

Université de Montréal

Marches biaisées sur la trace de marches aléatoires
branchantes

par

Étienne Ménard

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

10 avril 2022

Université de Montréal

Faculté des arts et des sciences

Ce mémoire intitulé

Marches biaisées sur la trace de marches aléatoires branchantes

présenté par

Étienne Ménard

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Yvan Saint-Aubin

(président-rapporteur)

Alexander Fribergh

(directeur de recherche)

Dimitris Koukoulopoulos

(membre du jury)

Résumé

Dans ce mémoire, nous nous penchons sur des résultats de localisation pour les marches biaisées en milieux aléatoires. Plus précisément, nous allons revisiter la démarche que David Croydon [5] a fait afin de prouver un résultat de localisation pour la marche aléatoire biaisée sur la trace d'une marche aléatoire simple dans \mathbb{Z}^d . Ensuite, nous allons débiter la généralisation de son résultat au cas où l'environnement sous-jacent est la marche aléatoire branchante par l'élaboration d'un résultat de localisation pour la marche biaisée sur la trace d'une bonne approximation des marches branchantes, leur K -squelette. *Mots-clés : Marches aléatoires en milieux aléatoires (MAMA), pièges, K -squelette,...*

Abstract

In this thesis, we will look at localization results for random walks on random environments. More precisely, we will go through the techniques used by David Croydon [5] to prove a localization result for the biased random walk on the trace of a simple random walk in \mathbb{Z}^d . Then, we will begin the generalization of his result to the case where the underlying environment is a branching random walk. To do this, we will prove a version of the localization result for the biased random walk on the trace of a K -skeleton in \mathbb{Z}^d , which is a good approximation of the branching random walk. *Key words* : *Random walks on random environments (RWRE), traps, K -skeleton,...*

Table des matières

Résumé	5
Abstract	7
Liste des sigles et des abréviations	11
Remerciements	13
Introduction	15
Chapitre 1. Notions élémentaires	17
1.1. Marches aléatoires en milieux aléatoires (MAMA)	17
1.2. Modèles probabilistes: arbre de GW, MAB, etc	19
1.3. Réseaux électriques et leurs outils probabilistes	22
1.4. MAMA en dimension $d=1$	29
1.4.1. Le modèle	29
1.4.2. Le potentiel	29
1.4.3. Les vallées et un résultat de localisation	31
Chapitre 2. Résultat de localisation de la marche biaisée sur la trace d'une marche aléatoire simple	35
2.1. Le modèle, le résultat et les stratégies de preuve	35
2.2. Version simplifiée sur une marche aléatoire autoévitante	38
2.3. Marche aléatoire biaisée sur la trace d'une marche aléatoire simple	42
2.3.1. Points de coupure et MAMA sur \mathbb{Z}	43
2.3.2. Potentiel brownien et les hypothèses qui en découlent	44
2.3.3. Résultats intermédiaires	47
2.3.4. Preuve du résultat de localisation de Croydon 2.1.1	50

Chapitre 3. Premier résultat de localisation pour comprendre la marche biaisée sur la trace d'une marche aléatoire branchante.....	55
3.1. Définition du modèle et l'approximation par un K -squelette.....	56
3.2. Potentiel et vallées généralisées.....	59
3.3. Hypothèses et résultats intermédiaires.....	64
3.4. Preuve de notre résultat simplifié.....	70
3.5. Conclusion et les étapes à venir.....	72
Références bibliographiques.....	75

Liste des sigles et des abréviations

MAMA Marches aléatoires en milieux aléatoires, de l'anglais *Random Walks on Random Environment* (RWRE)

GW Galton-Watson.

Remerciements

J'aimerais remercier Alexander Fribergh pour toute son aide et ses encouragements durant cette maîtrise. J'aimerais aussi remercier le conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada (CRSNG) pour le soutien financier.

Introduction

L'idée derrière les marches biaisées est simple, que se passe-t-il lorsqu'un marcheur choisit au hasard son prochain pas tout en ayant une direction préférée? Lorsque la marche évolue sur \mathbb{Z}^d en entier avec un biais non nul dans la direction \vec{e}_1 , on peut s'attendre à une dérive dans la direction du biais et la position peut être estimée à l'aide du théorème central limite. Lorsqu'on considère plutôt une marche aléatoire biaisée sur un environnement qui est lui aussi aléatoire, le comportement de la marche est beaucoup plus compliqué. Pour certains modèles, le niveau d'aléatoire associé à l'environnement peut créer des sections qui agissent comme des pièges et affecteront grandement le comportement de la marche biaisée. Par exemple, lorsqu'on considère la marche aléatoire biaisée sur le nuage de percolation dans \mathbb{Z}^d , la présence de pièges dans l'environnement sous-jacent donne lieu à un phénomène étrange. Un biais relativement petit donne lieu à une vitesse positive pour la marche tandis que lorsque le biais dépasse une certaine valeur, la vitesse de la marche biaisée est désormais de 0. Ainsi, pour mieux comprendre ces phénomènes contre-intuitifs, les probabilistes portent une attention particulière à ces structures de pièges.

Dans le cas particulier où l'environnement aléatoire est le nuage de percolation quasicritique¹, des physiciens [3] ont identifié deux types de pièges potentiels: les pièges le long des branches et les pièges le long d'une colonne. Pour illustrer le premier type de pièges, imaginons-nous d'abord que la marche biaisée peut s'aventurer dans des sections du graphes qui ont la forme de bras alignés avec la direction du biais et que ces derniers agissent comme des culs-de-sac. La marche doit rebrousser chemin en se battant contre le biais et perdre un temps considérable. La marche biaisée peut aussi s'aventurer dans des sections du graphes qui ont la forme de longs corridors mal orientés et la marche va devoir passer un temps significatif à se battre contre le biais. Malgré les efforts, trop peu de chose sont connues sur les marches biaisées sur le nuage de percolation quasicritique et forcent les probabilistes à s'intéresser à des modèles plus simples en espérant développer des techniques au passage.

¹Ceci désigne le modèle de percolation où le paramètre de percolation est légèrement plus grand que la valeur critique $p > p_c$.

Afin d'étudier le comportement de la marche biaisée face aux pièges le long d'une colonne, David Croydon a développé un résultat de localisation pour la marche aléatoire biaisée sur la trace d'une marche aléatoire simple dans \mathbb{Z}^d [5]. En prenant la trace d'une marche aléatoire simple sur \mathbb{Z}^d avec $d \geq 5$ comme environnement sous-jacent, Croydon a pu profiter de la structure généralement unidimensionnelle de la trace pour généraliser un résultat de localisation de la marche biaisée sur \mathbb{Z} démontré par Zeitouni [10]. Ses techniques et ses idées sont relativement simples, mais puissantes et nous ont inspirés à généraliser à notre tour le résultat de localisation pour un modèle plus complexe.

Pour incorporer le type de piège le long de bras tout en gardant la structure de colonne, notre choix d'environnement s'est arrêté sur la marche aléatoire branchante: une sorte d'arbre infini qu'on projette dans \mathbb{Z}^d et qui possède une marche aléatoire simple comme structure de base le long de laquelle des bras émergent. Ce modèle se construit ainsi sur la marche aléatoire simple en ajoutant de potentiels pièges le long des bras de l'arbre. Ainsi, le modèle de la marche aléatoire biaisée sur la trace d'une marche aléatoire branchante dans \mathbb{Z}^d est le modèle sur lequel nous aimerions généraliser le résultat de localisation de Zeitouni et de Croydon. De par sa nature plongée dans \mathbb{Z}^d , la marche aléatoire branchante est une structure comprenant beaucoup de boucles à petite échelle et comme avec la preuve de Croydon, la gestion de ces dernières demandent beaucoup d'efforts. Dans un but de tester la généralisation des idées de Croydon sur un modèle plus simple, nous allons d'abord généraliser son résultat de localisation sur une bonne approximation sans boucle de la marche aléatoire branchante: son K -squelette. Cette approximation par le K -squelette introduite dans [2] nous fourni un environnement similaire à un arbre sur lequel nous allons actualiser les outils unidimensionnels de Croydon et réussir à prouver un résultat de localisation de la marche aléatoire biaisée sur ce dernier.

Pour arriver à ce résultat de localisation, ce mémoire sera séparé en 3 chapitres. Dans le chapitre 1, nous introduirons les modèles probabilistes utilisés dans ce mémoire ainsi qu'un rappel des formules et résultats nécessaires aux preuves à venir. Dans le chapitre 2, nous allons décortiquer l'article de Croydon et refaire la preuve de son résultat pour bien comprendre comment elle fonctionne. Nous terminerons dans le chapitre 3 par la généralisation des notions nécessaires et nous prouveront notre résultat de localisation pour la marche aléatoire biaisée sur le K -squelette d'une marche aléatoire branchante.

Chapitre 1

Notions élémentaires

Dans ce chapitre, nous allons introduire les principaux objets mathématiques sur lesquels nous allons travailler ainsi que quelques résultats qui seront utiles plus tard. En premier lieu, nous établirons les bases théoriques des marches aléatoires en milieu aléatoires (MAMA) dans la section 1.1. Ensuite, nous présenterons les différents environnements aléatoires sur lesquels nous allons travailler dans la section 1.2. Dans la section 1.3, nous introduirons une puissante connexion reliant les marches aléatoires et la physique électrique ainsi que quelques formules utilisées dans ce mémoire. Nous terminerons ce chapitre avec un survol du cas particulier des MAMA sur \mathbb{Z} ainsi qu'un résultat de localisation de Zeitouni dans la section 1.4. Le résultat de Zeitouni peut être vu comme le germe de l'idée qui a mené à tous les autres résultats de localisation discutés dans ce mémoire.

1.1. Marches aléatoires en milieux aléatoires (MAMA)

Pour mieux introduire les MAMA, nous allons d'abord établir la base des marches aléatoires. Une marche aléatoire est une suite de variable aléatoire $X = \{X_n\}_{\mathbb{N}}$ qui représente la position de la marche aux temps $n \in \mathbb{N}$. Ces variables aléatoires prennent des valeurs dans un espace d'état V qui représente l'ensemble des états possibles de la marche. Une fois une position initiale X_0 choisie, la progression de la marche X est dictée par une loi de transition P .

Dans l'étude des marches aléatoires, certaines propriétés sont nécessaires pour les différencier et les catégoriser. Les propriétés principales qui nous seront utiles dans ce mémoire sont:

Définition 1.1.1 (Propriété de Markov / Perte de mémoire). *On dit qu'une marche aléatoire $\{X_n\}_{\mathbb{N}}$ avec probabilités de transition $P = \{p_{xy}\}$ satisfait la **propriété de Markov** si le futur de la marche ne dépend seulement que de la position actuelle et non des positions passées. Plus précisément, on a que $\forall x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1} \in V$ les probabilités de transitions*

satisfont

$$P[X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n] = P[X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_1 = x_1, X_0 = x_0]$$

Définition 1.1.2 (Homogénéité dans le temps). *On dit qu'une marche aléatoire $\{X_n\}_{\mathbb{N}}$ est homogène si les probabilités de transition sont indépendantes du temps. C'est-à-dire*

$$P[X_{n+1} = y|X_n = x] = P[X_{m+1} = y|X_m = x] \text{ pour tout } n \text{ et } m \in \mathbb{N}$$

Une autre propriété importante des marches aléatoires est la réversibilité.

Définition 1.1.3 (Réversibilité). *Soit $X = \{X_n\}$ une marche aléatoire sur un ensemble d'états dénombrable V ainsi que P la loi de transition. On dit que la marche X est réversible si et seulement s'il existe une mesure π sur V telle que pour toutes paires d'états $x, y \in V$ nous avons*

$$\pi(x)p(x,y) = \pi(y)p(y,x)$$

La totalité des marches aléatoires qui seront étudiées dans ce mémoire respecteront ces trois propriétés.

Les marches aléatoires sont partout en probabilité de par leur simplicité et par leur adaptabilité. Toutefois, l'environnement doit être fixe et connu avant d'étudier les différents modèles. En physique, pour simuler le déplacement de particules dans un médium, il est pratique que définir des marches aléatoires évoluant sur un espace d'état qui est lui aussi aléatoire. Cet aléa de l'environnement permet ainsi de décrire des propriétés comme la porosité des matériaux ou des obstacles dans un milieu. D'où l'idée de concevoir des marches aléatoires qui évoluent sur des milieux aléatoires (MAMA). Conçues comme des généralisations des marches aléatoires usuelles, les MAMA possèdent désormais deux niveaux d'aléa: l'environnement sous-jacent et la marche sur ce dernier [4].

On dénote $\Omega = \{\omega\}$ l'espace des environnements possibles et \mathbb{P} la distribution de probabilité de ces derniers.

Remarque 1.1.4. *On rappelle ici qu'un environnement vient en deux sous-parties: l'espace d'états V^ω et la loi de transitions sur cet espace P^ω , c.-à-d. qu'on peut le voir comme la paire $\omega = (V^\omega, P^\omega)$. Parfois, l'espace d'état sera constant pour tous les environnements (ex: quand on est sur un quadrillé \mathbb{Z}^d), mais dans d'autres cas, l'espace d'état sera une variable aléatoire (ex.: quand on considère un arbre de GW).*

Une fois qu'un environnement ω a été choisi, on définit une chaîne de Markov homogène $X = (X_n)_{\mathbb{N}}$ sur V^ω selon les probabilités de transitions

$$p(x,y,\omega) = P^\omega[X_1 = y|X_0 = x].$$

La loi P^ω qui détermine la distribution de la chaîne X est nommée la *loi trempée* (traduit de l'anglais *quenched law*). Nous utiliserons un sous indice P_x^ω pour indiquer la position initiale de la chaîne. Si la marche est conditionnée sur un environnement ω fixé, nous retrouvons le cadre usuel des marches aléatoires d'où les définitions de chaînes de Markov et l'homogénéité sont tirées.

Puisque nous ne voulons pas seulement trouver des résultats dépendants des environnements particuliers, on définit une seconde loi qui fait une moyenne de l'aléa des environnements selon la distribution \mathbb{P} . On pose la *loi recuite*¹ comme étant $\mathcal{P}_x := P_x^\omega \times \mathbb{P}$. Nous obtenons donc la loi

$$\mathcal{P}_x[A] := \int_{\omega \in \Omega} P_x^\omega[A] \mathbb{P}[d\omega] = E_{\mathbb{P}}[P_x^\omega[A]]. \quad (1.1.1)$$

Les démarches utiliseront souvent la loi trempée P^ω parce qu'elle donne plus d'informations sur l'environnement, mais les résultats obtenus seront souvent rapportés à la loi recuite. En effet, l'équation (1.1.1) implique que si une propriété A est vraie presque sûrement par rapport à la loi trempée P^ω pour presque tous les environnements (c'est-à-dire pour tout $\omega \in \Omega'$ avec $\mathbb{P}[\Omega'] = 1$), cette propriété A est aussi vraie presque sûrement par rapport à la loi recuite \mathcal{P} .

Remarque 1.1.5. *Pour la loi recuite, la marche aléatoire perd la propriété de Markov. Cela s'explique par le fait que la marche gagne des informations non négligeables des états précédemment visités.*

Remarque 1.1.6. *On peut adapter toutes ces définitions de manière similaire pour les MAMA à temps continues.*

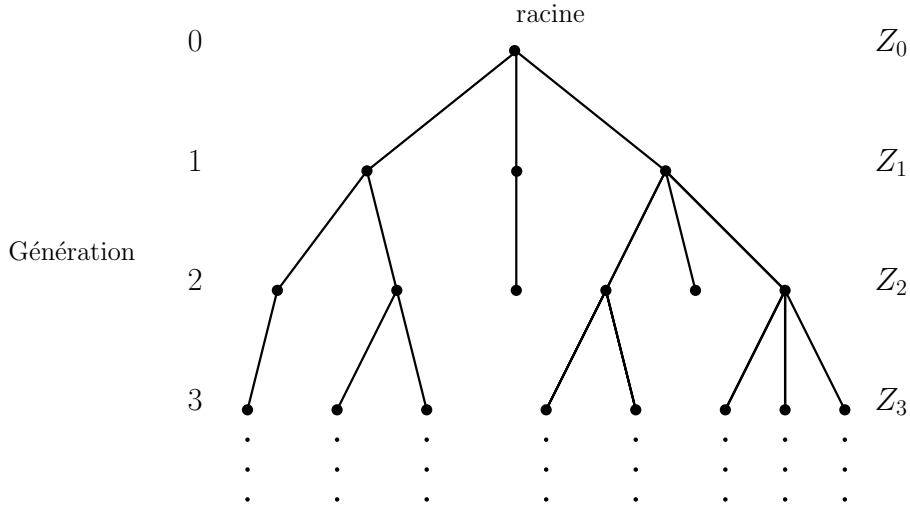
1.2. Modèles probabilistes: arbre de GW, MAB, etc

Dans cette section, nous allons introduire les structures probabilistes que nous allons utiliser dans ce mémoire. Commençons par les arbres de Galton Watson (GW).

Historiquement parlant, un arbre de GW a d'abord été un outil de modélisation servant à vérifier la descendance d'un nom de famille (patronyme) à travers le temps. Dans une approche probabiliste plus moderne, un arbre de GW est plutôt la représentation graphique d'un processus de branchement qui compte le nombre d'individus selon les différentes générations $\{Z_n\}$. Ce processus de branchement vient avec une loi de distribution qui dicte le comportement de copies i.i.d $\{Z_{i,j}\}_{\mathbb{N},\mathbb{N}}$ d'une v.a. Z définie selon une loi \mathbb{P} ayant une moyenne $E[Z]$. On peut voir l'arbre comme la descendance d'un individu initiale qu'on

¹Les adjectifs trempés et recuits sont tirés de la métallurgie et font référence aux microstructures présentes dans les métaux suite aux processus de trempage et de recuit.

appelle la racine et où chacun des individus a $Z_{i,j}$ descendants indépendamment des autres et selon la même loi de probabilité \mathbb{P} .



Cette loi de reproduction est dite *sous-critique*, *critique* et *surcritique* si la moyenne $E[Z]$ est respectivement plus petite que 1, égale à 1 et supérieure à 1. Pour ce mémoire, nous allons nous concentrer sur les arbres de GW critique et nous allons nommer l'arbre de GW critique \mathcal{T}^{GW} . De simples démarches nous assurent que les arbres de GW critiques sont de tailles finies \mathbb{P} -presque sûrement². Toutefois, puisque nous allons utiliser ces arbres comme environnements sur lesquels des marches aléatoires vont évoluer, nous préférons que les arbres soient de tailles infinies.

Lorsqu'il est question de définir une version infinie des arbres de GW critiques, nous pouvons nous poser la question: que se passe-t-il lorsque nous prenons des arbres finis de plus en plus grands? C'est d'abord Harry Kesten qui s'est intéressé à la limite locale³ d'arbres de GW critiques pris selon une loi de probabilité conditionnelle à ce que les arbres aient au moins n générations [7]. En observant la distribution limite de ces types d'arbres lorsque $n \rightarrow \infty$, il a prouvé que la limite existe et que cet arbre limite est facilement caractérisable en fonction de la distribution critique initiale. C'est pour cette raison que nous allons considérer l'arbre infini, souvent appelé l'*arbre de Kesten*, obtenu par cette limite locale comme notre version infinie des arbres de GW critiques. Sa construction simple tirée de [1] va comme suit. Pour une loi de reproduction critique, nous conservons la même loi pour tous les individus d'une même génération sauf pour 1 au hasard qui aura une nouvelle loi de reproduction modifiée qui lui assurera au moins 1 descendant. Parmi ces descendants, on répète la stratégie pour s'assurer de toujours avoir une descendance infinie. Plus précisément, pour une loi de reproduction critique \mathbb{P} associée à une v.a. Z telle que $p_k = \mathbb{P}[Z = k]$, nous définissons une nouvelle loi de reproduction *biaisée par la taille* $\tilde{\mathbb{P}}$ associée à une v.a. \tilde{Z} en posant

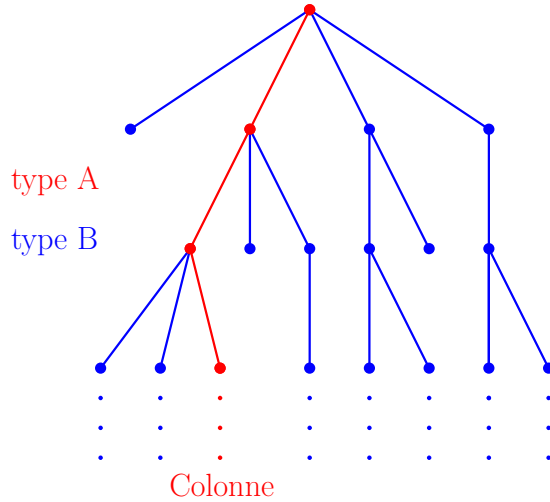
²Sauf dans le cas trivial où $Z = 1$ avec probabilité 1.

³La limite locale observe l'arbre au alentour de la racine sans normaliser les distances.

$\tilde{\mathbb{P}}[\tilde{Z} = k] := kp_k$ pour tout k . De façon plus générale, la loi de reproduction biaisée par la taille demande aussi de normaliser par la taille moyenne $\tilde{\mathbb{P}}[\tilde{Z} = k] := (k/E[Z])p_k$ afin de conserver une loi de probabilité valide, mais dans notre cas critique la normalisation est triviale. Remarquons que $\tilde{\mathbb{P}}[\tilde{Z} = 0] = 0$, ce qui nous assure toujours au moins 1 descendant. De simples calculs nous assurent que $\tilde{\mathbb{P}}$ est bien une loi de probabilité et que si $E[Z^2] < \infty$, nous avons que $E[\tilde{Z}] < \infty$ aussi. Avec cette nouvelle loi de reproduction en main, nous définissons notre version infinie de l'arbre de GW critique en construisant un arbre ayant des individus de deux types selon les consignes suivantes:

- (1) la racine est de type A,
- (2) tous les sommets de type A ont \tilde{Z} descendants dont seulement 1 pris au hasard est de type A et dont le reste sont de type B,
- (3) tous les sommets de type B ont Z descendants qui sont tous de type B.

