Université de Montréal

Trois résultats en théorie des graphes

par

Frank RAMAMONJISOA

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée en vue de l'obtention du grade de
Philosophiæ Doctor (Ph.D.)
en Mathématiques

30 Avril 2022

© Frank RAMAMONJISOA, 2022

Université de Montréal

Faculté des études supérieures et postdoctorales

Cette thèse intitulée

Trois résultats en théorie des graphes

présentée par

Frank RAMAMONJISOA

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Iosif POLTEROVICH
(président-rapporteur)

Geňa HAHN
(directeur de recherche)

Ben SEAMONE
(codirecteur)

Egor SHELUKHIN
(membre du jury)

Nancy CLARKE
(examinateur externe)

Pierre POULIN
(représentant du doyen de la FESP)

Résumé

Cette thèse réunit en trois articles mon intérêt éclectique pour la théorie des graphes.

Le premier problème étudié est la conjecture de Erdős-Faber-Lovász:

La réunion de k graphes complets distincts, ayant chacun k sommets, qui ont deux-à-deux au plus un sommet en commun peut être proprement coloriée en k couleurs.

Cette conjecture se caractérise par le peu de résultats publiés. Nous prouvons qu'une nouvelle classe de graphes, construite de manière inductive, satisfait la conjecture. Le résultat consistera à présenter une classe qui ne présente pas les limitations courantes d'uniformité ou de régularité.

Le deuxième problème considère une conjecture concernant la couverture des arêtes d'un graphe: *Si G est un graphe simple avec $\alpha(G) = 2$, alors le nombre minimum de cliques nécessaires pour couvrir l'ensemble des arêtes de G (noté $ecc(G)$) est au plus n, le nombre de sommets de G.*

La meilleure borne connue satisfaite par $ecc(G)$ pour tous les graphes avec nombre d'indépendance de deux est le minimum de $n + \delta(G)$ et $2n - \Omega(\sqrt{n \log n})$, où $\delta(G)$ est le plus petit nombre de voisins d'un sommet de G. Notre objectif a été d'obtenir la borne $ecc(G) \leq \frac{3}{2}n$ pour une classe de graphes la plus large possible. Un autre résultat associé à ce problème apporte la preuve de la conjecture pour une classe particulière de graphes:

Soit G un graphe simple avec $\alpha(G) = 2$. Si G a une arête dominante uv telle que $G \setminus \{u,v\}$ est de diamètre 3, alors $ecc(G) \leq n$.

Le troisième problème étudie le jeu de policier et voleur sur un graphe. Presque toutes les études concernent les graphes statiques, et nous souhaitons explorer ce jeu sur les graphes dynamiques, dont les ensembles d'arêtes changent au cours du temps. Nowakowski et Winkler caractérisent les graphes statiques pour lesquels un unique policier peut toujours attraper le voleur, appellés cop-win, à l'aide d'une relation $\leq$ définie sur les sommets de ce graphe: *Un graphe G est cop-win si et seulement si la relation $\leq$ définie sur ses sommets est triviale.*

Nous adaptons ce théorème aux graphes dynamiques. Notre démarche nous mène à une relation nous permettant de présenter une caractérisation des graphes dynamiques cop-win. Nous donnons ensuite des résultats plus spécifiques aux graphes périodiques. Nous indiquons aussi comment généraliser nos résultats pour k policiers et ℓ voleurs en réduisant ce cas à celui d'un policier unique et un voleur unique. Un algorithme pour décider si, sur un graphe périodique donné, k policiers peuvent capturer ℓ voleurs découle de notre caractérisation.

Mots clefs: Conjecture de Erdős-Faber-Lovász; coloration de sommets; graphes complets; nombre de couverture par cliques; nombre d'intersection; graphes sans griffe; graphe dynamique, graphes cop-win, graphes.

Abstract

This thesis represents in three articles my eclectic interest for graph theory.

The first problem is the conjecture of Erdős-Faber-Lovász:

If k complete graphs, each having k vertices, have the property that every pair of distinct complete graphs have at most one vertex in common, then the vertices of the resulting graph can be properly coloured by using k colours.

This conjecture is notable in that only a handful of classes of EFL graphs are proved to satisfy the conjecture. We prove that the Erdős-Faber-Lovász Conjecture holds for a new class of graphs, and we do so by an inductive argument. Furthermore, graphs in this class have no restrictions on the number of complete graphs to which a vertex belongs or on the number of vertices of a certain type that a complete graph must contain.

The second problem addresses a conjecture concerning the covering of the edges of a graph:

The minimal number of cliques necessary to cover all the edges of a simple graph G is denoted by $ecc(G)$. If $\alpha(G) = 2$, then $ecc(G) \leq n$.

The best known bound satisfied by $ecc(G)$ for all the graphs with independence number two is the minimum of $n + \delta(G)$ and $2n - \Omega(\sqrt{n \log n})$, where $\delta(G)$ is the smallest number of neighbours of a vertex in G.

In this type of graph, all the vertices at distance two from a given vertex form a clique. Our approach is to extend all of these n cliques in order to cover the maximum possible number of edges. Unfortunately, there are graphs for which it's impossible to cover all the edges with this method. However, we are able to use this approach to prove a bound of $ecc(G) \leq \frac{3}{2}n$ for some newly studied infinite families of graphs.

The third problem addresses the game of Cops and Robbers on a graph. Almost all the articles concern static graphs, and we would like to explore this game on dynamic graphs, the edge sets of which change as a function of time. Nowakowski and Winkler characterize static graphs for which a cop can always catch the robber, called cop-win graphs, by means

of a relation $\leq$ defined on the vertices of such graphs:

A graph G is cop-win if and only if the relation $\leq$ defined on its vertices is trivial.

We adapt this theorem to dynamic graphs. Our approach leads to a relation, that allows us to present a characterization of cop-win dynamic graphs. We will then give more specific results for periodic graphs, and we will also indicate how to generalize our results to k cops and l robbers by reducing this case to one with a single cop and a single robber. An algorithm to decide whether on a given periodic graph k cops can catch l robbers follows from our characterization.

Key words: Erdős-Faber-Lovász conjecture; vertex colouring; complete graphs; edge clique cover number; intersection number; claw-free graphs; dynamic graph, cop-win graphs, graphs.

Table des matières

Remerciements

Mes premiers remerciements sont pour Matilde Lalín, avec qui j'ai effectué mes premiers pas en recherche. Sa grande disponibilité à mon égard m'a permis d'évoluer rapidement. J'ai beaucoup appris sous sa bienveillance, et déjà grâce à elle mon entrée dans le grand bain a été très fructueux avec un article dès mon premier stage de recherche. Avec Matilde, je n'ai pas seulement appris en mathématiques, j'ai également découvert les arcanes du monde universitaire. Je ne serais certainement pas arrivé où je suis sans elle. Malheureusement, la théorie des nombres, sa spécialité, ne me correspond pas et malgré mes premières impressions, j'ai compris que je ne pourrais pas m'épanouir dans ce domaine. C'est aussi pour cela que je remercie encore une fois Matilde. Elle m'a permis de couvrir un spectre du monde de la théorie des nombres suffisamment large pour que je puisse en tirer des conclusions quant à mon futur parcours. Je te souhaite une très bonne continuation, Matilde!

J'adresse mes plus chaleureux remerciements à Geňa Hahn, mon directeur de thèse, qui a tracé le chemin sur lequel je suis maintenant. A un moment où de nombreux doutes m'assaillaient concernant ma place au sein des mathématiques, il m'a montré que ma vocation était dans les mathématiques discrètes. Son cours de théorie des graphes m'a illuminé, de manière quasiment mystique: j'avais enfin trouvé ma voie. Cette voie qui donne envie de venir, de courir jusqu'à l'université pour pouvoir se pencher sur une conjecture, cette voie passionnante, parfois jusqu'à l'obsession.

Geňa m'a aussi donné l'opportunité de faire des maths uniquement pour le plaisir, d'attaquer des problèmes impossibles simplement pour s'amuser, sans objectif absolu de production, et je le remercie aussi pour cela. Et puis au-delà de nos relations mathématiques, j'ai grandement apprécié les nombreuses discussions où nous avons refait le monde .... ou plutôt une partie du monde.

Enfin, comme si cela ne suffisait pas, Geňa s'est à chaque étape totalement impliqué pour me faciliter la vie. Geňa, je ne pourrai jamais assez te remercier...

Ma chance ne s'est pas arrêtée là, car Ben Seamone a également supervisé ma thèse. Dans un souci d'efficacité, Ben traçait les grands axes de l'organisation. Au-delà des aspects stratégiques, il était toujours là pour faire le tri au coeur d'une activité toujours foisonnante mais pas toujours aboutie. Avec lui, j'ai beaucoup appris en terme de gestion de mon travail: savoir repérer les pistes potentiellement intéressantes, déterminer les résultats qu'on peut faire ressortir, mettre en valeur une réalisation, ... Ces compétences me semblent essentielles pour pouvoir avoir avancer en recherche au mieux de ses possibilités, et grâce à Ben, je me sens beaucoup mieux outillé pour la suite.

Sa constante disponibilité et sa bienveillance ne s'arrêtent cependant pas aux mathématiques. Ben s'est toujours pleinement impliqué, et avec beaucoup d'empathie, pour que je sois dans les meilleures conditions extra-mathématiques possibles. Ma future voie lui devra beaucoup. Merci beaucoup Ben, sans toi mon chemin aurait été plus chaotique et moins enthousiasmant.

D'autres anges gardiens ont veillé sur moi au sein du Département de Mathématiques de l'Université de Montréal.

Je pense tout particulièrement à Marlène Frigon, qui m'a toujours soutenu, particulièrement dans les moments difficiles. Marlène m'a toujours compris, et son appui de poids m'a permis de surmonter les obstacles à plusieurs reprises.

Je pense aussi à Iosif Polterovich, un professeur de grande envergure, dont les précieux conseils m'ont été extrêmement utiles, et je pèse mes mots, pour déterminer le parcours que je devais suivre après mon doctorat.

Je pense encore à Octav, qui m'a donné à voir les plus belles mathématiques: il a failli réussir à me faire aimer la géométrie, et la topologie en particulier!

Je ne peux les remercier ici autant que je le voudrais, mais j'espère que ces quelques mots suffiront à traduire ma gratitude.

Je manque de place pour remercier tous ceux qui ont jalonné positivement mon parcours à l'Université de Montréal, ce qui n'affecte en rien la joie que j'ai eue de les rencontrer et tout ce qu'ils m'ont apporté.

Introduction

0.0.1. Objectifs de la recherche

Cette thèse représente en trois articles mon intérêt pour l'ensemble des domaines de la théorie des graphes. Je n'ai pas pu me résoudre à cantonner ma recherche à un sous-domaine spécifique et j'ai souhaité explorer plusieurs territoires distincts.

Le travail fait concerne deux conjectures, une concernant la coloration des sommets d'un graphe, l'autre la couverture de ses sommets par des cliques, ainsi qu'une adaptation du jeu du policier et du voleur sur les graphes dynamiques, dont les arêtes changent en fonction du temps.

Il est naturel qu'au vu des résultats variés obtenus dans des domaines distincts, la thèse soit par articles.

Nous allons tout d'abord énoncer quelques définitions qui nous serons utiles pour les trois problèmes abordés, que nous présenterons de manière un peu plus détaillée par la suite.

0.0.2. Quelques définitions avant de commencer

Dans un souci de précision des concepts utilisés, nous devons avant toute chose définir les éléments de théorie des graphes qui nous seront utiles.

Définition 0.0.1. Un graphe simple *G est un couple $G = (V,E)$ formé d'un ensemble V d'éléments appelés les sommets et d'un ensemble $E \subseteq \binom{V}{2}$ d'éléments appelés les arêtes. Une arête formée des sommets u et v de G est notée uv.*

Ainsi, un graphe simple n'autorise pas plusieurs arêtes entre deux sommets ni de boucles, arêtes consistant en une paire de deux sommets identiques. Les graphes qui admettent plusieurs arêtes ainsi que des boucles sont appelés des multigraphes, mais ils n'apparaissent pas dans cette thèse. Il existe aussi des graphes orientés, pour lesquels une arête est un élément de $V \times V$ et a donc une direction du premier sommet du couple vers le deuxième sommet. Les hypergraphes étendent la notion d'arête, pour laquelle toute partie non vide de V est admissible.

Nous ferons dans ce document très souvent appel à la notion de graphe complet:

Définition 0.0.2. *Un* **graphe** *G est dit* **complet** *si deux sommets distincts quelconques forment toujours une arête, i.e $E = \binom{V}{2}$.*

Rajoutons encore deux définitions liées aux sommets:

Définition 0.0.3. Deux sommets *d'un graphe G sont dit* **adjacents** *s'ils forment une arête, ils sont alors* **voisins***. L'ensemble des sommets adjacents à un sommet w constitue son* **voisinage** *et est noté $N(w)$. On note $N[w] = N(w) \cup \{w\}$ le* **voisinage fermé** *de w.*

Les définitions plus spécifiques à chaque conjecture seront présentées dans les chapitres correspondants de cette introduction.

Dans la suite, les graphes mentionnés seront toujours simples.

0.1. La conjecture de Erdős-Faber-Lovász

En 1972, Paul Erdős, Vance Faber, et László Lovász ont énoncé cette conjecture [**11**]:

Conjecture 0.1.1. *dite de* **Erdős-Faber-Lovász**.
Si k ensembles de k élements sont tels que deux ensembles distincts ont au plus un élément en commun, alors nous pouvons attribuer à chaque élément de la réunion de ces ensembles une couleur de manière à ce que chacun de ces k ensembles possède toutes les différentes couleurs.

Ils ont également formulé cette conjecture dans le langage de la théorie des graphes:

Conjecture 0.1.2. *Si k graphes complets, ayant chacun k sommets, ont la propriété que chaque paire de graphes complets distincts ont au plus un sommet en commun, alors le graphe résultant peut être proprement colorié en k couleurs.*

Les deux conjectures sont chacune équivalente à la même avec "au plus" remplacé par "exactement". Une définition précise de la coloration des sommets d'un graphe se trouve dans la section suivante.

Cette conjecture apparaît sous différentes formes dans différents domaines. Un des exemples les plus connus a été proposé par Haddad et Tardif en 2004 [**14**]: k comités de k membres se réunissent dans la même salle comportant k chaises. Il y a une et une seule personne appartenant à deux comités distincts quelconques. La conjecture est alors équivalente à la question suivante: les réunions peuvent-elles avoir lieu si chaque membre doit toujours être assis sur la même chaise? Il suffit d'identifier les membres avec des sommets, les comités avec des cliques, et les chaises avec des couleurs.

La conjecture de Erdős–Faber–Lovász peut aussi être reliée à plusieurs questions ouvertes concernant, entre autres, les hypergraphes, [**23**], [**7**], le nombre d'intersection d'un graphe [**20**], ou la théorie des clones [**14**].

Paul Erdős avait l'habitude d'offrir de petites sommes d'argent pour la résolution de problèmes mathématiques qu'il n'avait pas trouvé. Il a commencé par proposer 50 $ pour la réponse à la conjecture que nous avons présentée. Puis, se rendant compte de la difficulté du problème, il rehaussa son offre à 100 $. Mais devant l'inextricabilité extrême et initialement insoupçonnée de la conjecture, l'offre est finalement arrivée à 500 $, un montant très important pour Erdős. Gageons que sans sa disparition, le montant serait actuellement plus élevé.

Il est facile de colorier un graphe de la conjecture si tous les k graphes complets ont un seul et même sommet en commun. De même, si les sommets appartiennent tous à au plus deux graphes complets, il suffit de colorier le sommet qui appartient aux graphes complets i et j, s'il existe, par la couleur $i + j$ modulo k pour obtenir une coloration adéquate de l'ensemble du graphe avec n couleurs.

En général, malgré l'apparente simplicité de l'énoncé et ces deux cas simples, la conjecture s'est avérée d'une complexité extrême. Par exemple, les triplets de Steiner représentent des cas particuliers de graphes de la conjecture: chaque sommet appartenant à plus d'un graphe complet appartient à exactement trois graphes complets. Pourtant, le problème de coloration des triplets de Steiner a été ouvert pendant des décennies.

L'étendue de cette difficulté se matérialise par le peu de résultats obtenus sur ce sujet. Il existe deux résultats qui donnent une borne sur le nombre de couleurs que l'ont peut utiliser pour colorier le graphe de manière adéquate (de manière conforme à l'énoncé de la conjecture), ainsi qu'une douzaine de publications présentant des classes particulières de graphes satisfaisant la conjecture. Mais le résultat le plus important est la preuve de la conjecture pour un k suffisamment grand, le nombre k restant toutefois indéterminé.

Dans le premier cas, un pas initial a été fait par Chiang et Lawler en 1988, qui ont montré qu'on pouvait colorier le graphe de manière adéquate avec $3k/2-2$ couleurs [**7**]. Puis Kahn a réalisé une avancée importante en 1992, en obtenant une estimation asymptotique du nombre de couleurs nécessaires correspondant à l'affirmation de la conjecture: $k + o(k)$ [**18**]. Trés récemment, Kang et al ont annoncé une preuve de la conjecture pour un nombre k suffisamment grand, k restant cependant indéterminé [**19**].

Seule une poignée de classes de graphes vérifiant la conjecture a été trouvée. Nous pouvons globalement les classer en quatre groupes.

L'utilisation de méthodes faisant intervenir l'ordinateur a permis à Hindman de vérifier en 1981 la conjecture sur les graphes réunissant au plus 10 graphes complets [**15**], résultat poussé à 12 par Alonso-Pecina et Romero en 2014 [**1**].

Sánchez-Arroyo s'est quant à lui inspiré de la méthode combinatoire utilisée par Chiang et Lawler dans [**7**] pour montrer que tout hypergraphe dense, c'est à dire dont les sommets appartiennent soit à un seul graphe complet, soit à plus de $\sqrt{n}$ graphes complets, satisfait la conjecture [**24**]. Faber s'est aussi appuyé sur la combinatoire pour prouver que certains types de graphes à la fois uniforme (dont les graphes complets constitutifs contiennent le même nombre de sommets appartenant à plusieurs graphes complets) et réguliers (dont tous les sommets appartiennent soit à un seul graphe complet, soit au même nombre de graphes complets) vérifient aussi la conjecture. Mitchem et Schmidt [**21**] et Colbourn et Colbourn [**10**] ont présenté d'autres familles de graphes uniformes, très complexes à décrire et malheureusement impossibles à présenter brièvement.

Romero et Sánchez-Arroyo ont utilisé une méthode algorithmique pour prouver que tout graphe dont les sommets appartiennent à au plus deux graphes complets est également valide [**23**]. Araujo-Pardo et Vázquez-Ávila ont également trouvé un algorithme prouvant qu'une famille de graphes en correspondance avec des décompositions d'un certain graphe complet, là encore difficilement descriptible, satisfont la conjecture [**2**].

Enfin, une dernière méthode s'attache à étudier le sous-graphe composé des sommets appartenant à au moins trois graphes complets. C'est le cas de Berge et Hilton, qui ont prouvé que les graphes dont les graphes complets constitutifs contiennent tous exactement un sommet appartenant à plus de trois graphes complets satisfont la conjecture [**3**]. Nous pouvons également mentionner Jackson, Sethuraman et Whitehead, qui ont prouvé que les graphes, dont l'hypergraphe partiel induit par les sommets appartenant à au moins trois graphes complets a toutes ses arêtes avec au plus trois sommets et est proprement 3-coloriable, vérifient aussi la conjecture [**16**]. Pour finir, Calvillo et Romero ont prouvé récemment que certains types de graphes contenant au plus un graphe complet dont tous les sommets appartiennent à au plus deux graphes complets, satisfont la conjecture [**4**].

Nous pouvons remarquer que le coeur de ces articles est dans la majorité des cas, à l'exception notable de celui de Kahn, très bref, moins de trois pages, voire quelques lignes pour celui de Sánchez-Arroyo.

Une autre remarque qui nous semble d'intérêt est que les classes présentées de graphes vérifiant la conjecture sont souvent très difficile à décrire et nécessite pour ce faire une longue explication préliminaire.

Une dernière chose remarquable est le fait que beaucoup de ces classes sont très contraintes. Par exemple la contrainte d'uniformité pour un graphe nous semble déjà très restrictive. Et malgré cela, les classes présentées sont encore plus petites, ne représentant qu'une partie des graphes uniformes.

Ainsi, malgré la simplicité de son énoncé, il semble ardu de trouver un angle d'attaque pour avancer, même partiellement, sur ce problème. Et c'est ce qui fait d'ailleurs la beauté de la chose: une formulation compréhensible par un enfant, et une résolution impossible à tous. Cependant, nous pensons pouvoir présenter, pour la première fois à notre connaissance, une classe de graphes satisfaisant la conjecture construite de manière inductive. Jusqu'à présent, comme les graphes complets peuvent être inextricablement imbriqués, l'approche inductive naïve échouait. En effet, une récurrence n'a pas de plus-value apparente, car il n'est a priori pas possible d'éviter une recoloration à l'étape inductive. Notre approche va consister à utiliser une méthode nouvelle en effectuant une approche inductive sur une propriété logique, et non pas directement sur les colorations. Le résultat consistera à présenter une classe qui ne présente pas les limitations d'uniformité ou de régularité. Cette classe ne présente d'ailleurs pas de limitation d'une manière générale concernant le nombre de graphes complets auxquels appartient un sommet, ou le nombre de sommets d'un certain type que doivent contenir les arêtes.

