

Université de Montréal

**Fonctions génératrices des polynômes de Hartley  
des algèbres de Lie simples de rang 2**

par

**Xavier Pelletier**

Département de mathématiques et de statistique  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de  
Maître ès sciences (M.Sc.)  
en Mathématiques

Orientation mathématiques pures

4 septembre 2022



**Université de Montréal**

Faculté des arts et des sciences

---

Ce mémoire intitulé

**Fonctions génératrices des polynômes de Hartley  
des algèbres de Lie simples de rang 2**

présenté par

**Xavier Pelletier**

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

*Matilde Lalin*

---

(président-rapporteur)

*Yvan Saint-Aubin*

---

(directeur de recherche)

*Jiří Hrivnák*

---

(codirecteur)

*Abraham Broer*

---

(membre du jury)



## Résumé

---

Ce mémoire étudie deux familles de fonctions orthogonales, soit les fonctions d'orbite de Weyl et les fonctions d'orbite de Hartley. Chacune de ces familles est associée à une algèbre de Lie simple et cette recherche se limite aux algèbres  $A_2$ ,  $C_2$  et  $G_2$  de rang 2. Les fonctions d'orbite de Weyl ont été largement étudiées depuis des années en raison de leurs propriétés exceptionnelles. Nouvellement, elles ont été utilisées pour générer des polynômes de Chebyshev généralisés et calculer les fonctions génératrices de ces polynômes pour les algèbres de Lie simples de rang 2 [4]. Les fonctions d'orbite de Hartley, quant à elles, ont été récemment introduites par Hrivnák et Juránek [6] et l'étude de ces dernières ne fait que débuter. L'objectif de ce mémoire est de définir des polynômes de Chebyshev généralisés associés aux fonctions de Hartley et de calculer les fonctions génératrices de ceux-ci pour les algèbres  $A_2$ ,  $C_2$  et  $G_2$ .

Le premier chapitre introduit les systèmes de racines et le groupe de Weyl, original et affine, ainsi que leurs domaines fondamentaux, afin que le lecteur ait les notations et définitions pour comprendre les chapitres suivants. Le deuxième chapitre présente et étudie les fonctions de Weyl. Il définit également leurs polynômes de Chebyshev généralisés et se termine en présentant les différentes fonctions génératrices de ces polynômes pour les algèbres de Lie simples de rang 2. Finalement, le troisième chapitre contient les résultats originaux ; il expose les fonctions de Hartley et certaines de leurs propriétés. Il définit les polynômes de Chebyshev généralisés de celles-ci et énonce également leurs relations d'orthogonalité discrète. Il conclut en calculant les fonctions génératrices de ces polynômes pour les algèbres  $A_2$ ,  $C_2$  et  $G_2$ .

**Mots clés :** Systèmes de racines, groupe de Weyl ; algèbres de Lie ; fonctions d'orbite de Weyl ; fonctions d'orbite de Hartley ; polynôme orthogonal ; fonction génératrice.



# Abstract

---

This master's thesis studies two families of orthogonal functions, the Weyl orbit functions and the Hartley orbit functions. Each of these families is associated to a simple Lie algebra and the present work is limited to the algebras  $A_2$ ,  $C_2$  and  $G_2$  of rank 2. Weyl orbit functions have been widely studied for years because of their exceptional properties. Recently, these properties have been used to generate generalized Chebyshev polynomials and to compute the generating functions of these polynomials for the simple Lie algebras of rank 2 [4]. Hartley orbit functions, on the other hand, were recently introduced by Hrivnák and Juránek [6] and the study of the latter has only begun. The objective of this thesis is to define the generalized Chebyshev polynomials of Hartley orbit functions and to compute their generating functions for the algebras  $A_2$ ,  $C_2$  and  $G_2$ .

The first chapter introduces root systems and the Weyl group, original and affine, and their fundamental domains, so that the reader has the notations and definitions at hand to read the following chapters. The second chapter introduces and studies Weyl orbit functions. It also defines their generalized Chebyshev polynomials and ends by presenting the different generating functions of these polynomials for simple Lie algebras of rank 2. Finally, the third chapter contains the original contribution; it presents the Hartley functions and some of their properties. It defines the generalized Chebyshev polynomials of these and also states their discrete orthogonality relations. It concludes by computing the generating functions of these polynomials for the algebras  $A_2$ ,  $C_2$  and  $G_2$ .

**Keywords:** Root systems; Weyl group; Lie algebras; Weyl orbit functions; Hartley orbit functions; orthogonal polynomial; generating function.





# Table des matières

---

Résumé .....	5
Abstract .....	7
Liste des tableaux .....	13
Table des figures .....	15
Remerciements .....	17
Introduction .....	19
<b>Chapitre 1. Systèmes de racines</b> .....	<b>21</b>
1.1. Réflexions dans un espace euclidien .....	21
1.2. Systèmes de racines .....	22
1.3. Bases duales et leurs réseaux .....	24
1.4. Matrice de Cartan et diagrammes de Coxeter-Dynkin .....	26
1.5. Chambres de Weyl .....	27
1.6. Groupes de Weyl et de Weyl affine .....	28
1.7. Régions fondamentales $F$ et $F^V$ .....	32
1.8. Orbites du groupe de Weyl .....	34

<b>Chapitre 2. Fonctions d'orbite du groupe de Weyl.....</b>	<b>35</b>
2.1. Les homomorphismes de signe.....	35
2.2. Fonctions d'orbite de Weyl.....	36
2.2.1. Fonctions d'orbite de Weyl de $A_2$ .....	37
2.2.2. Fonctions d'orbite de Weyl de $C_2$ .....	38
2.2.3. Fonctions d'orbite de Weyl de $G_2$ .....	39
2.3. Déplacements admissibles.....	40
2.4. Homomorphismes de déplacement.....	41
2.5. Homomorphismes $\gamma$ .....	43
2.6. Régions fondamentales signées $F^\sigma$ et $F^{\sigma^\vee}$ .....	44
2.7. Grilles $F_M^\sigma$ et $\Lambda_M^\sigma$ .....	46
2.8. Orthogonalité discrète des fonctions d'orbite.....	49
2.9. Polynômes de Weyl.....	50
2.10. Orthogonalité discrète des polynômes de Weyl.....	51
2.11. Fonctions génératrices des polynômes de Weyl.....	53
2.11.1. Fonctions génératrices de $A_2$ .....	54
2.11.2. Fonctions génératrices de $C_2$ .....	55
2.11.3. Fonctions génératrices de $G_2$ .....	55
<b>Chapitre 3. Fonctions génératrices des polynômes de Hartley.....</b>	<b>57</b>

3.1.	Fonctions d'orbite de Hartley .....	57
3.1.1.	Définition des fonctions d'orbite de Hartley .....	57
3.1.2.	Fonctions de Hartley de $A_2$ .....	60
3.1.3.	Fonctions de Hartley de $C_2$ .....	61
3.1.4.	Fonctions de Hartley de $G_2$ .....	62
3.2.	Orthogonalité discrète des fonctions de Hartley .....	62
3.3.	Polynômes de Hartley .....	64
3.4.	Orthogonalité discrète des polynômes de Hartley .....	66
3.5.	Fonctions génératrices des polynômes de Hartley .....	68
<b>Conclusion .....</b>		<b>71</b>
<b>Annexe A. Calcul des coefficients <math>h_z</math> et <math>h_M^\vee</math> .....</b>		<b>73</b>
A.0.1.	Les diagrammes de Coxeter-Dynkin étendus .....	73
A.0.2.	Calcul du coefficient $h_z$ .....	74
A.0.3.	Calcul du coefficient $h_M^\vee$ .....	74
<b>Annexe B. Polynômes orthogonaux de Weyl .....</b>		<b>77</b>
B.1.	Polynômes de $A_2$ .....	77
B.2.	Polynômes de $C_2$ .....	78
B.3.	Polynômes de $G_2$ .....	80
<b>Annexe C. Les coefficients <math>\alpha_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(j, k)}</math> des fonctions <math>N^{(j, k)}</math> de <math>C_2</math> et <math>G_2</math> .....</b>		<b>83</b>

C.1.	Les coefficients $\alpha_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(j, k)}$ pour $C_2$ .....	83
C.2.	Les coefficients $\alpha_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(j, k)}$ pour $G_2$ .....	85
<b>Annexe D.</b>	<b>Polynômes orthogonaux de Hartley de <math>A_2</math></b> .....	<b>89</b>
<b>Annexe E.</b>	<b>Les coefficients <math>c_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(j, k)}</math> des fonctions numérateur de <math>A_2</math></b> .....	<b>93</b>
<b>Références bibliographiques</b>	.....	<b>97</b>

# Liste des tableaux

---

1.1	Tableau comportant le nombre d'éléments des systèmes de racines $\Phi$ et l'ordre des groupes de Weyl $W$ associé aux différents systèmes de racines. ....	30
2.1	Les déplacements admissibles non triviaux $\varrho, \varrho^\vee$ des systèmes de racines cristallographiques irréductibles. ....	41
2.2	Les valeurs de $\gamma_\varrho^\sigma$ sur l'ensemble des générateurs du groupe de Weyl affine pour un déplacement admissible dual trivial ( $\varrho = 0$ ) et non trivial $\varrho$ selon les quatre homomorphismes de signe $\sigma$ . ....	43
2.3	Les valeurs de $\hat{\gamma}_{\varrho^\vee}^\sigma$ sur l'ensemble des générateurs du groupe de Weyl affine dual pour un déplacement admissible trivial ( $\varrho^\vee = 0$ ) et non trivial $\varrho^\vee$ selon les quatre homomorphismes de signe $\sigma$ . ....	44
2.4	Valeurs des coefficients $\varepsilon(z)$ pour les systèmes de racines $A_2, C_2$ et $G_2$ , où $z = [z_0^{\sigma, \varrho}, z_1^{\sigma, \varrho}, z_2^{\sigma, \varrho}]$ . Pour un déplacement admissible $\varrho^\vee = \varrho_1^\vee \omega_1^\vee + \varrho_2^\vee \omega_2^\vee$ , les triplets considérés sont $[z_0^{\sigma, \varrho} + \varrho_0^\vee, z_1^{\sigma, \varrho} + \varrho_1^\vee, z_2^{\sigma, \varrho} + \varrho_2^\vee]$ , où * dénote une valeur non nulle. .	49
2.5	Valeurs des coefficients $h_M^\vee(\lambda)$ pour les systèmes de racines $A_2, C_2$ et $G_2$ , où $\lambda = [t_0^{\sigma, \varrho^\vee}, t_1^{\sigma, \varrho^\vee}, t_2^{\sigma, \varrho^\vee}]$ . Pour un déplacement admissible dual $\varrho = \varrho_1 \omega_1 + \varrho_2 \omega_2$ , les triplets considérés sont $[t_0^{\sigma, \varrho^\vee} + \varrho_0, t_1^{\sigma, \varrho^\vee} + \varrho_1, t_2^{\sigma, \varrho^\vee} + \varrho_2]$ , où * dénote une valeur non nulle. ....	50
2.6	Les valeurs des vecteurs $\rho$ pour les systèmes de racines cristallographiques irréductibles $A_2, C_2$ et $G_2$ . ....	50
3.1	Les facteurs de signe $\sigma^{(j)}(w)$ de $e^{2\pi i \langle w\lambda, z \rangle}$ pour les éléments contenus dans l'orbite $\mathcal{O}_{\lambda=(\lambda_1, \lambda_2)}$ de $C_2$ . ....	60

3.2	Les facteurs de signe $\sigma^{(j)}(w)$ de $e^{2\pi i\langle w\lambda, z \rangle}$ pour les éléments contenus dans l'orbite $\mathcal{O}_{\lambda=(\lambda_1, \lambda_2)}$ de $G_2$ .....	61
C.1	Valeurs des coefficients $\alpha_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(j,0)}$ de la fonction numérateur (2.11.10) de $C_2$ .....	83
C.2	Valeurs des coefficients $\alpha_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(j,1)}$ de la fonction numérateur (2.11.10) de $C_2$ .....	84
C.3	Valeurs des coefficients $\alpha_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(0,0)}$ de la fonction numérateur (2.11.13) de $G_2$ .....	85
C.4	Valeurs des coefficients $\alpha_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(1,0)}$ et $\alpha_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(2,0)}$ de la fonction numérateur (2.11.13) de $G_2$ .....	86
C.5	Valeurs des coefficients $\alpha_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(3,0)}$ de la fonction numérateur (2.11.13) de $G_2$ .....	87
E.1	Les coefficients $c_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(0,0)}$ de la fonction numérateur (3.5.4) de $A_2$ .....	94
E.2	Les coefficients $c_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(1,0)}$ de la fonction numérateur (3.5.4) de $A_2$ .....	95

## Table des figures

---

1.1	Les systèmes de racines cristallographiques des algèbres $A_2, C_2$ et $G_2$ avec un choix de racines simples illustrées en noir.....	23
1.2	Les réseaux $Q$ et $P$ du système de racine cristallographique $G_2$ . Les racines simples (duales) et les poids fondamentaux (duaux) sont identifiés.....	25
1.3	Les diagrammes de Coxeter-Dynkin des algèbres de Lie simples.....	28
1.4	Les chambres de Weyl des systèmes de racines cristallographiques $A_2, C_2$ et $G_2$ . .	29
1.5	Les régions fondamentales $F$ des systèmes de racines cristallographiques $A_2, C_2$ et $G_2$ . .....	33
2.1	Orbite du groupe de Weyl d'un point dominant $(\lambda_1, \lambda_2)$ contenu à l'intérieur de la région fondamentale $F$ du groupe de Weyl affine identifiée en bleu pâle. La plus haute racine (duale), les racines simples (duales) et les poids fondamentaux (duaux) du système de racines de $A_2$ sont également illustrés ainsi que $W(F)$ ....	38
2.2	Orbite du groupe de Weyl d'un point dominant $(\lambda_1, \lambda_2)$ contenu à l'intérieur de la région fondamentale $F$ identifiée en bleu pâle. La plus haute racine, les racines simples (duales) et les poids fondamentaux (duaux) du système de racines de $C_2$ sont également illustrés ainsi que $W(F)$ . .....	39
2.3	Orbite du groupe de Weyl d'un point dominant $(\lambda_1, \lambda_2)$ contenu à l'intérieur de la région fondamentale $F$ identifiée en bleu pâle. La plus haute racine, les racines simples et les poids fondamentaux du système de racines de $G_2$ sont également illustrés ainsi que $W(F)$ .....	40
2.4	Pavage $W^{\text{aff}}(F)$ de la région fondamentale $F$ du système de racines de $G_2$ . La région fondamentale $F$ est identifiée en bleu pâle. Les huit points noirs contenus à	

	l'intérieur de $F$ représentent les éléments de la grille $F_{10}^{\sigma^{(2)}}(0,0)$ et les huit cercles blancs correspondent aux éléments de la grille $F_{10}^{\sigma^{(3)}}(0,0)$ .....	47
2.5	Pavage $\widehat{W}^{\text{aff}}(F^\vee)$ de la région fondamentale duale $F^\vee$ du système de racines de $G_2$ . La région fondamentale duale $F^\vee$ est identifiée en vert. Le grossissement de la région fondamentale duale $10F^\vee$ est identifié en vert pâle. Les huit points noirs contenus à l'intérieur de $10F^\vee$ représentent les éléments de la grille $\Lambda_{10}^{\sigma^{(2)}}(0,0)$ et les huit points blancs correspondent aux éléments de la grille $\Lambda_{10}^{\sigma^{(3)}}(0,0)$ .....	48
3.1	L'ensemble de points $\Sigma_{20}^{(0,0)}(0)$ de $A_2$ et son contour délimité en rouge par l'équation $\kappa^{(1,0)}(y_1, y_2) = 0$ .....	67
A.1	Les diagrammes de Coxeter-Dynkin étendus des algèbres de Lie simples $A_1, A_n(n \geq 2), C_n(n \geq 2), B_n(n \geq 3)$ et $G_2$ .....	73
A.2	Les diagrammes de Coxeter-Dynkin duaux étendus de $C_2$ et $G_2$ .....	74



## Remerciements

---

Cette étude est le fruit de nombreuses heures de travail s'étalant sur une période de près de deux ans. Une période riche en partage, en échanges de connaissances et dont la finalité n'aurait pas été possible sans l'appui et la participation de multiples personnes. En préambule à ce mémoire, je souhaite prendre le temps d'adresser mes remerciements à tous ces gens pour ce qu'ils m'ont apporté dans la réalisation de mes travaux et dans l'aboutissement de ce projet de recherche.

Il est impensable pour moi de ne pas commencer en soulignant l'indispensable rôle qu'a joué mon directeur de recherche Yvan Saint-Aubin au cours de la dernière année. Merci d'avoir repris le flambeau et de m'avoir guidé lorsque je semblais être dos au mur. Ta rigueur, ta sagesse, ta bienveillance et ton écoute font de toi une personne inspirante. Merci de m'avoir inculqué ces valeurs qui feront de moi une meilleure personne autant sur le plan personnel que professionnel. Comme j'aime le dire, tu ferais un excellent grand-papa en raison de tes anecdotes captivantes et je sais que tu t'entendrais à merveille avec le mien (Panou, tu manques quelque chose)! À mes yeux, tu incarnes le Yoda du département de mathématiques et statistique et ta vertu sera à jamais inégalée.

Je souhaiterais également prendre le temps de remercier mon codirecteur Jiří Hrivnák, sans qui ce mémoire n'aurait pas été possible. Merci d'avoir mis à ma disposition une ligne directrice pour ce projet de recherche. Je serai éternellement reconnaissant de cette contribution. Děkuji vám za všechno!

Rémi, merci d'avoir partagé toutes ces années d'étude avec moi. Je me souviendrai toujours du premier laboratoire de sciences qui a donné naissance à notre amitié : le règne animal. C'était un laboratoire passionnant... Bref, rien ne pourra surpasser le bonheur et la joie que nous avons éprouvés lors du cours d'analyse appliquée! Pour le futur, je souhaite que ta carrière académique soit couronnée de succès et je terminerai en disant ceci : REMEY.

Un énorme merci à Antoine, Jonah, Nicolas et Simon qui ont su me divertir durant un nombre dénombrable de pauses lors des cinq dernières années. Plus spécialement, merci à

Simon pour l'entraide et les conseils astucieux. Je n'aurais jamais pensé dire ça, mais tes connaissances sur les fonctions génératrices m'ont réellement été utiles.

Une part de ce travail revient principalement à ma famille qui a toujours été présente pour m'écouter et me réconforter. Merci, GM, Panou et Mom, pour votre bienfaisance et toutes ces relectures. Je souhaiterais aussi remercier ma mademoiselle et ma partenaire de vie, Mymy, pour tout le soutien et les encouragements offerts au cours de ce mémoire. Merci de continuellement m'inciter à me surpasser et d'avoir tenté de m'aider à maintes reprises en sachant que tu ne comprendrais rien à ce qui est écrit.

Ces remerciements ne seraient pas complets sans parler de l'homme qui m'a épaulé et introduit à la théorie de Lie : Jiří Patera. Sa passion et son enthousiasme sur le sujet ne faisaient qu'accroître mon avidité d'apprendre davantage sur les symétries en physique et les fonctions d'orbite. Merci, Jiří, je ne vous oublierai jamais.

# Introduction

---

Les familles de fonctions orthogonales font partie du chapitre mathématique intitulé l'analyse. Leur utilité est apparue au XIXe siècle dans les travaux de Fourier, Laguerre, Legendre, Bessel et Hermite, pour n'en nommer que quelques-uns. Cette utilité réside dans la possibilité de capturer le comportement d'objets ou d'événements (les champs électrique et magnétique en physique, les photos des caméras dans le format jpeg, la voix lors de la communication par téléphone cellulaire, etc.) à l'aide d'un nombre restreint de coefficients. Des exemples de ces familles sont les fonctions trigonométriques (sinus et cosinus), les fonctions de Bessel, les polynômes d'Hermite, etc.

Au début des années 2000, Robert V. Moody et Jiří Patera ont réalisé qu'un domaine indépendant de l'analyse, celui des algèbres de Lie, permettait d'introduire de nombreuses nouvelles familles de fonctions orthogonales [13, 14, 17]. Ces familles ont plusieurs caractéristiques utiles dans l'analyse de fonctions : l'ensemble de fonctions orthogonales est fini et le nombre d'éléments de l'ensemble peut être ajusté [20, 10, 8]. Depuis leurs travaux initiaux, plusieurs autres familles avec des propriétés similaires ont été introduites par différents chercheurs. Par exemple, les familles de fonctions orthogonales de Hartley ont été développées par Jiří Hrivnák et Michal Juránek en 2017 [6].

Chacune de ces familles est associée à une des algèbres de Lie simples. Ces algèbres sont classifiées en un nombre fini de familles, chacune étant étiquetée par un entier nommé le rang [12]. La complexité des familles de fonctions orthogonales qui leur sont associées croît avec le rang. Heureusement, la géométrie des cas de rang 2 et 3 peut être visualisée [18, 6].

Une façon classique de décrire une famille de fonctions orthogonales est à l'aide de sa fonction génératrice. Les premiers exemples de telles fonctions génératrices remontent aussi au XIXe siècle. Elles sont puissantes parce qu'elles capturent plusieurs de leurs propriétés : les fonctions orthogonales elles-mêmes, leur relation de récurrence, et d'autres de leurs propriétés respectives. Au sein de la théorie de Lie, un large éventail d'applications des fonctions génératrices peut être relié à la définition des fonctions génératrices pour les caractères des représentations de groupe [19]. Même si les propriétés des fonctions et polynômes d'orbite

sont connues quelque soit le rang de l'algèbre de Lie, leurs fonctions génératrices ne sont connues que pour les rangs 2 et 3.

Les familles de fonctions d'orbites symétriques et antisymétriques de Weyl ont également été utilisées pour donner naissance à différents polynômes de Chebyshev généralisés [5, 16]. Récemment, les chercheurs Czyżycki, Hrivnák et Patera se sont intéressés à calculer les fonctions génératrices des polynômes de Chebyshev généralisés des algèbres  $A_2$ ,  $C_2$  et  $G_2$  [4]. Dans ce mémoire, il sera question de poursuivre l'étude de ces derniers en introduisant les polynômes de Chebyshev généralisés des fonctions de Hartley et de calculer leur fonction génératrice pour les algèbres de Lie simples de rang 2.

Le premier chapitre offre une revue concise des systèmes de racines, du groupe de Weyl et d'autres notions mathématiques qui leur sont étroitement reliées. Les propriétés présentées sont bien connues. Nous utilisons la notation de la monographie de Humphreys [12].

Le deuxième chapitre introduit les fonctions d'orbite de Weyl et certaines de leurs propriétés importantes. Ses sections énoncent les relations d'orthogonalité discrète de ces fonctions en suivant le travail de Czyżycki et Hrivnák [3], puis exposent les résultats de Czyżycki, Hrivnák et Patera [4] sur les polynômes de Weyl ainsi que leurs fonctions génératrices pour les algèbres  $A_2$ ,  $C_2$  et  $G_2$ .

Le dernier chapitre débute en introduisant les familles des fonctions d'orbite de Hartley et y présente quelques résultats sur les fonctions de Hartley des algèbres  $C_2$  et  $G_2$ . La deuxième section énonce et démontre les relations d'orthogonalité discrète de ces fonctions. La démonstration de ce résultat est due à Hrivnák et Juránek [6]. Les résultats présentés au cours des trois sections suivantes suivent l'idée du travail de Czyżycki, Hrivnák et Patera [4] et sont, à ma connaissance, nouveaux. Elles donnent la définition des polynômes de Hartley, leurs relations d'orthogonalité discrète et calculent leurs fonctions génératrices pour les algèbres  $A_2$ ,  $C_2$  et  $G_2$ .

# Chapitre 1

---

## Systemes de racines

Ce chapitre d'introduction aborde le concept de systemes de racines et differentes notions qui sont intrinsequement liees a celui-ci, entre autres les reseaux de poids et de racines, la matrice de Cartan et les groupes de Weyl. Les systemes de racines jouent un role majeur au sein de la theorie des groupes et des algebres de Lie, particulierement aupres de la classification et de la theorie des representations des algebres de Lie semi-simples. L'objectif est de se donner suffisamment d'acquis afin d'etudier au chapitre suivant les fonctions d'orbite du groupe de Weyl des systemes de racines  $A_2$ ,  $C_2$  et  $G_2$ . Les notions des sections a venir sont preliminaires, classiques et bien documentees. Elles proviennent du livre de Humphreys [12] ainsi que de l'article de Hrivnak et Patera [10]. Les livres de Bourbaki [1] et Bremner et al. [2] sont egalement deux references pertinentes.

### 1.1. Reflexions dans un espace euclidien

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  sur  $\mathbb{R}$ , dote du produit scalaire usuel que l'on notera  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Chaque vecteur non nul  $\alpha \in E$  induit une reflexion  $r_\alpha$  a travers un hyperplan  $P_\alpha = \{\beta \in E \mid \langle \beta, \alpha \rangle = 0\}$  reflechissant de dimension  $n - 1$  (passant par l'origine), c'est-a-dire une transformation lineaire inversible qui envoie tout vecteur orthogonal a cet hyperplan vers son oppose. Cette application s'exprime explicitement de la maniere suivante :

$$r_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha, \quad (1.1.1)$$

ou  $\beta$  est egalement un vecteur de l'espace euclidien  $E$ . Bien evidemment, une reflexion  $r_\alpha$  laisse fixe chacun des points du miroir  $P_\alpha$ . Cette application possede les proprietes suivantes :

(1)  $r_\alpha$  est orthogonale, c'est-a-dire qu'elle preserve le produit scalaire sur  $E$  :

$$\langle u, v \rangle = \langle r_\alpha(u), r_\alpha(v) \rangle, \quad \forall u, v \in E. \quad (1.1.2)$$

(2) Tout vecteur non nul proportionnel à  $\alpha$  produit la même réflexion que  $r_\alpha$  :

$$r_\alpha(v) = r_{c\alpha}(v), \quad \forall v \in E \text{ et } \forall c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (1.1.3)$$

## 1.2. Systèmes de racines

Considérons  $\Phi = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$ , un sous-ensemble de l'espace euclidien  $E$ . On dit que  $\Phi$  est un système de racines s'il satisfait les axiomes suivants :

- (1)  $\Phi$  est un sous-ensemble fini, il engendre  $E$  et il ne contient pas le vecteur nul ;
- (2) si  $\alpha \in \Phi$ , alors les seuls multiples possibles de  $\alpha$  dans  $\Phi$  sont  $\pm\alpha$  ;
- (3) si  $\alpha \in \Phi$ , alors la réflexion  $r_\alpha$  laisse  $\Phi$  inchangé.

On dira qu'un système de racines est de type cristallographique s'il satisfait le quatrième axiome :

- (4) si  $\alpha, \beta \in \Phi$ , alors  $\frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle} \in \mathbb{Z}$ .

Les éléments du système de racines sont appelés racines. De plus, les axiomes (2) et (3) permettent de déduire que  $\Phi = -\Phi$ . Par ailleurs, un sous-ensemble  $\Delta$  d'un système de racines  $\Phi$  est appelé une base si celui-ci satisfait les propriétés suivantes :

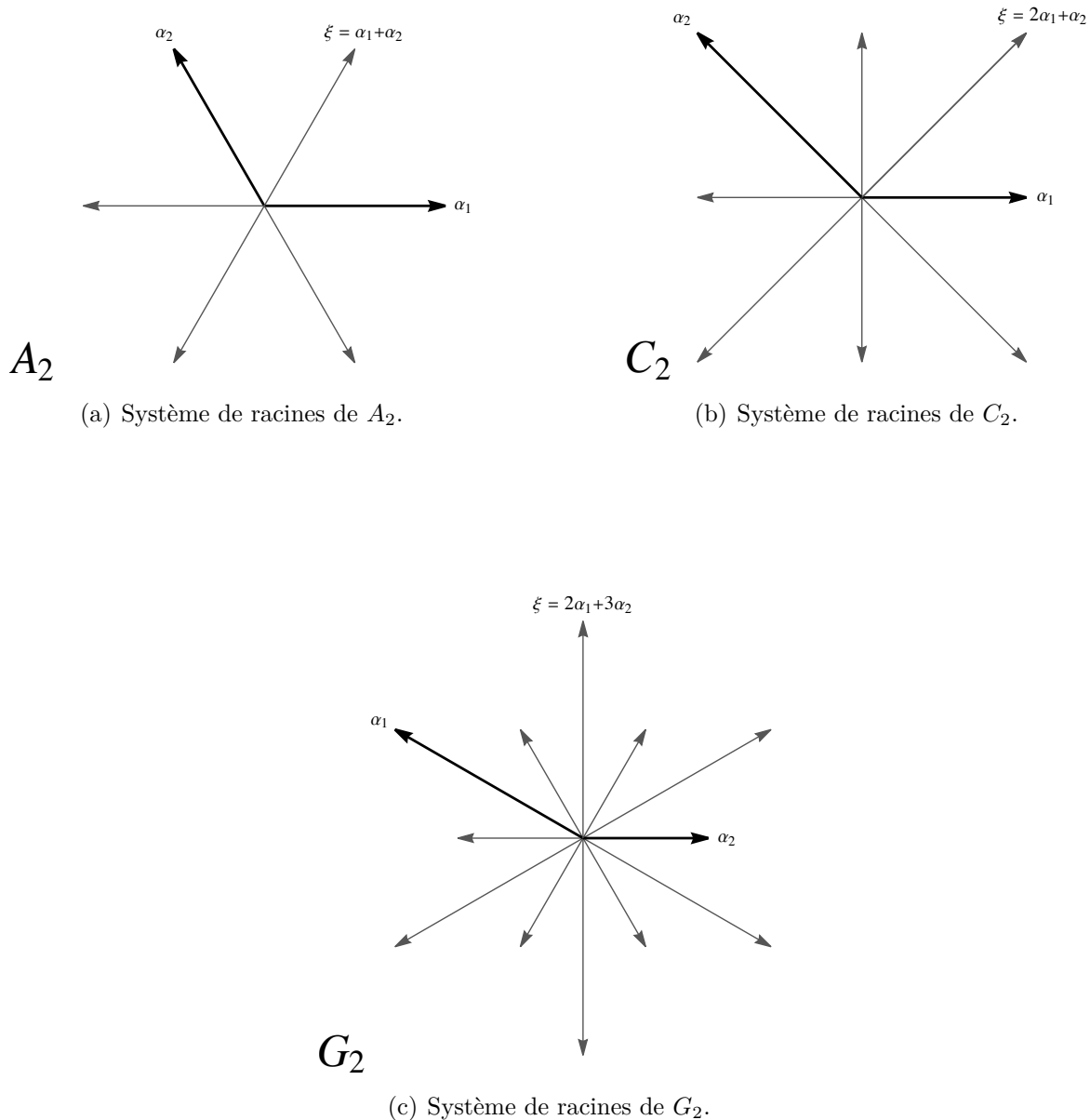
- (1)  $\Delta$  forme une base dans l'espace euclidien  $E$  ;
- (2) pour chaque racine  $\beta \in \Phi$ , cette dernière peut s'exprimer sous la forme d'une combinaison linéaire des éléments  $\alpha \in \Delta$  à l'aide de coefficients entiers  $k_\alpha$  tous non positifs ou non négatifs :

$$\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha. \quad (1.2.1)$$

Il est à noter que cette définition de base  $\Delta$  ne garantit pas l'existence de cette dernière. Toutefois, il est possible de montrer qu'une telle base existe.

Les racines composant la base  $\Delta$  sont nommées racines simples et forment à elles-mêmes ce qu'on appelle la  $\alpha$ -base d'un système de racines  $\Phi$ . En outre, si les coefficients  $k_\alpha \geq 0$  (respectivement  $k_\alpha \leq 0$ ), on dit que  $\beta$  est une racine positive (respectivement négative). Or, si la somme  $\sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha$  est maximale, on dit que  $\beta$  est la plus haute racine et on la notera par  $\xi$ . Il est possible de montrer qu'une telle racine existe et est unique. Le caractère positif ou négatif des racines partitionne  $\Phi$  en deux sous-ensembles :  $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$ , où  $\Phi^+$  correspond tout simplement à la collection des racines positives du système de racines et  $\Phi^-$  à la collection des racines négatives (par symétrie,  $\Phi^- = -\Phi^+$ ).

Un système de racines peut aussi être caractérisé de réductible ou d'irréductible. En effet,  $\Phi$  est dit irréductible s'il est impossible de partitionner celui-ci en deux sous-ensembles propres



**Figure 1.1.** Les systèmes de racines cristallographiques des algèbres  $A_2, C_2$  et  $G_2$  avec un choix de racines simples illustrées en noir.

$\Phi_1, \Phi_2$  tel que chaque racine  $\alpha \in \Phi_1$  est orthogonale à celles contenues dans  $\Phi_2$  et vice-versa. Autrement,  $\Phi$  est dit réductible. Dans un système de racines irréductible, les racines simples peuvent être longues ou courtes. Cependant, par convention, si toutes les racines sont de la même longueur, on dira que ce sont de longues racines. Dans ce mémoire, chaque longue racine  $\alpha \in \Phi$  sera normalisée de manière standard, c'est-à-dire que  $\langle \alpha_{\text{longue}}, \alpha_{\text{longue}} \rangle = 2$ .