L'arbre obtenu selon cette démarche, qu'on note \mathcal{T}_∞^{GW} , est appelé l'arbre de GW critique infini. Cet arbre de taille infinie a une allure similaire aux arbres de GW critiques avec la particularité qu'il possède une unique lignée infinie de descendants que nous allons appeler *colonne*.



Pour des raisons qui vont devenir évidentes dans le reste du mémoire, nous allons aussi vouloir une version bi-infinie de ces arbres de GW critique.

Pour définir une version bi-infinie, il suffit de prendre deux copies indépendantes d'arbres de GW critiques infinis $\mathcal{T}_\infty^{GW,(1)}$ et $\mathcal{T}_\infty^{GW,(2)}$. En reliant leur racine par une arête et en définissant la racine de $\mathcal{T}_\infty^{GW,(1)}$ comme étant la nouvelle racine, nous obtenons un arbre de GW critique bi-infini que nous allons noter $\mathcal{T}_{-\infty,\infty}^{GW}$.

Une fois que les arbres sont définis, nous pouvons nous pencher sur leur plongement/*embedding* dans \mathbb{Z}^d . En effet, afin d'avoir une certaine structure intéressante, nous

désirons avoir une méthode pour transporter les arbres vers \mathbb{Z}^d . Pour ce faire, nous allons utiliser les notations tirées de [2] qui consiste à indexer une marche aléatoire simple sur \mathbb{Z}^d par les sommets d'un arbre \mathcal{T} . Pour obtenir l'arbre plongé, nous allons attribuer une position $\phi_{\mathcal{T}}(u) \in \mathbb{Z}^d$ pour chaque sommet $u \in \mathcal{T}$ selon les mouvements d'une marche aléatoire simple. Premièrement, nous commençons par placer la racine à l'origine de \mathbb{Z}^d , c'est-à-dire que $\phi_{\mathcal{T}}(\text{racine}) = 0$. Ensuite, chaque arête $e \in \mathcal{T}$ se voit attribuer, de manière i.i.d, une v.a. X_e qui est distribuée selon le processus des sauts d'une marche aléatoire simple (c-à-d une des 2d directions de \mathbb{Z}^d). Ainsi, la position $\phi_{\mathcal{T}}(u)$ dans \mathbb{Z}^d de chaque sommet $u \in \mathcal{T}$ est la somme des sauts X_e le long des arêtes qui relient u à la racine. Le couple résultant $(\mathcal{T}, \phi_{\mathcal{T}})$ est alors un arbre plongé dans \mathbb{Z}^d .

Avec les arbres et les plongements définis, nous sommes maintenant capables de définir l'objet principal de ce mémoire: la marche aléatoire branchante critique bi-infinie. Prenons un arbre de GW critique bi-infini $\mathcal{T}_{-\infty, \infty}^{GW}$ selon une loi \mathbb{P} et après l'avoir plongé dans \mathbb{Z}^d , le couple $(\mathcal{T}_{-\infty, \infty}^{GW}, \phi_{\mathcal{T}_{-\infty, \infty}^{GW}})$ est notre marche aléatoire branchante critique bi-infinie. Permettons-nous d'utiliser la même notation \mathbb{P} pour dénoter la loi de ce nouvel objet. Nous allons vouloir voir cette marche aléatoire branchante comme un sous-graphe de \mathbb{Z}^d , c'est pourquoi nous définissons le sous-graphe associé $\mathcal{G}_{-\infty, \infty}^{GW}$ qui a les sommets

$$V(\mathcal{G}_{-\infty, \infty}^{GW}) := \{x \in \mathbb{Z} \mid x = \phi_{\mathcal{T}_{-\infty, \infty}^{GW}}(u) \text{ avec } u \in \mathcal{T}_{-\infty, \infty}^{GW}\}$$

et les arêtes

$$E(\mathcal{G}_{-\infty, \infty}^{GW}) := \{(x_1, x_2) \in E(\mathbb{Z}^d) \mid x_i = \phi_{\mathcal{T}_{-\infty, \infty}^{GW}}(u_i) \text{ pour } i \in \{1, 2\} \text{ avec } (u_1, u_2) \in E(\mathcal{T}_{-\infty, \infty}^{GW})\}.$$

Puisque le plongement dans \mathbb{Z}^d n'a pas nécessairement conservé les caractéristiques d'arbre de $\mathcal{T}_{-\infty, \infty}^{GW}$, le graphe de la marche aléatoire branchante critique bi-infinie $\mathcal{G}_{-\infty, \infty}^{GW}$ n'est plus un arbre, mais comme nous allons voir dans le chapitre 3 il est possible de trouver un arbre dans sa macrostructure. C'est sur cette construction que nous allons montrer une version simplifiée d'un résultat de localisation au chapitre 3.

1.3. Réseaux électriques et leurs outils probabilistes

Les probabilistes ont plusieurs tours dans leur sac et aiment utiliser l'intuition de la physique électrique à leurs fins. En effet, un *pont théorique* relie les marches aléatoires réversibles et les réseaux électriques. Une fois *traversé*, ce pont nous permet d'attaquer des problèmes probabilistes d'un autre angle et de rapporter des formules concrètes. Je trouve l'analogie d'un pont théorique particulièrement adéquate, car on arrive à établir une bijection entre les marches réversibles et les réseaux électriques. On pourra ainsi traverser le *pont* à tout moment et aller chercher des formules applicables aux marches aléatoires.

Dans cette section, nous allons vouloir introduire les notations et les idées nécessaires pour bien comprendre 3 formules qui seront utiles dans ce mémoire. Cependant, leur preuve sera omise, car Lyons et Peres ont écrit un magnifique livre [9] contenant ces preuves et bien plus encore. Après avoir vu les bases pour relier les marches aléatoires aux réseaux électriques, nous présenterons la loi d'Ohm généralisée aux marches aléatoires, une formule pour la probabilité d'atteinte ainsi qu'une formule pour trouver la moyenne du *hitting time*. Pour bien introduire cette théorie, nous aurons besoin de quelques notions de théorie des graphes tirées du livre de Lyons et Peres.

Un graphe est une paire $G = (V, E)$ où V est un ensemble non vide de sommets et E un sous-ensemble de $V \times V$ dont les éléments sont appelés les arêtes. Pour des considérations de physique électriques qui seront bientôt clarifiées, on va aussi supposer que l'ensemble d'arêtes E est **irréfléchi**, c'est-à-dire qu'il ne possède pas d'élément de la forme (x, x) pour $x \in V$. On assume aussi que l'ensemble d'arêtes E est **non orientée**, c'est-à-dire que pour deux sommets $x, y \in V$ on a que $(x, y) \in E \Leftrightarrow (y, x) \in E$. Lorsque $(x, y) \in E$, on dit que x et y sont **voisins**, aussi dénoté par $x \sim y$. Le **degré** d'un sommet est son nombre de voisins. On impose aussi à nos graphes qu'ils soient **localement finis**, c'est-à-dire que tous les sommets ont un degré fini. Un **chemin** entre deux sommets $x, y \in V$ est une séquence de sommets $(x = u_0, u_1, u_2, \dots, u_n = y)$ où chaque paire de sommets consécutifs sont voisins. On dit que deux sommets sont **connectés** s'il existe un chemin les reliant. Un **cycle** est un chemin de plus d'une arête dont le premier et dernier sommet est le même. Un **arbre** est un graphe dont tous les sommets sont connectés, mais ne possède aucun cycle. On peut définir une **distance** dans le graphe entre deux sommets $x, y \in V$ par le nombre minimal d'arêtes parmi les chemins reliant x et y , on la note $d(x, y)$.

Avec cette base de notation, nous pouvons introduire les principales constructions propres aux réseaux électriques. Afin d'encoder de l'information dans un graphe, il est commun de l'accompagner d'une fonction sur ses sommets ou ses arêtes. Lorsqu'on ajoute une fonction de poids $c : E \rightarrow [0, \infty)$ sur les arêtes d'un graphe, ce graphe est désormais appelé un **réseau**. Dans un contexte algorithmique comme le problème du voyageur de commerce, ces poids peuvent représenter le coût pour emprunter une arête reliant deux sommets. Dans le contexte où on veut construire un réseau électrique représentant une marche aléatoire, nous allons vouloir rattacher ce poids à une caractéristique du réseau électrique et c'est ici que la propriété de réversibilité vient en jeu.

En effet, prenons une marche aléatoire X sur un espace d'états V , réversible et qui a pour mesure stationnaire π . On définit le graphe $G_X = (V, E)$ avec comme sommets, l'espace d'états V et où les arêtes sont $E := \{(x, y) | p(x, y) > 0\}$. Pour chaque arête $(x, y) \in E$, on lui

assigne le poids

$$c(x,y) := \pi(x)p(x,y)$$

qu'on appelle sa **conductance**. En utilisant l'intuition électrique voulant que l'électricité se déplace plus facilement à travers les bons conducteurs, la conductance d'une arête est une mesure de la facilité de la marche aléatoire X à emprunter cette arête. On remarque que la réversibilité de X nous assure que la conductance d'une arête est la même, peu importe le sens dans lequel on la considère. Ce qui coïncide avec le fait qu'une marche réversible a autant de probabilité d'emprunter une arête dans un sens que dans l'autre. À l'inverse, on peut définir la réciproque des conductances, appelées **résistances**, par $r(x,y) := c(x,y)^{-1}$. L'intuition veut qu'une arête avec une grande résistance s'oppose plus au passage de la marche qu'une arête moins résistante. Ce réseau électrique G_X nous permet de voir la marche X comme une marche aléatoire le long des sommets de G_X où les probabilités de transition à partir d'un sommet sont proportionnelles aux conductances menant aux sommets voisins. Plus précisément, si la marche se trouve au sommet $x \in V$ et que ce sommet a comme voisins $y_1, \dots, y_n \in V$, alors les probabilités de transition seront

$$p(x,y_i) := \frac{c(x,y_i)}{\sum_{k=1}^n c(x,y_k)} \propto c(x,y_i)$$

et 0 vers les sommets non voisins. Inversement, si nous avons un réseau électrique doté de conductances respectant que $\sum_{x \sim y} c(x,y) < \infty$ pour tout sommet $x \in V$, on peut reconstruire une marche aléatoire réversible en prenant les probabilités de transition ci-dessus et en prenant comme mesure stationnaire $\pi(x) := \sum_{x \sim y} c(x,y)$. Ainsi, comme mentionné ci-dessus, il existe une façon simple de passer d'une marche aléatoire réversible à un réseau électrique qui encode toute l'information des probabilités de transition dans ses conductances et vice-versa.

Afin de développer encore plus le lien existant avec la physique électrique, il nous importe maintenant de définir mathématiquement des notions propres à l'électricité. Le **tension électrique**, aussi communément appelé selon l'anglicisme **voltage**, peut être vulgarisée comme la force électrique appliquée sur une particule chargée. Nous allons nous restreindre au cas simple où la tension électrique sera fournie par une batterie simple qui aura ses bornes positives et négatives connectées à certains sommets de notre réseau électrique. Pour adapter ce concept de tension aux réseaux, nous allons définir sur les sommets V la fonction voltage $v : V \rightarrow [0, \infty)$. Définissons d'abord la fonction voltage aux sommets connectés aux bornes de la batterie. Si la borne positive est connectée au sous-ensemble $A \subset V$ et que la borne négative est connectée à un autre sous-ensemble disjoint $Z \subset V$, nous définissons d'abord le voltage $v(a) = 1$ pour tous sommets $a \in A$ et le voltage $v(z) = 0$ pour tous sommets $z \in Z$.

Le reste des sommets $x \in V \setminus \{A \cup Z\}$ se voient assigner leur voltage selon l'équation

$$v(x) \sum_{\substack{y \text{ t.q.} \\ y \sim x}} c(x,y) = \sum_{\substack{y \text{ t.q.} \\ y \sim x}} c(x,y)v(y)$$

ce qui revient à dire que le voltage d'un sommet est pris comme la moyenne pondérée des voltages voisins. Cette propriété de moyenne pondérée est appelée harmonicité. En combinant cette harmonicité et un principe d'unicité, il est possible d'obtenir le résultat suivant qui ajoute une interprétation intéressante du voltage en fonction de la marche aléatoire

Théorème 1.3.1 (Le voltage comme probabilité). *Soit un réseau électrique avec une fonction voltage définie comme ci-dessus. Pour n'importe quel sommet x , le voltage en x est égal à la probabilité qu'une marche aléatoire évoluant sur ce réseau électrique partant en x atteigne A avant d'atteindre Z .*

Avec cette interprétation du voltage, nous commençons à voir le potentiel d'utiliser la logique électrique afin de répondre à nos questions probabilistes. Toutefois, le voltage en un sommet reste une quantité compliquée à calculer et nous aimerions pousser la logique électrique un peu plus loin. À cette fin, les probabilistes ont eu l'idée de généraliser encore plus d'outils tirés de la physique électrique tel que le courant électrique le long des arêtes de notre graphe. Le courant électrique mesuré en ampères est une mesure du déplacement des charges électriques dans un conducteur. En physique, ce courant électrique interagit avec la tension électrique selon la fameuse loi d'Ohm dictant que

Théorème 1.3.2 (La loi d'Ohm). *Si $x \sim y$ et qu'un voltage v est défini sur les sommets du réseau électrique, le courant de x à y satisfait*

$$v(x) - v(y) = i(x,y)r(x,y).$$

Dans le but de construire une fonction de courant électrique sur nos arêtes $i : E \rightarrow \mathbb{R}$ imitant le vrai courant électrique, on définit le courant électrique comme étant

$$i(x,y) = c(x,y) (v(x) - v(y)).$$

Nous pouvons d'abord nous poser la question: que représente le courant i le long d'une arête de notre réseau? De la même façon que le voltage a son interprétation probabiliste, il est possible de montrer que le courant a aussi son interprétation qui corrobore l'idée du passage des charges électriques le long d'une arête. En effet, en introduisant une marche aléatoire sur la borne positive $A = \{a\}$ et en la retirant lorsqu'elle atteint une des bornes négatives Z , il est possible de montrer le résultat suivant

Théorème 1.3.3 (Le courant comme mesure des passages). *Soit un réseau G fini et connecté et une marche commencée en a et absorbée quand elle visite n'importe quel sommet dans Z . Pour $x \sim y$, définissons S_{xy} le nombre de transitions de x à y de la marche. Nous avons alors que*

$$E[S_{xy} - S_{yx}] = i(x,y)$$

où le courant i découle d'un potentiel sur G défini de façon à ce qu'il y ait un courant unitaire qui quitte a .

Ainsi le courant $i(x,y)$ est un indicateur du nombre de passages nets moyen le long de l'arête (x,y) . Avec cette seconde interprétation, nous voyons vraiment la profondeur du lien qui relie la physique électrique et les marches aléatoires.

Remarque 1.3.4. *La condition d'un courant unitaire sortant d'un sommet est facilement obtenue, car il est possible de multiplier la résistance de chaque arête du réseau par une constante commune sans changer les probabilités de transition pour ainsi abaisser ou augmenter le courant dans le réseau.*

Comme nous allons voir plus tard, la deuxième formule que nous allons présenter fait appel à la résistance d'une sous-partie du réseau séparant deux sommets. Pour obtenir cette résistance, le but est de remplacer cette sous-partie du réseau par une arête conductrice qui aura une résistance équivalente à la partie réduite. Afin de réduire un réseau, l'idée est de fusionner plus en plus d'arêtes selon 3 transformations afin d'avoir un graphe résultant qui est plus simple, mais qui possède les mêmes fonctions de voltage et de courant aux sommets qui n'ont pas été touchés. L'avantage est donc de pouvoir simplifier une partie du réseau séparant deux sommets en une seule arête imaginaire qui serait équivalente en frais de résistances ou de conductances. Cette résistance équivalente peut ainsi être utilisée dans la formule à venir. Ces transformations sont inspirées de certaines lois de la physique électrique et vont comme suit.

Pour simplifier deux fils conducteurs connectés bout à bout, la loi des résistances en série nous dit de seulement sommer les deux résistances pour obtenir la résistance équivalente. C'est pourquoi la première transformation est

Théorème 1.3.5 (Loi des résistances en série). *Si un sommet $w \in V$ a seulement deux voisins $u, v \in V$, nous pouvons remplacer les deux arêtes (u,w) et (w,v) par une seule arête (u,v) de résistance*

$$r(u,v) = r(u,w) + r(w,v)$$

tout en conservant le même voltage et courant ailleurs.

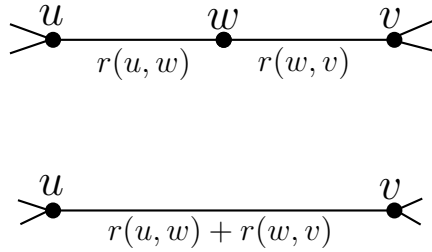


Fig. 1.1. Illustration de la loi des résistances en série

Cette transformation nous sera particulièrement pratique dans les modèles unidimensionnels à venir, car la résistance d'un segment de droite sera simplement la somme des résistances individuelles.

La seconde transformation nous permet plutôt pour régler le cas d'arêtes parallèles et va comme suit

Théorème 1.3.6 (Loi des conductances en parallèles). *Si deux sommets $u, v \in V$ sont reliés par deux arêtes e_1 et e_2 , nous pouvons remplacer ces deux arêtes par une nouvelle arête e de conductance*

$$c(e) = c(e_1) + c(e_2)$$

tout en conservant le même voltage et courant ailleurs.

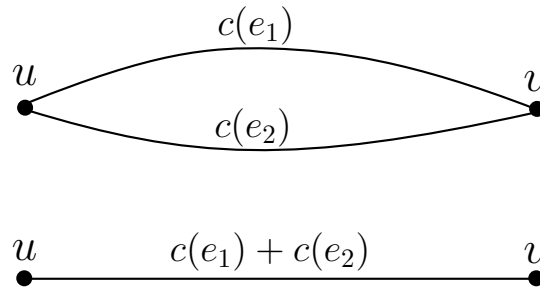


Fig. 1.2. Illustration de la loi des conductances en parallèles

Il existe une troisième transformation qui est légèrement plus compliquée, mais sert essentiellement à transformer des configurations ayant une forme de triangle en une nouvelle configuration en forme d'étoile. Nous éviterons cette transformation, car elle nous sera inutile pour les modèles à l'étude, mais des détails peuvent être trouvés dans [9].

Avec ces 3 transformations en main, il est possible de réduire n'importe quelle section de graphe séparant deux sommets a et b en une seule arête imaginaire de résistance équivalente

$$R_{ef}(a,b).$$

Une des multiples façons d'utiliser la réduction de réseau est à travers la formule pour la probabilité d'atteinte d'un sommet avant un autre. C'est-à-dire, si une marche X est à un

sommet x , quelle est la probabilité qu'elle visite un sommet a avant de visiter un autre sommet b ? Il se trouve que la probabilité se trouve facilement en combinant l'interprétation du voltage comme une probabilité, la loi d'Ohm et les résistances équivalentes pour obtenir la formule suivante

Théorème 1.3.7. *Si un courant unitaire sort d'un sommet x et que le voltage est de 0 en b , la probabilité qu'une marche X atteint un sommet a avant un autre sommet b est*

$$P_x[X \text{ atteint } a \text{ avant } b] = \frac{R_{eff}(x,b)}{R_{eff}(a,b)}$$

où le courant unitaire sortant de x est tel que $\sum_{y \sim x} i(x,y) = 1$. Cette formule rappelle la loi d'Ohm, mais généralisée à des sommets qui ne sont pas voisins. En effet, la différence de voltage qui peut être vu comme la probabilité d'atteinte à gauche est égale à la résistance multipliée au courant, sauf que cette fois le courant est unitaire et peut être simplifié.

La dernière formule que nous allons introduire concerne le *hitting time* qu'on peut traduire par le *temps d'atteinte*. Le temps d'atteinte d'une marche X est le temps nécessaire pour se rendre d'un sommet $a \in V$ à un sous-ensemble disjoint $Z \subset V$, nommé τ_Z . À travers un outil nommé la *fonction Green* qui compte le nombre de passages moyen en un sommet particulier, il est possible d'obtenir l'identité suivante

Théorème 1.3.8 (L'identité du temps d'atteinte). *Soit un réseau fini avec un sommet $a \in V$ et un sous-ensemble disjoint $Z \subset V$. Si $v(\cdot)$ désigne le voltage découlant d'un courant unitaire sortant de a alors nous avons l'identité*

$$E_a[\tau_Z] = \sum_{x \in V} \pi(x)v(x)$$

qui nous permet d'obtenir la moyenne du temps d'atteinte en fonction de quantités simples définies sur le réseau.

Pour conclure cette excursion dans le monde des réseaux électriques probabilistes, il est clair que le *pont théorique* reliant les marches aléatoires et la physique électrique est riche d'interprétation et de formules. Que ce soit simplement pour utiliser l'intuition électrique pour nous aider à visualiser un problème ou plutôt pour obtenir une formule explicite à utiliser dans nos calculs, les réseaux électriques sont des outils polyvalents et puissants que n'importe quel probabiliste a avantage à connaître. Malgré que nous allons nous restreindre aux résultats présentés ci-dessus, le livre de Lyons et Peres [9] déborde de contenu similaire.

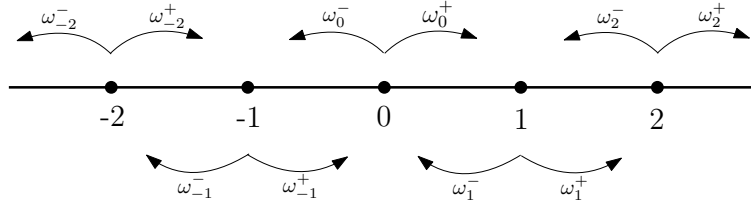
1.4. MAMA en dimension $d=1$

Dans cette section, nous allons introduire le cas des MAMA sur \mathbb{Z} en plus d'expliquer la logique générale de ce modèle. On va terminer en introduisant brièvement le résultat de localisation de Zeitouni qui sera central dans le reste du mémoire.

