

Université de Montréal

Optimisation géométrique des valeurs propres de
Steklov, de Laplace et de Dirac

par

Antoine Métras

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée en vue de l'obtention du grade de
Philosophiæ Doctor (Ph.D.)
en Mathématiques

1er mai 2022

Université de Montréal

Faculté des arts et des sciences

Cette thèse intitulée

Optimisation géométrique des valeurs propres de Steklov, de Laplace et de Dirac

présentée par

Antoine Métras

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Egor Shelukhin

(président-rapporteur)

Iosif Polterovich

(directeur de recherche)

Maxime Fortier Bourque

(membre du jury)

Katie Gittins

(examineur externe)

Résumé

Dans cette thèse, nous étudions des questions liées à l'optimisation des valeurs propres d'opérateurs (pseudo)-différentiels sur une variété. En premier lieu, nous nous intéressons au rôle de la géométrie du bord d'une variété sur les valeurs propres du problème de Steklov sur cette variété. Puis nous étudions les métriques (conformément) extrémales pour les valeurs propres de Laplace, de Steklov et de Dirac.

Dans le premier chapitre, basé sur l'article *Hypersurfaces with prescribed boundary and small Steklov eigenvalues* écrit en collaboration avec A. Girouard et B. Colbois, l'influence de la géométrie du bord ∂M sur les valeurs propres de Steklov est étudiée. Nous fixons une hypersurface M de \mathbb{R}^{n+1} et construisons une famille d'hypersurfaces M_j telle que $\partial M_j = \partial M$ et pour tout k ,

$$\sigma_k(M_j) \rightarrow 0 \quad \text{quand } j \rightarrow \infty,$$

où $\sigma_k(M_j)$ est la k -ième valeur propre de Steklov non nulle sur M_j . Ces hypersurfaces satisfont de plus à des contraintes géométriques supplémentaires sur leur volume, diamètre et courbures sectionnelles sur le bord. Ceci montre que pour des hypersurfaces, connaître la géométrie du bord ∂M ne suffit pas à obtenir des bornes inférieures pour les valeurs propres σ_k de Steklov.

Dans le second chapitre, basé sur l'article *Laplace and Steklov extremal metrics via n -harmonic maps* écrit en collaboration avec M. Karpukhin, les métriques (conformément) extrémales sont étudiées pour le laplacien et le problème de Steklov en dimension n . Nous donnons à celles du laplacien une caractérisation en termes d'applications n -harmoniques dans \mathbb{S}^{m-1} . Nous montrons aussi que le problème de Steklov à densité ρ sur le bord est plus adapté à cette étude, puisqu'il permet une correspondance entre métriques conformément extrémales et applications n -harmoniques à bord libre dans \mathbb{B}^m . De plus nous prouvons qu'une seule normalisation de σ_k , à base de puissances du volumes de M et de ∂M , admet des métriques extrémales. Finalement, nous construisons à partir d'applications harmoniques à bord libre dans \mathbb{B}^3 des paires (g, ρ) de métriques et densités conformément extrémales sur un anneau. Leurs propriétés sont étudiées et nous conjecturons que ces paires sont conformément maximales.

Dans le dernier chapitre nous discutons des possibilités d'applications, au problème de Dirac sur une surface de Riemann, de notre approche de caractérisation des métriques conformément extrémales. Ce travail est basé sur une collaboration en cours avec M. Karpukhin et I. Polterovich. Nous démontrons qu'une métrique conformément λ_k -extrémale engendre, à partir des λ_k -spineurs propres correspondant, une application harmonique de la surface dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^{2m-1}$. Ce résultat est utilisé dans le cas du tore afin de donner une condition suffisante pour que le minimum de $\lambda_1(M, g)\text{Area}(M, g)^{1/2}$ dans une classe conforme soit atteint par la métrique plate. Finalement nous présentons quelques possibilités de recherches futures sur les valeurs propres de Dirac.

Mots clés : géométrie spectrale, valeurs propres de Steklov, valeurs propres du laplacien, valeurs propres de Dirac, hypersurface, métrique extrémale, applications harmoniques, applications n -harmoniques, problème de Steklov à densité.

Abstract

In this thesis, we investigate some questions related to the geometric optimisation of eigenvalues for some (pseudo)-differential operators on a manifold. First, we study how Steklov eigenvalues on a manifold with boundary are influenced by the geometry of the boundary. Secondly, we study (conformally) extremal metrics for the Laplace, Steklov and Dirac eigenvalues.

In the first chapter, based on the article *Hypersurfaces with prescribed boundary and small Steklov eigenvalues* written in collaboration with A. Girouard and B. Colbois, we investigate the influence of the geometry of the boundary on Steklov eigenvalues. We fix a hypersurface M in \mathbb{R}^{n+1} and construct a family of hypersurfaces M_j such that $\partial M_j = \partial M$ and for all k ,

$$\sigma_k(M_j) \rightarrow 0 \quad \text{when } j \rightarrow \infty,$$

where $\sigma_k(M_j)$ is the k -th non-zero Steklov eigenvalue on M_j . The constructed hypersurfaces satisfy some further geometric constraints on their volume, diameter and sectional curvatures of the boundary. This shows that for hypersurfaces, knowing the boundary ∂M is not enough to obtain lower bounds for the Steklov eigenvalues.

In the second chapter, based on the article *Laplace and Steklov extremal metrics via n -harmonic maps* written in collaboration with M. Karpukhin, the (conformally) extremal metrics are studied for the Laplacian and the Steklov problem in dimension n . There we give to the Laplace ones a characterization in terms of n -harmonic maps to \mathbb{S}^{m-1} . We also show that the Steklov problem with density ρ on the boundary is better suited to this work, as it allows a correspondence between conformally extremal metrics and free-boundary n -harmonic maps to \mathbb{B}^m . Furthermore, we prove that only one normalization of σ_k using powers of the volumes of M and ∂M allows for extremal metrics. Finally we construct, from free-boundary harmonic maps to \mathbb{B}^3 , conformally extremal pairs (g, ρ) of metrics and densities on an annulus. Their properties are studied and we conjecture that such pairs are conformally maximal.

In the last chapter, we discuss possible applications to the Dirac problem on a Riemann surface of our approach to the characterization of conformally extremal metrics. This work is based on a ongoing collaboration with M. Karpukhin and I. Polterovich. We show that a

conformally λ_k -extremal metric yields, from the corresponding λ_k -eigenspinors, an harmonic map to $\mathbb{C}\mathbb{P}^{2m-1}$. This result is then used on the torus to obtain a sufficient condition for the minimum of $\lambda_1(M, g)\text{Area}(M, g)^{1/2}$ in a conformal class to be achieved by the flat metric. Finally we present some directions for possible future research on Dirac eigenvalues.

Keywords: spectral geometry, Steklov eigenvalues, Laplace eigenvalues, Dirac eigenvalues, hypersurfaces, extremal metrics, harmonic maps, n -harmonic maps, Steklov problem with density.

Table des matières

Résumé	5
Abstract	7
Liste des tableaux	13
Liste des figures	15
Remerciements	17
Chapitre 1. Introduction	19
1.1. La géométrie spectrale	19
1.2. Le problème de Steklov et le rôle du bord	20
1.3. Optimisation des valeurs propres	24
1.3.1. Métriques (conformément) extrémales du laplacien	24
1.3.2. Métriques (conformément) extrémales de Steklov	27
1.3.3. Métriques (conformément) extrémales de Dirac	30
Plan de la thèse	33
Chapitre 2. Premier article. Hypersurfaces with prescribed boundary and small Steklov eigenvalues	35
2.1. Introduction	36
2.1.1. The strategy of the proof	37
Plan of the paper	39
2.2. Notations and preliminary considerations	39
2.2.1. Quasi-isometries and Dirichlet energy	39
2.2.2. Quasi-isometric charts	40
2.2.3. Dirichlet energy on the graph of a function	41
2.3. Perturbation of the submanifold M	42
2.3.1. Deformation function	42

2.4. Test function	44
Acknowledgements	46
Chapitre 3. Deuxième article. Laplace and Steklov extremal metrics via	
n-harmonic maps	47
3.1. Introduction	48
3.1.1. Geometric optimization of eigenvalues	48
3.1.2. Normalization of Steklov eigenvalues	50
3.1.3. Steklov problem with a density	51
3.1.4. Free boundary harmonic annuli in \mathbb{B}^3	52
Plan of the paper	52
3.2. Main results	52
3.2.1. Extremal metrics in the conformal class: Laplacian	55
3.2.2. Extremal metrics in the conformal class: Steklov	56
3.2.3. Remarks on the Steklov problem with density	57
3.2.3.1. Upper bounds	57
3.2.3.2. Fraser-Schoen's result for surfaces	58
3.2.3.3. Laplacian problem with density	59
3.2.3.4. Other normalizations	59
3.2.4. Extremal metrics in the space of all metrics	59
3.2.5. Free boundary harmonic annuli	60
3.3. Algebraic extremality conditions	62
3.3.1. Extremality conditions for a fixed conformal class	65
3.3.2. Extremality conditions in the space of all metrics	70
3.4. Geometric extremality conditions	72
3.4.1. Proof of Theorem 3	72
3.4.2. Proof of Theorem 5	73
3.4.3. Proof of Theorem 8	74
3.4.4. Proof of Theorem 10	74
3.5. Extremal metrics on the annulus	74
3.5.1. Setup of the problem	75
3.5.2. Proof of Theorem 11	77
3.5.3. Proof of Proposition 12	79
Acknowledgements	80

Chapitre 4. Applications au problème de Dirac	81
4.1. Structure spinorielle et opérateur de Dirac	81
4.2. Valeurs propres et variations métriques	83
4.3. Métriques conformément extrémales sur le tore	86
4.4. D'autres directions de recherche pour les métriques extrémales de Dirac	90
Références bibliographiques	93

Liste des tableaux

1	Classical theory of extremal metrics on surfaces.	53
2	The theory of extremal metrics in dimension $n \geq 3$	54

Liste des figures

1	L'hypersurface perturbée proche du point p	23
2	Exemple schématisant le problème d'indice lié à la multiplicité : ici $\bar{\lambda}_k(g)$ est critique pour $\bar{\lambda}_k$ mais $\bar{\lambda}_{k+1}(g)$ ne l'est pas pour $\bar{\lambda}_{k+1}$	25
1	The domain U	41
2	Perturbation region.....	43
3	The set $\{x \mid f(x) = 0\}$ is shown in grey. The path in bold from an arbitrary $x \in \Omega$ to a point on $\partial\tilde{M}_f$ has length going to 0 as $\epsilon \rightarrow 0$	46
1	Some examples of the surface $\hat{\Psi}_{T_q}(\mathbb{A}_{T_q})$ for different values of $q = \frac{\rho_1}{\rho_2}$	78

Remerciements

Je tiens à remercier tout particulièrement mon directeur de thèse Iosif Polterovich pour son aide, son support et ses conseils. Il a toujours été disponible et d'une grande bienveillance tout au long de mon parcours.

Je remercie également mes coauteurs, Bruno Colbois, Alexandre Girouard et Mikhail Karpukhin. Collaborer avec eux a été une expérience très enrichissante et des plus agréables.

Je remercie aussi tout le groupe de géométrie spectrale à Montréal. Nos séminaires hebdomadaires ont été pour moi l'occasion de découvrir la géométrie spectrale à mon arrivée en maîtrise. C'était toujours une joie de discuter avec vous, tant de mathématiques que d'autres sujets.

Et finalement, mais pas des moindres, je remercie ma famille et mes amis. La recherche mathématique n'est pas toujours un fleuve tranquille et ils m'ont beaucoup aidé à garder la bonne humeur à travers les différents écueils rencontrés.

Chapitre 1

Introduction

1.1. La géométrie spectrale

La géométrie spectrale est l'étude des liens entre la géométrie et topologie d'un domaine euclidien ou d'une variété riemannienne, et les valeurs propres d'un opérateur (pseudo)-différentiel agissant sur des fonctions définies sur ce domaine ou cette variété. La géométrie spectrale est ainsi à la croisée de la géométrie et de l'analyse et trouve son origine en physique. En effet historiquement l'opérateur provient d'une équation différentielle modélisant un phénomène physique et le domaine est celui où se produit ce phénomène. Par exemple, considérons un tambour : la vibration de sa membrane peut être décrite par l'équation d'onde. Cette équation peut être résolue en utilisant les fonctions propres du laplacien sur cette membrane, c'est-à-dire les solutions non triviales f de l'équation

$$\begin{cases} \Delta f = \lambda f & \text{sur la membrane} \\ f = 0 & \text{sur le bord de la membrane} \end{cases}$$

où $\Delta = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ est le laplacien en 2 dimensions. Les nombres $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels une solution non triviale existe sont appelés les valeurs propres du laplacien. Dans cet exemple, les λ correspondent au carré des fréquences des modes de vibration de la membrane, ce qui permet d'entendre la géométrie spectrale : la forme de la membrane influence le son émis (e.g. plus un tambour est gros, plus il sonne grave).

Depuis ses débuts en physique, la géométrie spectrale s'est développée comme une branche des mathématiques à part entière et de nombreuses questions font l'objet de recherche. Dans cette thèse nous abordons trois sujets liés à l'optimisation spectrale, c'est à dire à quel point les valeurs propres peuvent être petites ou grandes lorsque la géométrie de la variété change. Dans une première partie, nous étudierons le rôle de la géométrie du bord pour le problème de Steklov. Puis dans une deuxième partie, nous étudierons l'optimisation des valeurs propres du laplacien et du problème de Steklov pour des variations de métrique sur une variété,

ainsi que la connexion des métriques extrémales obtenues avec des objets géométriques, les applications n -harmoniques. Dans la dernière partie, l'optimisation des valeurs propres de Dirac sur une surface est considérée et nous y montrons que les métriques conformément extrémales donnent lieu à des applications harmoniques. Nous appliquons ce résultat en montrant que dans certaines classes conformes de métriques sur le tore, le minimum de la première valeur propre de Dirac non nulle est atteint par la métrique plate.

1.2. Le problème de Steklov et le rôle du bord

Soit (M, g) une variété lisse riemannienne compacte de dimension n et à bord ∂M . Le problème de Steklov sur M consiste à trouver les fonctions harmoniques sur M dont la dérivée normale sur le bord est proportionnelle à leur valeur sur le bord. Précisément ce sont les solutions non triviales u au problème à valeur propre σ suivant:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } M, \\ \partial_\nu u = \sigma u & \text{sur } \partial M, \end{cases}$$

où

- $\Delta = -\text{div} \circ \text{grad}$ est l'opérateur de Laplace-Beltrami, aussi appelé le laplacien, sur M . En coordonnées locales $\{x_i\}$, il est donné par

$$\Delta = -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g^{ij} \sqrt{|g|} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$$

avec (g_{ij}) la matrice de la métrique dans les coordonnées $\{x_i\}$, (g^{ij}) sa matrice inverse et $|g| = |\det(g_{ij})|$.

- $\partial_\nu u$ est la dérivée normale de u sur le bord.

Les solutions u sont appelées des fonctions propres de Steklov et l'ensemble de ces valeurs propres se nomme le spectre de Steklov. Comme la variété est compacte avec un bord lisse, les valeurs propres σ sont discrètes avec comme seule accumulation à $+\infty$ [4]. On les énumère donc en ordre croissant:

$$0 = \sigma_0 < \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3 \leq \dots \rightarrow +\infty.$$

Une perspective historique ainsi que quelques exemples d'applications à des problèmes de physiques sont donnés dans [59].

Les valeurs propres de Steklov admettent une caractérisation variationnelle:

$$\sigma_k = \inf_{E \in \mathcal{E}^{k+1}} \sup_{f \in E \setminus \{0\}} \frac{\int_M |\nabla f|^2 dv_g}{\int_{\partial M} f^2 da_g}$$

avec \mathcal{E}^{k+1} l'ensemble des sous-espaces E de l'espace de Sobolev $H^1(M)$ (voir [83] pour une définition de $H^s(M)$) dont la restriction sur le bord ∂M est de dimension $k + 1$, et dv_g, da_g

sont les éléments de volume induits par la métrique sur M et ∂M respectivement. Cette caractérisation permet d'obtenir des bornes supérieures pour σ_k en choisissant des espaces $E \subset \mathcal{E}^{k+1}$ de fonctions tests.

Le spectre de Steklov correspond aussi au spectre de l'opérateur de Dirichlet-à-Neumann DN sur le bord ∂M , défini par

$$DN : H^{1/2}(\partial M) \rightarrow H^{-1/2}(\partial M)$$

$$f \mapsto \partial_\nu \hat{f}$$

où \hat{f} est l'unique extension harmonique de f à M et $H^{1/2}(\partial M)$, $H^{-1/2}(\partial M)$ sont des espaces de Sobolev. Il est clair que la restriction au bord d'une fonction propre de Steklov donne une fonction propre de DN , et inversement, l'extension harmonique d'une fonction propre de DN donne une fonction propre de Steklov, ce qui montre l'égalité des deux spectres. Ainsi comme les valeurs propres de Steklov sont aussi celles d'un opérateur sur le bord ∂M , il est naturel d'étudier l'influence de la géométrie du bord sur ces valeurs propres.

Tout d'abord, pour tout voisinage V du bord, la valeur propre σ_k peut-être bornée par des constantes ne dépendant que de la métrique sur V . En effet, étant donné $\partial V_E = \partial V \cap \partial M$ le bord extérieur de V (ici $\partial V_E = \partial M$ puisque V est un voisinage du bord) et $\partial V_I = \partial V \setminus \partial V_E$ son bord intérieur, on peut définir les problèmes de Steklov-Neumann et Steklov-Dirichlet sur V :

Steklov-Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } V, \\ \partial_\nu u = \sigma u & \text{sur } \partial V_E, \\ u = 0 & \text{sur } \partial V_I, \end{cases}$$

Steklov-Neumann:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } V, \\ \partial_\nu u = \sigma u & \text{sur } \partial V_E, \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \partial V_I. \end{cases}$$

On note par σ_k^D et σ_k^N les valeurs propres de Steklov-Dirichlet et Steklov-Neumann, respectivement. Ces valeurs propres admettent une caractérisation variationnelle [1]

$$\sigma_k^{N/D} = \inf_{E \in \mathcal{E}_{N/D}^{k+1}} \sup_{f \in E \setminus \{0\}} \frac{\int_V |\nabla f|^2 dv_g}{\int_{V_E} f^2 da_g}$$

où $\mathcal{E}_N^{k+1} = \{E \subset H^1(V), \dim E|_{V_E} = k+1\}$ et \mathcal{E}_D^{k+1} est le sous-ensemble de \mathcal{E}_N^{k+1} obtenu en ne prenant que les fonctions identiquement nulles sur V_I . En étendant une fonction $f \in E \subset \mathcal{E}_D^{k+1}$ par zéro en dehors de V , on voit que $\mathcal{E}_D^{k+1} \subset \mathcal{E}^{k+1}$, où \mathcal{E}^{k+1} est l'ensemble de sous-espaces utilisé dans la caractérisation variationnelle de σ_k . De plus $\mathcal{E}^{k+1} \subset \mathcal{E}_N^{k+1}$ donc par la caractérisation variationnelle des valeurs propres,

$$\sigma_k^N \leq \sigma_k \leq \sigma_k^D$$

et $\sigma_k^{N/D}$ ne dépend que de la métrique sur V .

La suite logique est de se demander si la connaissance de la métrique g sur ∂M permet d'obtenir des bornes pour σ_k . Ce n'est pas le cas en général. En effet, en dimension $n \geq 3$, il est possible de construire des valeurs propres aussi petites que voulu en choisissant une métrique $g_j = h_j g$, où h_j est un facteur conforme tel que $h_j|_{\partial M} = 1$, $h_j = 1$ en dehors d'une petite boule $B(p, \epsilon)$ avec p un point du bord fixé, et h_j tends uniformément vers 0 sur tout sous-ensemble compact de $B(p, \epsilon) \cap \text{int}(M)$. Avec la caractérisation variationnelle de σ et en remarquant que pour toute fonction f supportée dans $B(p, \epsilon)$,

$$\int_M |\nabla f|_{g_j}^2 dv_{g_j} = \int_M |\nabla f|_g^2 h_j^{\frac{n-1}{2}} dv_g \rightarrow 0 \quad \text{quand } j \rightarrow \infty,$$

en prenant $k + 1$ fonctions f_1, \dots, f_{k+1} supportées dans $B(p, \epsilon)$ et de support disjoint entre elles, on obtient que $\sigma_k \rightarrow 0$ quand ϵ tend vers 0. Une construction légèrement plus complexe, qui consiste essentiellement à rapprocher des sections du bord afin de fabriquer un fin passage, permet en dimension 2 d'obtenir des petites valeurs propres de Steklov [40]. De même, il est possible de rendre σ_k arbitrairement grande (en dimension $n > 2$) en faisant une perturbation conforme de la métrique g tout en la gardant fixe sur ∂M [14].

Il est donc nécessaire de raffiner cette question et chercher quelles conditions géométriques additionnelles permettent d'obtenir des bornes pour σ_k ne dépendant que de la métrique sur le bord ∂M . Une possibilité est de considérer M comme une sous variété de \mathbb{R}^{n+1} et de fixer son bord dans \mathbb{R}^{n+1} . La question est alors

Question. *Existe-t-il des majorations ou minorations pour σ_k ne dépendant que de $\partial M \subset \mathbb{R}^{n+1}$?*

Cette restriction aux sous-variétés de \mathbb{R}^{n+1} permet d'exclure les constructions de petites et grandes valeurs propres mentionnées précédemment.

Pour les bornes supérieures, cette question a été répondue par B. Colbois, A. Girouard et K. Gittins dans [15], où ils montrent que pour toute sous-variété $M' \subset \mathbb{R}^{n+1}$ avec $\partial M' = \partial M$, il existe une borne supérieure pour σ_k ne dépendant que de k et de la géométrie de la variété initiale M fixée.

Le premier article de cette thèse, écrit en collaboration avec B. Colbois et A. Girouard, donne une réponse négative pour les bornes inférieures. Nous y démontrons

Théorème 1.2.1 ([17]). *Soit $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ une hypersurface et $p \in \partial M$ un point sur son bord. Alors il existe une suite explicite d'hypersurfaces M_j avec $\partial M_j = \partial M$ et coïncidant avec l'hypersurface initiale M excepté dans un voisinage $B(p, 1/j)$ de p , telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sigma_k(M_j) = 0.$$

De plus, les M_j sont contrôlées géométriquement : leurs volume et diamètre convergent vers celui de M , et les courbures principales sur $\partial M = \partial M_j \subset M_j$ sont indépendantes de j .

Le contrôle de la géométrie des M_j montre que même en imposant des contraintes sur le volume, diamètre ou les courbures principales du bord, de petites valeurs propres peuvent encore être construites. Ce théorème, donné en termes d'hypersurfaces de \mathbb{R}^{n+1} pour simplifier sa présentation et sa preuve, reste vrai en général pour des sous-variétés M d'une variété N .

La preuve de ce théorème est basée sur l'idée suivante : si $\tilde{u} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction sur \mathbb{R}^{n+1} et $u = \tilde{u}|_{M'}$ sa restriction à M' , alors l'énergie de Dirichlet de u est donnée par $\int_{M'} |\nabla u|^2 dv$ où ∇u est la projection orthogonale sur TM' du gradient $\nabla \tilde{u}$ de \tilde{u} dans \mathbb{R}^{n+1} . Donc si M est perturbée de façon à ce que M' ait son espace tangent TM' presque orthogonal à $\nabla \tilde{u}$, l'énergie de Dirichlet de u sera petite et par la caractérisation variationnelle, en utilisant u comme fonction test, σ sera aussi petite. Par exemple si u est radiale de centre p , donc avec un gradient radial, proche du point p nous perturbons l'hypersurface M pour y rajouter des plis circulaires, tel qu'illustré dans la Figure 1. Lorsque la fréquence de ces plis augmente, l'espace tangent de M' devient presque orthogonal au gradient de u . Intuitivement, dans la métrique induite sur M' , nous construisons un fin passage puisque ces plis éloignent p du reste de l'hypersurface tout en gardant les points du bord proches entre eux.

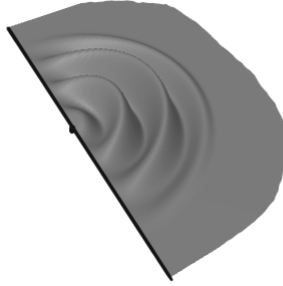


Fig. 1. L'hypersurface perturbée proche du point p

En général, la géométrie de M proche du point p peut être compliquée, rendant cette construction difficile. Nous utilisons une quasi-isométrie riemannienne pour passer du cas général au cas où un voisinage de p est plat.

Définition 1.2.2. Une quasi-isométrie riemannienne $F : (A, g_A) \rightarrow (B, g_B)$ de constante c entre deux variétés riemanniennes A et B , est un difféomorphisme tel que pour tout $v \in TA, v \neq 0$

$$\frac{1}{c} \leq \frac{|dF(v)|^2}{|v|^2} \leq c.$$

Remarque 1.2.3. Dans la littérature, la notion de quasi-isométrie est plus souvent utilisée pour des espaces métriques avec une définition plus générale. Nous donnons ici une définition restreinte au contexte riemannien. En fait, notre notion de quasi-isométrie est équivalente à la notion d'un difféomorphisme bilipschitzien.

Il est clair par la définition d'une hypersurface, que pour un voisinage $B_{\mathbb{R}^{n+1}}(p, \epsilon)$ suffisamment petit de p , il existe une quasi-isométrie $F : B_{\mathbb{R}^{n+1}}(p, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $F(M \cap B_{\mathbb{R}^{n+1}}(p, \epsilon))$ est plat. Et par la définition d'une quasi-isométrie, si une borne pour l'énergie de Dirichlet d'une fonction u dans le cas plat est connue, alors une borne similaire (à un facteur dépendant de la constante de quasi-isométrie c près) sera aussi vraie pour $u \circ F$. Cet usage des quasi-isométries nous permet donc de traiter le cas général avec une construction simple.

Dans cette première partie de l'introduction, nous avons traité en détail de l'inexistence de minoration en fonction de la géométrie du bord pour les valeurs propres de Steklov, même en imposant des restrictions géométriques strictes sur les variétés considérées. Ce résultat a été obtenu avec une construction explicite de variétés avec des valeurs propres de Steklov arbitrairement petites. Nous introduisons maintenant une autre méthode pour l'étude de ces bornes : les valeurs propres sont considérées comme des fonctions de la métrique sur la variété et leurs points critiques (c'est à dire les métriques extrémales) sont étudiés.

1.3. Optimisation des valeurs propres

Nous présentons d'abord un bref état des lieux pour les métriques extrémales du laplacien, qui ont été les premières métriques extrémales étudiées afin d'obtenir des bornes supérieures et pour lesquelles le sujet est le plus développé. Ceci permettra de souligner par la suite leurs similarités et différences avec les métriques extrémales de Steklov. La question des métriques conformément extrémales pour l'opérateur de Dirac est aussi abordée.

1.3.1. Métriques (conformément) extrémales du laplacien

Soit M une variété riemannienne lisse compacte et fermée de dimension n . Le problème aux valeurs propres du laplacien est

$$\Delta f = \lambda f$$

où $\Delta = -\text{div} \circ \text{grad}$ est le laplacien. Comme pour le problème de Steklov, les valeurs propres λ sont discrètes, positives et avec seule accumulation $+\infty$. On les note

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow +\infty.$$

Ces valeurs propres sont des fonctions $\lambda_k : g \mapsto \lambda_k(g)$ sur l'ensemble $\mathcal{R}(M)$ des métriques riemanniennes sur M . Lors d'une homothétie de $g \in \mathcal{R}(M)$ par une constante $t > 0$, elles varient par

$$\lambda_k(tg) = t^{-1} \lambda_k(g).$$

Il est naturel de normaliser λ_k par une puissance du volume de M afin d'obtenir une quantité invariante par homothétie:

$$\bar{\lambda}_k(g) = \lambda_k(g)|M|_g^{2/n}.$$

Les points critiques de $\bar{\lambda}_k$, appelés métriques $\bar{\lambda}_k$ -extrémales, ont été caractérisés par N. Nadirashvili (en dimension 2) et A. El Soufi, S. Ilias (en dimensions supérieures) en termes d'objets géométriques:

Théorème 1.3.1 ([72, 23]). *Si g est une métrique extrémale pour $\bar{\lambda}_k$ alors il existe une immersion isométrique minimale $\Phi : (M, g) \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ (à homothétie près). Ses composantes sont des λ_k -fonctions propres.*

Réciproquement, si $\Phi : (M, g) \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ est une immersion isométrique minimale, alors ses composantes sont des fonctions propres pour un certain $\lambda_k(g)$. De plus si $\lambda_k(g) > \lambda_{k-1}(g)$ ou $\lambda_k(g) < \lambda_{k+1}(g)$ alors g est $\bar{\lambda}_k$ -extrémale.

Le fait que les composantes d'une immersion isométrique minimale dans une sphère sont des fonctions propres du laplacien est un résultat de T. Takahashi [81]. La minimalité de l'immersion Φ veut dire que $\Phi(M)$ est une sous-variété minimale de S^{m-1} , c'est à dire une sous-variété minimisant localement son volume.

La condition sur $\lambda_k(g)$ permettant d'obtenir la réciproque est une condition technique liée au problème du choix d'indice pour une valeur propre multiple. En effet supposons que $\bar{\lambda}_k(g) = \bar{\lambda}_{k+1}(g) = \bar{\lambda}_{k+2}(g)$ avec $\bar{\lambda}_k(g)$ un maximum local de $\bar{\lambda}_k$. Par le théorème, on a l'existence d'une immersion minimale $\Phi : (M, g) \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$. En revanche, $\bar{\lambda}_{k+1}(g)$ n'est pas forcément une valeur critique de $\bar{\lambda}_{k+1}$, voir figure 2 pour un exemple. Donc pour que la réciproque soit vraie, il est nécessaire de se limiter au plus petit ou plus grand indice d'une valeur propre multiple.

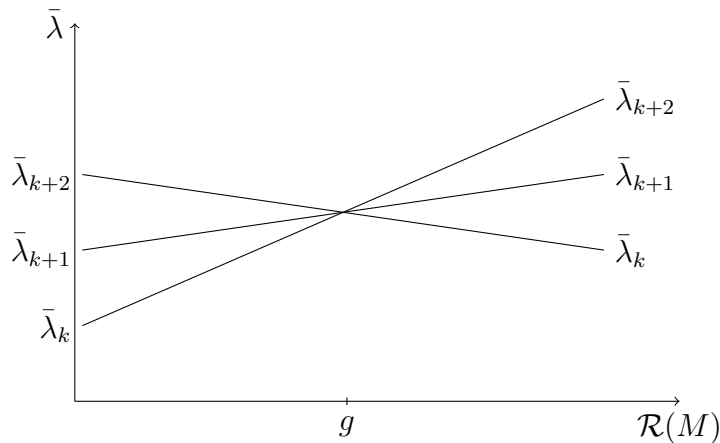


Fig. 2. Exemple schématisant le problème d'indice lié à la multiplicité : ici $\bar{\lambda}_k(g)$ est critique pour $\bar{\lambda}_k$ mais $\bar{\lambda}_{k+1}(g)$ ne l'est pas pour $\bar{\lambda}_{k+1}$.

