

Université de Montréal

**Intrication dans les systèmes de Hall quantiques:  
Négativité logarithmique et autres mesures**

par

**Juliette Geoffrion**

Département de physique  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de  
Maître ès sciences (M.Sc.)  
en Physique

26 Aout 2022



# Université de Montréal

Faculté des arts et des sciences

---

Ce mémoire intitulé

## **Intrication dans les systèmes de Hall quantiques: Négitivité logarithmique et autres mesures**

présenté par

### **Juliette Geoffrion**

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

*Philippe St-Jean*

---

(président-rapporteur)

*William Witczak-Krempa*

---

(directeur de recherche)

*Richard MacKenzie*

---

(membre du jury)



# Résumé

---

Nous explorons l'intrication d'états mixtes, particulièrement d'états de Hall quantiques, par le biais de l'information mutuelle (MI) et de la négativité logarithmique (LN) fermionique. Cette dernière est une bonne mesure d'intrication pour des états mixtes quantiques car elle ne capture pas de corrélations classiques comme la MI. Nous étudions des géométries tripartites qui contiennent des coins où, en plus de la loi du périmètre standard, l'intrication reçoit une contribution angulaire : le terme de coin. Avec l'entropie d'intrication, ce terme a été étudié pour divers états purs, y compris les états de Hall quantiques entier (IQH), et il a été constaté que la fonction angulaire est presque universelle ; elle ne dépend pas des détails microscopiques de l'état en considération. Nous faisons des prédictions sur la forme du terme de coin de la LN et de la MI en utilisant des propriétés générales. Nous testons numériquement nos prédictions sur des états IQH à différents remplissages et sur différentes géométries en utilisant deux méthodes, une dans l'espace des impulsions et une dans l'espace réel. Dans les états fondamentaux, nous trouvons que les termes de coin de la MI et de la LN suivent également le comportement quasi-universel. À température finie et des coins d'angle  $\pi/2$ , le coefficient de la loi du périmètre et les termes de coin atteignent d'abord un plateau puis décroissent rapidement avec la température. Les effets de température finie sont étudiés davantage en travaillant dans les limites de faibles et fortes températures.

**Mots-clés:** Intrication, négativité logarithmique, information mutuelle, loi du périmètre, termes de coin, universalité, effet de Hall quantique



# Abstract

---

We explore the entanglement of quantum mixed states, with an emphasis on quantum Hall states, via the mutual information (MI) and the fermionic logarithmic negativity (LN). The latter is a good measure of entanglement for quantum mixed states as it does not capture classical correlations, unlike the MI. We study tripartite geometries with corners where in addition to the standard boundary law, the entanglement receives an angle-dependent contribution : the corner term. Using the entanglement entropy, this corner term has been studied for various pure states, including integer quantum Hall (IQH) states, and it was found that the angle-dependent function is almost super-universal; it does not depend on the microscopic details of the state under consideration. First, we make predictions on the form of the corner term for the LN and MI using general properties. Then, we test our predictions numerically on IQH states at different fillings and on different geometries, using two approaches, one in momentum space and one in real space. In groundstates, we find that the corner terms of the MI and LN also follow the quasi-universal behaviour. At finite temperatures and angle  $\pi/2$ , we find that the boundary law coefficient and corner terms first plateau then decay rapidly with temperature. The finite-temperature effects are studied in more details by working in low and high temperature limits.

**Keywords:** Entanglement, logarithmic negativity, mutual information, boundary law, corner coefficients, universality, quantum Hall effect





# Table des matières

---

<b>Résumé</b> .....	5
<b>Abstract</b> .....	7
<b>Liste des tableaux</b> .....	13
<b>Liste des figures</b> .....	15
<b>Liste des sigles et des abréviations</b> .....	19
<b>Remerciements</b> .....	21
<b>Chapitre 1. Introduction</b> .....	23
1.1. Intrication : définition et mesures .....	23
1.1.1. États purs .....	24
1.1.2. États mixtes .....	25
1.2. États de Hall quantiques .....	27
1.3. Plan du mémoire .....	28
1.4. Contribution de l'auteure .....	28
<b>Chapitre 2. Négativité logarithmique</b> .....	29
2.1. Transposition partielle et négativité logarithmique bosonique .....	30
2.2. Transposition partielle et négativité logarithmique fermionique .....	31
2.2.1. Transposition de matrice .....	32
2.2.2. Renversement du temps .....	33
2.3. Calculs de négativité logarithmique .....	35
2.3.1. Exemple à deux fermions .....	35
2.3.2. États gaussiens .....	36
<b>Chapitre 3. Effet de Hall quantique</b> .....	39

3.1. Intrication dans les systèmes de Hall .....	42
3.1.1. Loi d'échelle .....	43
3.2. Négativité logarithmique d'états IQH : loi du périmètre .....	45
<b>Chapitre 4. Entanglement negativity versus mutual information in the quantum Hall effect and beyond .....</b>	<b>49</b>
4.1. Introduction .....	50
4.2. Logarithmic negativity .....	51
4.2.1. Bosonic and fermionic partial transpose .....	51
4.3. General considerations .....	53
4.3.1. Separated regions .....	53
4.3.2. Single corner .....	54
4.3.3. Adjacent corners .....	57
4.3.4. Hourglass .....	58
4.3.5. Generalization to CFTs .....	60
4.4. Logarithmic negativity of integer quantum Hall states .....	61
4.4.1. Logarithmic negativity for fermionic Gaussian states .....	62
4.4.2. Overlap matrix method .....	63
4.4.3. Real space discretization method .....	64
4.5. Integer quantum Hall groundstates .....	65
4.5.1. Adjacent geometry .....	65
4.5.2. Hourglass geometry .....	68
4.6. Integer quantum Hall states at finite temperature .....	68
4.6.1. Low temperatures .....	70
4.6.2. High temperatures .....	72
4.7. Discussion .....	76
Appendix A : Data .....	77
Appendix B : Logarithmic negativity for uncorrelated subregions .....	79
Appendix C : Low temperature expansion for the overlap matrices .....	80
Appendix D : Correlation function in high temperature regions .....	80
Appendix E: Overlap matrix method in high temperature regions .....	82

Appendix F : Temperature dependence of IQH charge fluctuation boundary law and corner coefficient .....	83
<b>Conclusion</b> .....	87
<b>Références bibliographiques</b> .....	89
<b>Annexe A. Détails numériques</b> .....	95
A.1. Matrice de chevauchement .....	95
A.2. Discrétisation de l'espace réel .....	96
A.3. Données numériques .....	97



# Liste des tableaux

---

4.1	The small-angle coefficients of the corner functions for LN and MI on the bipartite, tripartite adjacent and hourglass geometries at filling $\nu = 1$ . The value of $\kappa_{\text{adj}}$ , the residue of the corner function for the MI on the adjacent geometry, is based on Ref. Sirois. ....	68
4.2	Boundary law coefficients for the LN $\mathcal{E}$ and the MI $I(A_1, A_2)$ in the IQH groundstates at fillings $\nu = 1, 2$ . ....	77
4.3	Subleading terms of the MI, $b^I(\theta)$ and the LN, $b(\theta)$ for various angles $\theta$ and fillings $\nu$ on the adjacent geometry, using the overlap matrix and the real space lattice approaches. ....	79
4.4	Mutual information $I(A_1, A_2)$ and LN $\mathcal{E}$ for various angles $\theta$ , and fillings $\nu$ , in the hourglass geometry. Results from the overlap matrix and the real space lattice approaches are shown. ....	79
A.1	Convergence des termes de coin de la LN, $b(\theta)$ , et de la MI, $b^I(\theta)$ , pour la géométrie adjacente, remplissage $\nu = 2$ avec la méthode de matrices de chevauchement. ....	98
A.2	Convergence des termes de coin de la LN, $b(\theta)$ , et de la MI, $b^I(\theta)$ , pour la géométrie de sablier, remplissage $\nu = 2$ avec la méthode de matrices de chevauchement. ....	99



# Liste des figures

---

1.1	Une bipartition générale de l'espace $A \cup B$ . L'espace de Hilbert est $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ . Différentes configurations de la géométrie de $A$ et $B$ modifient l'intrication du système. ....	24
2.1	Une tripartition générale de l'espace $A \cup B$ où $A = A_1 \cup A_2$ . Nous étudions l'intrication entre les régions $A_1$ et $A_2$ sous différentes géométries en traçant les degrés de liberté de la région $B$ . ....	30
2.2	Comparaison entre la LN bosonique éq. (2.3.6), et la LN fermionique, éq. (2.3.7) pour les états de Werner à deux fermions. Dans la limite d'un état pur, $p = 1$ , les deux définitions coïncident et sont égales à l'entropie de Rényi 1/2 de la matrice densité réduite, $\mathcal{E}_b = \mathcal{E} = S_{1/2}(A) = \ln(2)$ (ligne pointillée). Calcul adapté de la réf. [1]. ....	37
3.1	(a) Montage expérimental typique de l'effet Hall. Dans l'effet classique, un champ magnétique $B$ dévie les charges électriques à cause de la force de Lorentz, produisant un champ électrique dans la direction transverse. Une force électrostatique vient balancer la force de Lorentz. On mesure une différence de potentiel $V_H$ dans la direction transverse. (b) L'effet de Hall quantique entier; la résistivité transverse $\rho_{xy}$ plafonne à des valeurs $\nu$ entières. Figure créée à partir des données dans réf. [2]. ....	40
3.2	(a) Tripartition de l'espace $A \cup B$ avec $A = A_1 \cup A_2$ sur un tore. Les régions $A_1$ et $A_2$ sont adjacentes. (b) Coefficient de la loi du périmètre de la LN, pour la géométrie dépeinte dans le panneau (a), en fonction de $L_1$ . La LN fermionique et bosonique [3] donnent le même résultat et plafonne à $c_{\mathcal{E}} = c_{\mathcal{E}_b} = 0.2789$ . ....	46
4.1	Subregions $A_1$ and $A_2$ are separated by a distance $d$ . The complement of $A_1 \cup A_2$ is $B$ . ....	53
4.2	Partitions with corners. (a) Subregion $A$ with a single corner of angle $\theta$ ; the complement $B$ is the corner of angle $2\pi - \theta$ . (b) The regions $A_{1,2,3}$ are used to show that the corner function for the EE, $a(\theta)$ , is convex. The inversion of $A_1$ is	

	shown in grey; the union of $A_1$ and its inverse form an hourglass with tip-touching corners. Similarly for $A_2$ and $A_3$ .....	54
4.3	Geometries where two corners, $A_1$ and $A_2$ , touch. (a) The corners of angle $\theta_1$ and $\theta_2$ touch along an edge. (b) In this symmetric hourglass geometry, two corners have the same angle, and the geometry possesses an inversion symmetry about the apex. The grey regions $C, C'$ are used to show that the hourglass MI is monotonically increasing with $\theta$ . .....	57
4.4	Tripartite adjacent geometry. Subregions $A_1$ and $A_2$ share a boundary of length $l_y$ , and have two pairs of touching corners. ....	66
4.5	Angle dependence of the subleading LN term, $b$ , and subleading MI term, $b^I$ , at fillings $\nu = 1, 2$ on the adjacent geometry. The curves show the small angle behaviour: $k_{\text{adj}}/\theta$ for the LN, and $\kappa_{\text{adj}}/\theta$ for the MI. The small-angle coefficients are given in Table 4.1. ....	67
4.6	Ratios of corner terms for the adjacent geometry. (a) The MI corner term $b^I(\theta)$ , and the LN corner term $b(\theta)$ divided by the fluctuation corner term $b^{\mathcal{I}}(\theta)$ . (b) The ratios of the LN corner term $b(\theta)$ and MI corner term $b^I(\theta)$ between filling $\nu = 1$ and $\nu = 2$ .....	67
4.7	Tripartite hourglass geometry. Subregions $A_1$ and $A_2$ touch at a single point, with an hourglass corner of angle $\theta$ . ....	67
4.8	The LN $\mathcal{E}$ and the MI $I$ at various angles for $\nu = 1$ and $\nu = 2$ on the hourglass geometry are denoted as different dots, and the fitting curves motivated by the corner function of charge fluctuations $\mathcal{I}(\theta)$ (4.5.4) for the LN and the MI at $\nu = 1$ are denoted as blue curve $\frac{k_{\times}}{\pi}(1 - \theta \cot \theta)$ and red curve $\frac{\kappa_{\times}}{\pi}(1 - \theta \cot \theta)$ , respectively, where $k_{\times}, \kappa_{\times}$ appear in Table 4.1. ....	69
4.9	Various ratios between the LN $\mathcal{E}$ , MI $I$ , and the mutual charge fluctuations $\mathcal{I}$ , on the hourglass geometry as a function of the angle. ....	69
4.10	Finite temperature LN at average fillings $\nu = 1, 2$ on the adjacent geometry. The shared boundary $l_y$ is varied to perform a linear regression and obtain the boundary law coefficient, $c_{\mathcal{E}}(T)$ and corner term, $b(\pi/2, T)$ . We used $L_x = L_y = 40$ . (a) Boundary law coefficient as a function of temperature, (b) corner term $b(\pi/2, T)$ . 71	71
4.11	Finite temperature LN $\mathcal{E}(T)$ at average fillings $\nu = 1, 2$ on the hourglass geometry at touching angle $\pi/2$ with $l_y = 10$ . We used $L_x = L_y = 40$ . ....	72



- 4.12 (a) The boundary law coefficients of the LN computed through the overlap matrix ( $c_{\mathcal{E},o}$  denoted as blue dots) and the real space discretization ( $c_{\mathcal{E},r}$  denoted as red squares) methods, and the fitting function (black curve) with parameters  $(\alpha_{c,0}, \alpha_{c,1}, \alpha_{c,2}, \alpha_{c,3}) = (0.2789, 0.4481, 1.2192, 0.1916)$  versus  $\lambda$ . (b) The subleading term of LN on the adjacent geometry at angle  $\pi/2$  (blue) and the LN on the hourglass geometry at touching angle  $\pi/2$  (red) by setting  $\lambda = e^{-\frac{\beta}{2}}$ . The numerical data from the real space discretization method and the fitting functions with parameters  $(\alpha_{b,0}, \alpha_{b,1}) = (0.1415, -0.4547)$  and  $(\alpha_{h,0}, \alpha_{h,1}) = (0.1085, -0.2753)$  versus  $\lambda = e^{-\frac{\beta}{2}}$  are denoted by squares and curves, respectively. .... 73
- 4.13 The boundary law coefficient of the entanglement entropy  $c_1$  (blue dots) computed with the overlap matrix method versus  $\lambda = e^{-\frac{\beta}{2}}$ , and the fitting function (black curve) with parameters  $(\gamma_{c,0}, \gamma_{c,1}, \gamma_{c,2}, \gamma_{c,3}) = (0.2033, 0.1167, 0.5928, 0.1109)$ . The boundary law coefficient of the MI is twice as large,  $2c_1$ . .... 74
- 4.14 The thermal entropy at high temperature scales logarithmically with temperature. The data points are computed at average filling  $\nu = 1$  using the high temperature overlap matrix technique on an adjacent geometry where the length of the boundary of subregion  $A$  is the same as the boundary of the whole system ( $l_y = L_x = L_y = 285$  and  $l_x = 10$ ). The slope of the fitting line  $c = 0.1590(1)$  is indeed close to the analytical result  $1/2\pi$ . .... 75
- 4.15 (a) Log-log plot of the MI  $I(A_1, A_2)$  as a function of temperature. The linear fit gives a slope of  $0.50(2)$ . The data points are computed at average filling  $\nu = 1$ , using the high temperature overlap matrix technique on an adjacent geometry where the length of the boundary of subregion  $A$  is the same as the boundary of the whole system ( $l_y = L_y = L_x = 285$ , and  $l_x = 10$ ). .... 75
- 4.16 Log-log plot of the high temperature boundary law coefficient  $c_{\mathcal{E}}(T)$  as a function of temperature at average filling  $\nu = 1$  on an adjacent geometry with no corners. The boundary law coefficient decays as a power law of temperature, with exponent  $-1.5(1)$ . The numerical data points are computed from the high temperature overlap matrix technique on an adjacent geometry where the length of the boundary of subregion  $A$  is the same as the boundary of the whole system ( $l_y = L_x = L_y = 28$  and  $l_x = 10$ ). .... 76
- 4.17 The numerical results of (a) the LN  $\mathcal{E}$  (b) the MI  $I(A_1, A_2)$  and the corresponding finite-size fits on the hourglass geometry at touching angle  $\theta = 0.3\pi$  and  $\nu = 1$

	versus the inverse of the lattice spacing $a$ , where $A_0 = 0.030$ , $A_1 = -0.007$ , $A_2 = 0.973$ , $B_0 = 0.08661$ , $B_1 = -0.4306$ , and $B_2 = 1.99990$ . . . . .	78
4.18	Log-log plots of (a) the boundary law coefficient, $c_{\text{fluc}}(T)$ and (b) the corner coefficient, $\alpha(T)$ as a function of temperature for IQH charge fluctuations at average filling $\nu = 1$ . The solid lines represent the high temperature power laws, Eq. (4.7.33) and (4.7.34), which are proportional to $T^{-3/2}$ for the boundary law coefficient and $T^{-2}$ for the corner coefficient. . . . .	85
A.1	Exemple d'une pixélisation des sous-régions $A_1$ et $A_2$ définies dans le continuum avec constante de réseau $a = 1$ pour les géométries (a) adjacente et (b) sablier, d'angle $0.4\pi$ . . . . .	96

## Liste des sigles et des abréviations

---

CFT	Théorie conforme des champs, de l'anglais <i>conformal field theory</i>
EE	Entropie d'intrication, de l'anglais <i>entanglement entropy</i>
FQH	Hall quantique fractionnaire, de l'anglais <i>fractional quantum Hall</i>
IQH	Hall quantique entier, de l'anglais <i>integer quantum Hall</i>
LN	Négativité logarithmique, de l'anglais <i>logarithmic negativity</i>
LOCC	Opérations locales et communication classique, de l'anglais <i>local operation and classical communication</i>
MI	Information mutuelle, de l'anglais <i>mutual information</i>
PPT	Transposition partielle positive, de l'anglais <i>positive partial transpose</i>
SSA	Subadditivité forte, de l'anglais <i>strong subadditivity</i>
TP	Transposition partielle



## Remerciements

---

Je remercie mon directeur de recherche, William Witczak-Krempa de m'avoir accueilli dans son groupe de recherche. J'ai beaucoup appris dans les deux dernières années. I would also like to sincerely thank Chia-Chuan Liu for the collaboration on the negativity project. Thank you for your patience and for answering my many emails.

Je tiens à remercier tous les membres du groupe de William, présents et passés, qui m'ont aidée, inspirée et fait rire. Merci à Gilles Parez et Clément Berthière pour leur expertise en intrication. Merci à Rufus Boyack de toujours avoir été disponible pour évaluer une somme ou une intégrale. Merci à mes collègues et amis de bureau, en ordre d'apparition, Gabriel Longpré, Simon Garneau-Desroches, Liuke Liu et Dounia Shaaban Kabakibo.

Merci à celles qui sont là depuis le début, Aria Malhotra et Reem Mandil. Finalement, merci à mes parents, à mon frère Harry, et à Nick pour leur soutien et leur amour.



# Chapitre 1

---

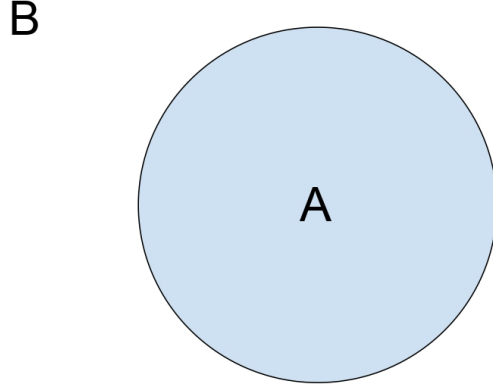
## Introduction

La différence entre la physique classique et quantique est particulièrement mise en évidence en étudiant le phénomène d'intrication. Les mesures effectuées sur des particules intriquées sont corrélées; la mesure de l'une modifie la distribution de probabilité de la mesure des autres. Ce phénomène ne connaît pas d'analogie en physique classique [4, 5, 6].

Du point de vue de l'information quantique, l'intrication est une ressource qui permet d'effectuer des protocoles qui sont impossibles classiquement, en surmontant les contraintes d'opérations locales et de communications classiques (LOCC, de l'anglais *local operations and classical communications*). Cette famille d'opérations est définie comme suit. Nous considérons un système quantique multipartite divisé entre différents groupes. Chaque groupe ne peut agir que sur son propre sous-système localement en effectuant des mesures ("opérations locales"), mais les groupes peuvent partager leurs résultats via des canaux standards comme le téléphone ("communications classiques") [7]. Aller au delà des contraintes LOCC avec l'intrication donne lieu à des applications concrètes de la physique quantique comme les ordinateurs quantiques [8, 9, 10] et la cryptographie quantique [11]. De plus, au cours des dernières années, l'intrication est sujet d'actualité dans d'autres domaines, se prêtant à la recherche sur les trous noirs [12, 13] et la matière condensée [14, 15, 16], entre autres.

### 1.1. Intrication : définition et mesures

Un état est intriqué s'il n'est pas séparable. Dans cette section, nous résumons brièvement la définition de séparabilité pour des états purs et mixtes. Nous passons aussi en revue les mesures d'intrication appropriées à chacun de ces types d'états. Nous travaillons avec une bipartition de l'espace  $A \cup B$  où l'espace d'Hilbert  $\mathcal{H}$  du système total est  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ . Un exemple d'une bipartition de l'espace est présenté à la Fig. 1.1.



**Fig. 1.1.** Une bipartition générale de l'espace  $A \cup B$ . L'espace de Hilbert est  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ . Différentes configurations de la géométrie de  $A$  et  $B$  modifient l'intrication du système.

### 1.1.1. États purs

Considérons un état pur  $|\psi\rangle$  sur l'espace complet, décrit par la matrice densité  $\rho_{AB} = |\psi\rangle\langle\psi|$ . La décomposition de Schmidt permet d'écrire cet état selon une base orthonormale,  $|\phi_i^j\rangle$  du sous-espace  $\mathcal{H}_j$ ,  $j = \{A, B\}$  [17],

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1} p_i |\phi_i^A\rangle \otimes |\phi_i^B\rangle, \quad \sum_i p_i^2 = 1 \quad (1.1.1)$$

où les coefficients de Schmidt  $p_i$  sont des coefficients réels positifs. L'état ci-haut est séparable si sa fonction d'onde peut être écrite comme un état produit,

$$|\psi\rangle = |\phi^A\rangle \otimes |\phi^B\rangle, \quad (1.1.2)$$

sinon il est intriqué. Dans ce dernier cas, l'état a plus qu'un coefficient de Schmidt non-nul. Il est alors utile d'étudier la matrice densité réduite d'une des sous-régions, par exemple  $A$ , que nous définissons en traçant les degrés de liberté de l'espace Hilbert  $\mathcal{H}_B$ ,

$$\rho_A = \text{tr}_B \rho_{AB} = \sum_i p_i^2 |\phi_i^A\rangle\langle\phi_i^A|. \quad (1.1.3)$$

La matrice densité réduite d'un état pur intriqué décrit un état mixte. Ceci permet de quantifier l'intrication entre deux sous-systèmes de manière rigoureuse en définissant l'entropie d'intrication (EE, de l'anglais *entanglement entropy*). Il s'agit de l'entropie von Neumann de la matrice densité réduite [18],

$$S(\rho_A) = -\text{tr} \rho_A \log \rho_A. \quad (1.1.4)$$

L'EE satisfait plusieurs propriétés dont la subadditivité [19]:

$$S(\rho_{AB}) \leq S(\rho_A) + S(\rho_B), \quad (1.1.5)$$



et sa version plus forte, dénotée SSA (de l'anglais *strong subadditivity*) [20]. Ici,  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C$ ,

$$S(\rho_{ABC}) + S(\rho_B) \leq S(\rho_{AB}) + S(\rho_{BC}). \quad (1.1.6)$$

Pour une bipartition d'un état pur, il est pertinent de noter que l'EE de la sous-région  $A$  est la même que celle de la sous-région  $B$  puisque les matrices densité réduite (1.1.3) ont les mêmes valeurs propres dans la décomposition de Schmidt.

$$S(\rho_A) = S(\rho_B), \quad (1.1.7)$$

pour un état pur. L'EE d'un état pur n'est donc pas une quantité extensive. Dans le cas des états fondamentaux d'Hamiltoniens avec un *gap* d'énergie, l'EE suit généralement une loi du périmètre [21, 22, 23]. Pour un système avec interactions locales, il est naturel de s'attendre à ce que l'EE soit proportionnelle au nombre de paires intriquées le long de la frontière partagée entre  $A$  et  $B$ . [22]. Au delà de la loi du périmètre, l'EE est caractérisée par des corrections universelles qui ne dépendent pas des détails microscopiques du système à l'étude [24, 25, 26]. Par exemple, dans certains systèmes, l'EE a une correction qui caractérise l'ordre de phases quantiques qui ne sont pas décrites par un paramètre d'ordre local, soit une correction *topologique* [24, 27].

Finalement, nous généralisons le concept d'EE avec les moments de la matrice densité réduite, et nous définissons les entropies de Rényi [28],

$$S_n(\rho_A) = \frac{1}{1-n} \log \text{tr} \rho_A^n, \quad (1.1.8)$$

où  $n > 0$ . On retrouve l'EE en prenant la limite  $n \rightarrow 1$ .

L'EE et les entropies de Rényi ont été utilisées pour caractériser les transitions de phase quantique [16, 29] ainsi que pour détecter les propriétés topologiques de systèmes à plusieurs corps [24, 27]. L'entropie de Rényi  $S_2$  a aussi été mesurée expérimentalement avec des atomes ultra-froids [30]. Cependant, la physique telle que décrite par des états purs est limitée. En effet, souvent nous ne connaissons pas l'état d'un système, non pas à cause d'une incertitude inhérente quantique, mais plutôt à cause d'une ignorance classique. C'est souvent le cas en laboratoire, à cause d'effets de décohérence, ou encore dans l'étude d'ensembles thermiques [31]. Une théorie rigoureuse de l'intrication d'états mixtes est donc essentielle.

### 1.1.2. États mixtes

Un état mixte, décrit par une matrice densité  $\rho$ , est séparable s'il s'écrit comme une combinaison convexe d'états produits purs, soit

$$\rho = \sum_{i=1} p_i \rho_{A,i} \otimes \rho_{B,i}, \quad p_i \geq 0, \quad \sum_i p_i = 1, \quad (1.1.9)$$

où les  $\rho_j$  sont des états de leur espace d'Hilbert respectif,  $\mathcal{H}_j$ ,  $j = \{A, B\}$  [32]. Ici, et ailleurs dans ce mémoire, toute matrice densité (totale ou réduite) est un opérateur positif semi-défini et normalisé  $\text{tr}(\rho) = 1$ . En général, il est très difficile de vérifier si un état arbitraire peut être écrit sous la forme (1.1.9) [33]. Un critère de séparabilité plus pratique est le critère de transposition partielle positive (PPT, de l'anglais *positive partial transpose*). Ce critère est basé sur l'observation qu'une matrice densité séparable de la forme (1.1.9) demeure un opérateur positif semi-défini sous une transposition par rapport à un seul de ses sous-systèmes (une transposition partielle) puisque cette opération préserve les valeurs propres. La présence de valeurs propres négatives dans le spectre de la matrice densité partiellement transposée indique donc que l'état est intriqué (non-séparable) [34, 35].

Comme pour les états purs, nous cherchons à quantifier l'intrication dans des états mixtes. Les mesures d'intrication introduites précédemment comme l'EE ou les entropies de Rényi ne sont pas adaptées aux états mixtes puisqu'elles mesurent aussi les corrélations classiques. Par exemple, l'EE d'un ensemble thermique grandit avec le volume du système (loi du volume) et se réduit à l'entropie thermodynamique à température élevée [22, 36]. À température élevée, une bonne mesure d'intrication devrait plutôt indiquer que l'intrication du système est nulle.

Pour étudier les corrélations entre les sous-systèmes  $A$  et  $B$ , il est utile de définir l'information mutuelle (MI, de l'anglais *mutual information*),

$$I(A, B) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}). \quad (1.1.10)$$

Cette quantité est positive en raison de la condition SSA sur les EEs. Elle tend vers zéro quand les sous-régions  $A$  et  $B$  sont séparées par de grandes distances [37]. Pour un état pur,  $I(A, B) = 2S(\rho_A)$  puisque  $S(\rho_A) = S(\rho_B)$  et que l'EE du système total est nulle. Pour des états mixtes, la MI élimine la loi du volume, et se comporte généralement de manière plus similaire à l'EE d'un état pur. Par exemple, pour des systèmes avec *gap*, elle suit une loi du périmètre [38, 37]. Par contre, cette mesure ne capture pas seulement l'intrication quantique. Elle est aussi polluée par des corrélations classiques. Considérons comme exemple l'état classique suivant, composé de deux micro-états séparables,

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|). \quad (1.1.11)$$

Malgré le fait que l'état ne soit pas intriqué, son MI n'est pas nulle,  $I(A, B) = 1$ . La MI n'est donc pas une bonne mesure d'intrication pour un état mixte.

Une bonne mesure pour quantifier l'intrication dans un état quantique mixte est la négativité logarithmique (LN, de l'anglais *logarithmic negativity*) [39, 40]. Cette mesure quantifie à quel point les valeurs propres de la matrice densité partiellement transposée sont négatives, d'où le nom "négativité".

La LN est utilisée pour calculer l'intrication dans des chaînes de spins [41, 42, 43], des chaînes d'oscillateurs harmoniques [44, 45], et des systèmes topologiques [46, 47, 48, 49]. Elle est aussi utilisée pour étudier la structure d'intrication dans des systèmes à température finie [50, 51, 52]. Cependant, l'opération de transposition partielle telle qu'originellement proposée cause problème lorsqu'elle est appliquée à des systèmes fermioniques : elle ne tient pas en compte des propriétés anti-commutatives. Certaines études ont généralisé la LN aux systèmes fermioniques avec la définition originale de transposition partielle [3, 43, 53, 54]. Par contre, Shapourian et Ryu ont noté que ceci ne capture pas toujours les corrélations quantiques; avec cette définition originale, que nous dénoterons la LN *bosonique*, on ne détecte pas l'intrication dans la phase topologique de la chaîne de Kitaev [55]. En 2017, une nouvelle mesure d'intrication appropriée pour les états fermioniques mixtes a donc été introduite, la LN fermionique [1, 56]. Cette mesure d'intrication sera notre outil principal pour quantifier l'intrication dans des états de Hall quantiques mixtes.

## 1.2. États de Hall quantiques

Les systèmes de Hall quantiques sont des systèmes d'électrons en deux dimensions qui, lorsque soumis à un champ magnétique fort, font l'objet d'une physique riche. L'effet de Hall quantique entier (IQH, de l'anglais *integer quantum Hall*) a été découvert par von Klitzing en 1980 [57] et l'effet de Hall quantique fractionnaire (FQH, de l'anglais *fractional quantum Hall*) deux ans plus tard par Tsui et Störmer [58]. Expérimentalement, on observe que la résistivité de Hall,  $\rho_{xy}$ , est quantifiée,

$$\rho_{xy} = \frac{2\pi\hbar}{e^2} \frac{1}{\nu}. \quad (1.2.1)$$

où  $\nu$  prends des valeurs entières dans l'effet IQH et des valeurs fractionnaires dans l'effet FQH. L'étude de ces phénomènes a été extrêmement importante pour la physique moderne, introduisant les concepts de topologie et de particules aux statistiques fractionnaires [59]. Des études antérieures sur l'intrication d'états IQH purs au-delà de la loi du périmètre ont montré que ces systèmes possèdent des caractéristiques (quasi-)universelles [60]. C'est-à-dire qu'une partie de leur structure d'intrication ne dépend pas de propriétés microscopiques et est partagée avec des systèmes distincts comme des théories conformes des champs (CFT, de l'anglais *conformal field theory*) [61]. Les états de Hall et leur structure d'intrication sont étudiés en détails dans le chapitre 3.