1.4.1. Le modèle

La particularité de ce modèle est que l'environnement aléatoire est toujours basé sur les sommets \mathbb{Z} et qu'une loi d'environnement \mathbb{P} génère une séquence $\omega = \{\omega_n^-, \omega_n^+\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dans $[0,1]^2$ telles que $\omega_n^- + \omega_n^+ = 1$. On suppose que ces paires sont indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d). Pour un sommet $n \in \mathbb{Z}$, la paire (ω_n^-, ω_n^+) représente les probabilités que la marche descende vers $n - 1$ et qu'elle monte vers $n + 1$ respectivement. Nous définissons alors la chaîne de Markov homogène $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec les probabilités de transitions

$$P^\omega[X_1 = n \pm 1 | X_0 = n] = \omega_n^\pm.$$



Ce cadre très général s'avère être extrêmement versatile pour modéliser des processus évoluant sur une structure qui serait similaire à \mathbb{Z} . Il suffit souvent de trouver un lien reliant l'environnement sous-jacent à \mathbb{Z} pour pouvoir utiliser tous les outils des MAMA sur \mathbb{Z} .

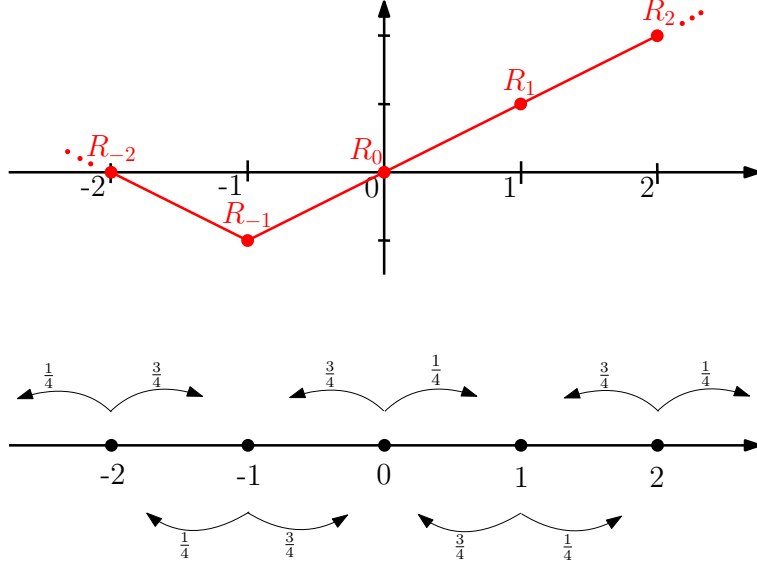
1.4.2. Le potentiel

Dans le modèle de MAMA sur \mathbb{Z} , il est pratique de visualiser l'environnement selon une quantité définie sur les sommets appelée le **potentiel**. Si nous posons le ratio $\rho_n := \frac{\omega_n^-}{\omega_n^+}$, nous définissons le potentiel $R = (R_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sur chacun des sommets par

$$R_n := \begin{cases} \sum_{i=1}^n \log(\rho_i) & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \\ -\sum_{i=n+1}^0 \log(\rho_i) & \text{si } n \leq -1. \end{cases} \quad (1.4.1)$$

Il est facile de voir qu'à un sommet n , $\log(\rho_n) \in (-\infty, \infty)$ est une quantité qui nous indique à quel point la marche préfère reculer en $n - 1$ plutôt qu'avancer en $n + 1$. Donc, si nous avons que $R_{n-1} < R_n < R_{n+1}$, il est plus probable de voir la marche reculer en $n - 1$, comme si la marche avait tendance à descendre le long de potentiels décroissants. Ainsi, en visualisant le potentiel comme une fonction $R : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, il est utile de s'imaginer le potentiel comme

le profil d'une montagne russe le long duquel la chaîne de Markov tend à glisser vers les potentiels les plus bas.



En utilisant la logique présentée ci-haut, il devient évident que le comportement de la marche devrait être dicté par la moyenne $E_{\mathbb{P}}[\log(\rho_0)]$. En d'autres termes, si les incréments sont en moyenne négatifs (resp. positifs), le potentiel devrait tendre à descendre (resp. monter) plus on avance le long de \mathbb{Z} et ainsi la marche devrait tendre à toujours progresser vers l'avant (resp. l'arrière). Cette logique est confirmée dans un résultat de Kesten, qui se trouve dans [10], dictant la transience/réurrence des MAMA sur \mathbb{Z} .

Théorème 1.4.1. *Soit X une MAMA sur \mathbb{Z} avec \mathbb{P} comme loi d'environnement. Si la loi \mathbb{P} est stationnaire, ergodique, alors*

- (a) $E_{\mathbb{P}}[\log(\rho_0)] < 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = +\infty \quad \mathcal{P}_o \text{ p.s.}$
- (b) $E_{\mathbb{P}}[\log(\rho_0)] > 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = -\infty \quad \mathcal{P}_o \text{ p.s.}$
- (c) $E_{\mathbb{P}}[\log(\rho_0)] = 0 \quad \Rightarrow \quad -\infty = \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n < \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = \infty \quad \mathcal{P}_o \text{ p.s.}$

Pour ce qui est de ce mémoire, nous allons nous concentrer sur le cas de figure (c), aussi appelé le *régime de Sinai*, qui se caractérise par la récurrence p.s. de la chaîne de Markov. Nous pouvons déduire que lorsque que $\{\log(\rho_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est une séquence de v.a. i.i.d. de moyenne $E_{\mathcal{P}}[\log(\rho_0)] = 0$ et de deuxième moment fini $\sigma_{\mathcal{P}}$, le *Théorème de Donsker* nous assure que le potentiel normalisé tend vers un mouvement brownien bilatéral

$$\left\{ \frac{R_{\lfloor nt \rfloor}}{\sigma_{\mathbb{P}} \sqrt{n}} \right\}_{t \in \mathbb{R}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \{B_t\}_{t \in \mathbb{R}}.$$

Ce comportement brownien nous sera très utile plus tard pour mieux comprendre l'allure générale du potentiel.

Pour les démarches qui sont à venir, il va nous être important d'établir un lien entre le potentiel R et les résistances de notre chaîne de Markov. En effet, comme mentionné dans la section 1.3, les probabilités de transitions $\omega = \{\omega_n^-, \omega_n^+\}_{n \in \mathbb{Z}}$ donnent lieu à un ensemble de résistances $r = \{r(n, n+1)\}_{n \in \mathbb{Z}}$. De simples calculs peuvent nous montrer que les résistances sont les suivantes.

$$\begin{aligned} r(n, n+1) &= \prod_{i=1}^n \rho_i \quad \text{si } n \geq 1 \\ r(0, 1) &= 1 \\ r(n-1, n) &= \prod_n^{i=0} \frac{1}{\rho_i} \quad \text{si } n \leq 0 \end{aligned} \tag{1.4.2}$$

La ressemblance entre les équations (1.4.1) et (1.4.2) nous pousse à explorer un lien entre le potentiel et les résistances. En appliquant le logarithme naturel aux résistances, nous obtenons la relation suivante.

$$R_n = \log(r(n, n+1)) \quad \text{ou inversement} \quad r(n, n+1) = e^{R_n} \tag{1.4.3}$$

Cette relation nous permettra d'utiliser les formules tirées des réseaux électriques tout en utilisant le potentiel et son cadre pratique.

Remarque 1.4.2. *Notons que cette relation est exacte dans le cadre des MAMA sur \mathbb{Z} . Toutefois, dans un contexte plus précis, cette relation ne sera plus exacte, mais nous allons utiliser des approximations pour nous en rapprocher le plus possible.*

1.4.3. Les vallées et un résultat de localisation

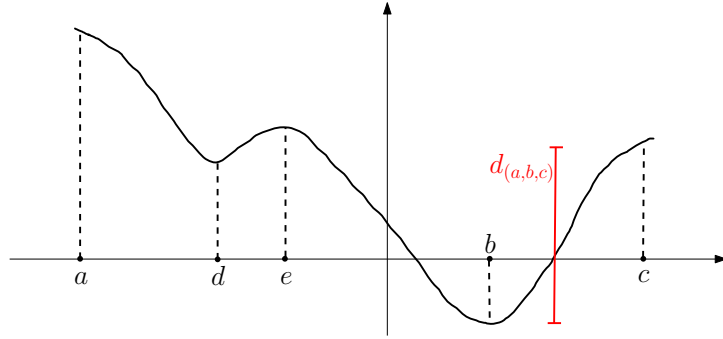
Pour bien capturer la logique voulant que la MAMA doive tendre à descendre le long de potentiels décroissants, il est utile d'introduire le concept de **vallée**. Un triplet $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ avec $a < b < c$ est une vallée du potentiel R si

$$\begin{aligned} R_a &= \max_{a \leq t \leq b} R_t, \\ R_b &= \min_{a \leq t \leq c} R_t, \\ R_c &= \max_{b \leq t \leq c} R_t. \end{aligned}$$

La profondeur de la vallée (a, b, c) est définie comme

$$d_{(a,b,c)} = \min\{R_a - R_b, R_c - R_b\}.$$

Ces nouvelles notions sont illustrées à l'aide d'un exemple simple.



Lorsqu'une vallée n'est pas en forme parfaite de V, par exemple lorsqu'elle semble être deux petites vallées collées ensemble, on peut la décomposer à l'aide de raffinement. Si (a,b,c) est une vallée de R et que $a < d < e < b$ sont tels que

$$R_e - R_d = \max_{a \leq m < n \leq b} (R_n - R_m)$$

alors (a,d,e) et (e,b,c) sont deux vallées obtenues de (a,b,c) par un raffinement par la gauche. Les raffinements par la droite sont définis de façon analogue.

L'attrait des vallées va résider dans notre capacité à en construire autour de 0 qui auront une profondeur minimale. Par exemple, pour une profondeur voulue $C > 0$, on va définir

$$\begin{aligned} a' &:= \sup\{m \leq 0 \mid R_m \geq C\}, \\ c' &:= \inf\{m \geq 0 \mid R_m \geq C\} \end{aligned}$$

et b' comme le plus petit entier dans $[a',c']$ où $R_{b'} = \min_{a' \leq m \leq c'} R_m$, de telle façon que (a',b',c') est une vallée de R de profondeur $d_{((a',b',c'))} \geq C$. Puisque la profondeur peut dépasser de beaucoup C si le potentiel plonge très bas dans le négatif, on veut se concentrer sur la plus petite sous-vallée autour de 0 de profondeur $\geq C$. C'est pourquoi, à l'aide de raffinements successifs sur (a',b',c') , on trouve la plus étroite vallée (a,b,c) avec $a < 0$ et $c > 0$ de profondeur $d_{(a,b,c)} \geq C$. Ainsi, nous pouvons trouver une vallée (a,b,c) de R , contenant 0 et qui présente une amplitude de potentiel la plus proche possible du seuil C choisi.

Une vallée d'une profondeur minimale C va agir comme un piège qui va contenir la marche pendant un certain temps. Ainsi, lorsqu'on veut encadrer la chaîne de Markov dans une vallée, la question devient alors: quel seuil de profondeur doit-on choisir? Plus précisément, en observant notre marche jusqu'au temps n , quelle est la profondeur de la vallée qui imposera un temps moyen n avant que la marche atteigne l'un de ses bords? Pour arriver à notre profondeur voulue, prenons une approche s'inspirant des v.a. géométriques et

cherchons d'abord $p = P_0^\omega[X \text{ se rend en } a \text{ ou en } c]$. Il est connu que la profondeur du piège s'oppose de façon exponentielle à la marche qui veut en sortir et qu'une bonne approximation de cette probabilité est reliée à la profondeur selon

$$P_0^\omega[X \text{ se rend en } a \text{ ou en } c] \approx e^{-d_{(a,b,c)}}.$$

En prenant un seuil $\log(n)$, on obtient donc que $p \approx e^{-\log(n)} = \frac{1}{n}$. En posant $T_{a,c}$ comme le temps nécessaire à la marche pour sortir de la vallée (a,b,c) et en utilisant une distribution géométrique de paramètre $p = 1/n$, nous obtenons que le temps moyen est d'environ

$$E[T_{a,c}] \approx n.$$

Selon cette logique simple, si on construit la vallée (a_n, b_n, c_n) en y imposant un seuil de profondeur minimale $\log(n)$, la marche qui débute en 0 devrait prendre un temps moyen n pour atteindre un des bords $\{a_n, c_n\}$. Autrement formulé, sur une échelle de temps n , la marche devrait être contenue à l'intérieur de la vallée (a_n, b_n, c_n) . Cette logique sera utilisée dans les preuves à venir afin de restreindre notre étude de la marche à l'intérieur des vallées.

Un autre aspect important à comprendre sur la notion de vallée est le temps que la marche va prendre pour sortir d'une sous-vallée. C'est-à-dire, on veut savoir le temps moyen que prend la marche pour atteindre les bords d'une sous-vallée d'une profondeur $(1 - \delta) \log n$, avec $0 < \delta < 1$. En utilisant la même logique simple présentée ci-haut, on trouve alors que le temps moyen pour sortir d'une sous-vallée profonde d'une fraction $(1 - \delta)$ de $\log n$ est environ $n^{1-\delta}$. En comparant le temps n nécessaire pour sortir du piège de profondeur $\log n$ et le temps $n^{1-\delta}$ nécessaire pour sortir du piège de profondeur $(1 - \delta) \log n$, on réalise que lorsque $n \rightarrow \infty$, la majorité du temps est passé à sortir du plus grand piège. C'est-à-dire, le temps $n^{1-\delta}$ devient tellement négligeable par rapport au temps n que lorsqu'on observe la marche dans une vallée $\log n$, on peut essentiellement se concentrer seulement sur le plus gros piège à surmonter et non les plus petits à l'intérieur. À l'inverse, si on considère une plus grosse vallée qui est de profondeur $\geq (1 + \delta) \log n$, le temps moyen pour atteindre ses bords sera environ $n^{1+\delta}$. Ainsi, si on observe la marche au temps n , elle n'aura pas eu assez de temps pour sortir du plus gros piège de taille $(1 + \delta) \log n$. En résumé, pour un temps n , la marche sera occupée majoritairement par le piège de taille $\log n$, ne passera qu'un très petit temps $n^{1-\delta}$ sur les petits pièges de taille $(1 - \delta) \log n$ et n'aura pas le temps de sortir pour s'attaquer à de plus grand piège de taille $(1 + \delta) \log n$. Cette logique nous permettra de concentrer nos efforts à l'intérieur de la vallée (a_n, b_n, c_n) lors des preuves à suivre.

Une fois la vallée (a_n, b_n, c_n) de R définie comme ci-haut avec le seuil $\log(n)$, il est ensuite utile de comprendre l'échelle de la marche X lorsqu'elle se déplace dans cette vallée. En considérant le comportement limite brownien du potentiel R , on peut déduire

qu'une amplitude $\log(n)$ dans l'image de R sera causée par une amplitude d'ordre $\log(n)^2$ sur son domaine. En d'autres mots, si on visualise la vallée (a_n, b_n, c_n) comme une boîte rectangulaire, la hauteur $\log(n)$ implique une largeur d'un ordre $\log(n)^2$. Puisque X va progresser sur les sommets du domaine de R , on comprend que X aura une échelle $\log(n)^2$. En comparant cette dernière avec l'échelle \sqrt{n} d'une marche simple sur \mathbb{Z} , l'échelle $\log(n)^2$ nous indique que la marche X est beaucoup ralentie par les pièges qui vont l'entourer.

Lorsqu'on combine les multiples idées qui ont été étalées dans les paragraphes précédents voulant que :

- (1) X a une forte tendance à descendre le long de potentiels décroissants,
- (2) Dans un temps n , X devrait rester dans la vallée (a_n, b_n, c_n) de profondeur $\geq \log(n)$,
- (3) les sous-vallées de tailles $(1 - \delta) \log(n)$ occupent la marche pendant un temps $n^{1-\delta}$ qui tend à être négligeable,
- (4) Les vallées de profondeur $\geq (1 + \delta) \log(n)$ peuvent être ignorées puisque le temps nécessaire pour s'y rendre est trop grand et la marche n'a pas l'occasion de les découvrir,
- (5) L'échelle de la marche X sur \mathbb{Z} est $\log(n)^2$,

nous avons l'intuition que la marche X devrait rapidement descendre au plus bas de la vallée et se situer, au temps n , dans les alentours du point b_n . Ofer Zeitouni[10] a réussi à montrer cette logique exacte dans un magnifique résultat de localisation qui va comme suit:

Théorème 1.4.3. *Soit X une MAMA sur \mathbb{Z} respectant les hypothèses (les rajouter: R converge vers un MB, etc). Pour tout $\epsilon > 0$, nous avons*

$$\mathcal{P}_0 \left[\left| \frac{X_n}{\log(n)^2} - b_n \right| > \epsilon \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

La preuve de ce résultat est omise dans cette section puisqu'elle sera revisitée dans de plus grands détails à la fin du chapitre 2.

Le principal attrait de ce résultat se trouve dans sa capacité à être généralisé sur des modèles plus complexes. En effet, comme nous allons voir dans le chapitre 2 et 3, il suffit d'établir un lien entre l'environnement sous-jacent d'un modèle et \mathbb{Z} puis démontrer la limite brownienne du potentiel pour pouvoir appliquer ce résultat. C'est un résultat fort qui mérite d'être dans la boîte à outils de n'importe quels chercheurs se penchant sur des questions de MAMA.

Chapitre 2

Résultat de localisation de la marche biaisée sur la trace d'une marche aléatoire simple

Dans ce chapitre, nous allons décortiquer l'article [5] de David Croydon dans lequel il démontre le résultat de localisation 2.1.1. Nous conserverons la même structure que dans l'article, mais nous y ajouterons nos explications afin de mieux expliquer les concepts, car nous aurons à les généraliser dans le chapitre 3. Nous allons inclure ou exclure certaines preuves selon le niveau d'intuition qu'elles apportent. Nous commencerons à la section 2.1 par la définition exacte du modèle et la présentation du résultat 2.1.1 pour ensuite énoncer la stratégie de la preuve. Dans la section 2.2, nous allons mettre à l'épreuve nos idées en montrant un résultat similaire sur un modèle simplifié. Nous terminerons par la preuve du résultat 2.1.1 dans la section 2.3.

2.1. Le modèle, le résultat et les stratégies de preuve

Afin de citer adéquatement le résultat de localisation 2.1.1, définissons le modèle de la marche aléatoire biaisée sur la trace d'une marche aléatoire simple. Commençons par construire l'environnement en prenant $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une marche aléatoire simple bilatérale dans \mathbb{Z}^d commencée à l'origine avec comme mesure de probabilité \mathbb{P} . La trace de cette marche est le graphe aléatoire $\mathcal{G} := (V(\mathcal{G}), E(\mathcal{G}))$ dont les sommets sont

$$V(\mathcal{G}) := \{S_n \mid n \in \mathbb{Z}\} \tag{2.1.1}$$

et les arêtes sont

$$E(\mathcal{G}) := \{\{S_n, S_{n+1}\} \mid n \in \mathbb{Z}\}. \tag{2.1.2}$$

Pour un biais $\beta \geq 1$, on assigne à chaque arête $e = (e_-, e_+) \in E(\mathcal{G})$ la conductance

$$c_e := \beta^{\max\{e_-^{(1)}, e_+^{(1)}\}} \tag{2.1.3}$$

où $e_-^{(1)}$ et $e_+^{(1)}$ sont les premières composantes de e_- et e_+ . Ainsi, nous définissons la marche aléatoire biaisée sur \mathcal{G} par la chaîne de Markov homogène $X = ((X_n)_{n \geq 0}, P_x^{\mathcal{G}}, x \in V(\mathcal{G}))$ sur les sommets $V(\mathcal{G})$ avec comme probabilités de transition

$$P^{\mathcal{G}}(x,y) := \frac{c_{x,y}}{\sum_{z \sim x} c_{x,z}} = \frac{c_{x,y}}{\mu(x)}.$$

Comme nous avons vu dans les rappels des réseaux électriques, μ est la mesure invariante de la marche X . Si $\beta = 1$, le modèle devient celui de la marche aléatoire simple sur la trace d'une marche aléatoire simple. Au moment où $\beta > 1$, la marche X préfère progresser dans la direction de la première composante \vec{e}_1 et l'effet de pièges doit être pris en compte. Puisque l'origine 0 fait toujours partie des sommets de \mathcal{G} , on s'intéresse à la loi *recuite* partant de ce dernier, soit

$$\mathcal{P}_0[\cdot] := \int P_0^{\mathcal{G}}[\cdot] d\mathbb{P}.$$

C'est sous cette loi de probabilité que nous pouvons adapter le résultat de localisation 1.4.3 de Zeitouni et obtenir le suivant:

Théorème 2.1.1 (Thm de Croydon). *Fixons un biais $\beta > 1$ et une dimension $d \geq 5$. Si $X = (X_n)_{n \geq 0}$ est une marche aléatoire β -biaisée sur la trace d'une marche aléatoire simple bilatérale S dans \mathbb{Z}^d , alors il existe des variables aléatoires $(L_n)_{n \geq 0}$ qui sont S -mesurables et qui prennent des valeurs dans \mathbb{Z}^d telles que*

$$\mathcal{P}_0 \left[\left| \frac{X_n}{\log(n)} - L_n \right| > \epsilon \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

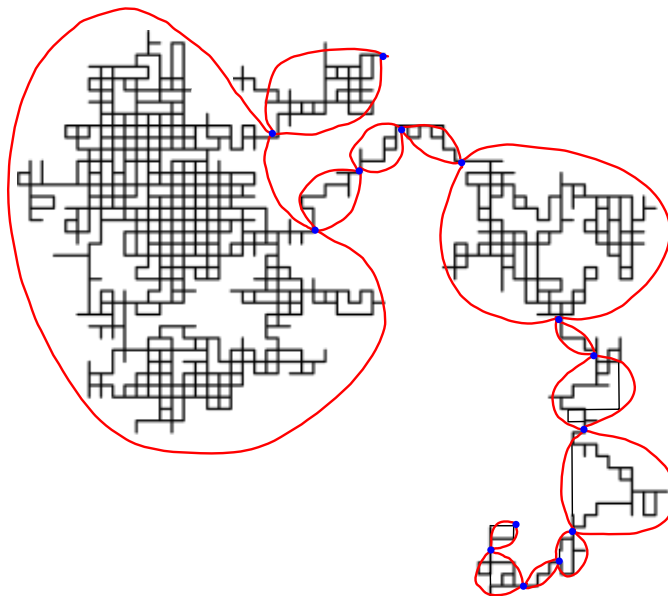
pour n'importe quel $\epsilon > 0$. De plus, $(L_n)_{n \geq 0}$ convergent en distribution sous \mathbb{P} vers une variable aléatoire L_β dont la distribution peut être caractérisée explicitement.