0.1.1. Deux définitions et une notation

Nous devons pour plus de clarté énoncer les trois définitions suivantes avant de commencer. Pour rappel, un **graphe** G est dit **complet** si une paire de deux sommets disjoints quelconques forment toujours une arête.

Définition 0.1.3. **Une clique** *est un ensemble de sommets de* G *qui forment un graphe complet.*

Définition 0.1.4. **Une coloration propre des sommets** *d'un graphe* G *est une application* $c: \ V(G) \to \{1, \cdots n\}$, $n \in \mathbb{N}$ *telle que deux sommets adjacents ne possèdent pas la même couleur.* **Une n-coloration** *d'un graphe est une coloration propre des sommets de ce graphe avec* n *couleurs. On appelle* **nombre chromatique** *le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour obtenir une coloration propre.*

Dans la suite, nous appellerons coloration une coloration propre.

Pour faciliter notre discours, introduisons une notation pour désigner un graphe sujet de la conjecture: nous noterons $H^n = \cup_{i=1}^{n} e_i^n$, $n \in \mathbb{N}$ tout graphe constitué de n graphes complets e_i^n à n sommets répondant aux conditions de la conjecture. Ainsi, pour un n donné, il existe plusieurs H^n, et nous utiliserons cette notation pour désigner l'un quelconque d'entre eux. Les graphes complets constitutifs de ce graphe seront numérotés et e_i^n représentera le i-ième d'entre eux.

0.1.2. Construction d'un H^{n-1} à partir d'un H^n ou d'un H^{n+1} à partir d'un H^n

Nous constatons que chaque graphe complet possède au moins un sommet qui lui est propre, c'est à dire qui n'est pas présent dans un autre graphe complet.

Définition 0.1.5. **Un sommet libre** *de* $H^n = \cup_{i=1}^{n} e_i^n$, $n \in \mathbb{N}$ *est un sommet qui n'appartient qu'à un seul graphe complet* H_i^n, $i \in \{1, \cdots, n\}$.

Définition 0.1.6. *Les sommets qu'un graphe complet particulier* $H_i^n, 1 \leq i \leq n$ *partage avec les autres graphes complets du graphe sont appelés* **les points de contact** *de ce graphe complet* H_i^n.

L'ensemble des points de contact d'un graphe complet est donc le complémentaire (dans V) de l'ensemble de ses sommets libres.

Si nous supprimons un sommet libre pour chaque graphe complet (et les arêtes qui le contiennent), ainsi que tous les sommets libres d'un seul graphe complet particulier H_i^n, $1 \leq i \leq n$, nous obtenons un H^{n-1}. Ce faisant, nous aurons enlevé toutes les arêtes intrinsèques à H_i^n, notamment celles entre deux points de contact.

Nous pouvons également réaliser l'opération inverse, à savoir l'obtention d'un plus grand graphe H^{n+1} à partir d'un H^n donné. Nous rajoutons alors un sommet libre à chaque graphe complet H_i^n, $1 \leq i \leq n$ de H^n (ainsi que les arêtes de ce sommet vers tous les autres sommets de H_i^n, $1 \leq i \leq n$), qui deviennent alors des graphes complets H_i^{n+1}. Notre objectif étant d'obtenir un graphe de $n+1$ graphes complets, nous devons donc rajouter un graphe complet supplémentaire et pour ce faire, il nous faut définir des points de contact entre ce futur graphe complet et les autres. Nous choisissons ainsi un sommet dans chaque graphe complet qui a pour vocation de devenir le sommet commun entre ce graphe complet et le graphe complet supplémentaire. Choisir des points de contact ne peut pas se faire arbitrairement, nous devons veiller à ce qu'ils respectent la règle spécifiant qu'il y a un et un seul point de contact entre deux graphes complets donnés quelconques. Finalement, après avoir choisi les points de contact du graphe complet supplémentaire, il suffit de rajouter ses sommets libres pour obtenir un H^{n+1} à partir du H^n initial.

Pour tout H^n, $n \in \mathbb{N}$, il est possible d'obtenir une suite descendante vers l'unique H^2 (à un isomorphisme près) en suivant le processus ci-dessus. On peut donc par le processus inverse, également décrit ci-dessus, revenir au H^n initial.

0.1.3. Introduction de la couleur

Supposons qu'un H^n donné soit coloriable de manière propre avec n couleurs, pouvons nous construire un H^{n+1} qui soit aussi proprement $n+1$-coloriable à partir de ce H^n? Et dans l'affirmative, pouvons nous spécifier comment obtenir ce coloriage à partir de celui de H^n? La réponse à cette question nous permettrait d'obtenir par induction une classe de graphes qui satisferaient la conjecture.

Supposons donc qu'un H^n donné soit coloriable de manière propre avec n couleurs. Nous pouvons rajouter à chaque graphe complet un sommet libre de couleur $n+1$ (et ses arêtes); notons H_+^n le graphe ainsi obtenu. Notons ensuite c la coloration de H_+^n, c'est à dire la fonction qui associe à chaque sommet sa couleur. Puis, pour pouvoir rajouter le graphe complet supplémentaire H_{n+1}^{n+1}, nous devons choisir les points de contact $\{m_i\}_{1 \leq i \leq k}, k \leq n$

de celui-ci. Si les couleurs des $\{m_i\}_{1\leq i\leq k}$ sont déjà toutes différentes (les couleurs de deux sommets quelconques et différents de cet ensemble étant toujours différentes), nous pouvons alors rajouter les sommets libres du graphe complet supplémentaire et les colorier avec les couleurs restantes (non utilisées par les points de contact) pour obtenir un H^{n+1} colorié de manière propre avec $n+1$ couleurs. Ou bien si maintenant les $\{m_i\}_{1\leq i\leq k}$ ne sont pas de couleurs toutes différentes, afin d'obtenir un H^{n+1} colorié de manière propre avec $n+1$ couleurs, nous devons obtenir un moyen de leur donner des couleurs toutes différentes. Pour cela, nous devons effectuer des permutations des $n+1$ couleurs présentes à l'intérieur de chaque graphe complet, *ces permutations devant toutes êtres compatibles entre elles et mener à une $n+1$-coloration de H^{n+1}*, afin d'obtenir in fine des couleurs différentes pour tous les $\{m_i\}_{1\leq i\leq k}$.

Trouver de telles permutations est au coeur de la difficulté de la conjecture de Erdős-Faber-Lovász.

0.1.4. Piste de recherche

L'idée que nous allons suivre est d'effectuer certaines permutations d'un type particulier pour éviter de sombrer dans une trop grande complexité qui sera impossible à gérer. Les seules permutations que nous allons autoriser consistent à échanger la couleur d'un des $\{m_i\}_{1\leq i\leq k}$ avec celle de sommets libres uniquement. En faisant ce choix, nous éviterons les interactions compliquées entre de multiples graphes complets à chaque permutation, et leurs conséquences. En effet, un sommet libre n'est contenu que dans un seul graphe complet, et le changement de sa couleur n'a pas de conséquence sur les sommets d'un autre graphe complet.

Détaillons quelque peu. Soit $m \in \{m_i\}_{1\leq i\leq k}$ un point de contact du futur graphe complet additionnel, soient $\{H_i^{n+1}\}_{i\in\Lambda_m}$ l'ensemble des graphes complets de H_+^n contenant m, avec $\Lambda_m \subset \{1,\cdots,n\}$, notons C^i, $i\in\Lambda_m$, l'ensemble des couleurs des sommets libres de H_i^{n+1}. Supposons que $\cap_{i\in\Lambda_m}C^i \neq \emptyset$, alors il existe une couleur qui est présente parmi les sommets libres de tous les $\{H_i^{n+1}\}_{i\in\Lambda_m}$; soit c une de ces couleurs. Nous pouvons alors, au sein de chaque H_i^{n+1}, $i\in\Lambda_m$, échanger la couleur de m avec c, couleur d'un sommet libre de ce même graphe complet. Mais nous devons alors le faire simultanément pour tous les graphes complets contenant m, car sinon il y aurait deux fois la même couleur à l'intérieur d'un graphe complet avec lequel il n'y aurait pas eu d'échange de couleurs.

Définition 0.1.7. Un recoloriage admissible *échange pour tous les $i\in\Lambda_m$ la couleur de m avec une couleur $c\in\cap_{i\in\Lambda_m}C^i$ et la couleur du sommet libre de couleur c avec celle de m.*

Il nous semble difficile de faire plus simple en terme de recoloriage autorisé. Cependant, les premières difficultés apparaîssent déjà:

- si nous voulons changer la couleur d'un m donné, sa future couleur doit être présente au sein des sommets libres de *chaque* graphe complet auquel il appartient. C'est à dire que la future couleur de m devra être présente dans chacun des C^i, $i \in \Lambda_m$. Il n'est pas évident que cela soit le cas.
- il faut que les changements de couleurs possibles pour chaque m_i, $1 \leq i \leq k$ puissent permettre d'obtenir un ensemble de points de contacts de couleurs toutes différentes (deux points de contact quelconques devant toujours avoir deux couleurs différentes).

Pour avancer dans notre recherche, nous devrons donc traiter les contraintes ci-dessus, le point positif étant qu'elles ne sont que deux.

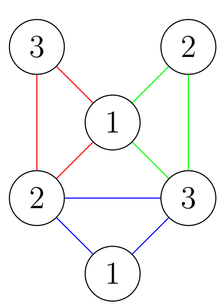
0.1.5. Illustration par un exemple

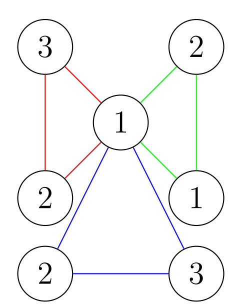
Il existe plusieurs H^3, mais uniquement deux dans lesquels deux graphes complets quelconques ont un sommet en commun (unique):

- un dans lequel chaque graphe complet a deux points de contact avec les deux autres graphes complets, et il y a donc trois points de contact au total dans le graphe H^3,
- et l'autre dans lequel les graphes complets constitutifs (à trois sommets) s'intersectent en un seul sommet commun à tous.

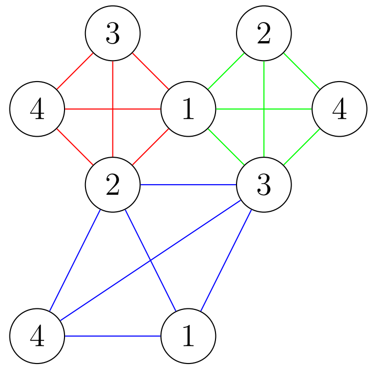
Il est aisé de colorier chacun de ces graphes avec trois couleurs. Nous souhaitons alors construire un H^4 et essayer de le colorier en appliquant notre méthode.

Dans les figures suivantes, le chiffre attribués à chaque sommet représente sa couleur. Les arêtes d'une même couleur relient les sommets d'un même graphe complet.





Choisissons un H^3 quelconque, par exemple le premier, et ajoutons un sommet libre de couleur 4 (et ses arêtes) à chacun de ses graphes complets constitutifs et notons le graphe obtenu H^3_+.

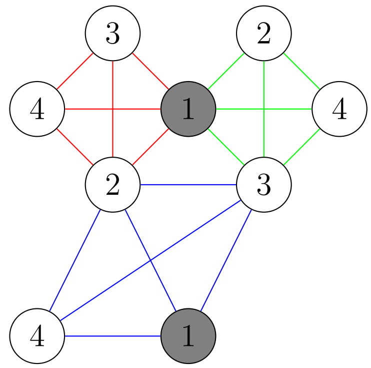


Ajoutons maintenant les points de contact de notre futur graphe complet supplémentaire. Comme point de contact avec un graphe complet donné de H_+^3, on peut choisir soit un sommet libre de ce graphe complet, soit un sommet de ce graphe complet qui est un point de contact avec un autre graphe complet de H_+^3.

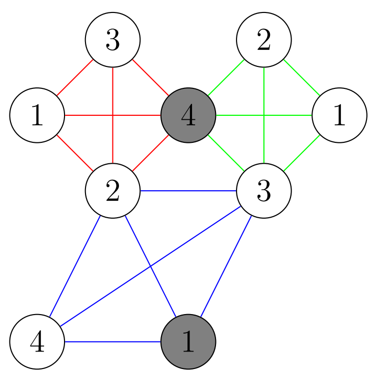
Mais si l'on choisit comme point de contact un point de contact déjà existant dans H_+^3, nous aurons alors le point de contact du graphe complet supplémentaire avec deux graphes complets de H_+^3 simultanément. Dans ce cas nous devrons alors choisir obligatoirement un sommet libre dans le troisième et dernier graphe complet. Si l'on choisit un sommet libre comme point de contact du premier graphe complet, nous aurons alors le choix dans l'étape suivante de choisir dans le second graphe complet le point de contact de celui-ci avec le troisième, et dans ce cas-là nous aurons tous nos points de contact, ou alors un sommet libre du deuxième graphe complet, et dans ce cas nous devrons choisir un sommet libre également au sein du troisième et dernier graphe complet.

Il nous restera alors à vérifier que les points de contact ont des couleurs toutes différentes. Si ce n'est pas le cas, nous devrons changer la couleur d'un point de contact (au moins) en utilisant uniquement les permutations admissibles que nous avons décrites dans le chapitre précédent. Il est aisé de vérifier qu'ont peut changer la couleur d'un point de contact du graphe complet additionnel de cette manière:

- si l'on veut changer la couleur d'un point de contact qui est un sommet libre de H_+^3, il suffit de regarder les couleurs présentes parmi les sommets libres du graphe complet correspondant,
- Si l'on veut changer la couleur d'un point de contact qui est déjà un point de contact du H_+^3, il faut regarder s'il y a une couleur commune aux sommets libres des deux graphes complets auxquels il appartient (par exemple la couleur 4).



Par exemple, dans ce graphe, les points de contact (en gris) ont la même couleur. Pour changer la couleur de celui du haut, il faut que les sommets libres du graphe complet en rouge (de couleurs 3 et 4) contiennent une couleur qui est également présente parmi les sommets libres du graphe complet en vert (de couleurs 2 et 4). C'est bien le cas, et nous pouvons donc donner la couleur 4 au point de contact et 1 aux deux sommets libres pour obtenir le graphe suivant:



Il est aisé de s'assurer que nous pouvons colorier avec notre méthode les points de contact du futur graphe complet avec des couleurs toutes différentes, et nous obtenons donc une coloration pour un H^4 obtenu à partir d'un H^3 proprement 3-coloriable.

0.1.6. Notre objectif

Notre objectif sera dans un premier temps de déterminer d'une manière générale dans quels cas notre manière de colorier un graphe à partir d'un autre plus petit fonctionne.

Puis nous essaierons de construire inductivement des suites particulières de graphes qui vérifieront la conjecture. Pour ce faire, nous devrons porter notre attention sur la forme du graphe initial, ainsi que sur la manière dont seront disposés les points de contact. Au fil de cette construction inductive, nous passerons d'un graphe à l'autre avec des permutations de couleurs admissibles.

L'avantage de cette méthode est tout d'abord sa simplicité: les permutations autorisées sont simples, et la manière de colorier les graphes sera alors facile à mettre en oeuvre. Un autre avantage est qu'au-delà de la détermination d'une classe de graphes qui vérifient la conjecture, nous pourrons expliciter clairement de quels graphes il s'agit et la manière de les colorier.

Nous avons également l'intention de nous pencher sur les possibilités d'élargissement de la classe trouvée, pour déterminer la plus grande classe possible. Il s'agira alors de diminuer les contraintes pesant sur la détermination des points de contact, et d'étudier dans quels cas les graphes initiaux pour notre procédure inductive sont les plus prometteurs.

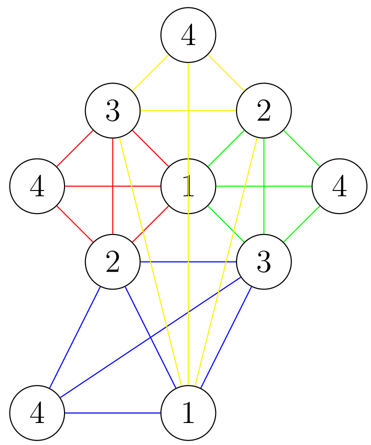
0.1.7. Notre résultat

Malheureusement, si un graphe H^n est proprement colorié avec n couleurs, utiliser des recoloriages admissible ne marche en général pas pour colorier proprement avec $n+1$ couleurs un graphe H^{n+1} obtenu de H^n. Par exemple, si nous prenons le seul H^3 ayant trois sommets de degrés supérieur à un colorié proprement avec 3 couleurs, et si nous ajoutons des sommets de degrés un avec la couleur 4, alors notre méthode de coloriage fonctionne pour tous les cas de points de contact pendant le premier pas. Si nous prenons ensuite des points de contact qui sont tous simples, la méthode ne fonctionnera pas au deuxième pas avec la couleur 5 et des points de contact à nouveau tous simples.

C'est pourquoi nous nous restreignons dans le choix des points de contact. Nous allons privilégier ceux-ci:

Définition 0.1.8. *Soit $n \in \mathbb{N}$, soit H^{n+1} obtenu d'un graphe H^n, un ensemble de points de contact dans H_+^{n+1} est appelé* last-simple *s'ils sont tous de degré au moins trois, sauf peut-être un qui est commun avec le dernier graphe complet ajouté.*

Ainsi, notre classe de graphes est construite récursivement à partir d'un graphe initial en sélectionnant à chaque étape des points de contact last-simple sur un graphe afin de construire le suivant. Nous noterons H^{04} le graphe obtenu en ajoutant trois points de contact simples au graphe H^3 qui possède trois points de contact:



Nous devons maintenant traduire dans une propriété le fait que nous colorions les points de contact de couleurs deux à deux distinctes en utilisant seulement des recoloriages admissibles.

Définition 0.1.9. *Si H est un graphe satisfaisant la conjecture avec $n \in \mathbb{N}$, alors H possède la* Propriété *P si l'assertion suivante est vraie pour tout ensemble de points last-simple $M = \{m_i\}_{i=1}^k$ dans H^+:*
"si

- *H^n est colorié proprement avec n couleurs,*
- *nous ajoutons un sommet de degré un et de couleur $n+1$ à chaque H_i^n, $i \in [n]$,*

alors nous pouvons colorier les $\{m_i\}_{i=1}^k$ de couleurs deux à deux distinctes en utilisant seulement des recoloriages admissibles. De plus, la couleur $n+1$ n'est pas présente dans M."

Nous sommes maintenant prêts à énoncer notre résultat:

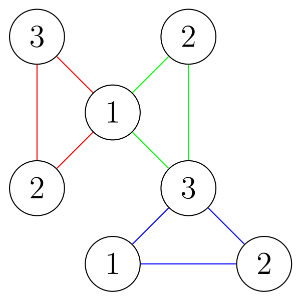
Théorème 0.1.10. *Pour tout $n \geq 4$, tout graphe H^n obtenu de H^{04} par une sélection successive de points de contact last-simple est proprement n-coloriable.*

Nous considérons qu'un ensemble de points dans H^{04}_{+} dont au plus un est simple est last-simple. En effet, nous ne pouvons pas utiliser la definition 7 car H^{04} est le graphe initial et il ne contient donc pas de graphe complet ajouté.

0.1.7.1. *Une deuxième classe de graphes satisfaisant la conjecture*

Nous pouvons maintenant aller plus loin et présenter une autre classe de graphes satisfaisant la conjecture.

Soit H^{13} le graphe H^3 ayant deux points de contact, un commun à H^1_3 et H^2_3, et un commun à H^2_3 et H^3_3:



Soit $\mathcal{C}$ la classe de graphes obtenus de H^{13} par des sélections successives de points de contact last-simples. Nous avons:

Théorème 1. *Tous les H^n, $n \geq 4$ obtenus d'un graphe dans $\mathcal{C}$ en sélectionnant des points de contact quelconques est proprement coloriable avec n couleurs.*

Il est à noter qu'il n'existe ici aucune restriction dans le choix des points de contact.

0.2. Couverture par cliques des arêtes d'un graphe

Toujours afin de se baser sur des concepts précis, nous aurons besoin de quelques définitions. Afin de permettre au lecteur de les retrouver facilement, nous avons pris le parti de les regrouper dans une seule section, qui en conséquence sera certes un peu lourde.

0.2.1. Quelques définitions

Commençons tout d'abord par quelques définitions d'ordre général:

Définition 0.2.1.

- *Dans un graphe G non orienté, on définit* **une chaîne** *comme une suite de sommets distincts tels que deux sommets successifs forment une arête.*
- **La longueur d'une chaîne** *est le nombre de ses arêtes.*
- **La distance** *entre deux sommets d'un graphe est la longueur de la plus courte chaîne entre eux (commençant par un des sommets et finissant par l'autre). Si deux sommets ne peuvent être reliés par une chaîne, la distance est posée égale à l'infini par convention.*
- **Le diamètre** *d'un graphe est la plus grande distance entre deux sommets de ce graphe.*

Définition 0.2.2. Un graphe est connexe *s'il existe une chaîne entre deux quelconques de ses sommets.*

Les suivantes sont plus spécifiques au problème étudié.