Étant donné deux systèmes de racines  $\Phi, \Phi'$  dans leur espace euclidien respectif  $E, E'$ ,  $\Phi$  et  $\Phi'$  seront qualifiés d'isomorphe s'il existe une application bijective et linéaire  $\phi : E \rightarrow E'$

tel que  $\phi(\Phi) \subset \Phi'$  et pour chaque paire de racines  $\alpha, \beta \in \Phi$ ,  $\phi$  préserve l'égalité suivante :

$$\frac{\langle \phi(\alpha), \phi(\beta) \rangle}{\langle \phi(\beta), \phi(\beta) \rangle} = \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle}. \quad (1.2.2)$$

Entre les années 1880 et 1900, les différents systèmes de racines irréductibles ont été introduits et étudiés par les mathématiciens Wilhelm Killing et Elie Cartan dans l'optique de classifier les algèbres de Lie simples. Le rang  $n$  d'un système de racines correspond à la dimension de l'espace euclidien  $E$ , c'est-à-dire  $n = \dim E$ . Pour  $n = 1$ , il existe un seul système de racines noté  $A_1$ . Pour  $n = 2$ , il y a trois systèmes de racines cristallographiques irréductibles  $A_2$ ,  $B_2 \cong C_2$ ,  $G_2$  ainsi qu'un système de racine cristallographique réductible  $A_1 \times A_1$ . La figure 1.1 illustre les trois systèmes de racines qui seront considérés dans ce mémoire.

### 1.3. Bases duales et leurs réseaux

Considérons encore une fois un système de racines  $\Phi$  avec une base  $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ . À cette base correspond un réseau de racines, noté  $Q \subset E$ . Il s'agit de l'ensemble comprenant toutes les combinaisons linéaires des racines simples à coefficients entiers :

$$Q = \left\{ \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i \mid c_i \in \mathbb{Z}, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \right\} = \mathbb{Z}\alpha_1 + \mathbb{Z}\alpha_2 + \dots + \mathbb{Z}\alpha_n. \quad (1.3.1)$$

De plus, chaque racine  $\alpha_i \in \Phi$  possède une racine duale  $\alpha_i^\vee$ , appelée coracine, qui est déterminée par la formule :

$$\alpha_i^\vee = \frac{2\alpha_i}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (1.3.2)$$

Dans un système de racines où toutes les racines possèdent la même longueur, l'équation (1.3.2) garantit que  $\alpha_i^\vee = \alpha_i$ ,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Ce nouvel ensemble de racines duales est appelé système de coracines et est identifié comme suit :  $\Phi^\vee$ . Il est également facile d'observer que nous avons la propriété  $(\alpha_i^\vee)^\vee = \alpha_i$ . À l'instar de  $\Phi$ , la base associée au système de coracines  $\Phi^\vee$  induit un réseau de coracines  $Q^\vee$  qui correspond à l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des coracines simples à coefficients entiers :

$$Q^\vee = \left\{ \sum_{i=1}^n c_i^\vee \alpha_i^\vee \mid c_i^\vee \in \mathbb{Z}, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \right\} = \mathbb{Z}\alpha_1^\vee + \mathbb{Z}\alpha_2^\vee + \dots + \mathbb{Z}\alpha_n^\vee. \quad (1.3.3)$$

En plus de la  $\alpha$ -base, il est également utile d'introduire la  $\omega$ -base. Cette dernière correspond à l'ensemble  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ , où les éléments  $\omega_j$  sont appelés poids fondamentaux et satisfont la condition suivante :

$$\frac{2\langle \alpha_i, \omega_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} = \langle \alpha_i^\vee, \omega_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (1.3.4)$$



où  $\delta_{ij}$  dénote le delta de Kronecker. À cette nouvelle base correspond évidemment un réseau de poids, noté  $P$ , qui correspond à l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des poids fondamentaux à coefficients entiers :

$$P = \{ \omega \in E \mid \langle \alpha_i^\vee, \omega \rangle \in \mathbb{Z}, \forall \alpha_i^\vee \in \Delta^\vee \} = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 + \cdots + \mathbb{Z}\omega_n. \quad (1.3.5)$$

Ce réseau de poids est dit  $\mathbb{Z}$ -dual au réseau de coracines  $Q^\vee$ . Similairement aux coracines, il est aussi possible de définir des poids duaux (souvent appelés copoids) de la manière suivante :

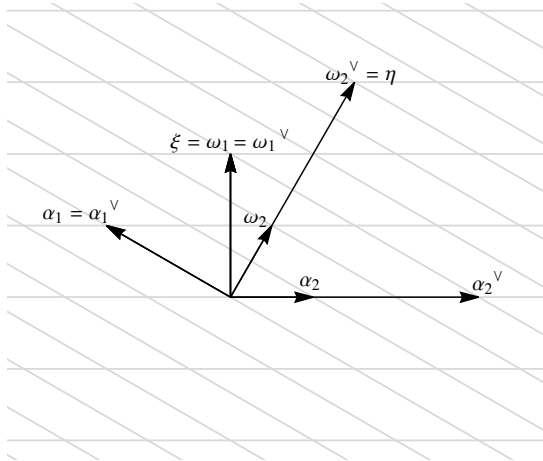
$$\omega_j^\vee = \frac{2\omega_j}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle}, \quad j \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (1.3.6)$$

L'équivalence (1.3.6) précédente permet d'expliciter la relation de dualité entre les racines et les copoids :

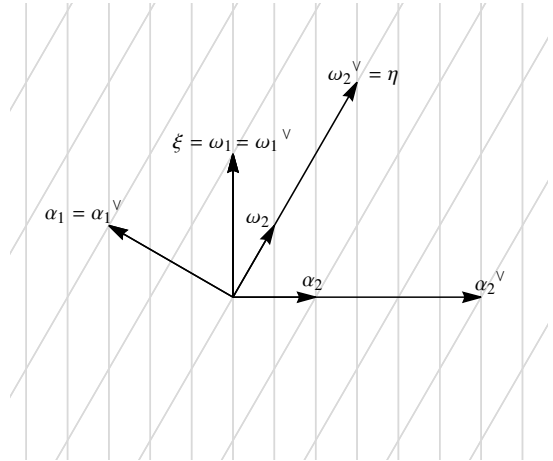
$$\frac{2 \langle \alpha_i, \omega_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} = \langle \alpha_i, \omega_j^\vee \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (1.3.7)$$

Ainsi, l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des copoids fondamentaux à coefficients entiers forme un réseau de copoids  $P^\vee$  qui est  $\mathbb{Z}$ -dual au réseau de racines  $Q$  :

$$P^\vee = \{ \omega^\vee \in E \mid \langle \alpha_i, \omega^\vee \rangle \in \mathbb{Z}, \forall \alpha_i \in \Delta \} = \mathbb{Z}\omega_1^\vee + \mathbb{Z}\omega_2^\vee + \cdots + \mathbb{Z}\omega_n^\vee. \quad (1.3.8)$$



(a) Réseau de racines  $Q$  de  $G_2$ .



(b) Réseau de poids  $P$  de  $G_2$ .

**Figure 1.2.** Les réseaux  $Q$  et  $P$  du système de racine cristallographique  $G_2$ . Les racines simples (duales) et les poids fondamentaux (duaux) sont identifiés.

Le diagramme ci-dessous permet d'expliciter les relations qui existent entre les quatre réseaux :

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \subset Q \quad Q^\vee \supset \{\alpha_1^\vee, \alpha_2^\vee, \dots, \alpha_n^\vee\} \quad (1.3.9)$$

$$\cap \times \cap \quad (1.3.10)$$

$$\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\} \subset P \quad P^\vee \supset \{\omega_1^\vee, \omega_2^\vee, \dots, \omega_n^\vee\} \quad (1.3.11)$$

Le symbole de multiplication « $\times$ » indique que les réseaux  $Q$  et  $P^\vee$ , ainsi que les réseaux  $Q^\vee$  et  $P$  sont  $\mathbb{Z}$ -dual entre eux, tout comme le requiert les relations de dualité (1.3.4) et (1.3.7) introduites plus haut.

## 1.4. Matrice de Cartan et diagrammes de Coxeter-Dynkin

Soit  $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  une base d'un système de racines où les racines simples sont ordonnées. La matrice de Cartan  $C$  est une matrice carrée  $n \times n$  et les entrées de cette dernière sont définies comme suit :

$$C_{ij} = \frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} = \langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (1.4.1)$$

et satisfont les conditions suivantes :

- (1) si  $i = j$ , alors  $C_{ij} = 2$ ;
- (2) si  $i \neq j$ , alors  $C_{ij} \leq 0$ ;
- (3) si  $i \neq j$  et  $C_{ij} = 0$ , alors  $C_{ji} = 0$ .

Les matrices de Cartan sont indépendantes du choix de la base  $\Delta$ , mais l'ordre dans lequel sont ordonnées les racines simples importe. En effet, changer l'ordonnance des racines de  $\Delta$  agit simplement en permutant les colonnes et les lignes de  $C$ . De plus, elles nous permettent d'établir une relation entre la base- $\alpha$  et la base- $\omega$  :

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} \omega_j, \quad \omega_i = \sum_{j=1}^n (C^{-1})_{ij} \alpha_j, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (1.4.2)$$

Nous pouvons retrouver les matrices de Cartan des différentes algèbres de Lie simples dans plusieurs livres (voir, par exemple, Humphreys [12] et Bremner, Murray Moody et Patera [2]). Voici celles pour les algèbres de Lie de rang 2 et 3 :

$$A_2 : \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C_2 : \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad G_2 : \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_3 : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C_3 : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad B_3 : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Chaque matrice de Cartan correspond à un graphe que l'on nomme diagramme de Coxeter-Dynkin (DCD). Ce graphe encode les angles entre les racines simples ainsi que les longueurs relatives entre elles. Considérons un système de racines cristallographique  $\Phi$  ainsi que sa base associée  $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ . Le diagramme de Coxeter-Dynkin correspondant est un graphe contenant :

- $n$  sommets que l'on nomme noeuds. Ils sont en bijection avec les éléments de la base  $\Delta$  et sont coloriés en blanc (noir) s'ils correspondent à une longue (courte) racine simple. Ces sommets sont couramment indicés selon l'index de leur racine simple associée ;
- des arêtes reliant  $\alpha_i$  et  $\alpha_j$  ( $i \neq j$ ), si l'élément de la matrice de Cartan  $C_{ij}$  est non nul. Le nombre d'arêtes entre deux noeuds est déterminé par la formule suivante :

$$\frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} \cdot \frac{2 \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} = \langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle \cdot \langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle = 4 \cos^2 \theta_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (1.4.3)$$

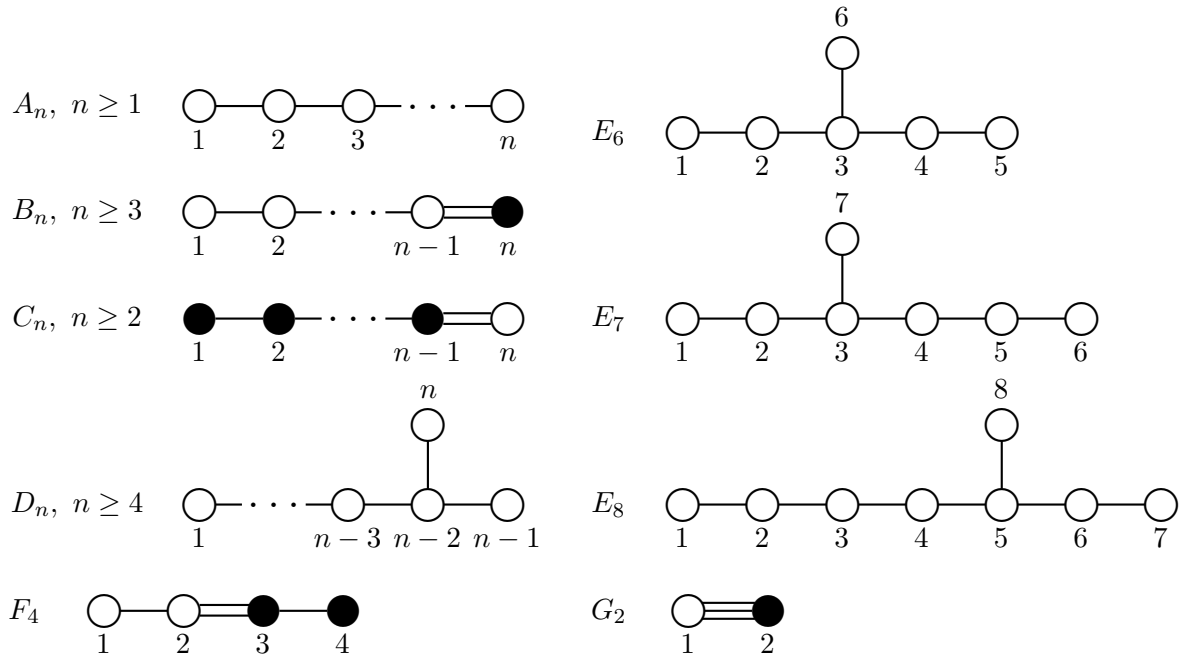
où  $\theta_{ij}$  correspond à l'angle entre les racines simples  $\alpha_i$  et  $\alpha_j$ . Comme  $0 \leq \cos^2 \theta_{ij} \leq 1$  et  $\Phi$  est un système de racines cristallographique (voir axiome 4), alors  $4 \cos^2 \theta_{ij} \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ . Or, puisque  $\Delta$  forme une base dans  $E$ , il en découle que  $\cos^2 \theta_{ij} \neq 1$ . Donc,

$$4 \cos^2 \theta_{ij} \in \{0, 1, 2, 3\}. \quad (1.4.4)$$

Par ailleurs, notons que si deux noeuds sont reliés entre eux, alors les racines simples correspondantes ne sont pas orthogonales entre elles. À l'inverse, si deux noeuds ne sont pas reliés entre eux, alors les racines simples correspondantes sont orthogonales entre elles. Lorsque deux sommets sont reliés par 1, 2 ou 3 arêtes, alors l'angle relatif entre les deux vecteurs de la base est respectivement  $\frac{2\pi}{3}$ ,  $\frac{3\pi}{4}$  ou  $\frac{5\pi}{6}$ . La figure 1.3 ci-dessous présente les DCD des algèbres de Lie simples.

## 1.5. Chambres de Weyl

Soit  $\gamma$  un vecteur dans l'espace euclidien  $E$ . On dit que ce dernier est régulier si  $\gamma \in E \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha$ . Sinon, il est singulier. En d'autres mots, si ce vecteur se situe sur un des miroirs de dimension  $n - 1$ , alors celui-ci sera singulier.



**Figure 1.3.** Les diagrammes de Coxeter-Dynkin des algèbres de Lie simples.

Il est facile d'observer que l'ensemble des hyperplans  $P_\alpha$  partitionne l'espace en un nombre fini de composantes connexes de  $E \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha$ . Ces composantes sont appelées les chambres de Weyl et nous identifierons l'ensemble des chambres de Weyl par  $D$ . Par conséquent, chaque vecteur régulier  $\gamma \in E$  se retrouve dans une et une seule chambre de Weyl, notée  $D(\gamma)$ . Enfin, ce que l'on appelle chambre fondamentale selon  $\Delta$ , notée  $D_+$ , correspond à l'ensemble ouvert convexe contenant tous les vecteurs  $\gamma \in E$  satisfaisant la condition suivante :

$$\langle \alpha, \gamma \rangle > 0, \quad \text{où } \alpha \in \Delta. \quad (1.5.1)$$

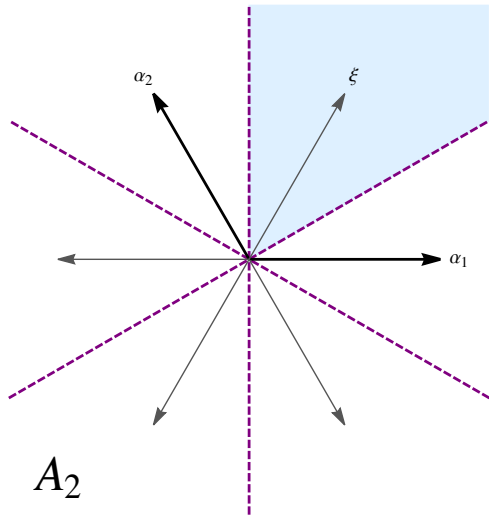
## 1.6. Groupes de Weyl et de Weyl affine

Un groupe de réflexions  $G$  est un sous-groupe du groupe général linéaire  $GL(n, E)$  engendré par les réflexions  $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ .  $G$  est également appelé un groupe de Coxeter si ces générateurs satisfont les deux conditions ci-dessous :

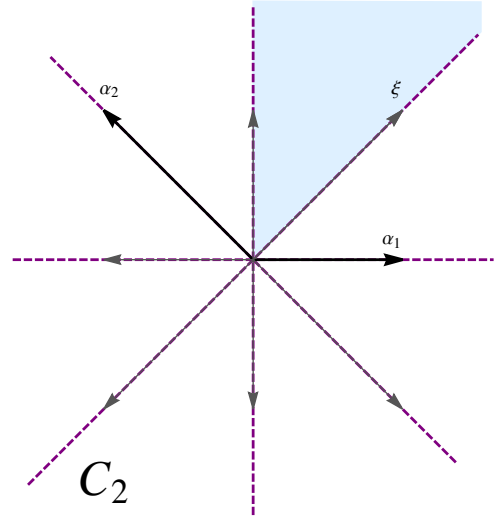
- (1)  $r_i^2 = 1, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\};$
- (2)  $(r_i r_j)^{m_{ij}} = 1, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\},$

où  $m_{ij}$  correspond à l'ordre de l'élément  $r_i r_j$ , c'est-à-dire le plus petit entier positif permettant à l'équation de tenir.

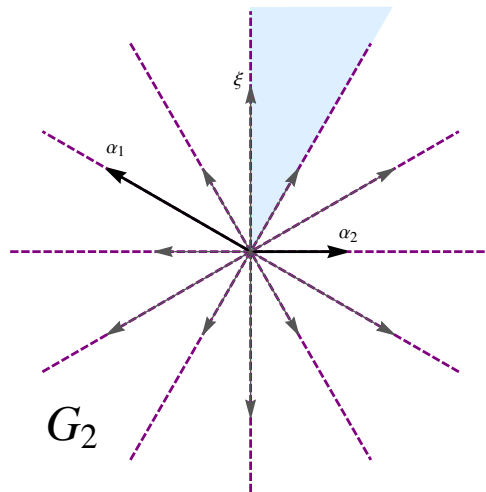
Afin de faciliter l'écriture, pour chaque réflexion  $r_{\alpha_i}, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , définie par l'équation (1.1.1), on introduit la notation suivante :  $r_{\alpha_i} := r_i$ . Soit  $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  une base d'un



(a) Les six chambres de Weyl du système de racines  $A_2$  ainsi que la chambre fondamentale  $D_+$  pour la base  $\{\alpha_1, \alpha_2\}$  identifiée en bleu pâle.



(b) Les huit chambres de Weyl du système de racines  $C_2$  ainsi que la chambre fondamentale  $D_+$  pour la base  $\{\alpha_1, \alpha_2\}$  identifiée en bleu pâle.



(c) Les douze chambres de Weyl du système de racines  $G_2$  ainsi que la chambre fondamentale  $D_+$  pour la base  $\{\alpha_1, \alpha_2\}$  identifiée en bleu pâle.

**Figure 1.4.** Les chambres de Weyl des systèmes de racines cristallographiques  $A_2, C_2$  et  $G_2$ .

système de racines  $\Phi$ . Un groupe de Weyl  $W$  est un groupe fini de réflexions associé à un

système de racines  $\Phi$ ,

$$W = \{r_i \mid \alpha_i \in \Delta\}. \quad (1.6.1)$$

Les entiers positifs  $m_{ij}$  associés aux générateurs du groupe de Weyl  $W$  d'un système de racines  $\Phi$  correspondent aux entrées de la matrice de Cartan  $C$  de ce même système de racines. Le Tableau 1.1 contient l'ordre du groupe de Weyl des différents systèmes de racines.

Système de racines	$ \Phi $	$ W $
$A_n, \quad n \geq 1$	$n(n+1)$	$(n+1)!$
$B_n, \quad n \geq 3$	$2n^2$	$2^n n!$
$C_n, \quad n \geq 2$	$2n^2$	$2^n n!$
$D_n, \quad n \geq 4$	$2n^2 - 2n$	$2^{n-1} n!$
$G_2$	12	12
$F_4$	48	$2^7 \cdot 3^2$
$E_6$	72	$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$
$E_7$	126	$2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$
$E_8$	240	$2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$

**Tableau 1.1.** Tableau comportant le nombre d'éléments des systèmes de racines  $\Phi$  et l'ordre des groupes de Weyl  $W$  associé aux différents systèmes de racines.

Considérons maintenant  $\xi \in \Phi$ , la plus haute racine du système de racines et introduisons aussi  $\eta \in \Phi^\vee$ , la plus haute coracine du système de racines duales,

$$\eta = \sum_{\alpha^\vee \in \Delta^\vee} k_{\alpha^\vee} \alpha^\vee, \quad (1.6.2)$$

où la somme  $\sum_{\alpha^\vee \in \Delta^\vee} k_{\alpha^\vee}$  est maximale. Ces deux vecteurs peuvent s'exprimer sous la forme d'une combinaison linéaire des racines simples et des coracines simples, respectivement :

$$\xi = \sum_{i=1}^n m_i \alpha_i, \quad \eta = \sum_{i=1}^n m_i^\vee \alpha_i^\vee, \quad (1.6.3)$$

où les coefficients  $m_i, m_i^\vee \in \mathbb{Z}_{>0}, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$  sont appelés marques et marques duales (comarques). La valeur de chacun de ses coefficients est répertoriée à la Table 1 de l'article de Hrivnák et Patera [10] pour les différentes algèbres de Lie simples. La plus haute racine  $\xi$  induit la réflexion  $r_\xi$  par rapport à l'hyperplan  $P_\xi = \{\beta \in E \mid \langle \beta, \xi \rangle = 0\}$  passant par l'origine définie de la manière suivante :

$$r_\xi(\beta) = \beta - \frac{2 \langle \beta, \xi \rangle}{\langle \xi, \xi \rangle} \xi. \quad (1.6.4)$$

Le groupe de Weyl affine  $W^{\text{aff}}$  est le groupe de réflexions infini engendré par les  $(n+1)$  transformations  $r_i, i \in \{0, 1, \dots, n\}$ , où  $r_0$  est appelé la réflexion affine. Il s'agit de la réflexion

à travers le miroir de dimension  $(n - 1)$ ,  $P_\xi$ , déplacé par le vecteur  $\frac{1}{2}\xi^\vee$  :

$$r_0(\beta) = r_\xi(\beta) + \frac{2\xi}{\langle \xi, \xi \rangle} = r_\xi(\beta) + \xi^\vee. \quad (1.6.5)$$

Le groupe de Weyl affine est le produit semi-direct entre le groupe de translation  $Q^\vee$  et le groupe de Weyl  $W$  :

$$W^{\text{aff}} = Q^\vee \rtimes W. \quad (1.6.6)$$

Ainsi, pour chaque élément  $w^{\text{aff}} \in W^{\text{aff}}$ , il existe un unique  $w \in W$  ainsi qu'une unique translation  $q^\vee \in Q^\vee$  tel que

$$w^{\text{aff}}a = wa + q^\vee, \quad (1.6.7)$$

où  $a \in E$ . Le produit de deux éléments du groupe de Weyl affine  $w_1^{\text{aff}}, w_2^{\text{aff}} \in W^{\text{aff}}$  de la forme  $w_1^{\text{aff}}a = w_1a + q_1^\vee, w_2^{\text{aff}}a = w_2a + q_2^\vee$  est donné par

$$\begin{aligned} w_1^{\text{aff}}w_2^{\text{aff}}a &= w_1^{\text{aff}}(w_2a + q_2^\vee) \\ &= w_1w_2a + w_1q_2^\vee + q_1^\vee. \end{aligned} \quad (1.6.8)$$

De plus, l'homomorphisme de projection standard  $\psi : W^{\text{aff}} \rightarrow W$  du produit semi-direct (1.6.6) et l'application  $\tau : W^{\text{aff}} \rightarrow Q^\vee$  sont définis comme suit :

$$\psi(w^{\text{aff}}) = w, \quad \tau(w^{\text{aff}}) = q^\vee. \quad (1.6.9)$$

De manière équivalente, on peut définir le groupe de Weyl affine dual, noté  $\widehat{W}^{\text{aff}}$ , comme le groupe engendré par les réflexions  $r_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$  ainsi que la réflexion  $r_0^\vee$  :

$$r_0^\vee(\beta) = r_\eta(\beta) + \frac{2\eta}{\langle \eta, \eta \rangle}, \quad r_\eta(\beta) = \beta - \frac{2\langle \beta, \eta \rangle}{\langle \eta, \eta \rangle}. \quad (1.6.10)$$

Comme précédemment, le groupe  $\widehat{W}^{\text{aff}}$  est le produit semi-direct entre le groupe de translation  $Q$  et le groupe de Weyl  $W$  :

$$\widehat{W}^{\text{aff}} = Q \rtimes W. \quad (1.6.11)$$

Par conséquent, pour chaque élément  $\widehat{w}^{\text{aff}} \in \widehat{W}^{\text{aff}}$ , il existe un unique  $w \in W$  ainsi qu'une unique translation  $q \in Q$  tel que

$$\widehat{w}^{\text{aff}}a = wa + q, \quad (1.6.12)$$

où  $a \in E$ . Le produit de deux éléments du groupe de Weyl affine dual  $\widehat{w}_1^{\text{aff}}, \widehat{w}_2^{\text{aff}} \in \widehat{W}^{\text{aff}}$  de la forme  $\widehat{w}_1^{\text{aff}}a = w_1a + q_1, \widehat{w}_2^{\text{aff}}a = w_2a + q_2$  est donné par

$$\begin{aligned} \widehat{w}_1^{\text{aff}}\widehat{w}_2^{\text{aff}}a &= \widehat{w}_1^{\text{aff}}(w_2a + q_2) \\ &= w_1w_2a + w_1q_2 + q_1. \end{aligned} \quad (1.6.13)$$

L'homomorphisme de projection standard dual  $\widehat{\psi} : \widehat{W}^{\text{aff}} \rightarrow W$  du produit semi-direct (1.6.11) et l'application  $\widehat{\tau} : \widehat{W}^{\text{aff}} \rightarrow Q$  sont définis de la manière suivante :

$$\widehat{\psi}(\widehat{w}^{\text{aff}}) = w, \quad \widehat{\tau}(\widehat{w}^{\text{aff}}) = q. \quad (1.6.14)$$

## 1.7. Régions fondamentales $F$ et $F^\vee$

La région fondamentale  $F$  du groupe de Weyl affine  $W^{\text{aff}}$  correspond à l'enveloppe convexe délimitée par les sommets  $\{0, \frac{\omega_1^\vee}{m_1}, \dots, \frac{\omega_n^\vee}{m_n}\}$  :

$$F = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \omega_i^\vee \mid a_0 + \sum_{i=1}^n m_i a_i = 1 \text{ et } a_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \forall i \in \{0, 1, \dots, n\} \right\} \quad (1.7.1)$$

$$= \left\{ \beta \in E \mid \langle \beta, \alpha \rangle \geq 0, \forall \alpha \in \Delta \text{ et } \langle \beta, \xi \rangle \leq 1 \right\}. \quad (1.7.2)$$

Ici, les coefficients  $m_i$ , introduits à la section 1.6, correspondent aux marques de la plus haute racine  $\xi$ . La région fondamentale possède la propriété que

$$W^{\text{aff}}(F) = E. \quad (1.7.3)$$

En effet, des réflexions répétées de  $F$  selon les miroirs  $(n-1)$ -dimensionnels pavent l'espace euclidien  $E$  par des copies d'elle-même. Les points contenus dans la région fondamentale  $F$  satisfont les propriétés suivantes :

(1) Pour chaque point  $\beta \in E$ , il existe  $\beta' \in F$ ,  $w \in W$  et  $q^\vee \in Q^\vee$  tel que

$$\beta = w\beta' + q^\vee. \quad (1.7.4)$$

(2) Pour chaque point  $\beta$ ,  $\beta' \in F$  tel que  $\beta' = w^{\text{aff}}\beta$ , où  $w^{\text{aff}} \in W^{\text{aff}}$ , alors  $\beta = \beta'$ .

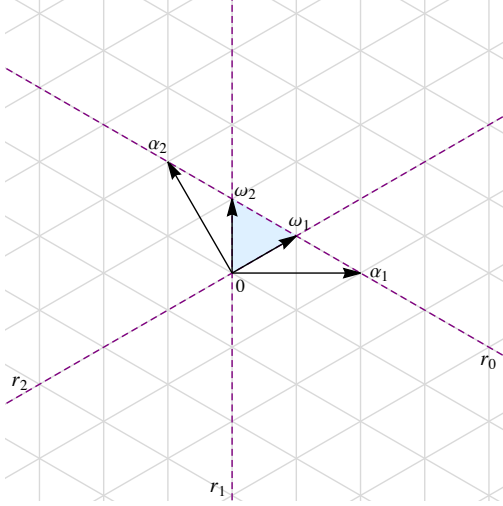
Le stabilisateur de chaque point  $\beta = \sum_{i=1}^n a_i \omega_i^\vee \in F$  est défini par

$$\text{Stab}_{W^{\text{aff}}}(\beta) = \left\{ w^{\text{aff}} \in W^{\text{aff}} \mid w^{\text{aff}}\beta = \beta \right\}. \quad (1.7.5)$$

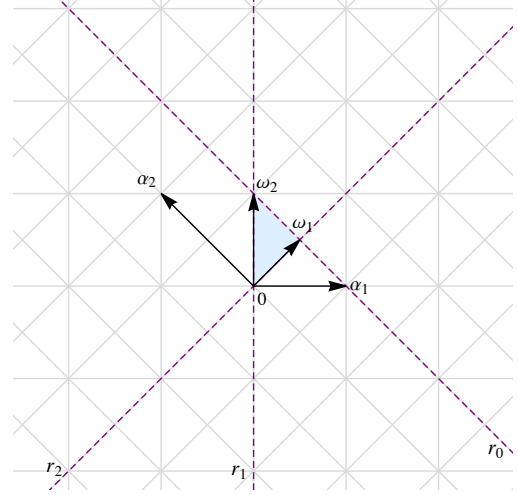
(3) Pour chaque point contenu dans l'intérieur de la région fondamentale,  $\beta \in \text{int}(F)$ , c'est-à-dire les points pour lesquels  $a_i > 0, \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$ , nous avons que  $\text{Stab}_{W^{\text{aff}}}(\beta) = 1$ . Sinon, le groupe  $\text{Stab}_{W^{\text{aff}}}(\beta)$  est engendré par les réflexions  $r_i$ , pour lesquelles  $a_i = 0, i \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

Similairement, il est possible de définir la région fondamentale du groupe de Weyl affine dual  $\widehat{W}^{\text{aff}}$ , notée  $F^\vee$ , comme étant l'enveloppe convexe délimitée par les sommets  $\{0, \frac{\omega_1}{m_1^\vee}, \dots, \frac{\omega_n}{m_n^\vee}\}$ , où les coefficients  $m_i^\vee$  correspondent aux comarques déjà introduites à la section 1.6.

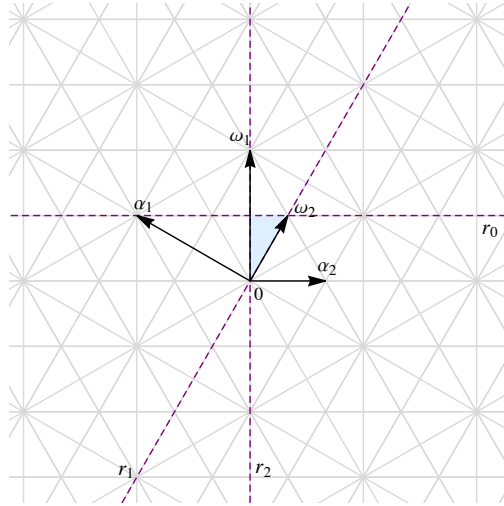




(a) Pavage  $W^{\text{aff}}(F(A_2))$  du plan euclidien pour le système de racines  $A_2$ . La région fondamentale  $F(A_2)$  est identifiée en bleu pâle.



(b) Pavage  $W^{\text{aff}}(F(C_2))$  du plan euclidien pour le système de racines  $C_2$ . La région fondamentale  $F(C_2)$  est identifiée en bleu pâle.



(c) Pavage  $W^{\text{aff}}(F(G_2))$  du plan euclidien pour le système de racines  $G_2$ . La région fondamentale  $F(G_2)$  est identifiée en bleu pâle.

