

Université de Montréal

**Sur la relation entre les métriques de nature symplectique
et la métrique de Hausdorff en présence de bornes
riemanniennes**

par

Jean-Philippe Chassé

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée en vue de l'obtention du grade de
Philosophiæ Doctor (Ph.D.)
en mathématiques

Orientation mathématiques fondamentales

Mai 2022

Université de Montréal

Faculté des arts et des sciences

Cette thèse intitulée

Sur la relation entre les métriques de nature symplectique et la métrique de Hausdorff en présence de bornes riemanniennes

présentée par

Jean-Philippe Chassé

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Egor Shelukhin

(président-rapporteur)

Octavian Cornea

(directeur de recherche)

François Lalonde

(membre du jury)

Alberto Abbondandolo

(examineur externe)

William Witzczak-Krempa

(représentant du doyen de la FESP)

Résumé

La présente thèse s'intéresse à la relation entre diverses métriques provenant de la topologie symplectique définies sur une collection de sous-variétés lagrangiennes et la métrique de Hausdorff lorsque les sous-variétés étudiées respectent certaines bornes provenant de la géométrie riemannienne. Après une introduction aux notions préalables à la compréhension de la thèse, nous démontrons dans un premier temps que, pour une grande classe de métriques de nature symplectique, la convergence vers une sous-variété lagrangienne plongée implique la convergence vers celle-ci dans la métrique de Hausdorff. Cette classe de métriques inclut des métriques bien connues comme la métrique de Hofer lagrangienne et la métrique spectrale, mais également des additions plus récentes comme les métriques d'ombre.

Nous étudions ensuite le problème inverse : dans quels contextes pouvons-nous dire que la convergence dans la métrique de Hausdorff implique la convergence dans certaines métriques de nature symplectique ? Nous répondons à cette question lorsque les sous-variétés lagrangiennes considérées sont exactes, en démontrant dans la même lancée des versions métriques de la conjecture de la lagrangienne proche et de la conjecture de Viterbo sur la norme spectrale. Les techniques développées nous permettent aussi d'obtenir des résultats de C^0 -rigidité pour plusieurs types de sous-variétés d'une variété symplectique ou de contact.

Mots-clés : Topologie symplectique ; topologie de contact ; géométrie riemannienne ; sous-variétés lagrangiennes ; distance de Hausdorff ; courbes J -holomorphes ; lemme de monotonie ; topologie symplectique C^0 .

Abstract

The present thesis' interest resides in the relation between various metrics coming from symplectic topology defined on a collection of Lagrangian subvarieties and the Hausdorff metric in the case when the subvarieties we study respect certain bounds coming from Riemannian geometry. After an introduction to the notions required for the understanding of the thesis, we first show that, for a large class of metrics coming from symplectic topology, the convergence to an embedded Lagrangian submanifold implies that the convergence is also in the Hausdorff metric. This class of metrics includes well-known metrics such as the Lagrangian Hofer metric and the spectral metric, but also more recent additions to field like shadow metrics.

We then study the inverse problem: in which contexts can we say that convergence in the Hausdorff metric implies convergence in some metrics coming from symplectic topology? We answer this question when the considered Lagrangian submanifolds are exact, proving at the same time metric versions of the nearby Lagrangian conjecture and of the Viterbo conjecture on the spectral norm. The techniques that we develop also allow us to obtain C^0 -rigidity results for several types of submanifolds of a symplectic or contact variety.

Keywords: Symplectic topology; contact topology; Riemannian geometry; Lagrangian submanifolds; Hausdorff distance; J -holomorphic curves; monotonicity lemma; C^0 -symplectic topology.

Table des matières

Résumé	5
Abstract	7
Table des figures	13
Liste des sigles et des abréviations	15
Remerciements	17
Introduction	19
0.1. Notions de topologie symplectique.....	19
0.1.1. Variétés symplectiques et sous-variétés d'importance.....	19
0.1.2. Outils techniques de la topologie symplectique.....	24
0.1.3. Métriques sur une collection de sous-variétés lagrangiennes.....	43
0.1.4. Variétés de contact et sous-variétés isotropes	55
0.2. Notions ensemblistes et de géométrie riemannienne	58
0.2.1. Un peu de géométrie riemannienne	58
0.2.2. Métrique de Hausdorff.....	71
Premier article. Convergence and Riemannian bounds on Lagrangian submanifolds	75
1. Introduction and main result	76

1.1.	Some notation and definitions	77
1.2.	A conjecture on convergence in Lagrangian spaces	81
1.3.	Structure of the paper	82
1.4.	Acknowledgments	83
2.	The general proof	83
2.1.	J -adapted metrics	84
2.2.	A version of the monotonicity lemma	86
2.3.	Proof of Theorem 1.4.	91
3.	The two-dimensional case	95
3.1.	Finding a good disk	97
3.2.	Proof of technical results	104
4.	Badly-behaved sequences	107
Deuxième article. Hausdorff limits of submanifolds of symplectic and contact manifolds		111
1.	Introduction	112
1.1.	Precise statements	114
1.2.	Organization of the paper	117
1.3.	Acknowledgments	117
2.	Sequences of immersions	118
2.1.	Immersions with converging images	118
2.2.	Proof of Theorem 2.1.	120
2.3.	Rigidity of Lagrangian embeddings	122

3. Hausdorff limits of sequences of certain submanifolds	124
3.1. Proof of Theorem 2.5.....	124
3.2. The tame and bounded volume conditions	128
3.3. Limits in the absence of volume bounds.....	131
3.4. Limits in the absence of any Riemannian bounds.....	134
Conclusion	137
Index.....	141
Références bibliographiques.....	145

Table des figures

1	Visualisation 3D d'une bande u (en rose) de x_- à x_+ (en bleu) avec un capuchon possible v_- (en violet) de x_-	30
2	Deux limites <i>a priori</i> possibles d'une suite d'éléments de $\mathfrak{M}(\bar{x}, \bar{z}; C)$ (en rose) : en haut, un phénomène d'ébullition et en bas, une trajectoire brisée telle que désirée.....	32
3	Un triangle dans $\mathfrak{M}^3(x_2, x_1, x_0)$ lorsque $H_{L_i, L_{i-1}} \equiv 0$	38
4	Projection d'un cobordisme $V : (L'_1, L'_2, L'_3) \rightsquigarrow (L_1, L_2)$ dans \mathbb{C} (région bleue) et sa silhouette (union des régions bleue et rose hachurée).	47
5	Une application f réalisant un champ de Jacobi J le long d'une géodésique γ . .	66
6	Visualization in two dimensions, both in the codomain (left) and domain (right).	89
7	The 3σ -neighborhood of L' (in pink) contains the connected component containing L' of the σ -neighborhood of $L' \cup ((\overline{UF}) \cap (\overline{UF}'))$ (in blue).	94
8	Some relevant geodesic segments (in hatched purple) and points in the disk $D_\rho(s)$ (in pink).	102
9	Multiple disks of the form $D_\rho(t_i)$ (in pink) with the inevitable point in $B_{\rho+\varepsilon}(\gamma_{t_n}(\rho))$ breaking the curvature constraint (both in blue).	103
10	L_n as n gets larger	108

Liste des sigles et des abréviations

\mathbb{N}	Nombres naturels, débutant par 1
\mathbb{Z}	Entiers relatifs
\mathbb{Z}_2	Corps à deux éléments
\mathbb{R}	Nombres réels
\mathbb{C}	Nombres complexes
\mathbb{D}	Disque fermé de rayon 1 dans \mathbb{C}
$\mathbb{1}$	Transformation identité
ι	Produit intérieur
\wedge	Produit extérieur
d	Dérivée extérieure
\mathcal{L}	Dérivée de Lie
TM	Fibré tangent de la variété lisse M
T^*M	Fibré cotangent de la variété lisse M
$\Omega^k(M)$	Espace des k -formes d'une variété lisse M
$\Gamma(E)$	Espace des sections lisses d'un fibré lisse E
$C^\infty(M, N)$	Espace des fonctions lisses $M \rightarrow N$
$C^\infty(M)$	Espace des fonctions lisses $M \rightarrow \mathbb{R}$
$C_c^\infty(M)$	Espace des fonctions lisses $M \rightarrow \mathbb{R}$ à support compact

Remerciements

Je veux tout d'abord remercier Octav pour m'avoir proposé ce projet de recherche en premier lieu, puis pour m'avoir offert son support et ses conseils à travers mon doctorat. Ses remarques ont grandement façonné ma recherche durant cette période et continueront de le faire dans les prochaines.

Mon doctorat n'aurait pas non plus été le même sans les perspectives révélatrices de François et de Egor et l'entraide avec les autres doctorants en topologie symplectique : Pierre-Alexandre, Dominique, Dustin, Filip et Marcello. De plus, la vie étudiante au département aurait grandement souffert sans la présence de Jonathan et d'Élise.

Bien sûr, je me dois de remercier de nombreuses personnes hors du département pour les joies et le support émotionnel qu'ils ont su m'apporter tout au long de ce doctorat. Considérant le nombre de personnes que cela inclut, pour le bénéfice de la personne lectrice, je tâcherai de ne mentionner que quelques noms. Je voudrais donc particulièrement dire merci à Roon pour supporter et me suivre dans mes excentricités, Alexis pour son support infailible (incluant dans la relecture de l'introduction de cette thèse), Nina et Camille pour m'avoir inclus dans de nombreuses aventures loufoques, et finalement Jean-Pascal, Antoine, Rémi et Ludovic pour avoir été la meilleure des compagnies lors de nos nombreuses soirées arrosées.

Finalement, j'aimerais remercier mes parents et ma sœur pour leurs encouragements à travers mon parcours académique, malgré leur confusion intermittente quant au choix dudit parcours.

Introduction

Dans ce chapitre, nous introduisons les notions qui seront nécessaires à la compréhension du reste de cette thèse. Pour ce faire, nous couvrons d'abord les bases de la topologie symplectique, puis celle de la géométrie riemannienne. Nous profiterons également de la section sur la topologie symplectique pour discuter légèrement de topologie de contact et de celle sur la géométrie riemannienne pour introduire quelques notions ensemblistes essentielles pour la suite.

Afin d'accourcir une présentation déjà longue, nous supposons que la personne lectrice est déjà à l'aise avec les bases de la géométrie différentielle, de la topologie algébrique et de l'algèbre homologique. De plus, nous ne démontrons pas les résultats de ce chapitre, puisqu'ils sont standards dans leur domaine respectif. Ceci dit, nous tâchons d'offrir à la personne intéressée une source pour chaque résultat ici cité.

0.1. Notions de topologie symplectique

Dans cette section, nous couvrons les notions de topologie symplectique centrales à cette thèse. Nous commençons la présentation par des définitions standards du sujet, puis introduisons des outils plus complexes en donnant l'idée des détails techniques inhérents à leur construction. Finalement, nous couvrons quelques notions de base de topologie de contact qui seront pratiques plus tard.

0.1.1. Variétés symplectiques et sous-variétés d'importance

Nous débutons cette section avec quelques définitions et résultats standards de la topologie symplectique. À des fins de brièveté, nous supposons que la personne lectrice possède déjà des connaissances modérées en géométrie différentielle.

Une bonne source pour les résultats de cette section est le classique livre de McDuff et Salamon sur le sujet [MS17]. Ainsi, la personne intéressée pourra y lire les preuves de tous les résultats ici cités, sauf mention du contraire.

Variétés symplectiques

Nous introduisons maintenant l'entité la plus fondamentale du sujet : la variété symplectique.

Définition 0.1. Une *variété symplectique* est un couple (M, ω) , où M est une variété lisse et ω est une 2-forme différentielle fermée et non-dégénérée sur M .

Lorsque le contexte est clair, nous notons par simplement M la variété symplectique. Notons qu'il suit de la non-dégénérescence de ω que M est nécessairement de dimension paire. Plus généralement, les conditions sur ω peuvent sembler opaques, mais nous verrons plus bas qu'elles forcent une description locale particulièrement simple.

Exemple 0.2. Soit L , une variété lisse de dimension n . Son fibré cotangent T^*L hérite de la **1-forme canonique** :

$$\lambda_0 := \sum_{i=1}^n p_i dq_i,$$

où les $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ sont des coordonnées locales de T^*L telles que les q_i sont des coordonnées de L et les p_i sont des coordonnées linéaires de la fibre $T_{(q_1, \dots, q_n)}^*L$. Alors, $(T^*L, \omega_0 := d\lambda_0)$ est une variété symplectique.

En particulier, en prenant $L = \mathbb{R}^n$, nous retrouvons la structure symplectique canonique de $T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$.

Plus généralement, les variétés symplectiques dont la forme symplectique est exacte seront dites exactes. Alors, une 1-forme λ telle que $\omega = d\lambda$ est appelée une forme de Liouville. C'est une application directe du théorème de Stokes que ces variétés sont nécessairement non-compactes.

Les variétés de dimension 2, c'est-à-dire les surfaces, donnent aussi de nombreux exemples de variétés symplectiques.

Exemple 0.3. Soit Σ , une surface orientée. Alors, elle admet une métrique kählérienne g , une structure complexe j et une forme symplectique $\omega = g(j\cdot, \cdot)$.

Un fait important sur les variétés symplectiques que nous utiliserons plus tard est l'absence d'invariant local de ces variétés, en opposition totale avec les variétés riemanniennes, dont nous parlerons plus loin.

Théorème 0.4 (Théorème de Darboux). *Soient (M, ω) , une variété symplectique de dimension $2n$, et $x \in M$. Il existe une carte $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ d'un voisinage U de x , dite **carte de Darboux** centrée en x , telle que $\varphi^* \omega_0 = \omega$ et $\varphi(x) = 0$, où ω_0 est la forme symplectique standard de \mathbb{R}^{2n} .*

Comme mentionné ci-haut, le théorème de Darboux permet une autre description des variétés symplectiques : une 2-forme ω sur une variété lisse M est une forme symplectique si et seulement s'il existe une carte de Darboux pour ω centrée en chaque point de M .

Symplectomorphismes et difféomorphismes hamiltoniens

Maintenant qu'un nouveau type de structure sur une variété a été défini, il est naturel de s'intéresser à la notion adéquate d'automorphisme. Comme nous le verrons ci-bas, dans le monde symplectique, il existe deux notions naturelles de ces automorphismes.

Définition 0.5. *Un **symplectomorphisme** ψ d'une variété symplectique (M, ω) est un difféomorphisme de M tel que $\psi^* \omega = \omega$. Si M est non-compacte, nous supposons de plus que ψ possède un support compact, c'est-à-dire qu'il est égal à l'identité hors d'un compact de M . Notons le groupe formé par ces applications par $\text{Symp}(M, \omega)$.*

Proposition 0.6. *Soient (M, ω) , une variété symplectique, et $\{\psi_t\}_{t \in [0,1]}$, une isotopie sur M engendrée par une famille de champ vectoriel $\{X_t\}_{t \in [0,1]}$, c'est-à-dire*

$$\frac{d}{dt} \psi_t = X_t \circ \psi_t \quad \text{et} \quad \psi_0 = \mathbb{1}.$$

Si M est non-compacte, nous supposons de plus que X_t est nul hors d'un compact K de M pour tout $t \in [0, 1]$. Alors, ψ_{t_0} est un symplectomorphisme si et seulement si $\iota_{X_t} \omega$ est une 1-forme fermée pour tout $t \in [0, t_0]$.

Parmi le groupe des symplectomorphismes, un sous-groupe est particulièrement d'intérêt en topologie symplectique : celui des difféomorphismes hamiltoniens. C'est le groupe d'automorphismes avec lequel nous travaillerons le plus souvent dans cette thèse.

Définition 0.7. *Soient (M, ω) , une variété symplectique, et $H : [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$ lisse et à support compact. On appelle H un **hamiltonien** de M . Ce dernier engendre une famille à un paramètre de champ vectoriel $\{X_t^H\}_{t \in [0,1]}$ à travers l'équation*

$$\iota_{X_t^H} \omega = -dH_t,$$

où $H_t := H(t, \cdot)$.

Un symplectomorphisme ψ est un **difféomorphisme hamiltonien** s'il existe un hamiltonien H tel que ψ soit le flot au temps 1 de X_t^H , c'est-à-dire $\psi = \varphi_1^H$, où

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^H = X_t^H \circ \varphi_t^H \quad \text{et} \quad \varphi_0 = \mathbb{1}.$$

Notons le sous-espace de $\text{Symp}(M, \omega)$ formé par les difféomorphismes hamiltoniens sur M par $\text{Ham}(M, \omega)$.

Proposition 0.8. $\text{Ham}(M, \omega)$ est un sous-groupe normal de $\text{Symp}(M, \omega)$.

En fait, le groupe $\text{Ham}(M, \omega)$ a plusieurs propriétés topologiques et algébriques intéressantes, par exemple il est parfait lorsque M est compacte. Cependant, nous n'aurons pas besoin de ces propriétés dans cette thèse.

Sous-variétés d'intérêt

Nous discutons maintenant enfin des objets d'étude principaux de cette thèse : les sous-variétés lagrangiennes. Nous en profitons aussi pour définir les sous-variétés isotropes et coisotropes, qui seront d'intérêt à la toute fin de cette thèse.

Avant de commencer avec la définition, nous rappelons que pour un sous-espace vectoriel W d'un espace vectoriel symplectique (V, ω) , son complément symplectique est défini par

$$W^\omega := \{v \in V \mid \omega(w, v) = 0 \forall w \in W\}.$$

Cette construction s'étend naturellement aux fibrés vectoriels, de sorte que nous pouvons parler du complément symplectique TQ^ω du fibré tangent d'une sous-variété Q d'une variété symplectique.

Définition 0.9. Une sous-variété Q d'une variété symplectique (M, ω) est dite **isotrope** (respectivement **coisotrope**) si $TQ \subseteq TQ^\omega$ (respectivement $TQ^\omega \subseteq TQ$). Elle est dite **lagrangienne** si elle est isotrope et coisotrope, c'est-à-dire si $TQ = TQ^\omega$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\dim M = 2n$. Alors, les sous-variétés isotropes ont dimension au plus n et les variétés coisotropes ont dimension au moins n . Ainsi, les sous-variétés lagrangiennes sont précisément les sous-variétés isotropes (ou coisotropes) de dimension n .

Exemple 0.10. Toute courbe dans une variété symplectique est isotrope et toute hypersurface est coisotrope. En particulier, si M est une surface orientée, ses sous-variétés lagrangiennes sont précisément ses courbes.

Exemple 0.11. La 1-forme canonique λ_0 , et donc ω_0 , s'annule sur l'image de la section nulle du cotangent T^*L d'une variété L . Puisque $\dim T^*L = 2 \dim L$, L est donc une sous-variété lagrangienne.

Plus généralement, si M est une variété symplectique exacte avec forme de Liouville λ , on dira qu'une sous-variété lagrangienne L est λ -exacte (ou simplement exacte si le contexte est clair) si $\lambda|_L = df$ pour une fonction $f : L \rightarrow \mathbb{R}$. Notons que la notion d'exactitude dépend du choix de forme de Liouville. De ce fait, nous pouvons vérifier qu'elle est invariante sous difféomorphismes hamiltoniens, mais pas sous symplectomorphismes.

Remarque 0.12. Toutes ces notions se généralisent directement aux immersions $f : Q \hookrightarrow M$ en considérant TQ et son complément symplectique TQ^ω dans le rappel f^*TM du fibré tangent de M par f . On parle alors d'immersion lagrangienne (respectivement isotrope ou coisotrope) ou de sous-variété lagrangienne immergée (respectivement isotrope immergée ou coisotrope immergée).

Notons que si $\lambda|_L = df$ pour une forme de Liouville λ , alors, pour tout disque $u : \mathbb{D} \rightarrow M$ ayant bord dans L , nous avons

$$\int_{\mathbb{D}} u^* \omega = \int_{\mathbb{D}} d(u^* \lambda) = \int_{S^1 = \partial \mathbb{D}} u^* \lambda = \int_{S^1} d(u^* f) = \int_{\emptyset = \partial S^1} u^* f = 0$$

par le théorème de Stokes. Considérant l'importance de ces disques dans l'étude des sous-variétés lagrangiennes, cette observation mène à une généralisation naturelle et pratique du concept d'exactitude.

Définition 0.13. Une sous-variété lagrangienne L d'une variété symplectique M est dite **faiblement exacte** si l'homomorphisme

$$\begin{aligned} \omega : \pi_2(M, L) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [u] &\longmapsto \int_{\mathbb{D}} u^* \omega \end{aligned}$$

est identiquement nul. Rappelons que $\pi_2(M, L)$ est défini comme l'ensemble des classes d'homotopie relative d'applications continues $u : \mathbb{D} \rightarrow M$ ayant bord dans L .

Nous concluons cette sous-section en notant que la sous-variété lagrangienne dans l'exemple 0.11 est en quelque sorte l'exemple universel, du moins localement.

Théorème 0.14 (Théorème de Weinstein). *Soient (M, ω) , une variété symplectique, et L , une sous-variété lagrangienne compacte. Il existe un voisinage \mathcal{O} de la section nulle de T^*L , un voisinage \mathcal{N} de L dans M et un symplectomorphisme $\Psi : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{N}$.*

Nous appelons alors Ψ , et parfois \mathcal{N} lui-même, un voisinage de Weinstein de L .

0.1.2. Outils techniques de la topologie symplectique

Pour obtenir les résultats pertinents à la présente thèse, et même définir plusieurs des objets étudiés, il est nécessaire d'introduire certains outils techniques, ce que nous faisons ici. Nous n'allons pas dans tous les détails de leur construction, ceux-ci étant subtils et nombreux, nous tâchons de donner l'idée de ces derniers. Notons que nous tirons les résultats de cette sous-section de diverses sources ; nous les identifions plus spécifiquement à chaque paragraphe.

Indice de Maslov

Nous introduisons d'abord un invariant algébrique des sous-variétés lagrangiennes qui permettra plus tard d'imposer des conditions sur les sous-variétés lagrangiennes étudiées. Le matériel présenté ici se trouve dans le manuel de McDuff et Salamon [MS17].

Soit $\Lambda(n)$, la grassmannienne des sous-espaces vectoriels lagrangiens de l'espace vectoriel symplectique (\mathbb{C}^n, ω_0) . Autrement dit, $\Lambda(n)$ est le sous-espace de la grassmannienne réelle $G(n, 2n)$ composé des n -plans W de \mathbb{R}^{2n} tels que $\omega_0(v, w) \equiv 0$ pour tout $w \in W$ et tout $v \in \mathbb{R}^{2n}$.

Lemme 0.15. *Le groupe $U(n)$ des matrices unitaires de taille n agit transitivement sur $\Lambda(n)$ et le stabilisateur d'un point s'identifie au sous-groupe des matrices orthogonales $O(n)$ de taille n . En particulier, $\Lambda(n)$ est l'espace homogène $U(n)/O(n)$.*

De plus, notons que l'homomorphisme $\det^2 : U(n) \rightarrow S^1$ induit un homomorphisme $\det^2 : U(n)/O(n) \rightarrow S^1$. Ceci nous permet donc de donner la définition suivante.

Définition 0.16. *L'indice de Maslov est l'homomorphisme*

$$\begin{aligned} \mu : \pi_1(\Lambda(n)) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ [\gamma] &\longmapsto \deg(\det^2 \circ \gamma). \end{aligned}$$

Proposition 0.17. *Deux lacets γ et γ' de $\Lambda(n)$ sont homotopes si et seulement si $\mu(\gamma) = \mu(\gamma')$.*

Ainsi, l'indice de Maslov est un invariant homotopique complet du groupe fondamental de la grassmannienne lagrangienne. Notons cependant que nous travaillons dans la grassmannienne non-orientée, par exemple si γ est le chemin $\gamma(t) = e^{2\pi it}\mathbb{R}$ de $\Lambda(1)$, alors $\mu(\gamma) = 2$.

Si M est une variété symplectique de dimension $2n$, L est une sous-variété lagrangienne et $u : \mathbb{D} \rightarrow M$ est une application du disque unité telle que $u(S^1) \subseteq L$, alors u donne une trivialisaton du fibré tangent de M le long de $\gamma(t) = u(e^{2\pi it})$. Ainsi, nous pouvons voir la fonction $L_u(t) = T_{\gamma(t)}L$ comme un lacet de $\Lambda(n)$. Puisque toutes les trivialisations d'un fibré sur \mathbb{D} sont homotopes, la classe d'homotopie de L_u dans $\Lambda(n)$ est indépendante du choix de trivialisaton. Ceci nous permet de donner la définition importante de ce paragraphe.

Définition 0.18. *L'indice de Maslov d'une sous-variété lagrangienne L d'une variété symplectique M est l'homomorphisme*

$$\begin{aligned} \mu_L : \pi_2(M, L) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ [u] &\longmapsto \mu(L_u). \end{aligned}$$

L'indice de Maslov d'une sous-variété lagrangienne possède plusieurs propriétés intéressantes. Par exemple, si $[u] \in \pi_2(M)$, c'est-à-dire si le bord de u est contractile dans L , alors l'indice de Maslov est lié à la première classe de Chern par l'équation $\mu_L(u) = 2c_1(u)$; nous verrons plus bas comment il est possible de définir les classes de Chern d'une variété symplectique. De plus, cet indice permet d'introduire une classe de sous-variétés lagrangiennes permettant l'analyse nécessaire à la définition d'invariants symplectiques comme l'homologie de Floer, ce que nous faisons maintenant.

Définition 0.19. *Pour une sous-variété lagrangienne L d'une variété symplectique M , considérons le nombre*

$$N_L := \min\{N > 0 \mid \mu_L(A) = N, A \in \pi_2(M, L)\},$$

avec la convention que $N_L = +\infty$ si $\mu_L(\pi_2(M, L)) = 0$.

On dira que L est **monotone** si $N_L \geq 2$ et s'il existe $\rho > 0$ tel que

$$\omega = \rho \mu_L,$$

où $\omega : \pi_2(M, L) \rightarrow \mathbb{R}$ est l'homomorphisme induit par l'intégration de ω le long d'un disque.

Par le lien entre indice de Maslov et la première classe de Chern, une sous-variété lagrangienne monotone ne peut exister que dans une variété symplectique monotone,

c'est-à-dire sur une variété symplectique où l'homomorphisme $\omega : \pi_2(M) \rightarrow \mathbb{R}$ obtenu par intégration est positivement proportionnel à la première classe de Chern de M .

Remarque 0.20. Notons que bien que nous ayons défini les homomorphismes ω et μ_L sur $\pi_2(M, L)$, ils induisent en fait des homomorphismes $H_2^D(M, L) \rightarrow \mathbb{R}$ et $H_2^D(M, L) \rightarrow \mathbb{Z}$, où $H_2^D(M, L)$ est l'image de $\pi_2(M, L)$ dans $H_2(M, L; \mathbb{Z})$ sous l'homomorphisme de Hurewicz relatif.

Structures presque complexes compatibles et courbes J -holomorphes

Avant de pouvoir passer aux outils plus poussés, nous devons discuter d'une structure auxiliaire souvent introduite sur les variétés symplectiques : les structures presque complexes dites compatibles. Comme nous le verrons ci-bas, ces structures ne sont pas canoniques, mais elles permettent tout de même la définition de plusieurs invariants. Le matériel présenté dans ce paragraphe se trouve dans le manuel de McDuff et Salamon mentionné ci-haut [MS17], mais une étude plus en profondeur du sujet est faite dans leur second manuel [MS12].

Définition 0.21. Une *structure presque complexe* sur une variété lisse M est un automorphisme linéaire du fibré tangent $J : TM \rightarrow TM$ tel que $J^2 = -\mathbb{1}$.

Si M a une forme symplectique ω , alors une structure presque complexe J est dite **compatible** avec ω ou ω -compatible si

$$g_J := \omega(\cdot, J\cdot) > 0 \quad \text{et} \quad \omega(J\cdot, J\cdot) = \omega,$$

c'est-à-dire si g_J est une métrique riemannienne.

Comme mentionné ci-haut, il n'y a pas de choix canonique de structure presque complexe. Ceci dit, nous avons le résultat suivant.

Théorème 0.22. Soit (M, ω) , une variété symplectique. L'espace des structures presque complexes ω -compatibles \mathcal{J}_ω est contractile. En particulier, il est non-vide.

Ceci permet par exemple de définir sans ambiguïté les classes de Chern d'une variété symplectique. Plus généralement, l'introduction d'une structure presque complexe ω -compatible J permet d'introduire une notion centrale à la topologie symplectique contemporaine : la courbe J -holomorphe, c'est-à-dire une application lisse $u : \Sigma \rightarrow M$, où Σ est une surface de Riemann, respectant l'équation de type Cauchy-Riemann

$$du \circ j = J \circ du, \tag{0.1.1}$$

où j est la structure complexe de Σ . Cette définition dépend bien sûr hautement de J , mais ces courbes permettent d'extraire des invariants purement symplectiques.

De plus, l'introduction de la structure auxiliaire J est précisément au cœur de l'exploration du comportement des suites de sous-variétés lagrangiennes qui sera faite dans cette thèse.

Pour étudier les courbes J -holomorphes lorsque M est non-compacte, il faut cependant ajouter certaines conditions sur M . Nous utiliserons ici une notion due à Eliashberg et Gromov [EG91].

Définition 0.23. Soit M , une variété symplectique ouverte. On dira qu'elle est **convexe à l'infini** s'il existe un champ vectoriel complet Z sur M et une hypersurface lisse $\Sigma \subseteq M$ tels que

- (i) $\mathcal{L}_Z \omega = \omega$;
- (ii) Σ divise M en deux régions : une compacte et l'autre non ;
- (iii) Z est transverse à Σ et pointe vers la région non-compacte.

On dira qu'une structure presque complexe ω -compatible J est **compatible** avec la convexité à l'infini si $\mathcal{L}_Z J = 0$ dans la région non-compacte.

Cette condition technique assure qu'une suite de courbes J -holomorphes reste dans la région compacte, ce qui assure en bout de ligne la précompacité de leur espace de modules, propriété essentielle l'analyse de ces espaces. Notons que cette condition est plutôt minimale. Concrètement, il est commun de travailler avec des hypothèses plus fortes, par exemple avec des variétés de Liouville, c'est-à-dire des variétés symplectiques convexes à l'infini telles que $\omega = d\lambda$, $\iota(Z)\omega = \lambda$ et dont la partie non-précompacte s'identifie à $\Sigma \times [0, \infty)$.

Pour la suite des choses, lorsque M est convexe à l'infini, nous fixerons un Z et Σ et supposerons toujours que les éléments de \mathcal{J}_ω sont compatibles avec ces choix.

Remarque 0.24. Nous pouvons légèrement réinterpréter la notion de compatibilité avec la convexité.

- (1) Notons que la complétude de Z assure l'existence d'un flot ψ_t pour tout temps $t \geq 0$. Alors, la condition de convexité à l'infini pour J peut être réécrite comme une condition d'équivariance : $d\psi_t \circ J = J \circ d\psi_t$ pour tout $t \geq 0$.
- (2) Comme noté par Cielieback, Ginzburg et Kerman [CGK04], la compatibilité assure aussi que la métrique riemannienne g_J est complète et que sa courbure sectionnelle et son rayon d'injectivité sont uniformément bornés. Nous reviendrons sur ces notions dans la prochaine partie de cette introduction.

Homologie de Floer d'une sous-variété lagrangienne

Nous introduisons maintenant l'homologie de Floer lagrangienne, l'outil principal pour l'étude des sous-variétés lagrangiennes. Ce sujet est maintenant standard en topologie symplectique, mais il est dur de trouver un texte introductif du cas lagrangien, qui est celui qui nous intéresse ici. La personne intéressée peut aussi consulter la série de volumes de Oh [Oh15a, Oh15b], qui traite du sujet en détails, même si le texte a tendance à être opaque. La présente section est aussi grandement inspirée des notes du cours *Lagrangian topology for the impatient* de Cornea [Cor20].

Pour la suite des choses, nous supposons que M est une variété symplectique connexe fermée ou convexe à l'infini et que toutes les sous-variétés lagrangiennes étudiées sont fermées, connexes et soit faiblement exactes, soit monotones. Fixons une sous-variété lagrangienne L et un hamiltonien H tel que l'intersection entre L et $\varphi_1^H(L)$ est transverse. Ceci est une condition générique sur H et on peut toujours ajouter une perturbation C^2 -petite au hamiltonien pour s'assurer que cette condition soit respectée. Nous supposons de plus que H est à support compact, constant dans la variable t sur un voisinage de $\{0, 1\}$ dans $[0, 1]$ et tel que $\int_M H_t \omega^n = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$; nous pouvons démontrer que tout difféomorphisme hamiltonien peut être engendré par un tel hamiltonien. Finalement, lorsque M est convexe à l'infini, nous fixons un ouvert précompact U contenant à la fois L et l'hypersurface Σ de la définition 0.23. Fixons aussi $J_{\text{conv}} \in \mathcal{J}_\omega$ telle que $\mathcal{L}_Z J_{\text{conv}} = 0$ hors de U .

Nous désignons par $\mathcal{P}_0(L, L)$ l'espace des chemins $[0, 1] \rightarrow M$ débutant et terminant en L et qui représentent l'élément trivial de $\pi_1(M, L)$. Considérons alors le sous-espace $\mathcal{O}_0(L; H) \subseteq \mathcal{P}_0(L, L)$ des chemins x tels que

$$\dot{x}(t) = X_t^H(x(t))$$

pour tout $t \in [0, 1]$. Nous voudrions définir un complexe de chaînes engendré par ces chemins, c'est-à-dire dont l'espace vectoriel sous-jacent est le \mathbb{Z}_2 -espace vectoriel libre engendré par $\mathcal{O}_0(L; H)$. Cependant, ceci mène en général à des problèmes techniques lorsque vient le temps de définir la différentielle du complexe, puisque la définition naturelle de cette dernière mène à des sommes infinies.

Ainsi, nous devons d'abord fixer un point $p_0 \in L$ et considérer l'espace $\tilde{\mathcal{P}}_0(L, L)$ constitué des classes $[x, v]$ de paires (x, v) , où $x \in \mathcal{P}_0(L, L)$ et v est une homotopie dans $\mathcal{P}_0(L, L)$ du chemin constant en p_0 à x , que nous quotientons par une relation d'équivalence \sim . Explicitement, $(x, v) \sim (y, w)$ si et seulement si $x = y$ et

$$\langle \omega, [v \# w^{-1}] \rangle = \langle \mu_L, [v \# w^{-1}] \rangle = 0.$$

Ici, $v\#w^{-1}$ est l'application obtenue en faisant d'abord l'homotopie v , puis l'homotopie w dans le sens inverse ; ceci définit une application du disque $\mathbb{D} = [0, 1]^2 / ([0, 1] \times \{0, 1\})$ puisque l'homotopie est constante aux temps 0 et 1. Ainsi, nous pouvons évaluer ω et μ_L sans problème. Notons par $\tilde{\mathcal{O}}_0(L; H)$ le sous-espace de $\tilde{\mathcal{P}}_0(L, L)$ des classes de paires $[x, v]$ où $x \in \mathcal{O}_0(L; H)$. Nous appelons les éléments de $\mathcal{O}_0(L; H)$ des cordes de H et ceux de $\tilde{\mathcal{O}}_0(L; H)$, des cordes capuchonnées.

Notons qu'à chaque corde capuchonnée \bar{x} , nous pouvons associer un entier $\mu_{CZ}(\bar{x})$, appelé son indice de Conley-Zehnder, à l'aide une définition similaire à l'indice de Maslov. Cela sera important à la définition de la différentielle, mais nous mettons ça de côté pour le moment. Effectivement, même ajouter des capuchons pourrait ne pas être suffisant pour que la différentielle soit bien définie. La solution pour finalement contourner ce problème est d'étendre l'anneau des coefficients de notre complexe de chaînes.

Le corps de Novikov universel est l'anneau de séries formelles suivant :

$$\Lambda_{\text{univ}} := \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i T^{\lambda_i} \mid a_i \in \mathbb{Z}_2, \lambda_i \in \mathbb{R}, \lim \lambda_i = +\infty \right\}.$$

L'espace vectoriel sous-jacent du complexe de Floer est donc finalement

$$CF(L; H) := \mathbb{Z}_2 \langle \tilde{\mathcal{O}}_0(L; H) \rangle \otimes_{\mathbb{Z}_2} \Lambda_{\text{univ}},$$

où $\mathbb{Z}_2 \langle S \rangle$ est le \mathbb{Z}_2 -espace vectoriel libre engendré par un ensemble S .

Pour définir la différentielle, nous prenons une famille lisse de structures presque complexe ω -compatibles $J = \{J_t\}_{t \in [0, 1]} \subseteq \mathcal{J}_\omega$. Lorsque M est convexe à l'infini, nous la prenons de sorte que $J_t(x) = J_{\text{conv}}(x)$ si $x \notin U$. Ceci nous permet de définir l'équation de Floer, une perturbation de l'équation (0.1.1) de type Cauchy-Riemann présentée précédemment :

$$\partial_s u + J_t(u) \left(\partial_t u + X_t^H(u) \right) = 0, \quad (0.1.2)$$

où (s, t) sont les coordonnées standards de $Z = \mathbb{R} \times [0, 1]$. C'est un calcul standard que de vérifier que l'on retrouve l'équation (0.1.1) lorsque $H = 0$ et que J est indépendant du temps. Nous considérons alors l'espace de modules des solutions

$$\tilde{\mathfrak{M}}(L, H, J) := \{u \in C^\infty(Z, M) \mid (0.1.2), u(\mathbb{R} \times \{0\}) \subseteq L, u(\mathbb{R} \times \{1\}) \subseteq \varphi_1^H(L), E(u) < \infty\},$$

où $E(u) := \int_Z |\partial_s u|^2$ est l'énergie. Nous appelons les éléments de $\tilde{\mathfrak{M}}(L, H, J)$ des bandes de Floer.

Soient $\bar{x}_\pm = [x_\pm, v_\pm]$, deux cordes capuchonnées dans $\tilde{\mathcal{O}}_0(L; H)$. Si $u \in \tilde{\mathfrak{M}}(L, H, J)$ est tel que $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} u(s, \cdot) = x_\pm$ dans la topologie C^1 , alors $v_- \# u \# v_+^{-1}$ définit une application du disque, et donc une classe $[v_- \# u \# v_+^{-1}]$ dans $H_2^D(M, L)$, soit l'image de

$\pi_2(M, L)$ dans $H_2(M, L; \mathbb{Z})$ sous l'homomorphisme de Hurewicz relatif. Nous notons alors par $\widetilde{\mathfrak{M}}(\bar{x}_-, \bar{x}_+; L, H, J; A)$ le sous-espace des bandes de Floer de x_- à x_+ telles que $[v_- \# u \# v_+^{-1}] = A$. Nous pouvons démontrer que ces bandes ont toujours énergie finie.

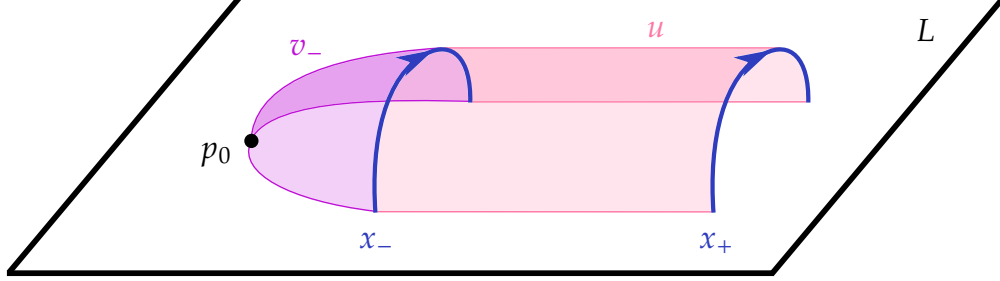


FIGURE 1. Visualisation 3D d'une bande u (en rose) de x_- à x_+ (en bleu) avec un capuchon possible v_- (en violet) de x_- .

Théorème 0.25. *Il existe un ensemble $\mathcal{J}_\omega^{\text{reg}} \subseteq C^\infty([0, 1], \mathcal{J}_\omega)$ co-maigre dans la topologie C^∞ tel que pour tout $J \in \mathcal{J}_\omega^{\text{reg}}$, l'espace $\widetilde{\mathfrak{M}}_k(\bar{x}_-, \bar{x}_+; L, H, J; A)$ est une variété lisse de dimension*

$$\mu_{\text{CZ}}(\bar{x}_-) - \mu_{\text{CZ}}(\bar{x}_+) + \mu_L(A).$$

Pour la suite des choses, nous supposons toujours que $J \in \mathcal{J}_\omega^{\text{reg}}$. Or, notons que lorsque $\bar{x}_- \neq \bar{x}_+$, l'action de \mathbb{R} sur $\widetilde{\mathfrak{M}}_k(\bar{x}_-, \bar{x}_+; A)$ obtenue par

$$(\sigma \cdot u)(s, t) := u(s + \sigma, t),$$

pour $u \in \widetilde{\mathfrak{M}}_k(\bar{x}_-, \bar{x}_+; A)$ et $(s, t) \in Z$, est libre. Ceci nous permet de dire que $\mathfrak{M}(\bar{x}_-, \bar{x}_+; A) := \widetilde{\mathfrak{M}}_k(\bar{x}_-, \bar{x}_+; A)/\mathbb{R}$ est une variété lisse de dimension $\mu_{\text{CZ}}(\bar{x}_-) - \mu_{\text{CZ}}(\bar{x}_+) + \mu_L(A) - 1$. Nous voudrions maintenant démontrer que cet espace de modules non paramétré est précompact, ce qui nous permettra de définir la différentielle ∂ du complexe de Floer et d'étudier ∂^2 . Pour ce faire, nous avons besoin d'un résultat fondamental de Gromov.

Théorème 0.26 (Théorème de compacité de Gromov). *Soit $\{u^\nu\} \subseteq \widetilde{\mathfrak{M}}(\bar{x}, \bar{y}; L, H, J; A)$. Alors, il existe*

- (1) une sous-suite, toujours notée $\{u^\nu\}$;
- (2) des cordes de H capuchonnées $\bar{x} = \bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k+1} = \bar{y}$;
- (3) des classes d'homologie $A_0, \dots, A_k \in H_2^D(M, L)$;
- (4) des suites $\{\sigma_i^\nu\} \subseteq \mathbb{R}, 0 \leq i \leq k$;
- (5) un nombre fini de points $Z_i := \{z_{i1}, \dots, z_{i\ell_i}\}$ dans Z et $W_i := \{w_{i1}, \dots, w_{im_i}\}$ dans $\partial Z = \mathbb{R} \times \{0, 1\}$;
- (6) des suites de reparamétrisations $\{\psi_{ij}^\nu : B_\varepsilon(z_{ij}) \rightarrow S^2\}, 1 \leq j \leq \ell_i$, et $\{\varphi_{ij} : B_\varepsilon(w_{ij}) \cap Z \rightarrow \mathbb{D}\}, 1 \leq j \leq m_i$ et $0 \leq i \leq k$;

- (7) des bandes de Floer $v_i \in \widetilde{\mathfrak{M}}(\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}; A_i)$, $0 \leq i \leq k$;
(8) des sphères $v'_{ij} : S^2 \rightarrow M$ $J_{v'_{ij}(0)}$ -holomorphes, $1 \leq j \leq \ell_i$, et des disques $v''_{ij} : \mathbb{D} \rightarrow M$ $J_{v''_{ij}(0)}$ -holomorphes à bord dans L , $1 \leq j \leq m_i$ et $0 \leq i \leq k$;

tels que

- (i) $\{\sigma_i^v \cdot u^v\}$ converge uniformément sur les compacts de $Z - (Z_i \cup W_i)$ vers v_i ;
(ii) $\{\sigma_i^v \cdot u^v \circ \psi_{ij}^v\}$ converge uniformément sur les compacts de $B_\varepsilon(z_{ij}) - \{z_{ij}\}$ vers v'_{ij} ;
(iii) $\{\sigma_i^v \cdot u^v \circ \varphi_{ij}^v\}$ converge uniformément sur les compacts de $B_\varepsilon(w_{ij}) \cap Z - \{w_{ij}\}$ vers v''_{ij} ;
(iv)

$$A = \sum_{i=0}^k \left(A_i + \sum_{j=1}^{\ell_i} [v'_{ij}] + \sum_{j=1}^{m_i} [v''_{ij}] \right)$$

dans $H_2^D(M, L)$.

Cet énoncé est bien compliqué, mais il se résume ainsi : dans M , une suite de bandes de Floer converge vers une collection de bandes brisées auxquelles sont attachés un nombre fini de sphères et de disques presque holomorphes. L'apparition de ces sphères et disques s'appelle le phénomène d'ébullition et est le principal problème technique empêchant de définir l'homologie de Floer lagrangienne pour toutes les sous-variétés lagrangiennes.