Ultimement, le but de ce mémoire est de revisiter la question d'intrication dans les systèmes de Hall en utilisant comme outil la LN fermionique afin de se concentrer sur des états mixtes. D'une part, ceci permet d'explorer l'intrication dans des géométries plus complexes, comme des tripartitions et de voir si nous retrouvons des propriétés

universelles. D'autre part, ceci permet d'étudier des ensembles thermiques et de découvrir le comportement de l'intrication quand nous ajoutons des fluctuations thermiques au système.

### 1.3. Plan du mémoire

Le mémoire est organisé comme suit. La LN est présentée en détails dans le chapitre 2, en portant un regard particulier sur les différences entre sa définition bosonique et sa définition fermionique. Une description de la physique qui sous-tend les phénomènes de Hall quantique est ensuite présentée au chapitre 3, ainsi qu'une révision de sa structure d'intrication au niveau de la loi du périmètre et au-delà. L'article dans lequel nous présentons nos résultats constitue le chapitre 4. Finalement, les conclusions sont présentées dans le chapitre 5 et les détails numériques donnés dans les annexes.

### 1.4. Contribution de l'auteure

Nous présentons au chapitre 4 l'article "Entanglement negativity versus mutual information in the quantum Hall effect and beyond" par Chia-Chuan Liu (CCL), Juliette Geoffrion (JG) et William Witczak-Krempa (WWK).

Le projet a été proposé par WWK qui a fourni des conseils tout au long du projet. WWK et CCL ont adapté des méthodes connues pour calculer la LN, tel que présenté dans la section IV de l'article. JG et CCL ont élaboré des codes numériques pour calculer la LN dans les systèmes de Hall pour diverses géométries et remplissages en utilisant chacune des méthodes. JG a obtenu les résultats présentés dans la section IV et l'annexe A avec la méthode de matrice de chevauchement tandis que CCL a obtenu les résultats avec la méthode discrétisation. JG a obtenu tous les résultats présentés à la section VI. WWK et CCL ont indépendamment vérifié plusieurs des résultats numériques.

WWK a rédigé les sections I, III et VII. CCL a rédigé les sections II, IV, V et les annexes B, C, E. JG a rédigé la section VI et les annexes A, D, F. La majorité des sections ont été considérablement modifiées et améliorées par chacun des co-auteurs qui y ont ajouté des clarifications, des figures et des équations.

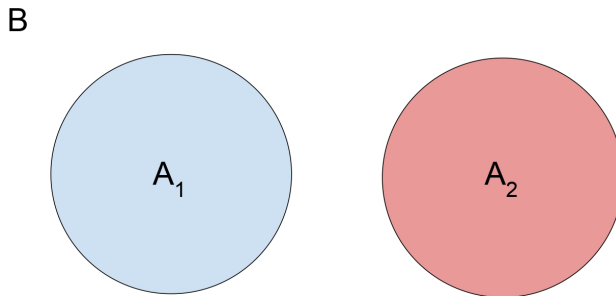
## Chapitre 2

---

### Négativité logarithmique

Il existe diverses mesures d'intrication pour états mixtes qui sont motivées sur le plan opérationnel (voir réf. [62] pour une revue). Par exemple, du point de vue de l'information quantique, il est pertinent de demander combien d'états singulets purs (soit de paires Bell maximales intriquées) on peut extraire d'une matrice densité mixte via les LOCCs. Cette quantité est l'intrication de distillation [63]. Cependant, pour des états à plusieurs corps, plusieurs de ces mesures impliquent résoudre des problèmes d'optimisation extrêmement complexes. La négativité logarithmique (LN), quant à elle, est une mesure d'intrication qui est calculable (elle n'implique pas d'expressions variationnelles), et elle a également une interprétation opérationnelle; il s'agit de la limite supérieure de l'intrication de distillation [39]. La LN est la mesure d'intrication centrale de notre recherche.

Comme mentionné dans l'introduction, les valeurs propres d'un état séparable restent nécessairement positives sous une transposition partielle (critère PPT), et la présence de valeurs propres négatives dans le spectre de la matrice partiellement transposée indique qu'un état est intriqué [34]. Par contre, cette condition n'est pas *suffisante* pour tous systèmes. Il existe une classe de systèmes intriqués qui restent aussi positifs sous une transposition partielle [35]. Néanmoins, le critère PPT permet de définir la LN et de quantifier l'intrication dans des états qui ne sont pas positifs sous transposition partielle. En particulier, dans ce mémoire, nous obtenons des résultats numériques pour la LN d'états gaussiens, tels que les états fondamentaux ou thermiques d'Hamiltoniens quadratiques (comme les systèmes de Hall quantiques sans interactions). Ces états satisfont le théorème de Wick et sont caractérisés par les valeurs moyennes d'opérateurs quadratiques [64]. Pour un système gaussien bipartite, le critère PPT est une condition suffisante et nécessaire de séparabilité [65, 66]. Dans l'article, nous donnons aussi des résultats plus généraux pour la LN d'états non-gaussiens, comme les états FQH.



**Fig. 2.1.** Une tripartition générale de l'espace  $A \cup B$  où  $A = A_1 \cup A_2$ . Nous étudions l'intrication entre les régions  $A_1$  et  $A_2$  sous différentes géométries en traçant les degrés de liberté de la région  $B$ .

Le but de ce chapitre est de présenter l'opération de transposition partielle (TP) et de définir la LN. Nous passerons d'abord en revue les définitions adaptées aux bosons, avant de présenter celles mieux adaptées aux fermions.

## 2.1. Transposition partielle et négativité logarithmique bosonique

Considérons maintenant des tripartitions. L'espace complet est divisé en deux,  $A \cup B$ , puis la sous-région  $A$  est divisée de sorte que  $A = A_1 \cup A_2$ . Un exemple d'une tripartition est présentée à la Fig. 2.1. Nous traçons les degrés de liberté de la sous-région  $B$  et nous considérons une matrice densité réduite mixte  $\rho_A$ ,

$$\rho_A = \sum_{ijkl} \langle e_i^1, e_j^2 | \rho_A | e_k^1, e_l^2 \rangle | e_i^1, e_j^2 \rangle \langle e_k^1, e_l^2 |. \quad (2.1.1)$$

où  $|e^{1(2)}\rangle$  est une base orthonormée de l'espace d'Hilbert de la sous-région  $A_{1(2)}$ . Sous une TP, cette matrice densité réduite devient

$$\rho_A^{T_1} = \sum_{ijkl} \langle e_k^1, e_j^2 | \rho_A | e_i^1, e_l^2 \rangle | e_i^1, e_j^2 \rangle \langle e_k^1, e_l^2 |. \quad (2.1.2)$$

Nous dénoterons cette opération la TP *bosonique* afin de la distinguer de la définition fermionique que nous présenterons dans la section suivante. Il s'agit d'une transposition matricielle par rapport à un seul des sous-systèmes, ici  $A_1$  [34, 55] :

$$(|e_i^1, e_j^2\rangle \langle e_k^1, e_l^2|)^{T_1} = |e_k^1, e_j^2\rangle \langle e_i^1, e_l^2|. \quad (2.1.3)$$

Pour des systèmes à variables continues, la TP a aussi une interprétation autre qu'une transposition matricielle. Il existe une correspondance entre les matrices densités  $\rho$  et les fonctions de distribution de Wigner,  $W(q, p)$ , des distributions de quasi-probabilités dans l'espace de positions ( $q$ ) et d'impulsions ( $p$ ) [67]. Sous ce formalisme, une transposition

(totale) est équivalente à un renversement du temps  $\mathcal{T}$  (ou une réflexion miroir),

$$\rho \rightarrow \rho^T, \quad W(q, p) \rightarrow W(q, -p). \quad (2.1.4)$$

De manière analogue, pour une bipartition  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , la TP correspond à un renversement *partiel* du temps (ou une réflexion miroir partielle), soit par rapport à un seul des sous-systèmes, ici  $A$  [66],

$$\rho \rightarrow \rho^{T_A}, \quad W(q_A, p_A, q_B, p_B) \rightarrow W(q_A, -p_A, q_B, p_B). \quad (2.1.5)$$

Pour des systèmes gaussiens bosoniques, la TP bosonique peut être définie selon la transposition partielle de matrice, éq. (2.1.3), ou le renversement partiel du temps [55]. Nous utilisons  $\rho_A^{T_1}$  pour dénoter l'action de la TP bosonique sur une matrice densité réduite. Cet opérateur est hermitien mais pas unitaire.

Finalement, nous définissons la LN,

$$\mathcal{E}_b = \ln \|\rho_A^{T_1}\|, \quad (2.1.6)$$

où la trace norme est définie  $\|\mathcal{O}\| = \text{tr} \sqrt{\mathcal{O}\mathcal{O}^\dagger}$ . Pour un opérateur  $\mathcal{O}$  hermitien, la trace norme est équivalente à sommer la valeur absolue des valeurs propres de l'opérateur. Dans la définition ci-dessus, nous utilisons l'indice  $b$  pour désigner la LN *bosonique*. Il s'agit de la mesure d'intrication telle qu'initialement proposée [39, 40]. Il est à noter que la LN est la même si on fait la TP sur la sous-région  $A_1$  ou  $A_2$ . Appliquée à des systèmes bosoniques, cette mesure satisfait plusieurs conditions désirables pour une mesure d'intrication comme le fait qu'elle n'augmente pas sous les LOCCs [40]. Pour des matrices densité bosoniques, elle est aussi additive: l'intrication d'un produit tensoriel d'états est la somme de l'intrication des états qui constituent le système [39]. Soit pour deux systèmes avec espace d'Hilbert  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{H}'$ ,

$$\mathcal{E}_b(\rho \otimes \rho') = \mathcal{E}_b(\rho) + \mathcal{E}_b(\rho'). \quad (2.1.7)$$

De plus, pour un système de bosons gaussiens, la matrice  $\rho_A^{T_1}$  est toujours un opérateur gaussien. Ceci permet de calculer la LN de ces systèmes aisément en exploitant le théorème de Wick [44]. Pour des systèmes de bosons, la LN bosonique est ainsi une bonne mesure d'intrication qui a mené à plusieurs résultats fructueux [68, 69, 46, 47]. Par contre, adapter les définitions de TP et de LN aux systèmes de fermions est plus difficile puisqu'il faut prendre en compte l'anti-commutation des opérateurs fermioniques.

## 2.2. Transposition partielle et négativité logarithmique fermionique

Dans cette section, nous définissons la LN pour des systèmes de fermions en utilisant les deux paradigmes proposés pour définir la TP bosonique à la section précédente : la

transposition matricielle et le renversement du temps. Dans les deux cas, les définitions doivent être adaptées pour prendre en compte l'anti-commutation des fermions. La première méthode cause problème et donne une mesure d'intrication plus faible. Comme nous le verrons, la deuxième méthode est plus avantageuse. Dans cette section, nous travaillons avec des opérateurs fermioniques d'annihilation ( $f_j$ ) et de création ( $f_j^\dagger$ ) qui satisfont les relations d'anti-commutation canoniques,  $\{f_i^\dagger, f_j\} = \delta_{ij}$ .

### 2.2.1. Transposition de matrice

Résumons d'abord le traitement de Zimborás et Eisler pour adapter la LN aux systèmes gaussiens fermioniques [53]. Nous travaillons dans la base de Majorana avec les opérateurs suivants,

$$c_{2j-1} = f_j + f_j^\dagger, \quad c_{2j} = i(f_j - f_j^\dagger) \quad (2.2.1)$$

où  $\{c_k, c_l\} = 2\delta_{kl}$ . Un état gaussien fermionique  $\rho$  est caractérisé par sa matrice de covariance  $\Gamma_{kl} = \langle [c_k, c_l] \rangle / 2$ . Nous travaillons avec la matrice densité réduite  $\rho_A$  qui est toujours un opérateur gaussien et est donc caractérisée par sa matrice de covariance réduite  $\Gamma_A$  sur l'espace  $A = A_1 \cup A_2$ ,

$$\Gamma_A = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.2.2)$$

Les éléments diagonaux dénotent les matrices de covariance réduite sur l'espace  $A_1$  et  $A_2$ , et les éléments hors-diagonaux contiennent les corrélations entre les sous-régions  $A_1$ ,  $A_2$ . Considérons la TP par rapport au sous-système  $A_2$ . Soit un produit de  $n$  opérateurs de Majorana distincts de l'espace Hilbert  $\mathcal{H}_{A_2}$ ,  $M = c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_n}$ , alors la TP par rapport à  $A_2$  [54],

$$M^{T_2} = (-1)^{f(n)} M, \quad f(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \bmod 4 \in \{0, 1\} \\ 1 & \text{si } n \bmod 4 \in \{2, 3\}. \end{cases} \quad (2.2.3)$$

Suivant la réf.[53], nous introduisons deux opérateurs gaussiens  $O^\pm$  qui sont caractérisés par les matrices de covariance  $\Gamma_A^\pm$ ,

$$\Gamma_A^\pm = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \pm i \Gamma_{21} \\ \pm i \Gamma_{21} & -\Gamma_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.2.4)$$

Selon la définition de TP éq. (2.2.3), la matrice densité partiellement transposée n'est plus un opérateur gaussien mais plutôt une somme des opérateurs gaussiens  $O_+$  et  $O_-$  [53]:

$$\rho_A^{T_1} = \frac{1-i}{2} O_+ + \frac{1+i}{2} O_-. \quad (2.2.5)$$

Nous pouvons utiliser l'opérateur  $\rho_A^{T_1}$  pour calculer la LN bosonique  $\mathcal{E}_b$  avec l'éq. (2.1.6). Par contre, les opérateurs  $O_\pm$  ne commutent pas nécessairement ce qui rend le calcul du spectre de  $\rho_A^{T_1}$  (et par conséquent le calcul de  $\mathcal{E}_b$ ) difficile même pour des systèmes de fermions libres.



Cependant, l'éq. (2.2.5) permet de calculer une borne supérieure à la LN bosonique. Nous bornons la trace norme avec l'inégalité du triangle et le fait que  $(O_+)^\dagger = O_-$ ,

$$\|\rho_A^{T_1}\| \leq \left\| \frac{1-i}{2} O_+ \right\| + \left\| \frac{1+i}{2} O_- \right\| \leq \sqrt{2} \operatorname{tr} \sqrt{O_+ O_-}. \quad (2.2.6)$$

Ceci mène à l'inégalité suivante pour la LN bosonique d'états gaussiens de fermions [70],

$$\mathcal{E}_b = \ln \|\rho_A^{T_1}\| \leq \ln \operatorname{tr} \sqrt{O_+ O_-} + \ln \sqrt{2}. \quad (2.2.7)$$

Le produit d'opérateurs gaussiens  $O_+ O_-$  est toujours gaussien. Nous pouvons donc facilement calculer une borne supérieure à la LN bosonique pour un système fermionique gaussien avec les matrices de covariance, éq. (2.2.4). Cependant, la complexité de calcul n'est pas le seul problème que pose l'extension de la définition de la TP bosonique aux fermions. Avec la définition de TP, éq. (2.2.3), la LN n'est pas additive :  $\mathcal{E}_b(\rho \otimes \rho') \neq \mathcal{E}_b(\rho) + \mathcal{E}_b(\rho')$  [1]. Par conséquent, dans certains cas, la LN bosonique ne capture pas toutes les corrélations quantiques de systèmes fermioniques. Par exemple, la chaîne de Kitaev est un modèle 1D dont les états propres sont des fermions de Majorana qui sont séparés physiquement – un phénomène important en informatique quantique, lié à la protection contre la décohérence [71]. La chaîne de Kitaev a deux phases, l'une triviale où il n'y a aucune intrication entre les sites et l'autre topologique où les sites voisins forment des dimères de Majorana intriqués. La LN bosonique ne capture pas l'intrication dans cette dernière phase [1, 55]. Ces problèmes motivent à chercher une nouvelle définition de LN pour des fermions en utilisant le renversement partiel du temps comme TP.

## 2.2.2. Renversement du temps

Dans cette section, nous décrivons la TP *fermionique*, définie selon le renversement partiel du temps. Le renversement du temps,  $\mathcal{T}$ , par définition, agit comme

$$\mathcal{T}q\mathcal{T}^{-1} = q, \quad \mathcal{T}p\mathcal{T}^{-1} = -p, \quad (2.2.8)$$

ce qui implique  $\mathcal{T}i\mathcal{T}^{-1} = -i$  pour maintenir la relation de commutation canonique  $[q, p] = i$ . Révisons brièvement l'action du renversement du temps sur des systèmes de bosons avant de se tourner vers les fermions. Le traitement de cette section est résumé de la réf. [55].

Soit un opérateur bosonique d'annihilation ( $a$ ) et de création ( $a^\dagger$ ) qui respectent les relations de commutation canoniques,  $[a, a^\dagger] = 1$ . Nous considérons des bosons dans la base cohérente  $|\alpha\rangle$ , soit les états propres de l'opérateur d'annihilation,  $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$  [72],

$$|\alpha\rangle = e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle, \quad \langle \alpha^* | = \langle 0 | e^{\alpha^* a}, \quad \alpha, \alpha^* \in \mathbb{C}. \quad (2.2.9)$$

Le vide de Fock est dénoté  $|0\rangle$ . Pour des bosons, l'opération de renversement du temps est équivalente à une conjugaison complexe,  $\mathcal{T} = \mathcal{K}$  [73]. Ainsi, sous une transposition, un

vecteur de base se transforme comme

$$(|\alpha\rangle \langle \alpha^*|)^T = |\alpha^*\rangle \langle \alpha|. \quad (2.2.10)$$

En analogie avec l'exemple bosonique, nous considérons des fermions dans la base cohérente  $|\xi\rangle$ , soit des états propres de l'opérateur d'annihilation fermionique,  $f|\xi\rangle = \xi|\xi\rangle$ ,

$$|\xi\rangle = e^{-\xi f^\dagger} |0\rangle, \quad \langle \xi'| = \langle 0| e^{-f \xi'}. \quad (2.2.11)$$

L'anti-commutation des opérateurs fermioniques implique que les valeurs propres doivent aussi anti-commuter;  $\xi, \xi'$  sont des nombres de Grassman ( $\{\xi, \xi'\} = 0$  et  $\{\xi, f\} = 0$ ). Il est à noter que  $\xi$  et  $\xi'$  ne sont pas reliés par conjugaison complexe [72].

L'opération de renversement du temps pour des fermions est  $\mathcal{T} = UK$  où  $U$  dénote un opérateur unitaire [73]. Nous pourrions être tenté, en analogie avec l'exemple bosonique de renversement du temps, éq. (2.2.10), d'inverser les variables  $\xi$  et  $\xi'$  dans le bra et le ket mais l'anti-commutation des variables de Grassman complique le tout. Nous cherchons à ce que la TP préserve la trace ce qui n'est pas le cas si nous appliquons cette définition naïve,

$$\text{tr}(|\xi\rangle \langle \xi'|) = 1 + \xi \xi', \quad \text{tr}(|\xi'\rangle \langle \xi|) = 1 + \xi' \xi = 1 - \xi \xi'. \quad (2.2.12)$$

Pour préserver la trace, nous définissons la transposition avec un facteur de phase  $i$  additionnel,

$$U(|\xi\rangle \langle \xi'|)^T U^{-1} = |i\xi'\rangle \langle i\xi|. \quad (2.2.13)$$

Nous généralisons aux systèmes à plusieurs corps avec les états cohérents  $|\{\xi_j\}\rangle = e^{-\sum_j \xi_j f_j^\dagger} |0\rangle$  et  $\langle \{\bar{\chi}_j\}| = \langle 0| e^{-\sum_j f_j \bar{\chi}_j}$ . Dans cette base, sous une bipartition  $\mathcal{H}_{A_1} \otimes \mathcal{H}_{A_2}$ , appliquer la TP par rapport au sous-système  $A_1$  donne

$$U_{A_1} \left( |\{\xi_j\}_{j \in A_1}, \{\xi_j\}_{j \in A_2}\rangle \langle \{\bar{\chi}_j\}_{j \in A_1}, \{\bar{\chi}_j\}_{j \in A_2}| \right)^{\mathcal{T}_1} U_{A_1}^\dagger = |\{i\bar{\chi}_j\}_{j \in A_1}, \{\xi_j\}_{j \in A_2}\rangle \langle \{i\xi_j\}_{j \in A_1}, \{\bar{\chi}_j\}_{j \in A_2}|, \quad (2.2.14)$$

où  $U_{A_1}$  dénote un opérateur unitaire qui agit seulement sur l'espace d'Hilbert  $\mathcal{H}_{A_1}$ . Nous utilisons  $\rho_A^{\mathcal{T}_1}$  pour dénoter l'action de la TP fermionique sur une matrice densité réduite. L'indexe  $\mathcal{T}$  indique la TP définie selon le renversement du temps. En pratique, l'opération de renversement du temps définie ci-haut donne l'opérateur  $U_{A_1} \rho_A^{\mathcal{T}_1} U_{A_1}^\dagger$  où  $U_{A_1}$  dépend de la représentation choisie, mais les valeurs propres de cet opérateur sont les mêmes que celles de  $\rho_A^{\mathcal{T}_1}$  donc nous définissons simplement la LN fermionique comme

$$\mathcal{E} = \ln \|\rho_A^{\mathcal{T}_1}\|. \quad (2.2.15)$$

Les auteurs de la réf. [55] ont démontré que dans le langage de la LN bosonique, la LN fermionique est  $\mathcal{E} = \ln \text{tr} \sqrt{O_+ O_-}$ . En combinant avec l'inégalité obtenue précédemment, éq. (2.2.7), nous trouvons

$$\mathcal{E}_b \leq \mathcal{E} + \ln \sqrt{2}. \quad (2.2.16)$$

Une inégalité plus serrée,  $\mathcal{E}_b \leq \mathcal{E}$ , est également conjecturée, bien qu'elle ne soit pas prouvée [70, 74]. Dans la limite où  $\rho$  décrit un état pur, les opérateurs  $O_{\pm}$  commutent et  $\mathcal{E} = \ln \text{tr} \|O_+\| = \mathcal{E}_b$ . Dans ce cas, les LNs bosonique et fermionique sont égales à l'entropie de Rényi 1/2 de la matrice densité réduite,  $\mathcal{E}_b = \mathcal{E} = S_{1/2}(\rho_A) = 2 \ln \text{tr} \sqrt{\rho_A}$ , ce qui est prouvé explicitement dans la réf. [53] en utilisant les valeurs propres de  $O_+$ .

Contrairement au cas bosonique, l'opérateur  $\rho_A^{\mathcal{T}_1}$  n'est pas nécessairement hermitien. Dans ce sens, la LN fermionique ne mesure pas la "négativité" des valeurs propres. Néanmoins, il a été montré que la LN fermionique, éq.(2.2.15), satisfait les propriétés essentielles d'une mesure d'intrication, comme le fait qu'elle est nulle pour des états séparables et qu'elle n'augmente pas sous les LOCCs. Elle respecte aussi l'additivité parce que la TP fermionique respecte la structure de produit tensoriel,  $(\rho \otimes \rho')^{\mathcal{T}_1} = \rho^{\mathcal{T}_1} \otimes (\rho')^{\mathcal{T}_1}$  [1]. Finalement, sous une TP fermionique, l'opérateur  $\rho_A^{\mathcal{T}_1}$  est gaussien [55]. Ceci permet de calculer la LN fermionique de systèmes gaussiens facilement avec les fonctions de corrélation, tel que présenté à la prochaine section. Pour toutes ces raisons, nous utilisons la LN fermionique, basée sur le renversement partiel du temps, comme mesure principale d'intrication dans notre recherche. Dans le reste de ce mémoire, nous nous référons à la LN fermionique simplement comme la LN s'il n'y a pas de confusion.

## 2.3. Calculs de négativité logarithmique

Dans cette section, nous expliquons comment calculer la LN. Nous présentons d'abord un exemple simple à deux fermions, dans la base du nombre d'occupation puis nous expliquons comment calculer la LN d'états gaussiens à plusieurs corps avec les matrices de corrélations.

### 2.3.1. Exemple à deux fermions

Il est illustratif de présenter un simple exemple à deux fermions, adapté de la réf. [1], pour voir la différence entre la LN bosonique (transposition partielle de matrice) et la LN fermionique (renversement partiel du temps). La base du nombre d'occupation met en évidence cette différence; sous la définition fermionique, lors de la TP, la matrice densité acquiert un facteur de phase. Considérons la base suivante, où  $n_j$  dénote le nombre de fermions au site  $j$ , 0 ou 1,

$$|\{n_j\}_{j \in A}, \{n_j\}_{j \in B}\rangle = (f_{j_{1A}}^\dagger)^{n_{j_{1A}}} \dots (f_{j_{m_A}}^\dagger)^{n_{j_{m_A}}} \dots (f_{j_{1B}}^\dagger)^{n_{j_{1B}}} \dots (f_{j_{m_B}}^\dagger)^{n_{j_{m_B}}} |0\rangle, \quad (2.3.1)$$

et où  $|0\rangle$  dénote le vide de Fock. En analogie avec l'éq. (2.2.14), la TP dans la base du nombre d'occupation agit comme suit,

$$\begin{aligned} & (|\{n_j\}_A, \{n_j\}_B\rangle \langle \{\bar{n}_j\}_A, \{\bar{n}_j\}_B|)^{\mathcal{T}_A} \\ &= (-1)^{\phi(\{n_j\}, \{\bar{n}_j\})} U_A^\dagger (|\{\bar{n}_j\}_A, \{n_j\}_B\rangle \langle \{n_j\}_A, \{\bar{n}_j\}_B|) U_A \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

où la phase  $\phi(\{n_j\}, \{\bar{n}_j\}) = \frac{(\tau_A + \bar{\tau}_A) \bmod 2}{2} + (\tau_A + \bar{\tau}_A)(\tau_B + \bar{\tau}_B)$  et où  $\tau_{A(B)} = \sum_{j \in A(B)} n_j$ , et  $\bar{\tau}_{A(B)} = \sum_{j \in A(B)} \bar{n}_j$  correspondent au nombre de sites occupés par sous-système.

Nous considérons un Hamiltonien avec une amplitude de *hopping*  $\Delta$ , sur une chaîne fermionique à deux sites que nous séparons en deux,  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ . L'opérateur fermionique  $f_{A(B)}^\dagger$  crée un fermion au site  $A(B)$ ,

$$H = \Delta(f_A^\dagger f_B + f_B^\dagger f_A). \quad (2.3.3)$$

L'état fondamental est  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_A^\dagger - f_B^\dagger)|0\rangle$ . Nous nous intéressons à l'intrication des états de Werner, une classe d'états qui s'écrivent selon un paramètre réel  $p \in [0,1]$  de sorte que l'état est pur si  $p = 1$  et mixte autrement [75]. En fonction de l'état fondamental ci-haut, nous avons

$$\rho = \frac{1}{4}(1-p)\mathbb{I}_A \otimes \mathbb{I}_B + p|\psi\rangle\langle\psi|. \quad (2.3.4)$$

Les TPs bosonique et fermionique par rapport au site  $A$  sont distinctes. Nous les écrivons dans la base  $\{|00\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |11\rangle\}$ ,

$$\rho^{T_A} = \begin{pmatrix} \frac{1-p}{4} & 0 & 0 & \frac{-p}{2} \\ 0 & \frac{1+p}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+p}{4} & 0 \\ \frac{-p}{2} & 0 & 0 & \frac{1-p}{4} \end{pmatrix}, \quad \rho^{\mathcal{T}_A} = \begin{pmatrix} \frac{1-p}{4} & 0 & 0 & i\frac{p}{2} \\ 0 & \frac{1+p}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+p}{4} & 0 \\ i\frac{p}{2} & 0 & 0 & \frac{1-p}{4} \end{pmatrix}. \quad (2.3.5)$$

Finalement, nous calculons la LN bosonique et fermionique avec les opérateurs  $\rho^{T_A}$  et  $\rho^{\mathcal{T}_A}$  en suivant les équations (2.1.6) et (2.2.15). Nous obtenons

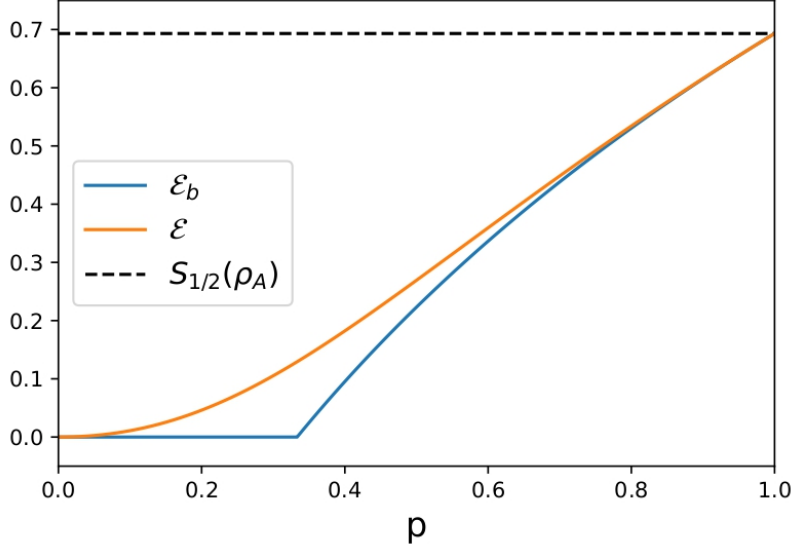
$$\mathcal{E}_b = \ln \left( \frac{3}{4}(1+p) + \frac{1}{4}|1-3p| \right), \quad (2.3.6)$$

$$\mathcal{E} = \ln \left( \frac{1}{2}(1+p) + \frac{1}{2}\sqrt{1-2p+5p^2} \right). \quad (2.3.7)$$

Les résultats sont tracés à la Fig. 2.2 pour différentes valeurs de  $p$ . La LN fermionique est plus grande que la LN bosonique avec égalité dans la limite d'un état pur où  $p = 1$ . Dans ce cas, les deux quantités sont égales à l'entropie de Rényi 1/2 de la matrice densité réduite,  $S_{1/2}(\rho_A) = 2 \ln \text{tr} \sqrt{\rho_A} = \ln(2)$ . Quand  $p = 0$ , l'état est maximalelement mixte (proportionnel à l'identité) et  $\mathcal{E}_b = \mathcal{E} = 0$ . Cependant, la LN bosonique reste nulle jusqu'à  $p = 1/3$ . L'état est donc séparable jusqu'à  $p = 1/3$  du point de vue bosonique mais pas du point de vue fermionique. Ceci est dû au fait que les matrices densité fermioniques sont contraintes par la symétrie de parité du nombre de fermions, comme démontré explicitement dans la réf. [1].