Avant de s'embarquer dans la preuve de ce résultat, concentrons-nous sur la plus grande modification qui différencie ce résultat de celui de Zeitouni: l'échelle $\log n$. En effet, cette différence n'est pas un oubli, mais bien un ajustement qui prend en compte la diffusion de la marche aléatoire sous-jacente à la marche X . Comme nous allons le voir dans ce chapitre, la marche aléatoire bilatérale dans \mathbb{Z}^d converge vers un mouvement brownien. La limite brownienne de l'environnement sous-jacent S fait que si la marche X progresse d'une distance d'ordre $(\log n)^2$ le long de S , la distance de X à l'origine est plutôt $\sqrt{(\log n)^2} = \log n$, ce qui explique la nouvelle échelle.

Pour montrer le théorème 2.1.1, David Croydon propose d'assembler deux idées essentielles:

- (1) il est possible de décomposer la marche aléatoire simple sous-jacente en ses points de coupure (*cut-points*)
- (2) et en se concentrant sur ses points de coupure, il est possible de voir un parallèle avec une MAMA en dimension $d = 1$ et ainsi adapter le résultat de localisation 1.4.3 de Zeitouni.

En effet, dans un de ses articles précédents [6] où il étudiait les marches aléatoires simples sur la trace de marches aléatoires simples, David Croydon a usé l'idée (1) d'une décomposition de l'espace sous-jacent \mathcal{G} en ses temps de coupure, c'est-à-dire les temps où le futur et le passé de la marche ne s'intersectent pas. Ces points deviennent alors des "passages obligatoires" qui simplifient l'analyse des chemins entre deux endroits donnés. Ainsi, pour une dimension $d \geq 5$ nécessaire pour que les points de coupures soient en nombre infini dénombrable, \mathcal{G} peut être vu comme une suite bi-infinie de graphes finis séparés par les points de coupure et \mathcal{G} peut ainsi s'apparenter au modèle unidimensionnel sur \mathbb{Z} . Malgré la nécessité que $d \geq 5$, on peut voir dans l'image qui suit le découpage de G entre ses points de coupure pour un cas simple où $d = 2$.



Ensuite, l'idée (2) est de créer un parallèle entre la décomposition de \mathcal{G} et \mathbb{Z} afin que le résultat de localisation de Zeitouni sur \mathbb{Z} puisse être traduit en une version fonctionnant sur les points de coupures de \mathcal{G} . Il suffira ensuite de vérifier quelques hypothèses nous assurant que le comportement de la marche entre les points de coupures n'est pas trop irrégulier pour conclure.

Le plus grand blocage qui s'impose lorsqu'on essaie de généraliser le résultat de localisation de Zeitouni aux marches aléatoires simples est qu'il existe beaucoup de boucles

dans ces dernières. En effet, puisque \mathcal{G} est la trace d'une marche aléatoire bi-infinie S , rien n'empêche cette dernière de revisiter des sommets plus d'une fois et possiblement de créer des boucles dans \mathcal{G} . Avant de régler ce problème et d'aller plus loin, nous pouvons nous poser la question: si l'environnement sous-jacent n'avait aucune boucle, serions-nous capables d'y appliquer le résultat de localisation de Zeitouni? En d'autres mots, sommes-nous capables de prouver un résultat de localisation pour la marche aléatoire biaisée sur la trace d'une marche aléatoire autoévitante? La réponse s'avère être oui. C'est pourquoi, dans la section (2.2), nous allons nous pratiquer en montrant une version simplifiée du résultat sur la trace d'une marche autoévitante qui va comme suit :

Théorème 2.1.2 (Résultat de localisation **simplifié**). *Fixons un biais $\beta > 1$ et une dimension $d \geq 5$. Si $X = (X_n)_{n \geq 0}$ est une marche aléatoire β -biaisée sur la trace d'une marche aléatoire simple bilatérale **autoévitante** S dans \mathbb{Z}^d , alors il existe des variables aléatoires $(L_n)_{n \geq 0}$ qui sont S -mesurables et qui prennent des valeurs dans \mathbb{Z}^d telles que*

$$\mathcal{P}_0 \left[\left| \frac{X_n}{\log(n)} - L_n \right| > \epsilon \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

pour n'importe quel $\epsilon > 0$. De plus, $(L_n)_{n \geq 0}$ convergent en distribution sous \mathbb{P} vers une variable aléatoire L_β dont la distribution peut être caractérisée explicitement.

Les étapes nécessaires pour prouver ce résultat serviront de "*proof of concept*" pour la preuve du théorème 2.1.1 et notre adaptation future du résultat pour les marches aléatoires branchantes.

Le reste de ce chapitre va contenir les preuves de ces deux résultats. La section 2.2 va contenir la logique reliant la marche autoévitante et une MAMA sur $d = 1$ ainsi que la preuve du résultat de localisation simplifiée sur la marche autoévitante. La section 2.3 va contenir la preuve adaptée du résultat de localisation 2.1.1 sur la marche aléatoire simple.

2.2. Version simplifiée sur une marche aléatoire autoévitante

Dans cette section, nous allons réussir à montrer le résultat de localisation 2.1.2 en utilisant un puissant lien qui relie le modèle de la marche biaisée sur la trace d'une marche autoévitante à celui d'une MAMA sur $d = 1$. Cette relation sera centrale dans le reste du mémoire, car elle va nous montrer comment retrouver un semblant de structure unidimensionnelle afin de simplifier les différents environnements avec lesquels nous allons travailler plus tard. Une fois ce lien clarifié, nous allons l'utiliser pour montrer la convergence du

potentiel R vers un mouvement brownien, une condition nécessaire pour l'application du résultat 1.4.3. Une fois cette convergence vérifiée, l'application du résultat 1.4.3 suivie de quelques modifications nous assurera la preuve du résultat 2.1.2.

Pour commencer, définissons en détail le modèle sans boucle. Plus particulièrement, comment construire une marche aléatoire simple bilatérale autoévitante. Prenons une marche aléatoire simple $\xi = (\xi_n)_{n \geq 0}$ dans \mathbb{Z}^d générée par une loi \mathbb{P}^* . Pour les dimensions $d \geq 3$, la transience de ce processus nous permet de définir une suite de temps $(\sigma_n)_{n \geq 0}$ en posant $\sigma_0 = 0$ et ensuite pour $n \geq 1$, $\sigma_n := \sup\{m \mid \xi_m = \xi_{\sigma_{n-1}+1}\}$. On retire les boucles de ξ en définissant la marche aléatoire simple autoévitante par $S = (S_n = \xi_{\sigma_n})_{n \geq 0}$. Cette étape efface les boucles de ξ dans l'ordre chronologique où elles surviennent et nous laisse une marche aléatoire simple S qui s'autoévite. Pour construire une version bilatérale, prenons S^1 et S^2 qui sont deux marches aléatoires simples autoévitantes dérivées de ξ^1 et ξ^2 , deux marches aléatoires simples indépendantes générées par la loi \mathbb{P}^* . Pour les dimensions $d \geq 5$, on sait que l'évènement $A = \{\xi_{[0,\infty)}^1 \cap \xi_{[1,\infty)}^2 = \emptyset\}$ est de probabilité non nulle [5]. En ce concentrant sur les réalisations contenues dans A , on définit la marche aléatoire simple bilatérale autoévitante $S = (S_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ par

$$S_n := \begin{cases} S_n^1 & \text{si } n \geq 0 \\ S_{-n}^2 & \text{si } n \leq 0. \end{cases}$$

Nous obtenons donc une marche aléatoire simple bilatérale autoévitante S qui a pour loi $\mathbb{P}[\cdot] := \mathbb{P}^*[\cdot|A]$. On définit ensuite le graphe \mathcal{G} de façon analogue à (2.1.1) et (2.1.2). Ainsi, selon notre construction, \mathcal{G} est un long chemin sans boucle dans \mathbb{Z}^d qui progresse dans deux directions. Pour un biais $\beta > 1$, les conductances sont définies comme en (2.1.3). Une fois le réseau (\mathcal{G}, c) défini, on peut alors définir la marche aléatoire biaisée sur \mathcal{G} qui est la chaîne de Markov homogène $X = ((X_n)_{n \geq 0}, P_x^{\mathcal{G}}, x \in V(\mathcal{G}))$ sur les sommets de \mathcal{G} qui a comme probabilités de transition

$$P^{\mathcal{G}}[S_n, S_{n \pm 1}] := \frac{c(S_n, S_{n \pm 1})}{c(S_n, S_{n-1}) + c(S_n, S_{n+1})}.$$

Maintenant que le modèle est bien défini, on peut s'attaquer à éclaircir le lien existant entre la marche aléatoire X sur \mathcal{G} et une MAMA sur $d = 1$. En d'autres mots, nous allons chercher à définir X' une MAMA sur \mathbb{Z} qui aurait la même loi de distribution de X sur \mathcal{G} . D'abord, on peut trouver les liens reliant les deux environnements. On se rappelle que l'environnement d'une MAMA sur \mathbb{Z} était générée par une séquence aléatoire de probabilités $\omega = (\omega_n^-, \omega_n^+)_{n \in \mathbb{Z}}$ respectant que $\omega_n^-, \omega_n^+ \in [0, 1]$ et $\omega_n^- + \omega_n^+ = 1$. Selon une bijection évidente entre \mathcal{G} et \mathbb{Z} , nous

posons les mêmes probabilités de transition que celles trouvées sur \mathcal{G}

$$\omega_n^\pm := P^{\mathcal{G}}[S_n, S_{n\pm 1}] = \frac{c(S_n, S_{n\pm 1})}{c(S_n, S_{n-1}) + c(S_n, S_{n+1})}$$

de façon à ce que cet environnement soit généré par la même loi d'environnement que \mathcal{G} , soit \mathbb{P} . Ainsi, comme dans la section 1.4.1, on définit la chaîne de Markov homogène $X' = ((X'_n)_{n \geq 0}, P_x^\omega, x \in \mathbb{Z})$ sur \mathbb{Z} avec comme probabilités de transition

$$P^\omega[n, n \pm 1] = \omega_n^\pm.$$

Une fois que nous avons ces deux environnements avec les mêmes probabilités de transition, nous pouvons mettre en évidence le lien qui relie les lois de probabilité des deux marches. Dans une direction, nous avons que $S_{X'}$ a la même loi de probabilités que X . En d'autres mots, nous avons que pour n'importe quel sommet $n \in \mathbb{Z}$, la loi $P_{S_n}^{\mathcal{G}}$ est la même que P_n^ω . À l'inverse, nous avons aussi que pour n'importe quel sommet $x \in V(\mathcal{G})$, la loi de $P^\omega \circ S^{-1}(x)$, où S^{-1} est la pré-image de $n \rightarrow S_n$, est la même que $P_x^{\mathcal{G}}$. En pratique, ce lien va nous permettre de passer d'une loi de probabilité à l'autre, tant qu'on modifie l'échelle convenablement.

Maintenant que nous avons relié X et X' et que leur environnement \mathcal{G} et \mathbb{Z} partagent les mêmes probabilités de transitions ω , nous pouvons attribuer un potentiel aux sommets de \mathcal{G} comme il est défini en (1.4.1). Comme mentionné dans la section 1.4.2, une condition utile à l'étude du potentiel est qu'il converge vers un mouvement brownien. Dans le cas où $(\log(\rho_n))_{n \in \mathbb{Z}}$ sont des v.a. i.i.d. de moyenne $E_{\mathcal{P}}[\log(\rho_0)] = 0$ et de deuxième moment fini, le *Théorème de Donsker* nous assure que le potentiel converge vers un mouvement brownien. Toutefois, dans le cas où l'environnement sous-jacent est \mathcal{G} et qu'il est autoévitant, il est clair que ces v.a. possèdent des corrélations et ce dernier théorème nous est d'aucune utilité. Toutefois, il se trouve que ces corrélations sont assez faibles en hautes dimensions et il nous incombe maintenant de trouver une nouvelle façon de montrer la convergence du potentiel. À travers différents exemples simples servant à s'illustrer la logique avec laquelle on calcule le potentiel R sur \mathcal{G} , un lien potentiel nous saute aux yeux: il existe une relation entre la première coordonnée du chemin \mathcal{G} et son potentiel R .

Plus précisément, le potentiel $R = (R_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ défini sur ω semble être proportionnel, à une constante négative près, à la première composante de S , soit $S^1 = (S_n^{(1)})_{n \in \mathbb{Z}}$. Pour enquêter sur ce lien, il est pratique de définir le processus d'incrément $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ par

$$\Delta_n := S_n^{(1)} - S_{n-1}^{(1)}.$$

En utilisant la même notation qu'auparavant voulant que $\rho_n = \frac{\omega_n^-}{\omega_n^+}$, on trouve que

$$\log(\rho_n) = -\log(\beta)(\Delta_{n+1}^+ - \Delta_n^-)$$

où $\Delta_n^+ := \max\{0, \Delta_n\}$ et $\Delta_n^- := -\min\{0, \Delta_n\}$. Puisque le potentiel est défini selon

$$R_n := \begin{cases} \sum_{i=1}^n \log(\rho_i) & \text{si } n > 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \\ -\sum_{i=n+1}^0 \log(\rho_i) & \text{si } n < 1, \end{cases}$$

des calculs simples de sommes nous permettent de trouver que

$$R_n = -\log(\beta) \left(S_n^{(1)} + \Delta_{n+1}^+ - \Delta_1^+ \right). \quad (2.2.1)$$

Ainsi, si les incréments $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sont petits, nous trouvons bel et bien que le potentiel est environ proportionnel à la première composante de S , à une constante $-\log(\beta)$ près. L'égalité (2.2.1) va nous permettre de contourner le problème des corrélations en utilisant un résultat de convergence de $S^{(1)}$ pour le transmettre au potentiel R . En effet, un résultat de convergence trouvé dans [8], nous assure que la marche autoévitante $\left(\frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sqrt{n}}\right)_{t \in \mathbb{R}}$ converge vers un mouvement brownien d -dimensionnel. Maintenant que nous avons ce résultat de convergence en main, nous pouvons nous attaquer à la preuve du **théorème 2.1.2**.

DÉMONSTRATION. Prenons X une marche aléatoire β -biaisée sur la trace d'une marche aléatoire simple bilatérale autoévitante S dans \mathbb{Z} . Comme mentionné ci-haut, il s'en suit une MAMA sur \mathbb{Z} nommée X' qui possède les mêmes probabilités de transition ω qui mènent à un potentiel R . On peut trouver dans [8], une preuve nous assurant que S converge vers un mouvement brownien

$$\left(\frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sqrt{n}}\right)_{t \in \mathbb{R}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (B_t)_{t \in \mathbb{R}}.$$

Un simple argument de changement de temps où on s'intéresse seulement aux sauts de S dans la première composante nous donne que

$$\left(\frac{S_{\lfloor nt \rfloor}^{(1)}}{\sqrt{n}}\right)_{t \in \mathbb{R}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\frac{B_t}{d^{-1/2}}\right)_{t \in \mathbb{R}}.$$

Avec l'égalité (2.2.1) et le fait que les incréments $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sont tous bornés par 1, il est clair que le potentiel aussi converge vers un mouvement brownien, plus précisément que

$$\left(\frac{R_{\lfloor nt \rfloor}}{\sqrt{n}}\right)_{t \in \mathbb{R}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-\log(\beta)}{d^{-1/2}} B_t\right)_{t \in \mathbb{R}}.$$

Puisque X' est une MAMA sur \mathbb{Z} qui a un potentiel R qui converge vers un mouvement brownien, nous pouvons appliquer directement le résultat de localisation 1.4.3 de Zeitouni. On obtient donc qu'il existe une suite de v.a. $(b_n)_{n \geq 1}$ à valeur dans \mathbb{Z} qui sont S -mesurables telles que

$$\mathcal{P}_0 \left[\left| \frac{X'_n}{(\log n)^2} - b_n \right| > \epsilon \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

et ce $\forall \epsilon > 0$. On se rappelle que ces v.a. sont des positions dans \mathbb{Z} qui situent le point le plus bas des vallées de R qui ont été pris avec un seuil variable $\log(n)$. Ces v.a. convergent en distribution sous \mathbb{P} vers une v.a. b qui peut être caractérisé explicitement. Plus de détails sont disponibles sur la distribution limite de ces variables aléatoires dans [10]. Notre but est maintenant d'utiliser le lien reliant X' à X pour conclure. Pour tous $n \geq 1$, on pose de nouvelle v.a. S -mesurable

$$L_n := \frac{S_{(\log n)^2 b_n}}{\log n}$$

de façon à avoir

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0 \left[\left| \frac{X'_n}{(\log n)^2} - b_n \right| > \epsilon \right] &= \mathcal{P}_0 \left[\left| \frac{X'_n - (\log n)^2 b_n}{(\log n)^2} \right| > \epsilon \right] \\ &= \mathcal{P}_0 \left[\left| \frac{S_{X'_n} - S_{(\log n)^2 b_n}}{\log n} \right| > \epsilon \right] \\ &= \mathcal{P}_0 \left[\left| \frac{X_n}{\log n} - L_n \right| > \epsilon \right] \end{aligned}$$

et ce $\forall \epsilon > 0$. Ce qui nous assure le résultat voulu. □

2.3. Marche aléatoire biaisée sur la trace d'une marche aléatoire simple

Dans cette section, nous allons généraliser les idées développées dans la section 2.2 pour le cas où la marche aléatoire biaisée évolue sur une marche aléatoire simple. Le plus grand défi résidera dans la gestion des boucles présentes dans l'environnement sous-jacent S car elles nous empêchent d'utiliser directement une version du résultat de localisation de Zeitouni. Pour contourner ce problème, nous allons plutôt nous intéresser aux points de coupures de S dans le but de trouver une MAMA sur \mathbb{Z} reliée à ces points de coupures. Dans ce modèle unidimensionnel, nous allons montrer une fois de plus que le potentiel converge vers un mouvement brownien. Ensuite, à l'aide de 5 hypothèses découlant de la limite brownienne, nous allons montrer quelques résultats intermédiaires qui confirmeront notre intuition voulant que "La marche X devrait tomber rapidement au bas de la vallée et y rester suffisamment longtemps". Avec ces résultats en main, il suffira de les assembler dans une preuve inspirée de celle de Zeitouni pour obtenir le théorème 2.1.1.

2.3.1. Points de coupure et MAMA sur \mathbb{Z}

Une des premières questions que nous devons nous poser si nous voulons généraliser le résultat de localisation est: quel élément clef avons-nous dans le modèle autoévitant? Clairement, la stratégie de preuve reposait sur la structure *en collier* de la marche autoévitante qui était similaire à celle de \mathbb{Z} puisque chaque sommet reliait son voisin de gauche à celui de droite. En d'autres mots, chaque sommet était un *passage obligatoire* que la marche devait emprunter si elle voulait progresser dans l'environnement, et ainsi, on pouvait relier le modèle à une MAMA sur \mathbb{Z} . Maintenant, en laissant les boucles dans l'environnement sous-jacent, existe-t-il encore une façon de voir le modèle sous un angle unidimensionnel? Avons-nous encore des *passages obligatoires*? C'est là que l'idée des points de coupure vient en jeu. Définissons-les pour mieux discuter de leur utilité.

Si on prend une marche aléatoire simple bi-infinie dans \mathbb{Z}^d nommée S , on peut définir ses temps de coupure par

$$\mathcal{T} := \{ n \mid S_{(-\infty, n]} \cap S_{[n+1, \infty)} = \emptyset \},$$

soit les temps qui découpent S en deux parties disjointes. Croydon [6] nous assure que cet ensemble comporte une infinité de temps \mathbb{P} -p.s. pour les dimensions $d \geq 5$.¹ Ainsi, nous pouvons ordonner $\mathcal{T} = \{T_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ de façon à avoir $\dots < T_{-1} < T_0 \leq 0 < T_1 < T_2 < \dots$. Ces temps de coupure correspondent à des points de coupure sur S qu'on définit par $C_n := S_{T_n}$. L'ensemble des points de coupure de S dénoté par $\mathcal{C} := \{C_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est un

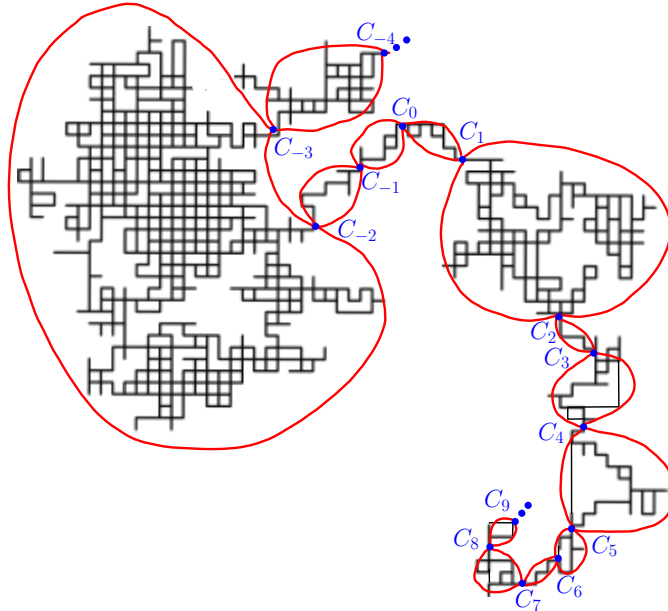


Fig. 2.1. Exemple simple des points de coupure pour $d = 2$.

sous-ensemble des sommets qui retrouvent la particularité mentionnée ci-dessus d'être des

¹Pour une dimensions $d \leq 4$, \mathcal{T} n'est plus nécessairement infini et la stratégie de preuve s'écroule.