En dimension 2, $\bar{\lambda}_k$ peut être bornée supérieurement par une constante ne dépendant que de la topologie de la surface et de k [56, 42]. Cette caractérisation des métriques extrémales peut donc être utilisée pour obtenir des bornes supérieures générales de $\bar{\lambda}_k$. Ceci a été réalisé par exemple dans le cas du tore par N. Nadirashvili [72] qui démontre que le tore équilatéral plat est $\bar{\lambda}_1$ -maximal parmi tous les tores.

En dimension $n \geq 3$, $\bar{\lambda}_k$ n'est pas bornée sur l'espace $\mathcal{R}(M)$ des métriques riemanniennes [11] mais l'est lorsque restreinte à une classe conforme \mathcal{C} , la borne supérieure ne dépendant alors que de la dimension n , de l'indice k de la valeur propre et de la classe conforme [42]. Dans un but d'obtenir des bornes supérieures, il est donc intéressant de considérer les points critiques de $\bar{\lambda}_k$ restreinte à une classe conforme, que l'on appelle métriques $\bar{\lambda}_k$ -conformément extrémales. Ces métriques admettent aussi une caractérisation simple

Théorème 1.3.2 ([24]). *Si g est une métrique $\bar{\lambda}_k$ -conformément extrémale alors il existe une application $\Phi : (M, g) \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ harmonique à densité d'énergie $|d\Phi|^2$ constante. Ses composantes sont des $\bar{\lambda}_k$ -fonctions propres.*

Réciproquement, si $\Phi : (M, g) \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ est harmonique à densité d'énergie $|d\Phi|^2$ constante alors $|d\Phi|^2$ est une valeur propre $\lambda_k(g)$ du laplacien et si $\lambda_k(g) > \lambda_{k-1}(g)$ ou $\lambda_k(g) < \lambda_{k+1}(g)$, alors g est $\bar{\lambda}_k$ -conformément extrémale.

Une application $F : (M, g) \rightarrow (N, h)$ est dite harmonique si c'est un point critique de l'énergie

$$E(F) = \frac{1}{2} \int_M |dF|^2 dv_g$$

où $|dF|^2$ est la norme de Hilbert-Schmidt de dF et est appelée la densité d'énergie de F (se référer à [18, 19] pour plus de détails et de nombreux résultats sur les applications harmoniques).

Cette caractérisation en termes d'application harmonique à densité d'énergie constante a un défaut majeur : en dimension $n > 2$, la condition d'harmonicité d'une application dépend du choix de la métrique dans sa classe conforme. Cela veut dire qu'il n'est pas possible d'utiliser la réciproque du théorème sans avoir fait à priori le choix d'une métrique candidate à être conformément extrémale. Pour pallier cette limitation, en collaboration avec M. Karpukhin, nous avons reformulé cette caractérisation en termes d'applications n -harmoniques.

Définition 1.3.3. *Une application $F : (M, g) \rightarrow (N, h)$ est dite n -harmonique si c'est un point critique de la n -énergie:*

$$E_n(F) = \frac{1}{n} \int_M |dF|^n dv_g$$

La n -énergie d'une application F dépend seulement de la classe conforme de g , comme le montre le calcul suivant, avec $ug, u \in C_{>0}^\infty(M)$ une métrique conforme à g ,

$$E_{n,ug}(F) = \int_M |dF|_{ug}^n dv_{ug} = \int_M u^{-n/2} |dF|_g^n u^{n/2} dv_g = E_{n,g}(F),$$

donc la n -harmonicité est une notion indépendante du choix de métrique dans une classe conforme. De plus, en utilisant l'équation de Euler-Lagrange pour la n -énergie, on peut montrer qu'une application F est n -harmonique pour la classe conforme \mathcal{C} si et seulement si F est harmonique à densité d'énergie constante pour une métrique $g_F \in \mathcal{C}$. Cette métrique g_F s'obtient de F par $g_F = \frac{1}{n} |dF|_g^2 g$ où $g \in \mathcal{C}$ quelconque. Ceci nous permet donc d'utiliser les applications n -harmoniques dans la caractérisation des métriques conformément extrémales.

Finalement, pour enlever la condition technique « $\bar{\lambda}_k > \bar{\lambda}_{k-1}$ ou $\bar{\lambda}_k < \bar{\lambda}_{k+1}$ », nous reformulons le résultat en termes d'indice d'un opérateur de Schrödinger défini à partir de Φ .

Soit $\Phi : (M, g) \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ une application n -harmonique non dégénérée, c'est à dire $d\Phi \neq 0$, et soit

$$L_{g,\Phi}(u) = \delta_g(|dF|_g^{n-2} du) - |d\Phi|_g^n u$$

où δ_g est le dual de d . Cet opérateur satisfait $L_{e^{2\omega}g,\Phi} = e^{-n\omega} L_{g,\Phi}$ et donc son indice ne dépend pas du choix de la métrique dans la classe conforme. On appelle cet indice *l'indice spectral de Φ* et le note $\text{ind}_S \Phi$. Il correspond au plus petit k tel que $\lambda_k(g_\Phi) = n$. En dimension 2, cette notion d'indice spectral a permis le calcul des supremum $\sup_{g \in \mathcal{R}(\mathbb{R}P^2)} \bar{\lambda}_k(g) = 4\pi(2k+1)$ par M. Karpukhin [49], et nous nous attendons à ce que l'indice spectral continue à jouer un rôle important dans les problèmes d'optimisation en dimensions supérieures.

En combinant ces idées, nous obtenons la caractérisation

Théorème 1.3.4. [51] *Si la métrique lisse g est $\bar{\lambda}_k$ -conformément extrémale dans la classe conforme \mathcal{C} , alors il existe une application n -harmonique $\Phi : (M, \mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ non dégénérée, telle que $g = \alpha g_\Phi$ pour $\alpha > 0$ et $\bar{\lambda}_k(M, g_\Phi) = n, \text{ind}_S(\Phi) \leq k$.*

Réciproquement, si $\Phi : (M, \mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ est une application n -harmonique non dégénérée, alors g_Φ est $\bar{\lambda}_{\text{ind}_S \Phi}$ -conformément extrémale.

1.3.2. Métriques (conformément) extrémales de Steklov

Soit M une variété lisse de dimension n , compacte et à bord ∂M . En dimension 2, l'étude des métriques extrémales de Steklov a été réalisée par A. Fraser et R. Schoen [31, 30]. Comme $\sigma_k(tg) = t^{-1/2} \sigma_k(g)$ pour $t > 0$, la valeur propre normalisée

$$\bar{\sigma}_k(g) = \sigma_k(g)|\partial M|_g$$

est invariante par homothétie. Cette normalisation apparait naturellement lorsque des bornes supérieures pour σ_k sont recherchées, le premier exemple historique de cela étant l'inégalité

de Weinstock pour les domaines simplement connexes du plan [85]. Avec cette normalisation, A. Fraser et R. Schoen ont obtenu

Théorème 1.3.5 ([31, 30]). *Si g est une métrique extrémale pour $\bar{\sigma}_k$ alors il existe une immersion conforme $F : (M, g) \rightarrow \mathbb{B}^m \subset \mathbb{R}^m$ telle que $F(M)$ est une surface minimale à bord libre et F est une isométrie sur ∂M (à homothétie près). Les composantes de F sont des σ_k -fonctions propres.*

Une surface S minimale à bord libre dans la boule euclidienne \mathbb{B}^m est une surface avec $\partial S \subset \partial \mathbb{B}^m$ et minimisant localement l'aire pour des variations gardant le bord ∂S dans $\partial \mathbb{B}^m$. Un exemple est la caténoïde critique dans \mathbb{R}^3 , qui est la caténoïde centrée en l'origine et intersectant la boule unité orthogonalement. En utilisant cette caractérisation, A. Fraser et R. Schoen ont démontré une borne supérieure de $\bar{\sigma}_1$ sur les anneaux:

Théorème 1.3.6 ([29]). *Soit (A, g) un anneau, alors $\sigma_k(g)|\partial A|_g$ est inférieure ou égale à $\bar{\sigma}_1$ de la caténoïde critique.*

Cette correspondance donne une nouvelle méthode pour construire des surfaces minimales à bord libre dans la boule, utilisée, par exemple, dans [31] pour des surfaces de genre zéro avec un nombre arbitraire de composantes du bord ; ou dans [47] pour le calcul numérique de telles surfaces.

Pour généraliser cette caractérisation en dimensions supérieures, le problème de la normalisation de σ_k se pose. En effet, alors que pour les valeurs propres du laplacien, la seule quantité géométrique utilisable pour normaliser était le volume, pour le problème de Steklov, le volume du bord, le volume de la variété, ou une combinaison des deux sont de bons candidats. Concrètement, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les quantités

$$\bar{\sigma}_{k,\alpha}(g) = \sigma_k(g)|\partial M|_g^\alpha |M|_g^{\frac{1+\alpha(1-n)}{n}}$$

sont invariantes par homothétie de g . Pour $\alpha = 1$ ou $\alpha = \frac{1}{n-1}$, $\bar{\sigma}_{k,\alpha}$ est de plus compatible avec la normalisation utilisée en dimension $n = 2$.

Notre premier résultat, obtenu en collaboration avec M. Karpukhin, est

Théorème 1.3.7 ([51]). *Parmi les $\bar{\sigma}_{k,\alpha}$, la seule normalisation permettant l'existence de métriques extrémales lisses est*

$$\bar{\sigma}_k(g) := \bar{\sigma}_{k,1}(g) = \sigma_k(g)|\partial M|_g |M|_g^{\frac{2-n}{2}}$$

Ce théorème est démontré en calculant la condition de criticalité d'une métrique $\bar{\sigma}_{k,\alpha}$ -extrémale et en remarquant que cette condition est réalisable seulement si $\alpha = 1$.

Maintenant qu'une normalisation pour σ_k est fixée, une première caractérisation des métriques extrémales est possible. Comme pour les valeurs propres du laplacien en dimension supérieure, $\bar{\sigma}_k$ n'est pas bornée supérieurement sur l'ensemble des métriques riemanniennes $\mathcal{R}(M)$ sur M [9] mais l'est en la restreignant à une classe conforme \mathcal{C} [42]. De même que dans le cas du laplacien, une caractérisation des métriques $\bar{\sigma}_k$ -conformément extrémales peut

être donnée en termes d'applications harmoniques à densité d'énergie constante et à bord libre dans la boule $\mathbb{B}^m \subset \mathbb{R}^m$. Mais l'usage des applications harmoniques à bord libre lorsque $n \geq 3$ a encore le défaut de dépendre du choix de la métrique dans la classe conforme. Nous la formulons donc en termes d'applications n -harmoniques à bord libre. À la différence du cas du laplacien, pour le problème de Steklov une densité $\rho \in C_{>0}^\infty(\partial M)$ doit être introduite dans le problème pour permettre cette formulation.

Nous considérons donc le problème de Steklov avec densité $\rho \in C_{>0}^\infty(\partial M)$:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } M, \\ \partial_\nu u = \sigma \rho u & \text{sur } \partial M. \end{cases}$$

On note ces valeurs propres $\sigma_k(g, \rho)$ et leur normalisation s'obtient naturellement de celle de $\bar{\sigma}_k(g)$:

$$\bar{\sigma}_k(g, \rho) = \sigma_k(g, \rho) \|\rho\|_{L^1(\partial M)} |M|^{\frac{2-n}{2}}.$$

La densité ρ est requise car étant donné une application n -harmonique à bord libre $\hat{\Psi} : (M, \mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{B}^m$, on obtient une application harmonique à densité d'énergie constante dans la métrique $g_{\hat{\Psi}} = \frac{1}{n} |\hat{\Psi}|_g^2 g$ pour $g \in \mathcal{C}$. Mais les composantes de cette application ne satisfont pas aux conditions de Steklov au bord. Pour que ce soit le cas, il est nécessaire de considérer le problème de Steklov avec la densité $\rho_{\hat{\Psi}} = \frac{\sqrt{n} |\partial_\nu g \hat{\Psi}|}{|d\hat{\Psi}|_g}$, qui rend les composantes des fonctions propres de Steklov pour la valeur propre $\sigma(g_{\hat{\Psi}}, \rho_{\hat{\Psi}})$. Dans l'étude des points critiques de $\bar{\sigma}_k$, nous permettons alors à la densité ρ de varier en plus de la métrique g , afin d'obtenir des paires (g, ρ) conformément extrémales.

Comme pour le laplacien, nous donnons une formulation utilisant en plus l'indice d'un opérateur défini à partir d'une application harmonique non dégénérée $\hat{\Psi}$ à bord libre. Pour $u \in C^\infty(\partial M)$, on note $\hat{u} \in C^\infty(M)$ son extension donnée par

$$\begin{cases} \delta_g(|d\hat{\Psi}|_g^{n-2} d\hat{u}) = 0 & \text{dans } M, \\ \hat{u} = u & \text{sur } \partial M. \end{cases}$$

puis $\mathcal{D}_{g, \hat{\Psi}}(u) = \partial_\nu \hat{u}$. Finalement, on définit l'opérateur

$$L_{g, \hat{\Psi}}^{\mathcal{D}}(u) = \mathcal{D}_{g, \hat{\Psi}} u - |\mathcal{D}_{g, \hat{\Psi}} \hat{\Psi}| u = \partial_\nu \hat{u} - |\partial_\nu \hat{\Psi}| u.$$

Cet opérateur satisfait $L_{e^{2\omega} g, \hat{\Psi}}^{\mathcal{D}} = e^{-\omega} L_{g, \hat{\Psi}}^{\mathcal{D}}$ donc son indice, que l'on nomme *l'indice spectral* $\text{ind}_S \hat{\Psi}$ de $\hat{\Psi}$, ne dépend que de la classe conforme. On remarque que pour $\Psi = \hat{\Psi}|_{\partial M}$, $L_{g, \Psi}^{\mathcal{D}}(\Psi) = 0$ et que pour $g_{\hat{\Psi}} = \frac{1}{n} |d\hat{\Psi}|_g^2 g$, $L_{g_{\hat{\Psi}}, \hat{\Psi}}^{\mathcal{D}} = \mathcal{D}_{g_{\hat{\Psi}}} - \rho_{\hat{\Psi}}$ est l'opérateur de Dirichlet-à-Neumann classique avec une densité $\rho_{\hat{\Psi}}$. Donc comme les composantes de $\hat{\Psi}$ sont des fonctions propres pour $\sigma_k(g_{\hat{\Psi}}, \rho_{\hat{\Psi}}) = 1$, $\text{ind}_S \hat{\Psi}$ est le plus petit k tel que $\sigma_k(g_{\hat{\Psi}}, \rho_{\hat{\Psi}}) = 1$.

En conclusion, nous obtenons la correspondance:

Théorème 1.3.8. [51] *Soit $n \geq 3$ et soit \mathcal{C} une classe conforme sur M .*

Si la paire $(g, \rho) \in \mathcal{C} \times C_{>0}^\infty(\partial M)$ est $\bar{\sigma}_k$ -conformément extrémale, alors il existe une application n -harmonique non dégénérée $\hat{\Psi} : (M, \mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{B}^m$ à bord libre telle que $(g, \rho) = (\alpha g_{\hat{\Psi}}, \alpha^{-1/2} \rho_{\hat{\Psi}})$ pour $\alpha > 0$, et $\bar{\sigma}_k(g_{\hat{\Psi}}, \rho_{\hat{\Psi}}) = 1, \text{ind}_S \hat{\Psi} \leq k$.

Réciproquement, si $\hat{\Psi} : (M, \mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{B}^m$ est une application n -harmonique non dégénérée à bord libre, alors la paire $(g_{\hat{\Psi}}, \rho_{\hat{\Psi}})$ est $\bar{\sigma}_{\text{ind}_S \hat{\Psi}}$ -conformément extrémale.

En dimension 2, la connexion entre les métriques $\bar{\sigma}_k$ -conformément extrémales et applications harmoniques a été essentielle pour obtenir un résultat d'existence des métriques $\bar{\sigma}_k$ -extrémale [76]. Nous pensons que notre caractérisation en termes d'application n -harmonique à bord libre et d'indice spectral jouera de même un rôle majeur pour des résultats d'existence de métriques conformément extrémales en dimensions supérieures.

Finalement, pour illustrer nos résultats, nous construisons une famille d'applications harmoniques à bord libre de l'anneau A à la boule \mathbb{B}^3 . Par le théorème d'uniformisation, pour chaque classe conforme \mathcal{C} sur A , il existe $T > 0$ tel que $\mathcal{C} = [g_T] =: \mathcal{C}_T$ où g_T est la métrique plate sur l'anneau $\mathbb{A}_T = [0, T] \times \mathbb{S}^1$. A. Fraser et R. Schoen ont démontré que la seule métrique $\bar{\sigma}_1$ -extrémale sur l'anneau est la métrique g_{cc} du caténoïde critique. Nous notons $T_1 \approx 2.4$ la valeur de T telle que $g_{cc} \in \mathcal{C}_{T_1}$.

Pour tout $T \geq T_1$, nous construisons une application harmonique $\hat{\Psi}_T : (\mathbb{A}_T, \mathcal{C}_T) \rightarrow \mathbb{B}^3$ à bord libre avec une symétrie de rotation et d'indice spectral 1. Ainsi la paire $(g_{\hat{\Psi}_T}, \rho_{\hat{\Psi}_T})$ est $\bar{\sigma}_1$ -conformément extrémale. De plus nous démontrons que

$$\bar{\sigma}_1(\mathbb{A}_T, g_{\hat{\Psi}_T}, \rho_{\hat{\Psi}_T}) = 2E(\hat{\Psi}_T) > 2\pi$$

et

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \bar{\sigma}_1(\mathbb{A}_T, g_{\hat{\Psi}_T}, \rho_{\hat{\Psi}_T}) = 2\pi$$

Dans [67], il a été montré que $\sup_{g \in \mathcal{C}_T} \bar{\sigma}_1(g) > 2\pi$ pour tout T ; et dans [69], que $\bar{\sigma}_1$ d'une métrique $\bar{\sigma}_1$ -conformément maximale dans \mathcal{C}_T tend vers 2π lorsque T tend vers ∞ . Nous conjecturons donc

Conjecture. *Pour $T \geq T_1$, les paires $(g_{\hat{\Psi}_T}, \rho_{\hat{\Psi}_T})$ sont $\bar{\sigma}_1$ -conformément maximales pour \mathcal{C}_T .*

1.3.3. Métriques (conformément) extrémales de Dirac

Soit M une surface de Riemann compacte. Nous allons définir l'opérateur de Dirac ainsi que le fibré de spineurs sur lequel il agit à l'aide de certains concepts de géométrie complexe. Cette définition a d'abord été donnée par M. Atiyah dans [5].

Sur la surface de Riemann M , le fibré tangent complexifié $T_{\mathbb{C}}M := TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ se décompose en $T_{\mathbb{C}}M = T'M \oplus T''M$ où $T'M$ est le fibré tangent holomorphe, $T'M = \text{span}_{\mathbb{C}} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \right\}$

pour z une coordonnée holomorphe (la définition de $T'M$ ne dépendant pas du choix de coordonnée holomorphe), et $T''(M)$ est le fibré tangent anti-holomorphe, $T''M = \text{span}_{\mathbb{C}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right\}$. Le dual $T'M^*$ de $T'M$ est le fibré des 1-formes différentielles holomorphes et, sur une surface, correspond au fibré K en droites holomorphes appelé fibré canonique.

Une structure spinorielle sur M est alors un fibré en droites holomorphes S ainsi qu'un isomorphisme de $S \otimes S$ dans le fibré canonique $K = T'M^*$. Cet isomorphisme $S \otimes S \cong K$ implique que S est une racine carrée de K dans le groupe de Picard de M des fibrés en droites holomorphes avec la multiplication donnée par le produit tensoriel. Sur une surface de genre γ , il existe $2^{2\gamma}$ structures spinorielles différentes [34].

Pour un fibré E , on note $\Gamma(E)$ les sections lisses de E . En particulier, $\Gamma(S \oplus \bar{S})$ correspond à l'ensemble des champs de spineurs. L'opérateur de Dirac \mathcal{D} est un opérateur différentiel elliptique et essentiellement auto-adjoint agissant sur les sections du fibré de spineurs $S \oplus \bar{S}$:

$$\mathcal{D} := \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & \partial_g \\ -\bar{\partial}_g & 0 \end{pmatrix}$$

où l'opérateur $\bar{\partial}_g : \Gamma(S) \rightarrow \Gamma(\bar{S})$ est défini par la composition de l'opérateur $\bar{\partial} : \Gamma(S) \rightarrow \Gamma(S \otimes \bar{K})$ et de l'isomorphisme $S \otimes \bar{K} = |S|^2 \otimes \bar{S} \cong_g \bar{S}$ induit par la métrique g . En coordonnées locales, soit s_0 une section locale de S telle que $s_0 \otimes s_0 = dz$. Alors

$$\bar{\partial}_z(f s_0) = |s_0|^2 \partial_{\bar{z}} f \bar{s}_0$$

avec $|s_0|^2 = |dz|$. L'opérateur ∂_g est défini de la même façon à partir de l'opérateur ∂ sur \bar{S} .

L'opérateur de Dirac répond à la problématique suivante : comment définir une racine carrée du laplacien? En physique quantique, cette question était un point essentiel afin d'incorporer la relativité restreinte à l'équation de Schrödinger, ce qui a donné l'équation de Dirac. Il est facile de voir que sur \mathbb{R}^2 avec la métrique plate, l'opérateur de Dirac donné ci-dessus est en effet une racine du laplacien :

$$\mathcal{D} \circ \mathcal{D} = 2 \begin{pmatrix} -2\partial_z \partial_{\bar{z}} & 0 \\ 0 & -2\partial_z \partial_{\bar{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}.$$

Cette égalité permet aussi d'illustrer l'intérêt du facteur $\sqrt{2}$ dans la définition de \mathcal{D} . Dans le cas général, la formule de Schrödinger-Lichnerowicz relie \mathcal{D}^2 et le laplacien sur les spineurs plus une correction dépendant de la courbure scalaire.

Les valeurs propres de Dirac sont les nombres λ tels que l'équation

$$\mathcal{D}\psi = \lambda\psi$$

ait une solution ψ non triviale, alors appelée spineur propre. Sur une surface compacte, ces valeurs propres sont discrètes, symétriques par rapport à 0 et avec seule accumulation $\pm\infty$.

Elles sont énumérées

$$-\infty \cdots \leq -\lambda_2 \leq -\lambda_1 < \lambda_{0,1} = \cdots = \lambda_{0,m} < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots + \infty.$$

Comme pour les valeurs propres de Laplace et de Steklov auparavant, nous considérons la valeur propre de Dirac normalisée

$$\bar{\lambda}_k(M, S, g) := \lambda_k(M, S, g) \text{Area}(M, g)^{1/2}$$

et ses points critiques dans une classe conforme sont l'objet de notre étude. Mais au contraire des deux précédents problèmes étudiés, ici l'intérêt est de minimiser $\bar{\lambda}_k$ dans une classe conforme fixée. En effet, il a été démontré dans [64, 2] que pour une classe conforme \mathcal{C} fixée, l'infimum $\Lambda_1(M, S, \mathcal{C}) := \inf_{g \in \mathcal{C}} \bar{\lambda}_1(g)$ est strictement positif. Dans le cas de la sphère \mathbb{S}^2 , l'inégalité de Bär donne que

$$\bar{\lambda}_1(\mathbb{S}^2, g) \geq \bar{\lambda}_1(\mathbb{S}^2, g_c)$$

où g_c est une métrique à courbure constante, avec égalité si et seulement si g est homothétique à g_c .

La question de l'existence d'une métrique $\bar{\lambda}_1$ -minimale dans une classe conforme a été abordé par B. Ammann dans [3]. Il y démontre que si $\Lambda_1(M, S, \mathcal{C}) < 2\sqrt{\pi} = \bar{\lambda}_1(\mathbb{S}^2, g_{st})$, où g_{st} est la métrique ronde standard sur la sphère, alors une telle métrique existe et est lisse avec un nombre fini de singularités. De plus en utilisant la représentation de Weierstrass spinorielle [80, 33], il obtient une correspondance entre métrique minimale et immersion périodique à courbure moyenne constante dans \mathbb{R}^3 . Les méthodes utilisées pour obtenir ces résultats sont inspirées de certaines techniques employées pour la résolution du problème de Yamabe.

Dans le dernier chapitre de cette thèse, nous montrons une application au problème de Dirac de la démarche précédemment utilisée pour les cas de Steklov et de Laplace, c'est à dire obtenir à partir des conditions d'extrémalité une caractérisation des métriques conformément extrémales en termes d'objets géométriques obtenus naturellement des spineurs propres. Ce travail en cours, réalisé en collaboration avec M. Karpukhin et I. Polterovich, donne

Théorème 1.3.9. *Si g est une métrique conformément λ_k -extrémale alors il existe des λ_k -spineurs propres ψ_1, \dots, ψ_m avec $\psi_j = (\psi_{j+}, \psi_{j-}) \in \Gamma(S \oplus \bar{S})$ tels que l'application $\Psi = [\psi_{1+} : \bar{\psi}_{1-} : \cdots : \psi_{m+} : \bar{\psi}_{m-}] : M \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{2m-1}$ est harmonique.*

Afin de montrer l'intérêt de ce résultat, nous l'appliquons au cas du tore pour obtenir une condition suffisante sur les classes conformes, qui si elle est satisfaite pour une classe conforme \mathcal{C} , implique que la métrique plate est conformément minimale dans \mathcal{C} . Explicitement, chaque classe conforme sur le tore contient exactement une métrique plate $g_{(x,y)}$ — qui est la métrique plate sur le tore $\mathbb{R}^2 / ((0,1)\mathbb{Z} + (x,y)\mathbb{Z})$ — et nous indexons les classes conformes par les paires (x, y) correspondantes. Pour la structure spinorielle triviale sur le tore, on fixe sans perte de

généralité $|x| \leq \frac{1}{2}, y^2 + x^2 \geq 1$ et $y > 0$, tandis que pour les autres structures spinorielles, $|x| \leq \frac{1}{2}, y^2 + (|x| - \frac{1}{2})^2 \geq \frac{1}{4}$ et $y > 0$. Alors

Théorème 1.3.10. *Soit $y_S = 2\pi$ si S est la structure spinorielle triviale sur T et $y_S = \frac{\pi}{2}$ autrement.*

Pour tout $y > y_S$, un minimum pour $\bar{\lambda}_1(T, S, g)$ dans la classe conforme $[g_{(x,y)}]$ est atteint par la métrique plate.

Plan de la thèse

Dans le premier chapitre, nous démontrons le Théorème 1.2.1 : nous construisons d'abord explicitement les perturbations de la variété M , puis les fonctions tests pour finalement utiliser la caractérisation variationnelle pour compléter la preuve.

Dans le second chapitre, nous prouvons les Théorème 1.3.4 et 1.3.8. Dans la troisième section du chapitre, nous obtenons les conditions d'extrémalité (pour Steklov et le laplacien) de métrique sous forme d'équations algébriques pour les fonctions propres. Celles-ci permettent de prouver le Théorème 1.3.7 sur la normalisation des valeurs propres de Steklov. Dans la section suivante, nous donnons un sens géométrique à ces conditions d'extrémalité en les exprimant en termes d'applications n -harmoniques. Finalement dans la dernière section, nous construisons la famille d'applications harmoniques $\hat{\Psi}_T : \mathbb{A}_T \rightarrow \mathbb{B}^3$ et étudions leurs propriétés.

Dans le troisième chapitre, nous concluons avec une application de notre démarche au problème de Dirac, en démontrant les Théorème 1.3.9 et 1.3.10, et présentons plusieurs possibilités de développement futurs pour l'optimisation des valeurs propres de Dirac.

Chapitre 2. Premier article.

Hypersurfaces with prescribed boundary and small Steklov eigenvalues

par

Bruno Colbois¹, Alexandre Girouard² et Antoine Métras³

- (¹) Université de Neuchâtel, Institut de Mathématiques, Rue Emile-Argand 11, CH-2000 Neuchâtel, Switzerland
- (²) Département de mathématiques et de statistique, Université Laval, Pavillon Alexandre-Vachon, 1045, av. de la Médecine, Québec Qc G1V 0A6, Canada
- (³) Département de mathématiques et de statistique, Université de Montréal, CP 6128 succ Centre-Ville, Montréal, QC H3C 3J7, Canada

Cette article a été publié dans Canadian Mathematical Bulletin, Vol. 63:1, 2020.

Les principales contributions de Antoine Métras à cet article sont présentées. J'ai trouvé le premier exemple (voir Exemple 4) qui a initié ce projet. Alexandre Girouard a suggéré l'utilisation de perturbations locales ce qui m'a permis d'obtenir une première version du Théorème 1. Bruno Colbois a suggéré l'usage des quasi-isométries pour simplifier la démonstration dans le cas général ; grâce à un travail commun, nous avons amélioré le Théorème 1 en y ajoutant un contrôle sur la géométrie de la variété perturbée.

RÉSUMÉ. Étant donné une hypersurface M avec un bord $\Sigma = \partial M$, nous prouvons l'existence d'une suite d'hypersurfaces M_j ayant chacune le même bord que M , telle que chaque valeur propre de Steklov $\sigma_k(M_j)$ tende vers zéro lorsque j tend vers l'infini. Les hypersurfaces M_j sont obtenues à partir de M par une perturbation locale proche d'un point du bord. Leur volume et diamètre sont arbitrairement proches de ceux de M , tandis que les courbures principales du bord restent inchangées.

Mots clés : Géométrie spectrale, valeurs propres de Steklov

ABSTRACT. Given a smooth compact hypersurface M with boundary $\Sigma = \partial M$, we prove the existence of a sequence M_j of hypersurfaces with the same boundary as M , such that each Steklov eigenvalue $\sigma_k(M_j)$ tends to zero as j tends to infinity. The hypersurfaces M_j are obtained from M by a local perturbation near a point of its boundary. Their volumes and diameters are arbitrarily close to those of M , while the principal curvatures of the boundary remain unchanged.

Keywords: Spectral geometry, Steklov eigenvalues

2.1. Introduction

Let M be a n -dimensional smooth compact Riemannian manifold with boundary $\Sigma = \partial M$. The Steklov eigenvalue problem on M consists in finding all numbers $\sigma \in \mathbb{R}$ for which there exists a nonzero function $u \in C^\infty(M)$ which solves

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } M, \\ \partial_\nu u = \sigma u & \text{on } \Sigma. \end{cases}$$

Here Δ is the Laplacian induced from the Riemannian metric g on M and ∂_ν is the outward pointing normal derivative along the boundary Σ . The Steklov eigenvalues form an unbounded increasing sequence $0 = \sigma_0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots \rightarrow \infty$, each of which is repeated according to its multiplicity. See [40] and [58] for background on this problem.