### 2.3.2. États gaussiens

L'exemple à deux fermions illustre bien la différence entre la LN fermionique et bosonique mais il est plutôt trivial. Les systèmes à l'étude en matière condensée sont des systèmes à plusieurs corps comme les systèmes de Hall quantiques et la chaîne de Kitaev mentionnée



**Fig. 2.2.** Comparaison entre la LN bosonique éq. (2.3.6), et la LN fermionique, éq. (2.3.7) pour les états de Werner à deux fermions. Dans la limite d'un état pur,  $p = 1$ , les deux définitions coïncident et sont égales à l'entropie de Rényi 1/2 de la matrice densité réduite,  $\mathcal{E}_b = \mathcal{E} = S_{1/2}(A) = \ln(2)$  (ligne pointillée). Calcul adapté de la réf. [1].

précédemment. Dans ces systèmes, l'intrication est fondamentale et donne lieu à des phases de la matière riches. Par exemple, la phase topologique de la chaîne de Kitaev est caractérisée par l'intrication entre les dimères de Majorana voisins [71]. Toutefois, pour étudier l'intrication de systèmes quantiques à plusieurs corps plus réalistes en matière condensée, travailler directement avec les matrices densité comme dans l'exemple à deux fermions peut être peu pratique, voire impossible. Il existe donc des astuces pour obtenir les valeurs propres des matrices densité réduites ou partiellement transposées et pour calculer diverses mesures d'intrication (voir par exemple la méthode *replica* pour les théories quantiques des champs [76, 77, 55]). Ici, nous nous basons sur une astuce qui fonctionne pour les états gaussiens. La matrice densité réduite de ces états s'écrit sous la forme  $\rho_A = \exp(-H_A)/Z_A$  où  $H_A = \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in A} h_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} f_{\mathbf{r}}^\dagger f_{\mathbf{r}'}$  est nommé l'Hamiltonien d'intrication et où  $Z_A = \text{tr}(\exp(-H_A))$ . Ces états satisfont le théorème de Wick [78]; toutes les fonctions de corrélation à  $N$ -points peuvent être exprimées comme des combinaisons linéaires de la fonction de corrélation à deux-points, définie comme suit ,

$$C_{ij} = \langle f_i^\dagger f_j \rangle = \text{tr}(\rho f_i^\dagger f_j). \quad (2.3.8)$$

Le spectre de la fonction de corrélation à deux-points est directement relié à celui de la matrice densité réduite par l'Hamiltonien d'intrication. Pour un état gaussien, les valeurs propres  $\{\zeta_i\}$  de  $h$  sont calculées des valeurs propres  $\{\lambda_i\}$  de la matrice de corrélation à deux-points via la relation  $\zeta_i = \ln\left(\frac{1-\lambda_i}{\lambda_i}\right)$  [78]. Ceci permet de calculer l'EE directement des

valeurs propres de la matrice de corrélation à deux-points restreinte à la sous-région  $A$ , [76]

$$S(\rho_A) = \sum_i -\lambda_i \ln(\lambda_i) - (1 - \lambda_i) \ln(1 - \lambda_i). \quad (2.3.9)$$

Pour calculer la LN fermionique d'états gaussiens, nous considérons l'opérateur  $\rho_\times = \rho^{\mathcal{T}_1} \rho_1^{\mathcal{T}_1^\dagger} / Z_\times$  où  $Z_\times = \text{tr}(\rho_\times) = \text{tr}(\rho^2)$ . La fonction de corrélation associée à cet opérateur est

$$C_\times = \frac{1}{2}(\mathbb{I} - (\mathbb{I} + \Gamma_+ \Gamma_-)^{-1}(\Gamma_+ + \Gamma_-)), \quad (2.3.10)$$

où les matrices  $\Gamma_\pm$ , éq. (2.2.4), sont les matrices de covariance associées aux opérateurs gaussiens  $O_\pm$  et  $\mathbb{I}$  est la matrice identité. La LN fermionique d'états gaussiens est donnée [70]

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \ln \text{tr}(Z_\times \rho_\times)^{1/2} = \ln \text{tr}(\rho_\times^{1/2}) + \frac{1}{2} \ln \text{tr}(\rho^2) \\ &= \sum_i \ln(\xi_i^{1/2} + (1 - \xi_i)^{1/2}) + \frac{1}{2} \sum_i \ln(\lambda_i^2 + (1 - \lambda_i)^2) \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

où  $\{\lambda_i\}$  sont les valeurs propres de la matrice de corrélation à deux-points  $C_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}$  et  $\{\xi_i\}$  sont les valeurs propres de la matrice de corrélation associée  $C_\times$ .

# Chapitre 3

---

## Effet de Hall quantique

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la physique d'électrons confinés au plan 2D et soumis à un champ magnétique transverse : l'effet de Hall [79, 80]. En raison de la force de Lorentz, les électrons se déplacent en orbites cyclotron avec fréquence  $\omega_c = eB/m$  où  $B$  est le champ magnétique, et  $e$ ,  $m$  sont la charge et masse de l'électron. Dans un échantillon semi-conducteur, ceci crée une accumulation déséquilibrée de charges, générant un champ électrique qui donne lieu à une force électrostatique. Cette force oppose la force de Lorentz et un équilibre est éventuellement atteint dans le système. Un montage expérimental typique est présenté à la Fig. 3.1(a). En physique classique, la première ligne d'attaque pour ce genre de système est le modèle de Drude. Considérons la force de Lorentz avec un champ électrique  $\mathbf{E}$  et un terme de friction linéaire,

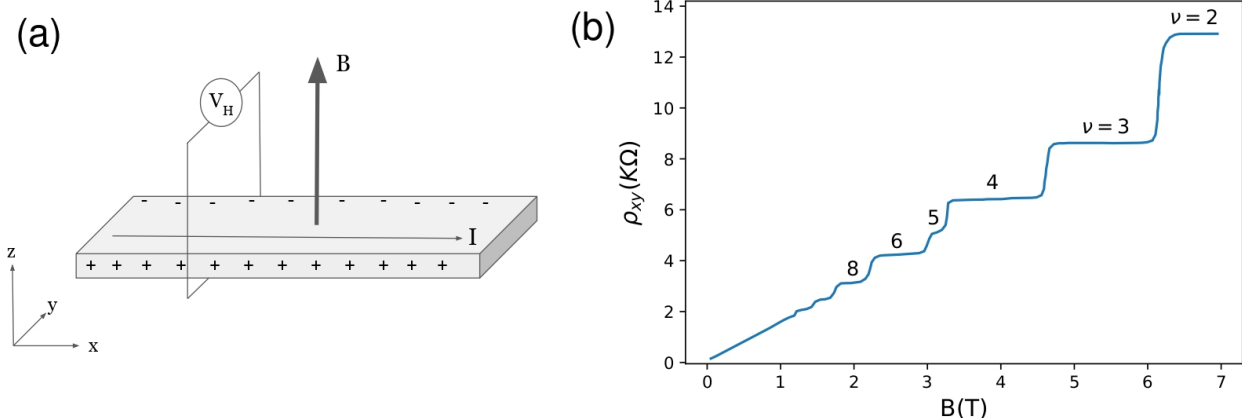
$$\mathbf{F} = -e\mathbf{E} - e\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{m\mathbf{v}}{\tau}. \quad (3.0.1)$$

Ici,  $\tau$  dénote un temps de diffusion. Nous relierons la densité de courant  $\mathbf{J}$  à la vitesse  $\mathbf{v}$  qui apparaît dans la force de Lorentz,  $\mathbf{J} = -nev$ ,  $n$  étant la densité d'électrons, et nous retrouvons la loi de Ohm,  $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ . De cette dernière, nous pouvons résoudre pour le tenseur de conductivité  $\sigma$ , ou son inverse, le tenseur de résistivité ( $\rho = \sigma^{-1}$ ) en fonction de la fréquence cyclotron. Nous trouvons

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m/ne^2\tau & B/ne \\ -B/ne & m/ne^2\tau \end{pmatrix}. \quad (3.0.2)$$

Ainsi, classiquement, la résistivité transverse,  $\rho_{xy}$ , devrait être linéaire en  $B$ , le champ magnétique et dépendre de la densité électronique  $n$ . Cependant, à très basse température et à fort champ magnétique, où les règles de la physique quantique prévalent, ce comportement linéaire n'est pas observé. Nous constatons plutôt qu'en fonction du champ magnétique, la résistivité transverse est quantifiée [57, 58], tel qu'illustré à la Fig. 3.1(b),

$$\rho_{xy} = \frac{2\pi\hbar}{e^2} \frac{1}{\nu}. \quad (3.0.3)$$



**Fig. 3.1.** (a) Montage expérimental typique de l'effet Hall. Dans l'effet classique, un champ magnétique  $B$  dévie les charges électriques à cause de la force de Lorentz, produisant un champ électrique dans la direction transverse. Une force électrostatique vient balancer la force de Lorentz. On mesure une différence de potentiel  $V_H$  dans la direction transverse. (b) L'effet de Hall quantique entier; la résistivité transverse  $\rho_{xy}$  plafonne à des valeurs  $\nu$  entières. Figure créée à partir des données dans réf. [2].

Ce phénomène est l'effet de Hall quantique. Pour comprendre, nous devons traiter le problème avec la mécanique quantique.

Nous confinons un électron à un tore de grandeur  $L_x \times L_y$ , de sorte que la direction en  $y$  est périodique. La particule est sujette à un champ magnétique  $\mathbf{B} = B\hat{z}$  et nous travaillons dans le jauge de Landau,  $\mathbf{A} = (0, Bx)$ . L'Hamiltonien de ce système est

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{(p_y + eBx)^2}{2m}. \quad (3.0.4)$$

Cet Hamiltonien n'est pas invariant sous translation en  $x$  mais il l'est en  $y$ ,  $[p_y, H] = 0$ , ce qui motive l'ansatz séparable suivant pour la fonction d'onde à une particule,

$$\phi_k(x, y) = e^{iky} f_k(x). \quad (3.0.5)$$

De l'équation de Schrödinger, l'opérateur d'impulsion  $p_y$  fait apparaître sa valeur propre  $\hbar k$ . Nous définissons aussi les deux grandeurs caractéristiques du problème: la fréquence de cyclotron,  $\omega_c = \frac{eB}{m}$ , et la longueur magnétique,  $l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$ ,

$$H\phi_k(x, y) = e^{iky} \left( \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega_c^2}{2} (kl_B^2 + x)^2 \right) f_k(x). \quad (3.0.6)$$

Nous reconnaissons, à droite de l'onde plane, l'équation de Schrödinger pour un oscillateur harmonique en 1D dont le centre est déplacé à  $x = -kl_B^2$ . Les solutions de l'oscillateur harmonique 1D sont bien connues [73]. Nous pouvons donc écrire la solution de l'Hamiltonien de l'électron dans un champ magnétique. Les énergies propres sont  $E_n = \hbar\omega_c(n + \frac{1}{2})$  et les



fonctions d'onde ,

$$\phi_{n,k}(x,y) = A_n e^{iky} H_n(x + kl_B^2) \exp\left(-\frac{(x + kl_B^2)^2}{2l_B^2}\right), \quad n = 0,1,2\dots \quad (3.0.7)$$

Le facteur de normalisation est  $A_n = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{2^n n! l_B L_y}}$  et  $H_n$  dénote les polynômes d'Hermitte.

Confiner la particule au tore impose des conditions de frontières périodiques en  $y$ ,  $\phi_{n,k}(x, y) = \phi_{n,k}(x, y + L_y)$ , et donne la condition de quantification sur  $k$ ,

$$k = \frac{2\pi m}{L_y}, \quad -\frac{L_x L_y}{4\pi} + 1 \leq m \leq \frac{L_x L_y}{4\pi}. \quad (3.0.8)$$

Ce système a une grande dégénérescence, soit  $L_x L_y / (2\pi l_B^2)$  par niveau de Landau. Nous avons donc besoin d'une densité d'électrons  $n = eB/2\pi\hbar$  pour entièrement remplir un niveau de Landau.

Un calcul de coin de table montre qu'en remplissant entièrement un niveau de Landau nous retrouvons bien que la résistivité prend la forme donnée par l'éq. (3.0.3). Il suffit de réintégrer  $n$ , la densité d'électrons par niveau de Landau, dans l'équation de resistivité transverse classique, éq. (3.0.2). Par contre, expérimentalement, la résistivité transverse ne prend pas seulement la valeur (3.0.3). Elle persiste également sur plusieurs valeurs du champ magnétique avant d'augmenter soudainement au prochain plateau. Ce phénomène est dû au désordre; les impuretés dans le système créent des états localisés qui ne transportent pas le courant. Ce n'est que lorsque le niveau de Fermi s'éloigne de la bande élargie que la résistivité change de plateau [81, 82]. En pratique, jusqu'à présent, nous n'avons discuté que des états IQH dans le volume (*bulk*). Lorsque l'échantillon expérimental possède un bord physique, un potentiel de confinement courbe le spectre d'énergie vers le haut et le niveau de Fermi intercepte des niveaux de Landau. Ces états de surface sont porteurs de courant dans une seule direction; on dit qu'ils sont *chiraux*.

Dans le cadre théorique décrit ci-haut, l'argument général est que la résistivité prend des valeurs quantifiées entières en raison du remplissage entier des niveaux de Landau. Pourtant, il est observé expérimentalement que le remplissage  $\nu$  dans l'éq. (3.0.3) admet aussi certaines valeurs fractionnaires (effet FQH) [58].

Depuis sa découverte, l'effet FQH fait l'objet d'innombrables études théoriques (voir par exemple [83] pour une revue). Pour comprendre ce phénomène, il est nécessaire de considérer les interactions entre les électrons. Cependant, contrairement au cas IQH, résoudre ce système analytiquement est très difficile. Pour le cas des remplissages  $1/q$ , avec  $q$  entier impair, l'ansatz de Laughlin est un bon point de départ. Il s'agit d'une fonction d'onde variationnelle qui s'avère être en accord avec des simulations numériques de quelques particules [84]. Cette fonction d'onde est un outil pour comprendre la nouvelle physique qui émerge de l'effet FQH, comme l'ordre topologique et la présence de quasiparticules aux statistiques

fractionnaires, les anyons [85]. Comme nous le verrons, l'intrication est un outil pour étudier ces propriétés exotiques.

Dans l'article présenté au chapitre suivant, nous nous concentrons principalement sur l'intrication d'états IQH car les calculs d'EE et de LN sont réalisables numériquement pour des états à plusieurs corps gaussiens. Cependant, certains de nos résultats généraux s'appliquent autant aux états FQH.

### 3.1. Intrication dans les systèmes de Hall

Tel que mentionné dans l'introduction, la matrice densité réduite capture de l'information sur le système entier à cause de la présence d'intrication. Dans cette section, nous révisons comment extraire une portion de l'information contenue dans la matrice densité réduite de certains états IQH en calculant l'EE. En étudiant la loi d'échelle de l'EE, soit la manière dont l'EE croit avec le système, nous pouvons en apprendre davantage sur la physique qui sous-tend l'effet de Hall, comme les propriétés topologiques et les états de surface. Le calcul d'EE est aussi le point de départ pour calculer la MI et la LN.

Il est simple de construire les fonctions d'ondes IQH à plusieurs corps à partir de la fonction d'onde de Landau pour un électron d'impulsion  $k$ , éq. (3.0.7). Nous remplissons entièrement  $\nu$  niveaux de Landau,  $\nu \in \mathbb{N}$ ,

$$|\Phi_0\rangle = \prod_{k,n<\nu} c_{n,k}^\dagger |0\rangle, \quad (3.1.1)$$

où  $|0\rangle$  dénote le vide de Fock et  $c_{n,k}^\dagger$  crée un électron d'impulsion  $k$  dans le niveau de Landau  $n$ . Rappelons que nous sommes intéressés par la fonction de corrélation à deux-points car son spectre contient l'information sur le spectre de la matrice densité réduite [78]. Nous définissons l'opérateur d'électrons  $\psi(\mathbf{r}) = \sum_{k,n} \phi_{n,k}(\mathbf{r}) c_{n,k}$  et la fonction de corrélation à deux-points est

$$C_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} = \langle \Phi_0 | \psi^\dagger(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}') | \Phi_0 \rangle. \quad (3.1.2)$$

En appliquant l'ordre normal aux opérateurs fermioniques, nous retrouvons

$$C_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} = \sum_{k,n<\nu} \phi_{n,k}^*(\mathbf{r}) \phi_{n,k}(\mathbf{r}'). \quad (3.1.3)$$

Nous travaillons dans la limite thermodynamique,  $L_x, L_y \rightarrow \infty$ , pour obtenir une expression simplifiée de la fonction de corrélation en approximant la somme sur  $k$  comme une intégrale dans la définition (3.1.3). Dans cette limite, la fonction de corrélation deux-points de l'état fondamental avec remplissage  $\nu = 1$  et  $\nu = 2$  est

$$C_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{1}{4}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2 - \frac{i}{2}(x+x')(y-y')} \times \begin{cases} 2, & \nu = 1 \\ 4 - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2, & \nu = 2. \end{cases} \quad (3.1.4)$$

Comme nous l'avons mentionné, pour calculer l'EE avec l'éq.2.3.9, nous devons trouver les valeurs propres de la fonction de corrélation restreinte à la sous-région  $A$ . Dans l'espace réel, nous devons résoudre un problème de valeurs propres fonctionnelles,

$$\int_A d^2\mathbf{r}' \tilde{C}_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} f(\mathbf{r}') = \lambda f(\mathbf{r}), \quad (3.1.5)$$

où  $\tilde{C}_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}$  est défini sur  $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in A$ . Pour des états définis dans le continuum, comme les états IQH, il est plus naturel de reformuler ce problème en une équation matricielle. Nous diagonalisons alors une matrice de chevauchement (*overlap matrix* en anglais) définie dans l'espace des impulsions [23]. Cette matrice est définie à partir des fonctions d'onde à une particule. Ici, elle est restreinte à la sous-région  $A$ ,

$$F_{(n,k),(n',k')} = \int_A d^2\mathbf{r} \phi_{n,k}(\mathbf{r}) \phi_{n',k'}^*(\mathbf{r}), \quad n, n' = 0, \dots, \nu - 1. \quad (3.1.6)$$

Il s'agit d'une matrice bloc de grandeur  $\nu \times \nu$ .

La méthode de matrices de chevauchement a été utilisée pour calculer l'EE d'états IQH purs sous diverses géométries [60, 86] ou encore l'EE de fermions libres en une dimension [87]. Finalement, rappelons que pour calculer la LN, en plus des valeurs propres de la matrice de corrélation, nous avons besoin des valeurs propres d'une matrice de corrélation associée, éq. (2.3.10), tel que présenté à la section 2.3.2. Dans l'article, nous présentons une méthode basée sur les matrices de chevauchement pour calculer ces valeurs propres.

### 3.1.1. Loi d'échelle

La manière dont l'intrication croît dans un système révèle de l'information sur la physique sous-jacente. Considérons la loi d'échelle de l'EE d'un état pur avec un *gap* d'énergie, comme les états de Hall [22],

$$S(A) = c_1 \frac{|\partial A|}{\epsilon} - \gamma_{top} - \gamma_{geo} + \dots \quad (3.1.7)$$

Le premier terme grandit avec la frontière  $|\partial A|$  de la sous-région  $A$ . Il s'agit d'une loi du périmètre. Le coefficient  $c_1$  dépend des détails microscopiques du système à l'étude et  $\epsilon$  est une coupure ultraviolette. Pour des systèmes de Hall, cette coupure est la longueur magnétique,  $l_B$ . Les corrections à la loi du périmètre sont dénotées par  $\gamma$  et les points de suspension désignent les corrections qui sont négligeables quand  $|\partial A| \gg \epsilon$ .

Les corrections  $\gamma$  capturent de l'information universelle, soit indépendante des détails microscopiques du système. La première correction  $\gamma_{top}$  est topologique et la deuxième correction,  $\gamma_{geo}$  est géométrique. La correction topologique fournit un paramètre d'ordre non local pour distinguer l'ordre topologique [24, 27]. Cette correction a été étudiée dans les états de Hall quantiques [29, 88, 89] et dans le code torique [90]. La correction géométrique capture la dépendance angulaire des coins dans la sous-région étudiée [25, 26]. Pour des

systèmes avec un *gap* d'énergie, elle prend la forme

$$\gamma_{\text{geo}} = \sum_i a(\theta_i), \quad (3.1.8)$$

soit une somme des contributions de chaque angle  $\theta$  dans la sous-région étudiée. Comme la correction topologique, cette correction géométrique contient aussi de l'information sur la physique du système. Par exemple, pour des CFTs en 2D, où la correction géométrique est aussi multipliée par un terme logarithmique,  $\gamma_{\text{geo}} = \sum_i a(\theta_i) \ln(|\partial A|/\epsilon)$ , la fonction  $a(\theta)$  contient de l'information sur la charge centrale reliée au tenseur d'énergie-impulsion [91, 92]. De plus, pour plusieurs systèmes qui à priori n'ont rien avoir les uns avec les autres, la dépendance angulaire, à un facteur près, semble presque suivre la même forme universelle [93, 94]. Cependant, pour l'EE, l'origine de l'universalité de la dépendance angulaire est inconnue.

L'intrication d'états de Hall quantiques purs a été fortement étudiée avec l'EE. Pour les états IQH dans le volume (*bulk*), la loi du périmètre est bien établie [23, 95]. Pour des états de surface chiraux, la loi du périmètre apparaît avec une correction logarithmique supplémentaire [86, 96]. La correction topologique, quant à elle, est nulle pour des états IQH [23]. Ceci est en contraste avec les états FQH, où la correction topologique capture la présence d'anyons. Plus précisément, pour les états de Laughlin avec remplissage  $\nu = 1/q$  ( $q$  est un entier impair),  $\gamma_{\text{top}} = \frac{1}{2} \ln(q)$  [29]. Ceci a été vérifié avec des approches de théorie des champs [88] et des approches numériques [89, 97]. Enfin, l'EE d'états IQH purs a également été calculée pour des géométries complexes qui contiennent des coins [60, 86, 98]. Dans le volume, aux remplissages entiers  $\nu = 1$  et  $\nu = 2$ , la contribution géométrique  $a(\theta)$  s'effondre presque sur la même courbe universelle que celle de diverses CFTs [60]. Pour des états FQH, la contribution de coin de la deuxième entropie de Rényi,  $S_2$ , a été calculée avec des simulations de Monte Carlo [99].

Cependant, l'EE d'états de Hall quantiques n'a pas encore été mesurée expérimentalement et l'information physique contenue dans le terme de coin n'est pas bien comprise [60]. Les fluctuations de charge bipartites, une quantité plus simple que l'EE, offrent une voie prometteuse pour de futurs tests expérimentaux. Pour des systèmes sans interactions comme les états IQH, l'EE peut être calculée à partir des cumulants de charge pairs [100]. Une idée similaire est utilisée en transport mésoscopique [101]. Les cumulants de charge sont accessibles expérimentalement [102]. Par exemple, on considère les fluctuations de charge dans une barre de Hall quantique où une tension de grille divise le système, et où il y a un faible effet de tunnel entre les deux moitiés du système. La réf. [103] utilise le deuxième cumulant de charge dans une telle configuration pour calculer l'EE d'un système IQH avec un bord physique.

Les cumulants de charge sont également intéressants car ils donnent des indices sur l'information physique contenue dans le terme de coin de l'EE. Le terme de coin des fluctuations

bipartites,  $a_{\text{fluc}}(\theta)$ , prend la forme suivante

$$a_{\text{fluc}}(\theta) = \alpha (1 + (\pi - \theta) \cot \theta). \quad (3.1.9)$$

Le préfacteur  $\alpha$  contient l'information spécifique au système,  $\alpha = -\int_0^\infty dr r^3 f(r)/2$ , où  $f(r)$  est la fonction de corrélation connectée. La fonction entre parenthèse est la dépendance angulaire universelle. Pour un état IQH de remplissage  $\nu$ , le préfacteur est calculé exactement et est proportionnel à la conductivité de Hall,  $\alpha = \nu/4\pi^2$  [99].

Nous considérons aussi une autre quantité d'intérêt, les fluctuations mutuelles.

$$\mathcal{I}(A_1, A_2) = \mathcal{F}(A_1) + \mathcal{F}(A_2) - \mathcal{F}(A_1 \cup A_2) \quad (3.1.10)$$

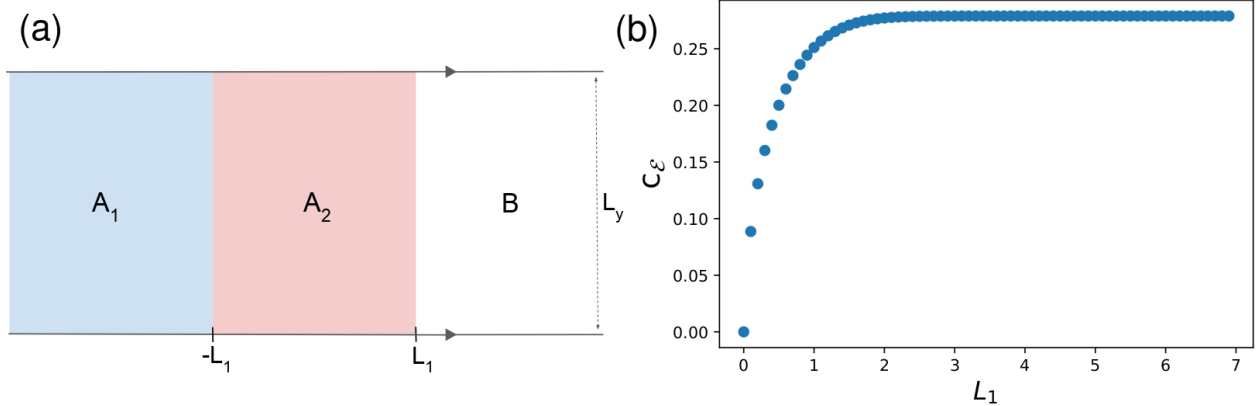
où  $\mathcal{F}(A_1)$  est le deuxième cumulant (la variance) de charge dans la sous-région  $A_1$ . Le lien entre la LN et les fluctuations mutuelles n'est pas étudié comme le lien entre l'EE et les cumulants pairs. Toutefois, dans l'article, nous comparons la LN aux fluctuations de charge mutuelles pour voir s'ils se comportent de manière similaire et si on peut en extraire des indices sur l'information physique contenue dans la LN.

Comme nous l'avons mentionné, pour des états mixtes, l'EE n'est plus une bonne mesure d'intrication puisqu'elle grandit avec le volume et capture des corrélations classiques. La MI élimine la loi du volume et il est bien établie que cette mesure suit une loi du périmètre [37]. Cette dernière a même été vérifiée expérimentalement en une dimension avec des atomes ultra-froids [38]. La LN, quant à elle, mesure l'intrication entre les sous-régions  $A_1$  et  $A_2$  et grandit avec la frontière partagée entre ces deux sous-régions[51]. Elle suit une loi du périmètre. Rappelons que ceci est différent de la loi du périmètre de l'EE qui s'échelonne avec la frontière entre les sous-régions  $A$  et  $B$ , les degrés de liberté de la sous-région  $B$  ayant été tracés. Finalement, comme pour l'EE, les corrections à la loi du périmètre de la LN capturent le comportement topologique [46, 50, 47] ainsi que des contributions géométriques provenant des coins sur la frontière partagée [104].

La MI et la LN d'états de Hall quantiques ont peu été étudiées. La LN bosonique d'états IQH mixtes a été étudiée au niveau de la loi du périmètre en utilisant les matrices de chevauchement [3], ce que nous allons maintenant examiner et comparer au résultat fermionique.

## 3.2. Négativité logarithmique d'états IQH : loi du périmètre

Au niveau de la loi du périmètre, les LNs bosonique et fermionique sont calculées avec les matrices de chevauchement, éq. (3.1.6). Considérons une géométrie adjacente tripartite sur un tore de grandeur  $L_x \times L_y$ , tel que présenté à la Fig. 3.2(a). Les régions sont définies comme  $A_1 \in [-\infty, -L_1]$ ,  $A_2 \in [-L_1, L_1]$  et  $B \in [L_1, \infty]$  en  $x$  et  $[0, L_y]$  en  $y$ . Les matrices



**Fig. 3.2.** (a) Tripartition de l'espace  $A \cup B$  avec  $A = A_1 \cup A_2$  sur un tore. Les régions  $A_1$  et  $A_2$  sont adjacentes. (b) Coefficient de la loi du périmètre de la LN, pour la géométrie dépeinte dans le panneau (a), en fonction de  $L_1$ . La LN fermionique et bosonique [3] donnent le même résultat et plafonne à  $c_\varepsilon = c_{\varepsilon_b} = 0.2789$ .

de chevauchement sont diagonales à cause de la périodicité en  $y$ , avec les valeurs propres suivantes,

$$\begin{aligned}
 f_{A_1}(k) &= \frac{1}{2} (1 + \operatorname{erf}(k - L_1)), \\
 f_{A_2}(k) &= \frac{1}{2} (-\operatorname{erf}(k - L_1) + \operatorname{erf}(k + L_1)), \\
 f_B(k) &= \frac{1}{2} (1 - \operatorname{erf}(k + L_1)).
 \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Quand les matrices de chevauchement sur l'espace  $A_1$ ,  $A_2$  et  $B$  sont simultanément diagonalisables, comme dans cette géométrie, les auteurs de la réf. [3] ont montré que la LN bosonique d'un état de fermions libres peut être calculée via l'équation suivante,

$$\mathcal{E}_b = \sum_k \ln \left( f_{A_1}(k) + f_{A_2}(k) + \sqrt{f_B(k)^2 + 4f_{A_1}(k)f_{A_2}(k)} \right). \tag{3.2.2}$$

Dans la limite thermodynamique, cette équation peut être approximée comme une intégrale,

$$\mathcal{E}_b = \frac{L_y}{2\pi} \int_{-L_x/2}^{L_x/2} \ln \left( f_{A_1}(k) + f_{A_2}(k) + \sqrt{f_B(k)^2 + 4f_{A_1}(k)f_{A_2}(k)} \right) dk. \tag{3.2.3}$$

La LN bosonique d'un état IQH mixte grandit donc avec la frontière partagée entre les sous-régions  $A_1$  et  $A_2$ ,  $\mathcal{E}_b = c_{\varepsilon_b} L_y + \dots$ ; il s'agit d'une loi du périmètre. Le coefficient de la loi du périmètre  $c_{\varepsilon_b}$  peut être calculé numériquement de l'intégrale dans l'éq. (3.2.3). Quand  $L_1 = 0$ , la LN bosonique est nulle. Quand  $L_1 \gg 1$ , le coefficient plafonne à  $c_{\varepsilon_b} = 0.2789$ , soit le résultat attendu pour un état pur bipartite (il s'agit du coefficient de la loi du périmètre de l'entropie de Rényi 1/2. Voir l'annexe A de l'article). Dans la limite où  $L_1 \gg 1$ , la région  $B$  est très éloignée de la frontière entre les régions  $A_1$  et  $A_2$ . Il est donc naturel que

le système se comporte comme un système pur bipartite. D'un point de vue mathématique, les matrices  $\Gamma_+$  et  $\Gamma_-$  commutent pour un état gaussien fermionique pur puisque  $\Gamma^2 = \mathbb{I}$ . Nous retrouvons bien que  $[\Gamma_+, \Gamma_-] = 0$  dans la limite  $L_1 \rightarrow \infty$ .

Tournons-nous maintenant vers le calcul de la LN fermionique en suivant la méthode des matrices de chevauchement. La LN fermionique est calculée à partir des valeurs propres des matrices de corrélation  $C$  et  $C_\times$  avec l'éq. (2.3.11). Des détails sur la procédure pour trouver les valeurs propres à partir des matrices de chevauchement sont présentés dans la section 4.4.2 de l'article. En travaillant dans la limite thermodynamique, nous trouvons que la LN fermionique suit aussi une loi du périmètre :  $\mathcal{E} = c_{\mathcal{E}} L_y + \dots$ . Les résultats numériques pour le coefficient de la loi du périmètre sont présentés à la Fig. 3.2(b). Dans la limite où  $L_1 \gg 1$ , il est naturel d'obtenir  $c_{\mathcal{E}} = 0.2789$ , soit le même coefficient que pour la LN bosonique, puisque  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_b = S_{1/2}$  pour un état pur bipartite. Cependant, nous trouvons que  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_b$  pour toutes valeurs de  $L_1$ . Ceci est en accord avec la version plus stricte de l'inégalité présentée au chapitre 2,  $\mathcal{E}_b \leq \mathcal{E}$ .

Pour des géométries plus complexes, comme celles qui possèdent des coins, les matrices de chevauchement sur les différentes régions ne commutent pas et l'éq. (3.2.2) n'est plus valide. Dans ce cas, nous ne pouvons pas utiliser la méthode de réf.[3] pour calculer la LN bosonique et comparer au résultat fermionique. Ainsi, dans l'article présenté au prochain chapitre, nous nous concentrons sur les corrections à la loi du périmètre de la LN fermionique.