Notons cependant que, dans tous les cas, le théorème de compacité de Gromov implique que $\mathfrak{M}(\bar{x}_-, \bar{x}_+; A)$ est précompact et qu'il possède une compactification naturelle par des applications dont le domaine est une réunion d'un nombre fini de copies de Z , S^2 et \mathbb{D} . En particulier, si L est faiblement exacte, l'espace de modules est compact puisqu'il n'existe alors pas de sphères ou de disques J -holomorphes à bord dans L par hypothèse. Plus généralement, le théorème 0.25 implique tout de même que lorsque $\mu_{CZ}(\bar{x}_+) - \mu_{CZ}(\bar{x}_-) + 1 = \mu_L(A)$, l'espace de modules est un nombre fini de points. Ceci nous permet donc de finalement définir l'opérateur bord de l'homologie de Floer. Si $\bar{x}_- \in \widetilde{\mathcal{O}}_0(L; H)$, nous définissons

$$\partial \bar{x}_- := \sum_{\substack{\bar{x}_+ \in \widetilde{\mathcal{O}}_0(L; H) \\ A \in H_2^D(M, L) \\ \mu_{CZ}(\bar{x}_+) - \mu_{CZ}(\bar{x}_-) + 1 = \mu_L(A)}} |\mathfrak{M}(\bar{x}_-, \bar{x}_+; A)| T^{\omega(A)} \bar{x}_+,$$

où les valeurs absolues indiquent le compte modulo 2 des éléments de l'espace de modules. Le fait que nous travaillons avec des cordes capuchonnées assure que chaque terme de la sommation est bien défini, alors que la condition de monotonicité ou de faible exactitude assure que la série est bien dans $CF(L; H)$. Ceci s'étend linéairement pour en faire un opérateur $\partial : CF(L; H) \rightarrow CF(L; H)$.

Pour s'assurer qu'on a bien un complexe de chaînes, il reste encore un gros problème technique : s'assurer que $\partial^2 = 0$. Or, nous pouvons faire un calcul pour voir ce que cet opérateur vaut

$$\begin{aligned}
\partial^2 \bar{x} &= \sum_{\bar{y}, A} |\mathfrak{M}(\bar{x}, \bar{y}; A)| T^{\omega(A)} \partial \bar{y} \\
&= \sum_{\bar{y}, A} \sum_{\bar{z}, B} |\mathfrak{M}(\bar{x}, \bar{y}; A)| |\mathfrak{M}(\bar{y}, \bar{z}; B)| T^{\omega(A)+\omega(B)} \bar{z} \\
&= \sum_{\bar{z}, C} \sum_{\bar{y}, A} |\mathfrak{M}(\bar{x}, \bar{y}; A) \times \mathfrak{M}(\bar{y}, \bar{z}; C - A)| T^{\omega(C)} \bar{z} \\
&= \sum_{\bar{z}, C} \left| \bigcup_{\bar{y}, A} \mathfrak{M}(\bar{x}, \bar{y}; A) \times \mathfrak{M}(\bar{y}, \bar{z}; C - A) \right| T^{\omega(C)} \bar{z}.
\end{aligned}$$

Ainsi, nous obtiendrions $\partial^2 = 0$ si $\bigcup_{\bar{y}, A} \mathfrak{M}(\bar{x}, \bar{y}; A) \times \mathfrak{M}(\bar{y}, \bar{z}; C - A)$ était pair pour tous $\bar{x}, \bar{z} \in \tilde{\mathcal{O}}_0(L; H)$ et tout $C \in H_2^D(M, L)$ respectant l'équation $\mu_{CZ}(\bar{z}) - \mu_{CZ}(\bar{x}) + 2 = \mu_L(C)$. Or, une façon de s'assurer que ce soit le cas est si cette union est le bord d'une variété compacte de dimension 1, puisque ces dernières sont difféomorphes à une union de cercles et d'intervalles finis disjoints. Or, nous avons un candidat de choix pour jouer le rôle de la variété de dimension 1 : $\mathfrak{M}(\bar{x}, \bar{z}; C)$. Effectivement, le théorème 0.25 nous indique que c'est une variété de la bonne dimension et le théorème 0.26 nous indique que l'union à laquelle nous nous intéressons est bien incluse dans le bord de la compactification de la variété. Il ne reste donc plus qu'à s'occuper de l'ébullition.

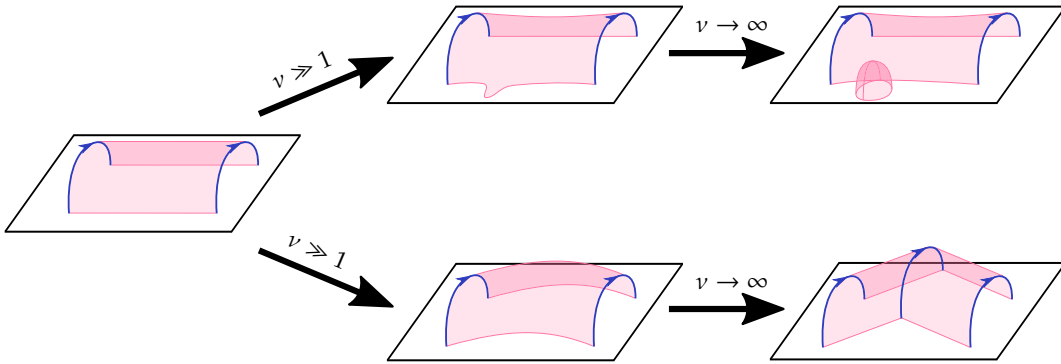


FIGURE 2. Deux limites *a priori* possibles d'une suite d'éléments de $\mathfrak{M}(\bar{x}, \bar{z}; C)$ (en rose) : en haut, un phénomène d'ébullition et en bas, une trajectoire brisée telle que désirée.

Théorème 0.27. *Supposons que $\mu_{CZ}(\bar{x}) - \mu_{CZ}(\bar{z}) + \mu_L(A) = 2$. Alors, la compactification naturelle de $\mathfrak{M}(\bar{x}, \bar{z}; C)$ donnée par le théorème de compacité de Gromov ne contient que des*

trajectoires brisées. En d'autres mots,

$$\partial\mathfrak{M}(\bar{x}, \bar{z}; C) = \bigcup_{\substack{\mu_{CZ}(\bar{y}) - \mu_{CZ}(\bar{x}) + 1 = \mu_L(A) \\ \mu_{CZ}(\bar{z}) - \mu_{CZ}(\bar{y}) + 1 = \mu_L(C-A)}} \mathfrak{M}(\bar{x}, \bar{y}; A) \times \mathfrak{M}(\bar{y}, \bar{z}; C-A).$$

Lorsque L est faiblement exacte, cela découle simplement du fait qu'il n'existe pas de courbes J -holomorphes non-constantes dans M puisque celles-ci auraient nécessairement aire symplectique strictement positive. Or, la condition d'exactitude faible empêche qu'il y ait de tels disques à bord dans L (et donc aussi pas de telles sphères). Lorsque L est monotone, il existe de tels disques et sphères, mais le point (iv) du théorème 0.26 assure que

$$\begin{aligned} 2 &= \mu_{CZ}(\bar{x}) - \mu_{CZ}(\bar{z}) + \mu_L(A) \\ &= \mu_{CZ}(\bar{x}) - \mu_{CZ}(\bar{z}) + \sum_{i=0}^k \left(\mu_L(A_i) + \sum_{j=1}^{\ell_i} \mu_L(v'_{ij}) + \sum_{j=1}^{m_i} \mu_L(v''_{ij}) \right) \\ &= \mu_{CZ}(\bar{x}) - \mu_{CZ}(\bar{z}) + \sum_{i=0}^k \left(\mu_{CZ}(\bar{x}_{i+1}) - \mu_{CZ}(\bar{x}_i) + d_i + \sum_{j=1}^{\ell_i} \mu_L(v'_{ij}) + \sum_{j=1}^{m_i} \mu_L(v''_{ij}) \right) \\ &= \sum_{i=0}^k \left(d_i + \sum_{j=1}^{\ell_i} \mu_L(v'_{ij}) + \sum_{j=1}^{m_i} \mu_L(v''_{ij}) \right), \end{aligned}$$

où $d_i = \dim \widetilde{\mathfrak{M}}(\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}; A_i)$. De plus, sans perte de généralité, nous pouvons supposer qu'aucune des courbes apparaissant par ébullition ne sont constantes. Ainsi, par la condition de monotonie, chacun des $\mu_L(v'_{ij})$ et $\mu_L(v''_{ij})$ a valeur au moins 2 puisqu'ils ont aire symplectique strictement positive. Ainsi, les possibilités sont

- (i) $k = 0$, $d_0 = 0$ et il y a exactement une sphère v' ou un disque v'' d'indice de Maslov 2;
- (ii) $k = 0$, $d_0 = 2$ et il n'y a pas d'ébullition;
- (iii) $k = 1$, $d_0 = d_1 = 1$ et il n'y a pas d'ébullition.

En termes algébriques, ceci veut donc dire que

$$\partial^2 \bar{x} = P \bar{x}, \tag{0.1.3}$$

où P est un élément de Λ_{univ} comptant les sphères et les disques d'indice de Maslov 2 apparaissant par la possibilité (i). Or, une analyse plus précise de la situation permet d'éliminer la possibilité d'avoir des sphères et de vérifier que les disques viennent en fait en paire. Puisque Λ_{univ} a caractéristique 2, ceci démontre que l'on a bien $\partial^2 = 0$.

Définition 0.28. Le *complexe de Floer* de L avec hamiltonien H et structure presque complexe J est le complexe de chaînes $CF_{\bullet}(L; H, J) := (CF(L; H, J), \partial)$. L'*homologie de Floer* associée est donnée par

$$HF_{\bullet}(L; H, J) := \frac{\text{Ker } \partial}{\text{Im } \partial}.$$

Remarque 0.29. De la façon dont nous avons présenté le sujet, il pourrait sembler qu'il découle directement du théorème de compacité de Gromov et de notre calcul d'indice que le bord de $\mathfrak{M}(\bar{x}, \bar{z}; C)$ est $\bigcup_{\bar{y}, C} \mathfrak{M}(\bar{x}, \bar{y}; A) \times \mathfrak{M}(\bar{y}, \bar{z}; C - A)$. En réalité cependant, cette étape, appelée recollement, est l'étape la plus subtile et technique de toute la construction. C'est aussi la raison pour laquelle nous travaillons avec des familles de structures presque complexes : cette flexibilité supplémentaire est nécessaire pour s'assurer que les espaces de modules se recollent de la façon désirée.

Nous terminons cette longue introduction à l'homologie de Floer par un fait qui sera essentiel à la définition de la métrique spectrale dans la prochaine sous-section.

Théorème 0.30. Supposons que L est faiblement exacte. Alors, il existe un isomorphisme de Λ_{univ} -modules, appelé *isomorphisme PSS*,

$$\psi_{\text{PSS}} : H_{\bullet}(L; \mathbb{Z}_2) \otimes_{\mathbb{Z}_2} \Lambda_{\text{univ}} \xrightarrow{\sim} HF_{\bullet}(L; H, J).$$

En particulier, l'homologie de Floer est indépendante du choix de hamiltonien et de structure presque complexe générique choisis.

Le nom PSS réfère à Piunikhin, Salamon et Schwarz, les premiers à suggérer un tel isomorphisme [PSS96]. Leur isomorphisme était d'abord pour le cas hamiltonien, pas lagrangien, mais il a été étendu au cas aux sous-variétés exactes d'un fibré cotangent par Katić et Milinković [KM05], puis au contexte ci-haut par Barraud et Cornea [BC06].

Dans le cas monotone, les choses sont plus complexes. Comme le note Albers [Alb10], cet isomorphisme existe dans certains degrés homologiques seulement. En général, l'isomorphisme PSS sera plutôt avec une quantité appelée l'homologie quantique, une sorte de déformation quantique de l'homologie de Morse. Pour la personne intéressée à en apprendre davantage sur cette homologie, l'article de Biran et Cornea sur le sujet [BC09] est la référence. Les constructions qui y sont présentées sont basées sur des idées antérieures de Oh [Oh96], Fukaya [Fuk96] et Cornea et Lalonde [CL06].

Remarque 0.31. Notons qu'au prix d'hypothèses supplémentaires sur L , il est possible d'introduire des structures supplémentaires sur $HF_{\bullet}(L)$, par exemple une graduation. De même, il est alors possible de prendre des anneaux de Novikov plus petits ou même sur \mathbb{Z} plutôt que \mathbb{Z}_2 .

Homologie de Floer d'une paire de sous-variétés lagrangiennes

Nous discutons maintenant une généralisation de la construction du paragraphe précédent. Celle-ci nous permet de considérer des paires de sous-variétés lagrangiennes, ce qui sera essentiel pour introduire l'objet d'étude du prochain paragraphe. Nos sources sont encore les volumes de Oh [Oh15a, Oh15b] et les notes de Cornea [Cor20].

Nous fixons pour ce paragraphe une paire de sous-variétés lagrangiennes L et L' respectant une des hypothèse suivantes :

- (a) L et L' sont faiblement exactes ;
- (b) L et L' sont monotones pour une même constante de monotonicité $\rho > 0$ et leur compte d_L et $d_{L'}$ modulo 2 de disques J -holomorphes (pour J générique) d'indice de Maslov 2 à bord dans L passant par un point donné $p \in L \cap L'$ sont les mêmes.

Un résultat de Oh [Oh93, Oh95] assure que d_L est un invariant bien défini des sous-variétés lagrangiennes monotones. De plus, lorsque M est convexe à l'infini, nous supposons toujours que L et L' sont dans l'ouvert U fixé lors de la définition de l'homologie de Floer d'une seule sous-variété lagrangienne.

Nous fixons alors un chemin η de L' à L et considérons $\mathcal{P}_\eta(L', L)$, l'ensemble des chemins de L' à L dans la même composante connexe que η . Pour un hamiltonien H tel que l'intersection de $\varphi_1^H(L)$ et L' est transverse, nous pouvons considérer le sous-espace $\mathcal{O}_\eta(L', L; H) \subseteq \mathcal{P}_\eta(L', L)$ formé par les cordes de H allant de L' à L . En considérant des homotopies de η à une corde x , plutôt que de p_0 à x , nous obtenons similairement au cas avec une seule sous-variété lagrangienne un espace de cordes capuchonnées $\tilde{\mathcal{O}}_\eta(L', L; H)$. Alors, l'espace vectoriel sous-jacent au complexe de Floer de la paire (L', L) est

$$CF(L', L; H; \eta) := \mathbb{Z}_2 \langle \tilde{\mathcal{O}}_\eta(L', L; H) \rangle \otimes_{\mathbb{Z}_2} \Lambda_{\text{univ}}$$

similairement au cas où $L = L'$ et $\eta = p_0$.

En considérant des bandes de Floer $u : Z \rightarrow M$ d'énergie finie telles que $u(\mathbb{R} \times \{0\}) \subseteq L'$ et $u(\mathbb{R} \times \{1\}) \subseteq L$, nous pouvons définir un espace de modules $\mathfrak{M}(x_-, x_+; L', L, H, J; \eta)$ de telles bandes u entre cordes $x_\pm \in \mathcal{O}_\eta(L', L; H)$. Notons que même si les cordes capuchonnées n'ont plus d'indice bien défini, il reste possible de définir une notion d'indice $\mu(u; \bar{x}_-, \bar{x}_+)$ pour un élément $[u] \in \mathfrak{M}(x_-, x_+)$. Ainsi, nous pouvons définir la différentielle

similairement au cas d'avec une seule sous-variété lagrangienne :

$$\partial \bar{x}_- = \sum_{\substack{\bar{x}_+ \in \tilde{\mathcal{O}}_\eta(L', L; H) \\ [u] \in \mathfrak{M}(x_-, x_+) \\ \mu(u; \bar{x}_-, \bar{x}_+) = 1}} T^{\omega(v_- \# u \# v_+^{-1})} \bar{x}_+.$$

Notons qu'ici $v_- \# u \# v_+^{-1}$ n'est plus un disque à bord dans L , mais bien un anneau à bord dans l'union de L et L' . Cependant, son aire symplectique reste bien définie. Nous pouvons vérifier que nous retrouvons bien la définition précédente lorsque $L = L'$ et $\eta = p_0$.

Par une analyse similaire à ce qui a été fait précédemment, nous obtenons essentiellement

$$\partial^2 = (d_L - d_{L'}) \mathbb{1}$$

pour J générique. Notons que cette situation est analogue à celle que nous avons en (0.1.3) lorsque $L' = L$, mais les disques ne viennent maintenant plus automatiquement en paire, et donc ne s'annulent plus algébriquement. Or, nous avons $d_L = d_{L'} = 0$ dans la situation (a) et $d_L = d_{L'}$ par hypothèse dans la situation (b). Ainsi,

$$CF_\bullet(L', L; H, J; \eta) := (CF(L', L; H; \eta), \partial)$$

est un complexe de chaînes. Notons que, dans notre construction, si L et L' se croisent transversalement et $x \in L' \cap L$, alors $CF_\bullet(L', L; 0, J; x)$ est un complexe de chaînes engendré par $L' \cap L$ et dont la différentielle compte des bandes J -holomorphes entre les divers points d'intersection ; c'est souvent dans ce contexte que nous serons intéressé-e-s à l'homologie de Floer d'une paire de sous-variétés lagrangiennes.

Théorème 0.32. *L'homologie de Floer $HF_\bullet(L', L; H, J; \eta)$ d'une paire (L', L) respectant (a) ou (b) est indépendante du choix de hamiltonien H et de structure presque complexe générique J .*

Du plus, pour tout hamiltonien G sur M , il existe un isomorphisme de Λ_{univ} -modules

$$HF_\bullet(L', L; \eta) \xrightarrow{\sim} HF_\bullet(L, \varphi_1^G(L); (\varphi^G)_* \eta),$$

où $[(\varphi^G)_* \eta](t) := \varphi_t^G(\eta(t))$. En particulier, $HF_\bullet(L)$ est isomorphe à $HF_\bullet(L, \varphi_1^G(L); \varphi^G(p_0))$

Catégorie dérivée de Fukaya

Dans cette sous-section, nous établissons les idées derrière une structure réunissant ensemble l'homologie de Floer de toutes les paires de sous-variétés lagrangiennes : la catégorie dérivée de Fukaya. Afin d'alléger cette présentation déjà longue, nous supposons que la personne lectrice a déjà des connaissances de base en algèbre homologique. Pour la personne moins expérimentée, nous conseillons le manuel de Weibel [Wei94] sur le sujet.

De plus, la personne intéressée à lire davantage de détails sur les constructions ci-bas est invitée à lire le livre de Seidel sur le sujet [Sei08], qui est la référence sur ce sujet. Notons que nous utilisons ici la convention homologique, et non cohomologique comme Seidel. De plus, les sous-variétés lagrangiennes de Seidel sont toujours exactes, ce qui n'est bien sûr pas notre cas. Cependant, nous avons déjà présenté les difficultés techniques supplémentaires provenant du fait de travailler avec des sous-variétés lagrangiennes faiblement exactes ou monotones. Le prix à payer est que, contrairement à Seidel, nous travaillons sur \mathbb{Z}_2 et notre homologie de Floer n'a pas de graduation.

Notons que, grâce à l'isomorphisme PSS, nous pouvons transposer le produit d'intersection de $H_\bullet(L; \mathbb{Z}_2)$ en une structure produit sur $HF_\bullet(L)$ lorsque L est faiblement exacte. Cependant, même dans ce cas, cette structure ne capture pas la nature symplectique de $HF_\bullet(L)$. Ainsi, nous aimerions avoir un produit intrinsèque à $HF_\bullet(L)$, et même entre les divers $HF_\bullet(L', L)$.

Supposons donc que nous avons trois sous-variétés lagrangiennes L_0, L_1 et L_2 , soit toutes faiblement exactes, soit toutes monotones avec la même constante de monotonie et même compte de disques J -holomorphes passant par un point. Prenons des hamiltoniens $H_{L_i, L_{i-1}}$ et structures presque complexes dépendant du temps $J_{L_i, L_{i-1}}$ tels que l'homologie de Floer de chaque paire soit définie (ici $L_{-1} = L_2$). Notre but est d'utiliser des triangles de Floer, c'est-à-dire des applications presque holomorphes d'un disque avec trois points manquants au bord, respectant une perturbation de l'équation de Floer (0.1.2) et qui ressemble aux bandes de Floer de $(H_{L_i, L_{i-1}}, J_{L_i, L_{i-1}})$ près des points manquants pour définir notre produit.

Pour ce faire, considérons

$$S := \mathbb{D} - \{\zeta_0 = 1, \zeta_1 = -i, \zeta_2 = i\}$$

et prenons des cartes $\varepsilon_i : [0, 1] \times [0, \infty) \rightarrow S$ au voisinage de chacun de ces points. Plus précisément, ces cartes envoient les segments semi-infinis $\{0\} \times [0, \infty)$ et $\{1\} \times [0, \infty)$ sur ∂S de sorte à préserver l'orientation et envoyer le point à infini à ζ_i , c'est-à-dire

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \varepsilon_i(\cdot, s) = \zeta_i.$$

Notons par C_i la composante connexe de ∂S dont le bord est $\{\zeta_i, \zeta_{i-1}\}$. Nous pouvons alors considérer $K \in \Omega^1(S, C^\infty(M))$ et $J \in C^\infty(S, \mathcal{J}_\omega)$ telles que

$$(\varepsilon_i^* K)(s, t) = H_{L_i, L_{i-1}}(t) dt, \quad (\varepsilon_i^* J)(s, t) = J_{L_i, L_{i-1}}(t), \quad (K|_{TC_i})|_{L_i} \equiv 0. \quad (0.1.4)$$

Ceci permet donc de définir formellement ce qu'un triangle de Floer ayant bord dans L_0 , L_1 et L_2 devrait être : c'est une application $u : S \rightarrow M$ telle que

$$du + J \circ du \circ j = X^K + J \circ X^K \circ j \quad (0.1.5)$$

et $u(C_i) \subset L_i$. Ici, $X^K \in \Omega^1(S, C^\infty(TM))$ est défini par la relation $X^K(\xi) := X^{K(\xi)}$ pour $\xi \in TS$. Nous pouvons effectivement vérifier que les conditions (0.1.4) assurent que nous retrouvons bien l'équation (0.1.2) dans les cartes ε_i .

De plus, lorsque M est convexe à l'infini, nous fixons un ouvert précompact U contenant l'hypersurface Σ (voir définition 0.23) et les sous-variétés lagrangiennes L_0, L_1 et L_2 . Nous supposons que

$$K_z(\xi)|_{M-U} \equiv 0 \quad \text{et} \quad J_z|_{M-U} = J_{\text{conv}} \quad (0.1.6)$$

pour tout $z \in S$ et tout $\xi \in TS$.

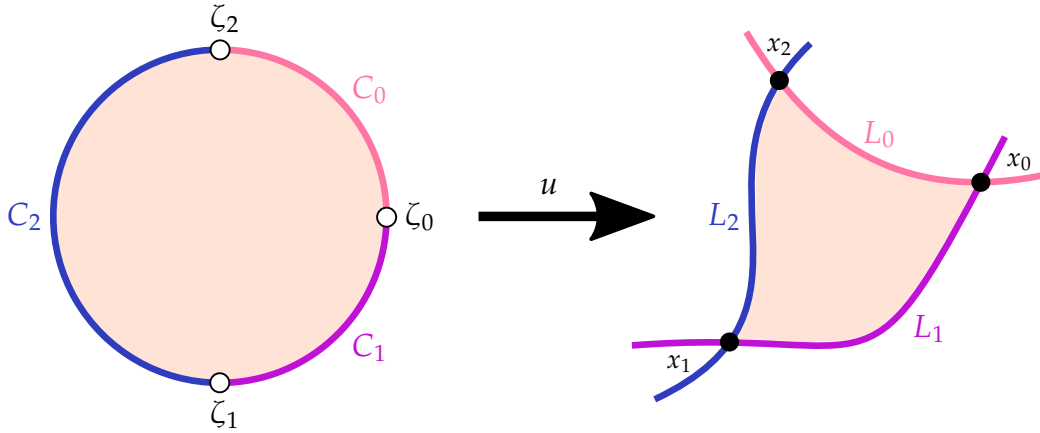


FIGURE 3. Un triangle dans $\mathfrak{M}^3(x_2, x_1, x_0)$ lorsque $H_{L_i, L_{i-1}} \equiv 0$.

Ceci permet alors de définir un espace de modules :

$$\mathfrak{M}^3(x_2, x_1, x_0) := \left\{ u : S \rightarrow M \mid (0.1.5), u(C_i) \subseteq L_i, \lim_{s \rightarrow \infty} (\varepsilon_i^* u)(s) = x_i \right\}.$$

Tout comme précédemment, pour chaque $\bar{x}_i \in \tilde{\mathcal{O}}_{\eta_{L_i, L_{i-1}}}(L_i, L_{i-1}; H_{L_i, L_{i-1}})$, $0 \leq i \leq 2$, et chaque $u \in \mathfrak{M}^3(x_2, x_1, x_0)$ nous pouvons définir un indice $\mu(u; \bar{x}_2, \bar{x}_1, \bar{x}_0)$. Alors, nous avons un produit

$$\mu_2 : CF(L_2, L_1) \otimes_{\Lambda_{\text{univ}}} CF(L_1, L_0) \longrightarrow CF(L_2, L_0)$$

défini pour $\bar{x}_2 \in \tilde{\mathcal{O}}_{\eta_{L_2, L_1}}(L_2, L_1; H_{L_2, L_1})$ et $\bar{x}_1 \in \tilde{\mathcal{O}}_{\eta_{L_1, L_0}}(L_1, L_0; H_{L_1, L_0})$ par

$$\mu_2(\bar{x}_2, \bar{x}_1) := \sum_{\substack{\bar{x}_0 \in \tilde{\mathcal{O}}_{\eta_{L_0, L_2}}(L_2, L_0; H_{L_2, L_0}) \\ u \in \mathfrak{M}^3(x_2, x_1, x_0^{-1}) \\ \mu(u; \bar{x}_2, \bar{x}_1, \bar{x}_0^{-1}) = 0}} T^{\omega(v_2 \# v_1 \# u \# v_0^{-1})} \bar{x}_0,$$

puis étendu linéairement. Ici, $H_{L_2, L_0}(t) := -H_{L_0, L_2}(1-t)$ et $x_0^{-1}(t) := x_0(1-t)$.

Théorème 0.33. *Il existe un sous-ensemble $\mathcal{D}_{\text{reg}}^3$ des éléments de $\Omega^1(\mathcal{S}^3, C^\infty(M)) \times C^\infty(\mathcal{S}^3, \mathcal{J}_\omega)$ respectant (0.1.4) (et (0.1.6) dans le cas convexe à l'infini) qui est co-maigre dans la topologie C^∞ et tel que si $(K, J) \in \mathcal{D}_{\text{reg}}^3$, alors le produit μ_2 correspondant est bien défini et induit un produit*

$$\mu_2 : HF_\bullet(L_2, L_1) \otimes_{\Lambda_{\text{univ}}} HF_\bullet(L_1, L_0) \longrightarrow HF_\bullet(L_2, L_0)$$

qui est associatif.

De plus, il existe un élément $e_{L_1} \in HF_\bullet(L_1, L_1)$ tel que $\mu_2(y, e_{L_1}) = y$ pour tout $y \in HF_\bullet(L_2, L_1)$ et $\mu_2(e_{L_1}, x) = x$ pour tout $x \in HF_\bullet(L_1, L_0)$.

Remarque 0.34. *Le choix de perturbation fait ici peut sembler abusivement général, surtout en comparaison aux perturbations nécessaires pour définir l'homologie de Floer. Cependant, cette généralité est nécessaire pour s'assurer que non seulement $\mathfrak{M}^3(x_2, x_1, x_0)$ est une variété lisse pour un choix générique de données de perturbation, mais aussi qu'elle admet une compactification comme variété à coins. Par exemple, $\mathfrak{M}^3(x_2, x_1, x_0)$ est obtenu comme l'intersection de deux variétés (de dimension infinie) et avoir ce niveau de liberté de perturbation permet d'assurer que l'intersection de celle-ci est génériquement transverse, et donc bel et bien une variété.*

Comme nous le verrons plus bas, c'est l'existence de cette compactification qui assure que μ_2 est bien défini et qu'il définit un produit sur l'homologie. Ainsi, pouvoir faire de tels choix est effectivement primordial.

Notons que le théorème 0.33 nous permet de définir une catégorie à partir d'une collection $\mathcal{L}^\star(M)$ de sous-variétés lagrangiennes de M (contenues dans l'ouvert U de (0.1.6) dans le cas convexe à l'infini) où l'homologie de Floer est définie pour chaque paire. La catégorie de Donaldson, notée $\text{Don}^\star(M)$, est définie comme suit :

- $\text{Ob}(\text{Don}^\star(M)) := \mathcal{L}^\star(M)$;
- $\text{Mor}_{\text{Don}^\star(M)}(L, L') := HF_\bullet(L, L')$;
- $\circ_{\text{Don}^\star(M)} := \mu_2$.

Cependant, quoique élégante, cette définition a deux problèmes majeurs : la catégorie de Donaldson n'a pas de belles propriétés algébriques (par exemple, elle n'est pas généralement additive) et trop d'information du complexe de Floer est perdu en prenant l'homologie.

Il nous faut donc enrichir davantage cette structure. Pour ce faire, nous nous tournons vers la preuve du théorème 0.33 pour de l'inspiration. Comme précédemment, nous vérifions que μ_2 est bien défini en étudiant l'espace de modules des éléments de $\mathfrak{M}^3(x_2, x_1, x_0)$ d'indice 0. En étudiant les solutions d'indice 1, nous obtenons maintenant la relation

$$\partial \circ \mu_2 = \mu_2 \circ (\partial \otimes \mathbb{1}) + \mu_2 \circ (\mathbb{1} \otimes \partial),$$

c'est-à-dire μ_2 respecte la règle de Leibniz. Ceci permet de conclure que μ_2 est bien défini sur l'homologie.

Jusque là, ceci est très similaire à ce qui a été fait dans les sections précédentes. La nouveauté apparaît lorsque vient le temps de démontrer l'associativité de μ_2 . Pour ce faire, il nous faut introduire un opérateur

$$\mu_3 : CF(L_3, L_2) \otimes CF(L_2, L_1) \otimes CF(L_1, L_0) \longrightarrow CF(L_3, L_0)$$

qui compte maintenant les éléments d'espace de modules $\mathfrak{M}^4(x_3, x_2, x_1, x_0)$ de carrés, plutôt que de triangles. Il faut alors vérifier que cet opérateur est bien défini et étudier les éléments d'indice 1 pour obtenir la relation plus complexe

$$\partial \circ \mu_3 = \mu_3 \circ (\partial \otimes \mathbb{1}^{\otimes 2}) + \mu_3 \circ (\mathbb{1} \otimes \partial \otimes \mathbb{1}) + \mu_3 \circ (\mathbb{1}^{\otimes 2} \otimes \partial) + \mu_2 \circ (\mu_2 \otimes \mathbb{1}) + \mu_2 \circ (\mathbb{1} \otimes \mu_2)$$

qui implique l'associativité sur l'homologie. Autrement dit, μ_3 est précisément l'obstruction à l'associativité de μ_2 au niveau des complexes de chaînes.

Remarque 0.35. *Il y a en réalité une difficulté supplémentaire qui apparaît lorsque vient le temps de définir μ_3 . Effectivement, nous avons pu faire un choix précis de domaine S pour μ_2 puisque, à biholomorphisme près, il existe un unique disque ayant trois points manquants sur son bord. Or, à partir du moment que l'on enlève un autre point au domaine, cela devient faux et il faut trouver un moyen de compter tous les carrés, peu importe leur domaine précis.*

Pour contourner ce problème, nous devons introduire l'espace de modules de disques pointés

$$\mathcal{R}^4 := \{(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \in (S^1)^3 \mid \theta_0 > \theta_1 > \theta_2 > \theta_3 > \theta_0 - 2\pi \text{ avec } \zeta_j = e^{i\theta_j}\}.$$

Pour $r = (\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \in \mathcal{R}^3$, nous notons $S_r := \mathbb{D} \setminus \{\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}$. Nous pouvons alors faire un choix de cartes $\varepsilon_{i,r}$ qui dépend de façon lisse de r . De même, nous pouvons maintenant faire dépendre (K, J) de r de façon à ce que les conditions (0.1.4) (et (0.1.6) dans le cas convexe à l'infini)

soient respectées pour tout $r \in \mathcal{R}^4$. Autrement dit, K et J dépendent maintenant de

$$\mathcal{S}^4 := \{(r, z) \in \mathcal{R}^4 \times \mathbb{D} \mid z \in S_r\},$$

et non simplement de S . Alors, pour $\bar{x}_i \in \tilde{\mathcal{O}}_{\eta_{L_i, L_{i-1}}}(L_i, L_{i-1}; H_{L_i, L_{i-1}})$, nous nous intéresserons à l'espace de modules des carrés

$$\mathfrak{M}^4(x_3, x_2, x_1, x_0) := \left\{ (r, u : S_r \rightarrow M) \mid (0.1.5), u(C_i) \subseteq L_i, \lim_{s \rightarrow \infty} (\varepsilon_{i,r}^* u)(s) = x_i \right\} / \text{Aut}(\mathbb{D}).$$

Le reste de la construction est cependant analogue à ce qui a été fait pour μ_2 .

Il n'y a aucune raison d'arrêter à μ_3 : nous pouvons très bien définir de manière analogue un opérateur

$$\mu_d : \bigotimes_{i=1}^d CF(L_i, L_{i-1}) \longrightarrow CF(L_d, L_0)$$

à partir d'un espace de modules $\mathfrak{M}^{d+1}(x_d, \dots, x_0)$ de $(d+1)$ -gones. En étudiant les éléments d'indice 1, nous obtenons encore une fois une relation entre les divers μ_d :

$$\sum_{\substack{1 \leq m \leq d \\ 0 \leq n \leq d-m}} \mu_{d-m+1} \circ (\mathbb{1}^{\otimes d-m-n+1} \otimes \mu_m \otimes \mathbb{1}^{\otimes n}) = 0, \quad (0.1.7)$$

où $\mu_1 := \partial$. Autrement dit, $\text{Fuk}^\star(M)$, définie par

- $\text{Ob}(\text{Fuk}^\star(M)) := \mathcal{L}^\star(M)$;
- $\text{Mor}_{\text{Fuk}^\star(M)}(L, L') := CF_\bullet(L, L')$;
- $\mu_{d, \text{Fuk}^\star(M)} := \mu_d$.

est une A_∞ -catégorie (homologiquement unitaire, non-graduée et sur Λ_{univ}) appelée la catégorie de Fukaya. En termes moins techniques, $\text{Fuk}^\star(M)$ est presque une dg-catégorie, mais la condition d'associativité de la composition a été remplacée par les A_∞ -relations, soit les équations (0.1.7).

Remarque 0.36. Notons que bien obtenir les A_∞ -relations, il faut choisir les données de perturbation associées à un uplet (L_{d-m}, \dots, L_0) de sorte à bien obtenir celles associées aux uplets $(L_{d-m-n}, \dots, L_{n+1})$ au bord de l'espace de modules $\mathfrak{M}^{d-m+1}(x_d, \dots, x_0)$. De plus, les perturbations doivent être choisies de sorte à être compatible avec la compactification de $\mathfrak{M}^{d-m+1}(x_d, \dots, x_0)$ mentionnée à la remarque 0.34. C'est alors qu'entre en jeu le fait que les ensembles $\mathcal{D}_{\text{reg}}^{\ell+1}$ sont co-maigres : ceci nous permet de faire inductivement des choix cohérents de données de perturbation pour chaque uplet de sous-variétés lagrangiennes. Similairement, il faut faire inductivement des choix cohérents de cartes $\varepsilon_{i,r} : [0, 1] \times [0, +\infty) \rightarrow S_r$ à chaque ζ_i possible.

La catégorie de Fukaya règle complètement le problème de manque d'information de la catégorie de Donaldson : nous en avons même davantage qu'avant grâce aux opérateurs μ_d . Cependant, nous n'avons qu'empirer notre problème de manque de belle structure algébrique, ayant maintenant un vrai monstre à gérer. Ainsi, il nous faut trouver un moyen d'extraire un objet algébrique gérable de la catégorie de Fukaya.

Pour ce faire, notons que pratiquement toutes les notions d'algèbre homologique admettent une version A_∞ . Ainsi, il existe des versions A_∞ du concept de foncteurs, de transformations naturelles, de produits, de cônes, etc. De plus, toutes ces notions sont définies de sorte à retrouver sur les concepts usuels dans la catégorie homologique, c'est-à-dire la (vraie) catégorie ayant les mêmes objets, mais dont les espaces de morphismes sont l'homologie des espaces de morphismes de la A_∞ -catégorie originale. Cette généralisation, n'est cependant pas toujours si directe et demande de faire attention. Par exemple, le cône d'un cycle $c \in CF_\bullet(L', L)$ est, s'il existe, un objet $\text{Cone}(c)$ tel que pour tout $L'' \in \mathcal{L}^\star(M)$, on a un quasi-isomorphisme

$$\text{Mor}_{\text{Fuk}^\star(M)}(L'', \text{Cone}(c)) \xrightarrow{\sim} \text{Cone}(\mu_2(\cdot, c) : CF_\bullet(L'', L') \rightarrow CF_\bullet(L'', L)),$$

où le cône à droite est le cône habituel de l'algèbre homologique. Notons que, tout comme avec les catégories habituelles, ces objets peuvent très bien ne pas exister.

La façon de contourner ce problème est en quelque sorte simple : ajouter formellement à $\text{Fuk}^\star(M)$ tous les cônes pour former une nouvelle A_∞ -catégorie $\widehat{\text{Fuk}^\star(M)}$, puis définir la catégorie dérivée de Fukaya comme

$$\text{DFuk}^\star(M) := H_\bullet\left(\widehat{\text{Fuk}^\star(M)}\right),$$

c'est-à-dire c'est la catégorie homologique de la complétion de la A_∞ -catégorie de Fukaya.

Théorème 0.37. *La catégorie dérivée de Fukaya $\text{DFuk}^\star(M)$ est bien définie et triangulée. De plus, à équivalence de catégories triangulées près, elle est indépendante des choix faits lors de la construction.*

Remarque 0.38. *La construction présentée ici est propice à plusieurs remarques, faisons-en ici quelques-unes.*

- (1) Concrètement, la complétion $\widehat{\text{Fuk}^\star(M)}$ peut être obtenue en utilisant le plongement de Yoneda

$$L \mapsto \text{Mor}_{\text{Fuk}^\star(M)}(\cdot, L)$$

pour voir $\text{Fuk}^\star(M)$ comme la sous-catégorie (pleine) d'une A_∞ -catégorie de A_∞ -foncteurs, qui elle possède tous les cônes. Alors, il suffit de prendre $\widehat{\text{Fuk}^\star(M)}$ comme la plus petite

sous- A_∞ -catégorie pleine contenant $\text{Fuk}^*(M)$, tous ses cônes itérés et tous les objets quasi-isomorphes à ces objets.

- (2) Il existe d'autres approches à la construction de la catégorie dérivée de Fukaya. Notons en particulier l'approche géométrique de Biran et Cornea [BC21] qui consiste à ajouter des sous-variétés lagrangiennes immergées et avec certaines décorations au lieu de faire une complétion algébriques.
- (3) De même, il existe de nombreuses variantes de la catégorie dérivée de Fukaya. Nous avons par exemple déjà mentionné qu'il est parfois possible d'ajouter davantage de structures à cette catégorie. De plus, l'approche des structures de Kuranishi de Fukaya, Oh, Ohta et Ono [FOOO09a, FOOO09b] ou des « polyfolds » de Hofer [Hof04] promettent de traiter des sous-variétés lagrangiennes fermées quelconques. Finalement, des variantes comme la catégorie de Fukaya enveloppée permettent de traiter, dans certains contextes, des sous-variétés lagrangiennes non-compactes.

0.1.3. Métriques sur une collection de sous-variétés lagrangiennes

L'objectif principal de cette thèse est de comparer la métrique de Hausdorff (qui sera formellement introduire plus tard) et diverses métriques provenant de la topologie symplectique. Bien qu'il ne soit pas strictement nécessaire de bien comprendre chacune d'entre elles pour suivre la suite de la thèse, saisir le contexte de leur définition sera assurément bénéfique à la personne lectrice. Ainsi, nous offrons ici une courte introduction aux principales métriques entre sous-variétés lagrangiennes apparaissant en topologie symplectique.

Métrique de Hofer lagrangienne

Nous commençons par introduire la métrique entre sous-variétés lagrangiennes la plus connue : la métrique de Hofer lagrangienne. Intuitivement, cette métrique mesure l'énergie minimale nécessaire pour envoyer de façon hamiltonienne une première sous-variété lagrangienne vers une seconde.

Définition 0.39. La norme de Hofer de $\varphi \in \text{Ham}(M, \omega)$ est définie par

$$\|\varphi\|_H := \inf_{\substack{H \in C_c^\infty(M \times [0,1]) \\ \varphi = \varphi_H^1}} \int_0^1 \left(\max_{x \in M} H(x, t) - \min_{x \in M} H(x, t) \right) dt.$$

Alors, la *métrie de Hofer lagrangienne* est définie par

$$d_H(L, L') := \inf_{\substack{\varphi \in \text{Ham}(M, \omega) \\ L' = \varphi(L)}} \|\varphi\|_H$$

avec la convention $d_H(L, L') = +\infty$ si L et L' ne sont pas hamiltonniennement isotopes.

On peut facilement démontrer que la norme de Hofer est une semi-norme invariante sous inversion de φ et sous conjugaison de φ par un symplectomorphisme. Un fait moins trivial est que cette semi-norme est en réalité une norme, c'est-à-dire $\|\varphi\|_H = 0$ seulement si $\varphi = \mathbb{1}_M$. Ce résultat est dû à Hofer [Hof90] pour le cas $M = \mathbb{R}^{2n}$, à Polterovich [Pol93] pour les variétés symplectiques dites bornées géométriquement dont le morphisme $\omega : \pi_2(M) \rightarrow \mathbb{R}$ a image discrète, et à Lalonde et McDuff [LM95] pour les variétés symplectiques générales. De même, par les travaux de Chekanov [Che00], nous savons que d_H est bien une métrique lorsque (M, ω) est bornée géométriquement et que L est connexe et fermée.

Métrique spectrale

Nous discutons maintenant une métrique qui sera particulièrement d'intérêt lors de la seconde partie de cette thèse.

Pour l'introduire, nous notons que le complexe de Floer $CF_\bullet(L; H, J)$ a une filtration naturelle. Pour voir ceci, notons d'abord que le corps de Novikov universel Λ_{univ} possède une valuation non-archimédienne :

$$v\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i T^{\lambda_i}\right) := \min\{\lambda_i \mid a_i \neq 0\},$$

Nous prenons également la convention $v(0) = +\infty$. Alors, pour $P(T) \in \Lambda_{\text{univ}}$ et $\bar{x} = [x, v] \in \tilde{\mathcal{O}}_0(L; H)$, nous définissons

$$\mathcal{A}_{L,H}(P(T)\bar{x}) := \int_0^1 H(t, x(t)) dt - \int_{[0,1]^2} v^* \omega - v(P(T)),$$

que nous étendons de façon non-archimédienne sur $CF_\bullet(L; H, J)$:

$$\mathcal{A}_{L,H}\left(\sum_j P_j(T)\bar{x}_j\right) := \max_j \mathcal{A}_{L,H}(P_j(T)\bar{x}_j).$$

Ceci nous permet donc de définir une filtration ascendante sur $CF_\bullet(L; H, J)$ par

$$CF_\bullet^{\leq \alpha}(L; H, J) := \{c \in CF_\bullet(L; H, J) \mid \mathcal{A}_{L,H}(c) \leq \alpha\}$$

pour $\alpha \in [-\infty, +\infty]$.