One of our main interests in recent years has been to understand the particular role that the boundary Σ plays with respect to Steklov eigenvalues. Some papers studying this question are [16, 78, 14, 9, 84, 48, 38, 15, 79]. In particular, we have considered the effect of various geometric constraints on individual eigenvalues σ_k . One particularly interesting question is to prescribe a Riemannian metric g_Σ on the boundary Σ and to investigate lower and upper bounds for the eigenvalue σ_k among all Riemannian metrics g which coincide with g_Σ on the boundary. Given any Riemannian metric g on M such that $g = g_\Sigma$ on Σ , it is proved in [14] that one can make any eigenvalue σ_k arbitrarily small by modifying the Riemannian metric g in an arbitrarily small neighborhood $V \subset M$ of a point $p \in \partial M$. More precisely: for each $\epsilon > 0$ and each $k \in \mathbb{N}$, there exists a Riemannian metric $\tilde{g} = \tilde{g}_{\epsilon,k}$ on M which coincides with g_Σ on Σ and also with g outside the neighborhood V , such that $\sigma_k(M, \tilde{g}) < \epsilon$. For manifolds M of dimension $n \geq 3$ one can also obtain arbitrarily large

eigenvalues, but in general not using a perturbation that is localized near the boundary of M . See [14, 9]. In [15] a more restrictive constraint was imposed by requiring the manifold M to be a submanifold of \mathbb{R}^m with prescribed boundary $\Sigma = \partial M \subset \mathbb{R}^m$. In this context an upper bound for σ_k was given, in terms of Σ and of the volume of M . The authors were unable at the time to give a lower bound and they raised the question to know if there exists one, or if instead arbitrarily small eigenvalues are possible. The goal of this paper is to answer this question.

Theorem 1. *Let $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ be a smooth n -dimensional compact hypersurface with nonempty boundary $\Sigma = \partial M$. For each $p \in \Sigma$, there exists a sequence of hypersurfaces $M_j \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $j \in \mathbb{N}$, coinciding with M outside of a ball $B(p, \frac{1}{j})$ and with boundary $\partial M_j = \Sigma$, such that*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sigma_k(M_j) = 0 \quad \text{for each } k \in \mathbb{N}. \quad (2.1.1)$$

The principal curvatures of $\Sigma \subset M_j$ are independent of j . Moreover, the volume and diameter of M_j converge to those of M as $j \rightarrow \infty$.

In order for (2.1.1) to hold for each $k \in \mathbb{N}$, it is necessary that the perturbed hypersurfaces M_j differ from M arbitrarily close to the boundary Σ as $j \rightarrow \infty$. Indeed, let b be the number of connected components of Σ and note that any hypersurface \tilde{M} which coincides with M in a neighborhood Ω of Σ satisfies $\sigma_{b+1} \geq C > 0$ where C is given by a sloshing problem on $\Omega \cap M$. See [15] for details.

Remark 2. *Theorem 1 holds in arbitrary positive codimension and ambient space. We decided to state it for hypersurfaces in \mathbb{R}^{n+1} for the sake of notational simplicity.*

Remark 3. *By construction (see Section 2.3), each manifold M_j coincides with M in a neighborhood Ω_j of its prescribed boundary Σ . Hence the Dirichlet-to-Neumann maps $D_j : C^\infty(\Sigma) \rightarrow C^\infty(\Sigma)$ associated to M_j all have the same full symbol [60, section 1]. See also [77].*

2.1.1. The strategy of the proof

For eigenvalues of the Laplace operator, it is well known that one can obtain arbitrarily small eigenvalues by constructing thin Cheeger dumbbells in the interior of the manifold. See [8, 10]. This strategy does not work for Steklov eigenvalues. For Steklov eigenvalues, it is possible to obtain arbitrarily small eigenvalues by creating thin channels, but this involves deformation of the boundary. See [39]. In order to prove Theorem 1, we have to use a more elaborate strategy.

Given a smooth function $\tilde{u} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, consider the restriction $u = \tilde{u}|_M$. It is well known that if $\int_\Sigma u \, dA = 0$,

$$\sigma_1(M) \int_\Sigma u^2 \, dA \leq \int_M |\nabla u|^2 \, dV. \quad (2.1.2)$$

See [40] and Section 2.2 below. Here ∇u is the tangential gradient of u . It is the projection of the ambient gradient $\bar{\nabla}\tilde{u}$ on the tangent spaces of $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$. The basic idea of our proof is to fix a function $\tilde{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ and consider the vector field $\bar{\nabla}\tilde{u}$ in the ambient space \mathbb{R}^{n+1} . The hypersurface M is then deformed by creating "wrinkles" that tend to make the various tangent spaces $T_q M$, for $q \in \text{int } M$, perpendicular to $\bar{\nabla}\tilde{u}(p)$. This is achieved by "folding the surface like an accordion" in the direction perpendicular to $\bar{\nabla}\tilde{u}$. In the limit the right-hand-side of inequality (2.1.2) tends to zero. Let us illustrate this strategy with a simple example.

Example 4. *Given a smooth function $f : \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$ vanishing on the circle $S^1 = \partial\bar{\mathbb{D}}$, consider the surface*

$$S_f := \text{Graph of } f = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \bar{\mathbb{D}}\}.$$

The boundary of S_f is the same for each f . We will use the function defined by $\tilde{u}(x, y, z) = x$ and its restriction $u = \tilde{u}|_{S_f}$ as a trial function in inequality (2.1.2). Because $\nabla\tilde{u} = (1, 0, 0)$, it follows from Lemma 8 that the Dirichlet energy of $u := \tilde{u}|_{S_f} : S_f \rightarrow \mathbb{R}$ is given by

$$\int_{S_f} |\nabla u|^2 = \int_{\mathbb{D}} \frac{1 + f_y^2}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} dx dy.$$

For $n \in \mathbb{N}$, define $f = f_n : \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$ by

$$f(x, y) = \sin(nx) \overbrace{(1 - x^2 - y^2)}^{\phi(x, y)}.$$

It follows from

$$f_x^2 = n^2 \left(\cos(nx)\phi + \frac{1}{n} \sin(nx)\phi_x \right)^2 \quad \text{and} \quad f_y^2 = \sin^2(nx)\phi_y^2$$

that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{S_{f_n}} |\nabla u|^2 = 0.$$

Together with (2.1.2), this shows that $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_1(S_{f_n}) = 0$.

The proof of Theorem 1 is based on the above idea, but it is technically more involved because we want to localize this argument to a small neighbourhood of a point p of the boundary. This is a significant gain compared to the above example because it allows the construction of an arbitrary finite number of disjointly supported test functions with small Dirichlet energy, leading to the collapse of each eigenvalue σ_k rather than just σ_1 . For the sake of readability and simplicity, the deformations that we use in the proof of Theorem 1 are continuous but only piecewise smooth. This is not problematic because only first derivatives of these deformations appear.

Plan of the paper

In Section 2.2 we review the min-max characterization of Steklov eigenvalues and we prove a lemma regarding the control of the Dirichlet energy under quasi-isometries. We then proceed to construct the perturbed hypersurfaces in Section 2.3. We use a quasi-isometric chart to an hypersurface with a flat boundary. The perturbed submanifold is then constructed by considering the graph of a locally supported oscillating function. Finally, in Section 2.4 an appropriate test function is used to conclude the proof of Theorem 1.

2.2. Notations and preliminary considerations

Let M be a smooth compact manifold with boundary Σ . The volume form on M is written dV , while the volume form on Σ is dA . We use the usual Sobolev space $H^1(M) \subset L^2(M, dV)$. The Steklov eigenvalue σ_k admits a variational characterization in terms of the *Steklov-Rayleigh quotient* of a function $0 \neq u \in H^1(M)$,

$$\mathcal{R}(u) = \frac{\int_M |\nabla u|^2 dV}{\int_\Sigma u^2 dA}.$$

The numerator $D(u) = \int_M |\nabla u|^2 dV$ is the *Dirichlet energy* of $u \in H^1(M)$. It is well known that

$$\sigma_k = \min_{\substack{S \subset H^1(M) \\ \dim S = k+1}} \max_{u \in S \setminus \{0\}} \mathcal{R}(u), \quad (2.2.1)$$

where the minimum is taken over all $(k+1)$ -dimensional linear subspaces $S \subset H^1(M)$.

2.2.1. Quasi-isometries and Dirichlet energy

Let M and \tilde{M} be two n -dimensional Riemannian manifolds with boundary. A diffeomorphism $\phi : M \rightarrow \tilde{M}$ is a *quasi-isometry* with constant $C \geq 1$ if for each $p \in M$ and each $0 \neq v \in T_p M$,

$$\frac{1}{C} \leq \frac{\|D_p \phi(v)\|^2}{\|v\|^2} \leq C.$$

Quasi-isometries provide a control of the Dirichlet energy of a function.

Lemma 5. *Let $\phi : M \rightarrow \tilde{M}$ be a quasi-isometry with constant $C \geq 1$. Let $f \in H^1(\tilde{M})$ then*

$$\frac{1}{C^{\frac{n}{2}+1}} \leq \frac{\|\nabla(f \circ \phi)\|_{L^2(M)}^2}{\|\nabla f\|_{L^2(\tilde{M})}^2} \leq C^{\frac{n}{2}+1}.$$

PROOF. Let \tilde{g} be the Riemannian metric of \tilde{M} and let g be that of M . Let $\hat{g} = \phi^*(\tilde{g})$. Because ϕ is a quasi-isometry with constant C , the following holds for each $0 \neq v \in TM$,

$$\frac{1}{C} \leq \frac{g(v, v)}{\hat{g}(v, v)} \leq C.$$

It follows that

$$\frac{1}{C}g(\nabla_g f, \nabla_g f) \leq \hat{g}(\nabla_{\hat{g}} f, \nabla_{\hat{g}} f) \leq Cg(\nabla_g f, \nabla_g f).$$

The corresponding volume forms satisfy

$$C^{-n/2}dV_g \leq dV_{\hat{g}} \leq C^{n/2}dV_g.$$

This leads to

$$\begin{aligned} \|\nabla(f \circ \phi)\|_{L^2}^2 &= \int_M g(\nabla_g(f \circ \phi), \nabla_g(f \circ \phi)) dV_g \\ &\leq C^{n/2+1} \int_M \hat{g}(\nabla_{\hat{g}}(f \circ \phi), \nabla_{\hat{g}}(f \circ \phi)) dV_{\hat{g}} \\ &= C^{n/2+1} \int_{\tilde{M}} \tilde{g}(\nabla_{\tilde{g}} f, \nabla_{\tilde{g}} f) dV_{\tilde{g}}. \end{aligned}$$

The lower bound is identical. □

2.2.2. Quasi-isometric charts

Recall that a subset $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ is an hypersurface with boundary if for each $p \in M$, there exist open sets $W, W' \subset \mathbb{R}^{n+1}$ with $p \in W$ and a diffeomorphism $\psi : W \rightarrow W'$ such that $\psi(M \cap W)$ is an open set in the half-space

$$H = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = 0, x_1 \geq 0\}.$$

The point $p \in M$ is on the boundary Σ of M if and only if ψ sends it to the boundary of the half-space H :

$$\psi(p) \in \partial H := \{x \in H : x_1 = 0\}.$$

This definition is coherent: it does not depend on the choice of the diffeomorphism ψ . See [44] for further details. By further restricting ψ and scaling if necessary, we can assume that it is a quasi-isometry and that its image W' is a cylinder.

Lemma 6. *For each $p \in \Sigma$, there exists a quasi-isometry*

$$\psi : W \longrightarrow W' = B_{\mathbb{R}^n}(0, 1) \times (-1, 1)$$

with $\psi(p) = 0$ and such that the image of $M \cap W$ is

$$U := \psi(M \cap W) = \{x \in H : |x| < 1\}.$$

Remark 7. *We identify $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ with a subset of \mathbb{R}^n so that we can write $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$ instead of $x = (x_1, \dots, x_n, 0) \in U$.*

In particular, the restriction of ψ to $\Sigma \cap W$ is also a quasi-isometry.

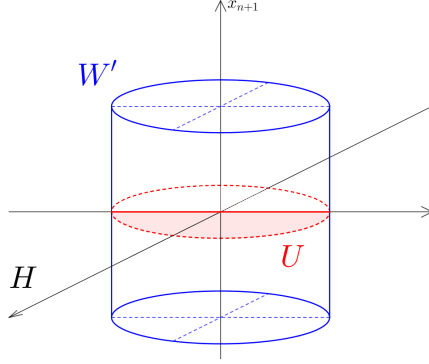


Fig. 1. The domain U

2.2.3. Dirichlet energy on the graph of a function

Let $U \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded open set and let $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ be a bounded smooth function. Consider the graph

$$S_f = \{(x, f(x)) : x \in U\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Given a function $u : U \rightarrow \mathbb{R}$, define $\tilde{u} : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ by $\tilde{u}(x, x_{n+1}) = u(x)$ and define $u_f : S_f \rightarrow \mathbb{R}$ by

$$u_f(x, f(x)) = u(x) = \tilde{u}|_{S_f}.$$

Lemma 8. *The Dirichlet energy of $u_f : S_f \rightarrow \mathbb{R}$ is*

$$\int_{S_f} |\nabla u_f|^2 dV = \int_U \frac{|\nabla u|^2 + |\nabla u|^2 |\nabla f|^2 - \langle \nabla u, \nabla f \rangle^2}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} dx,$$

where on the left-hand-side ∇ , dV and the norm are taken on S_f and on the right-hand-side $dx = dx^1 \cdots dx^n$ is the Lebesgue measure on U , while ∇ is the usual gradient on \mathbb{R}^n .

The Cauchy-Schwarz inequality gives $|\nabla u|^2 |\nabla f|^2 - \langle \nabla u, \nabla f \rangle^2 \geq 0$ with equality if and only if $\nabla u = c \nabla f$ for some constant c .

PROOF OF LEMMA 8. To simplify notations, we will write $S = S_f$. For any point $p \in S$, the gradient $\nabla u_f \in T_p S$ is the projection of $\bar{\nabla} \tilde{u}$ on $T_p S$. That is,

$$\nabla u_f = \bar{\nabla} \tilde{u} - \langle \bar{\nabla} \tilde{u}, N \rangle N,$$

where N is a unit normal vector to $T_p S$. It follows from

$$\bar{\nabla} \tilde{u} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, 0 \right)$$

and

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \left(e_{n+1} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} e_i \right). \quad (2.2.2)$$

that

$$|\nabla u_f|^2 = \frac{|\nabla u|^2 + |\nabla u|^2 |\nabla f|^2 - \langle \nabla u, \nabla f \rangle^2}{1 + |\nabla f|^2}. \quad (2.2.3)$$

The volume element on S_f is given by

$$dV = \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \quad (2.2.4)$$

Together with identity (2.2.3) this completes the proof. \square

2.3. Perturbation of the submanifold M

Given $p \in \Sigma$, let ψ be the quasi-isometric chart provided by Lemma 6. In order to prove Theorem 1, we will deform the submanifold M in the neighborhood W of the point p by deforming the neighborhood $U \subset W'$ inside W' and pulling back to W using the quasi-isometry ψ . Consider a smooth function $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ which is supported in the interior of U and which satisfies $|f(x)| < 1$ for each $x \in U$. This last condition implies that the graph of f ,

$$S_f = \{(x, f(x)) : x \in U\}$$

is contained in the cylinder W' . Hence it can be used to define a deformation of M as follows:

$$\tilde{M}_f := (M \setminus W) \cup \psi^{-1}(S_f). \quad (2.3.1)$$

Because f is smooth, supported in U and $S_f \subset W'$, the subset $\tilde{M}_f \subset \mathbb{R}^{n+1}$ also is a submanifold with boundary $\partial \tilde{M}_f = \Sigma = \partial M$.

2.3.1. Deformation function

We now construct specific functions f and u such that the Dirichlet energy of u_f is small, basing our method on the idea that if ∇u and ∇f are parallel the numerator is independent of ∇f , while the denominator behaves as $|\nabla f|$. Thus we want f and u to have parallel gradients with $|\nabla f|$ big to get a small Dirichlet energy for u_f .

Consider numbers $\epsilon, \delta_1, \delta_2, \rho > 0$ that are sufficiently small and define $\delta := \delta_1 + \delta_2$. These constants will be adjusted later in equation (2.4.2). Let $q = (\delta, 0, \dots, 0) \in H$. Consider the following subsets of U :

$$\begin{aligned} A &:= \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \geq \delta, \|x - q\| \leq \epsilon\} \\ B &:= \{(x_1, \dots, x_n) \mid \delta_1 \leq x_1 \leq \delta, \|\pi x\| \leq \epsilon\} \\ C &:= \{(x_1, \dots, x_n) \mid 0 \leq x_1 \leq \delta_1, \|\pi x\| \leq \epsilon\} \\ D &:= \{x \in U \setminus (A \cup B \cup C) \mid d(x, A \cup B \cup C) \leq \rho\} \end{aligned}$$

2.4. Test function

The test function u is supported on $\Omega \subset U$ and is defined by

$$u(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\|\pi x\|}{\epsilon} & \text{if } x \in B \cup C \\ 1 - \frac{\|x-q\|}{\epsilon} & \text{if } x \in A \end{cases} \quad (2.4.1)$$

On A , the Dirichlet energy of u_f can be made small by taking ω big. Indeed for almost all $x \in A$,

$$\begin{aligned} \nabla f &= \pm \delta_2 \omega \frac{x-q}{\|x-q\|} \\ \nabla u &= -\frac{1}{\epsilon} \frac{x-q}{\|x-q\|} \end{aligned}$$

and using the fact that ∇f and ∇u are parallel, the Dirichlet energy is

$$\int_{S_f \cap A \times \mathbb{R}} |\nabla u_f|^2 dV = \int_A \frac{|\nabla u|^2}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} dx = \frac{1}{\epsilon^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \delta_2^2 \omega^2}} \text{Vol } A = \frac{c_1 \epsilon^{n-2}}{\sqrt{1 + \delta_2^2 \omega^2}}$$

where c_1 is some constant.

On B and C , ∇f and ∇u are not parallel but it is possible to make the Dirichlet energy small by making the volume of B and C small: for B , we have for almost all $x \in B$:

$$\begin{aligned} \nabla f(x) &= F(\omega \|\pi x\|) e_1 \pm \gamma(x_1) \omega \frac{\pi x}{\|\pi x\|} \\ \nabla u(x) &= -\frac{1}{\epsilon} \frac{\pi x}{\|\pi x\|} \end{aligned}$$

and since e_1 and πx are orthogonal,

$$|\nabla f(x)|^2 = F(\omega \|\pi x\|)^2 + \gamma(x_1)^2 \omega^2.$$

Then the Dirichlet energy on B is

$$\begin{aligned} \int_{S_f \cap B \times \mathbb{R}} |\nabla u_f|^2 dV &= \int_B \frac{\frac{1}{\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon^2} F(\omega \|\pi x\|)^2}{\sqrt{1 + F(\omega \|\pi x\|)^2 + \gamma(x_1)^2 \omega^2}} dx \\ &\leq \frac{1}{\epsilon^2} \int_B \frac{2}{\sqrt{1 + \gamma(x_1)^2 \omega^2}} dx \\ &= c_2 \epsilon^{n-3} \int_0^{\delta_2} \frac{1}{\sqrt{1 + x_1^2 \omega^2}} dx_1 \\ &= c_2 \epsilon^{n-3} \frac{\ln(\delta_2 \omega + \sqrt{1 + \delta_2^2})}{\omega} \end{aligned}$$

And on C , since $f = 0$, the Dirichlet energy is simply

$$\int_{S_f \cap C \times \mathbb{R}} |\nabla u_f|^2 dV = \frac{1}{\epsilon^2} \text{Vol } C = c_3 \delta_1 \epsilon^{n-3}$$

In total, the Rayleigh quotient of u_f is bounded as follows

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(u_f) &\leq \frac{1}{\epsilon^{n-1}} \left(c_1 \frac{\epsilon^{n-2}}{\sqrt{1 + \delta_2^2 \omega^2}} + c_2 \frac{\epsilon^{n-3} \ln(\delta_2 \omega + \sqrt{1 + \delta_2^2 \omega^2})}{\omega} + c_3 \delta_1 \epsilon^{n-3} \right) \\ &= c_1 \frac{\epsilon^{-1}}{\sqrt{1 + \delta_2^2 \omega^2}} + c_2 \frac{\epsilon^{-2} \ln(\delta_2 \omega + \sqrt{1 + \delta_2^2 \omega^2})}{\omega} + c_3 \delta_1 \epsilon^{-2}. \end{aligned}$$

We are now ready to define the constants more precisely. By using the following:

$$\delta_1 = \epsilon^3, \delta_2 = \epsilon^{3/2}, \omega = \epsilon^{-3} \quad (2.4.2)$$

we obtain

$$\mathcal{R}(u_f) = \mathcal{O}(\epsilon^{1/2}) \quad \text{as } \epsilon \rightarrow 0$$

We have proved that a local perturbation of U allows the construction of a local trial function with arbitrarily small Steklov-Rayleigh quotient. The proof of our main result is now an easy consequence.

PROOF OF THEOREM 1. Let $k, j \in \mathbb{N}$ with j sufficiently large. Let $p_1, \dots, p_{k+1} \in B(p, \frac{1}{j}) \cap \Sigma$ and let ψ be the quasi-isometric chart from Lemma 6. For each p_i , we follow the above construction to obtain a deformation function f_i and a test function u_i that is supported in a small enough neighbourhood of p_i so that all the u_i 's have disjoint supports and are supported in $\psi(B(p, \frac{1}{j}) \cap M)$. The parameter ϵ in the previous construction is taken small enough to guarantee that the Rayleigh quotient of each u_i is smaller than $\frac{1}{j}$. Consider the deformation function $f = f_1 + \dots + f_{k+1}$ supported in $B(p, \frac{1}{j})$ and the perturbed manifold $M_j = \tilde{M}_f$. Taking the pullback by ψ , we obtain $k + 1$ test functions $\psi^*(u_i)$ with disjoint supports and from Lemma 5, their Rayleigh quotient is less than $\frac{c}{j}$ where c is a constant depending on ψ . By the variational characterization (2.2.1) of the eigenvalue σ_k , we conclude that $\sigma_k(M_j) \leq \frac{c}{j}$.

It remains to prove that the perturbed manifolds M_j satisfy the geometric conditions from the theorem. It is enough to show it for a perturbation around a single point $f = f_1$ and that the conditions are true when $\epsilon \rightarrow 0$. Let $x \in \Omega$. There exists $x' \in \Omega$ such that $f(x') = 0$ and the distance in M_f between x and x' is $\mathcal{O}(\epsilon^{3/2})$. There is a path from x' to some point y on ∂M such that the length of the path is less than $\delta + \epsilon\pi/2$, it suffices to take the shortest path in $\{x \in M \mid f(x) = 0\}$ from x' to ∂M (see figure 3). This total length of the path from x to y goes to 0 when ϵ goes to 0 and since $\partial \tilde{M}_f = \partial M$ this implies that the diameter of \tilde{M}_f converges to $\text{Diam}(M)$ when ϵ goes to 0.

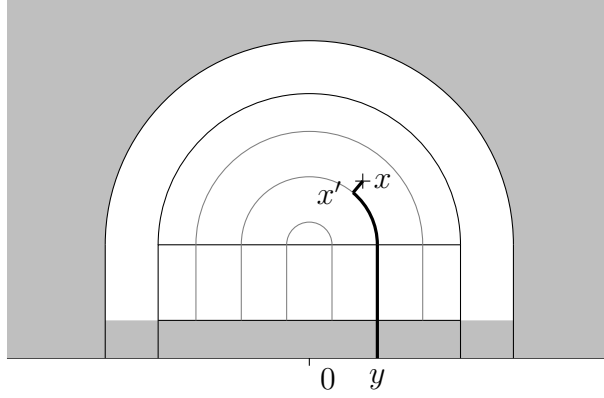


Fig. 3. The set $\{x \mid f(x) = 0\}$ is shown in grey. The path in bold from an arbitrary $x \in \Omega$ to a point on $\partial\tilde{M}_f$ has length going to 0 as $\epsilon \rightarrow 0$.

For the volume of \tilde{M}_f , taking $\rho = \epsilon$, the volume difference between \tilde{M}_f and M goes to 0 as $\epsilon \rightarrow 0$. Indeed, using the fact that the chart ψ is a quasi-isometry, it is enough to show that the difference in volume between S_f and $\Omega \cup D$ goes to 0:

$$\begin{aligned} |\text{Vol}(S_f) - \text{Vol}(\Omega \cup D)| &= \int_{\Omega \cup D} \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dx_1 \dots dx_n - \text{Vol}(\Omega \cup D) \\ &\leq (\sqrt{1 + \delta_2^2 \omega^2} - 1) \text{Vol}(\Omega \cup D) \\ &= \mathcal{O}(\epsilon^{n-1}) \end{aligned}$$

which goes to 0 for $n \geq 2$. Finally, it is clear that the curvatures of $\partial\tilde{M}_f$ do not change as M is kept fixed on some neighborhood of the boundary (the set C). \square

Acknowledgements

The third author's work is part of his PhD under the supervision of Iosif Polterovich and was partially supported by the ISM and J.A. DeSève scholarships.

Chapitre 3. Deuxième article.

Laplace and Steklov extremal metrics via n -harmonic maps

par

Mikhail Karpukhin¹ et Antoine Métras²

(¹) Mathematics 253-37, Caltech, Pasadena, CA 91125, USA

(²) Département de mathématiques et de statistique, Université de Montréal, CP 6128 succ Centre-Ville, Montréal, QC H3C 3J7, Canada

Cette article a été publié dans The Journal of Geometric Analysis, vol. 32, 2002.

Chacun des auteurs a contribué à part égale à cet article

RÉSUMÉ. Nous présentons une description unifiée des métriques extrémales pour les valeurs propres du laplacien et de Steklov sur des variétés de dimension arbitraire en utilisant la notion d'applications n -harmoniques. Notre approche étend la connexions bien connue entre les métriques extrémales pour des valeurs propres sur une surfaces et les immersions minimales ainsi que les applications harmoniques. En le faisant, nous découvrons deux particularités des valeurs propres de Steklov inconnues jusqu'à présent. Premièrement, nous montrons qu'en dimensions supérieures il existe une unique normalisation à partir du volume du bord et du volume de la variété, qui permet un problème d'optimisation de valeurs propres non trivial. Deuxièmement, nous remarquons que les points critiques des valeurs propres dans une classe conforme, considérées comme des fonctionnelles de la métrique, ont une interprétation géométrique naturelle à condition de considérer le problème de Steklov avec une densité sur le bord. Comme exemple, nous construisons une famille d'anneaux harmoniques à bord libre dans la balle de dimensions 3 et conjecturons qu'ils correspondent à des métriques maximisant la première valeur propre de Steklov dans leur classe conforme respective.

Mots clés : Géométrie spectrale, valeur propre de Steklov, valeur propre du laplacien, métrique extrémale, application n -harmonique.

ABSTRACT. We present a unified description of extremal metrics for the Laplace and Steklov eigenvalues on manifolds of arbitrary dimension using the notion of n -harmonic maps. Our approach extends the well-known results linking extremal metrics for eigenvalues on surfaces with minimal immersions and harmonic maps. In the process, we uncover two previously unknown features of the Steklov eigenvalues. First, we show that in higher dimensions there is a unique normalization involving both the volume of the boundary and of the manifold itself, which leads to meaningful extremal eigenvalue problems. Second, we observe that the critical points of the eigenvalue functionals in a fixed conformal class have a natural geometric interpretation provided one considers the Steklov problem with a density. As an example, we construct a family of free boundary harmonic annuli in the three-dimensional ball and conjecture that they correspond to metrics maximizing the first Steklov eigenvalue in their respective conformal classes.

Keywords: Spectral geometry, Steklov eigenvalues, Laplace eigenvalues, extremal metric, n -harmonic map.

3.1. Introduction

3.1.1. Geometric optimization of eigenvalues

Let (Σ^n, g) be a compact connected Riemannian n -dimensional manifold with non-empty boundary. The Steklov eigenvalues $\sigma_k(\Sigma^n, g)$ are defined to be the numbers σ for which the following equation

$$\begin{cases} \Delta_g u = 0 & \text{in } \Sigma^n, \\ \partial_\nu u = \sigma u & \text{on } \partial\Sigma^n \end{cases}$$

has a non-trivial solution. They form a sequence

$$0 = \sigma_0(\Sigma^n, g) < \sigma_1(\Sigma^n, g) \leq \dots \nearrow \infty,$$

where the numbers are repeated according to their multiplicity. For known results and open questions on the Steklov problem, see the review article [40].

In the case of surfaces ($n = 2$) there is a vast literature on the subject of sharp isoperimetric inequalities for Steklov eigenvalues. Namely, given a surface Σ^2 , one looks for the sharp upper bounds on *normalized eigenvalues*

$$\bar{\sigma}_k(\Sigma^2, g) = \sigma_k(\Sigma^2, g) \text{Length}(\partial\Sigma^2, g).$$

The problem is of particular interest due to the connection with the theory of free boundary minimal surfaces established by Fraser and Schoen [31, 30]. They showed that *extremal metrics* for $\bar{\sigma}_k$ (i. e. critical points of $\bar{\sigma}_k(\Sigma^2, g)$ as a function of g , see Definition 13) correspond to free boundary minimal surfaces in Euclidean balls. Furthermore, in [31] this connection is used to obtain sharp upper bounds for $\bar{\sigma}_1$ on the annulus and the Möbius strip. In recent years there have been further developments in the study of the interactions between bounds for Steklov eigenvalues and free boundary minimal surfaces, see e.g. [67, 66, 76, 37, 36, 54], as well as the study of free boundary minimal submanifolds for general ambient manifolds, see the recent survey [61].

The theory of Steklov eigenvalues on surfaces with boundary is in many ways parallel to the theory of Laplace eigenvalues on closed surfaces. Recall that for (M^n, g) a closed, connected Riemannian n -dimensional manifold, the Laplace eigenvalues $\lambda_k(M^n, g)$ are the numbers λ such that the equation

$$\Delta_g u = \lambda u$$

has a non-trivial solution. They form an increasing sequence

$$0 = \lambda_0(M^n, g) < \lambda_1(M^n, g) \leq \dots \nearrow \infty,$$

where the numbers are repeated according to their multiplicity. Finally, the *normalized eigenvalues* are defined as

$$\bar{\lambda}_k(M^n, g) = \lambda_k(M^n, g) \text{Vol}(M^n, g)^{\frac{2}{n}}.$$

For $n = 2$ there is a strong analogy between sharp upper bounds for $\bar{\lambda}_k$ and sharp upper bounds for $\bar{\sigma}_k$. In fact, the results of Fraser and Schoen were motivated by the results of Nadirashvili [72], who established the correspondence between $\bar{\lambda}_k$ -extremal metrics and closed minimal surfaces in spheres. Similarly, one could consider *conformally extremal metrics*, i.e. critical points of $\bar{\sigma}_k$ and $\bar{\lambda}_k$ restricted to a fixed conformal class of metrics. The analogy persists: $\bar{\lambda}_k$ -conformally extremal metrics correspond to harmonic maps to spheres, whereas

$\bar{\sigma}_k$ -conformally extremal metrics give rise to free boundary harmonic maps to balls. Table 1 contains a brief summary of these results, see Section 3.2 for a more detailed account.

The remarkable feature of this connection is that the extremal metric is determined by a geometric object that is defined independently of the metric. Indeed, minimal surfaces only depend on the metric in the ambient manifold, and for $n = 2$ the conformal invariance of the Dirichlet energy implies that the harmonic maps depend only on the conformal structure of the surface. As a result, questions about extremal metrics can be reformulated on the language of minimal surfaces and harmonic maps, see [22, 46, 53, 49, 54, 68, 72, 74, 75] for many applications of this approach to sharp eigenvalue bounds.