## Chapitre 4

---

# Entanglement negativity versus mutual information in the quantum Hall effect and beyond

Par Chia-Chuan Liu, Juliette Geoffrion et William Witczak-Krempa

Disponible sur ArXiv : <https://arxiv.org/abs/2208.12819>

En arbitrage dans la revue PRX QUANTUM

**Abstract.** We study two entanglement measures in a large family of systems including incompressible quantum Hall states: the logarithmic negativity (LN), and mutual information (MI). For pure states, obtained for example from a bipartition at zero temperature, these provide distinct characterizations of the entanglement present between two spatial subregions, while for mixed states (such as at finite temperature) only the LN remains a good entanglement metric. Our focus is on regions that have corners, either adjacent or tip-touching. We first obtain non-perturbative properties regarding the geometrical dependence of the LN and MI in a large family of isotropic states, including fractional quantum Hall states. A close similarity is observed with mutual charge fluctuations, where super-universal angle dependence holds. For the MI, we can make stronger statements due to strong subadditivity. We give ramifications of our general analysis to conformal field theories (CFTs) in two spatial dimensions. We then explicitly verify these properties with integer quantum Hall states. To do so we develop two independent approaches to obtain the fermionic LN, which takes into account Fermi statistics: an overlap-matrix method, and a real-space lattice discretization. At finite temperature, we find a rapid decrease of the LN well inside the cyclotron gap at integer fillings. We further show that the LN decays faster compared to the MI at high temperatures.

## 4.1. Introduction

The study of how entanglement is organized in complex many-body systems has led to new insights into quantum matter, ranging from the identification of topological states [24, 27, 105] to providing signatures for many-body localized systems [106, 107, 108]. Numerous approaches are based on the reduced density matrix of a subregion, and more particularly on the von Neumann entanglement entropy (EE). The EE quantifies the amount of quantum entanglement between two subregions on a bipartite geometry for pure states, such as groundstates. However, the EE does not correctly measure entanglement for mixed states, for instance thermal states, since it also contains classical correlations. Indeed, the EE, which usually obeys a boundary law in groundstates, reduces to the classical entropy at sufficiently high temperatures with its volume-law scaling. The mutual information (MI) between non-overlapping subregions  $A_1$  and  $A_2$  eliminates the volume law, but can still be polluted by classical correlations between the subregions. A quantity similar to the MI but with the advantage of only capturing entanglement, even for mixed states, is the logarithmic negativity (LN) [39, 40]. It is obtained from a transposition of the density matrix  $\rho_{A_1 A_2}$  only on one of the subregions, say  $A_1$ . In operational terms, it serves as an upper bound for distillable entanglement [39], i.e. the number of Bell pairs one can extract from multiple copies of the state  $\rho_{A_1 A_2}$ . The LN has been studied, among others, for topological phases [46, 50, 47, 48], and quantum critical systems [104, 109, 68, 52, 110].

In this work, we study the LN in a large class of states and geometries, and compare our findings with the MI, as well as a simpler quantity, mutual fluctuations. In particular, we focus on isotropic states, such as incompressible quantum Hall states, or quantum critical states including conformal field theories (CFTs). We briefly discuss separated subregions, and then move on to various geometries with two corners that touch, either via an edge or the vertex. By using general considerations, such as the presence of a boundary law for adjacent subregions or the strong subadditivity (SSA) for the EE, we obtain numerous non-perturbative results for the angle dependence. We then verify our findings using integer quantum Hall (IQH) states at various fillings and temperatures. In doing so, we develop two distinct methods: a momentum overlap-matrix method, as well as real-space discretization method. The former is very accurate at low temperatures, whereas the latter is useful at finite temperatures. Interestingly, at finite temperature, we find a marked reduction of the LN well below the cyclotron gap, which is proportional to the applied magnetic field.

The rest of the paper is organized as follows. In Sec. 4.2, we introduce the notion of the partial transpose by which the LN is defined. In Sec. 4.3, we obtain the non-perturbative results regarding the geometrical dependence of the LN (both bosonic and fermionic), MI and mutual fluctuations. We explain the methodology of the numerical calculations for IQH states in Sec. 4.4. Sec. 4.5 shows the corner dependences of the LN and the MI on various

tripartite geometries and fillings at zero temperature. Finally, in Sec. 4.6, we study the temperature dependence of the LN and MI.

## 4.2. Logarithmic negativity

### 4.2.1. Bosonic and fermionic partial transpose

Let  $\rho$  be the density matrix of a quantum system defined on a region  $A \cup B$ . The reduced density matrix  $\rho_A$  defined on subsystem  $A$  is  $\rho_A = \text{Tr}_B \rho$ . The Rényi entropy of index  $n > 0$  for  $A$  is defined as  $S_n(A) = \frac{1}{1-n} \log \text{Tr}(\rho_A^n)$ . The EE,  $S(A) = -\text{Tr} \rho_A \ln \rho_A$ , follows from the limit  $n \rightarrow 1$ . Suppose we further divide subregion  $A$  into two subregions  $A_1$  and  $A_2$  so that  $A = A_1 \cup A_2$ . The reduced density matrix  $\rho_A$  can be expressed as

$$\rho_A = \sum_{ijkl} \langle e_i^{(1)}, e_j^{(2)} | \rho_A | e_k^{(1)}, e_l^{(2)} \rangle | e_i^{(1)}, e_j^{(2)} \rangle \langle e_k^{(1)}, e_l^{(2)} | \quad (4.2.1)$$

where  $|e_i^{(1)}\rangle$  and  $|e_j^{(2)}\rangle$  denote orthonormal bases in the Hilbert spaces  $\mathcal{H}_1$  and  $\mathcal{H}_2$  corresponding to the  $A_1$  and  $A_2$  regions, respectively. The bosonic partial transpose (PT) with respect to  $A_1$  is

$$(|e_i^{(1)}, e_j^{(2)}\rangle \langle e_k^{(1)}, e_l^{(2)}|)^{T_1} = |e_k^{(1)}, e_j^{(2)}\rangle \langle e_i^{(1)}, e_l^{(2)}| \quad (4.2.2)$$

and the reduced density matrix  $\rho_A^{T_1}$  after the bosonic PT becomes

$$\rho_A^{T_1} = \sum_{ijkl} \langle e_k^{(1)}, e_j^{(2)} | \rho_A | e_i^{(1)}, e_l^{(2)} \rangle | e_i^{(1)}, e_j^{(2)} \rangle \langle e_k^{(1)}, e_l^{(2)}|. \quad (4.2.3)$$

The LN  $\mathcal{E}_b$  defined via the bosonic PT above is [39, 40]

$$\mathcal{E}_b = \ln \text{Tr} \sqrt{\rho_A^{T_1} (\rho_A^{T_1})^\dagger}. \quad (4.2.4)$$

It does not depend on whether we perform the partial transpose on subregion  $A_1$  or  $A_2$ .

If the reduced density matrix  $\rho_A$  is separable, including mixed states,  $\mathcal{E}_b$  vanishes [34, 32]. Such a separability criterion, known as the positive partial transpose (PPT) criterion, implies that a non-vanishing  $\mathcal{E}_b$  is a sufficient condition for the presence of quantum entanglement. For pure state density matrices,  $\mathcal{E}_b$  equals the Rényi entropy at index one-half,  $S_{1/2}(A_1) = 2 \ln \text{Tr} \sqrt{\rho_{A_1}} = S_{1/2}(A_2)$  [39]. However, for mixed states, this relation does not hold anymore. Moreover, unlike the Rényi entropy and the EE, for mixed states,  $\mathcal{E}_b$  (4.2.4) is an entanglement monotone that does not increase under local operations and classical communications (LOCC) [39, 40]. Therefore, it can measure quantum entanglement even if the density matrix  $\rho_A$  describes a mixed state.

However, for fermionic systems, the LN defined via the bosonic PT (4.2.3)  $\mathcal{E}_b$  ignores sign changes that appear due to exchanging fermions which leads to certain limitations. For one, for a gaussian density matrix, the partial transpose leads to a non-gaussian density matrix

[53], which makes evaluating the LN a difficult task [43]. Furthermore, in some cases, applying the bosonic PT to fermionic systems underestimates the true degree of entanglement since it allows operations that violate fermionic number conservation to reduce the entanglement [55]. To remedy these limitations, one can define a fermionic version of the LN, that we denote  $\mathcal{E}$ , with the so-called fermionic PT [55]. Consider the element of a density matrix in the coherent state basis  $|\{\xi_j\}\rangle = e^{-\sum_j \xi_j f_j^\dagger} |0\rangle$ , where  $f_j^\dagger$  is a fermionic creation operator and  $\xi_j$  is a Grassman variable. The fermionic PT transforms elements in the following manner:

$$\begin{aligned} U_{A_1} \left( |\{\xi_j\}_{j \in A_1}, \{\xi_j\}_{j \in A_2}\rangle \langle \{\bar{\chi}_j\}_{j \in A_1}, \{\bar{\chi}_j\}_{j \in A_2}| \right)^{\mathcal{T}_1} U_{A_1}^\dagger \\ = |\{i\bar{\chi}_j\}_{j \in A_1}, \{\xi_j\}_{j \in A_2}\rangle \langle \{i\xi_j\}_{j \in A_1}, \{\bar{\chi}_j\}_{j \in A_2}|, \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

where  $U_{A_1}$  is a unitary operator on subsystem  $A_1$  related to the time-reversal operator. In the rest of the paper, we focus on  $\mathcal{E}$  defined by the fermionic PT, Eq. (4.2.5). It has been proven that in this case, the LN  $\mathcal{E}$  is still an entanglement monotone and satisfies the separability criterion [1]. For any bipartite pure state, the bosonic and fermionic LN are equal, that is,  $\mathcal{E}(A, B) = \mathcal{E}_b(A, B) = S_{1/2}(A) = S_{1/2}(B)$  [111]. However, for mixed states on  $A \cup B$ , the bosonic and fermionic LN generally differ, with the fermionic LN acting as an upper bound to the bosonic one in the gaussian case [74, 70].

Consider the fermionic PT (4.2.5) in the Majorana basis. Let  $\{m_1, m_2, \dots, m_{2k}\}$  and  $\{n_1, n_2, \dots, n_{2l}\}$  denote the indices of Majorana operators  $a_x$  belonging to the subsystems  $A_1$  and  $A_2$  respectively, and introduce the notation  $a_x^0 = 1$  and  $a_x^1 = a_x$ . The density matrix  $\rho_A$  for a fermionic state on  $A = A_1 \cup A_2$  can be expressed in term of Majorana operators as

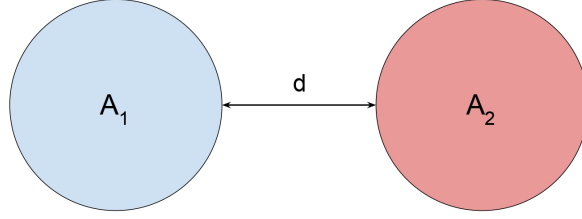
$$\rho_A = \sum_{\substack{\underline{\kappa}, \underline{\tau}, \\ |\kappa| + |\tau| = \text{even}}} w_{\underline{\kappa}, \underline{\tau}} a_{m_1}^{\kappa_1} \dots a_{m_{2k}}^{\kappa_{2k}} a_{n_1}^{\tau_1} \dots a_{n_{2l}}^{\tau_{2l}} \quad (4.2.6)$$

where  $\underline{\kappa} = (\kappa_1, \dots, \kappa_{2k})$  and  $\underline{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_{2l})$  in the summation run over all bit-strings of length  $2k$  and  $2l$ , respectively, and  $|\kappa| = \sum_i |\kappa_i|$ . Note that since physical fermionic density operators must commute with the total fermion-parity operator, one has  $w_{\underline{\kappa}, \underline{\tau}} = 0$  when  $\sum_i \kappa_i + \sum_j \tau_j$  is odd. Based on the expression (4.2.6), the density matrix  $\rho_A$  transforms under the fermionic PT (4.2.5) on  $A_1$  as

$$\rho_A^{\mathcal{T}_1} = \sum_{\substack{\underline{\kappa}, \underline{\tau}, \\ |\kappa| + |\tau| = \text{even}}} i^{|\kappa|} w_{\underline{\kappa}, \underline{\tau}} a_{m_1}^{\kappa_1} \dots a_{m_{2k}}^{\kappa_{2k}} a_{n_1}^{\tau_1} \dots a_{n_{2l}}^{\tau_{2l}}. \quad (4.2.7)$$

For later convenience, we introduce another normalized composite density operator  $\rho_\times$ :

$$\rho_\times = \frac{\rho_A^{\mathcal{T}_1} \left( \rho_A^{\mathcal{T}_1} \right)^\dagger}{Z_\times} \quad (4.2.8)$$



**Fig. 4.1.** Subregions  $A_1$  and  $A_2$  are separated by a distance  $d$ . The complement of  $A_1 \cup A_2$  is  $B$ .

where  $Z_\times = \text{Tr}(\rho_A^{\mathcal{T}_1}(\rho_A^{\mathcal{T}_1})^\dagger) = \text{Tr} \rho_A^2$ , so that the LN defined via the fermionic PT (4.2.5) can be expressed as [70]

$$\mathcal{E} = \ln \text{Tr} \sqrt{\rho_A^{\mathcal{T}_1} (\rho_A^{\mathcal{T}_1})^\dagger} = \ln \text{Tr} \rho_\times^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \ln \text{Tr} \rho_A^2. \quad (4.2.9)$$

### 4.3. General considerations

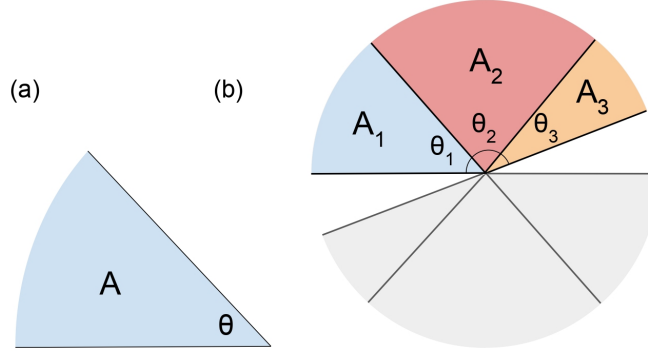
We will describe salient features of the LN,  $\mathcal{E}(A_1, A_2)$ , and MI,  $I(A_1, A_2) = S(A_1) + S(A_2) - S(A_1 \cup A_2)$ , in a large class of isotropic states, including incompressible quantum Hall groundstates. Our general results apply equally well to the fermionic definition of the LN  $\mathcal{E}$ , Eq. (4.2.9), and to the bosonic one  $\mathcal{E}_b$ , Eq. (4.2.4). We compare the LN and MI with a simpler quantity: the mutual fluctuations

$$\mathcal{I}(A_1, A_2) = \mathcal{F}(A_1) + \mathcal{F}(A_2) - \mathcal{F}(A_1 \cup A_2) \quad (4.3.1)$$

where  $\mathcal{F}(A_1)$  gives the bipartite fluctuations or variance of the charge in region  $A_1$ . For simplicity, we shall also assume that the system has a non-degenerate groundstate, which holds for topologically ordered quantum Hall states on the plane or sphere. The reason is that we want to avoid a superposition of degenerate groundstates, which can lead to a non-zero MI for widely separated regions  $A_1$  and  $A_2$  [112]. This being said, even when the state is in a superposition of degenerate groundstates on the torus, say, most of our conclusions are readily adapted since we focus on geometric properties.

#### 4.3.1. Separated regions

The LN and MI will decrease when the separation between  $A_1$  and  $A_2$  increases. In scale invariant states, like quantum critical ground states (an example being CFTs), this will necessarily occur as a power law. For quantum Hall groundstates, the decay will be exponential due to the gap. Let  $d$  be the scale that determines the separation between subregions  $A_1$  and  $A_2$ , as depicted in Fig. 4.1. We then expect  $\mathcal{E} = \mathcal{O}(\exp(-\zeta d))$ , where  $\zeta$  is a positive coefficient inversely proportional to the gap. For IQH groundstates at any integer filling  $\nu$ , one can go a step further. For the mutual fluctuations of charge, it is easy to see



**Fig. 4.2.** Partitions with corners. (a) Subregion  $A$  with a single corner of angle  $\theta$ ; the complement  $B$  is the corner of angle  $2\pi - \theta$ . (b) The regions  $A_{1,2,3}$  are used to show that the corner function for the EE,  $a(\theta)$ , is convex. The inversion of  $A_1$  is shown in grey; the union of  $A_1$  and its inverse form an hourglass with tip-touching corners. Similarly for  $A_2$  and  $A_3$ .

that they decay with a Gaussian envelope  $\exp\left(-\frac{1}{2}(d/l_B)^2\right)$ , where we have reinstated the magnetic length. This occurs due to the Gaussian decay of the electronic Green's function  $C_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}$ . Numerically, we observe that the LN also has such a Gaussian envelope at large separations  $d$ , thus decaying much faster than the naive guess  $\exp(-\zeta d)$ . It is indeed easy to see that when the Green's function vanishes between regions  $A_1$  and  $A_2$ ,  $C_{12} \simeq 0$ , the LN vanishes (see Appendix B). At large but finite separations, the Green's function between regions 1 and 2,  $C_{12}$ , has Gaussian-suppressed matrix elements, and these will lead to a finite Gaussian-suppressed LN.

We now turn to geometries with sharp corners, and examine the resulting angle-dependence. We obtain numerous non-perturbative results that reveal a similar structure among all three quantities.

### 4.3.2. Single corner

Let us first examine the simpler case of a subregion with a single corner before turning to the case of two corners. For the geometry in Fig. 4.2(a), the EE can be expanded as follows in the large  $|A|$  limit:

$$S(A) = \alpha_0|A| + c_1|\partial A| - a(\theta) - \gamma + \dots \quad (4.3.2)$$

where  $a(\theta)$  is the corner contribution, which vanishes at  $\pi$ ;  $\gamma$  denotes a topological contribution, while the dots correspond to subleading terms that vanish as the length of the boundary diverges. An analogous expansion holds for the Rényi entropies, and bipartite fluctuations. The corner term has been extensively studied including in quantum critical states (especially CFTs), [76, 94, 113, 114, 115, 116, 61, 93, 117, 118] and topological

phases [98, 60, 99]. We can use SSA to show that the EE single-corner term is convex

$$a''(\theta) \geq 0, \quad (4.3.3)$$

which was numerically observed in Ref. [60] for IQH groundstates at fillings  $\nu = 1, 2$ , as well as for an excited state at unit filling. The argument is adapted and generalized from the one given for the groundstates CFTs in (2+1) spacetime dimensions [94]. Let us consider three adjacent corners  $A_1, A_2, A_3$  of angles  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ , respectively, as shown in Fig. 4.2(b). SSA can be formulated as the following inequality:  $S(A_1 + A_2 + A_3) + S(A_2) \leq S(A_1 + A_2) + S(A_2 + A_3)$ . First, the volume and boundary law terms cancel. Second, since all the combinations of subregions appearing in the inequality have the same topology, the topological terms also cancel. One is then left with the following inequality for the corner terms:

$$a(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) - a(\theta_1 + \theta_2) \geq a(\theta_2 + \theta_3) - a(\theta_2). \quad (4.3.4)$$

Taking first  $\theta_3 \rightarrow 0$ , leads to  $a'(\theta_1 + \theta_2) \geq a'(\theta_2)$ . Finally, taking  $\theta_1 \rightarrow 0$  leads to convexity:  $a''(\theta) \geq 0$  for all angles  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

Let us now momentarily restrict ourselves to states that are pure on the entire space  $A \cup B$ . This leads to the complementarity relation  $S(A) = S(B)$ , which implies  $a(2\pi - \theta) = a(\theta)$ . We can also show that  $a(\theta)$  is strictly decreasing for angles less than  $\pi$  by setting  $\theta_1 = 2\pi - 2\theta_2$  in (4.3.4), with  $0 \leq \theta_2 \leq \pi$ . Combining this with the complementarity, and taking  $\theta_3 \rightarrow 0$  yields  $a'(\theta) \leq 0$  for  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Now, since  $a(\pi) = 0$ , this shows that the corner function is non-negative  $a(\theta) \geq 0$ . Summarizing, for pure states,

$$a(\theta) \geq 0, \quad a'(0 \leq \theta \leq \pi) \leq 0, \quad a(\theta) = a(2\pi - \theta). \quad (4.3.5)$$

For all states, the corner function vanishes in the absence of a corner,  $a(\pi) = 0$ . Since this limit is not singular, we can Taylor expand about  $\pi$ . For pure states, only even powers appear due to complementarity:

$$a(\theta) = \sigma (\theta - \pi)^2 + \sigma' (\theta - \pi)^4 + \dots, \quad (4.3.6)$$

where  $\sigma \geq 0$  due to convexity. For general states (including mixed ones), odd powers cannot be ruled out from the current analysis. In that case, we nevertheless have  $\sigma \geq 0$  since convexity holds for general density matrices.

In the opposite limit of small angles,  $\theta \rightarrow 0$ , the EE  $S(A)$  must be decreasing since the amount of entanglement or correlations is limited by the degrees of freedom in  $A$ . However, in the pie-shape geometry of Fig. 4.2(a), the boundary law contribution is not changing. The corner term must thus *effectively* counteract it:  $a(\theta \rightarrow 0) \sim |\partial A|/\delta_{\text{eff}}$ , where  $\delta_{\text{eff}}$  is an effective short-distance cutoff proportional to  $\theta \ll 1$ :  $\delta_{\text{eff}} \sim \theta L$ , where  $|\partial A| = 2L$  is the fixed

perimeter of the subregion. We thus have

$$a(\theta \rightarrow 0) = \frac{\kappa}{\theta} \quad (4.3.7)$$

where  $\kappa > 0$  is a state-dependent coefficient. Precisely the same divergence will occur as  $\theta \rightarrow 2\pi$  since in that limit the corner term also effectively acts to cancel the boundary law. This behaviour was numerically confirmed for IQH groundstates at fillings  $\nu = 1, 2$  as well as for an excited state, and the  $\kappa$  coefficient was obtained [60]. A diverging corner contribution was also obtained for the 2nd Rényi entropy  $S_2$  for a fractional quantum Hall state at filling  $\nu = 1/2$  for bosons [99].

In the case of bipartite fluctuations  $\mathcal{F}(A)$ , we have an expansion as in Eq. (4.3.2) but the corner term possesses a super-universal angle dependence [99]

$$a_{\text{fluc}}(\theta) = \alpha (1 + (\pi - \theta) \cot \theta) \quad (4.3.8)$$

where the state-dependent information is entirely encoded in the coefficient  $\alpha = -\int_0^\infty dr r^3 f(r)/2$ , with  $f$  being the connected correlation function. We find the same small-angle divergence as in Eq. (4.3.7), but with  $\kappa_{\text{fluc}} = \pi\alpha$ .

When the two regions share a boundary of length  $L_{\text{shared}}$ , the LN, MI and fluctuations will scale with the length of the boundary. For the MI, this follows from the fact that volume law contributions are cancelled, leaving behind the boundary law contributions along the shared boundary. For example, for the LN in a pure state, when  $A \cup B$  is the entire system, we will get  $\mathcal{E} = S_{1/2}(A) = S_{1/2}(B) = c_{1/2}L_{\text{shared}} + \dots$ , which is dominated by the boundary law. For the geometry where  $A$  is a corner of angle  $\theta$  and  $B$  is the complementary corner, as depicted in Fig. 4.2(a), the LN, MI and mutual fluctuations will scale as

$$\mathcal{E}(A, B) = c_{\mathcal{E}}L_{\text{shared}} - a^{\mathcal{E}}(\theta), \quad (4.3.9)$$

$$I(A, B) = 2c_1L_{\text{shared}} - a^I(\theta), \quad (4.3.10)$$

$$\mathcal{I}(A, B) = 2c_{\text{fluc}}L_{\text{shared}} - a^{\mathcal{I}}(\theta) \quad (4.3.11)$$

where we have omitted subleading terms. For the MI, we can express the corner term in terms of the one appearing in the EE:  $a^I(\theta) = a(\theta) + a(2\pi - \theta)$ ; we have an analogous relation for mutual fluctuations  $a^{\mathcal{I}}$ . When the angle approaches zero, the same argument as above yields a pole for all three quantities:

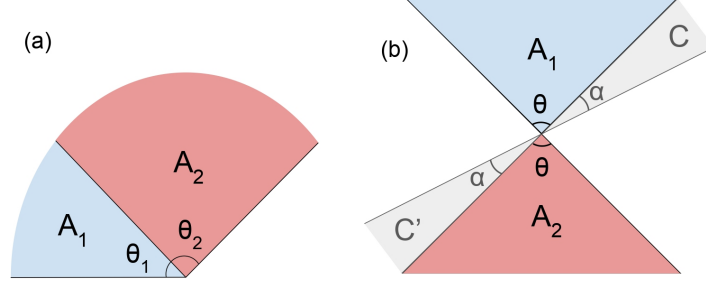
$$\mathcal{E}, I, \mathcal{I} \rightarrow \{\kappa^{\mathcal{E}}, \kappa^I, \kappa^{\mathcal{I}}\}/\theta. \quad (4.3.12)$$

If the state is pure on  $A \cup B$ , then the LN is given by the 1/2 Rényi entropy

$$\mathcal{E}(A, B) = S_{1/2}(A) = c_{1/2}L_{\text{shared}} - a_{1/2}(\theta) \quad (4.3.13)$$

so that  $\kappa^{\mathcal{E}} = \kappa_{1/2}$ .





**Fig. 4.3.** Geometries where two corners,  $A_1$  and  $A_2$ , touch. (a) The corners of angle  $\theta_1$  and  $\theta_2$  touch along an edge. (b) In this symmetric hourglass geometry, two corners have the same angle, and the geometry possesses an inversion symmetry about the apex. The grey regions  $C, C'$  are used to show that the hourglass MI is monotonically increasing with  $\theta$ .

### 4.3.3. Adjacent corners

Let us now consider the case when two corners of angles  $\theta_1$  and  $\theta_2$  are adjacent, as illustrated in Fig. 4.3(a). There will be a new subleading corner term for mutual measures between  $A_1$  and  $A_2$ :

$$\mathcal{E} = c_{\mathcal{E}} L_{\text{shared}} - b(\theta_1, \theta_2) + \dots \quad (4.3.14)$$

$$I = 2c_1 L_{\text{shared}} - b^I(\theta_1, \theta_2) + \dots \quad (4.3.15)$$

$$\mathcal{I} = 2c_{\text{fluc}} L_{\text{shared}} - b^{\mathcal{I}}(\theta_1, \theta_2) + \dots \quad (4.3.16)$$

where

$$b^I(\theta) = a(\theta_1) + a(\theta_2) - a(\theta_1 + \theta_2) \quad (4.3.17)$$

with the analogous equation for  $b^{\mathcal{I}}$  in terms of  $a_{\text{fluc}}(\theta)$ , Eq. (4.3.8). When the shared boundary possesses more than one such corner, a sum over the corners appears,  $\sum_i b(\theta_1^{(i)}, \theta_2^{(i)})$  for the LN, similarly for the MI and mutual fluctuations.

We shall now describe some limits in order to better understand the adjacent corner terms. When one of the angles, say  $\theta_1$ , approaches zero, the entire LN  $\mathcal{E}$  should decrease since  $A_1$  is becoming vanishingly small, leading to fewer degrees of freedom, and so the amount of entanglement and correlations between  $A_1$  and  $A_2$  should correspondingly decrease. In fact, since the boundary law is not changing, the corner term  $b$  has to grow in a way to effectively cancel the boundary law contribution. We thus expect  $b(\theta_1, \theta_2) \sim L_{\text{shared}}/\delta_{\text{eff}}$ , where  $\delta_{\text{eff}}$  is an effective cutoff that encodes the width of the shrinking region  $A_1$ . We can estimate  $\delta_{\text{eff}} \sim L_{\text{shared}}\theta_1$ , which leads to  $1/\theta_1$  divergence:

$$b(\theta_1 \rightarrow 0, \theta_2) = k_{\text{adj}}/\theta_1 \quad (4.3.18)$$

where  $k_{\text{adj}} > 0$  is a state-dependent coefficient that is independent of  $\theta_2$  since the latter remains finite,  $\theta_2/\theta_1 \rightarrow \infty$ . Similarly, for the MI and mutual fluctuations we have

$$b^I(\theta_1 \rightarrow 0, \theta_2) = \frac{\kappa}{\theta_1}, \quad b^{\mathcal{I}}(\theta_1 \rightarrow 0, \theta_2) = \frac{\kappa_{\text{fluc}}}{\theta_1} \quad (4.3.19)$$

where we have used that  $\kappa_{\text{adj}} = \kappa$  and  $\kappa_{\text{fluc}}^{\text{adj}} = \kappa_{\text{fluc}}$  are the single-corner coefficients in the small angle limit.

Furthermore, when the two adjacent angles add to  $\pi$ ,  $b(\theta, \pi - \theta)$  will be even about  $\pi/2$  due to the symmetry exchanging the two corners. Owing to the divergences at  $\theta = 0$  and  $\pi$ , we thus expect a minimum at  $\theta = \pi/2$ . The entire LN is indeed expected to be maximal when both regions have the same size compared to the case where one of the regions is depleted at the expense of the other (thus possessing less degrees of freedom that can become entangled). Deviating from  $\theta = \pi/2$ , should thus lead to an increase of  $b$ , and a corresponding decrease of the LN (same for  $I$  and  $\mathcal{I}$ ). This point being non-singular, we can thus expand in even powers about  $\pi/2$ :

$$b(\theta, \pi - \theta) = b\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + \sigma_{\mathcal{E}}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \sigma'_{\mathcal{E}}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)^4 + \dots \quad (4.3.20)$$

with state-dependent coefficients  $\sigma_{\mathcal{E}}, \sigma'_{\mathcal{E}}$ . The minimum requirement at  $\pi/2$  leads to a positivity constraint,  $\sigma_{\mathcal{E}} \geq 0$ . The above properties can be shown to hold explicitly for mutual fluctuations  $\mathcal{I}$ . For the MI, we can show convexity on general grounds for all angles:

$$\partial_{\theta}^2 b^I(\theta, \pi - \theta) = \partial_{\theta}^2 (a(\theta) + a(\pi - \theta)) \geq 0 \quad (4.3.21)$$

which follows from convexity of the single-corner term  $a''(\theta) \geq 0$ , Eq. (4.3.3). When combining the convexity with the reflection symmetry about  $\pi/2$  and the divergences at  $\theta = 0, \pi$ , we conclude that  $b^I(\theta, \pi - \theta)$  indeed has a minimum at  $\pi/2$ . Moreover, this also means that  $b^I(\theta, \pi - \theta)$  is decreasing on  $[0, \pi/2]$ :

$$\partial_{\theta} b^I(\theta, \pi - \theta) \leq 0. \quad (4.3.22)$$

In the case where the state is pure on the entire space, the above inequality follows directly from Eq. (4.3.5).

#### 4.3.4. Hourglass

We now consider a geometry where the two corners are tip-touching, instead of adjacent, as shown Fig. 4.3(b). This geometry has the advantage of removing the boundary law contribution. For simplicity, we shall consider the case of the symmetric hourglass. For the MI, we have

$$I(\theta) = a_{\times}(\theta) - 2a(\theta) \quad (4.3.23)$$

where  $a_{\times}(\theta)$  is a new corner term associated with the hourglass, whereas  $a(\theta)$  is the usual corner coefficient of a single corner of angle  $\theta$ , Eq. (4.3.2). The same structure arises for fluctuations.

As the angle  $\theta$  approaches zero, we expect the LN and MI to vanish because most parts of region  $A_1$  become very distant from  $A_2$ . For instance, in quantum Hall states, the parts of regions  $A_1$  and  $A_2$  that are within a magnetic length of the apex are shrinking to zero, which excludes sharing entanglement or correlations. By positivity of the LN and MI, we then conclude that  $\mathcal{E}'(\theta), I'(\theta) \geq 0$  at small angles.

In the opposite limit,  $\theta \rightarrow \pi$ , the boundary of  $A_1$  becomes very close to that of  $A_2$ . This will mean that the LN and MI should start being dominated by an effective boundary law  $\sim L_{\text{shared}}/\delta$ , where  $L_{\text{shared}}$  is the length of the shared boundary at  $\theta = \pi$ . Since the regions are not touching,  $\delta$  is not the magnetic length as in the adjacent case, but rather a measure of separation between the two subregions. A simple geometric estimate gives  $\delta/L_{\text{shared}} \sim (\pi - \theta)$ , which gives a pole at  $\pi$ :

$$\mathcal{E}(\theta \rightarrow \pi) = \frac{k_{\times}}{\pi - \theta}, \quad (4.3.24)$$

$$I(\theta \rightarrow \pi) = \frac{\kappa_{\times}}{\pi - \theta} \quad (4.3.25)$$

where  $k_{\times}, \kappa_{\times} > 0$  are state-dependent coefficients.