Notons que si u est un élément de $\widetilde{\mathfrak{M}}(\bar{x}_-, \bar{x}_+; L, H, J; A)$, alors nous obtenons, en utilisant (0.1.2) et la définition de g_J et X^H , que

$$\begin{aligned}
0 \leq E(u) &:= \int_Z |\partial_s u|^2 \\
&= \int_Z \omega(\partial_s u, \partial_t u + X^H(u)) \\
&= \omega(u) - \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_s(H(t, u(s, t))) ds dt \\
&= \omega(u) + \int_0^1 H(t, x_-(s, t)) dt - \int_0^1 H(t, x_+(s, t)) dt \\
&= \mathcal{A}_{L, H}(\bar{x}_-) - \mathcal{A}_{L, H}(T^{\omega(A)} \bar{x}_+).
\end{aligned}$$

Or, tous les termes apparaissant dans $\partial \bar{x}_-$ sont justement de la forme $T^{\omega(A)} \bar{x}_+$. Ainsi, il en suit que ∂ fait décroître $\mathcal{A}_{L, H}$ et que $CF_{\bullet}^{\leq \alpha}(L; H, J)$ est un sous-complexe. Nous pouvons ainsi considérer son homologie :

$$HF_{\bullet}^{\leq \alpha}(L; H, J) := H_{\bullet}(CF_{\bullet}^{\leq \alpha}(L; H, J)).$$

Remarque 0.40. Cette filtration vient elle-même du fait que $CF_{\bullet}(L; H, J)$ est intuitivement l'homologie de Morse-Bott de $\mathcal{A}_{L, H}$, vue comme une fonctionnelle sur la variété de Fréchet $\widetilde{\mathcal{P}}_0(L, L)$ (ou plus formellement, sur une complétion de Sobolev de celle-ci). Effectivement, nous pouvons équiper cette variété de la métrique riemannienne définie par

$$G_{[x, v]}(X, Y) := \int_0^1 \omega(X(t), J(t)Y(t)) dt,$$

où $T_{[x, v]} \widetilde{\mathcal{P}}_0(L, L)$ est identifié à un sous-espace des sections du fibré x^*TM . Alors, $\text{Crit}(\mathcal{A}_{L, H}) = \widetilde{\mathcal{O}}_0(L; H)$ et l'équation de Floer (0.1.2) correspond à l'équation gradient (négatif) de $\mathcal{A}_{L, H}$. De cette façon, $HF_{\bullet}^{\leq \alpha}(L; H, J)$ devrait être pensée comme l'homologie de Morse-Bott du sous-espace

$$\widetilde{\mathcal{P}}_0(L, L)^{\leq \alpha} := \{[x, v] \in \widetilde{\mathcal{P}}_0(L, L) \mid \mathcal{A}_{L, H}(x, v) \leq \alpha\}.$$

Notons que contrairement à son homologue non filtré, l'homologie de Floer filtrée dépend grandement du choix de H et J . Tout de même, il est possible d'extraire des invariants réellement symplectiques de cette homologie filtrée. Pour obtenir de tels invariants, notons d'abord que l'inclusion $CF_{\bullet}^{\leq \alpha}(L; H, J) \hookrightarrow CF_{\bullet}(L; H, J)$ induit un homomorphisme en homologie :

$$i^{\leq \alpha} : HF_{\bullet}^{\leq \alpha}(L; H, J) \longrightarrow HF_{\bullet}(L; H, J).$$

Définition 0.41. Supposons que L est faiblement exacte. L'invariant spectral associé à $a \in H_\bullet(L; \mathbb{Z}_2) \otimes_{\mathbb{Z}_2} \Lambda_{\text{univ}}$ est

$$c(L; a, H) := \inf\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \psi_{\text{PSS}}(a) \in \text{Im } \iota^{\leq \alpha}\}.$$

Alors, si L' est hamiltoniennement isotope à L et que l'intersection $L \cap L'$ est transverse, la **métrique spectrale** est définie par

$$\gamma(L, L') := \inf_{\substack{H \in C^\infty([0,1] \times M, \mathbb{R}) \\ \varphi_1^H(L) = L'}} \left(c(L; [L], H) + c(L; [L], \overline{H}) \right),$$

où $\overline{H}(t, x) := H(1 - t, x)$. Nous étendons alors γ sur l'entièreté de l'orbite hamiltonienne de L (et donc de L') par

$$\gamma(L, L') := \lim_{\substack{\|\varphi\|_H \rightarrow 0 \\ \varphi(L) \pitchfork L'}} \gamma(\varphi(L), L').$$

Tout comme le suggère la notation, les invariants spectraux sont indépendants du choix de structure complexe fait pour les définir. De même, γ est bel et bien une métrique. Ces notions sont originellement due à Viterbo [Vit92] pour les sous-variétés lagrangiennes hamiltoniennement isotopes à la section nulle d'un fibré cotangent, mais ont été généralisées aux sous-variétés lagrangiennes faiblement exactes par Leclercq [Lec08]. Comme noté précédemment, dans le cas monotone, le domaine de l'isomorphisme PSS est l'homologie quantique plutôt que singulière. Toujours est-il que Leclercq et Zapolsky [LZ18] ont pu définir des invariants spectraux et Kislev et Shelukhin [KS22] ont pu définir la métrique spectrale dans le cas monotone (lorsque l'homologie quantique des sous-variétés lagrangiennes considérées ne s'annule pas). Ainsi, pour la suite des choses, nous ne supposons pas nécessairement que les sous-variétés lagrangiennes sont faiblement exactes.

Remarque 0.42. Notons qu'il existe aussi une filtration sur le complexe de Floer $CF_\bullet(L', L; H, \eta)$ d'une paire de sous-variétés lagrangiennes. Cette fonction est définie de façon analogue à partir d'une fonction

$$\mathcal{A}_{L', L; H, \eta} : CF_\bullet(L', L; H, J, \eta) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

similaire à $\mathcal{A}_{L, H}$. Lorsque $L = \varphi_1^G(L')$ pour un hamiltonien G , c'est parfois cette approche qui est utilisée pour définir des invariants spectraux $c(L', L; a, H, \eta)$. Or, à une constante ne dépendant que de η près, cet invariant est égal à $c(L; a, H - G \circ \varphi^H)$.

De plus, si L et L' sont des sous-variétés lagrangiennes exactes d'un fibré cotangent T^*N , il existe un isomorphisme $HF_\bullet(L', L) \xrightarrow{\sim} HF_\bullet(L)$. Ceci suit des travaux de Fukaya, de Seidel et de Smith [FSS08a, FSS08b] lorsque N est simplement connexe et spinorielle et de ceux d'Abouzaid [Abo12] et de Kragh [Kra13] pour le cas général. Notons aussi les travaux de Nadler [Nad09]

en ce sens. Ainsi, dans ce cas, il est possible de définir $\gamma(L', L)$, même si L et L' ne sont pas a priori hamiltonniennement isotopes, ce qui a été fait pour la première fois par Shelukhin [She22b, She22a].

Métriques d'ombre

Avant d'introduire les métriques d'ombre, nous devons introduire une notion de cobordisme appropriée aux sous-variétés lagrangiennes.

Définition 0.43. Soient $L_1, \dots, L_k, L'_1, \dots, L'_{k'}$, des sous-variétés lagrangiennes connexes fermées de (M, ω) . Un **cobordisme lagrangien** est une sous-variété lagrangienne sans bord (pas nécessairement connexe) V de $(M \times \mathbb{C}, \omega \oplus \omega_0)$ qui est fermée comme sous-ensemble et telle qu'il existe un intervalle $[a_-, a_+] \subseteq \mathbb{R}$ de sorte que

$$V - (M \times [a_-, a_+] \times \mathbb{R}) = \left(\bigsqcup_{i=1}^k L_i \times \ell_- \times \{i\} \right) \bigsqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^{k'} L'_j \times \ell_+ \times \{j\} \right),$$

où $\ell_- = (-\infty, a_-)$ et $\ell_+ = (a_+, +\infty)$. Nous admettons également que k ou k' soient 0 en prenant la convention qu'alors l'union disjointe correspondante est vide. Notons un tel cobordisme par $V : (L'_1, \dots, L'_{k'}) \rightsquigarrow (L_1, \dots, L_k)$.

La **silhouette** d'un cobordisme lagrangien V , notée $\text{out}(V)$, est le complément de l'union des régions non-bornées de $\mathbb{C} - \pi(V)$, où $\pi : M \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est la projection sur la seconde composante. Alors, l'**ombre** de V est donnée par

$$\mathcal{S}(V) := \text{Aire}(\text{out}(V)).$$

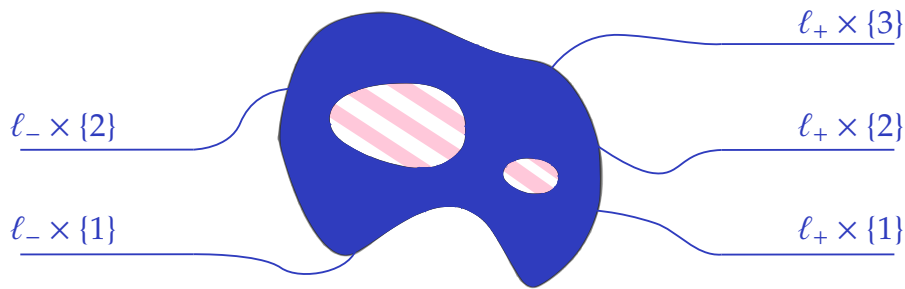


FIGURE 4. Projection d'un cobordisme $V : (L'_1, L'_2, L'_3) \rightsquigarrow (L_1, L_2)$ dans \mathbb{C} (région bleue) et sa silhouette (union des régions bleue et rose hachurée).

La notion d'un cobordisme lagrangien est originalement due à Arnol'd [Arn80], mais nous utilisons ici le formalisme de Biran et Cornea [BC13]. La notion d'ombre provient elle de Cornea et Shelukhin [CS19].

Afin d'obtenir une métrique à partir de l'ombre, nous voudrions prendre l'infimum de l'ombre sur une classe adéquate de cobordismes. Comme démontré dans les travaux de Cornea et Shelukhin [CS19], il est nécessaire de restreindre la classe de cobordisme, sinon l'infimum sera toujours 0 ou ∞ (avec la convention $\inf \emptyset = \infty$). Ainsi, pour la suite, nous considérons toujours que les cobordismes entre des sous-variétés lagrangiennes exactes (respectivement faiblement exactes, monotones) sont des sous-variétés lagrangiennes exactes (respectivement strictement quasi-exactes, strictement quasi-monotones ; voir [BCS21] pour la définition de ces termes).

Définition 0.44. *Pour une famille \mathcal{F} de sous-variétés lagrangiennes respectant une condition \star (par exemple $\star = \text{exacte}$), nous pouvons définir la **pseudométrie d'ombre associée à \mathcal{F}** par*

$$d^{\mathcal{F}}(L, L') := \inf\{\mathcal{S}(V) \mid V : L \rightsquigarrow (F_1, \dots, F_{i-1}, L', F_i, \dots, F_k), k \geq 0, F_i \in \mathcal{F}\}$$

pour tous L et L' respectant la condition \star .

Soit \mathcal{F}' , une seconde famille telle que

$$\overline{\left(\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F\right)} \cap \overline{\left(\bigcup_{F' \in \mathcal{F}'} F'\right)} = \emptyset \quad (0.1.8)$$

est totalement disconnexe. La **métrique d'ombre associée aux familles \mathcal{F} et \mathcal{F}'** est définie par

$$\hat{d}^{\mathcal{F}, \mathcal{F}'} := \max\{d^{\mathcal{F}}, d^{\mathcal{F}'}\}.$$

Notons que, avec cette définition, il est parfaitement acceptable de prendre $\mathcal{F} = \mathcal{F}' = \emptyset$. Cependant, ceci mènera à une métrique infinie pour plusieurs paires (L, L') , l'existence d'un cobordisme à exactement deux extrémités de L à L' forçant les deux sous-variétés lagrangiennes à être très similaires. Or, un cobordisme V respectant la condition \star peut être interprété comme un cône itéré dans la catégorie dérivée de Fukaya $\text{DFuk}^{\star}(M)$. Ainsi, en prenant comme famille \mathcal{F} un ensemble de générateurs de ladite catégorie, nous pouvons assurer algébriquement la finitude de la pseudométrie $d^{\mathcal{F}}$. Alors, les éléments de \mathcal{F}' seront de petites perturbations hamiltoniennes des éléments de \mathcal{F} , de sorte à respecter (0.1.8) tout en s'assurant que $d^{\mathcal{F}'}$ soit aussi finie.

Considérant la nouveauté de cette métrique, très peu est connu sur celle-ci. Notons cependant que lorsque L et L' sont hamiltonniennement isotopes, nous avons l'inégalité

$$d^{\mathcal{F}}(L, L') \leq d_H(L, L') \quad (0.1.9)$$

pour toute famille \mathcal{F} . De plus, Biran, Cornea et Shelukhin [BCS21] ont calculés plusieurs exemples où la métrique de Hofer est infinie, mais pas certaines métriques d'ombre. Ainsi,

cette métrique donne réellement de l'information supplémentaire qui était auparavant inaccessible.

Catégories de persistance triangulées et pseudométriques de fragmentation

Nous présentons maintenant le dernier type de métriques avec lequel nous travaillerons dans cette thèse. Pour ce faire, nous utilisons l'approche de Biran, Cornea et Zhang [BCZ21] des catégories de persistance triangulées. Toutes les notions d'algèbre homologique présentée se retrouvent, par exemple, dans le manuel de Weibel [Wei94] sur le sujet. À l'instar des sous-sections précédentes, nous n'entrerons pas dans tous les détails, mais tenterons d'expliquer autant que possible les subtilités des définitions présentées.

Avant d'aborder les catégories de persistance *triangulées*, il faut bien sûr d'abord expliquer ce qu'est une catégorie de persistance en général. Comme le nom laisse l'entendre, ce sont des catégories dont les espaces de morphismes sont des modules de persistance et telles que la composition respecte cette structure. Cependant, comme la définition de même un module de persistance n'est elle-même pas standard, nous donnons ici la définition formelle.

Par abus de notation, nous noterons par \mathbb{R} la catégorie dont les objets sont les nombres réels et pour laquelle $\text{Mor}_{\mathbb{R}}(\alpha, \beta)$ contient un unique objet si $\alpha \leq \beta$ et est vide sinon. Pour un corps \mathbb{K} , nous noterons par $\text{Vect}_{\mathbb{K}}$ la catégorie des espaces vectoriels sur \mathbb{K} .

Définition 0.45. Une catégorie \mathcal{C} est une *catégorie de persistance* (sur un corps \mathbb{K}) si pour tous objets $A, B, C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, on a des foncteurs $M_{A,B} : \mathbb{R} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{K}}$ et $M_{B,C} : \mathbb{R} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{K}}$ tels que

(i) on a

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) = \{(f, r) \mid f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}^{\alpha}(A, B)\},$$

où $\text{Mor}_{\mathcal{C}}^{\alpha}(A, B) := M_{A,B}(\alpha)$;

(ii) la composition induit des applications linéaires

$$\circ_{\alpha,\beta} : \text{Mor}_{\mathcal{C}}^{\beta}(B, C) \times \text{Mor}_{\mathcal{C}}^{\alpha}(A, B) \longrightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}^{\alpha+\beta}(A, C)$$

faisant commuter le diagramme ci-bas

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}_{\mathcal{C}}^{\beta}(B, C) \times \text{Mor}_{\mathcal{C}}^{\alpha}(A, B) & \xrightarrow{\circ_{\alpha,\beta}} & \text{Mor}_{\mathcal{C}}^{\alpha+\beta}(A, C) \\ M_{B,C}(i_{\beta,\beta'}) \times M_{B,C}(i_{\alpha,\alpha'}) \downarrow & & \downarrow M_{B,C}(i_{\alpha+\beta,\alpha'+\beta'}) \\ \text{Mor}_{\mathcal{C}}^{\beta'}(B, C) \times \text{Mor}_{\mathcal{C}}^{\alpha'}(A, B) & \xrightarrow{\circ_{\alpha',\beta'}} & \text{Mor}_{\mathcal{C}}^{\alpha'+\beta'}(A, C) \end{array}$$

dès que $\alpha \leq \alpha'$ et $\beta \leq \beta'$.

Notons que le point (ii) revient à dire que \circ_C est une transformation naturelle de $M_{C,B} \times M_{B,A}$ à $M_{C,A} \circ +$, où $+$ est le bifoncteur $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ induit par l'addition.

Une catégorie de persistance C possède une sous-catégorie (au sens classique) naturelle : la catégorie C_0 dont les objets sont ceux de C , mais pour laquelle

$$\text{Mor}_{C_0}(A, B) := \text{Mor}_C^0(A, B).$$

Effectivement, l'axiome (ii) d'une catégorie de persistance assure que la composition est bien définie dans C_0 . Cette sous-catégorie jouera un rôle essentiel dans la notion de catégorie de persistance triangulée : le but est de généraliser la notion de catégorie triangulée pour C_0 aux « nouveaux » morphismes, qui sont dans C , mais pas dans C_0 .

Afin d'atteindre ce but, il faut introduire le concept de foncteurs de transfert. Ces foncteurs ont pour but d'interpréter un morphisme de degré α comme un morphisme de degré 0, au prix de changer de (co)domaine, nous permettant ainsi de rester dans C_0 .

Notons d'abord que nous pouvons définir un foncteur de persistance $F : C \rightarrow C'$ comme un foncteur au sens usuel qui, pour tous objets $A, B \in \text{Ob}(C)$, induit une transformation naturelle de $M_{A,B}$ à $M'_{F(A),F(B)}$. En particulier, F envoie $\text{Mor}_C^\alpha(A, B)$ sur $\text{Mor}_{C'}^\alpha(F(A), F(B))$. De même, nous dirons qu'une transformée naturelle (au sens usuel) $\eta : F \rightarrow F'$ entre foncteurs de persistance a transfert α si $\eta(A) : F(A) \rightarrow F'(A)$ appartient à $\text{Mor}_{C'}^\alpha(F(A), F'(A))$ pour tout $A \in \text{Ob}(C)$. Ceci permet de construire une catégorie de persistance $\text{PFun}(C, C')$ dont les objets sont des foncteurs et les morphismes sont les paires (η, α) , où η est une transformation naturelle de transfert α . Tout comme dans le cas classique, la composition donne structure strictement monoïdale à $\text{PEnd}(C) := \text{PFun}(C, C)$.

Notons par \mathbb{R}' la catégorie dont les objets sont les réels et l'espace de morphisme $\text{Mor}_{\mathbb{R}'}(r, s)$ est toujours constitué d'un unique morphisme $i_{r,s}$. Le bifoncteur $+$: $\mathbb{R}' \times \mathbb{R}' \rightarrow \mathbb{R}'$ induit par l'addition fait alors de cette catégorie une catégorie strictement monoïdale.

Définition 0.46. *Un foncteur de transfert sur C est un foncteur (au sens usuel) strictement monoïdal $\Sigma : \mathbb{R}' \rightarrow \text{PEnd}(C)$ tel que pour tous $r \leq s$, la transformée naturelle $\Sigma(i_{r,s}) : \Sigma(r) \rightarrow \Sigma(s)$ a transfert $s - r$.*

Pour alléger la notation, notons $\Sigma^r := \Sigma(r) \in \text{PEnd}(C)$ et $\eta_{r,s} := \Sigma(i_{r,s}) \in \text{Mor}_{\text{PEnd}(C)}^{s-r}(\Sigma^r, \Sigma^s)$. Pour $A \in \text{Ob}(C)$ et $r \geq 0$, nous nous intéressons au morphisme

$$\eta_r^A := M_{\Sigma^r A, A}(i_{-r,0})(\eta_{r,0}(A)) \in \text{Mor}_C^0(\Sigma^r A, A) = \text{Mor}_{C_0}(\Sigma^r A, A).$$

Quoique ayant une définition opaque, ce dernier morphisme est essentiel, puisque c'est un morphisme canonique de $\Sigma^r A$ et A étant dans C_0 .

Remarque 0.47. Le fait que Σ est strictement monoïdal assure que $\Sigma^s \circ \Sigma^r = \Sigma^{r+s}$ et $\Sigma^0 = \mathbb{1}$. De même, le foncteur de persistance Σ^r induit un isomorphisme

$$\Sigma^r : \text{Mor}^\alpha(A, B) \xrightarrow{\sim} \text{Mor}^\alpha(\Sigma^r A, \Sigma^r B)$$

et préserve la sous-catégorie \mathcal{C}_0 . Finalement, la pré-composition par le foncteur de persistance $\eta_{0,r}(A)$ induit un isomorphisme

$$\circ \eta_{0,r} : \text{Mor}^\alpha(\Sigma^r A, B) \xrightarrow{\sim} \text{Mor}^{\alpha+r}(A, B).$$

Ainsi, la notion de foncteur de transfert réalise bien notre objectif de ramener notre nouveau concept de triangulation à celui de la sous-catégorie \mathcal{C}_0 .

Ceci nous permet d'enfin définir ce qu'est une catégorie de persistance triangulée.

Définition 0.48. Une *catégorie de persistance triangulée* est une catégorie de persistance \mathcal{C} avec foncteur de transfert Σ respectant les axiomes suivants.

- (i) La sous-catégorie \mathcal{C}_0 est triangulée avec foncteur de translation T . De plus, la structure de persistance est compatible avec la structure additive de \mathcal{C}_0 .
- (ii) La restriction de Σ^r à $\text{End}(\mathcal{C}_0)$ est un endofoncteur triangulé. De plus, les transformées naturelles $\eta_{r,s}$ sont compatibles avec la structure additive de \mathcal{C}_0 .
- (iii) Pour tout $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ et tout $r \geq 0$, le morphisme η_r^A appartient à un triangle exact de \mathcal{C}_0

$$\Sigma^r A \xrightarrow{\eta_r^A} A \longrightarrow K \longrightarrow T\Sigma^r A,$$

où $\eta_r^K = 0$.

Plus généralement, nous appellerons un morphisme $f \in \text{Mor}^0(A, B)$ appartenant à un triangle exact

$$A \xrightarrow{f} B \longrightarrow K \longrightarrow TA$$

avec $\eta_r^K = 0$ un r -isomorphisme. Nous pouvons démontrer qu'il existe alors des morphismes $\varphi \in \text{Mor}^0(B, \Sigma^{-r}A)$ et $\psi \in \text{Mor}^0(\Sigma^r B, A)$ tels que

$$\varphi \circ f = \Sigma^{-r}(\eta_r^A) \quad \text{et} \quad f \circ \psi = \eta_r^B$$

que nous appelons respectivement r -inverse à gauche et r -inverse à droite de f .

Remarque 0.49. La condition sur K peut sembler des plus obscures. Cependant, elle est équivalente à ce que les applications

$$M_{B,K}(i_{\alpha, \alpha+r}) : \text{Mor}^\alpha(B, K) \rightarrow \text{Mor}^{\alpha+r}(B, K)$$

et

$$M_{K,B}(i_{\alpha,\alpha+r}) : \text{Mor}^{\alpha}(K, B) \rightarrow \text{Mor}^{\alpha+r}(K, B)$$

s'annulent pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Ainsi, K peut être vu comme un objet qui est à un r -transfert près d'être l'objet nul de \mathcal{C}_0 . En termes de code-barres (voir par exemple [PRSZ20] pour la définition), cela signifie que les barres de $M_{B,K}$ et $M_{K,B}$ sont toutes de longueurs au plus r . En particulier, lorsque $r = 0$, il faut que $K = 0$. Donc, le nom de r -isomorphisme est bien justifié.

Cette notion de r -isomorphisme nous permet aussi d'étendre la notion de triangle exact, ce qui nous permettra enfin de définir la notion de métriques de fragmentation et justifiera tout ce travail algébrique.

Définition 0.50. Un *triangle exact* Δ de \mathcal{C} de *poids* $w(\Delta) := r \geq 0$ est un diagramme

$$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} \Sigma^{-r}TA$$

tel qu'il existe un triangle exact $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v'} C \xrightarrow{w'} TA$ de \mathcal{C}_0 et un r -isomorphisme $\varphi : C' \rightarrow C$ avec r -inverse à droite $\psi : \Sigma^r C \rightarrow C'$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \Sigma^r C & & \\ & & & & \downarrow \psi & \searrow \Sigma^r w & \\ & & & & & & \\ A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v'} & C' & \xrightarrow{w'} & TA \\ & & & \searrow v & \downarrow \varphi & & \\ & & & & C & & \end{array}$$

commute.

Donc, les triangles exacts de poids r sont en quelque sorte des versions r -transférées des triangles exacts de \mathcal{C}_0 . De fait, ces derniers sont des triangles de poids 0.

Nous pourrions tirer une pseudométrie de fragmentation directement à partir de cette définition en regardant tous les triangles entre des objets X et Y , puis en prenant l'infimum parmi les poids des triangles possibles. Cependant, cette pseudométrie serait souvent non définie, puisqu'il est rare que deux objets soient dans le même cône. Ainsi, il y a un avantage à regarder plutôt une suite de triangles exacts.

pour $x \in L' \cap L$. La filtration utilisée ici est celle introduite dans la remarque 0.42.

Pour ce qui est du foncteur de transfert, rappelons que la complétion $\widehat{\text{Fuk}^\star(M)}$ nécessaire à la définition de \mathbf{C} peut être obtenue à l'aide du plongement de Yoneda (voir remarque 0.38). Ce A_∞ -foncteur associe à chaque sous-variété lagrangienne un A_∞ -module filtré sur $\text{Fuk}^\star(M)$, c'est-à-dire un A_∞ -foncteur de $\text{Fuk}^\star(M)$ à Ch , la dg-catégorie des complexes de chaînes sur \mathbb{Z}_2 filtrés et non-gradués. Ainsi, nous pouvons voir naturellement les objets de $\text{DFuk}^\star(M)$ comme des A_∞ -modules. Or, pour un A_∞ -module \mathcal{M} et $r \in \mathbb{R}$, nous avons une notion naturelle de transfert $\Sigma^r \mathcal{M}$: pour $L \in \mathcal{L}^\star(M)$, nous prendrons

$$(\Sigma^r \mathcal{M})^{\leq \alpha}(L) := \mathcal{M}^{\leq \alpha - r}(L)$$

qui s'étend naturellement aux morphismes de la A_∞ -catégorie A_∞ -modules filtrés. Ceci fait de $\text{DFuk}^\star(M)^{op}$ une catégorie de persistance triangulée.

Pour $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}^\star(M)$, nous obtenons alors finalement une métrique de fragmentation $D^\mathcal{F}$ sur $\mathbf{C} = \text{DFuk}^\star(M)^{op}$ en prenant la limite $\|H_{L,L}\|_{\mathbf{C}^2} \rightarrow 0$ parmi les diverses métriques $d^\mathcal{F}$ que nous obtenons selon le choix de perturbation hamiltonienne $H_{L,L}$ pour chaque $L \in \mathcal{L}^\star(M)$ que nous avons fait.

Remarque 0.53. *Comme mentionné dans la remarque 0.52, nous travaillons en fait dans la catégorie $\text{DFuk}^\star(M)_\infty^{op}$, qui a les mêmes objets que la catégorie dérivée de Fukaya, mais pas tous les morphismes.*

Or, dans le cas de la catégorie dérivée de Fukaya, il faut encore davantage modifier notre construction. Effectivement, bien que les A_∞ -modules provenant du plongement de Yoneda de $\mathcal{L}^\star(M) = \text{Ob}(\text{DFuk}^\star(M))$ sont filtrés, il pourrait y avoir des A_∞ -modules dans $\text{Ob}(\widehat{\text{DFuk}^\star(M)})$ qui ne le soient pas exactement. C'est ici le fait que $\mathcal{L}^\star(M)$ est fini est utilisé : cela nous permet de prendre de petites perturbations de ces modules afin d'obtenir quelque chose de réellement filtré. La métrique $D^\mathcal{F}$ est alors celle obtenue une limite supplémentaire en faisant tendre la taille de ces perturbations tend vers 0. Cette approche permet aussi de traiter des sous-variétés lagrangiennes dont l'intersection n'est pas transverse.

Notons que cette nouvelle pseudométrie se comporte plutôt bien pour un bon choix de famille \mathcal{F} .

Proposition 0.54. *Soient $\mathcal{F}, \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{L}^\star(M)$.*

(1) *Si \mathcal{F} engendre $\text{DFuk}^\star(M)$, alors $D^\mathcal{F}$ est finie, c'est-à-dire*

$$D^\mathcal{F}(L, L') < \infty$$

pour tous $L, L' \in \mathcal{L}^\star(M)$.

(2) Si $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}' = \emptyset$, alors

$$D^{\mathcal{F}, \mathcal{F}'} := \max \{D^{\mathcal{F}}, D^{\mathcal{F}'}\}$$

définit une métrique sur $\mathcal{L}^*(M)$.

Remarque 0.55. Précédemment à leur travail sur les catégories de persistance triangulées, Biran, Cornea et Shelukhin [BCS21] ont introduit plusieurs autres métriques de fragmentation de nature géométrique, comprenant en particulier les métriques d'ombre présentées ci-haut. Ces métriques sont toujours des bornes supérieures aux métriques de fragmentation algébriques que nous venons de présenter et ne sont pas en général finies. Cependant, puisqu'elles sont définies directement à partir de la structure faiblement filtrée de la catégorie dérivée de Fukaya, elles sont bien définies sur des collections infinies de sous-variétés lagrangiennes $\mathcal{L}^*(M)$ et sont généralement plus facilement calculables.

Notons que si nous nous permettons de travailler avec des cobordismes immergés (avec des décorations adéquates, cf. [BC21]), et non seulement plongés comme dans la métrique d'ombre présentée précédemment, nous pouvons traiter cette nouvelle métrique d'ombre dans le formalisme des catégories de persistance triangulées. Plus généralement, la plupart des notions associées aux catégories de persistance triangulées s'interprètent dans la catégorie dérivée de Fukaya en terme de cobordismes immergés.

0.1.4. Variétés de contact et sous-variétés isotropes

Nous introduisons maintenant quelques définitions et résultats de base de la topologie de contact. Notons que nous n'entrerons cependant pas autant dans les détails que pour la topologie symplectique : la topologie de contact n'étant pas le point focal de cette thèse, les outils qui nous seront nécessaires seront plutôt minimaux. La personne attentive remarquera les similarités avec les notions présentées à la sous-section 0.1.1, nous en copions même la présentation générale. Ceci ne devrait pas être une surprise, puisque les topologies symplectique et de contact sont intimement liées.

Les résultats de cette section sont aussi présents dans le livre de McDuff et Salamon sur la topologie symplectique [MS17].

Variétés de contact

Nous commençons avec l'entité la plus fondamentale du sujet : la variété de contact. La définition est néanmoins plus subtile que dans le cas symplectique.

Définition 0.56. Une *variété de contact* est un couple (M, ξ) , où M est une variété lisse connexe de dimension $2n + 1$ et ξ est une distribution d'hyperplans de TM maximale non-intégrable. Autrement dit, tout point $x_0 \in M$ possède un voisinage U et une 1-forme α définie sur U telle que pour tout $x \in U$

- (i) $\xi_x = \text{Ker } \alpha_x$;
- (ii) $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$.

Lorsqu'une telle 1-forme α existe sur tout M , nous appelons α une *forme de contact* de (M, ξ) .

Nous pouvons démontrer qu'une forme de contact existe si et seulement si ξ est co-orientable. Lorsqu'elle existe, une forme de contact n'est cependant pas unique. Néanmoins, si α et α' sont des formes de contact de (M, ξ) , alors il existe une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ telle que $\alpha' = f\alpha$.

L'exemple canonique d'une variété de contact est intimement lié à l'exemple canonique d'une variété symplectique, soit le fibré cotangent.

Exemple 0.57. Soit L , une variété lisse de dimension n . Son fibré des 1-jets $J^1L = T^*L \times \mathbb{R}$ hérite d'une forme de contact de la 1-forme canonique de T^*L

$$\alpha_0 := dt - \lambda_0,$$

où t est la coordonnée dans la composante en \mathbb{R} .

Plus généralement, cette procédure fait de $M \times \mathbb{R}$ une variété de contact lorsque M est une variété symplectique exacte. En particulier, en prenant $L = \mathbb{R}^n$, nous retrouvons la forme de contact canonique α_0 de $J^1\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n+1}$.

Notons qu'il existe une procédure complémentaire : la symplectisation. Effectivement, si M est une variété de contact avec forme de contact α , alors $(M \times \mathbb{R}, \omega = d(e^s \alpha))$ est une variété symplectique (exacte). C'est d'ailleurs à travers l'homologie de Floer de cette symplectisation que beaucoup de résultats rigides de la topologie de contact sont obtenus.

Notons cependant que pas toutes les variétés de contact sont obtenues par la procédure de l'exemple 0.57. Par exemple, il est connu que toute 3-variété admet une structure de contact.

Finalement, notons que tout comme leurs cousines de dimension paire, les variétés de contact n'ont pas d'invariants locaux.

Théorème 0.58 (Théorème de Darboux, version contact). Soient (M, ξ) , une variété de contact de dimension $2n + 1$, et $x \in M$. Il existe une carte $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ d'un voisinage U de x , dite **carte de Darboux** centrée en x , telle que $\varphi_*\xi = \text{Ker } \alpha_0$ et $\varphi(x) = 0$.

Contactomorphismes et hamiltoniens de contact

Avant d'aller de parler de sous-variétés d'intérêt, il est utile d'expliquer quelle notion d'automorphisme il est pertinent de considérer sur une variété de contact.

Définition 0.59. Un **contactomorphisme** ψ d'une variété de contact (M, ξ) est un difféomorphisme tel que $\psi_*\xi = \xi$. Si M est non-compacte, nous supposons que ψ a support compact, c'est-à-dire $\psi = 1$ hors d'un compact de M . Notons le groupe formé par ces applications par $\text{Cont}(M, \xi)$.

En la présence d'une forme de contact α , être un contactomorphisme est équivalent à $\psi^*\alpha = f\alpha$, où $f \neq 0$.

Tout comme pour les variétés symplectiques, les variétés de contact avec forme de contact ont une notion de hamiltonien.

Définition 0.60. Soit M , une variété de contact avec forme de contact α . Son **champ de Reeb** est l'unique champ vectoriel $R = R_\alpha$ sur M tel que

$$\iota_R d\alpha \equiv 0 \quad \text{et} \quad \alpha(R) \equiv 1.$$

On appelle une fonction lisse $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ un **hamiltonien de contact**. Ce dernier engendre un champ vectoriel X^H à travers les équations

$$\iota_{X^H} d\alpha = dH - (dH(R))\alpha \quad \text{et} \quad \alpha(X^H) = -H.$$

On appelle alors le difféomorphisme $\psi^H = \psi_1^H$ engendré par X^H le **contactomorphisme hamiltonien** engendré par H .

Sous-variétés d'intérêt

Nous discutons maintenant des sous-variétés legendriennes, l'équivalent des sous-variétés lagrangiennes en topologie de contact.

Définition 0.61. Une sous-variété Q d'une variété de contact (M, ξ) de dimension $2n + 1$ est dite **contact isotrope** si $TQ \subseteq \xi$. Elle est dite **legendrienne** si elle est isotrope et de dimension n .

On peut démontrer qu'à cause de la condition de non-intégrabilité maximale sur ξ , les variétés legendriennes sont les variétés isotropes de dimension maximale. Ainsi, elles devraient être pensées comme la version de contact des sous-variétés lagrangiennes.

Remarque 0.62. *Tout comme pour le cas symplectique, ces notions se généralisent naturellement au cas des immersions. Cependant, pour des raisons dimensionnelles, les sous-variétés legendriennes (et plus généralement, isotropes) sont génériquement plongées, contrairement à leurs cousines lagrangiennes.*

Exemple 0.63. *Nous avons déjà vu que la 1-forme canonique λ_0 s'annule sur l'image de la section nulle du cotangent T^*L d'une variété L . Il s'ensuit que α_0 s'annule sur l'image de la section nulle dans J^1L . Ainsi, cette image est une sous-variété legendrienne.*

0.2. Notions ensemblistes et de géométrie riemannienne

Nous présentons ici quelques notions ensemblistes et de géométrie riemannienne qui seront nécessaires à la compréhension de cette thèse. Tout comme à la section précédente, nous supposons que la personne lectrice possède une base en géométrie différentielle. Notons que les notions dont nous avons besoin sont moins complexes que pour la topologie symplectique. Ainsi, la présentation sera davantage expéditive.

0.2.1. Un peu de géométrie riemannienne

Le but de cette sous-section est principalement de clarifier la notation qui sera utilisée au cours de la thèse, puisque la plupart de ces notions seront déjà connues d'une personne ayant une base de géométrie différentielle. De fait, nous avons même déjà touché aux métriques riemanniennes au cours de la section précédente. Ceci dit, nous ne supposons pas de notions de géométrie riemannienne, et donc la personne moins expérimentée dans le sujet ne sera pas prise de court. Nous suivrons principalement l'excellent manuel de do Carmo [dC92] pour la présente exposition et référons la personne lectrice à ce manuel pour davantage de détails.

Métriques riemanniennes

Nous commençons par introduire ce qu'est une métrique riemannienne. Essentiellement, une métrique riemannienne est un produit scalaire g_x sur chaque espace tangent T_xM d'une variété M qui varie de façon lisse en x .

Définition 0.64. Une *métrique riemannienne* g sur une variété lisse M est une section lisse du fibré $T^*M \otimes T^*M$ telle que, pour tout $x \in M$ et tous $v, w \in T_xM$,

- (i) $g_x(v, w) = g_x(w, v)$;
- (ii) $g_x(v, v) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $v = 0$.

Une *variété riemannienne* est une variété lisse équipée d'une métrique riemannienne.

Remarque 0.65. Nous pouvons légèrement réinterpréter cette définition.

- (1) Le point (i) revient à dire que g définit une section du fibré $\text{Sym}^2(T^*M)$, la symétrisation du produit tensoriel $T^*M \otimes T^*M$.
- (2) En coordonnées locales, nous pouvons voir une section de $T^*M \otimes T^*M$ comme une application

$$U \longrightarrow \text{Mat}(n; \mathbb{R}),$$

où U est un ouvert de \mathbb{R}^n et $n = \dim M$. Le point (i) indique que cette application a valeurs dans l'espace des matrices symétriques, alors que le point (ii) indique que ces matrices sont définies positives.

- (3) Par abus de notation, nous écrivons souvent M pour la variété riemannienne (M, g) lorsqu'il n'y a pas de confusion possible. De même, nous écrivons parfois $\langle \cdot, \cdot \rangle$ au lieu de g pour souligner que nous devons penser à g comme une généralisation du produit scalaire. De même, nous notons $|v| = \sqrt{g(v, v)}$.

Nous avons vu précédemment que toute variété symplectique admettait une structure presque complexe compatible, et donc une métrique riemannienne. Or, l'existence d'une métrique riemannienne est un phénomène général, pas seulement symplectique.

Proposition 0.66. Soit M une variété lisse (paracompacte). Alors, M admet une métrique riemannienne.

Remarque 0.67. En vue de la remarque 0.67, ce résultat ne devrait pas être une surprise : l'espace des matrices symétriques définies positives est convexe, et donc contractile. Ainsi, il n'y a aucune obstruction topologique à étendre les applications locales en une construction globale.

Connexion de Levi-Civita et courbures

Dans ce paragraphe, nous expliquons comment la présence d'une métrique riemannienne donne à une variété lisse une notion canonique de dérivée directionnelle. Nous utilisons ensuite cette nouvelle notion de dérivée pour définir des notions de courbure.

Nous commençons donc par introduire cette notion de dérivée directionnelle.

Définition 0.68. Une *connexion affine* sur une variété lisse M est une application

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

telle que, pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ et tous $f, g \in C^\infty(M)$,

- (i) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$;
- (ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;
- (iii) $\nabla_X(gY) = g\nabla_X Y + (Xg)Y$.

Rappelons que X peut être vu comme une différentiation de $C^\infty(M)$. Ainsi, Xg ci-haut est une fonction. Alternativement, nous pouvons simplement noter que $(Xg)(x) = (dg)_x(X(x))$ sous l'identification canonique $T_{g(x)}\mathbb{R} = \mathbb{R}$.

Remarque 0.69. La $C^\infty(M)$ -linéarité dans la première variable assure que ∇ se comporte bien comme une dérivée directionnelle. Effectivement, $(\nabla_X Y)(x)$ ne dépend que de $X(x)$ et de Y sur un voisinage de x . Pour cette raison, nous noterons parfois $\nabla_v Y$ avec $v = X(x)$ par abus de notation.

La notion de connexion affine est bien pratique, mais sur une variété lisse quelconque, il n'y a pas de choix évident de connexion. Cependant, sur une variété riemannienne, la situation est tout autre.

Proposition 0.70. Sur une variété riemannienne M , il existe une unique connexion affine ∇ telle que, pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$,

- (i) $X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$;
- (ii) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.

Nous appelons cette connexion la *connexion de Levi-Civita*.

Pour la suite des choses, sauf mention contraire, ∇ sera toujours la connexion de Levi-Civita. C'est grâce à cette connexion que nous pourrions définir les diverses notions de courbure qui nous seront nécessaires.

Définition 0.71. Le *tenseur de courbure de Riemann* d'une variété riemannienne M est l'application

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

définie par

$$R(X, Y)Z := \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Lemme 0.72. *Le tenseur de courbure de Riemann est $C^\infty(M)$ -linéaire dans chacune de ses variables. Autrement dit, c'est un bien un tenseur.*

De plus, l'application

$$(X, Y, Z, W) \mapsto g(R(X, Y)Z, W) =: R(X, Y, Z, W)$$

possède les symétries suivantes :

- (i) $R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) = 0$;
- (ii) $R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W)$;
- (iii) $R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z)$;
- (iv) $R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y)$.

Ces symétries indiquent que nous pourrions contracter le tenseur de courbure de Riemann sans réellement perdre de l'information. Il existe plusieurs de ses contractions, gardant plus ou moins d'information, mais la plus générale est la courbure sectionnelle.

Définition 0.73. *Soient M , une variété riemannienne, et σ , un 2-plan d'un espace tangent $T_x M$. Soient $v, w \in T_x M$, des vecteurs engendrant σ . La **courbure sectionnelle** de M en σ est*

$$K(\sigma) := \frac{R(v, w, v, w)}{|v|^2|w|^2 - \langle v, w \rangle^2}.$$

Notons que, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que u et v sont linéairement indépendants, le dénominateur dans la définition de $K(\sigma)$ est strictement positif. De même, un calcul direct permet de vérifier que $K(\sigma)$ ne dépend pas du choix de vecteurs engendrant σ .

Suivant l'idée que K représente la courbure de M , nous appelons une variété riemannienne avec $K \equiv 0$ une variété plate. Les exemples principaux de ces variétés sont \mathbb{R}^n avec le produit scalaire standard et le tore, vu comme le quotient $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$.

Remarque 0.74. *La courbure sectionnelle est intimement liée à des notions antérieures.*

- (1) *Lorsque M est une surface, il n'existe naturellement qu'un seul 2-plan par espace tangent. Ainsi, K est une fonction (lisse) sur M . En fait, c'est la courbure gaussienne de la géométrie différentielle classique.*
- (2) *La notion de courbure sectionnelle est équivalente à celle de tenseur de courbure de Riemann. Plus explicitement, si la courbure sectionnelle K est donnée, nous pouvons retrouver le tenseur de Riemann par la formule*

$$R(u, v, w, z) = \frac{1}{6} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} [K(u + sw, v + tz) - K(u + sz, v + tw)] \Big|_{(s,t)=(0,0)},$$

où $K(u, v) := K(\text{span}\{u, v\})(|u|^2|v|^2 - \langle u, v \rangle^2)$ (si u et v sont linéairement indépendants, sinon $R(u, v, w, z) = 0$). En particulier, une variété est plate si et seulement si $R \equiv 0$.

Bien que la courbure sectionnelle soit une notion très utile, elle n'est pas bien adaptée à l'étude des sous-variétés. Effectivement, si N est une sous-variété de M et σ est un 2-plan dans un espace tangent de N , il se peut que $K(\sigma)$ diffère de $K^N(\sigma)$, la courbure sectionnelle calculée à partir de $g|_{TN}$.

Ultimement, ceci est parce que la connexion de Levi-Civita de $(N, g|_{TN})$ est donnée, pour $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$, par

$$\nabla_X^N Y = \pi_N \left(\nabla_{\bar{X}} \bar{Y} \right),$$

où $\pi_N : TM \rightarrow TN$ est donnée par la projection orthogonale et \bar{X} et \bar{Y} sont des extensions de X et Y respectivement à un voisinage de N dans M . Ainsi, la partie de ∇ normale à N contribue à K , mais pas à K^N , d'où la disparité. La notion de courbure que nous introduisons devrait donc mesurer cette partie normale.

Définition 0.75. La *seconde forme fondamentale* B_N d'une sous-variété N d'une variété riemannienne M est définie, pour $v, w \in T_x N$, par

$$B_N(v, w) := \nabla_v w - \nabla_w v \in T_x N^\perp.$$

C'est un calcul direct que de vérifier que cette définition ne dépend pas du choix d'extension utilisé pour calculer les connexions. Comme annoncé, la seconde forme fondamentale est intimement liée à la courbure sectionnelle.

Proposition 0.76 (Équation de Gauss). Si $x \in N$ et σ est un 2-plan de $T_x N$ engendré par des vecteurs v et w , alors

$$K^N(\sigma) - K(\sigma) = \langle B_N(v, v), B_N(w, w) \rangle - |B_N(v, w)|^2.$$

En particulier, si $B_N \equiv 0$, c'est-à-dire si N est totalement géodésique, alors $K^N = K$.

