Université de Montréal

Analyse praxéologique des pratiques des enseignants et de leur utilisation des ressources pour l'enseignement de la dérivée : une étude de cas dans l'enseignement secondaire général au Cameroun

Par

Casimir Jojo Nseanpa

Département de didactique des mathématiques

Faculté des sciences de l'éducation

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures en vue de l'obtention du grade de Philosophiae Doctor (Ph.D.) en sciences de l'éducation, option didactique des mathématiques

Novembre, 2021

Université de Montréal

Unité académique : Département de didactique, Faculté des sciences de l'éducation

---

Cette thèse intitulée

Analyse praxéologique des pratiques des enseignants et de leur utilisation des ressources pour l'enseignement de la dérivée : une étude de cas dans l'enseignement secondaire général au Cameroun

Par

Casimir Jojo Nseanpa

A été évaluée par un jury composé des personnes suivantes

Sarah Dufour

Présidente-rapporteur

Alejandro S. González-Martín

Directeur de recherche

Mireille Saboya Mandico

Membre du jury

Nadia Hardy

Examinatrice externe

Serge J. Larivée

Représentant de la doyenne de la Faculté des sciences de l'éducation

Résumé

La dérivée est un concept important dans les cours de calcul. Dans certains pays comme au Canada et en France, il est enseigné au niveau collégial tandis qu'en Afrique et en particulier au Cameroun, on l'enseigne au niveau secondaire car la dérivée intervient dans l'étude des variations d'une fonction. Cette thèse dont le titre est : **Analyse praxéologique des pratiques des enseignants et de leur utilisation de ressources pour l'enseignement de la dérivée. Une étude de cas dans l'enseignement secondaire général au Cameroun** part du constat selon lequel de nombreux élèves et étudiants rencontrent des difficultés avec la notion de dérivée et que ces difficultés s'observent dans leurs résultats scolaires et académiques. Au vu de l'importance de la dérivée pour les différents parcours universitaires en sciences, nous nous intéressons aux pratiques des enseignants de mathématiques et notamment leurs praxéologies didactiques autour de la dérivée mais aussi, nous voulons comprendre les raisons qui justifient les choix faits par ces enseignants. La recherche essaie de répondre à la question de savoir ***quelles sont les pratiques des enseignants et les ressources utilisées par ces derniers pour l'enseignement de la dérivée?*** La recherche se propose ainsi d'identifier les praxéologies que les enseignants développent dans leur utilisation des ressources pour préparer leurs leçons et pour enseigner la dérivée. Nous ne nous limitons pas aux praxéologies observables mais nous aimerons comprendre les raisons qui justifient les choix opérés par ces enseignants et les contraintes institutionnelles auxquelles ils font face. Deux cadres théoriques encadrent cette recherche : la Théorie Anthropologique de la Didactique (TAD) qui nous permet d'analyser les types de tâches, les techniques, les technologies et les théories justifiant les technologies employées dans les ressources des enseignants et dans leurs pratiques enseignantes. De même, nous utilisons l'Approche Documentaire du Didactique (ADD) afin d'analyser les ressources institutionnelles et les autres ressources que les enseignants utilisent pour enseigner la dérivée. Pour analyser l'utilisation des ressources des enseignants, nous mettons un accent sur les objectifs et les sous-objectifs visés, les règles d'action, les invariants opératoires et les inférences éventuelles. Sur le plan méthodologique, nous utilisons une étude de cas impliquant trois enseignants qui enseignent la dérivée aux élèves de première. Nous utilisons des entretiens semi-dirigés afin d'analyser les choix que font les enseignants lors de la préparation des cours mais et surtout les raisons qui justifient ces choix; les observations vidéo-filmées permettent de savoir comment les enseignants introduisent la dérivée en un point et sur un intervalle et l'analyse des documents tels que les programmes de mathématiques, les manuels scolaires et d'autres ressources des enseignants employés dans la préparation des cours. Le principal résultat de cette thèse est l'identification du poids des ressources institutionnelles et de l'examen de fin d'année sur les praxéologies mathématiques et sur la manière dont les enseignants utilisent ces ressources. Nous discutons de ce résultat en tenant compte du rapport personnel des enseignants et des praxéologies développées dans les manuels et lors de l'enseignement.

Mots-clés : Pratiques enseignantes, praxéologies, ressources, dérivée, tangente, taux de variation, fonction dérivée.

Abstract

Derivatives are one of the most important topics studied in high school (in many countries) and postsecondary mathematics. Many students must learn this topic to pursue their university studies and as a gateway to learn other mathematical topics in various other fields. In Cameroon, secondary teaching lasts from 12 to 18 years old. In this context, what in other countries is considered as pre-university courses, or college, in Cameroon is still called secondary. Derivatives are introduced in the last but one year of this cycle, called *première* (students are 17), after the topics of function, limit, and continuity. In this thesis, we examined teachers' practices and their use of resources while teaching derivatives. This study in general secondary education in Cameroon starts from the observation that many pupils and students encounter difficulties with the notion of derivative and that these difficulties are observed in their academic results. The research attempts to identify the tasks, techniques and technologies developed in the resources used by these teachers. It also tries to describe the patterns of use of resources by closely observing the objectives pursued, the rules of action and the operational invariants put in place when using resources. We do not limit ourselves to describing the practices of teachers, but we would like to understand the reasons that justify their choices and the institutional constraints they face. Since we are interested in teachers' practices and their use of resources to teach derivatives, we use elements of the anthropological theory of the didactic (ATD) to analyze the types of tasks, the techniques, technologies, and theories justifying the technologies used in teachers' resources and teaching practices. By using DA, we understand that teachers, to prepare their teaching, use variety of resources. These resources aiming to teach this content together with the schemes of use of these resources result in a document and these schemes of use of resources is influenced by the teacher's own personal relationship. The participants in this study were three teachers who teach derivatives to first-class students. We use semi-structured interviews to analyse the choices teachers make when preparing courses, but above all the reasons that justify these choices and video to observe how teachers introduce the derivative. The video shows how teachers introduce the derivative at a point and on an interval. Others analyses helps us understanding how this content is introduced on math programs, textbooks and other teacher resources used in the preparation of courses. The main result of this

thesis is the identification of the weight of institutional resources and the end-of-year examination on mathematical praxeology's and on the way, teachers use these resources. We discuss this result considering the personal relationship of teachers and the praxeology's developed in textbooks and during teaching.
Keywords: Teaching practices, praxeology's, resources, derivative, tangent, rate of change, derivative function.

Table des matières

Liste des tableaux

Liste des figures

Liste des sigles

AM : Droite qui passe par les points A et M

CÉGEP : Collège d'enseignement général et professionnel
ENS : École Normale Supérieure

INS : Institut national de la statistique

MEES : Ministère de l'éducation et de l'enseignement supérieur
MINESEC: Ministère de l'Enseignement secondaire du Cameroun

OBC : Office du baccalauréat du Cameroun

OCDE : Organisation de Coopération et de Développement Économique

RI : Rapport institutionnel

TAD : Théorie anthropologique du didactique

ADD : Approche Documentaire du Didactique

ONU : Organisation des Nations Unies

Dédicace

À mes parents,

Pour leur exemple de persévérance et de résilience.

Remerciements

Nombreux sont ceux qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de cette thèse de doctorat.

Nous remercions tout d'abord le Professeur Alejandro S. González-Martín qui a accepté de diriger cette thèse et qui nous a accompagné par ses précieux conseils. Nous lui sommes entièrement reconnaissant.

Nous exprimons notre profonde gratitude à l'équipe professorale de la Faculté des sciences de l'éducation de l'Université de Montréal pour les enseignements théoriques et méthodologiques.

Aussi, nous tenons à remercier les enseignants de mathématiques qui ont participé à cette recherche. Merci d'avoir accepté de partager le fruit de leur travail et leurs nombreuses connaissances avec la communauté scientifique.

Nous remercions nos collègues Mathilde et Gisela pour leurs critiques et leurs commentaires constructifs lors des différents séminaires au laboratoire.

Nous remercions les membres du jury qui ont accepté d'apporter leur éclairage au devis de recherche et qui participent à l'évaluation de cette thèse et dont les éclairages contribueront à améliorer son contenu et sa portée scientifique.

Merci aussi à ma conjointe Clarisse, à mes enfants Larissa, Christian et Paule et à mes amis qui nous ont encouragé et soutenu tout au long de mes études. Sans votre oreille très attentive, votre patience et votre tolérance, il nous aurait été difficile d'aller au bout de ce projet.

Introduction

La présente recherche fait partie des réflexions personnelles que nous avons développées dans le cadre de l'exercice de nos fonctions d'enseignant de mathématiques au secondaire au Cameroun (élèves de 12-18 ans). Après cinq ans de pratique d'enseignement, nous constations que les élèves de nos établissements scolaires publics et privés échouaient en masse aux évaluations en mathématiques. Lors des différents conseils d'enseignement et même pendant des rencontres informelles entre enseignants, les raisons évoquées pour justifier ces échecs se concentraient sur l'encadrement familial qui était défaillant, comme si le fait pour un parent de s'acquitter de ses obligations au sujet de la scolarisation de son enfant suffisait pour favoriser la réussite de ce dernier en mathématiques.

Nous étions conscients que les résultats de nos élèves ne pouvaient pas à eux seuls expliquer toutes leurs difficultés en mathématiques. Ce qui avait alors jusqu'ici nourrit notre pensée c'était le fait que nous avions conscience que l'apprentissage des mathématiques n'était pas une tâche aisée car de nombreux élèves sont en souffrance parce qu'ils n'obtiennent pas de bonnes notes, ou parce qu'ils n'aiment pas les mathématiques et ils développent une certaine peur vis–à–vis des mathématiques, ou simplement parce qu'ils ne comprennent pas du tout ce qui leur est enseigné. Notre hypothèse était que plusieurs raisons pouvaient justifier ces échecs importants en mathématiques parmi lesquelles les parents, les élèves eux-mêmes, l'école, les enseignants ou les mathématiques en tant que discipline scientifique.

Notre première incursion dans la recherche nous avait alors permis de poser le problème des déterminants de la réussite en mathématiques (Nseanpa, 2013). La problématique consistait à répondre à la question de savoir quels sont les déterminants de la réussite des élèves en mathématiques? Les caractéristiques individuelles de l'élève, l'environnement familial, les caractéristiques de l'enseignant et l'environnement scolaires sont parmi plusieurs autres facteurs ceux qui permettent d'étudier la réussite des élèves. Nous avons analysé en particulier les caractéristiques individuelles des élèves et l'environnement familial. Les résultats nous ont permis de constater que les parents offraient certaines facilités à leurs enfants à la maison, en aidant eux-mêmes les enfants pour ceux dont le niveau scolaire le permettait ou en sollicitant l'aide d'un enseignant à domicile. Ainsi, la présence de certaines facilités matérielles au sein de la famille peut aider à expliquer la réussite scolaire et les recherches s'accordent sur le fait que la possession de divers matériels (bureau, ordinateur, dictionnaire…) a un lien positif et significatif au rendement scolaire (OCDE, 2001). Les performances en mathématiques dépendent en grande mesure des caractéristiques propres aux élèves et à leur famille (Mourji & Abbaia, 2013). Cependant, pour le cas de cette recherche, toutes ces formes d'intervention ne garantissaient pas nécessairement la réussite de ces enfants en mathématiques. Le rôle des enseignants selon les données d'entretiens a émergé comme un facteur déterminant de la réussite des élèves à travers la manière de mener les activités d'apprentissage mais également dans les stratégies visant à encourager les élèves dans l'apprentissage des mathématiques.

Ces résultats nous ont orienté vers les pratiques des enseignants et pour une deuxième incursion en recherche, nous avons étudié les pratiques évaluatives des enseignants de mathématiques au Cameroun qui se sont avérées être orientées vers la notation sans une intention implicite de remédier aux difficultés observées lors de la correction (Nseanpa, 2015). De ce point de vue, il nous a semblé que bien que les enseignants représentent un facteur important dans la réussite ou l'échec des élèves en mathématiques ils ne pouvaient en être les seuls car les enseignants reçoivent une formation qui les prépare à l'enseignement et une fois parvenus sur le terrain professionnel, ils reçoivent également les instructions ministérielles et la documentation nécessaire pour exécuter pleinement leurs missions. Pour nous, il a semblé nécessaire de regarder certes du côté des enseignants mais aussi du côté des institutions qui déterminent les ressources des enseignants, c'est cette motivation qui nourrit la présente recherche.

Cette recherche qui porte sur les pratiques des enseignants de mathématique et leur utilisation des ressources pour préparer les cours et enseigner la dérivée est une étude de cas qui se déroule dans un contexte où la dérivée est enseignée aux élèves de 17-18 ans. Elle ne porte pas sur les difficultés d'apprentissage des élèves, ni sur la manière dont les élèves apprennent la dérivée, mais elle tente particulièrement de porter un regard praxéologique sur le travail de l'enseignant de mathématiques hors de la salle de classe et aussi dans la salle de classe lorsqu'il est question d'enseigner la dérivée. La principale préoccupation est l'analyse des pratiques des enseignants dans la préparation des cours, l'utilisation des ressources et l'enseignement de la dérivée en un point et sur un intervalle. Le problème est celui des conditions dans lesquelles les enseignants parviennent à élaborer des documents pour l'enseignement du concept de dérivée, comment ils enseignent et selon quelles organisations praxéologiques et comment les documents produits permettent d'améliorer le travail d'enseignement.

Depuis des nombreuses années, l'explication des différents mécanismes d'acquisition des connaissances mathématiques chez les élèves dans le domaine de la didactique des mathématiques s'est faite à partir de nombreuses théories explicatives telles que la théorie des situations didactiques de Brousseau ou même la théorie anthropologique du didactique de Chevallard. Ainsi on a vu émerger des travaux sur la manière dont les élèves accèdent aux connaissances liées au calcul. En particulier, certaines recherches ont montré les difficultés qu'éprouvent les élèves et les étudiants en calcul (Ferrini-Mundy & Graham, 1994). Au niveau secondaire, des études ont mis en évidence la manière dont les élèves apprennent le taux de variation, la dérivée (Park, 2012; Tyne, 2014) et les limites (Barbé et al., 2005). Les difficultés des élèves à propos de la dérivée sont ainsi identifiées par la recherche et notamment le lien entre le taux de variation et la dérivée d'une part, mais également la représentation graphique de la fonction dérivée d'autres parts. Les causes de ces difficultés ont été clairement précisées et on peut noter, entre autres, la compréhension insuffisante qu'ont les élèves de la notion de fonction, de limite, du quotient différentiel et de la proportionnalité (Orton, 1983). Aussi, les travaux sur les pratiques enseignantes en général ont retenu l'attention des chercheurs car le rôle de l'enseignant s'est révélé être l'un des premiers déterminants scolaires de l'apprentissage et de la réussite des élèves (Gauthier & Dembélé, 2004). En didactique des mathématiques, la famille et les caractéristiques individuelles des élèves ont été également identifiés comme des déterminants importants de la réussite en mathématiques (Mourji & Abbaia, 2013). Pour ces mêmes auteurs, l'expérience professionnelle de l'enseignant, mesurée par l'ancienneté a un effet positif assez significatif sur le rendement scolaire des élèves en mathématiques. La formation initiale et la formation professionnelle ont été aussi corrélées à la réussite en mathématique. Par exemple, aux États-Unis, certains auteurs relèvent que la formation initiale a un effet très faible sur les résultats des élèves (Harris & Sass, 2011; Rivkin et al., 2005) tandis que dans les pays africains, les études menées dans le cadre du Programme d'analyse des systèmes éducatifs (PASEC) ont montré que la formation initiale avait souvent peu d'effet, constatant que les enseignants qui ont suivi une formation initiale n'avait pas plus d'effet sur la réussite des élèves que les enseignants non formés (Bernard et al., 2004). Au sujet de l'enseignement de la dérivée et également en ce qui concerne les activités de préparation des cours sur la dérivée, la recherche en didactique des mathématiques ne donne pas assez d'éléments. Pourtant, selon certains auteurs, la notion de dérivée est très importante et même difficile pour les élèves/ étudiants et même pour certains enseignants (Biza et al., 2006; Castela, 1995).

De nombreuses réformes observées dans les systèmes éducatifs visent à rendre ces systèmes éducatifs plus performants. Ces réformes s'accompagnent de la production des manuels de mathématiques qui avec les programmes scolaires constituent les deux principales ressources officielles des enseignants. Selon certains auteurs, ces manuels scolaires façonnent la manière dont les enseignants du post-secondaire enseignent (González-Martín, 2015). Notre objectif dans cette thèse était d'analyser les pratiques des enseignants et leur utilisation des ressources dans la préparation et dans l'enseignement de la dérivée au niveau secondaire. La question qui a guidé notre travail a été celle de savoir quelles sont les pratiques ~~praxéologies~~ observables dans les pratiques des enseignants de mathématique et dans leur utilisation des ressources pour l'enseignement de la dérivée ? L'accès à ces pratiques devait passer par une analyse institutionnelle des programmes d'enseignement, des manuels scolaires validés par le ministère et soumis au choix des différents conseils d'établissement, et de toutes les autres ressources utilisées par les enseignants. Par ressources, nous entendons quelque chose qui vient « re-sourcer », nourrir de nouveau et différemment (Adler, 2010) le travail de l'enseignant, ceci comprend aussi les ressources matérielles évoquées généralement en éducation. Cette définition ne limite pas la ressource à un objet matériel mais soulève aussi la question des différents usages qui sont faits d'une ressource sans oublier les raisons qui justifient ces usages. Adler (2010) distingue les ressources humaines (enseignant, ses connaissances) des ressources matérielles (technologie, tableau noir, logiciel, manuels scolaires, concepts, théorèmes) et les ressources culturelles (langage, temps). Interagir avec les programmes officiels, les manuels scolaires ou bien échanger avec un collègue sont d'autres formes de ressources de l'enseignant. Pour avoir accès au travail de l'enseignant dans sa globalité, il nous a fallu faire le lien entre le travail de l'enseignant en dehors de la classe et celui qui est fait en classe. La théorie anthropologique du didactique (TAD) nous a permis de comprendre et d'expliquer le travail de l'enseignant, elle a aussi permis de décrire le rapport personnel de l'enseignant à la dérivée tout en caractérisant le rapport des institutions à la dérivée. L'approche documentaire du didactique (ADD) (Adler, 2010; Gueudet & Trouche, 2010b) quant à elle a permis de comprendre comment les enseignants interagissent avec les différentes ressources d'enseignement. Ces deux approches ont été éprouvées dans certaines recherches et nous ont permis d'analyser et d'expliquer le travail des trois enseignants retenus pour cette étude. Pour atteindre cet objectif, nous avons inscrit cette recherche dans un paradigme qualitatif/interprétatif et en particulier, nous avons adopté la démarche de l'étude des cas multiples. Pour satisfaire les objectifs de cette thèse nous avons structuré ce travail en cinq chapitres que nous résumons ci-dessous.

Le premier chapitre de cette thèse est organisé en trois parties. D'abord, nous apportons des éléments sur l'importance de la dérivée sur le plan scolaire et social, nous abordons les enjeux de l'apprentissage de la dérivée par la suite. Ensuite, nous évoquons les principaux aspects historiques et épistémologiques de la notion de dérivée afin d'identifier les principaux obstacles liés à l'apprentissage de la dérivée. Nous effectuons également une brève recension des écrits sur les difficultés d'apprentissage et d'enseignement de la dérivée. Les principales études que nous avons répertoriées sur les difficultés nous ont permis de comprendre et d'expliquer certaines pratiques d'enseignement de la notion de dérivée. Puis nous avons identifié et présenté quelques principaux résultats portant sur les ressources et leurs utilisations dans les écoles secondaires et aussi en milieu universitaire. Nous avons achevé ce premier chapitre en justifiant de la pertinence scientifique et sociale de notre recherche.

Le deuxième chapitre de la thèse présente le cadre théorique à partir duquel nous avons précisé nos questions spécifiques et nos objectifs de recherche. Nous avons fait le choix de jumeler la théorie anthropologique du didactique (TAD) et l'approche documentaire du didactique (ADD). Nous faisons une description détaillée des deux cadres théoriques choisis pour cette étude. Nous débutons par la théorie anthropologique du didactique sur laquelle nous portons un regard essentiel sur les notions de rapport institutionnel, rapport personnel, praxéologies didactiques et mathématiques qui permettent d'analyser le rapport institutionnel à la notion de dérivée et les pratiques des enseignants en classe. Ensuite, nous présentons l'approche documentaire du didactique afin d'identifier comment les enseignants interagissent avec les ressources et quelles sont les raisons qui justifient ces interactions. Nous relevons particulièrement le lien entre les deux approches théoriques pour aborder le problème qui est le nôtre.

Dans le troisième chapitre de la thèse organisé en quatre parties, nous justifions nos choix méthodologiques, nous apportons des éclairages sur les instruments et les outils de collecte et d'analyse des données puis nous terminons le chapitre par les limites observées sur le plan méthodologique. Nous avons analysé le rapport institutionnel à la dérivée d'une part, le travail documentaire des enseignants, leur rapport personnel à la dérivée et leurs pratiques d'autres parts. Comme il s'agit d'une recherche qualitative, nous avons utilisé l'analyse documentaire, les observations vidéo filmées et les entretiens pour une meilleure triangulation des résultats. Les méthodes d'analyse combinées incluant l'usage de la technologie au départ, rapidement abandonné au profit de l'analyse papier nous ont permis de procéder par codage successif pour aboutir à des données pertinentes pour répondre à nos questions de recherche.

Le chapitre quatre comprend l'analyse des données et l'interprétation des résultats. Nous commençons par l'analyse des programmes et des manuels scolaires. Dans ces analyses nous identifions les pratiques présentes, la manière dont les auteurs des manuels introduisent la dérivée en un point et comment se fait la transition de la dérivée en un point à la dérivée sur un intervalle. Nous poursuivons en analysant le travail documentaire des enseignants, nous mettons un accent sur les ressources utilisées, la manière de les utiliser et les liens entre le rapport personnel des enseignants et leur utilisation des ressources et les contraintes dont font face les enseignants. Enfin, nous analysons les pratiques d'enseignement des enseignants pour élargir les liens entre le choix des ressources et les pratiques effectives d'enseignement de la dérivée en classe.

Nous concluons la thèse par le chapitre cinq dans lequel nous revenons sur les principaux résultats de la recherche, de ce fait nous apportons les principales réponses à nos questions de recherche, ensuite nous discutons nos résultats en référence aux études présentées dans le chapitre un de la problématique, du cadre théorique et de notre démarche méthodologique. Nous terminons nos discussions par les limites de la recherche et les pistes de recherche.

Chapitre 1 – Problématique de la recherche

Pour certains auteurs, comprendre la notion de dérivée passe par la maitrise des notions de fonction, de quotient différentiel, de limite et de dérivée vue comme fonction (Park, 2015, 2016; Zandieh, 1997, 2000). En particulier, Zandieh (2000) constate que la maitrise d'une de ces notions de manière singulière par les élèves ne laisse pas observer une compréhension effective de ce qu'est la dérivée. Il s'avère donc que la compréhension de toutes ces notions est nécessaire pour asseoir une compréhension complète de la notion de dérivée. Inversement, on peut considérer que la non-maitrise d'une de ces notions peut être une source des difficultés pour apprendre la dérivée. Le sujet en jeu ici a besoin d'être justifié sur le plan scientifique. La problématique qui constitue le fondement du questionnement scientifique devrait permettre de structurer la démarche et d'orienter les objectifs à atteindre. Dans ce chapitre, nous présentons l'importance de la dérivée dans la société, les enjeux de son apprentissage et les principaux résultats de recherche qui portent sur les difficultés d'apprentissage et d'enseignement de la dérivée. Cette présentation nous mènera à cibler les raisons sociales et scientifiques d'une telle recherche à l'issu desquelles nous présenterons notre question de recherche.

1.1- Importance de la dérivée

Dans leurs différents parcours, les élèves étudient plusieurs notions inscrites à leur programme d'étude. Dans ces différents apprentissages, ils acquièrent des connaissances au niveau des processus mathématiques, des applications des concepts et aussi au niveau du développement des compétences conceptuelles. En guise d'exemple, les élèves du secondaire doivent : (1) étudier les fonctions, (2) résoudre graphiquement des équations, (3) tracer les représentations graphiques des fonctions de base comme la fonction quadratique dont une équation algébrique est $y = x^2$, ou la fonction affine dont son équation algébrique est $y = ax + b$ ou encore la fonction cubique dont une équation est $y = x^3$et (4) tracer des fonctions plus complexes comme la fonction irrationnelle ou encore la fonction valeur absolue. Lorsqu'il est parfois question de tracer les représentations graphiques des fonctions de base comme la fonction quadratique, l'utilisation d'un tableau de valeurs permet de donner une allure assez précise de la courbe tandis que s'il est question de tracer les fonctions plus complexes, le tableau de valeurs ne permet pas toujours d'avoir assez d'informations sur le comportement de la fonction. L'utilisation de la fonction dérivée peut permettre d'étudier de manière générale une telle fonction et d'avoir des informations sur son comportement local (par exemple l'équation de la tangente en un point), ses extrémums et son sens de variation. Puisque la définition de la notion de dérivée d'une fonction fait intervenir les notions de fonction, de taux de variation et de limite, l'apprentissage de la dérivée s'avère plus intéressant au vu des nombreuses difficultés qu'entraineront les autres concepts connexes.

1.1.1-Importance de la dérivée sur le plan scolaire

La notion de dérivée occupe une place de choix dans le parcours scolaire et universitaire de nombreux élèves et étudiants dans de nombreux pays. Dans certains pays, notamment ceux de l'Afrique francophone dont le système d'éducation est similaire à celui de la France, la dérivée est implicitement introduite pour la première fois sans toutefois indiquer qu'il s'agit de la dérivée dans la classe de seconde (16 ans) avec l'introduction de la notion de taux de variation dans les cours portant sur les fonctions. Pendant les deux dernières années du secondaire (17-18 ans), ce qui serait semblable aux années du cégep au Québec (17-19 ans), la notion de dérivée est introduite explicitement à ces élèves et la notion de limite qui a été étudiée précédemment constitue un marche-pied pour l'apprentissage de cette notion. Cet enseignement prépare les élèves à d'autres cours universitaires tels que le calcul différentiel et intégral. La place de la dérivée dans ces cours la situe au cœur des autres notions mathématiques. En effet, dans les cours du secondaire, l'étude de la dérivabilité et le calcul de la fonction dérivée sont nécessaires pour l'étude des fonctions et le calcul intégral, notamment la recherche des primitives et les différents calculs d'aires et des volumes des surfaces simples.

Au Québec, le calcul différentiel constitue un préalable pour de nombreux programmes universitaires. Par exemple, à l'Université de Montréal, le fait d'avoir réussi un cours de calcul différentiel et intégral serait un préalable pour de nombreux programmes en sciences et en technologies tels que l'enseignement des mathématiques au secondaire, les soins infirmiers, la médecine dentaire et vétérinaire, etc.[1] De même, ce cours est présent et occupe une place de choix dans de nombreux programmes du cégep au Québec (MEES, 2017a, 2017b, 2017c, 2017d, 2017e). Il y a plusieurs années, l'on observait dans les programmes en sciences des cégeps au

[1] http://safire.umontreal.ca/fileadmin/Documents/FAS/SAFIRE/Documents/PrealablesUdeMetPoly.pdf

Québec des taux d'échec ou d'abandon particulièrement élevés. Parmi les disciplines enseignées dans ce programme, le cours de calcul différentiel est celui dans lequel on avait le taux d'échec et d'abandon le plus élevé (MÉQ, 1999)[2]. Ces observations demeurent d'actualité car on note qu'au Québec, et notamment au niveau des cégeps, les résultats obtenus par les étudiants en calcul différentiel sont de manière générale inférieurs aux résultats moyens de l'ensemble du collège[3] (Tcheuffa, 2015). Allant dans le même sens, certains auteurs considèrent que même si le taux de décrochage au secondaire a diminué, et malgré la légère amélioration observée vers la fin du dernier siècle, le taux de réussite moyen dans les cours de calcul différentiel de 1993 à 2000 est de 52,5%. Ce qui laisse observer que le cours de calcul différentiel est le plus difficile au niveau collégial et il contribue à l'augmentation du nombre d'étudiants qui décrochent (Hitt & Dufour, 2021). En Ontario et aux États-Unis (étudiants de 16 à 18 ans), le concept de dérivée est enseigné dans des cours préuniversitaires en 12e année. Cette situation ne semble donc pas unique au Québec car aux États-Unis aussi, on estime en moyenne à 20% le taux d'échec dans les cours de calcul différentiel (Apkarian et al., 2017), de même que 12,5% des étudiants inscrits préalablement dans les programmes en sciences, technologie, ingénierie et mathématiques se sentent obligés de changer de voie à cause du cours de calcul (Rasmussen & Ellis, 2013, p. 459).

Au vu du nombre élevé d'élèves et étudiants à travers le monde qui ont au moins un cours de calcul inscrit dans leur cheminement que ce soit au niveau secondaire ou universitaire, la recherche sur l'apprentissage, l'enseignement et la compréhension du calcul peut avoir une influence importante (Rasmussen et al., 2014) sur l'amélioration des apprentissages des étudiants et le travail des enseignants. Le fait d'avoir une bonne compréhension des fonctions et de la dérivée est un atout pour la poursuite des études universitaires en mathématiques ou dans d'autres domaines scientifiques et techniques. L'apprentissage de la dérivée au secondaire prépare les élèves pour les cours de mathématiques avancées à l'université. Cependant, l'importance de la notion de dérivée ne s'observe pas seulement dans les cours de mathématiques. C'est une notion qui joue un rôle important dans d'autres disciplines comme la physique, l'ingénierie, l'économie, la chimie et la biologie (Jones, 2017).

[2] Ceci est l'ancienne appellation du Ministère de l'éducation du Québec (MEQ).

[3] Le terme collège désigne les établissements scolaires qui offrent des enseignements post-secondaires au Québec.

1.1.2- Importance de la dérivée sur le plan social

La résolution des problèmes de modélisation moyennant la dérivée fait partie des compétences attendues des élèves inscrits dans les parcours sciences et technologies. Sur le plan scientifique, les chercheurs et les mathématiciens peuvent également utiliser les concepts, les notions et les outils mathématiques qu'offre la dérivée pour présenter et expliquer certains phénomènes sociaux. Étant donné que la dérivée permet d'analyser et d'étudier les variations aussi infimes qu'elles soient entre les variables d'une situation donnée, ses applications touchent plusieurs domaines de la société. Ces applications de la dérivée préparent également les élèves à une meilleure insertion dans de nombreux champs professionnels comme en économie, en biologie, en ingénierie et en actuariat. La dérivée est enseignée dans les programmes universitaires autres que les mathématiques pures. Les futurs enseignants, les ingénieurs, les médecins, les économistes, les scientifiques et les mathématiciens doivent apprendre et comprendre les concepts et les techniques liés au calcul et le fait de suivre un cours de calcul est souvent considéré comme le summum de la réussite intellectuelle des élèves et des parents (Rasmussen et al., 2014). Le cours de calcul serait un tremplin pour les étudiants car il les aide à comprendre les notions mathématiques que l'on retrouve dans les problèmes dans d'autres disciplines connexes. En économie, le bénéfice d'une entreprise peut être modélisé par la fonction $B(t)$ et la dérivée $B'(t)$ permet ainsi de savoir à quel moment l'entreprise a obtenu son bénéfice le plus élevé ou le plus bas. Ici le bénéfice le plus élevé correspond sur le graphe de la fonction $B(t)$ au maximum atteint par ce graphe.

Elle peut servir aussi pour une entreprise à trouver la quantité de produits qu'elle doit produire pour maximiser ses gains. Dans le domaine de la physique, la dérivée a joué un rôle dans l'étude d'un objet en mouvement à travers sa vitesse. On note par exemple une contribution importante de Newton en physique dans le développement du calcul différentiel en mathématiques. En biologie, l'étude de la croissance d'une population des bactéries fait intervenir le concept de dérivée, de même, en chimie lorsqu'il s'agit d'étudier la vitesse de réaction dans un dosage ou en neurophysiologie, lorsqu'il s'agit de l'étude de la vitesse de propagation de l'influx nerveux, on fait encore appel au concept de dérivée. Les applications sont nombreuses et certaines tirent leurs sources dans les origines du calcul différentiel. Comme nous le verrons plus tard, c'est dans le but de trouver les solutions à certains problèmes auxquels les humains étaient confrontés dans l'histoire de l'humanité que la notion de calcul différentiel a vu le jour. C'est ce qui semble justifier le foisonnement de ces applications. Il est aussi important de relever que certains problèmes auxquels sont confrontés de nos jours les élèves, les étudiants et même certains enseignants ont émergé depuis cette période. Une des façons de mieux saisir les difficultés d'apprentissage de la dérivée serait de questionner les principaux problèmes historiques et épistémologiques liés à son émergence et qui lui ont donné sens.

1.2-Aspects historiques et épistémologiques de l'émergence de la notion de dérivée

Certaines questions pour lesquelles les savants grecs pouvaient exprimer leurs savoirs n'ont pas eu des réponses jusqu'au début du XVIIe siècle. En particulier, notons que la notion de dérivée n'en faisait pas partie ou mieux, elle pouvait exister mais pas de manière explicite. Ce sont certains problèmes géométriques de la Grèce Antique qui vont certainement conduire les mathématiciens de l'histoire vers la découverte du calcul différentiel. La découverte du calcul différentiel et intégral ne remonte qu'au XVIIe siècle, pourtant les problèmes pour lesquels on y a été conduit remontent quant à eux aux premières années de la géométrie grecque (Lacroix, 1908).

1.2.1- Prémisses de la découverte de la dérivée

Le calcul est apparu comme un moyen pour résoudre un ensemble de problèmes auxquels étaient confrontés les grecs (Kline, 1972). La détermination de la vitesse et de l'accélération d'un mobile, la détermination des tangentes aux courbes, les problèmes de recherche des maximums et des minimum et enfin le calcul de la longueur d'une courbe sont les principaux problèmes auxquels étaient confrontés les grecs (Schneider-Gillot, 1988, p. 153). Fermat est celui qui a fait une contribution significative au problème de la détermination des tangentes (Popp & Bruckheimer, 1978)[4] et qui sera finalement à l'origine du calcul infinitésimal. Le problème de l'infini, notamment la question de l'existence du mouvement constitue le

[4] « Whereas the origins of the integral go back to Greek times, there is really no ancient evidence of the differential calculus. The first significant contribution to the tangent problem was made by the Frenchman Pierre de Fermat (1601-1665)» Popp, W., & Bruckheimer, M. (1978). *History of mathematics topics for schools*. Open University Press. [4]

premier niveau de la contribution grecque à l'histoire du calcul différentiel (Irem-de-basse-Normandie, 1999)[5]. Les pythagoriciens considéraient que le temps et l'espace étaient constitués des parties indivisibles (Collette, 1973). Pour cela, une droite serait un ensemble de points, les surfaces et les volumes seraient également constitués de parties indivisibles (Ross, 2001). Cependant, Anaxagore et ses disciples considéraient la matière, l'espace et même le temps divisible à l'infini. Une interprétation des paradoxes de la dichotomie, d'Achille et la tortue et de la flèche dont l'idée était de nier l'existence du mouvement constituent pour ce qui deviendra la dérivée la mise en cause du langage comme moyen pour exprimer le mouvement (Bkouche, 2000), car lorsque la dérivée s'exprime en terme de processus ou de barrière infranchissable, on peut comprendre les principales difficultés que rencontrent les élèves avec les notions d'infini et de limite qui sont indispensables pour l'apprentissage du calcul différentiel. Aristote quant à lui considère l'existence de deux types d'infini : un infini potentiel ou en puissance qui suppose que l'infini n'existe pas dans la réalité et l'autre infini qui est actuel et qui existe dans les faits (Ross, 2001). C'est donc dire que les questions liées à l'infini potentiel et actuel n'étaient pas inconnues des Grecs (Kidron & Tall, 2015), ce qui explique leur méfiance face aux raisonnements impliquants l'infini et en particulier le mouvement (Charbonneau, 1987b). Malgré ces difficultés avec l'infini, les Grecs l'ont accepté de manière implicite dans certains de leurs travaux. La méthode d'exhaustion fut employée par Archimède dans ses travaux sur la quadrature des segments et sera également plus tard à l'origine du calcul différentiel et intégral (Collette, 1973).

Les principaux obstacles reliés à la notion de limite ont été identifiés (Sierpinska, 1985) : l'obstacle lié à l'infini (Horror Infiniti), l'obstacle lié à la fonction, l'obstacle lié aux représentations géométriques, logiques et symboliques. L'infini potentiel correspond à un mouvement continu qui ne s'arrêtera jamais tandis que l'infini réel renvoie à un mouvement qui était potentiel à un moment mais qui prend fin (Weller et al., 2004, p. 744). L' obstacle qui est présent ici repose sur le fait qu'une limite peut être atteinte ou pas (Schneider, 1992). La notion d'infini qui est nécessaire à la compréhension de la limite peut constituer une difficulté importante pour les apprenants aussi brillants en mathématiques (Montes et al., 2014). Les

[5] Bernard Parzysz : Le mouvement dans la géométrie grecque, APMEP numéro 437 pp.745-762

questions liées à la détermination des tangentes n'ont pas été couramment abordées par les géomètres Grecs. D'une part, la définition proposée par les géomètres était assez restrictive et peu propice aux généralisations (Baumann, 2004). Euclide définissait une tangente au cercle comme *« une droite, qui touche ce cercle, et qui étant prolongée ne le recoupe pas ».* Cette définition est vraie pour un cercle et des coniques mais pas pour des spirales car la tangente coupe la spirale en plusieurs points. Parallèlement, l'étude des tangentes chez les Grecs était limitée à quelques courbes simples et aucune idée d'infiniment petit ne pouvait y être perçue (Irem-de-basse-Normandie, 1999). Elle ne fonctionnait que pour les cercles et les coniques mais pas pour les tangentes à une spirale car celles-ci recoupent la spirale en plusieurs points. Les travaux d'Apollonius de Perge (vers 262 av. J. -C. à environ 180 av. J. -C.) et de Roberval (1602-1675) se situent pour l'un dans la ligne des travaux des anciens Grecs c'est-à-dire une droite touchant en un point et qui ne traverse pas la courbe tandis que pour l'autre le mouvement était ce qui caractérise la tangente, notamment la notion de vitesse qui permet d'introduire la dérivée dans les cours de mathématiques (Gantois & Schneider, 2008; Vivier, 2010, 2013a). Cependant, la définition de la tangente du point de vue cinématique ne fonctionne que pour les courbes pouvant être définies point par point et trouve sa limite pour des courbes non cinématiques (Irem-de-basse-Normandie, 1999). Dans le cours d'analyse, une courbe peut être coupée par ses tangentes et cela constitue un obstacle épistémologique (Biza et al., 2006; Biza et al., 2008; Castela, 1995; Vivier, 2010, 2013a). L'émergence de la géométrie analytique permettra à Descartes d'articuler les techniques anciennes grecques et les techniques algébriques modernes dans le but de proposer une méthode générale de résolution des problèmes géométriques (Maronne, 2007). La méthode de Descartes est limitée car elle ne fonctionne pas avec toutes les courbes notamment celles dont les équations contiennent des puissances impaires (Maronne, 2007) ni celles contenant des radicaux (Boyer, 1949). Fermat (1601–1665) fournit une démarche qui permet de résoudre le problème des maximas et celui de la détermination des tangentes. Malgré le nombre de méthodes de détermination des tangentes, il n'existe pas un lien entre elles, alors on cherche un algorithme général pour donner un sens universel à ces règles (Irem-de-basse-Normandie, 1999).

1.2.2- De Pierre Fermat à la découverte de la dérivée

Fermat fournit les bases du raisonnement infinitésimal qui sera utilisé par Newton et par Leibniz. La première étape de la construction du concept de dérivée est liée à son caractère outil, notamment son utilisation pour résoudre les problèmes comme la détermination du minimum et du maximum et la détermination des tangentes aux courbes. À ce moment, la notion de l'infinitésimal n'était pas évoquée explicitement. Fermat ne put expliquer ce qu'il entendait par le nombre e quand dans ses calculs il divisait « $be \sim 2ae + e^2$ par e » (Irem-de-basse-Normandie, 1999, p. 125) pourtant le passage de a à $a + e$ constitue l'essence même de l'analyse infinitésimale. Fermat a également fourni une démarche qui permet de résoudre le problème des maximas et celui de la détermination des tangentes. Cela va constituer une avancée importante dans le désir de généralisation voulu par les savants. Descartes critique la méthode de Fermat qu'il juge peu explicite. Nous pouvons considérer que la méthode de Fermat n'est pas explicite à cause du statut de la quantité e qui à ce jour est assimilable à une quantité infinitésimale(Gantois, 2012). Même si la méthode de Fermat permet d'obtenir des résultats, elle ne permet pas de définir convenablement une tangente à une courbe, encore moins, elle ne donne pas, contrairement à Descartes, une classe de courbes pour laquelle elle permet de déterminer les tangentes (Vivier, 2010). Rendu à ce niveau, plusieurs méthodes sont développées mais elles sont isolées. En sus, il n'existe pas un lien explicite entre tous ces problèmes alors on cherche un algorithme général pour donner un sens universel à ces règles (Irem-de-basse-Normandie, 1999). Or en l'absence des concepts de fonction et de variable, il était impossible d'envisager le concept de dérivée (Gantois, 2012).

Ce qui manque à la définition de la dérivée c'est une relation fonctionnelle capable de généraliser les algorithmes à toutes les courbes (Charbonneau, 1987a). L'idée de fonction émerge entre 1691 et la fin du XVIIIe siècle et plus précisément en 1673 avec Leibniz (Gantois, 2012; Youschkevitch, 1981). Parlant de fonction, Leibniz utilise l'expression suivante : *« Les quantités géométriques, abscisses, ordonnées, cordes, sous-tangentes… sont fonctions d'une courbe »* (Verley, 1991, p. 30). Intuitivement, une fonction est une relation entre deux quantités qui dépendent l'une de l'autre (Youschkevitch, 1981). Le principal obstacle lié à la fonction est formulé par Euler pour qui une fonction ne peut être définie par plusieurs formules sur des intervalles disjoints. Selon lui, la fonction devrait être définie par une seule formule pourtant, on observe la multiplicité des points de vue associée à la fonction (Chorlay, 2007; Douady, 1986; Sfard, 1991; Vandebrouck, 2011). L'idée de la vitesse qui est une fonction du temps fait qu'une des conceptions dominantes à ce jour associe toute fonction à la variable temporelle, ce qui constitue un obstacle épistémologique (Sierpinska, 1992). Cette multiplicité de points de vue sur les fonctions est à l'origine des difficultés d'apprentissage (Hitt, 1998; Hitt & González-Martín, 2016) et ces difficultés s'érigent plus tard en obstacle dans l'apprentissage de la dérivée.

1.2.3- Leibniz et la découverte de la dérivée

Certains auteurs estiment que les travaux de Newton et de Leibniz ont apporté des réponses concrètes aux problèmes posés depuis l'époque grecque. Ces deux savants proposent une théorie qui permet de faire le lien entre les arguments géométriques connus jusqu'alors et les nouvelles règles de calcul. Ils regroupent toutes les méthodes anciennes autour de deux concepts fondamentaux : l'intégrale et la dérivée puis ils proposent des notations pour faciliter leur travail. Descartes, Fermat et Roberval se partagent la gloire d'avoir résolu, chacun d'une manière différente, un problème qu'aucun géomètre n'avait encore osé aborder dans sa généralité, celui des tangentes aux lignes courbes (…), qui, en effet, était le prélude nécessaire à l'invention du calcul différentiel (Chasles, 1889). Leibniz travaille sur le problème des tangentes et les solutions qu'il obtient reposent sur le triangle caractéristique dont il reconnait l'avoir découvert dans les travaux de Pascal. Cette découverte deviendra le point focal du calcul différentiel leibnizien. À ce propos, Leibniz déclare que la détermination de la tangente à une courbe est fonction du rapport des différences en ordonnées et en abscisses (Collette, 1973). Donc selon Leibniz, la tangente est cette ligne joignant deux points infiniment proches de la courbe, la distance entre ces deux points étant infiniment petite (Boyer, 1949). L'interprétation de Boyer est que Leibniz pensait certainement cette conception dans le sens des limites et comme il a eu de la difficulté à préciser sa pensée sur ce qu'est la différentielle, néanmoins, l'idée de limite était implicite et c'est Cauchy qui donnera une définition précise de la dérivée en se servant de la notion de limite.

Attaché à sa notion de différentielle, Leibniz va détailler dans son ouvrage[6] les règles qui vont permettre de calculer la dérivée d'un produit, du quotient, des fonctions puissances, des racines, et l'une des applications de ces règles sera la recherche des tangentes, des minima, des maxima et aussi la recherche du point d'inflexion (Collette, 1973). Pour déterminer les extrémums d'une fonction, il suffit désormais d'évaluer la différentielle $df = 0$. Ainsi, Leibniz reconnait la puissance de ses formules et affirme à cet effet que sa nouvelle analyse n'est pas comme celle de Descartes qui se limite aux courbes algébriques. La sienne s'applique à toutes les situations données, y compris aux courbes dites mécaniques (Verley, 1991). Les mathématiciens grecs traitaient des nombres et des figures géométriques, désormais, l'étude des mouvements est rendu plus simple, le langage développé permet de décrire, d'analyser et de mieux comprendre les variations (Ross, 2001). Les découvertes de Leibniz ont aussi rendu possible de calculer la dérivée des fonctions logarithmes et exponentielles (Kline, 1972), dans la même foulée, Leibniz s'est efforcé à développer les dérivées successives mais comme le précise Kline (1972), ses efforts furent vain. Il revient aux successeurs de Newton et de Leibniz de rendre ces outils encore plus performants. La dérivée entre ainsi dans sa phase de développement et d'exploration qui sera tenue principalement par Euler (1707-1783) qui donne à la fonction la place qui est la sienne dans le calcul différentiel, Lagrange (1736-1813) qui systématise le calcul des variations, la fonction dérivée et les accroissements finis dont le théorème permet de résoudre plusieurs problèmes mathématiques. Dès le XIXe siècle, la notion d'infiniment petit est remplacée par des quantités finies et Cauchy (1789-1857) permet de clarifier avec précision la notion de limite, et désormais le calcul de la dérivée d'une fonction à partir du taux de variation est possible. Taylor (1685-1731) développe son théorème dans lequel apparaissent les dérivées première, seconde et même d'ordre n, qui facilite la résolution des équations différentielles mais apporte aussi une réponse à la caractérisation des extrema remontant à l'époque grecque (Grabiner, 1983). La découverte du concept de dérivée part, dans la plupart des cas, d'idées de limite déjà connues des élèves, de sorte que la tangente et la vitesse moyenne sont les idées initiales avec lesquelles commencer l'étude des dérivées. L'histoire même des mathématiques indique que le concept de dérivée et de la fonction dérivée sont basés

[6] Ouvrage paru dans *Acta eruditorum*, en 1684, sous le titre de *Nova methodus promaximis et minimis, itemque tangentibus, qua nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus.*

sur les problèmes graphiques depuis leur origine. Ils ont été arithmétisés au XIXe siècle grâce avec les contributions de Cauchy et de Weierstrass, ce qui sert de modèle à l'enseignement et à l'introduction pour les cours de calcul (de Almeida & da Silva, 2018).

Pour conclure cette section, il est intéressant de dire que le statut de la tangente est central dans l'enseignement et l'apprentissage de la dérivée. Lorsqu'on parcourt l'histoire des concepts et notamment celui de la dérivée, on note que le problème des tangentes était une tâche et de nombreux savants ont développé plusieurs techniques de nature géométrique, algébrique et infinitésimale pour résoudre cette tâche (Balhan et al., 2015). La tangente peut aussi être un outil pour résoudre les problèmes ou alors être un objet principal d'étude. En effet et s'agissant de la tangente, sa détermination peut être un but en soi, soit un objectif lié à une étude géométrique, soit éventuellement avec une volonté de modélisation astronomique (Balhan et al., 2015). Dans ce cas, et en se référant aux travaux de Chevallard (1999), on donne à la tangente le statut d'une « *tâche* ». Pour expliquer cette conception, Balhan et al. (2015) s'appuient sur les travaux de Rouy (2007) dans lesquels elle explique comment dans l'évolution du concept de dérivée, Euclide, Apollonius, Fermat, Barrow, Descartes et Roberval ont développé des techniques mathématiques pour résoudre le problème de la détermination des tangentes. Certaines de ces techniques étaient de nature algébrique alors que d'autres étaient de nature géométrique ou même de nature infinitésimale (Balhan et al., 2015), d'ailleurs ces aspects ont été présentés dans la section 1.2 de cette thèse. On note donc que dans ce sens, la tangente est l'objet d'étude en soi. Par ailleurs, la tangente peut aussi être une technique toujours au sens de Chevallard (1999) dans la mesure où elle peut être utilisée pour résoudre une tâche. À cet effet, on peut se rappeler la contribution d'Archimède qui a utilisé la tangente à un arc de parabole pour « quarrer » un « segment » de parabole. À ce jour, d'autres situations exigent l'utilisation de la tangente comme technique pour résoudre certaines tâches comme lorsque la tangente est utilisée pour trouver une approximation affine locale d'une fonction quelconque (Balhan et al., 2015). La tangente est alors une droite sécante à la courbe en deux points qui se rapprochent de plus en plus au point de se confondre (Grabiner, 1983). La technologie est donc ce discours intelligible qui justifie la technique, pris dans ce sens, le calcul différentiel apparait donc comme une technique nouvelle de résolution des problèmes (Balhan et al., 2015). La tangente est aussi une technique didactique, car la dérivée est généralement définie sur la base de la tangente pourtant elle-même sera définie plus loin à l'aide de la dérivée (Rouy, 2007).

1.3- Problématiques liées à l'apprentissage de la notion de dérivée

Dans les sections précédentes, nous avons identifié les éléments qui justifient l'importance de la dérivée sur le plan scolaire et social. Les aspects historiques et épistémologiques nous ont permis d'identifier certaines difficultés liées au concept de dérivée. Dans cette partie, nous nous intéressons aux problèmes didactiques. Les difficultés sont en général associées à d'autres notions comme les fonctions, la limite, le quotient différentiel, et la tangente. Plusieurs chercheurs en didactique des mathématiques ont identifié les principales difficultés et les principaux obstacles liés à l'apprentissage de la dérivée (Aspinwall et al., 1997; Bingolbali et al., 2007; Biza et al., 2006; Biza et al., 2008; Byerley et al., 2012; Castela, 1995; Ferrini-Mundy & Graham, 1994; Nemirovsky & Rubin, 1992; Orton, 1983, 1984; Park, 2012, 2013, 2015; Schneider, 1992; Tall, 1993; Vinner, 1982; Vivier, 2010, 2013a; Zandieh, 1997, 2000). Nous présentons dans ce qui suit une synthèse de ces résultats.

1.3.1-Difficultés en lien avec la notion de fonction

Les difficultés d'apprentissage des fonctions ont été largement explorées par la littérature scientifique (Confrey & Smith, 1994; Douady, 1986; Dreyfus & Eisenberg, 1983; Hitt, 1998; Markovits et al., 1986; O'callaghan, 1998; Oehrtman et al., 2008; Sfard, 1992; Sierpinska, 1992; Thompson, 1994; Thompson & Carlson, 2017; Vandebrouck, 2011; Vinner, 1983; Vinner & Dreyfus, 1989). D'aucuns ont mis en évidence les difficultés à traiter les fonctions constantes et les fonctions définies par intervalle (Markovits et al., 1986). D'autres auteurs ont observé que l'une des conceptions dominantes des élèves est que la fonction est toujours définie par une formule et que de manière générale, toute fonction est linéaire (Vinner, 1983). Plusieurs autres études ont caractérisé l'apprentissage des fonctions à travers leurs différentes représentations (Duval, 1991; Ferrini-Mundy & Graham, 1994; Hitt, 1998; Janvier, 1987; Markovits et al., 1986; Vinner & Dreyfus, 1989).

Vinner (1983) a analysé le *concept-image et le concept-definition* (Tall & Vinner, 1981) de fonction chez 65 élèves de 10^{e} année (16 ans) et 89 élèves de 11^{e} année (17 ans) du secondaire en Israël à travers les manuels utilisés par ces derniers. Tall et Vinner (1981) définissent le *« concept image »* comme toute forme d'images mentales que possède un élève d'une certaine notion mathématique tandis que le *« concept definition »* représente les mots qui sont utilisés pour caractériser un concept. Par exemple, une définition commune de la fonction reprise dans l'étude de Vinner (1983) présente la fonction comme une correspondance entre deux ensembles de telle sorte que chaque élément de l'ensemble de départ puisse avoir exactement un élément associé dans l'ensemble d'arrivée. Ceci représente le *concept-définition*. Par ailleurs, un mot, un graphe ou un symbole peuvent être utilisés par un élève pour illustrer la notion de fonction et cela représente donc le *concept-image.* Sur les 146 élèves qui ont effectivement rempli le questionnaire, Vinner (1983) note dans 57% des cas que les images conceptuelles des élèves au sujet des fonctions ne correspondent pas à la définition que propose le manuel. Les images que se font les élèves des fonctions sont basées sur leurs expériences passées ou présentes. On note également que 14% des élèves associent une fonction à une formule algébrique et dans 7% des cas, les élèves associent la fonction à l'une des images mentales des fonctions, comme son graphe.

Dans le prolongement de cette étude, Vinner et Dreyfus (1989) ont demandé à 271 étudiants et 36 enseignants du secondaire de répondre à un questionnaire qui comportait sept questions dont une qui consistait à donner la définition d'une fonction. Comme dans l'étude précédente, 27% des étudiants associent la fonction à une correspondance. Parmi ceux qui ont donné la bonne définition de la fonction, la moitié s'en est servi pour répondre aux autres questions ce qui montre bien que les étudiants ne se fient pas très souvent aux connaissances qu'ils ont de la définition formelle pour résoudre les questions (Vinner & Dreyfus, 1989). Ce qu'il faut retenir c'est que les étudiants peuvent définir une notion sans être capables d'utiliser cette définition dans la résolution des problèmes. Cela montre bien que les images conceptuelles des élèves priment sur la définition formelle des concepts. Par exemple, certains élèves maitrisent la définition de la dérivée en un point sans être capables de l'utiliser pour déterminer la pente d'une droite.

D’autres perspectives de la notion de fonction existent (Douady, 1986; O'callaghan, 1998; Sfard, 1991, 1992; Sierpinska, 1992; Vandebrouck, 2011). D’une part, les fonctions sont des outils ou des objets (Douady, 1986). En tant qu’outil, elles servent à la résolution des problèmes. En effet, un grand nombre d’élèves voit les fonctions comme une machine de telle sorte qu’à une valeur d’entrée on fait ressortir une autre valeur. Cette conception de la fonction est procédurale donc associée au processus de calcul (Sfard, 1991). Notons que la conception procédurale prépare à la compréhension conceptuelle (Sfard, 1991). Cependant certains élèves ont une connaissance insuffisante de la fonction en tant que processus (Asiala et al., 1997) et le passage de la compréhension processus à la compréhension objet et l’acquisition de cette conception objet impliquent des difficultés liées aux fonctions (O'callaghan, 1998; Sfard, 1992).

Vandebrouck (2011) identifie trois conceptions de la notion de fonction : une conception ponctuelle, c’est-à-dire pour une valeur spécifique de la variable on associe une valeur spécifique de la fonction ; une conception globale où la fonction devient un objet d’étude et enfin la conception locale qui permet l’étude de la fonction point par point. Le calcul de la dérivée en un point appartient à cette troisième conception. Les recherches quant à elles évoquent la difficulté de passer d’une conception ponctuelle ou globale vers une conception locale (Vandebrouck, 2011). Park (2015) considère qu’une fonction peut être définie en un point et sur un intervalle or, le passage de la fonction définie en un point à la fonction définie sur un intervalle n’est pas évident (Monk, 1994). Cette difficulté liée aux fonctions s’observe dans le passage de la dérivée en un point à la dérivée sur un intervalle (Park, 2015). Une étude qui porte sur le concept de dérivée doit donc prendre en compte et distinguer les aspects locaux et globaux de ce concept, à savoir la définition de la dérivée en un point et la définition de la nouvelle fonction, f', la dérivée de la fonction f (de Almeida & da Silva, 2018).

1.3.2-Difficultés en lien avec la notion de covariation et le taux de variation

La notion de covariation est aussi au cœur de l’apprentissage des fonctions et par conséquent de la dérivée (Confrey & Smith, 1994; Hitt & González-Martín, 2016; Thompson, 1994; Thompson & Carlson, 2017). Les fonctions peuvent être comprises entre autres par l’approche de la correspondance ou par l’approche de la covariation. L’approche de la correspondance qui, à une valeur de x associe une valeur unique de y est la plus présente dans les programmes de mathématiques (Confrey et al., 1991). Par ailleurs, les élèves qui manifestent une compréhension intuitive de la variation peuvent l'utiliser pour générer des relations fonctionnelles (Confrey & Smith, 1994). L'approche de la covariation est donc étroitement liée à une compréhension de la fonction du point de vue de la covariation des variables (Confrey & Smith, 1994) et trouve ses fondements dans l'histoire du concept de fonction (Boyer, 1949). Les idées de variation et de covariation sont épistémologiquement nécessaires pour le développement mathématique des élèves et des enseignants qui veulent développer une conception robuste des fonctions (Thompson & Carlson, 2017). Une étude récente a mis en lumière de quelle manière les élèves de 15-18 ans au Québec verbalisaient l'idée de la covariation. L'idée de la covariation concomitante a été abordée dans les travaux de Passaro (2020) alors qu'elle se questionnait sur les composantes du raisonnement déployé par les élèves lors d'un travail sur la covariation comme moyen d'approfondir la compréhension des fonctions et sur les caractéristiques des situations favorisant ce déploiement. Entre autres, elle a relevé que l'étude des accroissements permet un approfondissement du travail sur la covariation qui pourrait notamment favoriser l'introduction de la notion de dérivée. Elle observe qu'un contexte concret provoque nécessairement une verbalisation spontanée de la part des élèves et si l'enseignant peut faire usage d'un questionnement qui sollicite de la part des élèves la mise en relation des accroissements des deux grandeurs, alors les élèves réussiront à dépasser les descriptions intuitives initiales et pourront effectivement verbaliser sur les accroissements. Ainsi, selon elle, le travail sur la covariation pourrait permettre, chez les élèves, la mise en place des liens qualitatifs et intuitifs entre les comportements d'une fonction et de sa dérivée (Passaro, 2020). Cependant, pour Hitt et González-Martín (2016), le passage d'un raisonnement variationnel à un raisonnement covariationnel ne semble pas évident. Les études ont montré que les étudiants mettent plus d'accent sur le processus algébrique du calcul du taux de variation moyen et ne prennent pas le temps de comprendre la signification des variations concomitantes de la variable dépendante et de la variable indépendante, ce qui pourrait être une source de difficulté pour comprendre le taux de variation instantané comme limite du taux de variation moyen (Park, 2015; Schneider, 1992) qui offre une perspective locale sur la fonction et sa dérivée (Weigand, 2014).

Le taux de variation moyen entre deux points $K(x_0; f(x_0))\ et\ L(x; f(x))$ est donné par le quotient différentiel $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Si on considère maintenant deux points $A(a, f(a))$ et $M(a + h, f(a + h))$ situés sur une courbe **(Fig. 1)** et si on considère aussi la distance h qui sépare leurs positions sur une droite horizontale, la droite *(AM)* est appelée droite sécante à la courbe de la fonction. Cette droite a pour coefficient directeur $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Si la distance entre les points *A* et M diminue et tend vers zéro, on constate que la droite sécante *(AM)* tend à se confondre avec une droite limite appelée tangente à la courbe de la fonction au point *A*. Cela suppose que lorsque l'écart entre les positions des points *A* et *M* se réduit, les droites sécantes tendent à se confondre à une seule droite qu'on va appeler droite tangente et dans ce sens, il est possible de déterminer le taux de variation à chaque position considérée. La limite apparait ici comme le processus par lequel on évalue le taux de variation moyen sur des intervalles de plus en plus petits. Mais on note aussi que la limite est un objet perçu comme résultat de ce processus. Ce résultat est appelé taux de variation instantané et donne ainsi la dérivée de la fonction en un point d'abscisse a. On observe donc que la dérivée est associée également à des variations instantanées et que le résultat du processus dynamique observé sur la courbe est la pente de la droite tangente : la dérivée est aussi à la fois un processus et un objet. La dérivée de la fonction f au point a est le nombre $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque cette limite existe tandis que la dérivée de la fonction f sur un intervalle est $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ si cette limite existe. La dérivée d'une fonction f est la fonction f' pour laquelle la valeur en chaque point *x* est la limite du taux de variation $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

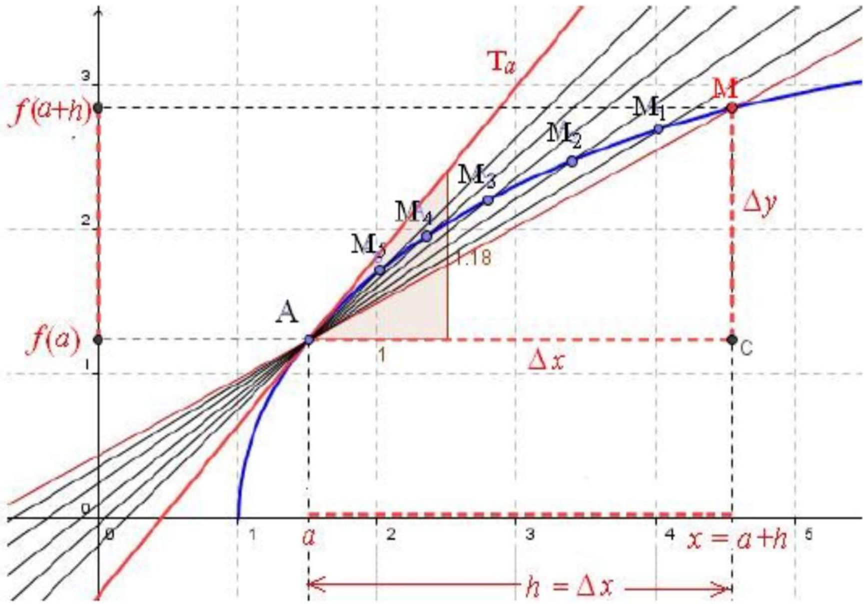


Figure 1. – Limite des droites sécantes (fiche de cours du lycée Fustel de Coulanges)[7]

Le taux de variation et la dérivée sont deux concepts mathématiques importants pour les cours de mathématiques avancées. Une bonne compréhension du taux de variation en particulier est nécessaire pour développer la compréhension de la dérivée (Herbert & Pierce, 2012). En dépit de l'intérêt des chercheurs pour le concept de taux de variation, l'apprentissage et l'enseignement de ce concept demeurent préoccupants pour la recherche en didactique des mathématiques (Herbert & Pierce, 2012). Orton (1983) pense que l'un des aspects à prendre en compte lorsque les élèves étudient le taux de variation est de considérer la différence qui existe entre une droite et une courbe. Lorsque l'élève calcule le taux de variation pour une fonction affine, le taux de variation est identique quelques soient deux points choisis arbitrairement sur la fonction. Cependant, dans le cas d'une courbe de fonction non linéaire, à chaque couple de points correspond une valeur du taux de variation. La connaissance qu'ont les élèves de ce que représente un taux de variation constant peut être à l'origine de certaines difficultés à conceptualiser le taux de variation instantané comme limite du taux de variation moyen. Établir la différence entre le taux de variation dans le cas d'une droite et dans celui d'une courbe n'est donc pas évident pour les étudiants autant que faire la différence entre le taux de variation moyen et le taux de variation instantané (Orton, 1983).

[7] Disponible sur le site https://www.logamaths.fr/spip/IMG/docs/1es/AA1ereES_Ch05_Derivation.pdf

Dans une étude sur le taux de variation, Hackworth (1994) a étudié la compréhension qu'avaient des étudiants du taux de variation et elle voulait également savoir si cette compréhension était affectée par le cours sur la dérivée. Un test écrit a donc été proposé à 90 étudiants au premier semestre avant le cours de calcul sur la dérivée. Ensuite, 57 étudiants parmi les 90 étudiants de départ qui ont participé au même test quelque temps après la fin du cours portant sur la dérivée ont pris part à un post test. Enfin, six de ces 57 étudiants ont participé à des entretiens pendant lesquels l'auteure a évalué leur compréhension du taux de variation tel qu'inscrit dans le test. Elle observe très peu de différence entre les résultats obtenus par ces étudiants dans les deux tests. Pour cela, il est difficile de s'imaginer dans ce cas que ces étudiants aient une bonne compréhension du taux de variation instantané comme limite du taux de variation moyen (Hackworth, 1994).

1.3.3-Difficultés en lien avec la notion de limite de fonction

La notion de limite est nécessaire pour comprendre le passage du taux de variation moyen au taux de variation instantané (Weigand, 2014). Tall et Vinner (1981) ont questionné 70 étudiants en première année d'université sur ce qu'ils considèrent comme étant la limite d'une fonction. Ils notent que peu d'étudiants parlent de la limite d'une fonction en faisant référence à sa définition formelle. Par ailleurs, la conception dominante renvoie la limite à un processus, quelque chose de dynamique et donc pas statique, ce qui selon cette étude à laisser voir que 54 étudiants sur 70 avaient une conception plutôt dynamique de la limite. Donc selon l'étude de Tall et Vinner (1981), l'idée de $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ égal à un nombre est une difficulté en lien avec l'infini, c'est-à-dire à la notion de mouvement qui prend fin. En effet, comme nous l'avons indiqué dans la section sur les éléments de l'histoire du concept de la dérivée, le débat qui a opposé les savants dans l'histoire portait entre autres sur l'existence du mouvement. Et de ce débat on pouvait en déduire deux conceptions de la notion de l'infini. La première conception est l'infini potentiel c'est-à-dire un mouvement qui ne prend jamais fin. On parle de la limite comme un processus (x tend vers 2 et $f(x)$ tend vers - *1*), jamais x n'atteindra 2 tout comme $f(x)$ n'atteindra jamais – 1. L'infini peut être réel ou en acte, c'est-à-dire un mouvement qui était potentiel mais qui à un moment prend fin. Un exemple c'est de calculer la limite d'une fonction et de trouver un nombre fini.

Williams (2001) a soumis un questionnaire à 341 étudiants du collège aux États-Unis pour étudier leurs conceptions de la notion de limite. Deux idées opposées de la limite ont été présentées aux 10 étudiants retenus pour des entretiens et ils devaient donner leurs points de vue sur la limite comme processus, borne infranchissable ou mouvement, choisir celle qui leur semblait juste et expliquer pourquoi. Les étudiants ont vu leur position sur la limite évoluer de la conception liée à une barrière infranchissable à leur conception dominante qui renvoie la limite au mouvement. Ferrini-Mundy et Graham (1994) utilisent la même démarche que Williams (2001) et en plus, ils proposent aux étudiants des courbes de fonctions non continues, puis ils leur demandent de discuter du comportement de ces courbes par rapport aux limites. La perception des étudiants associe la limite à un mouvement car pour ces étudiants, si $f(x)$ est une fonction, lorsque x passe d'un point à un autre la fonction $f(x)$ se déplace aussi. Selon que la situation présentée fasse appel à une représentation graphique ou symbolique, les réponses des étudiants au sujet de la limite varient. Puisque le calcul de la dérivée nécessite l'utilisation des limites, l'utilisation du langage dans un cours sur la dérivée doit être adéquat pour ne pas être une source de difficulté pour les élèves.

1.3.4-Difficultés liées à la notion de tangente

L'apprentissage de la tangente en calcul est influencé par les conceptions antérieures des élèves au sujet de la tangente (Biza et al., 2006; Castela, 1995; Vivier, 2010, 2013a). En effet, dans une étude portant sur l'apprentissage de la tangente par 278 étudiants du collégial, Vinner (1982) leur avait demandé de se prononcer sur le nombre de droites tangentes pouvant passer par un point d'une courbe puis de les représenter éventuellement. L'auteur observe que les étudiants ont une conception de la tangente similaire à celle des Grecs, c'est-à-dire, une droite qui touche une seule fois la courbe et qui ne la traverse pas. Castela (1995) a fait la même observation dans une étude où elle a procédé à une analyse des manuels de mathématiques en France; elle a noté que les conceptions des élèves au sujet de la tangente étaient liées aux conceptions *« droites et cercle »* et que cela constitue une entrave à la compréhension de l'idée de la tangente dans un cours de calcul. De même, Biza et al. (2006) notent dans leur travail que les élèves ont du mal à construire une droite tangente. De plus, ils ont du mal à manipuler les éléments symboliques pour déterminer une équation de la tangente. En effet, ces auteurs ont soumis 196 étudiants à un questionnaire sur les tâches liées à la tangente. Certaines de ces taches portaient sur la reconnaissance des droites tangentes tandis que d'autres portaient sur la construction ou la manipulation algébrique. Les résultats trouvés ont indiqué que les élèves ont obtenu de meilleurs résultats dans les tâches de reconnaissance des tangentes que dans les tâches de construction de celles-ci. Par exemple, 72% ont donné des réponses correctes aux questions portant sur la reconnaissance des tangentes contre 58% de bonnes réponses pour les tâches de construction. L'échec de ces participants semblent s'expliquer entre autres par leur image conceptuelle qui fait de la tangente une droite ayant un seul point commun et se situant du même côté de la courbe. Ces auteurs pensent que ces limitations observées trouvent plus leurs origines dans l'histoire du concept de tangente (Biza et al., 2006), notamment les conceptions *« droite et cercle ».*

Tout récemment, les trois perspectives de localité : ponctuelle-locale-globale qui ont été évoquées dans la section 1.3.1. (Vandebrouck, 2011) ont été utilisées pour l'étude de la tangente (Montoya Delgadillo et al., 2018). La perspective ponctuelle permet de considérer par exemple le point $M_0(x_0, f(x_0))$ et de calculer l'équation de la tangente au point x_0 lorsque la dérivée au point d'abscisse x_0 existe. La perspective globale permet de percevoir la tangente comme une ligne droite associée à une équation ou à une ligne rectiligne. La perspective locale est celle qui permet de trouver une approximation locale de la fonction autour de x_0. Comprendre ce qu'est la tangente exige de prendre en compte ces trois perspectives, chacune mettant l'accent sur un aspect différent. Il est possible qu'une perspective soit absente, ce qui va rendre difficile la résolution d'une tâche donnée dans un contexte spécifique (Montoya Delgadillo et al., 2018). Ces auteurs pensent que la perspective locale est absente dans le travail des élèves notamment parce que les enseignants mettent un accent sur le registre algébrique où cette perspective est totalement absente.

1.3.5-Le rôle de la visualisation et les types de représentations

En mathématiques, la visualisation est considérée par de nombreux auteurs comme composante essentielle pour passer de la pensée concrète à la pensée abstraite (Yilmaz & Argun, 2018). Elle a pour avantage de favoriser le développement de la pensée multidimensionnelle des individus car elle permet de regarder les choses sous divers angles. En mathématiques, on dirait que la visualisation permet de regarder un concept ou une notion sous différents angles. Dans ce sens, la visualisation dont il est question ici s'appuie sur des représentations graphiques. Dans cette thèse, les représentations d'un concept seront entendues comme les différents ostensifs[8] qui permettent de le présenter. Plusieurs chercheurs ont relevé la nécessité de faire usage dans l'enseignement des mathématiques de la visualisation comme moyen de faciliter la compréhension des concepts mathématiques et de faire des liens entre ces concepts (Duval, 1991; Eisenberg & Dreyfus, 1991; Presmeg, 2019). Les mathématiques s'apprennent et s'enseignent à travers des signes, des symboles et des diagrammes. Un concept mathématique comme la dérivée n'existe pas indépendamment de ses représentations. Par conséquent, la construction des concepts est déterminée par la production ou l'utilisation des signes ou représentations, de sorte que ces représentations jouent un rôle primordial et fondamental dans la présentation et le raffinement des concepts mathématiques (de Almeida & da Silva, 2018; Presmeg, 1985, 2006). À ce propos, Presmeg (2019) considère la visualisation comme la capacité, le processus et le produit de la création, de l'interprétation, de l'utilisation et de la réflexion sur des images ou des diagrammes, dans notre esprit, sur papier ou avec des outils technologiques, dans le but de représenter et de communiquer des informations, de réfléchir et de développer des idées qui étaient jusque-là cachées et inconnues pour la compréhension. S'agissant du concept en jeu dans cette étude et du point de vue sémiotique, les liens entre $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, l'interprétation de la valeur de $f'\ (x_0)$ comme la pente de la tangente au graphe de f en $(x_0,\ f\ (x_0))$, et l'indication de cette valeur en tant que taux de variation instantanée, sont différents éléments du faisceau sémiotique, qui ensemble favorisent la construction de sens du concept de dérivée (de Almeida & da Silva, 2018). Ainsi, Eisenberg et Dreyfus (1991) recommandent l'utilisation des stratégies d'enseignement qui favorisent la capacité de visualisation dans l'interprétation des différentes représentations d'un concept mathématique. Cependant, la visualisation peut ne pas être bénéfique dans certains cas. Presmeg (1985) a permis d'expliquer à travers des données d'entretiens obtenues de 54 élèves et leurs 13 enseignants, qu'il peut exister une faible corrélation entre l'utilisation des supports visuels pour l'enseignement et les résultats que pouvaient avoir les élèves. Dans cette étude, les enseignants ont été classés en trois groupes selon l'usage de la visualisation: le groupe d'enseignants qui mettent l'accent sur le visuel, un groupe intermédiaire et un groupe d'enseignants non-visuels.

[8] Notions à préciser dans le chapitre 2

Elle a observé que les élèves des enseignants appartenant au groupe non-visuel reproduisaient les mêmes stratégies que les enseignants utilisaient en classe et elle a observé chez eux une tendance à la mémorisation sans aucune compréhension conceptuelle. Par ailleurs, les élèves avec des enseignants qui priorisaient la visualisation rencontraient aussi quelques difficultés. Cependant, les élèves des enseignants du groupe intermédiaire étaient donc ceux qui démontraient de meilleurs scores; à cet effet, elle en conclut que si les élèves de ce groupe ont de meilleurs scores, c'est parce que leurs enseignants avaient comme stratégies d'enseignement de faire usage de la visualisation tout en développant les capacités d'abstraction et de généralisation de leurs élèves (Presmeg, 1985). Cette étude renforce l'idée selon laquelle il peut s'avérer important de faire usage de plusieurs supports pour aider les élèves à faire des liens entre ces différents supports si on veut leur permettre d'avoir une compréhension fine du concept en jeu.

Les élèves/étudiants ont du mal à faire le lien entre certaines représentations utilisées pour représenter la notion de fonction (Sierpinska, 1992). Or utiliser les fonctions dans la résolution de problèmes nécessite la mise en commun de plusieurs systèmes représentations (Duval, 1991) qui chez Chevallard et Bosch (1999) sont désignés par ostensifs. En effet, selon cet auteur, les objets mathématiques peuvent être représentés de plusieurs manières différentes et parfois ces objets sont confondus avec l'une de leurs représentations. Chacune de ces représentations est, selon lui, importante dans la mesure où les objets mathématiques ne sont pas facilement accessibles à première vue. Généralement, les étudiants de niveau universitaire ont une préférence pour les représentations algébriques (Habre & Abboud, 2006). Par exemple, Ferrini-Mundy et Graham (1994) ont montré que ces étudiants avaient plus d'habiletés à effectuer des taches procédurales en calcul et notamment dans le calcul des limites et de la dérivée sans une compréhension conceptuelle réelle. Il n'est donc pas rare de rencontrer des élèves qui sont capables de calculer la dérivée d'une fonction en un point donné, mais qui sont incapables de reconnaître l'intérêt qu'il y'a à utiliser le concept de dérivée pour résoudre une situation-problème ou un problème non routinier (Dufour, 2019). Dufour (2019) relève certains travaux de recherche dans lesquels les auteurs ont remarqué que les travaux et les examens élaborés par les enseignants sont souvent, eux aussi, axés sur des tâches qui font appel à une manipulation des techniques et des méthodes(Hardy, 2009; Tall, 1996). Les difficultés à articuler ces différentes conceptions liées aux fonctions s'observent également lorsqu'il s'agit de faire le lien entre les représentations algébriques, symboliques et graphiques lorsqu'on étudie la dérivée (Ferrini-Mundy & Graham, 1994).

Dufour (2019) a étudié dans sa thèse comment les étudiants passent d'une représentation de la dérivée à une autre, en posant son regard sur les processus de compréhension de la dérivée chez les étudiants de niveau collégial au Québec. Pour atteindre cet objectif, elle a considéré trois dimensions de la théorie sémiotique à savoir les types de représentation (algébrique, graphique, verbal, numérique, tabulaire) qu'utilisent ou produisent les étudiants, la nature de ces représentations (institutionnelle ou fonctionnelle), et des actions posées sur ces représentations (reconnaissance, production, traitement, coordination et conversion). Les résultats indiquent le rôle important des concepts connexes dans les processus de compréhension qu'ont les étudiants observés de la dérivée. Pour cela, le taux de variation apparait comme l'un des concepts les plus importants, autant les registres graphique et verbal occupent une place de choix dans le développement du concept de dérivée. Elle remet par ailleurs en cause l'utilisation du contexte de vitesse pour l'introduction du concept de dérivée, et pour cela, elle considère que le fait de travailler la dérivée dans un contexte purement mathématique et essentiellement dans le registre graphique augmente le développement de la compréhension des étudiants à propos du concept.

S'agissant de la dérivée, la notion peut être représenté graphiquement comme pente de la droite tangente en un point de la courbe, verbalement comme vitesse instantanée, physiquement comme vitesse et symboliquement comme limite du quotient différentiel (Zandieh, 2000). Selon Zandieh (2000), il est important d'avoir en esprit toutes ces représentations pour mieux comprendre le concept de dérivée. Zandieh (1997, 2000) propose un cadre pour analyser la compréhension des difficultés qu'ont les élèves avec la dérivée. Elle considère que l'apprentissage de la dérivée peut être fait dans plusieurs contextes ou bien à l'aide de plusieurs représentations. Zandieh (2000) utilise des entretiens pour analyser la compréhension de neuf étudiants de première année universitaire au sujet de la dérivée. Elle explique qu'au départ, les étudiants n'ont pas les mêmes préférences au sujet des différentes représentations mais ces représentations tendent à devenir une préférence pour l'ensemble des étudiants au fur et à mesure que leurs compréhensions se consolident. Elle note par ailleurs que la dérivée comme pente de la droite tangente apparaît comme l'un des aspects les plus représentatifs (67%), suivi du taux de variation (33%). Elle relève que les élèves peuvent avoir une compréhension différente de la dérivée même si cette compréhension a été développée à travers les mêmes devoirs ou dans le même environnement de classe. Ainsi, les représentations les plus significatifs des étudiants de l'étude sont la pente et le taux de variation excepté un seul étudiant sur les neuf dont la perception est davantage liée à la définition formelle (Zandieh, 2000, p. 119). Elle observe par ailleurs que la compréhension des étudiants de la dérivée se fait selon le cas, tous les étudiants n'ont pas la même construction de cette notion.

De plus Zandieh (2000) et Park (2013) ont observé dans leurs études respectives que la conception des étudiants au sujet de la dérivée est liée à la droite tangente autant quand il est question de parler de la dérivée en un point que de la dérivée sur un intervalle. Cela semble indiquer une confusion entre les deux notions. Par ailleurs, la préférence des étudiants à un seul des représentations du concept de dérivée est selon certains auteurs basée sur un ensemble d'indications que fournissent les manuels ou les enseignants, ce qui fait que ces indications poussent les étudiants à se conformer à une certaine norme au lieu d'adopter une attitude d'un point de vue mathématique (Hardy, 2009). En réalité, la préférence des élèves ne peut s'expliquer par un choix réfléchi opéré par eux-mêmes; selon Hardy (2009), c'est l'institution scolaire, incarnée par des personnes qui occupent différentes positions de pouvoir sur les savoirs à enseigner et à apprendre et les documents et textes officiels qui impose ce choix aux élèves. Certains chercheurs suggèrent par contre que, pour permettre aux étudiants de développer une riche image conceptuelle de la dérivée, l'enseignement doit aider les étudiants à établir des connexions entre les différents représentations du concept, chaque représentations mettant l'accent sur certains aspects du concept tout en effaçant aussi d'autres (Giraldo et al., 2003).