**Figure 1.5.** Les régions fondamentales  $F$  des systèmes de racines cristallographiques  $A_2$ ,  $C_2$  et  $G_2$ .

La région fondamentale duale  $F^\vee$  correspond à l'ensemble suivant :

$$F^\vee = \left\{ \sum_{i=1}^n b_i \omega_i \mid b_0 + \sum_{i=1}^n m_i^\vee b_i = 1 \text{ et } b_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \forall i \in \{0, 1, \dots, n\} \right\} \quad (1.7.6)$$

$$= \left\{ \beta \in E \mid \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \geq 0, \forall \alpha^\vee \in \Delta^\vee \text{ et } \langle \beta, \eta \rangle \leq 1 \right\}. \quad (1.7.7)$$

À l'instar de la région  $F$ , la région fondamentale duale  $F^\vee$  possède la propriété que

$$\widehat{W}^{\text{aff}}(F^\vee) = E. \quad (1.7.8)$$

Les trois propriétés de la région fondamentale  $F$  valent pour la région fondamentale duale  $F^\vee$  avec les changements évidents (voir Hrivnák et Patera [10]).

## 1.8. Orbites du groupe de Weyl

Soit  $\lambda \in E$ , un vecteur quelconque. L'action des éléments d'un groupe de Weyl sur ce vecteur  $\lambda$  permet d'obtenir un ensemble de points  $\{w\lambda \mid w \in W\}$ . Cet ensemble est appelé l'orbite de  $\lambda$  sous le groupe de Weyl  $W$  et on le note  $\mathcal{O}_\lambda$ . La fermeture  $\overline{D}$  de chaque chambre de Weyl  $D$  contient exactement un point de l'orbite de  $\lambda$ . Ce faisant, il existe un unique point de cette orbite à l'intérieur de la fermeture de la chambre de Weyl dominante  $\overline{D}_+$  et c'est par ce point que l'orbite est habituellement identifiée. Ainsi, lorsque l'on parle de  $\mathcal{O}_\lambda$ , on sous-entend implicitement que  $\lambda \in \overline{D}_+$  et appellera cet unique vecteur le point dominant. Le nombre d'éléments contenus dans une orbite est appelé sa cardinalité et est noté  $|\mathcal{O}_\lambda|$ . Cette valeur peut être calculée à l'aide de la formule suivante :

$$|\mathcal{O}_\lambda| = \frac{|W|}{|\text{Stab}_W(\lambda)|}, \quad (1.8.1)$$

où  $\text{Stab}_W(\lambda)$  correspond au stabilisateur du vecteur  $\lambda$ . Clairement,  $\text{Stab}_W(\lambda) = \{w \in W \mid w\lambda = \lambda\}$  est un sous-groupe de  $W$ . Géométriquement, les éléments de  $\mathcal{O}_\lambda$  peuvent être perçus comme les sommets d'un polytope engendré par les réflexions dans l'espace euclidien  $E$ .

# Chapitre 2

---

## Fonctions d'orbite du groupe de Weyl

Les fonctions d'orbite du groupe de Weyl s'expriment sous la forme d'une somme de fonctions exponentielles en plusieurs variables. Il existe trois familles de ces fonctions pour les systèmes de racines cristallographiques, soit

- les fonctions symétriques (fonctions-C),
- les fonctions antisymétriques (fonctions-S) et
- les fonctions paires (fonctions-E).

Ces dernières ont été étudiées à plusieurs reprises en raison de leurs propriétés pertinentes (voir Klimik et Patera [13, 14, 15] et Nesterenko et Patera [20]). Ce chapitre se concentre sur l'étude des fonctions symétriques et antisymétriques en particulier pour les systèmes de racines  $A_2$ ,  $C_2$  et  $G_2$ . Les notions couvertes au cours des premières sections sont classiques et bien connues (voir Hrivnák, Motlochová et Patera [8]). Toutefois, les concepts abordés aux sections 2.9 à 2.11 sont nouveaux et ont été introduits récemment par Czyżycki, Hrivnák et Patera dans [4]. Les articles de Hrivnák, Motlochová et Patera [9] et de Czyżycki et Hrivnák [3] forment aussi deux références pertinentes. L'espace euclidien considéré au cours des sections et chapitres à venir est  $E = \mathbb{R}^n$ .

### 2.1. Les homomorphismes de signe

Avant d'introduire les fonctions d'orbite du groupe de Weyl, abordons d'abord la notion d'homomorphisme de signe. Les homomorphismes de signe sont des homomorphismes du groupe de Weyl  $W$  vers le groupe  $\{+1, -1\}$  :

$$\sigma : W \rightarrow \{+1, -1\}. \tag{2.1.1}$$

Les deux choix les plus communs d'homomorphisme de signe correspondent à l'application triviale ainsi qu'à l'application déterminant :

$$\sigma^{(0)}(w) = 1, \quad \sigma^{(1)}(w) = \det(w). \quad (2.1.2)$$

Ces deux applications,  $\sigma^{(0)}$  et  $\sigma^{(1)}$ , peuvent être définies pour n'importe quel groupe de Weyl  $W$ , tandis que les homomorphismes de signe court et long,  $\sigma^{(2)}$  et  $\sigma^{(3)}$ , quant à eux, sont définis seulement pour les systèmes de racines  $\Phi$  qui possèdent des racines de longueur distincte. Si  $\Delta_s$  et  $\Delta_l$  représentent les ensembles de racines simples courtes et longues respectivement ( $\Delta_s \cup \Delta_l = \Delta$ ), l'action de  $\sigma^{(2)}$  et  $\sigma^{(3)}$  sur l'ensemble des générateurs  $\{r_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$  est définie de la manière suivante :

$$\sigma^{(2)}(r_\alpha) = \begin{cases} -1, & \text{si } \alpha \in \Delta_s, \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases} \quad \sigma^{(3)}(r_\alpha) = \begin{cases} -1, & \text{si } \alpha \in \Delta_l, \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Ces quatre homomorphismes de signe sont cruciaux puisqu'ils sont à la base de la définition des fonctions d'orbite de Weyl comme nous le verrons dans la prochaine section.

## 2.2. Fonctions d'orbite de Weyl

À chaque homomorphisme de signe  $\sigma \in \{\sigma^{(0)}, \sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \sigma^{(3)}\}$  du groupe de Weyl correspond une fonction d'orbite de Weyl  $\varphi_\lambda^{(j)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ . Ces applications sont paramétrées par  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  et définies pour chaque  $z \in \mathbb{R}^n$  par l'équation

$$\varphi_\lambda^{(j)}(z) = \sum_{w \in W} \sigma^{(j)}(w) e^{2\pi i \langle w\lambda, z \rangle}. \quad (2.2.1)$$

Étant donné que les systèmes de racines  $C_2$  et  $G_2$  possèdent deux longueurs de racine, mais pas celui de  $A_2$ ,  $j$  prend les valeurs :

$$\begin{aligned} A_2 : j &\in \{0, 1\}, \\ C_2 : j &\in \{0, 1, 2, 3\}, \\ G_2 : j &\in \{0, 1, 2, 3\}. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Rappelons quelques propriétés importantes de ces quatre fonctions [8] :

- Le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  dans  $\mathbb{R}^n$  est invariant sous le groupe de Weyl  $W$ , c'est-à-dire que  $\forall w \in W \langle w\alpha, w\beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$ , où  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ . Donc,

$$\varphi_{w\lambda}^{(j)}(z) = \varphi_\lambda^{(j)}(wz) = \sigma^{(j)}(w) \varphi_\lambda^{(j)}(z), \quad j \in \{0, 1, 2, 3\}. \quad (2.2.3)$$

De plus, les fonctions d'orbite de Weyl sont également invariantes sous toute translation d'un vecteur du réseau de racines duales  $q^\vee \in Q^\vee$ ,

$$\varphi_\lambda^{(j)}(z + q^\vee) = \varphi_\lambda^{(j)}(z), \quad j \in \{0, 1, 2, 3\}. \quad (2.2.4)$$

- Pour n'importe quel scalaire  $c \in \mathbb{R}$ ,

$$\varphi_\lambda^{(j)}(cz) = \varphi_{c\lambda}^{(j)}(z), \quad j \in \{0, 1, 2, 3\}. \quad (2.2.5)$$

- Puisque le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  dans  $\mathbb{R}^n$  est symétrique, il est possible d'exprimer la dualité des fonctions d'orbite comme suit :

$$\varphi_\lambda^{(j)}(z) = \varphi_z^{(j)}(\lambda), \quad j \in \{0, 1, 2, 3\}. \quad (2.2.6)$$

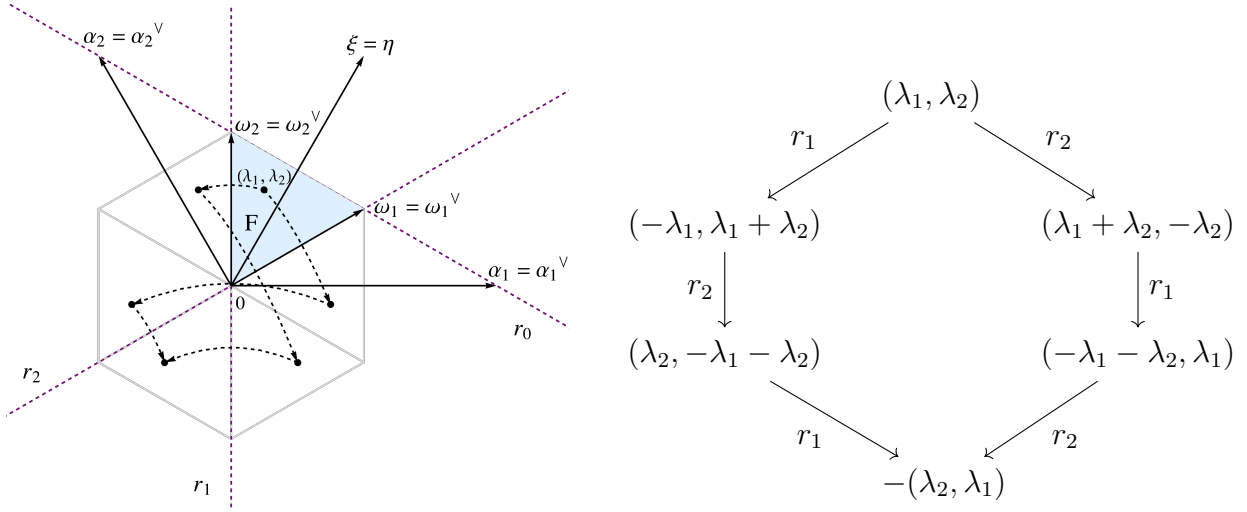
Une autre propriété importante des fonctions d'orbite de Weyl est l'orthogonalité. L'orthogonalité continue de ces dernières est définie dans les articles de Klymuk et Patera [13, 14] ainsi que dans l'article de Moody et Patera [18] et l'orthogonalité discrète a été analysée par Hrivnak et Patera [10] ainsi que par Hrivnak et Walton [11]. Les sections à venir mettront la table pour la section 2.8 qui rappellera les relations d'orthogonalité discrètes généralisées présentées dans [3] par Czyżycki et Hrivnák.

### 2.2.1. Fonctions d'orbite de Weyl de $A_2$

Soit  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$  un point dominant avec coordonnées dans la base des poids et soit  $z = (z_1, z_2)$  un point avec coordonnées dans la base des racines duales, les fonctions de Weyl de  $A_2$  s'expriment explicitement de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \varphi_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(0)}(z_1, z_2) &= e^{2\pi i(z_1 \lambda_1 + z_2 \lambda_2)} + e^{-2\pi i(z_1 \lambda_1 - z_2 \lambda_1 - z_2 \lambda_2)} + e^{2\pi i(z_1 \lambda_1 + z_2 \lambda_2 - z_2 \lambda_2)} \\ &\quad + e^{-2\pi i(z_1 \lambda_2 + z_2 \lambda_1)} + e^{-2\pi i(z_1 \lambda_1 + z_1 \lambda_2 - z_2 \lambda_1)} + e^{2\pi i(z_1 \lambda_2 - z_2 \lambda_1 - z_2 \lambda_2)}, \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(1)}(z_1, z_2) &= e^{2\pi i(z_1 \lambda_1 + z_2 \lambda_2)} - e^{-2\pi i(z_1 \lambda_1 - z_2 \lambda_1 - z_2 \lambda_2)} - e^{2\pi i(z_1 \lambda_1 + z_2 \lambda_2 - z_2 \lambda_2)} \\ &\quad - e^{-2\pi i(z_1 \lambda_2 + z_2 \lambda_1)} + e^{-2\pi i(z_1 \lambda_1 + z_1 \lambda_2 - z_2 \lambda_1)} + e^{2\pi i(z_1 \lambda_2 - z_2 \lambda_1 - z_2 \lambda_2)}. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$



**Figure 2.1.** Orbite du groupe de Weyl d'un point dominant  $(\lambda_1, \lambda_2)$  contenu à l'intérieur de la région fondamentale  $F$  du groupe de Weyl affine identifiée en bleu pâle. La plus haute racine (duale), les racines simples (duales) et les poids fondamentaux (duaux) du système de racines de  $A_2$  sont également illustrés ainsi que  $W(F)$ .

### 2.2.2. Fonctions d'orbite de Weyl de $C_2$

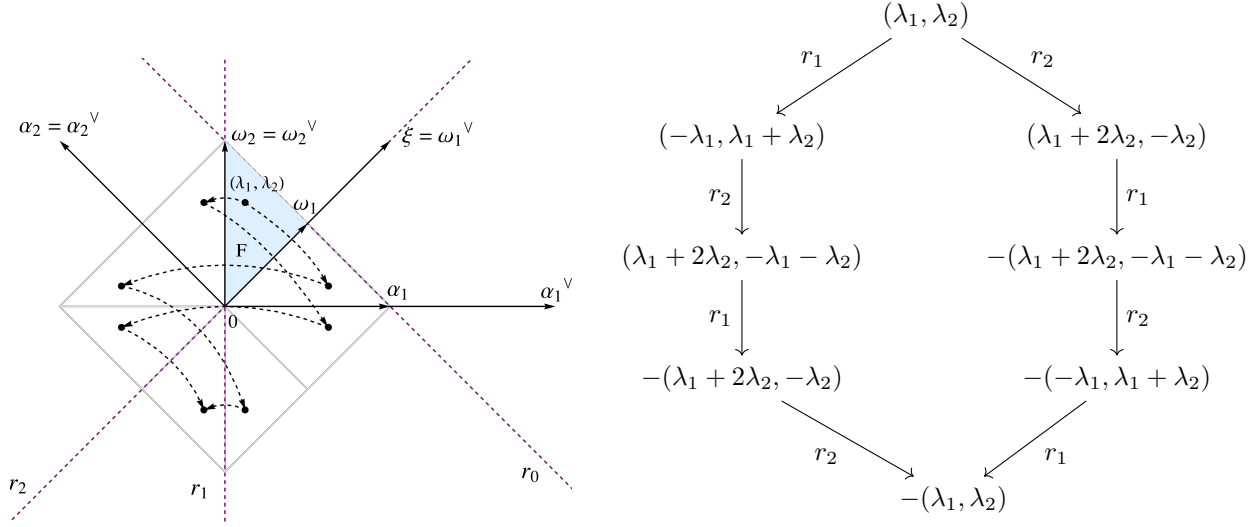
Soit  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$  un point dominant avec coordonnées dans la base des poids et soit  $z = (z_1, z_2)$  un point avec coordonnées dans la base des racines duales, les fonctions de Weyl de  $C_2$  sont :

$$\begin{aligned} \varphi_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(0)}(z_1, z_2) &= 2 \cos(2\pi(z_1 \lambda_1 + z_2 \lambda_2)) + 2 \cos(2\pi(z_1 \lambda_1 + 2z_1 \lambda_2 - z_2 \lambda_1 - z_2 \lambda_2)) \quad (2.2.9) \\ &\quad + 2 \cos(2\pi(z_1 \lambda_1 + 2z_1 \lambda_2 - z_2 \lambda_2)) + 2 \cos(2\pi(z_1 \lambda_1 - z_2 \lambda_1 - z_2 \lambda_2)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(1)}(z_1, z_2) &= 2 \cos(2\pi(z_1 \lambda_1 + z_2 \lambda_2)) + 2 \cos(2\pi(z_1 \lambda_1 + 2z_1 \lambda_2 - z_2 \lambda_1 - z_2 \lambda_2)) \quad (2.2.10) \\ &\quad - 2 \cos(2\pi(z_1 \lambda_1 + 2z_1 \lambda_2 - z_2 \lambda_2)) - 2 \cos(2\pi(z_1 \lambda_1 - z_2 \lambda_1 - z_2 \lambda_2)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(2)}(z_1, z_2) &= 2 \cos(2\pi(z_1 \lambda_1 + z_2 \lambda_2)) - 2 \cos(2\pi(z_1 \lambda_1 + 2z_1 \lambda_2 - z_2 \lambda_1 - z_2 \lambda_2)) \quad (2.2.11) \\ &\quad + 2 \cos(2\pi(z_1 \lambda_1 + 2z_1 \lambda_2 - z_2 \lambda_2)) - 2 \cos(2\pi(z_1 \lambda_1 - z_2 \lambda_1 - z_2 \lambda_2)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(3)}(z_1, z_2) &= 2 \cos(2\pi(z_1 \lambda_1 + z_2 \lambda_2)) - 2 \cos(2\pi(z_1 \lambda_1 + 2z_1 \lambda_2 - z_2 \lambda_1 - z_2 \lambda_2)) \quad (2.2.12) \\ &\quad - 2 \cos(2\pi(z_1 \lambda_1 + 2z_1 \lambda_2 - z_2 \lambda_2)) + 2 \cos(2\pi(z_1 \lambda_1 - z_2 \lambda_1 - z_2 \lambda_2)). \end{aligned}$$



**Figure 2.2.** Orbite du groupe de Weyl d'un point dominant  $(\lambda_1, \lambda_2)$  contenu à l'intérieur de la région fondamentale  $F$  identifiée en bleu pâle. La plus haute racine, les racines simples (duales) et les poids fondamentaux (duaux) du système de racines de  $G_2$  sont également illustrés ainsi que  $W(F)$ .

### 2.2.3. Fonctions d'orbite de Weyl de $G_2$

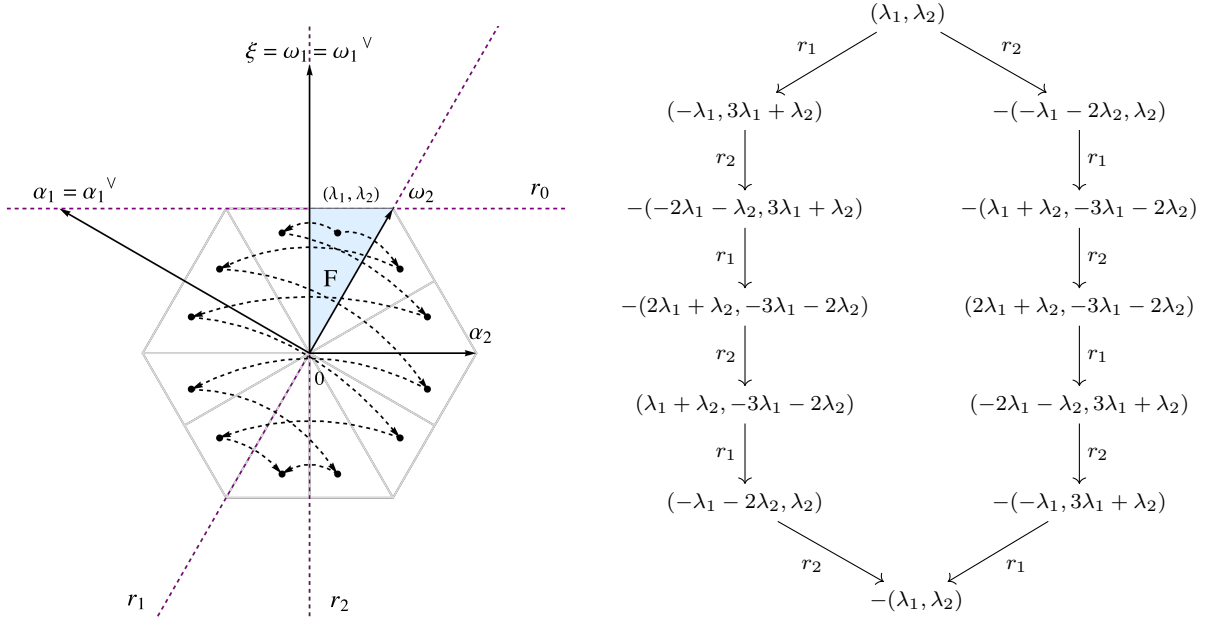
Soit  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$  un point dominant avec coordonnées dans la base des poids et soit  $z = (z_1, z_2)$  un point avec coordonnées dans la base des racines duales, les fonctions de Weyl de  $G_2$  sont :

$$\begin{aligned} \varphi_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(0)}(z_1, z_2) &= 2 \cos(2\pi(z_1 \lambda_1 + z_2 \lambda_2)) + 2 \cos(2\pi(2z_1 \lambda_1 + z_1 \lambda_2 - 3z_2 \lambda_1 - z_2 \lambda_2)) \quad (2.2.13) \\ &\quad + 2 \cos(2\pi(z_1 \lambda_1 + z_1 \lambda_2 - 3z_2 \lambda_1 - 2z_2 \lambda_2)) + 2 \cos(2\pi(z_1 \lambda_1 + z_1 \lambda_2 - z_2 \lambda_2)) \\ &\quad + 2 \cos(2\pi(2z_1 \lambda_1 + z_1 \lambda_2 - 3z_2 \lambda_1 - 2z_2 \lambda_2)) + 2 \cos(2\pi(z_1 \lambda_1 - 3z_2 \lambda_1 - z_2 \lambda_2)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(1)}(z_1, z_2) &= 2 \cos(2\pi(z_1 \lambda_1 + z_2 \lambda_2)) + 2 \cos(2\pi(2z_1 \lambda_1 + z_1 \lambda_2 - 3z_2 \lambda_1 - z_2 \lambda_2)) \quad (2.2.14) \\ &\quad + 2 \cos(2\pi(z_1 \lambda_1 + z_1 \lambda_2 - 3z_2 \lambda_1 - 2z_2 \lambda_2)) - 2 \cos(2\pi(z_1 \lambda_1 + z_1 \lambda_2 - z_2 \lambda_2)) \\ &\quad - 2 \cos(2\pi(2z_1 \lambda_1 + z_1 \lambda_2 - 3z_2 \lambda_1 - 2z_2 \lambda_2)) - 2 \cos(2\pi(z_1 \lambda_1 - 3z_2 \lambda_1 - z_2 \lambda_2)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(2)}(z_1, z_2) &= 2i \left( \sin(2\pi(z_1 \lambda_1 + z_2 \lambda_2)) - \sin(2\pi(2z_1 \lambda_1 + z_1 \lambda_2 - 3z_2 \lambda_1 - z_2 \lambda_2)) \quad (2.2.15) \right. \\ &\quad + \sin(2\pi(z_1 \lambda_1 + z_1 \lambda_2 - 3z_2 \lambda_1 - 2z_2 \lambda_2)) - \sin(2\pi(z_1 \lambda_1 + z_1 \lambda_2 - z_2 \lambda_2)) \\ &\quad \left. + \sin(2\pi(2z_1 \lambda_1 + z_1 \lambda_2 - 3z_2 \lambda_1 - 2z_2 \lambda_2)) - \sin(2\pi(z_1 \lambda_1 - 3z_2 \lambda_1 - z_2 \lambda_2)) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(3)}(z_1, z_2) &= 2i \left( \sin(2\pi(z_1 \lambda_1 + z_2 \lambda_2)) - \sin(2\pi(2z_1 \lambda_1 + z_1 \lambda_2 - 3z_2 \lambda_1 - z_2 \lambda_2)) \quad (2.2.16) \right. \\ &\quad + \sin(2\pi(z_1 \lambda_1 + z_1 \lambda_2 - 3z_2 \lambda_1 - 2z_2 \lambda_2)) + \sin(2\pi(z_1 \lambda_1 + z_1 \lambda_2 - z_2 \lambda_2)) \\ &\quad \left. - \sin(2\pi(2z_1 \lambda_1 + z_1 \lambda_2 - 3z_2 \lambda_1 - 2z_2 \lambda_2)) + \sin(2\pi(z_1 \lambda_1 - 3z_2 \lambda_1 - z_2 \lambda_2)) \right). \end{aligned}$$



**Figure 2.3.** Orbite du groupe de Weyl d'un point dominant  $(\lambda_1, \lambda_2)$  contenu à l'intérieur de la région fondamentale  $F$  identifiée en bleu pâle. La plus haute racine, les racines simples et les poids fondamentaux du système de racines de  $G_2$  sont également illustrés ainsi que  $W(F)$ .

## 2.3. Déplacements admissibles

Étant donné un vecteur  $\varrho^\vee \in \mathbb{R}^n$ , celui-ci est appelé un déplacement admissible si le réseau déplacé  $\varrho^\vee + P^\vee$  reste invariant sous  $W$ , c'est-à-dire

$$W(\varrho^\vee + P^\vee) = \varrho^\vee + P^\vee. \quad (2.3.1)$$

Un déplacement admissible est dit trivial si  $\varrho^\vee + P^\vee = P^\vee$  ( $\varrho^\vee \in P^\vee$ ). Aussi, si deux déplacements admissibles  $\varrho_1^\vee, \varrho_2^\vee$  diffèrent par un déplacement trivial,  $\varrho_1^\vee - \varrho_2^\vee \in P^\vee$ , alors ces derniers sont dits équivalents. Cette relation d'équivalence permet de classifier les différents déplacements admissibles et la proposition suivante simplifie grandement ce processus.

**Proposition 2.3.1.** *Soit  $\varrho^\vee \in \mathbb{R}^n$ . Alors, les énoncés suivants sont équivalents :*

- (1)  $\varrho^\vee$  est un déplacement admissible.
- (2) Pour chaque  $w \in W$ ,  $\varrho^\vee - w\varrho^\vee \in P^\vee$ .
- (3)  $\varrho^\vee - r_i(\varrho^\vee) \in P^\vee, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .



La preuve de cette proposition n'est pas donnée (voir [3] pour la démonstration). En analysant l'équation (2.3.1), il est pratique de considérer un déplacement admissible  $\varrho^\vee$  dans la  $\omega^\vee$ -base.

Systeme de racines	$\varrho$	$\varrho^\vee$
$A_1$	$\frac{1}{2}\omega_1$	$\frac{1}{2}\omega_1^\vee$
$C_2$	$\frac{1}{2}\omega_2$	$\frac{1}{2}\omega_1^\vee$
$B_n, n \geq 3$	—	$\frac{1}{2}\omega_n^\vee$
$C_n, n \geq 3$	$\frac{1}{2}\omega_n$	—

**Tableau 2.1.** Les déplacements admissibles non triviaux  $\varrho, \varrho^\vee$  des systemes de racines cristallographiques irreductibles.

Similairement, un vecteur  $\varrho \in \mathbb{R}^n$  est appele un déplacement admissible dual si le reseau deplace  $\varrho + P$  reste  $W$ -invariant. Les déplacements admissibles duaux  $\varrho$  possedent les memes caracteristiques que les déplacements admissibles  $\varrho^\vee$  avec les changements evidents. Une adaptation de la proposition 2.3.1 mene a la classification des déplacements admissibles duaux.

**Proposition 2.3.2.** *Soit  $\varrho \in \mathbb{R}^n$ . Alors, les enonces suivants sont equivalents :*

- (1)  $\varrho$  est un déplacement admissible dual.
- (2) Pour chaque  $w \in W$ ,  $\varrho - w\varrho \in P$ .
- (3)  $\varrho - r_i(\varrho) \in P, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

La preuve de cette proposition est egalement omise. De maniere analogue aux déplacements  $\varrho^\vee$ , il est avantageux de considerer les déplacements admissibles duaux  $\varrho$  dans la  $\omega$ -base. Le Tableau 2.1 rassemble tous les déplacements admissibles non triviaux  $\varrho, \varrho^\vee$  des systemes de racines cristallographiques irreductibles.

## 2.4. Homomorphismes de déplacement

A chaque déplacement admissible  $\varrho^\vee$  correspond une application allant du groupe de Weyl affine dual  $\widehat{W}^{\text{aff}}$  au groupe  $\{+1, -1\}$  :

$$\widehat{\theta}_{\varrho^\vee} : \widehat{W}^{\text{aff}} \rightarrow \{+1, -1\}. \quad (2.4.1)$$

Cette application est appelee un homomorphisme de déplacement et est definie pour chaque  $\widehat{w}^{\text{aff}} \in \widehat{W}^{\text{aff}}$  de la maniere suivante :

$$\widehat{\theta}_{\varrho^\vee}(\widehat{w}^{\text{aff}}) = e^{2\pi i \langle \tau(\widehat{w}^{\text{aff}}), \varrho^\vee \rangle}, \quad (2.4.2)$$

où  $\hat{\tau}$  est l'application introduite à la relation (1.6.14). L'équation (2.4.2) est bien définie puisque pour chaque déplacement admissible trivial  $\varrho^\vee$ ,  $\hat{\theta}_{\varrho^\vee}(\hat{w}^{\text{aff}}) = 1$  en raison de la  $\mathbb{Z}$ -dualité des réseaux  $P^\vee$  et  $Q$ . Aussi, comme chaque déplacement admissible non trivial  $\varrho^\vee$  provient du réseau  $\frac{1}{2}P^\vee$  (voir Tableau 2.1), alors  $\hat{\theta}_{\varrho^\vee}(\hat{w}^{\text{aff}}) \in \{+1, -1\}$ . De plus,  $\hat{\theta}_{\varrho^\vee}$  est bel et bien un homomorphisme et afin de s'en convaincre, il faut d'abord remarquer que pour  $w \in W$  et  $q \in Q$ , l'égalité suivante est valide :

$$e^{2\pi i \langle q, \varrho^\vee \rangle} = e^{2\pi i \langle wq, \varrho^\vee \rangle}. \quad (2.4.3)$$

En effet, comme le produit scalaire est invariant sous l'action du groupe de Weyl  $W$ , nous avons que  $\langle wq, \varrho^\vee \rangle = \langle q, w^{-1}\varrho^\vee \rangle$ , où  $w \in W$ . Ainsi,

$$\frac{e^{2\pi i \langle q, \varrho^\vee \rangle}}{e^{2\pi i \langle q, w^{-1}\varrho^\vee \rangle}} = e^{2\pi i \langle q, \varrho^\vee - w^{-1}\varrho^\vee \rangle} \quad (2.4.4)$$

$$= 1, \quad (2.4.5)$$

car  $\langle q, \varrho^\vee - w^{-1}\varrho^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$  en vertu du deuxième énoncé de la Proposition 2.3.1. Par conséquent, pour deux éléments du groupe de Weyl affine dual  $\hat{w}_1^{\text{aff}}, \hat{w}_2^{\text{aff}} \in \widehat{W}^{\text{aff}}$  de la forme  $\hat{w}_1^{\text{aff}}a = w_1a + q_1$ ,  $\hat{w}_2^{\text{aff}}a = w_2a + q_2$  avec  $w_1, w_2 \in W$  et  $q_1, q_2 \in Q$ , l'équation (1.6.13) permet d'obtenir que  $\hat{\tau}(\hat{w}_1^{\text{aff}}\hat{w}_2^{\text{aff}}) = w_1q_2 + q_1$  et ainsi

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{\varrho^\vee}(\hat{w}_1^{\text{aff}}\hat{w}_2^{\text{aff}}) &= e^{2\pi i \langle \hat{\tau}(\hat{w}_1^{\text{aff}}\hat{w}_2^{\text{aff}}), \varrho^\vee \rangle} \\ &= e^{2\pi i \langle w_1q_2 + q_1, \varrho^\vee \rangle} \\ &= e^{2\pi i \langle w_1q_2, \varrho^\vee \rangle} e^{2\pi i \langle q_1, \varrho^\vee \rangle} \\ &= e^{2\pi i \langle q_2, \varrho^\vee \rangle} e^{2\pi i \langle q_1, \varrho^\vee \rangle} \\ &= \hat{\theta}_{\varrho^\vee}(\hat{w}_1^{\text{aff}})\hat{\theta}_{\varrho^\vee}(\hat{w}_2^{\text{aff}}). \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

Ainsi, l'évaluation de l'homomorphisme de déplacement  $\hat{\theta}_{\varrho^\vee}$  sur n'importe quel élément  $\hat{w}^{\text{aff}} \in \widehat{W}^{\text{aff}}$  est entièrement déterminée par les valeurs de l'application (2.4.2) sur l'ensemble des générateurs  $\{r_0^\vee, r_1, r_2, \dots, r_n\}$  du groupe de Weyl affine dual. Pour un déplacement admissible non trivial  $\varrho^\vee$ , le calcul de  $\hat{\theta}_{\varrho^\vee}(r_0^\vee)$  dépend du produit scalaire  $\langle \eta, \varrho^\vee \rangle$ . À l'aide des valeurs rassemblées dans le Tableau 2.1, il s'avère que pour un déplacement admissible non trivial,

$$\frac{2 \langle \eta, \varrho^\vee \rangle}{\langle \eta, \eta \rangle} = \frac{1}{2}. \quad (2.4.7)$$

En conséquence,

$$\hat{\theta}_{\varrho^\vee}(r_0^\vee) = e^{2\pi i \langle \hat{\tau}(r_0^\vee), \varrho^\vee \rangle} = e^{2\pi i \frac{2 \langle \eta, \varrho^\vee \rangle}{\langle \eta, \eta \rangle}} = -1, \quad (2.4.8)$$

ce qui mène à l'égalité suivante :

$$\widehat{\theta}_{\varrho^\vee}(r_i) = \begin{cases} 1, & \text{si } i \in \{1, 2, \dots, n\}, \\ -1, & \text{si } r_i = r_0^\vee. \end{cases} \quad (2.4.9)$$

Parallèlement, un homomorphisme  $\theta_\varrho : W^{\text{aff}} \rightarrow \{+1, -1\}$  est défini par

$$\theta_\varrho(w^{\text{aff}}) = e^{2\pi i \langle \tau(w^{\text{aff}}), \varrho \rangle}, \quad (2.4.10)$$

où  $\tau$  correspond à l'application introduite à la relation (1.6.9) et ses valeurs sur l'ensemble des générateurs  $\{r_0, r_1, r_2, \dots, r_n\}$  du groupe de Weyl affine mènent à l'égalité ci-dessous :

$$\theta_\varrho(r_i) = \begin{cases} 1, & \text{si } i \in \{1, 2, \dots, n\}, \\ -1, & \text{si } r_i = r_0. \end{cases} \quad (2.4.11)$$

## 2.5. Homomorphismes $\gamma$

La combinaison des trois homomorphismes introduits jusqu'à présent, soit l'homomorphisme de projection  $\psi$  (1.6.9), l'homomorphisme de signe  $\sigma$  (2.1.2, 2.1.3) ainsi que l'homomorphisme de déplacement dual  $\theta_\varrho$  (2.4.2) définit un homomorphisme  $\gamma_\varrho^\sigma$  allant du groupe de Weyl affine  $W^{\text{aff}}$  au groupe  $\{+1, -1\}$  :

$$\gamma_\varrho^\sigma : W^{\text{aff}} \rightarrow \{+1, -1\}. \quad (2.5.1)$$

Cette application est définie pour chaque  $w^{\text{aff}} \in W^{\text{aff}}$  selon la relation

$$\gamma_\varrho^\sigma(w^{\text{aff}}) = \theta_\varrho(w^{\text{aff}}) \cdot (\sigma \circ \psi(w^{\text{aff}})). \quad (2.5.2)$$

L'évaluation de  $\gamma_\varrho^\sigma$  sur n'importe quel élément  $w^{\text{aff}}$  du groupe affine  $W^{\text{aff}}$  est déterminée par les valeurs de (2.5.2) sur les générateurs  $\{r_0, r_1, r_2, \dots, r_n\}$  de  $W^{\text{aff}}$ . Ces dernières sont rassemblées dans le Tableau 2.2 pour un déplacement admissible dual trivial ( $\varrho = 0$ ) et non trivial  $\varrho$ .