Pour obtenir un invariant numérique, nous pouvons utiliser une astuce similaire à ce que nous avons fait avec la courbure sectionnelle. En fait, dans cette thèse, nous travaillons principalement avec la norme de B_N :

$$\|B_N\| := \sup_{x \in N} \max_{\substack{v, w \in T_x N - \{0\} \\ \eta \in T_x N^\perp - \{0\}}} \frac{|\langle B_N(v, w), \eta \rangle|}{|v||w||\eta|} \in [0, +\infty].$$

Le fait que ce soit un maximum pour chaque $x \in N$ vient du fait que nous pouvons optimiser sur l'ensemble compact avec $|v| = |w| = |\eta| = 1$. De même, le supremum sera

un maximum (et donc sera fini) si N est compact. Finalement, le fait que le quotient soit différent dans la définition de K vient du fait que R est antisymétrique dans ses deux premières variables, alors que B_N est symétrique. En fait, ceci implique que le maximum sera atteint lorsque $v = w$.

Remarque 0.77. Bien que nous ayons défini la seconde forme fondamentale pour une sous-variété plongée, nous aurions tout aussi bien pu le faire pour une immersion $f : N \hookrightarrow M$. Il suffit alors de remplacer TM par f^*TM et $g|_{TN}$ par f^*g dans les constructions ci-haut. L'équation de Gauss reste alors tout aussi vraie.

Géodésiques et convexité

Nous introduisons maintenant les géodésiques, un type de courbes spéciales sur une variété riemannienne. De fait, démontrer l'existence de certaines géodésiques est encore aujourd'hui un domaine actif de recherche. De plus, ces courbes permettent plusieurs constructions centrales à la géométrie riemannienne.

Cependant, avant d'entrer dans la définition de ces courbes, nous devons établir quelques notions préliminaires. Rappelons d'abord qu'un champ vectoriel le long d'un chemin $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ est une application lisse $V : [a, b] \rightarrow TM$ telle que $V(t) \in T_{\gamma(t)}M$ pour tout $t \in [a, b]$. Autrement dit, c'est une section du fibré γ^*TM .

Proposition 0.78. Soient M , une variété riemannienne et $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, un chemin lisse. Il existe une unique application

$$\frac{D}{dt} : \Gamma(\gamma^*TM) \rightarrow \Gamma(\gamma^*TM)$$

telle que, pour tous $V, W \in \Gamma(\gamma^*TM)$ et toute $f \in C^\infty([a, b])$, on a

$$(i) \quad \frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt};$$

$$(ii) \quad \frac{D}{dt}(fV) = f \frac{DV}{dt} + \frac{df}{dt}V;$$

$$(iii) \quad \frac{DV}{dt} = \nabla_{\dot{\gamma}}X \text{ si } V(t) = X(\gamma(t)) \text{ pour } X \in \mathfrak{X}(M).$$

Nous appelons cette application la **dérivée covariante** le long de γ

Lorsqu'il n'y a de confusion possible, nous noterons $\dot{V} := \frac{DV}{dt}$ pour alléger la notation.

Remarque 0.79. Quelques précisions sur notre définition sont de mise.

- (1) Lorsque nous disons qu'un chemin γ défini sur un intervalle fermé $[a, b]$ est lisse, nous voulons dire que γ admet une extension lisse sur un intervalle $(a - \delta, b + \delta)$ pour $\delta > 0$ petit. De même, les champs vectoriels le long de γ que nous considérons admettent une extension lisse le long de l'extension de γ . Ainsi, il n'y a pas de confusion possible lorsque nous prenons des dérivées en a et b .
- (2) Pour toute connexion affine ∇ sur une variété lisse M et toute fonction lisse $f : N \rightarrow M$, nous pouvons définir le rappel de la connexion

$$f^*\nabla : \mathfrak{X}(N) \otimes \Gamma(f^*TM) \rightarrow \Gamma(f^*TM).$$

La dérivée covariante n'est que le cas où $f = \gamma$ est un chemin et ∇ est la connexion de Levi-Civita ; la dépendance dans la première composante peut être alors dispensée puisque les champs vectoriels sur $[a, b]$ ne sont que des multiples de $\dot{\gamma}$.

Proposition 0.80. Soient M , une variété riemannienne, $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, un chemin lisse, et $v \in T_{\gamma(a)}M$. Il existe un unique champ vectoriel V le long de γ tel que

- (i) $V(a) = v$;
- (ii) $\dot{V} \equiv 0$.

Nous disons alors que V est **parallèle** le long de γ et appelons $w = V(b)$ le **transport parallèle** de v le long de γ .

Notons que la notion de transport parallèle est centrale à la géométrie riemannienne, pas seulement à l'étude des géodésiques. Effectivement, ceci permet de définir une transformation linéaire canonique $P_\gamma : T_{\gamma(a)}M \rightarrow T_{\gamma(b)}M$.

Remarque 0.81. En combinant (iii) de la proposition 0.78 et le fait que la dérivée de Levi-Civita préserve la métrique, nous obtenons que si V et W sont parallèles le long de γ , alors

$$\frac{d}{dt}g(V, W) = g(\dot{V}, W) + g(V, \dot{W}) = 0.$$

Donc, $g(V, W)$ est constant. Autrement dit, l'application P_γ définie par le transport parallèle est une isométrie linéaire.

Ceci nous permet enfin de définir enfin ce qu'est une géodésique.

Définition 0.82. Une **géodésique** est un chemin $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ dont le vecteur tangent $\dot{\gamma}$ est parallèle le long de γ . Autrement dit, $\ddot{\gamma} \equiv 0$.

Nous devrions voir les géodésiques comme les « droites » d'une variété riemannienne. Effectivement, lorsque M est \mathbb{R}^n avec la métrique standard, alors les géodésiques sont précisément les segments de droites.

Par la remarque 0.81, les géodésiques ont vitesse constante. En particulier, les géodésiques non-constantes sont des courbes immergées. De même, si γ est une géodésique de vitesse v_0 et $a \neq 0$, alors $\gamma_a(t) := \gamma(at)$ est une géodésique de vitesse $|a|v_0$.

Remarque 0.83. La définition 0.82 explique pourquoi les sous-variétés N telles que $B_N \equiv 0$ sont dites totalement géodésique : ce sont les sous-variétés dont les géodésiques sont aussi des géodésiques de M . En particulier, une géodésique n'est qu'une sous-variété (immergée) totalement géodésique de dimension 1.

En plus de leur intérêt théorique, les géodésiques sont très pratiques dans de nombreuses constructions, donnant en quelque sorte un chemin optimal entre deux points. Cependant, pour avoir accès à cette versatilité, il faut s'assurer que ces courbes existent réellement.

Théorème 0.84. Soient M , une variété riemannienne, et $x \in M$. Il existe $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$ avec la propriété suivante : si $v \in T_x M$ est tel que $|v| < \varepsilon$, alors il existe une unique géodésique $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ telle que

$$\gamma(0) = x \quad \text{et} \quad \dot{\gamma}(0) = v.$$

Nous notons alors $\gamma(1) =: \exp_x(v)$ et appelons l'application résultante

$$\begin{aligned} \exp: \{(x, v) \in TM \mid |v| < \varepsilon(x)\} &\longrightarrow M \\ (x, v) &\longmapsto \exp_x(v) \end{aligned}$$

l'exponentielle riemannienne.

Nous utiliserons à maintes reprises l'exponentielle riemannienne au cours de cette thèse, et donc il est bon d'établir certaines propriétés de cette application.

Lemme 0.85. L'exponentielle riemannienne possède les propriétés suivantes :

- (i) \exp est lisse sur son domaine de définition ;
- (ii) $\exp_x(0) = x$ pour tout $x \in M$;
- (iii) $(d \exp_x)_0 = \mathbb{1}_{T_x M}$ pour tout $x \in M$;
- (iv) (Lemme de Gauss)

$$\langle (d \exp_x)_v(v), (d \exp_x)_v(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

pour tout $x \in M$ et tous $v, w \in T_x M$ avec $|v| < \varepsilon(x)$.

Nous avons utilisé l'identification naturelle $T_v(T_x M) = T_x M$ pour (iii) et (iv).

Notons que le point (iii) implique que \exp_x est un difféomorphisme (sur son image) sur un voisinage de l'origine dans $T_x M$ par le théorème de la fonction inverse. Ceci justifie donc la définition suivante.

Définition 0.86. Le *rayon d'injectivité* d'une variété riemannienne M est

$$r_{\text{inj}}(M) := \sup\{r > 0 \mid \exp_x|_{\{|v| < r\}} \text{ est un difféo. sur son image, } \forall x \in M\} \in [0, +\infty].$$

Pour la suite des choses, nous concentrons notre intérêt aux variétés riemanniennes avec $r_{\text{inj}}(M) > 0$. Notons que ceci est automatiquement respecté lorsque M est fermée.

Champs de Jacobi

Si nous nous intéressons à l'existence de géodésiques, il est alors naturel d'étudier les variations de celles-ci. Plus précisément, nous étudions les linéarisations de ces variations. C'est grâce à ces linéarisations que nous obtiendrons plusieurs résultats quantitatifs de cette thèse.

Nous commençons avec la définition abstraite de ces linéarisations, puis démontrons que c'est bien la linéarisation d'une variation de géodésique.

Définition 0.87. Un champ vectoriel J le long d'une géodésique $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ est un **champ de Jacobi** s'il respecte l'équation différentielle linéaire homogène

$$\ddot{J} + R(\dot{\gamma}, J)\dot{\gamma} = 0.$$

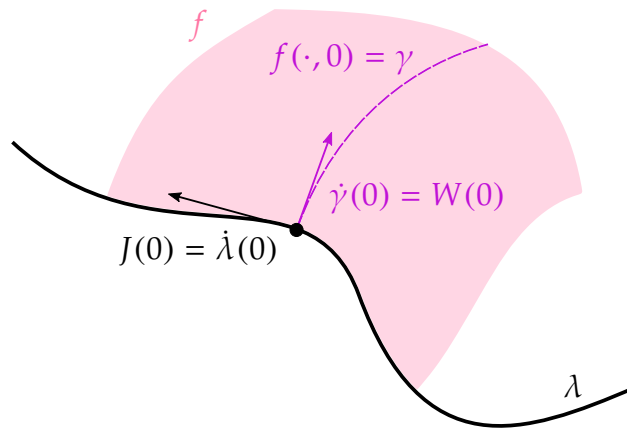


FIGURE 5. Une application f réalisant un champ de Jacobi J le long d'une géodésique γ .

Proposition 0.88. Soit J , un champ de Jacobi le long d'une géodésique non-constante $\gamma : [0, T] \rightarrow M$. Considérons un chemin lisse $\lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ tel que $\lambda(0) = \gamma(0)$ et $\dot{\lambda}(0) = J(0)$ et un champ vectoriel W le long de λ tel que $W(0) = \dot{\gamma}(0)$ et $\frac{DW}{ds}(0) = \frac{DJ}{dt}(0)$. Ici, t est la variable de γ

et s , celle de λ . Posons

$$f(t, s) = \exp_{\lambda(s)}(tW(s)).$$

Alors, $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)$.

En particulier, J est entièrement déterminé par $J(0)$ et $\dot{J}(0)$; donc, l'espace des champs de Jacobi est un espace vectoriel de dimension $2n$. De plus, si $J(0) = 0$, nous pouvons prendre $\lambda \equiv \gamma(0)$ et $W(s) = \dot{\gamma}(0) + s\dot{J}(0)$.

Il découle de cette proposition que les points critiques de \exp_x correspondent aux points $y = \gamma(T)$ avec $J(T) = 0$ pour un certain champ de Jacobi J tel que $J(0) = 0$. Nous appelons un tel point y un point conjugué à x le long de γ . En particulier, si $T \leq r_{\text{inj}}(M)$, alors $J(t) \neq 0$ pour tout $t \in (0, T]$, c'est-à-dire il n'y a pas de points conjugués.

Remarque 0.89. Notons que nous pouvons dériver directement de la définition certains exemples de champ de Jacobi.

- (1) Par définition d'une géodésique, $\dot{\gamma}$ et $J(t) = t\dot{\gamma}(t)$ sont toujours des champs de Jacobi (linéairement indépendants).
- (2) Si M a courbure sectionnelle constante $K \in \mathbb{R}$ et $|\dot{\gamma}| \equiv v_0 > 0$, alors $R(\dot{\gamma}, J)\dot{\gamma} = v_0^2 K J$ lorsque J est orthogonal à $\dot{\gamma}$. Ainsi, ces champs de Jacobi sont de la forme

$$J(t) = \begin{cases} \frac{\sin(tv_0\sqrt{K})}{v_0\sqrt{K}} V(t) & \text{si } K > 0; \\ tV(t) & \text{si } K = 0; \\ \frac{\sinh(tv_0\sqrt{-K})}{v_0\sqrt{-K}} V(t) & \text{si } K < 0, \end{cases}$$

où V est parallèle le long de γ , $|V| \equiv 1$ et $\langle V, \dot{\gamma} \rangle \equiv 0$. Par la proposition 0.88, nous avons donc trouvé tous les champs de Jacobi sur les variétés riemanniennes de courbure sectionnelle constante.

Comprendre le comportement de J au fil du temps est très important pour l'obtention de nombreux résultats, mais est généralement difficile à faire. Ceci dit, la composante parallèle à $\dot{\gamma}$ se comporte très simplement.

Lemme 0.90. Soit J , un champ de Jacobi le long d'une géodésique $\gamma : [0, T] \rightarrow M$. On a

$$\langle J(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = \langle \dot{J}(0), \dot{\gamma}(0) \rangle t + \langle J(0), \dot{\gamma}(0) \rangle$$

pour tout $t \in [0, T]$. En particulier, $J(t)$ est orthogonal à $\dot{\gamma}(t)$ pour tout t si et seulement si $\langle \dot{J}(0), \dot{\gamma}(0) \rangle = \langle J(0), \dot{\gamma}(0) \rangle = 0$.

En vue de ce lemme, il suffit de concentrer nos efforts sur les champs de Jacobi normaux à la géodésique. Lorsque $J(0) = 0$, nous avons en fait une certaine idée du comportement de ces champs.

Théorème 0.91 (Théorème de comparaison de Rauch). *Soient M et \tilde{M} , des variétés riemanniennes avec $\dim \tilde{M} \geq \dim M$. Soient $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ et $\tilde{\gamma} : [0, T] \rightarrow \tilde{M}$, des géodésiques de même vitesse. Supposons que J et \tilde{J} sont des champs de Jacobi le long de γ et $\tilde{\gamma}$ respectivement tels que*

$$J(0) = 0, \quad \tilde{J}(0) = 0, \quad \langle \dot{J}(0), \dot{\gamma}(0) \rangle = \langle \dot{\tilde{J}}(0), \dot{\tilde{\gamma}}(0) \rangle = 0, \\ |\dot{J}(0)| = |\dot{\tilde{J}}(0)|.$$

*Supposons de plus que $\tilde{\gamma}$ n'a pas de points conjugués sur $(0, T]$ et que, pour tout $V \in \Gamma(\gamma^*TM)$ et tout $\tilde{V} \in \Gamma(\tilde{\gamma}^*T\tilde{M})$, on a*

$$K(\text{span}\{V, \dot{\gamma}\}) \leq \tilde{K}(\text{span}\{\tilde{V}, \dot{\tilde{\gamma}}\}).$$

Alors,

$$|\tilde{J}| \leq |J|.$$

De plus, s'il existe $t_0 \in (0, T]$ tel que $|\tilde{J}(t_0)| = |J(t_0)|$, alors $K(\text{span}\{J(t), \dot{\gamma}(t)\}) = \tilde{K}(\text{span}\{\tilde{J}(t), \dot{\tilde{\gamma}}(t)\})$ pour tout $t \in [0, t_0]$.

Concrètement, nous utilisons le plus souvent le théorème de comparaison de Rauch dans le cas où soit M , soit \tilde{M} est une variété de courbure sectionnelle constante. Ceci est parce que, comme noté dans la remarque 0.89, nous connaissons parfaitement le comportement des champs de Jacobi dans ce cas.

Fonction de distance

Nous terminons notre introduction de la géométrie riemannienne en parlant de la fonction de distance, c'est-à-dire la métrique au sens usuel, qu'elle induit.

Définition 0.92. *Soit M , une variété riemannienne. La **longueur** d'un chemin $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ lisse par morceaux est définie par*

$$\ell(\gamma) := \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

*La **fonction de distance** $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ est alors définie par*

$$d(x, y) := \inf_{\gamma} \ell(\gamma),$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des chemins lisses par morceaux $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ tels que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

Remarque 0.93. Le but de travailler avec des chemins lisses par morceaux, au lieu de lisses, est de pouvoir plus facilement démontrer des propriétés de d comme l'inégalité du triangle. Alternativement, il serait aussi possible de prendre l'infimum sur une complétion de Sobolev adéquate des chemins lisses.

Notons que d est bien une métrique au sens classique.

Proposition 0.94. La fonction de distance fait de (M, d) un espace métrique. De plus, la topologie induite par d correspond à la topologie de M .

Remarque 0.95. La proposition 0.94 implique que la fonction $x \mapsto d(p, x)$ est continue pour tout $p \in M$. En fait, nous pouvons dire plus : la fonction est lisse sur $U - \{p\}$ pour un certain voisinage U de p (dont on peut estimer la grosseur). De plus, son gradient a toujours norme 1 et son hessien respecte un théorème de comparaison analogue au théorème de Rauch. Nous utiliserons brièvement ceci plus loin dans la thèse.

Pour étudier les propriétés de cette fonction de distance, nous revenons à la fonction exponentielle et présentons davantage de ces propriétés. Pour $x \in M$ et $r > 0$, la boule géodésique en x et rayon $r > 0$ est

$$B_r(x) := \exp_x \left(B_r^{T_x M}(0) \right),$$

où le rayon de la boule (ouverte) de $T_x M$ est calculé à partir du produit scalaire g_x .

Proposition 0.96. Supposons que $r \leq r_{\text{inj}}(M)$. Prenons $y \in B_r(x)$ et $\gamma(t) = \exp_x(t \exp_x^{-1}(y))$, $t \in [0, 1]$. En particulier, γ est une géodésique de x à y contenue dans $B_r(x)$. Si $c : [0, 1] \rightarrow M$ est un chemin lisse par morceaux de x à y , alors

$$\ell(\gamma) \leq \ell(c)$$

avec égalité si et seulement si $c([0, 1]) = \gamma([0, 1])$. Autrement dit, $d(x, y) = \ell(\gamma)$.

Au l'inverse, si $c : [0, 1] \rightarrow M$ est un chemin lisse par morceaux de x à y tel que $d(x, y) = \ell(c)$, alors c est une géodésique. Nous appelons une telle courbe une **géodésique minimisante**.

Cette proposition justifie notre notation pour la boule géodésique : elle correspond à la boule métrique lorsque $r \leq r_{\text{inj}}(M)$, et donc aucune confusion n'est possible.

En continuant notre analogie entre les géodésiques et les segments de droites de \mathbb{R}^n , nous pouvons généraliser les notions d'ensembles étoilés ou convexes en remplaçant simplement la notion de droite par la notion de géodésique minimisante. Par la proposition

précédente, nous savons que $B_r(x)$ est géodésiquement étoilé par rapport à x , mais qu'en est-il de la convexité ?

Proposition 0.97. *Soient M , une variété riemannienne, et $x \in M$. Il existe $\delta = \delta(x) > 0$ avec la propriété suivante : si $0 < r < \delta$, alors $B_r(x)$ est **fortement géodésiquement convexe**, c'est-à-dire pour tous $y, z \in \overline{B_r(x)}$, il existe une unique géodésique minimisante $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ de y à z et celle-ci est telle que $\gamma((0, 1)) \subseteq B_r(x)$.*

Ceci justifie une définition analogue à celle du rayon de convexité.

Définition 0.98. *Le **rayon de convexité** d'une variété riemannienne M est*

$$r_{\text{conv}}(M) := \min \left\{ \inf_{x \in M} \delta(x), r_{\text{inj}}(M) \right\} \in [0, +\infty],$$

où $\delta(x)$ est le choix maximal dans la proposition 0.97.

Retournant à la proposition 0.96, nous savons que l'infimum définissant d est atteint pour des points assez près, et plus généralement, que dès qu'il est atteint, il est nécessairement réalisé par une géodésique. Par contre, lorsque des points sont à distance plus grande que le rayon d'injectivité, une telle géodésique entre ces points pourrait ne pas exister. Pour contourner ce problème, nous utilisons le résultat suivant.

Théorème 0.99 (Théorème de Hopf-Rinow). *Soient M , une variété riemannienne connexe, et $x \in M$. Les énoncés suivants sont équivalents :*

- (a) *l'application \exp_x est définie sur tout $T_x M$;*
- (b) *l'application \exp est définie sur tout TM ;*
- (c) *les sous-ensembles de M fermés et bornés dans la métrique d sont compacts.*
- (d) *l'espace métrique (M, d) est complet.*

*De plus, tous ces énoncés impliquent qu'il existe une (pas nécessairement unique) géodésique minimisante entre n'importe quels deux points de M . Nous disons alors que M est **complète**.*

Notons qu'il suit de (d) et de la proposition 0.94 que toute variété riemannienne fermée est complète.

Nous terminons cette sous-section par quelques remarques.

Remarque 0.100. *Notons qu'une sous-variété N hérite de deux fonctions de distance : la restriction d_M de d à N et la fonction de distance d_N induite par $g|_{TN}$. Sauf dans des cas très particuliers, ces deux métriques ne sont pas les mêmes. Ceci dit, elles respectent toujours l'inégalité*

$$d_M \leq d_N$$

et induisent la même topologie sur N . Les subtilités qui s'ensuivent seront la source de beaucoup de difficultés dans cette thèse.

Remarque 0.101. À l'instar des cordes d'un hamiltonien et de la fonctionnelle d'action, par la proposition 0.96, les géodésiques sont les points critiques de la fonctionnelle de longueur sur la variété de Fréchet des chemins lisses par morceaux $c : [0, 1] \rightarrow M$ d'un point x à un point y (ou, comme mentionné dans la remarque 0.93, sur une complétion de Sobolev de cette variété). Cette fonctionnelle n'est pas lisse cependant, et il est souvent plus pratique de travailler avec la fonctionnelle d'énergie

$$E(\gamma) := \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)|^2 dt$$

qui est lisse et a les mêmes points critiques. De plus, son hessien est lié aux champs de Jacobi à travers la forme d'indice ; nous reviendrons sur ce fait dans la thèse plus loin.

De façon analogue à la fonctionnelle d'action, la fonctionnelle d'énergie est Morse-Bott et son homologie permet de détecter des géodésiques, particulièrement lorsque restreinte à $C^\infty(S^1, M)$, l'espace des lacets. Par contre, l'homologie est ici beaucoup plus simple à comprendre dans ce cas, puisqu'il suffit en fait de la calculer sur un rétract par déformation qui est une variété de dimension finie.

0.2.2. Métrique de Hausdorff

Nous introduisons le dernier ingrédient de cette thèse : la métrique de Hausdorff. Nous avertissons la personne lectrice qu'il est plutôt difficile de trouver une source rassemblant toutes les propriétés de cette métrique. Nous allons nous inspirer du mémoire de Stacy [Sta67], même si nous ne présenterons pas toutes les mêmes propriétés. Plusieurs faits présentés ici apparaissent aussi comme exercices dans le classique manuel de topologie de Munkres [Mun14] et ne sont pas particulièrement difficiles à démontrer.

Dans cette sous-section, nous allons nous intéresser à un espace métrique (X, d) (qui n'est pas nécessairement une variété) et à $\mathcal{F}(X)$, sa collection de sous-ensembles fermés non-vides.

Définition 0.102. Soient $A, B \in \mathcal{F}(X)$. Nous considérons la quantité

$$s(A, B) := \sup_{x \in A} d(x, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y) \in [0, +\infty].$$

La *métrique de Hausdorff* sur $\mathcal{F}(X)$ est alors définie par

$$\delta_H(A, B) := \max \{s(A, B), s(B, A)\}.$$

Lemme 0.103. *La fonction δ_H définit bien une métrique (prenant potentiellement des valeurs infinies) sur $\mathcal{F}(X)$. De plus, si A et B sont compacts, alors $\delta_H(A, B) < \infty$.*

Bien que la métrique de Hausdorff soit définie à partir de la métrique de X , plusieurs propriétés topologiques de $\mathcal{F}(X)$ ne dépendent en fait que de celles de X .

Proposition 0.104. *Si (X, d) est complet (respectivement compact), alors $(\mathcal{F}(X), \delta_H)$ est aussi complet (respectivement compact).*

De plus, si nous nous concentrons sur le sous-espace $C(X)$ de $\mathcal{F}(X)$ formé par les sous-ensembles compacts, nous obtenons une vraie indépendance topologique.

Proposition 0.105. *La topologie induite par la métrique de Hausdorff sur $C(X)$ ne dépend que de la topologie de X . Autrement dit, si d' est une autre métrique de X qui induit la même topologie que d sur X , alors la métrique de Hausdorff δ'_H correspondante induit la même topologie sur $C(X)$ que δ_H .*

Remarque 0.106. *Sur $\mathcal{F}(X)$, l'énoncé est généralement faux : il pourrait y avoir des sous-ensembles fermés et non bornés qui sont à distance finie dans une métrique, mais pas dans une autre. Notons cependant que $C(X) = \mathcal{F}(X)$ lorsque X est compact.*

Nous nous intéresserons grandement dans cette thèse à des suites convergentes dans la métrique de Hausdorff. Ainsi, il est pratique de savoir que certaines propriétés topologiques sont préservées dans la limite.

Proposition 0.107. *Soit $\{A_i\}_{i \geq 1} \subseteq \mathcal{F}(X)$, une suite convergeant dans la métrique de Hausdorff vers un sous-ensemble $A \in \mathcal{F}(X)$. Si les A_i sont compacts (respectivement connexes), alors A est également compact (respectivement connexe).*

Notons finalement que la métrique de Hausdorff est liée la métrique uniforme (aussi appelée métrique C^0) par la construction du graphe.

Proposition 0.108. *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) , des espaces métriques. Notons par $C(X, Y)$ l'ensemble des fonctions uniformément continues $f : X \rightarrow Y$ et équipons cet espace de la métrique définie par*

$$d_{C^0}(f, g) := \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x))$$

pour $f, g \in C(X, Y)$. L'application $\text{graph} : C(X, Y) \rightarrow \mathcal{F}(X \times Y)$ associant à une fonction son graphe est un homéomorphisme sur son image. En particulier, $\{f_i\} \subseteq C(X, Y)$ converge uniformément vers f si et seulement si $\{\text{graph } f_i\}$ converge vers $\text{graph } f$ dans la métrique de Hausdorff.

Avec ces faits en poche, nous pouvons enfin commencer la thèse en tant que tel !

Premier article.

Convergence and Riemannian bounds on Lagrangian submanifolds

par

Jean-Philippe Chassé¹

(¹) Université de Montréal, C.P. 6128,
Succ. Centre-Ville, Montréal, Qc, Canada, H3C 3J7

Cet article a été soumis dans *International Journal of Mathematics*.

RÉSUMÉ. Nous considérons des collections de sous-variétés lagrangiennes d'une variété symplectique donnée respectant des bornes de courbure uniformes provenant d'une métrique riemannienne auxiliaire. Nous démontrons que pour une grande classe de métriques sur ces collections, la convergence vers une sous-variété lagrangienne plongée implique la convergence vers celle-ci dans la métrique de Hausdorff. Cette classe de métriques inclut des métriques bien connues comme la métrique de Hofer lagrangienne, la métrique spectrale et les métriques d'ombre introduites par Biran, Cornea et Shelukhin [BCS21]. La preuve repose sur l'utilisation d'une version du lemme de monotonie sur une boule métrique bien choisie.

Mots clés : Sous-variétés lagrangiennes ; distance de Hausdorff ; métriques riemanniennes ; courbes J -holomorphes ; lemme de monotonie

ABSTRACT. We consider collections of Lagrangian submanifolds of a given symplectic manifold which respect uniform bounds of curvature type coming from an auxiliary Riemannian metric. We prove that, for a large class of metrics on these collections, convergence to an embedded Lagrangian submanifold implies convergence to it in the Hausdorff metric. This class of metrics includes well-known metrics such as the Lagrangian Hofer metric, the spectral metric and the shadow metrics introduced by Biran, Cornea and Shelukhin [BCS21]. The proof relies on a version of the monotonicity lemma, applied on a carefully-chosen metric ball.

Keywords: Lagrangian submanifolds; Hausdorff distance; Riemannian metrics; J -holomorphic curves; monotonicity lemma

1. Introduction and main result

Spaces of Lagrangian submanifolds are generally analyzed in a metric sense at large scale. For example, there has been a great amount of work on whether the space of Lagrangian submanifolds, subject to some topological constraints, has infinite diameter, or whether the metric admits upper bounds in terms of intersection numbers (see for example [Kha09, Hum12, Zap13, Sey14, BCS21]). However, a less studied problem is the local behavior of those metrics, even in the case of the well-known Lagrangian Hofer metric. This is probably due to the fact that, without additional constraints, converging sequences can be quite wild from a set-theoretic standpoint. Furthermore, before the advent of shadow metrics, one only looked at Hamiltonian isotopic Lagrangian submanifolds — or at least, conjecturally Hamiltonian isotopic ones.

The purpose of this paper is to show that, when we only look at Lagrangian submanifolds behaving well with respect to some auxiliary Riemannian metric, converging sequences cannot be wild. More precisely, we will show that they also converge to the same Lagrangian submanifold in the Hausdorff metric associated to the auxiliary Riemannian metric. Note however that we only look at sequences converging to an embedded Lagrangian submanifold. This restriction is necessary since sequences converging in certain metrics could theoretically converge to an immersed Lagrangian submanifold. As noted above, this result is of particular interest when applied to the weighted fragmentation metrics of Biran, Cornea, Shelukhin and Zhang [BCS21, BCZ21]. Indeed, these metrics exist on spaces of Lagrangian submanifolds which are not necessarily of the same homotopy type, let alone Hamiltonian isotopic. But, as we shall see below, the presence of bounds coming from a Riemannian metric forces neighboring Lagrangian submanifolds to be homeomorphic.

1.1. Some notation and definitions

Before writing down the main result in a more precise form, we need to fix some notation and definitions.

Riemannian bounds

We begin by introducing some Riemannian quantities that will serve to restrict the classes of the Lagrangian submanifolds that we will consider.

Let L be a submanifold of a Riemannian manifold (M, g) . We can see its second fundamental form B_L as a section of the bundle $(TL \otimes TL \otimes TL^\perp)^* \rightarrow L$, where \perp denotes the orthogonal complement with respect to g . We thus define the norm of the second fundamental form to be

$$\|B_L\| := \sup_{x \in L} |B_L(x)|_{\tilde{g}_x},$$

where \tilde{g}_x is the scalar product induced by g on $(T_x L \otimes T_x L \otimes T_x L^\perp)^*$. When $\dim L = 1$ and $\dim M = 2$ — a case that will be of particular interest to us later on — this is just the supremum of the geodesic curvature of L .

In general, uniformly bounding the norm of the second fundamental form will not be enough for our purposes. We will thus make use of another quantity, which gives a better control on the way L is embedded in M .

DEFINITION 1.1: Let (M, g) be a Riemannian manifold, and L be a submanifold. Let $\varepsilon \in (0, 1]$. We say that L is ε -**tame** if

$$\frac{d_M(x, y)}{\min\{1, d_L(x, y)\}} \geq \varepsilon \quad \forall x \neq y \in L,$$

where d_M is the distance function on M induced by g , and d_L is the distance function on L induced by $g|_L$.

REMARK 1.2: This is a variation of the tame condition appearing in work of Sikorav [Sik94]. More precisely, it is equivalent to the (T'1) condition. This condition also appeared under the name ε -Lipschitz in work of Groman and Solomon [GS14, GS16].

Collections of Lagrangian submanifolds

In general, there is no hope of being able to meaningfully compare two arbitrary Lagrangian submanifolds of a given symplectic manifold. That is why, when defining

metrics on spaces of Lagrangian submanifolds, it is necessary to consider more restricted collections of Lagrangian submanifolds, e.g. Hamiltonian isotopic ones, exact ones, etc.

In the present paper, the symplectic properties of the Lagrangian submanifolds considered will not matter inasmuch as they allow for the definition of well-behaved metrics between them. However, to give an idea of the collections to which our result applies, we present some interesting choices of collection $\mathcal{L}^\star(M)$ of Lagrangian submanifolds of a given symplectic manifold (M, ω) . Note that throughout this paper, we will assume that M is connected, and either closed or convex at infinity. We will also assume that the Lagrangian submanifolds are closed and connected.

- ($\star = L_0$): Here, L_0 is some fixed Lagrangian submanifold. Then, $\mathcal{L}^{L_0}(M)$ is the Hamiltonian orbit of L_0 , i.e. the set of Lagrangian submanifolds of the form $\varphi(L_0)$ for some Hamiltonian diffeomorphism with compact support φ .
- ($\star = e$): For this collection to make sense, we need to suppose that M is exact. Then, $\mathcal{L}^e(M)$ is the collection of exact Lagrangian submanifolds.
- ($\star = we$): Here, $\mathcal{L}^{we}(M)$ is the collection of weakly exact Lagrangian submanifolds, i.e. Lagrangian submanifolds L such that the morphism $\omega : \pi_2(M, L) \rightarrow \mathbb{R}$ given by integration with respect to ω is trivial. Note that the existence of such a Lagrangian submanifold implies that M is symplectically aspherical.
- ($\star = m(\rho, d)$): Here, $\rho > 0$ and $d \in \mathbb{Z}_2$. Then, $\mathcal{L}^{m(\rho, d)}(M)$ is the collection of Lagrangian submanifolds L such that
 - (i) the Maslov index $\mu : \pi_2(M, L) \rightarrow \mathbb{Z}$ satisfies $\omega = \rho\mu$;
 - (ii) the minimum Maslov number is $N_L \geq 2$;
 - (iii) the modulo 2 count of J -holomorphic disks with boundary along L of Maslov index 2 — for J generic — is equal to d .

As noted by Biran, Cornea and Zhang [BCZ21], when one is interested in fragmentation metrics, it might be necessary to restrict oneself to a subcollection of one of the above choices.

The result that we will present does not hold for all Lagrangian submanifolds in $\mathcal{L}^\star(M)$. Indeed, we will need to impose some uniform bounds coming from Riemannian geometry. Therefore, we fix a Riemannian metric g on M and constants $\Lambda \geq 0$, $\varepsilon \in (0, 1]$.

We then introduce two new types of subcollections:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\Lambda^\star(M, g) &:= \{L \in \mathcal{L}^\star(M) \mid \|B_L\| \leq \Lambda\} \\ \mathcal{L}_{\Lambda, \varepsilon}^\star(M, g) &:= \{L \in \mathcal{L}_\Lambda^\star(M, g) \mid L \text{ is } \varepsilon\text{-tame}\}.\end{aligned}$$

We recall that we always consider our Lagrangian submanifolds to be closed and connected. When it is evident from the context, we will omit g from the notation.

J -adapted metrics on collections of Lagrangian submanifolds

We now describe the type of metrics that we will be putting on our collections $\mathcal{L}^\star(M)$. In order to do so, we fix an almost complex structure J that is compatible with ω . We begin by presenting certain pseudometrics which we will call J -adapted. These are defined using an auxiliary family $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}^\star(M)$. We thus also fix such a family. For J generic, a J -adapted pseudometric $d^\mathcal{F}$ will be one of the following.

- $(d^\mathcal{F} = d_H)$: This is the case of the Lagrangian Hofer metric. It is then understood that $\mathcal{L}^\star(M) \subseteq \mathcal{L}^{L_0}(M)$ for some L_0 , and that $\mathcal{F} = \emptyset$. Note that this is actually a metric.
- $(d^\mathcal{F} = \gamma)$: This is the case of the spectral metric. It is then understood that $\mathcal{L}^\star(M) \subseteq \mathcal{L}^{L_0}(M)$ for some $L_0 \in \mathcal{L}^{we}(M) \cap \mathcal{L}^{m(1,0)}(M)$. In this case, we take $\mathcal{F} = \emptyset$. This is again a metric. Finally, when $M = T^*L_0$ and L_0 is spin, then the metric may be extended to the whole collection $\mathcal{L}^e(M) \cap \mathcal{L}^{m(1,0)}(M)$ — not just $\mathcal{L}^{L_0}(T^*L_0)$ — by work from Fukaya, Seidel, and Smith [FSS08a, FSS08b], and from Nadler [Nad09].
- $(d^\mathcal{F} = \gamma_{\text{ext}})$: This is a variant of the usual spectral metric, as defined in [KS22], where it is also shown that it is a metric. We also have that $\mathcal{L}^\star(M) \subseteq \mathcal{L}^{L_0}(M)$ and $\mathcal{F} = \mathcal{F}' = \emptyset$, but we only ask that $L_0 \in \mathcal{L}^{we}(M)$. However, M has then to be closed and monotone, i.e. the diagonal of $(M \times M, \omega \oplus -\omega)$ is in $\mathcal{L}^{m(\rho, d)}(M \times M)$.
- $(d^\mathcal{F} = d_S^\mathcal{F})$: These are the shadow pseudometrics appearing in work of Biran, Cornea, and Shelukhin [CS19, BCS21]. It is then understood that either $\mathcal{L}^\star(M) \subseteq \mathcal{L}^e(M)$, $\mathcal{L}^\star(M) \subseteq \mathcal{L}^{we}(M)$ or that $\mathcal{L}^\star(M) \subseteq \mathcal{L}^{m(\rho, d)}(M)$ for some $\rho > 0$ and $d \in \mathbb{Z}_2$. Note that these will in general be degenerate.
- $(d^\mathcal{F} = s_{\text{alg}}^\mathcal{F})$: These are the so-called algebraic fragmentation pseudometrics also appearing in work of Biran, Cornea, and Shelukhin [BCS21]. As above, it is then understood that $\mathcal{L}^\star(M)$ is in either $\mathcal{L}^e(M)$, $\mathcal{L}^{we}(M)$ or some $\mathcal{L}^{m(\rho, d)}(M)$. They might also be degenerated.

$(d^{\mathcal{F}} = D^{\mathcal{F}})$: There are possibly many other weighted fragmentation pseudometrics — as defined by Biran, Cornea, and Zhang [BCZ21] — that belong to this class.

We use here the words pseudometric and metric in the less restrictive sense where it may take infinite values.

In all of those cases, the J -adapted property tying these pseudometrics to the almost complex structure J is the following. For any $L, L' \in \mathcal{L}^*(M)$ intersecting transversally and any point $x \in L$, there exists a J -holomorphic polygon u passing through x such that

$$\omega(u) \leq 2d^{\mathcal{F}}(L, L').$$

Furthermore, u has boundary along L, L' , and along Lagrangian submanifolds in \mathcal{F} (see [Sei08] for a more detailed exposition on J -holomorphic polygons and on their role in symplectic topology). If the Lagrangian submanifolds above do not intersect transversally, then they should be replaced by arbitrarily small Hamiltonian perturbation. A more precise definition will be given in Subsection 2.1.

As noted above, weighted fragmentation pseudometrics such as $d_S^{\mathcal{F}}$ and $s_{\text{alg}}^{\mathcal{F}}$ are in general degenerate. Intuitively, this is because $D^{\mathcal{F}}(L, L')$ measures the size of a cone decomposition of L in terms of L' and elements of \mathcal{F} in the appropriate derived Fukaya category $\text{DFuk}^*(M)$. Therefore, whenever $L, L' \in \mathcal{F}$, we have that $D^{\mathcal{F}}(L, L') = 0$. As noted by Biran, Cornea, and Shelukhin [BCS21], a way to get around this issue is to use another auxiliary family \mathcal{F}' . The family must be so that

$$\left(\overline{\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F} \right) \cap \left(\overline{\bigcup_{F' \in \mathcal{F}'} F'} \right) \quad (1.1)$$

is disconnected enough, e.g. discrete or totally disconnected. Indeed, under the later connectivity assumption, $\tilde{D}^{\mathcal{F}, \mathcal{F}'} := \max\{D^{\mathcal{F}}, D^{\mathcal{F}'}\}$ is a true metric in the shadow and algebraic fragmentation cases.

Based on this phenomenon, for any families \mathcal{F} and \mathcal{F}' such that the intersection (1.1) is discrete, we will call $\hat{d}^{\mathcal{F}, \mathcal{F}'} := \max\{d^{\mathcal{F}}, d^{\mathcal{F}'}\}$ a J -adapted metric. As we will see soon, the name is warranted: $\hat{d}^{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}$ will indeed be a metric on the appropriate space.

1.2. A conjecture on convergence in Lagrangian spaces

We now introduce a conjecture due to Cornea and explain how we will show it holds under some additional assumptions in high dimensions and without them in dimension 2.

We fix a connected symplectic manifold (M, ω) which is closed or convex at infinity. We also fix an ω -compatible almost complex structure J such that g_J has uniformly bounded sectional curvature and with injectivity radius uniformly bounded away from zero. We also require that (M, g_J) be a complete Riemannian manifold. Note that a symplectic manifold that is convex at infinity always admits such a J . This has been proven for the case when M is a twisted cotangent bundle by Cieliebak, Ginzburg, and Kerman [CGK04], following a suggestion of Sikorav. As noted there, the proof easily adapts to the case when M is instead convex at infinity.

We also fix a collection of Lagrangian submanifold $\mathcal{L}^*(M)$ and a J -adapted metric $\hat{d}^{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}$ on it. By the examples in the previous subsection, we have multiple choices of appropriate collections $\mathcal{L}^*(M)$ and metrics $\hat{d}^{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}$.

Conjecture (Cornea, 2018). *The topology induced by the Hausdorff metric on $\mathcal{L}_\Lambda^*(M)$ is coarser than the one induced by the J -adapted metric $\hat{d}^{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}$. In other words, if $L_n \rightarrow L_0$ in $\hat{d}^{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}$, then $L_n \rightarrow L_0$ in the Hausdorff metric δ_H induced by g_J .*

REMARK 1.3: The conjecture was originally stated for the weighted fragmentation metrics appearing in [BCS21]. However, the proof lends itself naturally to a generalization to a larger class of metrics behaving well with respect to J -holomorphic curves.

The main purpose of this paper is to prove the conjecture under the slightly stronger hypothesis that the Lagrangian submanifolds are also ε -tame.

THEOREM 1.A: Let $\{L_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{L}_{\Lambda, \varepsilon}^*(M)$ be such that $L_n \rightarrow L_0 \in \mathcal{L}^*(M)$ with respect to a J -adapted metric $\hat{d}^{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}$. Then, $L_n \rightarrow L_0$ in the Hausdorff metric δ_H induced by g_J .

Moreover, when $\dim M = 2$, the statement where $\mathcal{L}_{\Lambda, \varepsilon}^*(M)$ is replaced by $\mathcal{L}_\Lambda^*(M)$ holds, i.e. the conjecture holds as initially stated in dimension 2.

Note that this implies in the ε -tame case that, for n large, L_n is diffeomorphic to L_0 . Indeed, although convergence in the Hausdorff metric only implies that $\{(L_n, d_M|_{L_n})\}$ converges to $(L_0, d_M|_{L_0})$ in the Gromov–Hausdorff metric — not necessarily $\{(L_n, d_{L_n})\}$ to (L_0, d_{L_0}) — and thus results such as Perelman’s stability theorem [Per91] do not directly apply, Gromov’s [GLP81] and Katsuda’s [Kat85] proof of the existence of a diffeomorphism

between Gromov–Hausdorff-close geometrically-bounded manifolds still goes through. This is because Gromov’s construction is ultimately local, and in this regime, the ε -tame condition allows to compare $d_M|_{L_n}$ and d_{L_n} .

Actually, we expect L_n to be Hamiltonian isotopic to L_0 for n large; we know that to be true in some cases. Indeed, since $\{L_n\}_{n \geq 1}$ converges to L_0 in the Hausdorff metric, L_n is eventually in a Weinstein neighborhood of L_0 . Therefore, if the nearby Lagrangian conjecture holds for L_0 , and if each L_n is exact in the Weinstein neighborhood, e.g. it is exact in M or simply connected, then L_n has to be Hamiltonian isotopic to L_0 . In particular, this is the case when $\{L_n\} \subseteq \mathcal{L}_\Lambda^e(M)$ and $\dim M = 2$.

A closer look at the behavior of Hausdorff-converging sequences without the ε -tameness condition — and the consequences of such behavior for the nearby Lagrangian conjecture — is actually the subject of study of a coming paper [Cha22].