D'autres auteurs préconisent l'usage de la technologie pour rehausser l'impact des représentations graphiques sur la conceptualisation des notions mathématiques comme la limite et la dérivée (Ferrini-Mundy & Graham, 1994; Hong & Thomas, 2013; Roorda et al., 2014; Weigand, 2014). D'autres ne vont pas dans le même sens, argumentant que la technologie peut constituer elle-même une source de difficulté à l'apprentissage (Aspinwall et al., 1997; Giraldo et al., 2003; Habre & Abboud, 2006; Hitt & González-Martín, 2016). Par exemple, Habre et Abboud (2006) ont analysé l'utilisation de la calculatrice programmable par des étudiants dans l'apprentissage d'une fonction et de sa dérivée et ont observé que la compréhension était rendue plus difficile pour le plus grand nombre d'étudiants exceptés les étudiants qui avaient un niveau très avancé en mathématiques. En somme, les difficultés identifiées ci-haut posent les bases des nombreux enjeux et défis pour les enseignants, par exemple comment introduire le cours sur la dérivée de manière que leurs actions et leurs décisions puissent réduire ces difficultés et favoriser l'apprentissage.

1.4-Pratiques d'enseignement selon les recherches

Comme le soulignent Speer, Smith III et Horvath (2010), les enseignants ont à faire des choix et à prendre des décisions avant, pendant et après les enseignements et ce, en tenant compte de leurs perceptions personnelles des contenus, de l'apprentissage des étudiants et de leurs fausses conceptions. Pour cette raison, l'analyse des pratiques enseignantes devient une nécessité et pour ce faire, il y a lieu de distinguer entre ce qui constituent les activités d'enseignement et les pratiques d'enseignement proprement dites. Ainsi, les pratiques enseignantes peuvent renvoyer à toutes les interactions qu'a l'enseignant avec les élèves et le matériel pédagogique. Les activités d'enseignement quant à elles comprennent toutes les actions et les moyens engagés dans la manière d'organiser et de permettre aux élèves d'utiliser adéquatement ce matériel didactique pour enfin soutenir les apprentissages mathématiques des élèves (Speer, SmithIII, et al., 2010). Ces auteurs décrivent ainsi dans les activités d'enseignement l'utilisation des manuels, le tableau noir, les autres artefacts comme la technologie pour enseigner, sans oublier les discussions entre l'enseignant et ses élèves, la manière d'organiser la classe en petits groupes lors de la résolution des exercices et les stratégies déployées pour faciliter l'apprentissage. Dans le même ordre d'idées, ils associent les pratiques d'enseignement aux différentes formes de pensée, aux jugements, aux différentes prises de décision de tout enseignant qui s'engage dans la préparation d'un cours, ensuite à son enseignement à travers une ou plusieurs séances et en se servant d'une ou plusieurs activités d'enseignement. Il est donc clair que ces pratiques intègrent non seulement toutes les activités de planification avant l'entrée en classe (le choix des tâches par exemple) mais également les réflexions de l'enseignant au moment de l'action qui peuvent porter sur l'anticipation de la réaction des élèves face au contenu en jeu, les réajustements possibles pendant l'action, et les activités d'évaluation des apprentissages. Cette précision théorique est nécessaire pour mieux appréhender les études qui ont été faites pour expliquer l'impact de ces pratiques sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

1.4.1-Pratiques d’enseignement en mathématiques

La notion de pratique enseignante peut sembler polysémique (Tupin, 2003) car certains auteurs estiment que sa définition n’est pas assez claire ou tout simplement que c’est un concept flou (Bressoux, 2001) tandis que d’autres auteurs pensent que son sens dépend des orientations que l’on donne à la recherche (Altet, 2003). Cette polysémie la restreint très souvent à la mise en œuvre d’une partie de la pratique d’enseignement; à savoir la mise en œuvre d’une méthode d’enseignement (Oliveira, 2005). Dans son sens le plus large, la pratique enseignante comprend les pratiques d’enseignement, les pratiques formalisées entre enseignants, les pratiques pendant les temps informels, etc (Bru & Talbot, 2001). Par ailleurs, selon DeSaint-André, Montésinos-Gelet et Morin (2010) ce sont les pratiques d’enseignement qui constituent la composante la plus analysée. La pratique enseignante est observable durant le temps scolaire, principalement en classe, en présence des élèves (Deaudelin et al., 2005) et comprend la planification de l’enseignement, l’enseignement en classe avec les élèves, les activités d’évaluation et la rétroaction (Bressoux, 2002). Les études sur les pratiques d’enseignement en mathématiques permettent une description détaillée de ce que font et pensent les enseignants en classe. Ces études sont orientées vers :

- La gestion du temps d’enseignement,
- La sélection des contenus à enseigner,
- La motivation personnelle de l’enseignant dans sa manière de présenter un contenu,
- La technique utilisée par l’enseignant pour questionner les élèves et les mener ainsi vers les objectifs poursuivis,
- La manière de choisir et d’utiliser les représentations pour présenter un concept,
- Le regard réflexif que porte l’enseignant sur son travail,
- La manière d’évaluer les apprentissages (Speer, Smith, et al., 2010).

L’analyse de ces pratiques porte pour l’essentiel sur l’enseignant, et ce pour les raisons ci-dessous (Perrin-Glorian, 2002, pp. 180-181):

- Les contraintes et les marges de manœuvre de l’enseignant,
- Les caractéristiques de la position de l’enseignant dans une institution didactique,

- Les moyens utilisés par l'enseignant pour gérer son projet d'enseignement et la place laissée à l'élève dans la réalisation de ce projet,
- Les régularités et les variabilités des pratiques,
- La façon dont se construisent les connaissances de l'enseignant.

En particulier, il est établi un lien entre les croyances des enseignants et leurs pratiques (Speer, 2008). Selon Speer (2008), certaines pratiques utilisées par les enseignants sont associées aux croyances qu'auraient les enseignants sur la compréhension qu'ont les élèves des tâches ou même d'autres formes de croyances sur l'apprentissage des élèves. Ces croyances se présentent comme des éléments qui façonnent la manière dont l'enseignant intervient auprès des élèves pour les aider à surmonter leurs difficultés lors de la résolution des problèmes (Speer, 2008). Ces liens entre les croyances et les pratiques des enseignants sont influencés par les contraintes dites institutionnelles (Barbé et al., 2005; Hardy, 2009; Lew et al., 2016) mais également par les connaissances des enseignants (Speer & Firouzian, 2014). S'agissant des contraintes institutionnelles, relevons par exemple le cas de Barbé et al. (2005) qui ont présenté différents niveaux de détermination qui provoquent des restrictions aux pratiques des enseignants. Ces restrictions étant liées autant à la mathématique, à l'enseignement ou aux élèves eux-mêmes. S'agissant des connaissances des enseignants, il faut préciser que ces croyances des enseignants de mathématiques, leurs décisions et leurs connaissances déterminent la manière dont ils parviennent à développer des connaissances nouvelles (Speer, 2008). Par exemple, à travers des techniques de questionnement spécifiques, l'enseignant peut constater l'apprentissage réel de ses étudiants et à partir de cet instant il peut choisir d'autres questions pour renforcer la compréhension et amorcer le type de régulation à mettre en place pour aider les étudiants. Ces choix sont basés sur leurs croyances de l'enseignement et de l'apprentissage de leurs élèves, ces croyances se constituent en des ressources que l'enseignant utilise pour enseigner. Parmi ces ressources de l'enseignant, figurent la connaissance du contenu à enseigner, mais également sa vision sur les ressources et la manière dont les étudiants pensent lorsqu'ils apprennent les mathématiques (Lew et al., 2016; Speer & Firouzian, 2014). Speer et Firouzian (2014) relèvent que les enseignants expérimentés semblent posséder plus de connaissances sur la manière de penser des étudiants que les jeunes enseignants. Ce qui met en lumière l'expérience d'enseignement comme ressource pouvant façonner les pratiques d'enseignement.

Weber (2004) quant à lui observe qu'une pratique d'enseignement qui alterne plusieurs styles d'enseignement aide les étudiants à développer une compréhension conceptuelle. Selon Weber (2004), un enseignement traditionnel comprenant la définition, le théorème et des exemples peut varier en fonction du sujet enseigné. L'enseignant observé dans cette étude a vu son enseignement avoir un effet direct sur la façon dont certains étudiants tentaient d'apprendre la matière puisque l'enseignant variait ses stratégies d'enseignement. Il en conclut que les styles d'enseignement choisis par le professeur ont donc un effet sur la manière dont certains étudiants apprennent (Weber, 2004). Par ailleurs, chaque enseignant dispose de son approche personnelle qui semble être dictée par ses croyances personnelles lesquelles modifient ses pratiques (Speer, 2008). De même, ces pratiques sont soumises à d'autres contraintes spécifiques liées à l'exercice de la profession (Barbé et al., 2005). Par exemple, différents niveaux de codétermination identifiés par Barbé et al. (2005) provoquent des restrictions aux pratiques des enseignants. Pour mieux comprendre ces restrictions, il faut prendre en compte l'ensemble du processus global de la transposition didactique. Ce processus comprend non seulement la préparation et la construction des tâches d'enseignement mais aussi le processus d'enseignement lui-même. La préparation et la construction des tâches d'enseignement prennent en compte la place et le rôle des ressources d'enseignement. Le manuel scolaire constitue l'une de ces ressources et de nombreuses études en didactique des mathématiques (de Almeida & da Silva, 2018; Park, 2016; Rezat, 2010; Sträßer, 2009) ont mis en évidence la manière dont cette ressource est utilisée et la manière dont elle façonne les pratiques des enseignants, nous y reviendrons dans la section suivante.

1.4.2-Manuels scolaires dans les pratiques enseignantes

Le manuel scolaire est un matériel pédagogique et didactique qui facilite les activités d'enseignement et aussi les pratiques d'enseignement car le choix d'un manuel y compris son utilisation interpellent à la prise des décisions de la part des enseignants. Par ailleurs, les manuels de mathématiques ont une longue histoire en tant que supports pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques (de Almeida & da Silva, 2018). Le manuel scolaire est un élément qui fait partie du vaste ensemble des pratiques des enseignants (Speer, Smith, et al., 2010) et constitue l'un des principaux artéfacts dans lequel on peut trouver de nombreuses activités diversifiées qui sont présentées pour les enseignants et les élèves (Sträßer, 2009). Il se trouve que la relation de l'enseignant aux manuels de mathématiques est complexe dans la mesure où pour planifier son enseignement, l'enseignant doit décider avec quels outils didactiques opérer pour rendre visible son enseignement. De ce fait, l'enseignant apparait comme un médiateur entre un savoir qui est inscrit dans le manuel et l'apprenant qui se sert du manuel pour apprendre.

1.4.2.1- Contenus véhiculés par les manuels

Pour certains auteurs (González-Martín, 2015, p. 2124), « la vision des mathématiques qui est véhiculée par les manuels scolaires peut façonner ce que les enseignants enseignent et ce que les élèves apprennent ». Cela signifie que le style d'enseignement choisi par un enseignant peut être façonné par le contenu du manuel qui est utilisé par celui-ci (Lithner, 2004). Il y a donc un lien entre le style d'enseignement choisi par l'enseignant et le contenu du manuel utilisé autant la façon de raisonner d'un étudiant lorsqu'il est en situation de résolution des problèmes mathématiques et les types d'activités que propose le manuel (Lithner, 2004). Par exemple, Raman (2004) a conduit une analyse épistémologique de trois manuels les plus populaires au secondaire et au collégial aux Etats-Unis. Cette étude visait à examiner la manière dont la notion de continuité est introduite dans ces trois manuels. L'auteure observe que les manuels analysés véhiculent des conceptions différentes et parfois contradictoires. En effet selon l'auteure, pour ce qui est de la continuité, les trois manuels présentent trois approches épistémologiques de la définition de la continuité non concordantes (Raman, 2004). L'auteure pense donc que de façon plus générale, les manuels peuvent avoir une influence sur les perceptions des élèves envers les mathématiques et les notions étudiées mais aussi impacter leur image de soi en tant qu'apprenant et de ce fait, les enseignants jouent également un rôle dans le maintien de ces messages véhiculés ou la provocation d'autres contradictions par rapport à ces messages (Raman, 2004).

Une autre étude notamment celle de González-Martín, Nardi et Biza (2011) qui a été réalisée au Canada et au Royaume-Uni a permis d'analyser 22 manuels utilisés au pré-universitaire et à l'université pour rendre compte de la manière dont la notion de série infinie est introduite dans ces manuels. Les résultats démontrent que la manière dont le concept est présenté se base sur une approche historique du concept avec peu de représentations graphiques et peu de possibilités de travailler sur différents représentations (algébriques, graphiques, verbaux), ainsi que peu d'applications ou de références intra mathématiques liées à la signification du concept. De plus, on note une forte utilisation des exercices à visée algorithmique, avec un accent mis sur les représentations algébriques qui ne laisse pas observer des tâches conceptuelles (González-Martín et al., 2011). Cette étude rejoint celle d'autres auteurs qui ayant analysé des manuels ont expliqué que très peu de tâches contenues dans les manuels font appel à l'utilisation des représentations graphiques et pourtant il est important que les manuels scolaires puissent utiliser plusieurs représentations dans les tâches qu'ils proposent (Mesa, 2004). Dans le même sillage, González-Martín, Giraldo et Souto (2013) ont utilisé une grille pour analyser 14 manuels scolaires du secondaire utilisés au Brésil en vue de montrer comment étaient introduits dans ces manuels les nombres réels et irrationnels tout en questionnant en même temps l'importance accordée à ces notions. Selon les résultats obtenus, les manuels analysés ne prennent pas en compte les difficultés identifiées par les recherches en didactique sur ces notions. En particulier et s'agissant des nombres réels, leur introduction dans les manuels scolaires selon ces auteurs ne permet pas d'identifier le bien-fondé de cette notion. On note par ailleurs une préférence à faire usage d'un certain nombre de définitions et des propriétés qui ne permettent pas aux élèves de comprendre pourquoi ils apprennent cette notion (González-Martín et al., 2013). La manière dont est présenté le contenu d'un manuel peut constituer une source de difficultés pour les étudiants, mais il peut également séduire autant les enseignants que les étudiants lors de l'utilisation et faciliter ainsi l'apprentissage (Wagner, 2012). Par conséquent, ces difficultés observées dans ces manuels semblent avoir des conséquences majeures sur les apprentissages des élèves et influencent d'une part leur vision des mathématiques par le fait que certains semblent démontrer la véracité d'une assertion par des exemples, d'autres parts elles affectent leurs apprentissages des autres concepts ultérieurs comme les limites et donc la dérivée (González-Martín et al., 2013).

1.4.2.2- Utilisations des manuels par les enseignants selon les recherches

D'autres auteurs ont porté une attention à la manière dont les manuels scolaires sont utilisés par les enseignants au post-secondaire (González-Martín, 2015; González-Martín et al., 2018; Mesa & Griffiths, 2012). En se servant des données d'entretien, ces auteurs observent que les enseignants utilisent les manuels pour préparer leurs notes de cours, proposer les devoirs aux étudiants et construire leurs projets d'enseignement. De ces observations, il ressort également que les enseignants peuvent utiliser ces manuels tels qu'ils sont proposés, soit adapter ou modifier leur contenu aux situations nouvelles ou alors ils peuvent ignorer simplement ce que véhiculent ces manuels. Il y a dans ces différents usages, un processus d'appropriation et de modification du contenu du manuel qui fait partie de la genèse documentaire (Gueudet & Trouche, 2010b) et dans ces différents scénarios se construisent ce que Gueudet et Trouche (2010) appellent des schémas d'utilisation. Nous reviendrons d'ailleurs sur ces notions dans le chapitre 2 de ce travail.

Certains travaux de recherche notamment ceux de Mesa et Griffiths (2012), González-Martín (2015) et González-Martín et al. (2018) mettent en évidence comment les enseignants utilisent les manuels scolaires pour enseigner divers concepts mathématiques. Par exemple, González-Martín (2015) et ses collègues (González-Martín et al. (2018)) relatent comment cinq enseignants utilisent un manuel dans le but de dégager des similitudes entre leur rapport personnel avec les séries infinies réelles et le rapport institutionnel véhiculé dans le manuel. Les principaux résultats de cette recherche laissent voir que les cours des enseignants semblent suivre la même présentation que ce qui est fait dans le manuel. Aussi, González-Martín et ses collègues (2015, 2018) observent que le manuel utilisé par ces enseignants est leur seule et unique ressource physique. Du coup, ces auteurs pensent que le rapport personnel de ces enseignants avec les séries infinies est assez proche du contenu du manuel parce que le manuel offre dans son contenu plusieurs éléments qui dans certains contextes seraient laissés de côté. De plus ils observent que cette proximité de ces différents rapports peut ainsi expliquer pourquoi les enseignants choisissent de ne pas aller chercher d'autres ressources au-delà du manuel pour enrichir leurs notes de cours (González-Martín, 2015). L'un des aspects importants de cette étude c'est de laisser observer que certains enseignants sont formés selon une certaine vision avec un certain manuel, une fois devenus enseignants, ils utilisent les manuels qui épousent leur vision des notions et c'est pourquoi ils utilisent les manuels comme tels avec quelques rares exceptions de modifications et que pour cela, ils sont figés à l'utilisation d'un seul manuel lors de la préparation de leurs cours. Au sujet des perceptions qu'ont ces enseignants des manuels González-Martín (2015) montre que les enseignants considèrent que les manuels sont destinés aux étudiants tandis que dans les résultats obtenus par Mesa et Griffiths (2012), les enseignants considèrent que le manuel scolaire n'est pas une ressource évidente pour les élèves du secondaire et du collégial car ces derniers n'ont pas des compétences nécessaires pour les lire et les comprendre. Pour cela Mesa et Griffiths (2012) pensent pour ce qui est des étudiants du collégial que l'utilisation des manuels est liée à la capacité de l'étudiant de faire bon usage du manuel en allant plus loin que faire simplement leurs devoirs. Il serait aussi intéressant de comprendre comment les concepts sont traités dans les manuels de mathématiques pour être capable de faire le lien entre les choix des enseignants dans la manière d'utiliser un manuel et les activités développées.

1.4.3-Les évaluations externes dans les pratiques enseignantes

D'autres aspects des pratiques des enseignants concernent la place centrale des évaluations ministérielles dans la prise des décisions des enseignants et dans leurs pratiques d'enseignement. Ces épreuves externes sont des dispositifs d'évaluation des apprentissages des élèves à grande échelle qui sont conçus par une entité extérieure à la classe, au palier local, national ou transnational (Yerly, 2017). Dans les études nord-américaines, les effets des épreuves externes sur les pratiques des enseignants relèvent le lien entre les résultats des élèves et les primes ou les licenciements des enseignants (Yerly, 2017). Cet auteur explique que ces épreuves externes poussent les enseignants à aligner les contenus enseignés et évalués en classe sur les contenus de ces épreuves externes, mais peu à développer leurs méthodes d'enseignement. Certains auteurs relèvent dans une revue de la littérature que les enseignants qui travaillent dans un contexte dans lequel l'évaluation externe est à faibles enjeux comme dans certains pays européens, ne considèrent pas que les résultats de l'évaluation externe comme une source d'information pertinente pour réguler leurs pratiques et les faire évoluer (Rozenwajn & Dumay, 2014). Par exemple, en Suisse romande, une étude menée dans le canton de genève sur les pratiques évaluatives des enseignants du primaire (718 enseignants) et du secondaire (450 enseignants) montre que les évaluations externes ne constituent pas pour les enseignants, un moteur pouvant générer de nouvelles idées qui permettraient une régulation des pratiques d'enseignement (Soussi et al., 2006). Ce sentiment des enseignants viendrait du fait qu'une majorité de ceux-ci ne perçoivent pas les résultats des évaluations externes comme un feedback de performances (Rozenwajn & Dumay, 2016).

Les résultats des travaux que nous avons présentés ci-dessus permettent de relever les fondements des pratiques d'enseignement en général et les éléments qui constituent ces pratiques. En particulier, nous avons identifiés des éléments qui pour nous sont pertinents pour la suite de cette réflexion. Par exemple, nous avons relevé que les croyances des enseignants ont des effets sur les choix des enseignants, de même que nous avons abordé le rôle des manuels dans les pratiques enseignantes en général. Les croyances évoquées quant à elles ont la capacité de façonner la manière dont les élèves apprennent. Cependant, dans l'étude de Speer (2008), nous n'avons pas identifié des éléments qui pouvaient nous amener à dire comment se construisent les croyances de ces enseignants. Autrement dit, nous nous sommes demandé si leurs croyances étaient le fruit de leur formation, de leurs perceptions au sujet de l'enseignement ou de l'apprentissage ou des interactions qu'ils ont avec le manuel. Et de ce point de vue, nous continuons notre questionnement qui devrait nous aider à mieux clarifier notre démarche dans cette thèse et pour cela, nous pensons que l'analyse des ressources de l'enseignant pourrait permettre de répondre à certaines de ces questions. Il s'agit de questionner les raisons qui justifient le choix, la sélection et l'utilisation de ces ressources qui permettent à l'enseignant de prendre des décisions pour l'enseignement. Autres aspects qui découlent de cette section nous ont fait relever l'importance du manuel scolaire dans le travail des enseignants. Il apparait donc important de présenter des travaux qui traitent exclusivement de la dérivée introduite dans les manuels ou dans les pratiques enseignantes. Ces éléments constituent l'objet de la section suivante qui nous permettra de situer notre travail de recherche dans le domaine de la didactique des mathématiques.

1.5-Pratiques d'enseignement de la dérivée

Dans cette section, nous présentons quelques résultats de recherche sur les contenus des manuels, les pratiques d'enseignement et les concepts associées à la dérivée.

1.5.1- Manuels de calculs différentiels selon les recherches

La dérivée est un concept fondamental en calcul différentiel et intégral, ainsi, la manière dont elle est introduite ou présentée dans un manuel destiné aux étudiants novices dans ce domaine est importante pour leur pleine compréhension concernant ce concept (de Almeida & da Silva, 2018).

Cette importance accordée aux manuels est aussi discutée dans le milieu de la recherche. Au niveau universitaire, les manuels de calcul différentiel font partie des manuels utilisés par les enseignants et leurs étudiants et constituent en général la principale ressource pour l'enseignement (Pepin et al., 2013). Le manuel indique quels sujets seront étudiés et comment chaque partie particulière du contenu sera abordée, de sorte que le manuel offre aux enseignants un cadre pour guider leur enseignement (Pepin et al., 2013).

Park (2016) analyse trois manuels utilisés aux États-Unis au niveau universitaire. Elle focalise son attention sur les mots et les médiateurs utilisés dans les manuels pour calculer la dérivée définie en un point et celle définie sur un intervalle à partir du processus des limites. Dans cette analyse elle s'est intéressée à la façon dont est présentée la dérivée en un point et comment se fait le passage entre cette dérivée définie ponctuellement et la fonction dérivée sur un intervalle à travers les mots et les médiateurs utilisés via le processus de calcul des limites. L'auteure note une incohérence entre les médiateurs visuels utilisés et les processus de calcul de la limite dans les manuels analysés car, selon elle, le processus qui permet d'obtenir la dérivée par le truchement de la limite n'est pas assez clair pour permettre la compréhension. En effet, l'auteure observe que les graphes des lignes sécantes qui s'approchent de la ligne tangente n'étaient pas explicitement reliées au processus de la limite ayant été appliqué au taux de variation $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ et qui a abouti à la dérivée en un point. Aussi, les mots utilisés dans le processus de limite et les différents médiateurs utilisés laissaient voir un manque de lien. Elle note également le fait que le passage de la dérivée en un point à la dérivée sur un intervalle se fait à l'aide du même médiateur symbolique par un simple jeu de changement de lettre. Elle considère cette présentation comme source possible de difficultés pour les élèves à pouvoir comprendre la différence entre la dérivée en un point et la fonction dérivée qui elle est définie sur un intervalle (Park, 2016). Certains auteurs ont fait les mêmes observations toujours s'agissant de l'utilisation des représentations et de leurs relations pour apprendre la dérivée.

De Almeida et al. (2018) ont analysé la manière dont la dérivée est présentée dans le manuel Stewart (2009) de calcul différentiel et intégral. L'analyse a porté essentiellement sur la dérivée en un point et le passage de la dérivée en un point à la dérivée sur un intervalle. Les auteurs observent d'entrée de jeu que la vision véhiculée par le manuel fait de la dérivée une limite. Pour cela, la perspective locale de la dérivée en un point est utilisée pour permettre au lecteur de faire le lien entre les droites sécantes et la droite tangente obtenue comme limite des droites sécantes. Par ailleurs, une fois que la définition de la dérivée en un point est donnée, son interprétation géométrique qui conduit à la pente de la droite tangente est également donnée; cependant, les applications de cette interprétation ne sont pas montrées ni dans le domaine mathématique ni dans le domaine des applications liées à la dérivée. Dans ce manuel, les auteurs ont également proposé une définition de la dérivée selon l'une des perspectives proposées par Zandieh (2020) à savoir la dérivée comme limite de la vitesse moyenne, ce qui offre une deuxième perception de la dérivée qui est donc une vitesse instantanée. Dans le cas du passage de la dérivée en un point à la fonction dérivée, on assiste au fait que la fonction dérivée généralise la dérivée en un point (de Almeida & da Silva, 2018) et permet ainsi de présenter à la fois les perspectives locale et globale de la dérivée. Cependant, l'auteur du manuel ne place pas les deux définitions de la dérivée côte à côte pour permettre aux lecteurs de comprendre et de voir les deux aspects de la définition de la dérivée notamment la dérivée en un point caractérisée par $(a, f'(a))$ et la fonction dérivée $(x, f'(x))$. De plus, De Almeida et al. (2018) observent dans le manuel l'utilisation de plusieurs représentations et une interrelation entre eux, ce qui a permis à ces auteurs de conclure que le manuel analysé offre le potentiel de permettre aux étudiants de pouvoir conceptualiser la dérivée.

Nous venons de parcourir deux principaux travaux récents qui portent sur l'introduction de la dérivée dans les manuels de mathématiques. D'après notre revue de la littérature, nous avons identifié les usages que font les auteurs des manuels des manuels disponibles et les contenus véhiculés par ces manuels. Ces études identifiées ont mis en jeu les conséquences didactiques de l'introduction d'un concept dans les manuels et sur les pratiques d'enseignement et d'apprentissage des élèves. Dans la section suivante, nous allons aborder les problématiques liées aux pratiques des enseignants liées à la dérivée.

1.5.2-Pratiques d'enseignement du concept de dérivée

Les pratiques d'enseignement au sujet de la dérivée concernent l'enseignement des concepts reliés à la dérivée comme les limites, la continuité et les fonctions et plus spécifiquement sur l'enseignement du concept de dérivée. S'agissant des limites, nous avons par exemple Monaghan (1991) qui a analysé certaines expressions qui sont utilisées dans le langage familier et qu'utilisent les enseignants pour décrire le concept de limite. Il note que ces utilisations constituent des sources de difficultés pour de nombreux élèves car les expressions telles que *« …tendre vers*

…», « …se rapprocher de…», «…converger vers…» et *«…limite de…»* ne signifient pas la même chose en mathématique. Les trois premières expressions renvoient vers un mouvement, quelque chose qui est dynamique et qui se déplace vers une position qui semble infranchissable (Monaghan, 1991). Cette compréhension de la limite est intuitive car historiquement associée à la notion de l'infini potentiel qui était utilisée à l'époque grecque. L'idée d'une limite qui est atteinte est ambivalente pour les étudiants et dans ce sens, la notion de limite qui est atteinte repose sur la distinction fondamentale que peuvent faire les étudiants entre la notion d'infini réel et celui d'infini potentiel (Williams, 2001). Pour conceptualiser les limites, une manière de faire pourrait être d'utiliser des symboles, et pour cette fin, les symboles jouent un rôle crucial dans le développement de la pensée mathématique avancée puisqu'ils offrent de la flexibilité en réduisant la charge cognitive malgré la dualité de leur nature qui oscille entre des processus et des objets mathématiques (Güçler, 2014).

Selon Güçler (2014), les symboles facilitent la réflexion sur les concepts mathématiques et permettent d'effectuer des opérations sur ceux-ci. Elle considère par ailleurs que selon le cas, l'utilisation des symboles peut être complexe pour les apprenants puisque les symboles peuvent avoir des significations différentes selon le contexte mathématique en jeu. Par exemple, la limite peut représenter en même temps un processus et un objet et cette dualité peut constituer des difficultés pour les élèves ou étudiants. Comme nous l'avons évoqué dans la section sur les difficultés d'apprentissage de la limite chez les élèves, la manière dont les élèves parlent de la limite peut être une source à l'apprentissage de la limite. Pour autant, Gücler (2014) s'est intéressée aux discours d'un enseignant et le rôle que joue celui-ci dans la réflexion de ses élèves sur les limites. En employant l'approche communicationnelle de la commognition développée par Sfard (2008), Gücler (2014) suppose que la manière dont les enseignants introduisent et utilisent les symboles en classe peut avoir pour effet de modifier le sens que les élèves donnent à ces symboles. Le mode d'enseignement observé était de type direct, c'est-à-dire un cours magistral avec quelques interactions élèves-enseignant. Gücler a observé que le discours dominant dans la classe était celui de l'enseignant. Elle a supposé que l'exploration du discours de l'enseignant pendant ce mode d'enseignement pût mettre en évidence quelques aspects du discours mathématique sur le symbolisme qui peuvent rester implicites ou peu clairs autant pour les enseignants que pour les élèves. En focalisant son observation sur la manière dont l'enseignant et les étudiants utilisaient la notation de la limite, en particulier la différence entre la limite vue comme processus et la limite vue comme objet, elle a relevé que l'utilisation précise des mots et des symboles mathématiques pour exprimer la limite, bien que nécessaire, peut ne pas être suffisante pour que les enseignants communiquent efficacement les idées sur le symbolisme en salle de classe (Güçler, 2014). En effet, l'enseignant, en se servant d'un ostensif visuel pouvait bien distinguer à travers son discours les aspects liés au processus de ceux liés à l'objet. Cependant, dans le discours de l'enseignant on note une transition entre les aspects processus et objet de la limite, mais la manière dont s'est faite cette transition était implicite pour les étudiants présents en classe. Les présentes observations faites dans les pratiques d'enseignement se rapportent aux observations faites plus tard par Park (2016) lorsqu'elle a analysé trois manuels couramment utilisés aux États-Unis. De notre point de vue, il semble avoir un lien étroit entre ce que présentent les contenus des manuels et certaines pratiques enseignantes. Ceci ne constitue qu'une hypothèse et nous pouvons à cet effet nous questionner sur les motivations qui soutiennent ces liens éventuellement. Il nous revient d'aborder les pratiques d'enseignement identifiées dans les milieux de la recherche pour approfondir notre compréhension du lien entre les contenus des manuels et les pratiques d'enseignement.

1.5.3-Pratiques d'enseignement du concept de dérivée

Park (2015) a analysé comment trois enseignants de collège (post-secondaire) aux États-Unis introduisent la dérivée en un point et la dérivée définie sur un intervalle en utilisant le concept de limite. L'objectif visait à faire ressortir les caractéristiques de la communication en classe. L'auteure a observé l'utilisation des mots, les médiateurs visuels (symboliques, graphiques, algébriques) qui ont été utilisés par les enseignants, la manière dont l'enseignant explique le contenu, les gestes qu'il emploie pour faire les liens entre le symbolique et le graphique puis enfin les traces écrites considérées comme connaissances à retenir et consignées dans les notes des étudiants. Elle relève que les trois enseignants utilisent les droites sécantes, la tangente et les notations symboliques pour expliciter la dérivée en un point et la dérivée sur un intervalle. Cependant, il ne transparait pas à quel moment se fait le lien entre le processus de limite par lequel les droites sécantes se rapprochent de la droite tangente et la définition de la dérivée à l'aide de la limite. Elle observe également que selon leur enseignement, ces enseignants ont des croyances sur la compréhension qu'auraient les étudiants de la dérivée. En effet, les enseignants supposent que la relation entre les représentations symboliques et graphiques de la dérivée et le passage de la dérivée en un point à la dérivée sur un intervalle sont assez claires pour les étudiants alors que ces liens n'ont pas été établis pendant le cours en classe. Ainsi, les croyances personnelles de l'enseignant, son niveau de confiance à propos de ses propres connaissances des contenus peuvent constituer une barrière à la prise en compte des difficultés des élèves. Dans ce qui a été observé, les croyances ne sont pas justifiées car aucune technique de questionnement ne vient renforcer ou réguler cet apprentissage. Ceci va à l'opposé des observations faites par Speer (2008) car les techniques de questionnement de l'enseignant constituent un moyen pour vérifier et renforcer la compréhension des étudiants. Park (2015) évoque à cet effet une rupture entre les notes de cours des étudiants et la capacité des étudiants à comprendre le discours de l'enseignant.

Dans d'autres contextes comme en France, deux approches sont utilisées pour introduire la dérivée. Cependant, l'approche qui semble la plus utilisée est celle qui fait appel à la limite des sécantes (Vivier, 2013a, p. 68). Park (2015) soutient ce point de vue en relevant dans l'histoire du concept de dérivée, comment parmi toutes les approches utilisées dans la construction du concept de dérivée, l'approche géométrique, notamment celle qui permet de définir la dérivée à partir de la tangente a été l'approche principale. Cependant, il est difficile d'introduire un cours sur la dérivée lorsqu'il est question de la définir comme limite des sécantes (Park, 2015). En effet, la définition de la dérivée telle que proposée par Stewart (2010) fait intervenir au dénominateur du quotient différentiel le nombre ***h*** **(Fig.2).** La difficulté d'origine historique est celle de pouvoir expliquer pourquoi ce nombre devient négligeable au point de s'annuler :

4 Definition **The derivative of a function f at a number a**, denoted by $f'(a)$, is

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

if this limit exists.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Figure 2. – Dérivée comme fonction (Stewart, 2010, pp. 109-117)

Selon Vivier (2010), la tangente obtenue comme limite des sécantes ne permet que d'introduire et de définir la dérivée en un point et ne sert donc pas dans la résolution des exercices du cours. Son enseignement vise à faire le lien entre la pente, la tangente et la limite du taux de variation tandis que l'approche liée à la vitesse est abandonnée. En Belgique, certains auteurs dont Gantois et Schneider (2008) relèvent que la tangente permet d'introduire le calcul des dérivées mais son enseignement n'est pas abordé dans une perspective locale tandis que la vitesse comme interprétation cinématique de la dérivée n'est pas mise en avant comme moyen d'approcher la dérivée. Pour cela, ces auteurs proposent une ingénierie didactique articulant la vitesse et la tangente dans laquelle la vitesse constitue un marchepied permettant de développer l'idée intuitive du taux de variation instantané (Gantois & Schneider, 2008). La manière d'introduire la dérivée peut dépendre de l'enseignant, sa vision ou du contexte. Peu importe le concept en jeu, nous pensons comme le soulignent Hitt et Dufour (2021) que le développement de la compréhension conceptuelle chez les élèves peut être motivée par les caractéristiques de l'environnement dans lequel se déroule l'apprentissage. On peut citer entre autres les approches des enseignants, les types de tâches proposées aux élèves et l'utilisation d'une variété de représentations (Hitt & Dufour, 2021).

De notre point de vue, les deux options proposées pour l'introduction de la dérivée semblent pertinentes. L'approche qui fait de la dérivée la limite des droites sécantes permet de voir la dérivée comme la pente de la tangente et dans ce cas, on peut relever l'importance pour l'enseignant de faire usage des supports visuels comme l'ont relevé certains auteurs précédemment notamment Eisenberg et Drefus (1991) puis Presmeg (1985, 2019). L'autre approche à savoir l'approche cinématique renforce la compréhension des étudiants au sujet du taux de variation et n'est pas exempt de l'utilisation des outils visuels notamment le vecteur vitesse sur une courbe pour illustrer la notion de tangente. Le choix d'une option au détriment de l'autre revient à l'enseignant qui, face à ses croyances subirait les contraintes de l'institution. Nous pensons comme le soulignent Gantois et Schneider (2008) que les difficultés que rencontrent les élèves avec la dérivée seraient imputables en grande partie au rapport qu'entretient l'institution « cours de mathématique dans la transition de l'enseignement secondaire au niveau universitaire » avec le concept de dérivée (p. 10).

Dans cet ordre d'idée, Bingolbali et al. (2007) ont observé, dans une perspective cognitiviste, l'influence de l'appartenance des étudiants à un département sur leurs conceptions de la dérivée. Ces auteurs ont observé que les étudiants ingénieurs et les étudiants en mathématiques ont des compréhensions différentes au sujet de la dérivée. D'une part, à un test de connaissances sur la dérivée, les étudiants ingénieurs ont eu une meilleure performance sur les exercices en lien avec le taux de variation, ce qui fait observer que les étudiants ingénieurs autant que leurs enseignants développent beaucoup plus les aspects de la dérivée qui ont une application directe dans leur profession notamment le taux de variation. D'autres parts, les étudiants en mathématiques dans cette étude quant à eux performaient mieux avec les aspects de la dérivée en lien avec la tangente. Ce qui permet d'émettre l'hypothèse selon laquelle les préférences des étudiants s'expliquent donc par l'appartenance à un département à l'université autant par les programmes d'enseignement y afférents qui orientent et conditionnent les conceptions des étudiants au sujet des mathématiques et influencent également les pratiques des enseignants lorsqu'ils enseignent la dérivée (Bingolbali et al., 2007). Ainsi, l'analyse des pratiques des enseignants qui sont des sujets des institutions est nécessaire puisque en tant personne qui appartient au système scolaire, sa formation initiale ou professionnelle et ses croyances personnelles peuvent peser lourd dans les choix qu'il fait et les décisions qu'il prend quand il doit enseigner la dérivée ou tout autre concept. Or l'analyse institutionnelle est généralement faite à travers les programmes de mathématiques et les manuels scolaires de mathématiques constituent à cet effet une bonne porte d'entrée pour analyser les systèmes d'enseignement selon plusieurs travaux de recherche (Chaachoua, 2007; González-Martín, 2015; González-Martín et al., 2013; González-Martín et al., 2011; González-Martín et al., 2018) car ils constituent une ressource importante pour l'enseignant et l'élève/étudiant aux côtés d'autres ressources auxquelles ont accès les enseignants (Adler, 2010).

Dans l'étude de Park (2015), il est ressorti que les enseignants avaient une préférence pour les manipulations algébriques et cette préférence des enseignants pour des manipulations des formules algébriques ne leur permet pas d'expliquer non seulement comment passer de la dérivée en un point à la dérivée sur un intervalle, mais également elle ne leur permet pas d'expliquer le lien entre les représentations algébriques et symboliques (Park, 2013). Le choix des enseignants pour les expressions algébriques influence aussi la préférence des étudiants pour les expressions algébriques et cela affecte leur compréhension des fonctions et de la dérivée (Habre & Abboud, 2006). Les travaux que nous avons cités précédemment, par exemple l'étude réalisée par Speer (2008) qui évoque de quelle manière les enseignants peuvent se rendre compte de ce que les élèves ont appris au sujet d'un concept et les observations qui viennent d'être faites ci-dessus concernant également l'appartenance des enseignants à l'une des institutions qui conditionne les apprentissages des élèves peuvent nous amener à penser que les connaissances insuffisantes qu'ont certains enseignants de leurs élèves et de ce qu'ils savent seraient liées à leurs pratiques enseignantes parfois inadaptées. Cette hypothèse nous semble plausible car dans un autre champ, l'étude réalisée par Tsamir, Rasslan et Dreyfus (2006) a montré que certains enseignants en formation initiale ayant participé à cette étude pouvaient bien définir la dérivée en un point, cependant, ils n'ont pas pu utiliser cette définition pour étudier de façon adéquate la dérivabilité de la fonction $f(x)$ donnée. Selon ces auteurs, il y a une réelle difficulté même pour certains futurs enseignants de passer du concept-definition au concept-image du nombre dérivé en un point (Tsamir et al., 2006). Ceci tend à vouloir expliquer qu'en dehors des difficultés inerrantes au concept mathématique en jeu, certains aspects des connaissances des enseignants peuvent permettre de mieux expliquer leurs pratiques enseignantes. Nous aborderons d'autres perspectives liées aux connaissances des enseignants à la lumière des résultats de nos observations dans ce travail de thèse.

Une autre étude portant sur l'enseignement de la dérivée a été menée au Canada notamment l'étude réalisée par Dufour (2011) dans laquelle elle a observé deux enseignantes du cours de calcul différentiel au moment de l'introduction de la dérivée. Son interrogation principale était de savoir quels types de représentations les deux enseignantes utilisaient et de quelle manière ces enseignantes interagiraient avec ces représentations. Les analyses ont relevé deux principaux éléments : d'une part, elle a observé que dans les pratiques effectives de ces enseignantes, le registre algébrique occupait une place dominante avec également une coloration importante du registre verbal dû aux échanges oraux entre les enseignantes et leurs étudiants. Aussi, elle note qu'en ce qui concerne le registre graphique, les enseignantes n'en font pas usage de manière permanente et continue pendant la leçon, c'est seulement à l'introduction du concept que l'on voit apparaître ce type de registre et une fois l'introduction terminée, le registre algébrique reprend la plus grande place. D'autre part, elle relève que les représentations dont se servaient les enseignantes étaient le plus souvent des représentations institutionnelles et que ces représentations utilisées, tant au niveau algébrique que graphique étaient des représentations assez formelles que l'on pouvait retrouver dans le manuel utilisé par ces enseignants (Dufour, 2011). Bien au-delà, elle fait remarquer que, à certains moments de la pratique enseignante, l'une des enseignantes évitait les représentations spontanées amenées par les élèves pour ne considérer que des représentations dites institutionnelles tandis que l'autre enseignante tentait de réinvestir les représentations spontanées de ses élèves. Au niveau des activités proposées aux élèves, les résultats de cette étude indiquent que le travail sur les représentations se résumaient à la production et à la transformation à l'intérieur du même registre. Cette thèse adopte une approche théorique différente de celle qui a été utilisée dans notre étude. Ici, nous notons que l'analyse a été faite du point de vue des représentations sémiotiques et que les pratiques des deux enseignantes pour la plupart du temps sont fortement teintées de contraintes institutionnelles et leurs actions par rapport à l'utilisation et aux manipulations des représentations sont très implicites. Nous allons au moment de nos analyses de données jeter un regard sur les représentations qu'utilisent les enseignants, ce qui nous permettra de valider pour nos sujets ces résultats obtenus par Dufour (2011) et nous mettrons de l'emphase sur les pratiques des enseignants non pas d'un point de vue sémiotique mais et surtout d'un point de vue anthropologique, ce qui suppose que nous allons observer plus les types de tâches, les techniques et les technologies déployées lors de l'enseignement de la dérivée en classe. Nous considérons que notre travail apporte une autre perspective à celui de Dufour (2011) d'un point de vue théorique.

En guise de synthèse de ce qui a été présenté jusqu'ici, nous avons vu que la notion de dérivée est importante en mathématique car elle est reliée à de nombreuses autres notions comme les fonctions, les limites, l'infini, le quotient différentiel et les intégrales. Ces relations rendent complexes son apprentissage tout en enrichissant ses multiples champs d'application. Sur le plan scolaire, elle est importante pour réussir dans les filières scientifiques et techniques. On dénombre plusieurs élèves et étudiants dans le monde qui doivent suivre obligatoirement un cours de calcul différentiel dans leur parcours. C'est aussi dans ces cours que l'on dénombre un nombre important d'échecs selon les observations faites par exemple au Québec et aux États-Unis. Selon les recherches, la notion de dérivée est importante et difficile. Une difficulté principale est la relation qu'entretient la dérivée avec les autres notions. Sur un plan spécifique, la dérivée est difficile car sur le plan épistémologique il existe des nombreuses difficultés reliées à certaines notions comme les fonctions, les limites et l'infini, ainsi que la tangente et ce sont ces difficultés qui complexifient la manière d'apprendre et de comprendre la dérivée. Du côté de l'enseignement de la dérivée, ce que l'on sait jusqu'ici laisse voir, entre autres, que les enseignants ont généralement une préférence pour les manipulations algébriques. On peut estimer qu'il existe une grande influence des manuels scolaires et probablement des ressources institutionnelles sur les choix faits par les enseignants. Il semble donc utile de prendre en compte l'analyse des manuels scolaires et des ressources comme préalable de l'analyse de l'enseignement si on veut comprendre l'ensemble du processus d'enseignement de la dérivée. Pour cette fin, notre question initiale est celle de savoir quelles sont les pratiques d'enseignement et les pratiques d'utilisation des ressources pour l'enseignement de la dérivée?

1.6-Pertinence de la recherche

Le volet 4 des objectifs de développement durable élaborés par tous les États membres des Nations Unies qui a été adopté en septembre 2015 place l'éducation au cœur de ses priorités et pour cette fin, il s'agit « de construire un monde plus juste et durable dans lequel les États assurent l'accès de tous à une éducation de qualité. Une éducation de qualité, inclusive et équitable , est une clé pour permettre aux individus d'améliorer leurs conditions de vie et de s'investir dans un développement durable » (ODD4, 2015, pp. 142-143). Le défi de la réalisation de cet objectif pour l'éducation pour tous d'ici 2030 est particulièrement plus grand pour les pays subsahariens où l'évolution de la population scolaire est forte. L'on prévoit selon ces objectifs que seulement 60% des jeunes subsahariens pourront terminer leurs études secondaires d'ici 2030. De plus, seulement 50% d'enseignants du secondaire en Afrique subsaharienne ont reçu les formations minimums organisées requises, et ce pourcentage est en baisse depuis l'année 2000 à la suite du recrutement d'enseignants contractuels sans qualifications pour combler les déficits à un coût moindre (ODD4, 2015). Selon l'Institut de la Statistique de l'Unesco (ISU), l'enseignement des mathématiques a pour but d'améliorer les aptitudes des élèves en mathématiques. Ce contexte global ouvre la voie au contexte de cette étude et nous permet ainsi de justifier de la pertinence sociale et scientifique de l'étude.

1.6.1- Pertinence sociale de l'étude

Selon la Conférence des Ministres de l'Éducation des pays ayant le français en partage (CONFEMEN, 2008), l'éducation est reconnue comme un levier incontournable de lutte contre la pauvreté et comme un moyen primordial pour favoriser le développement durable d'une nation ainsi que le renforcement de la cohésion sociale. Dans cette perspective, l'enseignement secondaire constitue le principal enjeu du développement durable et ce pour quelques raisons.

D'abord, il faut relever que les programmes de l'enseignement secondaire de certains pays s'adressent davantage aux élèves qui se dirigent vers l'enseignement supérieur. Ensuite, la diversité des clientèles d'élèves et son accroissement rapide soulèvent un défi supplémentaire aux concepteurs des programmes puisque les apprentissages réalisés en enseignement secondaire sont perçus comme des prérequis pour les études universitaires, ce qui oblige en général les concepteurs des programmes du secondaire à mettre un accent sur les apprentissages qui ne sont pas toujours transférables dans la vie courante (CONFEMEN, 2008). Enfin, le marché du travail exerce une pression sur l'école secondaire puisque celle-ci doit pouvoir former des jeunes aux profils variés et qui sont capables d'acquérir des connaissances et de développer des compétences transversales dont la résolution des problèmes et le travail en équipe. La mise en œuvre d'un développement durable à travers l'enseignement secondaire se heurte à certaines caractéristiques, notamment la difficulté à maitriser les effectifs d'élèves dans les classes, le nombre d'enseignants insuffisants, les ressources pédagogiques lacunaires et les infrastructures trop peu nombreuses. Le Cameroun, pays francophone de l'Afrique centrale est membre de la CONFEMEN depuis 1960 au lendemain de son indépendance.

Le contexte camerounais que nous présentons ici peut être qualifié de contexte institutionnel car c'est le cadre dans lequel sont définies les orientations de l'éducation nationale, la formation des enseignants, le choix des programmes de formation et les orientations par rapport à la manière d'aborder les notions mathématiques inscrites au programme. Pour notre recherche nous avons entrepris de collecter les données au Cameroun. Deux raisons peuvent justifier ce choix. D'abord, le fait que le chercheur ait exercé comme enseignant dans le contexte de l'étude donne les atouts pour l'accès aux participants. Ensuite, nous observons qu'il manque dans le contexte africain des recherches sur l'enseignement et même l'apprentissage de la dérivée contrairement aux contextes nord-américain et européen. Enfin, certains éléments du contexte socio-éducatif notamment le contexte africain et par conséquent camerounais peuvent apporter de l'éclairage sur le sujet en étude.

1.6.1.1- Enseignement secondaire dans le contexte camerounais

Au Cameroun, le ministère des enseignements secondaires (Minesec) prend en charge l'enseignement secondaire général et technique, l'enseignement normal général[9] ainsi que l'enseignement normal technique[10] et leurs correspondants dans le sous–système anglophone. La durée de la formation au secondaire est la même dans les deux sous-systèmes à savoir 7 ans. Elle est de cinq ans pour le premier cycle et deux ans pour le second cycle du sous–système anglophone contre quatre années pour le premier cycle (12 ans – 15 ans) et trois années pour le second cycle (16 ans–18 ans) dans le sous-système francophone sans ce dernier. Le second cycle du système francophone qui nous intéresse exclusivement, d'une durée de trois ans, est sanctionné par l'obtention du Baccalauréat de l'enseignement secondaire général. Avant de passer en classe de terminale où se déroule l'examen du baccalauréat, les élèves doivent obtenir une année auparavant un certificat de probation communément appelé *« Probatoire de l'enseignement secondaire général »*, c'est à ce niveau que se situe notre étude. Notons, néanmoins, que les élèves des classes de première sont en général des adolescents dont l'âge se situe entre 16 et 20 ans voir plus. Ce sont donc des personnes qui vivent pleinement les défis de l'adolescence avec pour conséquences des changements d'ordre sociologique dus à leur insertion dans le milieu adulte. Ces changements exercent des influences sur la réflexion intellectuelle du jeune (Nseanpa, 2013). De ce point de vue, les attitudes et les pratiques des enseignants doivent être basées sur la compréhension de ces changements. C'est dans un tel contexte que le rôle de l'enseignant s'avère primordial.

On dénombrait en 2014 selon l'Institut national de la statistique environ 2 800 076 élèves inscrits dans le secondaire encadrés par 96 304 enseignants (INS, 2015). Au niveau des performances scolaires, l'Office du Baccalauréat du Cameroun a enregistré les taux de réussite suivants pour l'examen sanctionnant la fin du secondaire général francophone :53,44% en 2013; 55,20% en 2014; 56,57% en 2015; 52,75% en 2016; 46,13% en 2017; 51,74% en 2018 et 38,40% en 2020. Ces résultats peuvent laisser transparaitre un certain malaise dans l'enseignement

[9] L'enseignement normal général est une formation professionnelle qui prépare les personnes à la fonction d'enseignant au préscolaire et au primaire. Il faut noter que ces formations sont dispensées par les Écoles Normales des Instituteurs de l'Enseignement Général (ÉNIEG). Les diplômes décernés sont le Certificat d'Aptitude Pédagogique d'instituteurs de l'Enseignement Maternel et Primaire (CAPIEMP).

[10] L'enseignement normal technique permet de mettre sur le marché de l'emploi des enseignants de l'enseignement technique en Section artisanale rurale et au premier cycle de l'enseignement secondaire technique. Les Écoles Normales des Instituteurs de l'Enseignement Technique (ÉNIET) dispensent cette formation. Les diplômés reçoivent un Certificat d'Aptitude Pédagogique d'Instituteurs de l'Enseignement Technique (CAPIET)

secondaire au Cameroun et de nombreuses pistes s'offrent aux chercheurs en éducation pour expliquer des facteurs en cause. Parmi celles-ci, la formation des enseignants qui leur donne le droit d'enseigner au secondaire. Nous essayons de brosser un portrait de la formation actuelle des futurs enseignants francophones de mathématiques au Cameroun.

1.6.1.2- Structure de la formation des enseignants de mathématiques au Cameroun

De manière générale, le système de formation des enseignants de chaque pays est fonction de l'organisation du système éducatif lui-même (Marmoz, 2005). Pour le cas du Cameroun, la formation initiale des enseignants du primaire est supervisée par le Ministère des Enseignements Secondaires (MINESEC) tandis que la formation initiale des enseignants du secondaire relève de la responsabilité du Ministère de l'Enseignement Supérieur (Minesup). La première École Normale Supérieure (ENS) du Cameroun a été créée en 1961 pour assurer la formation initiale de tous les futurs enseignants du secondaire et dès l'année 1962 elle a été rattachée à l'université de Yaoundé 1. À ce jour, il existe quatre autres écoles de formation des enseignants du secondaire dans les autres régions du pays, ce qui revient à cinq écoles de formation des enseignants[11].[12] Jadis, et notamment au lendemain des indépendances, le recrutement des fonctionnaires dans la fonction publique était très en vogue. Dans la plupart des pays francophones d'Afrique, les étudiants inscrits dans les écoles normales supérieures étaient rémunérés pendant leur formation. Cette pratique avait pour objectif de les attirer vers le métier d'enseignant (Marmoz, 2005, p. 38). Avec de nombreuses crises économiques dans les pays africains, les emplois à la fonction publique deviennent de plus en plus rares. Le recrutement des futurs enseignants est désormais conditionné par ce contexte socioéconomique (Nseanpa & Tcheuffa-Nziatcheu, 2018).

Selon l'Institut National de la Statistique (2010), la frange de la population la plus touchée par le chômage est celle des diplômés de l'enseignement supérieur. Ces jeunes diplômés, pour la plupart, recherchent une sécurité dans l'emploi, et pour cela, ils se lancent à la recherche des emplois salariés dans la fonction publique, d'où l'affluence observée aux portes de la profession

[11] L'école normale supérieure de Yaoundé (région du Centre), l'École normale supérieure de Bambili (région du Nord-Ouest), l'école normale supérieure de Maroua (région de l'Extrême-Nord), École normale de l'enseignement technique (région du littoral), l'école normale supérieure de Bertoua (région de l'Est).

[12] Dans certains pays comme le Burundi, l'École Normale Supérieure est une entité indépendante de l'université.

enseignante car c'est l'un des rares concours qui offrent aux lauréats un accès direct à la fonction publique avec une garantie de salaire et une retraite plafonnée à 60 ans (Tchamabe, 2015).

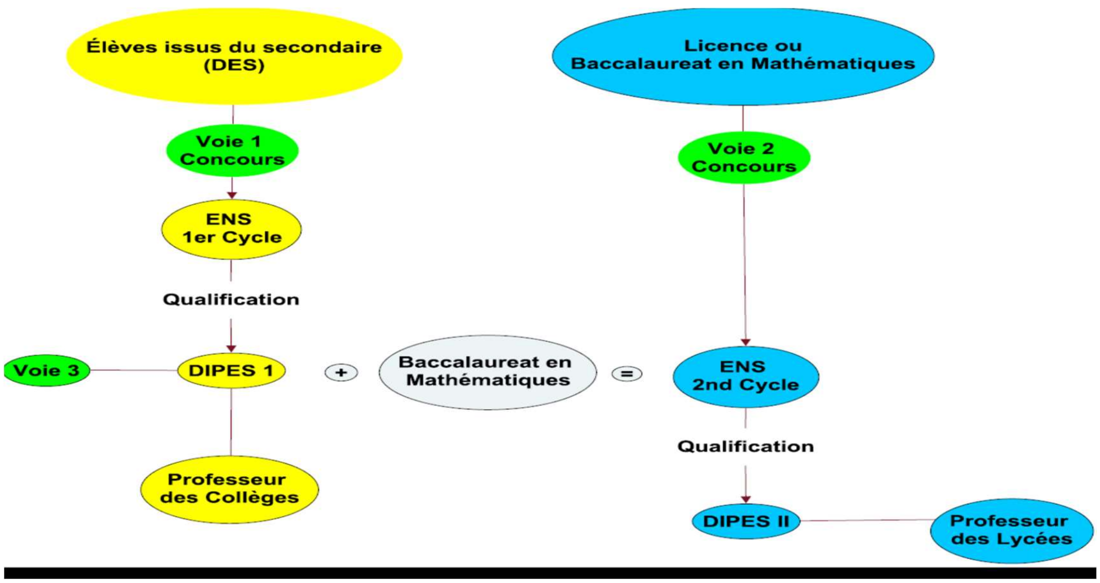


Figure 3. – Parcours de formation des enseignants dans les ENS au Cameroun.

La formation initiale des enseignants du secondaire est assurée par les ENS **(Fig.3).** La durée de formation quant à elle dépend de la voie qui a permis l'accès à l'école. Les personnes qui sont titulaires d'un diplôme d'études secondaires[13] accèdent à l'ENS par voie de concours (Figure 3). Pour ces étudiants, la durée de la formation est de trois ans à l'issue desquels ils obtiennent un diplôme de professeur du premier grade (DIPES I) qui leur donne le droit d'enseigner au premier cycle du secondaire. Si en plus de leur diplôme professionnel ils obtiennent un baccalauréat en mathématiques, ils peuvent s'inscrire sans concours au second cycle de l'ENS et accéder après deux ans au diplôme de professeur d'enseignement secondaire du second cycle (DIPES II). Dans certains cas, des étudiants qui obtiennent les deux diplômes **simultanément** choisissent de rentrer immédiatement dans le marché de l'emploi. Ils auront la possibilité de revenir après au moins trois années pour terminer leur formation en enseignement, cette voie constitue la troisième voie d'accès à l'ENS. La deuxième voie d'accès à l'ENS est réservée à tous les étudiants qui sont au préalable titulaire d'une licence[14] ou d'un baccalauréat en mathématiques

[13] Le baccalauréat de l'enseignement secondaire est le diplôme de fin d'études secondaires

[14] La licence au Cameroun est l'équivalent du baccalauréat universitaire au Canada

obtenu à la faculté des sciences à l'université. Ils y accèdent par voie de concours et la formation a une durée de deux ans. Comme nous l'avons indiqué précédemment, il existe une troisième voie pour les enseignants qui ont suivi au préalable trois années de formation et qui ont accumulé au moins trois années d'expérience dans l'exercice de la profession, et qui entre temps ont pu terminer leurs études du baccalauréat en mathématiques. Pendant leurs années de formation, les futurs enseignants reçoivent des formations en mathématiques universitaires et en pédagogie. On déplore le fait que certains candidats à la profession ne soient pas motivés par le désir de la formation des jeunes mais plutôt par un souci d'emploi (Tchamabe, 2015). Le fait de retrouver dans différents parcours des candidats peu motivés à enseigner laisse observer une baisse de la compétitivité mais également une sous qualification des produits issus de la formation à l'enseignement (Tchamabe, 2015).

1.6.1.3. Enjeux de la formation initiale des enseignants de mathématiques

Les programmes de formation des deux cycles dans les ENS du Cameroun sont constitués de trois blocs. Un bloc des contenus de mathématiques universitaires, un bloc en sciences de l'éducation qui donnent au futur enseignant des bases théoriques nécessaires pour l'enseignement des mathématiques et un bloc pratique. Le bloc des mathématiques du premier cycle est semblable aux contenus d'enseignement des cours de mathématiques universitaires menant à la licence dans les facultés de sciences. Au second cycle, les étudiants suivent des contenus mathématiques de quatrième et de cinquièmes années universitaires. Le troisième bloc de la formation initiale des enseignants comprend un stage d'imprégnation à l'enseignement proprement dit. La formation initiale de ces enseignants est basée sur une formation disciplinaire et offre peu de place aux aspects pratiques (Tamghe, 2020). Cette formation semble déconnectée des réalités du terrain (Maingari, 2004; Tsafak, 2000). Cette inadéquation observée par ces auteurs semble être corrigée par des formations continues qui se font à travers les séminaires et les journées pédagogiques organisés par les établissements scolaires ou les inspections de pédagogie (Tamghe, 2020). S'agissant des contenus d'enseignement, le Tableau 1 donne la répartition des différents volets de la formation initiale. Ces données sont extraites du programme de formation des enseignants du premier et du second cycle et indiquent le nombre d'heures d'enseignement.

Discipline	Année d'étude au premier cycle				Année d'étude au second cycle			
	Première	Deuxième	Troisième	Totaux	Quatrième	Cinquième	Totaux	Total des deux cycles
Physique	256h	0h	0h	256h	0h	0h	0h	256h
Sciences de l'éducation	256h	64h	64h	384h	64h	64h	128h	512h
Didactique des mathématiques	0h	64h	32h	96h	96h	64h	160h	256h
Mathématiques supérieures	336h	336h	96h	768h	192h	256h	448h	1216h
Anglais	0h	32h	0h	32h	64h	224h	288h	320h
Nombre total d'heures d'enseignement	848h	496h	192h	1536h	416h	608h	1024h	2560h

Tableau 1. – Extrait du programme de formation (Diffo-Lambo & Feugueng, 2016)

La lecture du Tableau 1 permet de faire quelques observations. Premièrement, on peut relever que les contenus de mathématiques supérieures occupent assez de place que l'on soit au premier cycle (50%) ou au second cycle (43,75%). Les cours de didactique au premier cycle sont moins importants en volume horaire qu'au second cycle, on pourrait l'expliquer par le fait que les étudiants qui entrent au second cycle par la deuxième voie ont besoin de plus de contenus portant sur la pédagogie et la didactique puisqu'ils ont déjà appris assez de contenus mathématiques à l'université. Malheureusement le constat laisse observer que malgré leur passé d'anciens étudiants en mathématiques supérieures, ils doivent encore suivre un volume important de mathématiques supérieures, ce qui diminue considérablement le temps qui aurait pu être consacré à la didactique et aux cours en éducation. On assiste donc plus à une valorisation des contenus mathématiques au détriment des ressources didactiques nécessaires pour l'enseignement. Si l'on regarde globalement la formation portant sur cinq années successives, on observe qu'un étudiant qui suit le parcours de formation de la première à la cinquième année a droit à 2560 heures de cours avec une couverture de 10% des cours de didactique contrairement aux mathématiques supérieures qui occupent 47,5% du temps de formation. On observe donc dans ce phénomène deux tensions palpables : une tension entre la formation pratique et la formation disciplinaire puis une autre tension entre les savoirs disciplinaires de référence et les savoirs didactiques (Hofstetter et al., 2009). S'agissant de la première tension qui oppose la formation pratique et la formation disciplinaire, on peut observer que la formation pratique quant à elle ne comble pas les écarts observés entre la formation mathématique et la formation didactique (Maingari, 2004). En fait, pendant la formation au premier cycle ou au second cycle dont la durée varie entre 3 ans et 2 ans, les étudiants ont droit à deux ou trois mois de stage d'imprégnation à l'enseignement. Généralement, ces stages se déroulent au deuxième trimestre de l'année scolaire, au moment où l'année tire à sa fin et les établissements sont soucieux de boucler les programmes en vue des examens officiels avec un grand nombre de contenus couverts (Tchamabe, 2015). La tension entre les savoirs didactiques et les savoirs des disciplines de référence fait observer que lorsque le niveau d'enseignement est élevé, plus la vision domine que la formation disciplinaire suffit pour l'essentiel à l'enseignement. Dans ce cas, la didactique est alors perçue non comme un savoir spécifique, mais comme une matière essentiellement pratique; du coup, son développement parait secondaire et fortement dépendant des disciplines de référence (Hofstetter et al., 2009, p. 35). On peut se demander comment les enseignants de mathématiques dans ce contexte parviennent à surmonter ou à résoudre ces tensions en analysant leur pratique et surtout leur rapport au savoir enseigné comment ils parviennent à enseigner la dérivée en classe. La notion de rapport personnel est perçue par Chevallard (2003) comme un moyen d'expliquer comment les individus interagissent avec les contraintes imposées par les institutions et y apportent des solutions.

1.6.2- Pertinence scientifique

Plusieurs difficultés observées sur le contexte de cette étude permettent de justifier de la pertinence scientifique de l'étude. Nous identifions deux principaux enjeux qui nous permettent de justifier de la pertinence scientifique de cette étude.

1.6.2.1. Enjeux des ressources et de leurs utilisations

L'objectif déclaré par les Nations Unies à propos du développement durable, ajouté aux enjeux de l'enseignement secondaire dans les pays ayant le français en partage a soulevé d'autres enjeux notamment celui de la modification des curricula d'enseignement. Pour pouvoir tenir compte des défis liés au développement des compétences chez les élèves du secondaire, de nombreux pays en Afrique subsaharienne ont adopté des programmes d'enseignement qui prennent en compte les préoccupations d'ordre social notamment le développement de la compétence environnementale et financière entre autres. Or, la portée de ces nouveaux programmes a eu un effet très limité à cause d'une intégration inadéquate aux programmes officiels et du manque de préparation du personnel enseignant à cette nouvelle donne (CONFEMEN, 2008). Certains pays africains comme la Côte-d'Ivoire ont adopté une approche par les compétences, malheureusement, plusieurs chercheurs ont émis des doutes quant à la réussite de cette nouvelle approche en raison des insuffisances relatives au matériel didactique et à la qualification des enseignants (Bernard et al., 2007). Le Cameroun a adopté depuis l'année scolaire 2012-2013 l'approche par les compétences avec entrée par des situations de vie (MINESEC, 2014b). Il est recommandé aux enseignants d'utiliser des situations authentiques comme moyen d'enseigner les concepts mathématiques. La modification du programme d'enseignement s'est accompagnée de la réforme du livre scolaire.

S'agissant des ressources d'enseignement, le MINESEC valide les manuels scolaires. En général, l'institution étatique propose une liste de trois manuels aux conseils d'enseignement des lycées et collèges[15] et c'est de la responsabilité de ces conseils de choisir parmi ces manuels celui qui devra être étudié par les élèves pour l'année en cours. Certains auteurs ont formulé certaines critiques à ce propos (Belinga, 2009; Vounda-Etoa, 2016). D'abord, s'agissant des programmes d'enseignement, le Cameroun s'est inscrit dans la démarche d'un enseignement secondaire qui favorise le développement durable, c'est-à-dire un enseignement qui véhicule les valeurs d'équité qui devraient s'observer aussi dans les programmes d'enseignement. Or, comme l'observe Belinga (2009), la définition des curricula de formation dans l'enseignement secondaire au Cameroun n'a jamais fait l'objet d'un débat public, et pour cet auteur, les contenus des manuels scolaires utilisés au Cameroun ne tiennent pas compte des spécificités locales (Belinga, 2009). Autrement dit, ces manuels ne répondent pas aux objectifs visés à savoir favoriser le développement des compétences en mathématiques. D'autres auteurs ont relevé que les manuels mis sur le marché avaient des contenus épistémologiques inexacts, en d'autres termes, des contenus qui réfèrent à toutes les pensées, les croyances et les conceptions liées à la nature ou au statut de la connaissance en jeu, une qualité technique douteuse et avec une accessibilité réduite, et de ce fait cette situation serait liée à des motivations économiques (Belinga, 2009; Vounda-Etoa, 2016). Selon Vounda-Etoa (2016), 90% des manuels scolaires au Cameroun semblent ne pas répondre aux attentes des enseignants et des élèves. Belinga (2009) quant à lui estime que le fait pour le ministère des enseignements secondaires de collaborer avec les éditeurs des manuels scolaires semble *« alimenter l'idée selon laquelle la diffusion des savoirs livresques n'est qu'une affaire quantitative*

[15] Le collège va de la sixième en troisième pour une durée de 4 ans de formation au secondaire. Ensuite, le lycée débute en seconde et constitue le second cycle de l'enseignement général. Sa durée est de trois années et est sanctionnée par un diplôme d'études secondaires qui est le baccalauréat.

et mercantile … aucune réflexion profonde n'a encore été faite pour adapter les contenus aux besoins actuels de la formation de nos apprenants » (Belinga, 2009, pp. 142-143).

À côté de ces problèmes existe le problème d'accès à des ressources d'enseignement disponibles sur le web, cet absence est due à l'absence d'Internet ou alors à sa présence à faible bande passante (Nongni Siake, 2020). Selon cet auteur, le rapport sur l'état de la Francophonie numérique a révélé que seulement 11% des Camerounais utilisaient Internet. Pour cela, on peut être d'accord de dire que les enseignants qui œuvrent dans ce contexte peuvent faire face à plusieurs défis liés à l'utilisation des ressources documentaires disponibles sur le web (Nongni Siake, 2020). L'utilisation des ressources numériques pour l'enseignement doit également être prise en compte dans l'appréciation du travail des enseignants au Cameroun. Pour cette raison, il nous semble pertinent d'analyser comment les enseignants camerounais interagissent avec ces ensembles de ressources bien que décriées pour planifier leurs cours et enseigner en classe.

1.6.2.2. Enjeux liés aux perspectives théoriques et à l'état des connaissances

Sur le plan scientifique, les axes de recherche sur lesquels les chercheurs se sont intéressés à propos de l'apprentissage et de l'enseignement du calcul comprennent l'identification et l'étude des difficultés et des obstacles cognitifs des étudiants, l'analyse des processus d'acquisition des concepts particuliers, le travail des enseignants en classe y compris l'influence des innovations curriculaires et pédagogiques sur l'apprentissage des étudiants et enfin les problèmes en lien avec les croyances et les pratiques des enseignants (Rasmussen et al., 2014). Ces auteurs soutiennent par ailleurs que la tendance de ces recherches est observée dans les sous-domaines du calcul que sont la limite, la dérivée et l'intégrale[16]. Plusieurs recherches ont porté sur les difficultés des élèves/étudiants en calcul (Bressoud et al., 2016; Ferrini-Mundy & Graham, 1994; Rasmussen & Ellis, 2013; Rasmussen et al., 2014; Tall, 1993). Certaines ont porté sur les difficultés des

[16] "Research on calculus learning and teaching generally has followed a pattern of (1) identifying and studying student difficulties and cognitive obstacles followed by (2) investigations of the processes by which students learn particular concepts, (3) evolving into classroom studies (or close approximations thereof), including the effects of curricular and pedagogical innovations on student learning, and, more recently (4) research on teacher (including graduate student instructor, lecturers, etc.) knowledge, beliefs, and practices. We can see this pattern, in varying degrees, in the research in different subdomains of calculus: limit, derivative, and integral." Rasmussen, C., Marrongelle, K., & Borba, M. C. (2014). Research on calculus: what do we know and where do we need to go? *ZDM Mathematics Education*, *46*(4), 507-515. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0615-x

élèves/étudiants au sujet de la dérivée (Asiala et al., 1997; Aspinwall et al., 1997; Byerley et al., 2012; Nemirovsky & Rubin, 1992; Orton, 1983; Park, 2012, 2013; Zandieh, 1997, 2000). D'autres auteurs ont mis un accent sur les difficultés liées aux notions mathématiques connexes à la notion de dérivée (Biza et al., 2006; Byerley et al., 2012; Monaghan, 1991; Orton, 1984; Russo, 1962; Schneider, 1992; Sierpinska, 1985, 1992; Thompson & Carlson, 2017; Weller et al., 2004; Williams, 2001).

Au sujet de l'enseignement, on a noté quelques études dans lesquelles des interventions sont proposées pour améliorer l'apprentissage de la dérivée (Gantois, 2012; Gantois & Schneider, 2008; Giraldo & Carvalho, 2006; Giraldo et al., 2003) alors que d'autres auteurs ont mis en évidence les pratiques d'enseignement de la dérivée en classe (Park, 2015) ou même l'introduction de la dérivée dans les manuels scolaires (Park, 2016). Nous avons noté l'existence de quelques travaux mettant en lumière l'introduction de la dérivée dans les manuels. Par ailleurs celles qui existent ont adopté une approche sémiotique, par exemple Dufour (2019) et De Almeida et al. (2018) ou une approche de la commognition par exemple Park (2016). À notre connaissance, aucune étude ne prend en compte et de manière simultanée l'introduction de la dérivée dans les manuels, l'utilisation des ressources diverses dont le manuel pour enseigner la dérivée et les pratiques d'enseignement de la dérivée. Cela constitue pour nous une autre source de justification de la présente recherche. Notons également que les recherches qui ont été identifiées sur l'apprentissage et l'enseignement de la dérivée ont eu principalement comme cadre d'analyse les théories psycho-cognitives (Amit & Vinner, 1990; Biza et al., 2006; Castela, 1995; Dufour, 2011; Ferrini-Mundy & Graham, 1994; Habre & Abboud, 2006; Orton, 1983; Park, 2012, 2013, 2015, 2016; Tall, 1993; Tsamir et al., 2006; Tyne, 2014; Weigand, 2014; Zandieh, 1997, 2000). Ceci constitue également une raison de plus pour mener ce travail car sur le plan théorique, notre étude va consister à aborder la problématique de l'enseignement de la dérivée en adoptant une approche qui combine deux points de vue : une analyse du point de vue des institutions (Chevallard, 1999) et aussi suivant l'approche documentaire du didactique (Gueudet & Trouche, 2010b). Tous ces problèmes liés au contexte, les stratégies employées par les enseignants pour les contourner sont des éléments qui peuvent nous aider à enrichir la documentation scientifique existante surtout quand on sait que l'essentiel des résultats que nous avons à ce jour sur l'enseignement du calcul proviennent des pays du Nord. Un tel contexte aurait d'autres variables explicatives du phénomène étudié et pourrait nous amener à comparer les pratiques dans différents contextes pour faire ressortir les aspects plus porteurs pour l’apprentissage des élèves camerounais.

Chapitre 2 : Cadre théorique

Comme nous l'avons indiqué dans le premier chapitre de cette thèse, notre intention est de pouvoir analyser les pratiques des enseignants et leur utilisation des ressources dans les activités de préparation et d'enseignement de la dérivée. En d'autres termes, il est question d'examiner d'abord comment les programmes officiels, les manuels de mathématiques de niveau secondaire introduisent la dérivée. En sus, il est aussi question de voir comment les enseignants s'investissent dans la préparation des cours, comment ils sélectionnent des ressources pour enseigner et comment ils enseignent en classe le concept de dérivée. Dans cette perspective, un regard sera porté sur les différentes ressources institutionnelles et non institutionnelles dont se servent les enseignants dans la préparation de leurs cours. Il sera également question de rechercher comment ces ressources façonnent leurs manières d'enseigner la dérivée. Parmi plusieurs cadres théoriques existants en didactique des mathématiques, nous n'observons qu'aucun ne permet à lui seul de rendre compte des différentes façons d'acquérir le savoir, chacune de ces théories apporte une contribution particulière dans la compréhension des phénomènes étudiés. Pour cela, nous présentons d'abord la notion de triangle didactique, ensuite nous faisons une présentation brève de la Théorie anthropologique du didactique (TAD) en définissant le rapport institutionnel qui conditionne l'existence du rapport personnel. Ces deux rapports seront caractérisés dans ce chapitre. Il faut préciser que le rapport institutionnel/personnel fait partie d'un concept plus général, celui du rapport au savoir qui mérite lui aussi d'être précisé sans oublier les notions de praxéologies mathématiques et didactiques. Nous évoquerons aussi l'approche documentaire pour préciser et caractériser le travail documentaire de l'enseignant à l'intérieur et en dehors de la classe et leur vision qui justifie les choix faits par eux. Nous établirons le lien entre les deux théories pour justifier enfin les raisons ayant motivé nos choix théoriques et les questions spécifiques de la recherche.

2.1-Triangle didactique

Notre préoccupation est de répondre à la question de savoir quelles sont les pratiques des enseignants de mathématique quand ils utilisent les ressources pour préparer les cours et pour enseigner la dérivée. Pendant les activités de préparation et d'enseignement, les enseignants interagissent avec le concept et les autres artéfacts dont la fonction est de faciliter l'apprentissage.

De même, l'enseignant est en interaction permanente avec les élèves. Lorsqu'on s'intéresse à la nature du savoir ou des relations entre le savoir en jeu, l'enseignant et les élèves ou encore à la manière dont ces savoirs évoluent pendant l'enseignement, on se situe dans le champ de la didactique. Le triangle didactique **(Fig.4)** permet de représenter ces différentes interactions entre le savoir, l'enseignant et ses élèves. La didactique apparait dans ce cadre-là comme le moyen par lequel les chercheurs en éducation parviennent à comprendre le système didactique (Reuter et al., 2013) dans toute situation d'enseignement/apprentissage. On peut étudier le système didactique en s'intéressant à chaque sommet du triangle pédagogique (Houssaye, 2014).

En s'inscrivant dans une structure systémique encore appelée système didactique, le triangle didactique détermine non seulement les relations entre les pôles du système mais il détermine aussi les axes à partir desquels on peut analyser ces pôles (Duplessis, 2007). Selon Duplessis (2007), la réflexion repose sur les interactions systémiques de ces trois dimensions dans une situation d'enseignement/apprentissage, ainsi que sur le rapport au savoir que ces interactions permettent d'interroger.

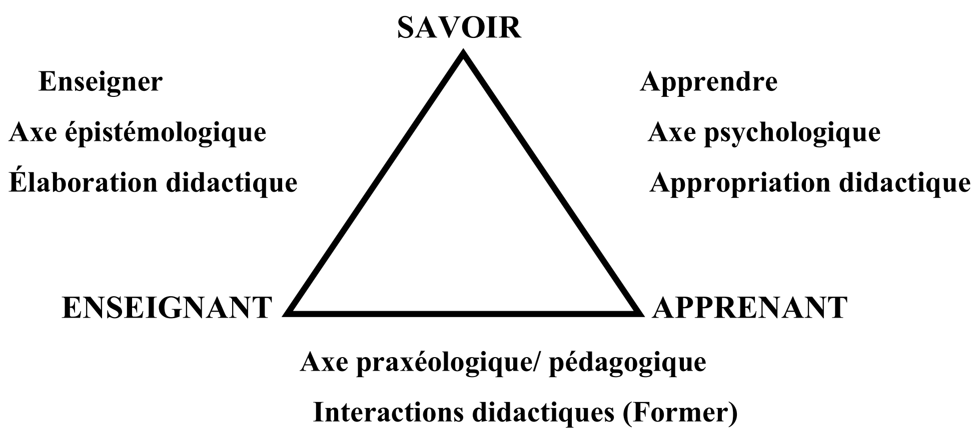


Figure 4. – Les trois heuristiques de la recherche didactique (Duplessis, 2007, p. 9)

Le premier axe de ce triangle est l'axe épistémologique. Il est davantage question ici des processus qui sont mis en œuvre dans l'élaboration didactique des contenus d'enseignement (Halté, 1993). Cet axe met en jeu la relation entre le savoir et l'enseignant. Les chercheurs y trouvent une raison pour examiner les différents objets d'enseignement comme c'est le cas de la dérivée dans cette étude, pour cela, ils doivent identifier les principaux concepts de la discipline, étudier les relations qui existent entre eux, leur structuration et leur hiérarchisation à l'intérieur du domaine considéré (Duplessis, 2007). C'est dans cet axe que se pose la question de la référence et de l'origine des savoirs, on y traite également de l'épistémologie des savoirs afin de dégager les obstacles et les enjeux liés à leur existence. On s'intéressera en particulier à la manière dont certains savoirs ont acquis un statut dans les institutions scolaires. L'enseignant utilise des ressources qui proviennent d'une institution dont il dépend comme les programmes officiels y compris des manuels scolaires. Il se doit de déconstruire puis de reconstruire un autre savoir qui sera accessible dans les classes en fonction de l'âge des élèves, de ses choix méthodologiques et de ses objectifs spécifiques (Cornu & Vergnioux, 1992). Il s'agit donc dans cet axe de la transposition didactique sur laquelle on reviendra et qui permet de structurer les pratiques sociales de référence. S'agissant de l'axe psychologique, l'enjeu ici est celui de la relation qu'entretient l'élève avec le savoir, on parle du processus d'appropriation didactique (Halté, 1993). Cet axe éclaire les mécanismes à partir desquels les élèves accèdent au savoir. Les problèmes liés à la mémoire, aux représentations, à la résolution des problèmes et sur la manière dont l'esprit humain traite l'information constituent les fondements de cet axe. Notre étude ne porte pas sur ces aspects ou sur les problèmes liés à cet axe car ici c'est l'élève qui est le plus visé. Cependant, il faut admettre que, l'analyse des pratiques des enseignants dans la planification et l'enseignement d'un concept mathématique va prendre en compte ces aspects liés à l'élève du point de vue de l'enseignant. En effet, s'il est vrai que l'enseignant doit avoir une maitrise des contenus d'apprentissage, il doit aussi les faire acquérir et pour y parvenir, il peut choisir plusieurs formes pédagogiques comme les exposés magistraux, l'apprentissage coopératif etc. il doit également se donner des buts et choisir ses stratégies d'enseignement qui l'obligent à porter une attention particulière à la démarche des élèves, à leurs connaissances et à leurs stratégies d'apprentissage (Goupil & Lusignan, 1999).