Générateurs	$\gamma_0^{\sigma(0)}$	$\gamma_0^{\sigma(1)}$	$\gamma_0^{\sigma(2)}$	$\gamma_0^{\sigma(3)}$	$\gamma_\varrho^{\sigma(0)}$	$\gamma_\varrho^{\sigma(1)}$	$\gamma_\varrho^{\sigma(2)}$	$\gamma_\varrho^{\sigma(3)}$
$r_0^\vee$	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1
$r_\alpha, \alpha \in \Delta_s$	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
$r_\alpha, \alpha \in \Delta_l$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1

**Tableau 2.2.** Les valeurs de  $\gamma_\varrho^\sigma$  sur l'ensemble des générateurs du groupe de Weyl affine pour un déplacement admissible dual trivial ( $\varrho = 0$ ) et non trivial  $\varrho$  selon les quatre homomorphismes de signe  $\sigma$ .

Similairement, un homomorphisme  $\widehat{\gamma}_{\varrho^\vee}^\sigma : \widehat{W}^{\text{aff}} \rightarrow \{+1, -1\}$  est défini par

$$\widehat{\gamma}_{\varrho^\vee}^\sigma(\widehat{w}^{\text{aff}}) = \widehat{\theta}_{\varrho^\vee}(\widehat{w}^{\text{aff}}) \cdot (\sigma \circ \widehat{\psi}(\widehat{w}^{\text{aff}})) \quad (2.5.3)$$

et ses valeurs sur les générateurs de  $W^{\text{aff}}$  sont rassemblées au Tableau 2.3.

Générateurs	$\widehat{\gamma}_0^{\sigma(0)}$	$\widehat{\gamma}_0^{\sigma(1)}$	$\widehat{\gamma}_0^{\sigma(2)}$	$\widehat{\gamma}_0^{\sigma(3)}$	$\widehat{\gamma}_{\varrho^\vee}^{\sigma(0)}$	$\widehat{\gamma}_{\varrho^\vee}^{\sigma(1)}$	$\widehat{\gamma}_{\varrho^\vee}^{\sigma(2)}$	$\widehat{\gamma}_{\varrho^\vee}^{\sigma(3)}$
$r_0^\vee$	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
$r_\alpha, \alpha \in \Delta_s$	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
$r_\alpha, \alpha \in \Delta_l$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1

**Tableau 2.3.** Les valeurs de  $\widehat{\gamma}_{\varrho^\vee}^\sigma$  sur l'ensemble des générateurs du groupe de Weyl affine dual pour un déplacement admissible trivial ( $\varrho^\vee = 0$ ) et non trivial  $\varrho^\vee$  selon les quatre homomorphismes de signe  $\sigma$ .

## 2.6. Régions fondamentales signées $F^\sigma$ et $F^{\sigma^\vee}$

Étant donné un homomorphisme de signe  $\sigma$  et un déplacement admissible dual  $\varrho$ , la région fondamentale signée  $F^\sigma(\varrho)$  est :

$$F^\sigma(\varrho) = \{a \in F \mid \gamma_\varrho^\sigma(\text{Stab}_{W^{\text{aff}}}(a)) = \{1\}\} \subset F, \quad (2.6.1)$$

où  $\gamma_\varrho^\sigma$  est l'homomorphisme défini à l'équation (2.5.2). Selon la propriété (3) de la région fondamentale, tout point  $a$  contenu dans l'intérieur de  $F$  possède un stabilisateur trivial ce qui garantit l'inclusion  $\text{int}(F) \subset F^\sigma(\varrho)$ . Donc, la région fondamentale signée  $F^\sigma(\varrho)$  ne fait qu'omettre certaines faces de  $F$ .

Il est également utile de définir les sous-ensembles  $R^\sigma(\varrho)$  des générateurs du groupe de Weyl affine  $W^{\text{aff}}$ ,

$$R^\sigma(\varrho) = \{r \in \{r_0, r_1, r_2, \dots, r_n\} \mid \gamma_\varrho^\sigma(r) = -1\}, \quad (2.6.2)$$

dans l'optique de définir des sous-ensembles  $H^\sigma(\varrho)$  de la frontière de la région fondamentale :

$$H^\sigma(\varrho) = \{a \in F \mid \exists r \in R^\sigma(\varrho) : ra = a\}. \quad (2.6.3)$$

L'introduction des régions fondamentales signées  $F^\sigma(\varrho)$  et des ensembles  $H^\sigma(\varrho)$  est essentielle pour l'étude des relations d'orthogonalité discrète des fonctions d'orbite de Weyl. Il a été montré dans [3] que  $F$  peut s'exprimer comme union disjointe des ensembles  $F^\sigma(\varrho)$  et  $H^\sigma(\varrho)$ . Rappelons ce résultat et sa démonstration.

**Proposition 2.6.1.** *Soit  $\sigma$  un homomorphisme de signe et  $\varrho$  un déplacement admissible dual, alors*

$$F^\sigma(\varrho) = F \setminus H^\sigma(\varrho).$$

DÉMONSTRATION. Soit  $a \notin F \setminus H^\sigma(\varrho)$ , alors  $a$  est contenu dans l'ensemble  $H^\sigma(\varrho)$ . Ainsi, il existe  $r \in R^\sigma(\varrho)$  tel que  $r \in \text{Stab}_{W^{\text{aff}}}(a)$  et  $\gamma_\varrho^\sigma(r) = -1$ . Donc,  $a \notin F^\sigma(\varrho)$ , ce qui montre que  $F^\sigma(\varrho) \subset F \setminus H^\sigma(\varrho)$ . Soit  $a \in F \setminus H^\sigma(\varrho)$ , alors le stabilisateur de  $a$  est soit trivial, soit engendré par des éléments de  $\{r_0, r_1, r_2, \dots, r_n\} \setminus R^\sigma(\varrho)$ . Si  $\text{Stab}_{W^{\text{aff}}}(a) = \{1\}$ , alors  $a \in F^\sigma(\varrho)$ . Si le stabilisateur de  $a$  est engendré par des éléments de  $\{r_0, r_1, r_2, \dots, r_n\} \setminus R^\sigma(\varrho)$ , alors, par définition de (2.6.8),  $\gamma_\varrho^\sigma(\text{Stab}_{W^{\text{aff}}}(a)) = \{1\}$ . Par conséquent,  $F \setminus H^\sigma(\varrho) \subset F^\sigma(\varrho)$ , ce qui conclut la démonstration.  $\square$

En définissant les variables réelles  $a_i^{\sigma, \varrho}$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ , de la manière suivante :

$$a_i^{\sigma, \varrho} \in \begin{cases} \mathbb{R}_{>0}, & \text{si } r_i \in R^\sigma(\varrho), \\ \mathbb{R}_{\geq 0}, & \text{si } r_i \in \{r_0, r_1, r_2, \dots, r_n\} \setminus R^\sigma(\varrho), \end{cases} \quad (2.6.4)$$

et à l'aide de la définition de  $F$  (1.7.1) ainsi que de la Proposition 2.6.1 précédente, les régions fondamentales signées correspondent aux ensembles suivants :

$$F^\sigma(\varrho) = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i^{\sigma, \varrho} \omega_i^\vee \mid a_0^{\sigma, \varrho} + \sum_{i=1}^n a_i^{\sigma, \varrho} m_i = 1 \right\}. \quad (2.6.5)$$

À partir des valeurs rassemblées dans le Tableau 2.2 et de la nouvelle équation (2.6.5), il est possible de déduire les égalités ci-dessous :

$$F^{\sigma(0)}(0) = F, \quad F^{\sigma(1)}(0) = \text{int}(F). \quad (2.6.6)$$

Similairement, la région fondamentale signée duale  $F^{\sigma^\vee}(\varrho^\vee)$  est :

$$F^{\sigma^\vee}(\varrho^\vee) = \left\{ b \in F^\vee \mid \widehat{\gamma}_{\varrho^\vee}^\sigma(\text{Stab}_{\widehat{W}^{\text{aff}}}(b)) = \{1\} \right\} \subset F^\vee. \quad (2.6.7)$$

Les sous-ensembles  $R^{\sigma^\vee}(\varrho^\vee)$  des générateurs du groupe de Weyl affine dual  $\widehat{W}^{\text{aff}}$ ,

$$R^{\sigma^\vee}(\varrho^\vee) = \left\{ r \in \{r_0^\vee, r_1, r_2, \dots, r_n\} \mid \widehat{\gamma}_{\varrho^\vee}^\sigma(r) = -1 \right\}, \quad (2.6.8)$$

et  $H^{\sigma^\vee}(\varrho^\vee)$  de la frontière de la région fondamentale duale,

$$H^{\sigma^\vee}(\varrho^\vee) = \{ b \in F^\vee \mid \exists r \in R^{\sigma^\vee}(\varrho^\vee) : rb = b \}, \quad (2.6.9)$$

permettent d'exprimer  $F^\vee(\varrho^\vee)$  comme une union disjointe des régions fondamentales signées duales  $F^{\sigma^\vee}(\varrho^\vee)$  et des ensembles  $H^{\sigma^\vee}(\varrho^\vee)$ .

**Proposition 2.6.2.** *Soit  $\sigma$  un homomorphisme de signe et  $\varrho^\vee$  un déplacement admissible, alors*

$$F^{\sigma^\vee}(\varrho^\vee) = F^\vee \setminus H^{\sigma^\vee}(\varrho^\vee).$$

En définissant des variables réelles  $b_i^{\sigma, \varrho^\vee}$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ , de manière analogue aux variables (2.6.4) avec les changements évidents, les régions fondamentales signées duales correspondent aux ensembles suivants :

$$F^{\sigma^\vee}(\varrho^\vee) = \left\{ \sum_{i=1}^n b_i^{\sigma, \varrho^\vee} \omega_i \mid b_0^{\sigma, \varrho^\vee} + \sum_{i=1}^n b_i^{\sigma, \varrho^\vee} m_i^\vee = 1 \right\}. \quad (2.6.10)$$

## 2.7. Grilles $F_M^\sigma$ et $\Lambda_M^\sigma$

Soit  $M \in \mathbb{N}$  un entier positif,  $\sigma$  un homomorphisme de signe,  $\varrho^\vee$  un déplacement admissible et  $\varrho$  un déplacement admissible dual. L'ensemble  $F_M^\sigma(\varrho, \varrho^\vee)$  correspond à la contraction du réseau de poids duaux déplacés  $\frac{1}{M}(\varrho^\vee + P^\vee)$  contenue à l'intérieur de la région fondamentale signée  $F^\sigma(\varrho)$ . En d'autres termes,

$$F_M^\sigma(\varrho, \varrho^\vee) = \left( \frac{1}{M}(\varrho^\vee + P^\vee) \right) \cap F^\sigma(\varrho). \quad (2.7.1)$$

Il est également possible de définir de manière explicite cette grille à l'aide de la définition de  $F^\sigma(\varrho)$  (2.6.5). En effet, en considérant un déplacement admissible  $\varrho^\vee = \varrho_1^\vee \omega_1^\vee + \varrho_2^\vee \omega_2^\vee + \dots + \varrho_n^\vee \omega_n^\vee$ , en posant  $\varrho_0^\vee = 0$  (pour un déplacement admissible non trivial de  $A_1$ , poser  $\varrho_0^\vee = \frac{1}{2}$ ) et en définissant les variables  $z_i^{\sigma, \varrho}$ ,  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ , comme suit :

$$z_i^{\sigma, \varrho} \in \begin{cases} -2\varrho_i^\vee + \mathbb{N}, & \text{si } r_i \in R^\sigma(\varrho), \\ \mathbb{Z}_{\geq 0}, & \text{si } r_i \in \{r_0, r_1, r_2, \dots, r_n\} \setminus R^\sigma(\varrho), \end{cases} \quad (2.7.2)$$

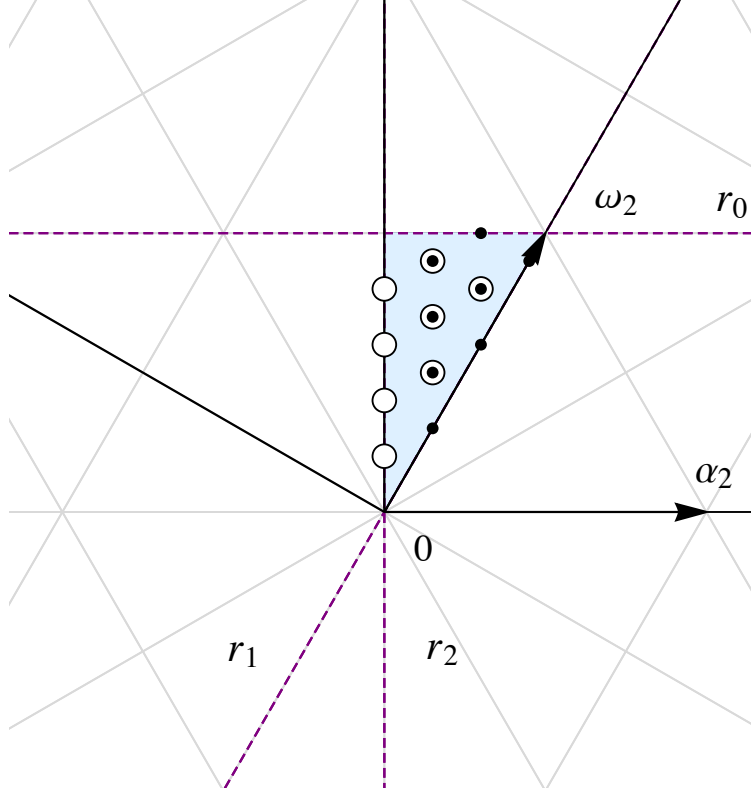
la grille  $F_M^\sigma(\varrho, \varrho^\vee)$  correspond à l'ensemble de points

$$F_M^\sigma(\varrho, \varrho^\vee) = \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{z_i^{\sigma, \varrho} + \varrho_i^\vee}{M} \omega_i^\vee \mid (z_0^{\sigma, \varrho} + \varrho_0^\vee) + \sum_{i=1}^n (z_i^{\sigma, \varrho} + \varrho_i^\vee) m_i = M \right\}. \quad (2.7.3)$$

La grille  $\Lambda_M^\sigma(\varrho, \varrho^\vee)$  est déterminée par le grossissement de la région fondamentale signée duale  $MF^{\sigma^\vee}(\varrho^\vee)$  contenu à l'intérieur du réseau de poids déplacés  $\varrho + P$ , c'est-à-dire

$$\Lambda_M^\sigma(\varrho, \varrho) = (\varrho + P) \cap MF^{\sigma^\vee}(\varrho^\vee). \quad (2.7.4)$$

Cet ensemble peut aussi être exprimé de manière explicite via la définition de la région fondamentale signée duale (2.6.10). Considérons un déplacement admissible dual  $\varrho = \varrho_1 \omega_1 + \varrho_2 \omega_2 + \dots + \varrho_n \omega_n$ , posons  $\varrho_0 = 0$  (pour un déplacement admissible dual non trivial de  $A_1$ ,



**Figure 2.4.** Pavage  $W^{\text{aff}}(F)$  de la région fondamentale  $F$  du système de racines de  $G_2$ . La région fondamentale  $F$  est identifiée en bleu pâle. Les huit points noirs contenus à l'intérieur de  $F$  représentent les éléments de la grille  $F_{10}^{\sigma^{(2)}}(0,0)$  et les huit cercles blancs correspondent aux éléments de la grille  $F_{10}^{\sigma^{(3)}}(0,0)$ .

poser  $\varrho_0 = \frac{1}{2}$ ) et définissons les variables  $t_i^{\sigma, \varrho^\vee}$ ,  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ , de la manière suivante :

$$t_i^{\sigma, \varrho^\vee} \in \begin{cases} -2\varrho_i + \mathbb{N}, & \text{si } r_i \in R^{\sigma^\vee}(\varrho^\vee), \\ \mathbb{Z}_{\geq 0}, & \text{si } r_i \in \{r_0^\vee, r_1, r_2, \dots, r_n\} \setminus R^{\sigma^\vee}(\varrho^\vee). \end{cases} \quad (2.7.5)$$

Ainsi,

$$\Lambda_M^\sigma(\varrho, \varrho^\vee) = \left\{ \sum_{i=1}^n (t_i^{\sigma, \varrho^\vee} + \varrho_i) \omega_i \mid (t_0^{\sigma, \varrho^\vee} + \varrho_0) + \sum_{i=1}^n (t_i^{\sigma, \varrho^\vee} + \varrho_i) m_i^\vee = M \right\}. \quad (2.7.6)$$

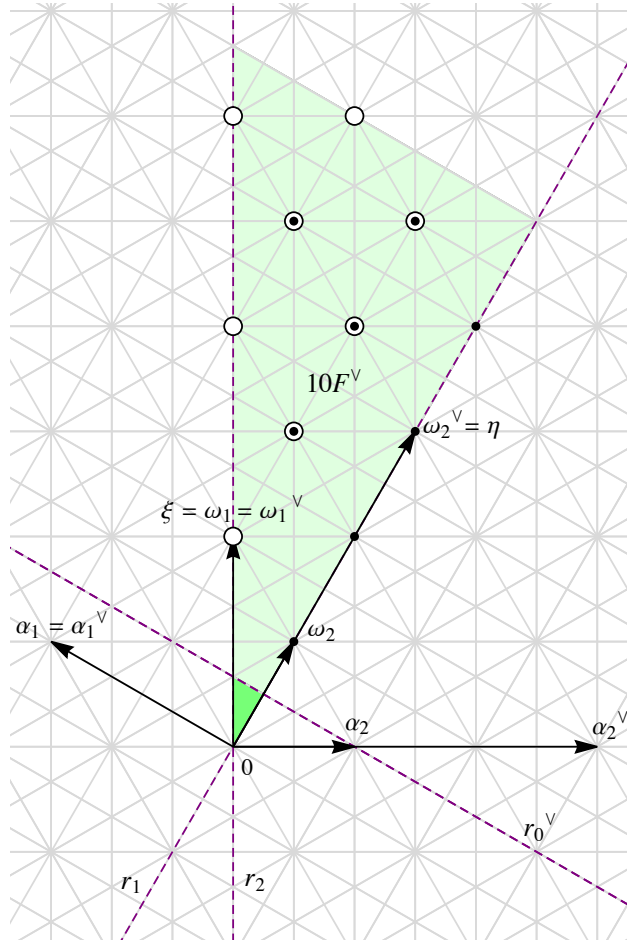
La réécriture de ces deux grilles sous forme explicite est énormément pratique pour le calcul des relations d'orthogonalité discrète des fonctions d'orbite de Weyl et d'autres applications (voir [3] et [4]).

Il a été établi par les auteurs dans [3] (voir Théorème 3.4) que pour n'importe quelle paire  $(\varrho, \varrho^\vee)$  de déplacement admissible dual et déplacement admissible, la cardinalité des ensembles  $F_M^\sigma(\varrho, \varrho^\vee)$  et  $\Lambda_M^\sigma(\varrho, \varrho^\vee)$  coïncide. Rappelons ce résultat en omettant la

démonstration.

**Théorème 2.7.1.** Soit  $M \in \mathbb{N}$ ,  $\sigma$  un homomorphisme de signe,  $\varrho^\vee$  un déplacement admissible et  $\varrho$  un déplacement admissible dual. Alors,

$$|F_M^\sigma(\varrho, \varrho^\vee)| = |\Lambda_M^\sigma(\varrho, \varrho^\vee)|.$$



**Figure 2.5.** Pavage  $\widehat{W}^{\text{aff}}(F^\vee)$  de la région fondamentale duale  $F^\vee$  du système de racines de  $G_2$ . La région fondamentale duale  $F^\vee$  est identifiée en vert. Le grossissement de la région fondamentale duale  $10F^\vee$  est identifié en vert pâle. Les huit points noirs contenus à l'intérieur de  $10F^\vee$  représentent les éléments de la grille  $\Lambda_{10}^{\sigma(2)}(0,0)$  et les huit points blancs correspondent aux éléments de la grille  $\Lambda_{10}^{\sigma(3)}(0,0)$ .



## 2.8. Orthogonalité discrète des fonctions d'orbite

Soit  $M \in \mathbb{N}$ ,  $\sigma$  un homomorphisme de signe,  $\varrho^\vee$  un déplacement admissible et  $\varrho$  un déplacement admissible dual. Définissons l'application discrète  $\varepsilon : F_M^\sigma(\varrho, \varrho^\vee) \rightarrow \mathbb{N}$  par

$$\varepsilon(z) = \frac{|W|}{h_z}, \quad h_z = |\text{Stab}_{W^{\text{aff}}}(z)|, \quad (2.8.1)$$

où  $|W|$  dénote l'ordre du groupe de Weyl.

Un produit scalaire entre deux fonctions  $f, g : F_M^\sigma(\varrho, \varrho^\vee) \rightarrow \mathbb{C}$  est défini par

$$\langle f, g \rangle_{F_M^\sigma(\varrho, \varrho^\vee)} = \sum_{z \in F_M^\sigma(\varrho, \varrho^\vee)} \varepsilon(z) f(z) \overline{g(z)}, \quad (2.8.2)$$

où les coefficients  $\varepsilon(z)$  sont obtenus via l'équation (2.8.1). Il est facile de remarquer que cette application est bel et bien un produit scalaire. Les fonctions d'orbite de Weyl présentées à la section 2.2 sont orthogonales pour ce produit scalaire (Théorème 4.1 de [3]).

	$z \in F_M^\sigma(\varrho, \varrho^\vee)$						
	$[\ast, \ast, \ast]$	$[\ast, \ast, 0]$	$[\ast, 0, \ast]$	$[0, \ast, \ast]$	$[\ast, 0, 0]$	$[0, \ast, 0]$	$[0, 0, \ast]$
$A_2$	6	3	3	3	1	1	1
$C_2$	8	4	4	4	1	2	1
$G_2$	12	6	6	6	1	3	2

**Tableau 2.4.** Valeurs des coefficients  $\varepsilon(z)$  pour les systèmes de racines  $A_2$ ,  $C_2$  et  $G_2$ , où  $z = [z_0^{\sigma, \varrho}, z_1^{\sigma, \varrho}, z_2^{\sigma, \varrho}]$ . Pour un déplacement admissible  $\varrho^\vee = \varrho_1^\vee \omega_1^\vee + \varrho_2^\vee \omega_2^\vee$ , les triplets considérés sont  $[z_0^{\sigma, \varrho} + \varrho_0^\vee, z_1^{\sigma, \varrho} + \varrho_1^\vee, z_2^{\sigma, \varrho} + \varrho_2^\vee]$ , où  $\ast$  dénote une valeur non nulle.

**Théorème 2.8.1.** *Soit  $\varrho^\vee$  et  $\varrho$  un déplacement admissible et un déplacement admissible dual respectivement. Alors, pour n'importe quel homomorphisme de signe  $\sigma^{(j)}$ ,  $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ , et n'importe quel deux points  $\lambda, \lambda' \in \Lambda_M^{\sigma^{(j)}}(\varrho, \varrho^\vee)$ , les fonctions d'orbite de Weyl satisfont*

$$\left\langle \varphi_\lambda^{(j)}, \varphi_{\lambda'}^{(j)} \right\rangle_{F_M^{\sigma^{(j)}}(\varrho, \varrho^\vee)} = c |W| M^n h_M^\vee(\lambda) \delta_{\lambda, \lambda'},$$

où  $c$  est le déterminant de la matrice de Cartan,  $n$  est la dimension de l'espace  $E$  associé au système de racines et le coefficient  $h_M^\vee(\lambda) = \left| \text{Stab}_{\widehat{W}^{\text{aff}}} \left( \frac{\lambda}{M} \right) \right|$ .

Le calcul des coefficients  $h_z$  et  $h_M^\vee$  est décrit à l'Annexe A. Il s'agit d'une généralisation de l'algorithme présenté par Hrivnák et Patera dans [10] à la section 3.7. Les valeurs des coefficients  $\varepsilon$  et  $h_M^\vee$  sont rassemblées dans le Tableau 2.4 et le Tableau 2.5 respectivement pour les systèmes de racines  $A_2$ ,  $C_2$  et  $G_2$ .

	$\lambda \in \Lambda_M^\sigma(\varrho, \varrho^\vee)$						
	$[\ast, \ast, \ast]$	$[\ast, \ast, 0]$	$[\ast, 0, \ast]$	$[0, \ast, \ast]$	$[\ast, 0, 0]$	$[0, \ast, 0]$	$[0, 0, \ast]$
$A_2$	1	2	2	2	6	6	6
$C_2$	1	2	2	2	8	8	4
$G_2$	1	2	2	2	12	6	4

**Tableau 2.5.** Valeurs des coefficients  $h_M^\vee(\lambda)$  pour les systèmes de racines  $A_2$ ,  $C_2$  et  $G_2$ , où  $\lambda = [t_0^{\sigma, \varrho^\vee}, t_1^{\sigma, \varrho^\vee}, t_2^{\sigma, \varrho^\vee}]$ . Pour un déplacement admissible dual  $\varrho = \varrho_1\omega_1 + \varrho_2\omega_2$ , les triplets considérés sont  $[t_0^{\sigma, \varrho^\vee} + \varrho_0, t_1^{\sigma, \varrho^\vee} + \varrho_1, t_2^{\sigma, \varrho^\vee} + \varrho_2]$ , où  $\ast$  dénote une valeur non nulle.

## 2.9. Polynômes de Weyl

Les vecteurs  $\rho$  jouent un rôle essentiel dans la définition des polynômes de Weyl. Pour chaque système de racines, le vecteur  $\rho^{(0,0)}$  est défini comme le vecteur nul et le vecteur  $\rho^{(1,0)}$  correspond à la moitié de la somme des racines positives. Pour les algèbres de rang 2,

$$\rho^{(0,0)} = 0, \quad \rho^{(1,0)} = \omega_1 + \omega_2. \quad (2.9.1)$$

Les vecteurs  $\rho$  court et long,  $\rho^{(2,0)}$  et  $\rho^{(3,0)}$ , sont respectivement la moitié de la somme des courtes racines positives et longues racines positives. Étant donné que le système de racines  $C_2$  admet un déplacement admissible dual non trivial  $\varrho = \frac{1}{2}\omega_2$  (voir Tableau 2.1), quatre vecteurs  $\rho$  additionnels émergent dans le réseau de poids déplacé  $\varrho + P$  :

$$\rho^{(0,1)} = \rho^{(3,1)} = \frac{1}{2}\omega_2, \quad \rho^{(1,1)} = \rho^{(2,1)} = \omega_1 + \frac{1}{2}\omega_2. \quad (2.9.2)$$

Ces définitions sont présentées dans le Tableau 2.6 pour  $A_2$ ,  $C_2$  et  $G_2$ .

Système de racines	$\rho^{(0,0)}$	$\rho^{(1,0)}$	$\rho^{(2,0)}$	$\rho^{(3,0)}$	$\rho^{(0,1)}$	$\rho^{(1,1)}$	$\rho^{(2,1)}$	$\rho^{(3,1)}$
$A_2$	0	$\omega_1 + \omega_2$	-	-	-	-	-	-
$C_2$	0	$\omega_1 + \omega_2$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\frac{1}{2}\omega_2$	$\omega_1 + \frac{1}{2}\omega_2$	$\frac{1}{2}\omega_2$	$\omega_1 + \frac{1}{2}\omega_2$
$G_2$	0	$\omega_1 + \omega_2$	$\omega_2$	$\omega_1$	-	-	-	-

**Tableau 2.6.** Les valeurs des vecteurs  $\rho$  pour les systèmes de racines cristallographiques irréductibles  $A_2$ ,  $C_2$  et  $G_2$ .

Introduisons des variables qui permettront une écriture plus concise des polynômes de Weyl. Pour chaque système de racines, ces variables sont définies selon la fonction caractère  $\chi_\lambda$ , où  $\lambda$  est l'un des poids fondamentaux :

$$\chi_\lambda(z) = \frac{\varphi_{\lambda + \rho^{(1,0)}}^{(1)}(z)}{\varphi_{\rho^{(1,0)}}^{(1)}(z)}, \quad \lambda \in \{\omega_i, 1 \leq i \leq \text{rank } A\}, \quad (2.9.3)$$

où  $A$  est l'algèbre de Lie simple associée au système de racines. Pour un point  $z = (z_1, z_2)$  avec coordonnées dans la base des racines duales et les poids fondamentaux  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , les fonctions caractères s'expriment sous forme explicite comme :

$$A_2 : \chi_{\omega_1}(z_1, z_2) = e^{2\pi i z_1} + e^{-2\pi i(z_1 - z_2)} + e^{-2\pi i z_2}, \quad (2.9.4)$$

$$\chi_{\omega_2}(z_1, z_2) = e^{2\pi i z_2} + e^{2\pi i(z_1 - z_2)} + e^{-2\pi i z_1}, \quad (2.9.5)$$

$$C_2 : \chi_{\omega_1}(z_1, z_2) = 2 \cos(2\pi(z_1 - z_2)) + 2 \cos(2\pi z_1), \quad (2.9.6)$$

$$\chi_{\omega_2}(z_1, z_2) = 1 + 2 \cos(2\pi(2z_1 - z_2)) + 2 \cos(2\pi z_2), \quad (2.9.7)$$

$$G_2 : \chi_{\omega_1}(z_1, z_2) = 2 + 2 \cos(2\pi(z_1 - z_2)) + 2 \cos(2\pi(z_1 - 2z_2)) + 2 \cos(2\pi z_2) \quad (2.9.8)$$

$$+ 2 \cos(2\pi(2z_1 - 3z_2)) + 2 \cos(2\pi(z_1 - 3z_2)) + 2 \cos(2\pi z_1),$$

$$\chi_{\omega_2}(z_1, z_2) = 1 + 2 \cos(2\pi(z_1 - z_2)) + 2 \cos(2\pi(z_1 - 2z_2)) + 2 \cos(2\pi z_2). \quad (2.9.9)$$

Soit les variables

$$x_1 = \chi_{\omega_1} \quad \text{et} \quad x_2 = \chi_{\omega_2}. \quad (2.9.10)$$

Les vecteurs  $\rho$  rassemblés dans le Tableau 2.6 donnent naissance à quatorze familles de polynômes orthogonaux à deux variables  $\mathbb{U}_\lambda^{(j,k)}(x_1, x_2)$ . Ces polynômes sont paramétrés par un poids dominant  $\lambda \in P^+$  et sont définis selon la formule :

$$\mathbb{U}_\lambda^{(j,k)}(x_1(z), x_2(z)) = \frac{\varphi_{\lambda + \rho^{(j,k)}}^{(j)}(z)}{\varphi_{\rho^{(j,k)}}^{(j)}(z)}, \quad \lambda \in P^+, \quad (2.9.11)$$

où  $j$  et  $k$  prennent les valeurs :

$$A_2 : j \in \{0, 1\}, \quad k = 0,$$

$$C_2 : j \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad k \in \{0, 1\}, \quad (2.9.12)$$

$$G_2 : j \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad k = 0.$$

Les six premiers polynômes de ces quatorze familles sont donnés par Czyżycki, Hrivnák et Patera dans [4] et rappelés dans l'Annexe B.