"passages obligatoires". Si la marche veut progresser dans l'environnement, elle se doit de passer par les points \mathcal{C} . Ainsi, nous pouvons retrouver la structure unidimensionnelle tant recherchée en observant S comme une suite bi-infinie de graphes séparés par les points \mathcal{C} . La prochaine étape consiste à observer les mouvements de X entre les points de coupure et relier ce processus à une MAMA sur \mathbb{Z} .

Comme dans la section 2.2, nous devons établir un lien clair reliant le modèle à celui de la MAMA sur \mathbb{Z} . Désormais, notre but est de définir une seconde marche qui nous indiquera le processus des sauts de X entre les points de coupure \mathcal{C} . Pour ce faire, on définit les temps d'atteinte par X des points de coupure \mathcal{C} par

$$H_0 := \inf\{m \geq 0 \mid X_m \in \mathcal{C}\},$$

et pour $n \geq 1$

$$H_n := \inf\{m > H_{n-1} \mid X_m \in \mathcal{C}\}.$$

En notant π la bijection évidente qui relie \mathbb{Z} à \mathcal{C} telle que $\pi(n) = C_n$, on définit le processus $J = (J_n)_{n \geq 0}$ à valeur dans \mathbb{Z} par

$$J_n := \pi^{-1}(X_{H_n}).$$

Ainsi, J_n nous indique quel est l'indice du $n^{\text{ième}}$ point de coupure visité par X . Il peut être utile de réaliser que contrairement à la MAMA sur \mathbb{Z} définie dans la section 2.2, le processus J peut rester à un certain entier n pour plusieurs temps consécutifs. Afin de bien traduire ce comportement, on va définir les probabilités de transition légèrement différemment telle que $\omega := (\omega_n^-, \omega_n^0, \omega_n^+)_{n \in \mathbb{Z}}$ où ω_n^- (resp. ω_n^+) sont encore les probabilités de descendre en $n - 1$ (resp. monter en $n + 1$) et où ω_n^0 est la probabilité de rester en n . Comme à la section précédente, ces probabilités de transition sont définies pour suivre les transitions existantes sur S et des calculs simples [6] nous donnent que

$$\omega_n^\pm := \frac{1}{\mu(C_n) R_{eff}(C_n, C_{n \pm 1})} \quad (2.3.1)$$

où R_{eff} est la résistance équivalente sur S découlant des conductances biaisées usuelles (2.1.3). Maintenant que nous avons défini la MAMA sur \mathbb{Z} qui accompagne notre modèle, il est temps de se concentrer sur le potentiel qu'on peut définir sur J et des hypothèses qui en découlent.

2.3.2. Potentiel brownien et les hypothèses qui en découlent

Comme toute MAMA sur \mathbb{Z} avec des probabilités de transitions ω , nous allons vouloir définir un potentiel R pour ensuite y définir des vallées dans le but de structurer notre analyse. Dans le cas du processus J , avec $\rho_n := \omega_n^- / \omega_n^+$, on peut définir le potentiel R tel

qu'en (1.4.1). Sur ce potentiel, la première chose à faire est de s'assurer qu'il tend bien vers une limite brownienne. Plus particulièrement, Croydon a réussi à démontrer le lemme suivant:

Lemme 2.3.1. *Pour un biais $\beta > 1$ et une dimension $d \geq 5$, le potentiel R de l'environnement aléatoire ω satisfait la limite*

$$\left(n^{-1/2} R_{\lfloor nt \rfloor} \right)_{t \in \mathbb{R}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} (\sigma B_t)_{t \in \mathbb{R}}$$

en distribution sous \mathbb{P} , où $(B_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un mouvement brownien bi-infini standard avec $B_0 = 0$ et

$$\sigma := \frac{(\log \beta)^2 E[T_1 | 0 \in \mathcal{T}]}{d} \in (0, \infty).$$

Sans tomber dans les détails de la preuve, nous pouvons mettre en évidence les idées principales. Comme dans la section 2.2, nous voulons utiliser le même lien qui relie le potentiel R à la première composante de la marche sous-jacente $S^{(1)}$ pour transmettre la limite de S à R . Toutefois, l'égalité (2.2.1) n'est plus exacte dans notre contexte puisque le potentiel n'est pas défini en tout point de S . L'idée la plus évidente serait de se demander si cette relation est vraie sur la première composante des points de coupures \mathcal{C} . Elle ne s'avère pas être exacte, mais une assez bonne borne supérieure sur leur différence va s'avérer être assez pour nous donner la limite brownienne du potentiel. En effet, il est possible de borner leur différence par

$$\sup_{|m| \leq n} \left| R_m + C_m^{(1) \log \beta} \right| \leq 2 \sup_{|m| \leq n} \left[\log(T_{m+1} - T_m) + \log \beta \sup_{T_m \leq k \leq T_{m+1}} \left| C_m^{(1)} - S_k^{(1)} \right| \right]. \quad (2.3.2)$$

Le premier terme de la borne concerne l'écart entre les temps de coupures et peut être borné à l'aide d'un argument ergodique voulant que $n^{-1} T_n \xrightarrow[|n| \rightarrow \infty]{} E[T_1 | 0 \in \mathcal{T}]$ p.s. selon \mathbb{P} . Le second terme de la borne concerne la question: est-ce que $C_m^{(1)}$ est une bonne approximation des points de S se situant entre deux points de coupures consécutifs? Un argument de *tightness* nous assure que ce terme se borne également. Ensuite, deux changements de temps nous assurent que la limite de S

$$\left(n^{-1/2} S_{\lfloor nt \rfloor} \right)_{n \rightarrow \infty} \xrightarrow{} (B_t)$$

se transfère à $S^{(1)}$

$$\left(n^{-1/2} S_{\lfloor nt \rfloor}^{(1)} \right)_{n \rightarrow \infty} \xrightarrow{} \left(d^{-1/2} B_t \right)$$

et se transfère ensuite à $C^{(1)} \log \beta$

$$\left(n^{-1/2} C_{\lfloor nt \rfloor}^{(1)} \log \beta \right)_{n \rightarrow \infty} \xrightarrow{} (\sigma B_t).$$

Pour conclure, on utilise le fait que le terme de droite dans (2.3.2) converge vers 0 \mathbb{P} -p.s. lorsque qu'il est divisé par $n^{-1/2}$. Ceci nous donne la convergence voulue du potentiel R vers un mouvement brownien.

Avec la limite qui nous assure le comportement brownien du potentiel, il est maintenant temps d'utiliser les vallées définies dans la section 1.4.3. Comme discuté dans cette dernière, l'échelle du potentiel R nous pousse à définir des vallées de profondeur minimale $\log(n)$. Rappelons-nous que nous posons la vallée (a_n, b_n, c_n) du potentiel R comme la plus petite vallée en frais de largeur et de profondeur $d_{(a_n, b_n, c_n)} \geq \log(n)$. Pour une fraction $\delta > 0$, nous définissons aussi la vallée $(a_{\delta, n}, b_{\delta, n}, c_{\delta, n})$ de la même manière sauf qu'elle est de profondeur minimale $d_{(a_{\delta, n}, b_{\delta, n}, c_{\delta, n})} \geq (1 + \delta) \log(n)$. Pour le reste de ce chapitre, il nous sera utile de se doter de certaines bornes qui s'appliquent aux vallées. Définissons un sous-ensemble des environnements aléatoires possibles $A(n, K, \delta) \subset \Omega$ où les vallées de $A(n, K, \delta)$ respectent:

- (1) $b_n = b_{\delta, n}$,
- (2) n'importe quel raffinement (a, b, c) de $(a_{\delta, n}, b_{\delta, n}, c_{\delta, n})$ avec $b \neq b_n$ a une profondeur $d_{(a, b, c)} < (1 - \delta) \log(n)$,
- (3) $\min_{m \in [a_{\delta, n}, c_{\delta, n}] \setminus [b_n - \delta(\log n)^2, b_n + \delta(\log n)^2]} (R_m - R_{b_n}) > \delta^3 \log n$,
- (4) $|a_{\delta, n}| + |c_{\delta, n}| \leq K(\log n)^2$,
- (5) $\sup_{|m| \leq K(\log n)^2 + 1} \left[\log(T_{m+1} - T_m) + \log \beta \sup_{T_m \leq k \leq T_{m+1}} |C_m^{(1)} - S_k^{(1)}| \right] \leq \delta^4 \log n$.

Ces conditions ont été choisies de façon à avoir que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{K \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}[A(n, K, \delta)] = 1.$$

En effet, les propriétés (1) à (4) découlent du fait que le potentiel R a une limite brownienne et la (5) est tirée de la preuve du lemme (2.3.1). Ces propriétés semblent sortir de nulle part, mais elles ont toutes un rôle à jouer dans la preuve à venir. (1) nous assure que le bas de la vallée ne change pas même si on considère une vallée légèrement plus profonde. (2) nous assure que les sous-vallées contenues dans $(a_{\delta, n}, b_{\delta, n}, c_{\delta, n})$ ne sont pas de trop grosses tailles et ainsi n'opposeront pas la marche de façon significative. (4) nous assure que les sommets d'intérêt ne seront jamais en plus grand nombre que $K(\log n)^2$. (5) est une puissante borne nous permettant de substituer S par R dans les calculs à venir afin d'utiliser (2) et (3).

Une dernière propriété qui peut être déduite est une sorte d'ellipticité uniforme sur les probabilités de transition. En d'autres mots, nous sommes capables de borner inférieurement

les probabilités de transition de J dans les environnements $\omega \in A(n, K, \delta)$ par

$$\inf_{|m| \leq K(\log n)^2} \min\{\omega_m^-, \omega_m^+\} \geq (2d\beta)^{-1} n^{-2\delta^4}.$$

Pour prouver ceci, il suffit de combiner la formule (2.3.1), la borne simple $\mu(\{C_n\}) \leq 2d\beta^{C_n^{(1)+1}}$ ainsi qu'une borne supérieure sur la résistance équivalente

$$R_{eff}(C_n, C_{n+1}) \leq \sum_{m=T_n}^{T_{n+1}-1} c(\{S_m, S_{m+1}\})^{-1} \leq \sum_{m=T_n}^{T_{n+1}-1} \beta^{-S_m^{(1)}} \leq (T_{n+1} - T_n) \sup_{T_n \leq m \leq T_{n+1}-1} \beta^{-S_m^{(1)}} \quad (2.3.3)$$

pour obtenir

$$\log \omega_n^+ \geq -\log(2d\beta) - \log(T_{n+1} - T_n) - \log \beta \sup_{T_n \leq m \leq T_{n+1}} (C_n^{(1)} - S_m^{(1)}).$$

La même borne se trouve pour $\log \omega_n^-$ et la propriété (5) qui s'applique sur $A(n, K, \delta)$ nous donne la borne inférieure voulue.

2.3.3. Résultats intermédiaires

Une fois que toutes les propriétés nécessaires ont été énoncées, nous allons nous pencher sur différents résultats intermédiaires concernant les processus X et J . Dans la preuve finale du résultat de localisation 2.1.1, nous allons avoir besoin d'outils décrivant le comportement et le temps pris par X pour descendre jusqu'au sommet C_{b_n} . Dans l'optique de dire que X devrait atteindre C_{b_n} avant le temps n , on peut montrer d'abord que le processus de sauts J se rend à b_n dans un temps inférieur à n et ensuite s'assurer que X se s'éloigne pas trop durant le temps restant. Les deux résultats qui vont nous assurer ces comportements sont:

Lemme 2.3.2. *Fixons un biais $\beta > 1$ et une dimension $d \geq 5$. Pour δ petit et $K \in (0, \infty)$, il existe un entier fini $n_0(K, \delta)$ tel que: si $n \geq n_0(K, \delta)$, alors sur $A(n, K, \delta)$, le processus de saut J satisfait*

$$P_0^G \left[J \text{ atteint } b_n \text{ avant le temps } \left\lceil n^{1-\delta^2} \right\rceil \right] \geq 1 - n^{-\delta/4}, \quad (2.3.4)$$

et aussi

$$P_0^G \left[\sup_{m \leq n} |J_m| \leq K(\log n)^2 \right] \geq 1 - n^{-\delta/4}. \quad (2.3.5)$$

DÉMONSTRATION. On commence par poser que $b_n > 0$ (le cas où $b_n < 0$ se démontre similairement). Pour obtenir (2.3.4), nous allons d'abord montrer qu'il est peu probable d'atteindre le bord $a_{\delta, n}$ en premier et ensuite utiliser l'inégalité de Markov pour montrer qu'il est peu probable de ne pas atteindre $\{a_{\delta, n}, b_n\}$ en un temps plus grand que $\lceil n^{1-\delta^2} \rceil$. En combinant ces deux idées, il ne restera que le scénario où la marche J atteint b_n dans les temps voulu.

La formule (1.3.7) des réseaux électriques nous dit que

$$P_0^{\mathcal{G}}[J \text{ atteint } a_{\delta,n} \text{ avant } b_n] \leq \frac{R_{eff}(C_0, C_{b_n})}{R_{eff}(C_{a_{\delta,n}}, C_{b_n})} = \frac{\sum_{m=0}^{b_n-1} R_{eff}(C_m, C_{m+1})}{\sum_{m=a_{\delta,n}}^{b_n-1} R_{eff}(C_m, C_{m+1})},$$

où l'inégalité s'explique par le fait que J peut commencer de 0 ou de 1 lorsque X commence en 0. La borne supérieure (2.3.3) et la borne inférieure sur la résistance équivalente entre deux points de coupures

$$R_{eff}(C_n, C_{n+1}) \geq c(\{S_{T_n}, S_{T_{n+1}}\})^{-1} = \beta^{-\max\{S_{T_n}^{(1)}, S_{T_{n+1}}^{(1)}\}} \geq \beta^{-C_m^{(1)}-1} \quad (2.3.6)$$

nous donne

$$\begin{aligned} P_0^{\mathcal{G}}[J \text{ atteint } a_{\delta,n} \text{ avant } b_n] &\leq \frac{\sum_{m=0}^{b_n-1} (T_{m+1} - T_m) \sup_{T_m \leq k \leq T_{m+1}} \beta^{-S_k^{(1)}}}{\sum_{m=a_{\delta,n}}^{b_n-1} \beta^{-C_m^{(1)}-1}} \\ &= \beta \frac{\sum_{m=0}^{b_n-1} (T_{m+1} - T_m) \sup_{T_m \leq k \leq T_{m+1}} \beta^{C_m^{(1)}-S_k^{(1)}} e^{-R_m - C_m^{(1)} \log \beta} e^{R_m}}{\sum_{m=a_{\delta,n}}^{b_n-1} e^{-C_m^{(1)} \log \beta - R_m} e^{R_m}} \\ &\leq \beta n^{5\delta^4} \frac{\sum_{m=0}^{b_n-1} e^{R_m}}{\sum_{m=a_{\delta,n}}^{b_n-1} e^{R_m}} \\ &\leq \beta b_n n^{5\delta^4} e^{\sup_{0 \leq m \leq b_n} R_m - R_{a_{\delta,n}}} \\ &\leq \beta K (\log n)^2 n^{5\delta^4 - \delta} \\ &\leq n^{-\delta/2} \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

où les dernières lignes consistent à faire apparaître le potentiel R et de gérer les écarts entre $C_m^{(1)} - S_k^{(1)}$ et $R_m + C_m^{(1)} \log \beta$ avec les propriétés (1) à (5) avec un δ suffisamment petit et $n \geq n_0(K, \delta)$.

Pour le second argument utilisant l'inégalité de Markov, nous désirons borner supérieurement le temps moyen pour que J atteigne $\{a_{\delta,n}, b_n\}$. Un argument tiré de [10] nous permet d'avoir

$$\begin{aligned} E_0^{\mathcal{G}} [T_{a_{\delta,n}, b_n}] &\leq \sum_{m=1}^{b_n} \sum_{k=0}^{m-1-a_{\delta,n}} \frac{R_{eff}(C_{m-1}, C_m)}{\omega_{m-k-1}^+ R_{eff}(C_{m-k}, C_{m-k-1})} \\ &\leq 4d\beta^2 n^{9\delta^4} \sum_{m=1}^{b_n} \sum_{k=0}^{m-1-a_{\delta,n}} e^{R_m - R_{m-k}} \\ &\leq 4d\beta^2 K^2 (\log n)^4 n^{9\delta^4} e^{(1-\delta) \log n} \\ &\leq n^{1-\delta/2}. \end{aligned}$$

Où les dernières lignes sont encore la gestion des écarts avec les propriétés (1) à (5) avec un δ suffisamment petit et $n \geq n_0(K, \delta)$. On assemble les deux bornes obtenues ci-dessus pour avoir que

$$\begin{aligned}
P_0^{\mathcal{G}} [J \text{ n'atteint pas } b_n \text{ avant le temps } \lfloor n^{1-\delta^2} \rfloor] &\leq P_0^{\mathcal{G}} [J \text{ atteint } a_{\delta,n} \text{ avant } b_n] \\
&\quad + P_0^{\mathcal{G}} [J \text{ n'atteint pas } \{a_{\delta,n}, b_n\} \text{ avant le temps } \lfloor n^{1-\delta^2} \rfloor] \\
&\leq n^{-\delta/2} + \frac{n^{1-\delta/2}}{n^{1-\delta^2}} \\
&\leq n^{-\delta/4}
\end{aligned}$$

avec un δ suffisamment petit et $n \geq n_0(K, \delta)$, ce qui nous donne (2.3.4).

Pour prouver (2.3.5), nous allons d'abord montrer le même résultat, mais avec comme point de départ $J_0 = b_n$ et ensuite utiliser (2.3.7) pour montrer que J devrait atteindre b_n avant $\{a_{\delta,n}, c_{\delta,n}\}$ avec forte probabilité. On commence en utilisant la même logique que ci-dessus pour borner

$$P_{J_0=b_{n-1}}^{\mathcal{G}} [J \text{ atteint } a_{\delta,n} \text{ avant } b_n] = \frac{R_{eff}(C_{b_{n-1}}, C_{b_n})}{R_{eff}(C_{a_{\delta,n}}, C_{b_n})} \leq \beta n^{6\delta^4} e^{R_{b_n} - R_{a_{\delta,n}}} \leq n^{-(1+\delta/2)}.$$

On trouve la même borne lorsqu'on commence la marche à la droite de b_n soit

$$P_{J_0=b_{n+1}}^{\mathcal{G}} [J \text{ atteint } c_{\delta,n} \text{ avant } b_n] \leq n^{-(1+\delta/2)}.$$

À travers un argument géométrique, nous trouvons que

$$\begin{aligned}
&P_{J_0=b_n}^{\mathcal{G}} \left[\sup_{m \leq n} |J_m| \leq K(\log n)^2 \right] \\
&\geq P_{J_0=b_n}^{\mathcal{G}} [J \text{ retourne à } b_n \text{ au moins } n \text{ fois avant d'atteindre } \{a_{\delta,n}, c_{\delta,n}\}] \\
&= \left(1 - n^{-(1+\delta/2)}\right)^n \\
&\geq 1 - n^{-\delta/3}
\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

avec δ suffisamment petit et $n \geq n_0(K, \delta)$. On obtient la borne voulue en appliquant le fait que J atteint b_n avant d'atteindre $\{a_{\delta,n}, c_{\delta,n}\}$ avec une probabilité d'au moins $1 - n^{-\delta/2}$. \square

Le second lemme que nous allons montrer concerne le processus des temps d'atteinte des points de coupures H qui était nécessaire dans la définition du processus J . Plus précisément, nous cherchons une borne nous assurant que les sauts ne sont pas si rapprochés et ainsi que le comportement de la marche biaisée X n'est pas trop imprévisible entre deux points de coupure consécutifs.

Lemme 2.3.3. *Fixons un biais $\beta > 1$ et une dimension $d \geq 5$. Pour δ petit et $K \in (0, \infty)$, il existe un entier fini $n_0(K, \delta)$ tel que: si $n \geq n_0(K, \delta)$, alors sur $A(n, K, \delta)$, le processus des*

temps d'atteinte des points de coupures H satisfait

$$P_0^{\mathcal{G}} \left[H_{\lfloor n^{1-\delta^2} \rfloor} \leq n \right] \geq 1 - n^{-\delta^2/4}.$$

Nous allons éviter la preuve de ce lemme, car nous n'aurons pas à le généraliser dans notre modèle du chapitre 3. La preuve du lemme se trouve facilement dans [5].

2.3.4. Preuve du résultat de localisation de Croydon 2.1.1

Avec toutes les propriétés (1) à (5) énoncées et les résultats intermédiaires qui en découlent, il est maintenant le temps de faire la preuve du résultat de localisation 2.1.1. Comme discuté auparavant, la structure de la preuve est la même que dans [10] avec quelques idées adaptées au nouveau modèle de la marche aléatoire biaisée sur la trace d'une marche aléatoire bi-infinie.

DÉMONSTRATION. Pour un $\epsilon > 0$, prenons $\delta < \epsilon/2$. Définissons d'abord les v.a. S -mesurables à valeur dans \mathbb{Z}^d

$$L_n := \frac{C_{b_n}}{\log n}.$$

Rappelons-nous que nous désirons borner la probabilité recuite $\mathcal{P}_0[\dots]$. Pour ce faire, nous allons plutôt borner certains éléments à l'aide d'une version sur la loi trempée $P_0^{\mathcal{G}}[\dots]$ qui nous permettra d'utiliser de l'information donnée par l'environnement \mathcal{G} . Nous terminerons par borner ce qui reste sous la probabilité recuite. Comme dans [10], l'idée de la preuve va être d'utiliser le fait que la marche X devrait descendre en C_{b_n} avant le temps n et ensuite y rester suffisamment longtemps. Pour le reste de la preuve, assumons que les propriétés de $A(n, K, \delta)$ tiennent avec le δ choisi suffisamment petit et $n \geq n_0(K, \delta)$.