Le troisième axe est celui des praxéologies didactiques et selon Halté (1993), c'est à travers cet axe que l'on accède aux conditions de l'intervention didactique. Le rapport de l'enseignant à l'enseigné est caractérisé à travers ce qu'on peut appeler la « praxéologie » de l'enseignant. Duplessis (2007) parle de praxéologie pour faire référence au système de tâches complexes et plurielles qui sont dévolues à l'enseignant dans la gestion des situations didactiques. Ces tâches sont en réalité des activités que l'enseignant met en place soit pour enseigner, soit pour construire un cours. Pendant qu'il enseigne, par exemple, il utilise des techniques qui sont soit reconnues par tous ou alors des techniques qui sont propres à sa manière de penser et de concevoir la notion enseignée mais également à la manière dont il perçoit son travail d'enseignement.

La notion de praxéologie sur laquelle nous reviendrons a été conceptualisée dans le cadre de l'analyse du travail de l'enseignant. Une praxéologie étant constituée des tâches de conception et d'organisation des dispositifs pour l'étude d'une part, mais des tâches d'aide à l'étude, ou de direction d'étude d'autre part (Chevallard, 1997). La réflexion didactique vise ici à pouvoir rendre compte de la manière dont l'enseignant, au travers des tâches, peut prendre en charge du mieux possible l'articulation aux deux autres axes qui ont été présentés plus haut (Duplessis, 2007). La manière dont l'enseignant construit les séquences d'enseignement, les objectifs qu'il se donne, le déploiement en salle de classe, des stratégies qui sont adaptées à la classe et son style didactique sont des aspects liés à l'axe de la praxéologie et sur lesquels notre étude trouve son fondement. En somme, deux axes nous intéressent principalement, à savoir l'axe épistémologique car il nous permet de savoir comment les savoirs existent dans les institutions mais également l'axe praxéologique dans la mesure où le travail de l'enseignant dans la salle de classe y trouve son explication.

2.2-Notion de transposition didactique

Il existe des différences entre les savoirs à enseigner à l'école et les savoirs savants qui proviennent des milieux scientifiques de recherche y compris les savoirs enseignés en classe et les savoirs réellement appris par les élèves (Chevallard, 1985). Les savoirs à enseigner à l'école sont des savoirs qui sont délimités par un ensemble d'attentes sociales; ils doivent répondre aux exigences des programmes, et ceux-ci doivent exprimer les habiletés et les compétences que doivent acquérir les individus afin de se comporter en citoyens qui contribuent au progrès de la société (Van der Maren, 1993). La nature des différents objets de savoir, ce qui se passe hors de la classe et le rapport de l'enseignant au savoir enseigné constituent des pistes pour saisir les mécanismes de construction des connaissances mathématiques (Tavignot, 1995). Chevallard (1985) propose la notion de transposition didactique pour permettre de comprendre comment les savoirs savants deviennent des savoirs appris par les élèves. Chevallard (1985) propose un modèle permettant de comprendre l'ensemble des transformations que subit un savoir pour devenir un savoir enseigné dans le milieu scolaire, car les mathématiques construites dans l'histoire par les mathématiciens ne sont pas enseignées dans les lycées et collèges telles quelles. Elles subissent des transformations à plusieurs niveaux et ces transformations sont dues au phénomène que Chevallard appelle transposition didactique et qu'il définit en ces termes :

> Un contenu de savoir ayant été désigné comme savoir à enseigner subit dès lors un ensemble de transformations adaptatives qui vont le rendre apte à prendre place parmi les objets d'enseignement. Le "travail" qui d'un objet de savoir à enseigner fait un objet d'enseignement est appelé transposition didactique (Chevallard, 1985, p. 39).

Un savoir mathématique fait partie des savoirs qui appartiennent à la communauté des mathématiciens. En général il est produit dans les laboratoires des universités et leur diffusion vise la progression des connaissances dans le domaine. On retrouve autour de ce type de savoirs, les chercheurs en mathématiques qui assurent sa diffusion (Audigier, 1988) . De nombreux chercheurs qualifient ces savoirs de « savoirs savants ». Les « savoirs savants » sont « un corpus qui s'enrichit sans cesse de connaissances nouvelles, reconnues comme pertinentes et valides par la communauté scientifique spécialisée. (…) le savoir savant est essentiellement le produit de chercheurs reconnus par leurs pairs, par l'université. Ce sont eux qui l'évaluent » (Le Pellec, 1991, p. 40). C'est ce point de vue qui est repris en ces termes et qui traite de savoirs savants « des savoirs validés, produits en un certain lieu et dans certaines conditions, un monde aux limites plus ou moins nettes, ‘‘la communauté scientifique'', qui légitime ces savoirs, leur confère un label d'exactitude, d'intérêt …» (Audigier, 1988, p. 14). De ce point de vue, la question est de savoir comment ces savoirs savants font leur entrée dans le milieu scolaire.

Les «savoirs à enseigner » sont ceux « qui sont décrits, précisés, dans l'ensemble des textes ‘‘officiels'' (programmes, instructions officielles, commentaires…); ces textes définissent des contenus, des normes, des méthodes » (Audigier, 1988). *Ils* sont arrêtés soit par les enseignants-chercheurs à qui le Gouvernement confie une partie de ses prérogatives, soit par les politiques, les associations d'enseignants, les conseillers pédagogiques, les représentants des groupes sociaux, etc. Toutes ces personnes qui pensent les contenus d'enseignement appartiennent à ce que Chevallard (1985) désigne par la noosphère. Ces types de savoirs sont consignés dans les programmes scolaires édités par le Ministère et changent généralement selon le temps. Dans les programmes officiels de mathématiques sont précisés, généralement, les types de savoirs à enseigner, les techniques nécessaires pour leur enseignement et aussi les stratégies d'enseignement et d'évaluation des élèves (Audigier, 1988). En guise d'exemple, bien que le concept de dérivée soit inscrit dans certains pays au secondaire, la notion de dérivée partielle ne figure pas dans lesdits programmes car il y a des choix qui sont faits. De même que certains savoirs qui existent dans la communauté mathématique sont réadaptés pour être inscrits dans les programmes scolaires. A ce propos, les Grecs associaient la tangente à une droite touchant le cercle en un point tandis que dans certains programmes, la définition proposée fait référence à une droite dont le support est perpendiculaire à un rayon du cercle. Dans une certaine mesure, le savoir à enseigner peut également être retrouvé dans les manuels scolaires et les autres ressources destinées à l'usage des élèves. Dans ceux-ci, les auteurs proposent les contenus selon un certain ordre. On y retrouvera aussi des activités pour introduire la notion, les propriétés, la définition et les notes de cours qui constituent le savoir institutionnel.

Le savoir enseigné est celui que l'enseignant a construit et qu'il mettra en œuvre dans la salle de classe, c'est celui qui est énoncé pendant l'enseignement (Audigier, 1988). Ce type de savoir est le fruit de la modification faite par l'enseignant. Ce dernier doit se servir des programmes, des manuels scolaires et de toutes les autres ressources pour construire son enseignement. Il doit ensuite faire des choix sur l'ordre à partir duquel il va faire sa présentation, avec quelles activités. L'enseignant pourra opter pour une représentation au détriment des autres, ou bien il peut choisir d'éviter par exemple une approche car elle est plus intuitive au profit d'une autre plus algébrique. Cependant, si les mathématiques savantes n'étaient pas modifiées par les enseignants dans la salle de classe, elles seraient difficilement accessibles aux élèves et on parlerait des difficultés d'apprentissage(Weber, 2004). Le dernier type de savoir est celui de l'élève. Ce dernier, lorsqu'il apprend des savoirs et les intériorise en fonction de son expérience et de ses représentations, on dit qu'il a acquis des connaissances et dans ce cas la connaissance de cet élève est le résultat de son interprétation et de sa compréhension subjective et partielle des savoirs (Thouin, 2014). Généralement, on observe les connaissances des élèves dans les notes de cours, dans les cahiers des évaluations et toutes les autres productions faites par eux. On peut donc observer qu'indépendamment du milieu, l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques se déroulent dans un processus complexe de transposition didactique et à ce propos, Chevallard (1985) questionne le statut de tout savoir selon le milieu de son appartenance et pose le problème du rapport au savoir. Cependant, la question du rapport au savoir est diversement interprétée par les auteurs selon les courants de pensées.

La notion de rapport au savoir a connu une structuration au fil des années à travers des écoles de pensées et ce dans les milieux francophones de l'éducation et de la formation (Nafti-

Malherbe & Samson, 2013). Il s'est constituée d'abord dans le champ de la psychanalyse, ensuite en sociologie et enfin en anthropologie (Therriault et al., 2013). Du point de vue de la psychanalyse le rapport au savoir est lié à un désir de savoir, et dans ce cas, apprendre consiste à se donner dans un investissement pour un objet de savoir donné (Beillerot, 1989). Pour le courant psychanalytique, l'inconscient est un aspect fort présent et le désir du sujet d'apprendre naît d'une envie de création et d'une pulsion pour le savoir (Mosconi, 2000). Ce type de rapport au savoir est un rapport au monde social qui est évolutif tout au long de la vie (Catel et al., 2002). Ce type de rapport au savoir n'a de sens que s'il est saisi par un sujet pour lequel il prend sens (De-Léonardis et al., 2002). Le sujet cesse d'avoir un rapport au savoir et devient son propre rapport au savoir car ses actions traduisent sa volonté d'apprendre (Beillerot, 2000, p. 49). Du point de vue sociologique, le rapport au savoir naît d'un désir personnel d'apprendre quelque chose en interagissant avec le monde dans lequel on vit et en interaction avec les autres (Charlot, 1997, 1999). C'est donc une relation entre un sujet et un savoir qui pousse le sujet à questionner le sens et les raisons de son apprentissage (Beaucher et al., 2013). Contrairement au courant psychanalytique, le rapport au savoir dans un courant sociologique donne au sujet apprenant un statut social dans un contexte où le désir d'apprendre ne disparait pas du fait de ses relations sociales. Mais le plus important c'est le fait de dissocier le désir simple d'apprendre qui naît d'une pulsion et un désir qui trouve son explication dans le sens et la valeur que le sujet attribue au processus et même au produit de ce savoir (Catel et al., 2002). En somme, les approches psychanalytiques et sociales du rapport au savoir mettent l'accent sur le sujet en quête du savoir. Les variables liées au désir et aux relations du sujet avec le monde, les autres et lui-même sont le produit de l'action du sujet. Ces deux courants ne s'intéressent pas à la nature du savoir en soi, c'est ce manque qui justifie le troisième courant qui situe le rapport au savoir dans une perspective anthropologique et didactique (Bosch & Chevallard, 1999; Chevallard, 1989, 1992, 1999, 2003b).

Chevallard (1985) a théorisé le rapport au savoir du point de vue anthropologique. En questionnant la manière à partir de laquelle le savoir naît, existe et survit dans un environnement donné et sous quelles conditions, Chevallard (1985) a permis de comprendre comment les savoirs font pour exister et pourquoi, car selon lui, un savoir n'existe pas « in vacuo », dans un vide social : tout savoir apparait, à un moment donné, dans une institution donnée, comme ancré dans une ou des institutions (Chevallard, 1989). Et la transposition didactique rend compte de tous les processus de modification des savoirs depuis leur production jusqu'à leur enseignement (Bosch & Gascón, 2005). Les questions sur les conditions et les contraintes liées à ces savoirs situent la réflexion didactique dans un champ écologique (Bosch & Chevallard, 1999, p. 4) et à cet effet, la TAD offre des outils pour saisir les objets mathématiques dans leur écosystème et les contraintes imposées par les différentes institutions dans lesquelles ils sont produits.

Selon la TAD, l'activité mathématique et donc l'activité d'étude en mathématiques se situe dans l'ensemble des activités humaines et des institutions sociales. Les mathématiques comme activité humaine s'enseignent aussi dans les écoles et s'apprennent dans les différentes institutions sociales par des personnes qui occupent chacune une position dans ces institutions sociales. Par exemple, préparer une leçon, enseigner un concept mathématique, étudier une fonction, préparer une salade sont considérés comme des activités humaines. Chevallard (1999) considère que dans la réalisation de ces activités, les personnes agissent sur des objets distinctifs qui ont du sens pour eux, comme les mathématiques, les élèves, les enseignants, les manuels etc, tels peuvent être quelques objets qui fondent la réflexion en didactique des mathématiques.

Aussi, un cours de mathématiques au secondaire est une institution dans laquelle on distingue deux personnes : un enseignant et un élève qui ont chacune une manière de concevoir l'objet mathématique en jeu. L'élève ou l'enseignant ont chacun leur propre rapport personnel aux objets mathématiques en tant qu'individu qui appartient à une institution (Chevallard, 1992) de même que chaque institution a son propre rapport à tout objet mathématique (Bosch & Chevallard, 1999) lequel conditionne et détermine le rapport personnel des individus de l'institution. Pour saisir ces différents rapports, certaines notions comme l'objet, l'individu, la personne, les institutions, le rapport personnel et le rapport institutionnel permettent à la TAD de caractériser les savoirs dans les institutions mais également les pratiques des enseignants (Bosch & Chevallard, 1999; Chevallard, 1999).

2.3-Théorie anthropologique du didactique (TAD)

Le postulat de base de la TAD stipule que « Tout est objet » (Chevallard, 2003b) et à ce propos, Bosch et Chevallard (1999) identifient des objets tels que les institutions, les individus et les positions qu'occupent les individus dans les institutions. En venant occuper ces positions, les individus deviennent les sujets des institutions- sujets actifs qui contribuent à faire vivre les institutions par le fait même de leur être assujettis » (p.4). Mis à part ces objets on peut considérer aussi comme objet le concept de dérivée, un cours de mathématiques, les enseignants, les élèves, la dérivée en un point et une salle de classe.

2.3.1-Objets – Personne – Institution

La question du savoir et des savoirs, de leur production et de leur gestion sociales est centrale en toute société humaine (Chevallard, 1989). En TAD, la notion d'objet est fondamentale car il constitue le matériau de base de la construction théorique envisagée (Chevallard, 1992). Ainsi pour Chevallard, *« tout est objet »*. Les personnes, les institutions et les positions qu'occupent ces personnes dans les institutions sont des objets d'un type particulier au sens de la TAD. Les objets peuvent être « mathématiques », « paramathématiques » ou protomathématiques ». Les objets de savoirs sont les « notions » enseignées dans la discipline, par exemple la dérivation, l'intégration, ces notions sont des notions mathématiques. Lorsqu'un enseignant planifie ou enseigne ces notions, il souhaite ou alors il s'attend que chacun de ses élèves puisse « maîtriser » et donner la définition du concept, ses axiomes, ses propriétés et même qu'il soit capable de les utiliser dans des contextes variés. Explicitement, ces notions font toujours l'objet d'un enseignement. Il existe dans l'environnement scolaire des objets qui ne font pas l'objet d'un enseignement. Ces objets sont considérés comme des auxiliaires de l'enseignement et de l'apprentissage, cependant ils ne sont pas évalués. Selon Chevallard (1985), les objets utilisés pour étudier les notions mathématiques sont appelés les objets paramathématiques, par exemple un repère orthogonal pour représenter les fonctions affines, l'étude du sens de variation d'une fonction permet d'étudier cette fonction, la notion d'équation et même les méthodes de démonstration. Ce qui fonde la spécificité de ces notions-outils c'est le fait qu'elles ne sont pas évaluées. Enfin, les objets protomathématiques sont des notions mobilisées implicitement par le contrat didactique et appartiennent au milieu des actions des élèves (Brousseau, 2001). Ces différents objets sont précis et n'existent que parce qu'ils ont du sens pour les personnes qui les manipulent. Ainsi un objet protomathématique existe s'il existe un rapport à cet objet ou bien dès qu'une personne ou une institution le reconnait en tant qu'objet.

Les institutions définissent dans les programmes leurs idées et leurs valeurs à propos des objets mathématiques. Ces valeurs traduisent la manière dont elles établissent leur rapport avec ces objets. Un sujet qui appartient à l'une de ces institutions et qui occupe une position dans celle-ci développe un rapport particulier avec les objets de savoir de l'institution. Cette appartenance à l'institution oblige le sujet à modifier son propre rapport au savoir afin que ce dernier soit similaire à la manière dont l'institution perçoit cet objet de savoir, on dit dans ce cas que le sujet est assujetti à l'institution. D'une part, si le rapport à un objet de savoir d'un sujet se distingue du rapport de l'institution à cet objet, alors ce sujet sera vu comme un mauvais sujet pour l'institution. D'autre part, si un individu x entre dans une institution *I*, alors il devient un sujet *S* de l'institution et du fait des nombreux assujettissements aux institutions multiples, il acquiert le caractère de *Personne*. Chevallard (2003) définit la *personne* comme étant le couple formé par un individu x et le système de ses rapports personnels $R(x, O)$, à un moment donné de l'histoire de cet individu x. Dans cette perspective, est considérée comme institution *I,* un dispositif social « total », qui peut certes n'avoir qu'une extension très réduite dans l'espace social (il existe des « micro-institutions »), mais qui permet – et impose – à ses sujets, c'est à dire aux personnes *X* qui viennent y occuper les différentes positions *p* offertes dans *I*, la mise en jeu de manières de faire et de penser propres

Dans le cas qui est le nôtre, le ministère, les lycées et collèges, les enseignants, la classe de mathématiques, de manière générale le système éducatif y compris l'enseignement de la dérivée (Hardy, 2009) sont des institutions, certaines englobant d'autres. Dans l'institution classe, on peut identifier deux positions qui sont celles de professeur et d'élève. Le travail du professeur est dicté par l'institution « établissement » qui elle aussi est influencée par l'institution « Ministère ». Ces différentes influences déterminent la nature des rapports personnels et institutionnels à l'objet de savoir « dérivée ». Comme il sera question du rapport institutionnel et du rapport personnel dans ce travail, nous présenterons ces deux notions dans la section suivante.

2.3.2-Rapports personnels et rapports institutionnels

Lorsqu'un objet *O* existe pour une personne *x*, on dit encore que *x connaît O* et le rapport *R* (*x*, *O*) précise *la manière dont x connaît O*. Le rapport personnel *R* existe donc dès qu'une personne x connait un objet *o* ou bien si l'objet a du sens pour elle. Le rapport personnel *R* (*x*, *O*) décrit donc toutes les interactions que x peut avoir avec l'objet o, que x le manipule, l'utilise, en parle, en rêve. On dira donc que *O* existe pour x si le rapport personnel de x à O est « non vide » et on note $R(x, O) \neq \emptyset$. L'apprentissage apparait dans ce cas comme une modification du rapport que l'individu x entretient avec l'objet *O*. Au cours de cet apprentissage, il se produit généralement deux choses : le rapport peut commencer à exister s'il n'existait pas déjà ou bien, ce rapport se modifie simplement s'il existait déjà. L'apprentissage qui est ainsi fait changer la personne sans changer l'individu.

De même, lorsqu'une institution *I* reconnait un objet de savoir *O*, on dit qu'il existe entre cette institution et cet objet un **rapport institutionnel** que l'on note *R(I, O)* (Chevallard, 1992, pp. 86-87). Le rapport institutionnel rend compte de ce qui est fait dans une institution avec un objet. Ainsi, tout sujet de l'institution *I* qui occupe une position p au sein de cette institution entretient avec un objet O un rapport institutionnel noté $R_I(p, O)$. Ce rapport institutionnel caractérise les conditions et les contraintes sous lesquelles se crée le rapport personnel de l'individu x à l'objet O dans la position p. On pourra dire que l'individu x est un bon sujet de l'institution *I* en position p dès lors que son rapport personnel $R(x, O)$ se conforme au rapport institutionnel $R_I(p, O)$. Traiter du rapport au savoir permet de saisir le rapport des institutions aux différents objets de savoir et les contraintes liées à l'existence de ce rapport. Comme le relève Chevallard (1999), la notion du rapport au savoir place la didactique dans le champ de l'anthropologie de la connaissance. Cependant, ces rapports institutionnels semblent difficiles à maitriser, ainsi les pratiques d'enseignement qui sont aussi les pratiques humaines peuvent être décrites en termes de praxéologie (Bosch & Chevallard, 1999). Dans la section suivante, nous présentons en quoi les praxéologies permettent d'avoir un éclairage sur ces différents rapports institutionnels.

2.3.3-Notion de praxéologie mathématique

Selon Bosch et Chevallard (1999) l'approche praxéologique permet de décrire le rapport institutionnel. Pour observer la naissance ou l'évolution d'un rapport à un objet *O*, il faut observer l'individu *x* ou l'institution *I* « dans son rapport à *O* », dans les activités des individus *x* ou des sujets de *I* qui « activent » o. Pour cela, certaines notions clés de types de tâches, de technique, de technologie, de théorie permettent ainsi de décrire l'activité mathématique. Un objet *O* est mobilisé dans l'exécution d'une certaine tâche *t* lorsqu'on effectue cette tâche selon une certaine technique τ relative au type *T* sous laquelle l'institution ou la tache *t* s'accomplit et la pense (Chevallard, 2007, p. 6).

La TAD situe « l'activité mathématique, et donc l'activité d'étude en mathématiques, dans l'ensemble des activités humaines et des institutions sociales ». Son postulat de base est que toute activité humaine peut se décomposer en une succession de tâches de certains types. Les notions de type de tâche, de technique, de technologie et théorie permettent de modéliser les pratiques sociales et donc l'activité mathématique en particulier (Bosch & Chevallard, 1999). Étant donné que les pratiques sociales peuvent être analysées de différentes manières en un « système de tâche » bien défini que l'on peut bien observer dans la pratique, il n'est pas possible de définir une tâche sans tenir compte de son environnement anthropologique puisque :

> « Le problème de la délimitation des tâches dans une pratique institutionnelle donnée reste ouvert et variera selon que l'on adopte le point de vue de l'institution où se déroule la pratique ou bien celui d'une institution extérieure d'où l'on observe l'activité et pour la décrire dans un but précis. La sémantique du mot reste donc ouverte et englobe des activités culturellement aussi diverses que le fait de jouer une pièce de Mozart au piano, de calculer le produit de deux entiers, de fermer une porte, de prendre le bus, de saluer quelqu'un, de dériver une fonction, de résoudre un problème de proportionnalité, de faire un cours de grec ancien, de corriger des copies de contrepoint, de danser un tango, etc.» (Bosch & Chevallard, 1999, p. 5).

Globalement, la notion de tâche nous renvoie à l'idée d'un travail que doit faire une personne pour répondre à une demande et aux attentes d'une autre personne considérée comme destinataire et évaluatrice de celle-ci (Reuter et al., 2013). Selon ces auteurs, une tâche est le fait d'un travailleur qui, soumis à des contraintes temporelles et/ou matérielles, généralement imposées par des facteurs extérieurs, se doit dans l'obligation de l'accomplir. D'un point de vue didactique, une tâche permet d'observer de quelle manière les contenus d'enseignements sont mises en œuvre dans la classe par l'enseignant ou dans les manuels (Reuter et al., 2013). C'est la face visible de la transposition didactique puisque c'est à partir d'une tâche que l'on peut voir la forme que prend un contenu à enseigner. Une tâche permet également de comprendre le travail de l'enseignant. Dans ce sens, la notion de tâche est utilisée pour analyser les contraintes qui pèsent sur le travail de l'enseignant comme les instructions officielles. Du côté de la didactique des mathématiques, les tâches ont une signification selon que l'on observe du côté des élèves ou des enseignants ou même du chercheur. Du côté des enseignants, la tâche porte sur le savoir mathématique et consiste au choix au processus d'enseignement en général puisqu'il est chargé d'identifier le savoir effectivement enseigné (Reuter et al., 2013). Une tâche t (et le type de tâche parent T) s'exprime par un verbe précis. En guise d'exemple, résoudre une équation du premier degré à une inconnue est une tâche qui appartient au type de qui consiste à résoudre les équations. De même, calculer le nombre dérivé d'une fonction en un point est une tâche appartenant au type de tâche qui revient à calculer la dérivée d'une fonction. Selon Bosch et Chevallard (1999), quand une tâche t relève d'un type de tâche T, on notera $t \epsilon T$ (Bosch & Chevallard, 1999). Les tâches ont la particularité d'être exprimées à l'aide des verbes à l'infinitif. Pour Chevallard (1999), tout objet mathématique provient des pratiques observables dans des institutions. Chaque tâche nécessite une technique ou des techniques de réalisation. De ce fait, les tâches et les techniques associées vont permettre de décrire les contenus à enseigner (Reuter et al., 2013). La notion de « praxéologie » qui est proposée par Chevallard (1999) permet d'étudier dans un premier temps le lien entre un type de tâche et une technique puis de justifier du lien qui existe entre le type de tâche et la technique, en d'autres termes, il s'agit d'étudier les manières de faire qui sont reconnues par les « institutions », par exemple, pour multiplier deux fractions on multiplie entre eux les numérateurs et on fait de même des dénominateurs. Dans un second temps, cette approche permet de justifier les liens existants c'est-à-dire qu'on cherche à comprendre le lien entre les pratiques, entre les tâches et les techniques et finalement le lien entre les pratiques et la théorie (Reuter et al., 2013). Ainsi à travers la TAD, il est possible de mieux saisir les choix que font les institutions lorsqu'il est question de l'enseignement d'un sujet donné, aussi lorsqu'il est question de comprendre les conséquences de ces choix puisque les choix opérés portent sur les contenus d'enseignement ou les objets mathématiques puis également sur les objets paramathématiques et protomathématiques.

La TAD considère que, en dernière instance, toute activité humaine consiste à accomplir une tâche *t* d'un certain type *T*, au moyen d'une technique τ, justifiée par une technologie θ qui permet de la penser, voire de la produire, et qui à son tour est justifiable par une théorie Θ. Ainsi pour Chevallard (2017), toute praxéologie contient un type de tâches, l'accomplissement de ce type de tâche suppose la mise en œuvre d'une technique, un savoir-faire, c'est-à-dire une certaine manière de faire. Cette technique doit être construite car aucune technique n'est donnée par la nature (Chevallard, 2017). La technique est le moyen par lequel on arrive à résoudre la tâche ou un type de tâches. Comme l'ont indiqué Barbé, Bosch, Espinoza, et Gascón (2005), certaines techniques sont de type algorithmique et ne permettent que de résoudre une partie de la tâche et d'autres non. Certaines techniques sont bien connues et identifiables tandis que d'autres ne le sont pas. Une technique est généralement relative à une institution donnée, autrement dit, les institutions reconnaissent certaines techniques comme étant naturelles. Et cette naturalité pousse les acteurs de l'institution à ignorer certaines techniques alternatives (Chevallard, 1999).. Selon

Chevallard (1999), il existe une tendance assez générale à l'algorithmisation. De même, il reconnait que pour un certain type de tâche, il peut exister une seule technique ou du moins un petit nombre de techniques institutionnellement reconnues à l'exclusion des techniques alternatives qui existent et pourtant, chose assez fréquente, les sujets des institutions développent de véritables passions institutionnelles pour les techniques naturalisées dans l'institution (Chevallard, 1999). De ce point de vue le bloc pratique constitué du type de tâche et d'une technique $[T/\tau]$ est le bloc du savoir-faire, lequel ne saurait exister sans une « parole raisonnée », au mieux, sans un discours appelé technologie qui justifie la technique en la rendant intelligible et, dans certains cas même, elle permet de produire cette technique qui naît alors de ce qui deviendra bientôt sa technologie (Chevallard, 2017). La technologie permet ainsi d'expliquer, de rendre intelligible et d'éclairer la technique utilisée. Et comme le relève Chevallard (1999), en mathématiques, la justification l'emporte sur l'explication. Enfin, la théorie est ce discours intelligible qui vient justifier la technologie ayant permis de justifier une technique utilisée dans la réalisation d'une tâche donnée.

En guise d'exemple, considérons un type de tâche T qui consiste à calculer la valeur de la dérivée de la fonction dont la règle est $f(x) = x^3 - 3x + 2$ au point d'abscisse $x_0 = 2$ et ce à l'aide de la définition $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Une des techniques voudrait que l'on calcule d'abord la quantité $f(x) - f(x_0)$ qui fera apparaitre un facteur égal à $x - 2$ présent au dénominateur du quotient différentiel.

Calculer f(2), évaluer $f(x) - f(2)$, remplacer dans le quotient différentiel x par la valeur 2 pour rechercher une éventuelle forme indéterminée.

Factoriser $f(x) - f(2)$ puis simplifier le facteur commun,

Remplacer encore x par la valeur 2 pour obtenir la valeur de la dérivée au point 2.

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^3-3x-2}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+1)}{x-2} = \lim_{x \to 2}(x^2 + 2x + 1) = 4 + 4 + 1 = 9.$$

La technologie dans ce cas se résumerait à la définition du nombre dérivé : « Soit f une fonction définie sur un intervalle K de $\mathbb{R}$, $x_0 \in K$. On dit que f est dérivable en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(a)}{x-x_0}$ existe et est finie. Cette limite est appelée nombre dérivé de f au point x_0 et est noté $f'(x_0)$. On a donc $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(a)}{x-x_0} = f'(x_0)$ »

Dans ce cas, la théorie selon Chevallard (2017) est cet autre discours qui vient rendre intelligible la technologie. Pour l'exemple ci-dessus, la théorie est celle de l'analyse réelle.

Figure 5. – Exemple de praxéologie mathématique du calcul du nombre dérivé

Dans la figure 4 ci-dessus, on parle d'une organisation mathématique locale. Plusieurs autres techniques similaires à celle utilisée dans cette organisation peuvent faire appel à la même technologie. Ainsi, lorsque plusieurs de telles praxéologies s'articulent autour d'une même technologie, elles forment des organisations locales qui, à leur tour s'articulent autour d'une théorie pour former d'autres organisations plus larges au point de constituer ce qu'on appellera le savoir mathématique (Bosch & Chevallard, 1999). En d'autres mots, pour décrire l'organisation de l'enseignement des mathématiques, Chevallard (1999) propose l'organisation praxéologie

$[\mathrm{T}/\tau/\theta/\Theta]$ constituée d'un bloc pratique $[T/\tau]$ ou encore le bloc du savoir-faire et d'un autre bloc, celui de la connaissance théorique $[\theta/\Theta]$ qui constitue le bloc du savoir.

En guise d'exemple la revue de la littérature historique à propos de la dérivée qui a précédé dans le chapitre premier de cette thèse inscrit le développement de la dérivée dans une praxéologie mathématique. En effet, les types de tâches sont associés aux problèmes auxquels étaient confrontés les Grecs, à savoir les problèmes de vitesse, la détermination des tangentes, les problèmes d'optimisation. La dérivée est apparue dans ce cas comme un objet permettant la mise en place d'une technique pour résoudre ces problèmes selon des discours technologiques basés sur les infinitésimaux, les infiniment petits, la vitesse et dont la théorie est explicitée par les éléments de l'analyse réelle(Rouy, 2007). Pour enseigner une organisation mathématique, l'enseignant met en place une organisation didactique qui se décline en six moments qui permettent d'observer l'activité mathématique comme étant une praxéologie (Chevallard, 2002). Une partie de ce travail consistera à identifier et à décrire les organisations mathématiques reconnues par les institutions scolaires et qu'on peut retrouver dans les programmes et les manuels scolaires.

Dans notre projet, il sera donc question d'étudier toutes ces organisations mathématiques locales qui permettent de décrire et de mieux expliquer le concept de la dérivée pour ce niveau scolaire. Il ne sera pas question de dire ce qu'est la dérivée, mais de décrire les types de tâches et les techniques qui composent les praxéologies institutionnelles où intervient la dérivée et quels sont les éléments technologiques et théoriques qui sous-tendent ces pratiques (Bosch & Chevallard, 1999). Afin de mieux procéder à cette description, il faut essayer de comprendre quels sont les éléments qui constituent les techniques ou la technologie employées dans une organisation praxéologique. Pour cela, la notion d'objet ostensif ou non ostensif a été abordée par Bosch et Chevallard (1999) pour caractériser la nature des objets mathématiques.

Pour faire les mathématiques, on a besoin de discours, de figures et de symboles, mais ce qui est important serait au-delà des mots et des écritures (Bosch & Chevallard, 1999, p. 9). Par objet ostensif, Bosch et Chevallard (1999) font référence à tout objet ayant une nature sensible, une certaine matérialité, et qui de ce fait acquiert pour le sujet humain une réalité perceptible (p.10). Dans cette catégorie d'objets figurent les mots de la langue utilisée, les graphismes, les gestes, les matériaux (compas, règle, ..). Les objets non ostensifs quant à eux sont des objets qui existent institutionnellement au sens qu'on leur attribue une existence sans pour autant pouvoir être vus, dits, entendus, perçus ou montrés par eux-mêmes : ils ne peuvent qu'être évoqués ou invoqués par la manipulation adéquate de certains objets ostensifs associés comme un graphe. Ces objets non ostensifs comprennent les idées, les intuitions, les concepts et de ce point de vue, la dérivée comme les fonctions ou les limites sont des objets non ostensifs. Dans toute activité mathématique, il y a une co-activation d'objets ostensifs et d'objets non ostensifs, ce qui permet d'expliquer en quoi la mise en œuvre d'une technique peut se traduire par la manipulation d'ostensifs réglée par les non ostensifs.

2.3.4-Notion de praxéologie ou organisation didactique

Le processus par lequel l'enseignant crée ou recrée une organisation mathématique donnée est le processus didactique (Barbé et al., 2005). Selon ces auteurs, ce processus se compose de six moments distincts et hétérogènes, lesquels dépendent de l'organisation mathématique qui est en jeu, chacun des moments remplissant une fonction spécifique pour la réussite du processus didactique. Ces principaux moments comprennent :

- Le moment de la première rencontre où l'on présente la nouvelle organisation mathématique en jeu, on laisse découvrir un certain type de tâches;
- Le moment de l'exploration du type de tâches qui permet de voir émerger une technique dite embryonnaire qui va permettre plus tard d'élaborer une technique plus adaptée;
- Le moment technique pendant lequel la technique embryonnaire est améliorée et rendue plus efficace pour résoudre le type de tâche;
- Le moment technico-théorique où émerge le discours qui va soutenir la technique qui a été élaborée en laissant de côté les discours antérieurs non nécessaires ou alors inadaptés au contexte actuel du type de tâche;
- Le moment de l'institutionnalisation qui correspond au moment où la connaissance est reconnue comme valide par l'institution;
- Le moment de l'évaluation pendant lequel l'élève et l'enseignant s'interrogent sur les connaissances qui ont été construites à ce niveau du processus.

Dans le cadre de cette étude, l'observation du travail de l'enseignant en classe vise à identifier ces différents moments et à les caractériser. Nous envisageons, pour ce qui est du concept de dérivée, de mener une analyse praxéologique dans le but de dégager les tâches et types de tâches qui sont employés ou préconisés avec un regard attentif sur les techniques qui sont mises en avant, les technologies qui vont permettre de les justifier et les théories qui les soutiennent, ainsi que les objets ostensifs et non ostensifs qui permettent de mieux cerner le concept de dérivée. Deux considérations émergent à nos yeux. La première impose au chercheur pour ses analyses ultérieures de construire une organisation mathématique de référence tirée des programmes officiels, des manuels scolaires et des mathématiques savantes. La deuxième considération est celle qui concerne l'analyse du rapport institutionnel. Celle-ci peut être faite à travers les principales organisations praxéologiques que l'on retrouve dans des programmes, des manuels ou bien à travers des observations en classe (Chaachoua, 2007). Par ailleurs, si l'institution « ministère de l'éducation » précise dans les programmes officiels les objets à enseigner, les recommandations, les finalités et les enjeux liés à l'enseignement de ces objets, Chaachoua (2007) attire l'attention sur le fait que les contenus des programmes officiels ne suffisent pas à eux seuls pour caractériser le rapport institutionnel à un objet. L'une des raisons évoquées pour justifier cette thèse selon Chaachoua (2007) est que les programmes officiels ne sont pas des textes de savoir, mais qu'ils traduisent simplement un discours sur ce qui pourrait être perçu comme en étant un. Au-delà de ce premier argument, il y a aussi le fait qu'il serait quasiment impossible de retrouver dans un texte de savoir, même si le programme en était un, toutes les pratiques en lien avec l'objet en question. Pour cela, Chaachoua (2007) préconise l'analyse des manuels comme un autre moyen d'accéder et de compléter l'analyse des programmes si on veut avoir accès au rapport institutionnel. Ainsi le manuel de mathématique dans les recherches en didactique des mathématiques permet d'analyser le curriculum et les processus de transposition didactique (Assude & Margolinas, 2005).

2.3.5-Quelques contributions de la TAD dans les recherches en didactique

Le choix d'un cadre théorique pour cette recherche est assujetti non pas seulement aux objectifs de recherche poursuivis mais également aux nombreuses autres recherches qui ont précédé celle-ci. Nous avons la TAD comme l'un des cadres d'analyse pour cette recherche. Certains auteurs ont mis en évidence, l'existence de certaines praxéologies qui semblent complexifier l'apprentissage et même l'enseignement des concepts mathématiques. Schneider (2007) propose de distinguer les praxéologies de type I et les praxéologies de type II. Le premier type de rationalité relève d'un travail sur le système vers la construction d'un modèle, c'est-à-dire la recherche des techniques de résolution de problèmes portant sur les grandeurs, des objets géométriques et des « nombres » ainsi que des procédures de validation de ces techniques, procédures qui peuvent alors rester liées aux caractéristiques des objets en jeu (Schneider, 2007). Par exemple, on peut utiliser une argumentation de type cinématique pour une tâche correspondant à un problème de vitesse variable, ceci a pour fonction de permettre une compréhension qui associe l'objet mental à l'objet mathématique.

Les praxéologies de type II ont quant à elle pour tâche la constitution d'une théorie capable d'englober dans une organisation déductive et autonome les outils de preuve. Un exemple de ce type de rationalité est la formulation du concept de limite avec des quantificateurs et des inégalités qui fait abstraction de toute considération géométrique ou cinématique. Il s'agit en d'autres termes des discours tirés de l'analyse réelle formalisée(Rouy, 2007). Les praxéologies de type I et II posent le problème de la dualité outil – objet. Au niveau du secondaire existe une difficulté à élaborer un discours rationnel pour présenter la dérivée et ceci simplement parce que les organisations mathématiques potentielles correspondent à deux cadres différents(Rouy, 2007), c'est le cas par exemple de la tangente étudiée au collège et dans un cours d'analyse. Si l'on considère les praxéologies de type II, elles sont associées à l'analyse réelle (nombres, réels, limites, dérivées…) et les discours qui soutiennent ce cadre appartiennent à la communauté mathématique universitaire où les techniques et les tâches sont construites à partir d'une théorie qui a un fort pourvoir de légitimation, ce qui lui permet de se passer d'un discours technologique. Rouy (2007) exprime sa crainte face aux pratiques d'enseignement qui sont dénuées de toute justification technologique et parle des praxéologies à trou ou des praxéologies de niveau de rationalité zéro. Les praxéologies à trous consistent à proposer aux élèves du secondaire un cours de type universitaire dont on en retire toute justification immédiate : on parvient ainsi à conserver les définitions et les propriétés qui seront reliées entre elles selon les prescriptions du programme d'enseignement mais les élèves quant à eux ne disposent d'aucun moyen pour réfléchir sur la pertinence des résultats avancés; d'où la notion de rationalité zéro (Gantois, 2012). Ce qui est mis en avant dans ce type de praxéologie c'est l'utilité du concept à résoudre des exercices standards, ce qui suppose implicitement que l'élève qui sait résoudre les exercices d'application des propriétés qui ont été abordées dans le cours aura compris. Gantois (2012) estime que la compréhension dont il est question ici est celle que l'enseignant formule à l'endroit de l'élève, elle n'a rien à voir avec une véritable compréhension du concept en jeu. Certains enseignants du secondaire vont jusqu'à considérer que les notions mathématiques enseignées à ce niveau seront étudiées à l'université et pour cette raison il ne serait pas utile que les élèves développent la compréhension du concept, mettant ainsi l'accent sur les applications des formules. D'autres enseignants considèrent plutôt que les élèves du secondaire considérés comme des élèves forts sont capables de construire par eux-mêmes des raisonnements mathématiques (Gantois, 2012). Ce phénomène est considéré comme du « monumentalisme» c'est-à-dire l'attitude de certains acteurs de l'enseignement qui confondent faire les mathématiques avec la visite des monuments mathématiques au nombre desquels figure la dérivée, monument manifestement incontournable devant lequel on peut s'extasier sans en comprendre l'essence, et ceci du fait qu'on *«ignore les raisons d'être, alors que l'école devrait les enseigner »* (Chevallard, 2012).

Par ailleurs, nous tenons comme observation principale que les études sur l'apprentissage de la dérivée ont adopté en général une approche de type cognitif. S'agissant de l'enseignement, la principale étude que nous avons identifiée a adopté comme approche d'analyse, la théorie commognitive de Sfard (2008). Cette approche a permis d'analyser les discours des enseignants universitaires lors d'un cours d'introduction du calcul différentiel (Park, 2015) et également dans le contenu des manuels utilisés par les enseignants (Park, 2016). C'est une approche qui permet d'étudier les interactions entre les personnes au moyen des discours et des discussions. La Théorie Commognitive utilisée dans le domaine de la didactique des mathématiques est une approche qui définit les mathématiques comme une activité de communication. Dans une telle perspective, le discours mathématique requiert certaines caractéristiques comprenant : un **vocabulaire** particulier adapté aux termes mathématiques et des mots du sens commun comme «la limite »; les **médiateurs visuels** comme les graphes, les expressions algébriques et numériques; **les récits validés** comme les textes écrits ou oraux qui explicitent les objets, les processus ainsi que les relations entre eux soumises à la validation, la modification ou au rejet par la communauté, par exemple les définitions; **les routines** qui sont des pratiques régulièrement utilisées et qui ont été validées par la communauté comme par exemple les définitions ou les propriétés. Au niveau de la TAD, les interactions portent sur les techniques et les tâches et les raisons qui justifient ces liens.

D'autres auteurs ont abordé les études sur les notions mathématiques associées à la dérivée en adoptant une approche institutionnelle (Barbé et al., 2005; González-Martín, 2013; González-Martín et al., 2013; Hardy, 2009). Par exemple, González-Martín et al. (2013) ont observé que dans l'institution qu'est l'enseignement secondaire, l'organisation mathématique en jeu dans les manuels de mathématiques au sujet des nombres réels et irrationnels est axée sur le bloc pratique sans qu'on ne puisse noter un bloc technologico-théorique justifiant ce bloc pratique. Certains choix institutionnels observés dans les manuels et les pratiques d'enseignement pour le cas des séries numériques influencent la manière dont les étudiants apprennent cette notion, par exemple leur incapacité à trouver les applications de cette notion (González-Martín, 2013).

De même, Barbé et al. (2005) dans une perspective institutionnelle ont relevé pour le cas de l'enseignement des limites au post-secondaire que les pratiques des enseignants sont influencées par certaines contraintes en provenance de diverses institutions comme la société, la communauté mathématique, le système éducatif, l'école et la salle de classe. Il n'est par ailleurs pas possible de les expliquer si on ne prend pas en compte tout le processus global de transposition didactique. Ces contraintes sont d'ordre mathématique et didactique. Ces contraintes sur le plan mathématique sont aussi en lien avec les types de connaissances qui sont véhiculées par les programmes officiels et les manuels scolaires notamment la difficulté à donner du sens à l'enseignement des limites. Sur le plan didactique, on parle davantage de la manière d'organiser l'enseignement des mathématiques. Ces restrictions qui affectent la pratique des enseignants à un niveau général sont corrélées à la densité des programmes de mathématiques et à la petite marge de manœuvre qui est accordée aux enseignants. Les auteurs observent pour cela que l'organisation didactique de l'un des deux enseignants est relativement incomplète et biaisée car elle concentre son processus didactique sur l'exploration et les premières phases du calcul technique. Quant à l'autre enseignant, sa pratique est focalisée sur la présentation des technologies (définition et propriétés des limites) et les principales techniques de calcul des limites. Hardy (2009) s'inscrit également sur cette perspective institutionnelle et questionne le statut institutionnel des pratiques sociales avec une distinction faite dans les différents mécanismes qui réglementent ces pratiques institutionnelles. Elle relève entre autres que certaines organisations mises en place par les institutions conditionnent les étudiants à l'utilisation des techniques algorithmiques (Hardy, 2009). D'autres auteurs ont relevé comment ces rapports institutionnels ont un effet important sur les rapports personnels autant des enseignants que de leurs étudiants (González-Martín, 2013, 2014; González-Martín et al., 2013). De même, l'étude du rapport personnel de l'enseignant peut être faite à l'aide de la théorie anthropologique du didactique. Cependant, elle ne permet pas de rendre compte de tous les aspects du travail de l'enseignant, notamment ce que l'enseignant fait en dehors de la salle de classe. Le travail documentaire faisant partie d'une des activités de l'enseignant en dehors de la classe, Chaachoua (2007) relève qu'il faut prendre en compte certains éléments du contexte institutionnel pour l'analyse du rapport institutionnel. Parmi ces éléments du contexte figurent d'autres ressources dont se sert l'enseignant pour la préparation et l'enseignement. Le travail de l'enseignant dans sa globalité se résume à « rassembler des ressources, les selectionner, les transformer, les recomposer, les partager, les mettre en œuvre, les réviser …»(Gueudet & Trouche, 2010b, p. 13). Pour mieux caractériser le statut de ces ressources, nous aurons recours à l'approche documentaire développée par Gueudet et Trouche (2008, 2009, 2010), Gueudet, Pepin, et Trouche (2012), Gueudet, Buteau, Mesa et Misfeldt (2014), Gueudet, Pepin et Trouche (2016), Gueudet (2017), Gueudet et Pepin (2018).

2.4-Approche documentaire du didactique (ADD)

L'une des premières tâches auxquelles s'attèle l'enseignant en classe consiste à déterminer à partir des indications du programme d'étude institutionnel, les organisations mathématiques à étudier tout en précisant pour chacune d'elles son contenu précis, en particulier le socle des types de tâches mathématiques qu'elle contient ainsi que le degré de développement à donner aux composantes techniques et technologiques (Chevallard, 1997). Ainsi, la TAD permet de faire une analyse des pratiques enseignantes, offrant des moyens d'étudier les organisations mathématiques et didactiques qui conviennent à la conception et à l'usage des ressources.

2.4.1-Des artefacts aux ressources en didactique des mathématiques

L'approche instrumentale a été développée par Rabardel (1995) à la suite des travaux du psychologue russe Vygotsky sur les mécanismes d'acquisition du savoir, notamment sur les concepts d'activité et d'instruments cognitifs et sur les travaux de Piaget sur la notion de schème (Contamines et al., 2003). Selon Contamines et al. (2003), l'approche instrumentale repose sur la distinction fondamentale qui existe entre, d'une part, l'objet matériel et, d'autre part, l'objet matériel inscrit effectivement et efficacement dans un usage. Autrement dit, il s'agit de distinguer un artéfact d'un instrument (Rabardel, 1995). L'instrument est le résultat de l'utilisation que l'on fait d'un artéfact dans ses composantes artéfactuelle et schématique. Les artéfacts sont construits par une personne ou un groupe de personnes pour répondre à des objectifs définis au préalable. Par exemple, un ordinateur, une calculatrice, une règle, un compas, une boite de dix, les tuiles algébriques etc. Ces artéfacts ont des modèles d'utilisation qui ont été prévus par le concepteur, aussi, les artéfacts ne sont pas des dispositifs neutres. Ils comportent tous des contraintes et des potentialités qui affectent d'une manière ou d'une autre la manière dont les savoirs sont construits (Rabardel, 1995). Pendant leur utilisation, émergent d'autres modèles d'utilisation qui se créent par l'utilisateur durant l'utilisation de l'artéfact par le sujet. Ces nouveaux modèles constituent des schémas d'utilisation de l'artéfact. Dans ce processus d'appropriation de l'artéfact, le sujet qui l'utilise élabore d'autres structures qui permettent l'organisation de l'action, ces différentes structures sont appelées des schèmes d'utilisation de l'artéfact (Rabardel, 1995). Ces schémas traduisent les transformations et les adaptations subies par l'artéfact sous l'influence de la personne qui l'utilise. Ce que nous pouvons retenir de ces premiers éléments c'est que selon certains auteurs, l'artéfact est un produit de l'activité humaine qui est conçu pour cette activité et orienté vers l'atteinte d'un objectif précis. La médiation à travers un artéfact peut être tournée vers le sujet de l'activité, vers d'autres sujets ou vers l'objet de l'activité. L'artéfact peut ainsi signifier un outil ou un objet, un compas, une règle, de la craie. Un artéfact peut donc être un objet physique ou un objet numérique, mieux encore l'artéfact sert à modifier les pratiques sociales et dans ce sens, les manières de l'utiliser permettent de distinguer les utilisateurs les uns des autres car chacun développe sa manière singulière d'utilisation (Gueudet et al., 2014). L'artéfact utilisé et les schémas d'utilisation qui ont été construits représentent donc un instrument.

Un schéma est composé de quatre éléments : le but de l'activité, les règles d'action, les invariants opérationnels et les déductions. Les invariants opérationnels sont des constructions cognitives, développées au cours de l'activité pour des objectifs similaires. Le processus de développement d'un instrument s'appelle la genèse instrumentale. La genèse instrumentale désigne le processus d'élaboration et d'évolution de l'instrument pendant l'activité (Contamines et al., 2003, p. 7). Le processus de genèse instrumentale (Fig.6) se déroule en deux étapes qui sont en interaction permanente. La première étape, encore appelée le processus d'instrumentation, va de l'artéfact et se dirige vers le sujet (utilisateur). L'artefact (outil) est conçu et réalisé par une personne, une équipe dans le but d'atteindre un objectif ou des objectifs précis. Dans l'outil, sont inscrits les modes opératoires, autrement dit, dans l'outil on a déjà un mode d'emploi : il s'agit ici de la fonction constituante de l'artéfact qui est composée des fonctions constituantes prévues par le concepteur de l'artefact (Contamines et al., 2003). Au cours de ce processus, les caractéristiques de l'artéfact influencent l'activité du sujet et les connaissances qu'il développe. Le sujet développe des connaissances à propos de l'artéfact, il apprend de son utilisation, les schémas d'usage évoluent, se transforment, se créent et s'intègrent aux schémas d'utilisation qui existent déjà, puis la conceptualisation est faite (Contamines et al., 2003). De même, l'artéfact a des potentialités et des contraintes qui vont conditionner l'action du sujet, notamment ses gestes, ses convictions et ses représentations. Ce sont ces contraintes de l'artéfact qui amènent finalement le sujet à modifier ses activités et tous les schémas d'utilisation associés. Progressivement, le sujet s'approprie les fonctions de l'artéfact et s'accommode à ses schémas jusqu'à la modification de l'instrument comme conséquence de l'association de l'artéfact et les nouveaux schémas d'utilisation.

Pendant la deuxième étape, notamment pendant le processus d'instrumentalisation, on assiste à l'émergence des nouveaux schémas d'utilisation de l'artéfact. Avant d'interagir avec un artéfact, l'utilisateur possède des connaissances spécifiques et ces connaissances façonnent l'artéfact qui évolue et acquiert de nouvelles propriétés fonctionnelles. Le sujet adapte à cet effet l'artéfact à ses besoins et ceci se fait grâce à ses connaissances personnelles qui le guident dans le choix et l'utilisation des schémas de l'artéfact dont il a besoin. Plusieurs enseignants y compris les élèves construisent et développent des structures cognitives appelées schémas d'utilisation lorsqu'ils désirent résoudre une tâche à l'aide d'un artéfact. On peut donc observer que plusieurs de ces enseignants utilisant le même artéfact peuvent développer des instruments différents (Gueudet et al., 2014).

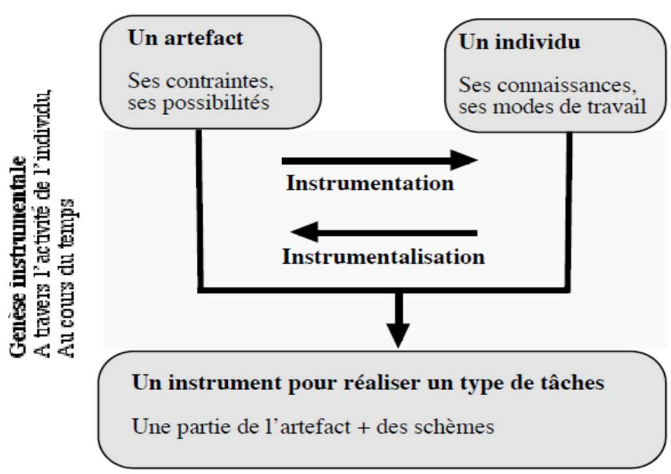


Figure 6. – Genèse instrumentale (Trouche, 2004, p. 185)

2.4.2-Artéfacts, schèmes et genèse documentaire

Dans la section qui précède, nous avons présenté l'approche instrumentale. Dans le domaine de l'éducation, les enseignants doivent interagir avec plusieurs types de ressources. Le manuel scolaire n'est plus la seule source d'information pour les enseignants. Plusieurs autres types de ressources existent, par exemple, les ressources numériques comprenant les cours polycopiés, les fiches d'exercices et des manuels numériques. L'enseignant doit interagir avec toutes ces ressources qui vont jouer un rôle central dans son activité professionnelle. La prise en compte de ces nouveaux enjeux permet de développer l'approche instrumentale afin de se situer dans une approche documentaire (Gueudet et al., 2014). La ressource ici est quelque chose qui vient « re-sourcer », nourrir de nouveau et différemment (Adler, 2010) le travail de l'enseignant, contrairement aux ressources matérielles évoquées généralement en éducation. Cette définition ne limite pas la ressource à un objet matériel mais soulève aussi la question des différents usages qui sont faits d'une ressource sans oublier les raisons qui justifient ces usages. Adler (2010) distingue les ressources humaines (enseignant, ses connaissances) des ressources matérielles (technologie, tableau noir, logiciel, manuels scolaires, concepts, théorèmes) et les ressources culturelles (langage, temps). Interagir avec les programmes officiels, les manuels scolaires ou bien échanger avec un collègue sont toutes des formes de ressources de l'enseignant. Les enseignants dans leur utilisation des ressources variées peuvent sélectionner, combiner et concevoir leurs propres ressources. Ils finiront par modifier ces ressources en classe ou bien les partager avec des collègues, il s'agit du travail de documentation de l'enseignant. Pendant ces utilisations, les enseignants développent des schémas ou des schèmes d'utilisation pour résoudre des problèmes qui se posent à eux dans la classe ou en dehors.

Le concept de « schème » utilisé dans l'approche documentaire est emprunté des travaux de Piaget et repris dans le cadre des publications de Vergnaud sur la Théorie des Champs Conceptuels (TCC). La TCC est une théorie cognitiviste, qui vise à fournir un cadre cohérent et quelques principes de base pour l'étude du développement et de l'apprentissage des compétences complexes, notamment de celles qui relèvent des sciences et des techniques (Vergnaud, 1990, p. 135). L'auteur soutient qu'aucun concept ne peut être réduit à sa définition dès lors qu'on s'intéresse à son apprentissage et à son enseignement. C'est donc à travers des situations et des problèmes à résoudre que le concept acquiert du sens pour le sujet. Dans cette perspective, le concept de situation chez Vergnaud (1990) renvoie au concept de tâche puisqu'il soutient à cet effet que : « Le concept de situation n'a pas ici le sens de situation didactique mais plutôt celui de tâche, l'idée étant que toute situation complexe peut être analysée comme une combinaison de tâches dont il est important de connaître la nature et la difficulté propres » (Vergnaud, 1990, p. 146). Ainsi, la notion de tâche qui englobe plusieurs types de tâches que nous avons élaborés dans la section 2.3.3 sur les praxéologies s'accommode avec un ensemble de situations au sens de Vergnaud. Selon notre compréhension, les situations se résument à des tâches que le sujet est appelé à résoudre. Si du point de vue de la TCC les situations portent sur les problèmes mathématiques, leur enseignement et leur apprentissage, en TAD, les situations ou tâches sont des activités humaines et en tant que telles, elles peuvent être analysées comme des praxéologies. La discussion peut être rude entre la conception des situations en rapport avec la définition des tâches. Cependant, en prenant l'exemple d'un enseignant qui a reçu mandat d'enseigner des élèves, l'Institution le place en situation (dans une école, une salle de classe) puis lui donne des tâches à résoudre (enseigner, évaluer), mais ce ne sont pas toutes les tâches de l'enseignant qui sont clarifiées ici, certaines doivent être prises en compte si l'enseignant veut résoudre les situations qui se posent à lui. Il doit donc développer une manière de faire ou des façons de procéder, ce qui englobe donc l'ensemble des situations dans lesquelles se trouve l'enseignant et dont il doit développer des schèmes d'actions. Le second concept important dans la TCC est celui de « schème » que Vergnaud (1990) présente comme étant « une organisation invariante de la conduite pour une classe de situations données » (Vergnaud, 1990, p. 136). Le schème est donc le lieu où se construisent les connaissances en actes du sujet, c'est-à-dire l'ensemble des éléments cognitifs qui permettent aux actions du sujet d'être opératoires. Selon Vergnaud (1990), les algorithmes sont des schèmes, ou encore que les schèmes soient des objets du même type logique que les algorithmes. Il ajoute en relevant que les schèmes sont souvent efficaces, pas toujours effectifs, par exemple, un enfant qui utilise un schème inefficace pour une certaine situation peut par expérience l'amener à changer ou à modifier ce schème. Cette description s'apparente à celle que Chevallard (1999) décrit au sujet de la technique dans une praxéologie, à ce propos, il relève qu'une technique peut fonctionner sur une partie des tâches et échouer sur une autre partie de la tâche, considérant ainsi la supériorité d'une technique à une autre (Chevallard, 1999) (Chevallard, 1999, p. 225). Ces observations tendent à rapprocher les deux approches d'un point de vue théorique puisque les schèmes sont pour les situations ce qu'est la technique pour une tâche donnée. Ces schèmes d'utilisation comportent quatre éléments principaux (González-Martín et al., 2018; Gueudet, 2017) : un objectif, les règles d'action, les invariants opérationnels et les possibilités d'inférence.

2.4.2.1- Les objectifs ou les buts visés

Un objectif permet au sujet de se définir une intention d'enseigner un objet pour lequel existent d'autres sous-objectifs (buts, sous-buts et anticipations). Ici, il est question des intentions, des besoins et la motivation qu'a une personne à s'engager dans la résolution d'une situation. Ainsi, les buts visés par le sujet dans ce cas se décompose en sous-buts comportant des anticipations de la même manière dont est structuré le schème qui se décline lui aussi de manière hiérarchique (Vergnaud & Récopé, 2000). Dans le cadre de cette thèse, l'un des buts visés par les enseignants peut être le fait d'introduire la dérivée en un point. Pour cela, les enseignants peuvent anticiper sur la manière dont cette introduction sera faite ou sur les difficultés possibles que pourraient rencontrer les élèves. En d'autres termes, les différentes formes d'anticipations du sujet dépendent des buts visés et pour cette raison, le sujet prévoient d'avance de quelle manière sera mise en œuvre le schème mobilisé.

2.4.2.2- Les règles d'action

Les règles d'action sont les manières habituelles d'agir du sujet dans le même objectif. Par exemple, l'enseignant se donne d'extraire des parties du manuel qui accordent le plus d'importance aux éléments les plus pertinents de l'objet de son enseignement. Il y a sélection des informations et contrôle de celles-ci. Autrement dit, il s'agit des moyens mis en œuvre dans l'utilisation de la ressource pour l'atteinte des buts et objectifs déterminés. Il est possible à partir d'une simple description des règles d'action, de comprendre de quelle manière la situation ou la tâche a été mise en action dans le temps. Il peut s'agir vulgairement d'une sorte de fiche de recette qui guide l'action du sujet. Pendant cette phase de la mise en œuvre du schème, le sujet recueille des informations, il veille à ce que ces informations concourent à l'atteinte des buts visés et si possible, le sujet effectue des va-et-vient dans le but de s'assurer que le schème fonctionne pour cette classe de situations. Par exemple, pour un type de tâche qui consiste à « introduire la dérivée en un point », l'enseignant peut développer des règles d'actions qui se structurent de la manière suivante : s'approprier le programme officiel de mathématiques, s'approprier le contenu du programme et du manuel de mathématiques, rechercher d'autres ressources sur internet ou dans une bibliothèque, recombiner les ressources obtenues d'une certaine manière, modifier de telle manière les ressources existantes comme les anciennes notes de cours, exploiter de nouvelles ressources dans la classe, utiliser des expériences d'enseignement passés pour nourrir sa préparation, se rappeler tel ou tel autre principe didactique ou pédagogique ou réviser ses ressources après usage… Ces actions sont considérées comme étant des gestes documentés ou mieux, des actions observables qui peuvent varier selon le contexte de l'activité, mais sont néanmoins organisés par une structure (Gueudet & Trouche, 2009c). Selon ces auteurs, la part visible de cette structure organisatrice est constituée « d'invariants opératoires; et sa part visible correspond aux régularités observables dans l'activité du professeur, dans ses gestes documentés, et ce sont ces régularités qui se somment *« un usage »* (Gueudet & Trouche, 2009c, p. 7).

2.4.2.3- Les invariants opérationnels

Les invariants opérationnels sont de deux types : les théorèmes en action qui sont des propositions jugées vraies par le sujet et qui ont une importance en mathématique et sur le plan scolaire; les concepts en action qui sont des concepts considérés comme pertinents pour l'objet. Il y a sélection et traitement des informations pertinentes. Ici le sujet apporte des justificatifs sur l'ensemble de sa planification et sa mise en œuvre en classe. Ces invariants opérationnels organisent la recherche de l'information en fonction du problème à résoudre ou du but à atteindre, et pilotent les inférences (Vergnaud, 1990, p. 167). Selon certains auteurs, les invariants opérationnels forment la partie épistémique du schème et sont composés des concepts-en-acte et de théorèmes-en-acte (Jameau, 2012). Le terme « en acte » signifie que « pour certains niveaux d'organisation de l'activité, les invariants opératoires échappent à la conscience du sujet » (Jameau, 2012, p. 29). La fonction qui est dévolue aux invariants opérationnels est « d'identifier et de reconnaitre les objets, leurs propriétés, leurs relations, et les transformations que les objets subissent » (Vergnaud & Récopé, 2000, p. 47). Dans cette perspective et si l'on se réfère au sujet en jeu ici, l'on peut dire que l'enseignant qui doit enseigner un concept utilise ses connaissances du concept à enseigner pour sélectionner les informations qu'il juge pertinente pour son action. Ainsi, ces informations qu'a l'enseignant du concept, de son enseignement et de son apprentissage constituent ce que Chevallard (2003) appelle le rapport personnel de l'enseignant avec l'objet en étude. Jameau (2012) relève de ce fait que dans l'articulation avec le schème, les invariants opérationnels permettent de prélever et de sélectionner l'information pertinente pour en inférer des conséquences utiles pour l'action. Ils peuvent se situer au niveau de l'objet, des propriétés ou des relations utiles, et c'est ce qui se passent quand les enseignants se servent de leurs connaissances de la dérivée pour sélectionner les ressources et même de quelle manière ils vont enseigner le concept en classe. On peut donc en conclure que les invariants opérationnels permettent de réaliser un diagnostic précis de la situation et d'inférer lesquelles de ces règles seront les plus pertinentes à mettre en œuvre (Falappa, 2015).

2.4.2.4- Les possibilités d'inférence

Les possibilités d'inférence permettent au sujet d'adapter son activité aux particularités caractéristiques d'une situation donnée et qui correspond aux mêmes objectifs. En d'autres termes, les inférences représentent un ensemble de calculs, de prises d'informations et de contrôles permettant d'ajuster le schème aux caractéristiques de la situation et de la tâche que traite le sujet (Coulet, 2009, p. 3). Par exemple, cela consiste à se dire si l'élève a des difficultés avec certains aspects de l'objet d'enseignement, je vais intensifier l'utilisation de cette partie du manuel (González-Martín et al., 2018). Selon Jameau (2012), l'activité en situation n'est jamais automatique c'est-à-dire sans contrôle ni une prise d'informations. Elle est, au contraire régulée par des adaptations locales et des ajustements progressifs. De ce fait, l'ajustement du schème aux conditions locales de la situation rend indispensable l'utilisation d'inférences par le sujet (Jameau, 2012). Ces inférences sont indispensables à la mise en œuvre du schème dans chaque situation particulière (Vergnaud, 1990).

2.4.2.5- Des schèmes à la genèse documentaire

Revenant à l'approche documentaire, pendant le processus d'utilisation des ressources, les utilisateurs ici considérés être des enseignants produisent des documents qui sont constitués des ressources elles-mêmes modifiées par l'enseignant et les schèmes d'utilisation, c'est-à-dire les manières de les utiliser. Le processus qui permet à l'enseignant de produire un document comprenant des ressources et un schéma d'utilisation s'appelle une genèse documentaire (Gueudet, 2008, 2015, 2017; Gueudet et al., 2014; Gueudet & Pepin, 2018; Gueudet et al., 2012, 2015; Gueudet & Trouche, 2012). Selon Gueudet et al. (2014), l'approche documentaire complète et approfondit l'approche instrumentale dans la mesure où la notion de ressource généralise celle d'artéfact. De plus, dans l'approche instrumentale, le sujet interagit avec une ressource tandis que dans l'approche documentaire, l'enseignant doit faire face à plusieurs ressources diversifiées **(Fig.6)**, ce qui induit une multitude de schémas d'utilisation. Ces enseignants interagissent avec ces ressources, ils les travaillent, les modifient, les réorganisent, les adaptent aux situations qui sont les leur (règles d'action). Le processus de genèse documentaire est similaire à celui de la genèse instrumentale comprenant un processus d'instrumentation et un processus d'instrumentalisation.

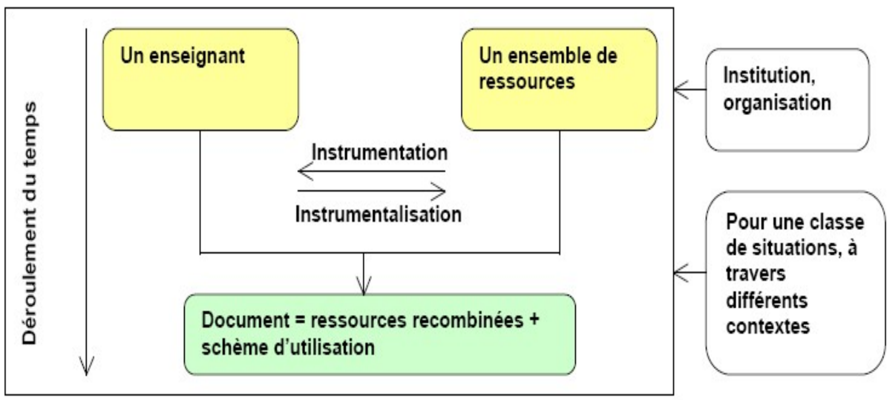


Figure 7. – Représentation de la genèse d'un document (Gueudet & Trouche, 2009b)

L'analyse du travail documentaire des enseignants dans cette étude vise à éclairer ces différents processus et à expliquer comment ces deux processus influencent leurs pratiques d'enseignement de la dérivée. Étant donné que les genèses documentaires sont des processus qui se situent dans un continuum, nous pouvons émettre l'hypothèse selon laquelle l'un des deux processus peut être dominant ou inexistant pendant le travail documentaire de l'enseignant. De nos analyses, nous essayerons de dégager les atouts et les contraintes des artefacts. Ces analyses nous permettront également de décrire les pratiques d'enseignement de la dérivée selon des praxéologies mathématiques et didactiques.

2.5-L'approche documentaire dans les recherches en didactique

L'approche documentaire développée par Gueudet et Trouche (2008, 2009, 2010) et ses orientations dans de nombreuses recherches apportent des éclairages sur le travail de l'enseignant en dehors de la classe. Gueudet et Trouche (2008, 2009, 2010, 2012) proposent cette approche qui permet d'analyser la manière dont ces enseignants sélectionnent, modifient et utilisent leurs ressources indispensables à leur activité d'enseignement. La démarche adaptée pour y parvenir peut-être celle des entretiens et des observations en classe et l'analyse des notes personnelles des enseignants. Celle-ci permet de relever les schémas d'utilisation des ressources qui sont à l'origine de la production des documents indispensables pour enseigner. A la suite de ces auteurs, on a observé dans de nombreux travaux récents la mise à l'épreuve de cette approche pour analyser le travail de l'enseignant (Gueudet, 2015, 2017; Gueudet et al., 2014; Gueudet & Pepin, 2018; Gueudet et al., 2016). Par exemple, Gueudet et al. (2014) s'inspirent de l'approche documentaire pour analyser les activités de préparation et d'enseignement des enseignants de niveau universitaire. Ils observent qu'au niveau universitaire, il existe une panoplie de ressources et que ce nombre important de ressources influence non seulement le choix, la sélection et l'utilisation des ressources disponibles mais aussi la capacité des enseignants à organiser l'enseignement (Gueudet et al., 2014). Ces ressources comprennent les cours polycopiés, les fiches d'exercices et les anciens sujets d'évaluation et excluent les ressources issues d'internet (Gueudet, 2015).

Dans une étude plus récente, Gueudet (2017) observe dans le cas des enseignants observés dans son étude que les enseignants d'université, maîtres de conférences qui justifient d'une ancienneté, développent une stratégie importante dans la conception et l'utilisation des ressources pédagogiques. Ces stratégies incluent les résultats de leurs travaux de recherche qui viennent ainsi contribuer à enrichir les mathématiques enseignées. Cependant, il a été observé chez les enseignants débutants titulaires d'un doctorat, que ces derniers semblaient adapter leur enseignement aux ressources prêtes à l'emploi et que leurs ressources et leurs croyances personnelles influencent leur travail de documentation. Ces dernières observations laissent bien voir en quoi l'expérience des enseignants constitue une ressource importante dans leurs pratiques d'enseignement. Au niveau secondaire il a été observé que certains enseignants utilisent l'internet comme moyen de recherche des ressources et d'élaboration des documents lorsqu'ils désirent introduire un nouveau concept (Gueudet & Trouche, 2012) aux côtés des manuels scolaires qui constituent la ressource traditionnelle utilisée par de nombreux enseignants.

Tout récemment, Gueudet et al. (2016) ont observé que les manuels scolaires élaborés par un groupe d'experts est certes d'une grande qualité, mails ils sont statiques et tournés vers le processus d'instrumentation. Cependant, les manuels scolaires conçus par un collectif d'enseignants sont d'une qualité dynamique et tournés vers l'instrumentalisation car ces manuels peuvent être constamment améliorés par l'intégration des remarques que les utilisateurs formulent à l'endroit des auteurs et qui sont prises en compte par ces derniers. Toutes ces stratégies de collecte des ressources nous semblent pertinentes pour comprendre le travail de l'enseignant en dehors de la salle de classe.

2.6-Éléments théoriques et questions spécifiques de la recherche

2.6.1-Tétraèdre didactique ou articulation des cadres théoriques

Le manuel scolaire fait partie des ressources des enseignants, l'un des artéfacts fondamentaux et les plus importants lorsqu'il est question de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques (Sträßer, 2009). Cependant, il n'existe pas un cadre théorique permettant l'analyse de l'utilisation des manuels dans le travail de l'enseignant (Rezat, 2006). Le triangle didactique présenté dans la première partie (Fig.1) de ce chapitre nous a permis de comprendre les interactions entre enseignant, savoirs et l'élève. À travers ce triangle, l'enseignant est le médiateur du savoir auprès de l'élève. La relation qu'entretient l'enseignant avec le manuel scolaire n'y est pas visible pourtant le rôle de l'enseignant dans cette relation est double : il est un médiateur du savoir et aussi un utilisateur de l'artéfact qu'est le manuel scolaire. Notre étude portant plus sur la relation enseignant-savoirs-ressources, il nous semble que le triangle didactique s'avère insuffisant pour mieux approcher le problème car le triangle didactique ne prend pas en compte le rapport de l'enseignant aux manuels scolaires. Certains auteurs ont proposé la modification du triangle didactique en un tétraèdre **(Fig.7)** mettant en relation les manuels scolaires, l'élève, le savoir et l'enseignant afin de permettre la prise en compte les interactions entre l'enseignant et les ressources dans les institutions auxquelles appartiennent les savoirs (Rezat, 2006).

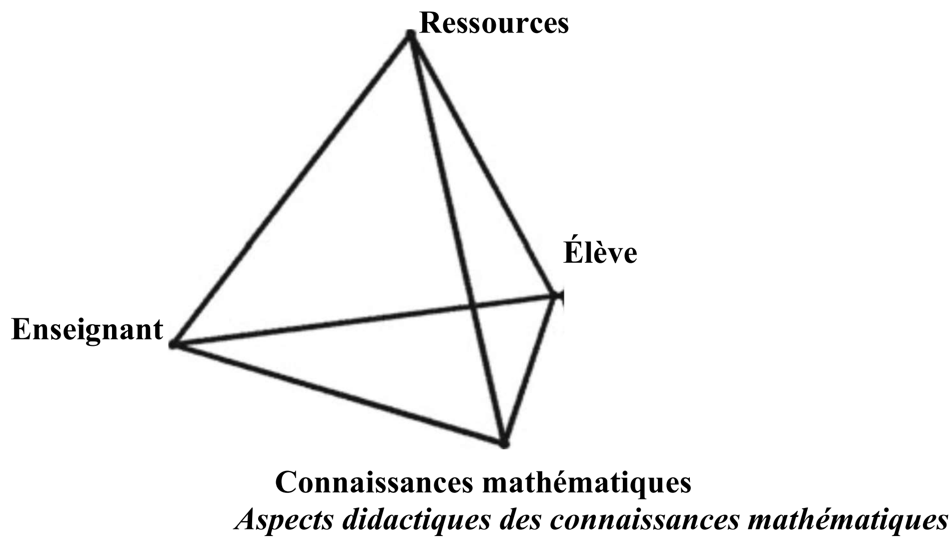


Figure 8. – Modèle d'utilisation des ressources (Rezat, 2006, pp. 4-413)

L'approche documentaire du didactique (ADD) permet d'étudier le travail des enseignants et leur processus de professionnalisation à travers la manière dont ils interagissent avec les ressources dans/pour l'enseignement (Trouche et al., 2019). On s'intéresse en particulier aux manières que l'enseignant travaille avec ses ressources et le produit de ce travail qu'est la production d'un document. Pendant ce travail, l'enseignant rencontre des contraintes qui sont à l'origine des difficultés. Par exemple, dans la préparation d'un cours, l'enseignant peut constater des erreurs mathématiques, pour cela, il doit pouvoir comprendre la situation qu'il doit résoudre et il doit ensuite mettre en place une organisation pour y faire face. De même, dans l'ADD, on met en exergue le caractère social du travail de documentation des enseignants car selon certains auteurs, les enseignants interagissent avec les différentes ressources dans différents milieux qui vont du cadre scolaire, des forums d'enseignants à l'équipe de travail collaboratif dont le but est la production des ressources (Gueudet & Trouche, 2012; Pepin et al., 2013; Trouche et al., 2019). L'ADD prend donc en compte l'ensemble de l'activité du professeur, en classe et hors classe, elle reconnaît l'importance du travail de documentation de l'enseignant : collecter les ressources, sélectionner quelques-unes, les articuler, les mettre en œuvre, élaborer des supports, les réviser. Elle prend aussi en compte les contraintes et les opportunités qu'offrent ces ressources (Gueudet & Trouche, 2009b; Poisard et al., 2011).

S'agissant de la TAD, plusieurs aspects du travail de l'enseignant sont rendus explicites, le premier de ces aspects étant de porter un regard sur la nature des connaissances qui sont diffusées dans la société . Cette approche postule que toute l'activité humaine peut être décrite en termes de praxéologie, ce qui s'observe dans le travail de l'enseignant lorsque celui-ci enseigne des tâches mathématiques précises comprenant un discours pratique et un discours théorique. Ces discours peuvent concerner une ressource donnée ou le contenu mathématique à enseigner (González-Martín et al., 2018) ou encore sur bien d'autres contraintes liées à leurs pratiques d'enseignement. De même, lorsque l'enseignant doit mettre en œuvre une séquence d'enseignement, il doit interagir avec son milieu qui l'influence et lui donne des raisons de repenser ses actions et de les inscrire dans un processus dynamique pendant lequel il agit sur des objets mathématiques et le milieu auquel appartiennent ces objets lui servent de rétroaction. On note donc que le travail de l'enseignant s'inscrit dans une écologie de savoir et de pratiques qui permettent de comprendre les contraintes qui rendent facile ou difficile le travail des enseignants dans la classe ou en dehors de celle-ci à travers les différents niveaux de codétermination didactique que sont la civilisation, la société, l'école, la pédagogie, la discipline, le domaine, le secteur, le thème et le sujet (Bosch & Gascón, 2006; Chevallard, 2002b).

D'autres aspects de la TAD peuvent aussi permettre de faire le lien avec l'ADD. L'ADD reconnaît donc que les ressources, l'utilisation de ces ressources et les discours mathématiques et pédagogiques des enseignants influencent leur travail de documentation (González-Martín et al., 2018). Selon Gueudet (2017), les invariants opérationnels sont des discours justifiant les règles d'actions. Ces discours peuvent concerner une ressource donnée ou le contenu mathématique à enseigner. Le discours sur les ressources peut être analysé à l'aide de l'ADD tandis que le discours sur les contenus mathématiques concerne ce que les enseignants pensent de l'enseignement, de l'apprentissage de ce contenu, cette vision sur le contenu est ce qu'on appelle le rapport personnel de l'enseignant par rapport au contenu et représente également les invariants opérationnels. Ce rapport personnel est un concept fondamental de la TAD. De même, les discours mathématiques et pédagogiques des enseignants sur une notion et, par conséquent, leurs schémas d'utilisation des ressources pour l'enseigner, sont principalement influencés par leur expérience globale d'abord en tant qu'étudiants et ensuite comme enseignants de mathématiques, et c'est ce que Chevallard a appelé dans la TAD (2003) le rapport personnel des enseignants avec la notion concernée (González-Martín et al., 2018). La combinaison de ces deux approches nous permet de faire le lien entre l'utilisation des ressources, leurs schémas d'utilisation et les contraintes des institutions (ce qui correspond aux règles d'action) et le rapport personnel des enseignants qui leur permet d'enseigner la dérivée en classe (les invariants opérationnels). Le rapport personnel devient un élément important qui permet d'établir ce lien, en d'autres termes, les règles d'actions et les invariants opérationnels permettent d'établir le lien entre l'ADD et la TAD

La notion de rapport personnel est perçue par Chevallard (2003) comme un moyen d'expliquer comment les individus interagissent avec les contraintes imposées par les institutions et y apportent des solutions (González-Martín et al., 2018). Le rapport personnel d'un individu, en particulier un enseignant, avec les artéfacts ou mieux avec des ressources matérielles et immatérielles se présente comme le produit de toutes les interactions qu'il a eu ou qu'il peut avoir dans les différentes institutions (Chevallard, 2003a). Le rapport personnel de l'enseignant ne semble donc pas être une donnée statique, elle est évolutive. González-Martín et al. (2018) pensent donc qu'en raison des multiples interactions qu'a l'enseignant avec une notion donnée dans différentes institutions, son rapport personnel se modifie du fait de l'accumulation des expériences acquises dans ces différentes institutions. Par exemple, quand on est étudiant, on a un rapport personnel avec les notions mathématiques apprises, une fois devenu enseignant, ce rapport personnel peut changer du fait que devenu enseignant, l'on doit manipuler plusieurs ressources et préparer les cours.