The goal of the present paper is to extend this analogy to higher dimensions $n \geq 3$. Surprisingly, there are only a few results on the subject of $\bar{\lambda}_k$ -(conformally) extremal metrics [12, 24, 25, 65] and extremal metrics for Steklov eigenvalues were not studied at all. In [25] the authors show that $\bar{\lambda}_k$ -extremal metrics correspond to minimal submanifolds of the sphere and that $\bar{\lambda}_k$ -conformally extremal metrics correspond to harmonic maps with additional properties. While the former is consistent with the case of surfaces, the latter is not since the Dirichlet energy is no longer conformally invariant for $n \geq 3$. Later, it was noted in [65] that the conditions on the map in [25] are equivalent to the property of being n -harmonic, which is a conformally invariant property. In the present paper we show that n -harmonic maps naturally appear in the study of conformally extremal metrics for Steklov eigenvalues. In particular, the formalism of n -harmonic maps allows one to extend the analogy between the Laplacian and Steklov problems to all dimensions in a unified way. Our main results are summarized in Table 2. The results for Steklov eigenvalues in the third column are the main contribution of the present paper, see Section 3.2 for a more detailed account.

While our description of $\bar{\lambda}_k$ -(conformally) extremal metrics presented in Theorems 3, 8 is mostly a reformulation of the one presented in [25, 65], the situation is quite different in the Steklov case. We encounter several challenges related to previously undiscovered features of the higher-dimensional Steklov problem. They are outlined below.

3.1.2. Normalization of Steklov eigenvalues

The first question is how to define $\bar{\sigma}_k$, i.e. what is the natural normalization for Steklov eigenvalues when $n \geq 3$. Up until now, in most papers the preferred normalization of Steklov eigenvalues is either by $\text{Vol}(\partial\Sigma^n, g)$ or by $\text{Vol}(\Sigma^n, g)$. For example, the papers [13, 29, 32, 42] contain some non-sharp upper bounds, whereas in [9, 14] the authors discuss flexibility of the Steklov spectrum, i.e. they construct examples showing that it is impossible to obtain upper bounds in various contexts.

We propose the following definition,

$$\bar{\sigma}_k(\Sigma^n, g) = \sigma_k(\Sigma^n, g) \text{Vol}(\partial\Sigma^n, g) \text{Vol}(\Sigma^n, g)^{\frac{2-n}{n}}. \quad (3.1.1)$$

This normalization appears as an intermediate step in all the papers on upper bounds in higher dimensions mentioned above. For example, it appears in [13, 42] due to the fact that the authors are using the approach of metric-measure spaces developed in [57, 41]. For any Radon measure μ on (Σ^n, g) one defines its eigenvalues via the variational characterization

$$\lambda_k(\Sigma^n, g, \mu) = \inf_{F_{k+1}} \sup_{u \in F_{k+1} \setminus \{0\}} \frac{\int |du|_g^2 dv_g}{\int u^2 d\mu}, \quad (3.1.2)$$

where F_{k+1} varies over $(k+1)$ -dimensional subspaces of $C^\infty(M)$ that remain $(k+1)$ -dimensional in $L^2(\mu)$, see e.g. [55, 36, 54]. These eigenvalues have the scaling property $\lambda_k(\Sigma^n, tg, s\mu) = s^{-1}t^{\frac{n-2}{2}}\lambda_k(\Sigma^n, g, \mu)$. Therefore, the natural normalized quantity is

$$\bar{\lambda}_k(\Sigma^n, g, \mu) = \lambda_k(\Sigma^n, g, \mu) \mu(\Sigma^n) \text{Vol}(\Sigma^n, g)^{\frac{2-n}{n}}. \quad (3.1.3)$$

If μ equals the boundary measure of Σ^n , then $\lambda_k(\Sigma^n, g, \mu)$ coincides with the Steklov eigenvalues and one recovers normalization (3.1.1) from (3.1.3).

Furthermore, we show that for any other normalization by powers of $\text{Vol}(\partial\Sigma^n, g)$ and $\text{Vol}(\Sigma^n, g)$ the normalized eigenvalue functional does not have any smooth critical points. This fact explains some of the flexibility results mentioned above. All the observations made in this section point us towards the fact that (3.1.1) is the natural normalization for the Steklov problem, see also [36] for some additional arguments. One of the main goals of the present paper is to convince the reader that it is indeed the case.

3.1.3. Steklov problem with a density.

The second issue we encounter is that even with the correct normalization the $\bar{\sigma}_k$ -conformally extremal metrics do not quite correspond to free boundary n -harmonic maps. In order to remedy the situation we consider the Steklov problem with a density.

Let $0 < \rho \in C^\infty(\partial\Sigma^n)$ be a positive smooth function. The eigenvalues $\sigma_k(\Sigma^n, g, \rho)$ are defined to be the numbers σ such that the following equation

$$\begin{cases} \Delta_g u = 0 & \text{in } \Sigma^n, \\ \partial_\nu u = \sigma \rho u & \text{on } \partial\Sigma^n \end{cases}$$

has a non-trivial solution. The eigenvalues $\sigma_k(\Sigma^n, g, \rho)$ are a direct generalization of $\sigma_k(\Sigma^n, g)$ with the same properties. Furthermore, $\sigma_k(\Sigma^n, g, \rho) = \lambda_k(\Sigma^n, g, \rho dA_g)$, so the natural normalization is

$$\bar{\sigma}_k(\Sigma^n, g, \rho) = \sigma_k(\Sigma^n, g, \rho) \left(\int_{\partial\Sigma^n} \rho dA_g \right) \text{Vol}(\Sigma^n, g)^{\frac{2-n}{n}}. \quad (3.1.4)$$

We prove that critical points of $\bar{\sigma}_k(\Sigma^n, g, \rho)$ in the product space $\mathcal{C} \times C^\infty(\Sigma^n)$ correspond to free boundary n -harmonic maps to the unit ball, see Theorem 5 below for the exact statement. For $n = 2$ the conformal invariance of the Laplacian implies that for any $0 \leq f \in C^\infty(\Sigma^2)$ one has $\sigma_k(\Sigma^2, g, f|_{\partial\Sigma^2}) = \sigma_k(\Sigma^2, f^2g)$. In this case we recover the correspondence with free boundary harmonic maps to the unit ball for Steklov eigenvalues without density established in [30], see Section 3.2.3.2 for a more detailed discussion. However, the lack of the conformal invariance in higher dimensions makes it necessary to consider the problem with density.

3.1.4. Free boundary harmonic annuli in \mathbb{B}^3

In the final section we construct and study a family of rotationally symmetric free boundary harmonic maps from an annulus $\mathbb{A}_T = [0, T] \times \mathbb{S}^1$ to a three-dimensional ball \mathbb{B}^3 . Our approach is very similar to Fraser-Schoen's analysis of rotationally symmetric metrics on annuli in [29]. We show that for any $T \geq T_1$ there exists a rotationally symmetric free boundary harmonic map $\Psi_T: \mathbb{A}_T \rightarrow \mathbb{B}^3$ corresponding to a $\bar{\sigma}_1$ -conformally extremal metric. The image of Ψ_T is a piece of a stretched catenoid, see Figure 1. In Section 3.2.5 we conjecture that these metrics are in fact $\bar{\sigma}_1$ -maximizers in their conformal class and provide some evidence for this conjecture. Finally, we show that there are values of T such that the density ρ corresponding to Ψ_T is not identically constant. As a result, there exist critical pairs (g, ρ) with non-constant ρ , i.e. it is necessary to introduce the density function in order to have a correspondence with free boundary harmonic maps.

Plan of the paper

The paper is organized in the following way. In Section 3.2 we provide the statements of the main results and recall the necessary background on n -harmonic maps and minimal immersions. In Section 3.3 the definition of the metric extremal for the eigenvalue functional is introduced. We obtain the necessary and sufficient conditions of extremality in terms of algebraic relations on the corresponding eigenfunctions. These relations are then used in Section 3.4 to establish the correspondence between extremal metrics, n -harmonic maps and minimal immersions. Finally, Section 3.5 contains the construction of the free boundary harmonic annuli with non-trivial boundary densities.

3.2. Main results

In this section we provide the detailed account of the main results outlined in the introduction.

	Laplacian $\bar{\lambda}_k(M, g)$	Steklov $\bar{\sigma}_k(\Sigma, g)$
Normalization	$\lambda_k(M, g)\text{Area}(M, g)$	$\sigma_k(\Sigma, g)\text{Length}(\partial\Sigma, g)$
Extremal metrics in the conformal class \mathcal{C} correspond to	Harmonic maps $\Phi: (M, \mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$	Free boundary harmonic maps $\hat{\Psi}: (\Sigma, \mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{B}^m$
which are extremal points of the conformally invariant functional	$E(\Phi) = \frac{1}{2} \int d\Phi _g^2 dv_g$	$E(\hat{\Psi}) = \frac{1}{2} \int d\hat{\Psi} _g^2 dv_g$ under the constraint that $\Psi = \hat{\Psi} _{\partial\Sigma}: \partial\Sigma \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$
and, as a result, the solutions of	$\Delta_g \Phi = d\Phi _g^2 \Phi$	$\mathcal{D}_g \Psi = \mathcal{D}_g \Psi \Psi$ or $\partial_\nu \hat{\Psi} = \partial_\nu \hat{\Psi} \hat{\Psi}$
Conversely, any corresponding geometric object gives rise to the extremal metric		
One defines the associated conformally covariant operator	$L_{g, \Phi} = \Delta_g - d\Phi _g^2$	$L_{g, \Psi}^{\mathcal{D}} = \mathcal{D}_g - \mathcal{D}_g \Psi $
and the spectral index	$\text{ind}_S(\Phi) = \text{ind}(L_{g, \Phi})$	$\text{ind}_S(\Psi) = \text{ind}(L_{g, \Psi}^{\mathcal{D}})$
The corresponding metric is given by	$g_\Phi = \frac{1}{2} d\Phi _g^2 g$	any h with $h _{\partial\Sigma} = \mathcal{D}_g \Psi g _{\partial\Sigma}$
which is extremal for the functional	$\bar{\lambda}_{\text{ind}_S(\Phi)}(M, g)$	$\bar{\sigma}_{\text{ind}_S(\Psi)}(\Sigma, g)$
with the value	$\bar{\lambda}_{\text{ind}_S(\Phi)}(M, g_\Phi) = 2E(\Phi)$	$\bar{\sigma}_{\text{ind}_S(\Psi)}(\Sigma, h) = 2E(\hat{\Psi})$
Extremal metrics in the space of all metrics correspond to the same geometric object with an additional property of being conformal, i.e. to	Minimal immersions to \mathbb{S}^{m-1}	Free boundary minimal immersions to \mathbb{B}^m

Table 1. Classical theory of extremal metrics on surfaces.

	Laplacian $\bar{\lambda}_k(M, g)$	Steklov $\bar{\sigma}_k(\Sigma, g, \rho)$
Normalization	$\lambda_k(M^n, g) \text{Vol}(M^n, g)^{\frac{2}{n}}$	$\sigma_k(\Sigma^n, g) \ \rho\ _{L^1} \text{Vol}(\Sigma^n, g)^{\frac{2-n}{n}}$
Extremal metrics in the conformal class \mathcal{C} correspond to	n -Harmonic maps $\Phi^n: (M^n, \mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$	Free boundary n -harmonic maps $\hat{\Psi}^n: (\Sigma, \mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{B}^m$
which are extremal points of the conformally invariant functional	$E^n(\Phi^n) = \frac{1}{n} \int d\Phi^n _g^n dv_g$	$E^n(\hat{\Psi}^n) = \frac{1}{n} \int d\hat{\Psi}^n _g^n dv_g$ under the constraint that $\Psi^n := \hat{\Psi}^n _{\partial\Sigma^n}: \partial\Sigma^n \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$
and, as a result, the solutions of	$\delta_g(d\Phi _g^{n-2} d\Phi) = d\Phi _g^n \Phi$	$\partial_\nu \hat{\Psi}^n = \partial_\nu \hat{\Psi}^n \hat{\Psi}^n$ or $\mathcal{D}_{g, \Psi^n}^n \Psi^n = \mathcal{D}_{g, \Psi^n}^n \Psi^n \Psi^n$, where $\mathcal{D}_{g, \Psi^n}^n$ is the Dirichlet-to-Neumann operator associated with $P(u) = \delta_g(d\hat{\Psi}^n _g^{n-2} du)$
Conversely, any corresponding geometric object with nowhere vanishing differential gives rise to the extremal metric		
One defines the associated conformally covariant operator	$L_{g, \Phi^n}(u) = \delta_g(d\Phi^n _g^{n-2} du) - d\Phi^n _g^n u$	$L_{g, \Psi^n}^{\mathcal{D}}(u) = \mathcal{D}_{g, \Psi^n}^n u - \mathcal{D}_{g, \Psi^n}^n \Psi^n u$
and the spectral index	$\text{ind}_S(\Phi^n) = \text{ind}(L_{g, \Phi^n})$	$\text{ind}_S(\Psi^n) = \text{ind}(L_{g, \Psi^n}^{\mathcal{D}})$
The corresponding metric (density) is given by	$g_{\Phi^n} = \frac{1}{n} d\Phi^n _g^2 g$	$g_{\Psi^n} = \frac{1}{n} d\hat{\Psi}^n _g^2 g$ $\rho_{\Psi^n} = \sqrt{n} \partial_{\nu_g} \hat{\Psi}^n / d\hat{\Psi}^n _g$
which is extremal for the functional	$\bar{\lambda}_{\text{ind}_S(\Phi^n)}(M^n, g)$	$\bar{\sigma}_{\text{ind}_S(\Psi^n)}(\Sigma^n, g, \rho)$
with the value	$\bar{\lambda}_{\text{ind}_S(\Phi^n)}(M^n, g_{\Phi^n}) = (nE^n(\Phi^n))^{\frac{2}{n}}$	$\bar{\sigma}_{\text{ind}_S(\Psi^n)}(\Sigma^n, g_{\Psi^n}, \rho_{\Psi^n}) = (nE^n(\hat{\Psi}^n))^{\frac{2}{n}}$
Extremal metrics in the space of all metrics correspond to the same geometric object with an additional property of being conformal, i.e. to	Minimal immersions to \mathbb{S}^{m-1}	Free boundary minimal immersions to \mathbb{B}^m . Additionally, extremal densities are always constant.

Table 2. The theory of extremal metrics in dimension $n \geq 3$.

3.2.1. Extremal metrics in the conformal class: Laplacian

We provide a geometric characterization of extremal metrics in a fixed conformal class. This is well-known for surfaces [72, 25, 30]. For Laplacian eigenvalues in higher dimensions it has previously appeared in a slightly different form in [25, 65], for Steklov eigenvalues our results are new. The discussion below is summarized in Tables 1, 2.

We first recall some background information on n -harmonic maps.

Definition 1. *Let (N, g) , (Q, h) be Riemannian manifolds. Then the map $\Phi: (N, g) \rightarrow (Q, h)$, $\Phi \in W^{1,p}(N, Q)$ is called p -harmonic if it is a critical point of the p -energy functional*

$$E_g^p(\Phi) = \frac{1}{p} \int_N |d\Phi|_{g,h}^p dv_g.$$

If $p = 2$, then p -harmonic maps are referred to as simply harmonic.

In the present paper we only consider a case $n = \dim N = p$. In this case, the energy functional E_g^n is conformally invariant, i.e. for any $\Phi \in W^{1,n}(N, Q)$ one has $E_g^n(\Phi) = E_{e^{2\omega}g}^n(\Phi)$. Thus, the property of being n -harmonic only depends on the conformal class $[g]$ of the metric g .

Assume $N = M^n$ is an n -dimensional closed manifold and (Q, h) is a unit sphere $\mathbb{S}^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$ with the standard metric. The regularity theory for such n -harmonic maps asserts that they are always $C^{1,\alpha}$ for some $\alpha > 0$ [82, Corollary 12] and C^∞ if $n = 2$ or if $d\Phi \neq 0$. A straightforward computation shows that $\Phi: (M^n, g) \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ is n -harmonic iff it is a weak solution of

$$\delta_g(|d\Phi|_g^{n-2}d\Phi) = |d\Phi|_g^n\Phi, \quad (3.2.1)$$

where δ_g is the dual of d .

Assume further that Φ is non-degenerate, i.e. $d\Phi$ does not vanish on M^n . To each such Φ one associates a Schrödinger operator

$$L_{g,\Phi}(u) = \delta_g(|d\Phi|_g^{n-2}du) - |d\Phi|_g^n u,$$

which can be seen to be conformally covariant, $L_{e^{2\omega}g,\Phi} = e^{-n\omega}L_{g,\Phi}$. In particular, the index of $L_{g,\Phi}$, i.e. the number of negative eigenvalues, is independent of the choice of g in the conformal class.

Definition 2. *Let $\Phi: (M^n, \mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ be a non-degenerate n -harmonic map. The spectral index $\text{ind}_S(\Phi)$ is defined to be the index of the operator $L_{g,\Phi}$ for some (any) metric $g \in \mathcal{C}$.*

Note that by the equation of the n -harmonic map one has $L_{g,\Phi}(\Phi) = 0$, i.e. the components of Φ are in the kernel of $L_{g,\Phi}$. Since Φ is non-degenerate, we can define a smooth metric g_Φ by the formula $g_\Phi = \frac{1}{n}|d\Phi|_g^2g$. Then one has

$$L_{g_\Phi,\Phi} = n \frac{n-2}{2} (\Delta_{g_\Phi} - n),$$

i.e. the components of Φ are eigenfunctions of Δ_{g_Φ} with the eigenvalue $\lambda_k = n$. Furthermore, $\text{ind}_S(\Phi)$ is the smallest k such that $\lambda_k(M^n, g_\Phi) = n$ is satisfied.

We are now in position to state a geometric characterization of extremal metrics for Laplacian eigenvalues. We set

$$\bar{\lambda}_k(M^n, g) = \lambda_k(M^n, g) \text{Vol}(M^n, g)^{\frac{2}{n}}.$$

Traditionally a metric g on M^n is called $\bar{\lambda}_k$ -conformally extremal if it is a *critical point* of the functional $g \mapsto \bar{\lambda}_k(M^n, g)$ in the conformal class $[g]$, see Definition 13 for the precise formulation.

Theorem 3. *Let M^n be an n -dimensional closed manifold and \mathcal{C} be a conformal class on M^n . Suppose that the smooth metric $g \in \mathcal{C}$ is $\bar{\lambda}_k$ -conformally extremal. Then there exists a non-degenerate n -harmonic map $\Phi: (M, \mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ such that $g = \alpha g_\Phi$ for some $\alpha > 0$ and $\bar{\lambda}_k(M^n, g_\Phi) = n$. In particular, $\text{ind}_S(\Phi) \leq k$.*

Conversely, let $\Phi: (M, \mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ be a non-degenerate n -harmonic map. Then the metric g_Φ is $\bar{\lambda}_{\text{ind}_S(\Phi)}$ -conformally extremal.

The characterization of $\bar{\lambda}_k$ -conformally extremal metrics (in a different form) appeared in [25]. The connection to n -harmonic maps was first observed in [65].

3.2.2. Extremal metrics in the conformal class: Steklov

Let Σ^n be a manifold with non-empty boundary. An n -harmonic map $\hat{\Psi}: \Sigma^n \rightarrow \mathbb{B}^m$ is called *free boundary n -harmonic map* if it is proper (i.e. $\hat{\Psi}(x) \in \mathbb{S}^{m-1}$ iff $x \in \partial\Sigma^n$) and $\hat{\Psi}(\Sigma^n) \perp \mathbb{S}^{m-1}$. It is easy to see that such $\hat{\Psi}$ is a weak solution of the equation

$$\begin{cases} \delta_g(|d\hat{\Psi}|_g^{n-2}d\hat{\Psi}) = 0 & \text{in } \Sigma^n, \\ \partial_{\nu_g}\hat{\Psi} = |\partial_{\nu_g}\hat{\Psi}|\hat{\Psi} & \text{on } \partial\Sigma^n. \end{cases}$$

We reserve the notation Ψ for the restriction of $\hat{\Psi}$ to the boundary, $\Psi: \partial\Sigma^n \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$. The map Ψ completely determines $\hat{\Psi}$, as can be deduced from the convexity of the n -energy.

Assume that $\hat{\Psi}$ is a non-degenerate. To each such $\hat{\Psi}$ one associates a Dirichlet-to-Neumann operator $L_{g, \hat{\Psi}}^D: C^\infty(\partial\Sigma^n) \rightarrow C^\infty(\partial\Sigma^n)$ as follows. For each $u \in C^\infty(\partial\Sigma^n)$ one first extends it to $\hat{u} \in C^\infty(\Sigma^n)$ as

$$\begin{cases} \delta_g(|d\hat{\Psi}|_g^{n-2}d\hat{u}) = 0 & \text{in } \Sigma^n, \\ \hat{u} = u & \text{on } \partial\Sigma^n. \end{cases} \quad (3.2.2)$$

If $\mathcal{D}_{g, \Psi}$ denotes the corresponding Dirichlet-to-Neumann operator $u \mapsto \partial_{\nu_g}\hat{u}$, then one defines

$$L_{g, \hat{\Psi}}^D(u) = \mathcal{D}_{g, \Psi}u - |\mathcal{D}_{g, \Psi}\Psi|u = \partial_{\nu_g}\hat{u} - |\partial_{\nu_g}\hat{\Psi}|u.$$

The operator $L_{g,\hat{\Psi}}^{\mathcal{D}}$ is conformally covariant, $L_{e^{2\omega}g,\hat{\Psi}}^{\mathcal{D}} = e^{-\omega}L_{g,\hat{\Psi}}^{\mathcal{D}}$, therefore one can define the spectral index of $\hat{\Psi}$ as the index of $L_{g,\hat{\Psi}}^{\mathcal{D}}$.

Definition 4. Let $\hat{\Psi}: (\Sigma^n, \mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{B}^{m+1}$ be a non-degenerate free boundary n -harmonic map. The spectral index $\text{ind}_S(\hat{\Psi})$ is defined to be the index of the operator $L_{g,\hat{\Psi}}^{\mathcal{D}}$ for some (any) metric $g \in \mathcal{C}$.

By the equation of the free boundary n -harmonic map one has $L_{g,\hat{\Psi}}^{\mathcal{D}}(\Psi) = 0$. Since $\hat{\Psi}$ is non-degenerate we can define a smooth metric $g_{\hat{\Psi}} = \frac{1}{n}|d\hat{\Psi}|_g^2g$ on Σ^n . The extension \hat{u} of equation (3.2.2) is the harmonic extension in metric $g_{\hat{\Psi}}$. Furthermore, setting $\rho_{\hat{\Psi}} = |\partial_{\nu_{g_{\hat{\Psi}}}}\hat{\Psi}| = |\mathcal{D}_{g_{\hat{\Psi}},\Psi}\hat{\Psi}| = \frac{\sqrt{n}|\mathcal{D}_{g,\Psi}\hat{\Psi}|}{|d\hat{\Psi}|_g} \in C^\infty(\partial\Sigma^n)$, we show in Lemma 26 that $\rho_{\hat{\Psi}} > 0$. Thus,

$$L_{g_{\hat{\Psi}},\hat{\Psi}} = \mathcal{D}_{g_{\hat{\Psi}}} - \rho_{\hat{\Psi}}$$

is the classical Dirichlet-to-Neumann map with density. In particular, the components of $\hat{\Psi}$ are $\sigma_k(\Sigma^n, g_{\hat{\Psi}}, \rho_{\hat{\Psi}})$ eigenfunctions with eigenvalue $\sigma_k = 1$. The smallest k such that $\sigma_k(\Sigma^n, g_{\hat{\Psi}}, \rho_{\hat{\Psi}}) = 1$ is the spectral index $\text{ind}_S(\hat{\Psi})$.

We can now formulate the geometric characterization of extremal metrics. Recall the normalization

$$\bar{\sigma}_k(\Sigma^n, g, \rho) = \sigma_k(M, g, \rho)\text{Vol}(\Sigma^n, g)^{\frac{2-n}{n}}\|\rho\|_{L^1(\partial\Sigma^n, g)}.$$

The pair (g, ρ) is called $\bar{\sigma}$ -conformally extremal if it is a critical point of the functional $\bar{\sigma}_k$ in $[g] \times C_{>0}^\infty(\partial\Sigma^n)$.

Theorem 5. Let Σ^n be an n -dimensional compact manifold with boundary of dimension $n \geq 3$ and \mathcal{C} be a conformal class on Σ^n . Suppose that the pair $(g, \rho) \in \mathcal{C} \times C_{>0}^\infty(\partial\Sigma^n)$ is $\bar{\sigma}_k$ -conformally extremal. Then there exists a non-degenerate free boundary n -harmonic map $\hat{\Psi}: (\Sigma^n, \mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{B}^m$ such that $(g, \rho) = (\alpha g_{\hat{\Psi}}, \alpha^{-\frac{1}{2}}\rho_{\hat{\Psi}})$ for some $\alpha > 0$ and $\bar{\sigma}_k(\Sigma^n, g_{\hat{\Psi}}, \rho_{\hat{\Psi}}) = 1$. In particular, $\text{ind}_S(\hat{\Psi}) \leq k$.

Conversely, let $\hat{\Psi}: (\Sigma^n, \mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{B}^m$ be a non-degenerate free boundary n -harmonic map. Then the pair $(g_{\hat{\Psi}}, \rho_{\hat{\Psi}})$ is $\bar{\sigma}_{\text{ind}_S(\hat{\Psi})}$ -conformally extremal.

3.2.3. Remarks on the Steklov problem with density

The Steklov problem with density has not been previously mentioned in relation to sharp eigenvalue optimization problems. In this section we discuss how Theorem 5 fits with the existing results in the field and explain why it appears to be a natural setup for optimization of Steklov eigenvalues in the conformal class.

3.2.3.1. Upper bounds. Our first observation is that the normalized eigenvalues $\bar{\sigma}_k(\Sigma^n, g, \rho)$ are bounded independently of (g, ρ) , i.e. there exists a constant C depending on the conformal class $[g]$ such that

$$\bar{\sigma}_k(\Sigma^n, g, \rho) \leq Ck^{\frac{2}{n}}$$

For $\rho \equiv 1$ this is proved by Hassannezhad in [42, Theorem 4.1]. A slight modification of the proof yields the result for non-constant density ρ . It is sufficient to repeat the proof of [42, Theorem 4.1] with $\bar{\mu}(A) := \int_{\partial\Sigma^n \cap A} \rho d\bar{\mu}_g$ in the notations of [42].

In particular, it makes sense to maximize the eigenvalues $\bar{\sigma}_k(\Sigma^n, g, \rho)$ in $[g] \times C_{>0}^\infty(\partial\Sigma^n)$ and investigate the existence and regularity of maximal pairs (g, ρ) . An analogous problem for Laplacian and Steklov eigenvalues on surfaces has been completely solved in the recent years [74, 75, 76, 52, 73]. In all these papers, the connection to harmonic maps is explicitly used in the proof. It seems natural that in order to have nice existence results in higher dimensions there has to be a connection of the problem to n -harmonic maps. This connection only manifests itself if one allows a non-trivial density ρ to enter the picture. Thus, we believe that the Steklov problem with a density is a natural setup for optimization problems in a fixed conformal class.

3.2.3.2. Fraser-Schoen's result for surfaces. In the paper [30] Fraser and Schoen obtained the geometric characterizations of *maximal* metrics for Steklov and Laplacian eigenvalues on surfaces. However, their proofs can be adapted to the case of extremal metrics with only minor modifications. In fact, our analysis of extremal metrics in higher dimensions is heavily influenced by [30]. Here we compare Theorem 5 to the analogous result for surfaces [30, Proposition 2.8] and explain why the densities do not appear for $n = 2$.

The normalized eigenvalues $\sigma_k(\Sigma^2, g, \rho)$ possess two properties specific to $n = 2$. On one hand, since the Laplacian Δ_g is conformally covariant on surfaces, the harmonic extension is the same for all metrics in the conformal class \mathcal{C} . Therefore, the eigenvalue $\sigma_k(\Sigma^2, g, \rho)$ depends on $g \in \mathcal{C}$ only via the length of the normal vector. As a result, one has $\sigma_k(\Sigma^2, e^{2\omega}g, \rho) = \sigma_k(\Sigma^2, g, e^{-\omega}\rho)$. In particular, if $\hat{\rho} > 0$ is any positive extension of ρ to the interior, then $\sigma_k(\Sigma^2, g, \rho) = \sigma_k(\Sigma^2, \hat{\rho}^2g, 1)$, i.e. the eigenvalues with density are a special case of classical Steklov eigenvalues. On the other hand, the definition of the normalized eigenvalue does not include the volume of Σ^2 . As a result, one has that $\bar{\sigma}_k(\Sigma^2, g, \rho) = \bar{\sigma}_k(\Sigma^2, \hat{\rho}^2g, 1)$, i.e. the problem of optimizing normalized Steklov eigenvalues is the same whether one includes density or not.

Furthermore, the conformal invariance of the problem makes it impossible to identify extremal pairs as the ones induced by free boundary harmonic maps. Indeed, if (g, ρ) is extremal, then $(e^{2\omega}g, e^{-\omega}\rho)$ is also extremal for all $\omega \in C^\infty(\Sigma^2)$. As a result, Theorem 5 takes the following form, which is a reformulation of [30, Proposition 2.8] up to the conformal invariance described above.

Theorem 6. *Let Σ^2 be a compact surface with boundary and \mathcal{C} be a conformal class on Σ^2 . Suppose that the pair $(g, \rho) \in \mathcal{C} \times C_{>0}^\infty(\partial\Sigma^n)$ is $\bar{\sigma}_k$ -conformally extremal. Then there exists a non-degenerate free boundary harmonic map $\hat{\Psi}: (\Sigma^2, \mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{B}^m$ such that $(g, \rho) = (e^{2\omega}g_{\hat{\Psi}}, e^{-\omega}\rho_{\hat{\Psi}})$ for some $\omega \in C^\infty(\Sigma^2)$ and $\bar{\sigma}_k(\Sigma^2, g_{\hat{\Psi}}, \rho_{\hat{\Psi}}) = 1$. In particular, $\text{ind}_S(\hat{\Psi}) \leq k$.*

Conversely, let $\hat{\Psi}: (\Sigma^2, \mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{B}^m$ be a non-degenerate free boundary harmonic map. Then the pair $(e^{2\omega}g_{\hat{\Psi}}, e^{-\omega}\rho_{\hat{\Psi}})$ is $\bar{\sigma}_{\text{ind}_S(\hat{\Psi})}$ -conformally extremal for any $\omega \in C^\infty(\Sigma^2)$.

3.2.3.3. Laplacian problem with density. Having seen that introducing density into a classical Steklov problem leads to a more geometrically natural optimization problem, one could ask whether the same happens for the Laplacian. Let (M^n, g) be a closed Riemannian manifold and $\rho \in C^\infty(M^n)$. One defines the eigenvalues $\lambda_k(M^n, g, \rho)$ to be the numbers such that the following equation has non-trivial solutions,

$$\Delta_g u = \lambda \rho u.$$

In fact, recalling the definition of measure eigenvalues (3.1.2) one sees that $\lambda_k(M^n, g, \rho) = \lambda_k(M^n, g, \rho dv_g)$. In particular, by (3.1.3) the natural normalization is

$$\bar{\lambda}_k(M^n, g, \rho) = \lambda_k(M^n, g, \rho) \text{Vol}(M^n, g)^{\frac{2-n}{n}} \|\rho\|_{L^1(M^n, g)}$$

and one can study $\bar{\lambda}_k$ -conformally extremal pairs (g, ρ) . However, it turns out that the density ρ does not bring anything new to the problem. We prove in Theorem 16 that for any conformally extremal pair (g, ρ) one has that ρ is a constant function. In particular g is $\bar{\lambda}_k$ -conformally maximal iff $(g, 1)$ is $\bar{\lambda}_k$ -conformally maximal. This fact gives further support to considering Steklov problem with a density in higher dimensions.