Définition 0.2.3. Le nombre d'indépendance $\alpha(G)$ *d'un graphe G est le nombre maximum de sommets distincts deux à deux non adjacents.*

Définition 0.2.4. Une arête *uv d'un graphe G est dite* **dominante ou globale** *si tous les sommets de G sont adjacents soit à u, soit à v (ou aux deux).*

Définition 0.2.5. Le nombre de couverture par cliques *des arêtes d'un graphe G, noté $ecc(G)$, est le nombre minimum de cliques de G telles que chaque arête de G est composée de sommets d'une même clique.*

Il est à noter qu'employer une *couverture par cliques des arêtes* d'un graphe est un abus de langage stricto sensu. En effet, une clique étant un ensemble de sommets ne comprend pas d'arête. Il lui est donc impossible de *couvrir* une arête.

Dans la suite, rappelons que G représentera toujours un graphe simple.

Notation Pour tout sommet w de G, $\overline{N[w]}$ est l'ensemble des sommets qui ne sont pas voisins de w (et différents de w).

0.2.2. Introduction

Dans la suite, n représentera le nombre de sommets d'un graphe G simple. Le nombre de couverture des arêtes de G par des cliques, aussi appelé nombre d'intersection et noté $ecc(G)$, a été introduit par Erdős, Goodman, et Pósa [**12**]. Au-delà d'être digne d'intérêt par lui-même, ce nombre est relié à un paramètre appelé nombre de compétition d'un graphe, introduit par Cohen [**9**] dans son étude des "food webs".

A l'origine était le problème suivant:

Conjecture 0.2.6. *(Chen, Jacobson, Kézdy, Lehel, Scheinerman, Wan* [**6**]*) Si G est graphe sans "claw", alors $ecc(G) \leq n$.*

Sans entrer dans le détail car nous n'utiliserons pas cette notion, une griffe (claw) est un graphe de quatre sommets et trois arêtes reliant trois des sommets au quatrième. Il a été montré dans [**6**] que les graphes quasi-linéaires, (graphes où le voisinage de tout sommet peut être partitionné en deux cliques) satisfaisaient la conjecture.

Récemment, Javadi et Hajebi [**17**] ont démontré cette conjecture pour les graphes tels que $\alpha(G) \geq 3$. Leur résultat s'appuie fortement sur le théorème de Chudnovsky et Seymour concernant la structure des graphes sans griffes [**8**], qui s'applique uniquement aux graphes tels que $\alpha(G) \geq 3$. Comme leur démonstration ne peut pas être adaptée au cas où $\alpha(G) = 2$, la conjecture initiale est réduite à la conjecture suivante:

Conjecture 0.2.7. *Si G est un graphe tel que $\alpha(G) = 2$, alors $ecc(G) \leq n$.*

Actuellement, la meilleure borne connue pour l'ensemble des graphes tels que $\alpha(G) = 2$ est $2n - O(\sqrt{n \log n})$, ou $n + \delta(G)$ si ce nombre est plus petit ($\delta(G)$ est le nombre minimal de voisins que peut avoir un sommet de G) [**5**].

Il existe ensuite des résultats concernant des classes particulières de graphes. Citons par exemple le fait que si G est un graphe tel que $\alpha(G) = 2$ et de diamètre 3, alors $ecc(G) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ [**5**].

0.2.3. Travail préliminaire

La conjecture concerne tous les graphes avec un nombre d'indépendance de deux. Nous allons tout d'abord examiner la typologie des graphes G tels que $\alpha(G) = 2$ dans l'optique de la conjecture. La connexité d'un graphe ne présentant pas de problème particulier, sans perte de généralité, nous allons supposer dans la suite que G est connexe. Un graphe tel que $\alpha(G) = 2$ est obligatoirement de diamètre 2 ou 3: il ne peut pas être de diamètre 1 car dans ce cas $\alpha(G) = 1$ ni de diamètre supérieur à 3 car dans ce cas $\alpha(G) \geq 3$. Le cas du diamètre 3 ayant été résolu [**5**], il nous reste donc à traiter le cas du diamètre 2. Remarquons tout d'abord que tous les sommets à distance deux d'un sommet donné forment une clique car $\alpha(G) = 2$.

Supposons que pour toute arête uv de G, il existe un sommet qui soit à une distance de deux à la fois de u et v, c'est à dire que G ne possède pas d'arête dominante. Alors $\{\overline{N[w]}\}_{w \in V(G)}$ couvre l'ensemble des arêtes de G et comme il y a au maximum n de ces cliques, la conjecture est vérifiée.

Lemme 0.2.8. *Soit G un graphe tel que $\alpha = 2$. Si G n'a pas d'arête globale, alors $ecc(G) \leq n$.*

Mais si le graphe G contient une arête dominante, elle ne pourra alors pas être couverte par une de ces cliques, car il n'y a pas de sommet non-adjacent à ses deux extrêmités.

Il nous reste donc à traiter le cas où G possède une arête dominante.

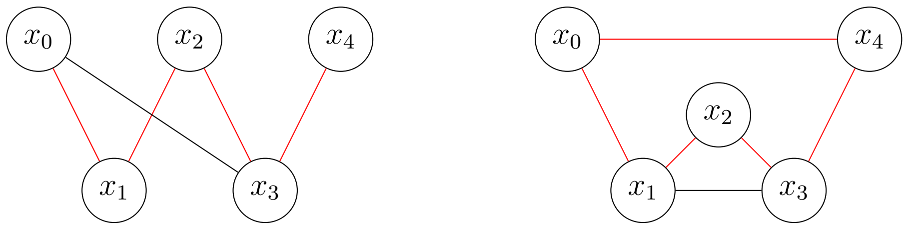
Nous allons suivre l'idée suivante: si l'ensemble de cliques $\{\overline{N[w]}\}_{w \in V(G)}$ couvre l'ensemble des arêtes de G quand il n'y a pas d'arête dominante, que se passe-t-il si on étend chacune de ces cliques à une clique plus grande? Peut-on alors couvrir un grand nombre d'arêtes dominantes?

0.2.4. Un premier résultat

Notre premier résultat possède la réjouissante propriété d'être facile à décrire: il suffit d'éviter les doubles tops et les supercycles.

Définition 0.2.9. *Soit G un graphe simple et x_0,x_1,x_2,x_3,x_4 des sommets de G. Le chemin $x_0x_1x_2x_3x_4$ est un* **double top** *si ses arêtes sont dominantes et x_2 est adjacent ni à x_0, ni à x_4 dans G.*

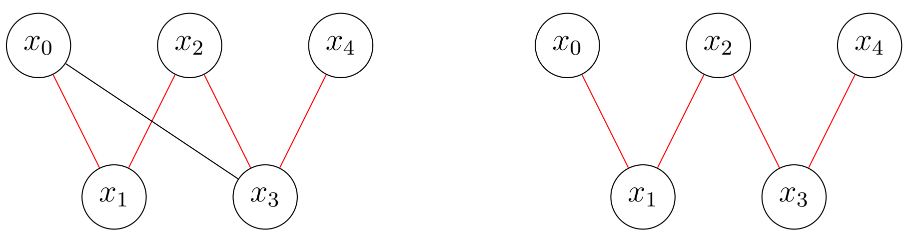
Exemples de doubles tops. Les arêtes dominantes sont en rouge.



Si G possède peu d'arêtes dominantes, les doubles tops ne devraient pas être trop nombreux et éviter les graphes avec des doubles tops ne devrait pas être une contrainte trop restrictive. En fait, on peut même alléger quelque peu cette contrainte.

Définition 0.2.10. *Un double top* $x_0x_1x_2x_3x_4$ *est* incompatible *si* x_1x_3 *n'est pas une arête.*

Exemple de double top incompatible. Les arêtes dominantes dont en rouge.

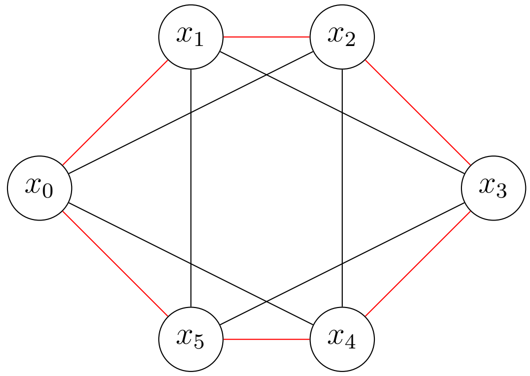


Nous allons donc maintenant autoriser les double tops en général en évitant seulememt ceux qui sont incompatibles.

Nous avons besoin d'encore une définition:

Définition 2. *Un* **supercycle** *est un cycle* $u_0 \cdots u_k$, $k \in \{3, \cdots, n-1\}$ *d'arêtes dominantes tel que pour tout* $i \in \{0, \cdots, k\}$, $u_{i-1}u_{i+1}$ *est une arête, addition modulo* $k+1$.

Exemple de supercycle.



Un supercycle est donc un cycle C d'au moins quatre arêtes dominantes dans lesquels toute paire de sommets à distance deux sur C forme une arête. Nous sommes maintenant prêts à énoncer le résultat suivant:

Théorème 3. *Si G est un graphe simple avec $\alpha(G) = 2$ ne contenant ni supercycle ni double top incompatible, alors $ecc(G) \leq \frac{3}{2}n$.*

0.2.4.1. *Etude de l'extension des cliques*

Soit x un sommet de G et $D = \{\overline{N[w]}\}_{w \in V(G)}$ l'ensemble de n cliques couvrant l'ensemble des arêtes non-dominantes de G. Un autre sommet de G (différent de x) est soit dans le voisinage de x, soit dans $\overline{N[x]}$. Un sommet y dans le voisinage de x peut être utilisé pour agrandir la clique $\overline{N[x]}$ si l'arête xy est dominante, car alors tous les sommets de G non reliés à x sont reliés à y. Dans ce cas, toutes les arêtes dominantes, et donc non couvertes, entre y et $\overline{N[x]}$ seront couvertes par cette clique étendue.

Examinons les cas dans lesquels cette extension est possible tout en étant sûrs que cette extension couvrira une arête dominante. Si xy est une arête dominante et que ni x ni y ne font partie d'une autre arête dominante, xy ne peut pas être couverte par l'extension d'une clique $\overline{N[z]}$, z étant un sommet de G. Parce que comme nous l'avons vu cela voudrait dire que soit zx, soit zy est une arête dominante. Cela signifie que nous pouvons couvrir xy par l'extension d'une clique de D uniquement s'il existe un sommet z de G tel que xz ou yz est dominante. Supposons sans perte de généralité que xz est dominante:

- si y et z ne sont pas adjacents, z appartient à $\overline{N[y]}$ et cette clique peut être étendue à x comme xy est dominante. Dans ce cas, la clique étendue couvre xz. Et de la même manière, xy est couverte par la clique étendue à partir de $\overline{N[z]}$.

- si yz est une arête non-dominante, comme z n'appartient pas à $\overline{N[y]}$, xz ne peut pas être couverte par une clique étendue à partir de $\overline{N[y]}$, car $\overline{N[y]}$ ne peut pas être étendue aux deux sommets x et z simultanément
- si yz est une arête dominante, elle peut être couverte en étendant $\overline{N[x]}$ à y et z.

Mais parfois, une de ces cliques $\overline{N[x]}$ peut être étendue de plusieurs manières, si tous les y tels que xy est dominante ne forment pas une clique entre eux. Nous ne pouvons donc pas étendre ces cliques de manière générale et/ou arbitraire, car nous ne savons pas si ce serait la meilleure manière de couvrir les arêtes dominantes de G. Par exemple, une clique maximale à partir de $\overline{N[x]}$ pourrait ne couvrir aucune arête dominante alors qu'une arête dominante qui partirait d'un sommet de $\overline{N[x]}$ pourrait être couverte par une autre extension de $\overline{N[x]}$.

L'idée est donc de procéder étape par étape. Nous devrons dans un premier temps étendre une clique de D qui couvre le maximum d'arêtes de G non couvertes par D. Puis nous assignerons des cliques étendues à chaque sommet un après l'autre en couvrant à chaque étape autant d'arêtes dominantes que possible.

Mais en procédant de la sorte, nous avons vu ci-dessus que nous ne pourrions pas couvrir toutes les arêtes dominantes, car toutes les arêtes dominantes ne peuvent pas être couvertes par des extensions de cliques telles que nous les proposons. Nous ne pourrons donc pas démontrer la conjecture pour tous les graphes G tels que $\alpha(G) = 2$ de cette manière.

0.2.4.2. *Objectif*

Par contre, nous pouvons essayer de trouver une borne pour $ecc(G)$. Notre objectif sera donc d'obtenir une borne plus fine que la meilleure borne connue. Plus précisément, en étendant les cliques $\{\overline{N[w]}\}_{w \in V(G)}$, nous avons toujours au plus n cliques. Nous compterons alors les cliques nécessaires pour couvrir les arêtes restantes non couvertes.

Cependant, cet objectif s'avère impossible à atteindre pour tous les graphes tels que $\alpha(G) = 2$, alors nous allons chercher la classe de graphes la plus grande possible pour lesquels la borne serait plus basse que la meilleure borne connue à ce jour. Nous possédons actuellement une classe de graphes $\mathcal{C}$ telle que nous pouvons couvrir les arêtes dominantes avec $\frac{n}{2}$ cliques, en sus des n cliques de D. Par exemple si les arêtes dominantes de G sont isolées les unes des autres: pour toute arête dominante xy, il n'existe pas d'autre arête dominante ayant pour extrémité x ou y.

Nous pouvons finalement résumer notre objectif sous la forme suivante: agrandir le plus possible cette classe $\mathcal{C}$ pour obtenir le résultat:

Soit G un graphe tel que $\alpha(G) = 2$ et $G \in \mathcal{C}$, alors on a $ecc(G) \leq \frac{3}{2}n$.

0.2.4.3. *Les difficultés auxquelles nous aurons à faire face*

La première est la compatibilité, dans le sens où notre processus aura peut-être à attribuer deux extensions de cliques non compatibles à un même sommet. Par exemple, si xy_1,y_1z_1 et xy_2, y_2z_2 sont des arêtes dominantes et que y_1 et y_2 dans le voisinage de x ne sont pas reliés, avec z_1,$z_2 \in \overline{N[x]}$. On peut vouloir couvrir l'arête y_1z_1 en étendant la clique $\overline{N[x]}$ à y_1. Mais on peut aussi vouloir couvrir l'arête y_2z_2 en étendant la clique $\overline{N[x]}$ à y_2. Malheureusement, ces deux extensions de la même clique sont incompatibles, et nous devrons choisir pour le sommet x une seule et unique extension de $\overline{N[x]}$ à l'exclusion de toutes les autres.

Eviter les incompatibilités nous force à restreindre notre étude à certains types de graphes, précisément ceux qui évitent ces incompatibilités.

Lorsque nous aurons une classe suffisamment large de graphes qui évitent les incompatibilités ci-dessus, il nous faudra alors couvrir les arêtes restantes et non-couvertes (par les cliques de D étendues) par un nombre pas trop important de cliques.

0.2.5. Un second résultat

En essayant de résoudre la conjecture pour tout graphe de nombre d'indépendance 2, nous avons pu produire un autre résultat:

Théorème 0.2.11. *Soit G un graphe simple avec $\alpha(G) = 2$. Si G possède une arête dominante uv telle que $G \setminus \{u,v\}$ est de diamètre trois, alors $ecc(G) \leq n$.*

La démonstration de ce théorème passe par la couverture par des cliques des sommets adjacents à la fois à u et v. Nous produisons ensuite un ensemble de cliques qui couvre toutes les arêtes et nous les dénombrons finement dans chaque cas possible pour vérifier la conjecture.

Nous devrons cependant nous attarder sur un cas particulier qui nous donnera du fil à retordre: si les sommets adjacents à la fois et u et v forment un 5-cycle.

0.3. Policiers et voleurs sur les graphes dynamiques

Le jeu de policier et voleur sur un graphe est étudié depuis un certain temps déjà, avec plusieurs variantes. Presque toutes les études concernent cependant les graphes statiques, c'est à dire des graphes qui restent fixes au cours du temps. Un développement relativement récent au niveau même de la théorie des graphes aborde l'exploration des graphes dynamiques, qui évoluent au cours du temps. L'objet de notre recherche consiste à étudier le jeu du policier-voleur sur les graphes dynamiques.

La variante prise en compte est la variante classique sur des graphes réflexifs (chaque sommet possédant une boucle). Les deux joueurs, le policier et le voleur, jouent à tour de rôle. Au début du jeu, le policier choisit arbitrairement un sommet quelconque, puis le voleur choisit à son tour un sommet. Pour les coups suivants, chaque joueur joue sur un sommet situé dans son voisinage. Notons que la boucle sur chaque sommet permet à un joueur de ne pas bouger de place. L'objectif du policier est d'occuper le même sommet que le voleur, c'est à dire de le capturer, alors que l'objectif du voleur est d'échapper indéfiniment au policier. Nous supposerons bien sûr que les participants jouent intelligemment, le voleur ne se jetant par exemple pas volontairement dans la gueule du loup, et le policier capturant le voleur dès que c'est possible. Nous supposerons également que le policier essaie d'effectuer la capture aussi vite que possible, de manière optimale, et que le voleur essaie de rester libre aussi longtemps que possible, même si la capture est inévitable. Dans leur article [**22**], Nowakowski et Winkler présentent deux caractérisations des graphes appelés cop-win, où un unique policier peut toujours attraper le voleur, quelle que soit la position de départ. La seconde est aussi valide pour les graphes infinis et représente la base de plusieurs algorithmes qui doivent déterminer si un graphe est cop-win ou pas. L'algorithme de Hahn-MacGillivray est un de ceux-là. La base de notre recherche sera d'adapter le théorème suivant de l'article de Nowakowski et Winkler aux graphes dynamiques:

Théorème 0.3.1. [**22**] *Un graphe G est cop-win si et seulement si la relation $\precsim$ définie sur ses sommets est triviale.*

Pour un graphe $G = (V, E)$, la relation $\precsim$ est définie récursivement en définissant tout d'abord une séquence de relations $\leq_\alpha$ pour chaque ordinal α:

- $x \leq_0 y$ si et seulement si $x = y$
- pour chaque $\alpha > 0$, $x \leq_\alpha y$ si et seulement si pour tout $u \in N(x)$, il existe un $v \in N(y)$ tel que $u \leq_\rho v$ pour un $\rho < \alpha$.

Nous avons clairement $\leq_\beta \subset \leq_\alpha$ pour $\beta \leq \alpha$. Il s'ensuit qu'il existe un γ tel que $\leq_\zeta = \leq_\gamma$ pour $\zeta \geq \gamma$. Posons $\precsim = \leq_\gamma$.

Observons que les relations modélisent la stratégie du policier, mais que le voleur joue en premier, alors que dans le jeu, le policier joue en premier. Nous pouvons interpréter $x \leq_i y$, dans un graphe fini, comme le fait que la capture aura lieu dans i coups si le voleur est sur x et le policier sur y.

Soit $\mathcal{E} = \{0,1\}^{\binom{V}{2}}$. Considérons les fonctions $T \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}}$. Etant donné un tel T, nous avons une séquence $(e_t)_{t\in\mathbb{N}}$ de fonctions sur $0-1$ qui définissent des ensembles d'arêtes d'une séquence $\mathcal{G}_T = (G_t)_{t\in\mathbb{N}}$ de graphes $G_t = (V, E_t)$, avec $E_t = \{(i,j) \in \binom{V}{2} : e_t(i,j) = 1\}$. Nous appellerons $\mathcal{G}_T$ un *graphe dynamique sur* T. L'ensemble des sommets de tous les $\mathcal{G}_T$ est le même, mais les arêtes vont et viennent en fonction des e_t. Cela amène tout naturellement à des définitions liées telles que $N_t(u) = \{v \in V : e_t(u,v) = 1\}$ pour le voisinage de u dans G_t. Notons que les notions et définitions peuvent être étendues aux graphes orientés.

Considérons une séquence $T \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}}$. S'il existe un $t_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour chaque $k \in \mathbb{N}$ et chaque $t < t_0$, $G_t = G_{t+kt_0}$, nous dirons que T et $\mathcal{G}_T$ sont périodiques. La période P est le plus petit t_0 satisfaisant cette condition.

Nous souhaiterions jouer au policier et au voleur sur $\mathcal{G}_T$ et tenter de déterminer si le policier (ou le voleur) possède une stratégie gagnante. Comme mentionné ci-dessus, nous nous inspirerons du Théorème 2 de [**22**].

L'intérêt de notre recherche sera d'adopter une démarche systématique à la thématique de l'adaptation des relations aux graphes dynamiques, pas seulement de présenter une adaptation particulière et les résultats afférents.

0.3.1. Approches possibles

Le but de cette discussion est donc de déterminer un processus, aussi exhaustif que possible, qui mène aux relations possibles pour les graphes dynamiques à partir de la relation de Nowakowski et Winkler pour les graphes statiques.

Comme un graphe dynamique est une succession de graphes statiques indexés par le temps, une relation sur ses sommets pourrait être définie comme:
- soit un ensemble de relations définies chacune sur un graphe statique G_t;
- ou un ensemble de relations basées sur la stratégie nécessaire pour attraper le voleur.

0.3.1.1. *Relations basées sur le temps*

Les relations construites dans ce chapitre sont largement inspirées par celles du Théorème 0.3.1 *mais sur chaque graphe* G_t. Nous obtenons un ensemble de relations indexées par t, une pour chaque graphe statique G_t, définies comme dans le cas statique:

- $u \leq_0^t u$ pour tout $u \in V$;
- $u \leq_\alpha^t v$ si pour chaque $x \in N_t(u)$ il existe un $y \in N_{t+1}(v)$ et un $\beta < \alpha$ tels que $x \leq_\beta^{t+1} y$;
- $\preceq^t = \leq_\gamma^t$ tel que $\leq_\gamma^t = \leq_{\gamma+1}^t$.