We now give the broad idea of the proof of Theorem 1.A:

- (i) Since $\hat{d}^{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}$ is a J -adapted metric, for any $x \in L_0 - (L_n \cup (UF))$ and $x' \in L_n - (L_0 \cup (UF))$, there exist J -holomorphic polygons u and u' passing through x and x' , respectively — modulo arbitrarily small perturbations. Furthermore, their area is bounded from above by $2\hat{d}^{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}(L_n, L_0)$.
- (ii) By finding appropriate metric balls in M and using a version of the monotonicity lemma, it is possible to find a lower bound for the area of these polygons for n large. This bound depends only on M , Λ , ε , and the distances $d_M(x, L_n \cup (UF))$, $d_M(x, L_n \cup (UF'))$, $d_M(x', L_0 \cup (UF))$ and $d_M(x', L_0 \cup (UF'))$. By the previous step, this turns into a lower bound of $\hat{d}^{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}(L_n, L_0)$.
- (iii) Using the fact that $(\overline{UF}) \cap (\overline{UF'})$ is discrete, it is possible to turn the dependence on the different distances onto one on the Hausdorff distance $\delta_H(L_n, L_0)$.
- (iv) The fact that $\hat{d}^{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}(L_n, L_0) \rightarrow 0$ then forces that $\delta_H(L_n, L_0) \rightarrow 0$.

We can get rid of the dependence on ε when $\dim M = 2$ because, in that case, we can make a better choice of metric balls on which the monotonicity lemma is applied.

1.3. Structure of the paper

The remainder of the paper is almost entirely dedicated to the proof of Theorem 1.A.

In Section 2, we give a proper definition of J -adapted metrics. We then give the proof of the main theorem without any restriction on the dimension of the symplectic manifold M .

This is done in two steps: proving an appropriate version of the monotonicity lemma, and showing that the existence of an appropriate J -holomorphic polygon implies the result.

In Section 3, we explain how to modify the proof of Section 2 to get rid of ε when $\dim M = 2$. Essentially, it suffices to modify the ball on which we apply the monotonicity lemma. To find such a ball, we develop some combinatoric arguments for curves on surfaces. This section ends with some proofs of results from Riemannian geometry that we have not found explicated in the literature.

In Section 4, we end the paper with an example of a sequence of Lagrangian submanifolds that do not respect uniform Riemannian bounds and do not respect the conclusion of Theorem 1.A. This shows the sufficiency of said bounds.

1.4. Acknowledgments

This research is part of my PhD thesis and was financed by my NSERC scholarship. I could not thank enough my advisor, Octav Cornea, for the many fruitful discussions we've had throughout the research and writing process which led to this paper. I would also like to thank Egor Shelukhin and Jordan Payette for their many helpful comments and insights, especially regarding the two-dimensional proof of Theorem 1.A.

2. The general proof

In this section, we give the proof of Theorem 1.A without restrictions on the dimension of M . Actually, we prove a more precise estimate on the relation between $\hat{d}^{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}$ and δ_H . In what follows, the almost complex structure J is fixed. We also fix constants $K_0, r_0 > 0$ such that the sectional curvature of M respects $|K| \leq K_0$, and its injectivity radius respects $r_{\text{inj}}(M) \geq r_0$. We always assume that (M, g_J) is complete.

THEOREM 1.4: For any J -adapted metric $\hat{d}^{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}$ on $\mathcal{L}_{\Lambda, \varepsilon}^*(M, g_J)$, there exist constants $R = R(K_0, r_0, \Lambda, \varepsilon, (\overline{\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F} \cap \overline{\bigcup_{F' \in \mathcal{F}'} F'})) > 0$ and $C = C(K_0, r_0, \varepsilon) > 0$ such that whenever $\hat{d}^{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}(L, L') < R$, then

$$\hat{d}^{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}(L, L') \geq C \delta_H(L, L')^2.$$

Clearly, the first part of Theorem 1.A follows directly from Theorem 1.4.

REMARK 1.5: As explained above, the proof relies on a version of the monotonicity lemma. However, it was pointed out to us by Shelukhin that a modification of Groman–Solomon's reverse isoperimetric inequality [GS14] would also yield a proof of Theorem 1.A. Such a

modification of the inequality has turned out to be much more difficult to prove than what ended up being presented here. Furthermore, additional Riemannian bounds seem then to be required, e.g. C^1 bounds on B_L . On the other hand, this would have the advantage of giving a linear inequality in Theorem 1.4, instead of a quadratic one.

2.1. J -adapted metrics

Before going in the proof of Theorem 1.4, we need to give a precise definition of what we mean by J -adapted. We also explain how the metrics enumerated in the introduction fit in this definition.

We begin by clarifying what we mean by a J -holomorphic polygon, essentially following Seidel's book [Sei08].

DEFINITION 1.6: Let (M, ω) be a symplectic manifold equipped with a ω -compatible almost complex structure J . Let L_0, \dots, L_k be pairwise transverse Lagrangian submanifolds. Denote by S_r the closed unit disk with $|r| \leq k + 1$ punctures at its boundary. We equip S_r with the standard complex structure j and area form σ . We label the components of ∂S_r counterclockwise from C_0 to C_k , and the puncture from ζ_0 to ζ_k accordingly. A **J -holomorphic polygon with boundary along L_0, \dots, L_k** is a smooth map $u : S_r \rightarrow M$ such that

- (i) u is (j, J) -holomorphic;
- (ii) $E(u) := \int_{S_r} |du|_{g_J}^2 \sigma < \infty$;
- (iii) $u(C_i) \subseteq L_i$ for all $i \in \{0, \dots, |r| - 1\}$;
- (iv) near ζ_i , there are conformal coordinates $(s, t) \in [0, \infty) \times [0, 1]$ such that $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s, t) =: p_i \in L_{i-1} \cap L_i$.

Furthermore, for some $x \in L_0 - (\cup_{i=1}^k L_i)$, we will say that u **passes through** x if $x \in u(C_0)$.

This allows us to define precisely what are J -adapted metrics.

DEFINITION 1.7: Let $\mathcal{L}^*(M)$ be a collection of Lagrangian submanifolds on M . Let $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}^*(M)$. We say that a pseudometric $d^{\mathcal{F}}$ on $\mathcal{L}^*(M)$ is **J -adapted** if for all $\delta > 0$ and all $L, L' \in \mathcal{L}^*(M)$, there exist Lagrangian submanifolds $F_1, \dots, F_k \in \mathcal{F}$ with the following property.

For any C^0 - and Hofer-small Hamiltonian perturbations $\tilde{L}, \tilde{L}', \tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_k$ of the Lagrangian submanifolds above making them pairwise transverse, and for any $x \in \tilde{L} \cup \tilde{L}'$, there exists a nonconstant J -holomorphic polygon $u : S_r \rightarrow M$ such that

- (i) has boundary along \tilde{L}, \tilde{L}' and $\tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_k$;
- (ii) passes through x ;
- (iii) respects the bound

$$\omega(u) \leq d^{\mathcal{F}}(L, L') + \delta.$$

Let $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{L}^*(M)$ be such that

$$\left(\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \right) \cap \left(\bigcup_{F' \in \mathcal{F}'} F' \right)$$

is discrete. We will call $\hat{d}^{\mathcal{F}, \mathcal{F}'} := \max\{d^{\mathcal{F}}, d^{\mathcal{F}'}\}$ a **J -adapted metric** if $d^{\mathcal{F}}$ and $d^{\mathcal{F}'}$ are both J -adapted pseudometrics.

We conclude this subsection by explaining how the metrics mentioned above are indeed J -adapted metrics, at least when J lies in some residual set. In the case when $\hat{d}^{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}$ is either a shadow metric $\hat{d}_S^{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}$ or an algebraic one $\hat{s}_{\text{alg}}^{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}$, this is proven in the course of Theorem 5.0.2 of [BCS21]. By the inequality $\hat{d}_S^{\mathcal{F}, \mathcal{F}'} \leq d_H$, this also implies the result for the Lagrangian Hofer metric.

In fact, in the case of the Lagrangian Hofer metric, when the Lagrangian submanifolds involved are weakly exact, it is possible to get a sharper result. In that case, d_H is not only J -adapted on $\mathcal{L}^{L_0}(M)$, but we may also take the J -holomorphic polygon u appearing in the definition of a J -adapted metric to be a strip. Indeed, this appears as Corollaries 3.9 in [BC06].

The same is true of the spectral metric γ and its variant γ_{ext} on $\mathcal{L}^{L_0}(M)$. This follows from the proof of Theorem E in [KS22]. When $M = T^*L_0$, and γ is extended to $\mathcal{L}^e(T^*L_0) \cap \mathcal{L}^{m(1,0)}(T^*L_0)$, the same stay true. Indeed, the spectral metric between L and L' is then taken to be the usual one, but using different decorations on L and L' . Therefore, the underlying manifolds are the same, and there is still a strip between them.

We remark that the polygons which are found in the proof of Theorem 5.0.2 of [BCS21] and Theorem E in [KS22] are J -holomorphic for a very specific J . This choice is made to allow for the use Lelong's inequality. However, the same argument works perfectly well for any J in an appropriate residual set.

REMARK 1.8: When proving Theorem 1.A, it is actually possible to remove the weak-exactness hypothesis on $\mathcal{L}^{L_0}(M)$ in the case of the spectral metric. Then L_0 can be monotone with any constant $\rho > 0$ and $d \in \mathbb{Z}_2$. Indeed, the weak-exactness is only truly needed in order to prove the stronger Theorem 1.4. Denote by $\hbar(M, L, J)$ the minimal area of a J -holomorphic disk with boundary in L , or of a J -holomorphic sphere. Then, the

strip found in the proof of Theorem E of [KS22] — and in Corollary 3.13 of [BC06] for that matter — exists whenever $\gamma(L, L') < \hbar(M, L, J)$. As we will see below, this is enough to prove Theorem 1.A. The same is true of the variant γ_{ext} .

2.2. A version of the monotonicity lemma

We now prove a slightly improved version of Sikorav’s monotonicity lemma for curves with Lagrangian boundary [Sik94]. The constants appearing in it will only depend on bounds coming from the Riemannian metric g_J on M and its restriction on Lagrangian submanifolds. This improvement follows from observations in Groman and Solomon [GS16] on the dependence of the constant appearing in the isoperimetric inequality on these bounds.

Firstly, consider a loop $\gamma : \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}) \rightarrow B_{r_{\text{inj}}(M)/2}(x)$, where $B_{r_{\text{inj}}(M)/2}(x)$ is the metric ball in M of radius $\frac{1}{2}r_{\text{inj}}(M)$ centered at some $x \in M$. Denote by $a(\gamma)$ the area, with respect to ω , of a disk extension of γ contained in a metric ball $B_{r_{\text{inj}}(M)/2}(y)$. Here, y is not necessarily equal to x . This is of course independent on the choice of disk: if $u : \mathbb{D} \rightarrow B_{r_{\text{inj}}(M)/2}(y)$ and $u' : \mathbb{D} \rightarrow B_{r_{\text{inj}}(M)/2}(y')$ are two such extensions, then gluing them along their common boundary gives a sphere $u\#\bar{u}$ in the ball $B_{r_{\text{inj}}(M)}(\gamma(0))$. Such a sphere must be nullhomotopic. Therefore, $\omega(u) - \omega(u') = \omega(u\#\bar{u}) = 0$, and $a(\gamma)$ is well-defined.

Let $L \in \mathcal{L}_{\Lambda, \varepsilon}^*(M)$. Consider now an arc $\gamma : ([0, \pi], \{0, \pi\}) \rightarrow (M, L)$ with image in a metric ball $B_\delta(x)$ for some $x \in L$, where

$$\delta := \min \left\{ \varepsilon, \frac{\varepsilon}{2}r_{\text{inj}}(L), \frac{\varepsilon}{2}r_0, \frac{\pi}{4\sqrt{K_0}} \right\}. \quad (2.1)$$

Take a path $\alpha : [0, \pi] \rightarrow B_{\delta/\varepsilon}^L(y)$ such that $\gamma(\pi i) = \alpha(\pi i)$ for each $i \in \{0, 1\}$. Here, $B_{\delta/\varepsilon}^L(y)$ denotes the metric ball in L , i.e. with respect to d_L , of radius $\frac{\delta}{\varepsilon}$ centered at $y \in L$. We then define $a(\gamma)$ to be the area, again with respect to ω , of a disk extension of $\gamma\#\bar{\alpha}$ in the ball $B_\delta(y)$, i.e. $a(\gamma) = a(\gamma\#\bar{\alpha})$ as a loop. Here, $\bar{\alpha}(\theta) := \alpha(\pi - \theta)$ for all $\theta \in [0, \pi]$.

Note that such a path α always exists, since $d_M(x, \gamma(\pi i)) < \varepsilon$. Thus, it must be so that $d_L(x, \gamma(\pi i)) < \frac{\delta}{\varepsilon}$ if the tameness condition is to be fulfilled. We now show that $a(\gamma)$ is well-defined. Take $\alpha : [0, \pi] \rightarrow B_{\delta/\varepsilon}^L(y)$ and $\alpha' : [0, \pi] \rightarrow B_{\delta/\varepsilon}^L(y')$ to be two paths such that $\alpha(\pi i) = \alpha'(\pi i) = \gamma(\pi i)$. Take $u : \mathbb{D} \rightarrow B_\delta(y)$ and $u' : \mathbb{D} \rightarrow B_\delta(y')$ to be extensions of $\gamma\#\bar{\alpha}$ and $\gamma\#\bar{\alpha}'$, respectively. Then, gluing u and u' along γ gives a disk $u\#\bar{u}'$ with boundary $\bar{\alpha}\#\alpha'$. But $\bar{\alpha}\#\alpha'$ is contained in $B_{2\delta/\varepsilon}^L(\gamma(0))$. Since $\frac{2\delta}{\varepsilon} \leq r_{\text{inj}}(L)$, it must be a contractible loop. The homotopy from $\bar{\alpha}\#\alpha'$ to a point extends to a homotopy of $u\#\bar{u}'$ to a topological sphere in $B_{2\delta/\varepsilon}(\gamma(0))$. Since $\frac{2\delta}{\varepsilon} \leq r_0 \leq r_{\text{inj}}(M)$, this sphere must

be nullhomotopic. Therefore, $\omega(u) - \omega(u') = \omega(u\#\overline{u'}) = 0$, and the definition of $a(\gamma)$ is again independent of choices.

LEMMA 1.9 (ISOPERIMETRIC INEQUALITY): Let M, L , and δ be as above. There exist constants $c = c(K_0, r_0, \varepsilon) > 0$ and $c' = c'(K_0, r_0) > 0$ such that

(i) for all loops γ with image in a metric ball $B_{r_0/2}(x)$ for some $x \in M$, we have that

$$a(\gamma) \leq c'\ell(\gamma)^2;$$

(ii) for all arcs γ with ends in L and image in a metric ball $B_\delta(x)$ for some $x \in L$, we have that

$$a(\gamma) \leq c\ell(\gamma)^2.$$

PROOF: As noted by Groman and Solomon [GS16], the proof appearing in Remark 4.4.2 of [MS12] depends only on the constants above. This gives a proof of (i). We give here the details of the proof of (ii).

Take α to be the unique minimizing geodesic in L from $\gamma(0)$ to $\gamma(\pi)$; it exists since $d_L(\gamma(0), \gamma(\pi)) < \frac{2\delta}{\varepsilon} \leq r_{\text{inj}}(L)$. We define an extension $u : \mathbb{D} \rightarrow M$ of $\gamma\#\overline{\alpha}$ by

$$u(re^{i\theta}) := \exp_{\gamma(0)}(r\xi(\theta)),$$

where $\exp_{\gamma(0)}(\xi(\theta)) := (\gamma\#\overline{\alpha})(\theta)$ for all $\theta \in [0, 2\pi]$. Although this disk might not be entirely contained in $B_\delta(x)$ — if δ is larger than the convexity radius of M that is — it is contained in $B_{2\delta}(\gamma(0))$. Therefore, the same argument as above implies that $\omega(u) = a(\gamma)$.

By the Gauss lemma, we have that

$$|\partial_r u|(re^{i\theta}) = |(d \exp_{\gamma(0)})_{r\xi(\theta)}(\xi(\theta))| = |\xi(\theta)| = d_M(\gamma(0), (\gamma\#\overline{\alpha})(\theta)).$$

However, for all $\theta \in [0, \pi]$, we have that

$$d_M(\gamma(0), (\gamma\#\overline{\alpha})(\theta)) = d_M(\gamma(0), \gamma(\theta)) \leq \ell(\gamma)$$

and

$$\begin{aligned} d_M(\gamma(0), (\gamma\#\overline{\alpha})(2\pi - \theta)) &= d_M(\alpha(0), \alpha(\theta)) \leq \ell(\alpha) \\ &= d_L(\gamma(0), \gamma(\pi)) \leq \frac{1}{\varepsilon} d_M(\gamma(0), \gamma(\pi)) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \ell(\gamma). \end{aligned}$$

Therefore, we get that $|\partial_r u| \leq \frac{1}{\varepsilon} \ell(\gamma)$.

Likewise, we can use the Rauch comparison theorem to compare Jacobi fields on M with those on spaces of constant sectional curvature $\pm K_0$ to get

$$\begin{aligned}
|\partial_\theta u|(re^{i\theta}) &= |(d \exp_{\gamma(0)})_{r\xi(\theta)}(r\dot{\xi}(\theta))| \\
&\leq \frac{\sinh(r|\xi(\theta)|\sqrt{K_0})}{|\xi(\theta)|\sqrt{K_0}} |\dot{\xi}(\theta)| \\
&= \frac{\sinh(r|\xi(\theta)|\sqrt{K_0})}{|\xi(\theta)|\sqrt{K_0}} \left| (d \exp_{\gamma(0)})_{\xi(\theta)}^{-1} \left(\frac{d}{d\theta}(\gamma\#\bar{\alpha})(\theta) \right) \right| \\
&\leq \frac{\sinh(r|\xi(\theta)|\sqrt{K_0})}{\sin(|\xi(\theta)|\sqrt{K_0})} \left| \frac{d}{d\theta}(\gamma\#\bar{\alpha})(\theta) \right|.
\end{aligned}$$

Note that $\frac{\sinh(r|\xi(\theta)|\sqrt{K_0})}{\sin(|\xi(\theta)|\sqrt{K_0})} \leq \frac{\sinh(|\xi(\theta)|\sqrt{K_0})}{\sin(|\xi(\theta)|\sqrt{K_0})}$ since $r \leq 1$. Furthermore, we have the inequality $|\xi| \leq 2\delta \leq \min\{r_0, \frac{\pi}{2\sqrt{K_0}}\}$ by construction. But the map $s \mapsto \frac{\sinh(s)}{\sin(s)}$ is increasing on the interval $[0, \pi)$, so that we finally get

$$|\partial_\theta u|(re^{i\theta}) \leq \frac{\sinh\left(\min\{r_0\sqrt{K_0}, \frac{\pi}{2}\}\right)}{\sin\left(\min\{r_0\sqrt{K_0}, \frac{\pi}{2}\}\right)} \left| \frac{d}{d\theta}(\gamma\#\bar{\alpha})(\theta) \right|.$$

Therefore, we get that

$$\begin{aligned}
a(\gamma) &= \left| \int_0^{2\pi} \int_0^1 \omega(\partial_r u, \partial_\theta u) r dr d\theta \right| \\
&\leq \int_0^{2\pi} \int_0^1 |\partial_r u| |\partial_\theta u| r dr d\theta \\
&\leq \frac{\sinh\left(\min\{r_0\sqrt{K_0}, \frac{\pi}{2}\}\right)}{\varepsilon \sin\left(\min\{r_0\sqrt{K_0}, \frac{\pi}{2}\}\right)} \ell(\gamma) \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left| \frac{d}{d\theta}(\gamma\#\bar{\alpha})(\theta) \right| r dr d\theta \\
&= \frac{\sinh\left(\min\{r_0\sqrt{K_0}, \frac{\pi}{2}\}\right)}{2\varepsilon \sin\left(\min\{r_0\sqrt{K_0}, \frac{\pi}{2}\}\right)} \ell(\gamma) (\ell(\gamma) + \ell(\alpha)) \\
&\leq \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \frac{\sinh\left(\min\{r_0\sqrt{K_0}, \frac{\pi}{2}\}\right)}{2\varepsilon \sin\left(\min\{r_0\sqrt{K_0}, \frac{\pi}{2}\}\right)} \ell(\gamma)^2.
\end{aligned}$$

This concludes to proof of (ii). Note that replacing $\ell(\alpha)$ by 0 in the above argument gives a proof of (i) with $c' = \frac{\sinh(\min\{r_0\sqrt{K_0}, \frac{\pi}{2}\})}{2 \sin(\min\{r_0\sqrt{K_0}, \frac{\pi}{2}\})} \leq c$. \square

Note that we could have taken the $\frac{\pi}{4\sqrt{K_0}}$ part of δ (as defined in (2.1)) to actually be $\frac{\pi\eta}{2\sqrt{K_0}}$ for any $\eta \in (0, 1)$; we have just made a convenient choice. Moreover, δ can always

be bounded away from zero by a constant depending only on K_0 , r_0 , and Λ , as shows the following lemma.

LEMMA 1.10 ([SHE95, GS16]): Let (M, g) be a complete Riemannian manifold with sectional curvature K such that $|K| \leq K_0$, and with injectivity radius such that $r_{\text{inj}}(M) \geq r_0 > 0$. Let L be a submanifold with second fundamental form B_L such that $\|B_L\| \leq \Lambda$ for some $\Lambda \geq 0$. Then, there exists a constant $i_0 = i_0(K_0, r_0, \Lambda) > 0$ such that

$$r_{\text{inj}}(L, g|_L) \geq i_0.$$

REMARK 1.11: The constant c — and c' — we get in the proof depends continuously on K_0 , r_0 , and ε . Likewise, the constant i_0 appearing in Lemma 1.10 may also be chosen so that it depends continuously on K_0 , r_0 , and Λ . This follows directly from the proof in Groman and Solomon's paper [GS16].

PROPOSITION 1.12 (MONOTONICITY LEMMA): Let M, L, δ be as above. Let Σ be a compact Riemann surface with boundary $\partial\Sigma$ with corners. Consider a nonconstant J -holomorphic curve $u : (\Sigma, \partial\Sigma) \rightarrow (B(x, r), \partial B(x, r) \cup L)$ for some $x \in L$ and $r \leq \delta$ such that $x \in u(\Sigma)$. Suppose that u sends the corners of Σ to $\partial B(x, r) \cap L$. Then,

$$\omega(u) \geq Cr^2,$$

where $C = \frac{1}{4c}$, and c is the constant of Lemma 1.9.

PROOF: The proof is that of Proposition 4.7.2 in [Sik94], but using the version of the isoperimetric inequality above. We still give the details here for the sake of completeness.

Set $\Sigma_t := u^{-1}(B(x, t))$ and $a(t) := \omega(u|_{\Sigma_t})$. By Sard's theorem, there is a subset of full measure Ω of $(0, r)$ such that for all $t \in \Omega$, Σ_t is a subsurface of Σ with piecewise smooth boundary $\partial\Sigma_t = u^{-1}(\partial B(x, t) \cup L)$. The discontinuities of the boundary are then contained in $u^{-1}(\partial B(x, t) \cap L)$.

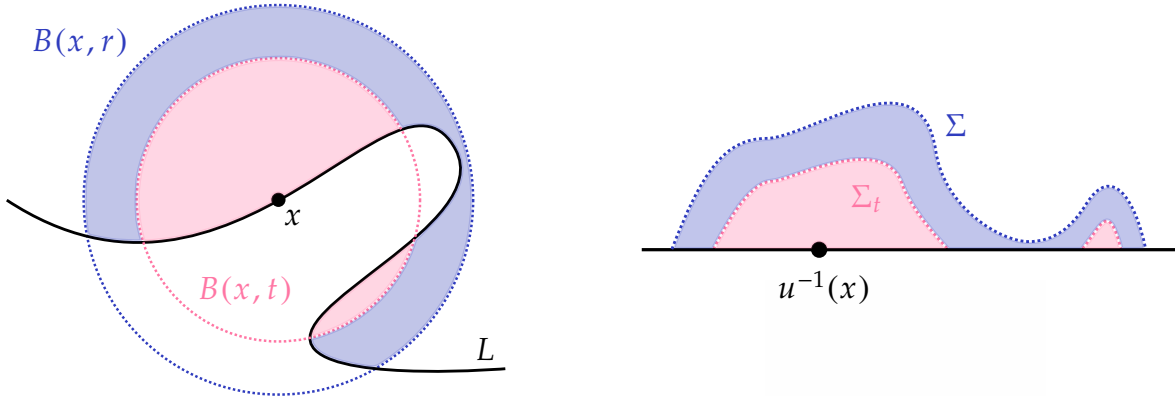


Figure 6. Visualization in two dimensions, both in the codomain (left) and domain (right).

We begin by noting that, for $t \in \Omega$, we have the inequality

$$a(t) \leq c\ell(t)^2,$$

where $\ell(t)$ is the length of $u|_{\partial\Sigma_t - u^{-1}(L)}$. Indeed, write the boundary of Σ_t as

$$\partial\Sigma_t = \left(\bigsqcup_i \gamma_i \# \overline{\alpha_i} \right) \sqcup \left(\bigsqcup_j \beta_j \right),$$

where the γ_i 's are arcs in the interior of Σ with extremities in $u^{-1}(L)$, the α_i 's are the segment of $u^{-1}(L)$ between the extremities of γ_i , and the β_j 's are loops. Finally, choose disk extensions $v_i : \mathbb{D} \rightarrow B_t(x)$ and $w_j : \mathbb{D} \rightarrow B_t(x)$ of $u|_{\gamma_i \# \overline{\alpha_i}}$ and $u|_{\beta_j}$, respectively.

Since $B_t(x)$ is contractible, we may take a primitive λ of ω on it. Then, by Stokes' theorem,

$$\begin{aligned} a(t) &= \int_{\Sigma_t} u^* \omega = \int_{\partial\Sigma_t} u^* \lambda \\ &= \sum_i \int_{\gamma_i \# \overline{\alpha_i}} u^* \lambda + \sum_j \int_{\beta_j} u^* \lambda \\ &= \sum_i \int_{\partial\mathbb{D}} v_i^* \lambda + \sum_j \int_{\partial\mathbb{D}} w_j^* \lambda \\ &= \sum_i \int_{\mathbb{D}} v_i^* \omega + \sum_j \int_{\mathbb{D}} w_j^* \omega. \end{aligned}$$

Hence, by Lemma 1.9,

$$\begin{aligned} a(t) &= \sum_i a(\gamma_i) + \sum_j a(\beta_j) \\ &\leq \sum_i c\ell(\gamma_i)^2 + \sum_j c'\ell(\beta_j)^2 \\ &\leq c\ell(t)^2. \end{aligned}$$

Take $f := \rho \circ u$, where ρ is the distance from x in M . Fix $t \in \Omega$. Then, in a neighborhood of $\partial\Sigma_t$, u^*g_J is a metric, and f is its distance function from $u^{-1}(x)$. In particular, $|\text{grad } f|_{u^*g_J} \equiv 1$. Therefore, by the coarea formula (see for example [Cha06]),

for s near enough t , we have that

$$\begin{aligned}
a(t) - a(s) &= \int_{\{s \leq f \leq t\}} |\text{grad } f|_{u^*g_J} da_{u^*g_J} \\
&= \int_s^t \int_{\{f=\tau\}} d\ell_{u^*g_J} d\tau \\
&= \int_s^t \ell(\tau) d\tau.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

In particular, a is absolutely continuous on $[0, r]$, differentiable on Ω , and $a'(t) = \ell(t)$ for all $t \in \Omega$.

Therefore, for all such t , we have that

$$\left(\sqrt{a(t)}\right)' = \frac{a'(t)}{2\sqrt{a(t)}} = \frac{\ell(t)}{2\sqrt{a(t)}} \geq \frac{1}{2\sqrt{c}}$$

by Lemma 1.9. Since Ω has full measure and a is absolutely continuous, we can integrate the lower bound to get $\omega(u) = a(r) \geq \frac{1}{4c}r^2$. \square

REMARK 1.13: Both Lemma 1.9 and Proposition 1.12 work for a larger class of almost complex structures J and of metrics g — not necessarily equal to g_J — respecting the hypotheses of Lemma 1.10. Indeed, suppose that there exist constants $C_1, C_2 > 0$ such that $\omega(X, Y) \leq C_1|X||Y|$ and $|X|^2 \leq C_2\omega(X, JX)$ for all X and Y . In that case, let a denote the area with respect to ω as before, and let A denote the area with respect to g . Then, Lemma 1.9 gives the inequality $a(\gamma) \leq C_1c'\ell(\gamma)$ at (i) and the inequality $a(\gamma) \leq C_1c\ell(\gamma)$ at (ii). Furthermore, Equation (2.2) now applies to A , and thus $A'(t) = \ell(t)$. Therefore, Proposition 1.12 becomes

$$\omega(u) \geq \frac{1}{C_2}A(r) \geq \frac{1}{4C_1C_2c}r^2.$$

2.3. Proof of Theorem 1.4

We are now ready to give the proof of the main result. Remember that we have fixed a symplectic manifold (M, ω) and an ω -compatible almost complex structure J such that (M, J) is either closed or convex at infinity. Likewise, we have fixed families of closed connected Lagrangian submanifolds \mathcal{F} and \mathcal{F}' such that $(\overline{\cup_{F \in \mathcal{F}} F}) \cap (\overline{\cup_{F' \in \mathcal{F}'} F'})$ is discrete. We also assume from now on that all Lagrangian submanifolds are in some fixed collection $\mathcal{L}_{\Lambda, \varepsilon}^*(M)$ (as defined in Subsection 1.1). In what follows, $\hat{d}^{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}$ denotes a J -adapted metric (as defined in Subsection 2.1) on that collection.

For subsets $A, B \subseteq M$, we take

$$s(A, B) := \sup_{x \in A} d_M(x, B) := \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d_M(x, y).$$

Therefore, the Hausdorff metric is given by $\delta_H(A, B) = \max\{s(A, B), s(B, A)\}$.

Take $L, L' \in \mathcal{L}_{\Lambda, \varepsilon}^*(M)$ and $\delta > 0$. Let F_1, \dots, F_k be the Lagrangian submanifolds in \mathcal{F} given by the definition of a J -adapted pseudometric. Take also C^0 - and Hofer-small Hamiltonian perturbations \tilde{L}, \tilde{L}' , and $\tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_k$ of these manifolds making them pairwise transverse. Then, for any $x \in \tilde{L} \cup \tilde{L}'$, there exists a nonconstant J -holomorphic polygon $u : S_r \rightarrow M$ with the following properties:

- (i) it has boundary along \tilde{L}, \tilde{L}' , and $\tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_k$;
- (ii) it passes through x ;
- (iii) $\omega(u) \leq d^{\mathcal{F}}(L, L') + \delta$.

Assuming that the perturbations of L and L' are also C^2 -small, we get that $\tilde{L}, \tilde{L}' \in \mathcal{L}_{\tilde{\Lambda}, \tilde{\varepsilon}}^*(M)$ for some $\tilde{\Lambda} \geq \Lambda$ and $\tilde{\varepsilon} \leq \varepsilon$.

Take $x \in \tilde{L} - (\tilde{L}' \cup \tilde{F}_1 \cup \dots \cup \tilde{F}_k)$ and

$$\tilde{\delta} := \varepsilon \min \left\{ 1, \frac{1}{2}r_0, \frac{1}{2}i_0(K_0, r_0, \tilde{\Lambda}) \right\},$$

where i_0 is the constant appearing in Lemma 1.10. By Sard's theorem, there is an open dense subset of $(0, \min\{\tilde{\delta}, d_M(x, \tilde{L}' \cup \tilde{F}_1 \dots \cup \tilde{F}_{|r|-2})\})$ such that, for all ρ in this subset, $\Sigma := u^{-1}(B_\rho(x))$ is a smooth submanifold of S_r with boundary with corners. In particular, $u|_\Sigma$ respects the hypotheses of Proposition 1.12. We thus get

$$d^{\mathcal{F}}(L, L') + \delta \geq \omega(u) \geq \omega(u|_\Sigma) \geq \tilde{C}\rho^2,$$

where $\tilde{C} = C(K_0, r_0, \tilde{\Lambda}, \tilde{\varepsilon})$ is the constant appearing in Proposition 1.12. Since this holds for all $\delta > 0$ and for all ρ in a dense subset, we get

$$d^{\mathcal{F}}(L, L') \geq \tilde{C} \min \left\{ \tilde{\delta}, d_M(x, \tilde{L}' \cup \tilde{F}_1 \dots \cup \tilde{F}_{|r|-2}) \right\}^2.$$

In particular, whenever $d^{\mathcal{F}}(L, L') < \tilde{C}\tilde{\delta}^2$, we get

$$d^{\mathcal{F}}(L, L') \geq \tilde{C}s(\tilde{L}, \tilde{L}' \cup \tilde{F}_1 \dots \cup \tilde{F}_{|r|-2})^2 \tag{2.3}$$

by taking the supremum over all x 's.

We now must get rid of the Hamiltonian perturbations on the right-hand side of (2.3). In order to do so, choose sequences of generic C^2 - and Hofer-small Hamiltonian diffeomorphisms $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ and $\{\varphi_n^0\}_{n \geq 1}$, which converges to the identity in the C^2 sense. Likewise, for each $i \in \{1, \dots, k\}$, choose a sequence of generic C^0 - and Hofer-small Hamiltonian

diffeomorphisms $\{\varphi_n^i\}_{n \geq 1}$ which converges to the identity in the C^0 sense. For each n , there is a J -holomorphic polygon $u_n : S_{r_n} \rightarrow M$ as above.

By Remark 1.11, as n tends to infinity, the corresponding constants $\tilde{\delta}$ and \tilde{C} converge to

$$\delta_0 := \varepsilon \min \left\{ 1, \frac{1}{2}r_0, \frac{1}{2}i_0(K_0, r_0, \Lambda) \right\}$$

and $C = C(K_0, r_0, \Lambda, \varepsilon)$, respectively. Furthermore, for any $n \geq 1$, $x \in L$, and $y \in L' \cup F_1 \cdots \cup F_k$, we have that

$$\begin{aligned} d_M(x, y) &\leq d_M(x, \varphi_n(x)) + d_M(\varphi_n(x), \varphi_n^i(y)) + d_M(\varphi_n^i(y), y) \\ &\leq d_M(\varphi_n(x), \varphi_n^i(y)) + d_{C^0}(\mathbb{1}, \varphi_n) + \max_i d_{C^0}(\mathbb{1}, \varphi_n^i), \end{aligned}$$

for all $i \in \{0, 1, \dots, k\}$. Therefore, by taking the infimum over all y and then, the supremum over all x , we have that

$$\begin{aligned} s(\varphi_n(L), \varphi_n^0(L') \cup \varphi_n^1(F_1) \cup \cdots \cup \varphi_n^k(F_k)) &\geq s(L, L' \cup F_1 \cup \cdots \cup F_k) \\ &\quad - d_{C^0}(\mathbb{1}, \varphi_n) \\ &\quad - \max_i d_{C^0}(\mathbb{1}, \varphi_n^i). \end{aligned}$$

We can thus finally put this back into (2.3), and take the limit $n \rightarrow \infty$ to get

$$d^{\mathcal{F}}(L, L') \geq Cs(L, L' \cup F_1 \cdots \cup F_k)^2 \geq Cs(L, L' \cup (\cup_{F \in \mathcal{F}} F))^2, \quad (2.4)$$

whenever $d^{\mathcal{F}}(L, L') < C\delta_0^2$. In other words, Inequality (2.3) holds without any perturbation. One gets similarly the inequalities

$$\begin{aligned} d^{\mathcal{F}}(L, L') &\geq Cs(L', L \cup (\cup_{F \in \mathcal{F}} F))^2 \\ d^{\mathcal{F}'}(L, L') &\geq Cs(L, L' \cup (\cup_{F' \in \mathcal{F}'} F'))^2 \\ d^{\mathcal{F}'}(L, L') &\geq Cs(L', L \cup (\cup_{F' \in \mathcal{F}'} F'))^2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

We must now turn the inequalities in (2.4) and (2.5) into an inequality in terms of $\delta_H(L, L')$.

Since $(\overline{UF}) \cap (\overline{UF'})$ is discrete by the definition of a J -adapted metric, there exists a constant $\eta' > 0$ such that $B_{\eta'}(x) \cap B_{\eta'}(y) = \emptyset$ for all $x \neq y \in (\overline{UF}) \cap (\overline{UF'})$. Furthermore, there exists a constant $\eta'' = \eta''(K_0, r_0, \Lambda) > 0$ such that any closed manifold L which is contained in a metric ball $B_{\eta''}(x)$, for some $x \in M$, must have $\|B_L\| > \Lambda$ — we refer the reader to Corollary 1.20 in the next section for a precise estimate of η'' . We set $\eta := \min\{\eta', \eta''\}$.

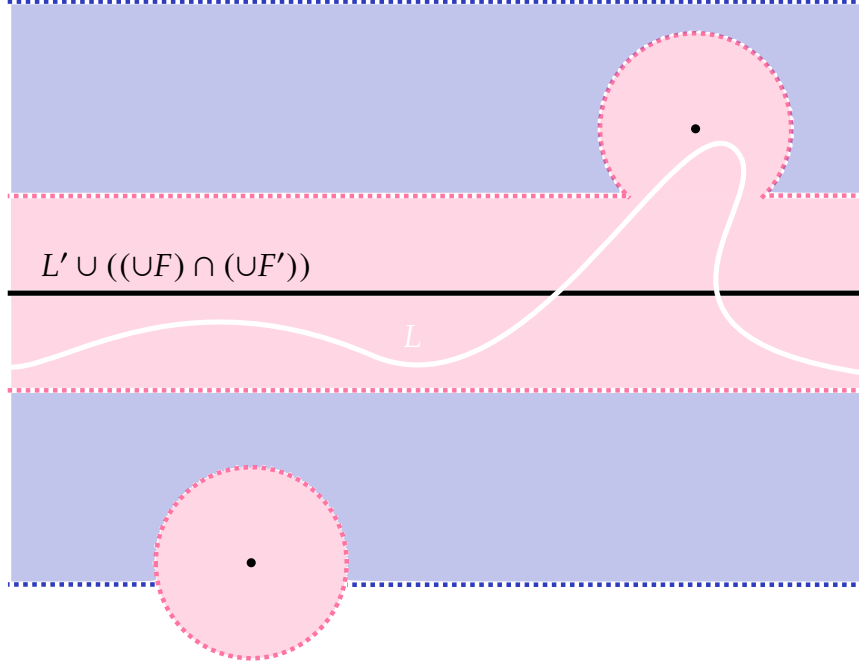


Figure 7. The 3σ -neighborhood of L' (in pink) contains the connected component containing L' of the σ -neighborhood of $L' \cup ((\overline{UF}) \cap (\overline{UF}'))$ (in blue).

Suppose now that $\hat{d}^{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}(L, L') < \min\{C\delta_0^2, C\eta^2\} =: R$. By the inequalities in (2.4) and (2.5), we have that

$$\sigma := \max\{s(L, L' \cup (UF)), s(L, L' \cup (UF'))\} < \eta.$$

But, by definition of s , L must be in the σ -neighborhood of $L' \cup (\overline{UF})$ and $L' \cup (\overline{UF}')$, and thus of $L' \cup ((\overline{UF}) \cap (\overline{UF}'))$. However, this neighborhood is composed of a disjoint union of an open neighborhood of L' and metric balls of radius $< \eta''$. By the choice of η'' , L must then be in the component containing L' . However, this component is itself contained in the 3σ -neighborhood of L' . Therefore, $3\sigma \geq s(L, L')$. By taking the maximum of the inequality in (2.3) and the second inequality of (2.5), we get

$$\hat{d}^{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}(L, L') \geq C\sigma^2 \geq \frac{C}{9}s(L, L')^2.$$

Doing the same thing for the first and third inequalities of (2.5) finishes the proof. The C appearing in the statement of Theorem 1.4 is thus equal to $\frac{1}{36c}$, where c is the constant of Lemma 1.9.

REMARK 1.14: (1) If one is only interested by the statement of Theorem 1.A and is willing to restrict oneself to the case when M is compact, then the standing hypothesis that $(\overline{UF}) \cap (\overline{UF}')$ is discrete can be loosened up. More precisely, we can suppose that $(\overline{UF}) \cap (\overline{UF}')$ is only totally disconnected.

In that case, a sequence $\{L_n\}_{n \geq 1}$ must have a converging subsequence; this is because the collection of closed subsets of M with the Hausdorff metric is compact. Denote by E its limit set. Since the inequalities in (2.4) and (2.5) still stands — with L replaced by L_n and L' by L_0 — the limit E must lie in $L_0 \cup ((\overline{UF}) \cap (\overline{UF}'))$. However, a sequence of connected subsets must converge to a connected one (see [Sta67] for instance). But, by the argument above, it cannot converge to a point. Therefore, we must have $E \subseteq L_0$. Using an analogous argument for the first and last inequality in (2.5), we get $L_0 \subseteq E \cup ((\overline{UF}) \cap (\overline{UF}'))$. Thus, $L_0 \subseteq E$ by the same connectivity argument. Therefore, any converging subsequence of $\{L_n\}_{n \geq 1}$ converges to $E = L_0$, which means that $\{L_n\}_{n \geq 1}$ itself converges to L_0 in the Hausdorff metric.

- (2) Likewise, to prove Theorem 1.A, there is no need for the weak-exactness hypothesis on $\mathcal{L}^{L_0}(M)$ in the spectral case. Indeed, for n large, we will have $\gamma(L_0, L_n) < \hbar(M, L_0, J)$. Therefore, we will still have a J -holomorphic strip between Hamiltonian deformations of L_0 and L_n . The rest of the proof then follows as above. The same is true of γ_{ext} .

3. The two-dimensional case

We now explain how to prove the second part of Theorem 1.A. More precisely, we will prove the following.

THEOREM 1.15: Suppose that $\dim M = 2$. For any J -adapted metric $\hat{d}^{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}$ on $\mathcal{L}_\Lambda^\star(M)$, there exist constants $R' = R'(K_0, r_0, \Lambda, (\overline{UF}) \cap (\overline{UF}')) > 0$ and $C' = C'(K_0, r_0) > 0$ such that whenever $\hat{d}^{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}(L, L') < R$, then

$$\hat{d}^{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}(L, L') \geq C' \delta_H(L, L')^2.$$

As noted in the introduction, the key to getting rid of the dependency of both R and C on ε is to use the two-dimensionality of M in order to make a better choice of a metric ball in M before applying the following version of the monotonicity lemma.

PROPOSITION 1.16 (MONOTONOCITY LEMMA, ABSOLUTE VERSION): Let (M, ω, J, g_J) be a symplectic manifold equipped with a compatible almost complex structure and the corresponding metric. Let Σ be a compact Riemann surface with boundary $\partial\Sigma$. Consider a nonconstant J -holomorphic curve $u : (\Sigma, \partial\Sigma) \rightarrow (B(x, r), \partial B(x, r))$, where $x \in M$ and $r \leq \frac{1}{2}r_0$. Suppose that $x \in u(\Sigma)$. Then,

$$\omega(u) \geq C' r^2,$$

where $C' = \frac{1}{4c'}$, with c' the constant of Lemma 1.9.

PROOF: We make use of the same notation as in the proof of Proposition 1.12. Since u does not have boundary components along some Lagrangian submanifold L , the boundary $\partial\Sigma_t$ is only composed of disjoint loops β_j . Therefore, we now get

$$a(t) = \sum_j a(\beta_j) \leq \sum_j c' \ell(\beta_j)^2 = c' \ell(t)^2.$$

The rest of the proof than follows as in Proposition 1.12. □

Let L and L' be Lagrangian submanifolds of M , i.e. closed curves on M , and let \tilde{L} and \tilde{L}' be sufficiently small generic Hamiltonian deformations of them. Take $x \in \tilde{L} \cup \tilde{L}'$. Let $u : S_r \rightarrow M$ be the J -holomorphic polygon with boundary along L and L' — and potentially some other Lagrangian submanifolds — passing through x given by the definition of a J -adapted metric. By Proposition 1.16, if we can find a disk entirely contained in $u(\text{int } S_r)$, then we will get a proof of Theorem 1.15. Indeed, it will then suffice to change the step in the proof of Theorem 1.4 where we apply the monotonicity lemma; the rest of the proof remains the same. It thus suffices to prove the following purely geometric result.

THEOREM 1.17: Let M be a complete surface with Gaussian curvature $|K| \leq K_0$ and injectivity radius $r_{\text{inj}}(M) \geq r_0 > 0$. Let L, K_1, \dots, K_k be pairwise transversal closed curves on M with geodesic curvature uniformly bounded by Λ . Let $x \in L - \cup_i K_i$. Suppose that there exists a smooth map $u : S_r \rightarrow M$ with boundaries along L, K_1, \dots, K_k passing through x . Then, there exists a constant

$$\rho_0 = \rho_0(K_0, r_0, \Lambda, d_M(x, \cup_i K_i)) > 0$$

such that $u(\text{int } S_r)$ contains a metric ball of radius ρ_0 .