Ces deux approches et leur mise en commun ont pour but dans cette étude de permettre une meilleure compréhension de la manière dont les ressources et / ou le travail des enseignants avec les ressources peuvent affecter la mise en œuvre des praxéologies mathématiques en jeu dans la salle de classe (Trouche et al., 2019). Aussi, il est possible de comparer chacune de ces approches car chacune d'elles apporte un éclairage sur un des aspects du travail des enseignants étant donné que ce travail porte sur la tâche et la praxéologie qui la caractérise. Comme dans d'autres travaux de recherche, ces deux approches sont complémentaires (González-Martín et al., 2018; Trouche et al., 2019), d'une part, on apprend comment les acteurs (enseignants) agissent face aux ressources, les adaptations possibles qu'ils mettent en jeu (ADD) et d'autres parts la manière dont l'utilisation des ressources favorise la création et la construction de nouvelles connaissances (TAD). Nous pensons que c'est cela qui semble justifier le choix de ces auteurs pour analyser le travail des enseignants sous l'angle de la double approche TAD/ADD. En guise d'exemple, González-Martín (2015) en combinant la TAD et l'ADD a mis en évidence comment le rapport personnel de cinq enseignants guidait leur utilisation des ressources et la manière dont ils interagissaient avec un ensemble de ressources et les contraintes crées par ces ressources sur leur travail. Dans cette étude, les cinq enseignants observés utilisaient le même manuel pour enseigner. Leur rapport personnel pour chacun des enseignants était très proche du contenu du manuel. Cette proximité entre le rapport personnel des enseignants et le rapport institutionnel observé dans le manuel des points de vue, les enseignants n'enrichissaient pas leurs sources de documentation, ce qui pouvaient avoir pour conséquences le fait pour les enseignants de développer des schémas d'enseignement qui prévilégient les taches routinières. Plus récemment, González-Martín et al. (2018) utilisent cette double approche pour expliquer en quoi l'utilisation des ressources par des enseignants modifie leur rapport personnel aux séries numériques et leurs pratiques d'enseignement. Ces auteurs expliquent en quoi la relation personnelle de l'enseignant avec un objet de savoir peut jouer un rôle important dans les processus qui justifient les choix, les raisons de ces choix et les modes d'utilisation des ressources (González-Martín et al., 2018).

2.6.2- Synthèse du chapitre et objectifs de la recherche

Afin de préciser nos objectifs spécifiques, nous allons revenir sur l'ensemble des propos qui précèdent pour relever qu'il n'existe pas assez de connaissances sur les pratiques d'enseignement de la dérivée. Notre objectif général étant d'identifier les pratiques des enseignants dans l'utilisation des ressources et les activités d'enseignement de la dérivée, nous soutenons que les questions liées à l'introduction de la dérivée dans les programmes, dans les manuels scolaires et d'autres ressources, ainsi que celle liée à l'introduction du cours sur la dérivée en classe sont nécessaires pour l'atteinte de notre objectif général. Ajoutons également la nécessité de rendre compte des contraintes institutionnelles, d'éclairer les décisions des enseignants en permettant une compréhension des raisons qui justifient les choix que font les enseignants par rapport à la dérivée et les influences éventuelles de ces choix sur leur travail en classe.

Dans la section 2.3, nous avons abordé la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) en partant du postulat que « tout est objet » (Chevallard, 1999) et que l'action des individus d'une institution avait leur rapport personnel aux objets de l'institution et qui pouvait être différent du rapport institutionnel. Ce postulat nous a permis d'explorer les différentes facettes de ce cadre théorique et trois de ses aspects ont retenu notre attention. D'abord, nous avons la notion d'organisation praxéologique mathématique qui se décline en termes de types de tâches, de techniques nécessaires à la réalisation de ces types de tâches, de technologies qui permettent de valider les techniques utilisées et la théorie qui elle-même permet de justifier les technologies. Ce premier aspect de cette théorie nous aide ainsi à analyser les manuels scolaires et éventuellement les ressources qu'utilisent les enseignants pour préparer les enseignements de la dérivée. Aussi dans le prolongement de cette praxéologie, nous avons développé les praxéologies didactiques qui elles se déclinent en six étapes comprenant : le moment de la première rencontre, le moment de l'exploration du type de tâche, le moment technique, le moment technico-théorique, le moment de l'institutionnalisation et le moment de l'évaluation. Cette deuxième dimension de la praxéologie de Chevallard nous permettra d'analyser les pratiques des enseignants en classe. Nous focaliserons notre attention à l'introduction de la dérivée en un point et au passage de la dérivée en un point à la dérivée sur un intervalle. Ensuite, nous avons discuté du rapport personnel des enseignants (Chevallard, 2003b) ce qui nous a permis de considérer le regard que porte un sujet de l'institution à savoir l'enseignant sur un concept. Nous allons à cet effet analyser le rapport de ces enseignants à l'objet « dérivée ». Enfin, la notion d'ostensifs développée par Bosch et Chevallard (1999) met en relief de quelle manière les enseignants mobilisent divers types d'objets ostensifs et d'objets non ostensifs pour enseigner un concept, ici celui de la dérivée afin de faciliter la conceptualisation chez les élèves.

La phase de l'enseignement étant précédée par celle de la planification, nous avons abordé dans la section 2.4 l'approche documentaire (González-Martín et al., 2018; Gueudet, 2017; Gueudet & Trouche, 2010b). En particulier, dans la section 2.4.2 de cette thèse, nous avons exploré les composantes des schèmes d'utilisation des ressources. Nous avons relevé comment il est possible d'analyser l'activité des sujets d'une institution en observant les schèmes mis en action à travers ses quatre composantes. En particulier, nous avons relevé que les quatre composantes des schèmes d'utilisation des ressources permettent de rendre compte des propriétés du schème notamment les buts et les sous-buts avec les anticipations possibles, les règles d'action qui sont les règles qui permettent de voir le déroulement de l'activité dans le temps, les invariants opérationnels qui sont considérés comme la connaissance du réel c'est-à-dire, les composantes du schème qui permettent d'organiser la recherche de l'information en fonction du problème à résoudre ou du but à atteindre et enfin les inférences qui permettent au sujet d'adapter les schèmes d'utilisations à des contextes particuliers(Vergnaud, 1990; Vergnaud & Récopé, 2000). L'une des caractéristiques importantes dégagées dans cette théorie est l'opportunité qu'elle offre d'analyser les schèmes d'utilisation des ressources à travers les règles d'action et puis d'analyser conjointement les invariants opérationnels liées aux ressources et le rapport personnel des enseignants selon le modèle praxéologique. La combinaison de ces deux approches nous permettra de mettre en lumière non seulement les schèmes qui caractérisent l'utilisation des ressources par ces enseignants de l'étude mais nous allons établir le lien entre le rapport personnel de ces enseignants (invariants opérationnels) et les schèmes d'utilisation des ressources (règles d'action), cette analyse permettra de caractériser les schèmes d'utilisation des ressources par les enseignants de l'étude.

En définitive, l'analyse des pratiques des enseignants pour l'utilisation des ressources et l'enseignement de la dérivée nécessite donc de considérer d'abord de quelle manière la dérivée est introduite dans les manuels et d'autres ressources, ensuite quels sont les invariants opérationnels qui se définissent comme des connaissances qu'ont les enseignants du concept de dérivée, de son enseignement et de son apprentissage et enfin les pratiques d'enseignement mises en place pour enseigner la dérivée en classe. Ces différents aspects du travail des enseignants se retrouvent dans les travaux de Chevallard (1999), Bosch et Chevallard (1999), Guedet et Trouche (2008, 2009, 2020), Guedet (2017) et González-Martín et al. (2018) et permettront d'avoir une vue d'ensemble sur l'enseignement de la dérivée. Les principaux éléments développés dans ce chapitre nous mènent vers la formulation de nos objectifs de recherche suivants :

Objectif général de recherche :

Analyser les pratiques des enseignants et leur utilisation des ressources dans les activités de préparation et d'enseignement de la dérivée.

De manière plus spécifique, il s'agit :

O_1: D'analyser les praxéologies mathématiques développées dans les ressources utilisées par les enseignants de cette étude pour enseigner la dérivée.

O_2 : D'analyser les schèmes d'utilisation des ressources par les enseignants pour enseigner la dérivée.

$O_{2.1}$ Analyser les règles d'action qui caractérisent l'utilisation des ressources et les praxéologies mathématiques développées par les enseignants.

$O_{2.2}$ Analyser les invariants opérationnels qui se dégagent des schèmes d'utilisation des ressources et des praxéologies mathématiques développées par les enseignants.

O_3. D’analyser les objets ostensifs et les objets non ostensifs mobilisés par les enseignants pour enseigner la dérivée.

O_4. D’analyser les praxéologiques didactiques développées lors de l’enseignement de la dérivée

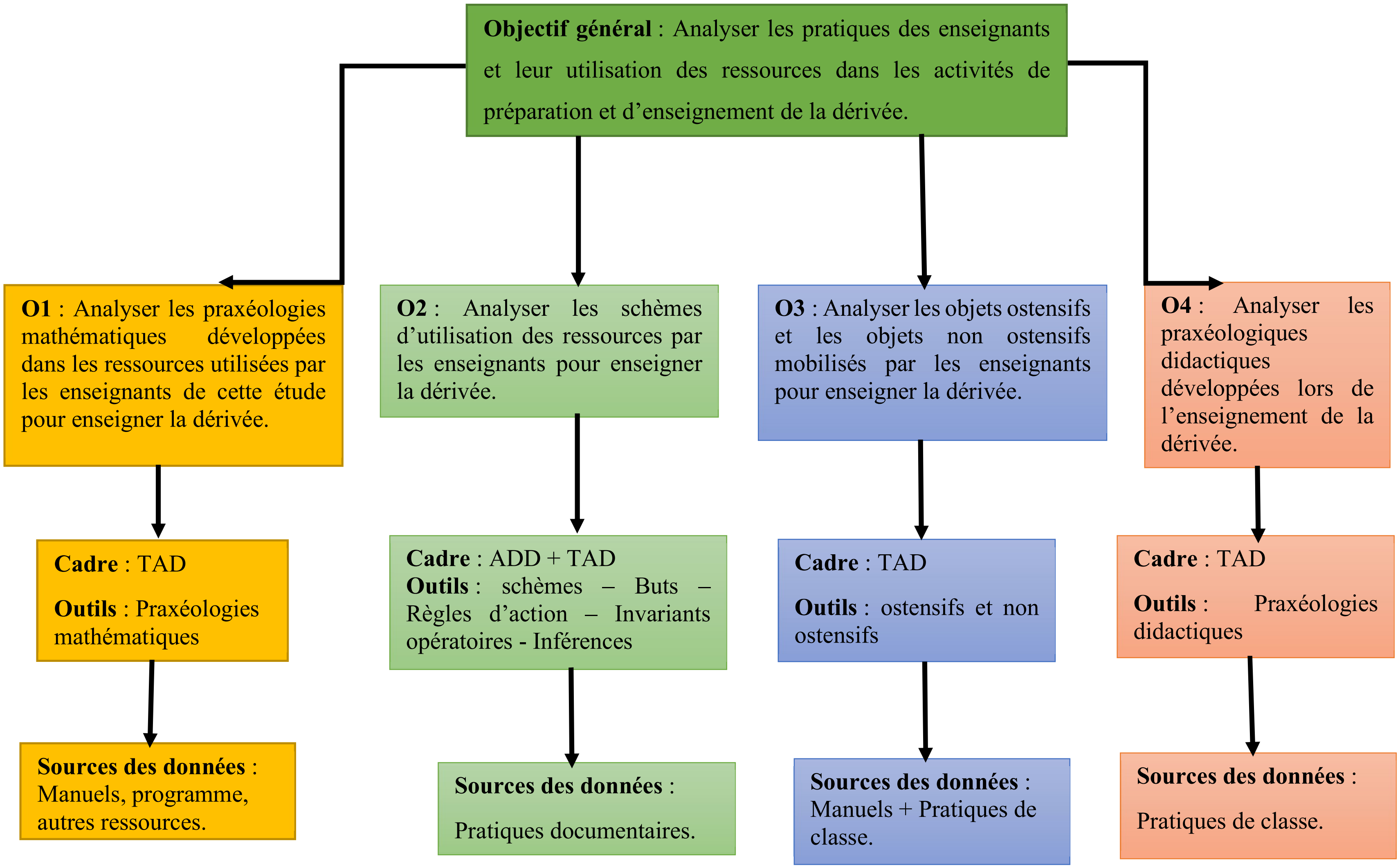


Tableau 2. – Synthèse du cadre théorique et des outils d'analyse

Chapitre 3 : Méthodologie

Dans les deux premiers chapitres qui précèdent, nous avons présenté la problématique et le contexte théorique du sujet. Cela nous a conduit vers l'élaboration des questions spécifiques de la recherche. Ces questions nous ont imposé une démarche méthodologique qui comprenait le type de recherche, le contexte de la recherche, la population à l'étude, les outils de collecte et d'analyse des données. Étant donné que le rapport institutionnel et le rapport personnel des enseignants sont en jeu dans un contexte où les enseignants doivent élaborer et utiliser des ressources d'enseignement, nos outils méthodologiques devaient nous permettre de voir comment la dérivée est introduite dans les manuels de mathématiques et les programmes, de décrire comment les enseignants travaillent et utilisent leurs ressources pour enseigner la dérivée, et d'identifier et caractériser les pratiques que mettent en place les enseignants pour introduire la dérivée en classe. Il était donc question d'identifier les influences des contraintes institutionnelles et celles liées à l'utilisation des ressources sur les pratiques d'enseignement. Ces objectifs ne pouvant aucunement être atteints par une approche quantitative, nous avons adopté une approche qualitative puisqu'il fallait répondre entre autres à la question du pourquoi sur certains phénomènes observés.

3.1-Type de recherche ou méthode de recherche

L'étude des humains est complexe car leurs comportements sont parfois difficiles à interpréter. Obtenir les points de vue des enseignants permettrait de mieux recouper l'information en leur donnant plus de sens. En filigrane, nous avons cherché le sens des actions menées par les enseignants en dehors et à l'intérieur de la classe et ce, avant, pendant et après leurs cours sur la dérivée. Pour pouvoir atteindre nos objectifs, nous avons adopté une méthodologie de recherche qui répondait au mieux à nos objectifs spécifiques de recherche. La démarche qui est la nôtre s'inscrit dans un paradigme qualitatif/interprétatif et de façon plus spécifique, elle s'inscrit dans la démarche de l'étude des cas multiples. Il s'agit ici d'un type de recherche très fréquent en didactique et dont les cas étudiés sont très souvent des élèves, mais peuvent aussi être des enseignants ou des documents comme les manuels scolaires (Thouin, 2014) ou les autres ressources éducatives. Selon Thouin (2014), les études de cas sont parfois descriptives, surtout lorsqu'il est question de décrire une situation en profondeur. Nous pensons que c'est le cas qui est le nôtre dans cette étude. Nous avons travaillé avec un nombre restreint d'enseignants, en particulier ceux ayant une qualification légale d'enseigner et justifiant d'une ancienneté en enseignement reconnue, car l'ancienneté peut s'accompagner d'une amélioration des pratiques d'enseignement en mathématiques (Lew et al., 2016; Weber, 2004).

3.1.1-Démarche qualitative/interprétative en recherche

La démarche qualitative est une approche de recherche qui propose des outils pour interpréter dans le but de décrire ou de traduire les phénomènes sociaux, ces outils désignant des techniques d'interprétation qui permettent de porter davantage un regard sur les sens ou la signification de ces phénomènes qu'à leur fréquence (Van Manen, 1990). Dans cette démarche sont prises en compte toutes les réalités subjectives et intersubjectives, non pas seulement comme des objets de connaissance scientifique, mais aussi comme des instruments de recherche (Anadón & Guillemette, 2006). La recherche qualitative / interprétative dont se servent de nombreux chercheurs en éducation va permettre à ces chercheurs de comprendre les idées, les arguments, le point de vue et le sens que les acteurs sociaux donnent à leurs conduites, à leur vie ou même à leurs pratiques sociales (Anadón, 2006). Dans cette étude, les pratiques d'enseignement de la dérivée, le processus de recherche, de choix et de sélection des ressources par les enseignants pour enseigner la dérivée font partie d'un ensemble des pratiques sociales et humaines, et la recherche qualitative vise à mieux saisir ces actions sociales (Savoie-Zajc, 2000). Ce point de vue revient d'ailleurs dans le texte d'Anadón et Guillemette (2006) quand ils soutiennent que l'étude de la vie quotidienne, comme lieu où se construisent et se développent les différentes dimensions du monde humain est devenue nécessaire pour comprendre les valeurs, les représentations et les significations que les acteurs sociaux donnent à la vie humaine, significations construites à l'intérieur d'un processus socioculturel et historique dont la compréhension constitue le moyen d'accès à la connaissance pertinente et valide de ce qu'est l'humain. Pour comprendre ces pratiques sociales, on peut utiliser l'analyse des discours que les humains prononcent sur les actions et au regard de ce qui est effectivement fait, on arrive à caractériser leurs pratiques. Si on peut considérer l'interaction entre le chercheur, les personnes observées et les phénomènes observés comme sensible, il y'a lieu d'évoquer une certaine subjectivité de la démarche qualitative. Pour cela, il est possible de prendre quelques précautions pour assurer la validité de la démarche.

Savoie-Zajc (2000) évoque quatre critères de nature méthodologique pour une recherche qualitative/interprétative, la crédibilité, la fiabilité, la confirmation et la transférabilité. D'autres auteurs évoquent comme critères de scientificité l'objectivité, la validité et la fidélité (Lessard-Hébert et al., 1996) tandis que d'autres auteurs évoquent l'implication du chercheur qualitatif comme pouvant assurer la qualité de la recherche (Drapeau, 2004). Ces critères selon certains autres auteurs peuvent être regroupés comme suit : validité interne et crédibilité, validité externe et transférabilité, fidélité et constance, objectivité et fiabilité (Mucchielli, 1996). Selon Drapeau (2004), la validité interne tente de vérifier si les observations traduisent effectivement la réalité, autrement dit, il est question de savoir si ce que le chercheur observe est réellement ce qu'il croit observer. Pour cela le chercheur peut réévaluer ses hypothèses et même ses interprétations (Drapeau, 2004). La validité interne repose aussi sur le choix porté sur les sujets (participants) de l'étude afin que ces derniers soient effectivement associés aux phénomènes étudiés. Par exemple, nous avons eu dans cette étude pour participants, les enseignants de mathématiques car les pratiques d'enseignement en classe nous intéressaient, nous avons eu aussi les documents (manuels scolaires, programmes d'enseignement) et toutes les autres ressources qui portent sur la dérivée car le rapport institutionnel à la dérivée nous tenait à cœur. La validité interne pose enfin le problème de la logique argumentative qui devrait être observée dans les parties de la construction de la recherche, allant du problème de recherche à l'interprétation et à la vérification des résultats en passant par la collecte, l'analyse et le traitement des données (Lessard-Hébert et al., 1996).

S'agissant de la validité externe ou encore la transférabilité des résultats, il est question de savoir si les observations faites peuvent être généralisées à d'autres contextes ou objets, pour cela il est recommandé d'avoir un échantillon assez représentatif de la problématique en jeu (Drapeau, 2004). Le nombre considéré des participants à l'étude permet ainsi lors des entretiens par exemple de comprendre en profondeur non pas un seul individu mais de saisir les similitudes et les contrastes d'un individu par rapport à un autre. Pour cela il est donc important de présenter explicitement et le plus exactement possible la population en étude, le contexte et les conditions sociales de l'étude. Pour notre cas, nous referons le lecteur au chapitre 1 section 1.6 pour la justification du contexte de l'étude. Pour ce qui est de la fidélité, il est question de savoir si l'instrument qui va être utilisé est susceptible de produire les mêmes observations si on passe plusieurs fois à la cueillette des données sur la même population et dans le même contexte. Autrement dit, est-il possible d'obtenir les mêmes résultats peu importe quand et comment ceux-ci sont produits (Lessard-Hébert et al., 1996). Quant à la fiabilité, elle exprime une certaine constance dans les attentes de la recherche. C'est la possibilité qu'un outil qui a permis de collecter les données de la recherche puisse produire les mêmes résultats dès que les mêmes phénomènes sont observés.

La question de l'implication du chercheur de notre point de vue est fondamentale. La présence du chercheur dans un contexte de classe peut modifier le comportement de l'enseignant et de ses élèves. L'enseignant peut afficher une attitude qui est totalement opposée à son habitus professionnel, dans le but de donner une bonne impression de sa pratique professionnelle au chercheur. L'attitude du chercheur consiste donc à garder une distance critique entre ses perceptions de la pratique et les pratiques qui sont observées des participants. La rigueur du chercheur semble donc la principale garantie de la qualité d'une recherche qualitative. Une fois que ces critères sont clarifiés, nous pouvons préciser de quel type de recherche qualitative il est question dans cette étude.

3.1.2-Étude des cas multiples comme démarche de recherche qualitative

Plusieurs types de recherche ont émergé au cours de ces dernières années et démontrent à suffire la diversité et la richesse de la recherche dite qualitative (Anadón, 2006). Le type de recherche pour lequel nous avons de l'intérêt est l'étude de cas. Selon Anadón (2006), l'étude de cas est une approche et une technique de cueillette et de traitement de l'information qui est caractérisée par une description en profondeur d'un phénomène et par une analyse qui tente de mettre en relation l'individuel et le social. Cette approche a connu une évolution dans les champs de la sociologie et de l'anthropologie et nous a semblé pertinente pour notre recherche car les praxéologies se décrivent par rapport à l'individu vu dans son milieu naturel. Pris dans ce sens, nous constatons que l'enseignant qui enseigne la dérivée dans un environnement qui est ici la salle de classe subit les contraintes de l'institution à laquelle il est assujetti et du coup son rapport personnel par rapport à la dérivée peut être exprimé autrement. En recherche qualitative, les études de cas constituent un modèle idéal qui permet de comprendre et d'interpréter les observations qui sont faites au sujet des phénomènes éducatifs (Merriam, 1988)[17], aussi pour comprendre les phénomènes sociaux complexes (Yin, 2014). L'étude de cas porte sur la particularité de chaque sujet, elle vise à décrire minutieusement et de façon détaillée le cas étudié afin de permettre une compréhension approfondie de celui-ci. Elle prend naissance des observations de terrain et à partir du raisonnement inductif du chercheur, ce dernier peut faire des liens entre les caractéristiques du cas, les catégories et les hypothèses interprétatives (Anadón, 2006). En général les études de cas peuvent avoir une visée interprétative (Merriam, 1988) ou bien une visée positiviste (Yin, 2014) ou alors une perspective hybride qui implique les deux perspectives précédentes (Stake, 1995). Notre choix a visé l'interprétation et pour cela, notre étude s'est appuyée sur les entrevues qualitatives, l'observation directe et l'analyse des documents. Le choix de l'étude de cas comme méthode de travail dépend des objectifs de recherche, de la manière dont est défini le problème et aussi des questions qui orientent la recherche (Merriam, 1988, p. 29). La triangulation constitue la méthode la plus efficace pour assurer la validité des résultats dans l'étude de cas selon Merriam (1988) bien que la révision des données par les acteurs impliqués dans l'étude de cas et l'implication des participants à toutes les étapes de la recherche soient entre autres des stratégies de triangulation efficaces. La variété des sources de données donne plus de valeur à la recherche et la prise en compte de plusieurs cas apportent plus de précisions sur les phénomènes étudiés que si on n'avait étudié qu'un seul cas (Huberman & Miles, 1994; Merriam, 1988; Miles & Huberman, 2003).

Vu qu'il est question du rapport institutionnel et du rapport personnel des enseignants et notamment des praxéologies observables autour de la notion de dérivée dans cette étude, l'analyse d'un seul cas ne serait pas pertinente. Il nous a paru très important d'étudier plusieurs cas pour avoir matière à confronter afin de dégager des constances et des contrastes. Pour cela, l'étude multi-cas (Merriam, 1988; Mucchielli, 1996; Paillé & Mucchielli, 2003; Van der Maren, 1996) s'avère être la démarche appropriée. Nous avons voulu savoir comment les programmes officiels et les manuels se représentent la notion de dérivée, comment les enseignants l'enseignent et pourquoi ils opèrent un choix au détriment de l'autre; ces intentions rejoignent l'idée de Paillé et

[17] « Case study research, and qualitative case study, is an ideal design for understanding and interpreting observations of educational phenomena » Merriam, S. B. (1988). *Case study in education : A qualitative approach*. Jossey-Bass.

Mucchielli (2003) et Mucchielli (1996) qui relèvent l'utilité de l'analyse des cas lorsqu'il est question du comment et du pourquoi. La collecte des données dans le cadre de cette recherche s'est faite auprès de trois enseignants et nous avons recherché initialement dans les ressources institutionnelles des éléments qui pouvaient faciliter ou mettre à mal le travail des enseignants en classe. Afin de rendre compte des outils qui ont permis de recueillir les données de la recherche, nous présentons d'abord le contexte de cette recherche.

3.2-Contexte méthodologique de la recherche

Nous revenons sur les éléments du contexte de l'étude qui ont servi à justifier la pertinence de cette étude. Nous n'allons plus présenter tous les éléments du contexte, par ailleurs, nous référons le lecteur à la section 1.6. Le contexte que nous présentons ici peut être qualifié de contexte institutionnel car c'est le cadre dans lequel sont définies les orientations de l'éducation nationale, la formation des enseignants, le choix des programmes de formation et les orientations par rapport à la manière d'aborder les notions mathématiques inscrites au programme. Pour notre recherche nous avons entrepris de collecter les données au Cameroun. Deux raisons peuvent justifier ce choix. D'abord, le fait que le chercheur ait exercé comme enseignant dans le contexte de l'étude donne les atouts pour l'accès aux participants. Ensuite, nous observons qu'il manque dans le contexte africain des recherches sur l'enseignement et même l'apprentissage de la dérivée contrairement aux contextes nord-américain et européen. Enfin, il serait aussi riche pour les collègues chercheurs en éducation des pays du nord d'avoir des éléments qui permettent de mieux comprendre le contexte éducatif. Comme cela, les partenaires de nos États qui soutiennent le développement du secteur éducatif pourraient mieux cibler leurs interventions et apporter des solutions aux problèmes liés au contexte socio-éducatif.

Au Cameroun comme dans plusieurs pays dans le monde, l'éducation fait partie des missions essentielles des États et pour cela, il revient au ministère des enseignements secondaires du Cameroun de donner des orientations quant aux contenus à enseigner qu'aux ressources essentielles pour les enseigner. Comme nous l'avons relevé, c'est le ministère qui arrête en définitive la liste des manuels et de celle-ci, les conseils d'établissement font le choix d'un seul manuel pour enseigner. Le niveau d'études qui est en jeu ici est l'année qui précède la dernière année des études secondaires (classe de terminale). Avant de passer en classe de terminale, les élèves doivent obtenir une année auparavant un certificat de probation communément appelé

« Probatoire de l'enseignement secondaire général ». On sait par ailleurs que dans ce contexte, l'un des problèmes que rencontrent les systèmes éducatifs est celui des effectifs pléthoriques dans les salles de classe. Ceci peut constituer un défi pour les enseignants, celui de permettre la construction des connaissances en même temps quand se pose le défi de la gestion de classe. Les élèves de ce niveau entendent parler de la dérivée pour la première fois dans un cours de mathématiques. Bien qu'ils aient appris une année auparavant le taux de variation, il n'existe pas dans ce cours préalable le mot « dérivée ».

Les enseignants qui enseignent à ce niveau sont en général des « professeurs de lycée », c'est-à-dire des personnes qui ont suivi cinq années de formation initiale ou deux années selon le parcours qui a permis leur entrée à l'école. L'école normale supérieure qui offre à ces enseignants leur première initiation pour devenir des professionnels de l'enseignement consacre la moitié de ses contenus sur la formation disciplinaire plutôt que sur les aspects liés à la pratique professionnelle, ce qui semble déconnecter la formation théorique des pratiques de terrain (Maingari, 2004; Tamghe, 2020; Tsafak, 2000). Par exemple, on a noté que les contenus de mathématiques supérieures occupent assez de place que l'on soit au premier cycle (50%) ou au second cycle (43,75%). Les cours de didactique au premier cycle sont moins importants en volume horaire qu'au second cycle, on pourrait l'expliquer par le fait que les étudiants qui entrent au second cycle par la deuxième voie ont besoin de plus de contenus portant sur la pédagogie et la didactique puisqu'ils ont déjà appris assez de contenus mathématiques à l'université. On assiste donc plus à une valorisation des contenus mathématiques au détriment des ressources didactiques nécessaires pour l'enseignement. Tous ces problèmes liés au contexte, les stratégies employées par les enseignants pour les contourner sont des éléments qui peuvent nous aider à documenter les milieux scientifiques surtout quand on sait que l'essentiel des résultats que nous avons à ce jour sur l'enseignement du calcul proviennent des pays du Nord. Un tel contexte aurait d'autres variables explicatives du phénomène étudié et pourrait nous amener à comparer les pratiques dans différents contextes pour faire ressortir les aspects plus porteurs pour l'apprentissage des élèves camerounais.

3.3-Collecte des données de la recherche

Nous avons jusqu'ici indiqué de quel type de recherche il était question. Dans cette perspective, les outils qui ont permis de collecter les données lorsqu'on fait usage d'une étude de cas sont les analyses documentaires qui ont permis dans notre étude d'avoir accès au rapport institutionnel, les observations des pratiques dans les classes et les entrevues nous ont permis d'avoir accès au rapport personnel des enseignants à la dérivée, aux raisons qui justifient les choix faits par eux ainsi que leur travail documentaire (Anadón, 2006). Pour décrire ces instruments, nous commençons par indiquer comment ont été choisis les sujets de cette étude. Globalement, la collecte des données s'est déroulée au courant du mois de novembre 2019. Les participants à l'étude ont presque le même profil académique et professionnel, ils travaillent dans la même région et dans des établissements scolaires différents.

3.3.1-Choix des sujets de l'étude

Il faut relever que la qualité des résultats d'une recherche dépend en tout premier lieu du choix d'un terrain de recherche qui se trouve être pertinent pour la question de recherche (Patton, 1980; Yin, 2014) mais il est encore plus important de procéder à une sélection adéquate des différents cas de l'étude (Miles & Huberman, 2003). Pour y arriver, il faut d'abord identifier la population qui s'inscrit bien dans le contexte où le phénomène est étudié, ensuite on établit les critères de choix des différents cas (Benbasat et al., 1984). Selon Lessard-Hébert et al. (1996), le choix des participants à une recherche repose sur la capacité de ces derniers à répondre aux préoccupations que pose la recherche. Autrement dit, c'est la possibilité d'accéder à l'information qui est nécessaire pour la recherche qui conditionne le choix des participants (De Weerd-Nederhof, 2001). Le profil et les compétences des personnes choisies devaient pouvoir rencontrer les intérêts de la recherche. Dans le cadre de cette recherche, nous avons choisi comme participants, des professeurs des lycées[18]. Ce profil nous a intéressé le plus car ces enseignants sont titulaires en même temps d'un baccalauréat en mathématiques pures et d'un diplôme en enseignement des

[18] Ce sont les enseignants qui auront accumulé cinq années de formation initiale en enseignement après le baccalauréat d'enseignement secondaire, c'est-à-dire qui sont rentrés à l'ENS au premier cycle et qui ont achevé les deux cycles de formation ou alors qui sont entrés directement au second cycle de l'ENS et y ont passé deux années. Ces enseignants enseignent en priorité les classes terminales (16 ans-19 ans) selon la disponibilité des personnels enseignants dans l'établissement scolaire.

mathématiques au secondaire. Ces deux qualifications des enseignants pourraient nous aider à mieux comprendre finalement si certains de leurs choix sont motivés par la part de l'étudiant en mathématiques ou bien par les expériences issues de leurs pratiques d'enseignement des mathématiques, ce qui correspond dans le cadre de cette recherche aux invariants opératoires. Comme nous l'avons relevé dans le chapitre 2, les invariants opératoires permettent au sujet « d'identifier et de reconnaitre les objets, leurs propriétés, leurs relations, et les transformations que les objets subissent » (Vergnaud & Récopé, 2000, p. 47). Les connaissances qu'un enseignant a de la dérivée et qui sont les souvenirs de son passé d'élève du secondaire, de même que les connaissances qu'il a de l'enseignement et de l'apprentissage d'un concept font partie de son rapport personnel au concept et permettent de mieux comprendre comment se développent ses schèmes d'utilisation des ressources et même ses pratiques d'enseignement.

Ici, la taille de notre échantillon a été déterminée par le principe de la saturation de l'information dès lors que l'ajout d'autres participants ou même de documents n'apporte presque plus de nouvelles informations (Thouin, 2014). Selon Thouin (2014), un nombre de participants compris entre 6 et 12 est généralement suffisant pour mener une étude de cas. Même si aucune littérature ne précise exactement le nombre de participants à une étude cas, certains auteurs estiment que lorsque les données sont collectées de manière optimale, on atteint la saturation entre 5 et 8 participants (Kuzel, 1999). Dans cette étude, nous avons obtenu l'accord de sept (07) enseignants qui ont eu connaissance du projet avant notre départ de Montréal. Une fois rendu sur le terrain de la recherche en novembre 2019 et après plusieurs tentatives de rencontre, certains ont décliné leur participation car à ce moment le contexte socio-politique était très tendu au Cameroun. Pour concilier les contraintes de temps et de coûts financiers, nous avons retenus uniquement des enseignants issus de la même région géographique, les trois enseignants retenus travaillaient tous dans la même ville (Yaoundé) mais dans trois établissements scolaires différents. Donc il y a eu ici un désir d'atteindre une répartition géographique qui répondait aux critères de rigueur de l'étude, tout en permettant de respecter le budget et l'échéancier prévu (Gagnon, 2012). Gagnon (2012) propose d'avoir plus de participants que le nombre voulu pour la recherche car un cas peut ne pas être observé jusqu'à la fin de la recherche. Un autre critère qui a pesé lourd dans le choix de nos participants est celui de l'expérience dans l'enseignement de la dérivée. En effet, dans l'étude conduite par Gueudet (2017), elle relevait comment les expériences diverses d'un enseignant d'université à l'international comme étudiant en Allemagne, doctorant en Grande-Bretagne et etudiant post-doc au Canada puis finalement enseignant en France jouaient un rôle important dans le travail documentaire de cet enseignant. Notre échantillon ainsi constitué est non-probabiliste (Merriam, 1988) et la technique d'échantillonnage est le choix raisonné boule de neige, c'est-à-dire que les personnes qui ont été choisies l'ont été sur la base du jugement du chercheur au regard des critères de réalisation de la recherche. Grâce à nos contacts et à nos différents réseaux de collègues et d'amis, nous avons pu retenir trois enseignants qui répondaient à nos critères. Nous vous les présentons ci-dessous puis nous déclinons les techniques utilisées pour la collecte des données. Afin de garder l'anonymat de nos participants, nous leur avons donné des prénoms d'emprunt selon un ordre alphabétique qui correspond à l'ordre dans lequel ils ont été rencontrés pendant les entretiens préalables et les observations en classe **(Tableau 2)**. Par exemple, Alex a été rencontré en premier et de même, il est celui que nous avons observé durant les premiers jours de la collecte des données. Alex travaille dans une école secondaire qui reçoit un financement du gouvernement de Turquie et où les élèves sont issus des familles relativement aisées et qui ont accès à plusieurs ressources différentes, Bernard quant à lui enseignait au moment de la collecte des données dans une école où on rencontre tous les profils socioéconomiques tandis que Charles a été observé dans un établissement où les élèves proviennent des familles de classe moyenne.

Noms	Qualifications	Expériences
Alex	• Diplôme d'études secondaires • Diplôme d'enseignant 1er cycle • Baccalauréat en mathématiques • Maitrise en mathématiques • Diplôme d'ingénieur en télécommunication • Diplôme d'enseignant 2e cycle	07
Bernard	• Diplôme d'études secondaires • Baccalauréat en mathématiques • Maitrise en mathématiques • Diplôme d'ingénieur en télécommunication • Diplôme d'enseignant 2e cycle	03
Charles	• Diplôme d'études secondaires • Baccalauréat en mathématiques • Maitrise en mathématiques • Diplôme d'enseignant 2e cycle • Étudiant de maitrise en didactique des mathématiques	05

Tableau 3. – Répartition des participants à l'étude

3.3.2-Démarche méthodologique

Une fois les participants identifiés, la prise de contact a été effectuée avec ceux-ci via un média social dans lequel nous avons spécifié les objectifs de notre travail sur le terrain. Comme il était question de caractériser les différents rapports institutionnels et personnels à la dérivée afin de rendre compte des contraintes institutionnelles, nous avons communiqué aux participants les documents de leur travail de préparation de cours dont nous aurons besoin. Par exemple, les programmes qu'ils ont reçus du ministère et les manuels qui ont été homologués par le conseil d'enseignement et qu'ils allaient utiliser pour préparer leurs cours et enseigner la dérivée en classe. Il leur a été aussi demandé tous les autres documents auxquels ils ont eu accès pour préparer les cours. De tous ces documents, nous avons procédé à une analyse documentaire afin de dégager le rapport institutionnel à la dérivée. Pendant notre première rencontre, nous avons eu une entrevue pendant laquelle nous voulions avoir des indicateurs biographiques des participants notamment leur âge, leur sexe, leurs qualifications académiques. Ensuite, nous avons voulu avoir accès à leur rapport personnel. Pour cela, nous avons utilisé le protocole présenté dans le tableau 5. Par exemple, il leur a été demandé ce que représente la dérivée pour eux, qu'est-ce qui leur paraissait plus important pour enseigner la dérivée, pourquoi selon eux il fallait enseigner la dérivée, qu'est-ce que les élèves devaient apprendre sur la dérivée. De même, pendant cette rencontre, il leur a été demandé de nous parler de leur processus de préparation des cours en général, puis, nous leur avons demandé de nous dire comment ils prévoyaient la préparation du cours sur la dérivée et comment ils se représentaient déjà son enseignement. En particulier, il était question de savoir comment se faisait la planification globale de leur enseignement de la dérivée, et nous avons eu accès aux documents essentiels avec lesquels ils ont préparé et réalisé leur cours. Pour mieux cerner leurs actions, nous leur avons posé des questions sur les raisons qui justifiaient le choix des documents et le processus qui les conduisait à l'élaboration de leurs notes de cours. Ce travail préalable nous a permis de caractériser leur travail documentaire. La troisième étape a consisté à l'enseignement proprement dit. Nous avons observé chacun des participants dans sa pratique d'enseignement. Cette phase nous a permis d'avoir accès aux pratiques constatées des enseignants dans la salle de classe. À l'issue des séquences d'enseignement, nous avons procédé à d'autres entrevues avec les participants afin de voir le lien entre ce qu'ils ont fait et ce qu'ils voulaient faire, les décisions opérées pendant l'action et les raisons de ces décisions. Une comparaison a été faite entre les intentions déclarées des enseignants et les pratiques observées. Finalement, nous avons eu trois principales sources de données pour cette recherche. Les observations et les entrevues constituant les deux principaux instruments selon de nombreux auteurs (Anadón, 2006; Benbasat et al., 1984; De Weerd-Nederhof, 2001; Gagnon, 2012; Kuzel, 1999; Lessard-Hébert et al., 1996; Merriam, 1988; Miles & Huberman, 2003; Mucchielli, 1996; Savoie-Zajc, 2000; Stake, 1995; Van der Maren, 1996; Yin, 2014), l'analyse documentaire nous a permis de procéder à une triangulation pour valider les résultats de la recherche.

3.3.3-Instruments de collecte des données

En fonction des différents objectifs de la recherche, nous avons identifié trois techniques pour la collecte des données, à savoir les entretiens, les observations et l'analyse documentaire (Lessard-Hébert et al., 1996). Nous les explicitons pour en comprendre en profondeur la démarche rigoureuse qu'elles nous imposent.

3.3.3.1-Analyse documentaire

L'analyse documentaire est un processus important pour la recherche qualitative dans la mesure où elle peut permettre de préparer les autres étapes de la recherche. Par exemple, analyser les manuels scolaires avant d'observer le travail des enseignants en classe permet au chercheur de prendre des décisions importantes sur la manière dont ce dernier pourra conduire ses observations. Comme instrument de la recherche qualitative, l'analyse documentaire est une opération qui consiste à représenter sous une forme concise et précise un ensemble de données qui caractérisent l'information contenue dans un document ou un ensemble de documents dans le but d'extraire des éléments de pertinence pour la recherche (Hudon, 2013). Il n'est pas seulement question de lire le contenu d'un document, mais surtout, il est question de pouvoir restituer le sens fondamental de toutes les informations qui ont été identifiées. L'analyse de contenu d'un document apparaît donc comme une technique d'analyse qualitative du contenu du discours qui peut provenir par exemple de l'analyse de récits de vie d'enseignants à propos de leur carrière professionnelle ou de l'analyse des valeurs contenues dans un document rédigé par la direction d'une école (Bourgeois & Piret, 2006)ou par un ministère pour ce qui est de notre cas. Ce type d'analyse de contenu est sémantique dans la mesure où elle s'intéresse au sens du texte, à la signification que le locuteur ou l'institution donne aux mots et aux expressions qu'il utilise dans le discours produit. L'enseignant procède à son analyse des documents qu'il reçoit de l'institution selon sa compréhension et le sens des mots, il les traduit dans la mise en place de son plan de cours, ensuite dans son cours et enfin dans les pratiques d'enseignement. Le chercheur quant à lui recherche les unités de sens dans les documents institutionnels pour enfin faire le lien avec l'interprétation qu'a fait l'enseignant dans le but de dégager soit des différences, soit des similitudes. Il est donc question d'évaluer la conformité du rapport personnel, celui de l'enseignant au rapport institutionnel (Chevallard, 1989).

Pour ce qui est de la préparation des cours et de l'enseignement de la dérivée, nous voulions donc comprendre les pratiques d'enseignement des enseignants de mathématique notamment les composantes liées à la préparation des cours et à l'enseignement proprement dit. Pour avoir accès aux contraintes institutionnelles auxquelles sont confrontés ces enseignants et les raisons qui structurent leurs multiples décisions, nous avons observé les enseignants en action dans leurs salles de classe puis nous avons recueilli ce qu'ils pensent de leurs pratiques. Dans ce cas, nous avons obtenu un ensemble de données issues des entretiens, à partir de ces données, nous avons fait une analyse de contenu (Bourgeois & Piret, 2006) qui nous a permis de faire de l'induction (Blais & Martineau, 2006). Le tableau 4 ci-dessous retrace le déroulement complet du processus de collecte des données. Les enseignants ont été observés sur une période de trois semaines allant du 04 novembre au 29 novembre 2019. Chacun des enseignants a été rencontré sur une période couvrant environ une semaine.

Dates	Heures	Tâches	Description de la tâche
Septembre 2019		Sollicitation des participants Envoie des demandes d'autorisation auprès du délégué régional des enseignements secondaires pour le centre	Communication avec les participants et choix des semaines de prestation des cours Les autorisations sont nécessaires pour accéder dans les classes.
	10h15	Rencontre avec le Délégué régional des enseignements secondaires du centre (Cameroun)	Discuter sur le déroulement de la recherche et des précautions prises pour assurer la confidentialité des données de la recherche.
01 novembre 2019	13h00	Visite de courtoisie aux proviseurs	
	16h30-17h30	Entretien préalable avec Alex	Rapport personnel Schèmes d'utilisation des ressources Projet d'enseignement de la dérivée Enregistrement audio
04 novembre 2019	8h30 – 10h10	Observation de l'enseignement de la dérivée partie 1 (Alex)	Dérivée en un point Continuité et dérivabilité Points anguleux Enregistrement vidéo
	11h00-11h30	Discussion post-enseignement	Validation du projet d'enseignement et du rapport personnel de l'enseignant. Enregistrement audio.
06 novembre 2019	8h30 – 10h10	Observations de l'enseignement de la dérivée partie 2 (Alex)	Fonction dérivée Formules de dérivation
	11h00-11h30	Discussion post-enseignement	Validation du projet d'enseignement et du rapport personnel de l'enseignant. Enregistrement audio.
08 novembre 2019	8h30 – 10h10	Observations de l'enseignement de la dérivée partie 3 (Alex)	Sens de variation Exercices Enregistrement vidéo
	11h00-11h30	Discussion post-enseignement	Validation du projet d'enseignement et du rapport personnel de l'enseignant. Enregistrement audio.
	15h00-16h00	Entretien préalable avec Bernard	Rapport personnel

			Schèmes d'utilisation des ressources Projet d'enseignement de la dérivée Enregistrement audio
13 novembre 2019	08h30-10h30	Observations de l'enseignement de la dérivée partie 1 (Bernard)	Dérivée en un point Continuité et dérivabilité Points anguleux Enregistrement vidéo
	11h00-11h30	Discussion post-enseignement	Validation du projet d'enseignement et du rapport personnel de l'enseignant. Enregistrement audio.
15 novembre 2019	08h30-10h30	Observations de l'enseignement de la dérivée partie 2 (Bernard)	Fonction dérivée Formules de dérivation Sens de variation Enregistrement vidéo
	11h00-11h30	Discussion post-enseignement	Validation du projet d'enseignement et du rapport personnel de l'enseignant. Enregistrement audio.
18 novembre 2019	08h30-10h30	Observations de l'enseignement de la dérivée partie 3 (Bernard)	Opérations sur la dérivation Sens de variation Enregistrement vidéo
	11h00-11h30	Discussion post-enseignement	Validation du projet d'enseignement et du rapport personnel de l'enseignant. Enregistrement audio.
	16h00-17h00	Entretien préalable avec Charles	Rapport personnel Schèmes d'utilisation des ressources Projet d'enseignement de la dérivée Enregistrement audio
20 novembre 2019	10h30-12h30	Observations de l'enseignement de la dérivée partie 1 (Charles)	Dérivée en un point Continuité et dérivabilité Points anguleux Enregistrement vidéo

	13h00-13h30	Discussion post-enseignement	Validation du projet d'enseignement et du rapport personnel de l'enseignant. Enregistrement audio.
22 novembre 2019	10h30-12h30	Observations de l'enseignement de la dérivée partie 2 (Charles)	Fonctions dérivées Formules de dérivation Enregistrement vidéo
	13h00-13h30	Discussion post-enseignement	Validation du projet d'enseignement et du rapport personnel de l'enseignant. Enregistrement audio.
25 novembre 2019	10h30-12h30	Observations de l'enseignement de la dérivée partie 3 (Charles)	Dérivées et tangente Exercices Enregistrement vidéo
	13h00-13h30	Discussion post-enseignement	Validation du projet d'enseignement et du rapport personnel de l'enseignant. Enregistrement audio.
29 novembre 2019	17h00-2100	Rencontre avec les participants	Discussion sur différents projets

Tableau 4. – Tableau récapitulatif de la collecte des données

3.3.3.2-Entretiens préalables

Avant la rencontre préalable, nous avons expliqué aux participants l'objet de l'étude, le déroulement des prochaines étapes de la collecte des données, notamment en leur présentant le projet, en leur présentant aussi quelques éléments sur les considérations éthiques, comme l'anonymat et la confidentialité. Cette activité a eu pour but principal de favoriser l'ouverture entre le chercheur et le participant. Enfin, nous avons évoqué durant cet entretien les questions liées à l'environnement scolaire et la salle de classe. Entre autres, nous avons par exemple évoqué les questions à propos de la mise en œuvre du dispositif d'enregistrement et la présence d'une installation électrique. Cette phase a été fondamentale car elle nous a permis aussi d'établir avec eux un climat de confiance, et nous en avons profité pour aussi réguler le niveau de langue pour les prochains entretiens en fonction des participants.

Dans une étude de cas, comme le souligne Merriam[19] (1988), le principal but visé lorsqu'on utilise des entretiens est d'aller chercher dans l'esprit de l'interviewé des informations spécifiques pour la recherche. L'entretien devient donc nécessaire lorsqu'il n'est pas possible d'observer les comportements, les sentiments ou la manière dont les gens interprètent le monde qui les entoure. Lors des différents entretiens préalables dont la durée a été d'une heure et qui a été de nature semi-dirigé, il a été demandé aux participants de se présenter, de nous parler de leur parcours académique, de leurs expériences professionnelles, de ce qu'ils pensaient de l'enseignement et des contenus qu'ils enseignent et de manière spécifique ils devraient nous parler du projet d'enseignement de la dérivée qui était en jeu ***(Tableau 5)***. L'un des points saillants de cette étape consistait à obtenir des enseignants des informations sur le processus de sélection des ressources d'enseignement et de préparation du cours, bref, l'entretien préalable nous permettait de saisir les pratiques de préparation des cours et de mieux affiner les questions que nous nous posions sur les pratiques des enseignants et de comprendre les motivations qui poussent les enseignants à prendre certaines décisions.

---

[19] Interviewing is necessary when we cannot observe behavior, feelings, or how people interpret the world around them. It is also necessary to interview when we are interested in past events that are impossible to replicate Merriam, S. B. (1988). *Case study in education : A qualitative approach*. Jossey-Bass. .

Thème 1	**Identification du participant**
	Pouvez-vous nous parler de vous, votre parcours académique et professionnel ?
Thème 2	**Environnement de travail**
	Depuis quand travaillez-vous dans ce lycée ?
	Depuis quand enseignez -vous dans cette classe ?
	Pouvez-vous nous parler brièvement de votre lycée, des conditions de travail ?
Thème 3	**Rapport personnel de chaque enseignant avec la dérivée**
	Pour vous, que représente la dérivée ?
	Qu'est-ce-qui selon vous paraît plus important dans l'enseignement de la dérivée ?
	Selon vous qu'est-ce que les élèves doivent apprendre d'important sur la dérivée ? Quelles sont les applications de la dérivée, les aspects les importants à retenir
Thème 4	**Préparation des cours**
	Quels sont les documents que vous recevez du lycée pour préparer vos cours?
	En dehors de ces documents reçus, avez-vous d'autres documents dont vous vous servez pour cette préparation ?
	Comment les obtenez-vous ces documents ?
	Dans l'utilisation des documents officiels, utilisez-vous les informations des manuels telles qu'elles sont inscrites ou bien y apportez-vous des modifications ?
	Par exemple lorsque vous constatez que le développement qui est fait sur la dérivée dans ces documents ne correspondent pas à vos attentes, que faites-vous ?
	L'ordre des notions proposés dans le manuel est-il suivi à la lettre ou bien vous décidez d'évoluer différemment ?
	Pensez-vous que ces autres documents vous apportent quelque chose de plus que vous décidez d'ajouter à votre préparation de cours ?
Thème 4	**Motivations dans le choix et l'utilisation des ressources d'enseignement**
	Qu'est ce qui selon vous justifie votre décision de prendre des nouvelles informations qui ne figurent pas dans les documents que l'on vous donne au lycée ?
	Que diriez-vous de votre formation par rapport à la manière de choisir vos ressources d'enseignement ? Vous prépare – t – elle à ce travail de préparation ?
	Diriez-vous que votre expérience personnelle est la principale source de motivation dans vos décisions de choix et d'utilisation des ressources pour préparer vos cours ?
Thème 5	**Autres**
	Est-ce que votre formation à l'École Normale Supérieure de Yaoundé vous a-t-elle permis de modifier votre rapport personnel à la dérivée ?
	Est-ce-que votre rapport personnel à la dérivée a-t-il changé après que vous ayez utilisé vos ressources pour préparer les cours ?
	Avez-vous autres choses à ajouter ?

Tableau 5. – Grille d'entretiens préalables

3.3.3.3-Observations des pratiques d'enseignement

L'analyse des pratiques enseignantes vise à les décrire dans le but de les comprendre et les expliquer (DeSaint-André et al., 2010). L'observation constitue l'une des méthodes utilisées couramment dans les études de cas (Fortin et al., 2006). L'observation des pratiques enseignantes dans cette étude a porté sur ce qui était fait par l'enseignant en classe et les éléments qui ont fait l'objet d'observation dépendaient des objectifs de recherche et du cadre conceptuel (Fortin et al., 2006). Dans une étude de cas par observation, le chercheur peut être actif ou passif dans le milieu de recherche. L'on sait par exemple que dans une observation participante, le chercheur se fond dans le milieu naturel du phénomène observé tout en participant aux activités quotidiennes des acteurs selon différents degrés d'implication (Van der Maren, 1996) et devient ainsi lui-même le principal instrument d'observation (Lessard-Hébert et al., 1996).

Il peut aussi arriver que le chercheur fasse recours à une grille d'observation lorsque son observation est systématique. Dans ce cas, le chercheur prépare d'avance une grille d'observations qui seront faites. Il va s'agir d'une liste d'éléments que le chercheur désire observer et dont les définitions sont les plus précises et les plus opératoires possibles (Van der Maren, 1996). L'observation systématique peut être directe (DeSaint-André et al., 2010; Lessard-Hébert et al., 1996) et dans ce cas, le chercheur n'utilise pas une grille pour observer le phénomène, il prend des notes ce qu'il observe et dont il juge pertinent en fonction de ses objectifs de recherche (Savoie-Zajc, 2004). Ce type d'observation peut aussi être accompagné d'une observation électronique (DeSaint-André et al., 2010) qui va consister à dissimuler un micro ou bien une caméra ou camescope visible ou discret à partir desquels on va enregistrer ou filmer la pratique enseignante observée (Van Der Maren, 2003). L'observation électronique permet de capter dans la totalité tout ce qui se fait en classe pendant l'observation pour une analyse minutieuse ultérieure (Beaugrand, 1988; Marcel et al., 2002), en plus d'offrir la possibilité d'être visionnée en temps voulu dans tout autre type de cadre et à plusieurs reprises de manière à pouvoir en affiner sa description (Beaugrand, 1988) et de pouvoir en faire une description riche (DeSaint-André et al., 2010), mais également d'avoir accès à certains éléments de la pratique de l'enseignement qui n'aurait pas pu être mis en évidence autrement (Fortin et al., 2006). Cependant, Beaugrand (1988) évoque la présence du chercheur ou des outils technologiques comme une limite dans la mesure où les personnes observées peuvent modifier leurs comportements habituels dans le but de donner bonne impression.

S'agissant de cette recherche, l'observation en classe visait à identifier les pratiques enseignantes de l'enseignant lors des premiers cours d'introduction de la dérivée. D'après les objectifs de recherche présentés dans le chapitre 2, il s'agissait d'identifier dans cette recherche les praxéologies mathématiques et didactiques développées en classe au moment de l'introduction de la dérivée et du passage du nombre dérivé à la fonction dérivée. Chacun des trois enseignants a été observé pendant trois cours espacés de deux jours et pendant une durée de 110 minutes chacune puisque dans le contexte, la durée de chaque période de cours est de deux fois 55 minutes. Par ailleurs, selon les établissements scolaires, il peut arriver que la durée d'une période soit de deux heure (120 minutes). Lors des différentes séances d'enseignement des trois enseignants, nous étions présents en classe. Pendant ces différentes phases, nous avons installé le matériel d'observation et nous sommes restés assis dans un coin de la classe pour laisser l'enseignant dérouler ses enseignements. Lors du premier cours qui portait sur l'introduction de la dérivée en un point, nous étions très attentifs à la manière dont chacun des enseignants allaient aborder la situation. Nous avons capté ces différents moments à l'aide de notre caméra et notre première observation était de constater que dans la révision des connaissances préalables, tous les enseignants ont évoqué le calcul des limites, ce qui a retenu notre attention et lors des entretiens de confrontation, nous avons demandé à chacun des enseignants le but de ce retour et tous ont été unanimes dans leurs réponses pour dire qu'en effet ils venaient d'achever avant le cours sur la dérivée un chapitre portant sur le calcul des limites. Afin de poursuivre nos observations, deux grilles ont été utilisées pour observer et analyser le travail en classe. L'activité elle-même en classe a été subdivisée en épisodes, par exemple lorsqu'il était d'abord question du calcul de la dérivée définie en un point, le moment didactique identifié était celui de la première rencontre avec le type de tâche **(Tableau 6)**. C'est à l'enseignant que revenait la principale responsabilité de présenter la tâche aux élèves. Les objets mathématiques dans ce cas étaient toutes les notions mathématiques qui rentraient en jeu dans la résolution de la tâche et qui pouvaient être données par l'enseignant ou par l'élève, ces notions apparaissaient dans le discours de l'enseignant à l'oral comme à l'écrit. À ce niveau, on pouvait noter des micro-institutionnalisations car les techniques de questionnement de l'enseignant pouvaient permettre aux élèves de se souvenir de ces notions antérieures à l'enseignement en cours et de les énumérer. Enfin les activités didactiques observées comprenaient le corpus des activités que l'enseignant développait en interaction avec les élèves[20].

Par exemple, comment se fait la première rencontre avec la dérivée, les tâches utilisées par l'enseignant pour introduire le cours, les techniques mises en place, les manières de construire et de justifier les technologies associées à la résolution des tâches. Nous nous intéressions aussi à la manière dont se faisait l'institutionnalisation, notamment comment le contenu à retenir par les élèves s'inscrivait dans les rapports institutionnels avec la dérivée. On y retrouvait par exemple l'activité de mise en route, les questions posées par l'enseignant qui le menaient vers l'atteinte de l'objectif de cet épisode, les réponses des élèves et leurs questionnements, les outils graphiques utilisés par l'enseignant, les explications apportées aux élèves. Ce premier tableau a permis la lecture des différents moments didactiques dans le travail de l'enseignant.

Épisode	**Moment didactique**	**Acteur principal**	**Objets mathématiques**	**Activités didactiques observées**

Tableau 6. – Introduction du processus didactique (Barbé et al., 2005, p. 247)

Le second tableau avait pour but de décrire les organisations mathématiques observables à travers les moments didactiques qui sont plus ou moins mis en place dans la classe **(Tableau 7)**. Ce tableau indique le déploiement du processus didactique, le lien entre les différents moments didactiques et les organisations mathématiques en lien avec ces différents moments. Il a permis de relever par exemple les types de problèmes, les techniques, la technologie et la théorie qui entourent chaque organisation mathématique. Pour avoir accès aux raisons qui selon l'enseignant justifient ses pratiques, nous avons eu recours aux entretiens pendant lesquels nous sommes revenus par exemple sur l'activité de préparation du cours, la planification et la gestion du processus didactique et les difficultés des élèves.

[20] Les éléments d'observation et d'analyse des pratiques des enseignants en classe sont inspirés des travaux de Barbé et al. (2005) et de González-Martín et al. (2018).

Session	Type de tache mathématique	Technique mathématique	Éléments technologiques et théoriques	Moment et sous moment dominant	Éléments des techniques didactiques locales

Tableau 7. – Processus didactique et moments didactiques (Barbé et al., 2005, p. 248)

Si les observations électroniques permettent de considérer le contexte dans lequel les comportements se manifestent (Van der Maren, 1996), l'observation électronique, lorsqu'elle est accompagnée d'un entretien d'auto-confrontation, permet aux participants de l'étude de visionner les enregistrements de leurs pratiques avec le chercheur et si possible de commenter et de discuter de celles-ci (Goigoux, 2002). Nous avons permis à l'enseignant après chaque observation en classe de regarder et de commenter l'enseignement qui était fait en classe. Ceci a eu pour effet de relever les raisons pour lesquelles certaines décisions étaient prises par ces enseignants.

3.3.3.4-Entretiens d'explicitation

Dans les sections précédentes, nous avons évoqué l'entretien de recherche comme étant une méthode de collecte des données qui a pour but de faire ressortir des idées fondamentales dans une activité humaine. D'ailleurs certains n'hésitent pas à dire qu'il s'agit de la principale méthode de collecte des données dans les recherches qualitatives (Fortin et al., 2006). En général, il y a un lien entre l'entretien et les observations (Lessard-Hébert et al., 1996). Dans certains cas la technique d'entretien peut précéder la collecte des données par l'observation (Pourtois & Desmet, 1988). Dans ce cas, l'entretien a pour fonction de préparer les observations car le chercheur peut formuler ses catégories d'observation dans le but de les clarifier lors des observations. Dans d'autres cas l'entretien peut aider à confronter les observations qui ont été préalablement faites dans le but de susciter d'autres questions ou de nouvelles interprétations (Lessard-Hébert et al., 1996). Après avoir observé les enseignants en classe, nous avons organisé des rencontres pour des entretiens d'explicitation d'une durée de 30 minutes afin de permettre aux enseignants de commenter ce qui venait d'être fait en classe en termes de pratique d'enseignement de la dérivée.

Notre grille d'entretien était axée sur les informations au sujet de l'enseignement proprement dit car les aspects liés à la préparation des cours avaient été abordés au préalable. Il a été d'abord question d'amener chacun des enseignants à commenter sa propre pratique, de nous parler de la mise en place des différents moments didactiques perceptibles dans son enseignement, de dégager les contraintes qui selon lui n'ont pas favorisé le déroulement des différents moments éventuellement ***(Tableau 6)***. Ensuite, l'enseignant a commenté son enseignement en faisant un lien avec la préparation de son cours, nous expliquer en quoi le manuel ou alors d'autres ressources utilisées ont été bénéfiques pour son enseignement et comment il penserait son enseignement s'il était question de le refaire. L'avantage d'avoir utilisé l'entretien individuel en face à face est le contact direct et l'établissement d'une relation de confiance (Charron et al., 2009), il a permis également de recueillir des données détaillées sur les pratiques enseignantes (Savoie-Zajc, 2003) ce qui a exigé de nous de pouvoir mettre notre vis-à-vis dans des conditions favorables en lui communiquant par exemple les attentes, la manière dont va se dérouler l'entretien, la durée et le contenu des informations attendues (Van der Maren, 1996). Il faut signaler que cet entretien à la fin de l'observation était très brève et visait simplement à permettre à l'enseignant de faire un commentaire sur le travail d'enseignement qui venait d'être observé. Nous n'avons pas prévu une dimension exclusive à ces entretiens. Par ailleurs, certains extraits de ces entretiens sont inclus dans les propos qui justifient certaines actions et des décisions des enseignants.

Thème 1	**Observations de l'enseignant sur l'enseignement**
	Comment pensez-vous avoir abordé la notion de dérivée pour la première fois avec vos élèves ?
	Pour introduire le cours vous avez dit aux élèves…. Pensez-vous que votre approche vous a permis de faire faire comprendre ce que vous vouliez que les élèves apprennent?
	S'agissant de la tâche que vous avez choisie pour introduire le cours, quelle est la technique que vous attendiez de vos élèves ? Vous semble-t-elle efficace pour introduire la dérivée ?
	Existe-t-il selon vous d'autres techniques ?
	Comment justifiez-vous ces techniques auprès de vos élèves ?
	Pouvez-vous nous dire ce qui a modifié vos choix des activités qui ont servi à introduire le cours sur la dérivée ?
Thème 2	**Utilisation des ressources pour l'enseignement et rapport personnel**
	Pourquoi avez-vous choisi d'utiliser telle ressource ?
	Pourquoi n'utilisez-vous pas d'autres ressources telles que….
	À quel point diriez-vous que cette ressource a-t-elle déterminé votre préparation de cours et aussi votre pratique d'enseignement ?
	Pensez-vous modifier vos ressources et votre préparation de cours pour améliorer votre prochain enseignement ?
	Quels seraient selon vous les principaux aspects liés aux ressources et à l'enseignement sur lesquels vous reviendrez ?
Thème 3	**Pratiques d'enseignement, ressources et formation**
	Diriez-vous que ce cours a changé quelque chose de votre rapport personnel à la dérivée ?
	Votre formation d'enseignant ou de mathématicien a-t-elle joué un rôle particulier pour vous pendant ce cours ?
	Que seriez-vous prêt à changer si vous deviez reprendre ce cours ?
	Les ressources actuellement disponibles dans votre environnement sont-elles assez suffisantes et pertinentes pour vous aider à enseigner la dérivée ?
Thème 4	**Difficultés rencontrées par l'enseignant**
	Selon vous quels sont les points positifs et les points négatifs que vous pouvez dégager de votre présentation du cours ?
	Quelles sont les principales difficultés que vous avez rencontrées lors de la préparation de votre cours ?
	Quelles sont les principales difficultés que vous avez rencontrées pendant la mise en œuvre de l'enseignement ?
Thème 5	**Difficultés rencontrées par les élèves**
	Avez-vous identifié des difficultés de vos élèves pendant cet enseignement ?
	Selon vous à quoi seraient-elles reliées ?
	Comment vous prendriez-vous pour réduire ces difficultés ?
Thème 6	**Autres**
	Avez-vous autres choses à ajouter ?

Tableau 8. – Grille d'entretien d'explicitation

3.4-Méthodes d'analyse des données de la recherche

Les données constituées de mots, des expressions et des phrases issues de la recherche qualitative tirent leurs sources des documents, des entretiens et des observations (Fortin et al., 2006; Huberman & Miles, 1994). Pour ce qui est de l'étude des cas, ces données sont presque toujours qualitatives (Gagnon, 2012) et comme le mode d'analyse et d'interprétation des données varie selon les types de recherche, les auteurs s'accordent au moins sur le moment où commence l'analyse des données. Dans les études de cas, l'analyse des données doit commencer immédiatement avec la collecte des données et elle doit continuer par la suite (Fortin et al., 2006; Miles & Huberman, 2003). C'est pendant la collecte des données que le chercheur commence à identifier le sens des phénomènes étudiés et certaines régularités. Ce moment est donc indiqué pour peaufiner les instruments, les questionnements et éventuellement de nouveaux questionnements pour rendre crédible les données. Une fois la collecte des données achevée, le chercheur dispose d'un ensemble de données qu'il va devoir analyser. L'analyse des données qualitatives se déroule généralement en trois grandes phases : l'épuration, le codage et l'analyse (De Weerd-Nederhof, 2001; Gagnon, 2012; Miles & Huberman, 2003).

3.4.1-Épuration et codage des données de recherche

La phase d'épuration consiste à s'assurer que les données présentes sont bien pertinentes pour la recherche, qu'on possède des éléments essentiels quant à leur source et à la façon dont elles ont été recueillies et enfin qu'elles sont dans le bon format approprié pour le codage (Gagnon, 2012). Cette phase suppose que le chercheur aura au préalable pris la peine de retranscrire tous les verbatims soit manuellement soit à l'aide d'un logiciel. S'agissant du codage, les différents textes seront découpés en unités de sens après une première lecture. Comme le souligne Gagnon (2012), le but de ce codage vise une organisation rigoureuse et le triage des données qui faciliteront les analyses. Nous avons procédé à une première tentative de codage en nous servant de nos différentes grilles d'entretien et notamment les grilles d'entretien et d'observation. Cette tentative nous a semblé infructueuse au départ au regard des dures journées de travail. C'est une fois la collecte terminée que nous avons commencé le codage proprement dit. Ce que nous recherchions, c'étaient des segments de texte ou des phrases qui avaient la même signification et qui seraient associés respectivement au choix des ressources, aux raisons qui justifient ces choix, au rapport personnel de l'enseignant à la dérivée, aux organisations mathématiques, aux moments didactiques et aux raisons qui justifient les pratiques constatées en classe.

3.4.2-Technique d'analyse des données de recherche

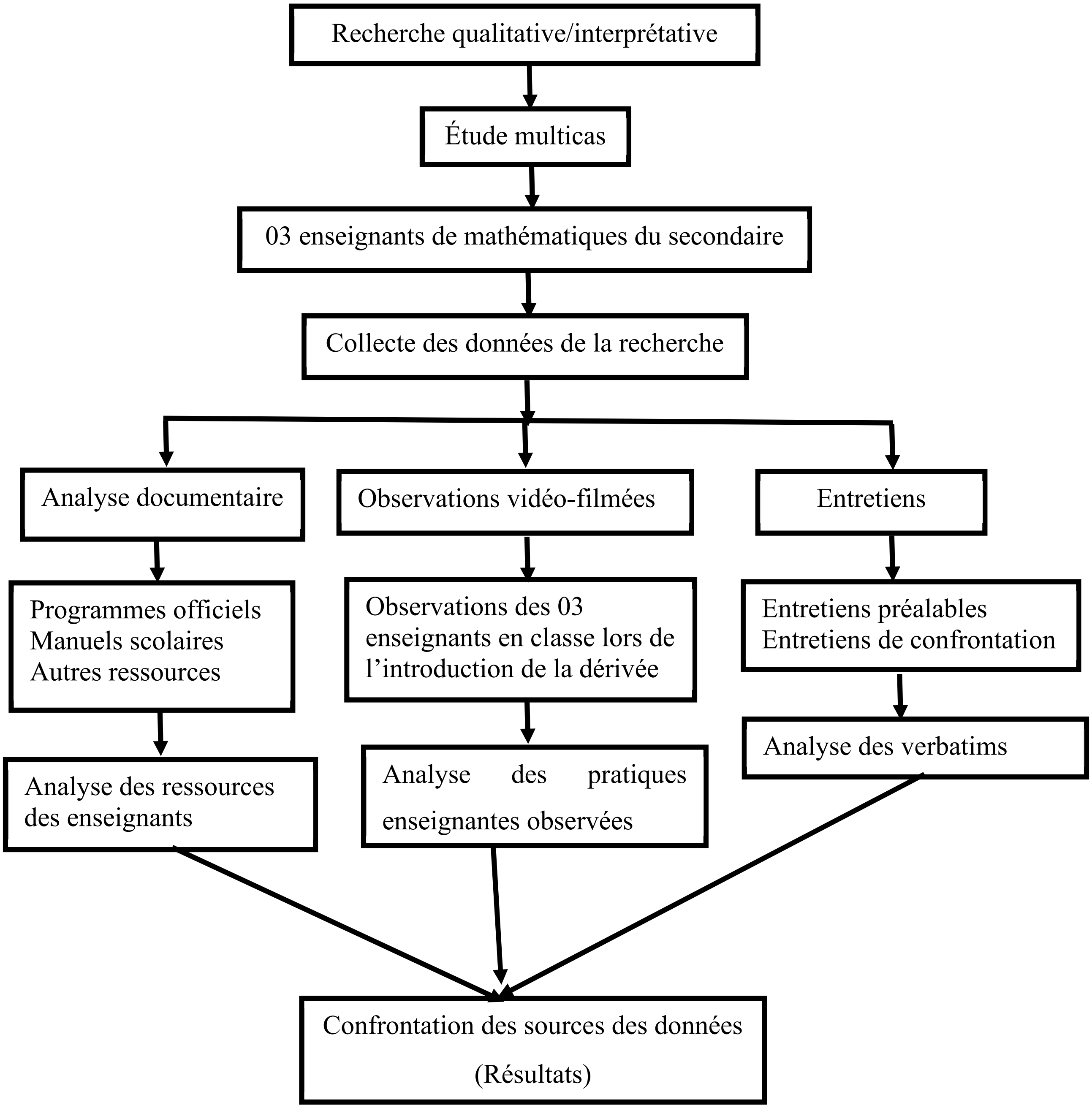


Figure 9. – Schéma récapitulatif de la méthodologie

Dans cette recherche nous avons trois catégories ou trois sources des données et en fonctions de celles-ci nous avons adoptées des techniques d'analyse des données qui se justifient selon de nombreux chercheurs qualitatifs **(Fig.9)**. Les premières données proviennent de l'analyse des documents institutionnels (programmes, manuels, autres fiches d'orientation fournies par l'administration) et d'autres ressources non institutionnelles utilisées par l'enseignant. Vu que ces documents sont présentés sous forme de texte, nous avons opté pour la technique d'analyse structurale de contenu (Barthes, 1966; Bourgeois & Piret, 2006) pour avoir accès aux différents rapports institutionnels au sujet de la dérivée et de son enseignement (Bourgeois & Piret, 2006). Il s'est agi donc ici d'une analyse sémantique pour dégager le sens et la signification de ces valeurs, cette analyse nous a permis de caractériser le rapport des institutions à l'objet dérivée.

Dans le cadre de cette recherche, nous avons considéré les ressources institutionnelles comme point de départ de nos analyses. Les institutions comme le ministère des enseignements secondaires traduisent leurs orientations sur les contenus sous la forme des récits qui prennent également la forme d'un langage écrit dont les représentations sont pour l'essentiel des mots. Les programmes scolaires, les manuels scolaires comme le manuel de mathématiques, les polycopiés, les sites internet proposent des contenus ou des données naturelles (Dany, 2016) encore appelées des données invoquées (Van der Maren, 1996, p. 326) ou que le chercheur se doit de manipuler pour y extraire des informations qu'il juge pertinentes pour l'atteinte de ses objectifs de recherche.

Pour ce qui est de l'analyse des programmes, les principales unités de sens recherchées étaient par exemple la présence ou l'absence des objets :

- *dérivée*,
- le taux de variation moyen et instantané,
- la tangente,
- la dérivée en un point (nombre dérivé),
- la dérivée sur un intervalle,
- le passage de la dérivée en un point à la dérivée sur un intervalle,
- le sens de variation,
- la présence des objectifs d'enseignement de la dérivée,

- les indications sur les types de tâches, les techniques ou les approches pour enseigner la dérivée,
- des recommandations sur la manière d'introduire la dérivée en un point
- Dans ces recommandations quelle est la place de la droite tangente?
- Laquelle des représentations de la notion de dérivée est mise en avant?

S'agissant des manuels scolaires et des autres ressources utilisées par l'enseignant et des notes de cours de l'enseignant, notre analyse a consisté à identifier lequel des sens de la dérivée ou mieux comment était représentée la notion de dérivée. Zandieh (2000) considère que l'apprentissage de la dérivée peut être fait dans plusieurs contextes ou bien à l'aide de plusieurs représentations, la dérivée est la pente d'une droite tangente à la courbe de la fonction en un point, un taux de variation instantané, une vitesse, une limite du taux de variation (Zandieh, 1997, 2000). Nous avons tenté d'identifier ces représentations dans les ressources des enseignants.

En particulier, nous avons analysé les activités et les tâches d'introduction de la dérivée, les définitions proposées, les exemples, les exercices d'application directe du cours, les exercices d'approfondissement, les exercices d'évaluation formative. Nous recherchions dans chacune des activités, les tâches, la technique, la technologie sachant bien entendu que les ressources ne présentent pas la théorie dans laquelle s'inscrit le concept étudié. Nous y recherchions aussi laquelle des représentations de la dérivée était mise en exergue. Nous avons aussi observé dans le manuel les principaux éléments sur lesquels repose l'apprentissage de la dérivée, sans oublier les stratégies développées dans le manuel qui montrent que les auteurs ont pris en compte les principales difficultés liées à l'apprentissage de la dérivée (González-Martín et al., 2018). Au vu des principales recommandations du programme et des tâches proposées dans les manuels, il a été possible pour nous de caractériser le rapport institutionnel à la notion de dérivée en fonction des choix institutionnels qui y sont faits.

La deuxième catégorie des données est issue des entretiens et des observations directes et filmées, ces données constituent les jugements, les pensées, les décisions formulées à travers des discours et le modèle pour les analyser est l'analyse de contenu (Blais & Martineau, 2006; DeSaint-André et al., 2010). L'analyse de contenu est la méthode qui cherche à rendre compte de ce qu'ont dit les interviewés de la façon la plus objective possible et la plus fiable possible (Andreani &

Conchon, 2005). Pour cela, la thématisation constitue l'opération au cœur de ce processus dans la mesure où il est question dans un premier temps de transposer le corpus des données en des thèmes représentatifs du contenu analysé et ce, en rapport avec la problématique de recherche (Paillé & Mucchielli, 2012). Ainsi pour ces auteurs, « l'analyse thématique consiste, dans ce sens, à procéder systématiquement au repérage, au regroupement et, subsidiairement, à l'examen discursif des thèmes abordés dans un corpus, qu'il s'agisse d'une transcription d'entretiens, d'un document organisationnel ou de notes d'observation » (Paillé & Mucchielli, 2012, p. 231).

Les analyses des données issues de l'analyse documentaire ont été confrontées à celles issues des observations puis enfin aux données obtenues des entretiens. Nous espérions ainsi favoriser l'émergence de catégories semblables au sein de chaque corpus. L'analyse de chaque cas nous a permis de procéder à une autre analyse cette fois-ci entre les différents cas de l'étude pour dégager les tendances (Gagnon, 2012). Par exemple, nous avons identifié des catégories pour chaque cas, puis nous avons fait le lien entre les différents cas selon les catégories obtenues pour arriver à identifier des similarités et des différences entre les différents cas.

Pour analyser les données, nous avions au départ deux choix qui s'offraient à nous. Une analyse des données à l'aide d'un papier-crayon ou une analyse à l'aide d'un logiciel (Paillé, 2011). Au départ, nous avons opté pour l'analyse à l'aide du logiciel QDA Miner. Nous avons découpé les différents textes en segments de manière à faire dégager des premières catégories notamment pour ce qui était de la biographie, les différentes idées qu'avaient les enseignants de la dérivée, son enseignement et son apprentissage. Plus tard, nous avons senti la nécessité d'avoir une vision bien fine de tout l'ensemble et nous avons fait appel à l'analyse à l'aide de notre ordinateur et des tableaux inspirés de travaux précédents (González-Martín et al., 2018). L'analyse à la main, s'est avérée fastidieuse de notre point de vue au regard du volume des données. Pour chacun des cas, trois sources de données ne seraient pas facilement manipulables même si l'on peut être d'accord sur le fait qu'un seul cas aurait permis de suivre progressivement et avec rigueur chaque étape de l'analyse. Compte tenu de cette limitation, nous avons donc mis l'accent sur l'utilisation des tableaux pour rendre notre démarche plus efficace. Pendant les analyses, nous avons fait des va et vient entre nos tableaux et le logiciel QDA Miner pour voir si lors du découpage du texte nous n'avions pas omis de considérer certains fragments importants des textes.

3.5-Limites de la recherche

Au moment où nous préparions notre arrivée sur le terrain, nous étions inquiets car le contexte de la recherche nous est familier. D'abord, nous avons considéré que le contexte pouvait être à l'origine de certains biais car il s'agissait d'enseignants qui exercent dans le contexte où nous avons exercé par le passé et ceci pendant douze années et à temps plein. Le regard qui est porté aujourd'hui sur ce que font ces enseignants peut être perçu comme un jugement. Il y avait risque qu'il y ait des résistances chez certains participants quant à la finalité des données qui seront collectées. Nous redoutions de ce fait qu'il puisse exister un comportement de méfiance de telle sorte que les participants ne puissent pas parler des pratiques réelles. Fort heureusement, nous avons trouvé sur le terrain des enseignants animés par le désir de faire ce qu'ils font. L'un des enseignants était d'ailleurs en deuxième année de maitrise en didactique. Nous considérons ensuite comme limite à ce travail le nombre de cas à étudier. En effet, il n'est pas possible de généraliser les résultats d'une telle recherche car chaque enseignant faisant l'objet d'étude a ses spécificités et sa manière propre de percevoir l'enseignement et donc les pratiques d'enseignement ne sauraient converger vers un cas unique de pratique.

Sur le plan méthodologique, la première limite peut être liée au contexte de l'étude. Cette étude pouvait être également faite au Québec, cependant le fait de la délocaliser au Cameroun avec ses spécificités peut réduire la portée des résultats du fait de la méconnaissance du contexte camerounais par les autres chercheurs. Néanmoins, nous aurons au moins quelques variables explicatives nouvelles pour différencier le contexte des recherches en Europe, en Amérique du Nord et en Afrique. Le deuxième point constituant une limite pour cette étude sur le plan méthodologique est le choix de l'étude de cas. Il est vrai que les outils de collecte des données dans l'étude de cas que sont les observations et les entretiens permettent d'avoir accès à ce qui se passe en classe et donnent plus d'éléments pour décrire les pratiques enseignantes (DeSaint-André et al., 2010). Cependant, notons également que sur le plan méthodologique la présence des caméras et la présence du chercheur peuvent provoquer des biais dans la pratique effective de l'enseignant. Nous avons fait usage de deux cadres théoriques complémentaires. En adoptant une telle démarche, nous sommes conscients que ces différents cadres théoriques exigeraient une triangulation des différentes données de terrain. Or la confrontation entre les données d'entretien, les observations et le suivi des enseignants dans le but d'observer une certaine évolution dans leur rapport personnel et dans leurs utilisations des ressources serait bénéfique dans la compréhension du problème de recherche en jeu. Dans ce cas, cela exigerait plus de temps matériel. Ce qui n'est pas possible compte tenu de la limite de temps prévue pour cette recherche et le temps consacré aux études doctorales étant limité également. Nous espérons prolonger cette étude pendant l'année scolaire suivante avec les mêmes enseignants dans le but de saisir les évolutions et les améliorations qu'ils ont pu réaliser à l'issue de notre passage.