Bien sûr, nous avons dû faire une légère adaptation des voisinages parce que le graphe change après le mouvement du voleur.

0.3.1.2. *Relations basées sur la stratégie*

Dans cette approche, les relations ne sont pas directement dérivées de celles de Nowakowski et Winkler. Elles se fondent sur la stratégie que doit adopter le policier pour attraper le voleur.

Etudions plus en profondeur les relations dans [**22**]. Si une paire de sommets x et y satisfont la relation $\leqq_0$, cela signifie que le policier a capturé le voleur: ils sont sur la même position $x = y$. Regardons maintenant la position x_1 du voleur et celle y_1 du policier à l'étape précédente: x_1 et y_1 satisfont la relation $\leqq_1$ parce que soit le policier a déjà attrapé le voleur et nous avons $x_1 = y_1$ avec $x_1 = x$ et $y_1 = y$, ou alors le policier capturera le voleur en un coup (rappelons que nous considérons les positions un coup avant la capture). Dans le second cas, nous devons avoir que quel que soit le sommet u vers lequel se déplace le policier, le policier peut se déplacer vers un sommet v tel que $u = v$, ce qui signifie que $u \leqq_0 v$. En remontant plus loin en sens inverse à partir de la capture, $x \leqq_i y$ signifie que le policier attrapera le voleur dans au plus i coups (quand i est fini).

Nous introduisons maintenant la notion de temps et essayons d'adapter les relations du cas statique. Nous partons à nouveau d'une paire de sommets x et y satisfaisant une relation $\leqq_0^d$ (d pour dynamique), ce qui signifie que le voleur est capturé par le policier. Cela implique que cette relation $\leqq_0^d$ doit être définie de la même manière: pour deux sommets x et y, $x \leqq_0^d y$ si et seulement si $x = y$. Supposons que la capture se passe sur le graphe G_{t_0} avec $t_0 \geq 0$. Considérons les positions des joueurs lors de l'avant-dernier coup, x_1 pour le voleur et y_1 pour le policier. Nous aimerions imiter le cas statique et définir une relation $\leqq_1^d$ avec $x_1 \leqq_1^d y_1$. Mais le graphe n'est pas le même que G_{t_0}, c'est celui qui précède, G_{t_0-1}. Donc la relation $\leqq_1^d$ doit être utilisée sur G_{t_0-1}. En general, nous devrions relier la relation $\leqq_i^d$ au graphe G_{t_0-i} pour tout i (fini). Cela a plusieurs conséquences importantes.

Premièrement, comme nous allons en sens inverse à partir de G_{t_0}, nous devrons nous arrêter sur G_0 car nous ne pouvons pas continuer indéfiniment.

Deuxièmement, comme des relations différentes sont reliées à des graphes différents, les voisinages des sommets dans la définition des relations changent également. Plus précisément, les voisinages définis dans la relation doivent correspondre au graphe sur lequel le joueur joue. Par exemple, la définition de $\leqq_1^d$ sur G_{t_0-1} doit être: $x \leqq_1^d y$ si et seulement si pour tout $u \in N_{G_{t_0-1}}(x)$, il existe un $v \in N_{G_{t_0}}(y)$ tel que $u \leqq_\rho^d v$ pour $\rho < 1$. Ainsi, il est clair que le voleur se déplace sur G_{t_0-1} (vers le sommet u) et que le policier se déplace sur G_{t_0} vers v, car nous sommes partis de la règle que le graphe doit changer après le déplacement du voleur. Nous continuons de cette manière et définissons nos relations en conséquence: les voisinages dans la définition de notre relation $\leqq_i^d$ seront respectivement $N_{G_{t_0-i}}(x)$ et $N_{G_{t_0-i+1}}(y)$, $i > 0$.

Troisièmement, dans la définition des relations dans [**22**], il est possible que $\rho < \alpha - 1$. Mais nous avons vu que dans le cas des graphes dynamiques, les relations sont liées aux graphes. Et pour les graphes dynamiques, nous sommes *obligés* de nous déplacer du graphe $G_{t_0-\alpha}$ vers le graphe $G_{t_0-\alpha+1}$, ce qui signifie que nous sommes *obligés* de nous déplacer de la relation $\leqq_\alpha$ vers la relation $\leqq_{\alpha-1}$. Parce que quand on arrive sur le graphe $G_{t_0-\alpha+1}$, nous devons utiliser la relation $\leqq_{\alpha-1}$. Nous ne pouvons pas nous déplacer de la relation $\leqq_\alpha$ vers une relation $\leqq_\rho$ avec $\rho < \alpha - 1$, parce que cela signifierait que le prochain coup a lieu sur le graphe $G_{t_0-\rho}$. Nous devons donc avoir $\rho = \alpha - 1$ dans la défnition de nos relations.

En conclusion de cette discussion, nous devons définir les relations sur $\mathcal{G}_T$ de la manière suivante:

Soit $t \in \mathbb{N}$, nous définissons une séquence $\{\leqq_t^0, \leqq_t^1, \ldots, \leqq_t^t\}$ de relations binaires sur V:

- $x \leqq_t^t y$ si et seulement si $x = y$,
- pour chaque $0 < t' \leqq t$, $x \leqq_t^{t-t'} y$ si et seulement si $\forall u \in N_{G_{t-t'}}(x)$, $\exists v \in N_{G_{t-t'+1}(y)}$ tel que $u \leqq_t^{t-(t'-1)} v$.

Ces relations signifient que si $x_0 \leqq_t^0 y_0$, avec les positions initiales du policier et du voleur sur G_0, alors nous avons au plus tard au temps t $x_t \leqq_t^t y_t$, ce qui signifie que les positions x_t et y_t du policier et du voleur au temps t sont les mêmes, et que le voleur est capturé.

Donc les paires de sommets qui satisfont $\leqq_t^0$ sont les positions initiales sur G_0 qui mèneront à une capture au plus tard au temps t.

Nous devons préciser notre stratégie: au début du jeu, nous positionnons le policier sur un sommet, puis le voleur sur un autre sommet. Pour son premier coup sur G_0, le policier reste sur le même sommet. Le voleur joue son premier coup également sur G_0. Quand le policier joue son premier coup en restant sur place, les relations nous donnent par la suite les coups du policier.

Remarque 0.3.2. *Nous pouvons adapter la définition d'une relation à des règles différentes. Dans ce document, nous avons décidé que le graphe change après le mouvement du voleur. Si le graphe change après le mouvement du policier, nous devons simplement écrire dans la définition des relations "$x \leqq_t^{t-t'} y$ si et seulement si $\forall u \in N_{G_{t-t'}}(x)$, $\exists v \in N_{G_{t-t'}(y)}$ tel que $u \leqq_t^{t-(t'-1)} v$." Cela signifie que le voleur se déplace d'abord sur $G_{t-t'}$, puis le policier se déplace sur le même graphe $G_{t-t'}$.*

0.3.2. Les différents résultats obtenus

Nous avons obtenu une caractérisation des graphes dynamiques cop-win de manière similaire à celle de Nowakowski et Winkler pour les graphes statiques: en utilisant comme critère la trivialité d'une relation.

Théorème 0.3.3. *Le policier gagne à partir de n'importe quelle position de départ sur $\mathcal{G}_T$ si et seulement si $\precsim^0$ est triviale.*

La relation $\precsim^0$ est bâtie à partir des relations que nous avons définies au chapitre précédent:

Soit $t \in \mathbb{N}$, nous définissons une séquence $\{\leqq_t^0, \leqq_t^1, \ldots, \leqq_t^t\}$ de relations binaires sur V:
- $x \leqq_t^t y$ si et seulement si $x = y$,
- pour chaque $0 < t' \leqq t$, $x \leqq_t^{t-t'} y$ si et seulement si $\forall u \in N_{G_{t-t'}}(x)$, $\exists v \in N_{G_{t-t'}(y)}$ tel que $u \leqq_t^{t-(t'-1)} v$.

Nous avons une chaîne d'inclusions de sous-ensembles de $V \times V$: $\leqq_0^0 \subset \cdots \subset \leqq_t^0 \subset \leqq_{t+1}^0 \subset \cdots$. Nous noterons $\precsim^0$ l'ensemble $\bigcup_{t \in \mathbb{N}} \leqq_t^0$.
Par souci de précision, remarquons que nous avons noté $\leqq_t^0$ l'ensemble $\{(x,y) \in V \times V : x \leqq_t^0 y\}$.

Remarque 0.3.4. *Ces relations $\leqq_t^0$ peuvent être construites concrètement: à partir de chaque sommet $x_t = y_t$ of G_t, nous déterminons tous les sommets x et y de G_0 tels que $x \leqq_t^0 y$ en remontant en sens inverse pas à pas à partir de G_t.*

Nous remarquons cependant que la trivialité de la relation n'implique pas exactement la même chose dans le cas des graphes statiques et dynamiques. Dans le cas des graphes dynamiques, cette trivialité implique que le policier peut gagner à partir de n'importe quelle position de départ. Or au départ du jeu le policier choisit sa position initiale, et il suffit donc d'avoir une seule position initiale gagnante. La définition suivante nous permet de définir cette position gagnante:

Définition 4. *Une relation $\leqq$ sur les sommets V du graphe G est maximale au point y si et seulement si, pour tous les sommets $x \in V$, $x \leqq y$.*

Nous en arrivons au résultat suivant:

Théorème 0.3.5. *$\mathcal{G}_T$ est un graphe cop-win si et seulement si $\precsim^0$ est maximale sur un sommet.*

Nous avons ensuite poursuivi notre recherche pour aborder des thèmes naturellement associés à notre jeu de policier et voleur sur les graphes dynamiques, à savoir le cas où k policiers essaient d'attraper l voleurs, et le cas des graphes périodiques. Les résultats obtenus sont les suivants:

Théorème 0.3.6. *$\mathcal{G}_T$ est un graphe k-cop win si et seulement si $\mathcal{G}_T^*$ est 1-cop win.*

Le principe d'obtention du graphe $\mathcal{G}_T^*$ est de modéliser les positions des voleurs et des policiers par des vecteurs à k coordonnées. L'étude du jeu avec k policiers et l voleurs est ainsi réduite à l'étude du jeu avec un seul policier et un seul voleur.

Le cas des graphes périodiques est a priori déjà couvert par notre résultat ci-dessus valable pour tout graphe dynamique. Cependant, nous avons poursuivi notre recherche afin d'obtenir un critère plus simple à mettre en place et plus rapide à obtenir:

Théorème 0.3.7. *Soit $P \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{G}_T$ un graphe périodique de période P, si $\mathcal{G}_T$ est cop-win, alors G est cop-win.*

Le graphe G est un graphe statique obtenu à partir du graphe $\mathcal{G}_T$, avec les mêmes sommets mais en considérant que deux sommets sont reliés par une arête s'ils sont reliés par un chemin entre le graphe de départ G_0, et le graphe après P pas, G_P. Un lien entre graphes statiques et graphes dynamiques est ainsi réalisé. Bien sûr, la réduction d'un graphe dynamique à un graphe statique entraîne une déperdition d'information, et nous ne pouvons donc pas obtenir de “si et seulement si" dans notre théroème.

Par contre, comme G est statique, nous pouvons appliquer le théorème 2 de l'article de Nowakowski et Winkler pour obtenir le résultat suivant:

Corollaire 5. *Soit $P \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{G}_T$ un graphe périodique de période P, fini ou infini. S'il n'existe pas de point où $\leq$ est maximale, alors $\mathcal{G}_T$ n'est pas un graphe cop-win.*

Si G est fini avec n sommets, s'il n'existe pas de point où la relation $\leq_{n(n-1)}$ est maximale, alors $\mathcal{G}_T$ n'est pas un graphe cop-win.

Références bibliographiques

[1] F. Alonso-Pecina, D. Romero, The Erdős-Faber-Lovász conjecture is true for $n \leq 12$, *Discrete Math. Algorithms Appl.,* 6: no. 3, 2014.

[2] G. Araujo-Pardo, A. Vázquez-Ávila, A note on Erdős-Faber-Lovász conjecture and edge coloring of complete graphs, *Ars Combin.,* 129: 287—298, 2016.

[3] C. Berge, A. J. W. Hilton, On two conjectures about edge-colouring hypergraphs, *Congressus Numerantium,* 70: 99—104, 1990.

[4] G. Calvillo, D. Romero, New families of n-clusters verifying the Erdős-Faber-Lovász conjecture, *Graphs Combin.,* 32 (6): 2241—2252, 2016.

[5] P. Charbit, G. Hahn, M. Kamiński, M. Lafond, N. Lichiardopol, R. Naserasr, B. Seamone, R. Sherkati, Edge clique covers in graphs with independence number two, preprint 2019.

[6] G. Chen, M. S. Jacobson, A. E. Kézdy, J. Lehel, E. R. Scheinerman, C. Wan, Clique covering the edges of a locally cobipartite graph, *Discrete Mathematics,* 219 (1): 17—26, 2000.

[7] W. I. Chiang, E. L. Lawler, Edge coloring of hypergraphs and a conjecture of Erdős, Faber, Lovász, *Combinatorica,* 8 (3): 293—295, 1988.

[8] M. Chudnovsky, P. Seymour, The structure of claw-free graphs, *Surveys in combinatorics,* vol. 327 of London Math. Soc. Lecture Note Ser. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 153—171, 2005.

[9] J. E. Cohen, Interval graphs and food webs: a finding and a problem, *RAND Document,* 17696–PR, 1968.

[10] C. J. Colbourn, M. J. Colbourn, The chromatic index of cyclic Steiner-2 designs, *Internat. J. Math. and Math Sci.,* 5 (4): 823—825, 1982.

[11] P. Erdős, On the combinatorial problems which I would most like to see solved, *Combinatorica,* 1: 25—42, 1981.

[12] P. Erdős, A. W. Goodman, L. Pósa, The representation of a graph by set intersections, *Canad J Math,* 18: 106—112, 1966.

[13] V. Faber, The Erdős-Faber-Lovász conjecture – the uniform regular case, *J. Comb.,* 1 (2): 113—120, 2010.

[14] L. Haddad, C. Tardif, A clone-theoretic formulation of the Erdős-Faber-Lovász conjecture, *Discussiones Mathematicae,* Graph Theory, 24 (3): 545—549, 2004.

[15] N. Hindman, On a conjecture of Erdős, Faber, and Lovász about n-colourings, *Canadian J. Math.,* 33 (3): 563—570, 1981.

[16] B. Jackson, G. Sethuraman, C. Whitehead, A note one the Erdős-Faber-Lovász conjecture, *Discrete Math.,* 307 (7-8): 911—915, 2007.

[17] R. Javadi, S. Hajebi, Edge clique cover of claw-free graphs, *Journal of Graph Theory,* 90 (3): 311—405, 2018.

[18] J. Kahn, Coloring nearly-disjoint hypergraphs with n + o(n) colors, *Journal of Combinatorial Theory* , Series A, 59: 31—39, 1992.

[19] D.Y. Kang, T. Kelly, D. Kühn, A. Methuku, D. Osthus, A proof of the Erdős-Faber-Lovász conjecture, arXiv:2101.04698v1

[20] H. Klein, M. M. Margraf, On the linear intersection number of graphs, 2003, arXiv:math.CO/0305073.

[21] J. Mitchem, R. L. Schmidt, On the Erdős-Faber-Lovász conjecture, *Ars Combin.,* Graph Theory, 97: 497—505, 2010.

games on graphs, *Discrete Mathematics* **306** (2006), 2492 – 2497.

[22] R. Nowakowski, P. Winkler, Vertex to vertex pursuit in a graph, *Discrete Mathematics* **43** (1983), 235 - 239.

[23] D. Romero, A. Sánchez Arroyo, Advances on the Erdős–Faber–Lovász conjecture, in G. Grimmet, C. McDiarmid (eds.), *Combinatorics, Complexity, and Chance: A Tribute to Dominic Welsh,* Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, Oxford University Press, pp. 285—298, 2007.

[24] A. Sánchez-Arroyo, The Erdős-Faber-Lovász conjecture for dense hypergraphs, *Discrete Mathematics,* 308: 991—992, 2008.

First Article.

The Erdős-Faber-Lovász conjecture: a special case

by

Frank Ramamonjisoa[1]

([1]) Département de Mathématique et de Statistique
Université de Montréal
CP 6128, succ. Centre-Ville, Montreal
QC, Canada H3C 3J7

This article was submitted in Contributions to Discrete Mathematics.

Résumé. Jusqu'à récemment, seuls quelques types de graphes satisfaisant la conjecture de Erdös-Faber-Lovász étaient connus, notamment car les approches inductives échouaient du fait de la difficulté de colorer des graphes extrêmement imbriqués. Nous présentons une classe de graphes construits inductivement qui vérifient la conjecture. De plus, nous explicitons la méthode de coloration.

Mots clés : Conjecture de Erdös-Faber-Lovász, coloration de graphes, coloration de sommets, graphe complet, graphe

Abstract. Until recently, only a few types of graphs that satisfy the Erdös-Faber-Lovász conjecture were known, in part because inductive approaches rapidly fail. This is due to the difficulty of colouring graphs that can be very intertwined: colouring a vertex on a complete graph may impact several other complete graphs, and that again impacting other complete graphs, as in a chain reaction. We present a class of graphs built inductively satisfying the conjecture. Moreover, we show how to colour them.
Keywords: Erdös-Faber-Lovász conjecture, graph colouring, vertex colouring, complete graph, graph

1. Introduction

In 1972, Paul Erdős, Vance Faber, and László Lovász stated the following conjecture [**4**].

Conjecture 1. *If k complete graphs, each having exactly k vertices, intersect pairwise in at most one vertex then their union can be properly coloured with k colors.*

Let us call the union of complete graphs that satisfy the hypothesis of the conjecture an *EFL graph*. Chiang and Lawler proved that an EFL graph can be coloured with $3k/2 - 2$ colours [**2**], and Kahn improved this bound to $k + o(k)$ colours [**6**]. Only a handful of classes of EFL graphs that satisfy the conjecture are known. Berge and Hilton proved the conjecture for EFL graphs such that no vertex belongs to more than three complete graphs and if the set of vertices belonging to at least two complete graphs is independent [**1**]. Sánchez-Arroyo showed that the conjecture holds for an EFL graph such that the graph obtained by deleting the vertices of degree one is a dense hypergraph [**8**] [1]. Colbourn and Colbourn proved the conjecture for the EFL graphs whose subgraph obtained by deleting the vertices of degree one is the dual hypergraph of a cyclic Steiner system [**3**] [2]. In 2021 came the breakthrough, when Kang et al proved the conjecture for a sufficiently large k [**7**]. As we do not know how large this k is, we are still in search of new families of hypergraphs for which the conjecture holds even for small values of k.

Except in some trivial cases, inductive approaches to proving the conjecture normally fail. Attempting to extend a proper colouring recursively necessarily requires one to recolour previously coloured vertices, except in trivial cases. This leads to a “chain reaction” of recolourings that quickly becomes unmanageable. In this paper, we prove that the Erdős-Faber-Lovász Conjecture holds for a new class of graphs, and we do so by an inductive argument. Unlike the cases mentioned earlier for which the conjecture has been verified, our class is not restricted by specific limitations on uniformity (every complete graph contains the same number of vertices belonging to several complete graphs) or regularity (every vertex is contained in one or in a fixed number of complete graphs). In a second step, this property will allow us, again through an inductive process, to colour the graphs as required.

[1] A hypergraph having n edges is dense if every vertex is included in at least $\sqrt{n}$ edges.

[2] As the mentioned notions could be long to describe, but are not necessary in this paper, please refer to the cited articles for more details.

In Section 2 we define the concepts that we will use in this document. In Section 3, we present a first class of EFL graphs that satisfy the conjecture. The proof of this result appears in Section 4. In Section 5, we present another class of graphs that satisfy the conjecture. The conclusion follows in Section 6.

2. Preliminary work

A hypergraph H is a pair (X,E) where X is a set of elements called vertices and E is a set of non-empty subsets of X called edges. The degree of a vertex is the number of edges in which it is contained. A hypergraph is linear if two edges have at most one vertex in common. It is n-uniform if all its edges have n vertices.

The Erdős-Faber-Lovász conjecture can be stated in the language of hypergraphs.

Conjecture 2.1. *For any $n \in \mathbb{N}$, every n-uniform linear hypergraph with n edges can be coloured with n colours so that each edge contains one vertex of each colour.*

Let $n \in \mathbb{N}$ and write $[n] = \{1, \ldots, n\}$. Let $\mathcal{H}(n)$ be the set of all linear n-uniform hypergraphs having n edges. We call an EFL n-graph any member of $\mathcal{H}(n)$ and denote it by H^n and its edges by $\{e_i^n\}_{i\in[n]}$.

Let us begin with a few observations about EFL graphs.

Clearly, every edge in an EFL n-graph has at least one vertex of degree one. We now observe that removing one edge and all its vertices of degree one leaves us with a hypergraph consisting of $n-1$ edges of n vertices each. Removing further a vertex of degree one from each of the remaining edges results in an EFL $(n-1)$-graph. We have an analogous process in the reverse direction: adding a vertex of degree one to each edge of H^n leaves us with a graph consisting of n edges of $n+1$ vertices each.