Furthermore, for pure states on the entire space we can deduce the coefficient  $\kappa_{\times}$  from the single-corner function  $a(\theta)$ :

$$\kappa_{\times} = 2\kappa. \quad (4.3.26)$$

The argument is the following. The corner function  $a(\theta)$  vanishes in the  $\theta \rightarrow \pi$  limit, so that  $I(\theta) \approx a_{\times}(\theta)$ . Now, if the density matrix on the entire space is pure, we have the complementarity relation  $a_{\times}(\theta) = a_{\times}(\pi - \theta)$ , which holds true for all  $\theta$ . When  $\theta \rightarrow \pi$ , the complementary hourglass function  $a_{\times}(\pi - \theta)$  is evaluated for small angles. In that limit, we expect the contributions from both halves of the hourglass to decouple due to increasing spatial separation, leading to  $a_{\times}(\bar{\theta}) = 2a(\bar{\theta}) = 2\kappa/\bar{\theta}$ , where  $\bar{\theta} = \pi - \theta \ll 1$ . We shall see that the relation (4.3.26) indeed holds for IQH states. It was also found to hold for certain large- $N$  supersymmetric CFTs described by the holographic AdS/CFT duality [119].

Knowing that the LN and MI both increase at small and large angles (the latter due to the divergence at  $\pi$ , Eq. (4.3.25)), we can inquire about what happens at intermediate angles. It is natural to expect both the LN and MI to increase monotonically for all  $\theta$ . It can in fact be proved for all angles for the MI by using SSA:  $I(A,BC) \geq I(A,B)$ , where the subregions  $A, B, C$  are embedded in the entire system. Consider the case  $A = A_1$ ,  $B = A_2$  and  $C'$  is a pie-shaped region of angle  $\alpha$  adjacent to  $A_2$ . We also introduce  $C$ , which is a pie-shaped region of angle  $\alpha$  adjacent to  $A_1$  but opposite to  $C'$ . This geometry is illustrated

in Fig. 4.3(b). We thus have an enlarged hourglass with  $I(A_1C, A_2C') = I(\theta + \alpha)$ . By SSA,  $I(A_1C, A_2C') \geq I(A_1, A_2)$ , or  $I(\theta + \alpha) \geq I(\theta)$ . Taking the limit  $\alpha \rightarrow 0$ , gives

$$I'(\theta) \geq 0, \quad (4.3.27)$$

implying that the MI is monotonically increasing. Since the LN does not obey SSA, we do not have a general proof in that case. However, in all cases studied, we observe the same monotonic increase as for the MI.

We can also ask about the convexity of the MI, i.e. the sign of  $I''(\theta)$ . Let us begin with the hourglass corner term that appears in Eq. (4.3.23),  $a_\times(\theta)$ . The argument proceeds as for the convexity of  $a(\theta)$  but by replacing  $A_1$  by the hourglass of angle  $\theta_1$  formed by  $A_1$  and its inverse image, and so on for  $i = 2, 3$ , as shown in Fig. 4.2(b). One extra constraint is  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \leq \pi$ . The boundary law and topological terms cancel, and we get the analog of (4.3.4):  $a_\times(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) - a_\times(\theta_1 + \theta_2) \geq a_\times(\theta_2 + \theta_3) - a_\times(\theta_2)$ . Taking the same limits,  $\theta_3 \rightarrow 0$  then  $\theta_1 \rightarrow 0$ , yields

$$a''_\times(\theta) \geq 0. \quad (4.3.28)$$

Restricting our attention to density matrices that are pure on the entire space, we can obtain another relation by setting  $\theta_1 = \pi - 2\theta_2$  with  $\theta_2 \leq \pi/2$ :  $a_\times(\pi - \theta_2 + \theta_3) - a_\times(\pi - \theta_2) \geq a_\times(\theta_2 + \theta_3) - a_\times(\theta_2)$ . But the complementarity relation for the hourglass corner is  $a_\times(\pi - \theta) = a_\times(\theta)$ , so that  $a_\times(\theta_2 - \theta_3) \geq a_\times(\theta_2 + \theta_3)$ , i.e.  $a'_\times(\theta) \leq 0$  for  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ . We now summarize the relations for the hourglass corner for density matrices that are pure on the entire space:

$$a_\times(\pi - \theta) = a_\times(\theta), \quad a'_\times(\theta) \leq 0 \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}), \quad a''_\times(\theta) \geq 0. \quad (4.3.29)$$

Going back to the convexity of the MI for the hourglass geometry, we see that  $I''(\theta) = a''_\times(\theta) - 2a''(\theta)$ , which means we subtract a positive number from a positive number. In principle, the outcome could be negative so we cannot make a general statement for all angles at this point.

If we look at  $\theta \approx \pi$ , then  $I''(\theta) \approx \partial_\theta^2[2\kappa/(\pi - \theta)] = 4\kappa/(\pi - \theta)^3$ , which is positive since  $\kappa \geq 0$ . The convexity thus at least holds at sufficiently large angles. Owing to Eq. (4.3.24), the LN has the same divergence near  $\pi$ , hence it is also convex for angles near  $\pi$ . In the IQH groundstates studied in this work, we find that convexity holds for all angles.

### 4.3.5. Generalization to CFTs

Let us now consider the groundstates of CFTs. As above, our conclusions remain valid for both bosonic and fermionic systems. First, we note that when  $A$  has a corner, it is known that the Rényi entropy contains a corner term that is logarithmically divergent  $S_n(A) = c_n |\partial A| - a_n(\theta) \log(|\partial A|/\delta) + \dots$ , where  $\delta$  is a UV cutoff. The corner function is thus protected

from UV details. In the case where  $B$  is the complement of  $A$ , we have  $\mathcal{E}(A,B) = S_{1/2}(A)$ , and the LN will also possess a logarithmically divergent corner contribution. Fluctuations of a conserved charge will also have a logarithmically divergent corner term [99, 120]. These logarithmic enhancements will also appear when two corners meet, in particular for the adjacent and hourglass geometries, as we now discuss.

For adjacent corners, we have an expression similar to what we found above, but with a logarithmic enhancement due to corners

$$\mathcal{E} = c_{\mathcal{E}} L_{\text{shared}} - b(\theta_1, \theta_2) \ln(L_{\text{shared}}/\delta) + \dots \quad (4.3.30)$$

This was verified explicitly for the bosonic LN using the free scalar CFT [104]. When one of the angles approaches zero, the LN and MI will also possess a pole, as in Eq. (4.3.18) and Eq. (4.3.19), respectively.

For the hourglass geometry, we have

$$\mathcal{E}(\theta) = h(\theta) \log(|\partial A|/\delta); \quad I(\theta) = h^I(\theta) \log(|\partial A|/\delta) \quad (4.3.31)$$

where we omit subleading terms. The prefactors are again protected from UV details. The LN and MI satisfy the same properties as those found above in Section 4.3.4, including poles at  $\pi$ , and monotonicity for the MI,  $\partial_{\theta} h^I(\theta) \geq 0$ . The EE of the hourglass will also contain a logarithmic enhancement  $a_{\times}(\theta) \log(|\partial A|/\delta)$ , and the corresponding prefactor is decreasing on  $[0, \pi/2]$  and convex,  $a''_{\times}(\theta) \geq 0$ , as in Eq. (4.3.29).

## 4.4. Logarithmic negativity of integer quantum Hall states

Here, we compute the LN  $\mathcal{E}$  and the MI for various IQH states, including at finite temperature. The single-particle wave function of the  $n$ -th Landau level (LL) with the eigen-energy  $\epsilon_n$  on a torus with size  $L_x L_y$  in the Landau gauge  $\vec{A} = (0, Bx)$  is:

$$\phi_{n,k}(x,y) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}} \sqrt{2^n n! L_y}} e^{iky} e^{-\frac{(x+k)^2}{2}} H_n(x+k), \quad (4.4.1)$$

where  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $k = 2\pi m/L_y$  with  $m \in \mathbb{Z}$  and  $-\frac{L_x L_y}{4\pi} + 1 \leq m \leq \frac{L_x L_y}{4\pi}$ , and we set the units such that the magnetic length  $l_B = 1$  and the cyclotron frequency  $\hbar\omega_c = 1$ . We also absorb the zero point energy into the definition of the chemical potential  $\mu$ , so that LL energies are  $\epsilon_n = n$ . For each  $n$ , the degeneracy is  $N_d = L_x L_y / 2\pi$ . IQH states are many-body wave functions constructed from the single-particle wave function (4.4.1) with an integer filling factor  $\nu = N_e/N_d$  between the total electron numbers  $N_e$  and the degeneracy  $N_d$ .

Computing the LN  $\mathcal{E}$  for many-body states is generally not an easy task. However, as we will see in the following, it becomes numerically feasible for Gaussian states like IQH states.

### 4.4.1. Logarithmic negativity for fermionic Gaussian states

If the density matrix  $\rho_A$  is a Gaussian operator, then so is the density matrix  $\rho_A^{\mathcal{T}_1}$ , and thus the normalized composite density operator  $\rho_\times$  (4.2.8) is also Gaussian [55]. For systems with a conserved particle number, the LN  $\mathcal{E}$  can be numerically computed from the correlation function  $C_{ij}$ [78, 56]:

$$C_{ij} = \langle f_i^\dagger f_j \rangle = \text{Tr}(\rho f_i^\dagger f_j) = \sum_n n_F(\epsilon_n) u_n^*(i) u_n(j) \quad (4.4.2)$$

where  $u_n(i)$  is the  $n$ -th single-particle wave function with eigen-energy  $\epsilon_n$ , and in the last equality we have restricted ourselves to a thermal state with  $n_F(\epsilon_n) = (1 + \exp(\epsilon_n - \mu)/T)^{-1}$  being the Fermi-Dirac distribution function at temperature  $T$  and chemical potential  $\mu$ . The entanglement entropy on subregion  $A$  can then be computed from the eigenvalues  $\{\zeta_j\}$  of the correlation matrix  $C$  on subregion  $A$  [78],

$$S(A) = \sum_j [-\zeta_j \ln \zeta_j - (1 - \zeta_j) \ln (1 - \zeta_j)]. \quad (4.4.3)$$

To compute the LN, one needs the composite correlation function  $C_\times$  associated with the normalized composite density matrix  $\rho_\times$  (4.2.8). Suppose the covariance matrix of the original density matrix  $\rho_A$  (4.2.6) is  $\Gamma = \mathbb{I} - 2C$ , then the covariance matrix for the density matrix defined via the fermionic PT,  $\rho_A^{\mathcal{T}_1}$  and its conjugate,  $(\rho_A^{\mathcal{T}_1})^\dagger$ , can be constructed as

$$\Gamma_\pm = \begin{bmatrix} -\Gamma_{11} & \pm i\Gamma_{12} \\ \pm i\Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \quad (4.4.4)$$

where the subindices 1 and 2 refer to the subregion  $A_1$  and  $A_2$ , respectively. Following the algebra of the product of Gaussian operators[121], one finds that

$$C_\times = \frac{1}{2} [\mathbb{I} - (\mathbb{I} + \Gamma_+ \Gamma_-)^{-1} (\Gamma_+ + \Gamma_-)]. \quad (4.4.5)$$

As a result, the LN  $\mathcal{E}$  can be computed through the spectrum of  $C_\times$  and  $C$ :

$$\mathcal{E} = \sum_j \ln \left[ \varepsilon_j^{\frac{1}{2}} + (1 - \varepsilon_j)^{\frac{1}{2}} \right] + \frac{1}{2} \sum_j \ln \left[ \zeta_j^2 + (1 - \zeta_j)^2 \right], \quad (4.4.6)$$

where  $\varepsilon_j$  are the eigenvalues of the composite correlation matrix  $C_\times$ . Therefore, to compute the LN  $\mathcal{E}$  and the MI  $I(A_1, A_2)$ , one needs the spectrum of the correlation function  $C_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}$  and the composite correlation function  $C_\times$  (4.4.5).

For IQH states, the electron annihilation operator can be written as  $\psi(x, y) = \sum_{n, k} \phi_{n, k}(x, y) c_{n, k}$ , where  $c_{n, k}$  is the fermionic annihilation operator for the state labelled by  $k$  in the  $n$ th LL. The groundstate wave function at filling  $\nu$  is  $|\Phi_0\rangle = \prod_{k, n < \nu} c_{n, k}^\dagger |0\rangle$  with  $|0\rangle$

denoting the Fock vacuum. The ground state correlation function is thus

$$C_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} = \langle \Phi_0 | \psi^\dagger(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}') | \Phi_0 \rangle = \sum_{k,n < \nu} \phi_{n,k}^*(\mathbf{r}) \phi_{n,k}(\mathbf{r}') \quad (4.4.7)$$

and the composite correlation function  $C_\times$  can then be constructed based on Eq. (4.4.5).

We develop two independent approaches to compute the spectrum of both the correlation functions  $C$  and  $C_\times$ . One is an overlap matrix method in momentum space, and the other is a discretization method in real space.

#### 4.4.2. Overlap matrix method

We first develop an overlap matrix technique to efficiently obtain the fermionic LN. An analogous method has been used to compute the EE of IQH states [23, 60]. Ref. [3] previously generalized the overlap matrix method for computing the LN defined through the bosonic PT (4.2.4). However, it is very difficult to use such overlap matrix method to study the LN on a general two-dimensional geometry due to its inherent computational complexity: the partially transposed  $\rho_{A_1 \cup A_2}^{T_1}$  is non-Gaussian. Here, we find a numerically-efficient overlap matrix method to compute the LN defined through the fermionic PT (4.2.5).

The overlap matrix of subregion  $A_1$  is defined as

$$F_{(n,k),(n',k')}^{(1)} = \int_{A_1} d^2\mathbf{r} \phi_{n,k}(\mathbf{r}) \phi_{n',k'}^*(\mathbf{r}), \quad (4.4.8)$$

similarly for  $A_2$ . The spectrum  $\{\zeta\}$  of the correlation matrix  $C_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}$  on subregion  $A_1 \cup A_2$  can be computed from the total overlap matrix,  $F^{(12)} = F^{(1)} + F^{(2)}$ . On the other hand, obtaining the spectrum  $\{\varepsilon\}$  of the composite correlation function  $C_\times$ , Eq. (4.4.5), involves more effort. We use the eigenvalue problem of  $\Gamma_\pm$  as a starting point to show how the spectrum can be computed through the overlap matrix method:

$$\Gamma_\pm u = \begin{pmatrix} -\Gamma_{11} & \pm i\Gamma_{12} \\ \pm i\Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix} = \lambda_\pm \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (4.4.9)$$

where  $u^{(1,2)}$  denotes the component of the eigenvector  $u$  in subregion  $A_{1,2}$ . To obtain the spectrum  $\{\lambda_\pm\}$ , we first expand the eigenfunctions  $u^{(1,2)}(\mathbf{r}) = \sum_{k,n < \nu} \phi_{n,k}^*(\mathbf{r}) \mathbf{v}_{n,k}^{(1,2)}$ , and use  $C_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} = \sum_{k,n < \nu} \phi_{n,k}^*(\mathbf{r}) \phi_{n,k}(\mathbf{r}')$ , the off-diagonal block part becomes

$$\begin{aligned} \Gamma_{12} u^{(2)} &= -2C_{12} u^{(2)} = -2 \int_{A_2} d^2\mathbf{r}' C_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} u^{(2)}(\mathbf{r}') \\ &= -2 \sum_{\substack{k,n < \nu \\ k',n' < \nu}} \phi_{n,k}^*(\mathbf{r}) F_{(n,k),(n',k')}^{(2)} \mathbf{v}_{n',k'}^{(2)}. \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

By multiplying by  $\phi_{m,q}(\mathbf{r})$  and integrating both sides of Eq. (4.4.10), we have

$$\int d^2\mathbf{r} \phi_{m,q}(\mathbf{r}) \Gamma_{12} u^{(2)} = -2 \sum_{k',n' < \nu} F_{(m,q),(n',k')}^{(2)} \mathbf{v}_{n',k'}^{(2)}. \quad (4.4.11)$$

Proceeding similarly with the other terms of Eq. (4.4.9), the eigenvalue problem  $\Gamma_{\pm}u = \lambda_{\pm}u$  in the end can be mapped to the eigenvalue problem of the following overlap matrix:

$$\begin{pmatrix} -(\mathbb{I} - 2F^{(1)}) & \mp 2iF^{(2)} \\ \mp 2iF^{(1)} & (\mathbb{I} - 2F^{(2)}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}^{(1)} \\ \mathbf{v}^{(2)} \end{pmatrix} = \lambda_{\pm} \begin{pmatrix} \mathbf{v}^{(1)} \\ \mathbf{v}^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (4.4.12)$$

This equation is now cast into a finite-matrix eigenvalue problem since the momenta are discrete due to the periodicity in the  $y$ -direction, and we put a large-momentum cutoff (equivalent to discarding electrons far from the entanglement cut  $\partial A$ ).

Similarly, we can obtain the spectrum  $\{\varepsilon\}$  of the composite correlation function  $C_{\times}$  through  $C_{\times}\psi_{\times} = \varepsilon\psi_{\times}$ , which is equivalent to

$$\begin{aligned} D_{\times}^{-1}B_{\times}\psi_{\times} &= (\Gamma_{+} + \Gamma_{-})^{-1}(\mathbb{I} + \Gamma_{+}\Gamma_{-})\psi_{\times} \\ &= \frac{1}{1 - 2\varepsilon}\psi_{\times}. \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

where  $D_{\times} = \Gamma_{+} + \Gamma_{-}$ , and  $B_{\times} = \mathbb{I} + \Gamma_{+}\Gamma_{-}$ . In the momentum basis:

$$D_{\times}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -(\mathbb{I} - 2F^{(1)})^{-1} & 0 \\ 0 & (\mathbb{I} - 2F^{(2)})^{-1} \end{pmatrix} \quad (4.4.14)$$

and

$$\begin{aligned} B_{\times} &= \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix} + \\ &\begin{pmatrix} -(\mathbb{I} - 2F^{(1)}) & -2iF^{(2)} \\ -2iF^{(1)} & \mathbb{I} - 2F^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(\mathbb{I} - 2F^{(1)}) & 2iF^{(2)} \\ 2iF^{(1)} & \mathbb{I} - 2F^{(2)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.4.15)$$

The spectrum  $\{\varepsilon\}$  can thus be solved through Eq. (4.4.13)-(4.4.15).

### 4.4.3. Real space discretization method

The correlation function  $C_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}$  is defined on continuous real space. To obtain its spectrum  $\{\zeta\}$  on a subregion  $A$  in real space, we need to solve a functional eigenvalue problem:

$$\int_A d^2\mathbf{r}' C_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} u(\mathbf{r}') = \zeta u(\mathbf{r}). \quad (4.4.16)$$

Here we take the thermodynamic limit  $L_x, L_y \rightarrow \infty$ , and the summation in Eq. (4.4.7) can then be replaced by an integral. At  $T = 0$ , we focus on fillings  $\nu = 1$  and  $\nu = 2$ . From Eq. (4.4.7), the correlation functions are the following:

$$C_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{1}{4}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2 - \frac{i}{2}(x+x')(y-y')} \times \begin{cases} 2, & \nu = 1 \\ 4 - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2, & \nu = 2. \end{cases} \quad (4.4.17)$$

We solve the functional eigenvalue problem (4.4.16) by discretizing the continuous real space, that is, we solve it on a finite partition  $\{\mathbf{r}_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) of the subregion  $A$ . After



discretization, the integral is replaced by a Riemann sum, and the functional eigenvalue problem (4.4.16) becomes

$$\begin{aligned} \int_A d^2\mathbf{r}' C_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} u(\mathbf{r}') &\cong \sum_{j \in A} \Delta x_j \Delta y_j \tilde{C}_{ij} \tilde{u}(j) \\ &= \sum_{j \in A} a^2 \tilde{C}_{ij} \tilde{u}(j) = \zeta \tilde{u}(i), \end{aligned} \quad (4.4.18)$$

where we choose a square lattice with spacing  $\Delta x_j = \Delta y_j = a$ , and denote the objects on the discrete lattice  $\{\mathbf{r}_i\}$  by the over-tilde symbol as  $\tilde{C}_{ij} \equiv C_{\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j}$  and  $\tilde{u}(i) \equiv u(\mathbf{r}_i)$ . From Eq. (4.4.18), we see that to solve the spectrum  $\{\zeta\}$  of the correlation function  $C_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}$ , one needs to solve the eigenvalue problem of the matrix  $a^2 \tilde{C}_{ij}$  instead of  $\tilde{C}_{ij}$ . Moreover, since the discrete version of the Dirac delta function is  $\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'') \rightarrow \mathbb{I}_{ij}/a^2$ , where  $\mathbb{I}$  is the identity matrix, the discrete version of the inverse function of  $A_{\mathbf{r}',\mathbf{r}''}^{-1}$  should include an extra prefactor  $1/a^4$ ,  $A_{\mathbf{r}',\mathbf{r}''}^{-1} \rightarrow \tilde{A}_{ij}^{-1}/a^4$ , so that the relation

$$\int_A d^2\mathbf{r}' A_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} A_{\mathbf{r}',\mathbf{r}''}^{-1} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'') \quad (4.4.19)$$

holds in its discrete form. Following these rules, the discrete version of the composite correlation function  $C_\times$  is

$$\tilde{C}_{\times,ij} = \frac{1}{2a^2} \left[ \mathbb{I}_{ij} - \sum_k \left( \frac{\mathbb{I}}{a^2} + a^2 \tilde{\Gamma}_+ \tilde{\Gamma}_- \right)_{ik}^{-1} (\tilde{\Gamma}_+ + \tilde{\Gamma}_-)_{kj} \right], \quad (4.4.20)$$

and its spectrum can be computed as in Eq. (4.4.18).

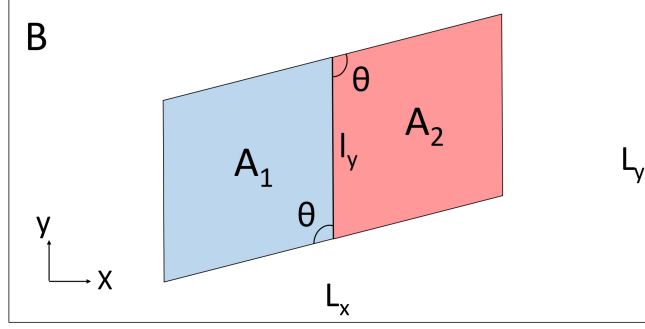
The eigenvalues of  $\tilde{C}_{ij}$  and  $\tilde{C}_{\times,ij}$  depend on the lattice spacing  $a$ . To avoid such cut-off dependence, we extrapolate our results for the LN and MI to the  $a \rightarrow 0$  limit. Fig. 4.17 in Appendix A shows an example of the finite-size scaling at  $\theta = 0.3\pi$ .

## 4.5. Integer quantum Hall groundstates

In this section, we present our numerical results based on the overlap matrix method for the LN and MI of IQH groundstates on various tripartite geometries with corners. In Appendix A, we compare these with results from the real space discretization method. Both methods agree, but the overlap matrix method gives superior precision, at a reduced computational cost.

### 4.5.1. Adjacent geometry

First, we compute the LN and the MI for a geometry with adjacent parallelograms as shown in Fig. 4.4 for various angles  $\theta$ . We find that both the LN and the MI obey the



**Fig. 4.4.** Tripartite adjacent geometry. Subregions  $A_1$  and  $A_2$  share a boundary of length  $l_y$ , and have two pairs of touching corners.

following form in the thermodynamic limit:

$$\mathcal{E}(A_1, A_2) = c_{\mathcal{E}} l_y - 2b(\theta), \quad (4.5.1)$$

$$I(A_1, A_2) = 2c_I l_y - 2b^I(\theta) \quad (4.5.2)$$

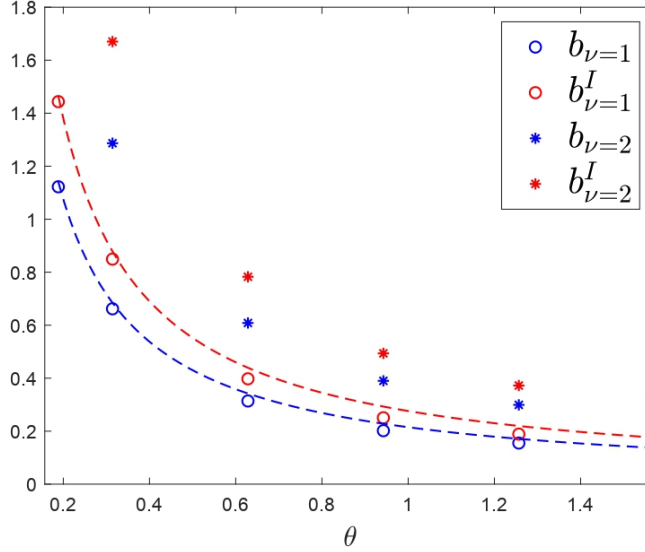
where  $l_y$  is the length of the boundary shared by  $A_1$  and  $A_2$ , and  $b(\theta) \equiv b(\theta, \pi - \theta) > 0$ , where we use a simplified notation compared to the the general adjacent corner term with angles  $\theta_1, \theta_2$ . For the MI, we have a simple expression in terms of the single-corner function,  $b^I(\theta) = a(\theta) + a(\pi - \theta)$ . The factors of 2 in the subleading terms come from the 2 adjacent pairs.

Tables (4.2) and (4.3) list the values of the boundary law coefficients and the subleading corner functions. The boundary law coefficient  $c_{\mathcal{E}}$  of the LN is just the same as the boundary law coefficient of  $S_{1/2}(A_1)$  since the boundary law should be insensitive to the geometry, and on bipartite geometry the LN  $\mathcal{E}$  is just the same as  $S_{1/2}(A_1)$ .

The LN and MI corner functions are shown in Fig. 4.5 for fillings  $\nu = 1, 2$ . For charge fluctuations, using the analogue of Eq. (4.3.8) (see also [Estienne2]), we have

$$b^{\mathcal{I}}(\theta) = \frac{\nu}{4\pi^2} (2 + (\pi - 2\theta) \cot \theta). \quad (4.5.3)$$

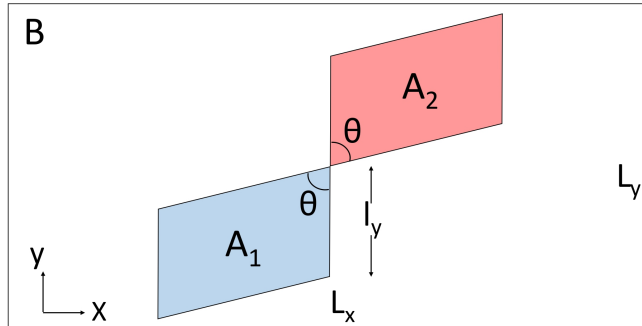
In all cases, we observe a  $1/\theta$  divergence at small angles, in agreement with the general results given above, Eqs. (4.3.18)-(4.3.19). For the LN at filling  $\nu = 1$ , we numerically determine that the coefficient of  $1/\theta$  is  $k_{\text{adj}} = 0.215$ , as presented in Table 4.1 along with the other small angle coefficients. As the angle increases from zero, we find that the LN, MI and fluctuations decreases in a monotonous fashion, reaching their minimum at  $\pi/2$ , in agreement with the general findings in Section 4.3.3. In particular, the behaviour about the minimum satisfies Eq. (4.3.20). Fig. 4.6(a) shows that the ratios of  $b(\theta)$  and  $b^I(\theta)$  to the charge fluctuation corner function  $b^{\mathcal{I}}(\theta)$ . We note that the ratios shows little dependence on the angle, indicating that all three quantities share almost the same geometrical dependence. In Fig. 4.6(b), we show the ratio of filling  $\nu = 2$  to filling  $\nu = 1$  for the LN and MI. The ratios



**Fig. 4.5.** Angle dependence of the subleading LN term,  $b$ , and subleading MI term,  $b^I$ , at fillings  $\nu = 1, 2$  on the adjacent geometry. The curves show the small angle behaviour:  $k_{\text{adj}}/\theta$  for the LN, and  $\kappa_{\text{adj}}/\theta$  for the MI. The small-angle coefficients are given in Table 4.1.

figArticle/ratios.jpg

**Fig. 4.6.** Ratios of corner terms for the adjacent geometry. (a) The MI corner term  $b^I(\theta)$ , and the LN corner term  $b(\theta)$  divided by the fluctuation corner term  $b^{\mathcal{I}}(\theta)$ . (b) The ratios of the LN corner term  $b(\theta)$  and MI corner term  $b^I(\theta)$  between filling  $\nu = 1$  and  $\nu = 2$ .



**Fig. 4.7.** Tripartite hourglass geometry. Subregions  $A_1$  and  $A_2$  touch at a single point, with an hourglass corner of angle  $\theta$ .

again vary slowly with the angle, and hover near 2. The naive expectation that having two filled Landau levels should give twice the contribution of the  $\nu = 1$  groundstate is almost born out, but only holds exactly for mutual fluctuations. The LN shows the strongest deviation from 2. It would be of interest to understand why this is so.

## 4.5.2. Hourglass geometry

We now turn to tip-touching corners; the calculations are done on the parallelogram hourglass geometry shown in Fig. 4.7. The hourglass geometry is of particular interest because the subregions  $A_1$  and  $A_2$  only touch at a point, characterized by an angle  $\theta$ . Thus, there is no boundary law between the two subregions, and we can focus on the geometric corner contribution to the LN. The MI was previously studied at  $\nu = 1$  for  $\theta = \pi/2$  [60]. As for the adjacent geometry, we also compare the LN with the corner function  $\mathcal{I}(\theta)$  of charge fluctuations on an hourglass geometry [122]:

$$\mathcal{I}(\theta) = \frac{\nu}{4\pi^2}(1 - \theta \cot \theta). \quad (4.5.4)$$

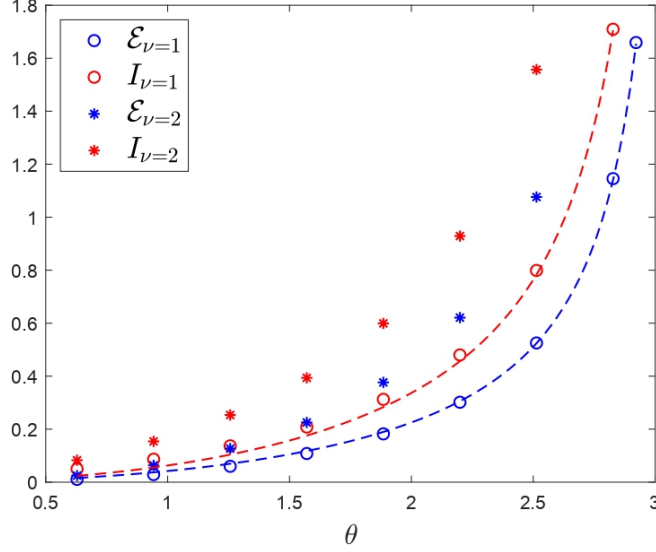
The angle dependence of the LN  $\mathcal{E}$  and the MI for  $\nu = 1, 2$  are shown in Fig. 4.8. The LN and MI vanish at small angles, in agreement with the general analysis of Section 4.3.4. We note that the LN decays faster than the MI. As the angle increases towards  $\pi$ , a pole emerges for the LN and MI, as given in Eqs. (4.3.24)-(4.3.25). For the LN, we find that the coefficient (residue) is  $k_\times = 0.369(1)$ . For the MI, we can use the relation to the single-corner coefficient  $\kappa$ , Eq. (4.3.26), to get  $\kappa_\times = 0.552$  [60]. The small angle prefactors for the LN and MI are summarized in Table 4.1. The dashed lines correspond to the mutual fluctuations function  $(1 - \theta \cot \theta)/\pi$  with prefactor  $k_\times$  for the LN, and  $\kappa_\times$  for the MI. These thus accurately capture the divergence at  $\pi$ . We see that they also provide a reasonable estimate at smaller angles, without any additional fitting parameters. However, the agreement is not perfect since the LN and MI have a distinct angle dependence compared with the mutual fluctuations. In Fig. 4.9, we show different ratios. First, in panel (a), we compare the angle dependence between the two fillings. The ratio  $\mathcal{E}_{\nu=2}/\mathcal{E}_{\nu=1}$  shows a stronger angle dependence compared to what was found for the adjacent geometry, exceeding the naive value 2 by at most 20% (in the range studied). The ratio for the MI behaves like the one for LN but reflected below 2. Panels (b)-(d) show ratios of different quantities at the same filling. We see that the angle dependence shows the most variability at small angles.