## 2.10. Orthogonalité discrète des polynômes de Weyl

Tel que mentionné dans la section précédente, les polynômes de Weyl sont orthogonaux. Afin de décrire les relations d'orthogonalité discrète de ces polynômes, considérons l'application  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  définie par

$$X(z) = (x_1(z), x_2(z)) = (\chi_{\omega_1}(z), \chi_{\omega_2}(z)). \quad (2.10.1)$$

Soit  $M \in \mathbb{N}$ ,  $\sigma$  un homomorphisme de signe,  $\varrho^\vee$  un déplacement admissible et  $\varrho$  un déplacement admissible dual. La fonction (2.10.1) permet de définir les ensembles  $\Omega_M^{(j,k)}(\varrho^\vee)$  et  $L_M^{(j,k)}(\varrho^\vee)$ . Ces derniers sont un remaniement des grilles  $F_M^\sigma(\varrho, \varrho^\vee)$  et  $\Lambda_M^\sigma(\varrho, \varrho^\vee)$  respectivement. En effet, pour un déplacement admissible dual  $\varrho = 0$ , définissons

$$\Omega_M^{(j,0)}(\varrho^\vee) = X \left( F_M^{\sigma^{(j)}}(0, \varrho^\vee) \right), \quad L_M^{(j,0)}(\varrho^\vee) = -\rho^{(j,0)} + \Lambda_M^{\sigma^{(j)}}(0, \varrho^\vee) \quad (2.10.2)$$

et pour  $\varrho \neq 0$ , définissons

$$\Omega_M^{(j,1)}(\varrho^\vee) = X \left( F_M^{\sigma^{(j)}}(\varrho, \varrho^\vee) \right), \quad L_M^{(j,1)}(\varrho^\vee) = -\rho^{(j,1)} + \Lambda_M^{\sigma^{(j)}}(\varrho, \varrho^\vee), \quad (2.10.3)$$

où  $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ . L'application  $X$  est une application bijective (voir Proposition 3 de [9]) et à l'aide du Théorème 2.7.1, il en découle que le nombre de points contenus dans  $F_M^{\sigma^{(j)}}(\varrho, \varrho^\vee)$  correspond au nombre d'éléments des ensembles  $\Omega_M^{(j,k)}(\varrho^\vee)$  et  $L_M^{(j,k)}(\varrho^\vee)$

$$\left| F_M^{\sigma^{(j)}}(\varrho, \varrho^\vee) \right| = \left| \Omega_M^{(j,k)}(\varrho^\vee) \right| = \left| L_M^{(j,k)}(\varrho^\vee) \right| = \left| \Lambda_M^{(j)}(\varrho, \varrho^\vee) \right|, \quad (2.10.4)$$

pour toute paire  $(j, k)$  admise par (2.9.12).

Définissons la fonction discrète  $\tilde{\varepsilon} : \Omega_M^{(j,k)}(\varrho^\vee) \rightarrow \mathbb{N}$  pour chaque point  $x \in \Omega_M^{(j,k)}(\varrho^\vee)$  de la manière suivante :

$$\tilde{\varepsilon}(x) = \varepsilon \left( X^{-1}(x) \right), \quad (2.10.5)$$

où  $X^{-1}$  dénote l'application inverse de  $X$ . Définissons également les fonctions de poids polynomiaux  $w^{(j,k)}(x_1, x_2)$  comme

$$w^{(j,k)}(\chi_{\omega_1}(z), \chi_{\omega_2}(z)) = \left| \varphi_{\rho^{(j,k)}}^{(j)}(z) \right|^2, \quad (2.10.6)$$

où les paires  $(j, k)$  respectent (2.9.12). À partir de cette définition, il est possible de remarquer que les poids  $w^{(0,0)}(x_1, x_2)$  sont constants pour chaque système de racines. En effet,

$$w^{(0,0)}(x_1, x_2) = |W|^2. \quad (2.10.7)$$

Les poids polynomiaux des systèmes de racines  $A_2$ ,  $C_2$  et  $G_2$  sont les suivantes :

$$A_2 : w^{(0,0)}(x_1, x_2) = 36,$$

$$w^{(1,0)}(x_1, x_2) = -x_1^2 x_2^2 + 4x_1^3 + 4x_2^3 - 18x_1 x_2 + 27,$$

$$C_2 : w^{(0,0)}(x_1, x_2) = 64,$$

$$w^{(1,0)}(x_1, x_2) = -4x_1^4 + x_1^2 x_2^2 + 22x_1^2 x_2 - 4x_2^3 - 7x_1^2 - 20x_2^2 - 12x_2 + 36,$$

$$w^{(2,0)}(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 16x_2 + 16,$$

$$w^{(3,0)}(x_1, x_2) = -16x_1^2 + 4x_2^2 + 24x_2 + 36,$$

$$w^{(0,1)}(x_1, x_2) = 8x_1 + 4x_2 + 12,$$

$$\begin{aligned}
w^{(1,1)}(x_1, x_2) &= -2x_1^3 + x_1^2x_2 + 3x_1^2 + 8x_1x_2 - 4x_2^2 - 8x_1 - 8x_2 + 12, \\
w^{(2,1)}(x_1, x_2) &= 2x_1^3 + x_1^2x_2 + 3x_1^2 - 8x_1x_2 - 4x_2^2 + 8x_1 - 8x_2 + 12, \\
w^{(3,1)}(x_1, x_2) &= -8x_1 + 4x_2 + 12, \\
G_2 : w^{(0,0)}(x_1, x_2) &= 144, \\
w^{(1,0)}(x_1, x_2) &= -4x_2^5 + x_1^2x_2^2 + 26x_1x_2^3 - 7x_2^4 - 4x_1^3 - 38x_1^2x_2 + 26x_1x_2^2 + 32x_2^3 \\
&\quad - 47x_1^2 - 58x_1x_2 - 10x_2^2 - 42x_1 - 28x_2 + 49, \\
w^{(2,0)}(x_1, x_2) &= -4x_2^2 + 16x_1 - 8x_2 + 28, \\
w^{(3,0)}(x_1, x_2) &= 16x_2^3 - 4x_1^2 - 40x_1x_2 - 4x_2^2 - 40x_1 - 8x_2 + 28.
\end{aligned}$$

Le produit scalaire sur les polynômes de Weyl est défini par l'équation

$$\langle f, g \rangle_{\Omega_M^{(j,k)}(\varrho^\vee)} = \sum_{x \in \Omega_M^{(j,k)}(\varrho^\vee)} \tilde{\varepsilon}(x) w^{(j,k)}(x) f(x) \overline{g(x)}. \quad (2.10.8)$$

Évidemment, les fonctions de poids polynomiaux  $w^{(j,k)}$  ont été choisies pour se charger du dénominateur apparaissant dans la définition (2.9.11). Ainsi, l'orthogonalité des polynômes de Weyl par rapport au produit scalaire (2.10.8) découle directement du Théorème 2.8.1.

**Corollaire 2.10.1.** *Soit  $\varrho^\vee$  et  $\varrho$  un déplacement admissible et un déplacement admissible dual respectivement. Alors, pour n'importe quel  $\lambda, \lambda' \in L_M^{(j,k)}(\varrho, \varrho^\vee)$  et toute paire  $(j, k)$  permise par (2.9.12), les polynômes de Weyl satisfont*

$$\left\langle \mathbb{U}_\lambda^{(j,k)}, \mathbb{U}_{\lambda'}^{(j,k)} \right\rangle_{\Omega_M^{(j,k)}(\varrho^\vee)} = c |W| M^2 h_M^\vee(\lambda + \rho^{(j,k)}) \delta_{\lambda, \lambda'}.$$

## 2.11. Fonctions génératrices des polynômes de Weyl

Soit  $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$  deux variables supplémentaires et  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in P^+$  avec coordonnées dans la base des poids. Les fonctions génératrices  $\nu^{(j,k)}(x_1, x_2, u_1, u_2)$  des polynômes de Weyl  $\mathbb{U}_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(j,k)}(x_1, x_2)$  sont définies de la manière suivante :

$$\nu^{(j,k)}(x_1, x_2, u_1, u_2) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2=0}^{\infty} \mathbb{U}_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(j,k)}(x_1, x_2) u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2}, \quad (2.11.1)$$

où les indices  $j$  et  $k$  sont donnés par (2.9.12). Les quatorze familles de polynômes de Weyl considérées peuvent être obtenues à partir de la série de puissances de  $\nu^{(j,k)}$  à l'aide de la

différentiation standard :

$$\mathbb{U}_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(j, k)}(x_1, x_2) = \frac{1}{\lambda_1! \lambda_2!} \frac{\partial^{\lambda_1}}{\partial u_1^{\lambda_1}} \frac{\partial^{\lambda_2}}{\partial u_2^{\lambda_2}} \nu^{(j, k)}(x_1, x_2, u_1, u_2). \quad (2.11.2)$$

L'équation (2.11.1) peut être davantage approfondie en utilisant la formule de la somme d'une série géométrique. En effet, à l'aide de (2.9.11), la série de puissances de  $\nu^{(j, k)}$  peut se réécrire comme suit :

$$\begin{aligned} \nu^{(j, k)}(x_1(z), x_2(z), u_1, u_2) &= \sum_{\lambda_1, \lambda_2=0}^{\infty} \frac{\varphi_{\lambda+\rho^{(j, k)}}^{(j)}(z)}{\varphi_{\rho^{(j, k)}}^{(j)}(z)} u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2} \quad (2.11.3) \\ &= \sum_{\lambda_1, \lambda_2=0}^{\infty} \sum_{w \in W} \frac{\sigma^{(j)}(w) e^{2\pi i \langle w(\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 + \rho^{(j, k)}), z \rangle}}{\varphi_{\rho^{(j, k)}}^{(j)}(z)} u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2} \\ &= \sum_{w \in W} \frac{\sigma^{(j)}(w) e^{2\pi i \langle \rho^{(j, k)}, z \rangle}}{\varphi_{\rho^{(j, k)}}^{(j)}(z)} \sum_{\lambda_1, \lambda_2=0}^{\infty} \left( e^{2\pi i \langle w \omega_1, z \rangle} \right)^{\lambda_1} \left( e^{2\pi i \langle w \omega_2, z \rangle} \right)^{\lambda_2} u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2} \\ &= \frac{1}{\varphi_{\rho^{(j, k)}}^{(j)}(z)} \sum_{w \in W} \frac{\sigma^{(j)}(w) e^{2\pi i \langle w \rho^{(j, k)}, z \rangle}}{(1 - u_1 e^{2\pi i \langle w \omega_1, z \rangle}) (1 - u_2 e^{2\pi i \langle w \omega_2, z \rangle})}. \quad (2.11.4) \end{aligned}$$

Tel qu'expliqué par les auteurs dans [4], cette réécriture permet d'observer que les fonctions génératrices peuvent s'exprimer sous la forme d'une fraction

$$\nu^{(j, k)}(x_1, x_2, u_1, u_2) = \frac{N^{(j, k)}(x_1, x_2, u_1, u_2)}{D_1(x_1, x_2, u_1) D_2(x_1, x_2, u_2)}. \quad (2.11.5)$$

Les fonctions génératrices des systèmes de racines  $A_2$ ,  $C_2$  et  $G_2$  sont décrites explicitement par Hrivnák et Patera dans [4] et rappelées dans les sous-sections ci-dessous.

### 2.11.1. Fonctions génératrices de $A_2$

Les deux fonctions numérateurs  $N^{(0,0)}$  et  $N^{(1,0)}$  sont

$$\begin{aligned} 6N^{(0,0)}(x_1, x_2, u_1, u_2) &= 6 - 4x_2u_2 - 4x_1u_1 + 2x_1u_2^2 + (3x_1x_2 - 3)u_1u_2 + 2x_2u_1^2 \quad (2.11.6) \\ &\quad + (-2x_1^2 + 2x_2)u_1u_2^2 + (2x_1 - 2x_2^2)u_1^2u_2 + (x_1x_2 - 3)u_1^2u_2^2, \end{aligned}$$

$$N^{(1,0)}(x_1, x_2, u_1, u_2) = 1 - u_1u_2, \quad (2.11.7)$$

et les fonctions dénominateurs  $D_1$  et  $D_2$  sont

$$D_1(x_1, x_2, u_1) = 1 - x_1u_1 + x_2u_1^2 - u_1^3, \quad (2.11.8)$$

$$D_2(x_1, x_2, u_2) = 1 - x_2u_2 + x_1u_2^2 - u_2^3. \quad (2.11.9)$$

### 2.11.2. Fonctions génératrices de $C_2$

Pour toute paire  $(j, k)$  respectant (2.9.12), la fonction numérateur  $N^{(j,k)}$  est de la forme

$$N^{(j,k)}(x_1, x_2, u_1, u_2) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2=0}^3 \alpha_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(j,k)}(x_1, x_2) u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2}, \quad (2.11.10)$$

où  $\alpha_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(j,k)}(x_1, x_2)$  est un coefficient polynomial. L'annexe C liste les coefficients des huit polynômes  $N^{(j,k)}$  du système de racines  $C_2$  dans le Tableau C.1 et le Tableau C.2. Les deux dénominateurs  $D_1$  et  $D_2$  sont donnés par

$$D_1(x_1, x_2, u_1) = 1 - x_1 u_1 + (x_2 + 1) u_1^2 - x_1 u_1^3 + u_1^4, \quad (2.11.11)$$

$$D_2(x_1, x_2, u_2) = 1 + (-x_2 + 1) u_2 + (x_1^2 - 2x_2) u_2^2 + (-x_2 + 1) u_2^3 + u_2^4. \quad (2.11.12)$$

### 2.11.3. Fonctions génératrices de $G_2$

Pour tout indice  $j$  et  $k$  respectant (2.9.12), la fonction numérateur  $N^{(j,k)}$  est de la forme

$$N^{(j,k)}(x_1, x_2, u_1, u_2) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2=0}^5 \alpha_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(j,k)}(x_1, x_2) u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2}, \quad (2.11.13)$$

où  $\alpha_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(j,k)}(x_1, x_2)$  est un coefficient polynomial. L'annexe C liste les coefficients des quatre polynômes  $N^{(j,k)}$  du système de racines  $G_2$ . Les coefficients  $\alpha_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(0,0)}$  sont contenus dans le Tableau C.3. Le Tableau C.4 et le Tableau C.5 rassemblent les coefficients des trois autres polynômes  $N^{(j,k)}$ . Les deux fonctions dénominateurs  $D_1$  et  $D_2$  sont

$$\begin{aligned} D_1(x_1, x_2, u_1) &= 1 + (-x_1 + x_2 + 1) u_1 + (x_2^3 - 3x_1 x_2 - 2x_1 - x_2 + 1) u_1^2 \\ &\quad + (2x_2^3 - x_1^2 - 4x_1 x_2 - x_2^2 - 4x_1 - 2x_2 + 1) u_1^3 \\ &\quad + (x_2^3 - 3x_1 x_2 - 2x_1 - x_2 + 1) u_1^4 + (-x_1 + x_2 + 1) u_1^5 + u_1^6, \end{aligned} \quad (2.11.14)$$

$$\begin{aligned} D_2(x_1, x_2, u_2) &= 1 + (-x_2 + 1) u_2 + (x_1 + 1) u_2^2 + (-x_2^2 + 2x_1 + 1) u_2^3 \\ &\quad + (x_1 + 1) u_2^4 + (-x_2 + 1) u_2^5 + u_2^6. \end{aligned} \quad (2.11.15)$$





# Chapitre 3

---

## Fonctions génératrices des polynômes de Hartley

Ce chapitre s'intéresse à calculer les fonctions génératrices des polynômes de Chebyshev généralisés associés aux fonctions d'orbite de Hartley pour les systèmes de racines  $A_2$ ,  $C_2$  et  $G_2$ . Les fonctions de Hartley constituent une version réelle des fonctions de Weyl étudiées au chapitre précédent. Les notions couvertes au cours des deux premières sections sont connues, mais récentes (voir Hrivnák et Juránek [6] et Hrivnák et Motlochová [7]) tandis que les concepts introduits aux sections suivantes sont nouveaux. En effet, la majorité des résultats présentés sont nouveaux, mais les méthodes de démonstration utilisées proviennent en partie des idées de Czyżycki et Hrivnák [3] et de Czyżycki, Hrivnák et Patera [4]. L'article de Hrivnák, Motlochová et Patera [9] constitue également une référence pertinente.

### 3.1. Fonctions d'orbite de Hartley

#### 3.1.1. Définition des fonctions d'orbite de Hartley

Une version à valeur réelle des fonctions d'orbite de Weyl peut être obtenue en utilisant la fonction noyau de Hartley :

$$\text{cas}(\alpha) = \cos(\alpha) + \sin(\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (3.1.1)$$

plutôt que la fonction exponentielle dans l'équation (2.2.1). Cette modification donne naissance à quatre nouvelles familles de fonctions d'orbite  $\zeta_\lambda^{(j)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ , connues sous le nom de fonctions d'orbite de Hartley :

$$\zeta_\lambda^{(j)}(z) = \sum_{w \in W} \sigma^{(j)}(w) \text{cas}(2\pi \langle w\lambda, z \rangle). \quad (3.1.2)$$

Il est facile d'observer qu'à partir de cette définition ainsi que de l'équation (3.1.1), les fonctions de Hartley satisfont la propriété suivante :

$$\zeta_\lambda^{(j)} = \operatorname{Re}(\varphi_\lambda^{(j)}) + \operatorname{Im}(\varphi_\lambda^{(j)}). \quad (3.1.3)$$

Cette relation permet de vérifier que les trois propriétés des fonctions de Weyl rappelées à la section 2.2 valent également pour les fonctions de Hartley. Ces fonctions peuvent également être réécrites à l'aide de la formule d'Euler.

**Théorème 3.1.1.** *Pour  $\lambda \in P$  et  $z \in \mathbb{R}^n$  les fonctions de Weyl et de Hartley sont liées par*

$$\zeta_\lambda^{(j)}(z) = \frac{1-i}{2} \varphi_\lambda^{(j)}(z) + \frac{1+i}{2} \varphi_\lambda^{(j)}(-z), \quad j \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

**DÉMONSTRATION.** En utilisant la formule d'Euler, il est possible de réécrire la fonction noyau de Hartley comme

$$\operatorname{cas}(\alpha) = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) + \frac{1}{2i}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}). \quad (3.1.4)$$

À partir de l'équation (3.1.4), les fonctions de Hartley deviennent

$$\begin{aligned} \zeta_\lambda^{(j)}(z) &= \sum_{w \in W} \sigma^{(j)}(w) \operatorname{cas}(2\pi \langle w\lambda, z \rangle) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{w \in W} \sigma^{(j)}(w) \left( (e^{2\pi i \langle w\lambda, z \rangle} + e^{-2\pi i \langle w\lambda, z \rangle}) - i(e^{2\pi i \langle w\lambda, z \rangle} - e^{-2\pi i \langle w\lambda, z \rangle}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{w \in W} \sigma^{(j)}(w) \left( (1-i) e^{2\pi i \langle w\lambda, z \rangle} + (1+i) e^{2\pi i \langle w\lambda, -z \rangle} \right) \\ &= \frac{1-i}{2} \varphi_\lambda^{(j)}(z) + \frac{1+i}{2} \varphi_\lambda^{(j)}(-z) \end{aligned}$$

tel qu'affirmé. □

Deux formules utiles pour les fonctions d'orbite de Hartley sont obtenues comme corollaires au Théorème 3.1.1 précédent.

**Corollaire 3.1.2.** *Soit  $\lambda \in P$ ,  $z \in \mathbb{R}^n$  et  $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ . Si la fonction de Weyl a une parité donnée, alors les fonctions de Weyl et de Hartley coïncident à un facteur près, à savoir*

- (i)  $\zeta_\lambda^{(j)}(z) = \varphi_\lambda^{(j)}(z)$ , si  $\varphi_\lambda^{(j)}$  est une fonction paire ;
- (ii)  $\zeta_\lambda^{(j)}(z) = -i\varphi_\lambda^{(j)}(z)$ , si  $\varphi_\lambda^{(j)}$  est une fonction impaire.

DÉMONSTRATION. La preuve de ce corollaire découle directement du fait que  $\varphi_\lambda^{(j)}(-z) = \varphi_\lambda^{(j)}(z)$  si la fonction de Weyl est une fonction paire et du fait que  $\varphi_\lambda^{(j)}(-z) = -\varphi_\lambda^{(j)}(z)$  si la fonction de Weyl est une fonction impaire.  $\square$

Le corollaire précédent permet d'énoncer deux résultats significatifs concernant les fonctions de Hartley des systèmes de racines  $C_2$  et  $G_2$ .

**Théorème 3.1.3.** *Pour le système de racines  $C_2$ , les fonctions d'orbite de Hartley coïncident avec les fonctions d'orbite de Weyl, c'est-à-dire*

$$\zeta_\lambda^{(j)}(z) = \varphi_\lambda^{(j)}(z), \quad \text{pour tout } j \in \{0, 1, 2, 3\} \text{ et } \lambda \in P.$$

DÉMONSTRATION. Afin de prouver ce théorème, il suffit de montrer que les fonctions de Weyl de  $C_2$  sont des fonctions paires pour  $j \in \{0, 1, 2, 3\}$  et alors le résultat découlera du Corollaire 3.1.2. Commençons par considérer une fonction de Weyl

$$\varphi_\lambda^{(j)}(z) = \sum_{w \in W} \sigma^{(j)}(w) e^{2\pi i \langle w\lambda, z \rangle}.$$

Le Tableau 3.1 rassemble les facteurs de signe  $\sigma^{(j)}(w)$  de l'exponentielle  $e^{2\pi i \langle w\lambda, z \rangle}$  pour chaque élément de l'orbite  $\mathcal{O}_\lambda$  du point  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ . À l'aide de ce tableau, il est possible d'observer que pour chaque valeur de  $j$ , deux points opposés  $w\lambda$  et  $-w\lambda \in \mathcal{O}_\lambda$  sont pondérés par le même signe. Alors, en définissant l'ensemble

$$P^* = \{m\omega_1 + n\omega_2 \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}_{>0}\} \cup \{m\omega_1 \mid m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}, \quad (3.1.5)$$

les fonctions de Weyl peuvent être réécrites comme

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda^{(j)}(z) &= \sum_{w\lambda \in \mathcal{O}_\lambda \cap P^*} \sigma^{(j)}(w) \left( e^{2\pi i \langle w\lambda, z \rangle} + e^{2\pi i \langle -w\lambda, z \rangle} \right) \\ &= 2 \sum_{w\lambda \in \mathcal{O}_\lambda \cap P^*} \sigma^{(j)}(w) \cos(2\pi \langle w\lambda, z \rangle). \end{aligned}$$

Clairement, les fonctions de Weyl de  $C_2$  sont paires tel qu'affirmé, ce qui conclut la démonstration.  $\square$

**Théorème 3.1.4.** *Les fonctions de Hartley de  $G_2$  coïncident avec leurs fonctions de Weyl associées à une constante près pour chaque  $\lambda \in P$ , à savoir*

$$\zeta_\lambda^{(j)}(z) = \begin{cases} \varphi_\lambda^{(j)}(z), & \text{si } j \in \{0, 1\}, \\ -i\varphi_\lambda^{(j)}(z), & \text{si } j \in \{2, 3\}. \end{cases}$$

$w\lambda \in \mathcal{O}_\lambda$	$\pm(\lambda_1, \lambda_2)$	$\pm(-\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2)$	$\pm(\lambda_1 + 2\lambda_2, -\lambda_2)$	$\pm(\lambda_1 + 2\lambda_2, -\lambda_1 - \lambda_2)$
$\sigma^{(0)}(w)$	1	1	1	1
$\sigma^{(1)}(w)$	1	-1	-1	1
$\sigma^{(2)}(w)$	1	-1	1	-1
$\sigma^{(3)}(w)$	1	1	-1	-1

**Tableau 3.1.** Les facteurs de signe  $\sigma^{(j)}(w)$  de  $e^{2\pi i \langle w\lambda, z \rangle}$  pour les éléments contenus dans l'orbite  $\mathcal{O}_{\lambda=(\lambda_1, \lambda_2)}$  de  $C_2$ .

DÉMONSTRATION. La démonstration de ce résultat utilise la même logique que la démonstration précédente. En effet, il suffit de montrer que les fonctions de Weyl de  $G_2$  sont des fonctions paires pour  $j \in \{0, 1\}$  et impaires pour  $j \in \{2, 3\}$ . Les facteurs de signes  $\sigma^{(j)}(w)$  apparaissent dans le Tableau 3.2.

Pour  $j \in \{0, 1\}$ , le Tableau 3.2 montre que les facteurs de signe  $\sigma^{(j)}(w)$  d'un point  $w\lambda \in \mathcal{O}_\lambda$  et son opposé  $-w\lambda \in \mathcal{O}_\lambda$  sont identiques. À l'instar du système de racines  $C_2$ , leurs contributions donneront  $\sigma^{(j)}(w) \cos(2\pi \langle w\lambda, z \rangle)$  et les fonctions de Weyl sont ainsi des fonctions paires.

Considérons désormais le cas où  $j \in \{2, 3\}$ . Le Tableau 3.2 révèle que les valeurs de l'homomorphisme  $\sigma^{(j)}$  associé au point  $w\lambda \in \mathcal{O}_\lambda$  ainsi qu'à son opposé  $-w\lambda \in \mathcal{O}_\lambda$  sont distinctes. Par conséquent, les fonctions de Weyl de  $G_2$  deviennent

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda^{(j)}(z) &= \sum_{w\lambda \in \mathcal{O}_\lambda \cap P^*} \sigma^{(j)}(w) \left( e^{2\pi i \langle w\lambda, z \rangle} - e^{2\pi i \langle -w\lambda, z \rangle} \right) \\ &= 2i \sum_{w\lambda \in \mathcal{O}_\lambda \cap P^*} \sigma^{(j)}(w) \sin(2\pi \langle w\lambda, z \rangle). \end{aligned}$$

Les fonctions de Weyl de  $G_2$  pour  $j \in \{2, 3\}$  sont une somme de fonctions sinus et alors ce sont des fonctions impaires, ce qui met fin à la démonstration.  $\square$

### 3.1.2. Fonctions de Hartley de $A_2$

Les trois sous-sections qui commencent donnent les fonctions de Hartley pour  $A_2$ ,  $C_2$  et  $G_2$ . Elles utilisent la notation suivante. Soit  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$  un point dominant avec coordonnées dans la base des poids et soit  $z = (z_1, z_2)$  un point avec coordonnées dans la base des racines

	$(\lambda_1, \lambda_2)$	$(-\lambda_1, 3\lambda_1 + \lambda_2)$	$(-\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2)$	$(-\lambda_1, \lambda_2)$
$w\lambda \in \mathcal{O}_\lambda$	$(\lambda_1 + \lambda_2, -3\lambda_1 - 2\lambda_2)$ $(-2\lambda_1 - \lambda_2, 3\lambda_1 + \lambda_2)$	$(2\lambda_1 + \lambda_2, -3\lambda_1 - 2\lambda_2)$ $(-\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2)$	$(-2\lambda_1 + \lambda_2, -3\lambda_1 - 2\lambda_2)$ $(-\lambda_1, 3\lambda_1 + \lambda_2)$	$(-\lambda_1 + \lambda_2, -3\lambda_1 - 2\lambda_2)$ $(-2\lambda_1 - \lambda_2, 3\lambda_1 + \lambda_2)$
$\sigma^{(0)}(w)$	1	1	1	1
$\sigma^{(1)}(w)$	1	-1	-1	1
$\sigma^{(2)}(w)$	1	1	-1	-1
$\sigma^{(3)}(w)$	1	-1	1	-1

**Tableau 3.2.** Les facteurs de signe  $\sigma^{(j)}(w)$  de  $e^{2\pi i \langle w\lambda, z \rangle}$  pour les éléments contenus dans l'orbite  $\mathcal{O}_{\lambda=(\lambda_1, \lambda_2)}$  de  $G_2$ .

duales. Les fonctions de Hartley de  $A_2$  sont

$$\begin{aligned} \zeta_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(0)}(z_1, z_2) &= \text{cas}(2\pi(z_1\lambda_1 + z_2\lambda_2)) + \text{cas}(-2\pi(z_1\lambda_1 - z_2\lambda_1 - z_2\lambda_2)) \\ &\quad + \text{cas}(2\pi(z_1\lambda_1 + z_2\lambda_2 - z_2\lambda_2)) + \text{cas}(-2\pi(z_1\lambda_2 + z_2\lambda_1)) \\ &\quad + \text{cas}(-2\pi(z_1\lambda_1 + z_1\lambda_2 - z_2\lambda_1)) + \text{cas}(2\pi(z_1\lambda_2 - z_2\lambda_1 - z_2\lambda_2)), \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

$$\begin{aligned} \zeta_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(1)}(z_1, z_2) &= \text{cas}(2\pi(z_1\lambda_1 + z_2\lambda_2)) - \text{cas}(-2\pi(z_1\lambda_1 - z_2\lambda_1 - z_2\lambda_2)) \\ &\quad - \text{cas}(2\pi(z_1\lambda_1 + z_2\lambda_2 - z_2\lambda_2)) - \text{cas}(-2\pi(z_1\lambda_2 + z_2\lambda_1)) \\ &\quad + \text{cas}(-2\pi(z_1\lambda_1 + z_1\lambda_2 - z_2\lambda_1)) + \text{cas}(2\pi(z_1\lambda_2 - z_2\lambda_1 - z_2\lambda_2)). \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

### 3.1.3. Fonctions de Hartley de $C_2$

Les fonctions de Hartley de  $C_2$  sont

$$\begin{aligned} \zeta_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(0)}(z_1, z_2) &= 2 \cos(2\pi(z_1\lambda_1 + z_2\lambda_2)) + 2 \cos(2\pi(z_1\lambda_1 + 2z_1\lambda_2 - z_2\lambda_1 - z_2\lambda_2)) \\ &\quad + 2 \cos(2\pi(z_1\lambda_1 + 2z_1\lambda_2 - z_2\lambda_2)) + 2 \cos(2\pi(z_1\lambda_1 - z_2\lambda_1 - z_2\lambda_2)), \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

$$\begin{aligned} \zeta_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(1)}(z_1, z_2) &= 2 \cos(2\pi(z_1\lambda_1 + z_2\lambda_2)) + 2 \cos(2\pi(z_1\lambda_1 + 2z_1\lambda_2 - z_2\lambda_1 - z_2\lambda_2)) \\ &\quad - 2 \cos(2\pi(z_1\lambda_1 + 2z_1\lambda_2 - z_2\lambda_2)) - 2 \cos(2\pi(z_1\lambda_1 - z_2\lambda_1 - z_2\lambda_2)), \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

$$\begin{aligned} \zeta_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(2)}(z_1, z_2) &= 2 \cos(2\pi(z_1\lambda_1 + z_2\lambda_2)) - 2 \cos(2\pi(z_1\lambda_1 + 2z_1\lambda_2 - z_2\lambda_1 - z_2\lambda_2)) \\ &\quad + 2 \cos(2\pi(z_1\lambda_1 + 2z_1\lambda_2 - z_2\lambda_2)) - 2 \cos(2\pi(z_1\lambda_1 - z_2\lambda_1 - z_2\lambda_2)), \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

$$\begin{aligned} \zeta_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(3)}(z_1, z_2) &= 2 \cos(2\pi(z_1\lambda_1 + z_2\lambda_2)) - 2 \cos(2\pi(z_1\lambda_1 + 2z_1\lambda_2 - z_2\lambda_1 - z_2\lambda_2)) \\ &\quad - 2 \cos(2\pi(z_1\lambda_1 + 2z_1\lambda_2 - z_2\lambda_2)) + 2 \cos(2\pi(z_1\lambda_1 - z_2\lambda_1 - z_2\lambda_2)). \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

### 3.1.4. Fonctions de Hartley de $G_2$

Les fonctions de Hartley de  $G_2$  sont

$$\begin{aligned} \zeta_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(0)}(z_1, z_2) &= 2 \cos(2\pi(z_1\lambda_1 + z_2\lambda_2)) + 2 \cos(2\pi(2z_1\lambda_1 + z_1\lambda_2 - 3z_2\lambda_1 - z_2\lambda_2)) \quad (3.1.12) \\ &\quad + 2 \cos(2\pi(z_1\lambda_1 + z_1\lambda_2 - 3z_2\lambda_1 - 2z_2\lambda_2)) + 2 \cos(2\pi(z_1\lambda_1 + z_1\lambda_2 - z_2\lambda_2)) \\ &\quad + 2 \cos(2\pi(2z_1\lambda_1 + z_1\lambda_2 - 3z_2\lambda_1 - 2z_2\lambda_2)) + 2 \cos(2\pi(z_1\lambda_1 - 3z_2\lambda_1 - z_2\lambda_2)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(1)}(z_1, z_2) &= 2 \cos(2\pi(z_1\lambda_1 + z_2\lambda_2)) + 2 \cos(2\pi(2z_1\lambda_1 + z_1\lambda_2 - 3z_2\lambda_1 - z_2\lambda_2)) \quad (3.1.13) \\ &\quad + 2 \cos(2\pi(z_1\lambda_1 + z_1\lambda_2 - 3z_2\lambda_1 - 2z_2\lambda_2)) - 2 \cos(2\pi(z_1\lambda_1 + z_1\lambda_2 - z_2\lambda_2)) \\ &\quad - 2 \cos(2\pi(2z_1\lambda_1 + z_1\lambda_2 - 3z_2\lambda_1 - 2z_2\lambda_2)) - 2 \cos(2\pi(z_1\lambda_1 - 3z_2\lambda_1 - z_2\lambda_2)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(2)}(z_1, z_2) &= 2 \sin(2\pi(z_1\lambda_1 + z_2\lambda_2)) - 2 \sin(2\pi(2z_1\lambda_1 + z_1\lambda_2 - 3z_2\lambda_1 - z_2\lambda_2)) \quad (3.1.14) \\ &\quad + 2 \sin(2\pi(z_1\lambda_1 + z_1\lambda_2 - 3z_2\lambda_1 - 2z_2\lambda_2)) - 2 \sin(2\pi(z_1\lambda_1 + z_1\lambda_2 - z_2\lambda_2)) \\ &\quad + 2 \sin(2\pi(2z_1\lambda_1 + z_1\lambda_2 - 3z_2\lambda_1 - 2z_2\lambda_2)) - 2 \sin(2\pi(z_1\lambda_1 - 3z_2\lambda_1 - z_2\lambda_2)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(3)}(z_1, z_2) &= 2 \sin(2\pi(z_1\lambda_1 + z_2\lambda_2)) - 2 \sin(2\pi(2z_1\lambda_1 + z_1\lambda_2 - 3z_2\lambda_1 - z_2\lambda_2)) \quad (3.1.15) \\ &\quad + 2 \sin(2\pi(z_1\lambda_1 + z_1\lambda_2 - 3z_2\lambda_1 - 2z_2\lambda_2)) + 2 \sin(2\pi(z_1\lambda_1 + z_1\lambda_2 - z_2\lambda_2)) \\ &\quad - 2 \sin(2\pi(2z_1\lambda_1 + z_1\lambda_2 - 3z_2\lambda_1 - 2z_2\lambda_2)) + 2 \sin(2\pi(z_1\lambda_1 - 3z_2\lambda_1 - z_2\lambda_2)). \end{aligned}$$

## 3.2. Orthogonalité discrète des fonctions de Hartley

Soit  $M \in \mathbb{N}$ ,  $\sigma$  un homomorphisme de signe,  $\varrho^\vee$  un déplacement admissible et  $\varrho$  un déplacement admissible dual. Les fonctions de Hartley sont orthogonales pour le produit scalaire (2.8.2) et cette propriété résulte du Théorème 2.8.1. Rappelons la démonstration de ce résultat présenté par Hrivnák et Juránek dans [6] (voir Théorème 5.3.2).