3.6-Conclusion du chapitre méthodologique

Le but de cette recherche est de permettre la compréhension et la description des pratiques des enseignants de mathématiques dans les activités de préparation et d'enseignement de la dérivée, ainsi que leur utilisation des ressources et ceci s'est fait au Cameroun. Pour avoir accès à ces pratiques, nous avons eu besoin d'analyser le rapport institutionnel à la dérivée d'une part, le travail documentaire des enseignants, leur rapport personnel à la dérivée et leurs praxéologies d'autres parts. Cela nous a exigé des données de nature qualitative car au-delà de la description de ces pratiques, se trouvent les explications sur les raisons qui justifient l'agir des enseignants. La démarche qualitative s'étant imposée à nous car il était question d'interpréter les comportements et les idées, nous avons utilisé l'analyse documentaire, les observations vidéo filmées et les entretiens pour une meilleure triangulation des résultats. Les méthodes d'analyse combinées incluant l'analyse papier et l'usage de la technologie nous ont permis de procéder par codage successif pour aboutir à des données pertinentes pour répondre à nos questions de recherche. Nous sommes persuadés que les résultats sortis de cette étude sont en parfaite adéquation avec notre démarche méthodologique.

Chapitre 4 – Analyse des données et interprétation

Les trois premiers chapitres nous ont permis de poser le problème qui est en jeu dans cette thèse : nous questionnons les pratiques des enseignants de mathématiques dans l'enseignement de la dérivée et en particulier, nous analysons leurs schèmes d'utilisation des ressources pour enseigner la dérivée. Par la suite, nous avons précisé l'encadrement théorique qui permet de saisir et d'expliquer le phénomène questionné. Suivant une approche qualitative, nous avons procédé à la cueillette des données selon la méthodologie décrite au chapitre 3 de ce document. Dans cette partie, nous présentons les résultats de l'analyse des données issues de l'enquête de terrain. Ces données proviennent des manuels et ressources utilisées par les enseignants, les entretiens d'avant et d'après enseignement réalisés avec les enseignants de mathématiques et les observations en salle de classe. Pour permettre à chaque lecteur de suivre notre démarche et tenant compte des questions spécifiques de la recherche nous présentons dans ce chapitre les analyses du programme de mathématiques et les analyses des manuels utilisés par les enseignants. Ces premières analyses rejoignent le premier objectif spécifique de cette recherche, à savoir « analyser les praxéologies mathématiques développées dans les ressources utilisées par les enseignants de cette étude pour enseigner la dérivée». Par la suite, nous présentons les données sur les invariants opératoires qui caractérisent le rapport personnel des enseignants de mathématiques et leurs utilisations des ressources pour préparer les enseignements puis nous terminons nos analyses par les pratiques d'enseignement observées en classe lors de nos collectes des données sur le terrain.

4.1-Analyse du programme de mathématiques

Les programmes d'enseignement précisent les contenus à enseigner et donnent les orientations sur l'approche d'enseignement à privilégier et les moyens de les évaluer. Lorsque le Cameroun accède à l'indépendance le 1er janvier 1960, les autorités gouvernementales ont décidé de maintenir les programmes de formation des écoles, des lycées et des universités qui étaient en vigueur pendant la période d'avant indépendance (MINEDUC, 1998). En 1994, le gouvernement camerounais a publié le programme de mathématiques de la classe de sixième (première année du secondaire) (MINEDUC, 1998). Les autres publications ont suivi pendant les quatre autres années pour les classes de cinquième, quatrième et troisième puis le 12 août 1998, était publié le programme de mathématiques du second cycle. Ce programme, selon les auteurs (MINEDUC, 1998), devrait tenir compte des recherches en didactique des mathématiques. Ledit programme donnait des indications (MINEDUC, 1998, p. 16) sur la manière d'introduire certaines notions comme par exemple la dérivée. Selon la recommandation de ce programme, on pouvait aborder la notion de nombre dérivé soit sous l'aspect cinématique (vitesse instantanée d'un mobile) soit sous l'aspect géométrique (pente de la tangente à une courbe en un point). Aucune autre indication n'était visible sur les autres tâches incluses dans ce chapitre du programme. La deuxième réforme curriculaire a eu lieu en septembre 2012. En effet, dès la rentrée scolaire 2012-2013, le gouvernement a entrepris une réforme des programmes d'enseignement au primaire et au secondaire. Les contenus restant les mêmes, l'approche d'enseignement jadis basée sur la perspective behavioriste (transmission des connaissances) a été modifiée et repose désormais sur la perspective socioconstructiviste de l'apprentissage (MINESEC, 2014b, p. 11), ce qui marque une évolution importante de ces programmes.

S'agissant des plus récents programmes d'enseignement, l'une des questions auxquelles nous pensons trouver une réponse est celle de savoir quelles sont les principales recommandations faites par les institutions éducatives au sujet de l'enseignement de la notion de dérivée. Par exemple, dans le cas d'un programme d'enseignement il est question d'identifier les recommandations au sujet d'une ou des techniques ou alors il est question d'identifier les éléments qui vont servir à l'institutionnalisation. Même si tous les éléments permettant de caractériser les différents moments didactiques et éventuellement les praxéologies mathématiques (Chevallard, 1999, 2003b) qui permettent aux enseignants de mettre en œuvre le programme d'enseignement ne sont pas présents dans le programme, certains éléments donnent néanmoins des indications sur ce qui pourrait sembler être des prémisses de chacune de ces praxéologies. Pour les besoins de cette étude, nous allons identifier les connaissances liées à la dérivée depuis l'entrée des élèves au secondaire pour mieux expliquer les orientations du programme de l'enseignement et de l'apprentissage de la dérivée. Étant donné que cette étude s'inscrit dans une approche anthropologique et didactique, ce que recommande le programme officiel pourrait constituer les tâches ou des contenus que les enseignants/élèves devraient exécuter en classe. Les recommandations sur la manière d'enseigner une tâche ou un contenu pourraient aussi constituer les techniques didactiques et mathématiques. Dans un premier moment, nous rendrons donc compte des finalités de l'enseignement de la dérivée et la démarche préconisée par l'institution «

enseignement des mathématiques au secondaire » pour enseigner la dérivée. Pour cela, nous porterons une attention sur les objectifs généraux de l'enseignement des mathématiques et les objectifs spécifiques de l'enseignement de la dérivée. Ce regard sur ces objectifs vise essentiellement à rendre compte du rapport institutionnel, c'est-à-dire du choix fait par l'institution sur les principaux contenus à enseigner et les moyens de les enseigner.

4.1.1-Objectifs généraux du programme de mathématiques

Le texte du programme donne les finalités de l'enseignement des mathématiques. Au niveau du second cycle du secondaire comme nous l'avons relevé au chapitre 3 dans la section 3.2.1 sur le contexte méthodologique, les contenus en jeu prennent appui sur les acquis du premier cycle, le but énoncé est d'aller au-delà de l'acquisition des savoirs mathématiques pour rendre les élèves capables de les utiliser comme des outils de résolution des problèmes issus des situations de la vie courante ou même des situations qui viennent purement de la discipline. Cet extrait illustre ces finalités de la manière suivante :

> L'enseignement des mathématiques revêt une double mission : la première est une mission de formation intellectuelle des élèves, en développant progressivement les capacités d'expérimentation, de raisonnement logique, de créativité et d'analyse critique, afin de les rendre capables, dans les situations de vie, d'exercer pleinement leur citoyenneté. La deuxième est une mission utilitaire d'intégration des connaissances scientifiques au contexte socioéconomique et à l'environnement international. (MINESEC, 2014b, p. 8).

L'enseignement des mathématiques pour les auteurs doit permettre aux élèves de développer leurs connaissances intellectuelles à travers leurs aptitudes d'expérimentation et de raisonnement logique à travers l'importance accordée aux contenus mathématiques à enseigner. Sur le plan social, il est aussi question de relever l'importance des contenus à enseigner pour le quotidien des citoyens, c'est pour cela qu'il est recommandé dans le programme de faire une entrée par des situations de vie quotidienne. On note au regard de ces objectifs que l'enseignement des mathématiques vise à développer trois compétences fondamentales (MINESEC, 2014b, p. 8) :

- *Résoudre une situation problème*[21].
- *Déployer un raisonnement mathématique.*
- *Communiquer à l'aide du langage mathématique.*

Dans cette perspective et s'agissant des recommandations pédagogiques, la méthodologie recommandée se fonde sur la pédagogie socioconstructiviste. Ces objectifs généraux et les compétences à développer permettent d'affirmer que l'enseignement/apprentissage des mathématiques ne se limite plus au développement des connaissances mais il est question de favoriser le développement des compétences mathématiques. Si on s'en tient aux principaux travaux de recherche en didactique des mathématiques, on dirait que ces objectifs énoncés s'inscrivent dans une approche par les compétences. Selon les auteurs des programmes, un cours doit commencer par un contrôle des prérequis nécessaires, une situation problème qui permet de susciter le questionnement chez les élèves, une ou deux activités d'apprentissage qui vont permettre de découvrir des savoirs nouveaux ou à fixer les connaissances existantes, le résumé de la leçon, des exercices d'application et des activités d'intégration à travers lesquelles les élèves doivent mobiliser plusieurs ressources pour résoudre les problèmes courants. Au niveau des évaluations[22], il est question d'une part d'évaluer les ressources c'est-à-dire la capacité de l'élève à pratiquer les calculs exacts, approchés, littéraux ou fonctionnels et d'autre part d'évaluer les

---

[21] « À l'instar de ceux du premier cycle et des classes de seconde, les programmes de mathématiques des classes de première sont l'occasion de poser les jalons de cette double mission qui passe par le développement de trois compétences fondamentales qui sont, de manière universelle, celles de tout enseignement/apprentissage de mathématiques à savoir :
• Résoudre une situation problème.
• Déployer un raisonnement mathématique.
• Communiquer à l'aide du langage mathématique. » MINESEC. (2014b). *Programmes d'études en Mathématiques des classes de premières A, C & E*. Yaoundé-Cameroun: Ministère des Enseignements Secondaires

[22] Chaque épreuve écrite de contrôle des apprentissages devra tenir compte de l'évaluation des savoirs et savoir-faire mathématiques et de l'évaluation des compétences, le tout encastré dans une charpente ayant les deux parties suivantes:
1. Évaluation des ressources : Il s'agit par exemple d'évaluer la capacité à pratiquer le calcul exact, approché, littéral ou fonctionnel ; à gérer des situations concrètes par lecture graphique, la construction des tableaux ou de graphiques, par identification/résolution des modèles mathématiques sous-jacents….
2. Évaluation des compétences : Il s'agit d'évaluer la capacité à mobiliser des ressources pour résoudre des situations de vie significative et pertinente comportant des supports si nécessaire et des tâches complexes, indépendantes et équivalentes.
Les évaluations orales pendant les séances de classe sont encouragées. Elles permettent d'évaluer chez les élèves la capacité à communiquer en langage mathématique qui est l'une des compétences fondamentales en mathématiques ; elles constituent aussi, une source de motivation pour les élèves.
Les niveaux d'exigence ne doivent pas excéder le quatrième niveau de la taxonomie de BLOOM. Ils doivent alors se limiter à la connaissance, la compréhension, l'application et l'analyse.

compétences, c'est-à-dire la capacité de mobilisation des ressources pour résoudre des situations concrètes de vie, qui sont significatives et pertinentes (MINESEC, 2014b).

On peut appliquer ces objectifs à toutes les notions mathématiques inscrites au programme. S'agissant de la dérivée de manière spécifique, il n'existe pas d'autres recommandations en dehors des objectifs généraux qui sont ci-dessus indiqués. Par conséquent, il est difficile de percevoir dans le texte des programmes pourquoi doit on enseigner / apprendre la dérivée. L'accent est mis sur les savoirs qui se déclinent en savoir-faire. De plus, le programme n'apporte pas des clarifications sur la manière de développer par exemple le lien entre la dérivée en un point et la pente de la droite tangente ni sur la manière dont les différentes connaissances liées à la dérivée en un point pourront être intégrées et utilisées lors de l'enseignement de la fonction dérivée et à travers quelques ressources qui sont indiquées.

4.1.2-La dérivée dans les programmes de mathématiques

4.1.2.1-Pré-calcul des dérivées dans les programmes de mathématiques

La dérivée est associée aux notions de fonction, de limite, de taux de variation et de pente. Selon les programmes de mathématiques du niveau d'étude qui nous concerne ici, les notions de taux de variation ou d'accroissement et de pente sont antérieurs au calcul de la dérivée vu au second cycle du secondaire. En classe de troisième[23], les textes du programme indiquent que les élèves doivent utiliser le signe du coefficient directeur pour donner le sens de variation d'une application linéaire et d'une application affine. Il n'est encore point question dans ces cours de fonctions, d'ailleurs la notion n'y est pas mentionnée autant la notion du taux de variation n'est pas mentionnée. Relevons que le calcul du taux de variation permet de conclure dans certaines circonstances si l'application affine est croissante ou décroissante. Le calcul du coefficient directeur permet donc aux élèves de découvrir la notion de variation. En classe de quatrième[24], l'évocation du terme 'sens' fait référence au sens d'un vecteur et n'a rien à voir avec la notion du sens de variation. En classe de troisième (secondaire 4), connaissant deux points $A(x_A; y_A)$ et

[23] La classe de troisième représente la quatrième année des études secondaires, ce qui serait au Québec le secondaire 4.

[24] Secondaire 3

$B(x_B; y_B)$ appartenant à une même droite le coefficient directeur se calcule par la relation $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, cette règle est issue de la géométrie analytique et on assiste à une variation constante entre les ordonnées et les abscisses. Dans le cours sur les applications affines et les applications linéaires, deux savoirs importants sont à retenir selon les extraits du tableau 7, ces savoirs sont indiqués par nous-même en gras dans le tableau: le coefficient directeur d'une application linéaire ou affine et le sens de variation d'une application linéaire ou affine également. Dans un premier temps, il est question pour l'élève de pouvoir utiliser le signe du coefficient directeur pour donner le sens de variation d'une application linéaire ou affine. Par la suite, l'élève devra interpréter le graphique d'une application linéaire ou affine à l'aide du signe du coefficient directeur ou en utilisant un encadrement du coefficient directeur pour déduire le sens de variation des applications affines ou linéaires.

Ressources			
Savoirs	**Savoir-faire**	**Savoir -être**	**Autres ressources**
I. Applications linéaires et applications affines			
¤ *Applications linéaires :* ¤ *Applications affines :* ***- Coefficient directeur d'une application linéaire ou affine.*** ***- Sens de variation d'une application linéaire ou affine.***	¤ *Utiliser le signe du coefficient directeur pour donner le sens de variation d'une application linéaire ou affine.* ¤ *Interpréter le graphique d'une application linéaire ou affine (signe du coefficient directeur, encadrement du coefficient directeur, sens de variation).*	*Développer :* *- l'esprit critique.* *- le sens de l'ordre et de la méthode.* *- la curiosité lors de la lecture d'un texte comportant des nombres.* *- le sens de la rigueur et de la concision.*	*- Documentation.* *-Calculette.* *-Tableurs.*

Tableau 9. – Extrait du programme de $4^{ème}$ et $3^{ème}$ (MINESEC, 2014a, p. 37)

Dans un autre chapitre notamment celui des équations des droites, deux savoirs font intervenir la notion de coefficient directeur : la détermination du coefficient directeur d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées; l'étude des conditions de parallélisme et d'orthogonalité de deux droites à l'aide des coefficients directeurs (Tableau 7). La notion de coefficient directeur est encore évoquée cette fois-ci pour étudier les positions relatives entre les droites ou bien pour tracer les droites à partir d'un point. En aucun cas le programme ne mentionne le mot *« pente »,* les élèves doivent savoir manipuler ces notions dans les activités proposées.

Ressources			
Savoirs	**Savoir-faire**	**Savoir -être**	**Autres ressources**
IV. Équations de droites.			
¤ Équations cartésiennes de droites. *¤ Coefficient directeur d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.* *¤ Condition de parallélisme et d'orthogonalité de deux droites à l'aide :* *- des coefficients directeurs.* *- des vecteurs directeurs.*	*¤ Tracer une droite déterminée par :* *- un point et le coefficient directeur* *¤ Écrire une équation cartésienne d'une droite définie par :* *1 point et le coefficient directeur,* *¤ Trouver le coefficient directeur, quand il existe, d'une droite donnée par une équation cartésienne.*	*Développer l'esprit critique.* *Développer le sens de l'ordre et de la méthode.* *Être curieux lors de la lecture d'un texte comportant des nombres et avoir le sens de la rigueur et de la concision.*	*-Matériels de géométrie.* *-Matériel expérimental.* *-Micro-ordinateur…*

Tableau 10. – Extrait du programme de 4ème et 3ème (MINESEC, 2014a, p. 42)

En classe de seconde (secondaire 5), les contenus à enseigner comprennent entre autres l'étude des variations d'une fonction comme l'indiqué dans le tableau 9. Le savoir ici est l'étude du sens de variation d'une fonction croissante, décroissante ou constante sur un intervalle donné à l'aide d'une lecture graphique ou à l'aide des formules de calcul algébrique. Pour cela, la technique préconisée est l'utilisation du taux d'accroissement, cette technique peut consister à comparer le taux de variation sur des intervalles donnés ou alors on peut utiliser une représentation graphique pour conclure sur le sens de variation d'une fonction. Parmi les savoir-faire attendus, les élèves doivent représenter la distance parcourue en fonction du temps d'un mobile dont la vitesse varie suivant la portion du trajet (MINESEC, 2014c, p. 30). La notion de vitesse évoquée ici apparait comme moyen d'explorer la variation de la vitesse en fonction de la position du mobile en mouvement. C'est donc en classe de seconde que l'élève découvrirait le vocabulaire associé au taux d'accroissement $a = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$. Le programme de mathématiques ne donne pas de manière spécifique des indications sur le lien à faire entre le calcul du coefficient directeur et la nouvelle connaissance à savoir le taux d'accroissement.

Ressources	
Savoirs	**Savoir-faire**
II. Fonctions numériques d'une variable réelle	
Sens de variation : définition d'une fonction croissante ou décroissante (par comparaison ou par calcul du taux d'accroissement), constante sur un intervalle.	*¤ Étudier le sens de variation d'une fonction sur un intervalle (algébriquement ou par lecture graphique).* *¤ Représenter des fonctions affines par intervalles.* *¤ Représenter la distance parcourue en fonction du temps d'un mobile dont la vitesse varie suivant la portion du trajet.* *¤ Représenter le volume d'un liquide en fonction de sa hauteur dans une cuve constituée de solides connus.*

Tableau 11. – Extrait du programme de seconde (MINESEC, 2014c, p. 30)

4.1.2.2- La dérivée dans les programmes de première scientifique

Comme indiqué en introduction, cette étude s'appuie entre autres sur la TAD (Chevallard, 2002a, 2003b) et prend en compte la manière d'organiser les savoirs mathématiques. S'interroger sur la manière d'introduire la dérivée dans les programmes revient à identifier de quelle manière les contenus sont organisés dans le programme. Il s'agit de manière spécifique de faire ressortir les éléments qui justifient les différentes technologies, en identifiant spécifiquement le bloc technique et le bloc technologico-théorique. Le chapitre sur la dérivée appartient au module 21 qui traite des relations et opérations fondamentales dans l'ensemble des nombres réels. Le savoir-être attendu est de développer chez les élèves leur esprit critique, de curiosité, le sens de l'ordre et de la méthode, le sens de la rigueur et de la concision. D'après le texte officiel, le chapitre sur la dérivation commence par la dérivabilité en un point, mettant ainsi l'accent sur la définition du nombre dérivé. Il intervient après les notions de fonction, de limite d'une fonction en un point et à l'infini et de continuité. Les programmes d'enseignement de la dérivée pour ce qui est du niveau d'enseignement qui est en jeu dans cette étude se déclinent de la manière suivante telle qu'indiquée dans le tableau ci-dessous **(Tableau 10):**

Ressources			
Savoirs	**Savoir-faire**	**Savoir -être**	**Autres ressources**
VI. Dérivation			
o Dérivabilité d'une fonction en un réel : définition, nombre dérivé o Opérations sur les fonctions dérivables en un réel ; o Dérivabilité à gauche, dérivabilité à droite en un réel ; o Fonction dérivable sur un intervalle o Fonction dérivée d'une fonction sur un intervalle ; o Fonction dérivée des fonctions usuelles ; o Fonctions dérivées d'une somme, d'un produit, d'un quotient ; o Fonction dérivée de la composée d'une fonction affine par une fonction donnée ;	o Étudier la dérivabilité d'une fonction f en un réel a par la limite en a du taux d'accroissement : $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ o Calculer le nombre dérivé d'une fonction dérivable en un réel ; o Montrer que si deux fonctions u et v sont dérivables en a, alors U+V, kU (k réel),UV et $\frac{U}{V}$ sont aussi dérivables en a ; o Montrer que si U et V sont dérivables en a et V(a)≠0, alors UV est dérivable en a ; o Montrer que si v est dérivable en a et u dérivable en U(a), alors U∘V est dérivable en a. o Montrer qu'une fonction est dérivable à droite ou dérivable à gauche en un réel ; o Montrer qu'une fonction définie par intervalles est dérivable en un réel extrémité d'un de ces intervalles ; o Montrer qu'une fonction est dérivable sur un intervalle donné ; o Déterminer une équation d'une tangente, d'une demi-tangente à une courbe en un de ses points ; o Déterminer la fonction dérivée d'une fonction numérique. o Déterminer la fonction dérivée d'une somme, d'un produit d'une fonction par un réel et d'un quotient de deux fonctions ; o Déterminer la fonction dérivée de la composée d'une fonction affine par une fonction donnée. o Étudier le sens des variations d'une fonction numérique sur un ensemble donné.	Développer : l'esprit critique, l'esprit de curiosité, le sens de l'ordre et de la méthode, le sens de la rigueur et de la concision.	•Documentation. •Calculette. • Tableurs. •Matériel expérimental. • Thermomètres. • Altimètre.

o Fonction dérivée et sens de variation d'une fonction sur un intervalle donné ; o Tableau des variations d'une fonction numérique sur un ensemble donné ; o Extrema d'une fonction sur un ensemble. o Approximation affine d'une fonction autour d'un réel ; o Tangente à la courbe en un de ses points ; demi-tangentes à la courbe en un de ses points (points anguleux)	o Dresser le tableau des variations d'une fonction sur un ensemble donné. o Déterminer les extrema d'une fonction sur un intervalle donné ; o Résoudre des problèmes d'optimisation dans des situations concrètes (maximisation du bénéfice, minimisation des charges, etc.) o Donner une approximation affine f d'une fonction autour d'un réel a dans le cas où f est dérivable en a ; o Écrire une équation de la tangente à la courbe en un de ses points ; o Écrire une équation de la tangente à gauche ou à droite en un réel, o Montrer qu'un point d'une courbe est un point anguleux.		

Tableau 12. – Extrait du programme de première (MINESEC, 2014b, pp. 30-31)

D'une part, l'institution « enseignement des mathématiques au secondaire » suggère d'introduire le cours sur la dérivée en un point à l'aide du taux d'accroissement (Tableau 10), ceci constitue la technique préconisée pour résoudre la tâche qui consiste à déterminer la fonction dérivée en un point. L'aspect cinématique (vitesse instantanée d'un mobile) n'est pas évoqué dans le plus récent programme; pourtant, dans le précédent programme les deux approches étaient préconisées. Par ailleurs, l'institution n'apporte aucune information didactique sur la manière dont les enseignants doivent dans leur enseignement passer de la dérivée en un point à la fonction dérivée. Il est donc possible pour n'importe quel enseignant d'introduire le chapitre sur la dérivée par la fonction dérivée puis de travailler par la suite le nombre dérivé. Il est aussi donc laissé libre choix à l'enseignant soit de privilégier un ensemble de formules que les élèves devront retenir ou alors de faire émerger quelques dérivées de référence à travers des démonstrations. Toutes les notions à enseigner sont identifiables dans le programme et la technique semble bien celle de la limite du taux de variation. Même si le programme ne donne pas les raisons d'enseigner ou d'apprendre la dérivée, il y est préconisé de résoudre certains problèmes d'optimisation dans les situations concrètes, par exemple la maximisation du bénéfice, la minimisation des charges etc. S'agissant de la tangente, son statut n'est pas clairement défini dans le programme, on peut émettre l'hypothèse que la tangente serait une conséquence ou une interprétation géométrique du nombre dérivé. Par ailleurs, la tangente apparait dans les compétences liées à l'approximation d'une fonction en un point. Ici, l'objectif poursuivi n'est pas celui de construire simplement une tangente (tâche) mais celui d'utiliser la tangente pour réaliser une tâche qui consiste à réaliser une approximation d'une fonction, dans ce cas, la tangente fait partie de la technique. De même, on note qu'aucune forme d'ostensif du concept n'est mise en avant ni même évoquée de manière implicite. Il n'est pas possible de dire si les aspects géométriques, algébriques et numériques font partie des compétences que les élèves devraient développer. Le programme énumère un ensemble de contenus spécifiques à enseigner sans pour autant apporter des indications sur l'usage ou non d'une forme de représentation. Il apparait que la responsabilité des auteurs des manuels et des enseignants est grande dans la mesure où ces derniers ont la responsabilité de lire et d'interpréter le programme. S'il est vrai que le programme préconise l'introduction de la dérivée par la limite du taux de variation, il n'est pas exclu que l'enseignant ou les auteurs des manuels scolaires se servent d'autres approches pour introduire la dérivée.

D'autre part, nous observons de la manière d'enseigner et d'apprendre la dérivée que le programme est plus explicite quand il s'agit du bloc de savoir-faire. Dans le bloc pratique, on note également que les tâches que les élèves devraient apprendre sont indiquées. On note aussi que les techniques préconisées sont de nature algébrique notamment le calcul d'un quotient différentiel et le calcul des limites. Les différentes tâches qui sont présentées dans le programme ne permettent pas de voir si les élèves / enseignants peuvent mobiliser d'autres techniques comme la lecture graphique pour apprendre la dérivée; il y a donc lieu de souligner l'absence de l'articulation des ostensifs algébrique et graphique.

Le rapport institutionnel est d'abord traduit dans le texte des programmes mais il peut aussi être observé dans les manuels scolaires qui sont le canal à partir duquel la société assure la conformité des intentions aux réalités mathématiques développées dans les manuels. Dans ce sens, le manuel de mathématiques est donc le second niveau de la transposition didactique qui fait des contenus du programme, des contenus enseignables. Dans la section 4.2, nous allons analyser les manuels qui ont été identifiés comme faisant partie des ressources utilisées par les enseignants de cette étude.

4.2-Analyse des manuels de mathématiques

Les ressources utilisées par les enseignants peuvent être de différentes natures et provenir de différentes sources. Dans le cadre de cette étude, le ministère des enseignements secondaires a la responsabilité de valider les programmes et les principaux manuels utilisés. Jadis, les écoles avaient à choisir dans une liste de trois manuels proposés par le ministère. Depuis la rentrée scolaire 2018/2019, le ministère a adopté la politique du livre unique dans chaque discipline inscrite au programme. Chaque sous-système dispose de son manuel selon le cycle, autrement dit, le manuel utilisé dans les écoles secondaires anglophones ne sont pas identiques à ceux que l'on utilise dans les écoles secondaires francophones. Pour cela, chaque manuel choisi au niveau du ministère devrait être utilisé sur toute l'étendue du territoire national, les conseils d'établissement n'ont plus le pouvoir de choisir eux-mêmes le manuel qui sera utilisé par leurs élèves. Pour ce qui est de cette étude, tous les enseignants avaient le même manuel: *Excellence en Mathématiques 1ère C & E* (Tegninko et al., 2014) et dans certains cas, nous avons noté l'utilisation des autres manuels comme indiqué dans le tableau ci-dessous **(Tableau 13).**

Cependant, selon leur parcours d'ancien élève au secondaire, certains des enseignants qui ont participé à cette étude consultaient d'autres manuels qui ont été inscrits à un moment donné au programme. Pour rendre compte de la transposition réalisée par les auteurs de ces manuels, nous nous intéresserons principalement au manuel utilisé par les enseignants et les élèves et nous rendrons compte de la manière dont les autres manuels consultés par ces enseignants introduisent la dérivée en un point et sur un intervalle. Cette analyse permettra de dégager les similitudes et les différences dans la manière dont les auteurs prennent en compte les orientations du programme. Elle permettra aussi de dégager la manière dont les concepts sont présentés dans les manuels et en fonction de ce que nous savons des difficultés que les élèves rencontrent dans leurs apprentissages de la dérivée, nous pourrons mieux renseigner la communauté scientifique de ce qui est fait dans le contexte africain en général puis en particulier dans le contexte camerounais. Nous commencerons par faire une analyse praxéologique qui va consister à dégager pour chaque objectif poursuivi dans le chapitre le type de tâche, la technique et les éléments théoriques nous référant ainsi à la TAD. En particulier, l'observation de chaque manuel permettra de voir quelle est son organisation des contenus, par exemple, une activité de mise en route, les définitions, les remarques, les exemples, les exercices d'application, les propriétés, les exercices formatifs et les exercices de consolidation. Les manuels qui feront donc l'objet d'une analyse sont ceux indiqués ci-dessous :

N⁰	Titres	Auteurs	Éditeurs
A	Collection Inter Africaine de Mathématiques (CIAM)[25]	Touré et al. (2015)	Édicef
B	Majors en Mathématiques 1ère C-E	Mvomo et al. (2015)	ASVA
C	Excellence en Mathématiques 1ère C & E	Tegninko et al. (2014)	NMI Éducation

Tableau 13. – Liste des manuels consultés par les enseignants de l'étude

4.2.1-Analyse du manuel CIAM

Le manuel de mathématiques de la Collection Inter Africaine de Mathématiques fait partie d'un grand nombre de manuels qui ont été rédigés par de nombreux enseignants et responsables pédagogiques issus des pays africains ayant le français en partage, c'est par exemple le cas de la France, de la Belgique et du Sénégal. Le but visé était celui de l'harmonisation de la pédagogie des mathématiques et la mise à la disposition des élèves et des enseignants africains de manuels qui tiennent compte du milieu socioculturel africain en tant que support et véhicule privilégiés des concepts mathématiques et qui permettent également l'acquisition par les élèves des aptitudes en matière d'analyse des situations, de conjecture d'hypothèses et de validation à l'épreuve des faits ou du raisonnement en utilisant des modèles mathématiques dont ils ont connaissance et de dégager une conclusion (Touré et al., 2015, p. 4). Dans ce manuel, le chapitre sur la dérivation est le treizième après celui des limites et de la continuité. En introduction, un bref aperçu de l'histoire du calcul différentiel permet d'indiquer l'importance du concept de dérivée notamment ses applications en mathématiques et dans les domaines variés tels que l'économie et la physique. Les principaux types de tâches qui sont développés dans le chapitre sur la dérivation comprennent:

[25] Le manuel CIAM est un ouvre qui appartient à la collection Interafricaine de Mathématiques. Il a été rédigé par des équipes d'enseignant, des chercheurs et de responsables pédagogiques africains, belges et français. Selon les auteurs, le but de ce manuel vise à motiver les élèves, les faire agir, les amener à comprendre et à agir de nouveau, de manière autonome et créatrice Touré, S., Akele, C., Baye, O. H. A., Bendiman, K. M., Conde, K., Djiguiba, O., Don, A. P., Neulat, J.-L., & Traoré, S. (2015). *Collection Inter Africaine de Mathématiques, Premières Sciences Mathématiques*. Edicef.

T1 : Dérivabilité en x_0

T11 : Calculer le nombre dérivé d'une fonction en un point

T12 : Interpréter graphiquement le nombre dérivé d'une fonction en un point

T13 : Étudier la dérivabilité et la continuité d'une fonction en un point

T2 : Calcul de la fonction dérivée

T21 : Calculer la fonction dérivée d'une fonction

T22 : Calculer la dérivée d'une fonction élémentaire

T23 : Calculer la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, de l'inverse, de la composée, de la racine carrée et de la puissance d'une fonction

T3 : Applications de la dérivée

T31 : Étudier le sens de variations d'une fonction : minimum et maximum

T32 : Approximer ou optimiser une fonction

La structure du manuel en lui-même comprend pour chacun des types de tâches une introduction dans laquelle l'élève découvre la notion en jeu, une définition qui sert d'institutionnalisation à la notion mathématique qui a été présentée, un ou des exemples visant à utiliser la définition et les propriétés pour résoudre les problèmes, des propriétés visant à renforcer les notions en jeu tandis que la section des exercices vise la compréhension et la consolidation des apprentissages effectués. Nous commençons dans cette section par une présentation des discours technologiques qui servent à institutionnaliser les savoirs à apprendre par les élèves. Ensuite, nous présenterons également les types de tâches et la/les techniques envisagées. Cette présentation débouchera sur des liens éventuels entre les éléments de la praxéologie mathématique en jeu. Sachant que le manuel est organisé en trois types de tâches, nous présenterons les éléments technologiques en lien avec les différents types de tâche qui font partie de nos objectifs de recherche.

4.2.1.1-Discours technologiques en lien avec l'enseignement de la dérivée

4.2.1.1.1- Discours technologiques du nombre dérivé et de la fonction dérivée

La dérivée dans ce manuel a été présentée à l'aide de deux (02) définitions, dix-neuf (19) propriétés et un (01) théorème. La première définition est liée au premier type de tâche qui consiste à étudier la dérivabilité en un point x_0 et la deuxième définition porte sur l'introduction de la fonction dérivée. Les différentes propriétés et le théorème se répartissent sur l'ensemble des trois types de tâche et se regroupent sur 22 pages. Comme nous l'avons indiqué dans le tableau 12, les deux définitions viennent après une activité de mise en route qui prépare le lecteur à la découverte du nombre dérivé à partir de la limite du quotient différentiel $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ et aussi à la découverte de la fonction dérivée. Ce discours technologique est exprimé dans un langage purement symbolique, la définition du nombre dérivé quant à elle permet d'une part de calculer la limite du quotient différentiel et d'autre part elle permet de justifier que la limite obtenue est un nombre réel. De plus, lorsque le quotient différentiel admet une limite finie alors cette limite est appelée nombre dérivé de f en x_0 et notée $f'(x_0)$ et c'est en ce point que se fait le calcul du nombre dérivé. S'agissant de la fonction dérivée d'une fonction f, deux affirmations résument l'introduction de la fonction dérivée. La première information porte sur l'ensemble de dérivabilité et permet de constater que le domaine de définition de la fonction dérivée de la fonction f se nomme domaine de dérivabilité et pas d'autre information ne vient étayer cette affirmation. Par ailleurs, la deuxième information ~~à savoir~~ donne une indication sur la manière de noter une fonction dérivée et cette information constitue la principale information qu'offre le manuel sur la manière dont on peut définir la fonction dérivée d'une fonction. Ici on peut relever comment la fonction dérivée n'est pas définie à l'aide de la limite du quotient différentiel même si le calcul du nombre dérivé prend appui sur le calcul de cette limite.

Technologies	Discours technologiques
θ_1	« Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert K contenant un élément x_0. « f est dérivable en x_0 si $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie en x_0. Cette limite est appelée nombre dérivé de f en x_0 » (p.244)
θ_2	« Soit f une fonction. L'ensemble des nombres réels en lesquels f est dérivable est appelé ensemble de dérivabilité de f. La fonction $x \mapsto f'(x)$ est appelée dérivée (ou fonction dérivée) de f» (p.248)

Tableau 14. – Nombre dérivé et fonction dérivée (Tegninko et al., 2014, p. 237)

4.2.1.1.2- Discours technologiques des propriétés de la fonction dérivée

Plusieurs propriétés sont proposées dans le manuel pour soit introduire une notion, soit pour appuyer la définition du nombre dérivée ou de la fonction dérivée. Certaines de ces propriétés ont fait l'objet de démonstration tandis que d'autres sont introduites à partir d'une activité qui en réalité est la preuve du théorème en lui-même. Par exemple, pour introduire la dérivabilité et la continuité d'une fonction, les auteurs partent d'une preuve comme activité de mise en route. Le premier résultat technologique stipule que *« Si une fonction est dérivable en x_0, alors elle est continue en x_0 » ($\theta_{1.2}$)*. Ce résultat n'est représenté qu'à l'aide de l'ostensif symbolique et vise dans ce cas à justifier qu'il est suffisant qu'une fonction soit dérivable en x_0 pour être continue en x_0. Mais, en considérant la fonction $f(x) = |x|$, les auteurs établissent à travers une remarque qu'il existe des fonctions continues en x_0 qui ne sont pas dérivables en x_0. Cette remarque que font les auteurs permet d'introduire la dérivabilité à gauche et à droite. Par exemple, il est énoncé qu'une fonction « f est dérivable à gauche en x_0 si f est définie sur un intervalle de la forme $]a; x_0]$ et $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie à gauche en x_0» ($\theta_{1.3.1}$). De même, la dérivabilité à droite s'exprime dans le même langage symbolique et avec quelques illustrations graphiques qui permettent de visualiser l'existence ou non d'un point anguleux qui est en fait une conséquence de respectivement chacun un nombre dérivé de la même fonction en x_0. Face à cette dualité, il faut bien que le lecteur puisse conclure si la fonction qui admet deux nombres dérivés en x_0 est dérivable finalement en x_0 ou pas. Un dernier résultat permet de valider les deux précédents résultats et semble justifier les technologies énoncées à propos de la dérivabilité et de la continuité d'une fonction en un point : « *une fonction est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en x_0 et les nombres dérivés à gauche et à droite sont égaux » ($\theta_{1.4}$)*. Ce résultat est une technologie au service d'une autre technologie dans la mesure où elle vient généraliser l'idée de la dérivabilité en un point et son articulation en langage symbolique ne permet pas nécessairement de faire le lien entre les différents cas de figures qui pourraient se présenter dans les exercices à résoudre. En effet, la technologie dont celle-ci découle est celle qui permet de définir la dérivée en un point[26]. L'énoncé de ce théorème de dérivabilité en un point permet de

[26] « Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert K contenant un élément x_0. « f est dérivable en x_0 si $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie en x_0. Cette limite est appelée nombre dérivé de f en x_0 » (p.244)

passer à l'introduction de la fonction dérivée d'une fonction (θ_2) comme nous l'avons relevé. D'autres résultats importants sont énoncés dans un registre purement symbolique et sont également introduits à partir d'une activité de mise en route qui reprend la démarche de calcul du nombre dérivé d'une fonction en x_0. Des pistes de démonstration de ces résultats sont proposées dans le manuel. Par ailleurs, plusieurs de ces résultats aboutissent au calcul des dérivées des fonctions élémentaires que nous résumons dans le tableau 13 suivant :

Technologies	Fonction $f(x)$	Dérivées $f'(x)$	Ensenmble de dérivabilité
$\theta_{2.1}$	$k\ (k \in IR)$	0	IR
$\theta_{2.2}$	x	1	IR
$\theta_{2.3}$	x^2	$2x$	IR
$\theta_{2.4}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	IR$-\{0\}$
$\theta_{2.5}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\theta_{2.6}$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{sinx}{x}$	1	IR
	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{cosx-1}{x}$	0	IR
$\theta_{2.7}$	$sinx$	$cosx$	IR
	$cosx$	$-sinx$	IR

Tableau 15. – Technologies liées aux dérivées des fonctions élémentaires

Certains de ces résultats représentent des cas particuliers des opérations sur les calculs des dérivées. Qu'il s'agisse de la dérivée de la somme de deux fonctions dérivables $(\theta_{2.8})$, de la dérivée du produit de deux fonctions dérivables $(\theta_{2.9})$, de la dérivée de la puissance d'une fonction dérivable $(\theta_{2.10})$, de la dérivée de l'inverse d'une fonction dérivable $(\theta_{2.11})$, de la dérivée du quotient de deux fonctions dérivables $(\theta_{2.12})$, de la dérivée de la racine carrée d'une fonction dérivable ou de la dérivée de la composée de deux fonctions dérivables $(\theta_{2.13})$, les éléments théoriques se trouvent résumés dans le tableau ci-dessous (voir tableau 14) et l'ostensif symbolique demeure le moyen par lequel les auteurs ont introduit le calcul de ces dérivées à travers des activités d'introduction.

Technologies	Opération	Dérivée	Valable pour tout x de
$\theta_{2.8}$	$u + v$	$u' + v'$	*IR*
$\theta_{2.9}$	$u \times v$	$u'v + uv'$	*IR*
$\theta_{2.10}$	*k × u (k constante)*	*ku '*	*IR*
	u^n, n entier naturel	$n \times u^{n-1}$	*IR*
$\theta_{2.11}$	$\frac{1}{v}$ *où v non nulle sur IK*	$-\frac{v'}{v^2}$	*IR*
$\theta_{2.12}$	$\frac{u}{v}$ *où v non nulle sur IK*	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	*IR*
$\theta_{2.13}$	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	IR$-\{0\}$

Tableau 16. – Technologiques liés aux dérivées et aux opérations sur les fonctions

4.2.1.1.3-Discours technologiques des applications de la dérivée

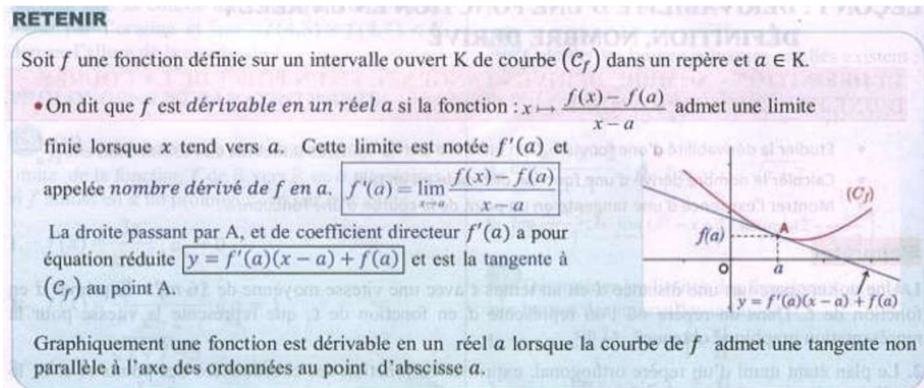
Dans cette partie sont abordées les notions de sens de variation d'une fonction, d'extrémum d'une fonction, d'approximation affine d'une fonction et d'un problème d'optimisation. Dans la première partie de cette section sont traitées les notions de sens de variation et d'extrémum d'une fonction. Un premier résultat sous le nom de « *théorème* » énonce trois critères qui permettent de conclure quand une fonction est croissante ou décroissante ou même constante selon que la fonction dérivée est positive, négative ou nulle sur un intervalle ouvert. Donc pour étudier le sens de variations d'une fonction, l'élève devra d'abord calculer la fonction dérivée puis procéder à l'étude de son signe et appliquer le théorème ($\theta_{3.1}$) résumé dans le tableau 15 ci-dessous :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert IR • f est croissante sur IR si et seulement si f' est positive sur IR • f est décroissante sur IR si et seulement si f' est négative sur IR • f est constante sur IR si et seulement si f' est nulle sur IR

Tableau 17. – Théorème du sens de variations d'une fonction (Tegninko et al., 2014, p. 257)

Ensuite, intervient la notion d'extrémum relatif d'une fonction qui se résume selon les auteurs à ce discours : ($\theta_{3.2)}$ *« soit f une fonction dérivable sur un intervalle* $]a;b[$ *et x_0 un élément de* $]a;b[$. *Si f' s'annule et change de signe en x_0, alors f admet un extrémum relatif en x_0 » (p.258).*

Dans cet énoncé, il n'est pas dit clairement si l'extrémum en question est un minimum ou un maximum. S'agissant des approximations affines d'une fonction, nous évoquons ici les définitions et les propriétés développées dans le cadre de l'introduction de la tangente en un point. Dans le manuel, il est davantage question de l'interprétation graphique du nombre dérivé, aucune justification de la formule de calcul de l'équation de la tangente n'est proposée (Fig. 10).



RETENIR

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert K de courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère et $a \in$ K.

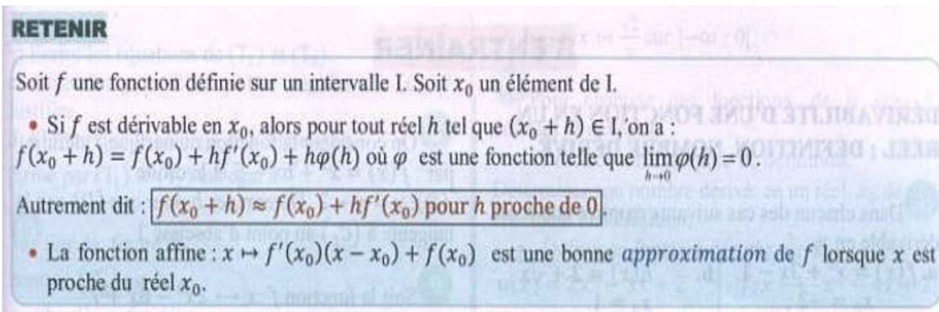
- On dit que f est *dérivable en un réel* a si la fonction : $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie lorsque x tend vers a. Cette limite est notée $f'(a)$ et appelée *nombre dérivé de* f *en* a. $\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$

La droite passant par A, et de coefficient directeur $f'(a)$ a pour équation réduite $\boxed{y = f'(a)(x-a)+f(a)}$ et est la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point A.

Graphiquement une fonction est dérivable en un réel a lorsque la courbe de f admet une tangente non parallèle à l'axe des ordonnées au point d'abscisse a.

Figure 10. – Interprétation du nombre dérivé (Tegninko et al., 2014, p. 237)

En effet, l'idée est que, lorsqu'une fonction f est dérivable en x_0 alors elle admet une tangente *(T)* pour laquelle *« $f'(x_0)$ est le coefficient directeur et une équation de (T) est donc $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ » (p.245).* La définition de la tangente ici présentée est supportée par une illustration graphique et à y observer de près, cette définition s'apparente à la définition de la tangente dans un contexte géométrique. Une deuxième interprétation de la droite tangente est une approximation affine d'une fonction. Un point essentiel est donné au comportement local de la fonction en considérant pour une fonction donnée f définie sur un intervalle ouvert *IK*, un point M_0 d'abscisse 1 en lequel existe une tangente *(T).* Ce qui y est indiqué en termes de propriété locale du comportement de la fonction stipule que $(\theta_{3.3})$ *« si f est dérivable en x_0, alors, pour tout nombre réel h tel que $x_0 + h$ appartient à IK, on a : $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\varphi(h)$, où φ est une fonction telle que $\lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$ »(Fig. 11).* L'interprétation qui est donnée ici est de pouvoir substituer en un point une courbe représentant une fonction par une droite tangente en un point. La présence d'une image faisant appel à un point M_0 d'abscisse 1 et la propriété elle-même faisant appel au même point M_0 d'abscisse x_0 peut permettre entre autres de rechercher des solutions d'une équation. A travers la propriété sur les approximations affines des fonctions, l'élève a l'occasion de calculer la valeur approchée d'une fonction en un point. Les problèmes d'optimisation dans lesquels il est question de mettre en application les propriétés de la fonction dérivée, du sens de dérivation et des extrémums interviennent dans une tâche et aucune information formelle ne permet de pouvoir justifier ou expliquer pourquoi et comment optimiser une fonction.



RETENIR

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit x_0 un élément de I.

- Si f est dérivable en x_0, alors pour tout réel h tel que $(x_0 + h) \in$ I, on a :

$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varphi(h)$ où φ est une fonction telle que $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h) = 0$.

Autrement dit : $\boxed{f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0) \text{ pour } h \text{ proche de } 0}$.

- La fonction affine : $x \mapsto f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ est une bonne *approximation* de f lorsque x est proche du réel x_0.

Figure 11. – Approximation affine d'une fonction (Tegninko et al., 2014, p. 259)

4.2.1.2-Interprétation des discours technologiques de la dérivée

Nous avons identifié les définitions, les propriétés et les théorèmes comme étant des discours technologiques. Comme on peut l'observer dans la définition du nombre dérivé et dans les autres sections du document, on parle d'une fonction définie sur un intervalle ouvert. Cependant, l'évocation d'un intervalle ouvert dans les premières sections du manuel ne mentionne pas les bornes de cet intervalle ni même la possibilité de se rendre compte qu'il s'agit d'un intervalle de nombres réels. Ce qui laisse observer un niveau d'abstraction élevé susceptible de complexifier la compréhension que pourraient avoir les élèves. De même, nous avons observé que l'ostensif le plus utilisé est l'ostensif symbolique. On note donc une quasi-absence des ostensifs graphiques en appui aux ostensifs symboliques dans la définition $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. La définition du nombre dérivé en x_0 se résume donc à calculer $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. De même, nous pouvons relever qu'au moment où le lecteur du manuel en occurrence l'élève découvre cette formule, il ne sait pas pourquoi il doit apprendre cette formule, aussi, il n'a aucune idée sur ce que représente cette formule ni les types de problèmes qu'elle permet de résoudre, c'est ce que Chevallard (2012) appelle du monumentalisme puisque l'élève applique une formule sans savoir pourquoi il l'applique. De plus, nous relevons une absence de problématisation notamment dans les tâches proposées relativement au nombre dérivé L'absence d'un ostensif graphique en appui à l' ostensif symbolique ci-dessus utilisé ne peut que rendre la compréhension plus complexe car certains travaux de recherche en didactique de mathématiques ont mis en évidence l'utilisation d'un certain type de langage dans le calcul des limites (Monaghan, 1991). De plus, l'élève serait amené à s'interroger sur la raison pour laquelle on fait tendre h vers zéro. Par exemple, les enseignants peuvent reproduire les discours développés dans les manuels pour parler de la limite en tant que processus ou en tant qu'un nombre fini. À cet effet, certains éléments du discours de l'enseignant peuvent être cohérents à l'exception du moment où ils utilisent la définition formelle pour exprimer la limite dans différents contextes. Ceci peut avoir pour conséquence le fait que le discours des élèves sur la limite ne soit pas cohérent comme celui des enseignants au moment de parler de la limite comme processus ou comme un nombre (Güçler, 2014).

En revenant au statut du nombre h, cette absence de signification ou même de justification du statut du nombre « h » est apparue dans les travaux de Pierre de Fermat sur le calcul différentiel. En effet, Fermat avait considéré un nombre « e » non nul au départ puisque dans ses calculs il divisait « $be \sim 2ae + e^2$ par e » (Irem-de-basse-Normandie, 1999, p. 125). Pourtant Fermat lui-même n'avait pas expliqué la signification du nombre « e » d'où les nombreuses critiques dont son calcul a fait l'objet. Les autres savants tels que Descartes avaient remis en cause sa démarche bien qu'efficace dans la résolution de nombreux problèmes. Donc dans cette reformulation de la définition par un changement de variable, le problème est donc celui du statut du nombre « h » (Gantois, 2012) qui s'annule et dont les auteurs du manuel ne semblent rien dire pour aider les élèves. Une utilisation couplée des ostensifs graphiques et symboliques peut avoir pour intérêt de donner du sens au nombre h. Pour conclure et faisant référence aux travaux récents nous pouvons relever que, certains aspects de la dérivée et notamment le nombre dérivé sont difficiles à décrire dans un texte « muet », cela suppose que les ostensifs visuels interactifs pourraient être une ressource importante autant pour les élèves que pour les enseignants (Park, 2016).

La définition de la fonction dérivée parle de l'ensemble de dérivabilité et rien n'est dit quant à la fonction dérivée et à la lumière de ce qui a été fait dans l'activité initiale. Par exemple, il est dit ceci *:*« $la\ fonction\ x \mapsto f'(x)$ *est appelée dérivée ou fonction dérivée de* f ». La notion de limite a permis de calculer le nombre dérivé en x_0 et cette limite n'existe plus au moment où l'on définit la fonction dérivée, du coup il devient difficile de comprendre ce qu'est la fonction dérivée, autrement comment définir la fonction dérivée? Le nombre dérivé est introduit à l'aide de la limite, cependant, la fonction dérivée dans le manuel n'est pas institutionnalisée sur la base de la limite. L'absence d'une expression semblable à celle qui a permis de définir le nombre dérivé en un point montre bien que le manuel met l'accent sur la manipulation algébrique (Gantois, 2012), les approches qui font appel au développement des compétences sur la dérivée comme par exemple l'utilisation des ostensifs graphiques sont absentes dans le manuel. Nos observations s'opposent à celles de Park (2016) où elle avait relevé que les auteurs de manuels, après avoir introduit le nombre dérivé en x_0, ont remplacé x_0 dans l'expression $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ par x, ce qui leur a permis de définir la fonction dérivée de la manière suivante : $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ c'est-à-dire que les manuels qu'elle avait analysés ont pris appui sur la limite d'un quotient différentiel pour arriver à la fonction dérivée. Ce qui de notre avis semble indiquer que les auteurs n'ont pas mis un accent sur la compréhension que devraient avoir les élèves mais davantage sur les manipulations algébriques. Les dérivées des fonctions élémentaires et les autres dérivées et opérations sont introduites sous la base du nombre dérivé sans qu'on y perçoive un lien explicite.

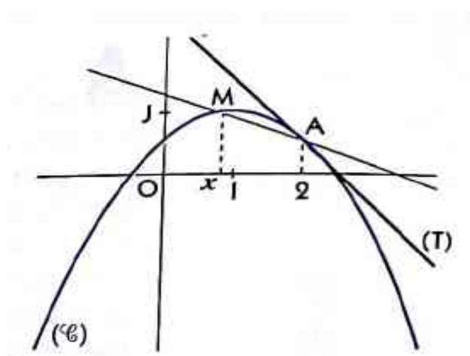


Figure 12. – Interprétation graphique du nombre dérivé

Après avoir proposé une définition du nombre dérivé et un exemple pour renforcer son application, on note que le manuel propose dans la même activité une tâche qui se résume à une interprétation graphique du nombre dérivé **(Fig. 12)** et pour cela, la tangente apparaît comme l'une des interprétations du nombre dérivé dans la mesure où elle doit s'inscrire dans une autre perspective : la tangente dans un cours de calcul. La tangente apparaît sous le titre d'une interprétation graphique. Nous notons que l'introduction de la tangente se résume à ce discours technologique dans lequel on définit une tangente par son équation algébrique. Le deuxième discours technologique sur l'approximation des fonctions est donné comme une recette et de ce fait, la fonction d'approximation est en général proposée et les exemples proposées en guise de vérifications sont de nature calculatoire (Rouy, 2007). On note aussi que deux types d'ostensifs sont activés à savoir les ostensifs graphiques et symboliques qui peuvent faciliter la compréhension des élèves. Pour la plupart des propriétés des dérivées, on a l'impression d'être en présence d'un cours de mathématique universitaire car rien ne prédispose l'élève à la maitrise et à la manipulation de ces résultats. Ce niveau de praxéologie est donc qualifié de praxéologie à trous avec un niveau de rationalité zéro car ces deux auteurs considèrent que ces cours d'analyse en général sont des cours de type universitaire dans lesquels les élèves n'ont aucun moyen de réfléchir sur la pertinence des résultats proposés, le plus important étant leur utilisation pour résoudre les activités proposées. Cette observation soulève et renforce les autres résultats de recherche pour lesquels un accent est mis sur la manipulation des formules sans que les élèves ne sachent véritablement à quoi serviront ces savoirs enseignés. Par exemple, notons que les étudiants de niveau universitaire ont une préférence pour le registre de représentation algébrique (Habre & Abboud, 2006).

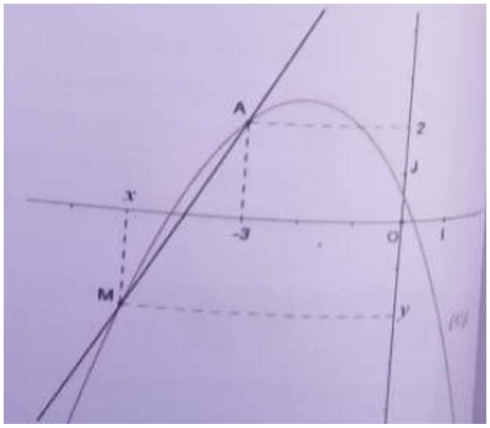
4.2.1.3-Analyse des types de tâches en lien avec l'enseignement de la dérivée

Le chapitre sur la dérivation compte dans l'ensemble 19 activités réparties sur l'ensemble des trois types de tâches à l'étude dans ce manuel. La toute première activité est celle qui permet d'introduire le nombre dérivé et porte sur le type de tâche *T1 : Dérivabilité en* x_0. Il existe d'autres sous-tâches qui se servent de la même technique même si les outils technologiques ne sont plus les mêmes. Dans le but de simplifier notre texte, nous allons présenter le principal type de tâche développé dans le manuel et nous résumons dans un tableau les sous-tâches et les techniques y afférent. Pour commencer, nous allons présenter ici de manière détaillée la toute première activité qui est celle de mise en route du chapitre.

4.2.1.3.1-Tâches et techniques associées à la dérivabilité en un point

Comme nous l'avons indiqué précédemment, les tâches relatives à la dérivabilité en un point se divisent en trois types de tâches. L'activité proposée dans le manuel parle d'une courbe $\left(C_f\right)$ qui est la représentation graphique d'une fonction f définie par $f(\mathrm{x}) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$. On désigne par *A* le point de $\left(C_f\right)$ d'abscisse 2. Lorsque x tend vers 2, le point *M* « tend vers » *A* sur $\left(C_f\right)$ et la droite *(AM)* pivote autour de *A*. Le coefficient directeur de *(AM)* est $\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$. On a $\forall x \in IR \setminus \{2\}\ \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = -\frac{x}{2}$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = -1$. La droite *(AM)* admet une position limite *(T)*, de coefficient directeur – 1. On dit que – 1 est le nombre dérivé de f en 2 et que la droite

(T) est la tangente à (C_f) en *A*. Voici les éléments qui constituent la praxéologie développée dans cette activité (Tableau 16).



T_1	Calculer le nombre dérivé de la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$ en $x_0 = 2$
τ_1	- Calculer le taux de variation (coefficient directeur ou quotient différentiel) $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ - Remplacer x_0 dans le quotient par 2 - Si $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe alors - Simplifier ce quotient par le facteur $(x-2)$ - Calculer la limite du quotient simplifié $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$
θ_1	- Si le résultat de la limite $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ est un nombre réel alors la fonction est dérivable - « Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert K contenant un élément x_0. f est dérivable en x_0 si $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie en x_0. Cette limite est appelée nombre dérivé de f en x_0 ».
Θ_1	Éléments de la théorie de l'analyse mathématique

Tableau 18. – Praxéologie mathématique de l'introduction du nombre dérivé en x_0

Cette praxéologie mathématique permet d'introduire le nombre dérivé et dès à présent que la définition du nombre dérivé en x_0 est donnée, place est donnée à l'interprétation graphique du nombre dérivé soutenue par un discours technologique et à l'aide d'un ostensif symbolique. Le troisième type de tâche (T13) consiste à étudier le lien entre la dérivabilité et la continuité d'une fonction en un point. Toute la démarche praxéologique repose sur le calcul des limites étudié dans le chapitre précédent et donc voici l'illustration.

« Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert K et x_0 un élément de K.

On a $\forall x \in K, f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Si f est dérivable en x_0, alors ; $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$; de plus : $\lim\limits_{x\to x_0}(x - x_0) = 0$

On en déduit que : $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Donc f est continue en x_0 ». (p.245)

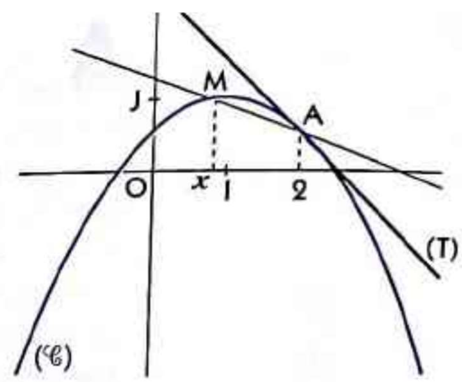
Cette « démonstration » s'accompagne ensuite d'un discours technologique ($\theta_{1.2}$) qui permet de justifier dans certains contextes la continuité d'une fonction en un point par le fait que celle-ci soit au préalable dérivable en ce point. La réciproque de cette affirmation ($\theta_{1.2}$) est bien évidemment fausse dans la mesure où les auteurs présentent le cas de la fonction $f(x) = |x|$ qui est une fonction continue en x_0 pourtant elle n'est pas dérivable en x_0. Une activité permet de mettre en œuvre le calcul du nombre dérivé tel qu'étudié dans le type de tâche (T_1). Nous résumons dans le tableau 17 ci-dessous les différents éléments de praxéologie observables dans les différentes activités/sous-tâches décrites précédemment :

Type de tâche	**Technique**	**Technologie**
T11 : déterminer le nombre dérivé de la fonction f	Calculer $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	« Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert K contenant un élément x_0. f est dérivable en x_0 si $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie en x_0. Cette limite est appelée nombre dérivé de f en x_0 ».
T12 : Interprétation graphique du nombre dérivé	Calculer $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	« Si f est dérivable en x_0 alors (C_f) admet une tangente *(T)* pour laquelle $f'(x_0)$ est le coefficient directeur et une équation de *(T)* est donc $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$
T13 : Étudier la dérivabilité et la continuité d'une fonction en x_0	-Calculer $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ et $f'(x_0)$ est un nombre fini unique	*« Si une fonction est dérivable en x_0, alors elle est continue en x_0 » ($\theta_{1.2}$).*
	-Calculer $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ et $f'(x_0)$ est un nombre fini pas unique.	*« f est dérivable à gauche en x_0 si f est définie sur un intervalle de la forme $]a; x_0]$ et $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie à gauche en x_0» ($\theta_{1.3.1}$).* *« f est dérivable à droite en x_0 si f est définie sur un intervalle de la forme $[x_0; b[$ et $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie à droite en x_0» ($\theta_{1.3.2}$).*
	-Calculer $f'_g(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ et $f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	*« Une fonction est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en x_0 et les nombres dérivés à gauche et à droite sont égaux » ($\theta_{1.4}$)*

Tableau 19. – Tâches, techniques et technologies liées à la dérivation en x_0

Nous relevons d'emblée dans ces deux dernières activités l'absence de problématisation notamment dans cette introduction au nombre dérivé **(Fig.12).** En effet, il n'est pas demandé à l'élève de mener une action ou de valider/invalider une procédure, il est question pour l'élève de suivre une démarche qui mène vers le calcul du nombre dérivé. La technique qui semble découler de l’observation de cette activité consiste d’abord à calculer le coefficient directeur de la droite *(AM)* qui est lui-même sous-entendu car ce coefficient directeur n’est en réalité que le taux de variation de la fonction en deux points $A\ et\ M$ dont on connaît les coordonnées cartésiennes. Or l’élève, dans ses apprentissages en classe de troisième (secondaire 4) a appris à trouver le coefficient directeur de deux droites qui est un nombre.

La courbe ($\mathscr{C}$) ci-contre est la représentation graphique de la fonction f définie par : $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$.
On désigne par A le point de ($\mathscr{C}$) d'abscisse 2.
Soit M un point de ($\mathscr{C}$), distinct de A, et x son abscisse.
Lorsque x tend vers 2, le point M « tend vers » A sur ($\mathscr{C}$) et la droite (AM) pivote autour de A.
Le coefficient directeur de (AM) est : $\frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.
On a : $\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$, $\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -\frac{x}{2}$.
On en déduit que : $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -1$.



La droite (AM) admet une position limite (T), de coefficient directeur − 1.
On dit que − 1 est le nombre dérivé de f en 2 et que la droite (T) est la tangente à ($\mathscr{C}$) en A.

Figure 13. – Activité d’introduction du nombre dérivé

Dans cette activité (Fig.12), le coefficient directeur trouvé est une expression algébrique $-\frac{x}{2}$ et c’est en calculant la limite de cette expression (coefficient directeur trouvé) que l’on obtient le nombre dérivé. Les auteurs parlent de la position limite de la droite *(AM)* et appuient leurs explications par un ostensif graphique qui lui-même est muet et n’apporte pas assez d’informations sur le bien-fondé de l’utilisation dans ce contexte de la limite. Il apparaît donc que la technique véhiculée par le manuel est celle de la limite du taux de variation même si cela ne semble pas très explicite pour un élève qui ne s’en souvient plus. De plus, il est difficile pour l’élève de savoir en tout début pourquoi il s’engage dans cette activité. De même, le manuel propose un graphe pour appuyer la tâche, cependant, il est difficile de voir quel est le lien entre ce graphe et le bien fondé du calcul de la limite du taux de variation qui s’en suit et qui permet de conclure que la limite obtenue est le nombre dérivé en ce point. Park (2016) explique que le fait d’avoir différents ostensifs impliquerait nécessairement une transformation entre ces différents ostensifs et cela peut représenter une difficulté importante. Pour cela, il serait important dans le calcul du nombre dérivé d'établir un lien entre d'une part les ostensifs visuels qui permettent de mettre en œuvre le processus ($\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$) et d'autre part ceux qui permettent de mettre en œuvre l'objet qui ici représente le nombre dérivé obtenu « -1 ». Nous avons observé que ce lien n'était pas explicite dans l'activité qui a servi d'introduction au nombre dérivé.

Selon de nombreuses autres recherches, il a été relevé que le passage d'un raisonnement variationnel à un raisonnement covariationnel ne semble pas évident (Hitt & González-Martín, 2016), pourtant, les manuels pourraient tout au moins permettre aux lecteurs (les élèves et leurs enseignants) de prendre en compte ces différents niveaux de variation car d'autres études relèvent la difficulté pour les élèves à comprendre le taux de variation instantané comme limite du taux de variation moyen du fait que les élèves ne prennent pas assez de temps pour comprendre à quoi correspondent ces variations (Park, 2015; Schneider, 1992). Cette absence de signification au niveau des différentes variations ajoutée au manque d'un lien explicite entre le graphe utilisé et les autres types d'ostensifs ne permettent pas aux élèves de voir et de comprendre les opportunités liées au comportement locale de la fonction et de sa dérivée également (Weigand, 2014). Nos observations et ces résultats de recherche nous permettent d'ajouter que, si les élèves ont une préférence pour le calcul algébrique du taux de variation sans chercher à en comprendre leurs significations, cela pourrait également être dû aux messages et à la manière dont les manuels qu'ils utilisent abordent ces notions, notamment le fait que les manuels véhiculent des discours technologiques implicites pour appuyer l'utilisation des ostensifs symboliques.

Au sujet de la tangente, la question fondamentale pour un élève est celle de savoir comment une droite qui coupe une courbe en deux points peut devenir une tangente c'est-à-dire couper la courbe en un seul point. L'activité ne semble pas dépasser la conception qu'auraient les élèves de la droite tangente vue dans les cours de géométrie et dont la recherche a abondamment documenté les manifestations qui affectent la compréhension des élèves lorsqu'il est question d'étudier la tangente dans un cours d'analyse (Biza et al., 2006; Castela, 1995; Vivier, 2010, 2013a). La conception qu'ont les élèves en ce début de chapitre portant sur la droite tangente au sujet de la dérivation est et demeure bel et bien la conception droite et cercle étudiée en géométrie et cela constitue une entrave à la compréhension de l'idée de la tangente dans un cours de calcul où la tangente a un autre statut (Castela, 1995). Pour évoquer le troisième type de tâche, relevons qu'il est plus question dans la démarche proposée par les auteurs du manuel d'une praxéologie à trous (Rouy, 2007) de type universitaire dans laquelle l'élève peut appliquer des résultats sans pour autant justifier pourquoi il le fait.

4.2.1.3.2-Tâches et techniques du calcul de la fonction dérivée d'une fonction

Nous décrivons ci-dessous l'activité qui permet d'introduire la fonction dérivée. Il s'agit d'une fonction f qui est définie par sa formule $f(x) = x^2 + 1$. En considérant un nombre réel x_0, il est demandé à l'élève d'établir que pour tout nombre réel x distinct de x_0 et pour cette fonction $f(x)$, on a : $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = x + x_0$. On comprend que l'élève qui a réussi les tâches de type T1 peut se sentir à l'aise avec cette action. Ensuite, il lui est demandé de déduire que $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 2x_0$. Là encore, ce travail ne semble pas nouveau car l'élève l'a déjà fait au moment de calculer le nombre dérivé en un point. Cette fois-ci, les auteurs de manuel ne donnent pas l'opportunité aux élèves de se questionner à l'issue duquel ils pourraient émettre des conjectures. Dans le manuel, les conclusions sont fournies à la place d'une réflexion individuelle puisque le fait que $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 2x_0$ permet de déduire que la fonction est dérivable en x_0 et que le nombre dérivé est $f'(x_0) = 2x_0$. Par ailleurs, il est dit dans l'activité en conclusion que « la fonction f' définie par $f'(x) = 2x$ est appelée fonction dérivée de f » et cela peut soulever des questions sur lesquelles nous reviendrons. Essayons de résumer (Tableau 18) les éléments de praxéologies qui se cachent derrière cette activité puis une analyse s'impose.

T_2	Calculer la fonction dérivée de la fonction $f(x) = x^2 + 1$
τ_2	- Calculer le taux de variation (coefficient directeur ou quotient différentiel) $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ - Si $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe alors - Simplifier ce quotient par le facteur $(x - x_0)$ - Calculer la limite du quotient simplifié $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ en fonction de x_0 - Remplacer dans l'expression de la limite trouvée le x par x_0
θ_2	- « Soit f une fonction. L'ensemble des nombres réels en lesquels f est dérivable est appelé ensemble de dérivabilité de f. La fonction $x \mapsto f'(x)$ est appelée dérivée (ou fonction dérivée) de f»
Θ_2	Éléments de la théorie de l'analyse mathématique

Tableau 20. – Praxéologie mathématique-Introduction de la fonction dérivée.

L'activité ci-dessous n'est pas explicite pour permettre de savoir quel est l'objectif à atteindre. De plus, les sections précédentes donnent l'occasion de mettre en application le taux de variation moyen d'une fonction en un point. Dans le cas ci-présent, au lieu de trouver le nombre dérivé d'une fonction en un point dont l'abscisse est connue et finie, il est question de trouver le nombre dérivé de la fonction en un point quelconque. Une fois que ce nombre dérivé généralisant l'ensemble des nombres dérivés est obtenu, la nouvelle fonction constitue la fonction dérivée. La technique qui sert à résoudre la tâche consiste à calculer le taux de variation $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^2-1-(x_0^2-1)}{x-x_0} = \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = x + x_0$ en utilisant les factorisations et les simplifications de fractions. On s'appuie sur la limite pour calculer le nombre dérivé en x_0 de la manière suivante : $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0$. Ainsi le nombre dérivé vaut $f'(x_0) = 2x_0$. Puis on en déduit que la fonction est dérivable en n'importe quel de ses points du domaine de définition et que pour cela la fonction dérivée de la fonction est $f'(x) = 2x$. Nous pensons que cette manière d'aborder la tâche ne laisse pas observer un discours technologique explicite. En effet, dans le calcul du nombre dérivé, on utilise x_0 qui permet de calculer à l'aide du processus des limites le nombre dérivé d'une fonction en x_0. Par ailleurs, dans le calcul de la fonction dérivée, les auteurs reprennent la valeur x_0 pour déterminer le nombre dérivé de manière générale et soudain, on voit apparaître à la place de x_0 un x sans qu'aucune explication ne puisse permettre de justifier ce changement comme si cela était aussi évident de le faire (Gantois, 2012). Cet auteur nous renseigne de ce qu'en général x_0 représente un paramètre alors que x représente une variable et que le fait de passer du paramètre à la variable masque plutôt la notion de *« variable de dérivation »* car en effet, les manuels parlent toujours du nombre dérivé en un point, ici x_0 ou de fonction dérivée, mais jamais de la fonction dérivée d'une fonction par rapport à une variable. Si nous reprenons maintenant ce qui a été proposé dans le manuel comme définition de la fonction dérivée d'une fonction (θ_2), nous avons d'autres observations pertinentes. La définition de la fonction dérivée parle de l'ensemble de dérivabilité et rien n'est dit quant à la fonction dérivée à la lumière de ce qui a été fait dans l'activité initiale. Par exemple, il est dit ceci :« $la\, fonction\; x \mapsto f'(x)$ est appelée dérivée (ou fonction dérivée de f) ». La notion de limite qui a permis de calculer le nombre dérivé en x_0 n'existe plus dans la définition du nombre de la fonction dérivée et du coup il devient difficile de comprendre ce qu'est la fonction dérivée. Le nombre dérivé est introduit à l'aide de la limite, cependant, la fonction dérivée dans le manuel n'est pas institutionnalisée sur la base de la limite pourtant le calcul du nombre dérivé vient en appui au calcul de la fonction dérivée. L'absence d'une expression qui serait semblable à celle qui a permis de définir le nombre dérivé en un point peut ouvrir la voie à poser des hypothèses sur les choix des auteurs à favoriser la manipulation algébrique et de ce point de vue on peut relever l'absence d'une démarche qui puisse permettre aux lecteurs de développer les compétences des élèves au sujet de la dérivée (Gantois, 2012). Les autres sous-tâches présentées dans le Tableau 19 s'appuient sur la même technique utilisée pour résoudre le type de tâche présenté dans l'introduction, et pour permettre de la visualiser, nous les résumons ci-dessous (Tableau 19) :

Sous-tâche du type de tâche	**Technique**	**Technologie**
$T_{2.1}$: Calculer la dérivée d'une constante $f(x) = k$	τ_2 : calculer $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	$\theta_{2.1}$: $f'(x) = 0$
$T_{2.2}$: Calculer la dérivée de $f(x) = x$		$\theta_{2.2}$: $f'(x) = 1$
$T_{2.3}$: Calculer la dérivée de $f(x) = x^2$		$\theta_{2.3}$: $f'(x) = 2x$
$T_{2.4}$: Calculer la dérivée de $f(x) = \frac{1}{x}$		$\theta_{2.4}$: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$T_{2.5}$: Calculer la dérivée de $f(x) = \sqrt{x}$		$\theta_{2.5}$: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$T_{2.6}$: Calculer la dérivée de $f_1(x) = sinx$ et $f_2(x) = cosx$		$\theta_{2.6}$: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{cosx-1}{x} = 1$
		$\theta_{2.7}$: $f_1'(x) = cosx$ et $f_2'(x) = -sinx$
$T_{2.8}$: Calculer la dérivée de $f(x) = u(x) + v(x)$		$\theta_{2.8}$: $f'^{(x)} = u'(x) + v'(x)$

Tableau 21. – Praxéologie mathématique des fonctions élémentaires

Le constat qui peut être fait ici c'est que toutes les sous-tâches ci-dessus présentées s'appuient sur la limite du taux de variation moyen (coefficient directeur) et la fonction dérivée s'obtient comme dans le cas de l'introduction de la fonction dérivée c'est-à-dire en remplaçant la variable x par x_0. Pour avoir une idée précise de la technique employée, on peut se référer à l'activité T_2 qui a été présentée ci-dessus. Pour notre deuxième observation, nous dirons que toutes ces sous-tâches sont présentées à l'aide des ostensifs symboliques sans un support graphique qui aurait permis de faire le lien entre les deux ostensifs. S'agissant des formules de dérivation, nous faisons face à une praxéologie à trous dans la mesure où tous les discours technologiques viennent à la suite d'un ensemble de manipulations d'expressions symboliques dont la compréhension peut s'avérer très complexes pour une personne non experte. En guise d'exemple, considérons la sous-tâche $T_{2.8}$ qui consiste au calcul de la fonction dérivée d'une somme de deux fonctions dérivables $u \; et \; v$ en x_0. La technique consiste à considérer un nombre réel x_0 puis à calculer en premier le taux de variation suivant : $\frac{(u+v)(x)-(u+v)(x_0)}{x-x_0} = \frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0} + \frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}$. Encore faut-il que l'élève sache utiliser les propriétés des fonctions. De plus, si on tient compte du fait que chacune des fonctions u et v est dérivable en x_0, on peut une fois de plus appliquer la limite du taux de variation pour obtenir : $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{(u+v)(x)-(u+v)(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0} + \lim\limits_{x \to x_0} \frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0} = u'(x_0) + v'(x_0)$. Une deuxième difficulté consiste pour l'élève à appliquer correctement les propriétés des limites de fonctions pour parvenir à la somme des limites et en déduire la somme des nombres dérivés $u'(x_0)$ et $v'(x_0)$. Comme dans l'activité d'introduction de la fonction dérivée, la technique employée permet d'obtenir le nombre dérivé de la fonction $(u+v)(x)$ qui est $u'(x_0) + v'(x_0)$ et la fonction dérivée se déduit de la même manière en remplaçant le $x_0$par$x$. Il est important de faire remarquer qu'une fois que le tableau récapitulatif des formules de dérivation est donné, l'élève n'a plus à se servir de la définition du nombre dérivé pour calculer les fonctions dérivées, désormais, il peut donc utiliser les formules établies sous la base de l'exemple ci-dessus pour calculer la dérivée de la somme, du produit etc…

4.2.1.3.3-Tâches et techniques des applications de la fonction dérivée

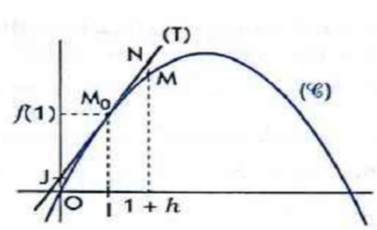
La troisième section du manuel traite des applications de la dérivation. Deux types de tâches sont en jeu ici : étudier le sens de variation d'une fonction qui comprend les extremums et l'approximation d'une fonction par une fonction affine. Chacun de ces types de tâches débute par une activité et si on prend par exemple la première sous-tâche, il est question pour le lecteur/élève d'étudier le signe de la fonction dérivée et de pouvoir dire si la fonction est soit croissante, décroissante ou constante. Dans cette activité, l'élève devra également être capable d'identifier dans une telle situation le maximum ou le minimum atteint par la fonction **(Fig 13).** Le deuxième type de tâche quant à elle prépare l'élève à trouver une meilleure approximation affine d'une fonction donnée. L'activité sur le sens de variation comprend deux questions. Au préalable, on considère une fonction croissante et dérivable sur un intervalle ouvert K et x_0 un élément de K. L'ostensif utilisé est symbolique et dans la première question il est demandé à l'élève de *« démontrer que :* $\forall x \in K \setminus \{x_0\}$, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ ». Pour répondre à cette question, les élèves peuvent utiliser leurs connaissances antérieures sur le taux de variation des fonctions vu l'année précédente. En effet, dans le cours de seconde, l'élève apprend à calculer le taux de variation d'une fonction f de la manière suivante : $T = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Dans ces cours lorsque *T* est positif alors la fonction f est dite croissante. Comme dans les hypothèses il est indiqué que la fonction est croissante alors l'élève peut utiliser cette connaissance au cas où il s'en souvient sinon l'enseignant se doit de la lui rappeler afin qu'il puisse déduire que le taux de variation est négatif. C'est le même raisonnement qui est utilisé pour déduire que *«*$f'(x_0) \geq 0$ *»*. Ici encore il est question d'aller voir dans les hypothèses pour se rendre compte que la fonction est dérivable en x_0 et de ce point de vue le nombre dérivé de la fonction en x_0 est $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. De cette observation, on en déduit que $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ et de ce fait $f'(x_0) \geq 0$. Le problème lié à l'approximation est un type de tâche qui consiste à *« trouver la meilleure approximation affine de la fonction* $f(x) = -x^2 + 6x$ *» comme l'indique la figure 13.*

Introduction

Soit f la fonction définie par $f(x) = -x^2 + 6x$, $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative, M_0 le point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse 1 et (T) la tangente à $(\mathscr{C})$ en M_0.
Pour tout nombre réel h, on désigne par M et N les points d'abscisse $1 + h$, appartenant respectivement à $(\mathscr{C})$ et à (T).