**Table 4.1.** The small-angle coefficients of the corner functions for LN and MI on the bipartite, tripartite adjacent and hourglass geometries at filling  $\nu = 1$ . The value of  $\kappa_{\text{adj}}$ , the residue of the corner function for the MI on the adjacent geometry, is based on Ref. Sirois.

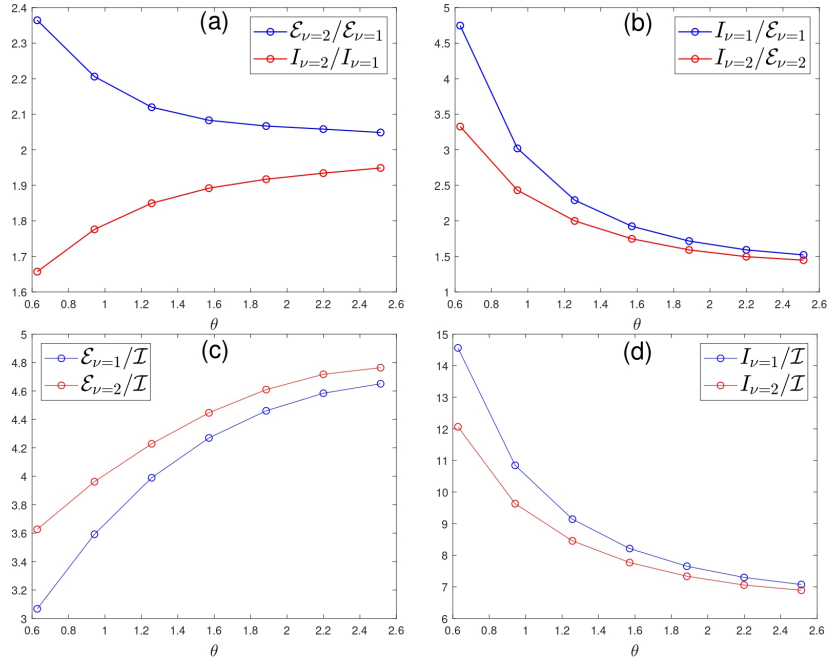
LN			MI		
$\kappa^{\mathcal{E}} = \kappa_{1/2}$	$k_{\text{adj}}$	$k_\times$	$\kappa^I = 2\kappa$	$\kappa_{\text{adj}} = \kappa$	$\kappa_\times = 2\kappa$
0.475	0.215	0.369	0.552	0.276	0.552

## 4.6. Integer quantum Hall states at finite temperature

The LN is a good measure of entanglement for quantum mixed states since it captures only quantum correlations as opposed to the MI. As such, the LN is well-suited to study



**Fig. 4.8.** The LN  $\mathcal{E}$  and the MI  $I$  at various angles for  $\nu = 1$  and  $\nu = 2$  on the hourglass geometry are denoted as different dots, and the fitting curves motivated by the corner function of charge fluctuations  $\mathcal{I}(\theta)$  (4.5.4) for the LN and the MI at  $\nu = 1$  are denoted as blue curve  $\frac{k_{\times}}{\pi}(1 - \theta \cot \theta)$  and red curve  $\frac{\kappa_{\times}}{\pi}(1 - \theta \cot \theta)$ , respectively, where  $k_{\times}, \kappa_{\times}$  appear in Table 4.1.



**Fig. 4.9.** Various ratios between the LN  $\mathcal{E}$ , MI  $I$ , and the mutual charge fluctuations  $\mathcal{I}$ , on the hourglass geometry as a function of the angle.

entanglement at finite temperature. In this section, we study the finite temperature LN for both the hourglass and adjacent geometries at angle  $\pi/2$ , and compare our findings with the MI and mutual fluctuations.

At finite temperature  $T > 0$ , the overlap matrix method requires more LLs, increasing the matrix size, and gradually becomes numerically untractable. Therefore, unless the temperature is very small, we shall use the real space discretization method to compute the finite temperature LN. To do this, we include the Fermi-Dirac distribution as in Eq. (4.4.2) so that the real space correlation function is  $C_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} = \sum_{n,k} n_F(\epsilon_n) \phi_{n,k}^*(\mathbf{r}) \phi_{n,k}(\mathbf{r}')$ . We work in the grand canonical ensemble, where we solve the chemical potential  $\mu(\beta)$  self-consistently at a given temperature  $T = 1/\beta$  by fixing the average filling,  $\nu$ . Summing over all the contributing LLs requires considerable numerical efforts at high temperatures. As such, we only report the finite temperature results up to temperatures on the order of  $T = 2$  (in units of the cyclotron energy). We separately explore the high temperature behaviour of the LN by working in the limit  $T \rightarrow \infty$  in Section 4.6.2.

For the adjacent geometry, we find that at finite temperatures the LN still obeys a boundary law with a subleading corner contribution:

$$\mathcal{E}(T) = c_{\mathcal{E}}(T)l_y - 2b(\pi/2, T). \quad (4.6.1)$$

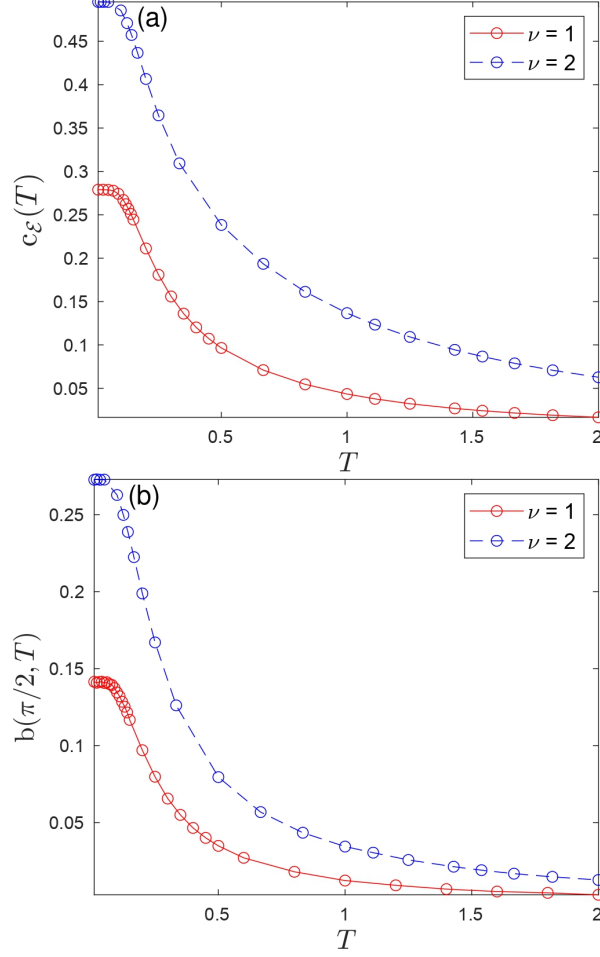
The temperature dependence of the boundary law coefficient, and of the subleading term at average fillings  $\nu = 1, 2$  are shown in Fig. 4.10. We also plot the LN for the hourglass geometry in Fig. 4.11. The finite temperature LN for the adjacent and hourglass geometries share similar features. Namely, they both plateau at low temperatures until they start decreasing at a small temperature on the order  $T \approx 0.1$  and then decay towards zero, which indicates the loss of entanglement as the system heats up. The drop is quite abrupt. For instance, when the temperature reaches the cyclotron gap  $T = 1$ , the LN of hourglass geometry drops to 4% of its  $T = 0$  value. The low- $T$  regime is studied in more detail in the next subsection. Similar features also appeared when studying the thermal charge fluctuations of IQH states [99] or the bosonic LN of harmonic oscillators chains [44], for example.

### 4.6.1. Low temperatures

In this section, we explore the LN in the low temperature limit  $\beta = 1/T \gg 1$ . We begin by considering the density matrix for a mixture of two pure states:

$$\rho = (1 - \lambda) \rho_0 + \lambda \rho_1 \quad (4.6.2)$$

where  $\rho_n = |\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|$ , and  $|\Psi_n\rangle$  is the many-body state with the entirely filled  $n$ -th LL, and all other LLs empty.  $\lambda \in [0,1]$  so that the state is pure when  $\lambda = 0$  or  $1$ , and mixed otherwise. Here, we mainly focus on  $\lambda \ll 1$  to study the low temperature behaviour. More specifically, in the low temperature limit with filling  $\nu = 1$ , where the chemical potential is nearly constant  $\mu \cong 0.5$ , one can expand the Fermi-Dirac distribution in  $\lambda = e^{-\frac{\beta}{2}} \ll 1$ , and to leading order, the density matrix is exactly given by Eq. (4.6.2).



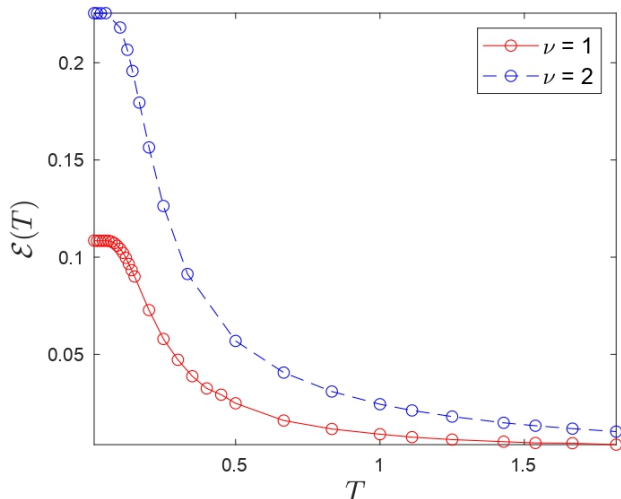
**Fig. 4.10.** Finite temperature LN at average fillings  $\nu = 1, 2$  on the adjacent geometry. The shared boundary  $l_y$  is varied to perform a linear regression and obtain the boundary law coefficient,  $c_{\mathcal{E}}(T)$  and corner term,  $b(\pi/2, T)$ . We used  $L_x = L_y = 40$ . (a) Boundary law coefficient as a function of temperature, (b) corner term  $b(\pi/2, T)$ .

To compute the LN of the density matrix (4.6.2), we start from its correlation function  $C_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} = \text{Tr}(\rho f_{\mathbf{r}}^\dagger f_{\mathbf{r}'}) = (1 - \lambda)C_{0, \mathbf{r}, \mathbf{r}'} + \lambda C_{1, \mathbf{r}, \mathbf{r}'}$ , where  $C_n$  denotes the correlation function in the  $n$ -th LL. Based on such correlation function, the LN can be computed through the overlap matrices defined in Appendix C. For IQH states, our numerical data in the region  $\lambda \ll 1$  show that the LN in both the adjacent and hourglass geometry receives exponentially small corrections, that is

$$\mathcal{E}_{\text{low } T} \cong \mathcal{E}_{T=0} - \lambda \Delta \mathcal{E}(\lambda). \quad (4.6.3)$$

We observe that our data is consistent with the following slowly varying term:  $\Delta \mathcal{E}(\lambda) \sim (-\log \lambda)^{\frac{1}{2}} > 0$  in the low temperature limit  $\lambda \rightarrow 0$ .

Fig. 4.12(a) shows the boundary law coefficient of the LN,  $c_{\mathcal{E}, o}$  and  $c_{\mathcal{E}, r}$ , computed through the overlap matrix and real space discretization method, respectively, versus  $\lambda$ . We find that the data is well-described by the fitting function  $\alpha_{c, 0} - \alpha_{c, 1} \lambda (-\log(\alpha_{c, 2} \lambda))^{\frac{1}{2}} -$



**Fig. 4.11.** Finite temperature LN  $\mathcal{E}(T)$  at average fillings  $\nu = 1, 2$  on the hourglass geometry at touching angle  $\pi/2$  with  $l_y = 10$ . We used  $L_x = L_y = 40$ .

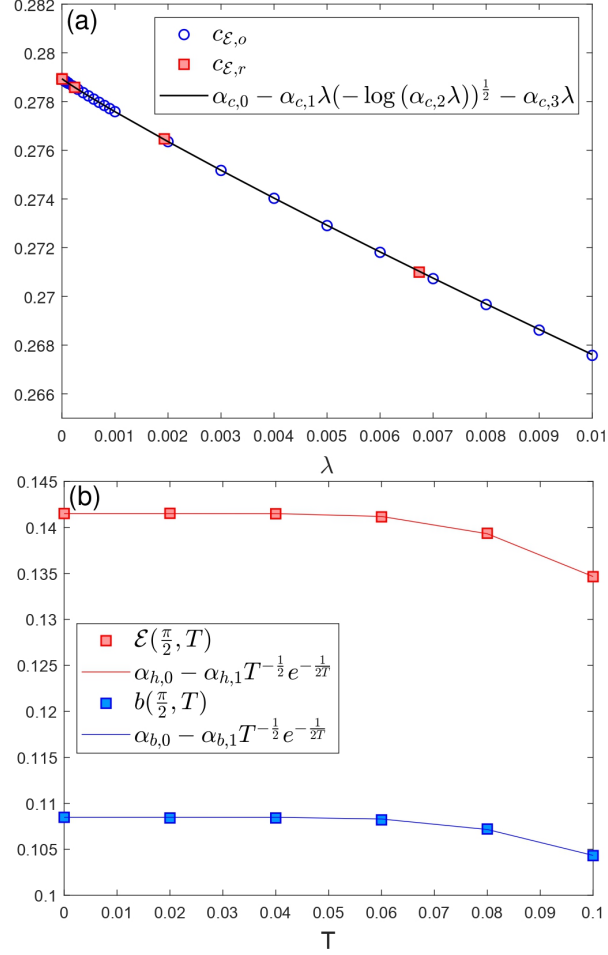
$\alpha_{c,3}\lambda$  with  $(\alpha_{c,0}, \alpha_{c,1}, \alpha_{c,2}, \alpha_{c,3}) = (0.2789, 0.4481, 1.2192, 0.1916)$  which approaches  $\alpha_{c,0} - \alpha_{c,1}\lambda(-\log(\lambda))^{\frac{1}{2}}$  in the low temperature limit  $\lambda \rightarrow 0$ , with an exponentially small correction due to temperature. This robustness at small temperatures is natural given the (cyclotron) gap. Exponentially small thermal corrections were also observed for the corner term of charge fluctuations [99]. Based on this observation, we also try to fit the subleading terms of the LN,  $b(T, \pi/2)$ , and the LN on the hourglass geometry computed through the real space discretization method with the fitting function  $\alpha_0 - \alpha_1\lambda(-\log \lambda)^{\frac{1}{2}}$  as shown in Fig. 4.12(b), from which we observe similar exponential suppression at low temperature.

From these results, we see that our data obeys (4.6.3), i.e. the LN only receives exponentially small negative thermal corrections due to the gap in the spectrum of the IQH system. We leave the rigorous proof of Eq. (4.6.3) for future work. We also point out that such an exponentially negative correction is a common feature in IQH states, and is also present for the boundary law coefficient of the MI as shown in Fig. 4.13, and for the charge fluctuation corner term [99]. For the boundary law coefficient of the MI, the thermal correction is  $-2\gamma_{c,1}\lambda(-\log \lambda)^{3/2} < 0$ , which is parametrically stronger than what we obtained for the LN, which had a power 1/2 instead of 3/2. Thus, the MI decreases faster at asymptotically low temperatures compared with the LN.

#### 4.6.2. High temperatures

In the high temperature limit, thermal fluctuations wash out quantum entanglement. Although we cannot achieve high enough temperatures numerically to see this result directly from the correlation function (4.4.7), we can study this behaviour in the limit  $T \rightarrow \infty$ , where the chemical potential is large and negative such that the Fermi-Dirac distribution reduces to Boltzmann distribution and the infinite sum of the energy levels  $\epsilon_n$  can be evaluated exactly



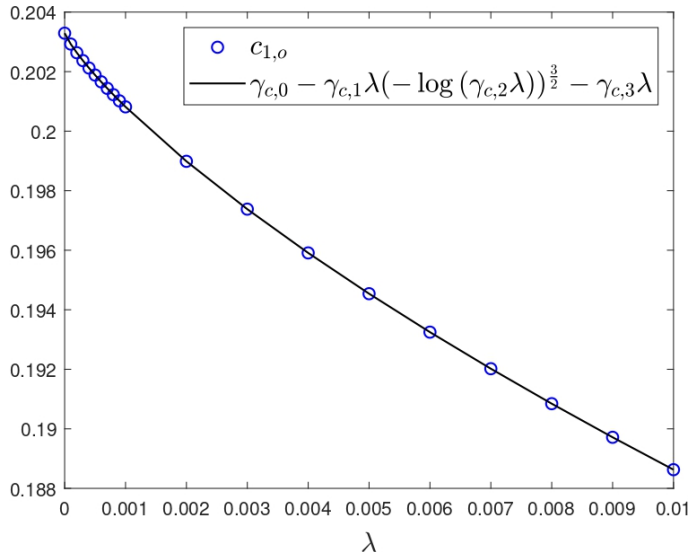


**Fig. 4.12.** (a) The boundary law coefficients of the LN computed through the overlap matrix ( $c_{\mathcal{E},o}$  denoted as blue dots) and the real space discretization ( $c_{\mathcal{E},r}$  denoted as red squares) methods, and the fitting function (black curve) with parameters  $(\alpha_{c,0}, \alpha_{c,1}, \alpha_{c,2}, \alpha_{c,3}) = (0.2789, 0.4481, 1.2192, 0.1916)$  versus  $\lambda$ . (b) The subleading term of LN on the adjacent geometry at angle  $\pi/2$  (blue) and the LN on the hourglass geometry at touching angle  $\pi/2$  (red) by setting  $\lambda = e^{-\frac{\beta}{2}}$ . The numerical data from the real space discretization method and the fitting functions with parameters  $(\alpha_{b,0}, \alpha_{b,1}) = (0.1415, -0.4547)$  and  $(\alpha_{h,0}, \alpha_{h,1}) = (0.1085, -0.2753)$  versus  $\lambda = e^{-\frac{\beta}{2}}$  are denoted by squares and curves, respectively.

using the integral representation of Hermite polynomials as we show in Appendix D. The correlation function is then given by Eq. (4.7.13) in Appendix D, where the dependence on the filling  $\nu$  is captured by the chemical potential.

We can simplify the correlation function further by working in the thermodynamic limit where the momentum summation becomes an integral. As shown in Appendix D, the correlation function at  $\nu = 1$  has the following simple form when  $\beta \ll 1$ ,

$$C_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \approx \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2\beta} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 - \frac{i}{2}(x+x')(y-y')}. \quad (4.6.4)$$



**Fig. 4.13.** The boundary law coefficient of the entanglement entropy  $c_1$  (blue dots) computed with the overlap matrix method versus  $\lambda = e^{-\frac{\beta}{2}}$ , and the fitting function (black curve) with parameters  $(\gamma_{c,0}, \gamma_{c,1}, \gamma_{c,2}, \gamma_{c,3}) = (0.2033, 0.1167, 0.5928, 0.1109)$ . The boundary law coefficient of the MI is twice as large,  $2c_1$ .

In the limit  $\beta \rightarrow 0$ ,  $C_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}$  vanishes everywhere except when  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ , that is,  $C_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}$  becomes ultra-local. We prove in Appendix B that under this condition the LN vanishes.

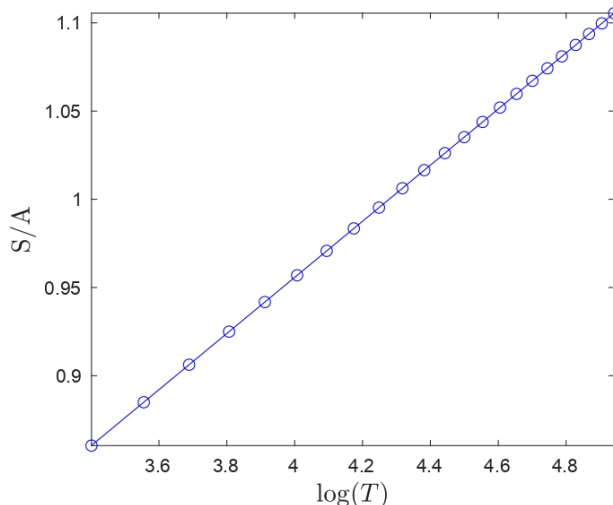
As mentioned, at finite temperatures, the overlap matrix method becomes numerically unfeasible because of the many LLs involved. However, at high temperatures  $\beta \ll 1$ , the correlation function can be approximated as Eq. (4.6.4), and based on that we can develop an overlap matrix method adapted for high temperatures to numerically compute the thermal entropy and the LN, as described in Appendix D. At  $\beta \rightarrow 0$ , the spectrum of Eq. (4.6.4) on a torus can even be analytically solved, and the leading term of the thermal entropy of subregion  $A$  can also be computed through Eq. (4.4.3) (See Appendix E for details):

$$S_A(T) \cong |A| \frac{\log T}{2\pi}, \quad (4.6.5)$$

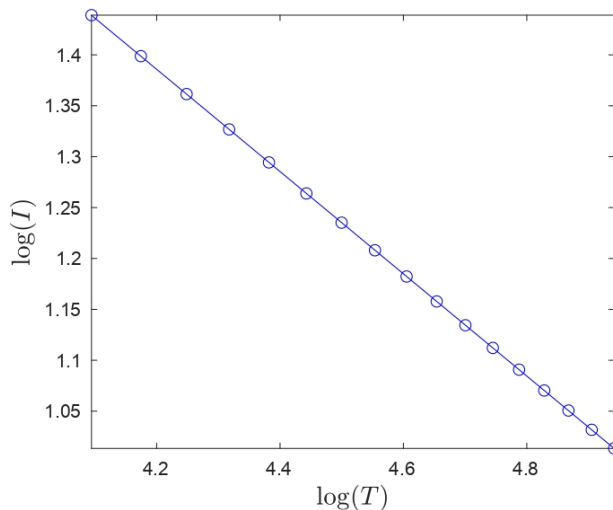
which shows that the EE obeys a volume law.

Fig.4.14 shows the thermal entropy computed on subregion  $A$  in the adjacent geometry using the high temperature overlap matrix, from which we verify numerically that the leading term indeed obeys the same volume law and scales logarithmically with temperature as Eq. (4.6.5). We also compute the MI to study the behaviour of the high temperature entanglement beyond the volume law. The numerical results at  $\nu = 1$  are plotted in Fig.4.15 as a log-log plot. We find that the MI vanishes slowly with respect to temperature, decaying as a power law of temperature with exponent  $-0.50(2)$ .

Finally, we study the high temperature behaviour of the LN using the high temperature overlap matrix technique on an adjacent geometry of a torus where the length of the subregion

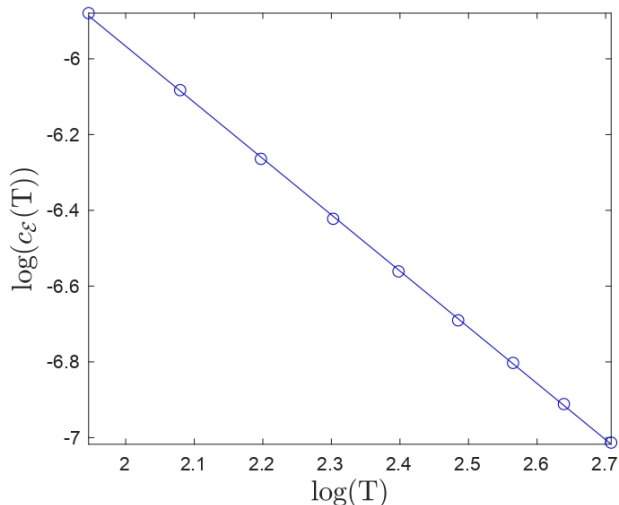


**Fig. 4.14.** The thermal entropy at high temperature scales logarithmically with temperature. The data points are computed at average filling  $\nu = 1$  using the high temperature overlap matrix technique on an adjacent geometry where the length of the boundary of subregion  $A$  is the same as the boundary of the whole system ( $l_y = L_x = L_y = 285$  and  $l_x = 10$ ). The slope of the fitting line  $c = 0.1590(1)$  is indeed close to the analytical result  $1/2\pi$ .



**Fig. 4.15.** (a) Log-log plot of the MI  $I(A_1, A_2)$  as a function of temperature. The linear fit gives a slope of  $0.50(2)$ . The data points are computed at average filling  $\nu = 1$ , using the high temperature overlap matrix technique on an adjacent geometry where the length of the boundary of subregion  $A$  is the same as the boundary of the whole system ( $l_y = L_y = L_x = 285$ , and  $l_x = 10$ ).

$l_y$  equals the length of the torus  $L_y$ . Numerically, we observe that the area law (4.6.1) persists in this temperature regime. The temperature dependence of the boundary law coefficient,  $c_{\mathcal{E}}(T)$ , is plotted in Fig. 4.16 as a log-log plot. We find that the boundary law coefficient decays as a power law,  $T^{-1.5(1)}$ . At high temperatures, we thus see that on the adjacent geometry the LN is smaller than the MI. The emergence of power laws for  $T \gg 1$



**Fig. 4.16.** Log-log plot of the high temperature boundary law coefficient  $c_{\mathcal{E}}(T)$  as a function of temperature at average filling  $\nu = 1$  on an adjacent geometry with no corners. The boundary law coefficient decays as a power law of temperature, with exponent  $-1.5(1)$ . The numerical data points are computed from the high temperature overlap matrix technique on an adjacent geometry where the length of the boundary of subregion  $A$  is the same as the boundary of the whole system ( $l_y = L_x = L_y = 28$  and  $l_x = 10$ ).

is natural since the temperature far exceeds the cyclotron energy, so that the electrons behave almost like free particles at finite temperature. The quadratic dispersion leads to a dynamical exponent  $z = 2$ , so that when converting the temperature to a length scale, one has  $T^{-1/z} = T^{-1/2}$ . It is then natural that the boundary law coefficient scales as a power of this thermal length  $T^{-p/2}$ , where  $p$  is some positive integer. For the MI, we found  $p = 3$ , while for the LN,  $p = 1$ . A power law decay is also observed for IQH charge fluctuations where at high temperatures the boundary law vanishes as  $T^{-3/2}$  ( $p = 3$ ), and the corner term as  $T^{-2}$  ( $p = 4$ ) as we show in Appendix F.

## 4.7. Discussion

We have studied the non-perturbative properties of the LN (both bosonic and fermionic), and of the MI for isotropic states (mixed or pure) on various geometries with a special focus on the case where two corners touch. The LN and MI were compared with the mutual fluctuations of a local observable, such as the charge. The angle dependence of the three quantities was found to possess similar features such as identical divergences in certain limits, but they yield distinct coefficients that characterize the state. For the MI, some properties were proved generally, owing to SSA, but since the LN is not a convex measure for all density matrices, we also had to rely on heuristic arguments. For instance, we were not able to prove that the LN for the hourglass geometry always increases with the angle. Moreover, the MI and LN on the hourglass were observed to increase in a convex fashion in all

cases studied, so it would be interesting to see how general this is. It would be worthwhile to investigate under what conditions such properties can be shown rigorously. We note that most of the properties are expected to hold for the Rényi generalizations of the MI,  $I_n(A_1, A_2) = S_n(A_1) + S_n(A_2) - S_n(A_1 \cup A_2)$ .

We checked our general results with IQH states at fillings  $\nu = 1, 2$ , both at zero and finite temperatures. In the latter case, we found that the gap does protect the MI and LN at asymptotically low  $T$ , but that they decay fast inside the gap. At large temperatures, we found that the LN decays with a power  $T^{-3/2}$ , which is the same as for mutual fluctuations, and is thus parametrically smaller compared with the MI that scales as  $T^{-1/2}$ . A physical understanding of these power laws would be needed.

It would be of interest to test our predictions, and to obtain the various coefficients in other states such as in the FQH effect, or other quantum critical systems, including interacting CFTs. In addition, the overlap matrix method that we developed should be useful to study the LN in other Gaussian states.

### Acknowledgements

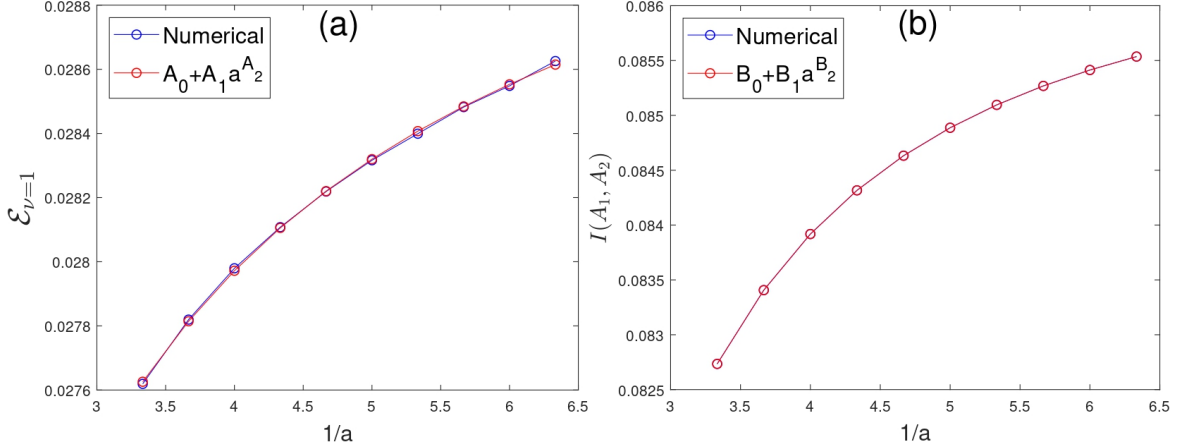
We thank Clément Berthiere, Rufus Boyack, Gilles Perez and Hassan Shapourian for useful discussions. The work is supported by a Discovery Grant from NSERC, a Canada Research Chair, and a grant from the Foundation Courtois. The numerical simulations were enabled in part by support provided by Calcul Québec and Compute Canada.

## Appendix A : Data

On a smooth bipartite geometry, the eigenvalues of the overlap matrix can be computed analytically. When the subregion is sufficiently large, the eigenvalue sum, Eq. (4.4.3) in the main text, can be approximated as an integral, and the boundary law coefficient computed by a numerical integral without being limited by the precision of the numerical diagonalization. See Ref. [23] for details. We compute the boundary law coefficients this way and summarize them in Table (4.2). In this geometry, the LN boundary law coefficient  $c_{\mathcal{E}}$  corresponds to the boundary law coefficient of  $S_{1/2}(A_1)$ , the Rényi entropy with index  $1/2$ .

**Table 4.2.** Boundary law coefficients for the LN  $\mathcal{E}$  and the MI  $I(A_1, A_2)$  in the IQH groundstates at fillings  $\nu = 1, 2$ .

$c_{\mathcal{E}, \nu=1}$	0.278936335
$c_{1, \nu=1}$	0.203290813
$c_{\mathcal{E}, \nu=2}$	0.495444054
$c_{1, \nu=2}$	0.356989866



**Fig. 4.17.** The numerical results of (a) the LN  $\mathcal{E}$  (b) the MI  $I(A_1, A_2)$  and the corresponding finite-size fits on the hourglass geometry at touching angle  $\theta = 0.3\pi$  and  $\nu = 1$  versus the inverse of the lattice spacing  $a$ , where  $A_0 = 0.030$ ,  $A_1 = -0.007$ ,  $A_2 = 0.973$ ,  $B_0 = 0.08661$ ,  $B_1 = -0.4306$ , and  $B_2 = 1.99990$ .