**Théorème 3.2.1.** *Soit  $\varrho^\vee$  et  $\varrho$  un déplacement admissible et un déplacement admissible dual respectivement. Alors, pour n'importe quel deux points  $\lambda, \lambda' \in \Lambda_M^{\sigma(j)}(\varrho, \varrho^\vee)$  et n'importe quelle paire  $(j, k)$  admise par (2.9.12), les fonctions de Hartley satisfont*

$$\left\langle \zeta_\lambda^{(j)}, \zeta_{\lambda'}^{(j)} \right\rangle_{F_M^{\sigma(j)}(\varrho, \varrho^\vee)} = c|W|M^n h_M^\vee(\lambda) \delta_{\lambda, \lambda'}.$$

DÉMONSTRATION. Remarquons tout d'abord qu'à partir de la définition (2.2.1), on obtient

$$\varphi_\lambda^{(j)}(-z) = \overline{\varphi_\lambda^{(j)}(z)} = \varphi_{-\lambda}^{(j)}(z), \quad (3.2.1)$$

À partir de cette observation et du Théorème (3.1.1), le produit scalaire de deux fonctions de Hartley peut être réécrit en termes des fonctions de Weyl :

$$\begin{aligned}
\langle \zeta_{\lambda}^{(j)}, \zeta_{\lambda'}^{(j)} \rangle_{F_M^{\sigma(j)}(\varrho, \varrho^\vee)} &= \left\langle \frac{1-i}{2} \varphi_{\lambda}^{(j)}(z) + \frac{1+i}{2} \overline{\varphi_{\lambda}^{(j)}(z)}, \frac{1-i}{2} \varphi_{\lambda'}^{(j)}(z) + \frac{1+i}{2} \overline{\varphi_{\lambda'}^{(j)}(z)} \right\rangle_{F_M^{\sigma(j)}(\varrho, \varrho^\vee)} \\
&= \langle \varphi_{\lambda}^{(j)}, \varphi_{\lambda'}^{(j)} \rangle_{F_M^{\sigma(j)}(\varrho, \varrho^\vee)} + \frac{1}{2i} \left( \left\langle \varphi_{\lambda}^{(j)}, \overline{\varphi_{\lambda'}^{(j)}} \right\rangle_{F_M^{\sigma(j)}(\varrho, \varrho^\vee)} - \overline{\left\langle \varphi_{\lambda}^{(j)}, \overline{\varphi_{\lambda'}^{(j)}} \right\rangle_{F_M^{\sigma(j)}(\varrho, \varrho^\vee)}} \right) \\
&= \langle \varphi_{\lambda}^{(j)}, \varphi_{\lambda'}^{(j)} \rangle_{F_M^{\sigma(j)}(\varrho, \varrho^\vee)} + \operatorname{Im} \left( \left\langle \varphi_{\lambda}^{(j)}, \overline{\varphi_{\lambda'}^{(j)}} \right\rangle_{F_M^{\sigma(j)}(\varrho, \varrho^\vee)} \right),
\end{aligned}$$

où l'orthogonalité discrète des fonctions de Weyl (Théorème 2.8.1) a été utilisée. La prochaine étape est de montrer que

$$\operatorname{Im} \left( \left\langle \varphi_{\lambda}^{(j)}, \overline{\varphi_{\lambda'}^{(j)}} \right\rangle_{F_M^{\sigma(j)}(\varrho, \varrho^\vee)} \right) = 0.$$

Étant donné que  $\widehat{W}^{\text{aff}}(F^\vee)$  engendre  $\mathbb{R}^n$ , il existe un point  $\tilde{\lambda} \in F^\vee$  et  $\tilde{w}^{\text{aff}} \in \widehat{W}^{\text{aff}}$  tel que

$$-\frac{\lambda'}{M} = \tilde{w}^{\text{aff}}(\tilde{\lambda}).$$

Puisque  $\lambda' \in (\varrho + P)$ , les déplacements admissibles duaux rassemblés dans le Tableau 2.1 permettent de déduire que  $-\frac{\lambda'}{M} \in \frac{1}{M}(\varrho + P)$  et sachant que le réseau  $\frac{1}{M}(\varrho + P)$  est invariant sous le groupe  $\widehat{W}^{\text{aff}}$ , alors  $\tilde{\lambda} \in \frac{1}{M}(\varrho + P)$ . En posant  $\lambda'' = M\tilde{\lambda} \in (\varrho + P) \cap MF^\vee$ , il en découle que

$$-\lambda' = M\tilde{w}^{\text{aff}} \left( \frac{\lambda''}{M} \right).$$

À partir de cette égalité ainsi que de l'équation (3.2.1) et de la Proposition 3.2 dans [3], il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} \left( \left\langle \varphi_{\lambda}^{(j)}, \overline{\varphi_{\lambda'}^{(j)}} \right\rangle_{F_M^{\sigma(j)}(\varrho, \varrho^\vee)} \right) &= \operatorname{Im} \left( \left\langle \varphi_{\lambda}^{(j)}, \varphi_{M\tilde{w}^{\text{aff}}(\frac{\lambda''}{M})}^{(j)} \right\rangle_{F_M^{\sigma(j)}(\varrho, \varrho^\vee)} \right) \\
&= \widehat{\gamma}_{\varrho^\vee}^{\sigma(j)}(\tilde{w}^{\text{aff}}) \cdot \operatorname{Im} \left( \left\langle \varphi_{\lambda}^{(j)}, \varphi_{\lambda''}^{(j)} \right\rangle_{F_M^{\sigma(j)}(\varrho, \varrho^\vee)} \right),
\end{aligned}$$

où le signe  $\widehat{\gamma}_{\varrho^\vee}^{\sigma(j)}$  a été défini à l'équation (2.5.3). Maintenant, soit le point  $\lambda''$  appartient à l'ensemble  $MF^{\sigma(j)\vee}(\varrho^\vee)$  ou pas. Dans le premier cas,  $\lambda''$  se situe alors dans  $(\varrho + P) \cap MF^{\sigma(j)\vee}(\varrho^\vee) = \Lambda_M^{\sigma(j)}(\varrho, \varrho^\vee)$  et les relations d'orthogonalité discrète des fonctions de Weyl garantissent que  $\langle \varphi_{\lambda}^{(j)}, \varphi_{\lambda''}^{(j)} \rangle_{F_M^{\sigma(j)}(\varrho, \varrho^\vee)}$  n'a aucune partie imaginaire. Dans le deuxième cas, la Proposition 3.2 dans [3] affirme que  $\varphi_{\lambda''}^{(j)} \equiv 0$ , et donc son produit scalaire avec n'importe quelle fonction est zéro, ce qui conclut la démonstration.  $\square$

### 3.3. Polynômes de Hartley

L'introduction de nouvelles variables à la section 2.9 (voir équation (2.9.10)) a permis d'obtenir une écriture compacte des polynômes de Weyl. Cette même idée sera utilisée à nouveau pour les polynômes de Hartley à définir ci-après. Ces nouvelles variables sont définies comme la fonction «caractère»  $\chi_\lambda^H$ , où  $\lambda$  est l'un des poids fondamentaux :

$$\chi_\lambda^H(z) = \frac{\zeta_{\lambda+\rho(1,0)}^{(1)}(z)}{\zeta_{\rho(1,0)}^{(1)}(z)}, \quad \lambda \in \{\omega_i, 1 \leq i \leq \text{rank } A\}, \quad (3.3.1)$$

où  $A$  est l'algèbre de Lie simple associée au système de racines. (Pour les fonctions de Weyl, ce choix reproduit les caractères des représentations irréductibles de plus haut poids  $\omega_i$ . Nous utilisons le mot «caractère» également pour les familles de Hartley.) Pour un point  $z = (z_1, z_2)$  avec coordonnées dans la base des racines duales et les poids fondamentaux  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , les fonctions caractères de Hartley sont :

$$A_2 : \chi_{\omega_1}^H(z_1, z_2) = \cos(2\pi z_1) + \cos(2\pi(z_1 - z_2)) + \cos(2\pi z_2) \\ - \sin(2\pi z_1) + \sin(2\pi(z_1 - z_2)) + \sin(2\pi z_2), \quad (3.3.2)$$

$$\chi_{\omega_2}^H(z_1, z_2) = \cos(2\pi z_1) + \cos(2\pi(z_1 - z_2)) + \cos(2\pi z_2) \\ + \sin(2\pi z_1) - \sin(2\pi(z_1 - z_2)) - \sin(2\pi z_2), \quad (3.3.3)$$

$$C_2 : \chi_{\omega_1}^H(z_1, z_2) = 2 \cos(2\pi(z_1 - z_2)) + 2 \cos(2\pi z_1), \quad (3.3.4)$$

$$\chi_{\omega_2}^H(z_1, z_2) = 1 + 2 \cos(2\pi(2z_1 - z_2)) + 2 \cos(2\pi z_2), \quad (3.3.5)$$

$$G_2 : \chi_{\omega_1}^H(z_1, z_2) = 2 + 2 \cos(2\pi(z_1 - z_2)) + 2 \cos(2\pi(z_1 - 2z_2)) + 2 \cos(2\pi z_2) \\ + 2 \cos(2\pi(2z_1 - 3z_2)) + 2 \cos(2\pi(z_1 - 3z_2)) + 2 \cos(2\pi z_1), \quad (3.3.6)$$

$$\chi_{\omega_2}^H(z_1, z_2) = 1 + 2 \cos(2\pi(z_1 - z_2)) + 2 \cos(2\pi(z_1 - 2z_2)) + 2 \cos(2\pi z_2). \quad (3.3.7)$$

Soit

$$y_1 = \chi_{\omega_1}^H \quad \text{and} \quad y_2 = \chi_{\omega_2}^H. \quad (3.3.8)$$

Observons qu'à partir des Théorèmes 3.1.3 et 3.1.4, les caractères de Hartley,  $\chi_\lambda^H$ , seront équivalents aux fonctions caractères  $\chi_\lambda$  de Weyl pour les systèmes de racines  $C_2$  et  $G_2$ . En outre, il est possible d'exprimer les caractères des fonctions de Hartley en termes des caractères des fonctions de Weyl pour le système de racines  $A_2$ . En effet,

$$\chi_{\omega_1}^H(z_1, z_2) = \frac{1+i}{2} \chi_{\omega_1} + \frac{1-i}{2} \chi_{\omega_2}, \quad (3.3.9)$$

$$\chi_{\omega_2}^H(z_1, z_2) = \frac{1-i}{2} \chi_{\omega_1} + \frac{1+i}{2} \chi_{\omega_2}. \quad (3.3.10)$$



En utilisant les équations (3.3.8) et (2.9.10), les caractères des fonctions de Hartley peuvent s'exprimer sous la forme suivante :

$$A_2 : y_1 = \frac{1+i}{2}x_1 + \frac{1-i}{2}x_2, \quad (3.3.11)$$

$$y_2 = \frac{1-i}{2}x_1 + \frac{1+i}{2}x_2, \quad (3.3.12)$$

$$C_2 : y_1 = x_1, \quad (3.3.13)$$

$$y_2 = x_2, \quad (3.3.14)$$

$$G_2 : y_1 = x_1, \quad (3.3.15)$$

$$y_2 = x_2. \quad (3.3.16)$$

Les quatorze familles de polynômes orthogonaux à deux variables  $\mathbb{V}_\lambda^{(j,k)}(y_1, y_2)$  sont définies selon la formule :

$$\mathbb{V}_\lambda^{(j,k)}(y_1(z), y_2(z)) = \frac{\zeta_{\lambda+\rho^{(j,k)}}^{(j)}(z)}{\zeta_{\rho^{(j,k)}}^{(j)}(z)}, \quad \lambda \in P^+, \quad (3.3.17)$$

où  $j$  et  $k$  prennent des valeurs admises par l'équation (2.9.12). À partir de la définition (3.3.17) et des Théorèmes 3.1.3 et 3.1.4, il est possible de déduire le résultat ci-dessous.

**Théorème 3.3.1.** *Pour les systèmes de racines  $C_2$  et  $G_2$ , les polynômes de Hartley  $\mathbb{V}_\lambda^{(j,k)}$  coïncident avec les polynômes de Weyl  $\mathbb{U}_\lambda^{(j,k)}$ , c'est-à-dire*

$$\mathbb{V}_\lambda^{(j,k)}(y_1, y_2) = \mathbb{U}_\lambda^{(j,k)}(y_1, y_2), \quad \text{pour toute paire } (j,k) \text{ autorisée par (2.9.12)}$$

et les polynômes de Hartley  $\mathbb{V}_\lambda^{(j,k)}$  sont donc orthogonaux pour le même produit scalaire que les polynômes de Weyl.

DÉMONSTRATION. Commençons par montrer ce résultat pour  $C_2$ . Le Théorème 3.1.3 affirme que

$$\zeta_\lambda^{(j)}(z) = \varphi_\lambda^{(j)}(z), \quad j \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Ainsi, à partir de l'équation (3.3.17), il s'ensuit que

$$\mathbb{V}_\lambda^{(j,k)}(y_1, y_2) = \frac{\zeta_{\lambda+\rho^{(j,k)}}^{(j)}(z)}{\zeta_{\rho^{(j,k)}}^{(j)}(z)} = \frac{\varphi_{\lambda+\rho^{(j,k)}}^{(j)}(z)}{\varphi_{\rho^{(j,k)}}^{(j)}(z)} = \mathbb{U}_\lambda^{(j,k)}(x_1, x_2),$$

où  $j \in \{0, 1, 2, 3\}$  et  $k \in \{0, 1\}$ . Pour  $G_2$ , le Théorème 3.1.4 énonce que

$$\zeta_\lambda^{(j)}(z) = \begin{cases} \varphi_\lambda^{(j)}(z), & \text{if } j \in \{0, 1\}, \\ -i\varphi_\lambda^{(j)}(z), & \text{if } j \in \{2, 3\}. \end{cases}$$

La démonstration pour les cas  $j \in \{0, 1\}$  et  $k = 0$  est identique à celle ci-dessus, tandis que la démonstration lorsque  $j \in \{2, 3\}$  et  $k = 0$  requiert un petit changement :

$$\mathbb{V}_\lambda^{(j,k)}(y_1, y_2) = \frac{\zeta_{\lambda+\rho^{(j,k)}}^{(j)}(z)}{\zeta_{\rho^{(j,k)}}^{(j)}(z)} = \frac{-i\varphi_{\lambda+\rho^{(j,k)}}^{(j)}(z)}{-i\varphi_{\rho^{(j,k)}}^{(j)}(z)} = \mathbb{U}_\lambda^{(j,k)}(x_1, x_2).$$

□

Contrairement aux systèmes de racines  $C_2$  et  $G_2$ , les polynômes de Hartley du système de racines  $A_2$  diffèrent des polynômes de Weyl. L'Annexe D détaille les premiers polynômes de Hartley des deux familles de  $A_2$ .

### 3.4. Orthogonalité discrète des polynômes de Hartley

À l'instar des polynômes de Weyl, les polynômes de Hartley sont orthogonaux. Pour décrire les relations d'orthogonalité de ces polynômes, considérons d'abord l'application  $Y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie pour chaque point  $z \in \mathbb{R}^2$  par

$$Y(z) = (y_1(z), y_2(z)) = (\chi_{\omega_1}^H(z), \chi_{\omega_2}^H(z)). \quad (3.4.1)$$

Soit  $M \in \mathbb{N}$ ,  $\sigma$  un homomorphisme de signe,  $\varrho^\vee$  et  $\varrho$  des déplacements admissibles. Cette fonction permet de définir un nouvel ensemble de points  $\Sigma_M^{(j,k)}(\varrho^\vee)$  pour  $\varrho = 0$

$$\Sigma_M^{(j,0)}(\varrho^\vee) = Y\left(F_M^{\sigma^{(j)}}(0, \varrho^\vee)\right) \quad (3.4.2)$$

et pour  $\varrho \neq 0$

$$\Sigma_M^{(j,1)}(\varrho^\vee) = Y\left(F_M^{\sigma^{(j)}}(\varrho, \varrho^\vee)\right). \quad (3.4.3)$$

L'application  $Y$  est bijective (Proposition 3 de [9]), ce qui implique que le nombre de points contenu dans l'ensemble  $F_M^{\sigma^{(j)}}(\varrho, \varrho^\vee)$  et le nombre d'éléments de  $\Sigma_M^{(j,k)}(\varrho^\vee)$  est le même. De plus, l'équation (2.10.4) induit l'égalité ci-dessous :

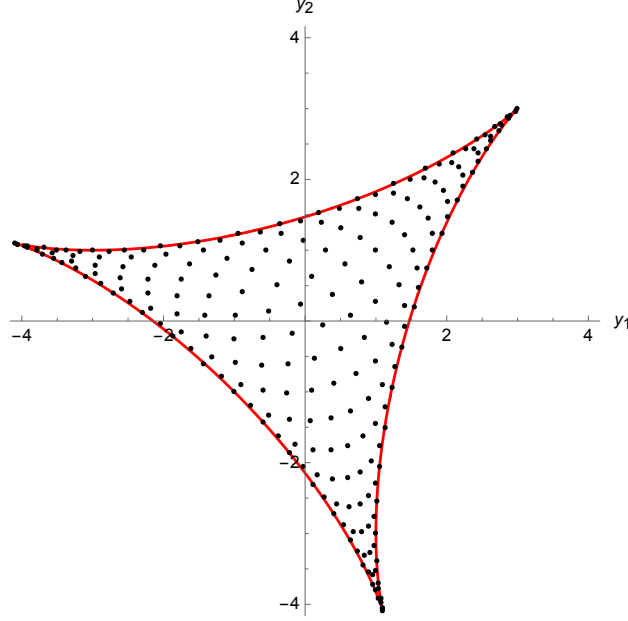
$$\left|\Sigma_M^{(j,k)}(\varrho^\vee)\right| = \left|L_M^{(j,k)}(\varrho^\vee)\right| \quad (3.4.4)$$

pour toute paire  $(j, k)$  admise par (2.9.12).

Définissons la fonction  $\widehat{\varepsilon} : \Sigma_M^{(j,k)}(\varrho^\vee) \rightarrow \mathbb{N}$  pour chaque  $y \in \Sigma_M^{(j,k)}(\varrho^\vee)$  comme suit :

$$\widehat{\varepsilon}(y) = \varepsilon\left(Y^{-1}(y)\right), \quad (3.4.5)$$

où  $Y^{-1}$  correspond à l'application inverse de  $Y$ .



**Figure 3.1.** L'ensemble de points  $\Sigma_{20}^{(0,0)}(0)$  de  $A_2$  et son contour délimité en rouge par l'équation  $\kappa^{(1,0)}(y_1, y_2) = 0$ .

De plus, soit  $\kappa^{(j,k)}(y_1, y_2)$  des poids définis par

$$\kappa^{(j,k)}(\chi_{\omega_1}^H(z), \chi_{\omega_2}^H(z)) = \left| \zeta_{\rho^{(j,k)}}^{(j)}(z) \right|^2, \quad (3.4.6)$$

où  $j$  et  $k$  prennent des valeurs respectant (2.9.12). Évidemment, les poids  $\kappa^{(0,0)}(y_1, y_2)$  sont constants pour tous les systèmes de racines. En effet,

$$\kappa^{(0,0)}(y_1, y_2) = |W|^2. \quad (3.4.7)$$

Il est également possible de remarquer qu'à partir des Théorèmes 3.1.3 et 3.1.4, les poids non constants  $\kappa^{(j,k)}(y_1, y_2)$  coïncident avec les poids  $w^{(j,k)}(x_1, x_2)$  (2.10.6) introduits au chapitre précédent pour les systèmes de racines  $C_2$  et  $G_2$ . Pour  $A_2$ , les fonctions de poids  $\kappa^{(j,k)}(y_1, y_2)$  sont

$$A_2 : \kappa^{(0,0)}(y_1, y_2) = 36,$$

$$\kappa^{(1,0)}(y_1, y_2) = -\frac{1}{4}y_1^4 - \frac{1}{2}y_1^2y_2^2 - \frac{1}{4}y_2^4 - 2y_1^3 + 6y_1^2y_2 + 6y_1y_2^2 - 2y_2^3 - 9y_1^2 - 9y_2^2 + 27.$$

Le produit scalaire sur les polynômes de Hartley est défini par

$$\langle f, g \rangle_{\Sigma_M^{(j,k)}(\varrho^\vee)} = \sum_{y \in \Sigma_M^{(j,k)}(\varrho^\vee)} \widehat{\varepsilon}(y) \kappa^{(j,k)}(y) f(y) \overline{g(y)}. \quad (3.4.8)$$

Similairement, les poids polynomiaux  $\kappa^{(j,k)}$  ont été choisis pour éliminer le dénominateur apparaissant dans la définition des polynômes de Hartley (3.3.17). L'orthogonalité des

polynômes de Hartley par rapport au produit scalaire (3.4.8) résulte alors du Théorème 3.2.1.

**Corollaire 3.4.1.** *Pour tout déplacement  $\varrho^\vee$  et déplacement dual  $\varrho$  admissibles et  $\lambda, \lambda' \in L_M^{(j,k)}(\varrho^\vee)$  et  $(j, k)$  admise par (2.9.12), les polynômes de Hartley satisfont*

$$\langle \mathbb{V}_\lambda^{(j,k)}, \mathbb{V}_{\lambda'}^{(j,k)} \rangle_{\Sigma_M^{(j,k)}(\varrho^\vee)} = c|W|M^2 h_M^\vee(\lambda + \rho^{(j,k)}) \delta_{\lambda, \lambda'}. \quad (3.4.9)$$

### 3.5. Fonctions génératrices des polynômes de Hartley

Soit  $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$  deux variables additionnelles et un point  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in P^+$  avec coordonnées dans la base des poids. Les fonctions génératrices  $\mu^{(j,k)}(y_1, y_2, u_1, u_2)$  des polynômes de Hartley  $\mathbb{V}_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(j,k)}(y_1, y_2)$  sont définies comme suit :

$$\mu^{(j,k)}(y_1, y_2, u_1, u_2) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2=0}^{\infty} \mathbb{V}_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(j,k)}(y_1, y_2) u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2}, \quad (3.5.1)$$

où les indices  $j$  et  $k$  sont donnés par (2.9.12) pour les systèmes de racines considérés. Les différentes familles de polynômes de Hartley  $\mathbb{V}_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(j,k)}(y_1, y_2)$  peuvent être obtenues à partir de la série de puissances de  $\mu^{(j,k)}$  via la différentiation standard :

$$\mathbb{V}_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(j,k)}(y_1, y_2) = \frac{1}{\lambda_1! \lambda_2!} \frac{\partial^{\lambda_1}}{\partial u_1^{\lambda_1}} \frac{\partial^{\lambda_2}}{\partial u_2^{\lambda_2}} \mu^{(j,k)}(y_1, y_2, 0, 0). \quad (3.5.2)$$

Le Théorème 3.3.1 permet d'énoncer un important résultat sur les fonctions génératrices  $\mu^{(j,k)}$  de  $C_2$  et  $G_2$ .

**Théorème 3.5.1.** *Pour les systèmes de racines  $C_2$  et  $G_2$ , les fonctions génératrices  $\mu^{(j,k)}$  des polynômes de Hartley  $\mathbb{V}_\lambda^{(j,k)}$  coïncident avec les fonctions génératrices  $\nu^{(j,k)}$  des polynômes de Weyl  $\mathbb{U}_\lambda^{(j,k)}$ , à savoir*

$$\mu^{(j,k)}(y_1, y_2, u_1, u_2) = \nu^{(j,k)}(x_1, x_2, u_1, u_2), \quad \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{C}.$$

DÉMONSTRATION. Le résultat suit directement du Théorème 3.3.1. □

Contrairement aux fonctions génératrices de  $C_2$  et  $G_2$ , celles du système de racines  $A_2$  doivent encore être calculées. Ces dernières peuvent également s'exprimer en termes des fonctions génératrices  $\nu^{(j,k)}$ . En effet, à l'aide des équations (3.5.1) et (3.3.17), il résulte que

$$\mu^{(j,k)}(y_1(z), y_2(z), u_1, u_2) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2=0}^{\infty} \frac{\zeta_{\lambda+\rho^{(j,k)}}^{(j)}(z)}{\zeta_{\rho^{(j,k)}}^{(j)}(z)} u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2} = \frac{1}{\zeta_{\rho^{(j,k)}}^{(j)}(z)} \sum_{\lambda_1, \lambda_2=0}^{\infty} \zeta_{\lambda+\rho^{(j,k)}}^{(j)}(z) u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2}. \quad (3.5.3)$$

Le Théorème 3.1.1 permet de réécrire la somme obtenue à l'équation (3.5.3) :

$$\begin{aligned}\mu^{(j,k)}(y_1(z), y_2(z), u_1, u_2) &= \frac{1}{2 \zeta_{\rho^{(j,k)}}^{(j)}(z)} \sum_{\lambda_1, \lambda_2=0}^{\infty} \left( (1-i) \varphi_{\lambda+\rho^{(j,k)}}^{(j)}(z) + (1+i) \varphi_{\lambda+\rho^{(j,k)}}^{(j)}(-z) \right) u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2} \\ &= \frac{(1-i) \varphi_{\rho^{(j,k)}}^{(j)}(z)}{2 \zeta_{\rho^{(j,k)}}^{(j)}(z)} \nu^{(j,k)}(x_1(z), x_2(z), u_1, u_2) \\ &\quad + \frac{(1+i) \varphi_{\rho^{(j,k)}}^{(j)}(-z)}{2 \zeta_{\rho^{(j,k)}}^{(j)}(z)} \nu^{(j,k)}(x_1(-z), x_2(-z), u_1, u_2).\end{aligned}$$

Un simple calcul permet d'observer que pour le système de racines  $A_2$ ,  $x_1(-z) = x_2(z)$  et  $x_2(-z) = x_1(z)$ . Cette observation et l'égalité précédente mènent au théorème ci-dessous.

**Théorème 3.5.2.** *Les fonctions génératrices  $\mu^{(j,k)}$  du système de racines  $A_2$  sont*

$$\begin{aligned}\mu^{(0,0)}(y_1, y_2, u_1, u_2) &= \frac{1-i}{2} \nu^{(0,0)}(x_1, x_2, u_1, u_2) + \frac{1+i}{2} \nu^{(0,0)}(x_2, x_1, u_1, u_2), \\ \mu^{(1,0)}(y_1, y_2, u_1, u_2) &= \frac{1+i}{2} \nu^{(1,0)}(x_1, x_2, u_1, u_2) + \frac{1-i}{2} \nu^{(1,0)}(x_2, x_1, u_1, u_2).\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Soit  $j, k = 0$ . À partir du Tableau 2.6, le vecteur  $\rho^{(0,0)} = 0$ , donc

$$\varphi_{\rho^{(0,0)}}^{(0)}(z) = 1 \quad \text{et} \quad \zeta_{\rho^{(0,0)}}^{(0)}(z) = 1.$$

Par conséquent, la fonction génératrice  $\mu^{(0,0)}$  devient

$$\mu^{(0,0)}(y_1, y_2, u_1, u_2) = \frac{1-i}{2} \nu^{(0,0)}(x_1, x_2, u_1, u_2) + \frac{1+i}{2} \nu^{(0,0)}(x_2, x_1, u_1, u_2).$$

Maintenant, soit  $j = 1$  et  $k = 0$ . Le Tableau 2.6 montre que  $\rho^{(1,0)} = \omega_1 + \omega_2$  et à l'aide du Théorème 3.1.1 on obtient

$$\zeta_{(1,1)}^{(1)}(z) = \frac{1-i}{2} \varphi_{(1,1)}^{(1)}(z) + \frac{1+i}{2} \varphi_{(1,1)}^{(1)}(-z).$$

Un calcul direct permet d'affirmer que  $\varphi_{(1,1)}^{(1)}(z) = 2i \left( \sin(2\pi(z_1 - 2z_2)) + \sin(2\pi(z_1 + z_2)) + \sin(2\pi(-2z_1 + z_2)) \right)$  et alors  $\varphi_{(1,1)}^{(1)}(-z) = -\varphi_{(1,1)}^{(1)}(z)$ . Ainsi,

$$\begin{aligned}\zeta_{(1,1)}^{(1)}(z) &= \frac{1-i}{2} \varphi_{(1,1)}^{(1)}(z) - \frac{1+i}{2} \varphi_{(1,1)}^{(1)}(z) \\ &= -i \varphi_{(1,1)}^{(1)}(z),\end{aligned}$$

ce qui mène à l'égalité suivante

$$\mu^{(1,0)}(y_1, y_2, u_1, u_2) = \frac{1+i}{2} \nu^{(1,0)}(x_1, x_2, u_1, u_2) + \frac{1-i}{2} \nu^{(1,0)}(x_2, x_1, u_1, u_2)$$

et conclut la démonstration. □

Parallèlement aux fonctions génératrices de Weyl, les fonctions génératrices  $\mu^{(0,0)}$  et  $\mu^{(1,0)}$  de  $A_2$  s'expriment comme une fraction

$$\mu^{(j,k)}(y_1, y_2, u_1, u_2) = \frac{N^{(j,k)}(y_1, y_2, u_1, u_2)}{D_1(y_1, y_2, u_1)D_2(y_1, y_2, u_1)D_3(y_1, y_2, u_2)D_4(y_1, y_2, u_2)}.$$

Les formes explicites des fonctions génératrices  $\mu^{(0,0)}$  et  $\mu^{(1,0)}$  peuvent être calculées à l'aide des fonctions génératrices  $\nu^{(0,0)}$  et  $\nu^{(1,0)}$  données à la section 2.11.1. Pour toute paire  $(j, k)$  admise par (2.9.12) pour le système de racines  $A_2$ , la fonction numérateur  $N^{(j,k)}$  prend la forme suivante :

$$N^{(j,k)}(y_1, y_2, u_1, u_2) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2=0}^5 c_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(j,k)}(y_1, y_2) u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2}, \quad (3.5.4)$$

où  $c_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(j,k)}(y_1, y_2)$  est un coefficient polynomial. L'Annexe E rassemble les deux coefficients polynomiaux  $c_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(0,0)}$  et  $c_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(1,0)}$  au sein des Tableaux E.1 et E.2 respectivement. Les quatre fonctions dénominateur  $D_1, D_2, D_3$  et  $D_4$  s'avèrent être

$$D_1(y_1, y_2, u_1) = -(1+i) + (y_1 + iy_2)u_1 - (iy_1 + y_2)u_1^2 + (1+i)u_1^3, \quad (3.5.5)$$

$$D_2(y_1, y_2, u_1) = -(1+i) + (iy_1 + y_2)u_1 - (y_1 + iy_2)u_1^2 + (1+i)u_1^3, \quad (3.5.6)$$

$$D_3(y_1, y_2, u_2) = (-1+i) + (y_1 - iy_2)u_2 + (iy_1 - y_2)u_2^2 + (1-i)u_2^3, \quad (3.5.7)$$

$$D_4(y_1, y_2, u_2) = (1-i) + (iy_1 - y_2)u_2 + (y_1 - iy_2)u_2^2 - (1-i)u_2^3. \quad (3.5.8)$$

## Conclusion

---

Ce mémoire avait pour ambition de poursuivre le travail des chercheurs Czyżycki, Hrivnák et Patera [4] en définissant des polynômes de Chebyshev généralisés associés aux fonctions d'orbite de Hartley et en calculant les fonctions génératrices de ceux-ci pour les algèbres de Lie simples  $A_2$ ,  $C_2$  et  $G_2$ . Pour y arriver, dans un premier temps, il a fallu présenter certaines notions de base associées à la théorie de Lie comme les systèmes de racines, le groupe de Weyl, original et affine, et plusieurs autres concepts mathématiques connexes. Cette revue était essentielle puisqu'elle permettait d'instaurer les définitions et notations nécessaires permettant l'introduction des fonctions d'orbite de Weyl au chapitre suivant.