We allow n to be zero, in which case it is understood that $S_r = \mathbb{D}$, $\cup_i K_i = \emptyset$, and $d_M(x, \cup_i K_i) = \infty$ for any $x \in L$.

Although it was developed independently, our proof of Theorem 1.17 uses a similar approach to a recent proof by Petrunin and Zamora Barrera of the so-called Moon in a puddle theorem [PB21]. We recover their result by taking M to be the Euclidian plane and n to be zero. Indeed, one can check that, in this case, $\rho_0 = \frac{1}{\Lambda}$.

REMARK 1.18: Much like the constants C, C' and i_0 , the constant ρ_0 depends continuously on K_0, r_0, Λ , and $d_M(x, \cup_i K_i)$.

3.1. Finding a good disk

The proof of Theorem 1.17 relies mostly on the following technical lemma, whose proof we will delay until the next subsection.

LEMMA 1.19: Let M be a complete Riemannian manifold of dimension $n \geq 2$ with $|K| \leq K_0$ and $r_{\text{inj}}(M) \geq r_0 > 0$. There exist constants $\rho_1 = \rho_1(K_0, r_0) > 0$ and $\alpha = \alpha(K_0, r_0) > 0$ with the following property. Let $\Gamma : [0, \ell] \rightarrow M$ be a unit-speed curve with image in $B_\rho(x)$ for some $0 < \rho \leq \rho_1$ and some $x \in M$. Consider the map

$$\begin{aligned} d: [0, \ell] &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ s &\longmapsto d_M(x, \Gamma(s)). \end{aligned}$$

Suppose that d achieve its maximum at $s_0 \in (0, \ell)$. Then,

$$\left| \frac{D}{ds} \dot{\Gamma}(s_0) \right| \geq \frac{\alpha}{\rho}.$$

By taking $M = \mathbb{R}^2$ and the limit $K_0 \rightarrow 0$, we recover the classical fact that, on a loop contained in a disk of radius $\rho > 0$, there is a point where its curvature is at least $\frac{1}{\rho}$.

Before going in the proof of Theorem 1.17, we note that Lemma 1.19 gives a precise bound on the smallest metric ball that a submanifold L with second fundamental form $\|B_L\| \leq \Lambda$ can be contained in.

COROLLARY 1.20: Let M , K_0 , ρ_0 , and α be as above. Let L be a closed submanifold of M contained in a metric ball $B_\rho(x)$ for some $0 < \rho \leq \rho_0$ and some $x \in M$. Then, its second fundamental form respects

$$\|B_L\| \geq \frac{\alpha}{\rho}.$$

PROOF: Since L is closed, there is a point $y \in L$ such that the map $x' \mapsto d_M(x, x')$, seen as a map $L \rightarrow \mathbb{R}$, achieve its maximum at y . Let $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow L$ be a unit-speed geodesic of L such that $\gamma(0) = y$. By Lemma 1.19, we have that

$$\left| B_L \left(\dot{\gamma}(0), \dot{\gamma}(0), \frac{\frac{D}{ds} \dot{\gamma}}{|\frac{D}{ds} \dot{\gamma}|}(0) \right) \right| = \left| \frac{D}{ds} \dot{\gamma}(0) \right| \geq \frac{\alpha}{\rho}.$$

□

Before going in the proof of Theorem 1.17, we reduce to the case where M is simply connected. Suppose that it is not. We then consider its universal cover $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$. Note that \tilde{M} comes naturally equipped with a Riemannian metric π^*g , which turns π into a local isometry. Therefore, we have that the Gaussian curvature of \tilde{M} respects $|\tilde{K}| \leq K_0$

and that $r_{\text{inj}}(\tilde{M}) \geq r_{\text{inj}}(M) \geq r_0$. The inequality between the injectivity radii follows from the classical result of Klingenberg [Kli59] that

$$r_{\text{inj}}(M) = \min \left\{ r_{\text{conj}}(M), \frac{1}{2} \ell(M) \right\}. \quad (3.1)$$

Here, $r_{\text{conj}}(M)$ is the length of the shortest geodesic segment $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ such that there exists a normal Jacobi field J along γ with $J(0) = J(T) = 0$. Likewise, $\ell(M)$ is the length of the shortest *immersed* geodesic loop on M .

Since S_r is contractible, u admits a lift $\tilde{u} : S_r \rightarrow \tilde{M}$. Then, $d_M(x, \cup_i K_i)$ gives a lower bound on the distance between $\tilde{x} \in \tilde{u}(S_r)$ such that $\pi(\tilde{x}) = x$ and the components of $\tilde{u}(\partial S_r)$ that do not contain \tilde{x} .

Therefore, the metric bounds on M are also respected by \tilde{M} . It thus indeed suffices to prove Theorem 1.17 on the universal cover: if $B_{\rho_0}(\tilde{x})$ is the metric ball in \tilde{M} given by the theorem, then $B_{\rho_0}(\pi(\tilde{x})) = \pi(B_{\rho_0}(\tilde{x}))$ will be the sought-after ball in M . Note that this is indeed a topological ball as we may take $\rho_0 \leq r_0$. Therefore, for the rest of the proof, we will assume that M is simply connected.

We now fix an injective unit-speed parametrization $\Gamma : [0, \ell] \rightarrow M$ of the component of $u(\partial S_r)$ containing x , i.e. Γ parametrizes a segment of L containing x , and $\Gamma(0), \Gamma(\ell) \in L \cap (\cup_{i=1}^n K_i)$ when $n > 0$. When $n = 0$, Γ is just a parametrization of L . We then take the convention that $\Gamma(0) = \Gamma(\ell) \neq x$.

The proof has three main steps.

- (1) We define a notion of an "osculating disk" $D_\rho(s)$ of the curve Γ at s . This disk is a closed metric ball of M which has the property that $D_\rho(s) \cap \Gamma([s - \varepsilon, s + \varepsilon]) \subseteq \partial D_\rho(s)$ for some $\varepsilon > 0$.
- (2) We find $s_0, t_0 \in [0, \ell]$ with the following property: if $p \in \text{int}(D_\rho(s)) \cap \Gamma([0, \ell])$ for any $s \in [s_0, t_0]$, then there also exists $t \in [t_0, s_0]$ such that $\Gamma(t) \in \text{int}(D_\rho(s))$.
- (3) We suppose that $\text{int}(D_\rho(s)) \cap \Gamma([0, \ell]) \neq \emptyset$ for all $s \in [s_0, t_0]$, and we get a contradiction.

Denote by $r_{\text{conv}}(M)$ the convexity radius of M , i.e. the largest $\rho > 0$ such that, for all $x \in M$ and all $y, y' \in B_\rho(x)$, there exists a minimizing geodesic from y to y' in $B_\rho(x)$. It is a classical result from Berger [Ber76] that

$$r_{\text{conv}}(M) \geq \frac{1}{2} \min \left\{ r_{\text{inj}}(M), \frac{\pi}{\sqrt{K_0}} \right\}.$$

By taking a smaller ρ_0 if necessary, we may assume that $\rho_0 \leq \min\{\frac{r_0}{2}, \frac{\pi}{2\sqrt{K_0}}, \rho_1\}$. Therefore, $\rho \leq \rho_0$ implies that $\rho_0 \leq r_{\text{conv}}(M)$ and that ρ respects Lemma 1.19.

REMARK 1.21: In fact, a more recent result of Dibble [**Dib17**] gives

$$r_{\text{conv}}(M) = \min \left\{ r_{\text{foc}}(M), \frac{1}{4} \ell(M) \right\}, \quad (3.2)$$

where $r_{\text{foc}}(M)$ is the length of the shortest geodesic segment $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ such that there exists a normal Jacobi field J along γ with $J(0) = \langle J', J \rangle(T) = 0$. This can be used to give a better estimate on the optimal ρ_0 for a given (M, g_J) .

We thus begin with the definition of $D_\rho(s)$. Let $s \in (0, \ell)$ and $\rho \in (0, \rho_0)$. We define $D_\rho(s)$ to be the closed metric ball $\overline{B_\rho(\gamma_s(\rho))}$. Here, $\gamma_s(t) := \exp_{\Gamma(s)}(tN(s))$ for $t \in [0, r_{\text{inj}}(M)]$, and N is the unit-length vector field along Γ which is orthogonal to $\dot{\Gamma}$ and pointing toward the interior of the topological disk $\overline{u(S_r)}$.

LEMMA 1.22: Let $s \in (0, \ell)$ and $\rho \in (0, \min\{\frac{\alpha}{\Lambda}, \rho_1\})$, where ρ_1 and α are the constant appearing in Lemma 1.19. There exists $\varepsilon > 0$ such that

$$D_\rho(s) \cap \Gamma([s - \varepsilon, s + \varepsilon]) \subseteq \partial D_\rho(s).$$

We also put off the proof of the lemma until the next subsection. In order for Lemma 1.22 to stand, we add the condition that $\rho_0 \leq \frac{\alpha}{\Lambda}$ and take $\rho \in (0, \rho_0)$.

We now make our choice of t_0 and s_0 . Let $t_0 \in (0, \ell)$ be such that $\Gamma(t_0) = x$. If we have that $D_\rho(t_0) \cap \Gamma([0, \ell]) \subseteq \partial D_\rho(t_0)$, then we have proven the theorem. Indeed, for all $y \in \text{int}(D_\rho(t_0))$,

$$d(y, u(\partial S_r) - \Gamma([0, \ell])) \geq d(x, \cup_i K_i) - d(x, y) > \rho - \rho = 0.$$

Thus, $\text{int} D_\rho(t_0) \cap u(\partial S_r) = \emptyset$. The open ball $\text{int}(D_\rho(t_0))$ must then be in $u(\text{int} S_r)$ by construction, and it thus satisfies the conclusions of Theorem 1.17.

Suppose therefore that $D_\rho(t_0) \cap \Gamma([0, \ell]) \not\subseteq \partial D_\rho(t_0)$. Fix $s_0 \in (0, \ell)$ such that

$$d_M(\Gamma(t_0), \Gamma(s_0)) = \min\{d_M(\Gamma(t_0), \Gamma(s)) \mid s \in [0, \ell], \Gamma(s) \in D_\rho(t_0)\}.$$

We may indeed take s_0 to be in $(0, \ell)$, since $\Gamma(0), \Gamma(\ell) \notin D_\rho(t_0)$ by the hypotheses on ρ when $n > 0$. When $n = 0$, Γ is actually a loop, and we can still assume it by shifting the parametrization Γ . Indeed, if all of L were in $D_\rho(t_0)$, then we would get a contradiction by Corollary 1.20. Furthermore, we must have that $\Gamma(s_0) \in \text{int} D_\rho(t_0)$ and, by Lemma 1.22, $s_0 \neq t_0$. Without loss of generality, we may assume that $s_0 > t_0$.

Denote by $[\Gamma(t_0), \Gamma(s_0)]$ the unique minimizing geodesic segment in $D_\rho(t_0)$ from $\Gamma(t_0)$ to $\Gamma(s_0)$. By hypothesis on ρ , it exists and does not intersect $u(\partial S_r)$ — except at its extremities of course. Then, $\Gamma([t_0, s_0]) \cup [\Gamma(t_0), \Gamma(s_0)]$ is a continuously embedded loop in

M . Therefore, since M is simply connected, it bounds a topological disk and divides M in two parts.

We now get to the proof that $[t_0, s_0]$ has the desired property, i.e. the proof of the second step. Suppose that there exists $p \in u(\partial S_r) - \Gamma([t_0, s_0])$ such that $p \in D_\rho(s)$ for some $s \in [t_0, s_0]$ — obviously there would be nothing to prove if $p \in \Gamma([t_0, s_0])$. Since the topological disk $\Gamma([t_0, s_0]) \cup [\Gamma(t_0), \Gamma(s_0)]$ divides M in two, the minimizing geodesic from $\Gamma(s)$ to p must intersect $\Gamma([t_0, s_0]) \cup [\Gamma(t_0), \Gamma(s_0)]$ at some point y . This geodesic exists, is unique and is contained in $D_\rho(s)$, since $\rho < r_{\text{conv}}(M) \leq r_{\text{inj}}(M)$. Note that since $p \neq \Gamma(s)$ by hypothesis, we have that $y \in \text{int}(D_\rho(s))$ and that $d_M(p, y) < d_M(p, \Gamma(s))$.

If $y \in \Gamma([t_0, s_0])$, then we have $y = \Gamma(t) \in D_r(s)$ for some $t \in [s_0, t_0]$ as desired. Suppose therefore that $y \in [\Gamma(t_0), \Gamma(s_0)]$. Clearly, it suffices to prove that either $\Gamma(t_0)$ or $\Gamma(s_0)$ is in $D_\rho(s)$. We thus suppose that it is not the case and get a contradiction. In this case, $[\Gamma(t_0), \Gamma(s_0)]$ divides $D_\rho(s)$ in exactly two parts, both with nonempty interior. Indeed, $y \in [\Gamma(t_0), \Gamma(s_0)] \cap \text{int}(D_\rho(s))$. Moreover, if $D_\rho(s) - [\Gamma(t_0), \Gamma(s_0)]$ had more than two components, we would get a contradiction. To see this, note that it is equivalent to $[\Gamma(t_0), \Gamma(s_0)] \cap D_\rho(s)$ having more than one component. However, if $q, q' \in [\Gamma(t_0), \Gamma(s_0)] \cap D_\rho(s)$ were to belong to different components, there would still be a minimizing geodesic segment $[q, q']$ in $D_r(s)$. But then

$$\ell([\Gamma(t_0), q] \cup [q, q'] \cup [q', \Gamma(s_0)]) < \ell([\Gamma(t_0), \Gamma(s_0)]) = d_M(\Gamma(t_0), \Gamma(s_0)),$$

which is of course impossible. Furthermore, since

$$d_M(\Gamma(t_0), \Gamma(s_0)) \leq d_M(\Gamma(t_0), \gamma_s(\rho)) + d_M(\gamma_s(\rho), \Gamma(s_0)) < 2\rho,$$

the segment $[\Gamma(t_0), \Gamma(s_0)]$ cannot intersect $\gamma_s(\rho)$. Therefore, $\gamma_s(\rho)$ must lie in the interior of one of the component of $D_\rho(s) - [\Gamma(t_0), \Gamma(s_0)]$. Furthermore, $\Gamma(s)$ must also lie in the interior of a component. Otherwise, we would have that $\Gamma(s) \in [\Gamma(t_0), \Gamma(s_0)]$, and then $\Gamma(s)$ would be a point of $D_\rho(t_0)$ with $d_M(\Gamma(t_0), \Gamma(s)) < d_M(\Gamma(t_0), \Gamma(s_0))$, contradicting the very definition of s_0 .

Suppose at first that $\gamma_s(\rho)$ lies in the same component as $\Gamma(s)$. We begin by showing that this implies that $p \in D_\rho(t_0)$. Suppose that it does not. Denote by A the intersection of $\partial D_\rho(s)$ and the component of $D_\rho(s) - [\Gamma(t_0), \Gamma(s_0)]$ not containing $\gamma_s(\rho)$. By minimality of $[\Gamma(t_0), \Gamma(s_0)]$, A is an embedded arc. Furthermore, since $\partial A \subseteq [\Gamma(t_0), \Gamma(s_0)]$, we have that $\partial A \subseteq D_\rho(t_0)$. However, since $p \notin D_\rho(t_0)$, A is not entirely contained in $D_\rho(t_0)$. In particular, the function $q \mapsto d_M(\gamma_{t_0}(\rho), q)$, $q \in A$, achieves its maximum at a point $q \in A - \partial A$. This implies that A must be normal to the geodesic segment $[\gamma_{t_0}(\rho), q]$ at q — to see this, one can consider the energy functional along the minimal geodesics from $\gamma_{t_0}(\rho)$

to A and use the fact that it has a critical point at q . But by construction, A is also normal to the geodesic segment $[\gamma_s(\rho), q]$. Since $\dim M = 2$ and $d(\gamma_{t_0}(\rho), q) > \rho = d(\gamma_s(\rho), q)$, this means that $[\gamma_s(\rho), q] \subsetneq [\gamma_{t_0}(\rho), q]$.

Denote by q' the intersection of the geodesic segments $[\gamma_{t_0}(\rho), q]$ and $[\Gamma(t_0), \Gamma(s_0)]$. Suppose at first that $d_M(\Gamma(t_0), q') \leq \rho$. Then, $[\gamma_{t_0}(\rho), q'] \subseteq \overline{B_\rho(\Gamma(t_0))}$, since $\rho < r_{\text{conv}}(M)$. However, $\gamma_s(\rho) \in [\gamma_{t_0}(\rho), q']$, and thus $d_M(\Gamma(t_0), \gamma_s(\rho)) \leq \rho$. This leads to a contradiction since we have supposed that $\Gamma(t_0) \notin D_\rho(s)$. Therefore, it must be so that $d_M(\Gamma(t_0), q') > \rho$. In particular,

$$d_M(\Gamma(s_0), q') = d_M(\Gamma(s_0), \Gamma(t_0)) - d_M(q', \Gamma(t_0)) < 2\rho - \rho = \rho$$

However, by definition of s_0 , $d_M(\gamma_{t_0}(\rho), \Gamma(s_0)) < \rho$. Therefore, we have that $[\gamma_{t_0}(\rho), q'] \subseteq B_\rho(\Gamma(s_0))$ similarly as before. Thus, $d_M(\gamma_s(\rho), \Gamma(s_0)) < \rho$ and $\Gamma(s_0) \in D_\rho(s)$, which is again a contradiction. Therefore, it must be so that $p \in D_\rho(t_0)$.

We now finally prove that $\gamma_s(\rho)$ cannot lie in the same component of $D_\rho(s) - [\Gamma(t_0), \Gamma(s_0)]$ as $\Gamma(s)$. Recall that y is the intersection of the geodesic segments $[\Gamma(t_0), \Gamma(s_0)]$ and $[\gamma_s(\rho), p]$. Denote by z the intersection of $[y, \Gamma(s_0)]$ and $\partial D_\rho(s)$ — once again, minimality of the geodesic ensures that this is indeed a point. By definition of y , we have that

$$\begin{aligned} d_M(y, p) &= d_M(\gamma_s(\rho), p) - d_M(\gamma_s(\rho), y) \\ &\leq \rho - d_M(\gamma_s(\rho), y) \\ &\leq d_M(\gamma_s(\rho), y) + d_M(y, z) - d_M(\gamma_s(\rho), y) \\ &< d_M(y, \Gamma(s_0)). \end{aligned}$$

Indeed, $[\gamma_s(\rho), y] \cup [y, z]$ is a path from the center of a ball of radius ρ to its boundary, and thus must be of length at least ρ .

Therefore, we get

$$\begin{aligned} d_M(\Gamma(t_0), p) &\leq d_M(\Gamma(t_0), y) + d_M(y, p) \\ &< d_M(\Gamma(t_0), y) + d_M(y, \Gamma(s_0)) \\ &= d_M(\Gamma(t_0), \Gamma(s_0)). \end{aligned}$$

By minimality of s_0 , this implies that $p \notin \Gamma([0, \ell])$. But we also have that

$$d_M(\Gamma(t_0), \Gamma(s_0)) < 2\rho.$$

Thus, if we also assume that $\rho_0 \leq \frac{1}{2}d_M(x, \cup_i K_i)$, then p will also not be in $u(\partial S_r) - \Gamma([0, \ell])$. But this is of course a contradiction with the fact that $p \in u(\partial S_r)$.

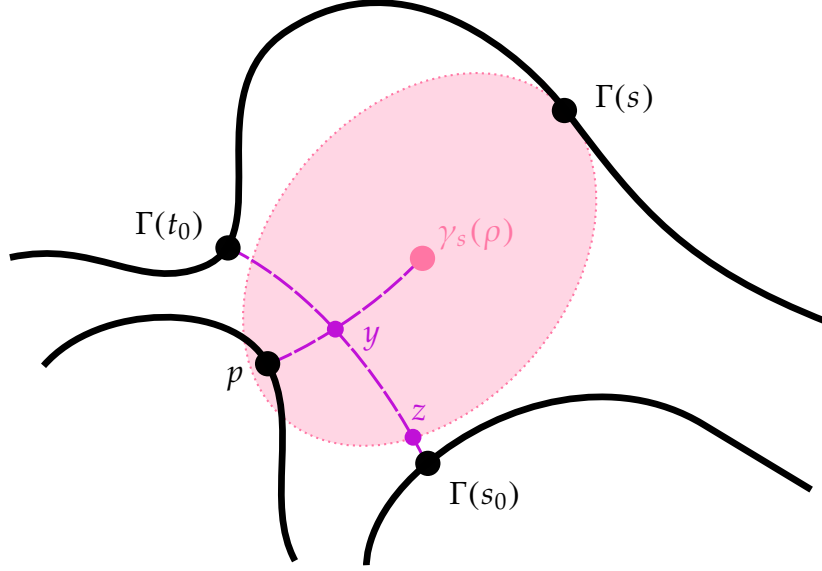


Figure 8. Some relevant geodesic segments (in hatched purple) and points in the disk $D_\rho(s)$ (in pink).

Therefore, $\gamma_s(\rho)$ and $\Gamma(s)$ must lie in different components of $D_\rho(s) - [\Gamma(t_0), \Gamma(s_0)]$. But this once again leads to a contradiction by the same logic as what we have just done: it suffices to replace every occurrence of p by $\Gamma(s)$, and vice versa. Thus, it must be so that either $\Gamma(t_0)$ or $\Gamma(s_0)$ is in $D_\rho(s)$, and the second step of the proof is done.

For the third and final step of the proof, we suppose that $D_\rho(s) \cap \Gamma([t_0, s_0]) \not\subseteq \partial D_\rho(s)$ for all $s \in [t_0, s_0]$. By the previous step of the proof, if we get a contradiction, then we will have completed the proof. Fix $\varepsilon \in (0, \rho_0 - \rho)$. Suppose that there exist $s \neq t \in [t_0, s_0]$ such that $\Gamma(t) \in \text{int}(D_\rho(s))$ and $\Gamma([t, s]) \subseteq B_{\rho+\varepsilon}(\gamma_t(\rho))$. By Lemma 1.22, the function $d(\tau) = d_M(\gamma_s(\rho), \Gamma(\tau))$ has a minimum at s . Since $d_M(\gamma_s(\rho), \Gamma(s)) < \rho = d_M(\gamma_s(\rho), \Gamma(t))$, this thus implies that d has a maximum at some point $s' \in (t, s)$. Therefore, by Lemma 1.19, we have that

$$\left| \frac{D}{ds} \dot{\Gamma}(s') \right| \geq \frac{\alpha}{\rho + \varepsilon} > \Lambda,$$

which is a contradiction.

Summarizing what we have shown, for all $s \in [t_0, s_0]$, there exists $t \in [t_0, s_0]$ such that $\Gamma(t) \in \text{int}(D_\rho(s))$. However, for all such t and s , we have that $\Gamma([t, s]) \not\subseteq B_{\rho+\varepsilon}(\gamma_t(\rho))$. In particular, we have that $s_0 - t_0 \geq 2\varepsilon$. Take $t_1 := t_0 + \varepsilon$. Note that, for any $s \in [t_0, t_1)$, we cannot have $\Gamma(s) \in \text{int}(D_\rho(t_1))$, since $\Gamma([s, t_1]) \subseteq B_{\rho+\varepsilon}(\gamma_{t_1}(\rho))$. Therefore, we may take $s_1 \in (t_1, s_0]$ such that

$$d_M(\Gamma(t_1), \Gamma(s_1)) = \min\{d_M(\Gamma(t_1), \Gamma(s)) \mid s \in [t_0, s_0], \Gamma(s) \in D_\rho(t_1)\}.$$

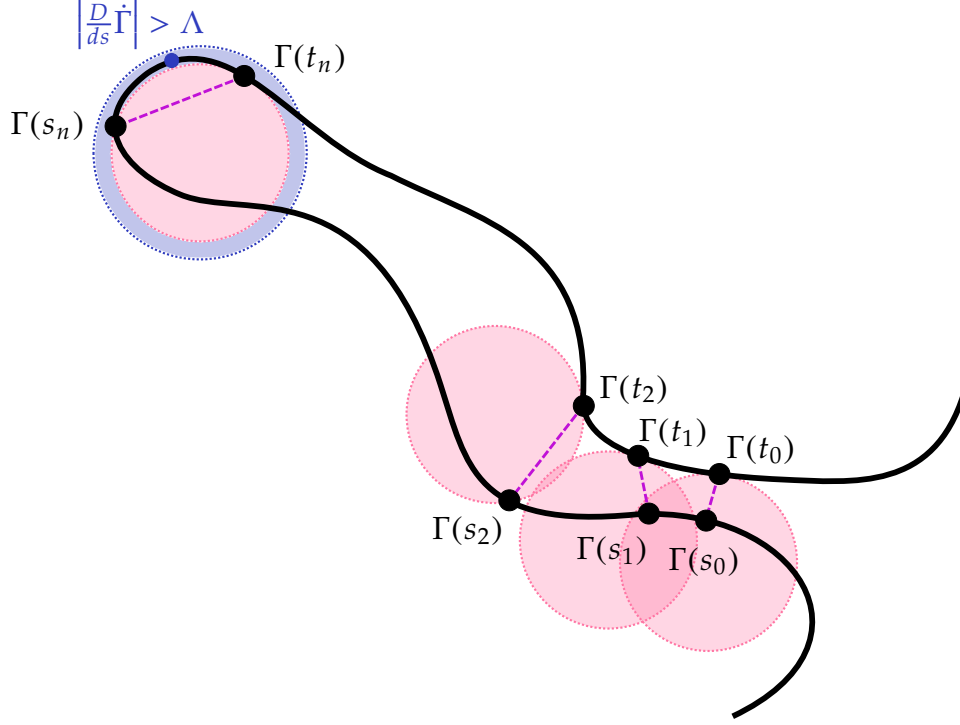


Figure 9. Multiple disks of the form $D_\rho(t_i)$ (in pink) with the inevitable point in $B_{\rho+\varepsilon}(\gamma_{t_n}(\rho))$ breaking the curvature constraint (both in blue).

Note that the second step of the proof stays true when we replace $[t_0, s_0]$ for $[t_1, s_1]$. In particular, we can similarly define $t_2 := t_1 + \varepsilon$ and $s_2 \in [t_1, s_1]$. Continuing like this, we inductively define $t_{n+1} := t_n + \varepsilon$ and $s_{n+1} \in (t_{n+1}, s_n]$ such that

$$d_M(\Gamma(t_{n+1}), \Gamma(s_{n+1})) = \min\{d_M(\Gamma(t_{n+1}), \Gamma(s)) \mid s \in [t_n, s_n], \Gamma(s) \in D_\rho(t_{n+1})\}$$

for all $n \geq 0$. But of course, by construction,

$$2\varepsilon \leq s_n - t_n \leq s_0 - t_0 - n\varepsilon.$$

Therefore, we run into a contradiction for n large enough. This finally concludes the proof of Theorem 1.17.

REMARK 1.23: Summarizing all the choices that have been made for ρ_0 , we can take

$$\rho_0 = \min \left\{ \frac{r_0}{2}, \frac{\pi}{2\sqrt{K_0}}, \rho_1, \frac{\alpha}{\Lambda}, \frac{1}{2}d_M(x, \cup_i K_i) \right\},$$

where ρ_1 and α are the constants appearing in Lemma 1.19. As we will see below, $\rho_1 \rightarrow \infty$ and $\alpha \rightarrow 1$ as $K_0 \rightarrow 0$. Therefore, when $n = 0$, we get $\rho_0 \rightarrow \frac{1}{\Lambda}$ as $K_0 \rightarrow 0$ and $r_0 \rightarrow \infty$, thus indeed recovering the Moon in a puddle theorem.

3.2. Proof of technical results

We now give the two proofs we had omitted in the previous subsection.

PROOF OF LEMMA 1.19: The proof is done in two steps.

- (1) For a well-chosen variation of the minimal geodesic from x to $\Gamma(s)$, we use the second variation formula for the energy functional to get that

$$\left| \frac{D}{ds} \dot{\Gamma}(s_0) \right| \geq \frac{I}{\rho}$$

for some $I > 0$ depending on the variation.

- (2) We use results on Jacobi fields to get a lower bound on I .

We begin with the proof of the first step. For $\varepsilon > 0$ small enough, we consider the variation

$$\begin{aligned} h: [0, 1] \times (-\varepsilon, \varepsilon) &\longrightarrow M \\ (t, s) &\longmapsto \gamma_s(t) := \exp_x(t\tilde{\Gamma}(s_0 + s)), \end{aligned}$$

where $\exp_x(\tilde{\Gamma}(s_0 + s)) = \Gamma(s_0 + s)$. In particular, $d(s) = \ell(\gamma_s)$. Therefore, since the length and energy functionals have the same critical points, and that d achieve its maximum at s_0 , we have that

$$0 = \frac{1}{2}E'(0) = \left\langle \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \right\rangle(1, 0) - \left\langle \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \right\rangle(0, 0) \quad (3.3)$$

and

$$0 \geq \frac{1}{2}E''(0) = I \left(\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial s} \right) + \left\langle \frac{D}{ds} \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \right\rangle(1, 0) - \left\langle \frac{D}{ds} \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \right\rangle(0, 0). \quad (3.4)$$

Here, I denotes the index form of $\gamma := \gamma_0$. For vector fields V and W along γ , it is defined as

$$I(V, W) = \int_0^1 \left(\left\langle \frac{DV}{dt}, \frac{DW}{dt} \right\rangle - \langle R(\dot{\gamma}, V)\dot{\gamma}, W \rangle \right) dt.$$

Note that the last term on the right-hand side of (3.4) is zero since $h(0, s) = x$ for all s . Furthermore, the middle term can be bounded from below:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \right\rangle (1, 0) &= \left\langle \frac{D}{ds} c'(s_0), \dot{\gamma}(1) \right\rangle \\ &\geq - \left| \frac{D}{ds} c'(s_0) \right| |\dot{\gamma}(1)| \\ &= - \left| \frac{D}{ds} c'(s_0) \right| d(s_0) \\ &\geq - \left| \frac{D}{ds} c'(s_0) \right| \rho. \end{aligned}$$

Therefore, (3.4) turns into the desired bound of $\left| \frac{D}{ds} c'(s_0) \right|$ in terms of $I = I(\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial s})$ and ρ .

We now turn to the second step of the proof. First of all, note that $J(t) := \frac{\partial h}{\partial s}(t, 0)$ is a Jacobi field along γ . Therefore, since $\rho < r_{\text{inj}}(M)$, we have that $J(t) \neq 0$ for all $t > 0$. Furthermore, (3.3) implies that $J(1)$ and $\dot{\gamma}(1)$ are orthogonal, since the last term on the right-hand side is zero, as noted previously. The same is then true of $J(t)$ and $\dot{\gamma}(t)$ for all t by standard results on Jacobi fields. Therefore, the index form simplifies slightly:

$$I = \int_0^1 (|\dot{J}|^2 - K(\dot{\gamma}, J) |J|^2 |\dot{\gamma}|^2) dt \geq \int_0^1 (|\dot{J}|^2 - K_0 d(s_0)^2 |J|^2) dt,$$

where $\dot{J} := \frac{D}{dt} J$.

However, we have that

$$|\dot{J}| |J| \geq |\langle \dot{J}, J \rangle| = |\dot{\gamma}| |(\text{Hess } \rho)(J, J)| = d(s_0) |(\text{Hess } \rho)(J, J)|,$$

where ρ is the distance function from x . Therefore, by the Hessian comparison theorem (see for example [GW79]) and the Rauch comparison theorem, we get that

$$\begin{aligned} I &\geq \int_0^1 (\cot^2(\sqrt{K_0} d(s_0) t) - 1) K_0 d(s_0)^2 |J(t)|^2 dt \\ &\geq |\dot{\Gamma}(s_0)|^2 \int_0^1 (\cot^2(\sqrt{K_0} d(s_0) t) - 1) \sin^2(\sqrt{K_0} d(s_0) t) dt \\ &= \frac{\sin(2\sqrt{K_0} d(s_0))}{2\sqrt{K_0} d(s_0)} |\dot{\Gamma}(s_0)|^2. \end{aligned}$$

But, using the Rauch comparison theorem again, we get

$$1 = |\dot{\Gamma}(s_0)| = |(d \exp_x)_{\tilde{\Gamma}(s_0)}(\dot{\Gamma}(s_0))| \leq \frac{\sinh(\sqrt{K_0} d(s_0))}{\sqrt{K_0} d(s_0)} |\dot{\Gamma}(s_0)|.$$

Therefore, this finally implies that

$$I \geq \frac{\sqrt{K_0}d(s_0) \sin(2\sqrt{K_0}d(s_0))}{2 \sinh^2(\sqrt{K_0}d(s_0))}.$$

However, the function $\tau \mapsto (\tau \sin(2\tau))/(2 \sinh^2(\tau))$ is positive and decreasing on $(0, \frac{\pi}{2})$. Therefore, if we take

$$\rho_1 := \min \left\{ r_0, \frac{\pi}{2\sqrt{K_0}} \right\} - \varepsilon$$

for any $\varepsilon > 0$ small enough, than we will have

$$I \geq \frac{\sqrt{K_0}\rho_1 \sin(2\sqrt{K_0}\rho_1)}{2 \sinh^2(\sqrt{K_0}\rho_1)} =: \alpha > 0,$$

which concludes the proof of the lemma. □

PROOF OF LEMMA 1.22: We suppose the contrary and get a contradiction as follows.

- (1) Since $D_\rho(s) \cap \Gamma([s - \varepsilon, s + \varepsilon]) \not\subseteq \partial D_\rho(s)$ for all $\varepsilon > 0$, there must exist a decreasing sequence $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ converging to 0 such that $\Gamma(s \pm \varepsilon_n) \in D_\rho(s)$ for all $n \geq 1$. By passing to a subsequence and changing the orientation of the parametrization Γ if needed, we may assume that $\Gamma(s + \varepsilon_n) \in D_\rho(s)$ for all $n \geq 1$.
- (2) Since Γ is parametrized by arclength, we have the inclusion $\Gamma((s, s + \varepsilon_n)) \subseteq B_{\rho + \varepsilon_n}(\gamma_s(\rho))$. We recall that $\gamma_s(\rho) = \exp_{\Gamma(s)}(\rho N(s))$, and N is the unit-length vector field along Γ which is orthogonal to $\dot{\Gamma}$ and pointing toward the interior of the topological disk $\overline{u(S_r)}$.
- (3) Suppose that for all $n \geq 1$, there exists $s_n \in (s, s + \varepsilon_n)$ such that

$$d_M(\gamma_s(\rho), \Gamma(s_n)) \geq \rho.$$

Note that $s_n \rightarrow s$, because $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Since $\Gamma|_{[s, s + \varepsilon_n]}$ respects the hypotheses of Lemma 1.19, we get

$$\begin{aligned} \left| \frac{D}{ds} \dot{\Gamma}(s) \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{D}{ds} \dot{\Gamma}(s_n) \right| \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\rho + \varepsilon_n} \\ &= \frac{\alpha}{\rho} \\ &> \Lambda, \end{aligned}$$

which is of course a contradiction. Therefore, it must be that $\Gamma([s, s + \varepsilon_n]) \subseteq D_\rho(s)$ for all $n \geq 1$.

(4) Note that s must be a critical point of the function d of Lemma 1.19 for $x = \gamma_s(\rho)$. Indeed, those correspond to the critical points of the energy functional along the variation $h(\tau, t) = \exp_{\gamma_s(\rho)}(\tau \tilde{\Gamma}(s+t))$, where $\exp_{\gamma_s(\rho)}(\tilde{\Gamma}(s+t)) = \Gamma(s+t)$. But, for such a variation,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}E'(0) &= \left\langle \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial \tau} \right\rangle (1, 0) \\ &= \left\langle \dot{\Gamma}(s), \frac{d}{d\tau} \exp_{\gamma_s(\rho)}(\tau \tilde{\Gamma}(s)) \Big|_{\tau=1} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\rho} \langle \dot{\Gamma}(s), -N(s) \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Indeed, the path $\tau \mapsto \exp_{\gamma_s(\rho)}(\tau \tilde{\Gamma}(s))$ is the unique minimizing geodesic of speed $|\tilde{\Gamma}(s)| = \rho$ from $\gamma_s(\rho)$ to $\Gamma(s)$. This is just γ_s parametrized in the opposite orientation and with a different speed.

Furthermore, the fact that $\Gamma([s, s + \varepsilon_n]) \subseteq D_\rho(s)$ for all $n \geq 1$ implies that d must have nonpositive second derivative at s . This in turn implies that $E''(0) \leq 0$. Therefore, all the proof of Lemma 1.19 still works, and we get a contradiction:

$$\left| \frac{D}{ds} \dot{\Gamma}(s) \right| \geq \frac{\alpha}{\rho} > \Lambda.$$

□

4. Badly-behaved sequences

We conclude this paper with examples of sequences of Lagrangian submanifolds. These sequences show that bounds of curvature type are needed to ensure convergence in the Hausdorff metric.

Consider the sequence of Hamiltonians $\{H_n(x, y) := \frac{1}{n} \sin(nx)\}_{n \geq 1}$ on the 2-torus $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2$. We equip the torus with the standard symplectic form ω_0 , the standard complex structure J_0 , and the flat metric $g_0 = g_{J_0}$. A quick calculation shows that the induced Hamiltonian flow of H_n is given by

$$\varphi_n^t(x, y) = (x, y + t \cos(nx)),$$

for all $t \geq 0$, $n \geq 1$ and $(x, y) \in \mathbb{T}^2$. We then set

$$L_0 := \{y = 0\} \quad \text{and} \quad L_n := \varphi_n^1(L_0) = \{y = \cos(nx)\}.$$

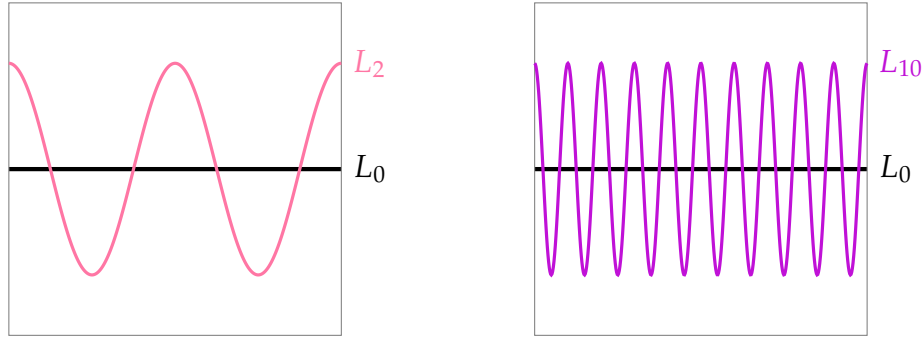


Figure 10. L_n as n gets larger

Note that $d_H(L_0, L_n) = \frac{2}{n}$, and thus L_n tends to L_0 in the Lagrangian Hofer metric. Indeed, $\frac{2}{n}$ is an upper bound of $d_H(L_0, L_n)$, since it is the oscillation of H_n . On the other hand, by Corollary 3.13 of [BC06], $d_H(L_0, L_n)$ is bounded from below by the area of a strip. However, it is clear that such a strip must have area at least $\frac{2}{n}$.

On the other hand, as Figure 10 suggests, L_n tends to the full band $\{-1 \leq y \leq 1\}$ in the Hausdorff metric δ_H induced by the flat metric. Therefore, even though the sequence converges in both metric, the limits are quite different. Actually, we have that $\delta_H(L_0, L_n) \equiv 1$.

The conjecture does not apply to this sequence of Lagrangian submanifolds, as the norm of the second fundamental form is clearly unbounded. Actually, a quick calculation gives that

$$\|B_{L_n}\| = \max_{p \in K_n} |\kappa(p)| = n,$$

where κ denotes the geodesic curvature.

Note that this example can easily be generalized to higher dimensional tori. Likewise, by multiplying H_n by a cutoff function, this example can be transposed to any symplectic manifold using a Darboux chart. Finally, since d_H bounds from above every other metric mentioned in the introduction, this problem applies to every known metric for which Theorem 1.A holds. In other words, this is a universal example.

However, it is possible to get a sequence of Lagrangian submanifolds with exploding curvature, but where limits in a J -adapted metric and the Hausdorff metric coincide. For example, one can do the analogous construction as above, but with Hamiltonians $G_n := \frac{1}{\sqrt{n}}H_n$. Indeed, the associated Hamiltonian flows are

$$\psi_n^t(x, y) = \left(x, y + \frac{t}{\sqrt{n}} \cos(nx) \right),$$

and we get the Lagrangian submanifolds

$$K_n := \psi_n^1(L_0) = \left\{ y = \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(nx) \right\}.$$

By arguments similar to the above, one gets $d_H(L_0, K_n) = 2n^{-3/2}$ and $\delta_H(L_0, K_n) = n^{-1/2}$. Therefore, K_n tends to L_0 in both the Lagrangian Hofer and the Hausdorff metric. However, it is easy to calculate that the maximum of the curvature of K_n is given by

$$\max_{p \in K_n} |\kappa(p)| = \sqrt{n}.$$

This, of course, tends to infinity as n tends to infinity.

REMARK 1.24: Note that, in the sequence $\{L_n\}$ above, not only does $\|B_{L_n}\|$ tends to infinity, but it is also impossible to uniformly tame the Lagrangian submanifolds in the sequence. Indeed, the distance between two successive zeroes of $y = \cos(nx)$ is $\frac{\pi}{n}$ in M , but is at least 2 in L_n . Therefore,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{x \neq y \in L_n} \frac{d_M(x, y)}{\min\{1, d_L(x, y)\}} = 0.$$

We expect this phenomenon to be general: when M is simply connected, control over the second fundamental form should give enough control over tameness for the proof of Theorem 1.4 to still work. It would then be possible to pass to the universal cover to get the desired result, just as we have done in the proof of Theorem 1.15.

In order to clarify our intuition, let us note that L being ε -tame is equivalent to the following condition: for all $x \in L$, and for all $y \in B_\varepsilon(x) \cap L$, we have that

$$d_M(x, y) \leq \frac{1}{\varepsilon} d_L(x, y). \quad (4.1)$$

It is quite clear that any type of bound on curvature cannot stop ε from being arbitrarily small at some point $x \in L$. On the hand, as Figure 9 from the previous section suggests, having this condition at every $x \in L$ should force a certain lower bound on $\|B_L\|$. Therefore, for any $L \in \mathcal{L}_\Lambda^*(M)$, there should be some $x \in L$ where the optimal epsilon appearing in (4.1) is bounded from below by some constant $e = e(K_0, r_0, \Lambda) > 0$. We could then apply Proposition 1.12 on some appropriate metric ball centered at this x ; the size of the ball would only depend on K_0 , r_0 , and Λ .

Deuxième article.

Hausdorff limits of submanifolds of symplectic and contact manifolds

par

Jean-Philippe Chassé¹

(¹) Université de Montréal, C.P. 6128,
Succ. Centre-Ville, Montréal, Qc, Canada, H3C 3J7

Cet article a été soumis dans *International Mathematics Research Notices*.

RÉSUMÉ. Nous étudions des suites d'immersions respectant certaines bornes provenant de la géométrie riemannienne et appliquons les résultats qui s'en suivent à l'étude de suites de certaines sous-variétés d'une variété symplectique ou de contact. Ceci nous permet d'étudier l'interaction subtile entre la métrique de Hausdorff et les métriques de Hofer lagrangienne et spectrale. Au passage, nous obtenons des preuves de versions métriques de la conjecture de la lagrangienne proche et de la conjecture de Viterbo sur la norme spectrale. Nous obtenons aussi des résultats de C^0 -rigidité pour une vaste classe de sous-variétés de variétés symplectiques et de contact en présence de bornes riemanniennes. De même, nous obtenons une généralisation lagrangienne de résultats de Hofer [Hof90] et de Viterbo [Vit92] sur les limites C^0 et Hofer/spectrale simultanées, et ce même lorsqu'aucune borne riemannienne n'est présente.

Mots clés : Topologie symplectique ; topologie de contact ; sous-variétés lagrangiennes ; distance de Hausdorff ; métriques riemanniennes

ABSTRACT. We study sequences of immersions respecting bounds coming from Riemannian geometry and apply the ensuing results to the study of sequences of submanifolds of symplectic and contact manifolds. This allows us to study the subtle interaction between the Hausdorff metric and the Lagrangian Hofer and spectral metrics. In the process, we get proofs of metric versions of the nearby Lagrangian conjecture and of the Viterbo conjecture on the spectral norm. We also get C^0 -rigidity results for a vast class of important submanifolds of symplectic and contact manifolds in the presence of Riemannian bounds. Likewise, we get a Lagrangian generalization of results of Hofer [Hof90] and Viterbo [Vit92] on simultaneous C^0 and Hofer/spectral limits — even without any such bounds.