In the main text, we use two approaches to compute the LN  $\mathcal{E}$ : an overlap matrix approach and a real space discretization method. The latter method introduces a lattice spacing  $a$ . The final results thus have to be extracted with a finite-size analysis, by taking  $a \rightarrow 0$ . Fig. 4.17 shows the comparison between the numerical data and the finite-size fitting curve for an example angle,  $0.3\pi$ , for both the MI and the LN at  $\nu = 1$ .

On the other hand, the infinite-dimensional overlap matrices need to be truncated numerically to some size  $N_{\text{cutoff}}$ , which amounts to ignoring electrons far from the entanglement cut which contribute negligibly to the entanglement. However, one must also be careful about the various length scales in the problem. We must take  $L_y$ , the size of the torus, to be large enough with respect to the boundary  $l_y$  of subregion  $A = A_1 \cup A_2$  so that the size of subregion  $B$  is much larger than the size of subregion  $A$ . However, the size of the matrix  $N_{\text{cutoff}}$  also grows with the size of subregion  $B$  so one must take care not to make  $L_y$  too large. One must also be careful that the length of the shared boundary  $l_y$  is large enough so that we are in the area law regime (that is, the LN or MI respect the scaling laws Eq. (4.5.1) and (4.5.2), respectively). Thus, one must compute the MI and LN for various  $L_y$ ,  $l_y$  and  $N_{\text{cutoff}}$  until the numerical results converge to the desired precision. Tables (4.2)-(4.4) show the numerically computed LN  $\mathcal{E}$  and MI  $I(A_1, A_2)$  data on the adjacent and hourglass geometries, from which we see that both the real space discretization method and the overlap matrix approach give the same results at least up to the third digit. In general, we find it much easier to get the MI to converge than the LN. Nonetheless, at low temperatures and especially at  $T = 0$ , when the overlap matrices still have manageable numerical sizes, the overlap matrix technique gives more digits of precision than the real space approach for both the LN and the MI.

**Table 4.3.** Subleading terms of the MI,  $b^I(\theta)$  and the LN,  $b(\theta)$  for various angles  $\theta$  and fillings  $\nu$  on the adjacent geometry, using the overlap matrix and the real space lattice approaches.

$\theta$	$b^I(\theta)$				$b(\theta)$			
	$\nu = 1$		$\nu = 2$		$\nu = 1$		$\nu = 2$	
	Overlap	Lattice	Overlap	Lattice	Overlap	Lattice	Overlap	Lattice
$0.1\pi$	0.8492015	0.849	1.67012	1.670	0.6618	0.661(2)	1.286	1.289(3)
$0.2\pi$	0.397542	0.398	0.78262	0.782	0.3139	0.314(1)	0.608	0.608(2)
$0.3\pi$	0.250490	0.251	0.49354	0.493	0.2018	0.202(1)	0.389	0.390(1)
$0.4\pi$	0.188743	0.188	0.37220	0.372	0.1551	0.155(1)	0.299	0.299(1)
$0.5\pi$	0.170997	0.1710	0.33733	0.337	0.1417	0.142(1)	0.273	0.273(1)

**Table 4.4.** Mutual information  $I(A_1, A_2)$  and LN  $\mathcal{E}$  for various angles  $\theta$ , and fillings  $\nu$ , in the hourglass geometry. Results from the overlap matrix and the real space lattice approaches are shown.

$\theta$	$I(\theta)$				$\mathcal{E}(\theta)$			
	$\nu = 1$		$\nu = 2$		$\nu = 1$		$\nu = 2$	
	Overlap	Lattice	Overlap	Lattice	Overlap	Lattice	Overlap	Lattice
$0.2\pi$	0.04987285	0.04987	0.08264	0.08264	0.01049	0.011(2)	0.025	0.026(2)
$0.3\pi$	0.0866097	0.08661	0.15382	0.15382	0.02866	0.030(2)	0.063	0.064(2)
$0.4\pi$	0.1370208	0.13702	0.25344	0.25344	0.05978	0.061(1)	0.127	0.127(1)
$0.5\pi$	0.2080268	0.20803	0.39359	0.39359	0.1081	0.109(1)	0.225	0.225(1)
$0.6\pi$	0.31255950	0.31256	0.59920	0.5992	0.1822	0.183(1)	0.377	0.377(1)
$0.7\pi$	0.4801451	0.48015	0.92872	0.9287	0.3016	0.302(1)	0.621	0.621(1)
$0.8\pi$	0.7989219	0.7989	1.55694	1.557	0.5253	0.526(2)	1.077	1.077(2)

## Appendix B : Logarithmic negativity for uncorrelated subregions

Under the condition that there are no correlations between subregions  $A_1$  and  $A_2$ ,

$$C_{12} = C_{21} \cong 0 \quad (4.7.1)$$

we have

$$\Gamma_+ = \Gamma_- = \begin{bmatrix} -\Gamma_{11} & \pm i\Gamma_{12} \\ \pm i\Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2C_{11} - \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} - 2C_{22} \end{pmatrix}, \quad (4.7.2)$$

which is block-diagonal, and the composite correlation function  $C_\times$  is

$$C_\times = \frac{1}{2} \left( \mathbb{I} - (\mathbb{I} + \Gamma_+ \Gamma_-)^{-1} (\Gamma_+ + \Gamma_-) \right) = \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \Gamma_+^2)^{-1} (\mathbb{I} - \Gamma_+)^2. \quad (4.7.3)$$

The composite correlation function  $C_\times$  and the correlation function  $C_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}$  can be simultaneously diagonalized, and the eigenvalue  $\varepsilon$  of  $C_\times$  in this case can be expressed in terms of

the eigenvalue  $\zeta$  of the correlation function  $C_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}$ :

$$\varepsilon_j = \begin{cases} \frac{2(1-\zeta_j)^2}{1+(1-2\zeta_j)^2}, & j \in A_1 \\ \frac{2\zeta_j^2}{1+(1-2\zeta_j)^2}, & j \in A_2. \end{cases} \quad (4.7.4)$$

As a result, the LN is zero:

$$\mathcal{E} = \sum_j \ln \left[ \varepsilon_j^{\frac{1}{2}} + (1 - \varepsilon_j)^{\frac{1}{2}} \right] + \frac{1}{2} \sum_j \ln \left[ \zeta_j^2 + (1 - \zeta_j)^2 \right] = 0. \quad (4.7.5)$$

The condition (4.7.1) is held in the case of two distant subregions at zero temperature, or in the case of two disjoint subregions in high temperature limit,  $\beta \rightarrow 0$ . In both cases, the LN is vanishing.

## Appendix C : Low temperature expansion for the overlap matrices

In the low temperature region  $T \ll 1$ , the chemical potential for the IQH state at filling  $\nu = 1$  is almost a constant,  $\mu \cong 0.5$ , and the Fermi-Dirac distribution  $n_F(\epsilon_n)$  can be expanded in term of  $\lambda = e^{-\frac{\beta}{2}}$ . Consequently, the leading correction to the correlation function  $C_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}$  involves only the 0-th and 1-st Landau levels:

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} &= \sum_{n,k} n_F(\epsilon_n) \phi_{n,k}^*(\mathbf{r}) \phi_{n,k}(\mathbf{r}') \cong (1 - \lambda) C_{0,\mathbf{r},\mathbf{r}'} + \lambda C_{1,\mathbf{r},\mathbf{r}'} \\ &= (1 - \lambda) \sum_k \phi_{0,k}^*(\mathbf{r}) \phi_{0,k}(\mathbf{r}') + \lambda \sum_k \phi_{1,k}^*(\mathbf{r}) \phi_{1,k}(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (4.7.6)$$

Following this correlation function, the overlap matrices  $F^{(i)}$ , where  $i = 1,2$  corresponds to the overlap matrices on the subregion  $A_1$  and  $A_2$  respectively, can be constructed in the space composed of the 0-th and 1-st Landau levels:

$$F^{(i)} = \begin{pmatrix} (1 - \lambda)F_{0,0}^{(i)} & (1 - \lambda)F_{0,1}^{(i)} \\ \lambda F_{1,0}^{(i)} & \lambda F_{1,1}^{(i)} \end{pmatrix}, \quad (4.7.7)$$

where  $F_{n,m}^{(i)}$  are block overlap matrices in the  $n$ -th and  $m$ -th Landau levels, respectively, with the matrix elements defined as Eq. (4.4.8) in the main text.

## Appendix D : Correlation function in high temperature regions

We compute the correlation function  $C_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} = \sum_{n,k} n_F(\epsilon_n) \phi_{n,k}^*(\mathbf{r}) \phi_{n,k}(\mathbf{r}')$  in the high temperature regions  $T = 1/\beta \gg 1$ , where the Fermi-Dirac distribution  $n_F(\epsilon) = (1 + e^{\beta(n - \mu(\beta))})^{-1}$



can be approximated by the Boltzmann distribution  $e^{-\beta(n-\mu(\beta))}$  so that

$$C_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} \approx \frac{e^{\beta\mu(\beta)}}{\sqrt{\pi}L_y} \sum_k e^{ik(y'-y)} e^{-\frac{1}{2}(x+k)^2 - \frac{1}{2}(x'+k)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\beta n}}{2^n n!} H_n(x+k) H_n(x'+k). \quad (4.7.8)$$

We show how to evaluate exactly for the summation over the energy-level  $n$  in the high temperature correlation function, Eq. (4.7.8). Consider the following summation,

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\beta n}}{2^n n!} H_n(z) H_n(w). \quad (4.7.9)$$

Writing the Hermite polynomials in the summation using their integral form  $H_n(z) = \frac{(-2i)^n}{\sqrt{\pi}} e^{z^2} \int_{-\infty}^{\infty} u^n e^{-u^2 + 2izu} du$ , we have

$$\begin{aligned} P &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\beta n}}{2^n n!} \left[ \frac{(-2i)^n}{\sqrt{\pi}} e^{z^2} \int_{-\infty}^{\infty} u^n e^{-u^2 + 2izu} du \right] \left[ \frac{(-2i)^n}{\sqrt{\pi}} e^{w^2} \int_{-\infty}^{\infty} v^n e^{-v^2 + 2i w v} dv \right] \\ &= \frac{1}{\pi} e^{z^2} e^{w^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-u^2 - v^2 + 2izu + 2i w v} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\beta n}}{2^n n!} (-2i)^{2n} u^n v^n. \end{aligned} \quad (4.7.10)$$

Now, the infinite summation over the energy-level  $n$  can be done easily,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\beta n}}{2^n n!} (-2i)^{2n} u^n v^n = e^{-2e^{-\beta} uv}, \quad (4.7.11)$$

and after the integration we have

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{\pi} e^{z^2} e^{w^2} \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-u^2 + 2uiz} \int_{-\infty}^{\infty} dv e^{-v^2 + v(2iw - 2e^{-\beta} u)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-2\beta}}} e^{-\frac{(z^2 - 2zw e^{\beta} + w^2)}{e^{2\beta} - 1}}. \end{aligned} \quad (4.7.12)$$

By using the identity (4.7.12), one can verify that

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} &\approx \frac{e^{\beta\mu(\beta)}}{\sqrt{\pi}L_y} \sum_k e^{ik(y'-y)} e^{-\frac{1}{2}(x+k)^2 - \frac{1}{2}(x'+k)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\beta n}}{2^n n!} H_n(x+k) H_n(x'+k) \\ &= \frac{e^{\beta\mu(\beta)}}{\sqrt{\pi}L_y} \sum_k \left[ e^{ik(y'-y)} e^{-\frac{1}{2}(x+k)^2 - \frac{1}{2}(x'+k)^2} \sqrt{\frac{1}{1 - e^{-2\beta}}} \exp\left(-\frac{(x+k)^2 - 2(x+k)(x'+k)e^{\beta} + (x'+k)^2}{e^{2\beta} - 1}\right) \right]. \end{aligned} \quad (4.7.13)$$

The correlation function (4.7.13) can be approximated by using the integration to replace the momentum summation in the thermodynamic limit. Moreover, in the high temperature regions  $\beta \ll 1$ , the chemical potential for the grand canonical ensemble at filling  $\nu$  is  $\mu(\beta) \approx \frac{1}{\beta} \ln(\nu\beta)$ . As a result, at the filling  $\nu = 1$ , the correlation function (4.7.13) reduces to Eq. (4.6.4).

## Appendix E: Overlap matrix method in high temperature regions

In the limit  $\beta \rightarrow 0$ , the amplitude of the correlation matrix  $C_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}$  (4.6.4) is centralized near the region  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 < 2\beta$ , where the phase factor is almost vanishing. Therefore, the high temperature correlation function  $C_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}$  can be further approximated as

$$C_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} \approx \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2\beta}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}. \quad (4.7.14)$$

Based on  $C$ , Eq. (4.7.14), the corresponding composite correlation function  $C_\times$  in the high temperature region can be constructed by following Eq. (4.4.5). The correlation function  $C_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}$  (4.7.14) is now separable, which means that

$$C_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2\beta}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} = \sum_{k_x, k_y} \phi_{k_x, k_y}^{H,*}(\mathbf{r}) \phi_{k_x, k_y}^H(\mathbf{r}'), \quad (4.7.15)$$

where

$$\phi_{k_x, k_y}^H(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\beta}{L_x L_y}} e^{-\frac{\beta(k_x^2 + k_y^2)}{4} - ik_x x - ik_y y} = f_{k_x}(x) f_{k_y}(y), \quad (4.7.16)$$

and

$$f_{k_x}(x) = \frac{\beta^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{L_x}} e^{-\frac{\beta k_x^2}{4} - ik_x x}, \quad f_{k_y}(y) = \frac{\beta^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{L_y}} e^{-\frac{\beta k_y^2}{4} - ik_y y}. \quad (4.7.17)$$

As a result, the spectrum  $\{\zeta^H\}$  of  $C_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}$  can be computed through the overlap matrix:

$$F_{(k_x, k_y), (k'_x, k'_y)}^H = \int_A d^2\mathbf{r} \phi_{k_x, k_y}^{H,*}(\mathbf{r}) \phi_{k'_x, k'_y}^H(\mathbf{r}'), \quad (4.7.18)$$

and the spectrum  $\{\varepsilon^H\}$  of  $C_\times$  can also be extracted through the overlap matrices by following the methodology in Sec. (4.4.2).

On a rectangle where the two-dimensional integration can be decomposed as two independent one-dimensional integrations, the overlap matrix  $F_{(k_x, k_y), (k'_x, k'_y)}^H$  can be further written as a tensor product,

$$F_{(k_x, k_y), (k'_x, k'_y)}^H = F_{k_x, k'_x}^H \otimes F_{k_y, k'_y}^H \quad (4.7.19)$$

where

$$F_{k_x, k'_x}^H = \int dx f_{k_x}^*(x) f_{k'_x}(x), \quad F_{k_y, k'_y}^H = \int dy f_{k_y}^*(y) f_{k'_y}(y). \quad (4.7.20)$$

Therefore, in this case, the eigenvalue  $\zeta_{k_x, k_y}^H$  is just a product

$$\zeta_{k_x, k_y}^H = \zeta_{k_x}^H \zeta_{k_y}^H \quad (4.7.21)$$

among the eigenvalues  $\zeta_{k_x}^H$  and  $\zeta_{k_y}^H$  of the overlap matrices  $F_{k_x, k'_x}$  and  $F_{k_y, k'_y}$ , respectively.

Based on the overlap matrix (4.7.18), we can derive the spectrum  $\{\zeta^H\}$  of  $C_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}$  analytically on a torus  $D$ :

$$D : 0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y. \quad (4.7.22)$$

To satisfy the boundary condition on the torus  $D$ , we must have

$$k_x = \frac{2\pi n}{L_x}, \quad k_y = \frac{2\pi m}{L_y} \quad (4.7.23)$$

where  $n, m$  are integers. The overlap matrix is thus diagonal

$$F_{(k_x, k_y), (k'_x, k'_y)}^H = \delta_{k_x, k'_x} \delta_{k_y, k'_y} \zeta_{k_x, k_y}^H \quad (4.7.24)$$

with the eigenvalue

$$\zeta_{k_x, k_y}^H = \beta e^{-\frac{\beta(k_x^2 + k_y^2)}{2}}. \quad (4.7.25)$$

As a result, in the high temperature limit  $\beta \rightarrow 0$ , the thermal entropy  $S_A(T)$  on a torus is

$$\begin{aligned} S_A(T) &= \sum_{k_x, k_y} H(\zeta_{k_x, k_y}^H) = \frac{L_y L_x}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y H\left(\beta e^{-\frac{\beta(k_x^2 + k_y^2)}{2}}\right) \\ &\cong -\frac{L_y L_x}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y e^{-\frac{\beta(k_x^2 + k_y^2)}{2}} \beta \log \beta = -\frac{L_y L_x}{4\pi^2} \frac{2\pi}{\beta} \beta \log \beta = \frac{|A|}{2\pi} \log T, \end{aligned} \quad (4.7.26)$$

where  $|A| = L_x L_y$  and  $H(x) = -x \log x - (1-x) \log(1-x)$ .

## Appendix F : Temperature dependence of IQH charge fluctuation boundary law and corner coefficient

The charge fluctuations,  $\mathcal{F}(A)$ , of a system in some subregion  $A$  generally scale as [99, 100]

$$\mathcal{F}(A) = \alpha_{0, \text{fluc}} |A| + c_{\text{fluc}} |\partial A| - \alpha (1 + (\pi - \theta) \cot \theta) + \dots \quad (4.7.27)$$

The first term scales with the volume  $A$ , the second term scales with the boundary of  $A$  and the third term is the universal corner function,  $a_{\text{fluc}}(\theta)$ , Eq. (4.3.8). In this appendix, we study the temperature dependence of the charge fluctuation boundary law coefficient,  $c_{\text{fluc}}$ , and corner coefficient,  $\alpha$ , of  $\nu = 1$  IQH states. In particular, we show that at high temperatures, the boundary law coefficient decays as  $T^{-3/2}$  while the corner coefficient decays as  $T^{-2}$ . The temperature dependence of the charge fluctuations volume law coefficient and corner coefficient have previously been studied in Ref. [99].

The boundary law coefficient and corner coefficient of fluctuations are given by radial integrals of  $f(r)$ , the connected two-point correlation function which depends on the system under consideration. Specifically, in two dimensions, the boundary law and corner coefficient

are given by [99]

$$c_{\text{fluc}} = -2 \int_0^\infty dr r^2 f(r), \quad (4.7.28)$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} \int_0^\infty dr r^3 f(r). \quad (4.7.29)$$

For  $\nu = 1$  IQH state at finite temperature, the connected two-point correlation function is (in units of magnetic length  $l_B = 1$ )

$$f(r, T) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} n_F(\epsilon_n) \delta(\mathbf{r}) - \frac{e^{-\frac{r^2}{2}}}{4\pi^2} \sum_{n,k=0}^{\infty} n_F(\epsilon_n) L_n^0 \left( \frac{r^2}{2} \right) n_F(\epsilon_k) L_k^0 \left( \frac{r^2}{2} \right), \quad (4.7.30)$$

where  $L_n^0$  is the associated Laguerre polynomial, and  $n_F(\epsilon_n)$ , the Fermi-Dirac distribution, captures the temperature dependence. The integral Eq. (4.7.29) can be solved analytically for the corner coefficient

$$\alpha(T) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ n_F(\epsilon_n)^2 (2n+1) - n_F(\epsilon_n) f(\epsilon_{n+1}) (n+1) \right]. \quad (4.7.31)$$

In the high temperature limit, we directly work with the high temperature correlation function, Eq. (4.6.4) in the main text, and compute the high temperature charge density correlator from Wick's theorem:

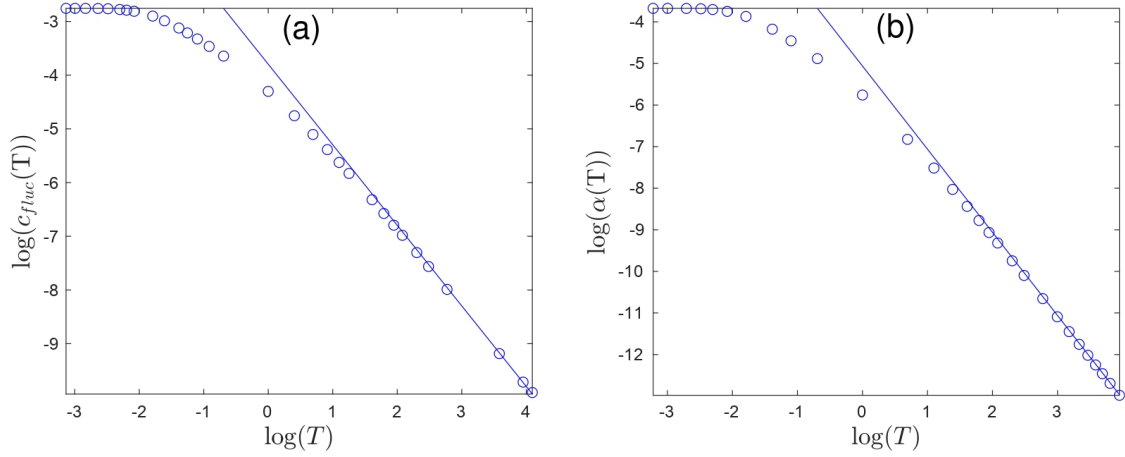
$$f(\mathbf{r}, T \rightarrow \infty) \approx \frac{1}{2\pi} \delta(\mathbf{r}) - \frac{1}{4\pi^2} e^{-\frac{r^2}{\beta}}. \quad (4.7.32)$$

We can then evaluate the integrals in Eq. (4.7.28) and Eq. (4.7.29). The contribution from the first term is vanishing and we obtain,

$$c_{\text{fluc}}(T \rightarrow \infty) = \frac{1}{8\pi^{3/2}} T^{-3/2}, \quad (4.7.33)$$

$$\alpha(T \rightarrow \infty) = \frac{1}{16\pi^2} T^{-2}. \quad (4.7.34)$$

We show the results in Fig. 4.18 as log-log plots. For the finite temperature boundary law term,  $c_{\text{fluc}}(T)$ , we numerically evaluate the integral in Eq. (4.7.28). Like in the main text, we work in the grand canonical ensemble, with the chemical potential solved self-consistently for a given temperature,  $T$ . We also plot the results for the temperature dependence of the corner term,  $\alpha(T)$ , Eq. (4.7.31). For both the boundary and corner coefficient, the power laws Eq. (4.7.33) and Eq. (4.7.34) are in good agreement with the high temperature numerical data.



**Fig. 4.18.** Log-log plots of (a) the boundary law coefficient,  $c_{\text{fluc}}(T)$  and (b) the corner coefficient,  $\alpha(T)$  as a function of temperature for IQH charge fluctuations at average filling  $\nu = 1$ . The solid lines represent the high temperature power laws, Eq. (4.7.33) and (4.7.34), which are proportional to  $T^{-3/2}$  for the boundary law coefficient and  $T^{-2}$  for the corner coefficient.



# Conclusion

---

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'intrication d'états de Hall quantiques en nous concentrant sur des états mixtes et en utilisant la LN fermionique et la MI comme outil principaux. Malgré le fait que la MI contienne des corrélations quantiques et classiques, elle se comporte de manière similaire à la LN. Au chapitre 2, nous avons passé en revue la différence entre la LN bosonique et fermionique, et les raisons pour lesquelles cette dernière est une mesure d'intrication avantageuse. Au chapitre 3, nous avons révisé la physique des états de Hall quantiques et les résultats connus sur leur structure d'intrication au niveau de l'EE d'états purs. Nous avons aussi montré que pour une géométrie simple sans coins, la loi du périmètre est identique pour la LN bosonique et fermionique.

Dans l'article, nous nous sommes concentrés sur l'intrication d'états mixtes qui proviennent de tripartitions. Nous avons étudié la MI et la LN sur des géométries avec coins, ce qui donne lieu à des corrections à la loi du périmètre. En utilisant des propriétés générales, nous avons fait des prédictions sur le comportement de cette correction angulaire pour la MI et la LN (pour des états purs et mixtes). Ces prédictions devraient s'appliquer à des états gaussiens comme les états IQH ou non-gaussiens comme les états FQH. Nous avons aussi comparé la dépendance angulaire des termes de coin de la MI et LN à celle des fluctuations mutuelles de charge, qui est connue exactement pour les états IQH. Pour des états gaussiens, nous avons testé nos prédictions numériquement en calculant la MI et la LN d'états IQH de remplissage  $\nu = 1$  et  $\nu = 2$ . Pour ce faire, nous avons développé deux méthodes; la première méthode est basée sur les matrices de chevauchement, dans l'espace des impulsions, et la seconde est une discrétisation de l'espace réel continu. Chaque méthode a des avantages. Pour les états IQH à zéro ou faible température, la méthode matrice de chevauchement est plus efficace et précise numériquement. Elle nous permet d'analyser le terme en coin de la LN et MI pour plusieurs angles. À température élevée, la méthode de discrétisation de l'espace réel est plus appropriée puisqu'il faut inclure plusieurs niveaux de Landau dans la fonction de corrélation. La méthode discrétisation nous a permis d'étudier les coefficients à la loi du périmètre et le terme en coin en fonction de température, pour un angle de  $\pi/2$ .

Nous avons étudié deux types de géométries tripartites : une géométrie adjacente où les sous-régions  $A_1$  et  $A_2$  partagent une frontière et forment des coins, ainsi qu'une géométrie en

forme de sablier (*hourglass*), où les sous-régions ne se touchent qu'en un seul point, éliminant la loi du périmètre et nous permettant de se concentrer sur les contributions des coins. Dans les deux géométries, les résultats des termes en coin de la LN et MI des états fondamentaux IQH suivent la fonction universelle qui dicte la dépendance angulaire de fluctuations de charge bipartite.

Pour les états IQH thermiques, nous avons étudié le coefficient de la loi du périmètre (géométrie adjacente) et le terme en coin (géométrie adjacente et sablier) en fonction de températures proportionnelles au *gap* cyclotron. Nous avons trouvé qu'initialement, les deux quantités sont stables aux effets de température, puis qu'elles décroissent. À températures faibles, nous avons observé que la LN reçoit des corrections exponentiellement faibles et négatives dues au *gap*. Finalement, nous avons étudié les états IQH dans une limite température élevée,  $T \rightarrow \infty$ . Dans cette limite, la LN, MI et les fluctuations de charge bipartite décroissent comme des lois de puissance en fonction de la température.

Nos résultats ouvrent la porte sur plusieurs nouvelles avenues de recherche. D'une part, nous pourrions utiliser nos deux méthodes numériques pour calculer la LN d'autres systèmes fermioniques gaussiens définis dans le continuum. Il serait aussi intéressant de trouver une méthode pour calculer la LN de systèmes FQH mixtes afin de tester nos prédictions sur la forme de la fonction angulaire. Enfin, il serait intéressant de creuser d'avantage la connexion entre les fluctuations de charge et l'intrication des systèmes de Hall.



# Références bibliographiques

---

- [1] H. SHAPOURIAN et S. RYU : Entanglement negativity of fermions: Monotonicity, separability criterion, and classification of few-mode states. *Phys. Rev. A*, 99:022310, Février 2019.
- [2] K. von KLITZING : The quantized Hall effect. *Rev. Mod. Phys.*, 58:519–531, Juillet 1986.
- [3] P.-Y. CHANG et X. WEN : Entanglement negativity in free-fermion systems: An overlap matrix approach. *Phys. Rev. B*, 93:195140, Mai 2016.
- [4] A. EINSTEIN, B. PODOLSKY et N. ROSEN : Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47:777–780, 1935.
- [5] E. SCHRÖDINGER : Probability relations between separated systems. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 32(3):446–452, 1936.
- [6] E. SCHRÖDINGER : Discussion of probability relations between separated systems. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 31(4):555–563, 1935.
- [7] M. A. NIELSEN et I. L. CHUANG : *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press, 2010.
- [8] F. ARUTE, K. ARYA et R. et al. BABBUSH : Quantum supremacy using a programmable superconducting processor. *Nature*, 574:505–510, 2019.
- [9] D. DEUTSCH : Quantum theory, the Church–Turing principle and the universal quantum computer. *Proceedings of the Royal Society A*, 400:97–117, 1985.
- [10] R. FEYNMAN : Simulating physics with computers. *International Journal of Theoretical Physics*, 21:467–488, 1982.
- [11] A. K. EKERT : Quantum cryptography based on Bell’s theorem. *Phys. Rev. Lett.*, 67:661–663, 1991.
- [12] L. BOMBELLI, R. K. KOUL, J. LEE et R. D. SORKIN : Quantum source of entropy for black holes. *Phys. Rev. D*, 34:373–383, Juillet 1986.
- [13] M. SREDNICKI : Entropy and area. *Phys. Rev. Lett.*, 71:666–669, Aout 1993.
- [14] L. AMICO, R. FAZIO, A. OSTERLOH et V. VEDRAL : Entanglement in many-body systems. *Rev. Mod. Phys.*, 80:517–576, Mai 2008.
- [15] N. LAFLORENCIE : Quantum entanglement in condensed matter systems. *Physics Reports*, 646:1–59, 2016.
- [16] A. OSTERLOH, L. AMICO et R. FALCI, G. FAZIO : Scaling of entanglement close to a quantum phase transition. *Nature*, pages 608–610, avril 2002.
- [17] A. EKERT et P. L. KNIGHT : Entangled quantum systems and the Schmidt decomposition. *63*, 63, 1995.
- [18] J. von NEUMANN : *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton University Press, 2018.

- [19] E. H. LIEB et H. ARAKIM : Entropy inequalities. *Communications in Mathematical Physics*, 18:160–170, 1970.
- [20] E. H. LIEB et M. B. RUSKAI : Proof of the strong subadditivity of quantum-mechanical entropy. *Journal of Mathematical Physics*, 14, Mars 1973.
- [21] F. BRANDÃO et M. HORODECKI : An area law for entanglement from exponential decay of correlations. *Nature*, 9:721–726, 2013.
- [22] J. EISERT, M. CRAMER et M. B. PLENIO : Colloquium: Area laws for the entanglement entropy. *Rev. Mod. Phys.*, 82:277–306, Février 2010.
- [23] I. D. RODRÍGUEZ et G. SIERRA : Entanglement entropy of integer quantum Hall states. *Phys. Rev. B*, 80:153303, Octobre 2009.
- [24] A. KITAEV et J. PRESKILL : Topological entanglement entropy. *Phys. Rev. Lett.*, 96:110404, Mars 2006.
- [25] H. CASINI et M. HUERTA : Universal terms for the entanglement entropy in 2+1 dimensions. *Nuclear Physics B*, 764(3):183–201, Mars 2007.
- [26] H. CASINI, M. HUERTA et L. LEITAO : Entanglement entropy for a Dirac fermion in three dimensions: Vertex contribution. *Nuclear Physics B*, 814(3):594–609, 2009.
- [27] M. LEVIN et X-G. WEN : Detecting topological order in a ground state wave function. *Phys. Rev. Lett.*, 96:110405, Mars 2006.
- [28] A. RÉNYI : On the foundations of information theory. *Review of the International Statistical Institute*, 33:1–14, 1965.
- [29] G. VIDAL, J. I. LATORRE, E. RICO et A. KITAEV : Entanglement in quantum critical phenomena. *Phys. Rev. Lett.*, 90:227902, Juin 2003.
- [30] R. ISLAM, R. MA, P. PREISS et AL. : Measuring entanglement entropy in a quantum many-body system. *Nature*, 528:77–83, 2015.
- [31] R. HORODECKI, P. HORODECKI, M. HORODECKI et K. HORODECKI : Quantum entanglement. *Rev. Mod. Phys.*, 81:865–942, Juin 2009.
- [32] M. HORODECKI, P. HORODECKI et R. HORODECKI : Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions. *Physics Letters A*, 223(1):1–8, 1996.
- [33] S. GHARIBIAN : Strong np-hardness of the quantum separability problem. *Quantum Information and Computation*, 10:343–360, 2010.
- [34] A. PERES : Separability criterion for density matrices. *Phys. Rev. Lett.*, 77:1413–1415, Aout 1996.
- [35] P. HORODECKI : Separability criterion and inseparable mixed states with positive partial transposition. *Physics Letters A*, 232(5):333–339, 1997.
- [36] C.P. HERZOG : Universal thermal corrections to entanglement entropy for conformal field theories on spheres. *Journal of High Energy Physics*, 2014, Mars 2014.
- [37] M. WOLF, M., F. VERSTRAETE, M. B. HASTINGS et J. I. CIRAC : Area laws in quantum systems: Mutual information and correlations. *Phys. Rev. Lett.*, 100:070502, Février 2008.
- [38] M. TAJIK et AL. : Experimental verification of the area law of mutual information in quantum field theory, Juin 2022.
- [39] G. VIDAL et R. WERNER : A computable measure of entanglement. *Phys. Rev. A*, 65, 2002.
- [40] M. B. PLENIO : Logarithmic negativity: A full entanglement monotone that is not convex. *Phys. Rev. Lett.*, 95:090503, Aout 2005.
- [41] P. RUGGIERO, V. ALBA et P. CALABRESE : Entanglement negativity in random spin chains. *Phys. Rev. B*, 94:035152, Juillet 2016.