- y_M et y_N désignant les ordonnées respectives des points M et N, vérifier que : $y_M = f(1 + h)$ et $y_N = f(1) + h f'(1)$.
- Compléter le tableau suivant.

h	1	0,5	0,1	0,01	0,001
y_M					
y_N					



On constate que $f(1) + h f'(1)$ est une bonne approximation de $f(1 + h)$, lorsque h est « proche de 0 ».
Donc la fonction affine $g : x \mapsto f(1) + (x - 1) f'(1)$ permet d'obtenir une bonne approximation de $f(x)$ lorsque x est « proche de 1 ».

Figure 14. – Approximation affine d'une fonction (Touré et al., 2015, pp. 258-259)

Selon notre interprétation, pour réaliser cette tâche, la technique consiste à se donner deux autres points $M(1+h\,;\ f(1+h))$ appartenant à la courbe de la fonction f et N d'abscisse $1+h$ appartenant à la tangente. On compare la position des points M et N en évaluant $y_M = f(1+h) et\ y_N = f(1) + hf'(1)$ chaque fois que la valeur de h varie de manière à tendre vers zéro. La position limite des points M et N lorsque h tend à s'annuler laisse observer que l'expression $y_N = f(1) + hf'(1)$ est la meilleure approximation affine de cette fonction. Comme $y_N = f(1) + hf'(1)$ est obtenu pour x tendant vers 1 on remarque enfin que $y_N = f(1) + (x-1)f'(1)$ est l'équation de la tangente au point d'abscisse 1. Cependant, les auteurs du manuel ne proposent aucune interprétation ou mieux, aucune proposition de démarche n'est proposée. Par ailleurs, les auteurs proposent un texte qui s'apparente à un discours technologique (Fig.14).

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert K et x_0 un élément de K.

Si f est dérivable en x_0, alors, pour tout nombre réel h tel que $x_0 + h$ appartient à K, on a :
$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\,\varphi(h)$, où φ est une fonction telle que $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h) = 0$.

Figure 15. – Technologie de l'approximation affine (Touré et al., 2015, p. 259)

Nous proposons au regard de la description que nous venons de faire quelques observations à propos des types de tâches qui précèdent. Le premier type de tâche commence par une affirmation selon laquelle la fonction considérée est croissante et dérivable sur un intervalle ouvert. Cependant, la définition de ce qu'est une fonction croissante n'a pas été mentionnée préalablement sauf si les auteurs considèrent que les élèves ont acquis cette connaissance dans leur parcours précédent, ce qui ne semble pas très évident. Si on peut relever l'absence d'un support graphique pour illustrer la notion de croissance/décroissance, de même, on peut relever une fois de plus que les auteurs développent une praxéologie à trous dans la mesure où les discours technologiques qui accompagnent l'activité sont d'un type universitaire et qui dans la pratique peut constituer une difficulté pour les élèves dans l'apprentissage du taux de variation et et également dans l'étude du sens de variation à partir de celui-ci. A la fin de l'activité, il est mentionné ceci : « Si une fonction est croissante et dérivable sur un intervalle ouvert, alors la dérivée y est positive. On admet que la réciproque est vraie et, plus généralement, le théorème suivant » (Touré et al., 2015, p. 257). Le théorème dont il est question est le discours technologique ($\theta_{3.1}$). La démonstration de ce théorème n'est pas faite ce qui implique qu'il est admis. L'exemple proposé à la suite du théorème n'apporte pas une information supplémentaire pour la compréhension dudit théorème. Cet exercice permet de mettre simplement en application ce théorème. La notion d'extremum est abordée à travers un exercice démonstratif qui fait usage des ostensifs symbolique et graphique mais il ne s'agit pas de dire clairement ce qu'est un extremum, ni s'il s'agit-il d'un maximum ou d'un minimum. L'accent est mis sur la manipulation et l'application des démarches qui ont été présentées dans le manuel.

En référence aux éléments épistémologiques évoqués dans le chapitre 1 de cette thèse, il faut rappeler que la détermination de la tangente est à la base du calcul différentiel. De ce fait, nous avons relevé que plusieurs techniques ont vu le jour pour la tâche qui consistait à la détermination de la tangente et parmi ces techniques on a retrouvé la méthode d'adégalité de Fermat qui sera soutenue plus tard par des discours technologiques de Newton qui abordait le calcul différentiel par les vitesses tandis que Leibniz quant à lui appuyait son discours sur les propriétés géométriques de la tangente. Le statut de la tangente se pose donc en termes de dualité outil/objet, notamment quand il est question de savoir à quel moment la tangente peut être vue comme un objet ou alors dans un autre cas comme un outil et dans ce cas la tangente est une partie de la technique. Résumons ici les propos de Rouy (2007) sur cette dualité. La tangente constitue un objet lorsqu'elle est à construire comme quand on demande à un élève de construire la tangente à un cercle ou de représenter la tangente à une courbe de fonction. A ce propos, les définitions proposées par Euclide et Apollonius font de la tangente une droite qui touche une courbe et reste d'un seul côté de celle-ci et elles s'illustrent dans les travaux de Barrow, Fermat, Descartes et Roberval qui ont tous proposé des techniques pour tracer les droites tangentes aux courbes (voir chapitre 1). Par ailleurs, la tangente elle-même peut être une partie de la technique donc un outil dans une organisation mathématique (Rouy, 2007). En effet, lorsque la tangente est utilisée pour résoudre une autre tâche comme introduire la dérivée en un point ou alors utiliser la tangente pour les tâches d'approximation, dans ce cas la tangente apparaît comme un outil et constitue à cet effet une partie de la technique. S'agissant des tâches d'approximation, il est possible de remplacer une courbe par un segment de sa tangente.

Nous observons que dans la tâche d'approximation affine, la tangente est bel et bien un outil à travers lequel on arrive à résoudre un type de tâche à savoir approximer une fonction. Dans le manuel, nous observons que la mise en œuvre d'une technique est adossée au discours technologique ($\theta_{3.3}$), ce qui fait effectivement penser que le discours technologique est d'emblée donné et comme nous l'avons relevé aussi, la fonction d'approximation est en général proposée et les vérifications demandées peuvent donc rester calculatoires (Rouy, 2007). On note aussi que deux types d'ostensifs sont activés à savoir les ostensifs graphiques et symboliques qui visent à faciliter la compréhension de la technique employée. Une telle tâche, par le fait qu'elle apparaisse à la fin du chapitre ne semble donc pas avoir autant d'importance pour les auteurs. Elle apparait plus comme une application de la dérivée pourtant on pourrait-il est possible de se demander si elle pourrait permettre d'introduire le cours sur la dérivée, ce qui serait peu probable au vu de la complexité de sa transposition didactique.

La tangente peut aussi jouer le rôle de discours technologique dans la mesure où on peut utiliser les propriétés géométriques de la tangente pour valider certaines procédures numériques (Rouy, 2007). Cependant, il est observé que dans les différentes organisations mathématiques, la tangente n'existe pas comme une tâche car elle n'est pas considérée comme un objet d'enseignement mais elle sert davantage comme une technique qui permet d'introduire la dérivée comme limite du quotient différentiel (Rouy, 2007). Nous pouvons donc comprendre et même expliquer que la place de la tangente dans les manuels se retrouvent en début du cours lorsqu'on veut introduire la dérivée et elle ne sert plus dans les activités mathématiques qui vont suivre à l'exception de la détermination de ses différentes équations algébriques.

4.2.1-4-Types de tâches proposés dans les exercices du manuel CIAM

Trouver le Df	1
Calculer le nombre dérivé en un point	16
Écrire l'équation de la tangente	17
Montrer qu'une fonction est continue	3
Nombre dérivé à gauche	8
Nombre dérivé à droite	8
Tracer la tangente	2
Dresser un TV	17
Approximation affine	4
Équation des demi tangentes	3
Tracer les demi tangentes	3

Déterminer les fonctions dérivées	48
Dérivées successives	1
Étudier le sens de variation	19
Maximum	3
Minimum	4
Domaine de dérivabilité de f	13
Total	170

Tableau 22. – Répartition du nombre de type de tâches du manuel

En général et selon le tableau 22 ci-dessus, le manuel compte 170 exercices, certains comprennent une seule question tandis que d'autres comptent deux, trois ou quatre questions. On peut constater que le calcul des dérivées occupe une place importante et l'application à l'étude du sens de variation vient en second, ce qui semble renforcer nos premières observations selon lesquelles le manuel prépare les élèves à la manipulation des procédures. Il faut souligner pour situer la place des ostensifs dans les exercices proposés et la nature abstraite de certains exercices. Lorsque l'exercice permet de traiter une situation qui fait intervenir la notion de vitesse, on parle dans ce cas d'un exercice qui a un contexte cinématique. Par ailleurs, d'autres exercices peuvent traiter des situations non-cinématiques mais qui peuvent être autant porteuses de significations pour l'apprenant. Deux exercices permettent de travailler la dérivée en contexte physique et parmi ces deux exercices l'un porte sur l'optimisation à l'aide de la dérivée. De même, on note que dans quatre (04) exercices un graphique vient en appui aux ostensifs symboliques en jeu ce qui laisse observer une forte dominance de l'ostensif symbolique dans les exercices, ce qui correspond bien évidemment aux observations qui ont été faites dans la manière dont le cours est introduit dans le manuel. Parmi les exercices, on dénombre également 27 exercices abstraits. Par exercice abstrait, on entend des exercices qui exigent la mobilisation de plusieurs ressources mathématiques variées qui sont présentes ou non dans le cours pour leur résolution. Les exercices peuvent appartenir à un contexte ou pas. Selon le cas, un exercice ou un problème qui a un contexte est un exercice qui peut être porteur de significations pour l'apprenant.

	Abstrait	Avec contexte				
		Graphique	Verbal	Physique	Symbolique	Autre contexte
Exemples	00	02	00	00	14	00
Exercices résolus	02	00	00	02	03	00
Exercices d'application	06	00	00	00	12	01
Renforcements	19	02	00	00	31	01

Tableau 23. – Répartition des exercices selon le contexte

4.2.2-Analyse du manuel Majors en Mathématiques

4.2.2.1-Présentation du manuel en lien avec l'enseignement de la dérivée

Le second manuel est une proposition des enseignants et des inspecteurs nationaux et régionaux de mathématiques. Dans l'analyse qui va suivre, nous proposons en première partie une description sommaire du contenu du chapitre puis nous allons à l'analyse du point de vue praxéologique des principaux éléments qui font l'objet de ce travail. En particulier, nous analyserons seulement les éléments qui sont différents de ceux qui apparaissent dans le précédent manuel. Pour commencer, nous dirons que contrairement au manuel CIAM, ce manuel captive l'attention en tout début du chapitre, notamment avec une image de Lagrange (1736-1813) et de sa contribution pour l'émergence du calcul différentiel. Le chapitre débute aussi avec un bref historique de ce qu'est la dérivée et donne un aperçu sur les scientifiques dont les travaux ont permis de découvrir le calcul différentiel. Quelques applications et les grands domaines dans lesquels intervient la dérivée sont cités. Nous observons aussi que les auteurs font un rappel de connaissances sur le calcul du taux de variation d'une fonction comme préalable au chapitre. Ainsi, « *le taux de variation d'une fonction f entre a et $a + h$ est $t(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Ainsi dériver f en a c'est chercher la limite de t en 0» (Mvomo et al., 2015, p. 149).* En d'autres termes, le manuel annonce dès le début que la dérivée d'une fonction en un nombre a est la limite du taux de variation. Sur le plan de l'organisation du chapitre, la première section du chapitre s'organise autour des notions à traiter qui comprennent la dérivation en un réel a qui comprend le nombre dérivé d'une fonction en un point, l'interprétation géométrique du nombre dérivé, l'approximation affine locale, la dérivabilité à gauche et à droite. La deuxième section porte sur les fonctions dérivées avec comme principaux éléments les dérivées des fonctions de référence et les opérations sur les fonctions dérivées tandis que la troisième section du chapitre porte sur les applications de la dérivation. Dans cette dernière section, on retrouvera par exemple la dérivée, le sens de variation et les extrémums relatifs d'une fonction. Sur le plan organisationnel, on peut noter que les deux manuels ont la même structure, notamment une activité de mise en route pour la découverte de la nouvelle notion en jeu, une définition et des propriétés qui permettent d'institutionnaliser le nouveau savoir, des démonstrations des propriétés qui permettent de comprendre la démarche qui a permis d'arriver à la formule proposée, des exercices et des problèmes à partir desquels les élèves peuvent vérifier leur compréhension des concepts présentés. Une première observation laisse voir que le manuel ne donne pas des exemples à la suite d'une définition, ni d'exercices d'application à partir desquels l'élève peut autoévaluer sa propre démarche contrairement au précédent manuel. Les compétences exigées dans ce chapitre du manuel s'agrègent parfaitement avec les différents types de tâches que nous avons identifiés précédemment pour ce qui était du premier manuel, voici comment elles sont présentées dans le manuel par les auteurs :

- Déterminer le nombre dérivé d'une fonction en un réel donné.
- Écrire une équation cartésienne de la tangente en un point de la courbe représentative d'une fonction.
- Approximer localement une fonction par une fonction affine.
- Déterminer les fonctions dérivées des fonctions de référence.
- Déterminer la fonction dérivée d'une fonction.
- Utiliser la dérivation dans la résolution des problèmes de mathématiques : étude des variations, déterminer la valeur minimale ou maximale d'une fonction.

4.2.2.2-Discours technologiques du manuel en lien avec la dérivée

Les discours technologiques contenus dans ce chapitre sont les mêmes que ceux qui ont été identifiés dans le manuel précédent. Dans le premier manuel, la dérivée en un point a été définie sous la base de la limite suivante : $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ tandis que dans ce manuel, voici ce qui est dit en introduction pour ce qui est le nombre dérivé :

« Soit f une fonction numérique et a un nombre réel appartenant à l'ensemble de définition de f. On dit que la fonction f est dérivable en a si la fonction $h \mapsto \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet

une limite finie l en 0. Cette limite l est appelée nombre dérivé de f en a et notée $f'(a)$ » (Mvomo et al., 2015, p. 150).

Dans le premier manuel, les auteurs ont choisi « x_0 *appartenant à un intervalle ouvert* ». Contrairement à ce manuel, le nombre *a* en lequel on calcule le nombre dérivé dans ce second manuel appartient à l'ensemble de définition, or la notion d'ensemble de définition semble plus familière avec ce que les élèves auraient appris dans le chapitre sur les généralités des fonctions qui intervient quelques semaines avant le cours sur les dérivées. De plus, le nombre dérivé en *a* est obtenu à l'aide de cette formule $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, or rien ne justifie la raison pour laquelle *h* devrait tendre vers zéro. Même si les élèves auraient appris le taux de variation une année à l'avance, rien ne permet de vérifier si la notation qui fait appel au nombre infinitésimal *h* est compris par les élèves. En effet, dans le contexte des cours de la classe de seconde, l'élève considère le taux de variation d'une fonction f entre deux nombres x_1 et x_2 qui appartiennent au domaine de définition par la formule $T = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$. Cette formule est plus proche de celle utilisée dans le manuel CIAM et notre inquiétude quant à la difficulté que pose le nombre *h* se justifie davantage quand on sait qu'aucun graphique ne vient soutenir l'utilisation de l'ostensif symbolique. Tous les autres discours technologiques de ce chapitre sont identiques à ceux que nous avons identifiés dans le premier manuel et les observations qui se dégagent sont également les mêmes, notamment presque pas d'illustration graphique pour soutenir les discours technologiques, une praxéologie à trous de type universitaire avec un niveau de rationalité zéro . Il faut souligner que les différentes manières de présenter les contenus s'appuient plus sur des discours technologiques connus dans le jargon mathématique universitaire et pour nous ne respectent pas les orientations du programme qui voudraient que les élèves puissent découvrir les notions à partir des activités contextualisées qui non seulement ont du sens pour eux mais qui leur permettent de conceptualiser les notions en jeu (MINESEC, 2014b). Or les mathématiques abstraites ne favorisent pas la conceptualisation chez les élèves surtout ceux de niveau secondaire surtout quand on sait que les élèves auraient tendance à éviter un raisonnement qui s'appuie sur les outils formels. Autre élément à relever c'est qu'aucun exemple résolu ne vient à la suite de cette démarche abstractive pour permettre aux élèves de voir comment mettre en application ce qui leur est enseigné. Ainsi on peut raisonnablement penser que le fait pour les auteurs de prioriser un raisonnement formel ne peut qu'encourager chez les élèves l'usage de la mémoire ou l'imitation des exemples au lieu d'une réflexion structurelle/conceptuelle profonde (Viholainen, 2011).

4.2.2.3-Analyse de la tâche d'introduction de la dérivée en un point

Dans cette section, nous focalisons notre attention à la seule tâche d'introduction du nombre dérivé car en effet, les autres tâches s'apparentent à celles que nous avons déjà identifiées dans le précédent manuel. Ce qui fait la particularité de la présente tâche c'est le fait qu'elle est contextualisée et porte sur la vitesse (Figure 15). D'entrée de jeu, l'élève a la distance parcourue en mètres et il est indiqué que le temps est en secondes. Le but de la première question est de déterminer la vitesse instantanée de la mangue entre les instants $t = 1\, et\, t = 1 + h.$ Aux différentes dates indiquées, l'élève peut calculer la vitesse moyenne en se servant d'un tableau numérique (Tableau 20).

Activité

Une mangue située en un point O, situé à 12 m du sol se détache du manguier. La distance parcourue par la mangue à la date t est $d(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2t$, l'unité de temps est la seconde, l'unité de longueur est le mètre.

1) *Vitesse moyenne et vitesse instantanée*

On conçoit que la mangue en mouvement possède, à chaque instant de date t, une vitesse dite vitesse instantanée. Le problème est de définir et de calculer cette vitesse. À la date t = 1 par exemple, nous la noterons $v(1)$.

Il apparaît qu'une bonne approximation de $v(1)$ s'obtiendra en calculant la vitesse moyenne de la mangue entre les dates $t = 1$ et $t = 1 + h$ pour une valeur de h, proche de zéro par valeur positive ou par valeur négative.

a) On rappelle que la vitesse moyenne entre les dates t et $t + h$ est : $\frac{d(t+h) - d(t)}{h}$.

Calculer les vitesses moyennes entre les dates 1 et $1 + h$ lorsque :

$h = -0{,}1$; $h = -0{,}05$; $h = -0{,}01$; $h = 0{,}05$; $h = 0{,}01$ et $h = 0{,}001$.

b) En continuant le calcul des vitesses moyennes pour des valeurs de h de plus en plus proche de 0, on peut obtenir des approximations meilleures de $v(1)$. Mais aucune de ces valeurs n'est la valeur exacte de la vitesse instantanée à la date 1, car cette vitesse doit évidemment être exprimée par un seul nombre. La façon d'y parvenir est de dire que $v(1)$ est la limite de la fonction $h \longmapsto \frac{d(1+h) - d(1)}{h}$ en 0. Calculer $v(1)$

2) *Calcul de quelques vitesses instantanées*

a) H est le point tel que OH = 7m. Calculer la vitesse instantanée de la mangue lors de son passage en H.

b) Quelle est la vitesse instantanée de la mangue à l'instant où elle atteint le sol ?

Figure 16. – Le nombre dérivé dans le manuel Majors (Mvomo et al., 2015, p. 149)

t	h	$t+h$	$d(t)$	$d(t+h)$	$\frac{d(t+h)-d(t)}{h}$
1	$-0{,}1$	0,9	2,5	2,205	2,95
1	$-0{,}05$	0,95	2,5	2,35125	2,975
1	$-0{,}01$	0,99	2,5	2,47005	2,995
1	0,05	1,05	2,5	2,65125	3,025
1	0,01	1,01	2,5	2,53005	3,005
1	0,001	1,001	2,5	2,5030005	3,0005

Tableau 24. – Tableau numérique du calcul de la vitesse moyenne en fonction de h

L'objectif final consiste à trouver la meilleure approximation de la vitesse moyenne lorsque la valeur de h se rapproche de plus en plus de zéro. Autrement dit, la vitesse moyenne serait plus proche d'une valeur limite à trouver d'autant plus que h serait proche de zéro. Ainsi les auteurs terminent la section en relevant que la meilleure approximation de la vitesse instantanée à la date 1 est de trouver $v(1) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{d(1+h)-d(1)}{h}$. C'est à ce niveau que l'élève devra s'imaginer vers où l'activité le mène car si $v(1)$ est la vitesse instantanée à la date $t = 1$ et que $\frac{d(1+h)-d(1)}{h}$ représente la vitesse moyenne aux instants $t = 1\ et\ t = 1 + h$ la question qui est en jeu est de savoir quel est le lien de tout ça avec la notion de dérivée. De nombreuses questions demeurent, par exemple, les élèves qui étudient la dérivée dans cette classe ont-ils déjà été en contact avec la notion de vitesse instantanée ? Ont-ils des outils pour inférer les connaissances acquises dans un cadre physique à un cadre purement mathématique ? Pour un élève qui a appris son cours des limites, il peut émettre la conjecture selon laquelle la vitesse moyenne se rapproche de 3 lorsque h se rapproche de zéro. De même, il peut vérifier sa conjecture par calcul en utilisant la formule $v(1) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{d(1+h)-d(1)}{h}$. Pour cela, la démarche va consister à calculer :

- La distance parcourue à la date $t = 1 + h : d(1+h) = \frac{1}{2} \times (1+h)^2 + 2(1+h) = \frac{1}{2}h^2 + 3h + \frac{5}{2}$
- La distance parcourue à la date $t = 1$: $d(1) = \frac{1}{2}(1)^2 + 2(1) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$
- La vitesse moyenne entre les instants $t = 1\ et\ t = 1 + h$: $\frac{d(1+h)-d(1)}{h} = \frac{\frac{1}{2}h^2+3h+\frac{5}{2}-\frac{5}{2}}{h} = \frac{h(\frac{1}{2}h+3)}{h} = \frac{1}{2}h + 3$
- La vitesse instantanée à la date $t = 1$: $v(1) = \lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{1}{2}h + 3\right) = \frac{1}{2} \times 0 + 3 = 3.$

N'ayant aucune information supplémentaire de cette valeur trouvée, nous nous proposons de faire une analyse de cette tâche et des implications possibles sur la définition du nombre dérivé.

4.2.2.4-Praxéologique de la tâche d'introduction de la dérivée en un point

Un bref encadré sur l'histoire du calcul différentiel avec notamment quelques applications et également quelques grands domaines d'application de la dérivée donne de voir pourquoi doit-on apprendre la dérivée et quelle est l'importance de la dérivée dans la société. En effet, de nombreux travaux de recherche en didactique des mathématiques soulignent l'importance des ressources historiques pour l'apprentissage des mathématiques (Katz, 2000) comme processus d'humanisation des mathématiques (Fredette, 2010). L'activité comprend deux questions et chacune comprend deux sous-questions. Dans la première question, la tâche à résoudre consiste à calculer la vitesse instantanée qui se révèle bien être le calcul du nombre dérivé en un point $x, t_0 = 1$, cependant, cette tâche reste implicite car en aucun moment il n'est mentionné qu'il est question de recherche du nombre dérivé. De même, une fois que l'élève calcule la vitesse instantanée, aucune question ne tend à l'orienter vers une interprétation qui établirait le lien entre la vitesse instantanée trouvée à la date $t = 1$ et le nombre dérivé de la fonction d(t) au point $t = 1$. Cette observation nous amène à conclure donc que l'élève découvre l'activité et pour s'engager dans celle-ci il doit d'abord être à l'aise avec la physique et notamment la notion de vitesse moyenne et de vitesse instantanée. Par ailleurs, ces deux notions sont enseignées dans les cours de sciences physiques une année auparavant et elles seront re-enseignées la dernière année du secondaire (MINESEC, 2018). Comme indiqué pour le manuel précédent, l'élève qui travaille cette activité ne sait pas au préalable quelle est la raison pour laquelle il fait cette activité vue qu'on évoque en même temps les notions de vitesse moyenne, de vitesse instantanée et de limite. Néanmoins, il y a dans cette activité une tentative de problématisation. S'agissant du moment technique, nous avons observé que la technique se développe en deux moments : d'abord, entre les instants 1 et $1 + h$, on calcule la vitesse moyenne qui n'est rien d'autre que le taux de variation moyen de la fonction $d(t)$ entre chacun des couples d'instants $(1; 1 + t)$ où h varie et est proche de zéro. C'est donc de manière intuitive que l'élève réalise qu'il se rapproche de 3 lorsqu'il diminue davantage la valeur de h au point de la rendre nulle. La deuxième démarche qui fait appel à la vitesse instantanée consiste au calcul de la limite du taux de variation moyen $\frac{d(t+h)-d(t)}{h}$ lorsque h tend vers zéro. Les deux éléments de praxéologie présents dans cette activité sont le type de tâche et une technique embryonnaire qui semble s'appuyer sur le calcul de la limite du taux de variation moyen. Le discours théorique s'il existe serait contenu dans la phrase suivante : *« En continuant le calcul des vitesses moyennes pour des valeurs de* h *de plus en plus proches de 0, on peut obtenir des approximations meilleures de* $v(1)$*. Mais aucune de ces valeurs n'est la valeur exacte de la vitesse instantanée à la date 1, car cette vitesse doit évidemment être exprimée par un seul nombre »* (Mvomo et al., 2015, p. 149) . En fait les auteurs expliquent que la vitesse instantanée est la meilleure approximation de la vitesse moyenne au voisinage de zéro et que la meilleure façon d'obtenir cette meilleure approximation c'est de calculer la limite du taux de variation. Nous pouvons donc considérer ces commentaires des auteurs comme un discours qui vient justifier la technique utilisée dans la résolution de la tâche. Le discours technologique énoncé plus tard dans le manuel ne tente pas de faire le lien entre l'activité ci-dessus et le discours technologique en lui-même.Il nous semble que l'expression qui rapporte ou qui tend à justifier la technique n'est pas assez explicite autant que les mots qui sont utilisés nous semblent complexifier davantage la tâche pour les élèves, pour cela, la manière dont est justifiée la technique dans ce cas peut modifier ce que les élèves vont apprendre et même l'approche que certains enseignants pourraient adopter pour introduire la dérivée car comme nous le savons, la vision des mathématiques véhiculée dans les manuels peut façonner ce que les enseignants enseignent et ce que les élèves apprennent (Mesa & Griffiths, 2012). Le choix des auteurs d'introduire le cours sur la dérivée par cette approche peut sembler discutable tant il a été observé par certains auteurs qu'il demeure tout de même périlleux d'introduire la notion de dérivée par l'approche cinématique (Ducos, 2009) car en effet, il est primordial que la notion de vitesse soit explicitée pourtant, la notion de vitesse elle-même ne sera enseignée qu'un ans après dans les cours de sciences physiques. De même, le contexte physique dans lequel on utilise la vitesse, le mouvement et le temps comme un contexte pouvant être difficile pour les élèves afin de les accompagner dans une transition entre le taux de variation dans le cas d'une droite et le taux de variation étudié dans le cadre d'un cours sur les fonctions non-linéaires (Hitt & Dufour, 2021). De plus, le fait d'approcher la notion de dérivée avec la vitesse ne laisse pas transparaître de lien entre le vecteur vitesse sur la courbe et la tangente qui est représentée par sa pente. Aussi, le lecteur peut par exemple se demander comment la fonction donnant la distance parcourue en fonction du temps est apparue, de plus, une autre question serait de se demander pourquoi doit-on calculer la limite de cette fonction pour avoir la vitesse instantanée. Le manuel n'apporte aucun élément de réponse à aucune de ces questions.

Nous pensons donc à ce niveau de découverte de la notion que l'utilisation des termes aussi techniques sur le plan mathématique et qui ont une interprétation pas du tout simple sur le plan grammatical peuvent constituer des sources de difficultés pour de nombreux étudiants (Wagner, 2012). Notre deuxième observation repose sur le fait que les auteurs de ce manuel ne proposent pas un corrigé de leur activité afin qu'on puisse y déceler avec certitude leurs intentions. Notre interprétation de l'activité implique une utilisation d'un tableau numérique pour permettre d'adopter une attitude intuitive de la limite et faciliter la compréhension du médiateur symbolique. Nous fondons notre choix sur les explications que nous donne Park (2016) au sujet de l'utilisation de plusieurs ostensifs pour faciliter la compréhension des notions mathématiques enseignées. De plus, l'approche des auteurs nous semble longue dans la mesure où de nombreux élèves rencontrent des difficultés avec le calcul et la manipulation des nombres réels. Notre inquiétude vient aussi du fait que les difficultés des élèves avec le calcul numérique ne viennent affecter leur compréhension de la dérivée car comme le relèvent certains auteurs, l'apprentissage des nombres réels affecte celui des autres notions comme les limites et la dérivée (González-Martín et al., 2013). En définitive, ce manuel utilise une activité qui met en avant la vitesse comme moyen d'introduire la dérivée, cependant le mot « dérivée » encore moins celui de « nombre dérivé » n'apparait nulle part dans l'activité.

4.2.2.5-Types de tâches des exercices du manuel Majors en mathématiques

Ce manuel compte 205 exercices dont la longueur et le degré de difficulté est fonction du type de tâche. Comme dans le manuel précédent, on compte 14 questions sur le domaine de définition, 35 exercices sur le domaine de dérivabilité, 15 exercices sur le calcul du nombre dérivé en un point, 14 exercices pour la recherche de l'équation de la tangente, 19 exercices pour la continuité et la dérivabilité d'une fonction, 16 exercices sur la recherche d'un tableau de variations, 43 exercices sur le calcul des dérivées, 25 sur l'étude du sens de variations, 09 sur la recherche des extrémums et 15 sur l'approximation affine. Il n'est pas surprenant de constater que le calcul des dérivées et l'étude des variations constituent les deux principales tâches du manuel comme dans le manuel précédent. Sur l'ensemble des exercices, deux de ces exercices permettent de travailler la dérivée dans un contexte physique et trois autres s'appuient sur un support graphique alors que 25 autres exercices abstraits permettent de combiner plusieurs types de tâches avec une forte dominance du contexte symbolique. Étant donné que les types de tâches contenus dans les trois manuels sont de même nature, nous proposons dans la section ci-dessous quelques analyses praxéologiques des exercices et problèmes proposés à la fin du cours dans le manuel MAJORS.

4.2.3-Analyse du manuel Excellence en Mathématiques

4.2.3.1-Présentation du manuel en lien avec l'enseignement de la dérivée

Ce manuel est le principal manuel utilisé par tous les enseignants de cette étude. Il est proposé sur le marché en deux versions. Une ancienne version qui date de l'année 2014 et la version la plus récente, elle date de l'année 2020. La collecte des données ayant eu lieu en automne 2019, l'analyse proposée dans cette thèse repose sur la version du manuel publiée en 2014 car c'est cette version qui était utilisée par les enseignants de cette étude au moment de l'enquête. Sur le plan de la forme, le manuel Excellence en Mathématiques est plus volumineux, le chapitre sur la dérivation couvre 41 pages alors que le premier manuel quant à lui couvre 22 pages et le deuxième manuel lui compte 16 pages. Si dans le premier manuel certaines activités ne sont pas explicitées, dans le présent manuel, c'est tout le contraire, il y a plusieurs activités et chacune d'elles est détaillée, c'est-à-dire que plusieurs étapes constituent le marchepied qui va conduire vers la résolution de l'activité. De plus, il y a plusieurs exemples et des exercices d'application assez nombreux. Le chapitre sur la dérivation est le huitième sur l'ensemble des 16 chapitres que compte le manuel. Comme dans les autres précédents manuels, le chapitre sur la dérivation apparaît après ceux portant sur les généralités des fonctions, les limites et la continuité. Chaque chapitre commence par un sommaire qui présente les contenus repartis en des leçons qui sont abordées dans le chapitre. Au début de chaque leçon, on retrouve les objectifs poursuivis pour cette leçon, des activités qui permettent de prendre un bon départ, ce qu'il faut retenir, des exemples, des remarques, des exercices résolus qui permettent de mettre en application les définitions, les propriétés et les remarques. À la fin de chaque partie de la leçon sont indiqués des exercices pour s'exercer. À la fin du chapitre on trouve des exercices et des problèmes sommatifs qui permettent de s'entraîner. Le chapitre s'organise aussi autour de trois types de tâches qui à leur tour comprennent des sous-tâches.

4.2.3.2-Discours technologiques du manuel en lien avec la dérivée

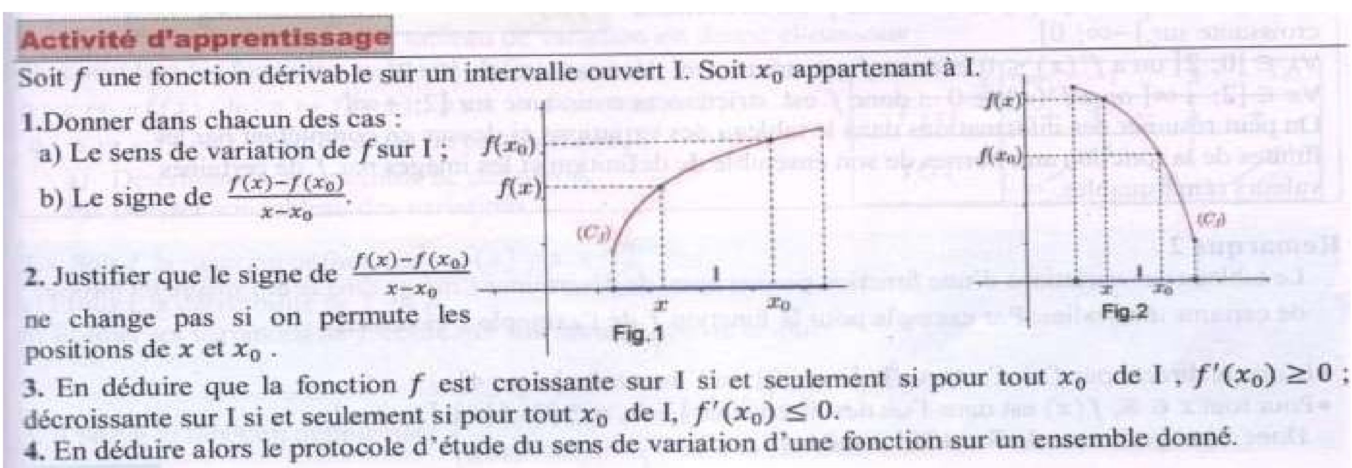
Comme dans le manuel CIAM, la définition que nous présentons ci-dessous reprend la technique déployée dans l'activité qui a permis d'introduire le nombre dérivé et prend appui sur le calcul de la limite du taux de variation moyen.

« Soit f une fonction définie sur un intervalle K de ℝ, a ∈ K. On dit que f est dérivable en a si la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie lorsque x tend vers a. Cette limite est appelée nombre dérivé de f au point a et est noté f'(a). On a donc $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$. Graphiquement, une fonction est dérivable en un réel a lorsque la fonction f admet une tangente non parallèle à l'axe des ordonnées au point d'abscisse a. (T) est la tangente à (C_f) en A, de pente $f'(a)$ » (Tegninko et al., 2014, p. 237).

Contrairement aux deux autres manuels analysés, les auteurs de ce manuel proposent une interprétation du nombre dérivé, faisant ainsi le lien entre le coefficient directeur, le nombre dérivé et la pente de la droite tangente, ce qui de notre point de vue constitue une progression dans le contenu des manuels scolaires dans ce contexte. Si au départ le lien était exclu, dans le présent manuel, il est plus explicite et il est possible pour un élève de comprendre que le nombre dérivé est la pente de la droite tangente. On note également une absence d'ostensif graphique en soutien à l'ostensif symbolique $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Nous en déduisons que dans ce manuel également, les auteurs priorisent le formalisme symbolique ou la manipulation algébrique (González-Martín et al., 2013; González-Martín et al., 2011). Et si l'on se demande pourquoi les élèves ont une préférence pour cette manipulation algébrique, une réponse de plus émerge, à savoir que les élèves sont rarement appelés à effectuer des tâches qui les obligent à coordonner les différents registres (Giraldo et al., 2009) car les contenus des manuels eux aussi ne prennent toujours pas en compte le fait de travailler les notions dans différents registres et quand cela est même fait, il n'y a pas une coordination explicite entre ces différents registres (Park, 2016), ici, la notion de registre renvoie aux ostensifs.

La détermination de la tangente est également une interprétation de la définition de ce que représente le nombre dérivé. La tangente est présentée ici par son équation cartésienne et ce qu'on peut en dire c'est que le statut de la tangente demeure celle que tout lecteur avait avant d'étudier la tangente dans un cours d'analyse. C'est-à-dire la tangente étudiée dans un contexte géométrique, une droite qui passe par un point du cercle en le touchant une seule fois. Ce qui laisse penser que la conception de la tangente demeure liée à sa conception géométrique et qu'il est donc difficile pour les élèves de dépasser leurs connaissances au sujet de la tangente apprise dans un cours de géométrie. Il s'en suit donc que la tangente est présentée dans le manuel dans ses perspectives ponctuelle et globale. Dans sa perspective ponctuelle, l'existence du point $\mathrm{A}(x_0, f(x_0))$ permet de calculer l'équation de la tangente au point x_0 lorsque la dérivée au point d'abscisse x_0 existe. La perspective globale permet de percevoir la tangente comme une ligne droite associée à une équation ou à une ligne rectiligne (Montoya Delgadillo et al., 2018). La perspective locale ici est présentée à la fin du chapitre, notamment l'approximation affine d'une fonction. Cependant, les auteurs ne font aucun lien entre cette approximation obtenue et l'existence de la droite tangente qui a été évoquée à l'introduction de la dérivée en un point. Par exemple dans la définition du nombre dérivé en un point on a $\underset{x \to a}{lim} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ or en posant $h = x - a$ alors h tend vers 0 quand x tend vers a. Donc si $h = x - a$ alors $x = a + h$, Ainsi $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. f est dérivable en a si $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie donc $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$. Cette autre formulation associée à une représentation graphique de la situation pourrait permettre de mieux observer le comportement de la fonction localement et de faire le lien entre les ostensifs symboliques et graphiques. Ce manuel n'évoque pas explicitement la perspective locale car l'accent est mis sur la manipulation algébrique et du coup cela explique certaines observations selon lesquelles la perspective locale est absente dans le travail des élèves notamment parce que les enseignants mettent un accent sur le registre algébrique (Montoya Delgadillo et al., 2018) mais également parce que les ressources qu'utilisent ces enseignants n'accordent pas de l'importance à la perspective locale pour définir la dérivée d'une fonction en un point.

Le présent manuel ne fait pas exception quant à la manière de définir la fonction dérivée puisque dans les autres manuels analysés, la définition de la fonction dérivée est formulée de la manière suivante : « l'ensemble de dérivabilité d'une fonction f est l'ensemble des nombres réels x_0 de D_f en lesquels f est dérivable et pour cela, la fonction $\mathrm{x} \mapsto \mathrm{f}'(\mathrm{x})$ est appelée fonction dérivée ou dérivée de f » (Tegninko et al., 2014, p. 249). Comme dans les autres manuels, lorsqu'on observe la définition de la fonction dérivée qui est proposée, on constate que les auteurs s'appuient sur le calcul du nombre dérivé en un point x_0. Comme dans ce cas ce x_0 est quelconque, ils le généralisent simplement dans la définition de la fonction dérivée en remplaçant ce x_0 par x. D'autres observations nous laissent relever qu'aucune illustration graphique n'accompagne la définition de la fonction dérivée qui elle aussi est donnée sous sa forme symbolique. Aucune approche ou technique ne permet de calculer directement la fonction dérivée sans passer par le nombre dérivé en x_0. Les mêmes observations sont applicables pour ce qui est de la dérivée des fonctions somme, différence, produit et quotient. On commence par calculer le nombre dérivé de la fonction en x_0 puis on passe à la fonction dérivée tout simplement en remplaçant dans l'expression obtenue x_0 par x. Ces observations sont assez similaires avec celles faites par Park (2016). En effet, le calcul de la dérivée en un point et le calcul de la fonction dérivée d'une fonction se sont faites à travers des ostensifs symboliques et selon la même technique, du coup, il semble qu'il y ait une difficulté pour l'élève à comprendre quelle est la différence entre eux (Park, 2016). Les activités du présent manuel sont semblables à celles que nous avons identifiées dans le manuel CIAM. Nous n'allons pas refaire des analyses de ces activités à l'exception d'indiquer que pour ce qui est du type de tâche *T31(Figure 16) : Étudier le sens de variations d'une fonction.* Ce type de tâche coordonne les ostensifs graphique et symbolique, ce qui est tout à fait différent des observations que nous avons faites dans les deux autres manuels. En tout état de cause, nous considérons que nos observations faites dans les précédents manuels sont applicables dans le présent manuel.


Activité d'apprentissage

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Soit x_0 appartenant à I.

1. Donner dans chacun des cas :
   a) Le sens de variation de f sur I ;
   b) Le signe de $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
2. Justifier que le signe de $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ne change pas si on permute les positions de x et x_0.
3. En déduire que la fonction f est croissante sur I si et seulement si pour tout x_0 de I, $f'(x_0) \geq 0$; décroissante sur I si et seulement si pour tout x_0 de I, $f'(x_0) \leq 0$.
4. En déduire alors le protocole d'étude du sens de variation d'une fonction sur un ensemble donné.

Figure 17. – Introduction du sens de variation (Tegninko et al., 2014, p. 135)

4.2.3.3-Analyse quantitative des exercices et problèmes issus du manuel

Une analyse quantitative du présent manuel laisse observer qu'aucun problème de modélisation ne permet d'appliquer la dérivée en contexte notamment dans les exercices qui se trouvent dans la section des exercices d'application ou d'approfondissement. Par ailleurs, ce manuel contient le plus d'exercices en contexte symbolique (47) parmi lesquels 13 sont abstraits. Parmi les trois manuels analysés ici, le principal manuel utilisé par les enseignants est celui qui s'éloigne le plus de l'abstraction contrairement au deuxième manuel même si ce manuel offre l'occasion de travailler des exercices dans lesquels la dérivée est associée à un contexte. Autrement dit, même si par endroit on peut relever une praxéologie à trous, c'est-à-dire une approche de type universitaire, en même temps on note que les auteurs fournissent des efforts dans les démarches de résolution des problèmes pour faciliter la compréhension en détaillant au maximum les étapes d'une démonstration ou d'une activité qui permet d'introduire une notion du chapitre.

Dans le principal manuel utilisé par les enseignants, on note 24 exercices sur l'approximation affine des fonctions dont 5 dans le manuel utilisé par les enseignants et on peut déplorer le fait que ce type de tâche apparaisse en général vers la fin du chapitre et ne tienne que sur une section. En appui à l'ostensif symbolique dominant dans le manuel, on note par ailleurs que dans l'ensemble des exercices et problèmes proposés sur la dérivée, seulement 08 de ces exercices ou problèmes sont accompagnés d'une représentation graphique, ces dernières étant très peu utilisées ou presqu'absentes dans le manuel. Également, on peut noter que c'est dans les activités qui permettent d'introduire les notions et les exercices résolus que l'ostensif graphique vient en appui aux ostensifs symboliques (Figure 17), dans tous les autres cas (08), il est question de passer du graphique au symbolique notamment quand il est question de lire graphiquement le nombre dérivé, de tracer une tangente ou des demi-tangentes. Si on peut relever que les problèmes d'approximation, d'optimisation et de comportement local de la dérivée ne font pas partie des principales préoccupations des auteurs de ces manuels il faut en même temps signaler que les principaux types de tâches mises en avant dans le manuel officiel comprennent le calcul du nombre dérivé en un point, le calcul de la fonction dérivée d'une fonction, étudier le sens de variation et dresser le tableau des variations d'une fonction. Ces types de tâches s'appuient plus sur les manipulations algébriques. Au Cameroun, le gouvernement a pris la décision d'axer l'approche d'enseignement sur le développement des compétences, c'est ce qui ressort dans les orientations des programmes. Pourtant, selon nos observations, les manuels analysés ici mettent un accent sur la manipulation des formules sans que l'on ne puisse y voir clairement de quelle manière se construisent les compétences en lien avec la notion enseignée. De ces observations nous pensons que les auteurs des manuels ne tiennent pas toujours compte des orientations ministérielles.

1.1 Sur la figure ci-contre, $(\mathcal{C}_f)$ est la représentation graphique d'une fonction f. (T) et (T') sont des demi-tangentes à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 1.

a) Déterminer le nombre dérivé de f en -2.

b) Écrire une équation de chacune des demi-tangentes (T) et (T').

c) En déduire les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$; $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

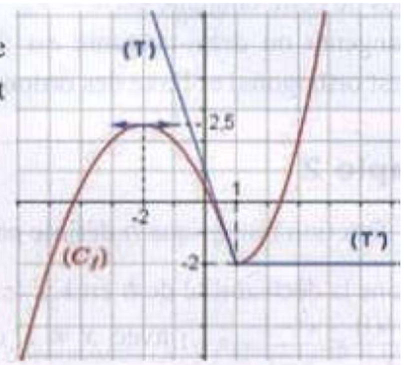


Figure 18. – Lecture graphique du nombre dérivé et interprétation graphique

4.2.3.4-Exercices et problèmes du manuel Excellence en Mathématiques

Nous analyserons dans cette section quelques types de tâches qui sont les plus représentatives telles que nous l'avons indiqué dans la section précédente. Pour rendre compte des praxéologies développées par les manuels en ce qui concerne la notion de dérivée, nous essayerons d'identifier la ou les techniques que l'élève peut utiliser et si possible les technologies qui les justifient. Lorsqu'on parcourt le principal manuel utilisé par les enseignants, on note que les 19 premiers exercices du manuel se regroupent autour de la même technique, celle qui a été présentée dans l'activité de mise en route, à savoir calculer la limite du taux de variation. Comme nous pouvons l'observer dans l'exemple extrait de l'exercice 1 de la page 270 (voir Figure 18) :

1 **Dans chacun des cas suivants montrer que f est dérivable en x_0.**

a. $f(x) = x^2 + 3x - 1$, $x_0 = -2$;	**b.** $h(x) = 2 + \sqrt{x}$, $x_0 = 1$.
c. $p(x) = -x + \frac{1}{x}$, $x_0 = -1$	**d.** $g(x) = \frac{x+2}{2x-3}$, $x_0 = 0$.

Figure 19. – Extrait d'un type de tâche sur le calcul du nombre dérivé

Type de tâche : Montrer que la fonction $f(x) = x^2 + 3x - 1$ est dérivable en $x_0 = -2$.

Technique : On calcule d'abord le taux de variation

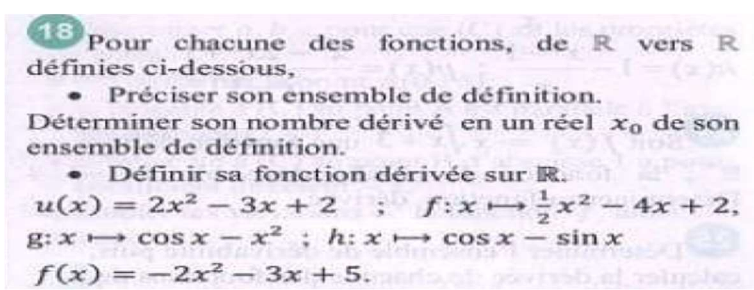
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\frac{\mathrm{x}^2+3\mathrm{x}-1-((-2)^2+3(-2)-1)}{x+2}$$

$$=\frac{x^2+3x-1+3}{x+2}=\frac{x^2+3x+2}{x+2}=\frac{(x+1)(x+2)}{x+2}=x+1.$$

Donc le taux de variation trouvé est $\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=(x+1)$.

- On calcule la limite de ce taux de variation $\lim\limits_{x\to-2}(x+1)=-2+1=-1$.
- On conclut : comme $\lim\limits_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=-1\ \in\ \mathbb{R}$
- La fonction f est dérivable en – 2 et le nombre dérivé est $f'(-2)=-1$.

La technique utilisée pour résoudre la tâche est donc explicite et on la retrouve dans l'essentiel des activités qui ont été proposées pour introduire le nombre dérivé, la technologie qui justifie cette technique est en effet la définition du nombre dérivé d'une fonction. Les dix-neuf exercices fonctionnent sur le même modèle praxéologique et nous les situons à cet effet dans le groupe d'exercices sans contexte et qui priorisent la manipulation algébrique. On note également que les exercices qui suivent à savoir les exercices 20, 21 et 22 traitent du calcul de la fonction dérivée à partir du nombre dérivé. Il s'agit de revenir à la définition pour calculer la fonction dérivée. Pour cela, il est question de calculer au préalable le taux de variation $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ puis d'en déduire sa limite lorsque x tend vers x_0 et de remplacer x_0 par x dans l'expression obtenue comme cela a été fait dans l'activité de mise en route. Nous allons mettre en œuvre la technique qui permet de calculer la fonction dérivée dans l'exercice 18 de la page 272 (Voir figure 19)



18 Pour chacune des fonctions, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies ci-dessous,

- Préciser son ensemble de définition.

Déterminer son nombre dérivé en un réel x_0 de son ensemble de définition.

- Définir sa fonction dérivée sur $\mathbb{R}$.

$u(x)=2x^2-3x+2$; $f: x\longmapsto \frac{1}{2}x^2-4x+2$,
$g: x\longmapsto \cos x - x^2$; $h: x\longmapsto \cos x - \sin x$
$f(x)=-2x^2-3x+5$.

Figure 20. – Extrait d'un type de tâche sur le calcul de la fonction dérivée

Type de tâche : Calculer la fonction dérivée de la fonction $f(x)=2x^2-3x+2$.

Technique :

- Comme il s’agit d’une fonction polynôme, son domaine de définition est $\mathbb{R}$;
- Ensuite, pour calculer la fonction dérivée, on considère x_0 un nombre réel;
- On calcule le taux de variation $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{2x^2-3x+2 \ \ (2x_0^2-3x_0+2)}{x-x_0} = 2(x+x_0)-3.$
- On calcule ensuite la limite du taux de variation obtenu : $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =$ $\lim\limits_{x \to x_0} [2(x+x_0)-3] = 2(x_0+x_0)-3 = 4x_0-3.$
- Ainsi le nombre dérivé en x_0 est $f'(x_0) = 4x_0 - 3$ et la fonction dérivée de f est $f'(x) = 4x - 3$

On observe donc que ces groupes d’exercices dans lesquels il est question de calculer la fonction dérivée développent les mêmes praxéologies comprenant le type de tâche et la technique, le bloc théorico-technologique étant absent, les élèves doivent se référer à l’activité de mise en route car comme nous l’avons relevé précédemment, la définition énoncée pour le calcul de la fonction dérivée ne permet pas d’appliquer la technique qui est développée dans l’activité. Les exercices 23 à 50 appellent à l’utilisation des formules de dérivation pour calculer la dérivée d’une somme, d’un produit, d’un quotient. Là aussi, il est plus question d’exercices faisant appel à un contexte symbolique sans que cela n’appelle à une réflexion approfondie. L’élève doit simplement appliquer un ensemble de formules, aucune explication ne permet de justifier l’usage de ces formules. La technique qui a permis de calculer le nombre dérivé ou la fonction dérivée n’est plus exigée. Il devient plus facile pour l’élève d’appliquer ces formules qui rendent la démarche plus simple. L’exercice 49 que nous discuterons ci-dessous quant à lui regroupe plusieurs sous-tâches dont calculer le nombre dérivé en un point, étudier le sens de variation d’une fonction, dresser le tableau de variations et puis écrire l’équation de la tangente à la courbe d’une fonction. Les exercices de ce genre sont de type sommatif ou semi-sommatif et préparent les élèves pour les évaluations de classe et éventuellement pour les évaluations sommatives de fin d’année. Certes, ce genre d’exercice n’est pas assez représenté dans le manuel puisque pour calculer la fonction dérivée d’une fonction, les élèves auront plutôt à utiliser les formules de dérivation que la méthode du calcul de la limite du taux de variation. Nous présentons ci-dessous cet extrait avec une démarche de résolution :

Exercice 49 page 275

Soit f la fonction définie sur $[-4; 2]$ par : $f(x) = 13x^3 + x^2 - 3$. Soit (C) la courbe représentation graphique de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal.

1) Étudier les variations de f et donner son tableau de variations.
2) Donner une équation de la tangente (T) à la courbe (C) en un point d'abscisse -1.

Résolution attendue

1) On a $D_f = [-4; 2]$. De plus, $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x) = -819$; $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 103$; f est continue et dérivable sur son domaine de définition comme toute fonction polynôme.

$f'(x) = 13 \times 3x^2 + 2x = 39x^2 + 2x = x(39x + 2)$

$f'(x) = 0 \leftrightarrow x(39x + 2) = 0 \leftrightarrow x = 0 \; ou \; 39x + 2 = 0$ Donc $x = 0 \; ou \; x = -\frac{2}{39}$.

$f(0) = -3 \;\; et \; f\left(-\frac{2}{39}\right) = -2{,}995 \approx -3$. Le tableau des variations est donc le suivant :

x	-4		$-2/39$		0		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-819	↗	$-2{,}9$	↘	-3	↗	$+103$

1) Une équation de la tangente (T) à la courbe en son abscisse – 1.

   La règle est $y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$

   $f'(-1) = 39(-1)^2 + 2(-1) = 37;$ $\qquad f(-1) = 13(-1)^3 + (-1)^2 - 3 = -15.$

   Donc $y = 37(x + 1) - 15 = 37x + 37 - 15$ d'où $(T): y = 37x + 25$

Par ailleurs, les exercices qui font appel à un contexte sont quasi-absents et nous avons observé un seul exercice, notamment l'exercice 52 de la page 276 qui fait appel à un contexte cinématique. Nous commentons par ailleurs cet exercice et de cette observation nous tirons l'interprétation selon laquelle le manuel priorise donc la manipulation algébrique comme moyen d'apprentissage de la dérivée, ce qui n'est pas nouveau car dans son étude portant sur l'introduction du calcul différentiel dans trois manuels les plus utilisés aux États-Unis, Park (2016) observe l'utilisation fréquente des symboles dans l'introduction du nombre dérivé et de la fonction dérivée et nous relevons que les exercices et les problèmes proposés dans ces manuels s'alignent dans cette même perspective, celle d'une forte utilisation des ostensifs symboliques.

Exercice 52 page 276

Un camion doit faire un trajet de 150km. Sa consommation de gasoil est de $6 + \frac{v^2}{300}$ litres par heure, où v désigne sa vitesse en km/h. Le prix du gasoil est de 540 francs le litre et on paie le chauffeur 7200 francs par heure. Soit t la durée du trajet en heure.

1) Exprimer t en fonction de la vitesse.
2) Calculer le prix de revient P(v) du trajet en fonction de v.
3) Quel doit être la vitesse v du camion pour que le prix de revient P(v) de la course soit minimal ?

Resolution attendue

1) La Vitesse Moyenne s'obtient par la formule $v = \frac{d}{t}$ alors on déduit que le temps ou la durée s'obtient par : $t = \frac{d}{v}$. Ainsi la durée totale du trajet est $t = \frac{150}{v}$
2) Pour obtenir la consommation totale lors de ce trajet, on sait qu'en une heure la consommation est de $6 + \frac{v^2}{300}$ litres et comme il faut au total $t = \frac{150}{v}h$ pour faire tout le trajet alors il faut prévoir $\frac{150}{v}\left(6 + \frac{v^2}{300}\right) = \frac{900}{v} + \frac{v}{2}$ litres de gasoil. Or un litre de gasoil coûte 540 francs. Donc il faut payer pour le gasoil la somme de $540\left(\frac{900}{v} + \frac{v}{2}\right) = \frac{486000}{v} + 270v$.

Sachant que le chauffeur est payé 7200 francs de l'heure, il recevra à la fin la somme de $7200 \times \frac{150}{v} = \frac{1\,080\,000}{v}$. En somme, le prix de revient du trajet est de : $P(v) = \frac{486000}{v} + 270v + \frac{1\,080\,000}{v} = 270\text{v} + \frac{1566000}{\text{v}}$.

$$P(v) = 270v + \frac{1566000}{v}$$

3) Le prix de revient est minimal lorsque $\boldsymbol{P'(v) \leq 0}$

Or $P'(v) = 270 - \frac{1566000}{v^2}$

Donc $\boldsymbol{P'(v) \leq 0 \leftrightarrow 270 - \frac{1566000}{v^2} \leq 0 \leftrightarrow \frac{1566000}{v^2} \geq 270 \leftrightarrow v^2 \leq \frac{1566000}{270} \leftrightarrow v^2 \leq 5800 \leftrightarrow}$ $\boldsymbol{v \leq \sqrt{5800}\ \ et\ \ donc\ v \leq 76,16\ km/h.}$ **Donc la vitesse maximale doit donc être** $\boldsymbol{v = 76,16\ km/h.}$

On peut observer que la notion de vitesse est évoquée dans un esprit calculatoire, appliquer la relation qui lit la vitesse et le temps puis la distance. Il n'existe aucun lien entre la vitesse et le nombre dérivé en lui-même. De plus, la réponse attendue de la résolution à la troisième question de l'exercice appelle à la détermination des extrèmums de la fonction et en occurrence le minimum, pour y parvenir, il faut calculer la fonction dérivée et cela peut se faire à l'aide des formules de dérivation. Il est donc impossible de dire que cet exercice permet de développer une compréhension conceptuelle de la dérivée. Ce qui confirme davantage nos observations précédentes selon lesquelles le manuel priorise la manipulation algébrique comme moyen d'apprentissage de la dérivée.

4.2.4-Synthèse de l'analyse des ressources institutionnelles

En résumé à l'analyse du programme et des manuels, voici quelques observations importantes que nous pouvons en tirer. Le programme de mathématiques du premier cycle du secondaire prépare les élèves vers l'acquisition de la notion de dérivée au second cycle. Le taux de variation est la principale connaissance antérieure sur laquelle est basée l'apprentissage de la dérivée en un point. Pour cela il est recommandé d'introduire la notion de dérivée comme la limite du taux de variation. Le bien-fondé de l'enseignement / apprentissage de la dérivée n'est pas mis en avant dans le programme et les manuels de mathématiques s'alignent pour l'essentiel sur cette vision. Les contenus du manuel et des programmes demeurent donc focalisés sur le bloc des savoir-faire avec une quasi-absence du bloc technologie / théorie. Même si on peut observer dans les manuels quelques écarts par rapport aux prescriptions du programme, il n'en demeure pas moins vrai que pour l'essentiel, les auteurs s'appuient strictement sur les aspects qu'ils jugent nécessaires pour l'apprentissage et qui sont dictés par le programme officiel.

La dérivée d'une fonction en un point est définie comme limite du taux de variation quelle que soit l'approche employée dans l'introduction. Dans certains manuels analysés comme le manuel CIAM, la technique de calcul du nombre dérivé passe par le coefficient directeur sans qu'on ne puisse établir de liens avec la pente de la tangente. La dérivée d'une fonction sur un intervalle (fonction dérivée) s'obtient à partir de la même technique de calcul de la dérivée en un point x_0 puis par remplacement de la valeur de x_0 par x. Un accent particulier est mis sur l'élaboration et sur la manipulation des formules algébriques pour le calcul des dérivées élémentaires et les autres formules de dérivation de la somme, de la différence, du produit et du quotient des fonctions. La tangente quant à elle est définie à l'aide de son équation algébrique ; son introduction est en effet une conséquence de la définition du nombre dérivé en x_0. Aucune volonté de dépasser la définition de la tangente dans le cadre d'un cours de géométrie n'est observée, ce qui permet de relever que les trois manuels analysés ici ne prennent pas en compte cette principale difficulté relevée dans les études en didactique des mathématiques comme obstacle à l'apprentissage de la tangente. On note également une absence ou la faible utilisation des ostensifs graphiques pour illustrer ou pour renforcer la compréhension des notions en étude. Même si la vitesse est employée dans certains cas comme dans le manuel MAJORS comme moyen d'introduire la dérivée, son utilisation reste mitigée puisque les exercices proposés ne font plus nécessairement appel à la notion de vitesse. De plus, dans certains exercices, l'usage de la vitesse ne permet aucune conceptualisation de la dérivée comme nous l'avons observé dans le cas de l'exercice 52 du manuel le plus utilisé par les enseignants (Excellence). Les principales tâches qui sont priorisées dans les manuels partent du calcul de la dérivée d'une fonction en x_0 en passant par le calcul de la fonction dérivée et l'étude des variations d'une fonction. Ces tâches s'appuient en particulier sur des ostensifs algébriques ou symboliques et avec très peu d'ostensifs graphiques. Ce qui renforce bien l'idée selon laquelle les manuels analysés se focalisent sur les aspects algébriques. Par ailleurs, les approximations et les problèmes d'optimisation à l'aide des dérivées ne sont pas assez présentes dans les manuels et pour l'essentiel quand ils y sont, on les retrouve pratiquement vers la fin du chapitre. Même si aucune exigence venant du programme de mathématiques ne place les auteurs des manuels en position d'accorder plus de temps ou plus d'importance à certains aspects du manuel notamment les approximations, on peut émettre l'hypothèse que les auteurs ne leur accordent pas assez d'importance même si le programme exige son enseignement. Pour l'essentiel, dans deux des manuels analysés, les praxéologies mathématiques identifiées sont à trous avec un niveau de rationalité zéro à l'exception du principal manuel utilisé par les enseignants et considéré comme le manuel officiel. En effet, nous avons noté que dans les deux premiers manuels analysés, les auteurs adoptent très souvent une approche de type universitaire : définition-théorème-démonstration. Cependant, dans le manuel qui constitue la principale ressource des enseignants de cette étude, l'approche est différente dans la mesure où les tâches sont segmentées de manière que les élèves puissent comprendre la démarche présentée. Cette interprétation de notre part ne constitue pas une garantie pour certifier que l'approche employée dans ce troisième manuel assure nécessairement les apprentissages des élèves, il s'agit d'une simple interprétation qui pourrait être étayée par d'autres études.

4.3-Analyse des sujets d'examens externes

Dans cette section, nous abordons l'analyse des épreuves du probatoire scientifique des séries C (Mathématiques et sciences physiques) et D (Mathématiques et sciences expérimentales). L'examen ministériel du probatoire apparaît comme la clé d'accès à la dernière année du secondaire. La classe de terminale n'est accessible que par les élèves qui ont réussi les épreuves de la classe de première. Ce qui fait que l'examen du probatoire pèse lourd autant sur les élèves que les enseignants puisque, s'agissant des élèves, le stress de ne jamais atteindre la classe de terminale peut constituer un gros défi; pour les enseignants, le défi est celui de préparer leurs élèves à réussir l'épreuve du probatoire. Le passage massif des élèves de la première en classe de terminale peut représenter pour les observateurs du système éducatif une preuve de bonne santé de ce système. Comme nous l'avons relevé dans nos analyses précédentes, les épreuves de mathématiques orientent certaines actions y compris des décisions des enseignants. Au niveau du programme de mathématiques, nous avons relevé que la dérivée devrait être introduite sur la base du calcul de la limite du taux de variation. Au niveau des manuels, cette directive est reprise autant les enseignants dans la classe dépendent en grande partie du contenu du manuel. Aussi, avons-nous observé que les manuels mettaient un accent sur la manipulation des formules algébriques avec très peu d'intérêt pour les ostensifs visuels ou graphiques. En analysant quelques dix (10) épreuves portant sur la dérivée, cela peut nous aider à comprendre pourquoi les enseignants justifient certaines de leurs décisions par le fait que leurs élèves doivent réussir l'examen externe. D'abord, nous avons identifié les types de tâches évalués dans les épreuves des dix dernières années (Tableau 45) et nous notons que les deux seuls types de tâches qui y sont présentés sont :

- T21 : Calculer la fonction dérivée d'une fonction
- T31 : Étudier le sens de variations d'une fonction : minimum et maximum

Sessions	Types de tâches présents
2021	T21 : Calculer la fonction dérivée d'une fonction T31 : Étudier le sens de variations d'une fonction : minimum et maximum
2020	T21 : Calculer la fonction dérivée d'une fonction T31 : Étudier le sens de variations d'une fonction : minimum et maximum
2019	T31 : Étudier le sens de variations d'une fonction : minimum et maximum
2018	T21 : Calculer la fonction dérivée d'une fonction T31 : Étudier le sens de variations d'une fonction : minimum et maximum
2017	T21 : Calculer la fonction dérivée d'une fonction T31 : Étudier le sens de variations d'une fonction : minimum et maximum
2016	T21 : Calculer la fonction dérivée d'une fonction T31 : Étudier le sens de variations d'une fonction : minimum et maximum
2015	T21 : Calculer la fonction dérivée d'une fonction T31 : Étudier le sens de variations d'une fonction : minimum et maximum
2014	T21 : Calculer la fonction dérivée d'une fonction T31 : Étudier le sens de variations d'une fonction : minimum et maximum
2013	T21 : Calculer la fonction dérivée d'une fonction T31 : Étudier le sens de variations d'une fonction : minimum et maximum
2012	Pas de dérivée
2011	T21 : Calculer la fonction dérivée d'une fonction T31 : Étudier le sens de variations d'une fonction : minimum et maximum

Tableau 25. – Identification des types de tâches dans les examens nationaux

On note bien une absence des autres types de tâche, notamment calculer la dérivée d'une fonction en un point. On note aussi l'absence des questions sur les approximations, ce qui semble justifier pourquoi les enseignants dans leurs propos et dans leurs pratiques n'y accordent pas d'importance. La deuxième chose que nous voulons présenter ici est un extrait des deux types de tâches extraits de l'examen de la session de l'année 2021.

Session 2021

Exercice 3 : 4.75 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; I, J) d'unité 1cm.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par : $f(x) = \frac{x^2-4}{1-x}$.

1.a) Calculettes limites de f en $+\infty$, $-\infty$, à gauche en 1 et à droite en 1. 1pt

b) En déduire que la courbe (C) de f admet une asymptote verticale (L) dont on déterminera une équation. 0,5 pt

2. a) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $x \neq 1$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{1-x}$ 0,5 pt

b) Soit (T) la droite d'équation $y = -x - 1$. Montrer que (T) est asymptote à (C). 0,25pt

c) Déterminer la position relative de (C) et (T). 0,25 pt

3. a) Montrer que la dérivée f' de f est définie sur $\mathbb{R}\setminus(1)$ par $f(x) = \frac{-(x^2-2x+4)}{(1-x)^2}$ 0,5pt

b) En déduire le sens des variations de f. 0,5pt

4. Construire dans le même repère (C), (L) et (T). 1,25pt

T21 : 3.a) Montrer que la dérivée f' de f est définie sur $IR - \{1\}$ par $f'(x) = \frac{-(x^2-2x+4)}{(1-x)^2}$

Pour établir cette relation, l'élève doit utiliser la formule de la dérivée d'un quotient de fonctions. Ainsi, $f(x) = \frac{x^2-4}{1-x}$, $u(x) = x^2 - 4$ et $v(x) = 1 - x$.

La dérivée de la fonction $\frac{u(x)}{v(x)}$ est $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v\prime}{v^2}$

$u'(x) = 2x$ et $v'(x) = -1$.

$$f'(x) = \frac{2x(1-x) - (-1)(x^2-4)}{(1-x)^2} = \frac{2x - 2x^2 + x^2 - 4}{(1-x)^2} = \frac{-x^2 + 2x - 4}{(1-x)^2}$$

Finalement on en déduit que $f'(x) = \frac{-(x^2-2x+4)}{(1-x)^2}$.

T31 : 3.b) En déduire le sens de variations de f.

Pour tout x de $IR - \{1\}$, le signe de $f'(x)$ est celui de $-(x^2 - 2x + 4)$. Or pour tout réel, $x^2 - 2x + 4 > 0$. Donc pour tout réel x de $IR - \{1\}$, $f'(x) > 0$.

Ainsi f est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.

On observe que les deux types de tâches T2.1 et T3.1 reposent sur les deux technologies $\theta_{2.12}$ du tableau 16 et ($\theta_{3.1}$) du tableau 17. Ces deux technologies sont celles qui sont priorisées par les enseignants dans leurs discours et constituent des invariants opératoires pour expliquer pourquoi ils mettent un accent sur la manipulation des formules. De plus, nous observons que ces deux types de tâches, jumelés aux autres contenus appris précédemment comme les limites permettent simplement de représenter le graphe de la fonction comme l'illustre l'extrait de l'examen. Bien plus, nous émettons l'hypothèse selon laquelle ces enseignants consacrent les mêmes intérêts pour les sections du programme qui sont évaluées dans l'examen nationale.

4.4-Analyse du rapport personnel des enseignants de l'étude

Selon Chevallard (2003), un sujet d'une institution a un rapport personnel avec un objet de savoir lorsque celui-ci interagit avec cet objet de savoir. Pour le cas d'espèce, le concept de dérivée en mathématiques selon Chevallard (2003) est un objet et chaque fois qu'un enseignant qui est un sujet d'une institution supposée être une école interagit avec ce concept, il interagit avec le concept de dérivé et de ces multiples interactions émerge un rapport personnel ou des rapports personnels avec le concept en jeu. Selon le parcours d'un enseignant, différents rapports à l'objet de savoir « dérivée » peuvent émerger. Dans le cadre de cette étude, nous avons questionné trois enseignants aux parcours différents, chacun ayant un rapport aux mathématiques qui détermine sa façon de faire ou de percevoir son travail d'enseignant. Dans le but de décrire de façon objective le rapport personnel de chacun des enseignants, il nous semble pertinent de décrire le parcours de chacun des enseignants. Pour ce faire, l'entretien biographique (Demazière, 2003) permet de produire des données de nature discursive. Ces données permettent aux enseignants de nous rendre compte de leurs parcours scolaire et professionnel, parcours qui leur ont permis de devenir enseignant de mathématiques et qui façonnent également leur rapport au concept de dérivé, rapport personnel qui permet à chaque enseignant de décliner ce qu'il « sait » de la dérivée, de son enseignement, de son apprentissage, des difficultés liées à son enseignement / apprentissage et de la manière dont peut être organisé un cours sur la dérivée.

Pour engager notre enquête de terrain, nous avons pris contact avec les enseignants qui avaient au préalable accepté de participer à l'étude. Cette rencontre en présentiel nous a permis de discuter avec eux du déroulement de la collecte des données et de leur faire part de nos principales attentes. Considérant la grille d'entretien préalable qui a été élaborée et qui contenait un thème sur la biographie des enseignants concernés, il leur était donné l'occasion de nous parler d'eux-mêmes, de nous raconter leur histoire de vie du point de vue des différents parcours qui les ont menés à l'enseignement des mathématiques. La question qui leur a été posé était la suivante : *« Pouvez-vous nous parler de votre parcours académique et professionnel ? ».* Nos attentes étaient simples et les questions de relance visaient à amener les participants à nous dire comment ils ont fait leurs classes depuis le secondaire en passant par l'université jusqu'à l'école de formation en enseignement. Dans le second thème de notre guide d'entretien, il était question que les enseignants nous parlent de comment ils perçoivent la dérivée, que pensent-ils de son enseignement, de son apprentissage en lien avec le programme d'enseignement et enfin, comment ils entrevoient leurs choix des ressources pour planifier et enseigner la dérivée. À travers cet entretien, il nous sera capable d'établir le rapport personnel de chaque enseignant au sujet du concept de dérivée car les praxéologies de l'utilisation des ressources pour la planification des cours et les praxéologies de l'enseignement seraient déterminées par le rapport personnel des enseignants au concept en jeu. Dans cette section, nous allons présenter en synthèse le parcours de chacun des enseignants qui ont participés à l'étude. Pour souci de confidentialité, nous désignerons par Alex, Bernard et Claude les trois enseignants. Ensuite, nous présenterons les différents rapports au concept de dérivée de chacun des enseignants. Enfin, nous dégagerons les similitudes ou des contrastes.

4.4.1-Biographie des enseignants de l'étude

Alex est un enseignant qui a un parcours scolaire et universitaire que l'on peut juger de bon parcours. À la fin de ses études secondaires en 2006, il obtient un diplôme d'études secondaires en mathématiques et sciences physiques. En 2010, il termine son diplôme d'enseignant du premier grade et simultanément avec une licence en mathématiques et commence à enseigner comme enseignant de mathématiques. Alors qu'il enseigne au lycée, il poursuit des études supérieures en mathématiques avancées et obtient en 2015 un Master 2 (Maîtrise) en mathématiques. Une fois les études en mathématiques avancées terminées, il entreprend des études dans un programme de master professionnel à l'école polytechnique de Yaoundé en ingénierie de télécommunication et deux ans plus tard il retourne à l'école normale pour terminer les deux années de formation professionnelles en enseignement des mathématiques et obtient son diplôme d'enseignant du second cycle en 2018. Sur le plan professionnel, il aura parcouru quatre établissements depuis la fin de sa formation initiale en enseignement et aura accumulé en tout sept ans de pratique professionnelle et ceci dans les classes à spécialité mathématique. C'est donc un enseignant qui a une longue expérience dans l'enseignement des mathématiques et dont le cursus personnel en tant qu'élève et étudiant a été dominé par l'apprentissage des mathématiques. Les principales difficultés qui entravent son travail au quotidien sont liées à l'absence de la documentation pour les élèves dans un contexte où les classes sont à effectif pléthorique.

Bernard quant à lui est l'enseignant le plus jeune et le moins expérimenté des trois. Après ses études secondaires en mathématiques et en sciences physiques, Bernard obtient trois ans plus tard une licence en mathématiques, l'équivalent d'un baccalauréat et ensuite une première année de maîtrise en mathématiques pures. Ensuite, il réussit le concours d'entrée à l'école normale supérieure en 2015 et parallèlement, il poursuit sa deuxième année de maîtrise en mathématiques pures à l'université. Au moment où il termine sa formation initiale, il obtient conjointement une maîtrise en mathématiques pures. Pendant trois années consécutives, il a enseigné le niveau qui nous intéresse dans cette étude, à savoir des élèves inscrits dans des spécialités mathématiques qui sont à leur avant dernière année avant l'entrée à l'université. À la différence d'avec Alex, Bernard a eu l'opportunité d'enseigner pendant ses deux premières années d'expérience aux élèves des classes de terminales à spécialité technique comprenant la maçonnerie, l'électricité, l'industrie d'habillement, l'économie sociale et familiale, niveau d'enseignement pour lesquels la dérivée est également introduite. Cette expérience également lui a permis de construire et de consolider sa pratique d'enseignement une fois que ce dernier a commencé à enseigner la dérivée aux élèves de l'enseignement général.

S'agissant de Charles, après ses études secondaires, il poursuit ses études universitaires et obtient après trois années une licence en mathématiques pures. L'année suivante, il présente le concours de l'école normale supérieure et est admis dans le cadre des professeurs de l'enseignement secondaire du deuxième grade. Après avoir obtenu son diplôme d'enseignant, il exerce pendant quatre ans comme enseignant de mathématiques. Durant ces quatre années, il observe des difficultés dans l'exercice de ses pratiques d'enseignement, il décide de s'inscrire dans un programme de formation en didactique des mathématiques. Les difficultés dont il parle concernent beaucoup plus les élèves puisqu'il juge que ces élèves ne sont pas bien orientés et que plusieurs d'entre eux se retrouvent dans les séries mathématiques et sciences alors qu'ils n'ont pas des prérequis. Il voudrait aider ses élèves à acquérir un niveau élevé en mathématiques mais du fait de ces carences, il ne dispose qu'une seule solution, se former à nouveau. Au moment de nos rencontres, il nous a confié s'être inscrit dans un programme de maitrise en didactique des mathématiques et que la problématique sur laquelle il travaillait portait sur le rôle des variables dans la résolution des équations et inéquations dans l'enseignement secondaire au Cameroun.

Ce parcours de notre point de vue a constitué pour nous une source enrichissante dans nos échanges car non seulement cet enseignant développait des idées en tant qu'enseignant de mathématiques, il lui arrivait d'émettre certains autres commentaires qui semblait témoigner de l'influence de sa formation en mathématique et en didactique des mathématiques. S'agissant du niveau qui est en jeu dans cette étude, il nous a déclaré qu'il enseignait cette classe depuis cinq ans. De manière générale, il a émis des réserves quant à ce qui concerne le niveau des élèves. Il considère que les élèves qui arrivent en classe de $1^{\text{ère}}$ C n'expriment pas les compétences supposées être acquises pendant les années qui ont précédées cette classe. Les compétences attendues des élèves selon cet enseignant sont celles qui sont nécessaires en mathématiques pour pouvoir avancer dans les apprentissages. Pour cela, il pointe du doigt aussi l'orientation scolaire qui ne permet pas de sélectionner des élèves ayant un niveau acceptable pour poursuivre les études en mathématiques. L'une des difficultés entravant leur travail au quotidien est ce problème des prérequis des élèves. Cette difficulté de notre avis peut être inscrite dans le champ des contraintes qui tirent leur source dans l'école mais qui dans une certaine mesure serait aussi liée en particulier à la discipline elle-même. Il peut être enrichissant de savoir comment les enseignants prennent en compte ces difficultés dans la conception de leur enseignement et même dans leur pratique d'enseignement du concept de dérivée pour le cas spécifique de cette notion.

4.4.2-Rapport personnel des enseignants de l'étude

4.4.2.1-Rapport personnel de l'enseignant Alex

Les éléments qui caractérisent le rapport personnel de l'enseignant Alex se résument dans le tableau présenté en Annexe 1. Alex considère que, lorsqu'on parle de la dérivation, il s'agit d'un concept dont la compréhension est assez large et dans ce cas, c'est une notion qui a plusieurs significations et qui selon cet enseignant peuvent être retrouvées dans le domaine des mathématiques et dans les situations de la vie sociale. Sur le plan mathématique, il considère que la dérivée est associée à la notion de pente d'une droite tangente tandis que lorsqu'il faut ramener le concept dans le cadre de ses applications sociales, la dérivée représente la vitesse de déplacement d'un mobile. Ces deux conceptions de la dérivée selon cet enseignant sont le fruit de ses expériences en enseignement d'une part et de sa formation en mathématiques et en ingénierie. Pour cet enseignant, les élèves doivent apprendre la dérivée comme pente de la tangente. En effet, lorsqu'il était élève, l'étude du chapitre sur la dérivation consistait au calcul de la fonction dérivée dans le but d'étudier les variations de la fonction sur les différents intervalles du domaine de définition dans le but de tracer une esquisse du graphe de la fonction. Cette vision de l'apprentissage de la dérivée n'a pas changé car l'enseignant considère que l'apprentissage de la dérivée doit servir à représenter les fonctions comme l'illustre cet extrait « *Dans le contexte camerounais ce qui importe plus c'est l'utilisation de la dérivée pour construire des fonctions ».* Pendant ses études en mathématiques et pendant sa formation initiale en enseignement, le cours sur la dérivée était plus axé sur l'épistémologie mathématique, notamment l'étude des fonctions différentiables, le gradient, le rotationnel et cetera, le niveau d'abstraction était très élevé. Dans ce sens, il lui était difficile de comprendre le bien-fondé de l'apprentissage de la dérivée pendant sa formation. Mais, pendant les premières années en enseignement, son regard sur la dérivée a changé par exemple comme l'illustre cet extrait *« ma vision sur le cas de la dérivée en un point a beaucoup changé quand j'ai commencé à enseigner »*, il explique ce changement par le fait qu'« *à l'École Normale on n'évoquait pas la dérivée sur le plan pratique, il fallait étudier certaines propriétés qui nous étaient demandé d'étudier »* on peut également observer que son rapport personnel s'est amélioré surtout lorsqu'il a commencé un programme d'ingénierie en télécommunication car comme l'illustre certains extraits, l'enseignant fait deux observations pertinentes : *« la dérivée intervient dans les problèmes d'optimisation et dans les approximations »* même si *« le problème d'approximation est un peu compliqué à enseigner».* On note que la nouvelle formation de l'enseignant qui se fait dans un domaine technique a modifié sa vision de ce qu'est la dérivée. Ainsi, dans son enseignement, conscient de ce que les applications de la dérivée permettent de motiver les élèves, il tente d'amener ses élèves vers des activités de modélisation et d'approximation. Cependant, son observation laisse voir que ses élèves rencontrent des difficultés avec la modélisation et l'approximation à l'aide de la dérivée. Ce que nous notons d'avance avec cet enseignant semble justifier les nombreuses observations antérieures selon lesquelles l'appartenance des étudiants et donc nous pouvons dire aussi désormais des enseignants à une filière technique a de l'influence sur le rapport personnel de l'enseignant au sujet d'un concept enseigné (Bingolbali et al., 2007).