Definition 2. *Let $n \in \mathbb{N}$ and $H^n \in \mathcal{H}(n)$, we denote by H_+^n the graph obtained by adding a vertex of degree one to each edge of H^n.*

Given an EFL n-graph and its extension H^+, how might one add an edge to obtain an EFL $(n+1)$-graph? We will make use of the following definitions to answer this.

Definition 3. *A set M of vertices of a hypergraph H is called* independent *if every edge of H contains at most one vertex in M.*

Definition 4. *Let $n \in \mathbb{N}$ and $H^n \in \mathcal{H}(n)$. A set M of vertices of H_+^n is a set of* contact points *if it is independent. A contact point is* multiple *if it has degree at least two. It is* simple *otherwise.*

Definition 5. *Let $n \in \mathbb{N}$, $H^n \in \mathcal{H}(n)$ and let M be a set of contact points of H_+^n. We say that the graph H^{n+1} is* obtained from H^n by the selection of the contact points M *if H^{n+1} is obtained from H^n by the addition of an edge having $n+1$ vertices, those in M plus additional* *vertices of degree one. Conversely, we say that H^n is* obtained from H^{n+1} by removing the edge e *if H^n is obtained from H^{n+1} by removing one vertex of degree one for each edge, except for e of which we remove all the vertices of degree one.*

We now consider the task of applying an inductive colouring method to properly n-colour an EFL n-graph.

Let H^{n+1} be an EFL $(n+1)$-graph, e an edge of H^{n+1}, and let H^n be obtained from H^{n+1} by deleting e. Let $M = \{m_i\}_{i\in[k]}$ denote the set of vertices in e having degree greater than one. Suppose that one can properly color H^n with n colours. We then add to each edge e_i^n, $i \in [n]$ a vertex of degree one coloured with the colour $n+1$ to obtain a properly $(n+1)$-coloured $H_+^n = \cup_{i=1}^n e_i^{n+1}$. If the $\{m_i\}_{i=1}^k$ have pairwise different colours, we can add the missing vertices of degree one of e (and the edge e itself) and colour them with the colours (among $n+1$ colours) unused for the $\{m_i\}_{i=1}^k$. We thus obtain a proper colouring with $n+1$ colours of the initial H^{n+1}.

If at least two elements of $\{m_i\}_{i=1}^k$ have the same colour, the H^{n+1} obtained after adding the vertices of degree one of e is not properly coloured. Our goal is to modify the given colouring by swapping colours of vertices so that all vertices in M receive distinct colours.

In order to change the colour of a contact point $m \in M$, we have to permute the colour of m with that of another vertex in each edge containing m. If we exchange the colour of m with that of another vertex p of degree greater than one in the same edge, we will again have to permute the colour of p with that of another vertex in each edge containing p. We could thus face a chain reaction that is not manageable. In this paper, we consider graphs which can be properly coloured by an inductive method whereby vertices are recoloured only by swapping colours with degree one vertices.

More precisely, let $m \in M$, let $\{e_i^{n+1}\}_{i\in\Lambda_m}, \Lambda_m \subset [n]$ be the set of edges containing m. Let c be a proper colouring with n colours of the graph H^n obtained from H^{n+1}, and let c^+ be the colouring of H_+^n obtained by adding a vertex of degree one of colour $n+1$ to all the edges of H^n. The colouring c^+ is still a proper colouring with $n+1$ colours. Let C^i be the set of the colours of the vertices of degree one in e_i^{n+1}, $i \in [n]$, let $C_m = \cap_{i\in\Lambda_m} C^i$.

If we want to exchange the colour $c^+(m)$ of m with the colour $c^+(f)$ of a vertex f of degree one in an edge e_j^{n+1}, $j \in \Lambda_m$, then we must permute these colours in all edges containing m to avoid a colouring conflict. Of course, $c^+(f)$ has to be present among the vertices of degree one in each edge containing m, i.e. in all the C^i, $i \in \Lambda_m$. The colour of a vertex $m \in M$ can be changed only if $C_m \neq \emptyset$.

Definition 6. *Let $m \in M$ be a contact point and c_f be a colour in C_m. An* admissible recolouring *is defined to be the result of the following vertex recolourings occurring in each edge in Λ_m:*

- *colour m with c_f*

- *for all $j \in \Lambda_m$, colour the vertex of degree one of colour c_f in e_j^{n+1} with $\mathrm{c}^+(m)$.*

To summarize, in order to obtain a properly coloured with $n+1$ colours H^{n+1} from a properly coloured with n colours H^n, the contact points M must receive pairwise different colours. To do so, we confine ourselves to admissible recolourings. It is not clear that this recursive method could work in all cases, as it may not be possible to recolour M using only admissible recolourings. In the following sections, we prove that admissible recolourings can indeed be used on classes of recursively defined hypergraphs which are obtained from a 'base hypergraph' having nice recolouring properties.

3. A class of graphs satisfying the conjecture

Unfortunately, if a graph H^n is properly coloured with n colours, using only admissible recolourings does not work in general for properly colouring with $n+1$ colours a graph H^{n+1} obtained from H^n. For example, if we take the only H^3 having three vertices of degree greater than one with a proper colouring with three colours, and if we add vertices of degree one with colour four, then our method of colouring works for all the cases of contact points during this first step.

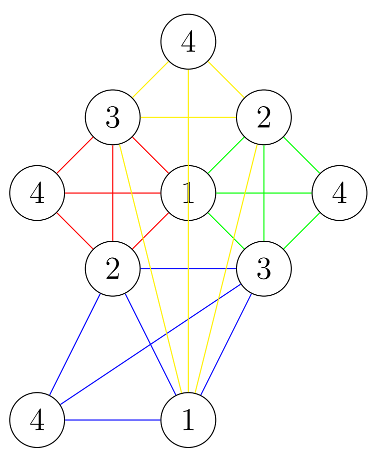


Fig. 1. Graph H^{04} obtained by adding three simple contact points to the graph H^3 that has three contact points.

If we take contact points that are all simple, the method will not work in the second step with colour five and contact points that are again all simple.

That is why we restrict ourselves in the choice of the contact points. We will use the following:

Definition 7. *Let $n \in \mathbb{N}$, let H^{n+1} be obtained from a graph H^n, a set of contact points in H_+^{n+1} is called* last-simple *if the contact points are all of degree at least three, except maybe one that is common with the added edge.*

So our class of graphs is built recursively from a starting graph by selecting at each step last-simple contact points on a graph to build the subsequent one (see Definition 5).

We now have to translate into a property the fact that we can colour our contact points with pairwise different colours only by using admissible recolourings.

Definition 8. *Let H be an EFL n-graph, $n \in \mathbb{N}$. We say that H has* Property P *if the following statement is true for any last-simple set $M = \{m_i\}_{i=1}^k$ in H^+.*

«if

- *H^n is properly coloured with n colours,*
- *we add a vertex of degree one of colour $n+1$ to each e_i^n, $i \in [n]$,*

then we can colour the $\{m_i\}_{i=1}^k$ with pairwise different colours only by using admissible recolourings. In addition, the colour $n+1$ is not present in M.»

We are now ready to state our result.

Theorem 9. *For all $n \geq 4$, every graph H^n obtained from an EFL graph possessing Property P by a successive selection of last-simple sets of contact points is properly n-colourable.*

So this result assures that when we have a "good" starting graph, we can obtain a whole class of graphs that verify the EFL conjecture.

The next step is then to find an appropriate starting graph. We take H^{04} and consider that a set of contact points in H^{04}_+ with at most one simple contact point is last-simple. We cannot use Definition 7 because H^{04} is a starting graph and so, there is no added edge.

We have now a concrete class of graphs satisfying the conjecture.

Corollary 10. *For all $n \geq 4$, every graph H^n obtained from H^{04} by a successive selection of last-simple sets of contact points is properly n-colourable.*

4. Proof of the theorem

Proof. The proof of the theorem is given by the proof of the corollary: both are proofs by induction with the same inductive step. The only difference is that in the theorem, we start from a graph satisfying the base case, and in the corollary, we have to (quickly) check that the starting graph H^{04} satisfies the base case.

Let H^n, $n \geq 4$, be obtained from H^{04} by successive selections of last-simple sets of contact points. We will prove that if H^n satisfies property P, then H^{n+1} satisfies property P. It immediately follows that for all $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 4$, every H^m obtained from H^{04} by a successive selection of last-simple sets of contact points is m-colourable.

H^{04} satisfies property P and so, the assertion is true for $n = 4$. So we suppose now that H^n, $n \geq 4$, has property P. Let $H^{n+1} \in \mathcal{H}(n+1)$ be obtained from H^{04} by a successive selection of last-simple sets of contact points. Let e be the last edge added, $M = \{m_i\}_{i=1}^{k}$ be the contact points of e in H^{n+1}, and $\Pi = \{p_i\}_{i=1}^{l}$ be a set of last simple contact points in H^{n+1}.

There are three cases: either there is one contact point $p \in \Pi$ in the last edge e, and in that case, it can be simple or multiple, or there is no contact point in e.

4.1. p is a simple contact point

In this case, p does not belong to M, because as a simple contact point of the future added edge, it belongs only to e. We first colour $\Pi \setminus \{p\}$.

4.1.1. *Colouring* $\Pi \setminus \{p\}$

- *Let H^n be obtained from H^{n+1} by deleting* e.
  Since H^n has been obtained from H^{04} by successive selections of last-simple sets of contact points, it satisfies property P by the induction hypothesis. It follows that it is also properly n-colourable. H^n contains all the contact points in Π except p, because it is a vertex of degree one of e that has been removed when we removed e. The set of contact points $\Pi \setminus \{p\}$ is last-simple because they are all multiple.
- *Add a vertex of degree one of an additional colour $n+2$ to each edge of H^n, in order to use property P in a next step.*
  As the contact points in Π are on H^{n+1} and will lead to a graph H^{n+2}, we use the number $n+2$ for the additional colour. We will do the same in a next step when we will recolour the contact points in M: the colour $n+1$ will be used for the added vertices.
- *Colour the elements of* $\Pi \setminus \{p\}$ *with pairwise different colours without using the colour $n+2$.*
  As H^n satisfies property P, this can be done by using only admissible recolourings. The resulting graph is still properly coloured. The colour $n+2$ is not present in $\Pi \setminus \{p\}$, so it is only present on vertices of degree one of the current graph.

We need now to introduce the colour $n+1$ and to colour M in order to prove that H^{n+1} satisfies property P.

4.1.2. *Colouring of the* $\{m_i\}_{i=1}^{k}$

- *Remove the vertices of degree one having colour $n+2$.*
  We obtain a properly coloured H^n with n colours. The set M is last-simple on H^n by construction.

- *Add vertices of degree one of the additional colour $n+1$.*
- *Colour M with pairwise different colours without using the colour $n+1$.*
  As H^n satisfies property P, this can be done by using only admissible recolourings. As the contact points in $\Pi \setminus \{p\}$ are not vertices of degree one, their colours have not been touched while colouring the contact points in M.

4.1.3. *Satisfying the property for H^{n+1}*

We recover our H^{n+1} by adding the vertices of degree one of e again and it is properly coloured with $n+1$ colours. As the colour $n+1$ is not present among the $\{m_i\}_{i=1}^k$, it is on a vertex of degree one of e. As p is a vertex of degree one of e, we can exchange its colour with $n+1$ if needed. The other contact points in $\Pi \setminus \{p\}$ do not contain the colour $n+1$ and so, the property P is satisfied.

4.2. p is a multiple contact point

The vertex p being multiple, it belongs to the set M, because as a multiple contact point of the future added edge, it belongs to at least two more edges. Moreover, p is the only element of Π in M because the $\{p_i\}_{i=1}^l$ are a set of contact points (of a future additional edge) and so, there can only be one of them in e.

4.2.1. *Colouring of the $\{p_i\}_{i=1}^l$*

We do the same as in 4.1.1. The only difference is that p is still present in H^n because as a multiple contact point, it did not disappear when we removed the edge e.

4.2.2. *Colouring of the $\{m_i\}_{i=1}^k$*

We do the same as in 4.1.2. The difference here is that as $p \in M$, the colour of p may have changed when we coloured the $\{m_i\}_{i=1}^k$, and so, the contact points in Π may not have pairwise different colours.

Note here that neither the colour $n+1$, nor $n+2$ are present among the $\{p_i\}_{i=1}^l$ and the $\{m_i\}_{i=1}^k$. So both colours are only present on vertices of degree one.

4.2.3. *H^{n+1} satisfies property P*

We now colour p with colour $n+1$. The contact points in Π have pairwise different colours, as do the contact points in M.

We recover our H^{n+1} by adding the vertices of degree one of e again and it is properly $(n+1)$-coloured. As the contact points in Π do not contain the colour $n+2$, property P is satisfied.

4.3. If there is no vertex of Π in e

Finally, if there is no contact point of Π in e, all the $\{p_i\}_{i=1}^{l}$ are multiple and $\Pi \cap M = \emptyset$. In this case, the proof is practically the same as in 4.2., the only difference being that when we colour M, the colours in Π do not change and we do not even need to colour one common vertex with $n+1$.

□

5. A second class of graphs satisfying the conjecture

We can now go further and show another class of graphs satisfying the conjecture.

Let H^{13} be the H^3 having two contact points, one common to e_3^1 and e_3^2, and one common to e_3^2 and e_3^3, as shown in the figure below.

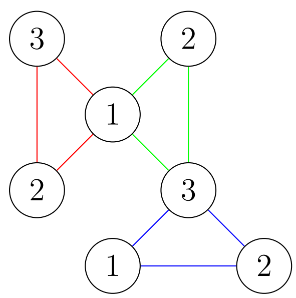


Fig. 2. Graph H^{13}

Let $\mathcal{C}$ be the class of graphs obtained from H^{13} by successive selections of last-simple sets of contact points.

Theorem 11. *Every H^n, $n \geq 4$ obtained from a graph in $\mathcal{C}$ by selection of any contact points is properly colourable with n colours.*

For the proof of this theorem, we will need two properties instead of one.

Definition 12. *Let H be an EFL n-graph, $n \in \mathbb{N}$. We say that H has* Property P' *if the following statement is true for any set contact points $\Pi = \{p_i\}_{i=1}^{l}$ in H^+.*

«if

- *H^n is properly coloured with n colours,*
- *we add a vertex of degree one of colour $n+1$ to each e_i^n, $i \in [n]$,*

then we can colour the $\{p_i\}_{i=1}^{l}$ with pairwise different colours only by using admissible recolourings. In addition, the colour $n+1$ is not present in Π.»

So here we use the same method using admissible recolourings in order to avoid chain reactions that are not manageable (recall Section 2). The second property used is property P again (see Definition 8).

Proof. The present proof will also be based on the same inductive method as in the proof of Section 4, but the particularity here is that we use two properties simultaneously. We will show that the graphs in $\mathcal{C}$ satisfy property P' and P.

The proof that every graph in $\mathcal{C}$ satisfies property P is the same as in the proof of Theorem 9. The only difference is the starting graph, and as H^{13} satisfies property P, the initial step of the induction is verified.

We have to show now that every graph in $\mathcal{C}$ satisfies property P'. H^{13} satisfies property P', so the initial step of the proof by induction is true. Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, and suppose that all the graphs H^k in $\mathcal{C}$ satisfy property P' for all $3 \leq k \leq n$. Let H^{n+1}, $\Pi = \{p_i\}_{i=1}^{l}$, e and $M = \{m_i\}_{i=1}^{k}$ be defined similarly as in the proof of Theorem 9.

Suppose first that there exists a contact point in e, noted p as usual, and that it is simple. The colouring process proceeds as follows:

- *Colouring properly H^{n+1} with $(n+1)$-colours.*
  The H^n obtained by removing e is in $\mathcal{C}$ and thus, as seen at the beginning of this proof, it satisfies property P. We add vertices of degree one of an additional colour $n+1$ and we can colour the $\{m_i\}_{i=1}^{k}$ with pairwise different colours only by using admissible recolourings, and the colour $n+1$ is not used.
- *Colouring the contact points in $\Pi \setminus \{p\}$.*
  We remove all the vertices of degree one with colour $n+1$. We also remove e, and so p is not present in the obtained H^n as it is a vertex of degree one of e. This H^n is in $\mathcal{C}$ and thus, by the induction hypothesis, it satisfies property P'. We add now vertices of degree one of the additional colour $n+2$. We can colour the contact points in $\Pi \setminus \{p\}$ with pairwise different colours only by using admissible recolourings, and the colour $n+2$ is not used.
- *Finalizing the colouring of H_+^{n+1}.*
  We now add vertices of degree one, all coloured with $n+1$. If there is a simple (and in that case unique) contact point in M, its colour may have changed while colouring the contact points in $\Pi \setminus \{p\}$. In that case, we colour this simple contact point with the colour $n+2$ in order to avoid any potential problem. We then add the vertices of degree one of e and the edge e itself, and we colour p with the colour $n+1$. We obtain a properly coloured H_+^{n+1} with $n+2$ colours and contact points in Π with pairwise different colours.

If we suppose now that there exists a contact point in e, noted p as usual, and that it is multiple, the proof is similar. It is the same in the case that there is no contact point in Π belonging to e. In conclusion, H^{n+1} satisfies property P' in all cases. As all the graphs in $\mathcal{C}$ satisfy property P', *any* graph obtained from them satisfies the conjecture. □

We remark that there is no constraint on the graphs obtained from $\mathcal{C}$: the contact points of the last added edge can be of any kind.

5.1. Characteristics of our special classes

In terms of number of contact points, the class described in Theorem 9 can contain any number between 6 and $n+2$, and the one described in Theorem 11 any number between 2 and $2n-3$.

In terms of number of contact points by edge, the class described in Theorem 9 can contain any number between 1 and $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$, and the one described in Theorem 11 can also contain in addition graphs with $n-1$ contact points.

In terms of number of edges by contact point, the class described in Theorem 9 can contain any number between 2 and $n-2$, which is the same for the one described in Theorem 11.

6. Conclusion

An advantage of this method of colouring, based on admissible recolourings, is its simplicity: once we have an adequate starting EFL hypergraph, we can build larger properly n-colourable H^n's, just by using simple recolourings.

The only critical point that prevents our method of colouring to work in all cases is the existence of simple contact points. The problem is that when we colour the contact points in Π, we cannot guarantee that it will not affect the colours of the simple contact points in M and vice versa. Determining a special class of graphs that satisfy the conjecture is mainly reduced to finding a class were the possibility of changing the colour of the contact points in M (resp. Π) while colouring the contact points in Π (resp. M) will not appear. Once we found a property that determines such a class, the only remaining issue is to find a starting graph that satisfies this property.

Acknowledgements

We would like to deeply thank Geňa Hahn and Ben Seamone for their help in the writing of this article. The author has been supported by the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada (BESC D).

References

[1] C. Berge, A. J. W. Hilton, On two conjectures about edge-colouring hypergraphs, *Congressus Numerantium,* 70: 99 – 104, 1990.

[2] W. I. Chiang, E. L. Lawler, Edge coloring of hypergraphs and a conjecture of Erdős, Faber, Lovász, *Combinatorica,* 8 (3): 293 – 295, 1988.

[3] C. J. Colbourn, M. J. Colbourn, The chromatic index of cyclic Steiner 2-designs, *Internat. J. Math. and Math. Sci.,* 5 (4): 823 – 825, 1982.

[4] P. Erdős, On the combinatorial problems which I would most like to see solved, *Combinatorica,* 1: 25 – 42, 1981.

[5] L. Haddad, C. Tardif, A clone-theoretic formulation of the Erdős-Faber-Lovász conjecture, *Discussiones Mathematicae,* Graph Theory, 24 (3): 545 – 549, 2004.

[6] J. Kahn, Coloring nearly-disjoint hypergraphs with n + o(n) colors, *Journal of Combinatorial Theory,* Series A, 59: 31 – 39, 1992.

[7] D.Y. Kang, T. Kelly, D. Kühn, A. Methuku, D. Osthus, A proof of the Erdős-Faber-Lovász conjecture, arXiv:2101.04698v1

[8] A. Sánchez-Arroyo, The Erdős-Faber-Lovász conjecture for dense hypergraphs, *Discrete Mathematics,* 308: 991 – 992, 2008.

Second Article.

Edge clique covers in graphs with independence number two: a special case

by

Frank Ramamonjisoa[1]

([1]) Département de Mathématique et de Statistique
Université de Montréal
CP 6128, succ. Centre-Ville, Montreal
QC, Canada H3C 3J7

This article was submitted in Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science.

RÉSUMÉ. Le nombre de couverture par cliques $ecc(G)$ d'un graphe G est la taille du plus petit ensemble de sous-graphes complets dont l'union couvre toutes toutes les arêtes de G. Il a été conjecturé que tous les graphes simples avec un nombre d'indépendance de deux satisfont $ecc(G) \leq n$. Nous présentons tout d'abord une classe de graphes contenant des arêtes difficiles à couvrir mais qui satisfont la conjecture. Puis nous décrivons une grande classe de graphes G tels que $ecc(G) \leq \frac{3}{2}n$. Cette classe est aisée à caractériser.
Mots clés : nombre de couverture par cliques, nombre d'intersection, graphes sans griffe

Abstract. The edge clique cover number $ecc(G)$ of a graph G is the size of the smallest set of complete subgraphs whose union covers all edges of G. It has been conjectured that all the simple graphs with independence number two satisfy $ecc(G) \leq n$. First, we present a class of graphs containing edges difficult to cover but that satisfy the conjecture. Second, we describe a large class of graphs G such that $ecc(G) \leq \frac{3}{2}n$. This class is easy to characterize.
Keywords: edge clique cover number, intersection number, claw-free graphs

1. Introduction

In this paper, G will be a simple graph and n will be the number of vertices of G. A *clique* of G is a subset of the vertices of G that induces a complete graph. The *edge clique cover number* of G, denoted $ecc(G)$, is the minimum number of cliques in G such that both endpoints of each edge of G lie in at least one of them. The origin of our research is the attempt to solve the following problem.