- [42] H. WICHTERICH, J. MOLINA-VILAPLANA et S. BOSE : Scaling of entanglement between separated blocks in spin chains at criticality. *Phys. Rev. A*, 80:010304, Juillet 2009.
- [43] A. COSER, E. TONNI et P. CALABRESE : Partial transpose of two disjoint blocks in XY spin chains. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2015, Aout 2015.
- [44] K. AUDENAERT, J. EISERT, M. B. PLENIO et R. F. WERNER : Entanglement properties of the harmonic chain. *Phys. Rev. A*, 66:042327, Octobre 2002.
- [45] A. FERRARO, D. CAVALCANTI et A. GARCÍA-SAEZ, A. and Acín : Thermal bound entanglement in macroscopic systems and area law. *Phys. Rev. Lett.*, 100:080502, Février 2008.
- [46] C. CASTELNOVO : Negativity and topological order in the toric code. *Phys. Rev. A*, 88:042319, Octobre 2013.
- [47] Y. A. LEE et G. VIDAL : Entanglement negativity and topological order. *Phys. Rev. A*, 88:042318, Octobre 2013.
- [48] Y. LIU, R. SOHAL et Shinsei KUDLER-FLAM, J. and Ryu : Multipartitioning topological phases by vertex states and quantum entanglement. *Phys. Rev. B*, 105:115107, Mars 2022.
- [49] X. WEN, PY. CHANG et S. RYU : Topological entanglement negativity in Chern-Simons theories. *High energy physics*, 2016, Septembre 2016.
- [50] O. HART et C. CASTELNOVO : Entanglement negativity and sudden death in the toric code at finite temperature. *Phys. Rev. B*, 97:144410, Avril 2018.
- [51] N. E. SHERMAN, T. DEVAKUL, M. B. HASTINGS et R. R. P. SINGH : Nonzero-temperature entanglement negativity of quantum spin models: Area law, linked cluster expansions, and sudden death. *Phys. Rev. E*, 93:022128, Février 2016.
- [52] T-C LU et T. GROVER : Structure of quantum entanglement at a finite temperature critical point. *Phys. Rev. Research*, 2:043345, Décembre 2020.
- [53] V. EISLER et Z. ZIMBORÁS : On the partial transpose of fermionic gaussian states. *New Journal of Physics*, 17(5):053048, Mai 2015.
- [54] V. EISLER et Z. ZIMBORÁS : Entanglement negativity in two-dimensional free lattice models. *Phys. Rev. B*, 93:115148, Mars 2016.
- [55] H. SHAPOURIAN et S. RYU : Partial time-reversal transformation and entanglement negativity in fermionic systems. *Phys. Rev. B*, 95, 2017.
- [56] H. SHAPOURIAN et S. RYU : Finite-temperature entanglement negativity of free fermions. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2019(4):043106, Avril 2019.
- [57] K. v. KLITZING, G. DORDA et M. PEPPER : New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized Hall resistance. *Phys. Rev. Lett.*, 45:494–497, Aout 1980.
- [58] D. C. TSUI, H. L. STORMER et A. C. GOSSARD : Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit. *Phys. Rev. Lett.*, 48:1559–1562, Mai 1982.
- [59] R. E. PRANGE et S. GIRVIN : *The Quantum Hall Effect, 2nd Ed.* Springer-Verlag, 1990.
- [60] B. SIROIS, L. M. FOURNIER, J. LEDUC et W. WITCZAK-KREMPA : Geometric entanglement in integer quantum Hall states. *Physical Review B*, 103(11), 2021.
- [61] P. BUENO et R. C. MYERS : Corner contributions to holographic entanglement entropy. *Journal of High Energy Physics*, 2015(8):68, Aout 2015.
- [62] M.B. PLENIO et S. VIRMANI : An introduction to entanglement measures. *Quantum Information Computation*, 7:1–51, Janvier 2007.
- [63] M. HORODECKI, P. HORODECKI et R. HORODECKI : Mixed-state entanglement and distillation: Is there a “bound” entanglement in nature? *Phys. Rev. Lett.*, 80:5239–5242, Juin 1998.

- [64] M. GAUDIN : Une démonstration simplifiée du théorème de Wick en mécanique statistique. *Nuclear Physics*, 15:89–91, 1960.
- [65] L. LAMI, A. SERAFINI et G. ADESSO : Gaussian entanglement revisited. *New Journal of Physics*, 20(2):023030, Février 2018.
- [66] R. SIMON : Peres-horodecki separability criterion for continuous variable systems. *Phys. Rev. Lett.*, 84:2726–2729, Mars 2000.
- [67] E. WIGNER : On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. *Phys. Rev.*, 40:749–759, Juin 1932.
- [68] P. CALABRESE, J. CARDY et E. TONNI : Entanglement negativity in quantum field theory. *Phys. Rev. Lett.*, 109:130502, Septembre 2012.
- [69] P. CALABRESE, J. CARDY et E. TONNI : Finite temperature entanglement negativity in conformal field theory. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 48(1):015006, Décembre 2014.
- [70] J. EISERT, V. EISLER et Z. ZIMBORÁS : Entanglement negativity bounds for fermionic gaussian states. *Phys. Rev. B*, 97:165123, Avril 2018.
- [71] A. KITAEV : Unpaired Majorana fermions in quantum wires. *Physics-Uspekhi*, 44(10S):131–136, Octobre 2001.
- [72] A. ATLAND et B. SIMONS : *Condensed Matter Field Theory, Second Edition*. Cambridge University Press, 2010.
- [73] J.J SAKURAI et J. NAPOLITANO : *MODERN QUANTUM MECHANICS Second Edition*. Pearson, 2010.
- [74] C. P. HERZOG et Y. WANG : Estimation for entanglement negativity of free fermions. *J. Stat. Mech.*, 2016, Juillet 2016.
- [75] R. F. WERNER : Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model. *Phys. Rev. A*, 40:4277–4281, Octobre 1989.
- [76] H CASINI et M HUERTA : Entanglement entropy in free quantum field theory. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 42(50):504007, Décembre 2009.
- [77] P. CALABRESE et J. CARDY : Entanglement entropy and conformal field theory. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 42(50):504005, Décembre 2009.
- [78] I. PESCHEL : Calculation of reduced density matrices from correlation functions. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 36(14):L205–L208, Mars 2003.
- [79] D. TONG : The quantum Hall effect. <https://arxiv.org/abs/1606.06687>, Janvier 2016. [Notes de cours en ligne].
- [80] S. M. GIRVIN et K. YANG : *Modern Condensed Matter Physics*. Cambridge University Press, 2019.
- [81] R. E. PRANGE : Quantized Hall resistance and the measurement of the fine-structure constant. *Phys. Rev. B*, 23, Mai 1981.
- [82] R. B. LAUGHLIN : Quantized Hall conductivity in two dimensions. *Phys. Rev. B*, 23, Mai 1981.
- [83] H. L. STORMER, D. C. TSUI et A. C. GOSSARD : The fractional quantum Hall effect. *Rev. Mod. Phys.*, 71, Mars 1999.
- [84] R. B. LAUGHLIN : Anomalous quantum Hall effect: An incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations. *Phys. Rev. Lett.*, 50:1395–1398, Mai 1983.
- [85] D. AROVAS, J. R. SCHRIEFFER et F. WILCZEK : Fractional statistics and the quantum Hall effect. *Phys. Rev. Lett.*, 53:722–723, Aout 1984.
- [86] P-G ROZON, P-A BOLTEAU et W. WITCZAK-KREMPA : Geometric entanglement in the integer quantum Hall state at  $\nu = 1$  with boundaries. *Phys. Rev. B*, 102:155417, Octobre 2020.

- [87] P. CALABRESE, M. MINTCHEV et E. VICARI : The entanglement entropy of one-dimensional systems in continuous and homogeneous space. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2011, Septembre 2011.
- [88] S. DONG, E. FRADKIN, R.G. LEIGH et S NOWLING : Topological entanglement entropy in Chern-Simons theories and quantum Hall fluids. *Journal of High Energy Physics*, 2008, Mai 2008.
- [89] O. S. ZOZULYA, M. HAQUE, K. SCHOUTENS et E. H. REZAYI : Bipartite entanglement entropy in fractional quantum Hall states. *Phys. Rev. B*, 76:125310, Septembre 2007.
- [90] Claudio CASTELNOVO et Claudio CHAMON : Entanglement and topological entropy of the toric code at finite temperature. *Phys. Rev. B*, 76:184442, Novembre 2007.
- [91] E. FRADKIN et J. E. MOORE : Entanglement entropy of 2d conformal quantum critical points: Hearing the shape of a quantum drum. *Phys. Rev. Lett.*, 97:050404, Aout 2006.
- [92] P. BUENO, R. C. MYERS et W. WITCZAK-KREMPA : Universality of corner entanglement in conformal field theories. *Phys. Rev. Lett.*, 115:021602, Juillet 2015.
- [93] J. HELMES, L E. HAYWARD SIERENS, A. CHANDRAN, W. WITCZAK-KREMPA et R. G. MELKO : Universal corner entanglement of Dirac fermions and gapless bosons from the continuum to the lattice. *Phys. Rev. B*, 94:125142, Septembre 2016.
- [94] T. HIRATA et T. TAKAYANAGI : AdS/CFT and strong subadditivity of entanglement entropy. *Journal of High Energy Physics*, 2007(02):042–042, Février 2007.
- [95] L. CHARLES et B. ESTIENNE : Entanglement entropy and Berezin–Toeplitz operators. *Communications in Mathematical Physics*, 376:521–554, Mai 2020.
- [96] B. ESTIENNE et J-M STÉPHAN : Entanglement spectroscopy of chiral edge modes in the quantum Hall effect. *Phys. Rev. B*, 101:115136, Mars 2020.
- [97] M. HAQUE, O. ZOZULYA et K. SCHOUTENS : Entanglement entropy in fermionic Laughlin states. *Phys. Rev. Lett.*, 98:060401, Février 2007.
- [98] I. RODRÍGUEZ et G. SIERRA : Entanglement entropy of integer quantum Hall states in polygonal domains. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2010(12):P12033, Décembre 2010.
- [99] B. ESTIENNE, J.-M STÉPHAN et W. WITCZAK-KREMPA : Cornering the universal shape of fluctuations. *Nature Communications*, 13(1):287, Janvier 2022.
- [100] H. F. SONG, S. RACHEL, C. FLINDT, I. KLICH, N. LAFLORENCIE et K. LE HUR : Bipartite fluctuations as a probe of many-body entanglement. *Phys. Rev. B*, 85:035409, Janvier 2012.
- [101] T. MARTIN : Noise in mesoscopic physics. In H. BOUCHIAT, Y. GEFEN, S. GUÉRON, G. MONTAMBAUX et J. DALIBARD, éditeurs : *Nanophysics: Coherence and Transport*, volume 81 de *Les Houches*, pages 283–359. Elsevier, 2005.
- [102] I. KLICH et L. LEVITOV : Quantum noise as an entanglement meter. *Phys. Rev. Lett.*, 102:100502, Mar 2009.
- [103] A. PETRESCU, F. SONG et AL. : Fluctuations and entanglement spectrum in quantum Hall states. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2014(P10005), October 2014.
- [104] C. DE NOBILI, A. COSER et E. TONNI : Entanglement negativity in a two dimensional harmonic lattice: area law and corner contributions. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2016(8):083102, 2016.
- [105] H. LI et F. D. M. HALDANE : Entanglement spectrum as a generalization of entanglement entropy: Identification of topological order in non-abelian fractional quantum Hall effect states. *Phys. Rev. Lett.*, 101:010504, Juillet 2008.

- [106] M. Žnidarič, T. PROSEN et P. Prelovšek : Many-body localization in the Heisenberg XXZ magnet in a random field. *Phys. Rev. B*, 77:064426, Février 2008.
- [107] J. H. BARDARSON, F. POLLMANN et J. E. MOORE : Unbounded growth of entanglement in models of many-body localization. *Phys. Rev. Lett.*, 109:017202, Juillet 2012.
- [108] S. D. GERAEDTS, R. NANDKISHORE et N. REGNAULT : Many-body localization and thermalization: Insights from the entanglement spectrum. *Phys. Rev. B*, 93:174202, Mai 2016.
- [109] P. CALABRESE, L. TAGLIACOZZO et E. TONNI : Entanglement negativity in the critical Ising chain. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2013(05):P05002, Mai 2013.
- [110] H. SHAPOURIAN, P. RUGGIERO, Ryu S. et P. CALABRESE : Twisted and untwisted negativity spectrum of free fermions. *SciPost Phys.*, 7:37, Septembre 2019.
- [111] *This is true even for many-body pure states. One can verify that by expressing the fermionic PT in the fermionic occupation number basis. See Ref. [1].*
- [112] C-M. JIAN, I. H. KIM et X-L. QI : Long-range mutual information and topological uncertainty principle, 2015.
- [113] A B KALLIN, E M SToudenMIRE, P FENDLEY, R R P SINGH et R G MELKO : Corner contribution to the entanglement entropy of an O(3) quantum critical point in 2 + 1 dimensions. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2014(6):P06009, Juin 2014.
- [114] E. M. SToudenMIRE, P. GUSTAINIS, R. JOHAL, S. WESSEL et R.G. MELKO : Corner contribution to the entanglement entropy of strongly interacting O(2) quantum critical systems in 2 + 1 dimensions. *Physical Review B*, 90(23), Décembre 2014.
- [115] I. A. KOVÁCS et F. IGLÓI : Universal logarithmic terms in the entanglement entropy of 2d, 3d and 4d random transverse-field Ising models. *EPL (Europhysics Letters)*, 97(6):67009, Mars 2012.
- [116] P. BUENO, R C. MYERS et W. WITCZAK-KREMPE : Universality of corner entanglement in conformal field theories. *Phys. Rev. Lett.*, 115:021602, Juillet 2015.
- [117] S. WHITSITT, W. WITCZAK-KREMPE et S. SACHDEV : Entanglement entropy of large-N Wilson-Fisher conformal field theory. *Phys. Rev. B*, 95:045148, Janvier 2017.
- [118] W. WITCZAK-KREMPE : Entanglement susceptibilities and universal geometric entanglement entropy. *Physical Review B*, 99(7), Février 2019.
- [119] M. R. M. MOZAFFAR, A. MOLLABASHI et F. OMIDI : Holographic mutual information for singular surfaces. *Journal of High Energy Physics*, 2015(12):1–32, Décembre 2015.
- [120] L. HERVIOU, K. LE HUR et C. MORA : Bipartite fluctuations and topology of Dirac and Weyl systems. *Phys. Rev. B*, 99:075133, Février 2019.
- [121] M. FAGOTTI et P. CALABRESE : Entanglement entropy of two disjoint blocks in XY chains. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2010(04):P04016, Avril 2010.
- [122] C. BERTHIERE, B. ESTIENNE, J.-M STÉPHAN et W. WITCZAK-KREMPE : *Article forthcoming*, 2022.

# Annexe A

---

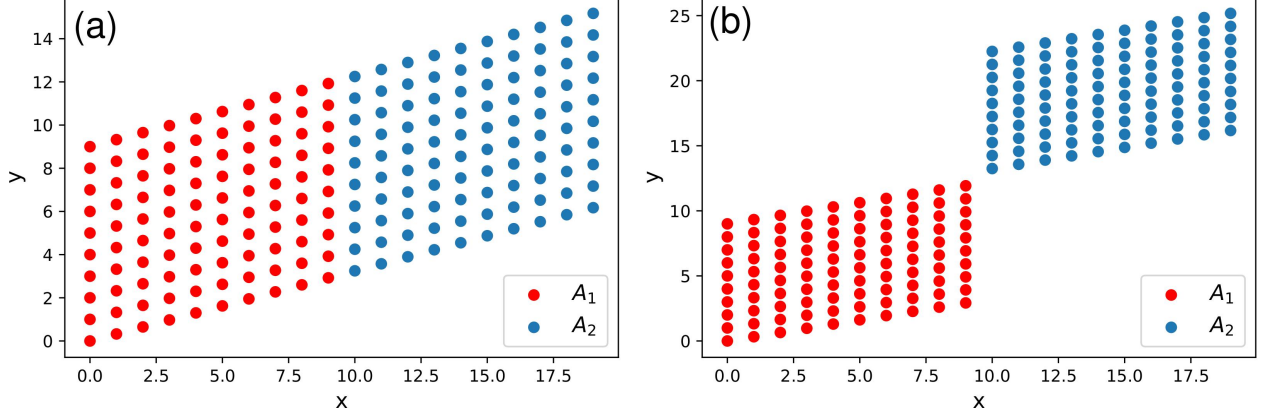
## Détails numériques

Dans l'article, nous présentons deux méthodes pour calculer la LN d'états IQH : une méthode basée sur les matrices de chevauchement (*overlap matrix*) dans l'espace des impulsions et une approche où nous discrétisons l'espace réel continu. Le but de cette section est de fournir des détails numériques additionnels à ceux fournis dans l'annexe A de l'article, afin qu'autrui puisse adapter nos méthodes pour calculer la LN d'états fermioniques gaussiens. Les deux méthodes présentées sont basées sur le fait que pour un système gaussien, les valeurs propres d'une matrice densité réduite sont reliées au spectre de sa fonction de corrélation deux-points [78].

### A.1. Matrice de chevauchement

Pour des systèmes continus comme les états IQH, il est naturel de travailler dans une base déjà discrétisée, comme l'espace des impulsions. Les matrices de chevauchement sont définies à l'éq. (3.1.6) en intégrant sur la sous-région pertinente. Il est nécessaire de faire quelques choix judicieux pour s'assurer que les résultats convergent. D'une part, il faut définir la grandeur de la matrice de chevauchement,  $n_0$ . Les matrices de chevauchement sont de dimension infini. Numériquement, il faut donc les tronquer, en ignorant les électrons avec forte valeur absolue d'impulsion  $k$ . Ces électrons sont loin de la frontière entre  $A_1$  et  $A_2$  et contribuent à l'intrication de manière négligeable. D'autre part, il faut soigneusement définir les sous-régions  $A$  et  $B$ . D'abord, la frontière  $l_y$  entre les sous-régions  $A_1$  et  $A_2$  doit être suffisamment grande pour garantir que nous sommes dans le régime de la loi du périmètre. La hauteur du tore,  $L_y$ , doit également être suffisamment grande pour que la sous-région  $B$  soit beaucoup plus grande que la sous-région  $A$ , mais ceci implique une plus grande matrice de chevauchement.

Nous faisons donc varier  $l_y$ ,  $L_y$  et  $n_0$  jusqu'à ce que les données convergent vers le troisième chiffre. Nous présentons dans les tableaux de la prochaine section les données de convergence pour tous les angles pour un remplissage moyen  $\nu = 2$  sur la géométrie adjacente et la



**Fig. A.1.** Exemple d'une pixélisation des sous-régions  $A_1$  et  $A_2$  définies dans le continuum avec constante de réseau  $a = 1$  pour les géométries (a) adjacente et (b) sablier, d'angle  $0.4\pi$ .

géométrie en sablier. Pour un remplissage moyen  $\nu = 2$ , les matrices de chevauchement ont une taille de  $2n_0 \times 2n_0$  et les résultats convergent plus lentement que pour  $\nu = 1$ . Nous terminons cette section en soulignant que les matrices de chevauchement sont beaucoup plus précises que la discrétisation de l'espace réel à zéro et à basse température. Néanmoins, à des températures plus élevées, lorsque que nous devons inclure de nombreux niveaux de Landau, les matrices de chevauchement deviennent trop grandes à gérer numériquement et la discrétisation de l'espace réel est une méthode avantageuse.

## A.2. Discrétisation de l'espace réel

Pour calculer les matrices de corrélation dans l'espace réel, il faut d'abord produire numériquement les sous-régions sur lesquelles les fonctions de corrélation sont échantillonnées. Quand l'espace réel est discret, comme sur réseau, cela ne pose aucun problème. Cependant, dans le continuum, il faut pixéliser la sous-région en introduisant une constante de réseau,  $a$ . Des exemples des pixélisations des sous-région sont illustrés à la Fig. A.1.

À partir des sous-régions, nous obtenons des tableaux de points  $\{x_i, y_i\}$  appartenant aux sous-régions  $A_i$ ,  $i = \{1, 2\}$ . Avec ces points, nous calculons la matrice  $C_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}$  sur toute la sous-région A (à partir de l'éq. (4.4.17) pour les états IQH avec un remplissage  $\nu = 1, 2$ ). En prévision de l'étape suivante, il est utile de construire la matrice avec des blocs  $C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{21}$  et  $C_{22}$ , où les indices indiquent si  $\mathbf{r}$  ( $\mathbf{r}'$ ) appartient à la sous-région  $A_1$  ou  $A_2$ . Ensuite, nous définissons la matrice de covariance,  $\Gamma = \mathbb{I} - 2C$  et nous créons les deux matrices blocs,  $\Gamma_+$  et  $\Gamma_-$ , selon l'éq. (4.4.4). Avec ces matrices, nous effectuons les opérations prescrites par l'éq. (4.4.20) pour obtenir la matrice  $C_\times$  sur l'espace discrétisé. Il ne reste plus qu'à diagonaliser les deux matrices de corrélation et à sommer les valeurs propres pour obtenir les EE, MI et LN des équations (2.3.9), (1.1.10) et (2.3.11), respectivement. Puisque les mesures d'intrication dépendent maintenant d'une nouvelle échelle de longueur, soit la constante de



réseau  $a$ , nous effectuons une analyse de taille finie pour extraire les résultats dans la limite du continuum,  $a \rightarrow 0$ . Nous avons constaté que les données numériques sont instables pour des constantes de réseaux inférieures à  $a \approx 0.1$ . Ceci limite le nombre de chiffres de précision sur les données présentées aux tableaux 4.3 et 4.4 dans l'article. Pour extraire le terme en coin, nous soustrayons le terme du périmètre approprié en utilisant les coefficients donnés dans le tableau 4.2. Pour la LN et MI, les termes de coin sont

$$b(\theta_1, \theta_2) = c_\varepsilon l_y - \mathcal{E}, \quad (\text{A.2.1})$$

$$b^I(\theta_1, \theta_2) = 2c_1 l_y - I. \quad (\text{A.2.2})$$

À température finie, il y a complexité supplémentaire numériquement puisqu'il faut traiter plusieurs niveaux de Landau. Nous devons remplir la fonction de corrélation donnée par  $C_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} = \sum_{n,k} n_F(\epsilon_n) \phi_{n,k}^*(\mathbf{r}) \phi_{n,k}(\mathbf{r}')$  où  $n_F(\epsilon_n) = (1 + \exp(\epsilon_n - \mu)/T))^{-1}$  est la distribution de Fermi-Dirac. La procédure est alors la suivante : pour une température inverse  $\beta$  et un remplissage moyen  $\nu$ , nous calculons le potentiel chimique  $\mu$  numériquement. Soit nous résolvons l'équation suivante,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 + e^{\beta(n-\mu)})^{-1} = \nu. \quad (\text{A.2.3})$$

Ensuite, nous calculons la distribution de Fermi-Dirac pour chaque niveau de Landau  $n$  jusqu'à une coupure où la contribution est essentiellement nulle. Nous trouvons que nous pouvons considérer au maximum 20 niveaux de Landau jusqu'à ce que les polynômes d'Hermitte de la fonction d'onde deviennent instables. Une fois que la matrice de corrélation est remplie, la procédure est la même que pour  $T = 0$ , y compris l'analyse de taille finie. À température finie, la température est une autre échelle de longueur à considérer, en s'assurant que  $a \ll \beta$ . Dans la limite de fortes températures, les constantes de réseaux requises pour obtenir des résultats significatifs sont très petites,  $a \leq 0.1$ . Nous trouvons qu'il est plus facile de développer une méthode de matrices de chevauchement spécifiquement adaptée à la fonction de corrélation température élevée, tel que présenté dans l'annexe E de l'article.

Dans l'ensemble, discrétiser l'espace réel est moins précis qu'utiliser les matrices de chevauchement puisqu'il faut inclure une constante de réseau artificielle. La méthode de discrétisation a aussi un coût numérique important. Cependant, cette méthode présente des avantages comparée aux matrices de chevauchement, quand on doit considérer de nombreux états, comme à température finie.

### A.3. Données numériques

**Tableau A.1.** Convergence des termes de coin de la LN,  $b(\theta)$ , et de la MI,  $b^I(\theta)$ , pour la géométrie adjacente, remplissage  $\nu = 2$  avec la méthode de matrices de chevauchement.

$\theta = 0.1\pi$

$l_y = 20$	$n_0 = 500$ $L_y = 200$	$b(\theta) = 1.28597$ $b^I(\theta) = 1.66999$
	$n_0 = 900$ $L_y = 300$	$b(\theta) = 1.28594$ $b^I(\theta) = 1.66999$
$l_y = 25$	$n_0 = 1200$ $L_y = 400$	$b(\theta) = 1.28631$ $b^I(\theta) = 1.67012$
	$n_0 = 1500$ $L_y = 500$	$b(\theta) = 1.28625$ $b^I(\theta) = 1.67012$
$l_y = 28$	$n_0 = 1400$ $L_y = 300$	$b(\theta) = 1.28632$ $b^I(\theta) = 1.67012$
	$n_0 = 1600$ $L_y = 350$	$b(\theta) = 1.28623$ $b^I(\theta) = 1.67012$
$l_y = 30$	$n_0 = 2000$ $L_y = 300$	$b(\theta) = 1.28620$ $b^I(\theta) = 1.67012$

$\theta = 0.2\pi$

$l_y = 20$	$n_0 = 500$ $L_y = 200$	$b(\theta) = 0.60795$ $b^I(\theta) = 0.78262$
$l_y = 25$	$n_0 = 1200$ $L_y = 400$	$b(\theta) = 0.60789$ $b^I(\theta) = 0.78262$
$l_y = 28$	$n_0 = 1400$ $L_y = 300$	$b(\theta) = 0.60788$ $b^I(\theta) = 0.78262$

$\theta = 0.3\pi$

$l_y = 20$	$n_0 = 900$ $L_y = 300$	$b(\theta) = 0.38951$ $b^I(\theta) = 0.49354$
$l_y = 25$	$n_0 = 1200$ $L_y = 400$	$b(\theta) = 0.38945$ $b^I(\theta) = 0.49354$
$l_y = 28$	$n_0 = 1400$ $L_y = 300$	$b(\theta) = 0.38944$ $b^I(\theta) = 0.49354$
	$n_0 = 1600$ $L_y = 350$	$b(\theta) = 0.38940$ $b^I(\theta) = 0.49354$

$\theta = 0.4\pi$

$l_y = 20$	$n_0 = 500$ $L_y = 200$	$b(\theta) = 0.29881$ $b^I(\theta) = 0.37220$
$l_y = 25$	$n_0 = 1200$ $L_y = 400$	$b(\theta) = 0.29876$ $b^I(\theta) = 0.37220$
$l_y = 28$	$n_0 = 1400$ $L_y = 300$	$b(\theta) = 0.29873$ $b^I(\theta) = 0.37220$

$\theta = 0.5\pi$

$l_y = 20$	$n_0 = 500$ $L_y = 200$	$b(\theta) = 0.27292$ $b^I(\theta) = 0.33733$
$l_y = 25$	$n_0 = 1200$ $L_y = 400$	$b(\theta) = 0.27287$ $b^I(\theta) = 0.33733$
$l_y = 28$	$n_0 = 1400$ $L_y = 300$	$b(\theta) = 0.27282$ $b^I(\theta) = 0.33733$

**Tableau A.2.** Convergence des termes de coin de la LN,  $b(\theta)$ , et de la MI,  $b^I(\theta)$ , pour la géométrie de sablier, remplissage  $\nu = 2$  avec la méthode de matrices de chevauchement.

$\theta = 0.2\pi$			
$l_y = 20$	$n_0 = 900$	$L_y = 300$	$b(\theta) = 0.02483$ $b^I(\theta) = 0.08264$
$l_y = 25$	$n_0 = 1200$	$L_y = 400$	$b(\theta) = 0.02486$ $b^I(\theta) = 0.08264$
$l_y = 28$	$n_0 = 1400$	$L_y = 300$	$b(\theta) = 0.024894$ $b^I(\theta) = 0.08264$
$\theta = 0.3\pi$			
$l_y = 20$	$n_0 = 900$	$L_y = 300$	$b(\theta) = 0.06326$ $b^I(\theta) = 0.15382$
$l_y = 25$	$n_0 = 1200$	$L_y = 400$	$b(\theta) = 0.06330$ $b^I(\theta) = 0.15382$
$l_y = 28$	$n_0 = 1400$	$L_y = 300$	$b(\theta) = 0.06348$ $b^I(\theta) = 0.15382$
$\theta = 0.4\pi$			
$l_y = 20$	$n_0 = 900$	$L_y = 300$	$b(\theta) = 0.12674$ $b^I(\theta) = 0.25344$
$l_y = 25$	$n_0 = 1200$	$L_y = 400$	$b(\theta) = 0.12678$ $b^I(\theta) = 0.25344$
$l_y = 28$	$n_0 = 1400$	$L_y = 300$	$b(\theta) = 0.12690$ $b^I(\theta) = 0.25344$
$\theta = 0.5\pi$			
$l_y = 20$	$n_0 = 900$	$L_y = 300$	$b(\theta) = 0.22528$ $b^I(\theta) = 0.39539$
$l_y = 25$	$n_0 = 1200$	$L_y = 400$	$b(\theta) = 0.22532$ $b^I(\theta) = 0.39539$
$l_y = 28$	$n_0 = 1400$	$L_y = 300$	$b(\theta) = 0.22557$ $b^I(\theta) = 0.39539$
	$n_0 = 1600$	$L_y = 350$	$b(\theta) = 0.22549$ $b^I(\theta) = 0.39539$
$\theta = 0.6\pi$			
$l_y = 20$	$n_0 = 900$	$L_y = 300$	$b(\theta) = 0.37659$ $b^I(\theta) = 0.59920$
$l_y = 25$	$n_0 = 1200$	$L_y = 400$	$b(\theta) = 0.37663$ $b^I(\theta) = 0.59920$
$l_y = 28$	$n_0 = 1400$	$L_y = 300$	$b(\theta) = 0.37690$ $b^I(\theta) = 0.59920$
$\theta = 0.7\pi$			
$l_y = 20$	$n_0 = 900$	$L_y = 300$	$b(\theta) = 0.62092$ $b^I(\theta) = 0.92872$
$l_y = 25$	$n_0 = 1200$	$L_y = 400$	$b(\theta) = 0.62092$ $b^I(\theta) = 0.92872$
$l_y = 28$	$n_0 = 1400$	$L_y = 300$	$b(\theta) = 0.62148$ $b^I(\theta) = 0.92872$

$$\theta = 0.8\pi$$

$l_y = 20$	$n_0 = 900$	$L_y = 300$	$b(\theta) = 1.07640$ $b^I(\theta) = 1.55694$
$l_y = 25$	$n_0 = 1200$	$L_y = 400$	$b(\theta) = 1.07654$ $b^I(\theta) = 1.55694$
$l_y = 28$	$n_0 = 1400$	$L_y = 300$	$b(\theta) = 1.07723$ $b^I(\theta) = 1.55694$
	$n_0 = 1600$	$L_y = 350$	$b(\theta) = 1.07723$ $b^I(\theta) = 1.55694$