Lorsque nous avons évoqué la préparation des cours et notamment des ressources utilisées, l'enseignant a trouvé que le programme officiel présente bien le contenu en lien avec la dérivée qu'il faut enseigner et selon ce bon ordre, autrement dit, il est important de suivre le programme car non seulement *« c'est ce que demande le programme camerounais »* mais également aussi à cause du fait que le but principal visé par ces élèves et leur enseignant c'est la réussite à l'examen ministériel qui se tient en fin d'année. Pour cela, cet enseignant affirme que *« Le but pour les élèves c'est de valider leur examen de fin d'année. Donc tout ce qui a trait à la dérivée doit être ce qui vient souvent à l'examen ou bien ce que l'examen officiel demande, c'est beaucoup plus ça. Et avec cette technique, si vous voyez dans leur livre au programme, c'est le type d'activité comme ça, c'est à partir de ça, parce que même au début du cours les objectifs de la dérivation, leçon numéro un, objectif principal, déterminer le nombre dérivé en un point, deux, construire l'équation de la tangente à Cf à ce point »*. Or, pour atteindre cet objectif, il faut absolument se conformer aux recommandations du programme. De même, comme pour enseigner la dérivée l'enseignant doit également faire usage d'un manuel scolaire, il lui a été demandé ce qu'il pensait du manuel inscrit au programme. L'enseignant trouve que *« L'ordre de présentation de la dérivée dans le manuel est très bien articulé ».* Cependant, en fonction de son profil enrichi par sa formation en ingénierie, il relève quelques insuffisances au sujet du manuel qui lui permettent d'enseigner la dérivée. Par exemple, il relève que, dans le contexte du Cameroun, *« c'est difficile de trouver des exercices de type expérimental »* c'est-à-dire des problèmes concrets sur la dérivée, notamment dans les manuels qui auraient permis de faciliter une compréhension plus large de la dérivée. C'est donc dans ce contexte que l'enseignant doit enseigner la dérivée aux élèves et les aider à mieux conceptualiser la notion de dérivée. Si le manuel au programme ne propose pas des activités sur la dérivée dans un contexte, alors l'enseignant explique qu'il doit aller trouver dans d'autres ressources ces activités dans le but d'aider les élèves à mieux conceptualiser la dérivée. Le programme de formation quant à lui ne met aucune emphase sur la résolution des problèmes en lien avec la dérivée qui soient en contexte. L'enseignant considère que pour enseigner la dérivée, l'usage de la tangente serait adapté, malheureusement, il doit se conformer aux exigences du programme en l'enseignant autrement, notamment comme la limite du taux de variation. Pour ce faire, il propose la définition du concept puis il fait travailler plusieurs exemples par ses élèves afin que ces derniers finissent par apprendre la démarche tout en contrôlant certaines difficultés qui proviennent des prérequis. Sa vision de l'enseignement de la dérivée est donc fortement influencée par les orientations du programme officiel comme l'affirme l'enseignant dans l'extrait suivant : *« Ce que demande le programme camerounais, c'est de prouver qu'une fonction est dérivable en un point, calculer la dérivée en ce point. L'utiliser pour tracer la tangente en ce point et pour construire une fonction donnée au départ »,* autrement dit, le principal objectif pour lequel cet enseignant enseigne la dérivée est d'amener les élèves à calculer la fonction dérivée d'une fonction et à l'utiliser pour étudier les signes des fonctions, déterminer la tangente et tracer le graphe des fonctions, et pour cela, la réussite de l'examen final semble constituer le principal objectif. Pour Alex, lorsqu'il enseigne la dérivée, il voudrait que *« les élèves puissent maitriser la dérivée en un point comme le coefficient directeur de l'équation de la tangente »,* dès lors on peut noter que la principale vision qu'a l'enseignant de l'apprentissage de la dérivée est semblable à sa propre vision de ce qu'est la dérivée et cette vision est davantage basée sur l'épistémologie mathématique que sur les applications pratiques de la dérivée. Lorsqu'on demande à l'enseignant comment il justifie cela, l'enseignant relève que selon ses observations, *« les élèves sont généralement perdus car ils ne sont pas familiers avec les problèmes d'optimisation »,* il rajoute même que le fait de travailler *« la dérivée dans un contexte pratique perd les élèves car ils sont faibles en physique ».* Ce rapport à la dérivée permet de comprendre le choix fait par cet enseignant pour introduire le cours sur la dérivée. En effet, en dépit de ce que considère cet enseignant de la dérivée, il ne se sert pas de sa vision des mathématiques pour l'enseigner car il pèse sur lui le poids du programme qui recommande d'introduire la dérivée comme la limite du taux de variation moyen. Pourtant, pour cet enseignant, les situations concrètes qui s'appuieraient sur les connaissances physiques des élèves aideraient mieux pour amener les élèves à comprendre la dérivée définie comme une pente.

4.4.2.2-Rapport personnel de l'enseignant Bernard

Tout comme pour Alex, Bernard évoque plusieurs significations de la dérivée (Annexe 2). D'abord sur le plan mathématique, la dérivée est associée à la pente de la droite tangente tandis que lorsqu'on considère la dérivée sur le plan pratique, elle correspond à la vitesse de déplacement d'un mobile. Bien que cet enseignant considère l'existence de plusieurs façons de voir la dérivée, lorsqu'on lui demande ce que représente finalement la dérivée pour lui, sa réponse est la suivante *« la vitesse rentre comme une application de la dérivée en tant que limite d'un taux de variation »*, cette réponse traduit bien une ambivalence dans le rapport personnel de cet enseignant. D'abord la dérivée est une pente de la droite tangente, ensuite c'est une vitesse et enfin cette vitesse est une limite d'un taux de variation. La vision de ce qu'est la dérivée pour Bernard n'est donc pas assez précise pour se fixer une idée réelle de ce que pense l'enseignant en définitive de la dérivée. On comprend bien pourquoi à contrario l'enseignant visualise la dérivée comme un outil pour résoudre un problème, cet outil ici est la fonction dérivée qui permet d'étudier le sens de variation d'une fonction comme l'illustre cet extrait *« La dérivée est plus un outil calculatoire pour faciliter la tâche aux élèves de pouvoir trouver le sens de variation »*. Une question importante pour nous est de savoir ce qu'en pense l'enseignant de ce que les élèves doivent apprendre et pour cela, comment il pense également l'enseignement de la dérivée.

Au sujet de l'enseignement voici ce que déclare l'enseignant : *« Ce que demande le programme camerounais, c'est de prouver qu'une fonction est dérivable en un point, calculer la dérivée en ce point. L'utiliser pour tracer la tangente en ce point et pour construire une fonction donnée au départ »*. La vision de l'enseignement de la dérivée pour l'enseignant Bernard est celle du programme officiel et cette position est d'ailleurs renforcée quand Bernard soutient que *« Dans le contexte camerounais, ce qui importe plus c'est l'utilisation de la dérivée pour construire des fonctions…*[…]. *Mon objectif c'est que les élèves sachent calculer la dérivée »*. Ce que pense donc enseigner Bernard au sujet de la dérivée est ce que prescrit le programme officiel. Par ailleurs, en tant qu'enseignant, Bernard précise sa pensée au sujet de sa vision de l'enseignement de la dérivée aux élèves, le but étant de : *« … faciliter l'accession à leur examen et pour leurs études futures en terminale et puis à l'université ».* Donc le programme officiel n'est pas la seule contrainte à laquelle est soumis l'enseignant, on note également que l'un des buts visés par le livre programme est la préparation des élèves pour les examens de fin d'année, et pour cela, Bernard semble bien avoir compris cela et travaille avec acharnement en restant dans ces objectifs car selon lui, *« ce qui parait plus important pour moi c'est d'abord leur examen car vous savez si un élève ne réussit pas son examen le parent dira que le professeur a mal fait son travail ».* On voit bien que l'évaluation externe qui se déroule en fin d'année pèse lourd dans les décisions que devra prendre Bernard. Cette évaluation externe est faite par le ministère des enseignements secondaires mais il y a une autre forme d'évaluation, cette fois-ci informelle qui est faite par le parent d'élève. L'enseignant craint de se faire taxer de mauvais enseignant, et pour cela, il fait tout ce qui est possible pour se conformer au programme officiel et aux tâches qui seront évaluées en fin d'année. Bernard conclut en relevant qu'il n'est pas nécessaire de faire usage des ostensifs graphiques dans le cours car elles semblent alourdir le cours. Pour cela, le graphe ne sert pas d'appui à l'introduction du nombre dérivé ni de la fonction dérivée.

Au sujet de l'apprentissage de la dérivée, Bernard pense que *« Les difficultés des élèves avec la dérivée se retrouvent dans les prérequis »*, ce qui traduit les premières contraintes qui ont été évoquées par les deux autres enseignants dans la présentation de leur biographie. Par ailleurs, il relève que pour faciliter la compréhension de la dérivée chez les élèves, il faut passer par la physique afin d'aider les élèves à comprendre que la dérivée c'est la pente de la droite tangente. On observe lorsqu'on demande à Bernard ce qu'il pense de l'apprentissage de la dérivée que sa vision de l'apprentissage et de celle de l'enseignement sont similaires et semblables à la vision véhiculée par le programme de mathématiques. S'agissant de l'introduction de la dérivée dans le programme, c'est sans surprise que Bernard pense que *« tout ce qu'on fait est toujours en référence au livre programme* [...] *et pour cela, je fais des efforts pour rester dans le livre programme ».* Au sujet du manuel de mathématiques, l'enseignant trouve que le contenu de la notion sur la dérivée est très vaste et que les activités qui y sont présentées sont lourdes et difficilement compréhensibles pour les élèves. Pour faciliter la compréhension de la dérivée en se servant du manuel, en lieu et place d'une activité pour chaque objectif du chapitre, Bernard estime qu'il faille construire une seule activité qui puisse résumer tous les objectifs d'une seule et même tâche. Il s'en suit que l'enseignant présenté ici a une vision de la dérivée qui s'appuie fondamentalement sur celle du programme officiel qui lui dicte sa démarche, l'évaluation externe aussi constitue une contrainte non moins négligente dans le travail de l'enseignant. Son rapport personnel au sujet de la dérivée au départ n'est pas très perceptible, cependant, il devient évident quand on obtient sa réponse à la question du contenu du programme et des évaluations externes.

4.4.2.3-Rapport personnel de l'enseignant Charles

Pour l'enseignant Charles aussi, la notion de dérivée a plusieurs significations et représente à cet effet un champ mathématique un peu large. En effet, *« Pour moi, la dérivée c'est d'abord le résultat d'une limite parce qu'on approxime la dérivée comme le résultat de la limite du taux de variation. »* Selon lui, on obtient cette pente en calculant la limite du taux de variation d'une fonction et là, il est difficile de savoir de quel taux de variation il peut bien s'agir. Pour l'enseignement de la dérivée, Charles a une représentation qui est davantage liée à celle véhiculée par le programme officiel et même le manuel car pour ce qui est du programme il trouve que *«*

l'ordre de présentation de la dérivée dans le programme officiel est très bien articulé. » Ce point de vue est partagé aussi par Alex et c'est au niveau du manuel que l'on peut noter quelques différences. Charles trouve aussi que l'ordre du contenu du manuel au sujet de la dérivée est bien articulé. Cependant, il émet une réserve quant à la manière dont ces contenus sont abordés. D'abord, il note que le contenu du manuel est vaste et que les activités qui y sont abordées sont lourdes et en même temps difficiles pour faciliter la compréhension. Ce point de vue a déjà été émis par Bernard qui se proposait à cet effet de construire une activité qui devrait prendre en compte plusieurs notions au lieu d'une seule pour simplifier son enseignement. Nous avons noté par ailleurs que Charles n'a pas évoqué dans sa vision de la dérivée les aspects liés aux applications. Néanmoins, lorsqu'on l'a interrogé sur le contenu du manuel à propos de la dérivée, il fait relever comme Alex que *« c'est difficile au Cameroun de trouver un exercice type expérimental sur la dérivée. »,* une manière de dire comme Alex que dans les manuels et dans les autres ressources que les enseignants utilisent localement pour enseigner la dérivée, on ne trouve pas des activités sur les applications de la dérivée. Autrement dit, il s'agit des activités qui permettent de donner du sens à la dérivée.

Quand on lui demande ce qui est plus important dans l'enseignement de la dérivée, il affirme que *« dans le contexte camerounais ce qui importe plus c'est l'utilisation de la dérivée pour construire des fonctions ».* C'est l'une des applications multiples de la dérivée, bien que l'enseignement de la dérivée ne soit pas facile selon lui, les applications de la dérivée sur le plan social constituent l'essentiel à enseigner car ce sont elles qui donnent du sens à la notion de dérivée. Cependant, au vu de l'absence des ressources sur les applications de la dérivée comme il l'a évoqué précédemment, il y a lieu de penser que c'est pour cela que son objectif quand il enseigne la dérivée c'est que les élèves puissent savoir calculer la dérivée, à la question de savoir ce qui justifie cette décision, il nous précise qu'il faut *« garder à l'esprit que les élèves doivent préparer leurs examens de fin d'année, c'est notre objectif principal »* rejoignant ainsi les points de vue des deux autres enseignants. Au sujet de l'apprentissage de la dérivée, Charles estime que les difficultés d'apprentissage des élèves sont dues aux connaissances mathématiques antérieures qui sont insuffisantes. Pour ce qui est du cours sur la dérivée, il relève que *« les élèves doivent beaucoup plus maitriser la dérivée comme le coefficient directeur de la tangente »,* pourtant dans le discours sur sa vision de la dérivée, la tangente n'apparait pas comme un objet d'enseignement mais plutôt comme une conséquence de la définition, ce qui semble bien justifier sa vision de l'apprentissage de la dérivée chez les élèves. Néanmoins, il pense que l'utilisation des ostensifs graphiques faciliterait plus la compréhension chez les élèves, pourtant, dans l'ensemble des discours des trois enseignants, il ressort très peu l'évocation de la tangente sauf quand il est question de la présenter comme conséquence de la définition de la dérivée définie en un point. Pour faire le point sur l'apprentissage de la dérivée, Charles estime que les élèves doivent pouvoir faire le lien entre les différentes parties du cours car *« Si l'élève ne peut pas comprendre les différents liens qu'il y a entre la dérivée, la tangente et le sens de variation, il aura beaucoup de difficulté quand il s'agira de les appliquer au supérieur ».* Nous observons donc que le rapport personnel de Charles avec la dérivée s'aligne avec le rapport institutionnel. Cependant, on note bien des incohérences ou des positions indécises telles que le fait pour l'enseignant d'affirmer que la dérivée est associée à la limite du taux de variation pourtant sa perception de ce que les élèves doivent apprendre est relié à la pente de la droite tangente, ceci est bien une incohérence dans la mesure où l'on s'attendrait qu'il poursuive en nous disant que les élèves doivent interpréter la dérivée comme limite d'un taux de variation puisque sa propre vision fait référence à cela. De plus, l'enseignant estime que l'essentiel à enseigner devrait reposer sur les applications de la dérivée, là encore il est difficile de savoir s'il s'agit des applications sur le plan mathématique ou alors s'il s'agit plutôt des applications de la dérivée sur le plan pratique qui permettent de donner du sens à la dérivée.

4.4.2.4–Synthèse sur le rapport personnel des enseignants de l'étude

Les perceptions des enseignants au sujet de la dérivée ne sont pas identiques pour l'ensemble des trois enseignants. On y observe plusieurs aspects qui comprennent la pente, la vitesse, la limite du taux de variation, par ailleurs, la dérivée associée à la pente de la droite tangente semble être la plus représentative du rapport des enseignants à la dérivée (A, B, C). Les autres contextes d'apprentissage de la dérivée sont très peu apparus dans le discours des enseignants. Par exemple, la dérivée vue comme vitesse est relevée dans le discours d'Alex et de Bernard tandis que la dérivée associée à la limite du taux de variation y est absente mais apparait dans le discours de Charles. Tous les trois enseignants ont bien conscience des problèmes d'optimisations qui exerceraient une influence sur la compréhension approfondie de la dérivée. Cependant, du fait que le manuel n'y accorde pas assez d'importance, les enseignants eux aussi ne le font pas, cela semble bien se justifier car comme nous le relevons depuis, les positions des enseignants à la fin se rejoignent aux prescriptions du ministère et des auteurs du manuel. Ce positionnement peut être justifiée par la formation initiale des enseignants car, comme l'a relevé par exemple Alex, sa vision de la dérivée a changé quand il a commencé à enseigner et ceci parce que pendant ses années de formation initiale, *« on n'évoquait pas la dérivée sur le plan pratique, il fallait étudier certaines propriétés qu'on demandait »*.

Les projections que se font les enseignants quant à l'enseignement de la dérivée en un point ou sur un intervalle semblent bien comme les discours l'indiquaient être conditionnées par le programme officiel et le manuel scolaire. Le but de l'étude de la dérivation finalement, c'est de calculer la fonction dérivée puis l'utiliser pour étudier le signe de la dérivée, et enfin tracer une esquisse du graphe de la fonction. Ce but est largement soutenu par les exigences liées aux examens de fin d'année car la finalité c'est d'aider les élèves à réussir d'une part aux examens nationaux mais également pour ne pas être identifiés comme de mauvais enseignants. Il apparait que le rapport personnel de ces enseignants s'alignent sur le rapport institutionnel simplement aux dire de ces enseignants pour être de bons sujets pour l'institution (Chevallard, 2003b). D'autres aspects du travail de ces enseignants nous permettront de renforcer nos observations ou alors de les discuter davantage. Nous allons dans la suite de ce document analyser comment les enseignants utilisent leurs ressources pour préparer les enseignements et aussi pour enseigner la dérivée.

4.5-Travail documentaire des enseignants de l'étude

Dans cette section, nous rendons compte de tous les aspects dont les enseignants de cette étude interagissent avec diverses ressources (Adler, 2010). Certains travaux ont révélé que la manière dont les enseignants interagissent avec les ressources est conditionnée par leur rapport personnel au concept en jeu (González-Martín et al., 2018) et que ces différentes interactions influencent également la manière dont l'enseignement sera produit dans la salle de classe (Rezat, 2010). De même, dans leur utilisation des ressources, les enseignants sont influencés par leurs pratiques et leurs croyances(Gueudet, 2017). Dans le cadre de cette étude, nous avons présenté dans la section précédente les premiers éléments qui étaient contenus dans le guide d'entretien semi-directif préalable à l'enseignement. Nous y avons présenté les différents rapports personnels des enseignants et dans cette section nous poursuivons avec les renseignements recueillis sur la manière dont les enseignants interagissent avec les ressources. Nous avons déjà présenté le contexte du déroulement des entretiens, rappelons néanmoins qu'il avait été demandé aux enseignants concernés de venir lors de cet entretien avec les ressources qu'ils comptaient utiliser ou qu'ils ont utilisé dans la préparation de leurs notes de cours. Dans cette analyse, nous portons une attention particulière sur les objectifs visés par les enseignants dans le choix et l'utilisation des ressources, puis, nous observons comment ces ressources sont utilisées et comment les enseignants justifient leurs choix d'utilisation. Nous avons adopté la démarche utilisée par González-Martín, Nardi, & Biza (2018) et Gueudet (2017) pour identifier les buts visés, les règles d'action et les invariants opérationnels. Ainsi, nous avons pris comme éléments essentiels, les invariants opérationnels identifiés dans la section précédente et qui constituent le rapport personnel des enseignants. Lors de la retranscription des données, nous avons identifié dans le discours des enseignants les ressources qui étaient utilisées et la raison pour lesquelles les enseignants les priorisaient. Par exemple, nous avons noté que le choix des ressources par les enseignants est guidé par l'idée de préparer les notes de cours, proposer des exercices de travaux dirigés selon les exigences du programme et des examens ministériels, proposer d'autres exercices qui ne sont pas présents dans le manuel au programme, préparer les évaluations, introduire la dérivée en un point et introduire la dérivée sur un intervalle. Il est certain que chacun de ces objectifs peut faire appel à une ou plusieurs ressources matérielles en même temps. Certains objectifs poursuivis par les enseignants sont apparus comme des gestes récurrents qui constituent des règles d'action, autrement dit, la manière dont les enseignants se servaient des ressources pour satisfaire un but précis. D'autres éléments du discours des enseignants nous ont permis de faire ressortir les propos des enseignants qui expliquent pourquoi ils utilisent une ressource d'une certaine manière plutôt qu'une autre. Ces informations nous ont permis d'élaborer différents tableaux pour chacun des enseignants et finalement, nous sommes parvenus à élaborer un tableau unique qui résume toutes les informations au sujet du travail documentaire des enseignants. Pour chacun des enseignants, nous présentons ci-dessous le travail documentaire et nous achevons cette analyse par le tableau qui synthétise le travail documentaire des enseignants de l'étude.

4.5.1-Travail documentaire de l'enseignant Alex

Dans les entretiens que nous avons eus avec Alex, la préparation des notes de cours est le premier des objectifs poursuivis par cet enseignant comme indiqué dans le tableau ci-dessous. Pour atteindre cet objectif, l'enseignant utilise le programme officiel dans lequel il identifie les contenus à enseigner et les intentions pédagogiques et didactiques. En fond de toile, le fait de suivre le programme vise à élaborer les notes de cours qui vont permettre aux élèves d'être préparé pour leur examen ministériel de fin d'année. Dans cet ordre d'idées, il doit suivre le programme, ce qui constitue une règle d'action qui est justifiée par le fait que l'enseignant trouve que *« La dérivée est bien organisée dans le programme ».* Ainsi, il en ressort que l'enseignant doit préparer des notes de cours qui sont en adéquation avec le programme officiel. Le deuxième et le troisième objectifs poursuivis par cet enseignant était de préparer les travaux et les évaluations des apprentissages. Pour ces deux objectifs également, l'enseignant fait appel à plusieurs ressources diversifiées : le manuel scolaire, les anciens sujets d'examens ministériels et les autres ressources tirées de l'internet. Même si l'enseignant apprécie le manuel scolaire proposé par le ministère, il n'est tout de même pas surprenant de constater qu'il va à la recherche d'autres ressources sur internet pour préparer les sujets d'évaluation en classe. Cela constitue pour nous un invariant opérationnel qui est justifié par le fait que cet enseignant ne suive pas forcément le contenu du manuel. Là encore on peut relever que le programme officiel oriente les choix de l'enseignant puisque dans le choix des autres ressources sur internet, l'enseignant doit se rassurer que ces ressources respectent les prescriptions du programme (Tableau 21).

Objectifs	Ressources utilisées	Règles d'action (Façon d'utiliser les ressources)	Invariants opérationnels (Raisons de les utiliser de cette façon)
Préparer les notes de cours	Le programme officiel Le manuel scolaire	Je dois suivre le programme pour mieux préparer mes cours et mes élèves à leur examen de fin d'année	« La dérivée est bien organisée dans le programme »
Préparer les évaluations	Le manuel scolaire Ressources sur internet Anciens sujets d'examens ministériels	Je ne suis pas forcément l'ordre du manuel Je prends les exercices dans les manuels au programme et autres ressources (internet, anciens sujets) Je construis moi-même les sujets d'évaluation ou bien je les tire du manuel au programme, sur internet et dans les anciens sujets Je choisis d'autres ressources quand ils respectent le programme	« Le manuel au programme est bien ordonné » « Le manuel est un support, mais l'enseignant doit aller au-delà du manuel »
Préparer les travaux des élèves	Le manuel scolaire Anciens sujets d'examens ministériels Ressources sur internet	Je prends les exercices dans les manuels au programme et autres ressources (internet, anciens sujets)	« L'internet offre des ressources intéressantes pour les enseignants »
Introduire la dérivée en un point et sur un intervalle	Le manuel scolaire Le programme officiel	Je n'enseigne pas la dérivée à travers les cas pratiques Je donne beaucoup d'exercices type expérimental pour que les élèves eux-mêmes découvrent Je préfère faire le cours directement avec peut-être la partie non expérimentale	« Les problèmes de modélisation sont difficiles pour les élèves »
		J'introduis la dérivée par la tangente J'ai introduit le nombre dérivé par le calcul de la limite du taux de variation	« La tangente sert à introduire la dérivée »
		J'amène les élèves pendant l'enseignement à voir comment on calcule la dérivée d'une fonction en un point et à faire le lien avec l'équation de la tangente à la courbe en ce point.	Les élèves doivent apprendre la dérivée comme pente de la tangente »
		J'enseigne la dérivée selon les objectifs du programme Je priorise les contenus liés à l'examen	« Le but de cette année scolaire c'est de réussir à l'examen ministériel »
	Les exemples	Je définis et je pratique sur plusieurs exemples	« Ça aide pour l'apprentissage de travailler les exemples »
	Les discussions des forums d'enseignants	Je partage les besoins de mes élèves dans le forum dans le but de trouver des solutions pour les aider à apprendre	« Le forum de mathématiques permet d'améliorer l'enseignement »
	Connaissances antérieures des élèves	Je fais des rappels des connaissances antérieures pour aider les élèves	« Certaines difficultés des élèves avec la dérivée se retrouvent dans les prérequis »

Tableau 26. – Travail documentaire de l'enseignant Alex

Le quatrième objectif est lié à l'enseignement de la dérivée et pour cet objectif, on aurait pu faire ressortir deux sous objectifs : introduire la dérivée en un point et introduire la dérivée sur un intervalle. Nous avons fait le choix de regrouper les deux sous-objectifs dans l'objectif qui consiste à introduire la dérivée en un point et sur un intervalle. Pour l'atteinte de cet objectif, plusieurs types de ressources sont utilisées. Bien entendu l'enseignant se réfère toujours au programme officiel, à cette ressource, l'enseignant associe le manuel scolaire, les exemples, les discussions issues des forums d'enseignants et les connaissances antérieures des élèves. Dans ses pratiques d'enseignement, Alex introduit le nombre dérivé par le calcul de la limite du taux de variation et il se sert de la tangente pour introduire la dérivée sur un intervalle. Lors des entretiens post-enseignement, l'enseignant nous a expliqué qu'il enseignait la dérivée en tenant compte des objectifs du programme officiel tout en tenant compte des contenus qui devraient faire partie des examens ministériels de fin d'année. Cette dernière règle d'action s'appuie sur l'invariant opérationnel suivant : *« Le but de cette année scolaire c'est de réussir à l'examen ministériel »*. Si l'enseignant considère donc que le but de son enseignement est de préparer les élèves aux examens ministériels, il développera d'autres règles d'action pour satisfaire le même but et justifier cet invariant opérationnel. Par exemple, l'enseignant priorise le fait de multiplier des exemples pour permettre aux élèves de comprendre la démarche de résolution des problèmes plutôt qu'une réelle compréhension. Pour l'enseignant, *« Ça aide pour l'apprentissage de travailler les exemples »* et on comprend pourquoi il ne fait pas usage des exercices qui peuvent aider à développer une compréhension conceptuelle dans son enseignement. Quand l'enseignant constate que les élèves ont des difficultés à apprendre les processus de calcul de la dérivée, il se sert d'autres ressources comme le fait d'activer les connaissances antérieures qui sont nécessaires à la compréhension des contenus présentés. Il n'est pas rare de constater également que l'enseignant exploite les discussions qui se déroulent dans les forums d'enseignants pour enrichir ses enseignements et améliorer la compréhension de ses élèves. Nous pouvons observer qu'en ce qui concerne cet enseignant, même s'il diversifie son système de documentation pour enseigner la dérivée, il ne s'éloigne pas des ressources institutionnelles, c'est-à-dire que les autres ressources auxquelles il accorde de l'importance doivent satisfaire les mêmes attentes que les deux ressources principales que sont le programme officiel et le manuel scolaire auxquels il faut désormais ajouter l'examen ministériel qui constitue une ressource importante pour cet enseignant. Le contenu de cet examen est dicté par le programme et les anciens sujets d'examens sont là pour le démontrer. L'enseignant s'en sert à cœur joie et il peut par moment se rappeler de sa propre vision de l'enseignement de la dérivée sans que cela ne change ses actions qui sont quant à elles plus guidées par le manuel scolaire, le programme officiel et l'examen de fin d'année que par son propre rapport personnel.

4.5.2-Travail documentaire des enseignants Bernard et Claude

Le travail documentaire de l'enseignant Claude est très proche de celui de Bernard (Tableau 22). Pour cette raison, nous résumerons dans cette section ce que font ces deux enseignants dans la recherche, la collecte et l'utilisation des ressources pour enseigner la dérivée. Dans l'ensemble, tous les enseignants de cette étude ont les mêmes objectifs dans la recherche et la collecte des ressources. Cependant, les manières d'utiliser ces ressources et les raisons de les utiliser varient d'un enseignant à un autre. Par exemple, pour préparer les notes de cours, ces deux enseignants utilisent le programme officiel et le manuel scolaire. Dans leur utilisation de ces deux ressources institutionnelles, ils doivent suivre le programme dans le but de mieux préparer leurs élèves à l'examen de fin d'année. C'est une règle d'action qui est justifiée par le fait que pour chaque enseignant, l'organisation de la dérivée dans le programme est conforme à ses attentes. Tout comme pour le programme, le manuel est une ressource importante pour eux même s'ils ne le suivent pas à la lettre. Ils utilisent le manuel pour préparer les travaux et les évaluations des apprentissages. Les enseignants vont sur internet et recherchent des exercices qu'ils vont proposer à leurs élèves, ils construisent d'autres exercices ou font usage des anciens sujets d'examen à condition que toutes les ressources consultées respectent ou alors s'alignent sur la vision du programme. D'autres parts, on doit relever que ces deux enseignants vont recourir à d'autres ressources sur internet et dans les anciens sujets et en même temps, ils vont les modifier tout comme ils modifient les exercices tirés du manuel. Cette modification pour ce qui concerne le manuel scolaire est justifiée car pour eux, « Le manuel au programme est vaste et les activités sont lourdes ». Cet invariant opérationnel justifie leurs décisions lorsque qu'ils doivent préparer leurs travaux et les évaluations. Par ailleurs, nous avons observé que pour les mêmes raisons énoncées précédemment, Bernard utilise son ancien manuel d'élève pour enrichir ses stratégies d'enseignement.

Objectifs	Ressources utilisées	Règles d'action (Façon d'utiliser les ressources)	Invariants opérationnels (Raisons de les utiliser de cette façon)
Préparer les notes de cours	Le programme officiel Le manuel scolaire	Je dois suivre le programme pour mieux préparer mes cours et mes élèves à leur examen de fin d'année	« La dérivée est bien organisée dans le programme »
Préparer les évaluations	Le manuel scolaire Ressources sur internet Anciens sujets d'examens ministériels	Je ne suis pas forcément l'ordre du manuel Je prends les exercices dans les manuels au programme et autres ressources (internet, anciens sujets) Je construis moi-même les sujets d'évaluation ou bien je les tire du manuel au programme, sur internet et dans les anciens sujets Je choisis d'autres ressources quand ils respectent le programme	« Le manuel au programme est bien ordonné » « Le manuel est un support, mais l'enseignant doit aller au-delà du manuel »
Préparer les travaux des élèves	Le manuel scolaire Anciens sujets d'examens ministériels Ressources sur internet	Je prends les exercices dans les manuels au programme et autres ressources (internet, anciens sujets)	« L'internet offre des ressources intéressantes pour les enseignants »
		Je modifie les activités du manuel au programme car je les trouve difficiles Je fais d'abord les TD dans le livre au programme	« Le manuel au programme est vaste et les activités sont lourdes »
		J'utilise mon ancien manuel d'élève pour enrichir ma stratégie d'enseignement	« Le manuel d'élève de l'enseignant est une ressource importante »
		Je m'engage dans les exercices de recherche avec plus d'aisance	« La dérivée est difficile au supérieur qu'au secondaire mais ma formation mathématique me rassure »
Introduire la dérivée en un point et sur un intervalle	Le manuel scolaire Le programme officiel	J'introduis la dérivée comme limite du taux de variation	« La dérivée est associée au taux de variation »
		Je vais introduire la dérivée par la vitesse moyenne	« Les applications physiques de la dérivée facilitent son apprentissage »
		Je n'introduis pas la dérivée par la tangente	« La tangente est une conséquence de la définition »
		Je n'utilise pas la visualisation dans le cours de dérivation	« Les représentations graphiques peuvent alourdir le cours »
		J'enseigne la dérivée selon les objectifs du programme Je priorise les contenus liés à l'examen	« Le but de cette année scolaire c'est de réussir à l'examen ministériel »
	Les discussions des forums d'enseignants	Je partage les besoins de mes élèves dans le forum dans le but de trouver des solutions pour les aider à apprendre	« Le forum de mathématiques permet d'améliorer l'enseignement »
	Connaissances antérieures des élèves	Je fais des rappels des connaissances antérieures pour aider les élèves	« Certaines difficultés des élèves avec la dérivée se retrouvent dans les prérequis »

Tableau 27. – Travail documentaire de l'enseignant Bernard

L'introduction de la dérivée en un point et sur un intervalle constitue l'un des objectifs du travail documentaire des enseignants. Pour satisfaire cet objectif, les ressources utilisées par ces deux enseignants sont diverses : d'une part les ressources institutionnelles que sont le manuel et le programme officiel mais également les discussions des forums sans oublier les connaissances antérieures des élèves pour ce qui est de Bernard. D'abord, s'agissant du programme officiel et du manuel scolaire, la vision de l'enseignement de la dérivée s'aligne sur la vision du programme et pour cela, ces enseignants mettent l'accent sur les aspects qui seront évalués dans les examens ministériels. Le fait d'utiliser ces ressources se justifie par le fait que « Le but de cette année scolaire c'est de réussir à l'examen ministériel ». L'examen ministériel est une ressource dont se servent les enseignants pour planifier et enseigner les contenus et donc pour introduire la dérivée en classe. Comme l'enseignant Alex, Bernard et Charles introduisent la dérivée comme la limite du taux de variation comme il est indiqué dans le programme et comme le font aussi les auteurs du manuel. Pourtant, dans le rapport personnel de l'enseignant Bernard, il ressort qu'il allait introduire la dérivée comme une vitesse moyenne car selon lui *« Les applications physiques de la dérivée facilitent son apprentissage ».* On observe donc que les ressources institutionnelles prennent le dessus sur le rapport personnel de l'enseignant et lui permettent ainsi d'introduire la dérivée selon la vision du manuel et du programme. Charles quant à lui a eu une vision alignée dans celle du manuel dès le départ et donc il n'est pas surprenant de le voir introduire la dérivée comme l'indiquent le programme et le manuel. Aussi, nous avons relevé lors des analyses des manuels que la visualisation était très faiblement présente dans le manuel scolaire utilisé par ces enseignants. Dans ce que font les deux enseignants, nous pouvons relever par exemple le fait qu'ils n'introduisent pas le cours en utilisant la tangente ou mieux encore, ils font de la visualisation un sujet tabou dans l'enseignement de la dérivée. En effet, selon les deux enseignants, *« Les représentations graphiques peuvent alourdir le cours »*, cet invariant opérationnel caractérise le rapport personnel de ces enseignants qui s'aligne à la vision du manuel et donc de l'une des principales ressources des enseignants. Ensuite, les deux enseignants, convaincus du fait que *« Le forum de mathématiques permet d'améliorer l'enseignement »* font usage de cette ressource dans leur enseignement pour faciliter l'apprentissage de leurs élèves. Par ailleurs, Bernard discute ainsi des besoins de ses élèves dans le forum d'enseignants auquel il appartient et ceci dans le but de trouver les solutions qui visent à aider les élèves dans leurs apprentissages. Enfin, utiliser les connaissances antérieures des élèves comme ressource visant à améliorer l'enseignement et l'apprentissage fait partie du système de documentation de l'enseignant Bernard et pour cela, les utilisations faites par Bernard et Alex se rejoignent. Ce qui peut justifier l'importance de cette ressource dans les pratiques d'enseignement de la dérivée. Cependant, Charles ne fait pourtant pas mention des connaissances antérieures des élèves comme moyen de revoir ses pratiques d'enseignement. Lors de l'enseignement de la fonction dérivée, lorsque nous lui avons demandé s'il pensait avoir atteint son objectif il nous a répondu que la principale difficulté observée était liée aux « prérequis ». Cependant, aucune mention n'a été fait dans l'optique de faire usage de ces « prérequis » pour améliorer les prochains enseignements.

4.5.3-Synthèse du travail documentaire des enseignants de l'étude

Le manuel scolaire est un outil au cœur du travail des enseignants de mathématiques. Dans les études qui ont porté sur l'utilisation de cet outil dans la salle de classe, nous avons par exemple une étude qui a relevé que les enseignants utilisaient plusieurs manuels pour préparer leurs notes de cours (Gueudet & Trouche, 2010c). À ce jour, la question de savoir comment les enseignants choisissent le manuel avec lequel ils travaillent ne se pose pas dans un contexte comme celui décrit dans cette thèse puisque c'est le gouvernement qui arrête en dernier ressort le manuel à utiliser par la politique du *« livre unique ».* Aussi, il est à noter que le manuel n'est plus la seule ressource des enseignants dans un environnement où coexistent d'autres ressources comme les ressources tirées d'internet. Les usages que font les enseignants de ces différentes ressources sont différents d'un enseignant à l'autre (Gueudet & Lebaud, 2016). Selon ces auteurs, de nombreux enseignants accordent plus d'importance aux exercices proposés dans le manuel comme principal critère de choix d'un manuel. De nos analyses, nous pouvons identifier quelques éléments allant dans ce sens. Les enseignants de l'étude se servent du programme officiel, du manuel scolaire, des discussions dans les forums d'enseignants, de leurs expériences en enseignement pour planifier les cours et puis enseigner en classe (Tableau 23). Le programme officiel et le manuel scolaire constituent les deux principales ressources sur lesquelles s'appuient les enseignants pour planifier et enseigner en classe. Nous avons relevé à cet effet que la principale raison pour laquelle les enseignants avaient une préférence pour ces deux ressources était liée à l'examen ministériel de fin d'année. En effet, comme nous l'avons identifié dans les discours des enseignants, les contenus de ces deux ressources sont non seulement conformes à leurs attentes et également elles leur permettent d'être aux yeux de l'institution à laquelle ils appartiennent de bons sujets (González-Martín & Nseanpa, 2020). Bien que le poids des ressources institutionnelles pèse très lourd sur le choix de ces enseignants, ils ne se limitent pas totalement à ces ressources. Néanmoins, même quand ils vont à la recherche d'autres ressources pour enrichir leur enseignement, ils s'assurent que ces ressources s'alignent sur les ressources institutionnelles et qu'elles leur permettent en même temps de mieux préparer leurs élèves aux examens ministériels.

La participation des enseignants aux forums des enseignants dans le but d'améliorer les enseignements et les apprentissages des élèves rentrent dans ce que certains auteurs appellent « travail collaboratif dans la conception des ressources » (Gueudet & Trouche, 2009a). Les trois enseignants de cette étude accordent de l'intérêt aux discussions issues des forums des enseignants. Cependant, cet intérêt pour le travail collaboratif se résume à l'utilisation et à une collaboration limitée dans la construction des ressources d'enseignement. Les enseignants harmonisent donc leurs visions de l'enseignement des concepts et donc de la dérivée. Certains membres de la communauté produisent des notes de cours, et partagent avec d'autres enseignants : il s'agit dans ce cas d'une mutualisation des ressources (mise en commun de ressources élaborées séparément) et non d'un travail collaboratif et coopératif (Gueudet & Trouche, 2009a). Nous émettons donc l'hypothèse que tous ces enseignants sont des utilisateurs de ces ressources produites par quelques enseignants et ne sont pas inscrits dans une démarche de communauté de pratique.

Du point de vue de notre deuxième cadre théorique, celui de l'approche documentaire du didactique, nous avons indiqué dans le chapitre 2 de cette thèse que tout schéma est composé de quatre éléments : le but de l'activité; les règles d'action; les invariants opérationnels et les déductions. Les données obtenues de ces enseignants permettent d'identifier les trois premiers éléments et pas le quatrième qui porte sur les déductions ou inférences. Il n'est pas possible d'observer cet élément puisque nous n'avons pas fait un retour sur le terrain pour voir comment ces enseignants ont adapté leur document après le cours, ceci correspond aux constatations faites par Gueudet (2017) dans son étude au niveau universitaire. De plus, la genèse instrumentale des enseignants est un processus à double sens entre l'enseignant et la ressource. Ce processus s'organise autour du processus d'instrumentation et d'instrumentalisation qui ont été développé dans le chapitre 2. Nous observons dans les discours des enseignants que le programme officiel et le manuel qui sont deux ressources fondamentales du travail des enseignants influencent leur activité de préparation de cours et même au niveau de l'enseignement. D'abord, nous avons observé que les enseignants de cette étude s'appropriaient facilement les ressources institutionnelles disponibles à leurs utilisations, ils pouvaient les ajuster, les adapter à leurs besoins, les enrichir avec d'autres ressources et les réorganiser selon leurs différents objectifs d'enseignement. Ce processus est reconnu comme celui de l'instrumentalisation et semble avoir été bien présent dans le travail documentaire de nos participants à l'étude. Ensuite, nous avons relevé que le travail des enseignants était aussi façonné par les différentes ressources institutionnelles utilisées. Par exemple, nous avons observé que les enseignants apprennent de l'utilisation de ces ressources dans la mesure où ils peuvent par moment trouver que certaines parties du manuel ne sont pas adaptées à leurs besoins et pour cela ils vont à la recherche de nouvelles ressources. Leurs connaissances de ces ressources se modélisent et évoluent. Le processus d'instrumentation est donc observable dans ce que font ces enseignants car leur travail est effectivement conditionné par ces ressources puisque leur rapport personnel même ne résiste pas aux influences de ceux-ci. Enfin, on constate très vite que les contraintes des ressources prennent le dessus et obligent les enseignants à développer davantage l'aspect concernant l'instrumentation. Cette constatation nous amène donc à conclure que bien que le travail documentaire des enseignants dans cette étude soit dynamique c'est-à-dire incluant les processus d'instrumentalisation et d'instrumentation, il nous semble que leur travail documentaire est dominé par le processus d'instrumentation à cause des contraintes exercées par les ressources institutionnelles et les examens ministériels.

UTILISATION DES RESSOURCES PAR LES ENSEIGNANTS ET RAPPORT PERSONNEL

Objectifs	Sous-objectifs	Ressources utilisées	Règles d'action (Façon d'utiliser les ressources)	Invariants opérationnels (Raisons de les utiliser de cette façon)	Participants	Exemples
Préparer les notes de cours		Le programme officiel	J'introduis la dérivée selon les exigences du programme Je n'introduis pas la dérivée par la tangente à cause de l'exigence du programme	Les contenus sur la dérivée sont bien organisés dans le programme (OPB) Il est important de suivre le programme (SP)	E1, E2, E3	« L'ordre de présentation de la dérivée dans le programme officiel est très bien articulé (OPB) » … « tel que prévoit le programme, les objectifs, il y a l'équation de la tangente qui n'est pas laissé au hasard » (E1) « C'est vrai que premièrement enseigner la dérivée en 1ère C déjà c'est d'abord le programme. Tout ce qu'on fait est toujours en référence au livre programme. Donc on ne va pas aller puiser dans un document, dans un programme autre qu'on nous a assigné depuis le depuis de l'année »(E2) « Les ressources institutionnelles c'est le cadre délimité, l'État délimite la manière dont on doit enseigner la dérivée, nous n'avons pas le choix de changer les méthodes » (E3)
			Je dois suivre le programme pour mieux préparer mes élèves à leur examen de fin d'année	Le but ce niveau scolaire c'est de réussir à l'examen ministériel (EM)	E1, E2, E3	« Et sur ce, le but pour les élèves c'est de valider leur examen de fin d'année. Donc tout ce qui a trait à la dérivée doit être ce qui vient souvent à l'examen ou bien ce que l'examen officiel demande, c'est beaucoup plus ça » (E1) « ce qui parait plus important pour moi c'est d'abord leur examen car vous savez si un élève ne réussit pas son examen le parent dira que le professeur a mal fait son travail » (E2)
	Préparer les évaluations	Le manuel scolaire	J'utilise plusieurs manuels pour adopter mon approche d'introduire la dérivée Je ne suis pas forcément l'ordre du manuel Je prends les exercices et les exemples dans les manuels au programme et autres ressources Je prépare aussi mes évaluations Je ramène toujours les informations issues des ressources dans le sens du programme Je fais d'abord les TD dans le livre au programme	Le manuel au programme est bien ordonné Le manuel est un support, mais l'enseignant doit aller au-delà du manuel	E1, E2, E3	« C'est vrai qu'*Excellence* est un peu bien structuré, on ne peut pas le nier » (E1) « Je prends *Excellence* juste comme un support qui me permet donc de préparer mon cours, donc ça m'aide dans ce sens que dans ses activités et dans les objectifs à atteindre je dois être dans les mêmes objectifs » (E1) « Pour moi le manuel est un complément. Ce que je recherche dans ces autres documents c'est la manière de formuler des exemples et des exercices et dans la formulation des sujets d'évaluation » (E2)
			J'utilise mon ancien manuel d'élève pour enrichir ma stratégie d'enseignement	Le manuel d'élève de l'enseignant est une ressource importante	E2	« J'ai d'abord mon ancien livre de 1ère C, CIAM que j'ai toujours. Avec ce livre j'ai commencé la notion de dérivée, j'ai appris la notion de dérivée avec ce livre. Quand je regarde ce livre, je me rappelle la manière dont l'enseignant enseignait la notion de dérivée et ce que j'ai retenu puis j'essaie d'aller vers le même sens que lui » (E2)
	Proposer des exercices de travaux dirigés		Je modifie les activités du manuel au programme car je les trouve difficiles Je fais d'abord les TD dans le livre au programme	Le manuel au programme est vaste et les activités sont lourdes	E2, E3	« Vous savez le manuel qu'on a au programme est tellement vaste. C'est-à-dire que si tu dis que tu vas approcher la notion de dérivée en regardant le livre excellence, tu vas perdre trois heures sans finir la première leçon. Quand je lis ça, leurs

						activités qui sont tellement lourdes là, j'essaie de les contracter en deux ou trois lignes » (E2)
Enseigner la dérivée en un point et sur un intervalle		Le manuel scolaire Le programme officiel	J'introduis la dérivée à l'aide de la limite du taux de variation, c'est une exigence du programme Je n'introduis pas la dérivée par la tangente	La dérivée a plusieurs sens : C'est la pente, la vitesse ou le taux de variation	E2, E3	« La dérivée, je l'associe plus à une vitesse… On enseigne le taux de variation par exemple en seconde et en $1^{ère}$ maintenant on approche la limite avec le taux de variation…Oui pas seulement la vitesse. La dérivée peut être une pente d'une courbe ». (E2) « Pour moi la dérivée… c'est d'abord le résultat de la limite du taux de variation. Donc je vois ça comme la limite du taux de variation d'une fonction »…« Moi c'est ce que je pense pour l'instant, la dérivée est associée à la vitesse ». … « la dérivée et la tangente sont intimement liées, il y a une relation qu'il faut bien établir » (E3)
				La tangente est une conséquence de la définition	E2, E3	« Pour moi la tangente apparait comme une conséquence. La tangente ne sert pas à introduire la dérivée «la tangente n'intervient pas dans la présentation de ce que c'est que le nombre dérivé…pour moi la tangente est une conséquence de la définition » (E2), (E3)
			J'introduis la dérivée par la tangente J'ai introduit le nombre dérivé par le calcul de la limite du taux de variation	La tangente sert à introduire la dérivée	E1	« Je pense plutôt que c'est pour enseigner la dérivée en un point, on passe par une tangente on cherche sa position limite pour vraiment l'appeler tangente et à partir de là…généralement on appelle ça aux enfants taux de variation de la fonction. Maintenant on calcule la limite de ce taux de variation qu'on appelle le coefficient directeur de la tangente en ce point ». (E1)
			J 'amène les élèves pendant l'enseignement à voir comment on calcule la dérivée d'une fonction pour déterminer l'équation de la tangente, étudier le sens de variation et dresser le tableau de variation	Dans l'enseignement, il est important de voir que la dérivée sert à représenter les fonctions	E1, E2, E3	« Au vu du programme éducatif camerounais pour le cas de la classe de 1ère. Je pense que l'élève doit être principalement capable de déterminer l'équation de la tangente à une fonction en un point, étudier le sens de variation… dresser le tableau de variation d'une fonction ». (E1, E2, E3)
			Je vais introduire la dérivée par la vitesse moyenne	Les applications de la dérivée servent à motiver les élèves	E1, E2, E3	« Pour les motiver à apprendre la dérivée, je parlais ici de la physique, les applications physiques parce que pour qu'ils comprennent vraiment la notion de dérivée, on va entrer un peu en physique pour leur montrer que le nombre dérivé c'est la pente. »
			Je dois chaque fois revenir sur les prérequis	Certaines difficultés des élèves avec la dérivée se retrouvent dans les prérequis	E1, E2, E3	« J'ai constaté que beaucoup ne maitrisaient pas ce qu'est la continuité » …« j'ai eu quelques difficultés qu'ils ont rencontrées notamment la première difficulté c'est le calcul de la limite. Je me suis rendu compte que pour les élèves il est plus facile de montrer qu'une fonction est dérivable que de montrer qu'elle n'est pas dérivable » (E3) « Il y a les problèmes de conjugaison avec les radicaux, les problèmes de factorisation. Ces deux éléments sont reliés aux problèmes d'équation et non à la dérivée, calculer le discriminant, factoriser » (E2)
			Je n'utilise pas la visualisation dans le cours de dérivation	Les représentations graphiques peuvent alourdir le cours sur la dérivée	E2, E3	« C'est aussi bien de faire avec les représentations graphiques mais j'ai vu qu'en le faisant le cours serait plus lourd… Quand je vais voir le cours sur les fonctions toutes ces représentations graphiques je vais les faire » (E2)

						« j'utilise le graphe lorsqu'il s'agit de faire l'application sur des variations des fonctions » dérivée a un lien étroit avec l'approche théorique de la limite du taux d'accroissement » (E3)
			Je définis et je pratique sur plusieurs exemples	Le fait de travailler des exemples aide pour l'apprentissage		« la méthode qui passe le plus c'est donner la définition et donner beaucoup d'exemples, traiter avec eux en classe » (E1)
			J'amène les élèves pendant l'enseignement à voir comment on calcule la dérivée d'une fonction en un point et à faire le lien avec l'équation de la tangente à la courbe en ce point.	Les élèves doivent apprendre la dérivée comme pente de la tangente	E1	« Dans le contexte camerounais, les enfants doivent beaucoup plus maitriser la dérivée comme le coefficient directeur de la tangente de la fonction en un point »
			Je n'enseigne pas la dérivée à travers les cas pratiques Je donne beaucoup d'exercices sur les cas pratiques pour que les élèves eux-mêmes découvrent je préfère faire le cours directement avec peut-être la partie non expérimentale	Les problèmes de modélisation sont difficiles pour les élèves	E1	« Dans le cas pratique les enfants sont généralement perdus parce qu'ils ne sont pas familiers avec ….les problèmes de modélisation…. pour des situations de vie »
			Je n'enseigne pas les approximations	Les problèmes d'approximation sont difficiles pour les élèves	E1	« Bon le problème de l'approximation est aussi touffu car les élèves ne sont pas familiers avec les problèmes d'approximation et aussi parce que c'est un peu compliqué de mettre l'approximation en application »
			Je recherche les autres ressources pour faciliter mon enseignement	L'enseignement de la dérivée n'est pas facile	E3	« L'enseignement de la dérivée n'est pas facile. Je vais ailleurs dans le but de trouver des méthodes plus faciles, plus abordables pour pouvoir transmettre cette notion. Donc me contenter uniquement du livre programme et du livre au programme serait une mauvaise conduite intellectuelle. Il faut rechercher d'autres moyens pour faciliter l'enseignement de la dérivée ».
		Internet	Je recherche sur internet les activités sur les applications sociales de la dérivée	L'internet offre des ressources intéressantes pour les enseignants	E1, E2, E3	« Le plus souvent je les rencontre sur internet. la valeur ajoutée est au niveau des applications dans la société puisqu'il y a des documents qui font le lien entre la dérivée et même la croissance économique. J'ai vu des documents comme ça. Il y a des applications ou on voit directement les applications de la dérivée dans la vie active, des choses qu'on ne développe pas dans les manuels ici au Cameroun » (E3) « Mon premier support pour préparer mes cours c'est l'internet » (E1)
		Forums d'enseignants	Je partage les besoins de mes élèves dans le forum dans le but de trouver des solutions pour les aider à apprendre	Le forum de mathématiques permet d'améliorer l'enseignement	E1, E2, E3	« J'ai aussi des collègues qui sont un peu de partout avec qui on échange des cours pendant les congés…Au nord, au sud, à l'ouest… on s'échange des cours, on fait des cours uniformes qu'on partage. Quand on finit de les concevoir, un collègue se charge alors de les unifier et puis on a maintenant tout le cours. Maintenant avec tout ça je peux sortir quelque chose pour laquelle l'enfant ne doit pas souffrir pour comprendre ». (E2) « Le tout c'est d'être de meilleurs enseignants pour ces enfants, de mieux les préparer à leur examen de fin d'année » (E1)

		Expériences des années antérieures	Je me corrige toujours par les expériences des années antérieures	L'expérience des années précédentes permet d'améliorer les enseignements	E1, E2, E3	« Mon expérience d'enseignement me permet de modifier chaque fois mon cours pour l'adapter pour la compréhension des élèves » (E2)
		Commentaires des élèves (Gueudet & Trouche, 2010a)	Je recueille les perceptions de mes élèves à propos du cours afin de les aider à apprendre	Les observations des élèves sur le cours permettent de les aider à mieux apprendre	E1	« Dans ma façon d'enseigner j'aime écouter des enfants. J'aime envoyer un enseignant intermédiaire aller demander aux élèves qu'est-ce que je fais et qui ne les arrange pas…Et c'est à partir de ces difficultés par exemple si un enfant me dit 'monsieur je ne comprends pas le nombre dérivé parce que le jour là j'avais peur de te poser la question', il y a certains qui disent ça, d'autres disent que c'est parce qu'un ancien leur avait dit que la dérivée en un point est difficile…donc voilà autant de questions … j'essaie de trouver des pistes de solutions »

Tableau 28. – Rapport personnel et travail documentaire des enseignants

4.6-Analyse des pratiques d’enseignement de la dérivée

Dans cette partie de notre travail, nous nous intéressons aux pratiques des enseignants dans l’enseignement de la dérivée en classe. Pour parvenir à cette étape, nous avons présenté dans les sections précédentes les analyses des manuels et du programme officiel, nous avons rendu compte du rapport personnel des enseignants qui a été tiré des entretiens préalables, ce qui a permis également de rendre compte de quelle manière les enseignants de cette étude interagissaient avec des ressources diverses en mettant en exergue les raisons qui ont fondé leurs décisions. Ici, nous tentons de répondre à la deuxième partie de la question suivante : *« Q_3 : Comment le rapport personnel des enseignants influence-t-il leur utilisation des ressources et leurs pratiques d’enseignement de la dérivée? ».* En analysant les pratiques des enseignants, nous allons ainsi faire le lien entre le rapport personnel des enseignants, leurs utilisations des ressources et leurs pratiques en classe. Nos analyses s’appuient sur le cadre théorique de la TAD (Chevallard, 1999) qui a été largement commenté dans le paragraphe 2.2. du chapitre 2. L’analyse des pratiques des enseignants que nous amorçons ici, nous l’espérons va nous permettre d’élargir notre compréhension sur les objectifs, les règles d’action ou techniques et les raisons de faire des enseignants que l’on pourrait retrouver dans les praxéologies didactiques des enseignants.

En guise de rappel, sur le plan méthodologique, les observations en classe ont été précédées des entretiens préalables et suivies des entretiens post-enseignement. Une fois que nous avions fini avec les aspects liés à la préparation des leçons, nous avons pris un rendez-vous pour aller observer en classe ce qui allait être fait. Pendant les différentes séances d’observation, l’objectif de notre caméra était focalisé sur ce que faisait l’enseignant et nous étions attentifs à d’autres gestes et aux échanges entre l’enseignant et les élèves. Après chaque séance d’observation, nous avons eu une rencontre avec l’enseignant pour discuter de ce qui venait d’être fait. Par exemple, il leur était demandé de nous dire ce qu’il pensait du travail qui venait d’être fait, avez-vous le sentiment d’avoir atteint votre objectif? Est-ce que la tâche choisie a servi à la réussite du cours et pourquoi l’avoir choisi en tout cas etc… Nous n’avons pas la prétention d’avoir fait le tour de la question sur le travail de ces enseignants en classe, néanmoins, nous avons ouvert des pistes qui vont permettre de comprendre leurs choix. Nous focalisons notre attention sur les pratiques des enseignants visant à introduire la dérivée en un point et l’introduction de la dérivée sur un intervalle (fonction dérivée). Nous avons transcrit l’ensemble de tout ce qui a été fait en classe.

4.6.1-Transcription des processus didactiques

Deux aspects sont identifiés dans notre travail, à savoir introduire la dérivée en un point puis utiliser cette introduction pour conceptualiser la dérivée définie sur un intervalle communément appelée la fonction dérivée. Nos analyses s'inspirent des travaux de Barbé et al. (2005) et se structurent autour des épisodes, des moments didactiques, de l'acteur principal, des objets mathématiques en jeu et des activités didactiques observées. Les épisodes peuvent être par exemple : *« calculer la dérivée en un point », « déterminer une équation de la tangente »*; un moment didactique peut être le moment technique ou l'évaluation; pendant ce moment, l'acteur principal peut être l'enseignant ou l'élève alors que les objets mathématiques que l'enseignant utilise puis les activités mathématiques observées. En guise d'exemple, nous avons un extrait de ce type de tableau présenté ci-dessous (Tableau 24) dans lequel l'épisode considéré est le moment où l'enseignant définit le nombre dérivé d'une fonction.

Épisode	**Moment didactique**	**Acteur principal**	**Objets mathématiques**	**Activités didactiques observées**
Définition du nombre dérivé en un point	Institutionnalisation	Enseignant Élève	Fonction Intervalle Taux de variation Limite	**Définition**. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. **Définition** 1 : La fonction f est dite dérivable en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l \in IR$. l est appelé nombre dérivé de la fonction f en x_0 et on note $l = f'(x_0)$. **Définition** 2 : La fonction f est dite dérivable à gauche de x_0 si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in IR$ et son nombre dérivé à gauche est noté $f_g{}'(x_0)$. **Définition** 3 : La fonction f est dite dérivable à droite de x_0 si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in IR$ et son nombre dérivé à gauche est noté $f_d{}'(x_0)$.

Tableau 29. – Extrait du tableau sur les processus didactiques

Le moment didactique correspond au moment de l'institutionnalisation pendant lequel l'enseignant donne la définition institutionnelle du nombre dérivé à travers des moments d'interactions où par des techniques de questionnement, l'enseignant amène les élèves à imaginer la définition voulue, dans certains cas cela fonctionne tandis que dans d'autres, c'est l'enseignant qui devra communiquer le savoir à retenir parce que les élèves n'ont pas pu l'imager malgré l'exploration d'une activité de mise en route. Puisqu'il est question du nombre dérivé, les objets mathématiques en jeu sont les fonctions, les intervalles, le taux de variation et la limite d'une fonction. L'activité didactique observée dans ce cas est la définition du nombre dérivé telle qu'elle est présentée dans la ressource utilisée par l'enseignant, notamment son manuel. Ce premier tableau ne fait pas l'objet d'une analyse particulière dans notre travail. Cependant, il permet d'identifier le séquencement de la leçon en épisodes avec les différents acteurs et les objets mathématiques utilisés pour réaliser chacune des tâches d'enseignement. Les différents processus didactiques observés sont disponibles dans les annexes de cette thèse (Voir annexes 4, 5 et 6). Étant donné que notre cadre d'analyse est la TAD, l'attention est davantage portée sur les six moments qui caractérisent les praxéologies didactiques. Le second tableau s'appuie fondamentalement sur le premier tableau et permet de décrire en détail comment les enseignants enseignent. Ensuite, nous portons un regard sur les types de tâches, les techniques, les technologies et la théorie qui entourent chaque organisation mathématique (Barbé et al., 2005). La deuxième analyse va permettre d'identifier les types de problèmes, les techniques, la technologie et la théorie qui entourent chaque organisation mathématique. En bref, toutes ces analyses vont rendre compte de la manière dont les enseignants de cette étude orientent et guident les élèves dans la construction de nouveaux concepts, cela peut être par exemple comment les élèves vont construire la technique qui permet de calculer le nombre dérivé d'une fonction en un point etc. Ces analyses vont nous conduire vers la description des pratiques enseignantes et de leurs explications (DeSaint-André et al., 2010).

4.6.2-Analyse du processus d'enseignement

L'objectif poursuivi dans cette partie est d'identifier les objets mathématiques qui ont été plus ou moins présents dans la classe au moment de nos observations. Nous suivons à cet effet la démarche employée par Barbé et al. (2005) et nous recherchons les différents moments (implicites ou explicites), le lien entre ces différents moments, les praxéologies didactiques développées en termes de types de tâches, techniques, éléments technologiques et théoriques. Pour comprendre la mise en place du processus d'enseignement, nous ferons appel aux données issues des entretiens réalisés préalablement avec les enseignants dans lesquels nous avons évoqué les préparations des cours, l'utilisation des ressources d'enseignement et les difficultés des élèves (Barbé et al., 2005). Entre autres, nous observons avec quelles ressources l'enseignant met son enseignement en œuvre, en particulier, nous questionnons les représentations de nature sémiotique (graphes, tableau, etc.) utilisées par l'enseignant. Nous avons eu trois sessions de cours par enseignant, par ailleurs les deux premières sessions étaient pour nous celles les plus importantes puisque nous voulions identifier finalement les deux phases de l'introduction du nombre dérivé et de la fonction dérivée.

Parfois, la troisième rencontre en classe a souvent eu plus d'importance que la deuxième selon que notre objectif voulu pendant cette observation était atteint ou pas. La première session était destinée à la dérivabilité d'une fonction en un point (T1) tandis que pendant la deuxième session, il s'agissait du calcul de la fonction dérivée (T2). Les sous-types de tâches identifiées dans les processus d'enseignement comprennent :

T11 : Calculer le nombre dérivé d'une fonction en un point

T12 : Interpréter graphiquement le nombre dérivé d'une fonction en un point

T13 : Étudier la dérivabilité et la continuité d'une fonction en un point

T21 : Calculer la fonction dérivée d'une fonction

T22 : Calculer la dérivée d'une fonction élémentaire

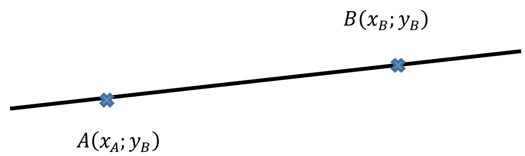
T23 : Calculer la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, de l'inverse, de la composée de la racine carrée et de la puissance

Toutes ces sous-tâches ont été observées dans les pratiques de chacun des enseignants de cette étude. Nous pouvons observer globalement que le but ultime visé est le calcul de la dérivée à l'aide des formules dont l'élaboration n'est pas l'objet d'enseignement. Avant la première session, tous les enseignants avaient enseigné la notion de limite qui allait être utilisée. Rendus à ce niveau, les élèves auraient donc appris à calculer la limite d'un quotient différentiel (fonction rationnelle) dans le chapitre précédent et le taux de variation moyen étudié pendant l'année scolaire précédente. L'ensemble de toutes les tâches et sous-tâches qui ont été présentes dans les pratiques enseignantes observées ont été regroupées dans les tableaux en annexe (Annexe 7, 8 et 9). L'analyse des différentes séquences didactiques contenues dans chacune des sessions et pour chacun des enseignants est présentée ci-dessous.

4.6.2.1-Processus d'enseignement de l'enseignant Alex

4.6.2.1.1-Nombre dérivé : construction du bloc pratique

Pour débuter la première leçon, l'enseignant représente une droite *(AB)* où les points sont définis par leurs coordonnées $x\ et\ y$. Il demande aux élèves de donner la règle qui permet de calculer le coefficient directeur de la droite (AB).



Enseignant : « Quel est le coefficient directeur de la droite (AB)? Quel est le rapprochement que l'on peut faire avec le taux de variation ? » Aucun élève ne parvient à donner la bonne réponse.
Enseignant : « Si vous ne pouvez pas me dire c'est quoi le taux de variation, alors on commence. Le coefficient directeur est souvent le taux de variation de la droite (AB). On écrit $\frac{Y_B-y_A}{x_B-x_A}$ ».

Élève : « ahah oui la pente »

Une fois que l'enseignant a fait ce rappel, les élèves peuvent se souvenir du calcul de la pente de la droite. Cependant, le schéma représenté précédemment n'aide pas l'enseignant à faire le lien entre la figure présentée et la règle de calcul écrite ensuite. L'enseignant peut donc commencer le contenu sur la dérivée en annonçant les objectifs du chapitre puis en annonçant aux élèves qu'ils auront besoin de leurs connaissances sur le taux de variation et les limites pour comprendre le cours. L'enseignant porte au tableau l'activité de mise en route suivante :

« La courbe (C)ci-contre est la représentation graphique de la fonction f définie par f(x) $= -\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}$. On désigne par A le point de (C_f) de coordonnées $(-3; 2)$.

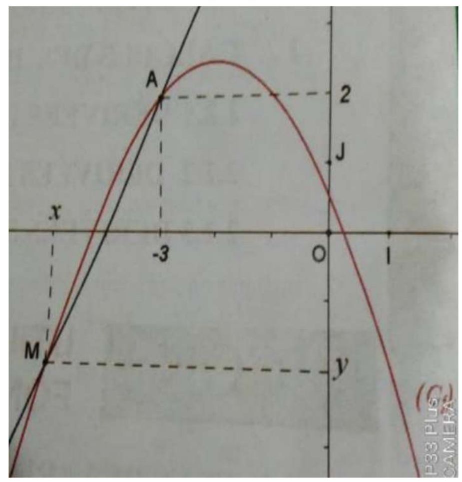
a) vérifier par calcul que le point $A\,(-\,3\,;\,2)$ appartient à la courbe de f.

b) justifier que pour x différent de – 3 le coefficient directeur de la droite (AM) est $\frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)} = -\frac{x+1}{2}$.

c) calculer la limite de $\frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)}$ lorsque x tend vers -3.

d) vers quel point se rapproche le point M lorsque x tend vers – 3 ? En déduire la position limite de la droite (AM) lorsque x tend vers -3.

e) Représenter la droite (T) position limite de M quand x tend vers -3 ».



Les élèves découvrent ainsi cette activité qui pour certains semble nouvelle s'ils n'ont pas eu l'habitude de lire leur manuel de mathématiques. On suppose que ceux des élèves qui ont l'habitude de travailler dans leur manuel et qui anticipent sur les contenus à apprendre ne sont pas surpris face à cette activité ceci n'est que notre propre hypothèse, nous restons néanmoins sur le fait que c'est le premier moment de la rencontre avec l'activité, laquelle activité a été reprise intégralement dans le manuel officiel utilisé par l'enseignant. Une fois de plus, comme dans le manuel, l'enseignant ne donne aucune raison pour laquelle la dérivée est enseignée à ses élèves, bien plus, aucun élève n'a demandé à l'enseignant par exemple pourquoi on apprend la dérivée, quelle est sa raison d'être par exemple. La question a) est une question de vérification. Les questions b) et c) sont considérées comme le véritable moment où se déroule l'exploration et pendant celle-ci, les élèves, sous la conduite de l'enseignant élaborent ce qui peut être appelée une technique embryonnaire. Cependant, à ce niveau, il n'est pas possible pour l'élève de savoir quel type de problème il va résoudre avec cette technique embryonnaire. Analysons les échanges entre l'enseignant et ses élèves une fois l'activité résolue :

Enseignant : « on demande de représenter la droite (T) position limite du point M sur la courbe. Tout le monde sait ici… quelle est la pente de la droite (AM), quel est son coefficient directeur d'après tout ce qu'on a fait ? »

Élève : « C'est égal à 1 »

Enseignant : « Donc son coefficient directeur est 1. C'est donc la droite qui va passer par le point A et qui va toucher le point A en un seul point. Voici la droite (T) » L'enseignant trace la droite (T) au tableau puis …

Enseignant : « Vous voyez que ça touche la courbe en un seul point, elle est aussi appelée la tangente de la courbe au point d'abscisse – 3. Maintenant qui peut me faire le rapprochement entre ce qu'on appelle le coefficient directeur de la droite (AM) qu'on a trouvé égale à 1 qui est quoi ? la pente de la droite (T) qui est la tangente à la courbe au point d'abscisse – 3

Là encore l'expression nombre dérivé n'apparaît pas. L'élève sait qu'il a calculé le coefficient directeur de la droite (AM) et pas plus que cela. Même si l'enseignant parle de la droite tangente qui a pour coefficient directeur 1, aucun lien ne peut être visible dans les écrits et le discours de l'enseignant entre le type de tâche qui consiste à calculer le nombre dérivé de la fonction, le nombre dérivé dont l'interprétation géométrique est la pente de la droite tangente et la droite tangente représentée elle-même. Le type de tâche est donc implicite dans l'activité de mise en route et la praxéologie du calcul du nombre dérivé de la fonction $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}$ en $x_0 = -3$ se résume à ce type de tâche implicite et à l'exploration d'une technique embryonnaire que nous pouvons observer dans le tableau ci-dessous (Tableau 25) :

T_{11}	Calculer le nombre dérivé de la fonction $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}$ en $x_0 = -3$
τ_{11}	- Calculer le taux de variation (coefficient directeur ou quotient différentiel) $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ - Remplacer x_0 dans le quotient par -3 - Si $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe alors - Simplifier ce quotient par le facteur $(x+3)$ - Calculer la limite du quotient simplifié $\lim\limits_{x\to -3} \frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)}$

Tableau 30. – Construction du bloc pratique dans le calcul du nombre dérivé-Alain

4.6.2.1.2-Bloc technologico-théorique dans le calcul du nombre dérivé

Les éléments qui vont constituer le bloc technologie/théorie de la praxéologie du calcul du nombre dérivé en un point se mettent en place dès l'entame de la leçon. Pour calculer le nombre dérivé de la fonction $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}$ en un point A dont l'abscisse est $x_0 = -3$, il faut au préalable s'assurer que le point en lequel on veut déterminer le nombre dérivé est bien sur la courbe de la fonction. Dans ce qui a été observé, les élèves avaient la réponse à cette question donc, ils ont exprimé dans leurs mots, ce que l'enseignant a résumé et que nous avons présenté dans l'Annexe 4. Pour justifier le travail qui a été fait dans le bloc pratique, voici les échanges entre l'enseignant et ses élèves :

Enseignant : « À la ligne, résumé. On va donc résumer ce qu'on vient de faire ». L'enseignant note la définition au tableau : « Soit f une fonction définie sur un intervalle K de $\mathbb{R}$, $a \in K$. On dit que f est dérivable en a si $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. Cette limite est appelée nombre dérivé de f au point a et est noté $f'(a)$. On a donc $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ ». L'enseignant continue en expliquant :

Enseignant : C'est-à-dire pour signifier que la fonction est dérivable au point d'abscisse a et que son nombre dérivé est $f'(a)$, c'est pour cela que cette limite doit être finie. Par exemple pour le cas que nous avons fait précédemment, quel est le nombre dérivé quand x tend vers – 3 ?

Élèves : « le nombre dérivé quand x tend vers – 3 est égal à 1 »

Enseignant : « qui est aussi le coefficient de la tangente au point d'abscisse – 3 ».

Nous observons donc que c'est après avoir achevé l'activité et en présence de la définition que les élèves peuvent se rendre compte de la nouvelle notion en jeu. En d'autres termes, c'est à ce niveau que les élèves découvrent le type de tâche, la technique à utiliser et dans ce cas précis, la définition constitue le principal support pour mieux comprendre la technique embryonnaire construite précédemment. Au niveau des ressources sémiotiques, il faut relever que l'activité proposée aux élèves lors de la première rencontre comprend trois types d'ostensifs: un ostensif algébrique, un ostensif graphique en appui de la tâche décrite et appuyée par le discours de l'enseignant qui reprend l'énonce et on voit apparaître un autre ostensif, cette fois-ci un ostensif verbal orale. Pendant l'exploration de l'activité avec les élèves nous observons que les ostensifs s verbale et algébrique sont les plus présents dans la manière dont l'enseignant conduit sa classe. Au moment de répondre aux questions d) et e) de l'activité, L'enseignant se réfère à son graphe en pointant sur le point M.

Enseignant : « lorsque x se rapproche de – 3 le point M se rapproche du point A car x va suivre un déplacement. La question suivante, vers quel point se rapproche le point M lorsque x tend vers – 3 ? Donc le point M se rapproche du point A lorsque x tend vers – 3. La position limite du point M est A ». Puis il continue par :

Enseignant : « on demande de représenter la droite (T) position limite du point M sur la courbe. Tout le monde sait ici… quelle est la pente de la droite (AM), quel est son coefficient directeur d'après tout ce qu'on a fait ? »

Élève : « C'est égal à 1 »

Enseignant : « Donc son coefficient directeur est 1. C'est donc la droite qui va passer par le point A et qui va toucher le point *A* en un seul point. Voici la droite *(T) »* L'enseignant trace la droite *(T)* au tableau.

Enseignant : « Vous voyez que ça touche la courbe en un seul point (Fig.20), elle est aussi appelée la tangente de la courbe au point d'abscisse – 3. Maintenant qui peut me faire le rapprochement entre ce qu'on appelle le coefficient directeur de la droite *(AM)* qu'on a trouvé égale à 1 qui est quoi ? la pente de la droite (T) qui est la tangente à la courbe au point d'abscisse – 3 ».

Par sa technique de questionnement et par le fait que l'enseignant se réfère de temps en temps au graphe qui accompagne l'activité, on observe donc qu'il y a des moments de conversion entre les ostensifs s verbale orale et graphique. Pendant ces interactions, c'est l'enseignant qui domine la discussion puisque les élèves donnent quelques réponses correctes et l'enseignant doit s'assurer d'orienter ces réponses vers l'atteinte de ses objectifs. Nous notons également qu'il y a un passage de l'ostensif algébrique à l'ostensif graphique, notamment quand l'enseignant fait le lien entre le coefficient directeur trouvé (taux de variation) et la pente de la droite tangente. C'est donc une conversion de l'ostensif qui s'opère en ce moment. Cependant, au moment où l'enseignant institutionnalise le nombre dérivé, il n'y a plus de représentation graphique qui vient en appui à la définition proposée qui se trouve dans le manuel. Par ailleurs, puisque nous avions accès aux notes de cours de l'enseignant, nous avons pu relever que le graphe utilisé par l'enseignant en appui à la définition du nombre dérivé n'est pas en adéquation avec le discours (représentation algébrique) que véhicule la définition. En effet, dans la définition, les variables utilisées sont $f(x) - f(a)$ et $x - a$ pourtant dans le graphe en soutient à cette définition, on fait usage de $f(a+h) - f(a)$ et $\Delta x = (a+h) - a$. Ceci peut être mêlant dans la mesure où les notations utilisées dans la définition et dans l'ostensif ne sont pas concordantes ou bien n'expriment pas les mêmes informations pour un élève non-expert en mathématiques.

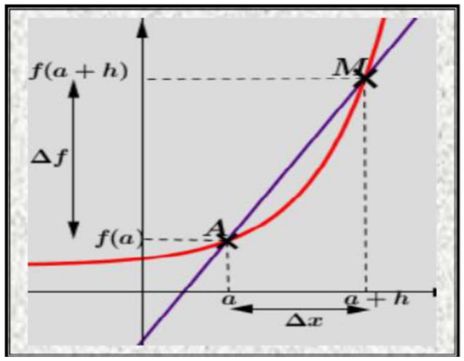


Figure 21. – Représentation du nombre dérivé selon la définition

En somme, nous pouvons relever qu'en ce qui concerne l'introduction du nombre dérivé en un point, la praxéologie didactique comprend quatre moments : le moment de la première rencontre avec la tâche, le moment de l'exploration et de l'élaboration d'une technique embryonnaire, le moment de l'institutionnalisation et le moment de l'évaluation. Nous avons identifié dans la pratique de l'enseignant un moment après l'institutionnalisation où les élèves doivent appliquer dans certaines tâches la technique de calcul du nombre dérivé. Ces tâches ont été résolues en classe par les élèves et en interaction avec leur enseignant. S'agissant de la praxéologie mathématique, nos observations des sections 4.5.2.1 et 4.5.2.2 nous amènent à dire que la praxéologie mathématique de l'introduction du nombre dérivé se résume au tableau 26 suivant :

T'_{11}	Calculer le nombre dérivé de la fonction f en un point quelconque $(a; f(a))$
τ_{11}	- Calculer le taux de variation (coefficient directeur ou quotient différentiel) $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ - Remplacer a dans le quotient par sa valeur - Si $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe alors - Factoriser et simplifier ce quotient par le facteur $(x-a)$ - Calculer la limite du quotient simplifié $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$
θ_{11}:	« Soit f une fonction définie sur un intervalle K de $\mathbb{R}$, $a \in K$. On dit que f est dérivable en a si $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. Cette limite est appelée nombre dérivé de f au point a et est noté $f'(a)$. On a donc $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ »
Θ_{11}	Éléments de la théorie de l'analyse mathématique

Tableau 31. – Praxéologie mathématique de calcul du nombre dérivé-Alain

4.6.2.1.3-Type d'exemple proposé à la suite de la praxéologie

L'identification des moments didactiques présents dans cette séquence relève les moments tels que :

- Le moment de la première rencontre où l'enseignant a présenté la nouvelle organisation mathématique en jeu et où les élèves ont découvert le type de tâche qui consistait à calculer le nombre dérivé d'une fonction;
- Le moment de l'exploration du type de tâches pendant lequel l'enseignant et les élèves ont assisté à la co-construction d'une technique embryonnaire sans qu'initialement les élèves ne sachent vers où l'enseignant les conduisait;
- Le moment technico-théorique où l'enseignant a dévoilé la définition du nombre dérivé, et pour cela nous avons observé que ce moment était confondu avec le moment de l'institutionnalisation;
- Le moment de l'évaluation qui sera présenté ci-dessous et qui correspond au moment pendant lequel l'élève et l'enseignant s'interrogent sur les connaissances qui ont été construites à ce niveau du processus.

Dans l'exemple proposé par l'enseignant, on retrouve les deux sous-types de tâches qui ont été développées dans l'activité de mise en route.