3.2.3.4. Other normalizations. While the normalization (3.1.1) is natural from measure theory point of view, one could question whether other normalizations could lead to interesting optimization problems. Recall that up until now the Steklov eigenvalues in higher dimensions were considered with normalization either by $\text{Vol}(\Sigma^n, g)^{\frac{1}{n}}$ or $\text{Vol}(\partial\Sigma^n, g)^{\frac{1}{n-1}}$, see e.g [7, 13, 32, 42]. However, we show in Theorem 19 that for any normalization different from (3.1.1) the corresponding optimization problem is not well-behaved. To be precise, we show the following.

Proposition 7. *For any $\alpha \neq 1$ the functionals*

$$F_{k,\alpha}(\Sigma^n, g) = \sigma_k(\Sigma^n, g) \text{Vol}(\partial\Sigma^n, g)^\alpha \text{Vol}(\Sigma^n, g)^{\frac{1+\alpha(1-n)}{n}}$$

do not have any smooth critical metrics g .

3.2.4. Extremal metrics in the space of all metrics

Finally, we give the geometric characterization for critical points of eigenvalues functionals in the space of all metrics. In comparison to the fixed conformal class, the common feature for both problems is that the corresponding object is additionally required to be *conformal*.

We start with the Laplacian eigenvalues on a closed manifold M^n . Let $\Phi: (M^n, [g]) \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ be a non-degenerate n -harmonic map. The map Φ is called conformal if the pullback

of the round metric on \mathbb{S}^m is conformal to g , i.e. $\Phi^*g_{\mathbb{S}^{m-1}} \in [g]$. In particular, a direct computation shows $\Phi^*g_{\mathbb{S}^{m-1}} = g_\Phi := \frac{1}{n}|d\Phi|_g^2g$. Moreover, by [82, Corollary 4] a non-degenerate conformal n -harmonic map is conformal iff its image is a minimal submanifold. Combining the last two observations, we observe that $\Phi: (M, g_\Phi) \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ is an isometric minimal immersion.

We recall that the smooth metric g on M^n is called $\bar{\lambda}_k$ -extremal if it is a critical point of the functional $g \mapsto \bar{\lambda}_k(M^n, g)$ in the space \mathcal{R} of all metrics on M^n . Evidently, any $\bar{\lambda}_k$ -extremal metric is also $\bar{\lambda}_k$ -conformally extremal, so there exists the corresponding n -harmonic map. The following theorem states that for $\bar{\lambda}_k$ -extremal metric the n -harmonic map can be chosen to be conformal.

Theorem 8. *Let M^n be an n -dimensional closed manifold. Suppose that the smooth metric g is $\bar{\lambda}_k$ -extremal. Then there exists a minimal immersion $\Phi: M \rightarrow \mathbb{S}^m$ such that $g = \alpha\Phi^*g_{\mathbb{S}^{m-1}}$ for some $\alpha > 0$ and $\bar{\lambda}_k(M^n, \Phi^*g_{\mathbb{S}^{m-1}}) = n$. In particular, $\text{ind}_S(\Phi) \leq k$.*

*Conversely, let $\Phi: M \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ be a minimal immersion. Then the metric $\Phi^*g_{\mathbb{S}^{m-1}}$ is $\bar{\lambda}_{\text{ind}_S(\Phi)}$ -extremal.*

Remark 9. *The same exact theorem is proved by El Soufi, Ilias in [25]. However, our definition of extremal metric is slightly different, so we include the proof for completeness.*

Let Σ^n be a compact manifold with non-empty boundary. A pair (g, ρ) is called $\bar{\sigma}_k$ -extremal if it is a critical point of $\bar{\sigma}_k$ in $\mathcal{R} \times C_{>0}^\infty(\Sigma^n)$. Of course, such a pair is also $\bar{\sigma}_k$ -conformally extremal and there exists a corresponding free boundary n -harmonic map $\hat{\Psi}: (\Sigma^n, g) \rightarrow \mathbb{B}^m$. The following theorem states that for $\bar{\sigma}_k$ -extremal pairs the map $\hat{\Psi}$ can be chosen to be conformal. One consequence is that any extremal density ρ is constant. Indeed, since $g_{\hat{\Psi}} = \hat{\Psi}^*g_{\mathbb{B}^m}$ one has $\rho_{\hat{\Psi}} = |\partial_{\nu_{g_{\hat{\Psi}}}}\hat{\Psi}| = |\nu_{g_{\hat{\Psi}}}| \equiv 1$. In particular, the introduction of density does not lead to non-trivial extremal densities.

Theorem 10. *Let Σ^n be an n -dimensional compact manifold with boundary, $n \geq 3$. Suppose that the pair $(g, \rho) \in \mathcal{R} \times C_{>0}^\infty(\partial\Sigma^n)$ is $\bar{\sigma}_k$ -extremal. Then there exists a free boundary minimal immersion $\hat{\Psi}: \Sigma^n \rightarrow \mathbb{B}^m$ such that $(g, \rho) = (\alpha\hat{\Psi}^*g_{\mathbb{B}^m}, \alpha^{-\frac{1}{2}})$ for some $\alpha > 0$ and $\bar{\sigma}_k(\hat{\Psi}^*g_{\mathbb{B}^m}, 1) = 1$. In particular, $\text{ind}_S(\hat{\Psi}) \leq k$.*

*Conversely, let $\hat{\Psi}: \Sigma^n \rightarrow \mathbb{B}^m$ be a free boundary minimal immersion. Then the pair $(\hat{\Psi}^*g_{\mathbb{B}^m}, 1)$ is $\bar{\sigma}_{\text{ind}_S(\hat{\Psi})}$ -extremal.*

3.2.5. Free boundary harmonic annuli

Let \mathcal{C}_T be the conformal class on the annulus containing the flat metric on $\mathbb{A}_T = [0, T] \times \mathbb{S}^1$. By the uniformization theorem any metric on an annulus is in \mathcal{C}_T for some $T > 0$. In Section 3.5 we construct explicit examples of rotationally symmetric free boundary harmonic maps $\hat{\Psi}_T: \mathbb{A}_T \rightarrow \mathbb{B}^3$ of spectral index 1. Geometrically, their images are pieces of stretched catenoids, see Figure 1. In particular, they correspond to $\bar{\sigma}_1$ -conformally extremal pairs. Our

main motivation is to demonstrate that there are free boundary n -harmonic maps $\hat{\Psi}$ such that the corresponding density $\rho_{\hat{\Psi}}$ is not constant, i.e. the introduction of densities is indeed necessary for the geometric characterization. To that end we show that for a particular range of T the densities $\rho_{\hat{\Psi}_T}$ are locally constant, but not identically constant, i.e. they take different values on different boundary components.

Our analysis is reminiscent of that in [29], where the authors study the first Steklov eigenvalue of rotationally symmetric metrics on \mathbb{A}_T — see also [28, 26] for higher eigenvalues. Moreover, Fraser and Schoen proved in [31] that the only $\bar{\sigma}_1$ -extremal metric on the annulus is the metric on the critical catenoid. The corresponding value of T is $T_1 = 2t_1$, where $t_1 \approx 1.2$ is the unique solution to $t = \coth t$.

Theorem 11. *For any $T \geq T_1$ there exists a rotationally symmetric free boundary harmonic map $\hat{\Psi}_T: \mathbb{A}_T \rightarrow \mathbb{B}^3$ of spectral index 1. Furthermore, the corresponding $\bar{\sigma}_1$ -conformally extremal pair $(g_{\hat{\Psi}_T}, \rho_{\hat{\Psi}_T})$ possesses the following properties.*

- (1) $\hat{\Psi}_{T_1}$ is the immersion of the minimal catenoid.
- (2) The pair $(g_{\hat{\Psi}_T}, \rho_{\hat{\Psi}_T})$ is rotationally symmetric, in particular, $\rho_{\hat{\Psi}_T}$ is constant on each boundary component. There exists T_2 such that for $T \geq T_2$ one has $\rho_{\hat{\Psi}_T}(0) \neq \rho_{\hat{\Psi}_T}(T)$.
- (3) One has

$$\bar{\sigma}_1(\mathbb{A}_T, g_{\hat{\Psi}_T}, \rho_{\hat{\Psi}_T}) = 2E(\hat{\Psi}_T) > 2\pi \quad (3.2.3)$$

and

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \bar{\sigma}_1(\mathbb{A}_T, g_{\hat{\Psi}_T}, \rho_{\hat{\Psi}_T}) = 2\pi. \quad (3.2.4)$$

In fact, we conjecture that the $(g_{\hat{\Psi}_T}, \rho_{\hat{\Psi}_T})$ is a $\bar{\sigma}_1$ -conformally maximal pair. Keeping in mind the conformal invariance of Section 3.2.3.2 this can be formulated in the following way.

Conjecture. *For any $T \geq T_1$, let \mathcal{C}_T be the conformal class containing the flat metric on $[0, T] \times \mathbb{S}^1$. Then*

$$\sup_{g \in \mathcal{C}_T} \bar{\sigma}_1(\mathbb{A}, g) = 2E(\hat{\Psi}_T),$$

where $\hat{\Psi}_T$ is the free boundary harmonic map obtained in Theorem 11.

In particular, for these conformal classes $\bar{\sigma}_1$ -conformally maximal pairs can be chosen to be rotationally symmetric.

Properties (1), (3) of Theorem 11 are consistent with this conjecture. Indeed, it is proven in [67] that for any conformal class \mathcal{C} on the annulus \mathbb{A} one has $\sup_{g \in \mathcal{C}} \bar{\sigma}_1(\mathbb{A}, g) > 2\pi$, which agrees with (3.2.3). At the same time, Medvedev in [69] studied the behaviour of maximizers under the conformal degeneration. In particular, he established that the relation (3.2.4) holds for $\bar{\sigma}_1$ -conformally maximal metrics.

Surprisingly enough, the considerations used to prove Theorem 11 imply that for $T < T_1$ there are no rotationally symmetric free boundary harmonic maps $\hat{\Psi}_T: \mathbb{A}_T \rightarrow \mathbb{B}^3$ of spectral index 1. Since by [31, 50] the multiplicity of σ_1 on any annulus can not exceed 3, either for

$T < T_1$ the $\bar{\sigma}_1$ -conformally maximal metric is not rotationally symmetric or the corresponding map has the image in \mathbb{B}^2 . The latter situation seems unlikely and we expect that for $T < T_1$ the $\bar{\sigma}_1$ -conformally maximal pairs in \mathcal{C}_T are no longer rotationally symmetric. We can not prove this in full generality, but the following holds.

Proposition 12. *There exists $\tilde{T} < T_1$ such that for all $T \leq \tilde{T}$ the conformal class \mathcal{C}_T does not have rotationally symmetric $\bar{\sigma}_1$ -conformally maximal pairs.*

In fact, this behaviour for small T is supported by the analysis of conformal degeneracies in [69] and the example in [67]. Both papers suggest that as $T \rightarrow 0$ the limit of corresponding free boundary harmonic maps is a single boundary bubble, which is impossible for rotationally symmetric maps.

3.3. Algebraic extremality conditions

In this section we obtain algebraic conditions on extremal metrics. They are used later in Section 3.4 to complete the geometric characterization of extremal metrics.

Definition 13. *We say that a metric g and density ρ is a F -extremal pair for some functional F if for all one-parameter smooth family of metrics $g(t)$ and densities $\rho(t)$ with $g(0) = g, \rho(0) = \rho$, we have either*

$$F(g(t), \rho(t)) \leq F(g, \rho) + o(t) \quad \text{or} \quad F(g(t), \rho(t)) \geq F(g, \rho) + o(t)$$

as $t \rightarrow 0$.

A metric is F -conformally extremal if it is F -extremal in the conformal class of g .

In the following the functional F will be a (Laplace or Steklov) eigenvalue with the appropriate normalization. This definition was introduced by Nadirashvili in [72] in the context of normalized Laplace eigenvalues.

To formulate the next lemma, we fix some notations. We let $\Lambda(g, \rho)$ be either a Laplace or Steklov non-zero eigenvalue and let $d\mu$ to be dv_g if Λ is a Laplace eigenvalue; or the boundary volume element dA_g of ∂M if Λ is a Steklov eigenvalue. Then for a convex cone A of metrics and densities and for $(g_0, \rho_0) \in A \setminus \{0\}$, let

$$TA_{(g_0, \rho_0)} = \left\{ (h, h|_{\text{supp } d\mu}, \eta) \in S^2(M) \times S^2(\text{supp } d\mu) \times L^2(\text{supp } d\mu) \mid \exists (g(t), \rho(t)) \subset A, \frac{dg}{dt}(0) = h, \frac{d\rho}{dt}(0) = \eta \right\}$$

with induced inner product from $L^2(S^2(M), dv_{g_0}) \times L^2(S^2(\text{supp } d\mu), d\mu) \times L^2(M, \rho d\mu)$. Finally we write \mathcal{H} for the Hilbert space obtained by taking the L^2 completion of $TA_{(g_0, \rho_0)}$. Note that if $d\mu = dv_g$ then $h|_{\text{supp } d\mu}$ is redundant with h in the definition of TA . This is not the case if $d\mu = dA_g$ and in particular in this case $\mathcal{H} = L^2(S^2(M)) \times L^2(S^2(\partial M)) \times L^2(\partial M)$. We use this formulation to treat both cases simultaneously.

With this notation, we prove a general lemma characterizing critical points, analog to the Lagrange multipliers method but modified to take into account that our functionals of interest are only Lipschitz.

Lemma 14. *Let M a compact manifold with possibly a boundary ∂M . Let F be a functional on the space of metrics g on M and density functions ρ on $\text{supp } d\mu$ given by*

$$F(g, \rho) = \Lambda(g, \rho)N(\text{Vol}(M, dv_g), \text{Vol}(M, \rho d\mu))$$

where the normalization N is a smooth function making F invariant under scaling of the metric and density.

Fix a convex cone A of admissible metrics and densities, and suppose that for any smooth families $g(t), \rho(t)$ in A , the derivative of Λ , when it exists, can be expressed as

$$\left. \frac{d\Lambda}{dt} \right|_{t=t_0} = \langle Q(u, du), (\dot{g}, \dot{g}|_{\text{supp } d\mu}, \dot{\rho}) \rangle_{TA_{(g(t_0), \rho(t_0))}}$$

for some u in the $\Lambda(t_0)$ -eigenspace and where Q is a TA -valued quadratic form.

Then if (g_0, ρ_0) are extremal for F restricted to A , there exists a family of Λ -eigenfunctions u_1, \dots, u_m such that,

$$\sum_{j=1}^m -Q(u_j, du_j) = \nabla N$$

where $\nabla N \in TA_{(g_0, \rho_0)}$ is given by

$$\frac{dN}{dt} = \langle \nabla N, (\dot{g}, \dot{g}|_{\text{supp } d\mu}, \dot{\rho}) \rangle_{TA}$$

PROOF. The proof is in two parts and follows Fraser-Schoen [30] and El Soufi-Ilias [25] arguments.

First part: we show the existence, for a given constant- N variation, of a null-space for Q . Suppose that v is in \mathcal{H} and satisfies

$$\langle \nabla N, v \rangle_{\mathcal{H}} = 0.$$

Then there exists a non-zero u in the $\Lambda(g_0, \rho_0)$ -eigenspace such that

$$\langle Q(u), v \rangle_{\mathcal{H}} = 0.$$

Proof. Let $(\tilde{g}_j(t), \tilde{\rho}_j(t))$ be a sequence of smooth families of smooth metrics and densities in A , such that:

- (1) $(\tilde{g}_j(0), \tilde{\rho}_j(0)) = (g_0, \rho_0)$ for all j ,
- (2) $\langle \nabla N, (\tilde{g}_j, \tilde{g}_j|_{\text{supp } d\mu}, \tilde{\rho}_j) \rangle = 0$ for all j ,
- (3) $(\tilde{g}_j, \tilde{g}_j|_{\text{supp } d\mu}, \tilde{\rho}_j) \rightarrow v$ in the corresponding L^2 space.

Such families exists by definition of TA and density of C^∞ in L^2 . By normalizing $g_j(t) = \frac{\tilde{g}_j(t)}{r(N(\tilde{g}_j(t), \rho_j(t)))}$ for some appropriate function r , we have that N is constant with t while keeping the same first derivative $\dot{g}_j(0) = \dot{\tilde{g}}_j(0)$.

Since (g_0, ρ_0) is extremal for F restricted to A and N is constant with t , we can assume without loss of generality that

$$\Lambda(g_j(t), \rho_j(t)) \leq \Lambda(g, \rho) + o(t)$$

as $t \rightarrow 0$. In particular, taking the limit from the left yields

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\Lambda(g_j(t), \rho_j(t)) - \Lambda(g_0, \rho_0)}{t} \geq 0$$

so there exists a sequence of $\epsilon_i > 0$ decreasing to 0, and δ_i with $\lim \delta_i \geq 0$ such that

$$\begin{aligned} \delta_i &\leq \frac{\Lambda(g_j(-\epsilon_i), \rho_j(-\epsilon_i)) - \Lambda(g_0, \rho_0)}{\epsilon_i} = \frac{1}{\epsilon_i} \int_{-\epsilon_i}^0 \dot{\Lambda}(g_j(t), \rho_j(t)) dt \\ &\leq \text{ess sup}_{t \in [-\epsilon_i, 0]} \dot{\Lambda}(g_j(t), \rho_j(t)) \end{aligned}$$

Hence we can find a sequence of $t_i < 0$, increasing to 0 such that $\dot{\Lambda}(g_j(t_i), \rho_j(t_i))$ exists and $\exists u_i^{(j)}$ in $\Lambda(g_j(t_i), \rho_j(t_i))$ -eigenspace with $\|u_i^{(j)}\|_{L^2(M, \rho_j(t_i) d\mu(t_i))} = 1$ and

$$\langle Q(u_i^{(j)}), (\dot{g}_j(0), \dot{g}_j(0), \dot{\rho}_j(0)) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \delta_i.$$

After taking a subsequence if necessary, $u_i^{(j)} \rightarrow u_-^{(j)}$ in $C^2(M)$, with $u_-^{(j)}$ in the $\Lambda(g_0, \rho_0)$ -eigenspace, $\|u_-^{(j)}\|_{L^2(M, \rho_0 d\mu)} = 1$ and

$$\langle Q(u_-^{(j)}), (\dot{g}_j(0), \dot{g}_j(0), \dot{\rho}_j(0)) \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0.$$

Again, taking a subsequence if necessary, we have $u_-^{(j)} \rightarrow u_-$ in $C^2(M)$ with u_- in the $\Lambda(g_0, \rho_0)$ -eigenspace, $\|u_-\|_{L^2(M, \rho_0 d\mu)} = 1$ and

$$\langle Q(u_-), v \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0.$$

The same process starting with the limit from the right gives u_+ in $\Lambda(g_0, \rho_0)$ -eigenspace with $\|u_+\|_{L^2(M, \rho_0 d\mu_0)} = 1$ and $\langle Q(u_+), v \rangle \leq 0$. Note that since Q is a quadratic form, u_+ cannot be a constant multiple of u_- , whence taking a linear combination of u_+ and u_- gives the desired u .

Second part: we now use the previous result to finish the proof. Let K be the convex hull of

$$\{-Q(u, du) \mid u \text{ in the } \Lambda(g_0, \rho_0)\text{-eigenspace}\}$$

in \mathcal{H} . We claim that $\nabla N \in K$.

Indeed if not, since K is a finite dimensional convex cone, we can use Hahn-Banach theorem to separate ∇N and K : there exists $\tilde{v} \in \mathcal{H}$ such that

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle -Q(u, du), \tilde{v} \rangle_{\mathcal{H}} && \text{for all } u \text{ in } \Lambda(g_0, \rho_0)\text{-eigenspace,} \\ 0 &> \langle \nabla N, \tilde{v} \rangle_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Let $C = (g_0, g_0|_{\text{supp } d\mu_0}, 0) \in \mathcal{H}$ and note that $\langle Q(u, du), C \rangle < 0$ and $\langle \nabla N, C \rangle > 0$. Indeed, the variation C corresponds to a scaling of the metric $g(t) = e^t g_0$ so by the scaling properties of the eigenvalue, $\frac{d\Lambda}{dt} = \langle Q(u, du), C \rangle < 0$, and N must increase, i.e. $\frac{dN}{dt} = \langle \nabla N, C \rangle > 0$.

Taking

$$v = \tilde{v} - \frac{\langle \tilde{v}, \nabla N \rangle}{\langle \nabla N, C \rangle} C,$$

we have that the conditions from the first part are satisfied for v . Thus there exists a non-zero u in the $\Lambda(g_0, \rho_0)$ -eigenspace with

$$\begin{aligned} 0 &= \langle Q(u, du), v \rangle \\ &= \underbrace{\langle Q(u, du), \tilde{v} \rangle}_{\leq 0} - \underbrace{\langle \tilde{v}, \nabla N \rangle}_{< 0} \underbrace{\frac{\langle Q(u, du), C \rangle}{\langle \nabla N, C \rangle}}_{< 0} < 0. \end{aligned}$$

This contradiction proves the claim and using that K is finite dimensional, we obtain the desired result. □

3.3.1. Extremality conditions for a fixed conformal class

Theorem 15. *Let M^n be an n -dimensional closed manifold, $n \geq 3$ and let \mathcal{C} be a conformal class of metrics on M^n . Suppose that the metric $g \in \mathcal{C}$ is conformally extremal for the functional*

$$\bar{\lambda}_k(M^n, g) = \lambda_k(M^n, g) \text{Vol}(M^n, g)^{\frac{2}{n}}.$$

Then there exists a collection u_1, \dots, u_m of $\lambda_k(M^n, g)$ -eigenfunctions such that

- 1) $\sum_{i=1}^m u_i^2 = \frac{1}{\lambda_k}$
- 2) $\sum_{i=1}^m |du_i|_g^2 = 1$

Conversely, if there exists a collection of $\lambda_k(M^n, g)$ -eigenfunctions satisfying 1) – 2) and additionally $\lambda_k(M^n, g) > \lambda_{k-1}(M^n, g)$ or $\lambda_k(M^n, g) < \lambda_{k+1}(M^n, g)$, then g is extremal for the functional $\bar{\lambda}_k(M^n, g)$ in \mathcal{C} .

PROOF. For any smooth family $g(t) = e^{f(t)}g$ with $f(0) = 0$, we write $\lambda_k(M, g(t)) = \lambda_k(t)$ and $E_k(g(t))$ for the k -th Laplace eigenspace corresponding the metric $g(t)$. It is known that

$\lambda_k(t)$ is Lipschitz. Furthermore for almost all t , when $\dot{\lambda}_k(t)$ exists we have

$$\dot{\lambda}_k(t) = \int_M \left(\frac{n-2}{2} |\nabla u|^2 - \frac{n\lambda_k}{2} u^2 \right) f dv_g$$

where $u \in E_k(g(t))$. Indeed, for almost all t_0 , we have a neighborhood around t_0 on which the multiplicity of $\lambda_k(t)$ is constant and there exists l with $\lambda_l(t) = \lambda_k(t)$, $\lambda_{l-1}(t) < \lambda_l(t)$. Fix such a t_0 and define on this neighborhood $\mathcal{E}(t) = \cup_{j=0}^{l-1} E_j(g(t))$ and the orthogonal projection on $\mathcal{E}(t)$, $P_t : L^2(M) \rightarrow \mathcal{E}(t)$. Take $u_0 \in E_k(g(t_0))$ with $\|u_0\|_{L^2(M, g(t_0))} = 1$ and let $u_t = u_0 - P_t(u_0)$. Then the functional

$$F(t) = \int_M |\nabla u_t|^2 dv_{g(t)} - \lambda_l(t) \int_M u_t^2 dv_{g(t)}$$

satisfies $F(t) \geq 0$ and the neighborhood of t_0 and $F(t_0) = 0$ so $\dot{F}(t_0) = 0$. Computing $\dot{F}(t_0)$ gives the desired formula for $\dot{\lambda}_k(t_0)$.

We then apply lemma 14 to the functional $\bar{\lambda}_k$ restricted to the conformal classes $[g]$ and with constant density $\rho = 1$ on M . Let $Q(u, du) = (q_1, q_2, q_3)$ and note that, in lemma 14 when $d\mu = dv_g$, the first two coordinates in TA are equal. Whence to have Q be TA -valued, we must have $q_1 = q_2$, leading to

$$q_1 = q_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{n-2}{2} |\nabla u|^2 - \frac{n\lambda_k}{2} u^2 \right) \frac{g}{n}, \quad q_3 = 0.$$

Similarly, $\nabla N = (\frac{1}{2n} \text{Vol}(M, g)^{\frac{2-n}{n}} g, \frac{1}{2n} \text{Vol}(M, g)^{\frac{2-n}{n}} g, 0)$. Hence we obtain the existence of $u_1, \dots, u_m \in E_k(g)$ such that, after scaling the u_j 's,

$$1 = \sum_{j=1}^m \frac{2-n}{2} |\nabla u_j|^2 + \frac{n\lambda_k(g)}{2} u_j^2. \quad (3.3.1)$$

This implies that $\sum_{j=1}^m \lambda_k(g) u_j^2 = 1$ on M by considering the function $F = \sum_{j=1}^m u_j^2 - \frac{1}{\lambda_k}$ and noticing that $(n-2)\Delta F = -4\lambda_k F$ hence $F = 0$. The second equality of the theorem then follows directly.

We now prove the converse. Suppose $\lambda_k > \lambda_{k-1}$ (the case $\lambda_k < \lambda_{k+1}$ is similar) and there exists eigenfunctions $u_1, \dots, u_m \in E_k(g)$ satisfying the conditions 1)–2). Let $g(t) = e^{f(t)} g$ be a smooth family of metrics on M . We can assume without loss of generality that $g(t)$ keeps the normalisation $\text{Vol}(M, g)^{\frac{2}{n}}$ constant, thus $\int_M f dv_g = 0$. Write $E = \text{Span}\{u_1, \dots, u_m\}$ then

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \langle Q(u_j, du_j), (\dot{f}g, \dot{f}g, 0) \rangle &= \int_M \left(\frac{n-2}{2} \sum_{j=1}^m |\nabla u_j|^2 - \frac{n\lambda_k}{2} \sum_{j=1}^m u_j^2 \right) \dot{f} dv_g \\ &= \int_M \left(\frac{n-2}{2} - \frac{n}{2} \right) \dot{f} dv_g = 0, \end{aligned}$$

so there exists $u_{\pm} \in E$ with $\pm Q_{\dot{f}}(u_{\pm}) \leq 0$.

Since $\lambda_k(g) > \lambda_{k-1}(g)$, $Q_f(u_+) \leq 0$ implies that $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\lambda_k(g(t)) - \lambda_k(g)}{t} \leq 0$, while the inequality $Q_f(u_-) \leq 0$ gives $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\lambda_k(g(t)) - \lambda_k(g)}{t} \geq 0$ hence $\lambda_k(g(t)) \leq \lambda_k(g) + o(t)$. The family $g(t)$ was arbitrary so we conclude that g is extremal. \square

Theorem 16. *Let M^n be an n -dimensional closed manifold, $n \geq 3$ and let \mathcal{C} be a conformal class of metrics on M^n . Suppose that the pair $(g, \rho) \in \mathcal{C} \times C^\infty(M)$ is extremal for the functional*

$$\bar{\lambda}_k(M^n, g, \rho) = \lambda_k(M^n, g, \rho) \text{Vol}(M^n, g)^{\frac{2-n}{n}} \left(\int_{M^n} \rho \, dv_g \right)$$

in $\mathcal{C} \times C^\infty(M^n)$. Then ρ is a constant function $\rho \equiv \rho_0$ and there exists a collection u_1, \dots, u_m of $\lambda_k(M^n, g, \rho)$ -eigenfunctions such that

$$\begin{aligned} 1) \sum_{i=1}^m u_i^2 &= \frac{1}{\lambda_k \int_M \rho \, dv_g} \\ 2) \sum_{i=1}^m |du_i|_g^2 &= \frac{1}{\text{Vol}(M, g)} \end{aligned}$$

Conversely, if $\rho \equiv \rho_0$ is a constant function and there exists a collection of $\lambda_k(M^n, g, \rho)$ -eigenfunctions satisfying the equalities 1)–2) and additionally $\lambda_k(M^n, g, \rho) > \lambda_{k-1}(M^n, g, \rho)$ or $\lambda_k(M^n, g, \rho) < \lambda_{k+1}(M^n, g, \rho)$, then (g, ρ) is extremal for the functional $\bar{\lambda}_k(M^n, g, \rho)$ in $\mathcal{C} \times C^\infty(M^n)$.

PROOF. The argument is the same than in the previous theorem, with slight modification to account for the density ρ . For $g(t) = e^{f(t)}g$, the derivative of $\lambda_k(g(t))$ (when it exists) is now given by

$$\dot{\lambda}_k(t) = \int_M \left(\frac{n-2}{2} |\nabla u|^2 - \frac{n}{2} \lambda_k(t) u^2 \rho \right) \dot{f} - \lambda_k(t) u^2 \dot{\rho} \, dv_{g(t)}$$

where $u \in E_k(g(t))$ with $\|u\|_{L^2(M, \rho \, dv_{g(t)})} = \int_M u^2 \rho \, dv_{g(t)} = 1$.

Write $Q(u, du) = (q_1, q_2, q_3)$ and $\nabla N = (N_1, N_2, N_3)$ and recall that to have them TA -valued when $d\mu = dv_g$, we must have $q_1 = q_2$ and $N_1 = N_2$. Hence

$$\begin{aligned} q_1 = q_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{n-2}{2} |\nabla u|^2 - \frac{n}{2} \lambda_k u^2 \rho \right) \frac{g}{n}, \quad q_3 = -\lambda_k u^2, \\ N_1 = N_2 &= \frac{1}{2n} \text{Vol}(M, g)^{\frac{2-n}{n}} \int_M \rho \, dv_g \left(\frac{2-n}{2} \frac{1}{\text{Vol}(M, dv_g)} + \frac{\rho}{\int_M \rho \, dv_g} \right) g, \\ N_3 &= \text{Vol}(M, g)^{\frac{2-n}{n}}, \end{aligned}$$

and applying lemma 14, we obtain the existence of $\lambda_k(g)$ -eigenfunctions u_1, \dots, u_m such that

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m \left(\frac{2-n}{2} |\nabla u_j|^2 + \frac{n}{2} \lambda_k u_j^2 \rho \right) = \frac{2-n}{2} \frac{1}{\text{Vol}(M, g)} + \frac{n}{2} \frac{1}{\int_M \rho \, dv_g} \rho \\ \sum_{j=1}^m \lambda_k u_j^2 = \frac{1}{\int_M \rho \, dv_g}. \end{cases}$$

Using the second equation in the first one gives $\sum |\nabla u_j|^2 = \frac{1}{\text{Vol}(M, g)}$. Finally, since $\sum u_j^2$ is constant on M ,

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta \left(\sum_{j=1}^m u_j^2 \right) = 2 \sum_{j=1}^m u_j \Delta u_j + 2 \sum_{j=1}^m |\nabla u_j|^2 \\ &= -2 \sum_{j=1}^m \rho u_j^2 + \frac{2}{\text{Vol}(M, g)} = -\frac{2\rho}{\lambda_k(g) \text{Vol}(M, \rho)} + \frac{2}{\text{Vol}(M, g)} \end{aligned}$$

so ρ is constant with $\rho = \frac{\lambda_k(g) \text{Vol}(M, \rho)}{\text{Vol}(M, g)}$ on M .