Problem 1. *(Chen, Jacobson, Kézdy, Lehel, Scheinerman, Wan* [**2**]*) If G is a claw-free graph, is $ecc(G) \leq n$?*

This problem is related to Opsut's conjecture, stating that the competition number of a locally cobipartite graph is at most two, and locally cobipartite graphs are claw-free. A *claw* is a graph with four vertices and three edges linking three of the vertices to the fourth. Javadi and Hajebi gave a positive answer to the question for graphs with independence number greater than two [**6**]. Their proof is based on Chudnovsky and Seymour's structure theorem for claw-free graphs (see [**3**]), concerning only graphs with independence number $\alpha(G) \geq 3$. This leaves the following conjecture.

Conjecture 2. *If G is a simple graph with $\alpha(G) = 2$, then $ecc(G) \leq n$.*

Special classes of graphs satisfying this conjecture have been found. For example graphs with diameter three, or $2K_2$-free and co-claw free graphs [**1**]. Our first result adds one more class of graphs that satisfy the conjecture. It contains graphs with dominating edges, which are particularly difficult to cover in graphs with independence number two and diameter two.

Definition 3. *An edge $uv \in E(G)$ is a* dominating edge *of G if every other vertex of G is adjacent to at least one of u and v.*

We can now state our first theorem, which will be proven in Section 3.

Theorem 4. *Let G be a simple graph with $\alpha(G) = 2$. If G has a dominating edge uv such that $G - \{u,v\}$ has diameter 3, then $ecc(G) \leq n$.*

Thus to prove the conjecture we only have to do so for the class of graphs G with independence number two, diameter two, and such that for any dominating edge uv the graph $G - \{u,v\}$ has diameter two.

The best known bound on $ecc(G)$ for general graphs with independence number two is the minimum of $n + \delta(G)$ and $2n - \Omega(\sqrt{n \log n})$, where $\delta(G)$ is the minimum degree of G [**1**]. Better bounds have been found for some classes of graphs. For example, it has been shown in [**1**] that if the chromatic number $\chi(\bar{G})$ of the complement of G is four then $ecc(G) \leq \frac{3}{2}n + 4$. The combination of a large class of graphs G with a good bound on the $ecc(G)$ is mostly elusive at this time.

Our second result is about one such combination with the additional pleasant property that the class of graphs is easy to determine: the graphs just need to avoid two patterns defined in the following definitions.

Definition 5. *Let G be a simple graph and x_0,x_1,x_2,x_3,x_4 be vertices of G. The path $x_0x_1x_2x_3x_4$ is a* **double top** *if its edges are dominating and x_2 is adjacent neither to x_0 nor to x_4 in G.*

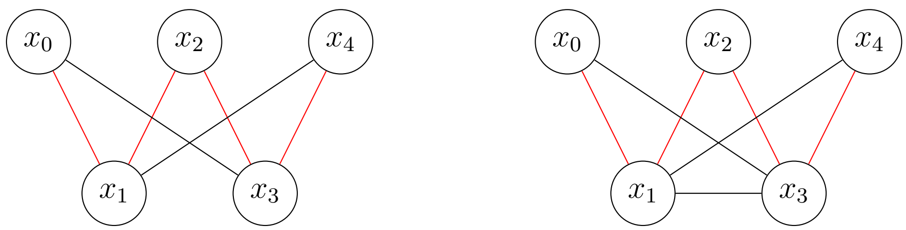


Fig. 3. Examples of double tops in a graph. The dominating edges are in red.

If we avoid in our class the double tops, this class is already large and contains for example the graphs with few dominating edges. But we can still enlarge this class by excluding only a part of the double tops, called incompatible (with our class of graphs).

Definition 6. *A double top $x_0x_1x_2x_3x_4$ is* incompatible *if x_1x_3 is not an edge.*

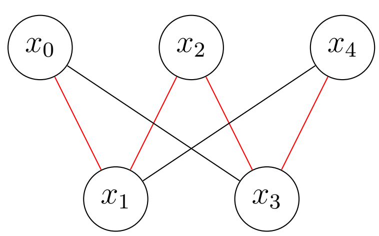
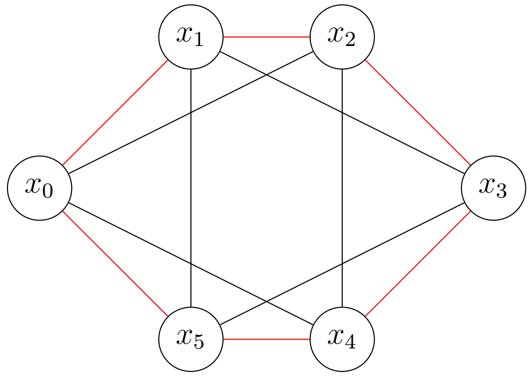


Fig. 4. Example of incompatible double top. The dominating edges are in red.

We need one more definition.

Definition 7. *We define a* **supercycle** *to be a cycle $u_0 \ldots u_k$, $k \in \{3, \ldots, n-1\}$ of dominating edges such that for all $i \in \{0, \ldots, k\}$, $u_{i-1}u_{i+1}$ is an edge, addition modulo $k+1$.*

Example of supercycle.



So a supercycle is a cycle C of at least four dominating edges in which any two vertices at distance two on C form an edge. We are now ready to state the following result.

Theorem 8. *If G is a simple graph with $\alpha(G) = 2$ containing neither supercycles nor incompatible double tops, then $ecc(G) \leq \frac{3}{2}n$.*

This document is organized as follows. In Section 2 we consider some preliminary and/or known results on the edge clique covering number of graphs with independence number two. In Section 3 we prove Theorem 4. In Section 4 we prove Theorem 8 and we conclude in Section 5.

2. Typology of graphs with $\alpha(G) = 2$

Conjecture 2 concerns graphs with independence number two. Let us first look at some known results on the edge clique covering number of such graphs.

If a graph G is not connected, then it cannot have more than two connected components because $\alpha(G) = 2$, and every connected component is a clique. Thus no generality is lost in assuming that G is connected.

A graph G with $\alpha(G) = 2$ has diameter two or three. It can clearly not be of diameter one and if it had diameter four or more, it would have $\alpha(G) \geq 3$. The diameter three case has been solved in [**1**].

Proposition 9 ([**1**])**.** *Let $G = (V,E)$ be a simple graph, if $\alpha(G) = 2$ and $diam(G) = 3$, then $ecc(G) \leq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$.*

This leaves only graphs of diameter two (and of course $\alpha(G) = 2$) to consider. Since the conjecture is trivially true for $n \leq 3$, we will suppose that $n \geq 4$. As usual, let us denote by $\overline{N[u]}$ the set of non-neighbours of u. In a graph with independence number two, each $\overline{N[u]}$ is a clique, possibly trivial. If there is no dominating edge in G, the set $\{\overline{N[u]}\}_{u \in V(G)}$ is an edge clique cover of G that contains at most n cliques. Indeed, for each edge xy of G, there is a vertex u that is not adjacent to either of its ends, and so xy is covered by the clique $\overline{N[u]}$. We thus have the following lemma, proved in [**1**].

Lemma 10 ([**1**])**.** *Let G be a simple graph such that $\alpha(G) = 2$. If G has no dominating edge, then $ecc(G) \leq n$.*

We will suppose from now on that G possesses a dominating edge uv. Thus, each vertex w of G (different from u and v) is adjacent to u or adjacent to v (or adjacent to both). Let U be the set of vertices adjacent to u but not adjacent to v, V be the set of vertices adjacent to v but not adjacent to u, and W be the set of vertices adjacent to both u *and* v. Without loss of generality, we will suppose that $|U| \geq |V|$. Note that both U and V are cliques.

Let's consider the subgraph $G' = G - \{u,v\}$. We have $\alpha(G') \leq 2$ because $\alpha(G) = 2$. If $\alpha(G') = 1$, then $V(G')$ is a clique and the edges of G are covered by the four cliques $V(G'), \{u,v\}, U \cup W \cup \{u\}, V \cup W \cup \{v\}$, and we thus have the following lemma.

Lemma 11. *Let G be a simple graph with $\alpha(G) = 2$. If G has a dominating edge uv such that $G - \{u,v\}$ is of diameter one, then $ecc(G) \leq n$.*

If $\alpha(G') = 2$, suppose first that G' is not connected. As we have seen before, there can only be two connected components, C_1 and C_2, and those connected components are cliques. As U and V are cliques, each of them is included in one connected component. Suppose for example that $U \subset C_1$ and $V \subset C_2$. Then, G is covered by the cliques: $V(C_1) \cup \{u\}, V(C_2) \cup \{v\}, \{W \cap V(C_1)\} \cup \{v\}, \{W \cap V(C_2)\} \cup \{u\}, \{u,v\}$. As G is covered by five cliques, the conjecture holds when $n \geq 5$. If U and V are included in the same connected component, this is still true. Finally, we can check directly that if $n = 4$, this is also true. So we will suppose from now on that G' is connected.

We are now facing two cases, the diameter of G' is three or the diameter of G' is two, and the purpose of the next section is to study the first one.

3. Proof of Theorem 4

To prove Theorem 4, we will need a lemma. Recall that W is the set of vertices adjacent to both u and v.

When the diameter of G' is three, then according to Proposition 9, the edges of G' are covered by at most $\lceil \frac{n(G')+1}{2} \rceil = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil \leq \frac{n}{2}$ cliques $\{D^i\}_{1 \leq i \leq k}$, $k \in \mathbb{N}$, $n(G')$ being the number of vertices of the graph G'.

Let's consider the graph $G[W]$ induced by the vertices of W. We need to cover the vertices of W by cliques of $G[W]$ in the rest of the proof, in order to cover the edges between u,v and W. We have a bound for the number of those cliques.

Lemma 12. *The vertices of W can be covered by cliques $\{C^i\}_{1\leq i\leq \ell}$, $\ell \in \mathbb{N}$ of $G[W]$, with $l \leq \lceil \frac{|W|+1}{2} \rceil$.*

Proof. Suppose first that $G[W]$ is not connected. As we've seen before, in that case, $G[W]$ consists of two cliques and the lemma is true. So we will suppose that $G[W]$ is connected. We will also suppose that $\alpha(G[W]) = 2$ because if $\alpha(G[W]) = 1$ or if W is empty, the lemma is obviously satisfied.
If $G[W]$ has only one or two vertices, the lemma is true.
If $G[W]$ has only three vertices, there are two adjacent vertices and the lemma is true.
If $G[W]$ has only four vertices, then we can check that we can cover them with two sets and the lemma is true.

Suppose now that $G[W]$ has more than four vertices. Let's take any vertex w of W. It lies in a clique of $G[W]$ that has at least two vertices since $G[W]$ is connected. We call this clique C^1 and we consider the graph $G^1 = G[W] - \{C^1\}$. If G^1 is not connected, G^1 satisfies the lemma and thus, $G[W]$ satisfies the lemma. So let's suppose that G^1 is connected. If G^1 has more than four vertices, then we repeat the above process by taking two of the remaining vertices linked by an edge and by considering a clique C^2 that contains them. As we remove at each step at least two vertices, if the remaining graph possesses at a certain step three or four vertices, the lemma is true. Otherwise we go from a graph with more than four vertices to a graph with at most two vertices, and in that case, the lemma is also satisfied, because we would have removed at least three vertices in one step before arriving to at most two vertices.

In conclusion, the lemma holds in all cases. □

We can now prove Theorem 4.

Proof. Let $\{C^i\}$, $1 \leq i \leq \ell$, $\ell \in \mathbb{N}$ be the set of cliques that cover the vertices of $G[W]$ found in the preceeding lemma. For each i, let $B^i = C^i \cup \{u,v\}$. The set $\{B^i : 1 \leq i \leq \ell \in \mathbb{N}\}$ covers $G[W]$ and all the edges between $\{u,v\}$ and W. If W is not empty, this set of cliques is not empty, which means that it also covers the edge uv, since $G[W]$ is not connected and $\alpha(G) = 2$. If W is empty, we consider the set composed of only the clique $\{u,v\}$.
If U is not empty, $U' = U \cup \{u\}$ is a clique and it covers all the edges from u to U; if U is empty, we set $U' = \emptyset$. We do the same for V.
The notation 1_P refers to the indicator function on the assertion P: this function is equal to 1 if and only if P is true. The cliques $\{D^i\}_{1\leq i\leq k} \cup \{B^i\}_{1\leq i\leq \ell} \cup \{U'\} \cup \{V'\}$ cover all the edges of G and there are at most

$$m = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil + \lceil \frac{|W|+1}{2} \rceil + 1_{U'\neq\emptyset} + 1_{V'\neq\emptyset} \qquad (1)$$

of them.

Let's study this formula with different values of $1_{U'\neq\emptyset}$ and $1_{V'\neq\emptyset}$.

- If U and V are empty, $m = \lceil\frac{n-1}{2}\rceil + \lceil\frac{n-2+1}{2}\rceil \leq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} \leq n$. We have thus $ecc(G) \leq n$.
- If only one of the sets U and V is not empty (suppose that it's U without loss of generality), as $|W| \leq n-3$, we have:

$$m \leq \lceil\frac{n-1}{2}\rceil + \lceil\frac{n-3+1}{2}\rceil + 1 \leq \lceil\frac{n-1}{2}\rceil + \lceil\frac{n-2}{2}\rceil + 1 \leq \frac{n}{2} + \frac{n-1}{2} + 1 \leq n + \frac{1}{2}.$$

  But as $ecc(G)$ is an integer, we have also in this case $ecc(G) \leq n$.
- If U and V are both not empty, we have then $|W| \leq n-4$. Suppose that $U \cup V$ contains at least three vertices. We have then $|W| \leq n-5$ and:

$$m \leq \lceil\frac{n-1}{2}\rceil + \lceil\frac{n-5+1}{2}\rceil + 2 \leq \frac{n}{2} + \frac{n-3}{2} + 2 \leq n + \frac{1}{2}.$$

  As $ecc(G)$ is an integer, we deduce $ecc(G) \leq n$.

So now there is only one subcase to investigate in order to finish the proof: $|U \cup V| = 2$ and U and V both non empty, so $|U| = |V| = 1$. We will first improve Lemma 12.

Lemma 13. *If $|W| \geq 4$ and if $G[W]$ is not a 5-cycle, the vertices of W can be covered by at most $\lceil\frac{|W|}{2}\rceil$ sets $\{C^i\}_{1\leq i\leq \ell}$, $\ell \in \mathbb{N}$, a set C^i being a clique of $G[W]$.*

Proof. We have seen before that if $G[W]$ is not connected, it consists of two cliques and the current lemma is true. We will then suppose, without loss of generality, that $G[W]$ is connected.

As in Lemma 12, we see that if $G[W]$ has four vertices, we can cover them by at most two sets, and the current lemma is true.

We can check directly that if $|W| = 5$ and $G[W]$ is not a 5-cycle, $G[W]$ contains a clique of at least three vertices.

Suppose now that $|W| > 5$. There exists a connected subgraph G'' of $G[W]$ with exactly five vertices because $G[W]$ is connected. If G'' is a 5-cycle, then since $G[W]$ is connected, there exists a connected subgraph of $G[W]$ containing G'' with exactly six vertices. We can check directly that this subgraph possesses a clique of at least three vertices. If G'' is not a 5-cycle, we have seen above that it too contains a clique of at least three vertices. In either case, G'' contains a clique $\mathcal{C}$ of at least three vertices.

From Lemma 12 we have that the vertices of $G[W] - \mathcal{C}$ are covered by at most $\lceil\frac{|V(G[W]-C)|+1}{2}\rceil \leq \lceil\frac{|W|-3+1}{2}\rceil$ sets $\{C^i\}_{1\leq i\leq \ell}$, $\ell \in \mathbb{N}$. So the vertices of $G[W]$ are covered by at most $\lceil\frac{|W|-3+1}{2}\rceil + 1 = \lceil\frac{|W|-3+3}{2}\rceil$ sets $\{C^i\}_{1\leq i\leq \ell} \cup C$. $\square$

So if $|W| \geq 4$ and if $G[W]$ is not a 5-cycle, we can adapt formula (1) to our present case and we have at most

$$m = \lceil\frac{n-1}{2}\rceil + \lceil\frac{|W|}{2}\rceil + 1 + 1 = \lceil\frac{n-1}{2}\rceil + \lceil\frac{n-4}{2}\rceil + 2 \leq \frac{n}{2} + \frac{n-3}{2} + 2 \leq n + \frac{1}{2}$$

cliques covering the edges of G. As the number of cliques is an integer, the theorem is true. Now if $|W| = 3$, the vertices of W are covered by at most two sets. As in addition $n = 7$, formula (1) gives $m = 7$ and the theorem is true. If $|W| = 2$ and it is covered by one clique, as $n = 6$, formula (1) gives $m = 6$ and the theorem is true. If $|W| = 1$, as $n = 5$, formula (1) gives $m = 5$ and the theorem is true. And finally if W is empty, the theorem is trivially satisfied.

If W is composed of two non-adjacent vertices, we can check directly that all the different cases satisfy the theorem. And finally, if $G[W]$ is a 5-cycle, and by considering that the vertices in $G[W]$ not adjacent to the vertex in U (or V) form a clique, we also check directly in all the cases that the theorem is true. This concludes the proof of Theorem 4. □

4. Proof of Theorem 8

We saw in Section 2 that if there is no dominating edge, the set of cliques $D = \{\overline{N[x]}\}_{x \in V(G)}$ covers all the edges of G. In a graph containing dominating edges, D covers all the non-dominating edges of G. But it covers no dominating edge. The idea is to extend these cliques in order to cover as many dominating edges as possible, and to count the additional cliques necessary to cover the remaining dominating edges.

A vertex y adjacent to a vertex x can be used to extend the clique $\overline{N[x]}$ if all the vertices of $\overline{N[x]}$ are linked to y. This gives the following lemma.

Lemma 14. *Let x be a vertex in G. The clique $\overline{N[x]}$ can be extended by the vertex y if and only if xy is a dominating edge.*

In this case, all the dominating edges between y and $\overline{N[x]}$ will be covered by this extended clique.

But extending a clique like $\overline{N[x]}$ is not always relevant, because it may not cover a dominating edge. Let us then first study the methods we have to extend a clique $\overline{N[x]}$ so it covers a dominating edge.

If xy is a dominating edge and neither x nor y belongs to another dominating edge, xy cannot be covered by an extension of a clique $\overline{N[z]}$, for any vertex z of G. Indeed, this would mean that either zx or zy is a dominating edge. It means that we can cover xy by an extension of cliques of D only if there exists a vertex z in G such that xz or yz is dominating.

Let's suppose without loss of generality that xz is dominating. Recall that xy is dominating.

- If y and z are not adjacent, z belongs to $\overline{N[y]}$ and this clique can be extended to x as xy is dominating. In that case, the extended clique covers xz. In the same way, xy is covered by a clique extended from $\overline{N[z]}$.
- If yz is an edge but not dominating, then as z doesn't belong to $\overline{N[y]}$, xz cannot be covered by a clique extended from $\overline{N[y]}$, because $\overline{N[y]}$ cannot be extended to both x and z.
- If yz is a dominating edge, it can be covered by extending $\overline{N[x]}$ to y and z.

So for a dominating edge xy, there are two cases where it can be covered by an extension of a clique $\overline{N[z]}$ of D for a certain vertex z in G so that xz is dominating. And it cannot be covered by one of these extensions in the other cases.

Lemma 15. *A dominating edge xy is covered by an extension of the clique $\overline{N[z]}$, $z \in V(G)$ if and only if:*

- *zx is dominating and z is not adjacent to y,*
- *zy is dominating and z is not adjacent to x,*
- *zx and zy are both dominating edges.*

But maybe we can extend $\overline{N[z]}$ in several ways, to several vertices adjacent to z, in order to cover several dominating edges. For example, suppose we can extend a clique $\overline{N[z]}$, $z \in V(G)$.

- to a vertex y_1, covering the dominating edge $y_1w_1$with $w_1 \in \overline{N[z]}$,

- to a vertex y_2, covering the dominating edge, y_2w_2 with $w_2 \in \overline{N[z]}$.

If y_1y_2 is not an edge, we cannot extend $\overline{N[z]}$ to both y_1 and y_2 and we have to choose only one of theses possible extensions.

By choosing graphs with incompatible double tops, we avoid the situation where y_1y_2 is not an edge. Indeed, in the above situation, $w_1y_1zy_2w_2$ forms a double top. As it is not incompatible, y_1y_2 is an edge. So we can extend $\overline{N[z]}$ to both y_1 and y_2.

Following this idea, for each vertex x in G, we extend the clique $\overline{N[x]}$ to a larger clique, denoted by C^x, by adding all the vertices y such that xy is dominating and there is a dominating edge incident to y and to a vertex in $\overline{N[x]}$. If there is no such vertex, then $C^x = \overline{N[x]}$.