Pour montrer le fait que X devrait atteindre C_{b_n} suffisamment rapidement, remarquons que nous avons

$$\begin{aligned} & P_0^{\mathcal{G}} [X \text{ n'atteint pas } C_{b_n} \text{ avant le temps } n] \\ & \leq P_0^{\mathcal{G}} [J \text{ n'atteint pas } b_n \text{ avant le temps } \lfloor n^{1-\delta^2} \rfloor] + P_0^{\mathcal{G}} [H_{\lfloor n^{1-\delta^2} \rfloor} > n] \end{aligned}$$

et ainsi en utilisant les lemmes (2.3.2) et (2.3.3) nous obtenons que

$$P_0^{\mathcal{G}} [X \text{ atteint } C_{b_n} \text{ avant le temps } n] \geq 1 - n^{-\delta^2/8}.$$

Cette dernière borne est la première information ajoutée qui va nous permettre de toujours supposer que la position de départ de X peut être considérée comme étant C_{b_n} puisque la marche X s'y rend avec forte probabilité avant le temps butoir n .

Pour la deuxième information ajoutée, nous aimerions avoir la certitude que la marche X va rester dans dans le cadre $\{C_{a_{\delta,n}}, C_{c_{\delta,n}}\}$. Puisque que nous avons défini J comme le processus X observé aux temps d'atteintes des points de coupures \mathcal{C} , on peut utiliser la borne (2.3.8) pour avoir que

$$P_0^{\mathcal{G}} \left[X \text{ atteint } \{C_{a_{\delta,n}}, C_{c_{\delta,n}}\} \text{ avant le temps } n \right] \leq n^{-\delta/3}.$$

Ainsi, avec les informations ajoutées que X devrait atteindre C_{b_n} avant le temps n et que la marche X devrait rester dans le cadre $\{C_{a_{\delta,n}}, C_{c_{\delta,n}}\}$ durant le temps n , nous pouvons déduire que

$$P_0^{\mathcal{G}} \left[\left| \frac{X_n}{\log n} - L_n \right| > \delta \right] \leq n^{-\delta^2/8} + n^{-\delta/3} + \max_{m \leq n} P_{C_{b_n}}^{\mathcal{G}} \left[\left| \frac{\bar{X}_m}{\log n} - L_n \right| > \delta \right]$$

où $\max_{m \leq n}$ a été ajouté parce que nous ignorons combien de pas X prend pour se rendre en C_{b_n} et où X a été remplacé par une autre marche aléatoire biaisée \bar{X} qui a la particularité d'être piégée entre $\{C_{a_{\delta,n}}, C_{c_{\delta,n}}\}$. En d'autres mots, \bar{X} est une nouvelle marche aléatoire sur le graphe $\bar{\mathcal{G}}$ qui a comme ensemble de sommets

$$V(\bar{\mathcal{G}}) := \{S_k \mid T_{a_{\delta,n}} \leq k \leq T_{c_{\delta,n}}\}$$

et comme ensemble d'arêtes

$$E(\bar{\mathcal{G}}) := \{\{S_k, S_{k+1} \mid T_{a_{\delta,n}} \leq k \leq T_{c_{\delta,n}} - 1\}\}$$

avec les mêmes conductances que sur \mathcal{G} . La principale différence qui va nous permettre d'avancer nos calculs est que \bar{X} évolue sur un espace d'états finis.

La prochaine étape est de se demander: comment borner

$$\max_{m \leq n} P_{C_{b_n}}^{\mathcal{G}} \left[\left| \frac{\bar{X}_m}{\log n} - L_n \right| > \delta \right]$$

ou bien quels sont les sommets qui vont nous poser problème? Clairement, les sommets loin de C_{b_n} seront les plus problématiques alors c'est pourquoi nous voulons décomposer l'intervalle suivant en deux

$$[a_{\delta,n}, c_{\delta,n}] = [a_{\delta,n}, c_{\delta,n}] \setminus [b_n - \delta(\log n)^2, b_n + \delta(\log n)^2] \cup [b_n - \delta(\log n)^2, b_n + \delta(\log n)^2]$$

et essayer de borner la probabilité que \bar{X} visite les sommets du premier intervalle. Pour ce faire, il est pratique de s'intéresser à la mesure invariante $\bar{\mu}$ de \bar{X} et voir qu'avec $k \in [T_m, T_m + 1]$ nous avons que

$$\bar{\mu}(\{S_k\}) \leq 2d\beta^{S_k^{(1)}+1} \leq 2d\beta \sup_{k \in [T_m, T_m+1]} \beta^{S_k^{(1)} - C_m^{(1)}} e^{R_m + C_m^{(1)} \log \beta} e^{R_{b_n} - R_m} e^{-R_{b_n}}.$$

Ainsi, si $m \in [a_{\delta,n}, c_{\delta,n}] \setminus [b_n - \delta(\log n)^2, b_n + \delta(\log n)^2]$ nous pouvons alors appliquer (2.3.2) et les propriétés qui sont vraies sur $A(n, K, \delta)$ pour obtenir que

$$\bar{\mu}(\{S_k\}) \leq 2d\beta n^{3\delta^4 - \delta^3} e^{-R_{b_n}}.$$

Avec une démarche similaire, nous pouvons aussi obtenir une borne inférieure sur

$$\bar{\mu}(\{C_{b_n}\}) \geq n^{-2\delta^4} e^{-R_{b_n}}.$$

Nous utilisons ces deux dernières bornes pour obtenir que $\forall x \in V(\bar{\mathcal{G}})$ on a

$$\mathbb{1}_{C_{b_n}}(x) \leq f(x) := \frac{\bar{\mu}(\{x\})}{\bar{\mu}(\{C_{b_n}\})} \leq \frac{2d\beta n^{3\delta^4 - \delta^3} e^{-R_{b_n}}}{n^{-2\delta^4} e^{-R_{b_n}}} \leq 2d\beta n^{5\delta^4 - \delta^3}$$

et que $\bar{\mu}\bar{P}_{\mathcal{G}} = \bar{\mu}$ où $\bar{P}_{\mathcal{G}}$ est la matrice de transition de \bar{X} . Nous pouvons utiliser cette dernière borne pour avoir que

$$P_{C_{b_n}}^{\mathcal{G}} [\bar{X}_l = S_k] = (\mathbb{1}_{C_{b_n}} \bar{P}_{\mathcal{G}}^l)(S_k) \leq (f \bar{P}_{\mathcal{G}}^l)(S_k) = f(S_k) \leq 2d\beta n^{5\delta^4 - \delta^3}$$

pour les sommets $\{S_k \mid k \notin [T_{b_n - \delta(\log n)^2}, T_{b_n + \delta(\log n)^2}]\}$. Nous pouvons donc appliquer cette borne à certains des sommets que \bar{X} peut visiter et avoir

$$\begin{aligned} & \max_{m \leq n} P_{C_{b_n}}^{\mathcal{G}} [\bar{X}_m = S_k \text{ pour un } k \notin [T_{b_n - \delta(\log n)^2}, T_{b_n + \delta(\log n)^2}]] \\ & \leq (T_{c_{\delta,n}} - T_{a_{\delta,n}}) 2d\beta n^{5\delta^4 - \delta^3} \\ & \leq (c_{\delta,n} - a_{\delta,n}) n^{\delta^4} 2d\beta n^{5\delta^4 - \delta^3} \\ & \leq 2d\beta K (\log n)^2 n^{6\delta^4 - \delta^3} \\ & \leq n^{-\delta^3/2} \end{aligned}$$

pour δ petit et $n \geq n_0(K, \delta)$. Avec cette dernière borne, nous n'avons plus qu'à nous concentrer sur les sommets qui sont dans $[T_{b_n - \delta(\log n)^2}, T_{b_n + \delta(\log n)^2}]$. Ce dernier élément va être plus facile à borner sous la probabilité recuite \mathcal{P}_0 et une façon alternative de borner la probabilité de ces sommets seraient de vérifier que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}_0 \left[\sup_{k \in [T_{b_n - \delta(\log n)^2}, T_{b_n + \delta(\log n)^2}]} \left| \frac{S_k - C_{b_n}}{\log n} \right| > \delta \right] = 0. \quad (2.3.9)$$

Pour y arriver, rappelons-nous que la marche aléatoire sous-jacente converge vers un mouvement brownien

$$(d^{1/2} n^{-1/2} S_{[nt]})_{t \in \mathbb{R}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} (B_t)_{t \in \mathbb{R}}$$

avec $B_0 = 0$. De plus, avec la convergence du potentiel R en 2.3.1, nous pouvons montrer que $(\log n)^{-2} b_n$ converge en distribution vers une v.a. b_∞ à valeur dans $(-\infty, \infty)$ qui est la position la plus basse d'une vallée du processus $(\frac{\log \beta}{\sqrt{d}} B_{t\tau}^{(1)})_{t \in \mathbb{R}}$ de profondeur 1 et qui entoure

0 où $\tau := E[T_1 | 0 \in \mathcal{T}]$. De plus, il est possible de montrer que les temps de coupures satisfont une propriété ergodique voulant que $n^{-1}T_n$ converge \mathbb{P} -p.s. vers une constante dans $[1, \infty)$. En assemblant ces trois derniers résultats, nous sommes capables de montrer (2.3.9) et ainsi terminer la preuve du résultat de localisation 2.1.1.

□

Chapitre 3

Premier résultat de localisation pour comprendre la marche biaisée sur la trace d'une marche aléatoire branchante

Comme discuté dans l'introduction de ce mémoire, il est courant de généraliser les résultats pour des modèles de plus en plus complexes. Comme nous avons vu au chapitre 2, il est aussi pratique de s'intéresser à des modèles qui sont imbriqués l'un dans l'autre et de construire en complexité sur le modèle précédent. Dans notre cas, nous voulons généraliser le résultat de localisation de Croydon/Zeitouni sur un nouvel environnement sous-jacent qui contient une marche aléatoire simple. L'environnement sur lequel nous allons vouloir généraliser est la marche aléatoire branchante critique dans \mathbb{Z}^d dont la colonne est la marche aléatoire simple du chapitre 2. Similairement à l'approche de Croydon, il va être utile de commencer par un modèle simplifié pour tester les idées et ensuite les adapter au vrai modèle. Dans le cas, de la marche aléatoire branchante, des résultats nous assurent qu'une bonne approximation est possible à l'aide d'un K -squelette que nous introduirons dans la section 3.1. Ainsi, le but de cette section va être de démontrer qu'il est possible d'utiliser l'idée des résultats de localisation de Zeitouni et Croydon pour la généraliser sur les points du K -squelette d'une marche aléatoire branchante. À la fin de ce chapitre, nous serons capable d'utiliser notre nouveau résultat de localisation (3.1.1) pour localiser le voisinage de la marche biaisée en se concentrant sur le point ayant le plus petit potentiel dans le K -squelette.

Nous introduirons d'abord le modèle de la marche biaisée sur la trace de la marche aléatoire branchante, l'approximation de la marche branchante par un K -squelette et le résultat de localisation simplifié dans la section 3.1. Pour démontrer le résultat, nous adapterons d'abord les outils nécessaires tels que le potentiel et les pièges sur le nouvel environnement

qu'est le K -squelette dans la section 3.2. Une fois ces outils généralisés, nous discuterons des hypothèses browniennes nécessaires à la preuve et des résultats intermédiaires qui en découlent dans la section 3.3. Nous terminerons avec la preuve du résultat de localisation 3.1.1 dans la section 3.4. Avant d'aller plus loin, introduisons les modèles pour mieux en discuter.

3.1. Définition du modèle et l'approximation par un K -squelette

Pour définir le modèle, prenons d'abord une marche aléatoire branchante critique bi-infinie $\mathcal{G}_{-\infty, \infty}^{GW}$ qui a une loi de probabilité \mathbb{P} . Sur ce sous-graphe de \mathbb{Z}^d , les conductances usuelles (2.1.3) sont appliquées sur chacune des arêtes de $E(\mathcal{G}_{-\infty, \infty}^{GW})$ avec un biais $\beta > 1$. Sur ce réseau, nous définissons la marche aléatoire biaisée usuelle X avec les probabilités de transition proportionnelles aux conductances. Ceci est donc notre marche aléatoire biaisée sur la trace d'une marche aléatoire branchante critique bi-infinie dans \mathbb{Z}^d .

Sur ce modèle, le but ultime serait de trouver une version du résultat de localisation de Croydon/Zeitouni et de pouvoir dire, qu'avec une probabilité approchant 1, la marche biaisée se trouve dans un voisinage ϵ d'une v.a. pointant vers le point le plus bas d'un potentiel R défini sur $\mathcal{G}_{-\infty, \infty}^{GW}$. Pour la marche biaisée sur la trace d'une marche aléatoire simple, Croydon obtient son résultat en utilisant les points de coupures de l'environnement pour se ramener au modèle unidimensionnel de Zeitouni. Pour s'inspirer de Croydon, on peut voir la marche branchante comme un assemblage de plusieurs marches aléatoires simples. Ces dernières peuvent malheureusement s'intersecter, mais ne le font que très peu en haute dimension. Ainsi, on peut penser décomposer $\mathcal{G}_{-\infty, \infty}^{GW}$ selon ses points de coupures \mathcal{C} et observer la structure d'arbre qui les connecte. Pour espérer généraliser le résultat, il faudrait savoir contrôler la marche lorsqu'elle se trouve entre deux points de \mathcal{C} et s'assurer que le nouveau potentiel ait une limite brownienne le long de tous les bras de $\mathcal{G}_{-\infty, \infty}^{GW}$. Pour le moment, ce modèle demeure trop complexe et nous allons plutôt nous intéresser à une version simplifiée. Comme Croydon dans la section 2.2, il peut être pratique de s'attaquer à une version sans-boucle sur laquelle nous testons les idées et essayons de faire une "preuve de concept".

Pour trouver un modèle simplifié sans boucle, nous allons nous inspirer du travail de l'équipe de mon directeur de maîtrise. Dans [2], Arous, Cabezas et Fribergh ont réussi à démontrer la limite d'échelle d'une marche aléatoire simple sur la trace d'une marche aléatoire branchante critique. Pour ce faire, ils ont trouvé que les marches aléatoires branchantes critiques sont des objets qui s'approximent bien par des structures d'arbres qu'ils ont nommés

des K -squelettes. Plus précisément, en prenant une marche aléatoire branchante critique de grande taille G_n ¹, sous une loi de probabilité $\mathbb{P}[\cdot \mid |G| = n]$, nous pouvons décomposer G_n selon ses points de coupure et obtenir, pour un $K \in \mathbb{N}$ grand, un graphe $G_n(K)$ formé des K premiers points de coupure. On peut voir $G_n(K)$ comme les points de coupure de G_n reliés par des arêtes indiquant l'incidence entre-eux. Ce graphe est très près de la structure d'arbre voulu, mais il peut toujours contenir des cycles. Toutefois, en grande dimension $d > 8$, ils ont trouvé que le graphe $G_n(K)$ est dit *asymptotiquement en forme d'arbre*. En d'autres mots, certains cycles peuvent exister à petite échelle, mais il ne devrait pas en exister à grande échelle. Avec quelques transformations consistant à remplacer les boucles en forme de triangles par des étoiles, nous sommes capables d'obtenir un arbre $\mathcal{T}^{(G_n, K)}$ appelé le K -squelette de $G_n(K)$ qui approxime la macrostructure d'arbre cachée dans la marche aléatoire branchante. Si nous nous imaginons prendre $K = 2$, le graphe résultant ressemblerait grandement à la marche aléatoire autoévitante utilisée par Croydon dans la section 2.2. Pour cette raison, le K -squelette peut être vu comme une généralisation finie qui admet une structure d'arbre. Cette approximation du graphe G_n par un K -squelette s'avère être adéquate puisque Arous, Cabezas et Fribergh ont réussi à montrer la limite suivante

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[\sup_{z \in G_n} \frac{|z - \pi_{\mathcal{T}^{(G_n, K)}}(z)|}{n^{1/4}} > \epsilon \right] = 0 \text{ pour tout } \epsilon > 0$$

où π est la fonction qui trouve le sommet le plus prêt de z dans le K -squelette. Ceci nous assure que pour un K grand, le K -squelette est toujours au plus à une distance ϵ de la marche aléatoire branchante.

Cette démarche d'approximation des marches aléatoires branchantes critiques de grande taille par des K -squelettes nous pointe vers un modèle simplifié: la marche aléatoire biaisée sur un K -squelette avec, au plus, un grand nombre K fini de branches. Comme avec la marche aléatoire auto-évitante dans \mathbb{Z}^d de Croydon, les sommets du K -squelette sont aussi dans \mathbb{Z}^d ². Ainsi, nous allons pouvoir définir les conductances usuelles (2.1.3) sur les arêtes du graphe et une marche aléatoire biaisée pourra évoluer sur le K -squelette. À cette fin, nous prenons un K -squelette dont les sommets sont dans \mathbb{Z}^d nommé \mathcal{T}^K selon une loi de probabilité \mathbb{P} . Sur cet arbre, nous considérons une marche aléatoire biaisée X selon les probabilités de transition proportionnelles aux conductances. Sur ce modèle simplifié, nous allons généraliser un résultat de localisation qui va comme suit:

¹Le conditionnement concerne le nombre de sommets $|G_n|$

²La majorité des sommets sont dans \mathbb{Z}^d sauf certains points imaginaires qui représentent l'intersection de 3 points de coupures adjacents. Ces points sont imaginaires car ils n'ont pas de points de coupure correspondant dans la marche branchante, mais ont plutôt une intersection en forme de triangle qui a été retirée.

Théorème 3.1.1 (Résultat de localisation sur le K -squelette). Fixons un biais $\beta > 1$ et une dimension $d > 8$. Si $X = (X_n)_{n \geq 0}$ est une marche aléatoire β -biaisée sur le K -squelette \mathcal{T}^K dans \mathbb{Z}^d , alors il existe des variables aléatoires $(L_n)_{n \geq 1}$ qui sont \mathcal{T}^K -mesurables et qui prennent des valeurs dans \mathbb{Z}^d telles que

$$\mathcal{P}_0 \left[\left| \frac{X_n}{(\log(n))^2} - L_n \right| > \epsilon \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

pour n'importe quel $\epsilon > 0$ où la valeur absolue mesure la distance intrinsèque à \mathcal{T}^K .

Il faut préciser que la distance exprimée par la valeur absolue est la distance intrinsèque calculée dans l'arbre. Ainsi, la distance est mesurée en nombre de points de coupure le long du graphe et la constante de normalisation reste à $(\log n)^2$.

Avant d'élaborer la preuve de ce résultat, il serait intéressant de présenter les grandes lignes de notre démarche et ainsi mettre en évidence les modifications que nous avons faites pour pouvoir adapter la preuve de la section 2. D'abord, l'idée du K -squelette est particulièrement bonne, car chacun de bras est unidimensionnel et s'apparente très bien au modèle sur \mathbb{Z} utilisé par Zeitouni et Croydon. Ainsi, notre but est d'utiliser la même preuve que Croydon tout en adaptant les concepts à notre K -squelette. Nous allons d'abord généraliser la définition de potentiel, des vallées et des pièges sur notre nouvel environnement. Le principal obstacle est de s'assurer que les définitions sont cohérentes aux intersections des divers bras de notre environnement.

Ensuite, nous allons émettre l'hypothèse que notre nouveau potentiel a une limite brownienne le long de tous les bras du K -squelette. Nous n'avons malheureusement pas la preuve de cette limite, mais nous expliquerons pourquoi nous croyons pouvoir faire cette hypothèse et notre résultat de localisation sera conditionnel à la preuve de cette hypothèse. Une fois ce comportement brownien en main, nous allons adapter pour notre K -squelette les propriétés (1)-(5) qui ont été si importantes pour borner les différentes probabilités dans la preuve de Croydon. Nous allons montrer que ces nouvelles propriétés sont asymptotiquement vraies en combinant la logique de Croydon et une borne d'union nous assurant que si les propriétés sont vraies sur \mathbb{Z} , elles le sont encore sur un assemblage fini de segments de \mathbb{Z} . Une fois que ces définitions et ces bornes seront généralisées, nous allons revoir le lemme 2.3.2 et utiliser de nouvelles techniques pour obtenir les mêmes bornes. Ces bornes vont être utilisées dans la preuve finale de la même façon que Croydon pour s'assurer que la marche biaisée X devrait rapidement se rendre au fond du piège et qu'elle ne devrait pas s'éloigner trop loin du fond. La fin de la preuve restera majoritairement inchangée en utilisant un argument de matrice de transition pour borner la probabilité que

la marche X visite certains sommets problématiques. En somme, notre travail en est un d'adaptation et de vérification afin de s'assurer que la preuve de Croydon tient la route malgré notre nouveau K -squelette sous-jaçant.

Maintenant que nous connaissons le plan général de la preuve du résultat 3.1.1, nous pouvons débiter avec la généralisation des définitions.

3.2. Potentiel et vallées généralisées

Il faut maintenant s'atteler à la tâche de généraliser les concepts du potentiel R et des vallées sur la nouvelle structure des K -squelettes. Essentiellement, il faut trouver une façon d'adapter les définitions unidimensionnelles pour la cas de structures d'arbres. En considérant qu'un arbre peut être vu comme plusieurs segments unidimensionnels rapiécés ensemble, l'idée est de travailler sur les intersections. Pour ce faire, nous allons réviser chacun de ces objets et la façon qu'il était défini pour mieux les généraliser.