The proof of the converse is the same than for the no-density case and is thus omitted. \square

Remark 17. *The theorem above essentially states that introducing density does not add any new critical points. In particular, it suggests that the optimal isoperimetric inequality should be the same regardless of the presence of density function. In fact when considering conformally maximal metrics we have the following corollary.*

Corollary 18. *The metric g is $\bar{\lambda}_k$ -conformally maximal if and only if $(g, 1)$ is $\bar{\lambda}_k$ -conformally maximal.*

PROOF. That $(g, 1)$ being $\bar{\lambda}_k$ -conformally maximal implies that g is $\bar{\lambda}_k$ -conformally maximal is clear. For the other direction, if g is $\bar{\lambda}_k$ -conformally maximal then there exists u_1, \dots, u_m λ_k -eigenfunctions satisfying

$$\sum_{j=1}^m u_j^2 = \frac{1}{\lambda_k(g)} \quad \text{and} \quad \sum_{j=1}^m |du_j|^2 = 1.$$

Then after rescaling the u_j 's,

$$\sum_{j=1}^m u_j^2 = \frac{1}{\lambda_k(g) \int_M \rho dv_g} \quad \text{and} \quad \sum_{j=1}^m |du_j|^2 = \frac{1}{\text{Vol}(M, g)}$$

where $\rho = 1$.

Finally since g is $\bar{\lambda}_k$ -conformally maximal and the conformal spectrum is simple [12], we have $\lambda_k(g) > \lambda_{k-1}(g)$. So by the converse of theorem 16, $(g, 1)$ is also $\bar{\lambda}_k$ -conformally maximal. \square

Theorem 19. *Let Σ^n be an n -dimensional connected compact manifold with non-empty boundary, $n \geq 3$ and let \mathcal{C} be a conformal class of metrics on Σ^n . Let $\alpha \in \mathbb{R}$ and suppose that the metric $g \in \mathcal{C}$ is extremal for the functional*

$$F_{k, \alpha}(\Sigma^n, g) = \sigma_k(\Sigma^n, g) \text{Vol}(\partial \Sigma^n, g)^\alpha \text{Vol}(\Sigma^n, g)^{\frac{1+\alpha(1-n)}{n}}$$

in \mathcal{C} . Then $\alpha = 1$, i.e. $F_{k, \alpha} = \bar{\sigma}_k$, and there exists a collection u_1, \dots, u_m of $\sigma_k(\Sigma^n, g)$ -eigenfunctions such that

- 1) $\sum_{i=1}^m u_i^2 = \frac{1}{\sigma_k(g) \text{Vol}(\partial \Sigma, g)}$ on $\partial \Sigma^n$;
- 2) $\sum_{i=1}^m |du_i|_g^2 = \frac{1}{\text{Vol}(\Sigma, g)}$ on Σ^n .

Conversely, if there exists a collection of $\sigma_k(\Sigma^n, g)$ -eigenfunctions satisfying 1) – 2) and additionally $\sigma_k(\Sigma^n, g) > \sigma_{k-1}(\Sigma^n, g)$ or $\sigma_k(\Sigma^n, g) < \sigma_{k+1}(\Sigma^n, g)$, then g is extremal for the functional $\bar{\sigma}_k(\Sigma^n, g) = F_{k,1}(\Sigma^n, g)$ in \mathcal{C} .

Remark 20. This theorem states that $\bar{\sigma}_k(\Sigma^n, g)$ is the only normalization of $\sigma_k(\Sigma^n, g)$ by powers of $\text{Vol}(\Sigma^n, g)$ and $\text{Vol}(\partial\Sigma^n, g)$, where one could expect the existence of regular maximizers in the conformal class.

PROOF. For a smooth family $g(t) = e^{f(t)}g$, the derivative of $\sigma_k(g(t))$ is given almost everywhere (when it exists) by

$$\dot{\sigma}_k(g(t)) = \int_{\Sigma} \frac{n-2}{2} |\nabla u|^2 \dot{f} dv_{g(t)} - \int_{\partial\Sigma} \frac{n-1}{2} \sigma_k(t) u^2 \dot{f} dA_{g(t)}$$

where u is in the k -th Steklov eigenspace $E_k(g(t))$ and satisfying $\|u\|_{L^2(\partial\Sigma)} = 1$. So

$$Q(u, du) = \left(\frac{n-2}{2} |\nabla u|^2 \frac{g}{n}, -\frac{n-1}{2} \sigma_k u^2 \frac{g|_{\partial\Sigma}}{n-1}, 0 \right).$$

For the normalisation $N = \text{Vol}(\partial\Sigma, g)^\alpha \text{Vol}(\Sigma, g)^{\frac{1+\alpha(1-n)}{n}}$, we have $\nabla N = (N_1, N_2, N_3)$ where

$$N_1 = \frac{1 + \alpha(1-n)}{2n} \text{Vol}(\Sigma, g)^{\frac{\alpha(1-n)}{n}} \text{Vol}(\partial\Sigma, g)^\alpha g,$$

$$N_2 = \frac{\alpha}{2} \text{Vol}(\Sigma, g)^{\frac{1+\alpha(1-n)}{n}} \text{Vol}(\partial\Sigma, g)^{\alpha-1} g|_{\partial\Sigma},$$

$$N_3 = 0$$

and applying lemma 14 yields the existence of $u_1, \dots, u_m \in E_k(g)$ which, after rescaling, satisfy

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m (2-n) |\nabla u_j|^2 = (1 + \alpha(1-n)) \text{Vol}(\Sigma)^{-1} & \text{in } \Sigma \\ \sum_{j=1}^m \sigma_k u_j^2 = \alpha \text{Vol}(\partial\Sigma)^{-1} & \text{on } \partial\Sigma. \end{cases}$$

Integrating the first equation on Σ and using that the u_j are eigenfunctions gives $1 + \alpha(1-n) = \alpha(2-n)$. Solving this equation for α gives the necessary condition $\alpha = 1$ and, for this α , the previous system yields the desired result.

For the converse we will only treat the case $\sigma_k(\Sigma, g) > \sigma_{k-1}(\Sigma, g)$, the other case being similar. Suppose that we have the $\sigma_k(g)$ -eigenfunctions u_1, \dots, u_m satisfying 1) – 2). Let $g(t) = e^{f(t)}$ smooth family of metrics which keeps the normalisation $\text{Vol}(\partial\Sigma, g) \text{Vol}(\Sigma, g)^{\frac{2-n}{n}}$ constant, hence

$$\frac{n-1}{\text{Vol}(\partial\Sigma, g)} \int_{\partial\Sigma} \dot{f} + \frac{2-n}{\text{Vol}(\partial\Sigma, g)} \int_{\Sigma} \dot{f} = 0.$$

Let $E = \text{Span}\{u_1, \dots, u_m\}$ and $v = (fg, fg|_{T\partial M}, 0)$ then

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \langle Q(u_j, du_j), v \rangle &= - \int_{\Sigma} \left(1 - \frac{n}{2}\right) \sum_{j=1}^m |\nabla u_j|^2 f - \int_{\partial\Sigma} \frac{n-1}{2} \sum_{j=1}^m \sigma_k u_j^2 f \\ &= - \frac{2-n}{2\text{Vol}(\Sigma, g)} \int_{\Sigma} f - \frac{n-1}{2\text{Vol}(\partial\Sigma, g)} \int_{\partial\Sigma} f = 0. \end{aligned}$$

So there exists $u_{\pm} \in E$ such that $\pm \langle Q(u_{\pm}), v \rangle \leq 0$. The fact that $\lambda_k(g) > \lambda_{k-1}(g)$ allows us to conclude $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\lambda_k(g(t)) - \lambda_k(g)}{t} \leq 0$ from the inequality $\langle Q(u_+), v \rangle \leq 0$, and we have $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\lambda_k(g(t)) - \lambda_k(g)}{t} \geq 0$ from $\langle Q(u_-), v \rangle \geq 0$. Thus $\lambda_k(g(t)) \leq \lambda_k(g) + o(t)$ and g is extremal. \square

Theorem 21. *Let Σ^n be an n -dimensional connected compact manifold with non-empty boundary, $n \geq 3$ and let \mathcal{C} be a conformal class of metrics on M . Suppose that the pair $(g, \rho) \in \mathcal{C} \times C^\infty(\partial\Sigma^n)$ is extremal for the functional*

$$\bar{\sigma}_k(\Sigma^n, g, \rho) = \sigma_k(\Sigma^n, g, \rho) \text{Vol}(\Sigma^n, g)^{\frac{2-n}{n}} \left(\int_{\partial\Sigma^n} \rho dv_g \right)$$

in $\mathcal{C} \times C^\infty(\partial\Sigma^n)$. Then there exists a collection u_1, \dots, u_m of $\sigma_k(\Sigma^n, g, \rho)$ -eigenfunctions such that

- 1) $\sum_{i=1}^m u_i^2 = \frac{1}{\sigma_k(g, \rho) \text{Vol}(\partial\Sigma, \rho)}$ on $\partial\Sigma^n$;
- 2) $\sum_{i=1}^m |du_i|_g^2 = \frac{1}{\text{Vol}(\Sigma, g)}$ on Σ^n .

Conversely, if there exists a collection of $\sigma_k(\Sigma^n, g, \rho)$ -eigenfunctions satisfying 1) – 2) and additionally $\sigma_k(\Sigma^n, g, \rho) > \sigma_{k-1}(\Sigma^n, g, \rho)$ or $\sigma_k(\Sigma^n, g, \rho) < \sigma_{k+1}(\Sigma^n, g, \rho)$, then g is extremal for the functional $\bar{\sigma}_k(\Sigma^n, g, \rho)$ in $\mathcal{C} \times C^\infty(\partial\Sigma^n)$.

Remark 22. *The formulation of this theorem is almost identical to that of Theorem 19. In comparison with Theorem 16, note that the density is not necessarily constant.*

PROOF. This proof is omitted since the first part is again a consequence of lemma 14 while the proof of the converse is similar to the no-density Steklov's one. \square

3.3.2. Extremality conditions in the space of all metrics

Theorem 23. *Let M^n be an n -dimensional closed manifold, $n \geq 3$. Suppose that the metric $g \in \mathcal{R}$ is extremal for the functional*

$$\bar{\lambda}_k(M^n, g) = \lambda_k(M^n, g) \text{Vol}(M^n, g)^{\frac{2}{n}}$$

in \mathcal{R} . Then there exists a collection u_1, \dots, u_m of $\lambda_k(M^n, g)$ -eigenfunctions such that

- 1) $\sum_{i=1}^m u_i^2 = \frac{n}{\lambda_k(g)}$
- 2) $\sum_{i=1}^m du_i \otimes du_i = g$

Conversely, if there exists a collection $\lambda_k(M^n, g)$ -eigenfunctions satisfying 1), 2) and in addition $\lambda_k(M^n, g) > \lambda_{k-1}(M^n, g)$ or $\lambda_k(M^n, g) < \lambda_{k+1}(M^n, g)$, then g is extremal for the functional $\bar{\lambda}_k(M^n, g)$ in \mathcal{R} .

PROOF. For a smooth family $g(t)$ with $g(0) = g$ and $\frac{d}{dt}g(t) = h(t)$, the eigenvalue $\lambda_k(g(t))$ is Lipschitz and its derivative, when it exists, is given by

$$\dot{\lambda}_k(g(t)) = \int_M \langle -du \otimes du + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 g(t) - \frac{1}{2}\lambda_k(g(t))u^2 g(t), h \rangle dv_{g(t)}$$

where $u \in E_k(g(t))$, $\|u\|_{L^2(M, g(t))} = 1$. Applying lemma 14, with

$$\nabla N = \left(\frac{1}{2n} \text{Vol}(M, g)^{\frac{2-n}{n}} g, \frac{1}{2n} \text{Vol}(M, g)^{\frac{2-n}{n}} g, 0 \right)$$

and $Q(u, du) = (q_1, q_2, q_3)$ where

$$q_1 = q_2 = \frac{1}{2} \left(-du \otimes du + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 g - \frac{1}{2}\lambda_k u^2 g \right), \quad q_3 = 0,$$

there exists $u_1, \dots, u_m \in E_k(g)$ such that

$$g = \sum_{j=1}^m du_j \otimes du_j - \frac{1}{2}|\nabla u_j|^2 g + \frac{1}{2}\lambda_k(g)u_j^2 g.$$

Taking the traceless part, we obtain $\sum du_j \otimes du_j = \frac{1}{n}|\nabla u_j|^2 g$, while taking the trace, we obtain the equation (3.3.1) (up to a factor n) hence $\sum u_j^2 = \frac{n}{\lambda_k(g)}$ and $\sum |\nabla u_j|^2 = n$. Thus $\sum du_j \otimes du_j = g$.

The converse's proof is once again similar and is omitted. \square

Theorem 24. *Let Σ^n be an n -dimensional connected compact manifold with non-empty boundary, $n \geq 3$. Suppose that the pair (g, ρ) is extremal for the functional*

$$\bar{\sigma}_k(\Sigma^n, g, \rho) = \sigma_k(\Sigma^n, g, \rho) \text{Vol}(\Sigma, g)^{\frac{2-n}{n}} \left(\int_{\partial \Sigma} \rho dv_g \right)$$

in $\mathcal{R} \times C^\infty(\Sigma^n)$. Then ρ is a constant function $\rho \equiv \rho_0$ and there exists a collection u_1, \dots, u_m of $\sigma_k(\Sigma^n, g, \rho)$ -eigenfunctions such that

- 1) $\sum_{i=1}^m u_i^2 = \frac{1}{\sigma_k \text{Vol}(\partial \Sigma, \rho)}$ on $\partial \Sigma^n$;
- 2) $\sum_{i=1}^m du_i \otimes du_i = \frac{g}{\text{Vol}(\Sigma, g)}$ on Σ^n .

Conversely, if $\rho \equiv \rho_0$ and there is a collection of $\sigma_k(\Sigma^n, g, \rho)$ -eigenfunctions satisfying 1), 2) and in addition $\sigma_k(\Sigma^n, g, \rho) > \sigma_{k-1}(\Sigma^n, g, \rho)$ or $\sigma_k(\Sigma^n, g, \rho) < \sigma_{k+1}(\Sigma^n, g, \rho)$, then g is extremal for the functional $\bar{\sigma}_k(\Sigma^n, g, \rho)$ in $\mathcal{R} \times C^\infty(\partial \Sigma^n)$.

Remark 25. *In comparison with Theorem 21, we see that extending the deformation space to \mathcal{R} forces the density to be constant.*

PROOF. For smooth families $g(t), \rho(t)$ with $g(0) = g, \frac{d}{dt}g(t) = h(t)$ and $\rho(0) = \rho, \frac{d}{dt}\rho(t) = \eta(t)$, the eigenvalue $\sigma_k(g(t), \rho(t))$ is Lipschitz and when its derivative exists, it is given by

$$\dot{\sigma}_k(g(t), \rho(t)) = \int_{\Sigma} \langle -du \otimes du + \frac{1}{2} |\nabla u|^2 g, h \rangle - \int_{\partial\Sigma} \sigma_k u^2 \frac{\rho}{2} \langle h|_{\partial\Sigma}, g|_{\partial\Sigma} \rangle - \int_{\partial\Sigma} \sigma_k u^2 \eta$$

where $u \in E_k(g(t), \rho(t)), \|u\|_{L^2(\partial\Sigma, \rho)} = 1$. An application of lemma 14 with

$$Q(u, du) = \left(-du \otimes du + \frac{1}{2} |\nabla u|^2 g, -\frac{1}{2} \sigma_k u^2 \rho g|_{\partial\Sigma}, -\sigma_k u^2 \right),$$

$$\nabla N = \left(\frac{2-n}{2n} \text{Vol}(\Sigma, g)^{\frac{1-n}{n}} \text{Vol}(\partial\Sigma, g) g, \frac{1}{2} \text{Vol}(\Sigma, g)^{\frac{2-n}{n}} \rho g|_{\partial\Sigma}, \text{Vol}(\Sigma, g)^{\frac{2-n}{n}} \right),$$

gives the existence of σ_k -eigenfunctions u_1, \dots, u_m such that

$$\begin{cases} \frac{2-n}{n} \frac{g}{\text{Vol}(\Sigma, g)} = \sum_{j=1}^m \left(du_j \otimes du_j - \frac{1}{2} |\nabla u_j|^2 g \right), \\ \frac{2}{\sigma_k \text{Vol}(\partial\Sigma, \rho)} = \sum_{j=1}^m u_j^2. \end{cases}$$

Taking the trace of the first equation yields $\sum |\nabla u_j|^2 = \frac{2}{\text{Vol}(\Sigma, g)}$ which when used in the first equation gives $\sum du_j \otimes du_j = \frac{2g}{\text{Vol}(\Sigma, g)}$. By rescaling the u_j we get then get the desired equalities.

Using these equalities, we obtain for the density ρ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Vol}(\Sigma, g)} &= \frac{g(\nu, \nu)}{\text{Vol}(\Sigma, g)} = \sum_{j=1}^m du_j \otimes du_j(\nu, \nu) \\ &= \sum_{j=1}^m |\partial_\nu u_j|^2 = \sigma_k^2 \rho^2 \sum_{j=1}^m u_j^2 = \frac{\sigma_k \rho^2}{\text{Vol}(\partial\Sigma, \rho)} \end{aligned}$$

hence ρ is constant on $\partial\Sigma$.

The proof of the converse is once again the same and is thus omitted. \square

3.4. Geometric extremality conditions

In this section we complete the proofs of geometric characterizations of extremal metrics.

3.4.1. Proof of Theorem 3

Let g be a $\bar{\lambda}_k$ -conformally extremal and $\lambda_k = \bar{\lambda}_k(M^n, g)$. Then by Theorem 15 there is a collection $\{u_1, \dots, u_m\}$ such that $\Delta_g u_i = \lambda_k u_i$ and

$$\sum_{i=1}^m u_i^2 = \frac{1}{\lambda_k} \quad \sum_{i=1}^m |du_i|_g^2 = 1. \quad (3.4.1)$$

Let $\Phi: M^n \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ be defined by $\Phi = \sqrt{\lambda_k}(u_1, \dots, u_m)$. Then $|d\Phi|_g^2 = \lambda_k$ and, therefore,

$$\delta_g(|d\Phi|_g^{n-2} d\Phi) = \lambda_k^{\frac{n-2}{2}} \Delta_g \Phi = \lambda_k^{\frac{n}{2}} \Phi = |d\Phi|_g^n \Phi$$

i.e. $\Phi: (M, g) \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ is a non-degenerate n -harmonic map by (3.2.1). Finally, $g_\Phi = \frac{1}{n}|d\Phi|_g^2 g = \frac{\lambda_k}{n}g$, i.e. g_Φ is a constant multiple of g .

Conversely, If $\Phi: (M, g) \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ is an n -harmonic map, then for $k = \text{ind}_S(\Phi)$, one has $\lambda_k = \lambda_k(M^n, g_\Phi) = n$ and the components of $\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\Phi$ are λ_k -eigenfunctions of Δ_{g_Φ} satisfying (3.4.1). Since by the definition of $\text{ind}_S(\Phi)$, one has $\lambda_{k-1} < \lambda_k$, the conclusion follows from the second part of Theorem 3.

3.4.2. Proof of Theorem 5

First, let us show that for a non-degenerate free boundary n -harmonic maps $\hat{\Psi}$ the corresponding density $\rho_{\hat{\Psi}}$ is positive.

Lemma 26. *Let $\hat{\Psi}: (\Sigma^n, g) \rightarrow \mathbb{B}^m$ be a non-degenerate free boundary n -harmonic map. Then $\rho_{\hat{\Psi}} > 0$.*

PROOF. Let $h = g_{\hat{\Psi}}$, then one has $\Delta_h \hat{\Psi} = 0$ in the interior of Σ^n . Then $\Delta_h(|\hat{\Psi}|^2) = -2|d\hat{\Psi}|_h^2 = -2n < 0$, i.e. $|\hat{\Psi}|^2$ is a subharmonic function, which attains its maximum at every point of $\partial\Sigma^n$. Thus, by the boundary point maximum principle $\partial_{\nu_h}|\hat{\Psi}|^2 > 0$, where ν_h is the outer unit normal vector w.r.t. h . At the same time,

$$\partial_{\nu_h}|\hat{\Psi}|^2 = 2\hat{\Psi} \cdot \partial_{\nu_h} \hat{\Psi} = 2|\partial_{\nu_h} \hat{\Psi}| = 2\rho_{\hat{\Psi}}.$$

□

OF THEOREM 5. Let (g, ρ) be an extremal pair. Let $\sigma_k = \sigma_k(\Sigma^n, g, \rho)$, then by Theorem 21 there is a collection (u_1, \dots, u_m) of σ_k -eigenfunctions such that

$$\sum_{i=1}^m u_i^2 = \frac{1}{\sigma_k \|\rho\|_{L^1}} \text{ on } \partial\Sigma^n, \quad \sum_{i=1}^m |du_i|_g^2 = \frac{1}{\text{Vol}(\Sigma^n, g)} \text{ on } \Sigma^n \quad (3.4.2)$$

Set $\hat{\Psi}: \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ be given by $\sqrt{\sigma_k \|\rho\|_{L^1}}(u_1, \dots, u_m)$. Since $\Delta_g \hat{\Psi} = 0$ one has $\Delta_g |\hat{\Psi}|_g^2 = -2|d\hat{\Psi}|_g^2 < 0$. Thus, by maximum principle $|\hat{\Psi}|_g^2$ achieves its maximum on the boundary, therefore, $\hat{\Psi}: \Sigma^n \rightarrow \mathbb{B}^m$. Furthermore,

$$|d\hat{\Psi}|_g^2 = \frac{\sigma_k \|\rho\|_{L^1}}{\text{Vol}(\Sigma^n, g)}, \quad \partial_{\nu_g} \hat{\Psi} = \rho_{\hat{\Psi}} \|\hat{\Psi}\|.$$

Since $|d\hat{\Psi}|_g^2$ is constant, one has

$$\delta_g(|d\hat{\Psi}|_g^{n-2} d\hat{\Psi}) = |d\hat{\Psi}|_g^{n-2} \Delta_g \hat{\Psi} = 0,$$

therefore, $\hat{\Psi}$ is a non-degenerate free boundary n -harmonic map. Moreover, $g_{\hat{\Psi}} = \frac{1}{n}|d\hat{\Psi}|_g^2 g = \frac{\sigma_k \|\rho\|_{L^1}}{n \text{Vol}(\Sigma^n, g)} g$ and $\rho_{\hat{\Psi}} = \frac{\sqrt{n} |\partial_{\nu_g} \hat{\Psi}|}{|d\hat{\Psi}|_g} = \sqrt{\frac{n \text{Vol}(\Sigma^n, g)}{\sigma_k \|\rho\|_{L^1}}} \rho$, which completes the proof.

Conversely, let $\hat{\Psi}: (\Sigma^n, g) \rightarrow \mathbb{B}^m$ be a free boundary n -harmonic map. Let $k = \text{ind}_S(\hat{\Psi})$, then one has $\sigma_k = \sigma_k(\Sigma^n, g_{\hat{\Psi}}, \rho_{\hat{\Psi}}) = 1$ and components of $\frac{1}{\sqrt{\sigma_k \|\rho_{\hat{\Psi}}\|_{L^1}}} \hat{\Psi}$ are σ_k -eigenfunctions

satisfying

$$\sum_{i=1}^m u_i^2 = \frac{1}{\sigma_k \|\rho_{\hat{\Psi}}\|_{L^1}} \text{ on } \partial\Sigma^n, \quad \sum_{i=1}^m |du_i|_g^2 = \frac{1}{\sigma_k \|\rho_{\hat{\Psi}}\|_{L^1}} \text{ on } \Sigma^n.$$

In order to apply the second part of Theorem 21 we need to show that $\sigma_k \|\rho_{\hat{\Psi}}\|_{L^1} = \text{Vol}(\Sigma^n, g_{\hat{\Psi}})$. To achieve this, note that $\Delta_{g_{\hat{\Psi}}} |\hat{\Psi}|^2 = -2|d\hat{\Psi}|_{g_{\hat{\Psi}}}^2 = -2$. Thus, integrating $\frac{1}{2} \Delta_{g_{\hat{\Psi}}} |\hat{\Psi}|^2$ and applying Green's formula yields

$$\text{Vol}(\Sigma^n, g_{\hat{\Psi}}) = \int_{\partial\Sigma^n} \sigma_k \rho_{\hat{\Psi}} = \sigma_k \|\rho_{\hat{\Psi}}\|_{L^1}.$$

□

3.4.3. Proof of Theorem 8

Let g be a $\bar{\lambda}_k$ -extremal metric. Then by Theorem 23 there exists a collection (u_1, \dots, u_m) of $\lambda_k(M^n, g)$ eigenfunctions satisfying

$$\sum_{i=1}^m u_i^2 = \frac{n}{\lambda_k(M^n, g)}, \quad \sum_{i=1}^m du_i \otimes du_i = g.$$

In particular, taking the trace of the second equality yields

$$\sum_{i=1}^m |du_i|_g^2 = n.$$

Therefore, one can repeat the arguments of Section 3.4.1 to conclude that the map $\Phi = \sqrt{\frac{\lambda_k(M^n, g)}{n}}(u_1, \dots, u_m)$ is a non-degenerate n -harmonic map to the sphere \mathbb{S}^{m-1} . Additionally, one has that the pullback $\Phi^* g_{\mathbb{S}^{m-1}}$ is proportional to g and, in particular, the map Φ is conformal. Then by [82, Corollary 4] Φ is a minimal immersion.

The proof of converse is identical to that in Section 3.4.1. The only new observation is that for a minimal immersion Φ one has $g_\Phi = \Phi^* g_{\mathbb{S}^{m-1}}$.

3.4.4. Proof of Theorem 10

The proof is identical to that in Section 3.4.3. The important point is that for any free boundary minimal immersion $\hat{\Psi}$ one has $\rho_{\hat{\Psi}} \equiv 1$. Indeed $\rho_{\hat{\Psi}} = |\partial_{\nu_{g_{\hat{\Psi}}}} \hat{\Psi}| = |\nu_{g_{\hat{\Psi}}}| = 1$ since $g_{\hat{\Psi}} = \Psi^* g_{\mathbb{B}^m}$ in this case.

3.5. Extremal metrics on the annulus

The aim of this section is to study the Steklov problem on the annulus and prove Theorem 11 and Proposition 12.

3.5.1. Setup of the problem

Let $\mathbb{A}_T = [0, T] \times S^1$ an annulus with metric $g = f(t)(dt^2 + d\theta^2)$. By the uniformization theorem, any annulus with a rotationally symmetric metric is isometric to an annulus of this form for some T which fixes its conformal class. The Steklov problem on \mathbb{A}_T is then

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{A}_T \\ \partial_t u = -\sigma f(0)u & \text{on } \{0\} \times S^1 \\ \partial_t u = \sigma f(T)u & \text{on } \{T\} \times S^1 \end{cases} \quad (3.5.1)$$

Let $\rho_1 = f(0)$ and $\rho_2 = f(T)$. Then simple calculations, using that the Laplacian is conformally invariant in 2-dimension, give that the weighted Steklov eigenfunctions are:

$$\begin{aligned} u_1(t, \theta) &= -1 + \sigma^{(0)} \rho_1 t \\ u_2^{(n)}(t, \theta) &= \cosh(t) \cos(\theta) - \sigma_{\pm}^{(n)} \rho_1 \sinh(t) \cos(\theta) \\ u_3^{(n)}(t, \theta) &= \cosh(t) \sin(\theta) - \sigma_{\pm}^{(n)} \rho_1 \sinh(t) \sin(\theta) \end{aligned}$$

where $\sigma^{(0)}$ and $\sigma_{\pm}^{(n)}$ are their corresponding eigenvalues, given by

$$\begin{aligned} \sigma^{(0)} &= \frac{1}{T} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \\ \sigma_{\pm}^{(n)} &= \frac{n}{2} \left(\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \coth(nT) \pm \left(\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)^2 \coth(nT)^2 - \frac{4}{\rho_1 \rho_2} \right)^{1/2} \right). \end{aligned}$$

For our ends, we are only interested in the lowest (non zero) eigenvalue and focus on $\sigma^{(0)}$ and $\sigma_{-}^{(n)}$. Using the identity $x - y = \frac{x^2 - y^2}{x + y}$ we see that $\sigma_{-}^{(n)}$ is increasing with n . Hence we only need to consider $\sigma^{(0)}$ and $\sigma_{-}^{(1)}$. To get an immersion in \mathbb{R}^3 by first eigenfunctions we need the first eigenvalue to have multiplicity 3. But $\sigma^{(0)}$ and $\sigma_{-}^{(1)}$ have multiplicity 1 and 2 respectively. Hence we obtain the condition $\sigma_1 = \sigma^{(0)} = \sigma_{-}^{(1)}$ which gives the equation

$$\frac{1}{T} = \frac{2\rho_1\rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} \left(\coth(T) + \left(\coth(T)^2 - \frac{4\rho_1\rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} \right)^{1/2} \right)^{-1}$$

The left hand side is decreasing from $+\infty$ at $T = 0$ to 0 at $T = +\infty$ while the right hand side is increasing on \mathbb{R}^+ . Hence the equation has a unique solution T_q where $q = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ (the fact that the solution depends only on this ratio can be seen by rewriting $\frac{4\rho_1\rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} = \frac{4q}{(1+q)^2}$).

We now fix T_q and consider it as a function of q . To simplify notation we write $u_2^{(1)} = u_2, u_3^{(1)} = u_3$ and $\sigma_1 = \sigma^{(0)} = \sigma_{-}^{(1)} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2 T_q}$. We have the following results on T_q

Lemma 27. T_q is decreasing for $q \in (0, 1]$ and increasing for $q \in [1, +\infty)$, with a minimum at $q = 1$. Furthermore, for all $q > 0$,

$$\frac{(1+q)^2}{2q} < \frac{(1+q)^2}{2q} \coth(T_q) < T_q < \frac{(1+q)^2}{q}$$

and

$$T_q > q + \frac{1}{q}.$$

PROOF. Due to the symmetry of the problem when interchanging ρ_1 and ρ_2 , we have $T_q = T_{1/q}$. To prove the first part of the lemma, it is then enough to show T_q decreasing for $q \in (0, 1]$. Suppose on the contrary that T_q is increasing for some $q \in (0, 1]$. Then we see in the equation for T_q ,

$$T_q = \frac{(1+q)^2}{2q} \left(\coth(T_q) + \left(\coth(T_q) - \frac{4q}{(1+q)^2} \right)^{1/2} \right) \quad (3.5.2)$$

that the right hand side is decreasing, a contradiction.