Keywords: Symplectic topology ; contact topology ; Lagrangian submanifolds ; Hausdorff distance ; Riemannian metrics

1. Introduction

The main purpose of the present paper is to explore the relation between the Hausdorff metric and many of the metrics appearing in symplectic topology, e.g. the Lagrangian Hofer metric, the spectral metric and the recent shadow metrics of Biran, Cornea and Shelukhin [BCS21]. More precisely, we want to explore the topology that these metrics induce on a given collection of Lagrangian submanifolds of a fixed symplectic manifold. In other words, we are interested in studying how convergence of a sequence in one metric affects the behavior of this sequence in the other ones. The reasoning behind the introduction of the Hausdorff metric into the list of considered metrics is twofold:

- (1) Contrary to the other metrics, its properties are well-known and easy to derive.
- (2) It is defined on any choice of collection of (closed) Lagrangian submanifolds.

The second point is of particular interest to us, as the shadow metrics are for example defined on Lagrangian submanifolds which might not even be of the same homotopy type.

This exploration was started in the author's previous work [Cha21]. As noted in said work, there is however an obvious problem with introducing the Hausdorff metric: in full generality, there is no relation between the Hausdorff metric and the metrics coming from symplectic topology. Nonetheless, when one only consider sequences respecting certain bounds coming from an auxiliary Riemannian metric, the behavior on each side become intimately related. This is because such bounds essentially stop sequences from Hausdorff-converging to pathological spaces. It is however the hope that it does not greatly restrict the possible limits in the other metrics.

In our previous work, we studied sequences of Lagrangian submanifolds converging in some nice metrics coming from symplectic topology, and we proved that they must also converge in the Hausdorff metric. We now turn to the opposite problem: if we have a Hausdorff-converging sequence of Lagrangian submanifolds, what can we say of its behavior in those nice metrics coming from symplectic topology.

THEOREM 2.A: If $\{L_i\}$ is a Riemannianly-bounded sequence of exact Lagrangian submanifolds in T^*L which Hausdorff-converges to the image of the zero section, then L_i is the graph of a 1-form for i large enough.

The idea that such a statement should hold was first shared with us by Lalonde during a discussion regarding previous work. Note that we prove the statement for a slightly weaker hypothesis than convergence in the Hausdorff metric. This gives as a corollary metric versions of the nearby Lagrangian conjecture and of the Viterbo conjecture on the spectral metric, as we shall see below.

Furthermore, through a direct computation, this implies that $\{L_i\}$ also converges to L in the Lagrangian Hofer metric. Therefore, in the exact case, convergence in the Hausdorff metric is the same thing as convergence in a nice metric coming from symplectic topology when Riemannian bounds are present. Indeed, all known such metrics are bounded from above by the Lagrangian Hofer metric, and thus convergence in the later metric implies convergence in the other ones. This thus gives a complete characterization of a small-enough neighborhood of an exact Lagrangian submanifold in any of these nice metrics when Riemannian bounds are present: they are just graph deformations of the submanifold.

As we shall see below, the exactness condition on $\{L_i\}$ is necessary, as L_i could be a nontrivial covering over L without this condition. Note however that even without the exactness condition, there are still rigidity phenomena which are not present for non-Lagrangian submanifolds. Therefore, the present result is truly in the realm of symplectic topology.

We also analyze the type of possible limits that a Hausdorff-converging sequence of Lagrangian submanifolds might have. In particular, this allows us to even better understand limits in those nice metrics coming from symplectic topology when Riemannian bounds are imposed. We show that when Riemannian bounds are present, the limit must be the image of a Lagrangian immersion, although some regularity might be lost in the process. In fact, the techniques that we use there apply to not just Lagrangian submanifolds, but also a large class of important submanifolds of symplectic and contact manifolds.

THEOREM 2.B: Hausdorff limits of sequences of (co)isotropic submanifolds of a given symplectic or contact manifold — respecting appropriate Riemannian bounds — are C^1 -immersed (co)isotropic submanifolds. Furthermore, in the Lagrangian case, exactness, weak exactness and monotonicity are preserved in the limit when said limit is smoothly embedded.

We will also explore the possible Hausdorff limits with lighter Riemannian bounds, and even no Riemannian bounds at all. The later exploration is of particular interest to C^0 -symplectic topology, as it proposes a new possible definition of what a C^0 -Lagrangian submanifold should be.

1.1. Precise statements

Throughout the paper, we fix a complete Riemannian manifold (M, g) . We will consider immersions $f : N \looparrowright M$, where N is closed and connected. We denote by B_f its associated second fundamental form and by $\text{Vol}(f)$ the volume of N with respect to the metric f^*g . For $k \in \mathbb{N}$, $\Lambda \in [0, \infty)$, and $V \in (0, \infty)$, we consider $\mathcal{S}_k(\Lambda, V)$, the space of such immersions $f : N \looparrowright M$, where $\dim N = k$,

$$\|B_f\| \leq \Lambda, \quad \text{and} \quad \text{Vol}(f) \leq V.$$

In what follows, we will often take $M = T^*L$, where L is a closed connected Riemannian n -manifold, and T^*L is equipped with the associated Sasaki metric. Using this notation, we can give a precise statement for Theorem 2.A.

THEOREM 2.1: Let $\Lambda \geq 0$ and $V > 0$. Let $\{f_i : L_i \hookrightarrow T^*L\} \subseteq \mathcal{S}_n(\Lambda, V)$ be a sequence of exact Lagrangian embeddings. Suppose that $f_i(L_i)$ sits in the codisk bundle $D_{r_i}^*L$ of radius r_i and that $\{r_i\}$ tends to 0. Then, $f_i(L_i)$ is the graph of a 1-form for i large enough.

The main tool in the proof of this result is a theorem of Shen [She95] proving some sort of precompactness result for $\mathcal{S}_k(\Lambda, V)$. In fact, Shen's result proves that $\mathcal{S}_k(\Lambda, V)$ can be naturally compactified using $C^{1,\alpha}$ -immersions, for any $\alpha \in (0, 1)$. Together with the fact that the projection $f_i(L_i) \rightarrow L$ must be a homotopy equivalence [AK18], this gives Theorem 2.1.

The main application of this result is in proving metric versions of the nearby Lagrangian conjecture and of the Viterbo conjecture on the spectral norm.

COROLLARY 2.2: Let L be a closed connected Riemannian n -manifold. There exist constants $A = A(L) > 0$ and $R = R(L, \Lambda, V) > 0$ with the following property. Let L' be an exact

Lagrangian submanifold of the codisk bundle

$$D_R^*L := \{(x, v) \in T^*L \mid |v| \leq R\}$$

such that the inclusion $L' \hookrightarrow D_R^*L \hookrightarrow T^*L$ is in $\mathcal{S}_n(\Lambda, V)$. Then,

- (i) L' is Hamiltonian isotopic to the zero section;
- (ii) the spectral norm respects the inequality

$$\gamma(L, L') \leq A.$$

REMARK 2.3: We briefly review the advances made in proving both conjectures in full generality, i.e. without any Riemannian bounds.

- (1) The nearby Lagrangian conjecture, i.e. (i) in Corollary 2.2, is only known when L is S^1 (folklore), S^2 (follows from work of Hind [Hin04]), $\mathbb{R}P^2$ (follows from work of Hind, Pinsonnault, and Wu [HPW16]), and \mathbb{T}^2 (proved by Dimitroglou Rizell, Goodman and Ivrii [RGI16]). However, great advancement has been made in proving the conjecture in full generality. As noted before, it is known that the canonical projection $\pi : T^*L \rightarrow L$ must induce a simple homotopy equivalence $L' \rightarrow L$ [AK18]. Likewise, L' and L must be isomorphic objects in the Fukaya category of T^*L when L is spin [FSS08a, FSS08b, Nad09].
- (2) The Viterbo conjecture on the spectral norm, i.e. (ii) in Corollary 2.2, has recently been proven for a large class of nice manifolds by Shelukhin [She22b, She22a], and for another large class of manifolds by Viterbo [Vit22a], and Guillermou and Vichery [GV22], independently.

Another consequence of Theorem 2.1 is in completing the author's previous work on the equivalence of the topologies induced by various metrics on an appropriate space of Lagrangian submanifolds.

COROLLARY 2.4: Let λ be a Liouville form of the exact symplectic manifold M , and let $\{L_i \subseteq M\}$ be a sequence of λ -exact Lagrangian submanifolds such that the inclusions are in some fixed $\mathcal{S}_n(\Lambda, V)$. If $\{L_i\}$ Hausdorff-converges to a (smooth) λ -exact Lagrangian submanifold L_0 , then it also converges to L_0 in the Lagrangian Hofer metric d_H . In particular, it also converges to L_0 in the spectral norm and in any shadow metric.

In fact, as we shall see below, the exactness requirement on the limit is superfluous, as the Hausdorff limit of a sequence of λ -exact Lagrangian immersions is automatically itself exact for the same Liouville form.

In fact, Shen’s result allows us to explore sequences of other important type of submanifolds in symplectic and contact topology, not just Lagrangian ones. Indeed, since the result gives some sort of compactness in $C^{1,\alpha}$ -topology, $0 < \alpha < 1$, many of these properties are preserved in the limit. This leads to rigidity results similar in flavor to the celebrated theorem of Gromov and Eliashberg on the C^0 -closedness of the group of symplectomorphisms in the group of diffeomorphisms [Gro86, Eli87], but with the additional requirement of there being Riemannian bounds.

THEOREM 2.5: Let $\{f_i : L_i \hookrightarrow M\} \subseteq \mathcal{S}_k(\Lambda, V)$ be a sequence of Lagrangian (resp. isotropic, coisotropic, Legendrian, contact isotropic, or contact coisotropic) immersions. Suppose that $\{f_i(L_i)\}$ Hausdorff-converges to a closed subset N . Then, N is the image of a Lagrangian (resp. isotropic, coisotropic, Legendrian, contact isotropic, or contact coisotropic) $C^{1,\alpha}$ -immersion $f_0 : L_0 \hookrightarrow M$, where L_0 is closed and connected (and of dimension k).

Furthermore, if the f_i ’s are exact for some Liouville form λ , then there is a $C^{1,\alpha}$ -function $h_0 : L_0 \rightarrow \mathbb{R}$ such that $f^* \lambda = dh_0$.

Likewise, if the f_i ’s are weakly exact (resp. monotone with monotonicity constant $\rho > 0$), and f_0 is an embedding, then f_0 is weakly exact (resp. monotone with monotonicity constant ρ).

Note that, apart from the statement on weakly exact and monotone Lagrangian submanifolds, each element of Theorem 2.B has an equivalent statement for noncompact submanifolds — of possibly infinite volume. The precise details are given in Subsection 3.3.

REMARK 2.6: This theorem is related to previously-known C^0 -rigidity results.

- (1) This result can be viewed as having some similarity to Laudenbach and Sikorav’s result [LS94] on the C^0 -rigidity of Lagrangian embeddings (under some technical assumptions). This result was recently upgraded to general Lagrangian submanifolds and to a class of nice Legendrian submanifolds by Nakamura [Nak20]. The great improvement here is that we allow embeddings — and in fact, even immersions — of varying domains; the price to pay are bounds coming from Riemannian geometry. We will however see below that we can partially get rid on the volume bound, and we will show some C^0 -rigidity result without any type of Riemannian bounds.
- (2) Likewise, note that when f_i is the inclusion of the graph of some symplectomorphism $\psi_i : M \xrightarrow{\sim} M$, i.e. when $f_i(M)$ is a Lagrangian graph, then Hausdorff-convergence of $\{f_i(M) = \text{graph } \psi_i\}$ to $N = \text{graph } \psi$ is equivalent to C^0 -convergence of $\{\psi_i\}$ to ψ . Furthermore, uniform C^2 -bounds on $\{\psi_i\}$ implies the existence of

a C^1 -converging subsequence by the Arzela-Ascoli theorem, and thus the limit ψ is a C^1 -symplectomorphism. However, such bounds also implies that $\{f_i\}$ is in $\mathcal{I}_n(\Lambda, V)$ for some $\Lambda \geq 0$ and $V > 0$. Therefore, Theorem 2.5 can also be seen as a generalization of that simple fact.

We end this introduction by showcasing the previously-mentioned rigidity result without Riemannian bounds generalizing results of Hofer [Hof90] and Viterbo [Vit92] on simultaneous C^0 and Hofer/spectral limits.

THEOREM 2.7: Let $\{L_i\}$ be a sequence of closed connected Lagrangian submanifolds in a $2n$ -dimensional symplectic manifold M . Suppose the following:

- (1) The sequence Hausdorff-converges to a closed topological submanifold N of dimension at most n .
- (2) The sequence converges to some closed connected Lagrangian submanifold L_0 in a J -adapted metric $\hat{d}^{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}$ (c.f. [Cha21]) such that

$$\left(\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \right) \cap \left(\bigcup_{F' \in \mathcal{F}'} F' \right)$$

is totally disconnected, e.g. $\hat{d}^{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}$ is d_H or γ .

Then, $N = L_0$.

1.2. Organization of the paper

The rest of the paper is divided in two parts. The first one is mainly concerned with proving Theorem 2.1 and exploring the rigidity phenomenon underlying it. More precisely, we begin by studying sequences of not-necessarily-Lagrangian immersions which behave well in the codomain (Subsection 2.1), then we prove Theorem 2.1 (Subsection 2.2), and we end by showing that this is truly a Lagrangian phenomenon (Subsection 2.3). The second part is not only concerned with proving Theorem 2.5, but also with relating it to the author's previous work (Subsection 3.2), extending parts of it to the case $V = \infty$ (Subsection 3.3), and exploring rigidity phenomena beyond Riemannian bounds (Subsection 3.4).

1.3. Acknowledgments

This research is part of my PhD thesis and was financed by a NSERC and a FRQNT scholarship. I would like to thank my advisor, Octav Cornea, for his continued interest

in my research and for the many insightful discussions that we have had. I would also like to thank Sobhan Seyfaddini for his observations regarding C^0 -converging sequences of Hamiltonian diffeomorphisms. Finally, I am indebted to Dominique Rathel-Fournier for sharing his insight on coverings and pointing out to me Polterovich's construction of nontrivial Lagrangian coverings in the cotangent bundle of flat manifold.

2. Sequences of immersions

The focus of this section is the proof of Theorem 2.1 and the study of the rigidity of Lagrangian embeddings in general. We thus begin with a general study of sequences of immersions, then we apply this new knowledge to Lagrangian embeddings specifically, and finally explore how this is truly a Lagrangian phenomenon.

As mentioned above, we will make great use of Shen's result on sequences of immersions. Therefore, we thought that it could be useful for the reader to simply write the explicit statement here before moving on.

Theorem ([She95]). *Let $\{f_i : N_i \hookrightarrow M\}_{i \geq 1} \subseteq \mathcal{S}_k(\Lambda, V)$ be such that $\cup_i f_i(N_i)$ is contained in a compact subset of M . Let $0 < \alpha' < \alpha < 1$. Then, we have the following:*

- (i) *a subsequence, still denoted $\{f_i\}$;*
- (ii) *a closed connected smooth manifold N_0 ;*
- (iii) *a Riemannian metric g_0 on N_0 of class $C^{1,\alpha}$;*
- (iv) *an immersion $f_0 : N_0 \hookrightarrow M$ of class $C^{1,\alpha}$ with $f_0^*g = g_0$;*
- (v) *for each i large enough, a diffeomorphism $\varphi_i : N_0 \xrightarrow{\sim} N_i$ of class $C^{2,\alpha}$*

such that $\{f_i \circ \varphi_i\}$ converges in the $C^{1,\alpha'}$ topology to f_0 .

Essentially, this theorem is the appropriate generalization to (immersed) submanifolds of the Gromov–Hausdorff compactness theorem [GLP81, Kat85] for Riemannian manifolds with uniformly bounded sectional curvature and injectivity radius — the latter bound comes from the bound on the second fundamental form in the submanifold case.

2.1. Immersions with converging images

In this subsection, we use Shen's theorem to study sequences of immersions in $\mathcal{S}_k(\Lambda, V)$ which have images behaving well with respect to the Hausdorff metric of M .

For a closed connected submanifold N of M of dimension k and $r > 0$, denote by $B_r(N)$ its tubular neighborhood of size r . In this section, we will suppose that there is a sequence

$\{r_i\} \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ converging to 0 such that

$$f_i(N_i) \subseteq B_{r_i}(N) \quad \forall i. \quad (\dagger)$$

In other words, if we define for subsets $A, B \subseteq M$

$$s(A, B) := \sup_{x \in A} d_M(x, B) := \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d_M(x, y),$$

then Property (\dagger) is equivalent to $\lim_{i \rightarrow \infty} s(f_i(N_i), N) = 0$. Remember that the Hausdorff metric of M is given by $\delta_H(A, B) = \max\{s(A, B), s(B, A)\}$. Thus, this condition is *a priori* strictly weaker than Hausdorff convergence to N .

LEMMA 2.8: If Property (\dagger) holds, then $\{f_i(N_i)\}$ converges to N in the Hausdorff metric.

PROOF: Property (\dagger) implies that there exists a Hausdorff-converging subsequence $\{f_i(N_i)\}$ and that such a sequence must have as limit a subset $E \subseteq N$. On the other hand, there exists by Shen's theorem yet another subsequence $\{f_i\}$ which $C^{1, \alpha'}$ -converge to a $C^{1, \alpha}$ -immersion $f_0 : N_0 \hookrightarrow M$. We must then have $f_0(N_0) = N$. Indeed, we may see f_0 as an immersion into N . But by the inverse function theorem, this immersion is open. Since N_0 is compact, f_0 is also closed. Therefore, $E = f_0(N_0)$ is clopen; it must thus be equal to N .

Suppose now that $\{f_i(N_i)\}$ did not converge to N . Then we would have a subsequence $\{f_i(N_i)\}$ such that $s(N, f_i(N_i)) \geq \varepsilon$ for some $\varepsilon > 0$. We then get a contradiction by passing to a converging subsequence $\{f_i(N_i)\}$, since we have just proven that its Hausdorff limit must be N . \square

Lemma 2.8 allows us to prove the main technical result of this subsection.

PROPOSITION 2.9: Let $\{f_i : N_i \hookrightarrow M\} \subseteq \mathcal{S}_k(\Lambda, V)$ be such that Property (\dagger) holds. Denote by $\iota : N \hookrightarrow M$ the inclusion of the limit manifold. For all $\varepsilon > 0$, there exists $I \in \mathbb{N}$ such that if $i \geq I$, then there exists a covering $p_i : N_i \rightarrow N$ such that

$$d_{C^{1, \alpha'}}(f_i, \iota \circ p_i) < \varepsilon.$$

PROOF: Take a $C^{1, \alpha'}$ -converging subsequence $\{f_i\}$ — which exists by Shen's result — and denote by $f_0 : N_0 \hookrightarrow M$ its limit. By Lemma 2.8, the image of f_0 is N . We thus have the commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} N_0 & \xrightarrow{f_0} & M \\ \downarrow p & & \uparrow \iota \\ N & \xrightarrow{\iota} & M \end{array}$$

by inverting ι on the image of f_0 .

Note that p is a surjective submersion between compact spaces. Therefore, by Ehresmann's fibration theorem, p must be a locally trivial fibration. For dimensional reasons, p must thus be a covering. We can then take $p_i = p \circ \varphi_i^{-1}$, where $\varphi_i : N_0 \rightarrow N_i$ is a diffeomorphism.

This thus implies the result for any converging subsequence. Suppose that the statement is not true for the sequence $\{f_i\}$ itself. Then, we get a subsequence $\{f_i\}$ such that $d_{C^{1,\alpha'}}(f_i, \iota \circ p) \geq \varepsilon$ for some $\varepsilon > 0$ and for all coverings $N_i \rightarrow N$. Passing to a converging subsequence, we clearly get a contradiction. \square

REMARK 2.10: Of course, p — and thus p_i for i large — must be a diffeomorphism whenever N is simply connected. However, in full generality, it was pointed to us by Dominique Rathel-Fournier that it is entirely possible for p to be a covering — even in the nicest of cases. For example, one can consider the sequence of embeddings

$$\begin{aligned} f_i : \mathbb{T}^2 &\longrightarrow \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2 = T^*\mathbb{T}^2 \\ (\theta_1, \theta_2) &\mapsto \left(2\theta_1, \theta_2, \frac{1}{i} \cos \theta_1, \frac{1}{i} \sin \theta_1\right). \end{aligned}$$

Clearly, this is a sequence having Property (\dagger) for $N = \mathbb{T}^2 \times \{0\}$. Furthermore, a direct computation gives that this sequence is in $\mathcal{S}_2(1/\sqrt{5}, 4\sqrt{5}\pi^2)$. However, the associated map $p : N_0 \rightarrow N$ is the double cover $(\theta_1, \theta_2) \mapsto (2\theta_1, \theta_2)$.

2.2. Proof of Theorem 2.1

We now apply the above results to Lagrangian submanifolds and prove metric versions of the nearby Lagrangian conjecture and of the Viterbo conjecture on the spectral norm. Therefore, from now on, we suppose that $M = T^*L$ for some n -dimensional closed connected Riemannian manifold L . We equip T^*L with the standard symplectic form, almost complex structure and metric.

We need to prove the Theorem 2.1. Note that it gives us a proof of Corollary 2.2 right away; the proof of Corollary 2.4 will only be given in Subsection 3.1.

PROOF OF COROLLARY 2.2: Let $\{f_i\}$ be as in Theorem 2.1. Since $f_i(L_i)$ is an exact Lagrangian graph, it must be the graph of an exact 1-form dh_i . We take the vector field X_i defined via $\iota_{X_i}\omega = \beta\pi^*dh_i$, where β is a compactly supported bump function which is identically 1 on $B_{r_1}(L) = D_{r_1}^*L$. Here, $\pi : T^*L \rightarrow L$ denotes the canonical projection. Then, X_i generates a compactly supported Hamiltonian isotopy sending the zero section to $f_i(L_i)$.

The fact that $f_i(L_i)$ is a graph also implies that the Floer complex $CF(f_i(L_i), T_x^*L)$ has only one generator for any $x \in L$. In particular, its boundary depth is zero. Therefore, by work of Biran and Cornea [BC21], we also get $\gamma(L, f_i(L_i)) \leq A$. Here, A is the constant appearing in the work of Biran and Cornea associated to D_1^*L , which $f_i(N_i)$ is in for i large enough.

The proof concludes by contradiction: if a $R \leq 1$ as in the theorem did not exist, we would then have a sequence of exact Lagrangian embeddings respecting Property (†), but not respecting the conclusions of the theorem. This would be a contradiction with the above paragraph. \square

We now give a proof of Theorem 2.1.

PROOF OF THEOREM 2.1: By work of Abouzaid and Kragh [AK18], the composition $L_i \hookrightarrow T^*L \rightarrow L$ is a (simple) homotopy equivalence. In particular, it is an isomorphism on the fundamental group.

On the other hand, by Proposition 2.9, f_i must be transverse to every fiber for i large enough. Therefore, $\pi|_{f_i(L_i)}$ must be a covering onto L . However, by the above paragraph, the covering is trivial, i.e. $\pi|_{f_i(L_i)}$ is a diffeomorphism. Therefore, $f_i(L_i)$ must be the graph of a 1-form for i large enough. \square

REMARK 2.11:

- (1) The proof of Theorem 2.1 applies for any simply connected complete Riemannian manifold N . We then get that $f_i(N_i)$ is the graph of a section of the normal bundle of N in M . More generally, without any topological assumption on N , $f_i(N_i)$ admits a lift \tilde{N}_i in the normal bundle of N in f_0^*TM , and this lift is the graph of a section of that normal bundle. Note that this is true even when neither f_i nor the limit f_0 is an embedding.
- (2) As we have seen in Remark 2.10 however, Theorem 2.1 is not true for non-Lagrangian embeddings. In fact, Theorem 2.1 is typically not even true for *nonexact* Lagrangian submanifolds. Indeed, Polterovich [Pol90] constructed for any closed flat manifold $W \neq \mathbb{T}^n$ Lagrangian tori in T^*W having the property that the composition $\mathbb{T}^n \hookrightarrow T^*W \rightarrow W$ is a nontrivial cover. These tori can be realized as the image under the natural map $T^*\mathbb{T}^n \rightarrow T^*W$ of the graph of any constant 1-form on \mathbb{T}^n . Therefore, when we equip \mathbb{T}^n and W with the flat metric and their cotangent bundle with the corresponding Sasaki metric, the tori are totally geodesic, have the same volume as \mathbb{T}^n , and can be taken to be arbitrary close to the zero section of T^*W . In other words, we get a sequence of Lagrangian embeddings in

$\mathcal{S}_n(0, \text{Vol}(\mathbb{T}^n))$ converging in T^*W to a nontrivial covering of W . We will explore this kind of phenomenon in more details in the next subsection.

2.3. Rigidity of Lagrangian embeddings

As we are studying Riemannian and symplectic phenomena at the same time, it can be hard to parse what comes from the Riemannian bounds and what comes from the Lagrangian condition. In fact, it could *a priori* be the case that a result analogous to Theorem 2.1 exists for an appropriate class of non-Lagrangian submanifolds. Indeed, as noted in Remark 2.11, it seems that the exactness condition — not just the Lagrangian condition — is required for the result. In this subsection, we thus want to dispel the idea that this could be a non-Lagrangian phenomenon.

We begin by exploring some basic properties of Lagrangian embeddings.

PROPOSITION 2.12: Let $f : L' \hookrightarrow T^*L$ be a Lagrangian embedding such that $\pi \circ f : L' \rightarrow L$ is a finite covering. Then, $\pi \circ f$ is a diffeomorphism if and only if the first Betti numbers of L and L' are the same, i.e. $b_1(L') = b_1(L)$.

PROOF: One implication is of course trivial. Suppose therefore that $b_1(L') = b_1(L)$. Since $\pi \circ f$ is a finite covering, we know that $(\pi \circ f)^* : H^1(L; \mathbb{R}) \rightarrow H^1(L'; \mathbb{R})$ is injective. By the condition on the Betti numbers, it is thus an isomorphism.

Let $\sigma' := f^*\lambda$, where λ is the canonical 1-form on T^*L . Note that σ' is closed since f is Lagrangian. By the above paragraph, there exists a 1-form σ on L such that $(\pi \circ f)^*[\sigma] = [\sigma']$. Let $\{\psi_t\}$ be the symplectic isotopy generated by the vector field X defined by $\iota_X\omega = -\beta\pi^*\sigma$, where β is an appropriate bump function. We then have

$$[(\psi_1 \circ f)^*\lambda] = f^*[\lambda + \text{Flux}(\{\psi_t\})] = [\sigma'] - f^*\pi^*[\sigma] = 0,$$

i.e. $\psi_1 \circ f : L' \hookrightarrow T^*L$ is an exact Lagrangian embedding. As previously noted, $\pi \circ \psi_1 \circ f$ must then be an isomorphism on the fundamental group. Therefore, the same holds for $\pi \circ f = \pi \circ \psi_0 \circ f$; it must thus be a diffeomorphism. \square

Combining Propositions 2.9 and 2.12, we directly get the following result.

COROLLARY 2.13: Let L be a closed connected Riemannian manifold such that any finite covering $L' \rightarrow L$ is such that $b_1(L') = b_1(L)$, e.g. $\pi_1(L)$ is free, abelian free, or finite. Let $\Lambda \geq 0$ and $V > 0$. There exists $R > 0$ such that whenever $f \in \mathcal{S}_n(\Lambda, V)$ is a Lagrangian embedding with image in D_R^*L , then said image is symplectomorphic to the zero section.

Note that the equivalent result in the smooth category is entirely false, as we have seen in Remark 2.10 with the 2-torus. Therefore, the introduction of Riemannian bounds truly allows to capture some symplectic rigidity, even when just considering Hausdorff-converging sequences.

However, the rigidity goes further than this. Indeed, the main motivation behind the study of Hausdorff-converging sequences is its importance when studying sequences converging in metrics coming from symplectic topology (c.f. [Cha21]). Therefore, there is another rigidity question that crops up: does Theorem A of [Cha21] holds for non-Lagrangian submanifolds? Of course, such a question makes no sense for most metrics coming from symplectic topology. One exception to this rule is however the Hofer pseudometric [Che00], which makes sense for any submanifolds.

In other words, for a n -dimensional submanifold N of a $2n$ -dimensional symplectic manifold M , we can define

$$d_H(N, N') := \inf \{ \|\varphi\|_H \mid \varphi \in \text{Ham}(M), \varphi(N) = N' \},$$

whenever N' is Hamiltonian isotopic to N . Here, $\|\cdot\|_H$ denotes the Hofer norm. Let $\{N_i\}$ is a sequence of non-Lagrangian submanifolds converging in d_H to N_0 and such that the inclusion $N_n \hookrightarrow M$ is in $\mathcal{S}_n(\Lambda, V)$ for some Λ and V . Does $\{N_i\}$ behave like in the Lagrangian case, i.e. must $N_i \rightarrow N_0$ in δ_H ?

An obvious obstruction to that being the case is if d_H is degenerate on the Hamiltonian orbit of N . However, by work of Usher [Ush14], this is precisely the case whenever N is non-Lagrangian. In fact, $d_H(N, \cdot) \equiv 0$ whenever N is nowhere Lagrangian, i.e. $\omega|_{T_x N} \neq 0$ for all $x \in N$. Furthermore, the set of nowhere Lagrangian embeddings $N \hookrightarrow M$ is residual in the C^∞ topology and open in the C^2 topology whenever $n \geq 2$, i.e. whenever there are non-Lagrangian n -dimensional submanifolds. Therefore, d_H is generically very much degenerate in the non-Lagrangian case.

This thus shows that at every step of the process, introducing Riemannian bounds does not reduce the Lagrangian case to the general one, but rather shows some new type of symplectic rigidity.

REMARK 2.14: The submanifold N' such that $d_H(N, N') = 0$ that we find is in $\mathcal{S}_n(\Lambda', V')$ for some $\Lambda' \geq \Lambda$ and $V' \geq V$, but not necessarily in $\mathcal{S}_n(\Lambda, V)$. This flexibility in the choice of a constant is however necessary to study symplectic — and not Riemannian — rigidity phenomena. For example, $\mathcal{S}_n(0, V)$ is made out of totally geodesic submanifolds, and we should expect some very strong rigidity, whether N is Lagrangian or not.

3. Hausdorff limits of sequences of certain submanifolds

In this section, we prove rigidity results for sequences of certain submanifolds of symplectic and contact manifolds. These results are shown mostly in the presence of Riemannian bounds, but some still hold without their presence. We also use this opportunity to prove Corollary 2.4 and relate it to the author's previous work.

3.1. Proof of Theorem 2.5

In this subsection, we prove the various parts of Theorem 2.5. In order to make the presentation smoother, we however instead present it as a series of simpler results.

LEMMA 2.15: Let $\{f_i : L_i \looparrowright M\} \subseteq \mathcal{S}_k(\Lambda, V)$ be a sequence of isotropic immersions of a symplectic manifold (M, ω) or of a contact manifold (M, ξ) . Suppose that $\{f_i(L_i)\}$ Hausdorff-converges to a closed subset N . Then, N is the image of a k -dimensional isotropic $C^{1,\alpha}$ -immersion $f_0 : L_0 \looparrowright M$, where L_0 is closed and connected.

Note that we recover the Lagrangian case when M is symplectic and $k = \frac{1}{2} \dim M$, and the Legendrian case when M is contact and $k = \frac{1}{2}(\dim M - 1)$

PROOF: Suppose that M is symplectic. Passing to a subsequence, we have diffeomorphisms $\varphi_i : L_0 \xrightarrow{\sim} L_i$ such that $\{f_i \circ \varphi_i\}$ is $C^{1,\alpha'}$ -converging to a $C^{1,\alpha}$ -immersion $f_0 : L_0 \looparrowright M$, where L_0 is closed and connected. Since

$$\delta_H(f_i(L_i), f_0(L_0)) = \delta_H(f_i(\varphi_i(L_0)), f_0(L_0)) \leq d_{C^0}(f_i \circ \varphi_i, f_0),$$

the sequence $\{f_i(L_i)\}$ must also converge to $f_0(L_0)$. Therefore, we must have $f_0(L_0) = N$ since $f_0(L_0)$ is compact, and thus closed. Finally, $0 = f_i^* \omega$ converges in the $C^{0,\alpha'}$ -topology to $f_0^* \omega$. Therefore, $f_0^* \omega = 0$, and f_0 is isotropic.

Suppose now that M is contact with contact form α . Then, the proof is analogous to the symplectic case: it suffices to replace ω by α in the proof above. If M does not have a contact form, i.e. if ξ is not coorientable, every point p still has a neighborhood U_p onto which $\xi = \text{Ker } \alpha$. Since $\{f_i \circ \varphi_i\}$ and its first order derivatives uniformly converge to f_0 on all compact subsets of $f_0^{-1}(U_p)$, the same argument still works. \square

LEMMA 2.16: Let $\{f_i : L_i \looparrowright M\} \subseteq \mathcal{S}_{n+k}(\Lambda, V)$ be a sequence of coisotropic immersions of a $2n$ -dimensional symplectic manifold (M, ω) or of a co-oriented $(2n + 1)$ -dimensional contact manifold $(M, \xi = \text{Ker } \alpha)$. Suppose that $\{f_i(L_i)\}$ Hausdorff-converges to a closed subset N . Then, N is the image of a $(n + k)$ -dimensional coisotropic $C^{1,\alpha}$ -immersion $f_0 : L_0 \looparrowright M$, where L_0 is closed and connected.

We recall that $f : L \looparrowright M$ is (symplectic) coisotropic if $(f_*(T_x L))^\omega \subseteq f_*(T_x L)$ for all $x \in L$, where

$$V^\omega := \{w \in T_y M \mid \omega_y(w, v) = 0, \forall v \in V\}$$

is the symplectic complement of a vector space $V \subseteq T_y M$. Following Huang [Hua15], we then say that $f : L \looparrowright (M, \xi = \text{Ker } \alpha)$ is (contact) coisotropic if

$$(f_*(T_x L) \cap \xi_{f(x)})^{d\alpha} \subseteq f_*(T_x L) \cap \xi_{f(x)}$$

for all $x \in L$. Note that this definition depends only on ξ , not on the precise contact form α chosen.

PROOF: Suppose that M is symplectic. As in Lemma 2.15, we have $\{\varphi_i\}$ and $f_0 = \lim_{C^{1,\alpha'}} (f_i \circ \varphi_i)$ such that $f_0(L_0) = N$. Note that f_i being coisotropic is equivalent to $\sigma_i := (f_i \circ \varphi_i)^* \omega$ having kernel

$$\text{Ker } \sigma_{i,x} := \{v \in T_x L_0 \mid \sigma_{i,x}(v, w) = 0, \forall w \in T_x L_0\}$$

of dimension $n - k$ for all $x \in L_0$. As before, we have $C^{0,\alpha'}$ -convergence of $\{\sigma_i\}$ to the $C^{0,\alpha}$ -form $\sigma_0 = f_0^* \omega$. Since the rank of matrices is lower semicontinuous, we must have $\dim \text{Ker } \sigma_{0,x} \geq \dim \text{Ker } \sigma_{i,x} = n - k$ for all $x \in L_0$. However, since f_0 is an immersion and ω is nondegenerate, $\dim \text{Ker } \sigma_{0,x} \leq n - k$. Therefore, f_0 is coisotropic.

When M is contact, the proof is analogous, but the condition is instead that $\text{Ker } \sigma_{i,x}|_{\xi_{f_i(\varphi_i(x))}}$ has dimension $n - k$ for all $x \in L$. Since $\{f_i \circ \varphi_i\}$ converges to f_0 in the $C^{1,\alpha'}$ topology, the $2n$ -plane $\xi_{f_i(\varphi_i(x))}$ converges to $\xi_{f_0(x)}$. Therefore, the proof goes through as before. \square

REMARK 2.17: The proof of Lemma 2.16 showcases well why the equivalent statement for symplectic submanifolds — or contact submanifolds — does not hold: the limit immersion might develop some degeneracy. For example, a generic nonsymplectic perturbation of the zero section of T^*L will be symplectic, even though the zero section itself is of course Lagrangian.

We now go back to the symplectic isotropic case and show some additional rigidity when additional conditions are imposed on the immersions.

LEMMA 2.18: If the f_i 's of Lemma 2.15 are exact for some Liouville form λ on a symplectic manifold $(M, \omega = d\lambda)$, then the immersion $f_0 : L_0 \looparrowright M$ may be chosen so that there is a $C^{1,\alpha}$ function $h_0 : L_0 \rightarrow \mathbb{R}$ with $f_0^* \lambda = dh_0$.

PROOF: By hypothesis, each L_i has a function $h_i : L_i \rightarrow \mathbb{R}$ such that $f_i^* \lambda = dh_i$. These functions are unique up to a constant. Therefore, we may fix $x \in L_0$ and take h_i such that

$h_i(\varphi_i(x)) = 0$, where the φ_i 's are the diffeomorphisms of Shen's theorem. Take $f'_i := f_i \circ \varphi_i$ and $h'_i := h_i \circ \varphi_i$, so that $(f'_i)^* \lambda = dh'_i$. In particular, the first order derivatives of h'_i are uniformly $C^{0,\alpha'}$ -bounded. Furthermore, for any $y \in L_0$, we have that

$$\begin{aligned} |h'_i(y)| &= |h'_i(y) - h'_i(x)| \\ &= \left| \int_0^{d_{L_0}(x,y)} (dh'_i)_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) dt \right| \\ &\leq \|dh'_i\| \int_0^{d_{L_0}(x,y)} |\dot{\gamma}(t)| dt \\ &\leq \text{Diam}(L_0) \|dh'_i\|, \end{aligned}$$

where γ is a unit-speed minimizing geodesic segment from x to y , and $\|\cdot\|$ denotes here the supremum over L_0 of the operator norm. Since $\|dh'_i\|$ is uniformly bounded, the image of all h'_i 's is contained in some compact interval I . Therefore, $\{h_i\}$ is contained in a finite closed ball in $C^{1,\alpha'}(L_0, I)$ for $\alpha' < \alpha$. By compactness of this ball in the $C^{1,\alpha'}$ topology, we may pass to another subsequence which $C^{1,\alpha'}$ -converges to a $C^{1,\alpha}$ -function $h_0 : L_0 \rightarrow \mathbb{R}$. Taking the limit of $(f'_i)^* \lambda = dh'_i$ on both sides, we have the relation $f_0^* \lambda = dh_0$. \square

This proof shows the importance of working with Hölder spaces: if we only had uniform C^0 -bounds on dh'_i , then we would only know that h_0 is continuous, and that $\{h'_i\}$ uniformly converges to h_0 . In particular, the relation $f_0^* \lambda = dh_0$ would not necessarily hold.

We now turn our attention to sequences of weakly exact or monotone Lagrangian submanifolds. Contrary to what preceded, these results employ results from Section 2 in an essential way.

PROPOSITION 2.19: If the f_i 's of Lemma 2.15 are weakly exact Lagrangian embeddings or monotone Lagrangian embeddings with uniform monotonicity constant $\rho > 0$, then so is f_0 whenever it is an embedding.

PROOF: For ease of notation, we will identify $f_i(L_i)$ with L_i , $i \geq 0$, and see f_i simply as an inclusion. Suppose that the L_i 's are weakly exact. By Proposition 2.9, there are finite coverings $p_i : L_i \rightarrow L_0$ such that f_i may be $C^{1,\alpha'}$ -approximated by $f_0 \circ p_i$. In fact, by the proof of the proposition, we may pass to a subsequence so that the isomorphism type of p_i is constant. Let $u : \mathbb{D} \rightarrow M$ be a disk with boundary along L_0 and symplectic area $\omega(u)$.

Suppose that $\gamma := u|_{\partial\mathbb{D}=S^1}$ admits a lift $\tilde{\gamma}_i$ to L_i — since the isomorphism type of the covering is constant, this is independent of i . Let $v_i : S^1 \times [0, 1] \rightarrow M$ be a cylinder such $v_i|_{S^1 \times \{0\}} = \tilde{\gamma}_i$ and $v_i|_{S^1 \times \{1\}} = \gamma$ which is contained in the tubular neighborhood about L_0 of size $s(L_i, L_0)$. For example, we could take $v_i(t, s) = (1 - s)\tilde{\gamma}_i(t)$ in a Weinstein

neighborhood of L_0 . But then, the concatenation $v_i\#u$ is a disk with boundary in L_i , which implies that

$$0 = \omega(v_i\#u) = \omega(v_i) + \omega(u).$$

However, we have that $\omega(v_i) \rightarrow 0$. To see this, we could for example equip M with a metric which corresponds with the Sasaki metric on the previously-mentioned Weinstein neighborhood of L_0 . Then, we get $\omega(v_i) \leq \text{Area}(v_i)$, which obviously tends to 0. Therefore, we must have $\omega(u) = 0$.

If γ does not admit a lift, there is some $k \geq 2$ such that $\gamma^k = u^k|_{S^1}$ does. Indeed, $p_i : L_i \rightarrow L_0$ is a finite covering, and thus $p_*(\pi_1(L_i))$ has finite index. But then,

$$0 = \omega(u^k) = k\omega(u),$$

which gives the result.

Suppose now the L_i 's are monotone with uniform monotonicity constant $\rho > 0$, i.e. $\omega = \rho\mu$, where $\mu : \pi_2(M, L_i) \rightarrow \mathbb{Z}$ is the Maslov index of L_i . The proof then goes through similarly as before. Indeed, when there is a lift $\tilde{\gamma}_i$, then we must have $\mu(v_i\#u) = \mu(u)$. This is because $\mu(v)$ depends only on the homotopy class of the path $t \mapsto T_{v(e^{it})}L \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ in the Lagrangian Grassmannian. However, v_i gives precisely a homotopy from the path associated to u to the one associated to $v_i\#u$. Therefore, we have that

$$\rho\mu(u) = \rho\mu(v_i\#u) = \omega(v_i\#u) = \omega(v_i) + \omega(u).$$

This again gives the result since $\omega(v_i) \rightarrow 0$. When there is no lift, the result also follows similarly as before:

$$k\rho\mu(u) = \rho\mu(u^k) = \omega(u^k) = k\omega(u),$$

and $k > 0$. □

We now finally prove Corollary 2.4 while making use of the notation used so far.

PROOF: Using a Weinstein neighborhood, we may assume without loss of generality that L_i is an exact Lagrangian submanifold in T^*L_0 , and the f_i 's are simply inclusions. Then, L_i Hausdorff-converges to the zero section, and f_0 is the natural inclusion $L_0 \hookrightarrow T^*L_0$. By Theorem 2.1, L_i is the graph of some exact 1-form dh_i for i large enough.

Consider $H_i := \beta\pi^*h_i$, where $\pi : T^*L_0 \rightarrow L_0$ is the natural projection, and β is a bump function equal to 1 in some codisk bundle $D_r^*L_0$ containing all L_i for i large and equal to 0 outside some other codisk bundle $D_R^*L_0$. Then, the Hamiltonian diffeomorphism that it

generates sends L_0 to L_i . Therefore,

$$d_H(L_0, L_i) \leq \max_{x \in T^*L_0} H_i(x) - \min_{y \in T^*L_0} H_i(y) \leq \max_{x \in L_0} h_i(x) - \min_{y \in L_0} h_i(y)$$

by the definition of the Lagrangian Hofer metric. By compactness of L_0 , there are points $x_i, y_i \in L_0$ where h_i attains its maximum and minimum, respectively. We may then take a unit-speed minimizing geodesic γ_i from x to y . Then,

$$\begin{aligned} \max_{x \in L_0} h_i(x) - \min_{y \in L_0} h_i(y) &= \left| \int_0^{d_{L_0}(x_i, y_i)} (dh_i)_{\gamma_i(t)}(\dot{\gamma}_i(t)) dt \right| \\ &\leq \|dh_i\| \int_0^{d_{L_0}(x_i, y_i)} |\dot{\gamma}_i(t)| dt \\ &\leq \text{Diam}(L_0) \|dh_i\|. \end{aligned}$$

However, $\|dh_i\| = s(L_i, L_0)$ when T^*L_0 is equipped with the Sasaki metric, because $L_i = \text{graph } dh_i$. Since convergence in the Hausdorff metric is independent on the distance function, and since we know that $\delta_H(L_i, L_0) \rightarrow 0$ in some distance function, then $\|dh_i\| \rightarrow 0$. Therefore, $d_H(L_0, L_i) \rightarrow 0$. \square

REMARK 2.20:

- (1) Following Remark 2.11, there is an analogous statement for immersions if we instead consider L_0 in its normal bundle in f_0^*TM . Then, a neighborhood of L_0 can be identified with a neighborhood of the zero section of T^*L_0 using an ω -compatible almost complex structure.
- (2) In light of the rigidity of the Hofer metric for coisotropic submanifolds proved by Usher [Ush14], we expect that a similar result also holds for them under adequate conditions. Said conditions are however unclear for the time being.
- (3) Likewise, we expect a similar result for Legendrian submanifolds — or more generally contact coisotropic submanifolds — with the Shelukhin-Hofer pseudometric as defined by Rosen and Zhang [RZ20], based on work of Shelukhin [She17].
- (4) Note that that Lemma 2.4 implies that $\{f_i(L_i)\}$ also converges to L_0 in the spectral metric. However, we could have gotten this result directly from Corollary 2.2 via a rescaling argument *à la* Shelukhin [She22b].