The set of cliques $C = \{C^x\}_{x\in V(G)}$ contains n elements that cover a certain number of dominating edges in G. But there may still exist dominating edges that are not covered by C. We now give a way to count them to determine a bound for the edge clique cover number of G. Let D' be a set of cliques, initially empty. It will receive the cliques that we need in order to cover the dominating edges that are not covered by C.

Suppose that zw_1 is not a covered (dominating) edge. Then all the other dominating edges zw, if any, are such that w is adjacent to w_1. This is in particular the case for all the dominating edges *zw not yet covered*. Indeed, if it were not the case, then we could cover zw_1 with C^w. Thus, the vertices of all the uncovered dominating edges incident to z form a clique, and we will denote this clique by $C_z = \{z, w_1, \dots, w_k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Note that C_z is not the same as the extended clique C^z.

If there is a w_i, $1 \leq i \leq k$ in C_z such that there is no uncovered edge incident to w_i with the other end outside C_z, we put C_z in D' and we label it with z and w_i.

Definition 16. *We call a vertex z in G a* favourable *vertex if there exists a vertex $w \in C_z$ such that each dominating edge of G containing w has its second vertex in C_z. We call also w a* twin vertex *of z.*

The clique C_z covers all the edges not yet covered and incident to z, and those incident to w_i. Thus all the remaining uncovered edges are inside a subgraph of G with at most $n-2$ vertices.

We continue the same process for the remaining uncovered edges. If there is a favourable vertex, we put the corresponding clique in D' and we label it with this vertex and one of its twin vertices. The process ends when there is no favourable vertex.

Observe now that a vertex can appear in only one clique of D'. This property will give us a bound for $|D'|$, and consequently for $ecc(G)$.

We remark that at the beginning of the process of putting cliques in D', a given vertex z' may not be favourable, but that after a certain number of steps, it may become favourable because all the uncovered edges incident to its twin vertex with the other end outside $C_{z'}$ are covered by cliques in D'.

Among the (possibly) remaining uncovered edges, there is a cycle. Indeed, if we consider a connected component of the subgraph formed by these uncovered edges, and if there is no cycle, this is a tree. In that case, there is a vertex of degree one, which is a contradiction because this vertex should be in a clique of D'. We can even say that "there are only cycles" because there is no vertex of degree one in this subgraph. Moreover, if there is a cycle $u_0 \cdots u_k$, $k \in \{2, \dots, n-1\}$, then for all $i \in \{0, \dots, k\}$, $u_{i-1}iu_{i+1}$ is an edge in G, addition modulo $k+1$. This is because all the remaining edges incident to a given vertex of G form a clique. So we are in the presence of cycles of length three or supercycles (we recall that a supercycle has length at least four).

We take into account the previous stages: the cliques in D are extended and we have put cliques in D' until there is no remaining favourable vertex. If there remains uncovered edges, we have just seen that there is a cycle, and this cycle must be a supercycle or a cycle of length three. But then it is a cycle of length three because by hypothesis there is no supercycle in G. We denote this cycle by $u_0u_1u_2$. As u_1 cannot be a favourable vertex, there is a vertex u_3 so that u_2u_3 is a dominating edge and u_3 doesn't belong to C_{u_1}. So we have a path in G with four vertices. Again as u_2 is not a favourable vertex, there is a vertex u_4 so that u_3u_4 is a dominating edge and u_4 doesn't belong to C_{u_2}. Moreover, u_4 is different from u_0, else there would be a supercycle. It is also different from u_1 and u_2, because it doesn't belong to C_{u_2}. Thus we have a path in G with five vertices.

We can continue this process and at any step i, as u_i is not a favourable vertex, there is a vertex u_{i+2} so that $u_{i+1}u_{i+2}$ is a dominating edge and u_{i+2} doesn't belong to C_{u_i}. We have that u_{i+2} cannot be one of the $\{u_j\}_{0\leq j\leq i-2}$ because otherwise, we would have a supercycle. It is also different from u_{i-1} and u_i, because it doesn't belong to C_{u_i}. So there is a path in G with $i+2$ vertices, for any $i \in \mathbb{N}$. As the number of vertices in G is finite, this process leads to a contradiction. This means that our hypothesis that there remains uncovered edges after removing the last favourable vertex was wrong. Thus all the dominating edges in G are covered by the cliques in $D \cup D'$.

There are n cliques in D. As every clique in D' is labelled by two vertices in G, and as no vertex in G can label two different cliques in D', we deduce that $|D'| \leq \frac{n}{2}$, proving Theorem 8.

4.0.1. *A bound finer than $\frac{3}{2}n$*

We remark that in the proof, we took into account the worst case when the graph induced by the edges uncovered by $C = \{C^x\}_{x\in V(G)}$ had n vertices. We can get a better bound if we consider the exact number of vertices of this induced graph. Let f be the number of vertices in the subgraph of G induced by the edges uncovered by C.

Corollary 1. *If G is a simple graph with $\alpha(G) = 2$ containing neither supercycles nor incompatible double tops, then $ecc(G) \leq n + \frac{f}{2}$.*

Proof. We have seen in the main proof that putting a clique in D' implies a reduction of at least two vertices of the subgraph of G induced by the edges uncovered by C. □

The number f can be simply obtained by substracting from n the number of vertices z in G of which the incident edges are all in one of the following cases:

- it is not a dominating edge,
- it is an edge zx such that zxy is a path of dominating edges and zy is not an edge in G, x,$y \in V(G)$,
- it is an edge zx such that xzy is a path of dominating edges and xy is not an edge in G, x,$y \in V(G)$,

- it is an edge zx such that zxy is a triangle of dominating edges, $x,y \in V(G)$, and there are two vertices u,v in $\overline{N[y]}$ (possibly $u = v$), such that zu and xv are dominating edges.

This simply reflects the fact that all the edges incident to z are covered by C.

5. Conclusion

We proved that if a graph G with $\alpha(G) = 2$ has a dominating edge uv and if $G - \{u,v\}$ has diameter three, then Conjecture 2 is true. The next step in that direction by following the same ideas is to show that if G has two dominating edges uv and xy and if $G - \{u,v,x,y\}$ is of diameter three, then it also satisfies the conjecture.

Our second result provides a bound for graphs with no incompatible double top and no supercycles. The crucial hypothesis is that there are no incompatible double tops. It was necessary in the second step of the proof, when we put cliques in D'. Indeed, the fact that the uncovered dominating edges that are adjacent to a given vertex form a clique supposes that every clique $C_x, x \in V(G)$ covers all the uncovered edges with an end in $\overline{N[x]}$ and the other in the neighbourhood of x. This is only possible if the extension of $\overline{N[x]}$ to vertices u and v implies that uv is an edge in G.

Another, more ambitious, way to find a good bound for $ecc(G)$, or maybe even the bound n, would be to work on maximal cliques. One idea in that direction is to construct step by step a set of n maximal cliques: if the edges of a graph can be covered by n cliques, then we could build on the intuition that these cliques are maximal, or can be extended to be maximal.

Acknowledgements

We would like to deeply thank Geňa Hahn and Ben Seamone for their comments that helped to improve the paper.

The author has been supported by the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada (BESC D).

References

[1] P. Charbit, G. Hahn, M. Kamiński, M. Lafond, N. Lichiardopol, R. Naserasr, B. Seamone, R. Sherkati, Edge clique covers in graphs with independence number two, *HAL* hal-02969899, 2019.

[2] G. Chen, M. S. Jacobson, A. E. Kézdy, J. Lehel, E. R. Scheinerman, C. Wan, Clique covering the edges of a locally cobipartite graph, *Discrete Mathematics,* 219 (1): 17 — 26, 2000.

[3] M. Chudnovsky, P. Seymour, The structure of claw-free graphs, *Surveys in combinatorics,* vol. 327 of London Math. Soc. Lecture Note Ser. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 153 – 171, 2005.

[4] J. E. Cohen, Interval graphs and food webs: a finding and a problem, *RAND Document,* 17696 – PR, 1968.

[5] P. Erdős, A. W. Goodman, L. Pósa, The representation of a graph by set intersections, *Canad J Math,* 18: 106 – 112, 1966.

[6] R. Javadi, S. Hajebi, Edge clique cover of claw-free graphs, *Journal of Graph Theory,* 90 (3): 311 – 405, 2018.

Third Article.

On cop-win dynamic graphs

by

Gabriel Fortin-Leblanc[1], Geňa Hahn[1], and Frank Ramamonjisoa[2]

([1]) Informatique et Recherche opérationnelle
Université de Montréal
C.P. 6128, succursale Centre-ville
Montréal, QC, H3C 3J7, CANADA

([2]) Département de Mathématique et de Statistique
Université de Montréal
C.P. 6128, succursale Centre-ville
Montréal, QC, H3C 3J7, CANADA

This article was submitted in Theoretical Computer Science.

Résumé. Nous étendons la caractérisation par Nowakowaski et Winkler des graphes cop-win et l'algorithme de Hahn-MacGillivray qui reconnaît les graphes k-cop win aux graphes dynamiques.

Mots clés : graphes, cop-win, graphes dynamiques, algorithme

Abstract. We extend the Nowakowski-Winkler characterisation of cop-win graphs to dynamic graphs and we extend the Hahn-MacGillivray algorithm for recognising k-cop win graphs to dynamic graphs.
Keywords: graphs, cop-win, dynamic graphs, algorithm

1. Introduction

The game of cops-and-robbers was introduced in the early 1980s and studied in its many variants. Almost all the studies concern static graphs, that is, graphs that remain fixed over time. A relatively recent development in graph theory is the exploration of dynamic graphs that evolve over time. In this note we consider the cops-and-robbers game on dynamic graphs. Let us first settle the basic notation. A (simple, undirected) graph on the vertex set $V(G) = V$ will have an edge set $E(G) = E \subseteq \binom{V}{2} = \{X \subseteq V : |X| = 2\}$, with an edge between the vertices u and v denoted by uv.

The game is the original variant on reflexive graphs (each vertex has a loop). It is played by the two players, *cop* and *robber*, in *rounds*, each consisting of a cop's move and a robber's move. At round zero the cop chooses a vertex, then the robber does. In subsequent rounds each player moves to an adjacent vertex (the loops allow each player to remain at the same vertex). The cop's objective is to occupy the same vertex as the robber (she wants to *capture* the robber) while the robber wishes to avoid capture indefinitely. We will assume that the participants play optimally so that the robber will not move to a cop's vertex and the cop will capture the robber when possible. We also assume that the cop tries to make the capture as fast as possible while the robber wishes to remain free as long as possible, even if capture is inevitable.

Nowakowski and Winkler, [**7**], provide two characterisations of graphs on which a single cop can always capture the robber (they called such graphs *cop-win*). The second of these is also valid for infinite graphs and is the basis of various algorithms for the recognition of cop-win graphs; the Hahn-MacGillivray algorithm in [**4**] is one of them. For the sake of completeness and comprehension, we state the characterisation theorem.

For a graph $G = (V,E)$ the relation $\preceq$ ($\subseteq V \times V$) is defined recursively by first defining a sequence of relations $\leq_\alpha$ for $\alpha < |V \times V|^+$ (the next bigger cardinal).

- $u \leq_0 u$ for each $u \in V$;
- $u \leq_\alpha v$ for $\alpha > 0$ if, for each $x \in N(u)$, there is a $y \in N(v)$ and a $\beta < \alpha$ such that $x \leq_\beta y$.

Clearly $\leq_\beta \subseteq \leq_\alpha$ for $\beta \leq \alpha$. It follows that there is a γ such that $\leq_\gamma = \leq_\zeta$ for $\zeta > \gamma$. Set $\preceq = \leq_\gamma$.

Theorem 1.1 ([**7**])**.** *A graph is cop-win if and only if the relation $\preceq$ defined on it is trivial.*

Observe that the relations model the cop's strategy on flipped rounds, that is, instead of a round being (cop's move, robber's move), they are (robber's move, cop's move). If the graph is finite, we can interpret $u \leq_i v$ as "when the robber is on u and the cop on v, the capture is i rounds away".

Let V be a vertex set. Let $\mathcal{E} = \{0{,}1\}^{\binom{V}{2}}$. Consider a function $T \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}}$, that is, a sequence of edge sets on the same vertex set. Given such a T, we have a sequence $(e_t)_{t\in\mathbb{N}}$ of $0-1$ functions that define edge sets of a sequence $\mathcal{G}_T = (G_t)_{t\in\mathbb{N}}$ of graphs $G_t = (V{,}E_t)$, with $E_t = \{uv \in \binom{V}{2} : e_t(uv) = 1\}$. We call $\mathcal{G}_T$ a *dynamic graph on* T. The vertex set is the same for all the G_t, by definition, but edges come and go as prescribed by the e_t. This leads quite naturally to related definitions such as $N_t(u) = \{v \in V : e_t(uv) = 1\}$ for the neighbourhood of u in G_t. The *shadow* of $\mathcal{G}_T$ is the graph $\hat{G} = (V, \cup_{t\in\mathbb{N}} E_t)$. We shall call graphs with E_t constant, that is, usual graphs, *static*.

The notions, definitions and many of the results stated here can easily be adapted to directed graphs. In particular, this is the case of the algorithm in this paper which does not require that the graph be reflexive. Note also that some authors allow the vertex set to evolve as well, unlike us. For some related work, see, for example, [**3**], [**6**], [**5**].

Consider a sequence $T \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}}$. If there are a $t_0, p \in \mathbb{N}$ such that for each $k \in \mathbb{N}$ and each $t \geq t_0$, $G_{t+kp} = G_t$, we call T, and $\mathcal{G}_T$, *periodic*. We call p the *period* of T and of $\mathcal{G}_T$. The shadow becomes $(V, \cup_{t\leq t_0+p} E_t)$. To simplify writing, we will assume that $t_0 = 0$ for a periodic dynamic graph; the modifications needed if $t_0 > 0$ are trivial but tedious.

We would like to play a cops-and-robber game on $\mathcal{G}_T$ and attempt to determine if the cops (or the robber) have a winning strategy. We let our inspiration be Theorem 2 of [**7**] and the algorithm of [**4**]. There are two related directions to explore: an algorithm to decide if k cops can catch the robber, and the formal foundation for it in the form of a binary relation on V and a characterisation of graphs on which the cops can, in fact, win. Of course, the changing edges sets complicate matters somewhat. We need to make some other assumptions, so let us collect them all.

Assumption 1. *The graphs are simple, undirected and reflexive.*

Assumption 2. *As in most other versions of the game, each player knows where the other is and how the graph evolves. That is, the sequence* $\{E_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ *is known to both.*

Assumption 3. *The graph changes from* G_t *to* G_{t+1} *after the robber's move.*

The last assumption is needed in case a player happens to be on an isolated vertex.

Assumption 4. *Each* E_t *contains all loops. That is each* G_t *is reflexive.*

Before getting to the results, there are a few things to consider. One that may have come to the reader's mind is settled by our Assumption 2. The alternative - the *on-line* version - is that neither player knows what the next graph in the sequence is. This is a very different topic and we will not discuss it here. The other consideration is the definition of a cop-win dynamic graph. It is a graph on which the cop has a winning strategy. This could be taken to mean that there is a vertex such that when the cop begins on it, she is sure to capture the robber. But it could also be interpreted as “the cop can capture the robber starting on any vertex”. For static graphs, the two notions are equivalent for the variants of the game used in this article (see remarks before Theorem 3.2), but not for dynamic graphs in general (see also Lemma 3.5). We will adopt the first notion as it is more natural.

Our aim is to characterise cop-win dynamic graphs. In [**7**] two chracterisations are given. One considers the moment the robber is caught at a particular vertex and the moment before and then goes back in time to force some structure on the graph. The other starts with the graph and builds up possible strategies to the final capture, so to speak. The first approach works well for finite graphs, the second for all graphs. The second approach also leads to an algorithm that not only decides if a given graph is cop-win, but also provides an optimal strategy for both players; see Section 3.1. We will look at the second approach in Section 3 and consider the first one in Section 2.

2. Finite graphs

Let us go back to [**7**] for a moment. If G is cop-win, we can look at the last move the robber makes. Since he will be caught on the cop's next move, all vertices accessible to the robber must also be accessible to the cop. This leads naturally to a retraction of G onto $G - r$, where r is the robber's vertex just before his last move (see [**7**] for details). The key lemma for the characterisation in [**3**] is this.

Lemma 2.1. *If G is cop-win, so is any retraction of G.*

In dynamic graphs, we do not have such a lemma and we have to work a bit harder.

For each $t \in \mathbb{N}$ define a sequence $\{\leqq_t^0, \leqq_t^1, \dots, \leqq_t^t\}$ of binary relations on V

- $x \leqq_t^t y$ if and only if $x = y$,

- for each $0 < t' \leqq t$, $x \leqq_t^{t-t'} y$ if and only if $\forall u \in N_{G_{t-t'}}(x),\ \exists v \in N_{G_{t-t'+1}}(y)$ such that $u \leqq_t^{t-(t'-1)} v$.

Consider the set of relations $\{\leqq_t^0\}_{t\in\mathbb{N}}$. We have that, for every t, $\leqq_t^0 \subset \leqq_{t+1}^0$. Indeed, suppose that $x \leqq_t^0 y$ for two vertices x and y representing the initial positions of the cop and the robber on G_0. We will have $x_t \leqq_t^t y_t$, x_t and y_t being the positions of the cop and the robber at time t on G_t. This means, by definition of $\leqq_t^t$, that $x_t = y_t$ and so, the cop has caught the robber at time t at the latest. A fortiori, the cop will have caught the robber at time $t + 1$. By definition of $\leqq_{t+1}^0$, we will thus have $x \leqq_{t+1}^0 y$ (in fact, we have even $\leqq_t^{t'} \subset \leqq_{t+1}^{t'}$ for every $0 \leqq t' \leqq t$). Thus we have a chain of inclusions of subsets of $V \times V$, namely $\leqq_0^0 \subset \cdots \subset \leqq_t^0 \subset \leqq_{t+1}^0 \subset \cdots$. Let $\precsim^0 = \bigcup_{t\in\mathbb{N}} \leqq_t^0$. For the sake of precision, note that we have denoted by $\leqq_t^0$ the set $\{(x,y) \in V \times V : x \leqq_t^0 y\}$.

The following theorem deals with the case when the cop catches the robber whatever the starting position she chooses.

Theorem 2.2. *The cop wins from any starting position on $\mathcal{G}_T$ if and only if $\precsim^0$ is trivial.*

Proof. Let x and y be the initial positions of the cop and the robber on G_0. By hypothesis, the cop catches the robber and so, there exists an instant t_0 so that $x_{t_0} = y_{t_0}$, i.e. $x_t \leqq^{t_0}_{t_0} y_t$. By construction, that means that $x \leqq^0_{t_0} y$ and as $\leqq^0_{t_0} \subset \precsim^0$, that means that $x \precsim^0 y$. This being true for all the couples in $V \times V$, we deduce that $\precsim^0$ is trivial.

Suppose now that there exists an initial position x and y of the cop and the robber on G_0 so that the robber is never caught by the cop. For all $t \in \mathbb{N}$, we thus have $x \not\leqq^0_t y$. That means $(x,y) \in \overline{\leqq^0_t}$ (the complement of $\leqq^0_t$). So we have $(x,y) \in \bigcap_{t\in\mathbb{N}} \overline{\leqq^0_t}$. But $\bigcap_{t\in\mathbb{N}} \overline{\leqq^0_t} = \overline{\bigcup_{t\in\mathbb{N}} \leqq^0_t} = \overline{\precsim^0}$. This means that $x \not\precsim^0 y$ and so $\precsim^0$ is not trivial. $\square$

But traditional cop-win graphs just need a winning starting position; as the cop plays intelligently, he will start from this winning vertex. Consequently, we need a corresponding definition for the relation.

Definition 1. *The vertex y is maximal for the relation $\precsim^0$ on the vertices V of graph G if and only if, for all vertices $x \in V$, $x \precsim^0 y$.*

If the vertex y is maximal for the relation $\precsim^0$, we put the cop on vertex y when we start the game.

We have the following result.

Theorem 2.3. *$\mathcal{G}_T$ is a cop-win graph if and only if there is a maximal vertex for $\precsim^0$.*

Proof. Suppose that $\mathcal{G}_T$ is cop-win and let x be the starting position of the robber and y be the winning vertex, which means also that it is the starting position of the cop on G_0. By hypothesis, the cop catches the robber and so, there exists an instant t_0 so that $x_{t_0} = y_{t_0}$, i.e. $x_t \leqq^{t_0}_{t_0} y_t$. By construction, that means that $x \leqq^0_{t_0} y$ and as $\leqq^0_{t_0} \subset \precsim^0$, that means that $x \precsim^0 y$. This being true for all the initial positions of the robber, we deduce that y is maximal for $\precsim^0$.

Suppose now that $\mathcal{G}_T$ is not cop-win. Then there is no winning vertex. Let any vertex y be the starting position of the cop, and let x be the initial position of the robber on G_0 so that the robber is never caught by the cop. For all $t \in \mathbb{N}$, we thus have $x \not\leqq^0_t y$. That means $(x,y) \in \overline{\leqq^0_t}$. So we have $(x,y) \in \bigcap_{t\in\mathbb{N}} \overline{\leqq^0_t}$. But $\bigcap_{t\in\mathbb{N}} \overline{\leqq^0_t} = \overline{\bigcup_{t\in\mathbb{N}} \leqq^0_t} = \overline{\precsim^0}$. This means that $x \not\precsim^0 y$ and so y is not maximal for $\precsim^0$. As this is true for any vertex y, there is no maximal vertex for $\precsim^0$. $\square$

2.1. The periodic case

Suppose that a dynamic graph $\mathcal{G}_T$ has period $p \in \mathbb{N}^{>0}$. Let's consider the following non-dynamic graph G^*:

- $V(G^*) = V$, the vertices of G^* are the same as those of $\mathcal{G}_T$;
- $(u,v) \in E(G^*)$ if and only if it is possible to arrive to vertex v in G_p when starting on vertex u in G_0.