The first two lower bounds are directly obtained from the equation (3.5.2) for T_q

$$\begin{aligned} T_q &= \frac{(1+q)^2}{2q} \left(\coth(T_q) + \left(\coth(T_q)^2 - \frac{4q}{(1+q)^2} \right)^{1/2} \right) \\ &> \frac{(1+q)^2}{2q} \coth(T_q) > \frac{(1+q)^2}{2q} \end{aligned}$$

For the last lower bound we have

$$\frac{(1+q)^2}{q} \coth(T_q) - T_q = \frac{2}{\coth(T_q) + \left(\coth(T_q)^2 - \frac{4q}{(1+q)^2} \right)^{1/2}} < 2.$$

So

$$T_q > \frac{(1+q)^2}{q} \coth(T_q) - 2 > \frac{(1+q)^2}{q} - 2 = q + \frac{1}{q}.$$

More work is required for the upper bound. From the equation for T_q , the upper bound is equivalent to the inequality

$$\coth(T_q) + \left(\coth(T_q)^2 - \frac{4q}{(1+q)^2} \right)^{1/2} < 2,$$

itself equivalent to

$$\coth(T_q) < 1 + \frac{q}{(1+q)^2}.$$

From the lower bound on T_q and since \coth is decreasing, $\coth(T_q) < \coth\left(\frac{(1+q)^2}{2q}\right)$. Thus it suffices to show $\coth\left(\frac{(1+q)^2}{2q}\right) < 1 + \frac{q}{(1+q)^2}$, i.e. $\coth(x) < 1 + \frac{1}{2x}$ for $x \geq 2$ by setting

$x = \frac{(1+q)^2}{2q}$. Using that $\coth(x) - 1 = \frac{2}{e^{2x}-1}$, proving this last inequality is equivalent to proving

$$4x < e^{2x} - 1 \quad \text{for } x \geq 2,$$

which is clear since $8 < e^4 - 1 \approx 53$ and e^{2x} increases faster than $4x$. \square

3.5.2. Proof of Theorem 11

Since $T \geq T_1$ and $T_q \rightarrow \infty$ when $q \rightarrow \infty$, we can find a $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$ such that $T = T_q$ with $q = \frac{f(0)}{f(T)}$.

From the eigenfunctions u_1, u_2, u_3 found above, we want to construct a harmonic map $\hat{\Psi}_T : \mathbb{A}_T \rightarrow B^3$ such that $\hat{\Psi}_T(\partial\mathbb{A}_T) \subset S^2$. Let $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ and let $\hat{\Psi}_T = (c_1 u_1, c_2 u_2, c_2 u_2)$ then the boundary condition $\hat{\Psi}_T(\partial\mathbb{A}_T) \subset S^2$ implies

$$\begin{cases} 1 &= c_1^2 + c_2^2 \\ 1 &= c_1^2 a(q)^2 + c_2^2 b(q)^2. \end{cases}$$

where

$$\begin{aligned} a(q) &= -1 + \sigma_1 \rho_1 T_q = q \\ b(q) &= \cosh(T_q) - \sigma_1 \rho_1 \sinh(T_q). \end{aligned}$$

Clearly a solution (c_1, c_2) exists if and only if $(a(q)^2 = b(q)^2 = 1)$ or $(a(q)^2 < 1, b(q)^2 > 1)$ or $(a(q)^2 > 1, b(q)^2 < 1)$. The case $a(1)^2 = b(1)^2 = 1$ gives the critical catenoid and the map $\hat{\Psi}_{T_1}$, proving (1).

We now show that a solution exists when $q \neq 1$. Since the problem does not change when switching $\rho_1 \leftrightarrow \rho_2$, we can consider without loss of generality only the case $0 < q < 1$ and it suffices to show $b(q)^2 > 1$. Knowing that $b(1) = 1$, we will show that b is decreasing on $(0, 1)$.

The derivative of b is

$$b'(q) = \frac{\sinh(T_q)}{T_q^2} \left(T_q' (q + 1 + T_q^2 - (1+q)T_q \coth(T_q)) - T_q \right)$$

and since $T_q > 0$ and by lemma 27, T_q is decreasing for $q \in (0, 1)$, it suffices to show that

$$0 < T_q - (1+q) \coth(T_q).$$

By lemma 27, $T_q > \frac{(1+q)^2}{2q} \coth(T_q)$ hence

$$T_q - (1+q) \coth(T_q) > (1+q) T_q \coth(T_q) \left(\frac{1+q}{2q} - 1 \right) > 0$$

for $q \in (0, 1)$. This proves that for any $T \geq T_1$, there exists a rotationally symmetric free boundary harmonic map $\hat{\Psi}_T : \mathbb{A}_T \rightarrow \mathbb{B}^3$ of spectral index 1.

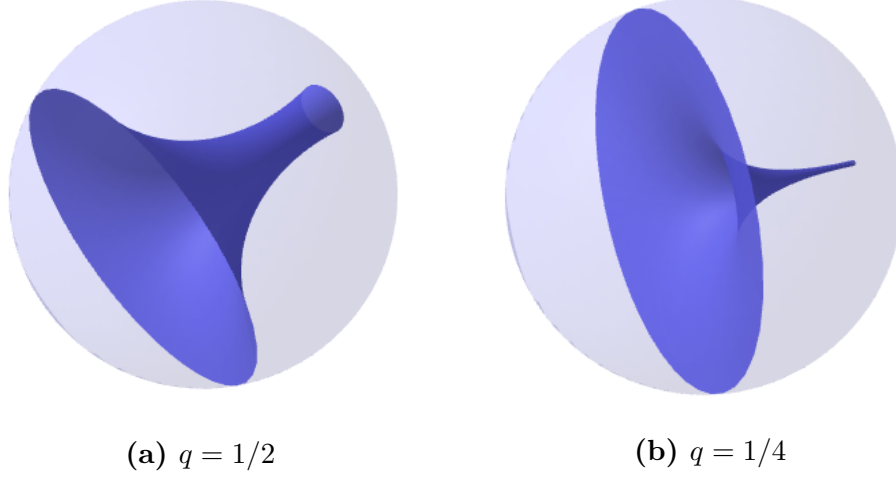


Fig. 1. Some examples of the surface $\hat{\Psi}_{T_q}(\mathbb{A}_{T_q})$ for different values of $q = \frac{\rho_1}{\rho_2}$.

Examples of the surface $\hat{\Psi}_T(\mathbb{A}_T)$ are shown in figure 1. As can be seen from those figures and direct calculations, $\hat{\Psi}_T(\mathbb{A}_T)$ is a section of a stretched catenoid. When $T \rightarrow \infty$, this stretched catenoid collapses to a disk with a segment orthogonal to it.

Proof of (2). The fact that the pair $(g_{\hat{\Psi}_T}, \rho_{\hat{\Psi}_T})$ is rotationally symmetric is clear by construction. The density $\rho_{\hat{\Psi}_T} = \frac{\sqrt{n}\sigma_1}{|d\hat{\Psi}_T|_g}$ so we prove that for $T \geq T_2 \approx 3.04$, $|d\hat{\Psi}_T|_g$ depends on the boundary component of \mathbb{A}_T . Calculating for $t_1 = 0, t_2 = T$,

$$|d\hat{\Psi}_T|_g^2(t_i, \theta) = \sigma_1^2 + \frac{c_2^2}{\rho_i^2} (\cosh(t_j) - \sigma_1 \rho_1 \sinh(t_j))^2.$$

Remark that for $t_1 = 0$ the second term is $\frac{c_2^2}{\rho_1^2}$ while for $t_2 = T =: T_q$ it is $\frac{c_2^2 b(q)^2}{\rho_2^2}$. Hence we will prove that $b(q) \neq \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1}{q}$ for $T_q \geq T_2$, i.e for $q \leq 2$ and for $q \geq 2$. As discussed previously, it is enough to prove the case $q \geq 2$. Rewriting $b(q)$ as

$$\begin{aligned} b(q) &= \cosh(T_q) - \frac{1}{2}(q+1) \left(\coth(T_q) - \left(\coth(T_q)^2 - \frac{4q}{(1+q)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \sinh(T_q) \\ &= \frac{2q}{\left((1+q)^2 \cosh(T_q)^2 - 4q \sinh(T_q)^2 \right)^{1/2} - (1-q) \cosh(T_q)} \\ &= \frac{2q}{\frac{2q}{1+q} T_q \sinh(T_q) - (1+q) \cosh(T_q) - (1-q) \cosh(T_q)} \\ &= \frac{1}{\frac{T_q}{1+q} \sinh(T_q) - \frac{1}{q} \cosh(T_q)}, \end{aligned}$$

where the second to last equality comes from the equation for T_q , it is enough to show $\frac{T_q}{1+q} \sinh(T_q) - \frac{1}{q} \cosh(T_q) \neq q$. Using lemma 27, we have the lower bound

$$\begin{aligned} \frac{T_q}{1+q} \sinh(T_q) - \frac{1}{q} \cosh(T_q) &\geq \\ &\geq \frac{1}{1+q} \left(\frac{(1+q)^2}{q} \coth(T_q) - 2 \right) \sinh(T_q) - \frac{1}{q} \cosh(T_q) \\ &= \left(1 - \frac{2}{1+q} \right) \cosh(T_q) + \frac{2}{1+q} e^{-T_q} \\ &\geq \frac{q-1}{q+1} \cosh(T_q) \geq \frac{q-1}{q+1} \cosh\left(q + \frac{1}{q}\right). \end{aligned}$$

For $q = 2$, we have $\frac{q-1}{q+1} \cosh\left(q + \frac{1}{q}\right) \approx 3.1 > 2 = q$ and since $\frac{q-1}{q+1} \cosh(q + 1/q)$ grows faster than q , this proves part (2).

Proof of (3). By construction, $\bar{\sigma}_1(\mathbb{A}_T, g_{\hat{\Psi}_T}, \rho_{\hat{\Psi}_T}) = 2E(\hat{\Psi}_T)$ and

$$\bar{\sigma}_1(\mathbb{A}_T, g_{\hat{\Psi}_T}, \rho_{\hat{\Psi}_T}) = \frac{1}{T_q} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) 2\pi(\rho_1 + \rho_2) = \frac{2\pi(1+q)^2}{qT_q}$$

By lemma 27, $q + \frac{1}{q} < T_q < \frac{(1+q)^2}{q}$ hence

$$2\pi < \bar{\sigma}_1(\mathbb{A}_T, g_{\hat{\Psi}_T}, \rho_{\hat{\Psi}_T}) < 2\pi + \frac{4\pi q}{q^2 + 1}.$$

This provides the desired lower bound while the limit is obtained by noting that by lemma 27, when $T \rightarrow \infty$, q goes to 0 or ∞ .

3.5.3. Proof of Proposition 12

From lemma 27, T_q achieves its minimum at $q = 1$ hence for the conformal class on the annulus with $T < T_1$, one cannot have a rotationally symmetric $\bar{\sigma}_1$ -conformally extremal metric given by a map to B^3 . The only possible rotationally symmetric $\bar{\sigma}_1$ -conformally extremal metric comes instead from a map $\hat{\Psi}_T : \mathbb{A}_T \rightarrow \mathbb{B}^2$. From our previous discussion, since $T < T_1$, the components of $\hat{\Psi}_T$ are first eigenfunctions $u_i(t, \theta) = c_i(\cosh(t) - \sigma_1 \rho_1' \sinh(t)) S_i(\theta)$ with $S_1 = \cos, S_2 = \sin$. From the condition that $\hat{\Psi}_T(\partial\mathbb{A}_T) \subset S^1$, we have $c_1^2 = c_2^2 = 1$ and we must satisfy

$$1 = (\cosh(T) - \sigma_1 \rho_1 \sinh(T))^2$$

But

$$\begin{aligned} \cosh(T) - \sigma_1 \rho_1 \sinh(T) &= \frac{1}{2}(1-q) \cosh(T) \\ &\quad + \frac{1}{2}(1+q) \left(\cosh(T)^2 - \frac{4q}{(1+q)^2} \sinh(T)^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

so taking $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$ with $f(0) =: \rho_1 = 1 = \rho_2 := f(T)$, gives $q = 1$ and the condition is satisfied.

The normalized eigenvalue is

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbb{A}_T, g_{\hat{\Psi}_T}, \rho_{\hat{\Psi}_T}) &= 4\pi \left(\coth(T) - \left(\coth(T)^2 - 1 \right)^{1/2} \right) \\ &= 4\pi \tanh(T/2). \end{aligned}$$

Hence for all $T \leq \tilde{T}$ where $\tilde{T} \approx 1.10$ is the solution of $2 \tanh(T/2) = 1$, $\sigma(\mathbb{A}_T, g_{\hat{\Psi}_T}, \rho_{\hat{\Psi}_T}) \leq 2\pi$. But it was shown in [67] that the supremum of the normalized eigenvalue over a conformal class must be $> 2\pi$, hence $(g_{\hat{\Psi}_T}, \rho_{\hat{\Psi}_T})$ is not a maximal pair.

Acknowledgements

The authors would like to thank Daniel Stern for fruitful discussions and Iosif Polterovich for invaluable remarks on the preliminary versions of the manuscript. Antoine Métras's work is part of a PhD thesis under the supervision of Iosif Polterovich. Mikhail Karpukhin is supported by the US National Science Foundation [DMS-1363432]; and Antoine Métras is supported by the Fonds de recherche du Québec - Nature et Technologies [B2-272578].

Chapitre 4

Applications au problème de Dirac

Dans ce chapitre, nous présentons des possibilités d'extensions des résultats pour les métriques (conformément) extrémales de Laplace et Steklov à celles de Dirac. Outre le fait que l'opérateur de Dirac est en quelque sorte une racine carré du Laplacien, nous justifions l'intérêt de considérer ce problème en montrant en détail que les méthodes développées précédemment pour caractériser les métriques extrémales de Laplace et Steklov en terme d'objets géométriques s'appliquent encore pour Dirac.

Après une courte introduction aux structures spinorielles et l'opérateur de Dirac, nous montrons que les métriques conformément extrémales donnent lieu à des applications harmoniques dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^{2m-1}$. Nous utilisons ensuite ce résultat afin de montrer que dans certaines classes conformes sur le tore, les métriques conformément minimales pour la première valeur propre de Dirac strictement positive sont plates. Finalement, nous exposons quelques possibilités de recherches futures dans cette optique. Ce travail est basé sur une collaboration en cours avec M. Karpukhin et I. Polterovich.

4.1. Structure spinorielle et opérateur de Dirac

Soit M une surface de Riemann compacte et soit $K = T^*M$ son fibré canonique, qui est, pour une surface, le fibré en droites des 1-formes holomorphes.

Définition 4.1.1. *Une structure spinorielle sur M est un fibré en droites holomorphe S doté d'un isomorphisme $S \otimes S \cong K$. Le fibré de spineurs ΣM sur M est $S \oplus \bar{S}$.*

Remarque 4.1.2. *Cette définition est spécifique à la dimension 2 et ne fonctionne pas en dimension supérieure $n > 2$. En général, pour une métrique g fixée, la structure spinorielle est définie comme un fibré Spin_n -principal sur M , qui est un revêtement à deux feuillets du fibré $SO(n)$ -principal des repères sur M , et qui satisfait une condition de commutativité entre les projections et l'actions de Spin_n et $SO(n)$ sur les fibrés principaux respectifs (se référer à [34, 43] pour plus de détails). Comme nous étudierons seulement le cas des surfaces, cette définition générale ne sera pas utilisée.*

Remarque 4.1.3. *Deux structures spinorielles S et S' sont équivalentes s'il existe un isomorphisme de fibrés $S \rightarrow S'$ qui commute avec leur isomorphisme respectif $S \otimes S \cong K$ et $S' \otimes S' \cong K$. Sur une surface de Riemann de genre γ , il y a $2^{2\gamma}$ classes d'équivalence de structures spinorielles. Comme une structure spinorielle est une racine carrée du fibré canonique, son degré est la moitié de celui du fibré canonique, d'où $\deg(S) = \gamma - 1$. Donc toutes les structures spinorielles sur une surface de Riemann donnée sont topologiquement équivalentes.*

Une métrique riemannienne g compatible avec la structure complexe sur M correspond à une section positive de $K \otimes \bar{K} = |K|^2$. Grâce à l'isomorphisme $S \otimes S = K$, celle-ci donne une section de $S \otimes \bar{S} = |S|^2$ en prenant une racine carrée positive. Ceci permet de définir à partir de l'opérateur $\bar{\partial}$ sur S un opérateur différentiel :

$$\bar{\partial}_g : \Gamma(S) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Gamma(S \otimes \bar{K}) \rightarrow \Gamma(\bar{S})$$

où la deuxième flèche correspond à l'isomorphisme $S \otimes \bar{K} \cong S \otimes \bar{S} \otimes \bar{S} \cong |S|^2 \otimes \bar{S} \cong_g \bar{S}$. En coordonnées locales, soit s_0 une section locale de S satisfaisant $s_0 \otimes s_0 = dz$. Alors

$$\bar{\partial}_g(f s_0) = |s_0|_g^2 \partial_{\bar{z}} f \bar{s}_0.$$

De même, un opérateur $\partial_g : \Gamma(\bar{S}) \rightarrow \Gamma(S)$ est défini à partir de l'opérateur ∂ sur \bar{S} .

L'opérateur de Dirac \mathcal{D} est défini à partir de ces deux opérateurs par [5]

$$\begin{aligned} \mathcal{D} : S \oplus \bar{S} &\rightarrow S \oplus \bar{S} \\ \begin{pmatrix} s_+ \\ s_- \end{pmatrix} &\mapsto \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & \partial_g \\ -\bar{\partial}_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_+ \\ s_- \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour M compacte, l'opérateur de Dirac est elliptique et essentiellement auto-adjoint [43]. Ses valeurs propres sont discrètes et, en dimension 2, symétriques par rapport à 0. Nous les énumérons

$$-\infty \cdots \leq -\lambda_2 \leq -\lambda_1 < \lambda_{0,1} = \dots \lambda_{0,h} < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots + \infty.$$

La dimension h du noyau de \mathcal{D} dépend de la topologie de M , sa structure complexe et sa structure spinorielle. En général, $h \leq 2 \left\lfloor \frac{\gamma+1}{2} \right\rfloor$ où γ est le genre de M [45]. Par la suite, nous ne considérons que les valeurs propres positives. Pour obtenir des quantités invariantes par homothétie de la métrique, les valeurs propres sont normalisées:

$$\bar{\lambda}_k(M, S, g) = \lambda_k(M, S, g) \text{Area}(M, g)^{1/2}.$$

On note par $\Lambda_k(M, S, \mathcal{C})$ l'infimum de $\bar{\lambda}_k(M, S, g)$ sur une classe conforme \mathcal{C} .

L'étude des métriques $\bar{\lambda}_1$ -conformément minimales, c'est à dire les métriques réalisant $\Lambda_1(M, S, \mathcal{C})$, et en particulier la question de leur existence, a été entrepris par B. Ammann dans [3]. En faisant correspondre à Λ_1 une fonctionnelle conformément invariante et en

étudiant ses propriétés, B. Ammann démontre l'existence d'une métrique conformément minimale sur une variété spinorielle si $\Lambda_1(M, S, \mathcal{C})$ est bornée par une certaine constante. En particulier pour les surfaces:

Théorème 4.1.4 ([3]). *Soit M une surface de Riemann compacte de genre γ , S une structure spinorielle dessus et \mathcal{C} une classe conforme de métrique compatible avec la structure complexe. Si*

$$\inf_{g \in \mathcal{C}} \lambda_1(M, S, g) \sqrt{\text{Area}(M, g)} < 2\sqrt{\pi}$$

alors il existe une métrique $g_{min} \in \mathcal{C}$ atteignant l'infimum ayant au plus $\gamma - 1$ singularités.

En utilisant les spineurs λ_1 -propres correspondants et la représentation de Weierstrass spinorielle des surfaces dans \mathbb{R}^3 [80], B. Ammann obtiens de plus une correspondance avec les immersions conformes périodiques et à courbure moyenne constante.

4.2. Valeurs propres et variations métriques

Comme la construction du fibré spinoriel ΣM dépend de la structure complexe sur M , et donc de la classe conforme de la métrique g , l'étude des variations des valeurs propres λ_k de \mathcal{D} en fonction de la métrique doit commencer par une identification des fibrés spinoriels pour différentes métriques. Ce travail a été réalisé par J.-P. Bourguignon et P. Gauduchon dans [6] et a été utilisé pour obtenir une formule de ces variations de $\lambda_k(g)$. Ils montrent que pour des variations analytiques $g(t)$ de la métrique g , avec $\dot{g}(0) = h$, la dérivée d'une branche analytique de λ_k est

$$\left. \frac{d\lambda_k(g_t)}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{1}{2} \int_M \langle h, Q_\psi \rangle$$

où ψ est un λ_k -spineur propre et

$$Q_\psi(X, Y) = \frac{1}{2} \Re(\langle X \cdot \nabla_Y \psi, \psi \rangle + \langle Y \cdot \nabla_X \psi, \psi \rangle),$$

avec ∇ la dérivée covariante sur le fibré de spineurs induite par la connexion de Levi-Civita, et $(\cdot) : TM \times \Sigma M \rightarrow \Sigma M$ est la multiplication de Clifford. La forme bilinéaire Q_ψ est appelée le tenseur d'impulsion-énergie et peut être utilisé pour obtenir une borne inférieure de λ_1 . Elle est aussi liée à la seconde forme fondamentale d'une immersion isométrique à courbure moyenne constante de M dans une variété ayant un champ de spineurs parallèles [70].

Exactement la même démarche, utilisée précédemment pour les valeurs propres de Laplace et de Steklov, permet d'étendre ce résultat à des variations lisses de métrique et d'obtenir la caractérisation des métriques extrémales:

Proposition 4.2.1. *Soit M une surface de Riemann avec une structure spinorielle fixée. Si g est une métrique extrémale pour $\bar{\lambda}_k$ alors il existe des spineurs λ_k -propres tels que*

$$\sum_{j=1}^m Q_{\psi_j} = \lambda_k(g)g.$$

Réciproquement, si ψ_1, \dots, ψ_m sont des spineurs λ_k -propres satisfaisant $\sum_{j=1}^m Q_{\psi_j} = \lambda_k(g)g$ et que $\lambda_k < \lambda_{k+1}$ ou $\lambda_k > \lambda_{k-1}$, alors g est extrémale pour $\bar{\lambda}_k$.

Dans le cas des métriques conformément extrémale, on obtient le résultat simplifié

Proposition 4.2.2. *Soit M une surface de Riemann avec une structure spinorielle fixée. Si g est conformément extrémale pour $\bar{\lambda}_k$, alors il existe des spineurs λ_k -propres ψ_1, \dots, ψ_m tels que*

$$\sum_{j=1}^m |\psi_j|^2 = 1 \quad \text{sur } M.$$

Réciproquement, si ψ_1, \dots, ψ_m sont des spineurs λ_k -propres satisfaisant $\sum_{j=1}^m |\psi_j|^2 = 1$ et que $\lambda_k < \lambda_{k+1}$ ou $\lambda_k > \lambda_{k-1}$ alors g est conformément extrémale pour $\bar{\lambda}_k$.

Remarque 4.2.3. *Pour les métriques qui sont des minimums locaux pour λ_1 , il est toujours possible de prendre $m = 1$ dans les propositions précédentes. En effet, si g est une telle métrique alors les différentes branches des valeurs propres ne peuvent pas se croiser en g puisque cela impliquerait que $\bar{\lambda}_1(g)$ décroît pour certaines variations de métrique, contredisant la minimalité de g .*

Comme pour le cas du Laplacien, les métriques conformément extrémales engendrent des applications harmoniques vers $\mathbb{C}\mathbb{P}^{2m-1}$:

Théorème 4.2.4. *Si g est une métrique $\bar{\lambda}_k$ -conformément extrémale alors il existe des spineurs λ_k -propres ψ_1, \dots, ψ_m avec $\psi_j = (\psi_{j+}, \psi_{j-}) \in \Gamma(S \oplus \bar{S})$ tels que l'application $\Psi = [\psi_{1+} : \bar{\psi}_{1-} : \dots : \psi_{m+} : \bar{\psi}_{m-}] : M \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{2m-1}$ est harmonique.*

Ceci est une conséquence de la proposition précédente et du résultat suivant:

Proposition 4.2.5. *Soit M une surface de Riemann et soient ψ_1, \dots, ψ_m des spineurs propres sur M avec $\psi_j = (\psi_{j+}, \psi_{j-})$, $\mathcal{D}\psi_i = \lambda\psi_i$ et $|\psi_1|^2 + \dots + |\psi_m|^2 = 1$ sur M . Alors l'application $\Psi : M \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{2m-1}$, donnée en coordonnées homogènes par $[\psi_{1+} : \bar{\psi}_{1-} : \dots : \psi_{m+} : \bar{\psi}_{m-}]$, est harmonique.*

DÉMONSTRATION. Soit s_0 une section locale de S telle que $s_0 \otimes s_0 = dz$ et notons $\psi_i = (\psi_{i+}, \psi_{i-}) = (f_{i+}s_0, \bar{f}_{i-}\bar{s}_0)$. Soit $F = (f_{1+}, f_{1-}, \dots, f_{m+}, f_{m-}) : M \rightarrow \mathbb{C}^{2m}$ alors localement $\Psi = [F]$.

Pour démontrer que Ψ est harmonique, il est suffisant de montrer que

$$(\nabla d\Psi)(\partial_z, \partial_{\bar{z}}) = 0$$

pour n'importe quel choix de coordonnées locales z [21].

Nous utilisons l'identification classique $h : T\mathbb{C}\mathbb{P}^{2m-1} \rightarrow \text{Hom}(L, L^\perp) = L^* \otimes L^\perp$ où $L \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^{2m-1} \times \mathbb{C}^{2m}$ est le fibré tautologique de $\mathbb{C}\mathbb{P}^{2m-1}$ et L^\perp le fibré dont la fibre est orthogonale à celle de L en chaque point. Explicitement pour un vecteur $X \in T_x\mathbb{C}\mathbb{P}^{2m-1}$,

$$h(X)(l) := \begin{cases} 0 & \text{si } l = 0 \\ \pi_{L^\perp} \frac{df}{dt}(0) & \text{autrement} \end{cases}$$

où π_{L^\perp} est la projection orthogonale sur L^\perp et f est une section non nulle de $\phi \subset (-\epsilon, \epsilon) \times \mathbb{C}^{2m}$ avec $f(0) = l$ et $\phi : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{2m-1}$ une application telle que $\phi(0) = L_x$ et $\frac{d\phi}{dt}(0) = X$.

Avec cette identification, comme $\Psi = [F]$ localement pour une fonction $F : M \rightarrow \mathbb{C}^{2m}$ non nulle, nous avons pour $X \in TM$

$$h(d\Psi(X))(F) = \pi_{L^\perp} dF(X).$$

Par la suite, l'identification h est gardée implicite.

À partir de l'équation $\mathcal{D}\psi_j = \lambda\psi_j$, nous avons $\partial_{\bar{z}}(f_{j+}, f_{j-}) = \frac{\lambda}{\sqrt{2}|s_0|^2}(-\bar{f}_{j-}, \bar{f}_{j+})$. En particulier, $\partial_{\bar{z}}F$ est orthogonale à F donc

$$d\Psi(\partial_{\bar{z}})(F) = \pi_{L^\perp} \partial_{\bar{z}}F = \partial_{\bar{z}}F$$

et

$$(\nabla d\Psi(\partial_{\bar{z}}, \partial_z))(F) = \pi_{L^\perp} \partial_z \partial_{\bar{z}}F - d\Psi(\partial_{\bar{z}})(\pi_L \partial_z F).$$

Le premier terme à droite donne

$$\begin{aligned} \pi_{L^\perp} \partial_z \partial_{\bar{z}}F &= \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \partial_z \left(\frac{1}{|s_0|^2} \right) (-\bar{f}_{1-}, \bar{f}_{1+}, \dots) + \frac{\lambda}{\sqrt{2}|s_0|^2} \pi_{L^\perp} \partial_z (-\bar{f}_{1-}, \bar{f}_{1+}, \dots) \\ &= \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \partial_z \left(\frac{1}{|s_0|^2} \right) (-\bar{f}_{1-}, \bar{f}_{1+}, \dots), \end{aligned}$$

où nous utilisons l'équation aux valeurs propres de Dirac pour conclure que $\partial_z(-\bar{f}_{1-}, \bar{f}_{1+}, \dots) = -\frac{\lambda}{\sqrt{2}|s_0|^2}F$ et est donc éliminé par la projection π_{L^\perp} sur L^\perp .

En écrivant $\pi_L \partial_z F = \frac{\langle \partial_z F, F \rangle}{|F|^2} F$, le deuxième terme donne

$$\begin{aligned} \pi_{L^\perp} \partial_z \left(\frac{\langle \partial_z F, F \rangle}{|F|^2} F \right) &= \frac{\langle \partial_z F, F \rangle}{|F|^2} \partial_z F \\ &= \frac{\lambda}{\sqrt{2}|s_0|^2} \frac{\langle \partial_z F, F \rangle}{|F|^2} (-\bar{f}_{1-}, \bar{f}_{1+}, \dots). \end{aligned}$$

Il suffit alors de montrer que $\partial_z \left(\frac{1}{|s_0|^2} \right) = \frac{\langle \partial_z F, F \rangle}{|s_0|^2 |F|^2}$. Ceci est une conséquence de l'hypothèse $|\psi_1|^2 + \dots + |\psi_m|^2 = 1$. En effet

$$1 = |\psi_1|^2 + \dots + |\psi_m|^2 = |F|^2 |s_0|^2$$

donc $\partial_z |F|^2 = \partial_z \left(\frac{1}{|s_0|^2} \right)$. Mais $\partial_z |F|^2 = \langle \partial_z F, F \rangle + \langle F, \partial_z F \rangle = \langle \partial_z F, F \rangle$. \square

4.3. Métriques conformément extrémales sur le tore

Dans cette section, nous utilisons le résultat précédent sur les métriques conformément extrémales ainsi que celui de B. Ammann sur l'existence de telles métriques afin de démontrer que dans de nombreuses classes conformes sur le tore, la métrique plate est $\bar{\lambda}_1$ -conformément minimale.

Explicitement, nous indexons chacune des classes conformes sur T par la métrique plate $g_{(x,y)}$ qu'elle contient. Ainsi $(T, [g_{(x,y)}])$ est le tore plat $T = \mathbb{R}^2/\Gamma$ avec Γ le réseau

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbb{Z} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathbb{Z}.$$

Les structures spinorielles S sur T sont équivalentes à un homomorphisme $\chi : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Il y a donc 4 structures spinorielles non équivalentes et nous appelons structure spinorielle triviale S_{tr} celle correspondant à l'application constante $\Gamma \rightarrow 0 \subset \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Pour la structure spinorielle triviale S_{tr} , nous avons sans perte de généralité $|x| \leq \frac{1}{2}, y^2 + x^2 \geq 1$ et $y > 0$, tandis que pour les autres structure spinorielles nous pouvons nous ramener à $\chi(1, 0) = 0, \chi(x, y) = 1$ et $|x| \leq \frac{1}{2}, y^2 + (|x| - 1/2)^2 \geq \frac{1}{4}$ et $y > 0$. Avec cette notation,

Théorème 4.3.1. *Soit $y_S = 2\pi$ si S est la structure spinorielle triviale sur T , et $y_S = \frac{\pi}{2}$ autrement.*

Pour tout $y > y_S$, un minimum de $\lambda_1(T, S, g)\text{Area}(T, g)^{1/2}$ dans la classe conforme $[g_{(x,y)}]$ est atteint par la métrique plate $g_{(x,y)}$.