Pour le potentiel R de la MAMA sur \mathbb{Z}^d , il faut se rappeler qu'on utilisait les quantités $\rho_n := \frac{\omega_n^-}{\omega_n^+}$ définies sur chaque sommet en fonction des probabilités de transition $\omega = (\omega_n^-, \omega_n^+)_{n \in \mathbb{Z}^d}$. Ensuite, on prenait la formule (1.4.1) pour définir le potentiel en chaque sommet de \mathbb{Z}^d

$$R_n := \begin{cases} \sum_{i=1}^n \log(\rho_i) & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \\ -\sum_{i=n+1}^0 \log(\rho_i) & \text{si } n \leq -1. \end{cases}$$

En se penchant sur les détails, on peut voir que les indices de la somme peuvent représenter les sommets qui sont sur le chemin reliant n à l'origine 0. Du côté positif, la somme débute simplement à 1 et termine à n en sommant tous les indices sur le chemin. Du côté négatif, en plus du signe négatif devant la somme, un ajustement doit être fait pour permettre $R_0 = 0$ sans se débarrasser de l'information dans ρ_0 . En effet, un décalage a lieu de façon à ce que

$$\begin{aligned} R_{-1} &= -\log(\rho_0) \\ R_{-2} &= -\log(\rho_0) - \log(\rho_{-1}) \\ R_{-3} &= -\log(\rho_0) - \log(\rho_{-1}) - \log(\rho_{-2}) \dots \end{aligned}$$

Ainsi, l'arête $(0,1)$ peut être vu comme une référence qui nous indique quelle formule utiliser pour calculer le potentiel dépendamment de quel côté de l'arête $(0,1)$ le sommet se trouve. Ainsi, dans notre définition du potentiel sur les arbres, nous allons définir une arête de référence autour de la racine et utiliser la bonne formule dépendamment de quel côté le

sommet se trouve.

Pour définir notre nouveau potentiel sur un K -squelette \mathcal{T}^K dans \mathbb{Z}^d , l'idée principale va être de conserver l'idée qu'il faut sommer sur les sommets le long du chemin reliant à l'origine. Il est utile de se rappeler qu'avec les conductances usuelles (2.1.3), n'importe quelle probabilité de transition $\omega_{u,v}^\pm$ se trouve facilement. Prenons un K -squelette \mathcal{T}^K . En posant au hasard une arête touchant la racine comme étant l'arête de référence $e^* = (\text{racine}, u^*)$, la définition du nouveau potentiel va comme suit: pour chaque sommet $u \in V(\mathcal{T}^K)$, on lui pose le potentiel

$$R_u := \begin{cases} \sum_{u^*=v_1, v_2, \dots, v_n=u} \log \left(\frac{\omega_{v_i, v_{i-1}}^-}{\omega_{v_i, v_{i+1}}^+} \right) & \text{si } u \in \vec{e}^* \\ 0 & \text{si } u = \text{racine} \\ (-1) \sum_{\text{racine}=v_1, v_2, \dots, v_n=u} \log \left(\frac{\omega_{v_i, v_{i-1}}^-}{\omega_{v_i, v_{i+1}}^+} \right) & \text{si } u \in \overleftarrow{e}^*. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

où \vec{e}^* (resp. \overleftarrow{e}^*) sont les sommets qui sont du côté u^* (resp. *racine*) de l'arête de référence. La notation sous les sommes fait référence aux sommets de \mathcal{T}^K qui forment l'unique chemin reliant u à l'arête de référence. Ainsi, dans notre version du potentiel, la racine a encore un potentiel de 0 et le potentiel des sommets du côté \vec{e}^* est la somme du log des $\rho = \frac{\omega^-}{\omega^+}$ le long du chemin les reliant à la racine. De plus, le (-1) est encore là pour s'assurer que les potentiels du côté \overleftarrow{e}^* fonctionnent toujours autour de la racine. Si on applique cette définition sur \mathbb{Z} avec comme arête de référence $e^* = (0,1)$, on obtient le même potentiel R . Comme dans le cas unidimensionnel, de simples calculs de conductances nous assurent la relation $r_{(u,v)} = e^{R_u}$ est toujours vraie pour n'importe quels sommets voisins dans \mathcal{T}^K . Cette dernière sera très utile dans la preuve finale lorsque nous allons passer des formules de réseaux électriques au potentiel R .

Remarque 3.2.1. *La nouvelle définition du potentiel 3.2.1 pose un léger problème lorsque nous l'évaluons sur les K feuilles de \mathcal{T}^K . En effet, la probabilité d'aller plus loin est nulle ($\omega_{v_i, v_{i+1}}^+ = 0$) et résulte en une division par 0. Cet inconvénient n'est pas trop problématique selon nous car une solution simple serait d'assigner un potentiel infini aux feuilles du K -squelette. En effet, le potentiel infini correspond à l'idée que la marche n'a aucune chance de s'aventurer plus loin qu'une feuille. De plus, la relation $r(u,v) = e^{R_u}$ nous porte à croire que le potentiel peut essentiellement être remplacé par le logarithme de la résistance. Puisque la résistance est définie sur les arêtes, elle ne poserait pas de problème de définition tout en agissant comme le potentiel. Dans une démarche de recherche future, il serait intéressant de pousser un peu plus loin l'idée du logarithme de la résistance comme nouveau potentiel.*

Une fois le potentiel R défini sur les sommets de notre K -squelette \mathcal{T}^K , la prochaine étape logique est de définir les pièges de profondeur minimale qui ont été tant utiles pour encadrer la marche dans la preuve du chapitre 2. Rappelons-nous d'abord comment ils étaient définis. Pour un potentiel R défini sur les sommets de \mathbb{Z} , nous définissons d'abord

$$a' := \sup\{m \leq 0 \mid R_m \geq C\},$$

$$c' := \inf\{m \geq 0 \mid R_m \geq C\}$$

et b' comme le plus petit entier dans $[a', c']$ où $R_{b'} = \min_{a' \leq m \leq c'} R_m$, de telle façon que nous ayons la vallée (a', b', c') de profondeur $d_{(a', b', c')} \geq C$. Puisque la profondeur pouvait dépasser de beaucoup le seuil C si le potentiel plongeait sous 0, nous avons recours aux raffinements pour trouver la plus petite vallée (a, b, c) autour de 0 ayant encore une profondeur $d_{(a, b, c)} \geq C$. Ainsi, pour obtenir une vallée offrant une profondeur de potentiel d'environ C , nous avons recours à une vallée délibérément trop profonde pour ensuite la réduire jusqu'à la profondeur voulue. En d'autres mots, on permet d'abord un *backtrack*³ de C unités du potentiel à partir

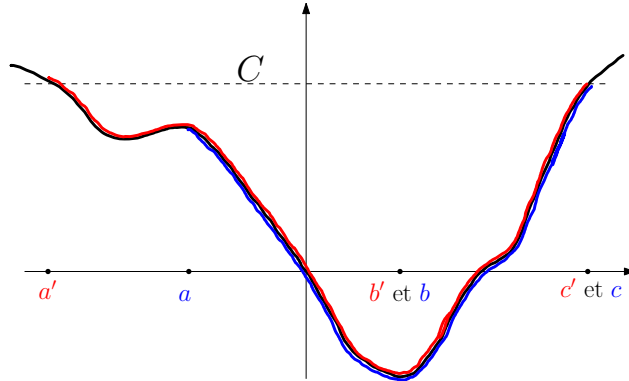


Fig. 3.1. Dans cet exemple simple, la seconde vallée (a, b, c) est obtenue d'un raffinement par la gauche et possède encore une profondeur $\geq C$.

de 0 pour ensuite réduire le piège et le *backtrack* possible pour avoir une profondeur la plus près du seuil C . Dans notre généralisation des pièges, nous allons conserver l'idée de trouver un ensemble de sommets entourant la racine et offrant une profondeur la plus près d'un seuil C donné. Toutefois, puisque l'idée des raffinements semble se complexifier avec l'ajout de K bras, nous allons prendre une autre approche et construire ce piège à l'envers. C'est-à-dire que nous allons plutôt considérer des ensembles de sommets accessibles par un *backtrack* du potentiel R de plus en plus grand jusqu'à ce que la profondeur atteigne le seuil C . Pour ce faire, il faut généraliser la définition de profondeur. Pour un K -squelette \mathcal{T}^K

³La traduction du mot *backtrack* est *de faire marche arrière*. Par souci de concision, nous allons conserver l'expression anglaise.

avec un potentiel R défini sur ses sommets, nous posons la profondeur d'un sous-ensemble de sommets $A \subseteq V(\mathcal{T}^K)$ comme étant

$$d_A := \max_{u,v \in A} R_u - R_v. \quad (3.2.2)$$

Ce qui représente encore la plus grande différence de potentiel que la marche aléatoire aura à faire face lorsqu'elle est au plus profond de A . Nous définissons ensuite les sommets autour de la racine qui sont accessibles par un *backtrack* inférieur à une quantité t par

$$H(t) := \{u \in V(\mathcal{T}^K) \mid R_{v_i} \leq t \text{ pour tout } v_i \text{ dans } \textit{racine} = v_1, v_2, \dots, v_n = u\} \quad (3.2.3)$$

où tout les sommets sur le chemin reliant un sommet à la racine doit être de potentiel inférieur à t . On peut voir $H(t)$ comme la zone atteignable autour de la racine où le potentiel ne monte pas plus haut que t . On remarque dans la figure 3.2 que, puisque le biais est appliqué dans la direction \vec{e}_1 , une coupe du potentiel $R \leq t$ se traduit dans une coupe perpendiculaire à l'axe du biais. Ainsi, $H(t)$ représente les sommets dans la figure qui sont accessibles par la racine, mais qui ne s'aventurent pas trop vers la gauche. Il est évident que lorsque que t

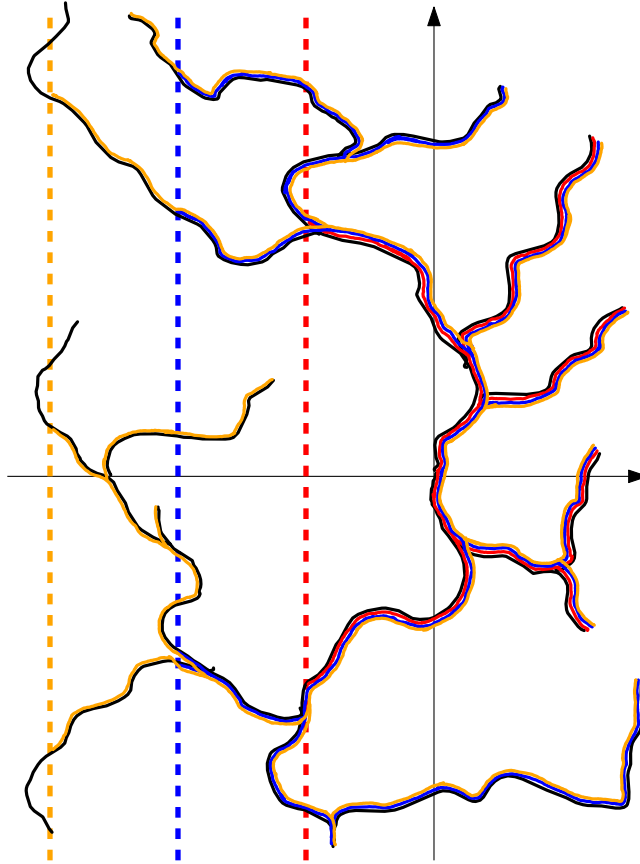


Fig. 3.2. Dans cet exemple simple, on illustre 3 pièges $H(t_1)$, $H(t_2)$ et $H(t_3)$ avec des seuils de plus en plus grand.

augmente, la profondeur de l'ensemble construit $d_{H(t)}$ augmente aussi. Il suffit d'augmenter

le *backtrack* t jusqu'à obtention de la profondeur voulue C et ainsi prendre le plus petit backtrack nous donnant exactement une profondeur de C

$$t_C := \inf\{t > 0 \mid d_{H(t)} \geq C\} \quad (3.2.4)$$

de façon à ce que $H(t_C)$ est la plus petite zone qui entoure la racine et offre une profondeur $d_{H(t_C)} \geq C$. On termine en définissant b comme étant le sommet avec le plus petit potentiel R parmi $H(t_C)$ ⁴. Comme dans la définition sur \mathbb{Z} , si plusieurs sommets ont le plus petit potentiel, nous prendrons celui qui est le plus près de la racine. Ainsi, le piège $H(t_C)$ est un ensemble de sommets autour de la racine dans lequel la marche, si elle est au point le plus bas b , s'opposera à une profondeur de potentiel d'au moins C . Pour tester notre généralisation des pièges, il est utile de voir si notre nouvelle définition correspond à l'ancienne. En appliquant cette définition au modèle de la marche biaisée sur \mathbb{Z} , nous obtenons sensiblement le même ensemble, à défaut de couper le côté le plus haut de la vallée, mais celui-ci ne comptait pas dans le calcul de la profondeur.

Pour notre généralisation des pièges, il est maintenant temps de définir quel seuil de profondeur nous voulons. Rappelons-nous l'échelle des modèles passés. Pour la marche biaisée sur \mathbb{Z} étudiée par Zeitouni, l'échelle était de $(\log n)^2$ pour la marche X sur \mathbb{Z} et le potentiel R avait un échelle $\log n$ de par sa limite brownienne. Pour la marche biaisée sur la trace de la marche aléatoire simple de Croydon, la diffusion de l'environnement sous-jacent faisait que l'échelle de la marche X était plutôt de $\log n$ et l'échelle du potentiel R défini sur les points de coupure était encore de $\log n$. Dans notre modèle simplifié de marche biaisée sur un K -squelette, puisque l'environnement sous-jacent n'est que l'assemblage d'un nombre fini de K segments unidimensionnels, l'échelle est de nouveau $(\log n)^2$. En combinant ceci et l'hypothèse brownienne qui va suivre dans la section 3.3, l'échelle du potentiel R est encore de $\log n$. C'est pourquoi nous allons considérer la suite de pièges $\{H_n := H(t_n)\}_{n \geq 1}$ qui ont été construits de la manière introduite ci-dessus avec les seuils $\log n$. De plus, nous appellerons $\{b_n\}_{n \geq 1}$ les sommets désignés comme les points les plus bas du potentiel R . Notons aussi qu'il est facile avec notre définition de changer le seuil $\log n$ des pièges pour plutôt avoir un seuil de $(1 \pm \delta) \log n$ et ainsi obtenir de nouveaux pièges $\{H_{(1 \pm \delta) \log n}\}_{n \geq 1}$ dont les sommets les plus profonds sont notés par $\{b_{\pm \delta, n}\}_{n \geq 1}$. Ces versions plus ou moins profondes des pièges seront utiles dans la généralisation des hypothèses que nous allons voir dans la section 3.3. Pour conclure la généralisation des pièges, de façon similaire aux pièges initiaux $(a_{\delta, n}, b_{\delta, n}, c_{\delta, n})$ où nous savions que les sommets $\{a_{\delta, n}, c_{\delta, n}\}$ représentaient les bords, nous voulons aussi connaître les sommets qui bordent chaque piège $H_{(1 \pm \delta) \log n}$. Pour ce faire, nous identifions

$$\{a_{\delta, n}^{(i)}\}_{1 \leq i \leq k}$$

⁴Ceci correspond au sommet le plus à la droite dans la figure 3.2

comme les sommets de potentiels maximums dans $H_{(1+\delta)\log n}$. De par sa nature d'arbre et

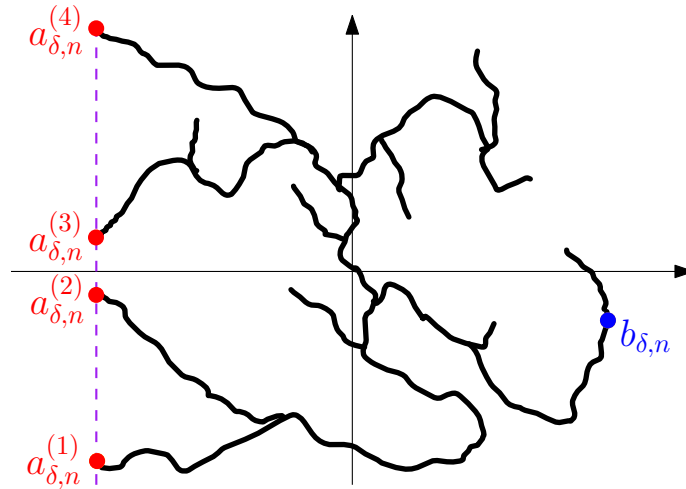


Fig. 3.3. Dans cet exemple simple, le piège a $k = 4$ sommets limitrophes.

puisque \mathcal{T}^K n'a que K bras, on ne peut avoir que $k \leq K$ sommets limitrophes. Avec cette notation en main, nous serons capable d'encadrer la marche à l'intérieur du piège dans la preuve à venir.

3.3. Hypothèses et résultats intermédiaires

Comme avec Zeitouni et Croydon, un des premiers ingrédients nécessaires à l'élaboration de leur résultat de localisation a été la convergence du potentiel R vers un mouvement brownien. Pour notre marche aléatoire biaisée sur un K -squelette, ce ne sera pas différent. Dans le cadre de cette maîtrise, nous allons nous permettre d'émettre l'hypothèse du potentiel brownien et se limiter à un résultat conditionnel. Éventuellement, il faudra montrer que dans le vrai modèle de la marche branchante l'hypothèse est vérifiée. Ainsi, nous allons seulement faire l'hypothèse suivante que le potentiel R de notre K -squelette converge vers un mouvement brownien

Hypothèse 1 (Potentiel Brownien). Soit une K -squelette \mathcal{T}^K avec un potentiel R défini sur ses sommets. En prenant n'importe quel des K bras, le potentiel R a un comportement brownien sur ce bras.

Cette hypothèse pourra être revue ou corrigée dans le futur, mais nous la faisons pour simplifier la poursuite de ce mémoire. Toutefois, à défaut d'avoir une preuve pour cette hypothèse, nous pouvons discuter des raisons qui nous poussent à la faire. D'abord, pour un K -squelette \mathcal{T}^K , plus le nombre de segments/bras K est grand, plus ces bras sont longs. Aussi, le potentiel sur ses longs bras provient d'une somme de variables qui tendent à être

i.i.d. en hautes dimensions. Ainsi, les bras de l'arbre ressemblent au modèle unidimensionnel \mathbb{Z} et on peut se convaincre que sur les longs bras de \mathcal{T}^K , le potentiel devrait se comporter approximativement comme dans le résultat 2.3.2 et tendre vers une limite brownienne. C'est pourquoi nous voulons faire l'hypothèse que le potentiel R est brownien sur chaque bras du K -squelette.

Comme avec Croydon, nous aimerions mettre en évidence certaines propriétés qui sont asymptotiquement vraies afin de nous aider dans la preuve. Pour le modèle de la marche biaisée sur la trace de la marche aléatoire simple, nous avons les propriétés (1)-(5) sur un sous-ensemble $A(n, W, \delta) \subseteq \Omega$ des environnements:

- (1) $b_n = b_{\delta, n}$,
- (2) n'importe quel raffinement (a, b, c) de $(a_{\delta, n}, b_{\delta, n}, c_{\delta, n})$ avec $b \neq b_n$ a une profondeur $d_{(a, b, c)} < (1 - \delta) \log(n)$,
- (3) $\min_{m \in [a_{\delta, n}, c_{\delta, n}] \setminus [b_n - \delta(\log n)^2, b_n + \delta(\log n)^2]} (R_m - R_{b_n}) > \delta^3 \log n$,
- (4) $|a_{\delta, n}| + |c_{\delta, n}| \leq W(\log n)^2$,
- (5) $\sup_{|m| \leq W(\log n)^2 + 1} \left[\log(T_{m+1} - T_m) + \log \beta \sup_{T_m \leq k \leq T_{m+1}} |C_m^{(1)} - S_k^{(1)}| \right] \leq \delta^4 \log n$

où δ était petit et W suffisamment grand. Grâce à la convergence du potentiel R vers un mouvement brownien, Croydon était capable de montrer que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{W \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}[A(n, W, \delta)] = 1.$$

Pour notre modèle simplifié de la marche biaisée sur un K -squelette, nous avons qu'à généraliser les 4 premières pour obtenir de nouvelles propriétés qui seront utiles dans la preuve à venir. En utilisant la nouvelle définition de piège et la distance à l'intérieur d'un graphe, nous définissons les propriétés (1)-(4) suivantes sur un sous-ensemble $A(n, W, \delta) \subseteq \Omega$:

- (1) $b_{\log n} = b_{(1+\delta) \log n}$
- (2) n'importe quel sous-piège $H(t) \subset H_{(1+\delta) \log n}$ avec $b_t \neq b_{\log n}$ a une profondeur $d_{H(t)} < (1 - \delta) \log n$,
- (3) $\min_{u \in H_{(1+\delta) \log n}, u \notin \mathcal{B}(b_{\log n}, \delta(\log n)^2)} (R_u - R_{b_{\log n}}) > \delta^3 \log n$,
- (4) la distance maximale entre deux sommets de $H_{(1+\delta) \log n}$ est $\leq W(\log n)^2$

avec δ petit et W suffisamment grand et où $\mathcal{B}(x, r)$ est la boule incluant les sommets à une distance r de x . Il nous incombe maintenant de montrer que ces 4 propriétés sont asymptotiquement vraies. Pour y arriver, la solution sera de décortiquer le K -squelette en K bras distincts et ainsi voir K segments d'une marche aléatoire simple dans \mathbb{Z}^d . Puisqu'on sait que les propriétés (1)-(4) sont asymptotiquement vraies sur le potentiel d'une marche

aléatoire simple dans \mathbb{Z}^d , une simple borne d'union sur les K bras nous assure que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{W \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}[A(n, W, \delta)] = 1.$$

Ainsi, nous pouvons nous restreindre aux K -squelettes de $A(n, W, \delta)$ satisfaisant les propriétés (1)-(4).

