribution à posteriori presque iid. Cela provient du fait qu'il s'agit d'une distribution conditionnelle qui essaie d'estimer un paramètre en tenant compte des autres paramètres du modèle.
- Malgré un nombre d'itération (M) qui s'élève à 40.000, on remarque toujours la présence d'une zone d'incertitude, pour les paramètres  $\phi^{(1)}$  et  $\phi^{(1)}$ , dû à un manque d'information. Pour pallier à ce problème, on a augmenté le nombre d'itérations à 400.000 dont le but est de faire disparaître cette zone d'incertitude.
- Il y a un problème d'identification pour certains paramètres. En effet, on ne peut pas identifier  $\phi^{(1)}$  et  $\phi^{(2)}$  séparément, mais on peut facilement séparer  $\lambda^{(1)}$  et  $\lambda^{(1)}$ .

# Références bibliographiques

- [1] William J.McCausland, Drawing Stochastic Volatility, Université de Montréal,CIREQ and CIRANO, Mars 2008
- [2] Eric Jacquier, Nicholas G.Polson, Peter E.Rossi, Baysian analysis of stochastic volatility models, Journal of Business and Economic Statistics, Octobre 1994.
- [3] Eric Jacquier, Nicholas G.Polson, Peter E.Rossi, Baysian analysis of stochastic volatility models with fat-tails and correlated errors, Journal of Econometrics, Septembre 2003.
- [4] Ruey S.Tsay, Analysis of Financial time series, année 2005.
- [5] Gary Koop, Wiley, Chichester, England Bayesian econometrics, 2003.
- [6] Garland B.Durham, Monte Carlo methods forestimating, smoting, and filtering one- and two-factor stochastic voltility models, Journal of Econometrics, 2006.