À titre d'exemple et comme ce résultat sera nécessaire par la suite, nous calculons les valeurs propres de Dirac sur le tore plat. Nous suivons la méthode utilisée dans [35] Section 2.1, pour le calcul sur un tore plat de dimension n .

Lemme 4.3.2. *Soit S une structure spinorielle sur $(T, g_{(x,y)})$ et $\chi : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ son homomorphisme associé. Le spectre de Dirac sur le tore plat $(T, g_{(x,y)})$ est*

$$\text{Spect}(\mathcal{D}) = \left\{ \pm 2\pi \left| \gamma^* + \frac{1}{2} \sum_{j=1,2} \chi(\gamma_j) \gamma_j^* \right| \mid \gamma^* \in \Gamma^* \right\}$$

où Γ^* est le réseau dual de Γ et (γ_1, γ_2) une base de Γ .

DÉMONSTRATION. Comme $T = \mathbb{R}^2/\Gamma$, les spineurs sur T correspondent aux spineurs sur \mathbb{R}^2 satisfaisant les conditions de périodicités

$$\psi(z + k_1\gamma_1 + k_2\gamma_2) = (-1)^{k_1\chi(\gamma_1) + k_2\chi(\gamma_2)} \psi(z) \quad \text{pour tout } k_1, k_2 \in \mathbb{Z}.$$

Le fibré de spineurs de \mathbb{R}^2 étant trivial, un spineur ψ sur \mathbb{R}^2 correspond à une paire de fonctions (ψ_+, ψ_-) , $\psi_{\pm} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$.

Pour un spineur $\phi = (\phi_+, \phi_-)$ constant sur \mathbb{R}^2 donné et $\gamma^* \in \Gamma^*$, on considère le spineur sur \mathbb{R}^2 suivant:

$$\psi(z) = e^{2\pi i \left(\gamma^*(z) + \sum_{j=1,2} \frac{\chi(\gamma_j)}{2} \gamma_j^*(z) \right)} \phi.$$

où $\gamma^*(z)$ veut dire $\gamma^*((\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z))$. Par construction, ce spineur satisfait aux conditions de périodicités et donne donc un spineur sur T .

Soit $\theta_\gamma = \gamma^* + \frac{1}{2} \sum_{j=1,2} \chi(\gamma_j) \gamma_j^*$. Un calcul direct donne

$$\mathcal{D}\psi(z) = \frac{4\pi i}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \theta_\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \\ -\theta_\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{M}} \psi.$$

Ainsi ψ est un spineur propre si c'est un vecteur propre de \mathbf{M} , et pour cela, il suffit que ϕ le soit. Il est facile de voir que les valeurs propres de \mathbf{M} sont $\pm i|\theta_\gamma|$ d'où

$$\{\pm 2\pi|\theta_\gamma| \mid \gamma^* \in \Gamma^*\} \subset \operatorname{Spect}(\mathcal{D})$$

Pour avoir l'égalité, il suffit de remarquer que $\{e^{\gamma^*} \mid \gamma^* \in \Gamma\}$ est une base de $L^2(T, \mathbb{C})$ donc les spineurs ψ_j , construits à partir d'une base de vecteurs propres ϕ_j de \mathbf{M} , forment une base de $L^2(T, \Sigma T)$ en prenant tous les $\gamma^* \in \Gamma^*$. \square

Pour notre preuve du Théorème 4.3.1, nous rappelons le concept de l'énergie d'une application et énonçons quelques résultats. Étant donné une application $F : (M, g) \rightarrow (N, h)$, son *énergie* est

$$E(F) = \frac{1}{2} \int_M |dF|^2 dv_M$$

où $|\cdot|$ est la norme de Hilbert-Schmidt. Comme mentionné auparavant, les points critiques de la fonctionnelle d'énergie sont les applications harmoniques. Si M et N sont des variétés hermitiennes, alors l'énergie peut être décomposée en

$$E(F) = \underbrace{\int_M |\partial F|^2 dv_M}_{E'(F)} + \underbrace{\int_M |\bar{\partial} F|^2 dv_M}_{E''(F)}.$$

On dit que la variété riemannienne (M, g) avec la structure complexe J est kählérienne si la métrique h est hermitienne $h(JX, JY) = h(X, Y), \forall X, Y \in TM$ et sa forme fondamentale $\Omega(X, Y) = h(JX, Y)$ est fermée $d\Omega = 0$ [71]. Les variétés kählériennes ont de nombreuses particularités, notamment si M et N sont compactes et kählériennes alors la différence

$$\tau(F) = E'(F) - E''(F)$$

ne dépend que du degré de l'application F [63].

Nous aurons besoin du résultat suivant sur les applications harmoniques du tore à la sphère ayant une petite énergie:

Théorème 4.3.3 ([27]). *Si $F : T \rightarrow \mathbb{S}^2$ est une application harmonique avec énergie $E(F) < 4\pi$ alors F est une application dans $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{S}^2$.*

PREUVE DU THÉORÈME 4.3.1. La preuve est en trois étapes : d'abord le résultat d'existence de B. Ammann est utilisé pour obtenir l'existence d'une métrique conformément minimale. Après, à partir de cette métrique et des spineurs propres correspondant, une application harmonique $\Psi : T \rightarrow \mathbb{S}^2$ est obtenue et nous calculons son énergie pour appliquer le Théorème 4.3.3. Finalement, nous utilisons que Ψ est une application harmonique vers \mathbb{S}^1 construite à partir de spineurs propres afin de montrer que le facteur conforme $|dz| = |s_0|^2$ pour la métrique minimale est constant.

Le Lemme 4.3.2 donne

$$\lambda_1(T, g_{(x,y)}) = 2\pi \min \left\{ |\gamma^* + \frac{1}{2} \sum_{j=1,2} \chi(\gamma_j) \gamma_j^*|, \gamma^* \in \Gamma^* \right\}$$

où $\Gamma^* = \gamma_1^* \mathbb{Z} + \gamma_2^* \mathbb{Z} := \begin{pmatrix} 1 \\ -x/y \end{pmatrix} \mathbb{Z} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/y \end{pmatrix} \mathbb{Z}$ est le réseau dual de Γ . Comme $y \geq y_S > 1$, on a donc en particulier que

$$\lambda_1(T, g_{(x,y)}) \leq \begin{cases} \frac{2\pi}{y} & \text{pour la structure spinorielle triviale,} \\ \frac{\pi}{y} & \text{autrement.} \end{cases}$$

À part pour cette borne supérieure de λ_1 , la suite de la démonstration ne dépend pas du choix de structure spinorielle. Pour simplifier la notation, nous supposons donc que la structure spinorielle est triviale.

Par l'inégalité précédente, nous avons

$$\begin{aligned} \Lambda_1(T, [g_{(x,y)}], S_{tr}) &:= \inf_{g \in [g_{(x,y)}]} \lambda_1(g) \sqrt{\text{Area}(T, g)} \\ &\leq \lambda_1(T, g_{(x,y)}, S_{tr}) \sqrt{\text{Area}(T, g_{(x,y)})} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{y}}. \end{aligned}$$

Donc pour $y > 2\pi$, la condition nécessaire dans le Théorème 4.1.4 pour l'existence d'un minimiseur g_{min} atteignant $\Lambda_1(T, [g_{(x,y)}])$ est satisfaite. De plus, dans le cas du tore, cette métrique g_{min} n'a pas de singularité. Par la Proposition 4.2.5 et la Remarque 4.2.3, il existe un spineur propre $\psi = (\psi_+, \psi_-)$ sur T tel que

$$\mathcal{D}\psi = \lambda_1(S, g_{min})\psi \quad \text{et} \quad |\psi|_{g_{min}}^2 = 1 \text{ sur } T.$$

Ce spineur donne une application harmonique $\Psi : T \rightarrow \mathbb{CP}^1 = \mathbb{S}^2$, $\Psi = [\psi_+, \bar{\psi}_-]$. Localement, $\psi = (f_+ s_0, \bar{f}_- \bar{s}_0)$ où s_0 est une section locale de S avec $s_0 \otimes s_0 = dz$. On note $F = (f_+, f_-)$ pour que $\Psi = [F]$ localement. Nous avons

$$\begin{aligned} \lambda_1(S, g_{min})^2 \text{Area}(M, g_{min}) &= \int_M \lambda_1^2 |\psi|_{g_{min}}^2 dv_{g_{min}} = \int_M |\mathcal{D}\psi|_{g_{min}}^2 dv_{g_{min}} \\ &= \int_M 2|s_0|^4 \frac{|\partial_{\bar{z}} F|^2}{|F|^2} dv_{g_{min}} \quad \text{comme } 1 = |\psi|^2 = |F|^2 |s_0|^2 \\ &= \int_M 2 \frac{|\pi_{F^\perp} \partial_{\bar{z}} F|^2}{|\partial_{\bar{z}}|^2 |F|^2} dv_{g_{min}} \quad \text{comme } \partial_{\bar{z}} F \perp F \\ &= \int_M |\bar{\partial} \Psi|^2 dv_{g_{min}} = E''(\Psi). \end{aligned}$$

Nous utilisons la métrique à courbure constante sur \mathbb{CP}^1 donnant l'isométrie $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{S}^2$.

L'application $\Psi : T \rightarrow \mathbb{S}^2$ est de degré 0. En effet étant une application harmonique du tore à la sphère, par [20], son degré d est soit 0 soit $|d| \geq 2$. Dans le second cas, l'application est holomorphe ou anti-holomorphe. Comme Ψ vient d'un spineur propre avec $\lambda_1 \neq 0$, l'application ne peut pas être holomorphe puisque cela impliquerait $\mathcal{D}\psi = 0$. Mais si elle est anti-holomorphe alors $\bar{\lambda}_1^2 = E''(\Psi) = E(\Psi) = 4|d|\pi > 4\pi$.

En utilisant le degré de Ψ et notre calcul de $E''(\Psi)$, nous obtenons son énergie $E(\Psi)$ de la façon suivante. Comme T et \mathbb{S}^2 sont kählériennes, la différence $\tau(\Psi)$ dépend seulement du degré $\deg \Psi = 0$ et donc $\tau(\Psi) = 0$ en comparant avec l'application constante qui est aussi de degré 0. D'où $E'(\Psi) = E''(\Psi)$ et au total

$$E(\Psi) = 2\Lambda_1(T, [g_{(x,y)}], S)^2 < 4\pi$$

où nous utilisons la borne supérieure de $\Lambda_1(T, [g_{(x,y)}])$ précédemment trouvée.

Donc par le Théorème 4.3.3, nous avons que Ψ envoie dans un cercle $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{S}^2$. Comme les combinaisons linéaires des spineurs propres ψ et $J(\psi) = (-\bar{\psi}_-, \bar{\psi}_+)$ donne la même application Ψ après une rotation de \mathbb{S}^2 [80], nous pouvons supposer sans perte de généralité que Ψ envoie dans l'équateur et donc $\left| \frac{\psi_+}{\psi_-} \right| = 1$, ce qui implique $|f_+| = |f_-|$.

Soit $\phi = \frac{f_+}{f_-}$ alors ϕ est une application harmonique vers $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ (puisque Ψ est harmonique et $\Psi = [\phi : 1]$). Résoudre pour les applications harmoniques $T \rightarrow \mathbb{S}^1$ donne

$$\phi = e^{i\pi\gamma^*} \quad \text{avec } \gamma^* \in \Gamma^*.$$

Donc $f_+ = e^{i\pi\gamma^*} f_-$. L'équation aux valeurs propres de Dirac pour f_\pm donne:

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\lambda_1 |f_+|^2 \bar{f}_+ &= \partial_{\bar{z}} f_- = \partial_{\bar{z}} (e^{-i\pi\gamma^*(z)} f_+) \\ &= -i\pi \partial_{\bar{z}} (\gamma^*(z)) e^{-i\pi\gamma^*(z)} f_+ + e^{-i\pi\gamma^*(z)} \partial_{\bar{z}} f_+ \\ &= -i\pi \partial_{\bar{z}} (\gamma^*(z)) e^{-i\pi\gamma^*(z)} f_+ - \sqrt{2}\lambda_1 |f_+|^2 \bar{f}_+ \end{aligned}$$

ici nous utilisons que $|s_0|^2 = \frac{1}{|f_+|^2 + |f_-|^2} = \frac{1}{2|f_+|^2}$. Donc

$$2\sqrt{2}\lambda_1|f_+|^2\bar{f}_+ = -i\pi\partial_{\bar{z}}(\gamma^*(z))e^{-i\pi\gamma^*(z)}f_+$$

et en prenant la norme nous obtenons $8\lambda_1^2|f_+|^2 = \pi^2|\partial_{\bar{z}}(\gamma^*(z))|^2$ et ainsi

$$\frac{1}{|s_0|^2} = |f|^2 = \frac{\pi^2|\partial_{\bar{z}}(\gamma^*(z))|^2}{4\lambda_1^2}$$

qui est constant sur T . En se rappelant que $|s_0|^2 = |dz|^2$, nous concluons que g_{min} est plate. \square

4.4. D'autres directions de recherche pour les métriques extrémales de Dirac

Comme l'illustre les résultats précédents, les idées développées afin de traiter le problème des métriques extrémales de Laplace et Steklov peuvent s'étendre au problème de Dirac, et cela malgré le fait que les fonctions propres sont, pour Dirac, des sections d'un fibré vectoriel. En dimension 2, cette apparente difficulté se retrouve simplifiée par les formes particulières qu'ont le fibré de spineurs $S \oplus \bar{S}$ et l'opérateur de Dirac et qui permettent l'utilisation de techniques de géométrie complexe. En revanche en dimension $n > 2$ supérieure, ce n'est plus le cas et bien que les Propositions 4.2.1 et 4.2.2 pour les points critiques de $\bar{\lambda}_k$ s'appliquent encore, leur formulation en terme d'objet géométrique est non triviale.

Une autre méthode utilisée dans le cas du laplacien et qu'il serait intéressant d'appliquer au problème de Dirac est la suivante: pour le cas du laplacien, le volume conforme de P. Li et S.-T. Yau donne une borne supérieure pour le supremum de la première valeur propre normalisée dans une classe conforme [62]. Cette idée a inspiré une technique d'optimisation *min-max* de l'énergie d'applications vers des sphères, développée par M. Karpukhin et D. Stern [54]. Celle-ci donne entre autres une nouvelle preuve (et méthode de construction) de métriques conformément maximales.

Au vu du rôle similaire joué par l'énergie et les applications harmoniques vers la sphère pour le problème de Dirac, il est raisonnable d'essayer d'étendre cette méthode au problème de Dirac. Mais cela présente plusieurs défis: premièrement pour qu'un champ de spineurs puisse être utilisé comme fonction test dans la caractérisation variationnelle de la première valeur propre non nulle de Dirac, il doit être orthogonal au noyau de \mathcal{D} . Or la dimension du noyau de \mathcal{D} dépend de la classe conforme sur une surface de genre $\gamma \geq 3$, et de plus il existe des surfaces de genre γ arbitrairement grand avec des classes conformes telles que $\dim \ker \mathcal{D} = 2 \left\lceil \frac{\gamma+1}{2} \right\rceil$. Donc la dimension du noyau peut être arbitrairement grande d'où un nombre de contraintes arbitrairement grand pour les spineurs tests. Dans le cas du laplacien, il y a qu'une seule contrainte: il suffit à une application vers une sphère \mathbb{S}^m d'être d'intégrale nulle pour que ces composantes soient des fonctions tests, ce qui s'obtient dans la construction

min-max en considérant des familles bien choisies d'applications. Pour le problème de Dirac il faudrait définir de telles familles, de façon à

- (1) ce qu'il soit possible de prouver l'existence dans chacune d'entre elles d'une application vers $\mathbb{C}\mathbb{P}^{2m-1}$ qui permette d'obtenir un m -uplet de spineurs tests (ψ_1, \dots, ψ_m) orthogonaux au noyau de \mathcal{D} ,
- (2) qu'il y ait un concept d'énergie de ces applications donnant une borne supérieure pour $\bar{\lambda}_1$ et qui se comporte bien sur la famille, par exemple : l'application harmonique obtenue pour une métrique minimale devrait être un maximum de cet énergie dans une de ces familles.

Avec ces ingrédients, une optimisation min-max de l'énergie pour le problème de Dirac pourrait servir pour une nouvelle preuve d'existence de métriques $\bar{\lambda}_1$ -conformément minimales.

Références bibliographiques

- [1] M. S. AGRANOVICH : On a mixed Poincaré-Steklov type spectral problem in a Lipschitz domain. *Russian Journal of Mathematical Physics*, 13:239–244, 2006.
- [2] B. AMMANN : A spin-conformal lower bound of the first positive Dirac eigenvalue. *Differential Geometry and its Applications*, 18:21–32, 2003.
- [3] B. AMMANN : The smallest Dirac eigenvalue in a spin-conformal class and cmc-immersions. *Communications in Analysis and Geometry*, 17:429–479, 2009.
- [4] W. ARENDT et R. MAZZEO : Friendlander’s eigenvalue inequalities and the Dirichlet-to-Neumann semigroup. *Communications on Pure & Applied Analysis*, 11:2201–2212, 2012.
- [5] M. F. ATIYAH : Riemann surfaces and spin structures. *Annales scientifiques de l’école normale supérieure*, 4:47–62, 1971.
- [6] J. P. BOURGUIGNON et P. GAUDUCHON : Spineurs, opérateur de Dirac et variations de métriques. *Communications in Mathematical Physics*, 144:581–599, 1992.
- [7] A. BUCUR, V. FERONE, C. NITSCH et C. TROMBETTI : Weinstock inequality in higher dimensions. *J. Differential Geometry*, 118(1):1–21, 2021.
- [8] I. CHAVEL : *Eigenvalues in Riemannian geometry*, volume 115 de *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1984. Including a chapter by Burton Randol, With an appendix by Jozef Dodziuk.
- [9] D. CIANCI et A. GIROUARD : Large spectral gaps for Steklov eigenvalues under volume constraints and under localized conformal deformations. *Ann. Global Anal. Geom.*, 54(4):529–539, 2018.
- [10] B. COLBOIS : The spectrum of the Laplacian: a geometric approach. In *Geometric and computational spectral theory*, volume 700 de *Contemp. Math.*, pages 1–40. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2017.
- [11] B. COLBOIS et J. DODZIUK : Riemannian metrics with large λ_1 . *Proceedings of the American Mathematical Society*, 122:905–906, 1994.
- [12] B. COLBOIS et A. EL SOUFI : Extremal eigenvalues of the laplacian in a conformal class of metrics: the “conformal spectrum”. *Annals of Global Analysis and Geometry*, 24:337–349, 2003.
- [13] B. COLBOIS, A. EL SOUFI et A. GIROUARD : Isoperimetric control of the Steklov spectrum. *Journal of Functional Analysis*, 261(5):1384–1399, 2011.
- [14] B. COLBOIS, A. EL SOUFI et A. GIROUARD : Compact manifolds with fixed boundary and large Steklov eigenvalues. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 147:3813–3827, 2019.
- [15] B. COLBOIS, A. GIROUARD et K. GITTINS : Steklov eigenvalues of submanifolds with prescribed boundary in Euclidean space. *J. Geom. Anal.*, 29:1811–1834, 2019.
- [16] B. COLBOIS, A. GIROUARD et A. HASSENNEZHAD : The Steklov and Laplacian spectra of Riemannian manifolds with boundary. *arXiv:1810.00711*, 2018.

- [17] B. COLBOIS, A. GIROUARD et A. MÉTRAS : Hypersurfaces with prescribed boundary and small Steklov eigenvalues. *Canadian Mathematical Bulletin*, 63, 2020.
- [18] J. EELLS et J. LEMAIRE : A report on harmonic maps. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 10:1–68, 1978.
- [19] J. EELLS et J. LEMAIRE : Another report on harmonic maps. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 20:385–524, 1988.
- [20] J. EELLS et J. C. WOOD : Restrictions on harmonic maps of surfaces. *Topology*, 15:263–266, 1976.
- [21] J. EELLS et J. C. WOOD : Harmonic maps from surfaces to complex projective spaces. *Advances in Mathematics*, 49:217–263, 1983.
- [22] A. EL SOUFI, H. GIACOMINI et M. JAZAR : A unique extremal metric for the least eigenvalue of the Laplacian on the Klein bottle. *Duke Mathematical Journal*, 135:181–202, 2006.
- [23] A. EL SOUFI et S. ILIAS : Riemannian manifolds admitting isometric immersions by their first eigenfunctions. *Pacific Journal of Mathematics*, 195:91–99, 2000.
- [24] A. EL SOUFI et S. ILIAS : Extremal metrics for the first eigenvalue of the Laplacian in a conformal class. *Proceedings of the AMS*, 131:1611–1618, 2002.
- [25] A. EL SOUFI et S. ILIAS : Laplacian eigenvalues functionals and metric deformations on compact manifolds. *J. Geom. Phys.*, 58:89–104, 2008.
- [26] X.-Q. FANG et L.-F. TAM : Extremal problems for Steklov eigenvalues on annuli. *Calc. Var.*, 54:1043–1059, 2015.
- [27] D. FERUS, K. LESCHKE, F. PEDIT et U. PINKALL : Quaternionic holomorphic geometry: Plücker formula, Dirac eigenvalue estimates and energy estimates of harmonic 2-tori. *Inventiones Mathematicae*, 146:507–593, 2001.
- [28] A. FRASER et P. SARGENT : Existence and classification of \mathbb{S}^1 -invariant free boundary minimal annuli and Möbius bands in \mathbb{B}^n . *The Journal of Geometrical Analysis*, 31:2703–2725, 2021.
- [29] A. FRASER et R. SCHOEN : The first Steklov eigenvalue, conformal geometry, and minimal surfaces. *Advances in Mathematics*, 226:4011–4030, 2011.
- [30] A. FRASER et R. SCHOEN : Minimal surfaces and eigenvalue problems. *Geometric analysis, mathematical relativity, and nonlinear partial differential equations*, 599:105–121, 2012.
- [31] A. FRASER et R. SCHOEN : Sharp eigenvalue bounds and minimal surfaces in the ball. *Inventiones mathematicae*, 203:823–890, 2016.
- [32] A. FRASER et R. SCHOEN : Shape optimization for the Steklov problem in higher dimensions. *Advances in Mathematics*, 348:146–162, 2019.
- [33] T. FRIEDRICH : On the spinor representation of surfaces in Euclidean 3-space. *Journal of Geometry and Physics*, 28:143–157, 1998.
- [34] T. FRIEDRICH : *Dirac operators in Riemannian geometry*, volume 25. American Mathematical Society, 2000.
- [35] N. GINOUX : *The Dirac spectrum*. Lecture notes in mathematics. Springer, 2009.
- [36] A. GIROUARD, M. KARPUKHIN et J. LAGACÉ : Continuity of eigenvalues and shape optimisation for Laplace and Steklov eigenvalues. *arXiv:2004.10784*, 2020.
- [37] A. GIROUARD et J. LAGACÉ : Large Steklov eigenvalues via homogenisation on manifolds. *arXiv:2004.04044*, 2020.
- [38] A. GIROUARD, L. PARNOVSKI, I. POLTEROVICH et D. A. SHER : The Steklov spectrum of surfaces: asymptotics and invariants. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 157(3):379–389, 2014.

- [39] A. GIROUARD et I. POLTEROVICH : On the Hersch-Payne-Schiffer inequalities for Steklov eigenvalues. *Functional Analysis and its Applications*, 44(2):106–117, 2010.
- [40] A. GIROUARD et I. POLTEROVICH : Spectral geometry of the Steklov problem. *J. Spectr. Theory*, 7(2):321–359, 2017.
- [41] A. GRIGOR'YAN, Y. NETRUSOV et S.-T. YAU : Eigenvalues of elliptic operators and geometric applications. *Surveys in differential geometry*, 9:147–217, 2004.
- [42] A. HASSANNEZHAD : Conformal upper bounds for the eigenvalues of the Laplacian and Steklov problem. *Journal of Functional Analysis*, 261:3419–3436, 2011.
- [43] O. HIJAZI : Spectral properties of the Dirac operator and geometrical structures. *Geometric Methods for Quantum Field Theory*, pages 116–169, 2001.
- [44] M. W. HIRSCH : *Differential topology*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976. Graduate Texts in Mathematics, No. 33.
- [45] N. HITCHIN : Harmonic spinors. *Advances in Mathematics*, 14:1–55, 1974.
- [46] D. JAKOBSON, N. NADIRASHVILI et I. POLTEROVICH : Extremal metric for the first eigenvalue on a Klein bottle. *Canadian Journal of Mathematics*, 58:381–400, 2006.
- [47] C.-Y. KAO, B. OSTING et E. OUDET : Computation of free boundary minimal surfaces via extremal Steklov eigenvalue problems. *arXiv:2007.15033*, 2020.
- [48] M. KARPUKHIN : Bounds between Laplace and Steklov eigenvalues on nonnegatively curved manifolds. *Electron. Res. Announc. Math. Sci.*, 24:100–109, 2017.
- [49] M. KARPUKHIN : Index of minimal surfaces and isoperimetric eigenvalue inequalities. *Inventiones Mathematicae*, 223:335–377, 2021.
- [50] M. KARPUKHIN, G. KOKAREV et I. POLTEROVICH : Multiplicity bounds for Steklov eigenvalues on Riemannian surfaces. *Annales de l'Institut Fourier*, 64:2481–2502, 2014.
- [51] M. KARPUKHIN et A. MÉTRAS : Laplace and steklov extremal metrics via n -harmonic maps. *The Journal of Geometric Analysis*, 32, 2022.
- [52] M. KARPUKHIN, N. NADIRASHVILI, A. PENSKOI et I. POLTEROVICH : Conformally maximal metrics for Laplace eigenvalues on surfaces. *arXiv:2003.02871*, 2020.
- [53] M. KARPUKHIN, N. NADIRASHVILI, A. PENSKOI et I. POLTEROVICH : An isoperimetric inequality for Laplace eigenvalues on the sphere. *J. Differential Geom.*, 118:313–333, 2021.
- [54] M. KARPUKHIN et D. L. STERN : Min-max harmonic maps and a new characterization of conformal eigenvalues. *arXiv:2004.04086*, 2020.
- [55] G. KOKAREV : Variational aspects of Laplace eigenvalues on Riemannian surfaces. *Advances in Mathematics*, 258:191–239, 2014.
- [56] N. KOREVAAR : Upper bounds for eigenvalues of conformal metrics. *Journal of Differential Geometry*, 37:73–79, 1993.
- [57] N. KOREVAAR : Upper bounds for eigenvalues of conformal metrics. *J. Differential Geom.*, 37:79–93, 1993.
- [58] N. KUZNETSOV, T. KULCZYCKI, M. KWAŚNICKI, A. NAZAROV, S. POBORCHI, I. POLTEROVICH et B. SIUDEJA : The legacy of Vladimir Andreevich Steklov. *Notices Amer. Math. Soc.*, 61(1):9–22, 2014.
- [59] N. KUZNETSOV, T. KULCZYCKI, M. KWAŚNICKI, A. NAZAROV, S. POBORCHI, I. POLTEROVICH et B. SIUDEJA : The legacy of Vladimir Andreevich Steklov. *Notices of the AMS*, 61:9–22, 2014.
- [60] J. M. LEE et G. UHLMANN : Determining anisotropic real-analytic conductivities by boundary measurements. *Comm. Pure Appl. Math.*, 42(8):1097–1112, 1989.

- [61] M. LI : Free boundary minimal surfaces in the unit ball: recent advances and open questions. *arXiv:1907.05053*, 2020.
- [62] P. LI et S.-T. YAU : A new conformal invariant and its applications to the Willmore conjecture and the first eigenvalue of compact surfaces. *Inventiones Mathematicae*, 69:269–291, 1982.
- [63] A. LICHNEROWICZ : Applications harmoniques et variétés kählériennes. *Seminario Matematico e Fisico di Milano*, 39:186–195, 1969.
- [64] J. LOTT : Eigenvalue bounds for the Dirac operator. *Pacific journal of Mathematics*, 125:117–126, 1986.
- [65] H. MATTHIESEN : Extremal metrics for Laplace eigenvalues in perturbed conformal classes on products. *The Journal of Geometric Analysis*, 29:2456–2468, 2019.
- [66] H. MATTHIESEN et R. PETRIDES : Free boundary minimal surfaces of any topological type in Euclidean balls via shape optimization. *arXiv:2004.06051*, 2020.
- [67] H. MATTHIESEN et R. PETRIDES : A remark on the rigidity of the first conformal Steklov eigenvalue. *arXiv:2006.04364*, 2020.
- [68] H. MATTHIESEN et A. SIFFERT : Handle attachment and the normalized first eigenvalue. *arXiv:1909.03105*, 2019.
- [69] V. MEDVEDEV : Degenerating sequences of conformal classes and the conformal Steklov spectrum. *Canadian Journal of Mathematics*, 2021.
- [70] B. MOREL : *Tenseur d'impulsion-énergie et géométrie spinorielle extrinsèque*. Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré-Nancy I, 2002.
- [71] A. MOROIANU : *Lectures on Kähler geometry*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 2007.
- [72] N. NADIRASHVILI : Berger's isoperimetric problem and minimal immersions of surfaces. *Geom. Funct. Anal.*, 6:877–897, 1996.
- [73] N. NADIRASHVILI et Y. SIRE : Conformal spectrum and harmonic maps. *Moscow Mathematical Journal*, 15:123–140, 2015.
- [74] R. PETRIDES : Existence and regularity of maximal metrics for the first Laplace eigenvalue on surfaces. *Geometric and Functional Analysis*, 24:1336–1376, 2004.
- [75] R. PETRIDES : On the existence of metrics which maximize Laplace eigenvalues on surfaces. *Int. Math. Research Notices*, 14:4261–4355, 2018.
- [76] R. PETRIDES : Maximizing Steklov eigenvalues on surfaces. *Journal of Differential Geometry*, 113:95–188, 2019.
- [77] I. POLTEROVICH et D. A. SHER : Heat invariants of the Steklov problem. *J. Geom. Anal.*, 25(2):924–950, 2015.
- [78] L. PROVENZANO et J. STUBBE : Weyl-type bounds for Steklov eigenvalues. *J. Spectr. Theory*, to appear.
- [79] S. E. SHAMMA : Asymptotic behavior of Stekloff eigenvalues and eigenfunctions. *SIAM J. Appl. Math.*, 20:482–490, 1971.
- [80] I. A. TAIMANOV : Two dimensional Dirac operator and the theory of surfaces. *Russian Math. Surveys*, 61:79–159, 2006.
- [81] T. TAKAHASHI : Minimal immersions of Riemannian manifolds. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 18, 1966.
- [82] H. TAKEUCHI : Some conformal properties of p -harmonic maps and a regularity for sphere-valued p -harmonic maps. *J. Math. Soc. Japan*, 46:217–234, 1994.
- [83] M. TAYLOR : *Partial Differential Equations I*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 2011.

- [84] Q. WANG et C. XIA : Sharp bounds for the first non-zero Stekloff eigenvalues. *J. Funct. Anal.*, 257(8): 2635–2644, 2009.
- [85] R. WEINSTOCK : Inequalities for a classical eigenvalue problem. *Journal of Rational Mechanics*, pages 745–753, 1954.