En effet, le deuxième chapitre était consacré à l'étude des fonctions symétriques et antisymétriques de Weyl des algèbres  $A_2$ ,  $C_2$  et  $G_2$ . Plus précisément, les premières sections ont introduit les fonctions de Weyl et se sont unies pour énoncer les relations d'orthogonalité discrète de ces fonctions (voir Théorème 2.8.1). Les sections suivantes ont exposé le travail des auteurs de [4] en définissant les polynômes de Weyl (voir définition (2.9.11)), en décrivant leurs relations d'orthogonalité discrète (voir Corollaire 2.10.1) et en calculant les fonctions génératrices de ces polynômes pour chaque algèbre de Lie simple de rang 2. Les résultats de ce chapitre sont capitaux puisqu'ils ont servi de ligne directrice pour les retombées du troisième chapitre.

En conséquence, le dernier chapitre était voué à l'étude des fonctions d'orbite de Hartley. La première section a débuté en définissant ces dernières et en montrant qu'il est possible d'exprimer les fonctions de Hartley en termes des fonctions de Weyl (voir Théorème 3.1.1). Ce résultat a permis d'obtenir deux résultats importants sur les fonctions d'orbite de Hartley des algèbres  $C_2$  et  $G_2$  (voir Théorèmes 3.1.3 et 3.1.4). La deuxième section a énoncé leurs relations d'orthogonalité discrète en reprenant la démonstration de Hrivnák et Juránek [6] et la troisième section a donné la définition des polynômes de Hartley (voir définition (3.3.17)). Elle a également été en mesure d'établir une correspondance entre les polynômes de Hartley et les polynômes de Weyl des algèbres  $C_2$  et  $G_2$  selon les résultats précédents (voir Théorème (3.3.1)). Les deux dernières sections ont détaillé les relations d'orthogonalité discrète des

polynômes de Hartley et ont calculé leurs fonctions génératrices pour les algèbres de Lie simples de rang 2. Finalement, le choix de poursuivre l'étude de Czyzycki, Hrivnak et Patera s'avère concluant, car nos calculs ont permis d'obtenir une formule explicite des fonctions génératrices des polynômes de Hartley pour les algèbres  $A_2$ ,  $C_2$  et  $G_2$ .

Ce mémoire ne présente pas la définition des polynômes de Weyl ni de Hartley, ainsi que le calcul de leurs fonctions génératrices pour les algèbres de Lie simples de rang 3 ou supérieur. En revanche, les résultats qui y sont présentés peuvent nous être utiles afin de discuter de nouvelles pistes de recherche.

Une observation importante a permis de montrer que les fonctions de Hartley coïncidaient avec les fonctions de Weyl à une constante près pour les algèbres de Lie  $C_2$  et  $G_2$ . À savoir que deux points opposés  $w\lambda$  et  $-w\lambda \in \mathcal{O}_\lambda$  étaient soit pondérés par les mêmes facteurs de signe  $\sigma^{(j)}(w)$  ou par des facteurs de signe distincts. À partir de cette observation, il a été possible de réécrire les fonctions d'orbite de Weyl comme une somme de fonctions paires ou impaires respectivement. L'article de Klimyk et Patera [13] généralise en quelque sorte cette constatation pour les algèbres  $B_n$  et  $C_n$  de rang supérieur (voir sections 3.2 et 3.3 de cet article). Ces auteurs se penchent sur les propriétés des fonctions d'orbite symétriques de Weyl  $\varphi_\lambda^{(0)}$  et construisent explicitement des formules pour les orbites du groupe de Weyl des algèbres de Lie simples  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  et  $D_n$ . Leur formule décrivant l'orbite du groupe de Weyl de  $A_n$ ,  $n \geq 2$ , ne garantit pas que deux points opposés  $w\lambda$  et  $-w\lambda$  se situent dans une même orbite  $\mathcal{O}_\lambda$  (voir section 3.1 de cet article), ce qui explique pourquoi il nous était impossible d'obtenir des résultats similaires à  $C_2$  et  $G_2$  pour l'algèbre  $A_2$ . Par conséquent, il est raisonnable de penser que les fonctions et les polynômes de Weyl et de Hartley demeureront distincts pour l'algèbre de Lie  $A_n$ ,  $n \geq 2$ .

Or, puisqu'il a été démontré que les fonctions de Hartley coïncident avec les fonctions de Weyl pour l'algèbre de Lie  $C_2$ , il est à se demander si ce résultat se généralise lorsque le rang augmente. L'article de Klimyk et Patera [14] étudie les propriétés des fonctions antisymétriques de Weyl pour différentes algèbres de Lie simples. Ces derniers construisent explicitement des formules pour les fonctions symétriques et antisymétriques de  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  et  $D_n$ . En particulier, les Propositions 4 et 6 affirment que les fonctions d'orbite  $\varphi_\lambda^{(0)}$  et  $\varphi_\lambda^{(1)}$  de  $C_n$  sont respectivement des fonctions paires et impaires lorsque  $n \geq 3$ . En suivant l'idée de la démonstration de leur Proposition 3, il devrait être possible d'obtenir des conclusions similaires pour les fonctions d'orbite  $\varphi_\lambda^{(2)}$  et  $\varphi_\lambda^{(3)}$ . Ainsi, il serait réaliste de conjecturer que les fonctions de Hartley et de Weyl soient liées à une constante près et que les polynômes de Weyl et de Hartley soient toujours égaux. Cette conjecture s'applique également à l'algèbre  $B_n$ ,  $n \geq 3$ , puisque la Proposition 3 et 6 du même article stipule des résultats similaires.



# Annexe A

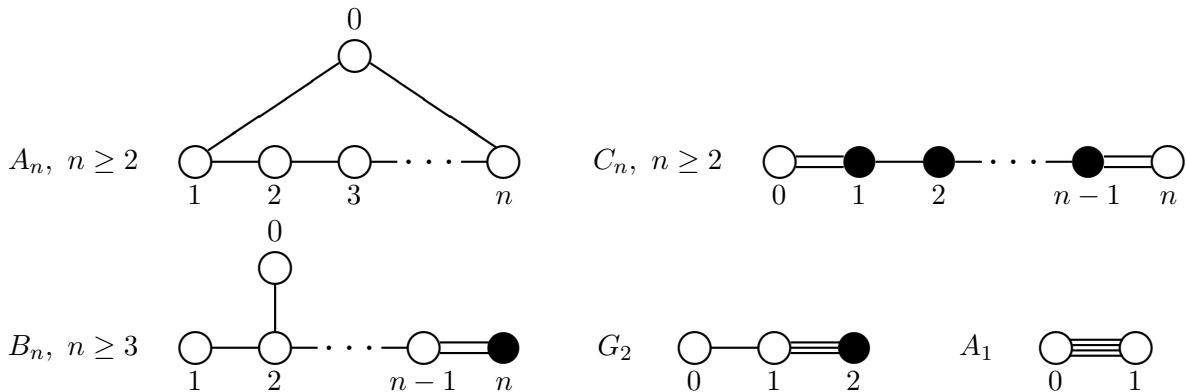
---

## Calcul des coefficients $h_z$ et $h_M^\vee$

D'un point de vue pratique, le calcul des coefficients  $h_z$  et  $h_M^\vee$  apparaissant dans le Théorème 2.8.1 n'est pas simple et rapide. Toutefois, il est possible de les calculer de manière efficace en faisant appel aux diagrammes de Coxeter-Dynkin étendus et aux diagrammes de Coxeter-Dynkin duaux étendus (voir Hrivnák et Patera [10]).

### A.0.1. Les diagrammes de Coxeter-Dynkin étendus

Les diagrammes de Coxeter-Dynkin étendus sont construits en considérant également la plus haute racine  $\xi = -\alpha_0$ . La conception de ces graphes est identique à celle des diagrammes de Coxeter-Dynkin (ci-après DCD) tel qu'initialement abordés au chapitre 1 (voir section 1.4). En effet, pour une base  $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  d'un système de racines crystallographique  $\Phi$ , il suffit de concevoir le graphe du nouvel ensemble  $\Delta' = \{-\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  en suivant les conditions énoncées à la section 1.4.



**Figure A.1.** Les diagrammes de Coxeter-Dynkin étendus des algèbres de Lie simples  $A_1$ ,  $A_n$  ( $n \geq 2$ ),  $C_n$  ( $n \geq 2$ ),  $B_n$  ( $n \geq 3$ ) et  $G_2$ .

Le DCD étendu de  $A_1$  est le seul à contenir quatre arêtes entre deux noeuds. Ces quatre arêtes signifient qu'à l'intérieur de ce système de racines, la plus haute racine et la racine simple sont identiques. La figure A.1 illustre les DCD étendus de certaines algèbres de Lie.

Les diagrammes de Coxeter-Dynkin duaux étendus sont obtenus de la même manière que les DCD étendus. Ils décrivent l'extension de la base  $\Delta^\vee = \{\alpha_1^\vee, \alpha_2^\vee, \dots, \alpha_n^\vee\}$  en y ajoutant la plus haute racine duale  $\eta = -\alpha_0^\vee$ . Pour les algèbres  $A_n$  ( $n \geq 1$ ), les DCD duaux étendus coïncident avec les DCD étendus. Pour  $n \geq 3$ , les DCD duaux étendus de  $B_n$  sont les mêmes que les DCD étendus de  $C_n$  et vice-versa. Quant aux algèbres  $C_2$  et  $G_2$ , leur diagramme de Coxeter-Dynkin dual étendu est illustré dans la Figure A.2.



**Figure A.2.** Les diagrammes de Coxeter-Dynkin duaux étendus de  $C_2$  et  $G_2$ .

### A.0.2. Calcul du coefficient $h_z$

Soit  $z \in F_M^\sigma(\varrho, \varrho^\vee)$  un point auquel on assigne les coordonnées  $[z_0^{\sigma, \varrho}, z_1^{\sigma, \varrho}, z_2^{\sigma, \varrho}, \dots, z_n^{\sigma, \varrho}]$  selon l'équation (2.7.3). Soit  $\varrho^\vee = (\varrho_1^\vee, \varrho_2^\vee, \dots, \varrho_n^\vee)$  un déplacement admissible et considérons le  $(n+1)$ -uplet  $[z_0^{\sigma, \varrho} + \varrho_0^\vee, z_1^{\sigma, \varrho} + \varrho_1^\vee, z_2^{\sigma, \varrho} + \varrho_2^\vee, \dots, z_n^{\sigma, \varrho} + \varrho_n^\vee]$ .

- (1) Si  $z_i^{\sigma, \varrho} + \varrho_i^\vee \neq 0$ ,  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ , alors  $h_z = 1$ .
- (2) Considérons le sous-graphe  $G$  du DCD étendu engendré par les noeuds  $i$  pour lesquels  $z_i^{\sigma, \varrho} + \varrho_i^\vee = 0$ ,  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ . Généralement,  $G$  est composé de différentes composantes connexes  $G_k$  et chacune d'entre elles correspond à un DCD (non étendu) d'une algèbre de Lie  $A_k$ . Pour chaque algèbre de Lie  $A_k$ , prenons la cardinalité du groupe de Weyl associé  $|W_k|$  contenu dans le Tableau 1.1 et

$$h_z = \prod_k |W_k|. \quad (\text{A.0.1})$$

### A.0.3. Calcul du coefficient $h_M^\vee$

Le calcul du coefficient  $h_M^\vee$  se fait de manière similaire. Soit  $\lambda \in \Lambda_M^\sigma(\varrho, \varrho^\vee)$  un point auquel on lui assigne les coordonnées  $[t_0^{\sigma, \varrho^\vee}, t_1^{\sigma, \varrho^\vee}, t_2^{\sigma, \varrho^\vee}, \dots, t_n^{\sigma, \varrho^\vee}]$  selon l'équation (2.7.6). Soit  $\varrho = (\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n)$  un déplacement admissible dual et considérons le  $(n+1)$ -uplet  $[t_0^{\sigma, \varrho^\vee} + \varrho_0, t_1^{\sigma, \varrho^\vee} + \varrho_1, t_2^{\sigma, \varrho^\vee} + \varrho_2, \dots, t_n^{\sigma, \varrho^\vee} + \varrho_n]$ .

- (1) Si  $t_i^{\sigma, \varrho^\vee} + \varrho_i \neq 0$ ,  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ , alors  $h_M^\vee = 1$ .

(2) Considérons le sous-graphe  $G'$  du DCD dual étendu engendré par les noeuds  $i$  pour lesquels  $t_i^{\sigma, \varrho^\vee} + \varrho_i = 0$ ,  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ . Généralement,  $G'$  est composé de différentes composantes connexes  $G'_k$  et chacune d'entre elles correspond à un DCD (non étendu) d'une algèbre de Lie  $A'_k$ . Pour chaque algèbre de Lie  $A'_k$ , prenons la cardinalité du groupe de Weyl associé  $|W'_k|$  contenu dans le Tableau 1.1 et

$$h_M^\vee(\lambda) = \prod_k |W'_k|. \quad (\text{A.0.2})$$



# Annexe B

---

## Polynômes orthogonaux de Weyl

### B.1. Polynômes de $A_2$

Voici les deux familles de polynômes de Weyl de  $A_2$ . Les polynômes de premier type sont

$$\begin{aligned}\mathbb{U}_{(0,0)}^{(0,0)}(x_1, x_2) &= 1, \\ \mathbb{U}_{(1,0)}^{(0,0)}(x_1, x_2) &= \frac{1}{3}x_1, \\ \mathbb{U}_{(0,1)}^{(0,0)}(x_1, x_2) &= \frac{1}{3}x_2, \\ \mathbb{U}_{(1,1)}^{(0,0)}(x_1, x_2) &= \frac{1}{6}x_1x_2 - \frac{1}{2}, \\ \mathbb{U}_{(2,1)}^{(0,0)}(x_1, x_2) &= \frac{1}{6}x_1^2x_2 - \frac{1}{3}x_2^2 - \frac{1}{6}x_1, \\ \mathbb{U}_{(1,2)}^{(0,0)}(x_1, x_2) &= \frac{1}{6}x_1x_2^2 - \frac{1}{3}x_1^2 - \frac{1}{6}x_2,\end{aligned}$$

et ceux de deuxième type sont

$$\begin{aligned}\mathbb{U}_{(0,0)}^{(1,0)}(x_1, x_2) &= 1, \\ \mathbb{U}_{(1,0)}^{(1,0)}(x_1, x_2) &= x_1, \\ \mathbb{U}_{(0,1)}^{(1,0)}(x_1, x_2) &= x_2, \\ \mathbb{U}_{(1,1)}^{(1,0)}(x_1, x_2) &= x_1x_2 - 1, \\ \mathbb{U}_{(2,1)}^{(1,0)}(x_1, x_2) &= x_1^2x_2 - x_2^2 - x_1, \\ \mathbb{U}_{(1,2)}^{(1,0)}(x_1, x_2) &= x_1x_2^2 - x_1^2 - x_2.\end{aligned}$$

## B.2. Polynômes de $C_2$

Voici les huit familles de polynômes de Weyl de  $C_2$ . Les polynômes de premier type sont

$$\begin{aligned}\mathbb{U}_{(0,0)}^{(0,0)}(x_1, x_2) &= 1, \\ \mathbb{U}_{(1,0)}^{(0,0)}(x_1, x_2) &= \frac{1}{4}x_1, \\ \mathbb{U}_{(0,1)}^{(0,0)}(x_1, x_2) &= \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}, \\ \mathbb{U}_{(1,1)}^{(0,0)}(x_1, x_2) &= \frac{1}{8}x_1x_2 - \frac{3}{8}x_1, \\ \mathbb{U}_{(2,1)}^{(0,0)}(x_1, x_2) &= \frac{1}{8}x_1^2x_2 - \frac{1}{8}x_1^2 - \frac{1}{4}x_2^2 - \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{2}, \\ \mathbb{U}_{(1,2)}^{(0,0)}(x_1, x_2) &= -\frac{1}{4}x_1^3 + \frac{1}{8}x_1x_2^2 + \frac{1}{8}x_2x_2 + \frac{1}{2}x_1,\end{aligned}$$

et ceux de deuxième type sont

$$\begin{aligned}\mathbb{U}_{(0,0)}^{(1,0)}(x_1, x_2) &= 1, \\ \mathbb{U}_{(1,0)}^{(1,0)}(x_1, x_2) &= x_1, \\ \mathbb{U}_{(0,1)}^{(1,0)}(x_1, x_2) &= x_2, \\ \mathbb{U}_{(1,1)}^{(1,0)}(x_1, x_2) &= x_1x_2 - x_1, \\ \mathbb{U}_{(2,1)}^{(1,0)}(x_1, x_2) &= x_1^2x_2 - x_1^2 - x_2^2 - x_2 + 1, \\ \mathbb{U}_{(1,2)}^{(1,0)}(x_1, x_2) &= -x_1^3 + x_1x_2^2 + x_1.\end{aligned}$$

Les polynômes de deuxième type court sont

$$\begin{aligned}\mathbb{U}_{(0,0)}^{(2,0)}(x_1, x_2) &= 1, \\ \mathbb{U}_{(1,0)}^{(2,0)}(x_1, x_2) &= x_1, \\ \mathbb{U}_{(0,1)}^{(2,0)}(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}, \\ \mathbb{U}_{(1,1)}^{(2,0)}(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}x_1x_2 - \frac{1}{2}x_1, \\ \mathbb{U}_{(2,1)}^{(2,0)}(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}x_1^2x_2 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - x_2 + \frac{1}{2}, \\ \mathbb{U}_{(1,2)}^{(2,0)}(x_1, x_2) &= -x_1^3 + \frac{1}{2}x_1x_2^2 + x_1x_2 + \frac{3}{2}x_1,\end{aligned}$$

et ceux de deuxième type long sont

$$\begin{aligned}
\mathbb{U}_{(0,0)}^{(3,0)}(x_1, x_2) &= 1, \\
\mathbb{U}_{(1,0)}^{(3,0)}(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}x_1, \\
\mathbb{U}_{(0,1)}^{(3,0)}(x_1, x_2) &= x_2 - 1, \\
\mathbb{U}_{(1,1)}^{(3,0)}(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}x_1x_2 - x_1, \\
\mathbb{U}_{(2,1)}^{(3,0)}(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}x_1^2x_2 - \frac{1}{2}x_1^2 - x_2^2 + 1, \\
\mathbb{U}_{(1,2)}^{(3,0)}(x_1, x_2) &= -\frac{1}{2}x_1^3 + \frac{1}{2}x_1x_2^2 - \frac{1}{2}x_1x_2 + x_1.
\end{aligned}$$

Les polynômes de Weyl de troisième type sont

$$\begin{aligned}
\mathbb{U}_{(0,0)}^{(0,1)}(x_1, x_2) &= 1, \\
\mathbb{U}_{(1,0)}^{(0,1)}(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}x_1 - 1, \\
\mathbb{U}_{(0,1)}^{(0,1)}(x_1, x_2) &= -x_1 + x_2, \\
\mathbb{U}_{(1,1)}^{(0,1)}(x_1, x_2) &= -\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_1x_2 - \frac{1}{2}x_1 + 1, \\
\mathbb{U}_{(2,1)}^{(0,1)}(x_1, x_2) &= -\frac{1}{2}x_1^3 + \frac{1}{2}x_1^2x_2 + x_1x_2 - x_2^2 + \frac{1}{2}x_1 - x_2 + 1, \\
\mathbb{U}_{(1,2)}^{(0,1)}(x_1, x_2) &= -\frac{1}{2}x_1^3 - \frac{1}{2}x_1^2x_2 + \frac{1}{2}x_1x_2^2 + \frac{3}{2}x_1^2 - 1,
\end{aligned}$$

et ceux de quatrième type sont

$$\begin{aligned}
\mathbb{U}_{(0,0)}^{(1,1)}(x_1, x_2) &= 1, \\
\mathbb{U}_{(0,0)}^{(1,1)}(x_1, x_2) &= x_1 + 1, \\
\mathbb{U}_{(0,0)}^{(1,1)}(x_1, x_2) &= x_1 + x_2 + 1, \\
\mathbb{U}_{(0,0)}^{(1,1)}(x_1, x_2) &= x_1^2 + x_1x_2 - 1, \\
\mathbb{U}_{(0,0)}^{(1,1)}(x_1, x_2) &= x_1^3 + x_1^2x_2 - x_1x_2 - x_2^2 - 2x_1 - 2x_2, \\
\mathbb{U}_{(0,0)}^{(1,1)}(x_1, x_2) &= -x_1^3 + x_1^2x_2 + x_1x_2^2 - 2x_1^2 + x_1x_2 + 1.
\end{aligned}$$

Les polynômes de Weyl de quatrième type court sont

$$\begin{aligned}
\mathbb{U}_{(0,0)}^{(2,1)}(x_1, x_2) &= 1, \\
\mathbb{U}_{(0,0)}^{(2,1)}(x_1, x_2) &= x_1 - 1, \\
\mathbb{U}_{(0,0)}^{(2,1)}(x_1, x_2) &= -x_1 + x_2 + 1, \\
\mathbb{U}_{(0,0)}^{(2,1)}(x_1, x_2) &= -x_1^2 + x_1x_2 + 1, \\
\mathbb{U}_{(0,0)}^{(2,1)}(x_1, x_2) &= -x_1^3 + x_1^2x_2 + x_1x_2 - x_2^2 + 2x_1 - 2x_2, \\
\mathbb{U}_{(0,0)}^{(2,1)}(x_1, x_2) &= -x_1^3 - x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + 2x_1^2 + x_1x_2 - 1,
\end{aligned}$$

et ceux de quatrième type long sont

$$\begin{aligned}
\mathbb{U}_{(0,0)}^{(3,1)}(x_1, x_2) &= 1, \\
\mathbb{U}_{(0,0)}^{(3,1)}(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}x_1 + 1, \\
\mathbb{U}_{(0,0)}^{(3,1)}(x_1, x_2) &= x_1 + x_2, \\
\mathbb{U}_{(0,0)}^{(3,1)}(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_1x_2 - \frac{1}{2}x_1 - 1, \\
\mathbb{U}_{(0,0)}^{(3,1)}(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}x_1^3 + \frac{1}{2}x_1^2x_2 - x_1x_2 - x_2^2 - \frac{1}{2}x_1 - x_2 + 1, \\
\mathbb{U}_{(0,0)}^{(3,1)}(x_1, x_2) &= -\frac{1}{2}x_1^3 + \frac{1}{2}x_1^2x_2 + \frac{1}{2}x_1x_2^2 - \frac{3}{2}x_1^2 + 1.
\end{aligned}$$

### B.3. Polynômes de $G_2$

Voici les quatre familles de polynômes de Weyl de  $G_2$ . Les polynômes de premier type sont

$$\begin{aligned}
\mathbb{U}_{(0,0)}^{(0,0)}(x_1, x_2) &= 1, \\
\mathbb{U}_{(1,0)}^{(0,0)}(x_1, x_2) &= \frac{1}{6}x_1 - \frac{1}{6}x_2 - \frac{1}{6}, \\
\mathbb{U}_{(0,1)}^{(0,0)}(x_1, x_2) &= \frac{1}{6}x_2 - \frac{1}{6}, \\
\mathbb{U}_{(1,1)}^{(0,0)}(x_1, x_2) &= \frac{1}{12}x_1x_2 - \frac{1}{4}x_2^2 + \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{6}x_2 + \frac{5}{12}, \\
\mathbb{U}_{(2,1)}^{(0,0)}(x_1, x_2) &= -\frac{1}{6}x_2^4 + \frac{1}{12}x_1^2x_2 + \frac{1}{4}x_1x_2^2 + \frac{1}{3}x_2^3 + \frac{1}{12}x_1^2 - \frac{1}{6}x_1x_2 + \frac{1}{6}x_2^2 - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{6}, \\
\mathbb{U}_{(1,2)}^{(0,0)}(x_1, x_2) &= \frac{1}{12}x_1x_2^2 - \frac{1}{12}x_2^3 - \frac{1}{6}x_1^2 - \frac{1}{12}x_1x_2 + \frac{1}{3}x_2^2 - \frac{1}{6}x_1 - \frac{1}{12}x_2 - \frac{1}{6},
\end{aligned}$$



et ceux de deuxième type sont

$$\mathbb{U}_{(0,0)}^{(1,0)}(x_1, x_2) = 1,$$

$$\mathbb{U}_{(1,0)}^{(1,0)}(x_1, x_2) = x_1,$$

$$\mathbb{U}_{(0,1)}^{(1,0)}(x_1, x_2) = x_2,$$

$$\mathbb{U}_{(1,1)}^{(1,0)}(x_1, x_2) = x_1x_2 - x_2^2 + x_1 + 1,$$

$$\mathbb{U}_{(2,1)}^{(1,0)}(x_1, x_2) = -x_2^4 + x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_2^3 + x_1^2 + 2x_2^2 - x_2 - 1,$$

$$\mathbb{U}_{(1,2)}^{(1,0)}(x_1, x_2) = x_1x_2^2 - x_2^3 - x_1^2 + x_2^2 - x_1 + x_2.$$

Les polynômes de Weyl de deuxième type court sont

$$\mathbb{U}_{(0,0)}^{(2,0)}(x_1, x_2) = 1,$$

$$\mathbb{U}_{(1,0)}^{(2,0)}(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2},$$

$$\mathbb{U}_{(0,1)}^{(2,0)}(x_1, x_2) = x_2 + 1,$$

$$\mathbb{U}_{(1,1)}^{(2,0)}(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 + x_1 - \frac{1}{2}x_2,$$

$$\mathbb{U}_{(2,1)}^{(2,0)}(x_1, x_2) = -x_2^4 + \frac{1}{2}x_1^2x_2 + 2x_1x_2^2 + \frac{1}{2}x_2^3 + \frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_2 + \frac{3}{2}x_2^2 - x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2},$$

$$\mathbb{U}_{(1,2)}^{(2,0)}(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1x_2^2 - \frac{1}{2}x_2^3 - \frac{1}{2}x_1^2 + x_2 + \frac{1}{2},$$

et ceux de deuxième type long sont

$$\mathbb{U}_{(0,0)}^{(3,0)}(x_1, x_2) = 1,$$

$$\mathbb{U}_{(1,0)}^{(3,0)}(x_1, x_2) = x_1 - x_2 + 1,$$

$$\mathbb{U}_{(0,1)}^{(3,0)}(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2},$$

$$\mathbb{U}_{(1,1)}^{(3,0)}(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1x_2 - x_2^2 + \frac{1}{2}x_1 + x_2 + 1,$$

$$\mathbb{U}_{(2,1)}^{(3,0)}(x_1, x_2) = -\frac{1}{2}x_2^4 + \frac{1}{2}x_1^2x_2 + \frac{3}{2}x_2^3 + \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{2}x_1 - 2x_2,$$

$$\mathbb{U}_{(1,2)}^{(3,0)}(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1x_2^2 - \frac{1}{2}x_2^3 - x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 - \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}.$$



# Annexe C

---

## Les coefficients $\alpha_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(j, k)}$ des fonctions $N^{(j, k)}$ de $C_2$ et $G_2$

### C.1. Les coefficients $\alpha_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(j, k)}$ pour $C_2$

$(\lambda_1, \lambda_2)$	$8\alpha_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(0,0)}$	$\alpha_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(1,0)}$	$\alpha_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(2,0)}$	$\alpha_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(3,0)}$
(0, 0)	8	1	1	1
(0, 1)	$-6x_2 + 6$	1	$-\frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}$	0
(0, 2)	$4x_1^2 - 8x_2$	0	$-\frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}$	-1
(0, 3)	$-2x_2 + 2$	0	1	0
(1, 0)	$-6x_1$	0	0	$-\frac{1}{2}x_1$
(1, 1)	$5x_1x_2 - 7x_1$	$-x_1$	$-x_1$	$-\frac{1}{2}x_1$
(1, 2)	$-4x_1^3 + 9x_1x_2 + x_1$	0	$\frac{1}{2}x_1x_2 - \frac{1}{2}x_1$	$x_1$
(1, 3)	$2x_1x_2 - 4x_1$	0	$-x_1$	0
(2, 0)	$4x_2 + 4$	0	-1	1
(2, 1)	$2x_1^2 - 4x_2^2 - 2x_2 + 6$	1	$x_2$	$\frac{1}{2}x_1^2 - x_2 + 1$
(2, 2)	$3x_1^2 + x_1^2 - 6x_2^2 - 8x_2 + 6$	1	$-x_1^2 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{3}{2}$	$-x_2$
(2, 3)	$2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_2 + 4$	0	$\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}$	0
(3, 0)	$-2x_1$	0	0	0
(3, 1)	$2x_1x_2 - 4x_1$	0	0	$-\frac{1}{2}x_1$
(3, 2)	$-2x_1^3 + 5x_1x_2 + x_1$	0	0	$\frac{1}{2}x_1$
(3, 3)	$x_1x_2 - 3x_1$	0	0	0

**Tableau C.1.** Valeurs des coefficients  $\alpha_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(j,0)}$  de la fonction numérateur (2.11.10) de  $C_2$ .

$(\lambda_1, \lambda_2)$	$\alpha_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(0,1)}$	$\alpha_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(1,1)}$	$\alpha_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(2,1)}$	$\alpha_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(3,1)}$
(0, 0)	1	1	1	1
(0, 1)	$-x_1 + 1$	$x_1 + 2$	$-x_1 + 2$	$x_1 + 1$
(0, 2)	$x_1 - 1$	1	1	$-x_1 - 1$
(0, 3)	-1	0	0	-1
(1, 0)	$-\frac{1}{2}x_1 - 1$	1	-1	$-\frac{1}{2}x_1 + 1$
(1, 1)	$\frac{1}{2}x_1^2 - x_1 + x_2$	$-x_1 - x_2$	$-x_1 + x_2$	$-\frac{1}{2}x_1^2 - x_1 - x_2$
(1, 2)	$-x_1^2 + \frac{1}{2}x_1 + x_2$	$-x_1 - x_2$	$-x_1 + x_2$	$x_1^2 + \frac{1}{2}x_1 - x_2$
(1, 3)	$x_1 - 1$	1	-1	$x_1 + 1$
(2, 0)	$\frac{1}{2}x_1 + 1$	0	0	$-\frac{1}{2}x_1 + 1$
(2, 1)	$\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_1x_2 - x_1 - x_2 + 2$	1	1	$\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_1x_2 + x_1 - x_2 + 2$
(2, 2)	$\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_1x_2 - 2x_2 + 1$	$x_1 + 2$	$-x_1 + 2$	$\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_1x_2 - 2x_2 + 1$
(2, 3)	$\frac{1}{2}x_1 - x_2$	1	1	$-\frac{1}{2}x_1 - x_2$
(3, 0)	-1	0	0	1
(3, 1)	$-\frac{1}{2}x_1 + x_2$	0	0	$-\frac{1}{2}x_1 - x_2$
(3, 2)	$-\frac{1}{2}x_1^2 + x_2$	0	0	$\frac{1}{2}x_1^2 - x_2$
(3, 3)	$\frac{1}{2}x_1 - 1$	0	0	$\frac{1}{2}x_1 + 1$

**Tableau C.2.** Valeurs des coefficients  $\alpha_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(j,1)}$  de la fonction numérateur (2.11.10) de  $C_2$ .