We have the following result.

Theorem 2.4. *Let $p \in \mathbb{N}^{>0}$ and let $\mathcal{G}_T$ be a p-periodic dynamic graph. If $\mathcal{G}_T$ is cop-win, then G^* is cop-win.*

Proof. Recall that if the cop catches the robber, the game stops. Suppose that $\mathcal{G}_T$ is cop-win. We define the positions of the cop and the robber in G^* at step k, $k \in \mathbb{N}$, as their positions on graph G_{kp}. So looking at the movements of the cop and the robber in G^* is the same as looking at their movements in $\mathcal{G}_T$ every p periods, i.e. it is the same as looking only at the graphs $\{G_{kp}\}_{k\in\mathbb{N}}$. The cop (or the robber) starts on the same vertex x_0 on G_0 and G^*. When the player makes p steps in $\mathcal{G}_T$, she arrives at vertex x_1 in G_p, and it corresponds to the first move in graph G, where the cop goes also to vertex x_1. And so on, when the cop is on vertex x_k on G_{kp}, the cop on graph G^* has made k steps and is also on vertex x_k. The same of course with the robber. When the robber is caught at $G_n, n \in \mathbb{N}$, then both are on the same vertex at G_{kp}, kp being the next multiple of p greater than n. So both are on the same vertex in G^* and the robber is also caught in G^*. $\square$

Unfortunately, we don't have the converse. If G^* is cop-win, it doesn't mean necessarily that $\mathcal{G}_T$ is cop-win. The reason for that is that when we make one step on graph G, it corresponds to p steps of one player on graph $\mathcal{G}_T$, and meanwhile, the second player doesn't move. Thus, it is understandable that it is easier to catch the robber if the cop can make p moves in a sequence. So even if the cop can catch the robber in G^*, the robber may have an escape strategy on $\mathcal{G}_T$ by reacting at every step of the cop, not waiting p steps of the cop before reacting.

This result gives an easy-to-implement check if a periodic graph is not cop-win: the graph G^* is easy to build, and if G^* is not cop-win, then nor is $\mathcal{G}_T$.

As G^* is a static graph, we can use exactly Theorem 1, we don't need to adapt it to dynamic graphs. So, we will use the exact relations defined by Nowakowski and Winkler (see Theorem 1 in the introduction). Let $\precsim$ be the relation defined on G^* as in the introduction.

Corollary 2.5. *Let $p \in \mathbb{N}^*$, let $\mathcal{G}_T$ be a p-periodic dynamic graph, finite or infinite. If $\precsim$ is not trivial on G^*, then $\mathcal{G}_T$ is not a cop-win graph.*

Proof. Theorem 1 says that our static graph G^* is cop-win if and only if the relation $\precsim$ is trivial. So if $\precsim$ is not trivial, G^* is not cop-win, and from our result above, it implies that $\mathcal{G}_T$ is not cop-win either, and this ends the proof. $\square$

As Nowakowski and Winkler note, for a finite graph with n vertices, we have $\leqq_{n(n-1)}=\precsim$, and we can be a little more precise for finite graphs.

Corollary 2.6. *Let $p \in \mathbb{N}^*$ and $n \in \mathbb{N}^*$, let $\mathcal{G}_T$ be a p-periodic dynamic graph with n vertices. If $\leqq_{n(n-1)}$ is not trivial on G^*, then $\mathcal{G}_T$ is not a cop-win graph.*

We can also remark here that we only need a maximal vertex for the relation. We can then be more specific with our corollaries.

Corollary 2.7. *Let $p \in \mathbb{N}^*$ and let $\mathcal{G}_T$ be a p-periodic dynamic graph, finite or infinite.*

If there is no maximal vertex for $\precsim$ on G^*, then $\mathcal{G}_T$ is not a cop-win graph.

If G^* is finite with n vertices, if there is no maximal vertex for $\leqq_{n(n-1)}$ on G^*, then $\mathcal{G}_T$ is not a cop-win graph.

3. All graphs

In order to find results valid for both finite and infinite graphs, we have to start from another point of view. To win, the cop must be able to follow the robber from G_t to G_{t+1}. This suggests the following definition.

Definition 2. *Let $\mathcal{G}_T$ be a dynamic graph. For $t \in \mathbb{N}$, define binary relations $\leq^t$ on V recursively:*

- *$u \leq_0^t u$ for all $u \in V$;*
- *$u \leq_\alpha^t v$ if for each $x \in N_t(u)$ there is a $y \in N_{t+1}(v)$ and a $\beta < \alpha$ such that $x \leq_\beta^{t+1} y$;*
- *$\preceq^t=\leq_\gamma^t$ such that $\leq_\gamma^t=\leq_{\gamma+1}^t$.*

Of course, if the graph is periodic, the addition is modulo p throughout.

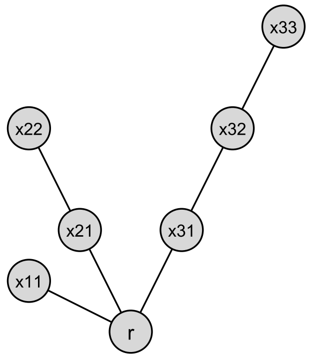
Observation 1. *Suppose that $u \leq_\alpha^t v$. Thus for each $x \in N_t(u)$ there is a $y \in N_{t+1}(v)$ and a $\beta < \alpha$ such that $x \leq_\beta^{t+1} y$. If $\gamma > \alpha$, then certainly the same x, y, β work and we have that $u \leq_\gamma^t v$. Hence $\leq_\alpha^t \subseteq \leq_\gamma^t$ whenever $\alpha < \gamma$.*

Observation 2. *For each t there is a least γ such that $\leq_\gamma^t=\leq_{\gamma+1}^t$. This is because if $|V| = \aleph_\kappa$ then $\gamma \leq \aleph_\kappa^+$ since there are $\aleph_\kappa$ pairs of vertices that are each considered at most $\aleph_0$ times.*

Before continuing let us look at an example.

Example 3.1. *For $n < \omega$, let T_n be the tree on $\{r\} \cup \{x_{ij} : 0 < j \leq i \leq n\}$ with the edge set $\{[rx_{i1} : 0 < i \leq n\} \cup \{[x_{ij},x_{i(j+1)}] : 0 < j < i \leq n\}$, that is, a central vertex r together with paths $rx_{i1} \ldots x_{ii}$ for $i = 1, \ldots n$. We will give the relations for T_3 as well as for a dynamic periodic version T_3^* in which the edge $[r,x11]$ is absent at time $1+k6$, the edge $[r,x_{21}]$ at time $2 + k6, 3 + k6$, and the edge $[rx_{31}]$ at time $4 + k6, 5 + k6, 6 + k6$, for $k < \omega$. We give the examples in a table; the first is copied from [**2**], together with its description.*

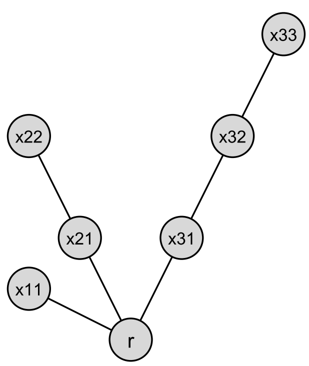
For $u,v \in V(G)$, define $\eta(u,v) = \alpha$, where α is the minimum ordinal for which $u \leq_\alpha v$ holds. Note that $\eta(u,v)$ is well-defined as ordinals are well-ordered. If $\eta(u,v)$ is finite, then we may interpret it as the length of time it takes a cop on v to capture a robber on u, assuming both play optimally. Note that the relation is not necessarily symmetric: $\eta(u,v)$ may be different than $\eta(v,u)$. For an example, see Figure 5 and its corresponding table of η values.



$\eta(\cdot,\cdot)$	r	x_{11}	x_{21}	x_{22}	x_{31}	x_{32}	x_{33}
r	0	4	4	5	3	4	5
x_{11}	1	0	2	5	2	4	5
x_{21}	2	3	0	5	3	4	5
x_{22}	2	3	1	0	3	4	5
x_{31}	3	4	4	5	0	4	5
x_{32}	3	4	4	5	2	0	5
x_{32}	3	4	4	5	2	1	0

Fig. 5. The tree T_3 and its table of η values.

In the next table we look at T_3^* as described above. The edge sets E_t all contain $\{x_{22}x_{21}, x_{33}x_{32}, x_{32}x_{31}\}$. The remaining edges appear and disappear as described above. This gives the the table of Figure 6. The entry (u,v) is α,t when $u \preceq_{\alpha}^{t} v$ for the first time.



$\eta(\cdot,\cdot)$	r	x_{11}	x_{21}	x_{22}	x_{31}	x_{32}	x_{33}
r	0,0	3,5	2,5	3,5	3,7	4,7	5,7
x_{11}	1,2	0,0	2,6	3,6	2,8	3,8	4,8
x_{21}	2,4	3,6	0,0	3,6	3,7	4,7	5,7
x_{22}	2,4	3,6	1,1	0,0	3,7	4,7	5,7
x_{31}	3,3	4,8	4,7	5,7	0,0	2,4	2,4
x_{32}	3,3	4,8	4,7	5,7	2,2	0,0	2,4
x_{32}	3,3	4,8	4,7	5,7	2,2	1,1	0,0

Fig. 6. The tree T_3^* and its table of η values.

We would like to prove a theorem analogous to Theorem 1.1. The proof of necessity in the original result rests on the fact if the graph has one vertex from which the cop can win, she can migrate to it from anywhere and so win from any vertex. This cannot be guaranteed if the dynamic graph is not periodic, so we need a slightly different characterisation.
Observe that the condition that $\preceq$ be trivial is not really needed: it is sufficient that there be a vertex v such that $u \preceq v$ for any u. If the graph is static, this is equivalent to $\preceq$ being trivial: one direction is obvious, for the other we note that if the cop can win from v while

the robber is on u, then $u \preceq v$ and by the previous remark $u \preceq v$ for any u,v. See below for more details. Thus the revised theorem should be the following.

Theorem 3.2. *A graph $\mathcal{G}_T$ is cop-win if and only if there is a vertex $v \in V$ such that $u \preceq^0 v$ for any $u \in V$.*

The theorem follows from the two lemmas below. Let us call a vertex $v \in V$ such that $u \preceq^0 v$ for any $u \in V$ *dominating* or *winning*.

Lemma 3.3. *If $\mathcal{G}_T$ has a winning vertex v then it is cop-win.*

Proof. Let $\mathcal{G}_T$ have a winning vertex v. The cop will start there. The robber will be on some $u \in V$ and, by assumption, $u \preceq^0 v$. Then there is a least α such that $u \leq^0_\alpha v$ and, for any $u' \in N_0(u)$, there is $v' \in N_1(v)$ and a $\beta < \alpha$ such that $u' \leq^1_\beta v'$. Set $\beta_0 = \alpha$, $u_0 = u$, and $v_0 = v$ and let the cop's initial move be to remain at v_0; it is now the robber's move. After i moves by the cop, let v_i, u_i be the vertices occupied by the cop and the robber just before the robber's i-th move. Assume there is β_i such that $u_i \leq^i_{\beta_i} v_i$; this holds for $i = 0$. By the definition of $\leq^i_{\beta_i}$, for any $u_{i+1} \in N_i(u_i)$ there is a $v_{i+1} \in N_{i+1}(v_i)$ and a $\beta_{i+1} < \beta_i$ such that $u_{i+1} \leq^{i+1}_{\beta_{i+1}} v_{i+1}$. The sequence of ordinals $\{\beta_i\}_{i<\omega}$ cannot be infinite, so it must end at 0: that is, the robber is caught. ☐

Note that the cop's strategy can be optimised in the proof: instead of remaining on v, she can move to a vertex $v' \in N_0(v)$ for which $\beta = \min\{\gamma : u' \leq^0_\gamma v' : u' \in N_0(u)\}$; since the ordinals are well-orderd, such a β exists. The same strategy can be applied at each step, so the robber is caught in the shortest possible number of moves.

Lemma 3.4. *If $\mathcal{G}_T$ has no winning vertex, it is not cop-win.*

Proof. If there is no winning vertex in $\mathcal{G}_T$ then for any $v \in V$ there is a $u \in V$ such that $u \not\preceq^0 v$. This means that no matter where the cop begins, the robber always has vertex to which it can go where the cop cannot reach him. ☐

Note that the proofs also work for static graphs, the functions e_t being all equal.

In certain cases we can recover the original Theorem 1.1. All we need is a proof that the existence of a winning vertex implies that the relation $\preceq^0$ is trivial. This means that the cop can migrate from any vertex in G_0 to a winning vertex in some G_t such that $G_t \simeq G_0$ (isomorphic). To guarantee this, we need a bit more.

Definition 3. *A dynamic graph $\mathcal{G}_T$ is* T-connected *if for any $u, v \in V$ and any t there is a $t' \geq t$ such that from u in G_t there is a path $u_0u_1 \ldots u_k$ with $u_0 = u$, $u_k = v$, $t' = t + k$ and $u_iu_{i+1} \in E_{t+i}$. If the graph is periodic, the index addition is modulo the period p.*

Lemma 3.5. *If a graph $\mathcal{G}_T$ is T-connected and periodic and there is a winning vertex in V then any vertex is winning.*

Proof. If v is a winning vertex and the cop starts on x, she can first migrate to v using t-connectedness and then stay on v until the time t comes when $G_t \simeq G_0$ (the waiting time is inferior to one period). She can then use the winning strategy. $\square$

It is perhaps worth reminding the reader that a finite dynamic graph is not necessarily periodic even if each E_t appears infinitely many times. This follows, for example, from the fact that there are $0-1$ sequences in which no subsequence of consecutive 0's and 1's appears three times consecutively. Still, there is hope.

Lemma 3.6. *If a dynamic finite graph $\mathcal{G}_T$ that is T-connected has a winning vertex then all vertices are winning, provided each E_t appears infinitely many times.*

Proof. The cop starting on any vertex simply goes to the winning vertex and then waits there until E_0 comes back. Then she uses her winning strategy, waiting at her current vertex until E_t is the one needed. Note that Assumption 4 is needed here. $\square$

3.1. Algorithm

As in [**4**], we would like to use the relation in Definition 2 to construct an algorithm for recognising cop-win dynamic graphs. We can start by modifying what in [**4**] is called a *move graph*; we will call it a *game graph*.

Let $\mathcal{G}_T$ be a finite dynamic graph. The *game digraph* M associated to $\mathcal{G}_T$ (we omit the subscripts that would indicate the graph is obtained from $\mathcal{G}_T$) has as vertex set $C \sqcup R$ (disjoint union) with $C = V \times V \times \mathbb{N} \times c$ and $R = V \times V \times \mathbb{N} \times r$. The vertex (u,v,t,x) tells us that at time t the cop is on v, the robber on u, and it is x's move. We add arcs to indicate possible moves. An arc will go from (u,v,t,c) to (u,v',t,r) if $v' \in N_t(v)$ and from (u,v,t,r) to $(u',v,t+1,c)$ if $u \in N_t(u)$. Thus the cop wins in t moves starting at $(u_0,v_0,0,c)$ if and only if there is a directed path from $(u_0,v_0,0,c)$ to some (u_k,v_k,k,r) with $u_k = v_k$.
All this is very nice, but as defined above, the game graph is infinite even if the number of vertices is finite. We must limit the order of the game graph if we want an algorithm that terminates. If $\mathcal{G}_T$ is periodic with period p after the first t_0 time steps, we can simply replace $\mathbb{N}$ in the definitions of C and R by $[t_0 + p] = \{0,1,\ldots,t_0+p-1\}$. This will allow for an algorithm like the one in [**4**] to work on finite periodic dynamic graphs. Indeed, the algorithm is essentially the same. The following comes from the paper, modified for our purposes.

The algorithm below bears a strong resemblance to the recursive definition of $\leq$. It labels each vertex x of M with a non-negative integer $\ell(x)$ which indicates the number of rounds, that is, of **cop** moves, to a cop win. If it is the robber's move and the vertex label is k, the cop will need k moves *after* the robber has moved to catch him.

Algorithm Cop-Win Dynamic Graph Recognition

```
set ℓ(x) = ∞ for all x ∈ V(M)
set ℓ((u,u,t,c)) = ℓ((u,u,t,r)) = 0 for each u ∈ V
repeat until no change results
 for each pair (u,v), u ≠ v
  if ℓ((u,v,t,c)) = ∞, set ℓ((u,v,t,c)) := 1 + min{ℓ((u,v',t,r): v' ∈ N_t(v)}
  if ℓ((u,v,t,r)) = ∞, set ℓ((u,v,t,r)) := max{ℓ((u',v,t+1,c) : u' ∈ N_t(u)}
```

Since for each pair (u,v) only two vertices are considered at each iteration, and since the label of a vertex is never changed once it is not ∞, the algorithm terminates in at most $O(|V(M)|^2)$ iterations, each of which takes at most $O(|V(M)|^3)$ steps if the graph is static. For periodic dynamic graphs there will be a multiplicative factor added which could change the order, depending on p. Compare with the proof that the problem is *NP*-hard in [**5**].

Let us call a strategy from a configuration $(u,v,0,c)$ *optimal for the cop* if no other strategy gives a win in fewer moves. A strategy is *optimal for the robber* from a position $(u,v,0,c)$ if no other strategy forces a longer game (this includes an infinite game, i.e. a robber's winning strategy).

Lemma 3.7. *Let $\mathcal{G}_T$ be a finite periodic dynamic graph and M its game digraph. Then*

(1) the cop has an optimal winning strategy in k rounds from the configuration $(u,v,0,c)$ if, and only if, $\ell((u,v,0,c)) = k$ when the algorithm terminates;

(2) the robber has an optimal strategy in k rounds from the configuration $(u,v,0,r)$ if, and only if, $\ell((u,v,0,r)) = k$ when the algorithm terminates;

(3) the graph is cop-win if, and only if, there is a vertex $v \in V$ such that $\ell((u,v,0,c)) < \omega$ for all $u \in V$.

Since the proof is essentially the same as that of the corresponding lemma in [**4**], we will skip it.

Remark 3.8. *It might be worth mentioning that the game graph for a periodic dynamic graph is a bipartite directed graph and so Floyd's algorithm determines all (directed) distances between its vertices in time in $O((n^2 2p)^3)$, with $n = |V|$ and p the period. We need a vertex $u \in V$ such that for every $u \in V$ there is a vertex $w \in V$ and a $t \in \mathbb{N}$ such that in the game graph (w,w,t,r) is at a finite distance from $(u,v,0,c)$. This can also be checked in time polynomial in np.*

4. Concluding remarks

For finite graphs, the relations of Sections 2 and 3 are essentially the same, as can be expected.

Lemma 4.1. *If $\mathcal{G}_T$ is a finite dynamic graph then $u \precsim_t^0$ if and only if $u \leq_t v$.*

Proof. It is routine to prove that $u \leq_i v$ if and only if $u \leqq_t^{t-i} v$ from the definitions of the relations. The claim then follows. $\square$

The last remark concerns games with k cops and ℓ robbers, possibly on directed graphs. The algorithm, as well as the theorems proving it is correct, use the standard trick of working with V^k for the cops and V^ℓ for the robbers. These extensions are straightworward.

Problem 1. *Does the algorithm remain pseudo-polynomial for* all *dynamic graphs?*

An implemenation algorithm can be found here.

If your pdf reader does not keep the link live, here it is in detail:
$https\ :\ //gitlab.com/gabrielfortinleblanc/on - dynamic - cop - win - graphs/ - /blob/main/dynamic\_cop\_win\_graph.py$

References

[1] S Balev, J.L.J. Laredo, I. Lamprou, Y. Pigné, E. Sanlaville, Cops and Robbers on Dynamic Graphs: Offline and Online Case, 27th International Colloquium on Structural Information and Communication Complexity, June 2020, Paderborn, Germany 10.1007/978-3-030- 54921-3-12, hal-02927320.

[2] A. Bonato, P. Gordynowicz, G. Hahn, Cops and Robbers ordinals of cop-win tree, *Discrete Mathematics* **340** (2017), 951 – 956.

[3] T. Erlebach, J. T. Spooner, A Game of Cops and Robbers on Graphs with Periodic Edge-Connectivity, arXiv: 1908-06828v1 [cs.DS], 2019.

[4] G. Hahn, G. MacGillivray, A characterization of k-cop-win graphs and digraphs, *Discrete Math.* **306** (2006) 2492 – 2497.

[5] N. Morawietz, C. Rehs, M. Weller, A Timecop's Work Is Harder Than You Think, 45th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS 2020), Aug 2020, Prague, Czech Republic. pp.71:1-71:14, 10.4230/LIPIcs.MFCS.2020.71. hal-03004095.

[6] N. Moravietz, P. Wolf, A Timecop's chase around the table, arXiv:2104.08616v2 [cs.CC], 2021.

[7] R. Nowakowski and P. Winkler, Vertex-to-vertex pursuit in a graph, *Discrete Math.* **43** (1983), 235 – 239.