Une fois toutes ces hypothèses énoncées, il faut maintenant se tourner sur les résultats intermédiaires qui seront nécessaires à la preuve du résultat de localisation 3.1.1. Ces lemmes vont confirmer nos idées générales sur le comportement de la marche biaisée X sur le K -squelette \mathcal{T}^K . D'abord, comme avec Croydon, nous avons l'idée que la marche va rapidement descendre au point le plus bas du potentiel. Ensuite nous voulons aussi une assurance que la marche ne va pas dépasser les sommets limitrophes avec une trop grande probabilité. Puisque nous n'avons pas à gérer le comportement de la marche X entre les points de coupure, nous pouvons utiliser deux lemmes légèrement plus simples que ceux de Croydon, mais qui sont essentiellement les mêmes. Ainsi, nous voulons le lemme suivant:

Lemme 3.3.1. *Fixons un biais $\beta > 1$ et une dimension $d > 8$. Pour δ petit et $W \in (0, \infty)$, il existe un entier $n_0(W, \delta)$ tel que: si $n \geq n_0(W, \delta)$, alors sur $A(n, W, \delta)$, la marche biaisée X sur \mathcal{T}^K satisfait*

$$P_0^{\mathcal{T}^K} [X \text{ atteint } b_{\log n} \text{ avant le temps } n] \geq 1 - n^{-\delta/4} \quad (3.3.1)$$

et aussi

$$P_{b_{\log n}}^{\mathcal{T}^K} \left[\sup_{m \leq n} d(X_m, 0) \leq W(\log n)^2 \right] \geq 1 - n^{-\delta/3} \quad (3.3.2)$$

DÉMONSTRATION. Dans cette preuve, nous allons utiliser la même logique que Croydon tout en apportant des modifications aux techniques pour accommoder notre nouvel environnement. Comme dans la preuve de Croydon, pour obtenir (3.3.1), nous allons d'abord montrer que la marche biaisée atteint les sommets limitrophes $\{a_{\delta, n}^{(i)}\}_{1 \leq i \leq k}$ du piège $H_{(1+\delta)\log n}$ avant $b_{\log n}$ avec peu de probabilité

$$P_O^{\mathcal{T}^K} [X \text{ atteint n'importe quel } \{a_{\delta, n}^{(i)}\} \text{ avant } b_{\log n}] \leq n^{-\delta^2}.$$

Pour y arriver, il est pratique de voir l'évènement d'intérêt comme une réunion et y appliquer une simple borne d'union

$$\begin{aligned}
P_O^{\mathcal{T}^K} \left[X \text{ atteint n'importe quel } \{a_{\delta,n}^{(i)}\} \text{ avant } b_{\log n} \right] &= P_O^{\mathcal{T}^K} \left[\bigcup_{i=1}^k \left(X \text{ atteint } a_{\delta,n}^{(i)} \text{ avant } b_{\log n} \right) \right] \\
&\leq \sum_{i=1}^k P_O^{\mathcal{T}^K} \left[X \text{ atteint } a_{\delta,n}^{(i)} \text{ avant } b_{\log n} \right] \\
&\leq \sum_{i=1}^k \frac{R_{eff}(0, b_{\log n})}{R_{eff}(a_{\delta,n}^{(i)}, b_{\log n})} \\
&\leq \sum_{i=1}^k \frac{\sum_{0=v_1, \dots, v_j, \dots, v_n=b_{\log n}} r(v_j, v_{j+1})}{\sum_{a_{\delta,n}^{(i)}=v_1, \dots, v_j, \dots, v_n=b_{\log n}} r(v_j, v_{j+1})}
\end{aligned}$$

où la troisième ligne utilise la formule de probabilité d'atteinte (1.3.7). C'est à cet endroit que notre démarche diffère de celle de Croydon car nous pouvons utiliser la relation entre le potentiel et la résistance $r(v_j, v_{j+1}) = e^{R_{v_j}}$ pour obtenir que

$$\begin{aligned}
P_O^{\mathcal{T}^K} \left[X \text{ atteint n'importe quel } \{a_{\delta,n}^{(i)}\} \text{ avant } b_{\log n} \right] &\leq \sum_{i=1}^k \frac{\sum_{0=v_1, \dots, v_j, \dots, v_n=b_{\log n}} e^{R_{v_j}}}{\sum_{a_{\delta,n}^{(i)}=v_1, \dots, v_j, \dots, v_n=b_{\log n}} e^{R_{v_j}}} \\
&\leq \sum_{i=1}^k \frac{d(0, b_{\log n}) \sup_{0=v_1, \dots, v_j, \dots, v_n=b_{\log n}} e^{R_{v_j}}}{e^{R_{a_{\delta,n}^{(i)}}}} \\
&= \sum_{i=1}^k d(0, b_{\log n}) e^{\sup_{0=v_1, \dots, v_j, \dots, v_n=b_{\log n}} R_{v_j} - R_{a_{\delta,n}^{(i)}}} \\
&\leq W(\log n)^2 k n^{-\delta} \\
&\leq n^{-\delta/2}
\end{aligned}$$

avec un δ suffisamment petit et $n \geq n_0(W, \delta)$. Ensuite, en définissant $T_{a_{\delta,n}, b_{\log n}}$ comme le temps moyen que prend X pour atteindre $\{a_{\delta,n}^{(i)}\}_{0 \leq i \leq k, b_{\log n}}$, nous allons montrer la borne

$$E_0^{\mathcal{T}^K} \left[T_{a_{\delta,n}, b_{\log n}} \right] \leq n^{1-\delta/2}.$$

Croydon réussit à obtenir cette majoration à travers une technique tirée de [10] qui ne s'adapte malheureusement pas à notre K -squelette. Heureusement, nous avons trouvé une méthode alternative d'y arriver avec une formule (1.3.8) tirée des réseaux électriques. En effet, en posant un courant unitaire i sortant de la racine et un voltage 0 à la racine, nous

avons la formule

$$\begin{aligned}
E_0^{\mathcal{T}^K} [T_{a_{\delta,n}, b_{\log n}}] &= \sum_{u \in V(\mathcal{T}^K)} \pi(u) v(u) \\
&= \sum_{u \in V(\mathcal{T}^K)} \pi(u) (v(u) - v(0)) \\
&= \sum_{u \in V(\mathcal{T}^K)} \pi(u) i(0, u) R_{eff}(0, u) \\
&\leq \sum_{u \in V(\mathcal{T}^K)} \pi(u) \sum_{0=v_1, \dots, v_j, \dots, v_n=u} e^{R_{v_j}}
\end{aligned}$$

où la troisième égalité découle de la loi d'Ohm (1.3.2) et la première inégalité est due au fait que le courant unitaire sortant de 0 est toujours inférieur ou égal à 1 en d'autres endroits. Nous obtenons la borne sur le temps moyen en découpant l'ensemble des sommets $u \in V(\mathcal{T}^K)$ en K bras et en exprimant $\pi(u)$ comme la somme des conductances avoisinantes de u et en la bornant par $\pi(u) = \sum_{v \sim u} c(u, v) \leq K \max_{v \sim u} c(u, v)$. On obtient alors la borne

$$\begin{aligned}
E_0^{\mathcal{T}^K} [T_{a_{\delta,n}, b_{\log n}}] &\leq \sum_{k \leq K} \sum_{u \in k^{\text{ème}} \text{ bras}} K \max_{v \sim u} c(u, v) \sum_{0=v_1, \dots, v_j, \dots, v_n=u} e^{R_{v_j}} \\
&\leq K^2 \sum_{u \in k^{\text{ème}} \text{ bras}} e^{\max_{v \sim u} -R_v} \sum_{0=v_1, \dots, v_j, \dots, v_n=u} e^{R_{v_j}} \\
&\leq K^2 \sum_{u \in k^{\text{ème}} \text{ bras}} \sum_{0=v_1, \dots, v_j, \dots, v_n=u} e^{\max_{v \sim u} R_{v_j} - R_v} \\
&\leq K^2 (W(\log n)^2)^2 n^{1-\delta} \\
&\leq n^{1-\delta/2}
\end{aligned}$$

avec un δ suffisamment petit et $n \geq n_0(W, \delta)$. Avec ces deux bornes, nous pouvons obtenir

$$\begin{aligned}
P_0^{\mathcal{T}^K} [X \text{ n'atteint pas } b_{\log n} \text{ avant le temps } n] &\leq P_0^{\mathcal{T}^K} [X \text{ atteint } \{a_{\delta,n}^{(i)}\} \text{ avant } b_{\log n}] \\
&\quad + P_0^{\mathcal{T}^K} [X \text{ n'atteint pas } \{\{a_{\delta,n}^{(i)}\}, b_{\log n}\} \text{ avant } n] \\
&\leq n^{-\delta/2} + \frac{n^{1-\delta/2}}{n} \\
&\leq n^{-\delta/4}
\end{aligned}$$

avec un δ suffisamment petit et $n \geq n_0(W, \delta)$, ce qui donne (3.3.1).

Pour obtenir (3.3.2), il suffit d'appliquer une version de la logique de Croydon qui s'adapte à notre environnement ayant K bras. On trouve d'abord que pour n'importe quels

sommets voisins de $b_{\log n}$, appelons les $\{\tilde{v}_i | \tilde{v}_i \sim b_{\log n}\}$, on a que

$$\begin{aligned}
P_{\tilde{v}_j}^{\mathcal{T}^K} \left[X \text{ atteint n'importe quel } \{a_{\delta,n}^{(i)}\} \text{ avant } b_{\log n} \right] &\leq \sum_{i=1}^k P_{\tilde{v}_j}^{\mathcal{T}^K} \left[X \text{ atteint } a_{\delta,n}^{(i)} \text{ avant } b_{\log n} \right] \\
&= \sum_{i=1}^k \frac{r(\tilde{v}_j, b_{\log n})}{R_{eff}(a_{\delta,n}^{(i)}, b_{\log n})} \\
&= \sum_{i=1}^k \frac{e^{R_{\tilde{v}_j}}}{R_{eff}(a_{\delta,n}^{(i)}, b_{\log n})} \\
&\leq \sum_{i=1}^k e^{R_{\tilde{v}_j} - R_{a_{\delta,n}^{(i)}}} \\
&\leq Kn^{-(1+\delta)} \\
&\leq n^{-(1+\delta/2)}
\end{aligned}$$

Cette borne découle du ratio des résistances tiré des réseaux électriques, du fait qu'il y a au plus k sommets limitrophes et de la propriété (2). En conditionnant sur le premier pas sortant de $b_{\log n}$, nous avons aussi que

$$P_{b_{\log n}}^{\mathcal{T}^K} \left[X \text{ atteint n'importe quel } \{a_{\delta,n}^{(i)}\} \text{ avant } b_{\log n} \right] \leq n^{-(1+\delta/2)}.$$

En utilisant le même argument géométrique de Croydon, on borne inférieurement la probabilité voulue par un scénario simple où la marche retourne au moins n fois au point $b_{\log n}$ avant d'atteindre les sommets limitrophes pour obtenir

$$\begin{aligned}
P_{b_{\log n}}^{\mathcal{T}^K} \left[\sup_{m \leq n} d(X_m, 0) \leq W(\log n)^2 \right] \\
&\geq P_{b_{\log n}}^{\mathcal{T}^K} \left[X \text{ retourne à } b_{\log n} \text{ au moins } n \text{ fois avant d'atteindre n'importe quel } \{a_{\delta,n}^{(i)}\} \right] \\
&= (1 - n^{-(1+\delta/2)})^n \\
&\geq 1 - n^{-\delta/3}
\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

avec un δ suffisamment petit et $n \geq n_0(W, \delta)$, ce qui nous donne (3.3.2). □

3.4. Preuve de notre résultat simplifié

Avec les hypothèses nécessaires formulées et les lemmes intermédiaires prouvés, il est maintenant temps de s'attaquer à la preuve de notre résultat de localisation simplifié de la marche biaisée sur un K -squelette. Rappelons-nous que nous voulons prouver le théorème 3.1.1:

Théorème 3.1.1 (Résultat de localisation sur le K -squelette). Fixons un biais $\beta > 1$ et une dimension $d > 8$. Si $X = (X_n)_{n \geq 0}$ est une marche aléatoire β -biaisée sur le K -squelette \mathcal{T}^K dans \mathbb{Z}^d , alors il existe des variables aléatoires $(L_n)_{n \geq 1}$ qui sont \mathcal{T}^K -mesurables et qui prennent des valeurs dans \mathbb{Z}^d telles que

$$\mathcal{P}_0 \left[\left| \frac{X_n}{(\log(n))^2} - L_n \right| > \epsilon \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

pour n'importe quel $\epsilon > 0$ où la valeur absolue mesure la distance intrinsèque à \mathcal{T}^K .

Encore une fois, la stratégie de la preuve sera similaire à celle de Croydon sauf que nous n'allons pas gérer le comportement de la marche entre les points de coupure car nous sommes dans un modèle simplifié où tous nos points sont des points de coupure. En ce sens, la fin de la preuve va aussi s'inspirer de la stratégie utilisée dans le résultat de localisation de la marche biaisée sur \mathbb{Z} de Zeitouni qu'on peut trouver dans [10].

DÉMONSTRATION. Pour un $\epsilon > 0$, prenons $\delta < \epsilon/2$. Définissons d'abord les v.a. \mathcal{T}^K -mesurables

$$L_n := \frac{b_{\log n}}{(\log n)^2}$$

qui sont les points les plus bas du potentiel R qui ont été normalisés par l'échelle $(\log n)^2$ de la marche X . Rappelons-nous encore que nous désirons obtenir le résultat pour la probabilité recuite \mathcal{P}_0 [...]. Pour ce faire, nous allons plutôt borner certains éléments à l'aide de la loi trempée $P_0^{\mathcal{T}^K}$ [...] qui nous permettra d'utiliser de l'information donnée par l'environnement \mathcal{T}^K . L'idée de la preuve va être encore d'utiliser le fait que la marche X devrait descendre en $b_{\log n}$ avant le temps n et ensuite y rester suffisamment longtemps. Pour le reste de la preuve, nous allons assumer que les propriétés (1)-(4) de $A(n, W, \delta)$ tiennent avec un δ choisi suffisamment petit et $n \geq n_0(W, \delta)$.

On utilise d'abord le lemme 3.3.1 pour nous assurer que la marche biaisée X a le temps de se rendre en $b_{\log n}$ avant n . Ce qui nous permet de recommencer la marche à partir de ce dernier et obtenir

$$\begin{aligned}
P_0^{\mathcal{T}^K} \left[\left| \frac{X_n}{(\log n)^2} - L_n \right| > \delta \right] &\leq P_0^{\mathcal{T}^K} [X \text{ n'atteint pas } b_{\log n} \text{ avant le temps } n] \\
&\quad + \max_{t \leq n} P_{b_{\log n}}^{\mathcal{T}^K} \left[\left| \frac{X_t}{(\log n)^2} - L_n \right| > \delta \right] \\
&\leq n^{-\delta/4} + \max_{t \leq n} P_{b_{\log n}}^{\mathcal{T}^K} \left[\left| \frac{X_t}{(\log n)^2} - L_n \right| > \delta \right]
\end{aligned}$$

où $\max_{t \leq n}$ a été ajouté, car nous ignorons le temps pris par X pour atteindre le bas. On utilise ensuite le lemme 3.3.2 pour déduire la borne

$$P_{b_{\log n}}^{\mathcal{T}^K} [X \text{ atteint n'importe quel } \{a_{\delta,n}^{(i)}\} \text{ avant le temps } n] \leq n^{-\delta/3}$$

qui nous assure que X ne devrait pas s'aventurer trop loin. En ajoutant cette information, nous obtenons que

$$P_0^{\mathcal{T}^K} \left[\left| \frac{X_n}{(\log n)^2} - L_n \right| > \delta \right] \leq n^{-\delta/4} + n^{-\delta/3} + \max_{t \leq n} P_{b_{\log n}}^{\mathcal{T}^K} \left[\left| \frac{\bar{X}_t}{(\log n)^2} - L_n \right| > \delta \right],$$

où nous avons remplacé la marche X par une version emprisonnée dans le piège $H_{(1+\delta)\log n}$ que nous nommons \bar{X} . C'est-à-dire, pour le reste de la preuve, nous substituerons X par une nouvelle marche biaisée \bar{X} qui a le même comportement que X , mais qui est réfléchie lorsqu'elle atteint n'importe quel des sommets limitrophes $\{a_{\delta,n}^{(i)}\}_{i \leq k}$. L'avantage de faire cette substitution est que \bar{X} progresse sur environnement plus facile à manipuler. Le prochain argument utilise la mesure invariante $\bar{\mu}$ de \bar{X} . On définit d'abord le ratio

$$f(z) := \frac{\bar{\mu}(z)}{\bar{\mu}(b_{\log n})}$$

pour les sommets $z \in V(H_{(1+\delta)\log n})$. Nous avons encore l'inégalité

$$\mathbb{1}_{b_{\log n}}(z) \leq f(z) := \frac{\bar{\mu}(\{z\})}{\bar{\mu}(b_{\log n})}.$$

En utilisant $\bar{P}_{H_{(1+\delta)\log n}}$ pour dénoter la matrice de transition de \bar{X} dans le piège et le fait que $\bar{\mu}\bar{P}_{H_{(1+\delta)\log n}} = \bar{\mu}$, nous pouvons avoir que

$$P_{b_{\log n}}^{\mathcal{T}^K} [\bar{X}_t = z] = \left(\mathbb{1}_{b_{\log n}} \bar{P}_{H_{(1+\delta)\log n}}^t \right) (z) \leq \left(f \bar{P}_{H_{(1+\delta)\log n}}^t \right) (z) \leq f(z).$$

En utilisant la propriété

$$(3) \quad \min_{u \in H_{(1+\delta)\log n}, u \notin \mathcal{B}(b_{\log n}, \delta(\log n)^2)} (R_u - R_{b_{\log n}}) > \delta^3 \log n$$

nous pouvons obtenir la borne

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{\bar{\mu}(z)}{\bar{\mu}(b_{\log n})} \\
&= \frac{\sum_{y \sim z} c(z,y)}{\sum_{u \sim b_{\log n}} c(b_{\log n},u)} \\
&\leq \frac{K \max_{y \sim z} c(z,y)}{c(b_{\log n},u^*)} \\
&= \frac{K \max_{y \sim z} e^{-R_y}}{e^{-R_{b_{\log n}}}} \\
&= K \max_{y \sim z} e^{-(R_y - R_{b_{\log n}})} \\
&\leq K e^{-\delta^3 \log n} \\
&\leq K n^{-\delta^3}
\end{aligned}$$

pour n'importe quel sommet z concerné par la propriété (3) et où u^* est un voisin quelconque de b . Ainsi, on peut borner la probabilité que \bar{X} visite les sommets à plus de $\delta(\log n)^2$ du fond par

$$P_{b_{\log n}}^{\mathcal{T}^K} [\bar{X}_t = z] \leq f(z) \leq K n^{-\delta^3}.$$

Quand vient le temps d'estimer le nombre de sommets concernés par cette borne, nous pouvons être généreux et compter K bras de longueur maximale donnée par (4) et borner la quantité par $KW(\log n)^2$ pour obtenir

$$\begin{aligned}
P_0^{\mathcal{T}^K} \left[\left| \frac{X_n}{(\log n)^2} - L_n \right| > \delta \right] &\leq n^{-\delta/4} + n^{-\delta/3} + \max_{t \leq n} P_{b_{\log n}}^{\mathcal{T}^K} \left[\left| \frac{\bar{X}_t}{(\log n)^2} - L_n \right| > \delta \right] \\
&\leq n^{-\delta/4} + n^{-\delta/3} + K^2 W(\log n)^2 n^{-\delta^3}.
\end{aligned}$$

En intégrant sur tous les environnements possibles de $A(n,W,\delta)$ qui est asymptotiquement presque sûr, nous obtenons le résultat de localisation de la marche biaisée sur les K -squelette. \square

3.5. Conclusion et les étapes à venir

En somme, nous avons vu dans ce mémoire comment généraliser le résultat de localisation de Croydon au cas simplifié de la marche aléatoire biaisée sur un K -squelette. Il est important de se rappeler que ce résultat est conditionnel à l'**hypothèse 1** selon laquelle le potentiel converge vers un mouvement brownien le long de tous les bras du K -squelette. Il serait nécessaire de revenir sur cette hypothèse et la démontrer en s'inspirant possiblement

des techniques utilisées par Croydon dans le lemme 2.3.1.

Une fois cette hypothèse confirmée, il serait naturel d'essayer ensuite de généraliser le résultat de localisation au modèle de la marche biaisée sur la trace d'une marche aléatoire branchante. En effet, rappelons-nous que le K -squelette avait été choisi comme la meilleure approximation que nous avons des marches aléatoires branchantes. Pour obtenir le résultat de localisation sur la marche aléatoire branchante, il faudrait travailler à comprendre le comportement de la marche biaisée lorsqu'elle se trouve entre deux points de coupures consécutifs. En s'inspirant encore de Croydon, on pourrait alors revoir sa preuve et l'adapter pour ce nouvel environnement.

Pour conclure, il serait intéressant de regarder des modèles de MAMA de plus en plus complexes. Comme discuté au début du chapitre 3, il est courant de construire en complexité et d'attaquer le prochain modèle sur la *liste*. La question devient alors: quels seraient les prochains modèles de MAMA sur lesquels nous pourrions développer encore plus nos techniques? Selon la suite qui a déjà été établie pour les modèles de marche aléatoire simple, les prochains modèles d'environnement seraient les *lattice trees* ainsi que les modèles de *percolation orientée et non orientée critique*. C'est peu dire qu'il reste beaucoup de travail à faire avant de bien comprendre la merveilleuse branche des MAMA.

Références bibliographiques

- [1] Romain ABRAHAM et Jean-François DELMAS : An introduction to galton-watson trees and their local limits. *arXiv preprint arXiv:1506.05571*, 2015.
- [2] Gérard Ben AROUS, Manuel CABEZAS et Alexander FRIBERGH : Scaling limit for the ant in a simple labyrinth. *arXiv preprint arXiv:1609.03980*, 2016.
- [3] Mustansir BARMA et Deepak DHAR : Directed diffusion in a percolation network. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, 16(8):1451, 1983.
- [4] LV BOGACHEV : Random walks in random environments. *arXiv preprint arXiv:0707.3160*, 2007.
- [5] David CROYDON : Slow movement of a random walk on the range of a random walk in the presence of an external field, 2012.
- [6] David A CROYDON : Random walk on the range of random walk. *Journal of Statistical Physics*, 136(2): 349–372, 2009.
- [7] Harry KESTEN : Subdiffusive behavior of random walk on a random cluster. In *Annales de l'IHP Probabilités et statistiques*, volume 22, pages 425–487, 1986.
- [8] Gregory F LAWLER : A self-avoiding random walk. *Duke Mathematical Journal*, 47(3):655–693, 1980.
- [9] Russell LYONS et Yuval PERES : *Probability on trees and networks*, volume 42. Cambridge University Press, 2017.
- [10] Simon TAVARÉ et Ofer ZEITOUNI : *Lectures on probability theory and statistics: Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XXXI-2001*. Springer, 2004.