3.2. The tame and bounded volume conditions

In this subsection, we explore the relation between the ε -tameness condition of the author's previous work [Cha21] and the condition of having bounded volume.

We recall that a submanifold N of a Riemannian manifold (M, g) is said to be ε -tame, $0 < \varepsilon \leq 1$, if

$$\frac{d_M(x, y)}{\min\{1, d_N(x, y)\}} \geq \varepsilon$$

for all $x \neq y \in N$. Here, d_M denotes the metric on M induced by the Riemannian metric g , whilst d_N denotes the metric on N induced by the restriction $g|_{TN}$ of g to N .

PROPOSITION 2.21: Take $\Lambda \geq 0$ and $\varepsilon \in (0, 1]$. Let $K \subseteq M$ be compact. There exists a constant $V = V(\Lambda, \varepsilon, k, K) > 0$ such that whenever N is a (closed connected) ε -tame k -dimensional submanifold in K with $\|B_N\| \leq \Lambda$, then the inclusion $N \hookrightarrow M$ is in $\mathcal{S}_k(\Lambda, V)$.

We leave the proof of the proposition for later and give an application of the result when combined with Theorem 2.5.

COROLLARY 2.22: Let $\hat{d}^{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}$ be a J -adapted metric such that

$$\left(\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \right) \cap \left(\bigcup_{F' \in \mathcal{F}'} F' \right)$$

is totally disconnected and which is bounded from above by the Lagrangian Hofer metric d_H . Then, for any compact $K \subseteq M$, $\hat{d}^{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}$ induces the same topology on $\mathcal{L}_{\Lambda, \varepsilon}^e(K)$ as the Hausdorff metric.

If $V > 0$, then the same result holds on the subset of $\mathcal{L}_{\Lambda, \varepsilon}^e(M)$ composed of Lagrangian submanifolds having volume bounded from above by V , whether M is compact or not.

We refer to the author's previous work for the precise definition of what a J -adapted metric is. Note however that the Lagrangian Hofer metric, the spectral metric, and all shadow metrics are J -adapted for all J . Here, $\mathcal{L}_{\Lambda, \varepsilon}^e(K)$ denotes the collection of all ε -tame exact Lagrangian submanifolds L of M contained in K and such that $\|B_L\| \leq \Lambda$.

PROOF: By the author's previous work [Cha21], every $\hat{d}^{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}$ -converging sequence in $\mathcal{L}_{\Lambda, \varepsilon}^e(M)$ also converges in the Hausdorff metric to the same limit. If we are given a volume bound $V > 0$, then every Hausdorff-converging sequence in the associated subset of $\mathcal{L}_{\Lambda, \varepsilon}^e(M)$ also converges in d_H to the same limit by Theorem 2.5. On $\mathcal{L}_{\Lambda, \varepsilon}^e(K)$, we automatically have a volume bound by Proposition 2.21. Since $\hat{d}^{\mathcal{F}, \mathcal{F}'} \leq d_H$ by hypothesis, this gives the result. \square

REMARK 2.23: Note that Corollary 2.22 implies that d_H is bounded on $\mathcal{L}_{\Lambda, \varepsilon}^e(D^*L)$. This is in stark contrast with the behavior of d_H on $\mathcal{L}^e(D^*L)$, i.e. without any Riemannian bounds, where it is expected to be unbounded [She22b]. Therefore, Hamiltonian diffeomorphisms

which moves a Lagrangian submanifold a lot in the Lagrangian Hofer metric must also greatly deform it.

Note that γ is however expected to be bounded on $\mathcal{L}^e(D^*L)$ — that is precisely the conjecture of Viterbo. It also follows from work of Biran and Cornea [BC21] that some fragmentation metrics are bounded on $\mathcal{L}^e(D^*L)$. It may thus be that $\mathcal{L}_{\Lambda,\varepsilon}^e(D^*L)$ better capture the topology in these metrics than in the Lagrangian Hofer metric.

We now give the proof of Proposition 2.21; it relies mostly on the Bishop–Gromov inequalities.

PROOF OF PROPOSITION 2.21: Note first that it suffices to bound the diameter of N . Indeed, the bound Λ on the second fundamental form, together with Gauss’ equation, gives an upper bound $\lambda = \lambda(\Lambda, K) \geq 0$ on the absolute value of the sectional curvature of N . Therefore, by the Bishop–Gromov inequality, we have that

$$\text{Vol}(B_r^N(x)) \leq \text{Vol}(B_r^{M^k(-\lambda)}(x')),$$

for any $x \in N$, any $x' \in M^k(-\lambda)$, and any $r > 0$. Here, $M^k(-\lambda)$ is the k -dimensional simply-connected space of constant sectional curvature $-\lambda$. In particular, we get

$$\text{Vol}(N) \leq \text{Vol}\left(B_{\text{Diam}(N)}^{M^k(-\lambda)}(x')\right) = \frac{2\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2})} \int_0^{\text{Diam}(N)} \left(\frac{\sinh(t\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}}\right)^{k-1} dt.$$

When $\lambda = 0$, the quotient $\sinh(t\sqrt{\lambda})/\sqrt{\lambda}$ should be interpreted as being equal to t . Since $\sinh t$ (or t) is increasing and nonnegative, an upper bound on $\text{Diam}(N)$ will thus indeed give an upper bound on $\text{Vol}(N)$.

We now bound the diameter of N . Note that by Shen’s work [She95], there exists $r_0 = r_0(\Lambda, K) > 0$ such that the injectivity radius $r_{\text{inj}}(N)$ of N respects $r_{\text{inj}}(N) \geq r_0$. Furthermore, since N is closed and connected, there exist $x, y \in N$ such that $d(x, y) = \text{Diam}(N) =: T$ and a unit-speed minimizing geodesic γ of N such that $\gamma(0) = x$ and $\gamma(T) = y$. Set $x_i := \gamma(i)$ for $i \in \{0, 1, \dots, \lfloor T \rfloor\}$. By the construction, we have that $d_N(x_i, x_j) \geq 1$ if $i \neq j$. Therefore, $d_M(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ by the tameness condition, i.e.

$$\bigsqcup_{i=1}^{\lfloor T \rfloor} B_\varepsilon^M(x_i) \subseteq B_\varepsilon^M(K),$$

and thus

$$\sum_{i=1}^{\lfloor T \rfloor} \text{Vol}\left(B_\varepsilon^M(x_i)\right) \leq \text{Vol}\left(B_\varepsilon^M(K)\right).$$

Taking $r := \min\{r_0, \varepsilon\}$, and using the other side of the volume comparison theorem, we get

$$\begin{aligned}
\text{Vol}(B_\varepsilon^M(K)) &\geq \sum_{i=1}^{\lfloor T \rfloor} \text{Vol}(B_\varepsilon^M(x_i)) \\
&\geq \sum_{i=1}^{\lfloor T \rfloor} \text{Vol}(B_r^M(x_i)) \\
&\geq \sum_{i=1}^{\lfloor T \rfloor} \text{Vol}(B_r^{M^{k(\lambda)}}(p')) \\
&= \frac{2\pi^{\frac{k}{2}} \lfloor T \rfloor}{\Gamma(\frac{k}{2})} \int_0^r \left(\frac{\sin(t\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}} \right)^{k-1} dt.
\end{aligned}$$

Since $\lfloor T \rfloor \geq T - 1$, this does give an upper bound on $T = \text{Diam}(N)$. □

REMARK 2.24:

- (1) When M is itself compact, then the dependence of the bound on K may be replaced by a dependence on the volume of M and on bounds on its sectional curvature and injectivity radius.
- (2) The bound is sharp when $\lambda = 0$, $r = \varepsilon$ and T is an integer, e.g. when N is a curve or an isometrically embedded flat torus with integer diameter.
- (3) A slicker proof exists given the existence of a volume comparison theorem for tubes about submanifolds, as we would then simply have

$$\text{Vol}(B_r^M(K)) \geq \text{Vol}(B_r^M(N)) \geq C(r, \Lambda, \varepsilon, k) \text{Vol}(N)$$

for any $r \in (0, s(C(N), N))$, where $C(N)$ is the cut locus of N . Indeed, as noted by Groman and Solomon [GS14], the tameness condition allows us to estimate $s(C(N), N)$. However, such a comparison theorem in full generality seems beyond the reach of current technology, although some particular cases are known (c.f. [Gra04]).

3.3. Limits in the absence of volume bounds

In this subsection we explain how a lot of the compactness results that we have presented in Subsection 3.1 still holds when $V = \infty$, i.e. without the presence of volume bounds. In what follows, $\mathcal{I}'_k(\Lambda, \infty; z_0)$ will denote the space of smooth pointed immersions $f : (N, x_0) \hookrightarrow (M, z_0)$ such that N is a — possibly noncompact — connected

k -dimensional manifold without boundary, and $\|B_f\| \leq \Lambda$. Furthermore, if N is noncompact and g is the Riemannian metric of M , we then ask that (N, f^*g) be complete.

The techniques that we will use are based on a pointed version of Shen's theorem, which also follows Shen's work. A similar result also follows from results from Smith [Smi07]. For ease of presentation, we give an explicit statement.

Theorem ([She95, Smi07]). *Let $\{f_i : (N_i, x_i) \looparrowright (M, z_0)\}_{i \geq 1} \subseteq \mathcal{S}'_k(\Lambda, \infty; z_0)$. Let $0 < \alpha' < \alpha < 1$. Then, we have the following:*

- (i) *a subsequence, still denoted $\{f_i\}$;*
- (ii) *a connected k -dimensional pointed smooth manifold without boundary (N_0, x_0) ;*
- (iii) *a complete Riemannian metric g_0 on N_0 of class $C_{\text{loc}}^{1,\alpha}$;*
- (iv) *an immersion $f_0 : (N_0, x_0) \looparrowright (M, z_0)$ of class $C_{\text{loc}}^{1,\alpha}$ with $f_0^*g = g_0$;*
- (v) *for each i , a map $\varphi_i : (N_0, x_0) \rightarrow (N_i, x_i)$ of class $C_{\text{loc}}^{2,\alpha}$*

such that for all compact neighborhood K of z_0 ,

- (I) *$\varphi_i|_K$ is a diffeomorphism onto its image for i large enough;*
- (II) *$\{f_i \circ \varphi_i|_K\}$ converges in the $C^{1,\alpha'}$ topology to $f_0|_K$.*

Using this theorem, we can now prove the following generalization of some results of Subsection 3.1.

COROLLARY 2.25: The results of Lemmata 2.15 and 2.16 still holds, with $\overline{f_0(L_0)} = N$ instead, even if $V = \infty$ and the L_i 's are noncompact. The result of Lemma 2.18 also still holds, but h_0 is instead in $C_{\text{loc}}^{1,\alpha}$.

For the proof, we will need a small technical construction, whose proof we leave to the end of this subsection.

PROPOSITION 2.26: Let M be a symplectic manifold, and take a sequence $\{x_i\} \subseteq M$ converging to $x_0 \in M$. Then, there exists a sequence of Hamiltonian diffeomorphisms with compact support $\{\psi_i\}$ converging in the C^2 -topology to the identity and such that $\psi_i(x_i) = x_0$. There is an analogous result for contactomorphisms when M is a contact manifold.

PROOF OF COROLLARY 2.25: Suppose that $\{f_i : L_i \looparrowright M\}$ is a sequence of isotropic or coisotropic immersions such that $\{f_i(L_i)\}$ Hausdorff-converges to N . Take $z_0 \in N$. By Hausdorff-convergence, for each i , there is $y_i \in f_i(L_i)$ such that $\lim y_i = z_0$. By Proposition 2.26, there is a sequence of symplectomorphisms or contactomorphisms $\{\psi_i\}$ which C^2 -converges to the identity and such that $\psi_i(y_i) = z_0$.

We take $x_i \in f_i^{-1}(y_i)$ and $f'_i := \psi_i \circ f_i$. Then, C^2 -convergence insures that $\{f'_i : (L_i, x_i) \rightarrow (M, z_0)\} \subseteq \mathcal{S}'_k(\Lambda', \infty; z_0)$ for some $\Lambda' \geq \Lambda$. The rest of the proofs of the lemmata then goes through as before, except that we instead use the pointed version of Shen's theorem. This works because each point of N_0 is contained in *some* compact neighborhood of x_0 , and being (exact) (co)isotropic is a local condition about that point. We only get $\overline{f_0(L_0)} = N$, because $f_0(L_0)$ might not be closed if L_0 is noncompact. \square

REMARK 2.27: The proof of Proposition 2.19 relies in an essential way on the fact that there is a covering $L_i \rightarrow L_0$, i.e. Proposition 2.9. The proof of that relies on applying Ehresmann's fibration theorem to $p = \iota^{-1} \circ f_0 : L_0 \rightarrow L$, which requires p to be proper. When L_0 is compact, this is of course automatic, but not in the noncompact case. For example, we could modify the example in Remark 2.10 to get

$$\begin{aligned} f_i: \mathbb{T}^2 &\longrightarrow \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2 = T^*\mathbb{T}^2 \\ (\theta_1, \theta_2) &\mapsto \left(i\theta_1, \theta_2, \frac{1}{i} \cos \theta_1, \frac{1}{i} \sin \theta_1\right). \end{aligned}$$

This gives in the limit a map $f_0 : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow T^*\mathbb{T}^2$ such that the corresponding p is not proper. Note that f_0 is nonetheless a covering. We expect that to still be the case whenever the L_i 's are closed manifold; one can however easily make counterexamples when they are not.

PROOF OF PROPOSITION 2.26: We begin with the case where M is symplectic. Let $\varphi : U \rightarrow B_\delta^{2n}(0) \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ be a Darboux chart centered at x_0 . Take a rotation-invariant bump function $\beta : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow [0, 1]$ with support in $B_{\delta'}^{2n}(0)$ and such that $\beta|_{B_{\delta'}^{2n}(0)} \equiv 1$ for some $\delta' \in (0, \delta)$. We fix $u \in \mathbb{R}^{2n}$ with $|u| = 1$, and consider the Hamiltonian on \mathbb{R}^{2n}

$$H(v) := \beta(v)\omega_0(v, u),$$

where ω_0 is the standard symplectic form on \mathbb{R}^{2n} . The Hamiltonian isotopy $\{\psi_t\}$ that it generates is such that $\psi_t(v) = v - tu$ whenever $|v - su| < \delta'$ for all $s \leq t$.

Note that for i large enough, not only is x_i in U , but also $\varphi(x_i) \in B_{\delta'}^{2n}(0)$. Suppose that we have such i . Let R_i be a unitary transformation sending $\varphi(x_i)$ to $|\varphi(x_i)|u$, and define a Hamiltonian H_i on M by

$$H_i(x) := \begin{cases} |\varphi(x_i)|H(R_i\varphi(x)) & \text{if } x \in U; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Let $\{\psi_t^i\}$ be the Hamiltonian isotopy that it generates. A direct computation gives that $\varphi(\psi_t^i(x)) = R_i^{-1}\psi_{|\varphi(x_i)|t}(R_i\varphi(x))$ whenever $x \in U$. In particular, $\psi_1^i(x_i) = x_0$. Since

$\psi_i := \psi_1^i$ is the identity outside U , it also follows from this relation that the sequence $\{\psi_i\}$ converges to $\mathbb{1}_M$ in C^2 -topology.

The case when M is contact is quite similar. Indeed, we can still take a Darboux chart φ centered at x_0 , and consider the contact Hamiltonian

$$H(v) := \beta(v)(d\alpha_0)(v, u),$$

where β is a bump function with support in $B_\delta^{2n+1}(0)$, α_0 is the standard contact form on \mathbb{R}^{2n+1} , and $u \in \mathbb{R}^{2n} \times \{0\}$ is unitary. The contact isotopy $\{\psi_t^H\}$ is quite similar to what we had in the symplectic case: if we write $u = (x_i^0, y_i^0, 0)_{1 \leq i \leq n}$, then

$$\psi_t^H(x_i, y_i, z) = \left(x_i - tx_i^0, y_i - ty_i^0, z + \sum_i \left(\frac{x_i^0 y_i^0}{2} t - y_i^0 x_i \right) t \right)$$

whenever $v = (x_i, y_i, z) \in B_{\delta'}^{2n+1}(0)$. Therefore, for any $z^0 \in \mathbb{R}$, we get that

$$\left(\psi_{z^0 + \frac{1}{2} \sum_i x_i^0 y_i^0}^\beta \circ \psi_1^H \right) (x_i^0, y_i^0, z^0) = 0$$

if $(x_i^0, y_i^0, z^0) \in B_{\delta'}^{2n+1}(0)$. The rest of the argument is then completely analogous to the symplectic case. \square

REMARK 2.28: The construction in the symplectic case actually gives a sequence which also converges to the identity in the Hofer norm. Indeed, in the symplectic case, we have that

$$\begin{aligned} \|\psi_i\|_H &\leq \int_0^1 \left(\max_{x \in M} H_i(x) - \min_{x \in M} H_i(x) \right) dt \\ &= |\varphi(x_i)| \left(\max_{|v| \leq \delta} H(v) - \min_{|v| \leq \delta} H(v) \right) \\ &\leq 2\delta |\varphi(x_i)| \end{aligned}$$

which of course tends to 0.

Likewise, if M is a contact manifold admitting a contact form α , then the same argument implies that $\{\psi_i\}$ converges to the identity in the Shelukhin-Hofer norm associated to α [She17].

3.4. Limits in the absence of any Riemannian bounds

We now prove Theorem 2.7, which does show that there is some rigidity for sequences of Lagrangian submanifolds, even when no Riemannian bounds are put on such sequence. This proves that there exists some rigidity for the Hausdorff metric between Lagrangian submanifolds in full generality.

Seeing this from the other way around, this implies that $\hat{d}^{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}$ -converging sequences either behave like those which are geometrically bounded — although they may not themselves be geometrically bounded (c.f. [Cha21]) — or they Hausdorff-converge to a fairly pathological space. This is thus a good step in the direction of a truly symplectic characterization of “nicely-behaved sequences” of Lagrangian submanifolds.

Furthermore, this indicates that it makes sense to talk of C^0 -Lagrangian submanifolds as n -dimensional topological submanifolds L of M which are the Hausdorff limit of a sequence of smooth Lagrangian submanifolds $\{L_i\}$ such that the sequence $\{L_i\}$ is also Cauchy in a nice J -adapted metric $\hat{d}^{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}$. Note that a sequence of maps $\{\psi_i\}$ C^0 -converge to a map ψ if and only if the sequence of graphs $\{\text{graph } \psi_i\}$ Hausdorff-converge to graph ψ [Wat76]. Therefore, graphs of homeomorphisms [OM07] are C^0 -Lagrangians in our sense for $\hat{d}^{\mathcal{F}, \mathcal{F}'} = d_H$. However, Oh and Müller’s definition is *a priori* stronger than ours in the sense that there may be Lagrangian graphs of homeomorphisms which are not homeomorphisms. Instead, they would be graphs of homeomorphisms obtained as limits of Hamiltonian diffeomorphisms in what they call the weak Hamiltonian topology. On top of that, there could be graphs of C^0 -limits of non-Hamiltonian symplectomorphisms when $\hat{d}^{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}$ can compare non-Hamiltonian diffeomorphic Lagrangian submanifolds.

Likewise, it is unclear how this definition of C^0 -Lagrangian submanifolds relate to the definition of Humilière, Leclercq, and Seyfaddini [HLS15]. Indeed, our definition is global whilst theirs is local, which makes a direct comparison hard. Likewise, yet another definition of C^0 -Lagrangian submanifold as been proposed very recently by Viterbo [Vit22b] using sheaves.

Finally, it was pointed out to us by Seyfaddini that this can be seen as a generalization of results of Hofer [Hof90] and Viterbo [Vit92] saying that if a sequence of Hamiltonian diffeomorphisms $\{\psi_i\}$ is such that

- (1) $\psi_i \xrightarrow{C^0} \varphi$;
- (2) $\psi_i \xrightarrow{\|\cdot\|_H} \psi$ or $\psi_i \xrightarrow{\gamma} \psi$,

then $\psi = \varphi$. As noted before, (1) here is equivalent to (1) in Theorem 2.7 with $L_i = \text{graph } \psi_i$. However, the two versions of (2) are *a priori* entirely independent. Indeed, the Hofer and spectral norms on Hamiltonian diffeomorphisms have notoriously different behavior than the Hofer and spectral norms on their graph (c.f. [Ost03]). These differences are however on the large scale geometry of the metrics; this indicates that the local behavior are similar.

PROOF OF THEOREM 2.7: First of all, note that N is connected since all L_i are. By the author's previous work [Cha21], we have a constant $C = C(L_0)$ such that

$$C_S \left(L_0, L_i \cup \left[\left(\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \right) \cap \left(\bigcup_{F' \in \mathcal{F}'} F' \right) \right] \right) \leq \hat{d}_{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}(L_0, L_i) \quad (\star)$$

for i large. Therefore, L_0 is contained in $N \cup ((\cup F) \cap (\cup F'))$. Since $(\cup F) \cap (\cup F')$ is totally disconnected, L_0 must thus be contained in N . Since L_0 is compact, it is a closed subset of N . But since L_0 and N are both submanifolds of M , we must have $m = n$, and L_0 must be an open subset of N . Therefore, by connectedness, $N = L_0$. \square

REMARK 2.29: Note that the technical upgrade of Sikorav's version of the monotonicity lemma [Sik94] proven in the paper cited above is not necessary here. Since the constant C only needs to depend on L_0 — and not on metric invariants of L_0 — Inequality (\star) also follows from applying Sikorav's monotonicity lemma on a small-enough metric ball centered at a point of L_0 . The rest of the proof of the inequality is then the same as before.

Conclusion

Dans le premier article, nous avons démontré que des bornes riemanniennes étaient suffisantes pour borner inférieurement plusieurs métriques de nature symplectique par la métrique de Hausdorff, alors que dans le second article, nous avons démontré l'existence d'une borne supérieure par la métrique de Hausdorff dans le cas exact. En quelque sorte, ceci complète la preuve de l'équivalence de toutes ces métriques, un résultat encore plus fort que la conjecture originale de Cornea présentée dans l'introduction du premier article. Ce résultat promet néanmoins divers raffinements et explorations futures possibles.

Tout d'abord, il semble possible d'améliorer les bornes riemanniennes utilisées. Plus précisément, il nous semble que la contrainte d'être ε -dominée dans le premier article et d'avoir volume borné dans le second sont des contraintes imposées par les techniques utilisées, plutôt que de vraies conditions nécessaires à l'équivalence des métriques. De fait, il semble impossible de trouver des suites de sous-variétés lagrangiennes ayant seconde forme fondamentale bornée, ne respectant pas les autres conditions riemanniennes et ne respectant pas les conclusions des théorèmes 1.A et 2.A. De plus, dans le cas exact, il nous semblerait qu'une suite convergeant vers une sous-variété lagrangienne plongée soit automatiquement ε -dominée et de volume borné.

Explorer les suites de sous-variétés lagrangiennes non-exactes dans la métrique de Hausdorff serait également intéressant. Nous avons démontré dans la proposition 2.12 que le fait qu'une suite de sous-variétés lagrangiennes tende vers un revêtement imposait des contraintes non-triviales sur le type homotopique des éléments de ladite suite (qui se stabilise par le théorème de Shen). Ceci permet donc de traiter plusieurs situations de suites de sous-variétés lagrangiennes non-exactes. Cependant, tendre vers un revêtement reste une éventualité. Dans ce cas, se peut-il qu'il y ait toujours une inégalité pour certaines métriques ou est-ce qu'une telle situation assure que les éléments de la suite sont à distance infinie de leur limite de Hausdorff? Bien que les métriques de Hofer lagrangienne et spectrale seront nécessairement infinies, ceci est loin d'être clair pour les métriques d'ombre ou, plus généralement, les métriques de fragmentation.

Ensuite, comme démontré par le théorème 2.7, la métrique de Hausdorff représente un bon outil pour explorer la complétion d'une collection de sous-variétés lagrangiennes $\mathcal{L}^*(M)$ dans plusieurs métriques provenant de la topologie symplectique. Or, nous avons développé dans cette thèse une très bonne connaissance des limites de suites respectant des bornes riemanniennes et nous avons vu dans la section 4 du premier article que des limites de suites ne respectant pas de telles bornes sont parfois aussi des limites de suites bornées riemanniennement. Il serait donc intéressant de savoir si tous les éléments de la complétion de $\mathcal{L}^*(M)$ sont des limites de suites ici étudiées (du moins lorsqu'elles sont des variétés $C^{1,\alpha}$) et, si ce n'est pas le cas, s'il y a des invariants symplectiques permettant de différencier les divers types de limite. Cette question s'étend même naturellement aux sous-variétés coisotropes (respectivement contact coisotropes) puisque la métrique de Hofer (respectivement métrique de Shelukhin-Hofer) est alors aussi non-dégénérée (respectivement conjecturalement non-dégénérée).

Finalement, cette thèse propose une toute nouvelle approche pour l'exploration de plusieurs métriques sur une collection de sous-variétés lagrangiennes en s'intéressant à l'intersection de la topologie symplectique et de la géométrie riemannienne. La question reste quant à savoir jusqu'à quel point cette intersection peut être poussée afin d'obtenir de nouveaux résultats en topologie symplectique. Effectivement, cette nouvelle approche semble être prometteuse pour améliorer notre compréhension de plusieurs conjectures du domaine, où très peu est connu en général.

Index

- A_∞ -catégorie, 38
 - plongement de Yoneda, 40
- J -adapted
 - J -adapted metric, 76, 81
 - J -adapted pseudometric, 75, 80
- J -adapté
 - métrique J -adaptée, 76, 81
 - pseudométrie J -adaptée, 75, 80
- ε -dominé, 73, 124
- ε -tame, 73, 124

- bande de Floer, 27

- carte de Darboux, 19
 - en topologie de contact, 53
- catégorie de Donaldson, 36
- catégorie de Fukaya, 38
- catégorie de persistance, 46
 - catégorie de persistance triangulée, 47
 - décomposition en cônes, 49
 - triangle exact, 48
- catégorie dérivée de Fukaya, 39
- champ de Jacobi, 63
- champ de Reeb, 54
- cobordisme lagrangien, 43
 - ombre, 44
 - silhouette, 44
- connexion affine, 56
 - connexion de Levi-Civita, 57
 - dérivée covariante, 60
- contactomorphisme, 53
 - contactomorphisme hamiltonien, 54
- convexité géodésique, 66
- corps de Novikov, 27
- courbe J -holomorphe, 24
 - énergie, 27
 - équation de Floer, 27
- courbure sectionnelle, 57

- difféomorphisme hamiltonien, 20

- exponentielle riemannienne, 62

- foncteur de transfert, 47
- fonction de distance, 65
- forme de Liouville, 18

- géodésique, 61
 - géodésique minimisante, 66

- hamiltonien
 - corde, 27
 - corde capuchonnée, 27
- homologie de Floer
 - homologie de Floer d'une lagrangienne, 31
 - homologie de Floer d'une paire de lagrangienne, 34

- indice de Conley-Zehnder, 27

indice de Maslov, 22
 indice d'une sous-variété lagrangienne, 23
 invariant spectral, 42
 inégalité isopérimétrique, 83

 lemme de monotonie, 85, 91
 longueur d'un chemin, 65

 métrique d'ombre, 45, 75
 pseudométrie d'ombre, 45
 métrique de Haudorff, 68
 métrique de Hofer lagrangienne, 41, 75
 généralisation non-lagrangienne, 118
 métrique de Shelukhin-Hofer
 norme de Shelukhin-Hofer, 129
 métrique riemannienne, 55
 métrique spectrale, 43, 75
 métrique spectral externe, 75

 norme de Hofer, 41

 point conjugué, 63
 polygone
 bande de Floer, 27
 carré de Floer, 37
 polygone J -holomorphe, 80
 polygone de Floer, 38
 polygone passant par un point, 80
 triangle de Floer, 35
 pseudométrie de fragmentation, 49, 75
 pseudométrie de fragmentation algébrique, 75
 pseudométrie de Shelukhin-Hofer, 123

 rayon d'injectivité, 62
 rayon de convexité, 66

 seconde forme fondamentale, 58, 73, 110
 norme de la seconde forme fondamentale, 59, 73
 sous-variété coisotrope, 20
 sous-variété coisotrope immergée, 21
 sous-variété contact coisotrope, 120
 sous-variété contact isotrope, 54
 sous-variété isotrope, 20
 sous-variété isotrope immergée, 21
 sous-variété lagrangienne, 20
 cobordisme lagrangien, 43
 sous-variété lagrangienne exacte, 21, 74
 sous-variété lagrangienne faiblement exacte, 21, 74
 sous-variété lagrangienne immergée, 21
 sous-variété lagrangienne monotone, 23, 74
 sous-variété legendrienne, 54
 sous-variété totalement géodésique, 59
 structure presque complexe, 24
 structure compatible, 24
 symplectomorphisme, 19

 tenseur de courbure de Riemann, 57
 transport parallèle, 60

 variété de contact, 52
 forme de contact, 52
 variété plate, 58
 variété riemannienne, 55
 variété riemannienne complète, 66
 variété symplectique, 18
 variété convexe à l'infini, 25
 variété de Liouville, 25
 variété symplectique exacte, 18
 variété symplectique monotone, 23
 voisinage de Weinstein, 22
 volume, 110

Références bibliographiques

- [Abo12] M. Abouzaid. Nearby Lagrangians with vanishing Maslov class are homotopy equivalent. *Inventiones Mathematicæ*, 189(2):251–313, 2012.
- [AK18] M. Abouzaid and T. Kragh. Simple homotopy equivalence of nearby Lagrangians. *Acta Mathematica*, 220(2):207–237, 2018.
- [Alb10] P. Albers. A Lagrangian Piunikhin–Salamon–Schwarz morphism and two comparison homomorphisms in Floer homology. *International Mathematics Research Notices*, 2008, 2010.
- [Arn80] V.I. Arnol’d. Lagrange and Legendre cobordisms. I. *Functional Analysis and Its Applications*, 14(3):167–177, 1980.
- [BC06] J.-F. Barraud and O. Cornea. Homotopical dynamics in symplectic topology. In *Morse theoretical methods in non-linear analysis and symplectic topology*, volume 217 of *NATO science series, II*, pages 109–148. Springer, 2006.
- [BC09] P. Biran and O. Cornea. Quantum structures for Lagrangian submanifolds. In M. Abreu, F. Lalonde, and L. Polterovich, editors, *New Perspectives and Challenges in Symplectic Field Theory*, volume 49 of *CRM Proceedings and Lecture Notes*, pages 1–44. American Mathematical Society, 2009.
- [BC13] P. Biran and O. Cornea. Lagrangian cobordism. I. *Journal of the American Mathematical Society*, 26(2):295–340, 2013.
- [BC21] P. Biran and O. Cornea. A Lagrangian pictionary. *Kyoto Journal of Mathematics*, 61(2):399–493, 2021.
- [BCS21] P. Biran, O. Cornea, and E. Shelukhin. Lagrangian shadows and triangulated categories. *Astérisque*, 426:1–128, 2021.
- [BCZ21] P. Biran, O. Cornea, and J. Zhang. Triangulation and persistence: Algebra 101. arXiv preprint arXiv:2104.12258, 2021.
- [Ber76] M. Berger. Some relations between volume, injectivity radius, and convexity radius in Riemannian manifolds. In M. Cahen and M. Flato, editors, *Differential geometry and relativity*, volume 3 of *Mathematical Physics and Applied Mathematics*, pages 33–42. Springer, 1976.
- [CGK04] K. Cieliebak, V. Ginzburg, and E. Kerman. Symplectic homology and periodic orbits near symplectic submanifolds. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 79(3):554–581, 2004.
- [Cha06] I. Chavel. *Riemannian geometry*, volume 98 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, 2nd edition, 2006.
- [Cha21] J.-P. Chassé. Convergence and Riemannian bounds on Lagrangian submanifolds. arXiv preprint arXiv:2108.00555, 2021.
- [Cha22] J.-P. Chassé. Hausdorff limits of submanifolds of symplectic and contact manifolds. arXiv preprint arXiv:2204.02468, 2022.

- [Che00] Y.V. Chekanov. Invariant Finsler metrics on the space of Lagrangian embeddings. *Mathematische Zeitschrift*, 234(3):605–619, 2000.
- [CL06] O. Cornea and F. Lalonde. Cluster homology: an overview of the construction and results. *Electronic Research Announcements of the American Mathematical Society*, 12(1):1–12, 2006.
- [Cor20] O. Cornea. Lagrangian topology for the impatient. notes: <https://dms.umontreal.ca/~cornea/LagTopResourcePage.html>, 2020.
- [CS19] O. Cornea and E. Shelukhin. Lagrangian cobordism and metric invariants. *Journal of Differential Geometry*, 112(1):1–45, 2019.
- [dC92] M.P. do Carmo. *Riemannian Geometry*. Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser, 1992.
- [Dib17] J. Dibble. The convexity radius of a Riemannian manifold. *Asian Journal of Mathematics*, 21(1):169–174, 2017.
- [EG91] Y. Eliashberg and M. Gromov. Convex symplectic manifolds. In E. Bedford S. Krantz and J. D’Angelo, editors, *Several complex variables and complex geometry, Part II*, volume 52 of *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, pages 135–162. American Mathematical Society, 1991.
- [Eli87] Y. Eliashberg. A theorem on the structure of wave fronts and its applications in symplectic topology. *Functional Analysis and Its Applications*, 21(3):227–232, 1987.
- [FOOO09a] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta, and K. Ono. *Lagrangian Intersection Floer Theory: Anomaly and Obstruction, Part I*, volume 46 of *Studies in Advanced Mathematics*. American Mathematical Society and International Press of Boston, 2009.
- [FOOO09b] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta, and K. Ono. *Lagrangian Intersection Floer Theory: Anomaly and Obstruction, Part II*, volume 46 of *Studies in Advanced Mathematics*. American Mathematical Society and International Press of Boston, 2009.
- [FSS08a] K. Fukaya, P. Seidel, and I. Smith. Exact Lagrangian submanifolds in simply-connected cotangent bundles. *Inventiones mathematicae*, 172(1):1–27, 2008.
- [FSS08b] K. Fukaya, P. Seidel, and I. Smith. The symplectic geometry of cotangent bundles from a categorical viewpoint. In K.-G. Schlesinger, M. Kreuzer, and A. Kapustin, editors, *Homological mirror symmetry*, volume 757 of *Lecture Notes in Physics*, pages 1–26. Springer, 2008.
- [Fuk96] K. Fukaya. Morse homotopy and its quantization. In W.H. Kazez, editor, *Geometric topology*, volume 2 of *Studies in Advanced Mathematics*, pages 409–440. American Mathematical Society, 1996.
- [GLP81] M. Gromov, J. Lafontaine, and P. Pansu. *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*. Textes mathématiques. Recherche. CEDIC/Fernand Nathan, 1981.
- [Gra04] A. Gray. *Tubes*, volume 221 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser, 2nd edition, 2004.
- [Gro86] M. Gromov. *Partial differential relations*, volume 9 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge*. Springer, 1986.
- [GS14] Y. Groman and J.P. Solomon. A reverse isoperimetric inequality for J -holomorphic curves. *Geometric and Functional Analysis*, 24(5):1448–1515, 2014.
- [GS16] Y. Groman and J.P. Solomon. J -holomorphic curves with boundary in bounded geometry. *Journal of Symplectic Geometry*, 14(3):767–809, 2016.
- [GV22] S. Guillermou and N. Vichery. Viterbo’s spectral bound conjecture for homogeneous spaces. *arXiv preprint arXiv:2203.13700*, 2022.
- [GW79] R.E. Greene and H. Wu. *Function theory on manifolds which possess a pole*, volume 699 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 1979.
- [Hin04] R. Hind. Lagrangian spheres in $S^2 \times S^2$. *Geometric and Functional Analysis*, 14(2):310–318, 2004.

- [HLS15] V. Humilière, R. Leclercq, and S. Seyfaddini. Coisotropic rigidity and C^0 -symplectic geometry. *Duke Mathematical Journal*, 164(4):767–799, 2015.
- [Hof90] H. Hofer. On the topological properties of symplectic maps. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, 115(1–2):25–38, 1990.
- [Hof04] H. Hofer. A general Fredholm theory and applications. *Current developments in mathematics*, 2004(1):1–72, 2004.
- [HPW16] R. Hind, M. Pinsonnault, and W. Wu. Symplectomorphism groups of non-compact manifolds, orbifold balls, and a space of Lagrangians. *Journal of Symplectic Geometry*, 14(1):103–226, 2016.
- [Hua15] Y. Huang. On Legendrian foliations in contact manifolds I: Singularities and neighborhood. *Mathematical Research Letters*, 22(5):1373–1400, 2015.
- [Hum12] V. Humilière. Hofer’s distance on diameters and the Maslov index. *International Mathematics Research Notices*, 2012(15):3415–3433, 2012.
- [Kat85] A. Katsuda. Gromov’s convergence theorem and its applications. *Nagoya Mathematical Journal*, 100:11–48, 1985.
- [Kha09] M. Khanevsky. Hofer’s metric on the space of diameters. *Journal of Topology and Analysis*, 1:407–416, 2009.
- [Kli59] W. Klingenberg. Contributions to Riemannian geometry in the large. *Annals of Mathematics*, 69(3):654–666, 1959.
- [KM05] J. Katić and D. Milinković. Piunikhin–Salamon–Schwarz isomorphisms for Lagrangian intersections. *Differential Geometry and its Applications*, 22(2):215–227, 2005.
- [Kra13] T. Kragh. Parametrized ring-spectra and the nearby Lagrangian conjecture. *Geometry & Topology*, 17(2):639–731, 2013.
- [KS22] A. Kislev and E. Shelukhin. Bounds on spectral norms and barcodes. *Geometry & Topology*, 25(7):3257–3350, 2022.
- [Lec08] R. Leclercq. Spectral invariants in Lagrangian Floer theory. *Journal of Modern Dynamics*, 2(2):249–286, 2008.
- [LM95] F. Lalonde and D. McDuff. The geometry of symplectic energy. *Annals of Mathematics, Second Series*, 141(2):349–371, 1995.
- [LS94] F. Laudenbach and J.-C. Sikorav. Hamiltonian disjunction and limits of Lagrangian submanifolds. *International Mathematics Research Notices*, 1994(4):161–168, 1994.
- [LZ18] R. Leclercq and F. Zapolsky. Spectral invariants for monotone Lagrangians. *Journal of Topology and Analysis*, 10(03):627–700, 2018.
- [MS12] D. McDuff and D. Salamon. *J-holomorphic curves and symplectic topology*, volume 52 of *Colloquium Publications*. American Mathematical Society, 2nd edition, 2012.
- [MS17] D. McDuff and D. Salamon. *Introduction to Symplectic Topology*. Number 27 in *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. Oxford University Press, 3rd edition, 2017.
- [Mun14] J. Munkres. *Topology*. Pearson Education Limited, 2^e edition, 2014.
- [Nad09] D. Nadler. Microlocal branes are constructible sheaves. *Selecta Mathematica*, 15(4):563–619, 2009.
- [Nak20] L. Nakamura. C^0 -limits of Legendrian submanifolds. *arXiv preprint arXiv:2008.00924*, 2020.
- [Oh93] Y.-G. Oh. Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudoholomorphic disks I. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 46(7):949–993, 1993.
- [Oh95] Y.-G. Oh. Addendum to “Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudoholomorphic disks I”. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 48(11):1299–1302, 1995.

- [Oh96] Y.-G. Oh. Relative Floer and quantum cohomology and the symplectic topology of Lagrangian. *Contact and symplectic geometry*, 8:201, 1996.
- [Oh15a] Y.-G. Oh. *Symplectic Topology and Floer Homology: Volume 1. Symplectic Geometry and Pseudoholomorphic Curves*. New Mathematical Monographs. Cambridge University Press, 2015.
- [Oh15b] Y.-G. Oh. *Symplectic Topology and Floer Homology: Volume 2. Floer Homology and Its Applications*. New Mathematical Monographs. Cambridge University Press, 2015.
- [OM07] Y.-G. Oh and S. Müller. The group of Hamiltonian homeomorphisms and C^0 -symplectic topology. *Journal of Symplectic Geometry*, 5(2):167–219, 2007.
- [Ost03] Y. Ostrover. A comparison of Hofer’s metrics on hamiltonian diffeomorphisms and Lagrangian submanifolds. *Communications in Contemporary Mathematics*, 5(5):803–811, 2003.
- [PB21] A. Petrunin and S. Zamora Barrera. Moon in a puddle and the four-vertex theorem. arXiv preprint arXiv:2107.08455, 2021.
- [Per91] G. Perelman. Alexandrov spaces with curvatures bounded from below II. preprint: <https://anton-petrunin.github.io/papers/alexandrov/perelmanASWCBFB2+.pdf>, 1991.
- [Pol90] L. Polterovich. The Maslov class rigidity and non-existence of Lagrangian embeddings. Technical report, 1990.
- [Pol93] L. Polterovich. Symplectic displacement energy for Lagrangian submanifolds. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 13(2):357–367, 1993.
- [PRSZ20] L. Polterovich, D. Rosen, K. Samvelyan, and J. Zhang. *Topological persistence in geometry and analysis*, volume 74 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, 2020.
- [PSS96] S. Piunikhin, D. Salamon, and M. Schwarz. Symplectic Floer–Donaldson theory and quantum cohomology. In C.B. Thomas, editor, *Contact and Symplectic Geometry*, pages 171–200. Cambridge University Press, 1996.
- [RGI16] G. Dimitroglou Rizell, E. Goodman, and A. Ivrii. Lagrangian isotopy of tori in $S^2 \times S^2$ and CP^2 . 26:1297–1358, 2016.
- [RZ20] D. Rosen and J. Zhang. Chekanov’s dichotomy in contact topology. *Mathematical Research Letters*, 27(4):1165–1193, 2020.
- [Sei08] P. Seidel. *Fukaya categories and Picard–Lefschetz theory*, volume 10 of *EMS Zurich Lectures in Advanced Mathematics*. European Mathematical Society, 2008.
- [Sey14] S. Seyfaddini. Unboundness of the Lagrangian Hofer distance in the Euclidean ball. *Electronic Research Announcements in Mathematical Sciences*, 21:1–7, 2014.
- [She95] Z. Shen. A convergence theorem for Riemannian submanifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*, 347(4):1343–1350, 1995.
- [She17] E. Shelukhin. The Hofer norm of a contactomorphism. *Journal of Symplectic Geometry*, 15(4):1173–1208, 2017.
- [She22a] E. Shelukhin. Symplectic cohomology and a conjecture of Viterbo. *Geometric and Functional Analysis*, 2022.
- [She22b] E. Shelukhin. Viterbo conjecture for Zoll symmetric spaces. *Inventiones Mathematicæ*, 2022.
- [Sik94] J.-C. Sikorav. Some properties of holomorphic curves in almost complex manifolds. In M. Audin and J. Lafontaine, editors, *Holomorphic curves in symplectic topology*, volume 117 of *Progress in Mathematics*, pages 165–189. Birkhäuser, 1994.
- [Smi07] G. Smith. An Arzela–Ascoli theorem for immersed submanifolds. *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse*, 16(4):817–866, 2007.

- [Sta67] K.L. Stacy. On the Hausdorff hyperspace of a compact metric space. *Mémoire de maîtrise*, Iowa State University, 1967.
- [Ush14] M. Usher. Submanifolds and the Hofer norm. *Journal of the European Mathematical Society*, 16(8):1571–1616, 2014.
- [Vit92] C. Viterbo. Symplectic topology as the geometry of generating functions. *Mathematische Annalen*, 292(4):685–710, 1992.
- [Vit22a] C. Viterbo. Inverse reduction inequalities for spectral numbers and applications. *arXiv preprint arXiv:2203.13172*, 2022.
- [Vit22b] C. Viterbo. On the supports in the Humilière completion and γ -coisotropic sets (with an Appendix joint with Vincent Humilière). *arXiv preprint arXiv:2204.04133*, 2022.
- [Wat76] W. Waterhouse. Uniform convergence and graph convergence. *The American Mathematical Monthly*, 83(8):641–643, 1976.
- [Wei94] C.A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, 1994.
- [Zap13] F. Zapolsky. On the Hofer geometry for weakly exact Lagrangian submanifolds. *Journal of Symplectic Geometry*, 11(3):475–488, 2013.