## C.2. Les coefficients $\alpha_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(j, k)}$ pour $G_2$

$(\lambda_1, \lambda_2)$	$12\alpha_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(0,0)}$
(0, 0)	12
(0, 1)	$-10x_2 + 10$
(0, 2)	$8x_1 + 8$
(0, 3)	$-6x_2^2 + 12x_1 + 6$
(0, 4)	$4x_1 + 4$
(0, 5)	$-2x_2 + 2$
(1, 0)	$-10x_1 + 10x_2 + 10$
(1, 1)	$9x_1x_2 - 11x_2^2 - 5x_2 + 2x_2 + 13$
(1, 2)	$2x_2^3 - 8x_1^2 + 3x_1x_2 - x_2^2 + x_1 + 2x_2 + 9$
(1, 3)	$6x_1x_2^2 - 6x_2^3 - 12x_1^2 + 10x_1x_2 - 4x_2^2 + 6x_1 + 2x_2 + 12$
(1, 4)	$-4x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2 + 8$
(1, 5)	$2x_1x_2 - 2x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 4$
(2, 0)	$8x_2^3 - 24x_1x_2 - 16x_1 - 8x_2 + 8$
(2, 1)	$-8x_2^4 + 25x_1x_2^2 + 7x_2^3 - 2x_1^2 - 6x_1x_2 + 7x_2^2 - 17x_1 - 11x_2 + 9$
(2, 2)	$7x_1x_2^3 - x_2^4 - 21x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + 11x_2^3 - 19x_1^2 - 29x_1x_2 - 5x_2^2 - 13x_1 - 7x_2 + 10$
(2, 3)	$-6x_2^5 + 30x_1x_2^3 - 35x_1^2x_2 + 11x_1x_2^2 + 16x_2^3 - 27x_1^2 - 35x_1x_2 - 11x_2^2 - 12x_1 - 2x_2 + 11$
(2, 4)	$4x_1x_2^3 - 12x_1^2x_2 - x_1x_2^2 + 3x_2^3 - 8x_1^2 - 8x_1x_2 - x_2^2 - 7x_1 + x_2 + 5$
(2, 5)	$-2x_2^4 + 6x_1x_2^2 + 2x_2^3 - x_1x_2 + 3x_2^2 - 9x_1 - 6x_2 - 1$
(3, 0)	$12x_2^3 - 6x_1^2 - 24x_1x_2 - 6x_2^2 - 24x_1 - 12x_2 + 6$
(3, 1)	$-12x_2^4 + 6x_1^2x_2 + 23x_1x_2^2 + 19x_2^3 - 4x_1^2 - 2x_1x_2 + 7x_2^2 - 23x_1 - 23x_2 + 5$
(3, 2)	$13x_1x_2^3 - 3x_2^4 - 6x_1^3 - 26x_1^2x_2 + 2x_1x_2^2 + 13x_2^3 - 30x_1^2 - 40x_1x_2 - 17x_1 - 13x_2 + 11$
(3, 3)	$-10x_2^5 + 5x_1^2x_2^2 + 40x_1x_2^3 + 5x_2^4 - 10x_1^3 - 42x_1^2x_2 + 14x_1x_2^2 + 26x_2^3 - 47x_1^2 - 62x_1x_2 - 14x_2^2 - 16x_1 - 16x_2 + 17$
(3, 4)	$9x_1x_2^3 - 3x_2^4 - 4x_1^3 - 18x_1^2x_2 + 4x_1x_2^2 + 9x_2^3 - 20x_1^2 - 28x_1x_2 + 2x_2^2 - 11x_1 - 9x_2 + 9$
(3, 5)	$-4x_2^4 + 2x_1^2x_2 + 7x_1x_2^2 + 7x_2^3 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 7x_1 - 11x_2 + 1$
(4, 0)	$4x_2^3 - 12x_1x_2 - 8x_1 - 4x_2 + 4$
(4, 1)	$-4x_2^4 + 12x_1x_2^2 + 4x_2^3 - 3x_1x_2 + 5x_2^2 - 13x_1 - 10x_2 + 1$
(4, 2)	$4x_1x_2^3 - 12x_1x_2^2 - x_1x_2^2 + 3x_2^3 - 8x_1^2 - 8x_1 - 1x_2 - x_2^2 - 7x_1 + x_2 + 5$
(4, 3)	$-4x_2^5 + 20x_1x_2^2 - 23x_1^2x_2 + 7x_2x_2^2 + 12x_2^3 - 19x_1^2 - 25x_1x_2 - 9x_2^2 - 12x_1 + 9$
(4, 4)	$3x_1x_2^3 - x_2^4 - 9x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + 7x_2^3 - 11x_1^2 - 13x_1x_2 - 5x_2^2 - 9x_1 - 3x_2 + 6$
(4, 5)	$-2x_2^4 + 7x_1x_2^2 + x_2^3 - 2x_1^2 + x_2^2 - 5x_1 + x_2 + 3$
(5, 0)	$-2x_1 + 2x_2 + 2$
(5, 1)	$2x_1x_2 - 2x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 4$
(5, 2)	$-2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_2 + 6$
(5, 3)	$2x_1x_2^2 - 2x_2^3 - 4x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1 - 2x_2 + 8$
(5, 4)	$2x_2^3 - 2x_1^2 - 3x_1x_2 - x_2^2 + x_1 - 4x_2 + 3$
(5, 5)	$x_1x_2 - 3x_2^2 + 3x_1 + 2x_5 + 5$

**Tableau C.3.** Valeurs des coefficients  $\alpha_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(0,0)}$  de la fonction numérateur (2.11.13) de  $G_2$ .

$(\lambda_1, \lambda_2)$	$\alpha_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(1,0)}$	$\alpha_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(2,0)}$
(0, 0)	1	1
(0, 1)	1	2
(0, 2)	0	$-x_2 + 1$
(0, 3)	0	2
(0, 4)	0	1
(0, 5)	0	0
(1, 0)	$x_2 + 1$	$-\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}$
(1, 1)	$-x_2^2 + x_1 + x_2 + 2$	$-x_2 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{2}x_2 + \frac{3}{2}$
(1, 2)	$x_1 + 1$	$x_1x_2 - x_2^2 + x_2 + 1$
(1, 3)	$-x_2 + 1$	$-2x_1 + x_2 + 2$
(1, 4)	1	$-x_1 + x_2 + 2$
(1, 5)	0	0
(2, 0)	$x_2 + 1$	$-\frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}$
(2, 1)	$-x_2^2 + x_2 + 1$	$\frac{1}{2}x_1x_2^2 + \frac{1}{2}x_2^3 - \frac{1}{2}x_1^2 - 3x_1x_2 - \frac{3}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 1$
(2, 2)	$x_1x_2 - x_2^2 + x_1 + 2x_2 + 1$	$-x_2^4 + 3x_1x_2^2 + x_2^3 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_1x_2 + x_2^2 - x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}$
(2, 3)	$-x_2^2 + x_2 + 1$	$2x_2^3 - \frac{11}{2}x_1x_2 - \frac{3}{2}x_2^2 - \frac{7}{2}x_1 - x_2 + \frac{5}{2}$
(2, 4)	$x_2 + 1$	$x_2^3 - 3x_1x_2 - \frac{5}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}$
(2, 5)	0	0
(3, 0)	1	$\frac{1}{2}x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}$
(3, 1)	$-x_2 + 1$	$-\frac{1}{2}x_1x_2^2 + \frac{3}{2}x_2^3 - \frac{3}{2}x_1x_2 - x_2^2 - \frac{5}{2}x_1 - 2x_2 - \frac{1}{2}$
(3, 2)	$x_1 + 1$	$-x_2^4 + \frac{1}{2}x_1^2x_2 + 2x_1x_2^2 + \frac{3}{2}x_2^3 - \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - 2x_1 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}$
(3, 3)	$-x_2^2 + x_1 + x_2 + 2$	$\frac{1}{2}x_1x_2^2 + \frac{5}{2}x_2^3 - 2x_1^2 - \frac{13}{2}x_1x_2 - x_2^2 - \frac{11}{2}x_1 - 2x_2 + \frac{5}{2}$
(3, 4)	$x_2 + 1$	$2x_2^3 - x_1^2 - \frac{9}{2}x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{7}{2}x_1 - 2x_2 + \frac{3}{2}$
(3, 5)	0	0
(4, 0)	0	$\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}$
(4, 1)	0	$-\frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{3}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_1 - x_2 - \frac{1}{2}$
(4, 2)	0	$\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_1x_2 - x_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}$
(4, 3)	1	$-\frac{1}{2}x_1x_2^2 + \frac{3}{2}x_2^3 + \frac{1}{2}x_1^2 - 3x_1x_2 - \frac{5}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + 1$
(4, 4)	1	$x_2^3 - \frac{5}{2}x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{5}{2}x_1 - x_2 + \frac{1}{2}$
(4, 5)	0	0
(5, 0)	0	-1
(5, 1)	0	$x_2$
(5, 2)	0	$-x_1 - x_2$
(5, 3)	0	$x_2^2 - \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}$
(5, 4)	0	$-\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}$
(5, 5)	0	0

**Tableau C.4.** Valeurs des coefficients  $\alpha_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(1,0)}$  et  $\alpha_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(2,0)}$  de la fonction numérateur (2.11.13) de  $G_2$ .

$(\lambda_1, \lambda_2)$	$\alpha_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(3,0)}$
(0, 0)	1
(0, 1)	$-\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}$
(0, 2)	$\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}$
(0, 3)	-1
(0, 4)	0
(0, 5)	0
(1, 0)	2
(1, 1)	$-\frac{1}{2}x_2^2 + x_1 - x_2 + \frac{5}{2}$
(1, 2)	$\frac{1}{2}x_2^3 - \frac{3}{2}x_1x_2 + \frac{3}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 1$
(1, 3)	$-\frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{3}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}$
(1, 4)	$\frac{1}{2}x_2^2 - x_2 + \frac{1}{2}$
(1, 5)	$-\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}$
(2, 0)	$-x_1 + x_2 + 1$
(2, 1)	$x_1x_2 - \frac{3}{2}x_2^2 + x_2 + \frac{3}{2}$
(2, 2)	$\frac{1}{2}x_2^3 - x_1^2 - x_2^2 + x_2 + \frac{1}{2}$
(2, 3)	$\frac{1}{2}x_1x_2^2 - \frac{1}{2}x_2^3 - x_1^2 + x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}$
(2, 4)	$-\frac{1}{2}x_2^3 + x_1x_2 + x_2^2 + \frac{1}{2}$
(2, 5)	$\frac{1}{2}x_2^2 - x_1 - x_2 - \frac{1}{2}$
(3, 0)	2
(3, 1)	$-\frac{3}{2}x_2 + \frac{3}{2}$
(3, 2)	$-\frac{1}{2}x_2^2 + 2x_1 + x_2 + \frac{3}{2}$
(3, 3)	$\frac{1}{2}x_1x_2 - 2x_2^2 + \frac{5}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{3}{2}$
(3, 4)	$-\frac{1}{2}x_2^3 + \frac{3}{2}x_1x_2 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 + 1$
(3, 5)	$\frac{1}{2}x_2^2 - x_1 - x_2 - \frac{1}{2}$
(4, 0)	1
(4, 1)	$-x_2 + 1$
(4, 2)	$x_1 + 1$
(4, 3)	$-x_2^2 + 2x_1 + 2$
(4, 4)	$x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}$
(4, 5)	$-\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}$
(5, 0)	0
(5, 1)	0
(5, 2)	0
(5, 3)	0
(5, 4)	0
(5, 5)	0

**Tableau C.5.** Valeurs des coefficients  $\alpha_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(3,0)}$  de la fonction numérateur (2.11.13) de  $G_2$ .





# Annexe D

---

## Polynômes orthogonaux de Hartley de $A_2$

Voici les deux familles de polynômes de Hartley données par (3.3.17) pour le système de racines  $A_2$ . Les polynômes de premier type sont

$$\mathbb{V}_{(0,0)}^{(0,0)}(y_1, y_2) = 1,$$

$$\mathbb{V}_{(1,0)}^{(0,0)}(y_1, y_2) = \frac{1}{3}y_2,$$

$$\mathbb{V}_{(0,1)}^{(0,0)}(y_1, y_2) = \frac{1}{3}y_1,$$

$$\mathbb{V}_{(1,1)}^{(0,0)}(y_1, y_2) = \frac{1}{12}y_1^2 + \frac{1}{12}y_2^2 - \frac{1}{2},$$

$$\mathbb{V}_{(2,0)}^{(0,0)}(y_1, y_2) = -\frac{1}{6}y_1^2 + \frac{1}{3}y_1y_2 + \frac{1}{6}y_2^2 - \frac{2}{3}y_1,$$

$$\mathbb{V}_{(0,2)}^{(0,0)}(y_1, y_2) = \frac{1}{6}y_1^2 + \frac{1}{3}y_1y_2 - \frac{1}{6}y_2^2 - \frac{2}{3}y_2,$$

$$\mathbb{V}_{(2,1)}^{(0,0)}(y_1, y_2) = \frac{1}{12}y_1^2y_2 + \frac{1}{12}y_2^3 - \frac{1}{6}y_1^2 - \frac{1}{3}y_1y_2 + \frac{1}{6}y_2^2 - \frac{1}{6}y_2,$$

$$\mathbb{V}_{(1,2)}^{(0,0)}(y_1, y_2) = \frac{1}{12}y_1^3 + \frac{1}{12}y_1y_2^2 + \frac{1}{6}y_1^2 - \frac{1}{3}y_1y_2 - \frac{1}{6}y_2^2 - \frac{1}{6}y_1,$$

$$\mathbb{V}_{(2,2)}^{(0,0)}(y_1, y_2) = \frac{1}{24}y_1^4 + \frac{1}{12}y_1^2y_2^2 + \frac{1}{24}y_2^4 + \frac{1}{6}y_1^3 - \frac{1}{2}y_1^2y_2 - \frac{1}{2}y_1y_2^2 + \frac{1}{6}y_2^3 + \frac{1}{3}y_1^2 + \frac{1}{3}y_2^2 - \frac{1}{2},$$

$$\mathbb{V}_{(3,0)}^{(0,0)}(y_1, y_2) = -\frac{1}{6}y_1^3 + \frac{1}{2}y_1y_2^2 - \frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + 1,$$

$$\mathbb{V}_{(0,3)}^{(0,0)}(y_1, y_2) = \frac{1}{2}y_1^2y_2 - \frac{1}{6}y_2^3 - \frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + 1,$$

$$\mathbb{V}_{(3,1)}^{(0,0)}(y_1, y_2) = -\frac{1}{24}y_1^4 + \frac{1}{12}y_1^3y_2 + \frac{1}{12}y_1y_2^3 + \frac{1}{24}y_2^4 - \frac{1}{4}y_1^3 - \frac{1}{4}y_1y_2^2 + \frac{1}{12}y_1^2 - \frac{1}{6}y_1y_2 - \frac{1}{12}y_2^2 + \frac{5}{6}y_1,$$

$$\mathbb{V}_{(1,3)}^{(0,0)}(y_1, y_2) = \frac{1}{24}y_1^4 + \frac{1}{12}y_1^3y_2 + \frac{1}{12}y_1y_2^3 - \frac{1}{24}y_2^4 - \frac{1}{4}y_1^2y_2 - \frac{1}{4}y_2^3 - \frac{1}{12}y_1^2 - \frac{1}{6}y_1y_2 + \frac{1}{12}y_2^2 + \frac{5}{6}y_2,$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_{(3,2)}^{(0,0)}(y_1, y_2) &= \frac{1}{24}y_1^4y_2 + \frac{1}{12}y_1^2y_2^3 + \frac{1}{24}y_2^5 - \frac{1}{24}y_1^4 + \frac{1}{12}y_1^3y_2 - \frac{1}{2}y_1^2y_2^2 - \frac{7}{12}y_1y_2^3 + \frac{5}{24}y_2^4 + \frac{1}{2}y_1^2y_2 \\
&\quad + \frac{1}{2}y_2^3 + \frac{1}{4}y_1^2 + \frac{1}{2}y_1y_2 - \frac{1}{4}y_2^2 - \frac{7}{6}y_2, \\
\mathbb{V}_{(2,3)}^{(0,0)}(y_1, y_2) &= \frac{1}{24}y_1^5 + \frac{1}{12}y_1^3y_2^2 + \frac{1}{24}y_1y_2^4 + \frac{5}{24}y_1^4 - \frac{7}{12}y_1^3y_2 - \frac{1}{2}y_1^2y_2^2 + \frac{1}{12}y_1y_2^3 - \frac{1}{24}y_2^4 + \frac{1}{2}y_1^3 \\
&\quad + \frac{1}{2}y_1y_2^2 - \frac{1}{4}y_1^2 + \frac{1}{2}y_1y_2 + \frac{1}{4}y_2^2 - \frac{7}{6}y_1, \\
\mathbb{V}_{(3,3)}^{(0,0)}(y_1, y_2) &= \frac{1}{48}y_1^6 + \frac{1}{16}y_1^4y_2^2 + \frac{1}{16}y_1^2y_2^4 + \frac{1}{48}y_2^6 + \frac{1}{8}y_1^5 - \frac{3}{8}y_1^4y_2 - \frac{1}{4}y_1^3y_2^2 - \frac{1}{4}y_1^2y_2^3 - \frac{3}{8}y_1y_2^4 + \frac{1}{8}y_2^5 \\
&\quad + \frac{3}{8}y_1^4 + \frac{3}{4}y_1^2y_2^2 + \frac{3}{8}y_2^4 - \frac{1}{4}y_1^3 + \frac{3}{4}y_1^2y_2 + \frac{3}{4}y_1y_2^2 - \frac{1}{4}y_2^3 - \frac{3}{2}y_1^2 - \frac{3}{2}y_2^2 + 1,
\end{aligned}$$

et ceux de deuxième type sont

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_{(0,0)}^{(1,0)}(y_1, y_2) &= 1, \\
\mathbb{V}_{(1,0)}^{(1,0)}(y_1, y_2) &= y_1, \\
\mathbb{V}_{(0,1)}^{(1,0)}(y_1, y_2) &= y_2, \\
\mathbb{V}_{(1,1)}^{(1,0)}(y_1, y_2) &= \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 - 1, \\
\mathbb{V}_{(2,0)}^{(1,0)}(y_1, y_2) &= \frac{1}{2}y_1^2 + y_1y_2 - \frac{1}{2}y_2^2 - y_2, \\
\mathbb{V}_{(0,2)}^{(1,0)}(y_1, y_2) &= -\frac{1}{2}y_1^2 + y_1y_2 + \frac{1}{2}y_2^2 - y_1, \\
\mathbb{V}_{(2,1)}^{(1,0)}(y_1, y_2) &= \frac{1}{2}y_1^3 + \frac{1}{2}y_1y_2^2 + \frac{1}{2}y_1^2 - y_1y_2 - \frac{1}{2}y_2^2 - y_1, \\
\mathbb{V}_{(1,2)}^{(1,0)}(y_1, y_2) &= \frac{1}{2}y_1^2y_2 + \frac{1}{2}y_2^3 - \frac{1}{2}y_1^2 - y_1y_2 + \frac{1}{2}y_2^2 - y_2, \\
\mathbb{V}_{(2,2)}^{(1,0)}(y_1, y_2) &= \frac{1}{4}y_1^4 + \frac{1}{2}y_1^2y_2^2 + \frac{1}{4}y_2^4 + \frac{1}{2}y_1^3 - \frac{3}{2}y_1^2y_2 - \frac{3}{2}y_1y_2^2 + \frac{1}{2}y_2^3, \\
\mathbb{V}_{(3,0)}^{(1,0)}(y_1, y_2) &= \frac{3}{2}y_1^2y_2 - \frac{1}{3}y_2^3 - y_1^2 - y_2^2 + 1, \\
\mathbb{V}_{(0,3)}^{(1,0)}(y_1, y_2) &= -\frac{1}{3}y_1^3 + \frac{3}{2}y_1y_2^2 - y_1^2 - y_2^2 + 1, \\
\mathbb{V}_{(3,1)}^{(1,0)}(y_1, y_2) &= \frac{1}{4}y_1^4 + \frac{1}{2}y_1^3y_2 + \frac{1}{2}y_1y_2^3 - \frac{1}{4}y_2^4 - y_1^2y_2 - y_2^3 - \frac{1}{2}y_1^2 - y_1y_2 + \frac{1}{2}y_2^2 + 2y_2, \\
\mathbb{V}_{(1,3)}^{(1,0)}(y_1, y_2) &= -\frac{1}{4}y_1^4 + \frac{1}{2}y_1^3y_2 + \frac{1}{2}y_1y_2^3 + \frac{1}{4}y_2^4 - y_1^3 - y_1y_2^2 + \frac{1}{2}y_1^2 - y_1y_2 - \frac{1}{2}y_2^2 + 2y_1, \\
\mathbb{V}_{(3,2)}^{(1,0)}(y_1, y_2) &= \frac{1}{4}y_1^5 + \frac{1}{2}y_1^3y_2^2 + \frac{1}{4}y_1y_2^4 + \frac{3}{4}y_1^4 - 2y_1^3y_2 - \frac{3}{2}y_1^2y_2^2 - \frac{1}{4}y_2^4 + \frac{1}{2}y_1^3 + \frac{1}{2}y_1y_2^2 - y_1^2 \\
&\quad + 2y_1y_2 + y_2^2 - y_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_{(2,3)}^{(1,0)}(y_1, y_2) &= \frac{1}{4}y_1^4y_2 + \frac{1}{2}y_1^2y_2^3 + \frac{1}{4}y_2^5 - \frac{1}{4}y_1^4 - \frac{3}{2}y_1^2y_2^2 - 2y_1y_2^3 + \frac{3}{4}y_2^4 + \frac{1}{2}y_1^2y_2 + \frac{1}{2}y_2^3 + y_1^2 \\ &\quad + 2y_1y_2 - y_2^2 - y_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_{(3,3)}^{(1,0)}(y_1, y_2) &= \frac{1}{8}y_1^6 + \frac{3}{8}y_1^4y_2^2 + \frac{3}{8}y_1^2y_2^4 + \frac{1}{8}y_2^6 + \frac{1}{2}y_1^5 - \frac{3}{2}y_1^4y_2 - y_1^3y_2^2 - y_1^2y_2^3 - \frac{3}{2}y_1y_2^4 + \frac{1}{2}y_2^5 \\ &\quad + \frac{3}{4}y_1^4 + \frac{3}{2}y_1^2y_2^2 + \frac{3}{4}y_2^4 - y_1^3 + 3y_1^2y_2 + 3y_1y_2^2 - y_2^3 - \frac{5}{2}y_1^2 - \frac{5}{2}y_2^2 + 1. \end{aligned}$$



## Annexe E

---

### Les coefficients $c_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(j, k)}$ des fonctions numérateur de $A_2$

Nous donnons ici les coefficients  $c_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(j, 0)}$  des numérateurs des fonctions génératrices  $\mu^{(j, 0)}(y_1, y_2, u_1, u_2)$  des polynômes de Hartley du système de racines  $A_2$  (voir équation (3.5.4)).

$(\lambda_1, \lambda_2)$	$6c_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(0,0)}(y_1, y_2)$
(0,0)	-24
(0,1)	$16y_1 + 24y_2$
(0,2)	$-8y_1^2 - 8y_2^2 - 24y_1 - 8y_2$
(0,3)	$4y_1^2 + 24y_1y_2 - 4y_2^2 + 24$
(0,4)	$-4y_1^2 - 4y_2^2 - 16y_1$
(0,5)	$8y_2$
(1,0)	$24y_1 + 16y_2$
(1,1)	$-18y_1^2 - 32y_1y_2 - 18y_2^2 + 12$
(1,2)	$8y_1^3 + 6y_1^2y_2 + 8y_1y_2^2 + 6y_2^3 + 20y_1^2 + 32y_1y_2 + 4y_2^2 - 8y_1 - 12y_2$
(1,3)	$-2y_1^3 - 28y_1^2y_2 - 18y_1y_2^2 + 4y_2^3 + 4y_1^2 + 4y_2^2 - 12y_1 - 16y_2$
(1,4)	$4y_1^3 + 4y_1^2y_2 + 4y_1y_2^2 + 4y_2^3 + 10y_1^2 + 8y_1y_2 + 2y_2^2 - 12$
(1,5)	$-8y_1y_2 - 8y_2^2 + 8y_1$
(2,0)	$-8y_1^2 - 8y_2^2 - 8y_1 - 24y_2$
(2,1)	$6y_1^3 + 8y_1^2y_2 + 6y_1y_2^2 + 8y_2^3 + 4y_1^2 + 32y_1y_2 + 20y_2^2 - 12y_1 - 8y_2$
(2,2)	$-3y_1^4 - 6y_1^2y_2^2 - 3y_2^4 - 12y_1^3 - 12y_1^2y_2 - 12y_1y_2^2 - 12y_2^3 - 8y_1^2 - 8y_2^2 + 12$
(2,3)	$y_1^4 + 10y_1^3y_2 + 10y_1y_2^3 - y_2^4 + 14y_1^2y_2 + 16y_1y_2^2 - 2y_2^3 - 2y_1^2 - 12y_1y_2 + 10y_2^2 + 8y_1 + 12y_2$
(2,4)	$-2y_1^4 - 4y_1^2y_2^2 - 2y_2^4 - 8y_1^3 + 8y_1^2y_2 - 8y_1y_2^2 - 8y_2^3 - 12y_1^2 - 8y_1y_2 - 4y_2^2 + 24y_1 + 8y_2$
(2,5)	$4y_1^2y_2 + 4y_2^3 - 6y_1^2 + 10y_2^2 - 12$
(3,0)	$-4y_1^2 + 24y_1y_2 + 4y_2^2 + 24$
(3,1)	$4y_1^3 - 18y_1^2y_2 - 28y_1y_2^2 - 2y_2^3 + 4y_1^2 + 4y_2^2 - 16y_1 - 12y_2$
(3,2)	$-y_1^4 + 10y_1^3y_2 + 10y_1y_2^3 + y_2^4 - 2y_1^3 + 16y_1^2y_2 + 14y_1y_2^2 + 10y_2^2 - 12y_1y_2 - 2y_2^2 + 12y_1 + 8y_2$
(3,3)	$-32y_1^2y_2^2 + 4y_1^3 + 4y_1^2y_2 + 4y_1y_2^2 + 4y_2^3 + 12y_1^2 - 48y_1y_2 + 12y_2^2 - 24$
(3,4)	$-y_1^4 + 6y_1^3y_2 + 6y_1y_2^3 + y_2^4 - 4y_1^3 + 18y_1^2y_2 - 4y_1y_2^2 + 2y_2^3 - 6y_1^2 - 12y_1y_2 + 6y_2^2 + 16y_1 - 12y_2$
(3,5)	$2y_1^3 - 14y_1y_2^2 + 4y_1^2 + 4y_2^2 + 12y_1 - 8y_2$
(4,0)	$-4y_1^2 - 4y_2^2 - 16y_2$
(4,1)	$4y_1^3 + 4y_1^2y_2 + 4y_1y_2^2 + 4y_2^3 + 2y_1^2 + 8y_1y_2 + 10y_2^2 - 12$
(4,2)	$-2y_1^4 - 4y_1^2y_2^2 - 2y_2^4 - 8y_1^3 - 8y_1^2y_2 + 8y_1y_2^2 - 8y_2^3 - 4y_1^2 - 8y_1y_2 - 12y_2^2 + 8y_1 + 24y_2$
(4,3)	$y_1^4 + 6y_1^3y_2 + 6y_1y_2^3 - y_2^4 + 2y_1^3 - 4y_1^2y_2 + 18y_1y_2^2 - 4y_2^3 + 6y_1^2 - 12y_1y_2 - 6y_2^2 - 12y_1 + 16y_2$
(4,4)	$-y_1^4 - 2y_1^2y_2^2 - y_2^4 - 4y_1^3 - 4y_1^2y_2 - 4y_1y_2^2 - 4y_2^3 + 16y_1y_2 + 12$
(4,5)	$2y_1^2y_2 + 2y_2^3 - 4y_1^2 + 8y_1y_2 + 4y_2^2 - 8y_1 - 12y_2$
(5,0)	$8y_1$
(5,1)	$-8y_1^2 - 8y_1y_2 + 8y_2$
(5,2)	$4y_1^3 + 4y_1y_2^2 + 10y_1^2 - 6y_2^2 - 12$
(5,3)	$-14y_1^2y_2 + 2y_2^3 + 4y_1^2 + 4y_2^2 - 8y_1 + 12y_2$
(5,4)	$2y_1^3 + 2y_1y_2^2 + 4y_1^2 + 8y_1y_2 - 4y_2^2 - 12y_1 - 8y_2$
(5,5)	$-2y_1^2 - 2y_2^2 + 12$

**Tableau E.1.** Les coefficients  $c_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(0,0)}$  de la fonction numérateur (3.5.4) de  $A_2$ .

$(\lambda_1, \lambda_2)$	$c_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(1,0)}(y_1, y_2)$
(0,0)	-4
(0,1)	$4y_1$
(0,2)	$-4y_2$
(0,3)	4
(0,4)	0
(0,5)	0
(1,0)	$4y_2$
(1,1)	$-2y_1^2 - 2y_2^2 + 4$
(1,2)	$-2y_1^2 + 4y_1y_2 + 2y_2^2 - 4y_1$
(1,3)	0
(1,4)	-4
(1,5)	0
(2,0)	$-4y_1$
(2,1)	$2y_1^2 + 4y_1y_2 - 2y_2^2 - 4y_2$
(2,2)	0
(2,3)	$2y_1^2 - 4y_1y_2 - 2y_2^2 + 4y_1$
(2,4)	$4y_2$
(2,5)	0
(3,0)	4
(3,1)	0
(3,2)	$-2y_1^2 - 4y_1y_2 + 2y_2^2 + 4y_2$
(3,3)	$2y_1^2 + 2y_2^2 - 4$
(3,4)	$-4y_1$
(3,5)	0
(4,0)	0
(4,1)	-4
(4,2)	$4y_1$
(4,3)	$-4y_2$
(4,4)	4
(4,5)	0
(5,0)	0
(5,1)	0
(5,2)	0
(5,3)	0
(5,4)	0
(5,5)	0

**Tableau E.2.** Les coefficients  $c_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(1,0)}$  de la fonction numérateur (3.5.4) de  $A_2$ .





## Références bibliographiques

---

- [1] Nicolas BOURBAKI : Groupes et algèbres de Lie (Hermann, Paris, 1968). *Chapters IV, V, VI*, 1981.
- [2] Murray R BREMNER, Robert V MOODY et Jiri PATERA : *Tables of dominant weight multiplicities for representations of simple Lie algebras*, volume 90. Marcel Dekker Incorporated, 1985.
- [3] Tomasz CZYŻYCKI et Jiří HRIVNÁK : Generalized discrete orbit function transforms of affine Weyl groups. *Journal of Mathematical Physics*, 55(11):113508, 2014.
- [4] Tomasz CZYŻYCKI, Jiří HRIVNÁK et Jiří PATERA : Generating functions for orthogonal polynomials of  $A_2$ ,  $C_2$  and  $G_2$ . *Symmetry*, 10(8):354, 2018.
- [5] Michael E HOFFMAN et William Douglas WITHERS : Generalized Chebyshev polynomials associated with affine Weyl groups. *Transactions of the American Mathematical Society*, 308(1):91–104, 1988.
- [6] Jiří HRIVNÁK et Michal JURÁNEK : On E-discretization of tori of compact simple Lie groups. II. *Journal of Mathematical Physics*, 58(10):103504, 2017.
- [7] Jiří HRIVNÁK et Lenka MOTLOCHOVÁ : Dual-root lattice discretization of Weyl orbit functions. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 25(5):2521–2569, 2019.
- [8] Jiří HRIVNÁK, Lenka MOTLOCHOVÁ et Jiří PATERA : On discretization of tori of compact simple Lie groups : II. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 45(25):255201, 2012.
- [9] Jiří HRIVNÁK, Lenka MOTLOCHOVÁ et Jiří PATERA : Cubature formulas of multivariate polynomials arising from symmetric orbit functions. *Symmetry*, 8(7):63, 2016.
- [10] Jiří HRIVNÁK et Jiří PATERA : On discretization of tori of compact simple Lie groups. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 42(38):385208, 2009.
- [11] Jiří HRIVNÁK et Mark A WALTON : Weight-lattice discretization of Weyl-orbit functions. *Journal of Mathematical Physics*, 57(8):083512, 2016.
- [12] James E HUMPHREYS : *Introduction to Lie algebras and representation theory*, volume 9. Springer Science & Business Media, 2012.
- [13] Anatoliy KLIMYK et Jiri PATERA : Orbit functions. *SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry : Methods and Applications*, 2:006, 2006.
- [14] Anatoliy KLIMYK et Jiri PATERA : Antisymmetric orbit functions. *SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry : Methods and Applications*, 3:023, 2007.
- [15] Anatoliy U KLIMYK et Jiri PATERA : E-orbit functions. *SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry : Methods and Applications*, 4:002, 2008.
- [16] Robert V MOODY, Lenka MOTLOCHOVA et Jiri PATERA : Gaussian cubature arising from hybrid characters of simple Lie groups. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 20(6):1257–1290, 2014.

- [17] Robert V MOODY, L MOTLOCHVÁ et J PATERA : New families of Weyl group orbit functions. *arXiv preprint arXiv :1202.4415*, 2012.
- [18] Robert V MOODY et Jiri PATERA : Orthogonality within the families of C-, S-, and E-functions of any compact semisimple Lie group. *SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry : Methods and Applications*, 2:076, 2006.
- [19] J PATERA et RT SHARP : Generating functions for characters of group representations and their applications. *In Group Theoretical Methods in Physics*, pages 175–183. Springer, 1979.
- [20] Jiri PATERA : Compact simple Lie groups and their C-, S-, and E-transforms. *SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry : Methods and Applications*, 1:025, 2005.