Exemple 1 : On donne la fonction $g(x) = \frac{2x+3}{x-2}$

Type de tâche	Montrer que la fonction $g(x) = \frac{2x+3}{x-2}$ est dérivable en $x_0 = 1$
Technique	$\lim_{x\to 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1}$ $\lim_{x\to 1} \frac{\frac{2x+3}{x-2} + 5}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{7x-7}{x-2}}{x - 1}$ $\lim_{x\to 1} \frac{(7x-7)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 1} \frac{7(x-1)}{(x-1)(x-2)}$ $\lim_{x\to 1} \frac{7}{x-2} = -7$ Donc $g'(1) = -7$ et pour cela la fonction g est dérivable en $x_0 = 1$.
Types de tâches	Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse $x_0 = 1$.
Technique	$g'(1) = -7$ et $(T) : y = g'(1)(x-1) + g(1)$. $g(1) = -5$ donc $(T) : y = -7(x-1) + (-5)$ Ainsi la tangente a pour équation $(T) : y = -7x + 2$

Tableau 32. – Praxéologie mathématique 1 de calcul du nombre dérivé-Alain

Exemple 2 : On donne la fonction $h(x) = \sqrt{x}$

Type de tâche	Montrer que la fonction $h(x) = \sqrt{x}$ est dérivable en $x_0 = 2$
Technique	$\lim_{x\to 2} \frac{h(x) - h(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$ $\lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})}{(x-2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})}$ $\lim_{x\to 2} \frac{x - 2}{(x-2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ Donc $h'(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ et pour cela la fonction h est dérivable en $x_0 = 2$.
Types de tâches	Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse $x_0 = 2$.
Technique	$h'(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ et $(T) : y = h'(1)(x-1) + h(1)$. $h(2) = \sqrt{2}$ donc $(T) : y = \frac{1}{2\sqrt{2}}(x-2) + \sqrt{2}$ Ainsi la tangente a pour équation $(T) : y = \frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{\sqrt{2}}{2}$

Tableau 33. – Praxéologie mathématique 2 de calcul du nombre dérivé-Alain

À travers la mise en œuvre de la définition du nombre dérivé, l'enseignant donne ainsi une occasion aux élèves de développer la technique de calcul du nombre dérivé qui était jusqu'ici embryonnaire (Tableaux 31-32). Dans la recherche des solutions aux deux sous-types de tâches, les élèves se trouvent dans la situation où ils subissent une évaluation qui s'articule autour de l'institutionnalisation qui vient d'être faite. En effet, si le savoir institutionnalisé est justifié par l'existence des rapports institutionnels, la question qui se pose quand l'élève est en face d'une telle activité est de savoir comment peut-on caractériser son rapport personnel au regard du rapport institutionnel existant, nous y reviendrons par ailleurs dans les discussions des résultats de cette recherche.

4.6.2.1.4-Type de tâche : interprétation du nombre dérivé en un point

Lors des entrevues préalables, Alex a affirmé que la dérivée avait plusieurs significations parmi lesquelles la pente. Pour cela, il considérait que les élèves devraient apprendre la dérivée comme pente de la droite tangente. L'observation de ce qui est fait en classe par cet enseignant nous semble opposé à sa vision personnelle de ce que les élèves sont sensés apprendre à propos de la dérivée. Cette observation nous semble justifier nos premières constations selon lesquelles le rapport personnel de l'enseignant a cédé la place au rapport institutionnel. Lors de l'introduction du nombre dérivé dans les sections 4.5.2.1 et 4.5.2.2, nous avons pu relever comment l'enseignant a essayé de faire le lien entre le nombre dérivé et la pente de la droite tangente. La tangente n'était pas au départ de la détermination du nombre dérivé, au contraire, la tangente apparaît lorsqu'il est question de faire une interprétation de la limite du taux de variation moyen. Deuxième observation : dans l'activité de mise en route, il n'est guère question de déterminer l'équation cartésienne de la tangente pourtant, la praxéologie mathématique associée à ce type de tâche vise à rechercher une équation cartésienne de la droite tangente ayant le nombre dérivé pour pente. La détermination de l'équation de cette tangente est assujettie au calcul du nombre dérivé. Ainsi, la technique qui permettrait d'atteindre cet objectif comprend d'une part celle qui aura permis de calculer le nombre dérivé et une deuxième technique, celle qui permet d'écrire l'équation d'une droite connaissant la pente et un point de la droite. Aussi, ces deux observations renforcent l'idée selon laquelle la tangente est simplement une conséquence de la définition et non un objet à la base de la construction du nombre dérivé. Pour cela, la praxéologie associée à la tangente se résume dans le tableau 29 ci-dessous :

$T12$:	Interpréter graphiquement le nombre dérivé d'une fonction en un point
τ_{11}	- Calculer la limite du quotient simplifié $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ - Remplacer dans l'équation (T) : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$
θ_{12} :	« Graphiquement une fonction est dérivable en un réel a lorsque (C_f) admet une tangente non parallèle à l'axe des ordonnées au point d'abscisse a. En posant (T) cette tangente, elle est l'unique tangente à (C_f) au point A d'abscisse a et de pente $f'(a)$. Ainsi son équation réduite est de la forme (T) : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ »
Θ_{11}	Éléments de la théorie de l'analyse mathématique Par deux points ne passe qu'une et une seule droite

Tableau 34. – Praxéologie mathématique – tangente -Alain

À la fin de cette session, nous n'avons aucune certitude à propos de la conception des élèves au sujet de la droite tangente car l'enseignant le précise avec force quand il affirme que « *Le point M se rapproche du point A lorsque x tend vers – 3. La position limite du point M est le point A. la droite qui passe par le point A et qui va toucher la courbe en ce point. Vous voyez que ça touche le point A et la courbe en un seul point : elle est aussi appelée la droite tangente ».* La conception des élèves au sujet de la droite tangente serait donc restée la même, à savoir une droite qui touche en un seul point la courbe de la fonction. Nous émettons l'hypothèse qu'il serait donc difficile pour les élèves de dépasser leurs connaissances au sujet de la tangente apprise dans un cours de géométrie. Nous avons vu dans la section 4.2 notamment au niveau des analyses des manuels que la tangente était présentée sous sa perspective ponctuelle et globale, ces deux perspectives sont aussi visibles dans les pratiques d'enseignement d'Alex car l'étude de la tangente d'un point de vue local est absente de ce qui a été observé. La perspective locale s'observe par exemple dans l'étude de l'approximation affine d'une fonction à l'aide d'une droite, or l'enseignant a déclaré dans son rapport personnel que les problèmes d'approximation étaient difficiles pour les élèves et qu'en même temps il était difficile de l'enseigner dans des situations concrètes. Effectivement cette partie des contenus à enseigner est absente des pratiques d'enseignement observées. Finalement, nous pouvons observer que dans la praxéologie qui a ainsi été développée, la tâche qui a servi de tremplin pour introduire le nombre dérivé ne constitue pas un réel défi pour l'élève qui devrait découvrir une nouvelle connaissance, plutôt comme un moyen d'expliquer la technologie qui viendra de la définition.

4.6.2.1.5-Construction de la praxéologie mathématique du calcul de la dérivée

Le calcul de la dérivée constitue les deuxièmes et troisièmes sessions du cours. Pendant celles-ci, nous avons gardé le même dispositif et nous étions attentif à la manière dont l'enseignant mettait en place les éléments de la praxéologie du calcul de la fonction dérivée. Comme dans la section 4.6.2.1.1, nous voulons caractériser les différents moments où se construisent les blocs pratique et technologique. Lors de la première session, l'enseignant avait commencé par faire un petit rappel de connaissance sur le coefficient directeur avant que les élèves ne découvrent le nombre dérivé. Pour cette deuxième session, le nombre dérivé est la connaissance sur laquelle s'appuie l'enseignant pour arriver au calcul de la fonction dérivé. Nous notons néanmoins que l'enseignant ne réactive pas cette connaissance pourtant dans l'activité de découverte, il n'est que question de cela. Considérons le type de tâche qui consiste à *« calculer le nombre dérivé de la fonction* $f(x) = -3x^2 + 5x - \frac{1}{2}$ *en un point d'abscisse quelconque* x_0*».* Voici les échanges entre l'enseignant et les élèves au moment de la construction de la technique.

Enseignant : « On va voir comment on trouve la fonction. Vous voyez qu'en tout moment il faut maitriser la notion de limite, on ne peut pas se passer de la notion de limite. On commence toujours par le domaine de définition de la fonction. Quel est le domaine de définition de cette fonction ? »

Élève : IR

Enseignant : « Soit x_0 un nombre réel.

$a)\ \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$$= \frac{-3x^2 + 5x - \frac{1}{2} - \left(-3x_0^2 + 5x_0 - \frac{1}{2}\right)}{x - x_0}$$

$$= \frac{-3x^2 + 5x - \frac{1}{2} + 3x_0^2 - 5x_0 + \frac{1}{2}}{x - x_0}$$

$$= \frac{-3x^2 + 5x + 3x_0^2 - 5x_0}{x - x_0}$$

$$= \frac{-3(x^2 - x_0^2) + 5(x - x_0)}{x - x_0}$$

$$= \frac{-3(x - x_0)(x + x_0) + 5(x - x_0)}{x - x_0}$$

$$= -3(x + x_0) + 5$$

$$b)\ \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} [-3(x + x_0) + 5]$$

$$=-3(x_0 + x_0) + 5 = -6x_0 + 5$$

Si je vous pose la question de savoir quelle est la fonction dérivée de la fonction *f en* x_0? »

Élève : « $-6x_0 + 5$ »

Enseignant : « ok, on prend d'abord ceci, je vais vous montrer une autre façon de trouver ça rapidement. Vous voyez que la limite intervient un peu partout. Il faut bien maitriser les propriétés de la limite, comment on manipule ça d'accord? J'ai envie que chacun me dise quel est le domaine de définition de la fonction g? »

À ce niveau de la transposition, l'élève sait que la fonction dérivée de la fonction en x_0 est $-6x_0 + 5$. L'enseignant annonce qu'il y aura une autre méthode qui va faciliter le calcul de la fonction dérivée. Cette méthode annoncée est certainement l'utilisation des formules de dérivation. C'est pour cela que, bien que la fonction dérivée ait été introduite sur la base de la limite du quotient différentiel, la fonction dérivée elle-même n'est pas encore définie. Deuxièmement, l'information que cache cette présentation laisse observer que la fonction dérivée en x_0 se calcule sur la base de la même technique qui a permis de trouver précédemment le nombre dérivé d'une fonction pour un nombre fini donné. Cependant, nous avons noté que l'enseignant n'a pas évoqué ce fait, il a supposé que les élèves eussent compris ou alors qu'ils avaient fait le lien entre le calcul du nombre dérivé en un point d'abscisse donnée et le calcul du même nombre dérivé en un point d'abscisse quelconque. Rien ne peut nous permettre d'affirmer en ce moment que les élèves ont compris que la fonction dérivée généralise le calcul du nombre dérivé en un point. Ceci ressemble à ce qui a été observé dans le travail de Park (2015) que nous avons cité dans le chapitre 1 de cette thèse. Dans ce travail, cette auteure avait observé que des enseignants, dans leurs pratiques avaient supposé compris le lien entre les différents ostensifs de la dérivée lors du passage de la dérivée en un point à la dérivée sur un intervalle. Elle en avait conclu que cela pourrait être dû au degré de confiance qu'avaient ces enseignants quant à leurs connaissances des contenus et de la manière d'apprendre de leurs élèves. Nous pensons également que dans le cas qui est le nôtre, l'enseignant semble trouver évident pour ses élèves de faire le lien car lui, il en est capable. Donc si nous résumons notre observation ici, nous pouvons relever que la fonction dérivée d'une fonction est la limite d'un quotient différentiel. Pourtant, la définition que propose l'enseignant au moment de l'institutionnalisation sur la fonction dérivée est la suivante : *« Soit f une fonction définie sur un intervalle I. L'ensemble de dérivabilité d'une fonction f est l'ensemble des nombres réels x_0 de D_f en lesquels f est dérivable et pour cela, la fonction $x \mapsto f'(x)$ est appelée fonction dérivée ou dérivé de f ».* Cette définition ne fait plus appel à la notion de limite, elle est reprise intégralement de la formulation faite par le manuel de l'enseignant, ce qui confirme nos premières observations selon lesquelles cet enseignant est un bon sujet de son institution puisqu'il se limite au contenu que propose le manuel. À ce niveau de nos analyses, il n'est pas possible de dégager une praxéologie pour le calcul de la fonction dérivée. En effet, la démarche qui a été utilisée ci-haut est reprise pour le calcul de la dérivée des fonctions élémentaires, et pour cela, l'enseignant reprend exactement la démarche proposée par le manuel pour établir la fonction dérivée des fonctions élémentaires en remplaçant simplement dans l'expression du nombre dérivé obtenu en fonction de x_0, la variable x_0 par la variable x (Park, 2015). Notre hypothèse qui se dégage est que l'enseignant dans sa démarche a un objectif à atteindre : arriver à faire appliquer les formules de dérivation qui vont par la suite ouvrir la porte à l'étude des variations des fonctions. Nous justifions cette hypothèse par le fait que depuis que l'enseignant a présenté la fonction dérivée aux élèves, aucun exemple n'a été proposé en appui à ce qui a été fait précédemment. Nous observons simplement que l'enseignant a proposé à ses élèves deux tableaux qui résument d'une part les fonctions dérivées des fonctions élémentaires et d'autres parts des formules qui permettent de calculer la fonction dérivée d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de fonctions. Cela nous amène à résumer dans le tableau ci-dessous (Tableau 34) ce qui de notre point de vue semble être le modèle praxéologique appliqué au calcul de la fonction dérivée :

T_{21}	Calculer la fonction dérivée d'une fonction
τ_{21}	$-$ Calculer le quotient $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $-$Calculer $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $-$Remplacer x par x_0
θ_{11}:	Appliquer les différentes formules de dérivation
Θ_{11}	Éléments de la théorie de l'analyse mathématique

Tableau 35. – Praxéologique du calcul de la fonction dérivée-Alain

4.5.2.2–Processus d'enseignement de l'enseignant Bernard

4.6.2.2.1-Nombre dérivé : construction du bloc pratique

Bernard annonce aux élèves les contenus à étudier et à y observer attentivement, on constate que l'enseignant se situe dans une logique selon laquelle l'étude de la dérivation va déboucher au calcul de la fonction dérivée des fonctions polynômes, rationnelles et des fonctions avec des radicaux. En effet, ces types de fonction sont celles qui sont étudiées à ce niveau scolaire. Ces types de fonctions sont celles qui font l'objet des évaluations sommatives et par ricochet l'examen ministériel de fin d'année. Aucune généralisation de la fonction dérivée ne semble être prévue par l'enseignant. Pour cet enseignant, *« en trouvant la dérivée d'une fonction on a déjà beaucoup d'informations sur cette fonction »,ce qui nous pousse à nous demander* de quelles informations s'agit-il si ce n'est d'étudier le sens de variation de la fonction, rechercher les extrémums et donner une allure de la courbe de la fonction. L'enseignant porte donc au tableau l'activité d'apprentissage :

« Considérons les fonctions suivantes : $g(x) = \sqrt{x-2}$, $f(x) = x^2 - 4x$, $h(x) = x|x-1|$

1. *Déterminer les ensembles de définition des fonctions f et g*
2. *Calculer les limites suivantes :* $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ >}} \frac{g(x)-g(2)}{x-2}$ *et,* $\lim\limits_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}$
3. *Écrire* $h(x)$ *sans symboles de valeur absolue et calculer les limites des quotients suivants :* $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ >}} \frac{h(x)-h(1)}{x-1}$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ <}} \frac{h(x)-h(1)}{x-1}$ ».

Une telle activité n'est pas étrangère pour ces élèves car comme l'enseignant nous l'a expliqué, le cours sur le calcul des limites venait d'être achevé. Donc les élèves pouvaient évidemment calculer ces limites. Par la suite, ils devaient donner une interprétation du nombre obtenu ou même lorsque cette limite n'existe pas. C'est donc à travers le calcul de la limite du quotient différentiel que les élèves vont découvrir le nombre dérivé. Quand nous avons demandé à l'enseignant la raison du choix de cette activité, l'enseignant a affirmé qu'il était question de *« faire comprendre que la notion de dérivée en fait part de la notion de taux de variation qu'ils ont vue en classe de seconde C ».* On observe ici que l'enseignant se situe dans les orientations véhiculées par les programmes officiels et le manuel scolaire. Cette première observation fait donc de cet enseignant un bon sujet de l'institution. Analysons maintenant les échanges entre l'enseignant et les élèves. Pendant la présentation de l'activité et les échanges en classe, l'enseignant a servi de guide pour ses élèves. Cependant, nous ne pouvions pas à ce moment de l'activité porter des observations car l'activité n'était pas problématisante même si pendant la résolution nous avons noté que les élèves ont été très actifs et que l'enseignant est intervenu lorsqu'ils se sont heurtés à certaines difficultés liées à la valeur absolue et aux radicaux. Il était donc difficile pour les élèves et pour nous-mêmes de savoir quel était l'objectif visé. Après la résolution de l'activité, il devenait plus facile d'identifier les objectifs visés par l'enseignant à travers les échanges que nous présentons ci-dessous :

Enseignant *: « en classe de seconde, que représentait le quotient* $\frac{h(x)-h(1)}{x-1}$ *? »*

Élèves *: « taux d'accroissement »*

Enseignant *: « on appelait ça* $T = \frac{h(x)-h(a)}{x-a}$ *et si* $T > 0$ *alors* h *est croissante,* $T < 0$ *alors* h *est décroissante et si* $T = 0$ *alors* h *est constante. Pour la fonction* g*, on voit que* g *n'admet pas une limite en 2 quand on applique la limite du taux de variation au point d'abscisse 2 on constate que* g *n'admet pas de nombre dérivé en 2 car on a trouvé l'infini. La fonction* f *admet un nombre dérivé en 3 qui est 2. Enfin la fonction* h *admet deux nombres dérivés distincts qui sont – 1 et 1, à gauche ça vaut -1 et à droite c'est 1. On peut conclure que* g *n'est pas dérivable en 2,* f *est dérivable au point d'abscisse 3 et son nombre dérivé est 2,* h *est dérivable à gauche et à droite de 1 mais n'est pas dérivable en 1 car les deux nombres dérivés sont distincts ».*

L'activité d'apprentissage proposée aux élèves traite du sous-type de tâche qui consiste à *« calculer le nombre dérivé d'une fonction en un point ».* Ce sous-type de tâche comprend aussi deux autres sous-tâches qui consistent à calculer le nombre dérivé à gauche et à droite, ce qui permet de justifier qu'une fonction peut être continue en un point sans pour autant y être dérivable. L'enseignant a fait le choix de traiter toutes ces sous-tâches au même moment. Lors de notre entretien après le cours, il nous a expliqué que cette activité lui permettait d'avoir plusieurs conclusions. Autrement dit, cette activité débouche sur trois éléments technologiques et comme nous l'avons relevé dans la section 4.5.2.1, ces éléments technologiques sont à la base de l'activité et constituent essentiel le moment technique puisque les élèves doivent appliquer ces formules pour le calcul de la dérivée. Nous supposons que l'élève pourrait désormais calculer le nombre dérivé d'une fonction en suivant la démarche présentée par son enseignant, mais cette démarche n'est pas encore clarifiée et les définitions qui vont être présentées à la suite de ces échanges entre l'enseignant et ses élèves vont dévoiler ce qui sera effectivement la technique de calcul du nombre dérivé et en même temps la technologie justifiant cette technique.

4.6.2.2.2-Bloc technologico-théorique dans le calcul du nombre dérivé

Les définitions et les propriétés proposées par l'enseignant à la fin de l'exploration de l'activité constituent les éléments du bloc technologie/théorie de la praxéologie du calcul du nombre dérivé en un point, du calcul du nombre dérivé à gauche et à droite. Notons qu'une fois l'enseignant présente ce qu'il considère être la technique de calcul du nombre dérivé, les éléments de la praxéologie sont donnés aux élèves comme des recettes qu'ils devront désormais appliquer sans se soucier. La démarche de Bernard s'apparente à celle d'Alain dans la mesure où les éléments de technologies sont les principaux indicateurs qui permettent à l'élève de se rendre compte de la technique à utiliser lorsqu'ils auront à faire un type de tâche précis. Nous n'avons pas été surpris de constater que l'enseignant ne fait pas usage des ressources graphiques pour appuyer l'apprentissage du nombre dérivé même lorsqu'il a évoqué le nombre dérivé à gauche et à droite où l'interprétation graphique conduit à l'existence à un point anguleux. Peut-être a-t-il fait le choix de l'évoquer dans la section réservée à la droite tangente sur laquelle nous y reviendrons. Les ostensifs verbale et algébrique constituent donc les seules ressources sémiotiques utilisées par l'enseignant au moment de la première rencontre autant qu'au moment de l'institutionnalisation.

Nous résumons dans le tableau 35 suivant les éléments de la praxéologie développées pour le calcul du nombre dérivé :

T'_{11}	Calculer le nombre dérivé de la fonction f en un point quelconque $(x_0; f(x_0))$
τ_{11}	Calculer la limite du quotient simplifié $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
θ_{11}:	Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. **Définition** 1 : La fonction f est dite dérivable en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l \in IR$. l est appelé nombre dérivé de la fonction f en x_0 et on note $l = f'(x_0)$.
Θ_{11}	Éléments de la théorie de l'analyse mathématique

Tableau 36. – Praxéologie mathématique de calcul du nombre dérivé-Bernard

Trois principaux moments didactiques constituent cette phase de construction d'une technique en ce qui concerne le calcul du nombre dérivé : le moment de la première rencontre avec la tâche, le moment technique, le moment de l'institutionnalisation et le moment de l'évaluation. Nous avons présenté les deux premiers moments dans le paragraphe précédent. En somme, nous pouvons relever qu'en ce qui concerne l'introduction du nombre dérivé en un point, la praxéologie didactique comprend quatre moments. Nous avons identifié dans la pratique de l'enseignant un moment après l'institutionnalisation où les élèves doivent appliquer dans certaines tâches la technique de calcul du nombre dérivé. Ces tâches ont été résolues en classe par les élèves et en interaction avec leur enseignant. Il nous a semblé que cette phase de la pratique de l'enseignant correspondait à la phase d'évaluation puisque le but visé était de s'assurer que les élèves avaient compris la réalisation du type de tâche en jeu.

4.6.2.2.3-Type d'exemple proposé à la suite de la praxéologie

Voici deux exemples choisis par l'enseignant pour amener les élèves à utiliser adéquatement la technique de calcul du nombre dérivé. Ces exemples sont calqués sur ceux qui ont été proposés dans le manuel (Tableaux 36-37).

Exemple 1 : On donne la fonction $f(x) = x^2 + x$

Type de tâche	Déterminer le nombre dérivé de la fonction $f(x) = x^2 + x\ en\ \ a = -1$
Technique	$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)}$ $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + x - 0}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x(x+1)}{x+1}$ $\lim\limits_{x \to -1} (x) = -1$ Donc $f'(-1) = -1$ et pour cela la fonction f est dérivable en $x_0 = -1$.
Technologie	Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. **Définition** 1 : La fonction f est dite dérivable en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l \in IR.\ l$ est appelé nombre dérivé de la fonction f en x_0 et on note $l = f'(x_0)$.
Théorie	Éléments de la théorie de l'analyse mathématique

Tableau 37. – Praxéologie mathématique 1 de calcul du nombre dérivé-Bernard

Exemple 2 : On donne la fonction $g(x) = \sqrt{x}$

Type de tâche	Montrer que la fonction $g(x) = \sqrt{x}$ est dérivable en $a = 1$
Technique	$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{1}}{x - 1}$ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)}$ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{\sqrt{x} + 1} = \dfrac{1}{2}$ Donc $g'(1) = \frac{1}{2}$ et pour cela la fonction g est dérivable en $x_0 = 1$.
Technologie	Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. **Définition** 1 : La fonction f est dite dérivable en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l \in IR.\ l$ est appelé nombre dérivé de la fonction f en x_0 et on note $l = f'(x_0)$.
Théorie	Éléments de la théorie de l'analyse mathématique

Tableau 38. – Praxéologie mathématique 2 de calcul du nombre dérivé-Bernard

Il s'agit ici d'une mise en application de la définition qui a été fournie aux élèves comme moyen de justifier la technique de calcul du nombre dérivé. A travers ces deux exemples, l'enseignant voudrait s'assurer que l'élève est capable d'appliquer adéquatement la démarche qui lui a été présentée précédemment. Il s'agit ici d'une simple manipulation algébrique qu'une réelle volonté de conceptualisation. Il est possible que le désir de l'enseignant soit celui d'aligner le rapport des élèves à celui de l'institution.

4.6.2.2.4-Type de tâche : interprétation du nombre dérivé en un point

Même si Bernard a dans son rapport personnel fait état de ce que la dérivée avait plusieurs significations, nous n'avons pas observé dans sa pratique d'enseignement des indicateurs qui nous amèneraient à penser qu'il tient compte des divers aspects de la dérivée dans ses pratiques d'enseignement. En effet, dans la section 4.3.2.2, nous avons observé que le rapport personnel de cet enseignant était difficile à identifier. Nous avons noté à cet effet que l'enseignant mettait l'emphase sur l'aspect calculatoire de la dérivée dans le but de trouver le sens de variations d'une fonction. au moment d'introduire la dérivée, l'enseignant s'aligne simplement avec la vision du programme et du manuel scolaire. Son propre rapport personnel étant difficile à identifier, son interprétation du nombre dérivé s'aligne également dans la vision véhiculée par le manuel : la tangente est une interprétation du nombre dérivé. Pour cela, l'objectif poursuivi ici est la détermination d'une équation réduite de cette tangente pourtant le type de tâche en lui-même ne consiste pas à trouver l'équation de la tangente mais à faire le lien entre le nombre dérivé et la droite tangente. Or ce lien est totalement absent dans le discours de l'enseignant dans la praxéologie qu'il développe en présence de ses élèves. L'enseignant parle de $f'(x_0)$ comme étant le coefficient directeur, cependant, l'interprétation géométrique du nombre dérivé est « pente » pourtant ce terme n'apparait pas dans les échanges entre l'enseignant et ses élèves. L'idée de tangente qui est véhiculée dans la pratique d'enseignement de Bernard est celle d'une droite qui touche la courbe en un seul point et il ne serait nullement question d'une tangente dans un cours de calcul, notion à partir de laquelle il serait possible de construire le nombre dérivé. Ces observations nous amènent à la praxéologie suivante ci-dessous 34:

$T12$:	Interpréter graphiquement le nombre dérivé d'une fonction en un point
τ_{11}	Calculer $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l \in IR.$
θ_{12} :	« Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert *I*. *(C_f)* la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé. Si f est dérivable en x_0 alors la courbe *(C_f)* admet au point d'abscisse x_0 une tangente dont le coefficient directeur est $f'(x_0)$. Cette tangente a pour équation (T): $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ ».
Θ_{11}	Éléments de la théorie de l'analyse mathématique Par deux points ne passe qu'une et une seule droite

Tableau 39. – Praxéologie mathématique- tangente -Bernard

4.6.2.2.5-Construction de la praxéologie mathématique du calcul de la dérivée

À l'entame de cette deuxième session, il est question de l'introduction du calcul de la fonction dérivée d'une fonction. Nous allons explorer les échanges de discours entre l'enseignant et ses élèves lors de cette première rencontre. L'enseignant porte au tableau l'activité suivante :

Considérons la fonction f définie par $f(x) = 2x^2 - x + 1$. Soit x_0 un nombre réel. Montrer que pour tout $x \neq x_0$ on a $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 2(x + x_0) - 1$ En déduire $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ en fonction de x_0. Que peut-on conclure?

La tâche est résolue par l'enseignant et voici la démarche proposée :

Enseignant : « Montrons que pour tout $x \neq x_0$ on a $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 2(x + x_0) - 1$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{2x^2 - x + 1 - (2x_0^2 - x_0 + 1)}{x - x_0}$$

$$= \frac{2x^2 - x + 1 - 2x_0^2 + x_0 - 1}{x - x_0}$$

$$= \frac{2(x - x_0)(x + x_0) - (x - x_0)}{x - x_0}$$

$$= \frac{(x - x_0)[2(x + x_0) - 1]}{x - x_0}$$

$$= 2(x + x_0) - 1$$

- Déduisons $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ en fonction de x_0.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} [2(x + x_0) - 1]$$

$= 2(x_0 + x_0) - 1 = 4x_0 - 1$. Donc, $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 4x_0 - 1$ ».

Enseignant : « On vous demande de conclure. Qu'est-ce qu'on pourra conclure ici? Que représentent $4x_0 - 1$? »

Élèves : « le nombre dérivé de f en x_0 »

Enseignant : « On peut conclure que $4x_0 - 1$ est la dérivée de la fonctions f au point x_0. Pour $x = x_0$ on a $4x - 1$ est la dérivée de la fonction f en x ».

Les observations que nous faisons ici ne sont pas éloignées de celles faites pour l'enseignant Alain et par ricochet celles avancées dans l'article de Park (2015). Pour y arriver, commençons par noter que l'enseignant ne dit pas aux élèves au départ à quoi va servir le calcul de la limite du quotient différentiel en un point quelconque. Nous constatons que le moment de la construction de la technique est dominé par l'enseignant qui fait une présentation magistrale de la leçon et puis procède par un questionnement pour amener les élèves à faire des liens. Donc ici, il n'est pas encore question véritablement de la fonction dérivée, mais du nombre dérivé d'une fonction en un point quelconque. Ce qui est aussi important de relever c'est que la fonction dérivée se calcule à l'aide de la même formule qui a permis de calculer le nombre dérivé précédemment. Dans les échanges entre l'enseignant et ses élèves, nous n'observons pas ce lien entre le nombre dérivé en un point et la fonction dérivée. Donc aucune généralisation n'est envisageable. Comme dans les études précédentes, après avoir trouvé le nombre dérivé de la fonction en fonction de x_0, l'enseignant remplace x_0 par x et indique aux élèves que la nouvelle expression est celle de la fonction dérivée.

La définition de la fonction dérivée qui va suivre n'a aucun lien avec le travail de découverte qui a été conduit par l'enseignant. En effet, l'institutionnalisation qui s'en suit est la suivante : *« Soit f une fonction. L'ensemble de dérivabilité de la fonction f est l'ensemble des nombres réels pour lesquels f est dérivable. f' est appelée dérivée ou fonction dérivée de f ».* Cette définition est tirée du manuel de l'enseignant et ne fait plus appel au calcul de la limite. L'enseignant n'apporte aucune information pouvant permettre aux élèves de comprendre pourquoi la limite a disparu dans la définition. Comme dans le cas de l'enseignant Alain, à ce niveau, la technique de calcul de la fonction dérivée consiste à calculer la limite d'un quotient différentiel puis à remplacer x_0 par x. Cependant, l'enseignant ne s'en sert pas pour établir les dérivées des fonctions élémentaires comme observé précédemment, il propose un tableau aux élèves qui résume les dérivées des fonctions élémentaires. Les élèves peuvent appliquer ce tableau à des exemples choisis par l'enseignant. Le plus important ici pour l'enseignant c'est que les élèves soient capables de mettre en application les formules de dérivation. On observe donc que l'idée n'est pas tant que les élèves puissent comprendre ce qu'est la dérivée mais d'appliquer les formules de dérivation. Nous résumons donc ci-dessous (Tableau 35) le tableau praxéologique du calcul de la fonction dérivée issu de la pratique d'enseignement de Bernard.

T_{21}	Calculer la fonction dérivée d'une fonction
τ_{21}	$-$ Calculer le quotient $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $-$Calculer $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $-$Remplacer x par x_0
θ_{11}:	Appliquer les différentes formules de dérivation
Θ_{11}	Éléments de la théorie de l'analyse mathématique

Tableau 40. – Praxéologique du calcul de la fonction dérivée-Bernard

4.6.2.3-Processus d'enseignement de l'enseignant Charles

L'enseignement de Charles débute par une communication sur le bien-fondé de la dérivation. L'enseignant annonce le contenu qui sera appris, puis il fait le lien entre le calcul des vitesses instantanées vue en physique, le calcul de la vitesse moyenne vu en classe de troisième et la dérivation qui fait l'objet du nouveau cours. En effet, selon le programme d'enseignement de physique de la classe de seconde C[27], les élèves apprennent dans le module dédié aux mouvements et interactions mécaniques comment décrire et analyser un mouvement en termes de grandeurs cinématiques et en termes d'actions mécaniques ou de variation de la quantité de mouvement. Dans ce module, les élèves étudient effectivement la vitesse moyenne, la vitesse instantanée et l'accélération. C'est donc de bon augure si l'enseignant revient sur ces notions pour aborder le cours sur la dérivation. Le cours sur la dérivation étant précédé du cours de calcul des limites, l'enseignant propose une activité qui permet aux élèves de revoir le calcul de quelques fonctions qui s'apparentent aux fonctions rationnelles. Par exemple, il est demandé aux élèves de calculer $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2-9}{x+3}$ sans aucune autre forme de justification. En fait nous y voyons un quotient différentiel et nous supposons que l'enseignant va introduire son cours par le calcul d'un taux de variation. Contrairement aux deux enseignants qui précèdent, Charles utilise une situation problème en lien avec la notion de vitesse. Explorons les interactions entre l'enseignant et ses élèves :

Situation problème : Un véhicule en mouvement rectiligne a une équation horaire $x(t) = 3t + 2$ où t est en seconde, déterminer sa vitesse à l'instant $t = 5min$.

Enseignant : comment peut-on résoudre ce problème ?

---

[27] https://livrescience.files.wordpress.com/2019/05/programme-physique-2nde-c.pdf

Élève : on peut faire par substitution de t dans l'équation. Puis on divise le résultat par le temps

Enseignant : on va remplacer t par 5 dans l'expression de x qui est supposé être le déplacement. Si on remplace t par 5 dans l'expression de $x(t)$ vous aurez comme ça la distance parcourue après 5min.

Élève : puisqu'on sait que la formule de la vitesse c'est la distance sur le temps, on va d'abord faire une substitution dans l'équation et ensuite…

Enseignant : « tu dis vitesse égale distance sur le temps $\frac{x(t)}{t}$, puis on fait quoi par la suite ? »

Élève : « après avoir trouvé $x(t)$ on divise par le temps pour trouver la vitesse »

Enseignant : « donc $\frac{3t+2}{t}$….»

Élève : « on remplace la valeur de t dans l'équation et puis après avoir trouvé on divise par le temps donné »

Enseignant : « Je vois, c'est une démarche logique. J'ai vu quand même en classe de 3ème on parlait du mouvement uniforme, du mouvement non uniforme, il y a un moment où la vitesse est constante et un moment où la vitesse n'est pas constante. C'est intéressant ce que tu as dit, est ce que quelqu'un d'autre aurait une autre proposition ? D'accord nous pouvons commencer notre activité d'apprentissage, tu as raisonné comme un physicien. Alors : On va laisser cette activité entre parenthèse, on va vérifier tout à l'heure si ce qu'il a proposé est correct…»

À ce niveau, l'enseignant tente de problématiser la détermination de la vitesse connaissant l'équation horaire en fonction du temps. Quand on se réfère aux connaissances des élèves sur la vitesse selon les réponses proposées, on arrive à la situation où l'élève doit évaluer l'expression « $3t + 2$» lorsque $t \ = 5 \ min = 300s$ puis calculer le quotient $\frac{3\times300+2}{300} = 3{,}0066$. La vitesse serait donc 3,0066m/s. Cependant, l'enseignant ne pose pas le problème de la vitesse en termes de vitesse moyenne encore moins de vitesse instantanée pour une valeur quelconque de t. On se rappelle que l'enseignant dans son rapport personnel à la dérivée nous a dit que la dérivée était aussi associée à la notion de vitesse. Le choix fait par ce dernier d'engager les élèves dans une situation faisant appel à la vitesse rejoint en effet une partie de sa vision de ce que représente la dérivée. Nous allons maintenant analyser le processus de construction du bloc pratique du calcul du nombre dérivé.

4.6.2.3.1-Nombre dérivé : construction du bloc pratique

L'encadré ci-dessous donne l'activité de mise en route qui permet à l'enseignant de faire découvrir par les élèves le nombre dérivé en un point.

Activité d'apprentissage

Soient f et g deux fonctions définies par $f(x) = 3x + 2$ et $g(x) = \sqrt{x}$

1. *Déterminer leurs domaines de définition*
2. *a. Calculer $\lim_{x \to 120} f(x)$ et $\lim_{x \to 0} g(x)$*

   b. Les fonctions f et g sont-elles continues en 120 et 0 respectivement ?

3. a. Calculer $\lim_{x \to 120} \frac{f(x)-f(120)}{x-120}$ et $\lim_{x \to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$

b. laquelle des deux limites est-elle un réel ?

4. En physique, la vitesse instantanée en un instant t_0 est définie par la grandeur $x'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}$ où $x(t)$ est le déplacement en fonction du temps t.

a) Si $x(t) = 3t + 2$ et $t_0 = 5\ min$ alors déduire la vitesse du mobile $x'(t)$ après 5 min de mouvement.

b) Que représente $x'(300)$ pour $x(t)$?

Notre première constatation est que la fonction $f(x) = 3x + 2$ est semblable à l'équation horaire de la situation-problème précédente, nous nous attendons à ce que le lien soit fait entre la vitesse et le nombre dérivé en un point. D'entrée de jeu, cette activité ne pose pas un réel problème puisqu'il est simplement question de faire certains calculs de limites. Notre souhait serait de voir émerger le lien entre deux aspects de la dérivée, ce qui constituera un contraste important entre le choix fait par cet enseignant et ceux faits par les autres enseignants. Explorons les échanges qui ont eu lieu entre l'enseignant et ses élèves au moment de résoudre cette activité :

1. Déterminons le domaine de définition.

On a $f(x)$ existe pour tout réel x car f est une fonction polynôme donc $Df = IR$.

$g(x) = \sqrt{x}$ existe si et seulement si $x \geq 0$, donc $D_g = [0; +\infty[$

2. Calculons les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 120} f(x) = \lim_{x\to 120}(3x+2) = 3\times 120 + 2 = 362 \text{ et } \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 120}\sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$$

b. Les fonctions f et g sont continues en x_0; f est continue en 120 car $\lim_{x\to 120} f(x) = f(120)$; de même, la fonction g est continue en 0 car $\lim_{x\to 0} g(x) = g(0)$.

3. a. Calculons :

$$\lim_{x\to 120}\frac{f(x)-f(120)}{x-120} = \lim_{x\to 120}\frac{3x+2-362}{x-120} = \lim_{x\to 120}\frac{3x-360}{x-120} = \lim_{x\to 120}\frac{3(x-120)}{x-120} = 3\ ;$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{\sqrt{x}\ -\sqrt{0}}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{\sqrt{x}(-\sqrt{x})}{x(-\sqrt{x})} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{-x}{-x\sqrt{x}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

b. Parmi les deux limites laquelle est réel? $\lim_{x\to 120}\frac{f(x)-f(120)}{x-120} = 3 \in IR.$ Ce premier résultat est très important pour définir le concept de dérivation. $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = +\infty \notin IR.$

4. En physique, la vitesse instantanée en un instant t_0 est définie par la grandeur $x'(t_0) = \lim_{t\to t_0}\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}$ où $x(t)$ est le déplacement en fonction du temps t.

a) Si $x(t) = 3t + 2$ et $t_0 = 5\ min$ alors on demande de calculer la vitesse du mobile $x'(t)$ après 5 min de mouvement. Comment est ce qu'on va procéder pour le faire ?

Élève : on peut appliquer le théorème de l'énergie cinétique.

Enseignant : c'est une approche physique avec le Théorème de l'Energie Cinétique mais là nous sommes dans une approche mathématique pour trouver cette limite. Encore que si tu prends le TEC tu auras besoin du travail des forces que tu n'as pas ici alors qu'avec l'approche mathématique tu peux trouver sans passer à une autre transformation. Nous allons calculer la vitesse instantanée pour voir si votre camarade avait raison.

On a dit que $x'(t_0) = \lim_{t\to t_0}\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}$ on a donné $x(t) = 3t + 2$ et $t = 5\ min$. Dans cette formule notre t est en seconde.

a) Qui peut nous calculer cette limite ? Déterminons la vitesse en $t = 5\ min$. Qu'est ce qu'il faut faire en premier ? Il faut convertir le temps en seconde. $t = 5\ min = 300\ secondes$.

$x'(300) = \lim_{t\to 300} \frac{3t+2-x(300)}{t-300} = \lim_{t\to 300} \frac{3t+2-902}{t-300} = \lim_{t\to 300} \frac{3t-90}{t-300} = \lim_{t\to 300} \frac{3(t-300)}{t-300} = 3.$ Donc $x'(300) = V = 3$. Votre camarade a dit tantôt que $V = \frac{x(300)}{300} = 3{,}006$. Pourquoi ce résultat est différent ?

b) $x(120)$ représente le nombre dérivé en 120, de même $x'(300)$ est le nombre dérivé de $x\ en\ t = 300$. $x'(t)$ se lit x prime, il est le symbole de la dérivée. Le nombre dérivé est la limite du taux d'accroissement qui est la vitesse de ce mobile en mouvement. Votre camarade a trouvé un résultat différent car il a omis les conditions initiales, à savoir à quel instant débute le mouvement

Les trois premières questions nous semblent familières et aussi aux élèves puisque pendant l'enseignement, ce sont les élèves qui les ont résolues. Il s'agissait du calcul des limites, or les élèves viennent de terminer un cours sur le calcul des limites. Par ailleurs, la question 3.b) semble indiquer aux élèves la raison du calcul des limites qui précède. La question de l'enseignant aux élèves vise à indiquer laquelle des limites $\lim_{x\to 120} \frac{f(x)-f(120)}{x-120}$ et $\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$ est une limite réelle.

À ce niveau il est entendu que $\lim_{x\to 120} \frac{f(x)-f(120)}{x-120} = 3 \in IR$. Selon l'enseignant, ce premier résultat est très important pour définir le concept de dérivation mais l'enseignant ne dit pas qu'en réalité il s'agit du nombre dérivé. Implicitement on peut résumer dans le tableau ci-dessous (Tableau 36) le bloc technique construit jusqu'ici par l'enseignant et ses élèves :

T'_{11}	Calculer le nombre dérivé de la fonction $f(x) = 3x + 2\ \ au$ point d'abscisse $x_0 = 120$
τ'_{11}	• Calculer $\lim_{x\to 120} \frac{f(x)-f(120)}{x-120}$ • Vérifier si chaque limite est réelle ou pas

Tableau 41. – Construction du bloc technique à partir du taux de variation

Il poursuit son exploration avec ses élèves. Plus tard dans les questions 4.a et 4.b, les élèves vont calculer la vitesse instantanée d'un mobile entre les instants t et t_0 à l'aide de la formule $x'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}$. Pour la première fois, l'enseignant associe la vitesse instantanée au nombre dérivé et dans ce cas le nombre dérivé est la limite du taux d'accroissement qui est en d'autres termes la vitesse du mobile. L'enseignant s'inspire de l'activité proposée dans son manuel et adapte la situation selon ses besoins. Dans le manuel, les auteurs accompagnent le travail numérique avec un graphique qui permet d'illustrer la vitesse du mobile et en même temps le nombre dérivé et pente de la droite tangente. L'enseignant procède à une micro-institutionnalisation du nombre dérivé à l'aide de la vitesse instantanée. Nous pouvons résumer dans le tableau ci-dessous (Tableau 37) les deux principaux éléments praxéologiques observés dans cette partie de l'activité accompagnés de la justification (technologie) implicite :

T''11	Calculer la vitesse instantanée d'un mobile d'équation horaire $x(t) = 3t + 2$ à l'instant $t_0 = 5\,min$
τ''_{11}	Calculer $x'(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}$ où $\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}$ est la vitesse moyenne du mobile
θ_{11}:	θ : « Le nombre dérivé est la limite du taux d'accroissement qui est la vitesse de ce mobile en mouvement ».

Tableau 42. – Construction du bloc technique à partir de la vitesse instantanée

4.6.2.3.2-Bloc technologique dans le calcul du nombre dérivé

Contrairement à la tâche (T'11), l'enseignant fournit aux élèves une justification de la technique employée dans la détermination de la vitesse instantanée. L'élève aura appris que le nombre dérivé est la limite du taux de variation moyen or le taux de variation et la vitesse instantanée sont des notions qui ont été apprises préalablement dans les cours de physique l'année précédente. La technique du calcul du nombre dérivée dans ce cas est explicitée par la représentation algébrique de la définition du nombre dérivé contenue dans le manuel. Pour cela, la définition, bien que constituant un élément du bloc théorique sert d'appui à la technique du calcul du nombre dérivé. Le moment où se construit la technique se trouve submergée par la définition institutionnelle du nombre dérivé. En effet, l'enseignant a utilisé la notion de vitesse instantanée pour introduire le nombre dérivé. Cependant, au moment de définir le nombre dérivé, les notations, les relations et les éléments qui ont servi à la découverte du nombre dérivé ont disparu dans la définition proposée par l'enseignant. Une autre observation au sujet des représentations, l'enseignant a fait le choix d'éclipser la représentation graphique et pour cela, nous pensons que ce choix a été explicité lors des entretiens puisque qu'il considérait que les graphes alourdissent le cours *(Annexe 3)*. Également lors de l'entretien préalable, l'enseignant nous avait fait savoir qu'il aurait souhaité introduire la dérivée à l'aide de la tangente même si son rapport personnel premier à la dérivée est associé à la limite du taux de variation. Nous notons que l'enseignant décide d'introduire le nombre dérivé par la vitesse instantanée sans qu'en réalité n'émerge un lien explicite entre la vitesse instantanée et la limite du taux de variation. Nous observons que l'intention de l'enseignant avant l'enseignement a été guidée par le programme et que cette influence du programme demeure pendant l'enseignement au point de dicter la praxéologie mathématique à adopter que nous résumons dans le tableau 38 ci-dessous :

T11	Calculer le nombre dérivé d'une fonction en un point quelconque $(a; f(a))$
τ_{11}	Calculer le taux de variation $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ Calculer $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ en fonction de x_0
θ_{11}:	« Soit f une fonction continue sur un intervalle IK et $x_0 \in IK$. On dit que f est dérivable en x_0 à gauche si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in IR$ et on note $f_g'(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ et est appelé nombre dérivé de f en x_0 à gauche ». *($\theta_{11.1}$)*. « On dit que fonction f est dérivable à droite de x_0 si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in IR$ et on note $f_d'(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ et est appelé nombre dérivé de f en x_0 à droite ». *($\theta_{11.2}$)*. « **On dit que f est dérivable** en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche de x_0 et le nombre dérivé à droite de x_0 est égal au nombre dérivé à gauche de x_0, i.e $f_d'(x_0) = f_g'(x_0)$» *($\theta_{11.3}$)*. On note alors $f'(x_0)$ le nombre dérivé de f en x_0
Θ_{11}	Éléments de la théorie de l'analyse mathématique

Tableau 43. – Praxéologie de l'introduction du nombre dérivé par Charles

Nous constatons que la praxéologie qui découle du travail fait par l'enseignant est similaire finalement à celles présentes dans les pratiques d'enseignement des deux précédents enseignants. En dépit du fait que le rapport institutionnel soit assez présent pour dicter les choix de l'enseignant, sa vision de la manière d'introduire le nombre dérivé est un mélange de son rapport personnel et du rapport institutionnel, cela n'exclut en rien le fait qu'il est un bon sujet de l'institution. En définitive, la tâche à résoudre dans cette activité visait à calculer le nombre dérivé. Même si l'enseignant a choisi d'approcher la notion à l'aide du calcul du taux de variation et de la vitesse instantanée, il n'en demeure pas moins vrai que la praxéologie mathématique qui s'en dégage est fortement influencée par le programme officiel comme l'indique la définition proposée par l'enseignant à l'issue de la résolution de l'activité de mise en route.

4.6.2.3.3-Type d'exemple proposé à la suite de la praxéologie

La fonction qui a servi à introduire le nombre dérivé est $f(x) = 3x + 2$ et il a été demandé aux élèves de calculer le nombre dérivé de cette fonction pour $x_0 = 120$. Curieusement l'exemple qui accompagne la phase d'institutionnalisation est une reprise de cette fonction cette fois-ci pour la valeur $x_0 = 1$. Voici la démarche proposée par l'enseignant (Tableau 39):

Type de tâche	Déterminer le nombre dérivé de la fonction $f(x) = 3x + 2,\ x_0 = 1$
Technique	Je calcule d'abord $f(1) = 3(1) + 2 = 3 + 2 = 5$ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{3x + 2 - 5}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{3(x - 1)}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} 3 = 3 = f'_g(1)$ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{3x + 2 - 5}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{3(x - 1)}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} 3 = 3 = f'_d(1)$ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 3 \in IR$ Donc $f'(1) = 3$ et pour cela la fonction f est dérivable en $x_0 = 1$.
Technologie	« Soit f une fonction continue sur un intervalle IK et $x_0 \in IK$. On dit que f est dérivable en x_0 à gauche si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in IR$ et on note $f_g'(x_0) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ et est appelé nombre dérivé de f en x_0 à gauche ». *($\theta_{11.1}$)*. « On dit que fonction f est dérivable à droite de x_0 si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in IR$ et on note $f_d'(x_0) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ et est appelé nombre dérivé de f en x_0 à droite ». *($\theta_{11.2}$)*. **« On dit que f est dérivable** en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche de x_0 et le nombre dérivé à droite de x_0 est égal au nombre dérivé à gauche de x_0, i.e $f_d'(x_0) = f_g'(x_0)$» *($\theta_{11.3}$)*. On note alors $f'(x_0)$ le nombre dérivé de f en x_0
Théorie	Éléments de la théorie de l'analyse mathématique

Tableau 44. – Praxéologie mathématique de calcul du nombre dérivé-Charles

L'élève applique méthodiquement la définition proposée par l'enseignant justifiée par la technologie (θ_{11}). Cet exemple est également similaire aux autres exemples proposés dans le manuel et il n'est pas encore question du calcul des dérivées et l'enseignant s'assure que l'élève puisse reproduire adéquatement la démarche qui lui est enseignée. Il s'agit ici d'une mise en application de la définition qui a été fournie aux élèves comme moyen de justifier la technique de calcul du nombre dérivé. A travers ces deux exemples, l'enseignant voudrait s'assurer que l'élève est capable d'appliquer adéquatement la démarche qui lui a été présentée précédemment. Il s'agit ici d’une simple manipulation algébrique qu’une réelle volonté de conceptualisation. Il est possible que le désir de l’enseignant soit celui d’aligner le rapport des élèves à celui de l’institution.

4.6.2.3.4-Type de tâche : interprétation du nombre dérivé en un point

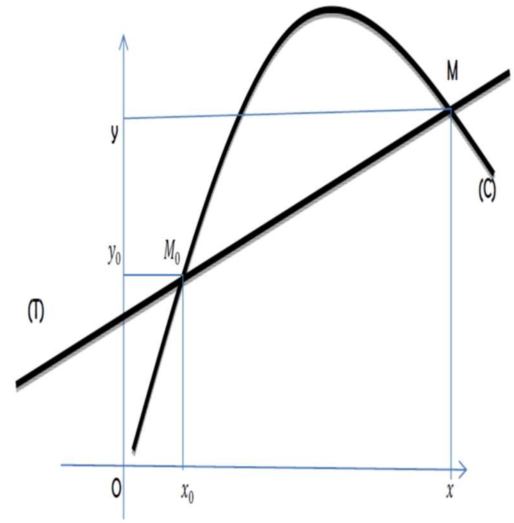
Le rapport personnel de Charles laisse observer que *« la dérivée et la tangente sont intimement liées, il y a une relation qu’il faut bien établir ».* Le lien entre la dérivée et la tangente s’observe dans l’interprétation géométrique de la dérivée, celle qui fait du nombre dérivé la pente de la droite tangente. Par ailleurs pour l’enseignant, il est important de faire le lien entre les notions de la dérivée. Or l’enseignant considère que l’interprétation de la dérivée semble difficile à faire pour l’élève. Dans l’observation de l’enseignement, la technologie (θ_{11}) justifiant la technique de calcul du nombre dérivé aboutit à l’existence ou non d’un point anguleux (Fig21).

Figure 22. – Interprétation graphique du nombre dérivé : point anguleux

L’enseignant donne ici une première interprétation liée au calcul du nombre dérivé puisque dans la technique de calcul du nombre dérivé, il est demandé de calculer $f'_g(0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ et $f_d'(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ qui sont en réalité les coefficients directeurs respectivement à gauche et à droite de x_0. Pour justifier ce lien entre le nombre dérivé de la fonction en x_0 et la pente de la droite tangente, Charles propose l’activité suivante :

Soit (C_f) la courbe d'une fonction continue, soit (T) une droite qui coupe (C_f) en deux points M_0 et M d'abscisses respectives x_0 et x comme l'indique la figure ci-dessous dans un repère orthonormé.

a. Justifier que le coefficient directeur de la droite (T) est $\frac{y-y_0}{x-x_0}$
b. En déduire l'équation cartésienne de (T)
c. Donnez la valeur de $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
d. En déduire la valeur de a lorsque x tend vers x_0.
e. Comment appelle-t-on la droite (T) lorsque x tend vers x_0?



Connaissant deux points $M_0(x_0; y_0)$ et $M(x; y)$ on peut déduire le coefficient directeur de la droite (MM_0) en appliquant le calcul du quotient $\frac{y-y_0}{x-x_0}$. Cette connaissance est antérieure et constitue un préalable dans l'apprentissage du nombre dérivé (section 4.1.21). Dans le même sillage, l'élève peut écrire l'équation d'une droite passant par un point $M_0(x_0; y_0)$ et de coefficient directeur $a = \frac{y-y_0}{x-x_0}$. Cette équation a une écriture de la forme $y - y_0 = a(x - x_0)$ donc $y = a(x - x_0) + y_0$ (section 4.1.21). Puisque les points $M_0(x_0; y_0)$ et $M(x; y)$ sont situés respectivement sur la droite et sur la courbe de la fonction et que cette fonction est dérivable en x_0, le nombre dérivé en x_0 est donné par $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$. Il est désormais question de faire le lien entre $f'(x_0)$ et $a = \frac{y-y_0}{x-x_0}$. L'enseignant calcule $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{y-y_0}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ et conclut que $a = f'(x_0)$. Pour l'élève, pourquoi $\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$? La réponse à cette question n'est pas si simple, peut-être fallait-il préciser que comme $\begin{cases} M_0(x_0; y_0) \in (C_f) \\ M(x; y) \in (C_f) \end{cases}$ alors $\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f(x) = y \end{cases}$. Voici comment l'enseignant conclut cette activité avec ses élèves :

Enseignant : « Quand on dit que x se rapproche de x_0 cela signifie que le point M se rapproche aussi du point M_0, c'est en ce moment que le coefficient directeur devient $f'(x_0)$ quand les deux points sont très proches, alors en ce moment que représente la droite (T) pour la courbe ? »

Élèves : « la tangente ».

Enseignant : « On vient de montrer que le nombre dérivé d'une fonction en x_0 est égal au coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse x_0 ».

Cette activité nous semble intéressante dans la mesure où elle marque une rupture entre les pratiques enseignantes observées précédemment et celle de l'enseignant Charles en ce qui concerne l'interprétation du nombre dérivé. Une combinaison entre les représentations graphiques et algébriques permet de faire le lien selon nos observations. Même si l'enseignant dans son rapport personnel s'aligne avec la vision du programme et du manuel scolaire, nous observons ici une expression de sa volonté de distanciation entre son rapport personnel et le rapport institutionnel. Lors de l'entretien post-enseignement, l'enseignant nous a expliqué qu'en réalité, en adoptant cette démarche, il voulait *« faciliter la compréhension de l'établissement de l'équation de la tangente »* et que ce choix lui était imposé par le programme officiel puisque selon l'enseignant, *« on pouvait justement introduire le cours sur la dérivée avec cette notion de tangente. Mais à cause de l'exigence du programme je me suis confiné sur la limite du taux de variation ».* Ce propos de l'enseignant consolide notre hypothèse sur la volonté de l'enseignant de faire valoir son rapport personnel dans un contexte où le rapport institutionnel est assez présent. L'enseignant veut faire les choses autrement selon sa vision de l'enseignement et de ce qu'est la dérivée. Cependant, à cause de l'exigence du programme, il se sent donc obligé de suivre les recommandations du programme, laissant de côté des stratégies qui auraient pu faciliter une compréhension conceptuelle du nombre dérivé. En abordant de cette manière le lien entre le nombre dérivé et la pente de la droite tangente, la pratique enseignante observée situe l'idée de tangente dans un contexte de l'analyse mais n'échappe pas également à la conception géométrique.

4.6.2.3.5-Construction de la praxéologie mathématique du calcul de la dérivée

Le calcul de la dérivée est la deuxième grande partie du travail de l'enseignant dans ce chapitre. Charles débute cette section par un rappel du cours précédent sur le calcul du nombre dérivé d'une fonction f dérivable en x_0 et comme nous l'avons rappelé, la technique de calcul du nombre dérivé se résume à l'application de la formule suivante : $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(a)}{x-x_0} = f'(x_0)$. Comme dans son activité d'introduction du nombre dérivé, l'enseignant adopte au départ une approche cinématique et voici quelques extraits des échanges entre l'enseignant et ses élèves :

Enseignant : *« L'équation horaire du mouvement d'un mobile est* $x(t) = 5t^2 + 1$ *où t est en secondes. Exprimez sa vitesse à un instant quelconque. Qu'en pensez-vous ? Au précédent cours c'était à un instant précis, ce matin il s'agit à un instant quelconque ».*

Élève : *« Il va falloir dériver par rapport au temps ».*

Enseignant : *en quoi faisant ? En calculant la dérivée. C'est ce que nous allons faire dans ce cours »*

Le contexte cinématique sert de marchepied à la problématisation de la fonction dérivée. La réponse de l'élève semble justifier l'aspect interdisciplinaire entre le cours de physique où les élèves ont appris la vitesse instantanée et le cours de mathématique dans lequel ils doivent calculer la fonction dérivée. Comme premier moment de la rencontre avec la tâche qui consiste à calculer la fonction dérivée, l'enseignant propose aux élèves l'une des tâches que nous proposons ci-dessous :

Activité d'apprentissage
Considérons la fonction f *définie par* $f(x) = 5x^2 + 1$. *Soit* $x_0 \in IR$*, calculer* $f'(x_0)$ *puis déduire l'expression de* $f'(x)$ *pour tout réel* x.

Enseignant : « Calculons $f'(x_0)$. Soit $x_0 \in IR$, $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{5x^2+1-(5x_0^2+1)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{5x^2-5x_0^2}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{5(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} 5(x + x_0) = 5(x_0 + x_0) = 10x_0$ donc $f'(x_0) = 10x_0$.

Généralisez cela avec un x quelconque. Que vaut $f'(x)$? Soit x un réel, on aura $f'(x) = 10x$ ».

La présentation du calcul des fonctions des dérivées est magistrale. Comme dans les observations faites précédemment pour les deux autres enseignants, nous constatons que le calcul de la fonction dérivée repose sur le calcul du nombre dérivé. Cette pratique s'aligne sur les pratiques des trois enseignants observés dans l'article de Park (2015) pour lesquels le calcul du nombre dérivé constitue un marchepied au calcul de la fonction dérivée et par la suite, la fonction dérivée s'obtient par remplacement de x_0 dans la formule $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Cette démarche présente dans l'activité d'apprentissage s'observe également au moment de l'institutionnalisation à travers la définition qui est présentée à la suite de cette activité. L'enseignant institutionnalise la fonction dérivée de la manière suivante :

« Soit f une fonction définie sur un ensemble IE. On appelle fonction dérivée de f*, la fonction notée* f' *et définie par* $f' : IK \subseteq E \rightarrow IR$ *qui à* x *on associe* $f'(x)$. *IK est appelé ensemble de dérivabilité de la fonction* f*. On a* f *dérivable sur IK. On a vu dans l'activité comme on pouvait passer de* x_0 *à la généralisation. En effet, pour* $x_0 \in IK$ $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$*. Si on pose* $h = x - x_0$ *on a* $x_0 = x - h$*. Quand* x *tend vers* x_0 *alors* h *tend vers 0. À partir du nombre dérivé, on sait que* $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *ainsi pour généraliser, pour tout* $x \in IK$ $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$ *»* .

Dans la formule du calcul du nombre dérivé proposée dans la définition, nous observons que l'enseignant fait remplacer x_0 dans la formule $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $par\ un\ x$; le changement de variable opéré en posant $h = x - x_0$ permet à l'enseignant de proposer une formule qui s'apparente au calcul du nombre dérivé, mais qui permet d'avoir directement la fonction dérivée de la fonction considérée. Cette démarche de l'enseignant est totalement différente de celle des deux autres enseignants. Démarches dans lesquelles la technique qui avait permis de découvrir la fonction dérivée n'était plus celle qui était proposée dans la définition de la fonction dérivée. Nous retiendrons donc que la technique du calcul de la fonction dérivée se fait à l'aide de la technique suivante : $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$. La fonction dérivée ne se calcule donc pas à l'aide de la même formule qui a permis de calculer le nombre dérivé précédemment. Dans le calcul de la fonction dérivée apparait la limite du taux de variation moyen. Également, dans le manuel, il est demandé de calculer le nombre dérivé en x_0 puis de remplacer le x_0 par x dans l'expression obtenue. Donc il y a évidemment dans la pratique de l'enseignant une réelle tentative de généralisation du nombre dérivé par la fonction dérivée même si l'enseignant ne l'explicite pas dans son discours, ni ne l'exemplifie pas pour permettre aux élèves de se rendre compte de son fonctionnement. L'enseignant annonce plutôt un tableau récapitulatif qui va permettre de calculer la dérivée de tout type de fonction comme l'illustre cet extrait : *« Toutes ces formules ont été établies avec le nombre dérivé, vous pouvez les retenir et les appliquer simplement ».* De cette manière, cette technique de calcul sera utilisée pour établir toutes les autres formules de dérivation des fonctions élémentaires, des fonctions polynomiales, rationnelles et des fonctions irrationnelles. Les élèves vont donc appliquer les formules de dérivation sur des exemples choisies par l'enseignant. Ce qui prouve bien que c'est le but ultime de l'enseignant : permettre aux élèves d'atteindre rapidement les formules de calcul des dérivées et qu'ils soient capables de les utiliser car ces formules sont nécessaires dans l'études des variations des fonctions. Contrairement aux deux autres enseignants, on peut supposer que Charles développe une pratique qui prend souvent en compte sa propre vision en dépit de l'existence des contraintes, ce qui pourrait être un facteur bénéfique pour la compréhension conceptuelle de la dérivée chez ses élèves. Cependant, la présence des contraintes institutionnelles l'oblige à focaliser son attention sur les aspects qu'exige ce programme, notamment le calcul des dérivées à l'aide des formules de dérivation. Notons également pour terminer que l'enseignant a commencé au départ avec une situation problème portant sur la vitesse horaire (vitesse instantanée), malheureusement, cette situation n'a plus été évoquée jusqu'à la fin de nos observations. L'attention a été portée au calcul des dérivées selon la praxéologie mathématique qui se résume ci-dessous (Tableau 44) :

T_{21}	Calculer la fonction dérivée d'une fonction
τ_{21}	$-$ Calculer le quotient $\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$ $-$Calculer $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$
θ_{11}:	Appliquer les différentes formules de dérivation
Θ_{11}	Éléments de la théorie de l'analyse mathématique

Tableau 45. – Modèle praxéologique du calcul de la fonction dérivée-Charles

4.6.2.4-Synthèse des pratiques enseignantes observées

Dans cette section, il était question de porter un regard sur les pratiques d'enseignement de la dérivée par trois enseignants. Il s'agit, selon les recherches, de la composante la plus analysée lorsqu'on s'intéresse au travail des enseignants (DeSaint-André et al., 2010). Ces analyses sont pointées en direction des contraintes et des marges de manœuvre de l'enseignant, des caractéristiques de la position de l'enseignant que l'on peut observer à travers son rapport personnel, des ressources utilisées par l'enseignant pour réaliser son enseignement (Perrin-Glorian, 2002). Nous avons identifié dans cette partie quelques éléments fondamentaux pour satisfaire aux objectifs suivants :

- O_3. D’analyser les objets ostensifs et les objets non ostensifs mobilisés par les enseignants pour enseigner la dérivée.
- O_4. D’analyser les praxéologiques didactiques développées lors de l’enseignement de la dérivée

Pour satisfaire ces objectifs, nous avons utilisé le modèle proposé par Barbé et al. (2005) qui permet de caractériser le travail enseignant à travers des interactions multiples entre les praxéologies didactiques et les contraintes auxquelles sont soumis les enseignants dans leur travail d’enseignement. Deux aspects de ces pratiques ont été analysés : l’introduction du nombre dérivé et le passage du nombre dérivé à la fonction dérivée. L’analyse des processus didactiques des trois enseignants permet d’observer que : les praxéologies didactiques développées par les enseignants de cette étude sont essentiellement basées sur le moment où il est question de découvrir la nouvelle organisation mathématique, le moment technique implicite à plusieurs endroits, le moment de l’institutionnalisation et dans une certaine mesure le moment de l’évaluation. Il n’est pas rare d’observer dans certains cas l’émergence d’un moment où une technique est en exploration. Cependant, le moment technique lui-même est éclipsé pour céder place au moment de l’institutionnalisation qui donne sens à une technique qui dans la phase exploratoire était implicite pour la plupart. Le moment de l’évaluation, sixième moment des praxéologies didactiques, en réalité est le moment où les élèves valident à travers la manipulation sur des exemples choisis par l’enseignant du discours proposé dans la phase d’institutionnalisation. Nous avons également observé que dans les praxéologies mathématiques présentes dans les pratiques d’enseignement, le choix des enseignants était fondamentalement orienté par le programme officiel et par conséquent par l’idée de voir les élèves réussir à leur examen de fin d’année. D’abord, il faut relever que dans l’introduction de la dérivée en un point, puis lors du passage du nombre dérivé à la fonction dérivée l’objectif poursuivi par les enseignants est d’appliquer la formule du calcul de la limite du taux de variation qui est une exigence institutionnelle. Ensuite, comme nous l’avons indiqué au niveau des moments dominants de la praxéologie didactique, les enseignants utilisent la même technologie qui est utilisée dans le manuel des enseignants. En réalité, ces technologies permettent de mettre en œuvre la technique de calcul du nombre dérivé, il faut noter à ce propos que la définition considérée comme discours ne justifie pas en elle-même la technique car ce discours en lui-même est la technique proposée, c’est ce que Barbé et al. (2005) appellent des techniques transparentes car elles ne sont pas en effet justifiées. Ces techniques transparentes s’apparentes à ce que Rouy (2007) nomme la praxéologie à trou avec niveau de rationalité zéro. Enfin, notons également que les enseignants n'insistent pas tant sur le calcul du nombre dérivé ni sur l'introduction de la fonction dérivée à l'aide des limites. Rapidement les enseignants proposent une succession de tableaux récapitulatifs à travers lesquels les élèves doivent appliquer les règles de dérivation, lesquelles les préparent à l'étude des variations. Notre commentaire face à cette observation est que ce n'est pas tant l'idée de permettre une réelle conceptualisation de la dérivée qui est en jeu ici, l'objectif principal des enseignants est de permettre aux élèves de s'approprier des techniques de dérivation qui sont nécessaires à l'étude des variations d'une fonction.

D'ailleurs, les enseignants de cette étude, parlant de leurs perceptions de ce que les élèves doivent apprendre évoquent le fait que ce qui est plus important pour les élèves c'est de calculer la dérivée pour étudier une fonction et représenter son graphe. C'est pour cela que chaque fois, ils annoncent aux élèves qu'il existe une méthode plus facile pour calculer la fonction dérivée. Nous constatons que le rapport personnel des enseignants au sujet de l'apprentissage de la dérivée est bien visible dans leurs pratiques d'enseignement. Comme nous l'avons observé dans les manuels analysés, la dérivée est introduite dans le cours des enseignants par la limite du taux de variation. Par ailleurs, deux des enseignants dans leurs pratiques la définissent sans qu'on n'y retrouve la technique qui a permis de l'introduire. Aussi, le troisième enseignant du fait de son rapport personnel dominant dans sa pratique, définit la dérivée à partir de la vitesse instantanée d'une part mais on note également dans sa démarche une cohérence entre l'introduction de la dérivée et la définition qui sert d'institutionnalisation. Dans les cas d'Alain et de Bernard, il est impossible de dire que la fonction dérivée généralise le nombre dérivé (Park, 2015) pourtant, dans le cas de l'enseignant Charles, nous notons que l'enseignant décide d'introduire le nombre dérivé par la vitesse instantanée sans qu'en réalité n'émerge un lien explicite entre la vitesse instantanée et la limite du taux de variation. De plus, même si l'enseignant Charles dans son rapport personnel s'aligne avec la vision du programme et du manuel scolaire, nous observons ici une expression de sa volonté de distanciation entre son rapport personnel et le rapport institutionnel. L'enseignant désire faire valoir son rapport personnel, de ce qu'est la dérivée. Cependant, à cause de l'exigence du programme, il se sent donc obligé de suivre les recommandations du programme, laissant de côté des stratégies qui auraient pu faciliter une compréhension conceptuelle du nombre dérivé. Aussi, dans la formule du calcul du nombre dérivé proposée dans la définition, il n'est plus question de remplacer x_0 par x dans la formule $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$; la technique du calcul de la fonction dérivée se fait à l'aide de la technique suivante : $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$. La fonction dérivée se calcule en généralisant la formule qui a permis de calculer le nombre dérivé précédemment. Au niveau des ressources d'enseignement, plusieurs ressources sont utilisées : des ressources sémiotiques, il existe trois types d'ostensifs qui ont été observées dans les pratiques des enseignants : un ostensif algébrique, un ostensif graphique et un ostensif verbale qui est visible dans le discours de l'enseignant. Par ailleurs, il faut relever que les ostensifs verbale et algébrique sont les plus présents dans les interactions en classe avec de faibles moments de conversion entre les représentations verbale orale et graphique.

Chapitre 5 – Discussion des résultats et conclusions

L'objectif principal de cette thèse était d'analyser les pratiques des enseignants et leur utilisation des ressources dans les activités de préparation et d'enseignement de la dérivée. Dans le chapitre 2, nous avons décliné le cadre théorique qui allait nous aider dans l'analyse des données. En combinant la TAD (Chevallard, 1999) et l'ADD (González-Martín et al., 2018; Gueudet, 2017; Gueudet & Trouche, 2008) nous avons opérationnalisé cet objectif général, ce qui nous a conduit aux objectifs spécifiques de recherche suivants :

O_1: Analyser les praxéologies mathématiques développées dans les ressources utilisées par les enseignants de cette étude pour enseigner la dérivée.

O_2 : Analyser les schèmes d'utilisation des ressources par les enseignants pour enseigner la dérivée.

- $O_{2.1}$ Analyser les règles d'action qui caractérisent l'utilisation des ressources et les praxéologies mathématiques développées par les enseignants.
- $O_{2.2}$ Analyser les invariants opérationnels qui se dégagent des schèmes d'utilisation des ressources et des praxéologies mathématiques développées par les enseignants.

O_3. Analyser les objets ostensifs et les objets non ostensifs mobilisés par les enseignants pour enseigner la dérivée.

O_4. Analyser les praxéologiques didactiques développées lors de l'enseignement de la dérivée.

Le type de recherche que nous avons adopté est la recherche qualitative avec comme démarche de recherche l'étude des cas multiples. Dans l'optique de produire nos résultats de recherche, nous avons analysé le programme de mathématiques de la classe de première au Cameroun qui correspond à la première année du cegep au Québec, ensuite, nous avons analysé les manuels qui se sont vu être la principale ressource utilisée par ces enseignants. Pour finaliser nos analyses, nous avons procédé à une analyse des entrevues et des pratiques observées en classe de trois enseignants dans le but de faire le lien entre les ressources institutionnelles, le rapport personnel de ces enseignants, leur utilisation des ressources et ces pratiques effectivement observées en classe. Afin de justifier certaines décisions des enseignants, nous avons fait une brève analyse des sujets d'examen ministériel. Dans ce chapitre 5, l'objectif poursuivi est de discuter nos résultats à la lumière de notre cadre d'analyse, de la démarche méthodologique et à la lumière des principaux travaux de recherche existants que nous avons évoqués dans cette thèse. Nous terminerons ces discussions par une conclusion dans laquelle nous montrerons les limites et les perspectives de recherche à la lumière des limitations relevées.

5.1- Réponses à nos questions de recherche

En guise de rappel, chacun des objectifs de recherche identifiées ci-haut visait à identifier une pratique enseignante ou un rapport à un objet, ici la dérivée. Le premier objectif de recherche visait à l'analyse des programmes et des manuels scolaires dans le but d'identifier le rapport institutionnel à la dérivée, c'est-à-dire la manière dont la dérivée est introduite dans ces ressources à travers les différentes organisations mathématiques qui y sont observées. Ensuite, nous avons analysé de quelle manière les enseignants choisissaient et utilisaient leurs ressources et ceci nous a permis de caractériser leur travail documentaire. Dans cette caractérisation du travail documentaire, nous avons identifié d'abord les règles d'action que les enseignants développent dans leur utilisation des ressources, c'est-à-dire de quelle manière ils utilisent les ressources. De plus, l'identification des invariants opératoires a permis d'établir dans ces règles d'action celles qui étaient associées au rapport personnel de l'enseignant. En analysant les règles d'action et les invariants opératoires, nous avons ainsi caractérisé le lien entre le rapport personnel des enseignants et leur utilisation des ressources. Le troisième objectif de la recherche consistait à identifier les objets ostensifs et non-ostensifs mis en jeu autant dans les ressources des enseignants que dans leurs pratiques. Finalement, dans le dernier objectif de cette thèse, nous avons caractérisé les pratiques didactiques des enseignants en classe dans le but d'identifier les principaux moments et les praxéologies mathématiques qui y sont associées. Ces analyses globales permettent de faire une lecture panoramique des pratiques de ces trois enseignants et d'établir les liens subséquents. De manière générale, ce que nous relevons d'emblée est que même si le programme fait ressortir les principaux contenus à enseigner en classe, il demeure assez vague sur la manière d'enseigner ces contenus de même que sur les ressources à utiliser pour enseigner la dérivée. D'autres observations sont possibles et nous y reviendrons dans les sections suivantes. Nous évoquerons dans la section 5.1.1 les éléments retenus de l'analyse du programme de mathématiques puis nous ferons le lien avec ceux contenus dans l'analyse des manuels. Ensuite dans la section 5.1.2 il sera question des schèmes d'utilisation des ressources incluant les règles d'action et les invariants opératoires qui illustrent le rapport personnel des enseignant à la dérivée. Puis, finalement dans la section 5.1.3 nous reviendrons sur les pratiques observées en classe en y incluant les objets ostensifs et non-ostensifs dont se servent les enseignants pour enseigner la dérivée.

5.1.1 Rapport institutionnel à la dérivée

Au Cameroun, le contexte de notre recherche, nous avons vu que le programme de mathématiques au secondaire notamment au second cycle donne des recommandations sur la manière dont on doit enseigner la dérivée en classe. On observe que les contenus des programmes des niveaux inférieurs constituent un marchepied pour le cours portant sur la dérivée. Par exemple dans les cours de mathématiques au premier cycle du secondaire[28], les auteurs du programme proposent des notions à travailler en prélude à l'apprentissage de la dérivée. C'est le cas par exemple de la pente qui est étudiée en classe de troisième (secondaire 4) puis le taux de variation qui lui intervient en première année du second cycle notamment en classe de seconde (secondaire 5). S'agissant des programmes de mathématiques étudiés dans cette thèse, il est recommandé d'introduire la dérivée comme la limite du taux de variation. De même, on peut noter une énumération des types de tâche à travailler sur la dérivée. Par exemple, il est recommandé de résoudre les problèmes d'optimisation à travers les situations concrètes. Cependant, les recommandations du programme se limitent à énumérer les contenus à enseigner en classe. Il n'apparaît nullement dans le programme des recommandations sur la manière d'enseigner la dérivée en un point, sur un intervalle ou même sur la façon d'introduire les formules de dérivation. Les raisons qui justifient l'enseignement et l'apprentissage de la dérivée n'apparaissent pas dans le programme non plus. Le sens que l'enseignant peut donner à l'enseignement de la dérivée dépend donc de son interprétation personnelle, mieux de son rapport personnel à la dérivée.

S'agissant des ostensifs et des objets non-ostensifs propres à la dérivée, les auteurs du programme mettent l'accent sur les ostensifs algébriques et graphiques, ce qui mène à un déséquilibre avec la présence des autres ostensifs comme l'ostensif verbal qui aurait pu permettre de se rendre compte de la capacité des élèves à pouvoir utiliser la lecture graphique pour déduire un nombre dérivé par exemple à travers la verbalisation de leurs habiletés de la pensée

---

[28] Le premier cycle du seconde débute en 6ème (secondaire 1 au Québec) et va jusqu'en 3ème (secondaire 4 au Québec).

mathématique. Ces observations nous permettent de déduire qu'il n'existe pas dans le programme des indicateurs d'une articulation entre les différents ostensifs algébriques et graphiques. Finalement, le statut de la droite tangente n'est pas clairement défini même si l'on voit apparaître dans la section dédiée à l'approximation affine que la tangente apparait dans la technique d'approximation d'une fonction. En ce qui concerne les manuels analysés, les auteurs s'alignent sur les orientations du programme pour ce qui est considéré comme contenus plus importants à enseigner sur la dérivée. Les auteurs s'appuient strictement sur les aspects qu'ils jugent nécessaires pour l'apprentissage et qui sont dictés par le programme officiel. L'analyse des trois manuels conduit à quelques observations pertinentes. Pour calculer le nombre dérivé en un point, les manuels analysés utilisent la limite du taux de variation comme recommandé dans le programme officiel. Par exemple, le nombre dérivé est présenté dans les manuels analysés d'abord selon l'ostensif symbolique $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ou aussi selon la reformulation suivante $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Selon nos constatations, les auteurs s'appuient plus sur les ostensifs symboliques en laissant de côté l'usage des ostensifs graphiques en appui à ces ostensifs symboliques. Dans le manuel *Majors* par exemple, les auteurs utilisent comme technique la limite de la droite sécante pour calculer le coefficient directeur sans qu'on ne puisse établir un lien explicite avec la pente de la droite tangente. Toujours au niveau de la définition du nombre dérivé, lorsque les auteurs d'un manuel utilisent la notation symbolique $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, aucune indication n'accompagne cet ostensif, notamment un ostensif graphique qui aurait aidé à comprendre pourquoi on fait tendre *h* vers zéro. Le statut du nombre *h* peut être lié à un obstacle épistémologique qui remonte aux travaux de Fermat et dont les auteurs n'apportent aucune explication pour aider les élèves (Gantois, 2012) . Il est certain qu'une utilisation d'un graphe en appui aux définitions données dans un langage symbolique pourrait aider à prendre en compte un tel obstacle car comme on peut le relever pour conclure, certains aspects de la dérivée et notamment le nombre dérivé sont difficiles à décrire dans un texte « muet », cela suppose que les ostensifs visuels interactifs pourraient être une ressource importante autant pour les élèves que pour les enseignants (Park, 2016).

S'agissant de l'introduction de la fonction dérivée, les manuels utilisent la même définition que dans le cas du nombre dérivé à savoir la limite du taux de variation en un point x_0 puis ils remplacent la valeur de x_0 par x. Au niveau de la définition de la fonction dérivée, la notion de limite qui a permis de calculer le nombre dérivé en x_0 n'existe plus et du coup il devient difficile de comprendre ce qu'est la fonction dérivée puisque le nombre dérivé est introduit à l'aide de la limite, cependant, la fonction dérivée dans les manuels analysés n'est pas institutionnalisée sur la base de la limite. Nous observons ici une absence d'une expression semblable à celle qui a permis de définir le nombre dérivé en un point. Cette absence peut ouvrir la voie à plusieurs interprétations parmi lesquelles le fait que les auteurs du manuel puissent mettre un accent sur la manipulation algébrique n'aide pas les élèves à développer leurs compétences au sujet de la dérivée (Gantois, 2012). Nos observations nuancent celles faites par Park (2016). En effet, Park (2016) avait relevé dans ses analyses que les auteurs des manuels analysés dans cette étude, après avoir introduit le nombre dérivé en x_0, ont remplacé x_0 dans l'expression $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ par x, ce qui leur a permis de définir la fonction dérivée de la manière suivante : $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ c'est-à-dire que les manuels qu'elle avait analysés ont pris appui sur la limite d'un quotient différentiel pour arriver à la fonction dérivée, définissant ainsi la fonction dérivée sur la base de la limite du taux de variation. Dans notre étude, il ne s'agit pas de la même démarche qu'emploient les auteurs des manuels puisque la dérivée n'est pas institutionnalisée à l'aide de la limite du taux de variation.

Au niveau de l'élaboration des formules de dérivation, une interprétation possible serait qu'une telle manière de présenter un cours de niveau préuniversitaire (secondaire au Cameroun) donne l'impression d'être plutôt en présence d'un cours de mathématique universitaire puisqu'en l'absence des situations significatives et authentiques, il est difficile de s'imaginer que l'élève puisse développer une réelle compréhension, une bonne maitrise et une manipulation adéquate de ces résultats. Ce niveau de praxéologie est donc qualifié par Gantois (2012) et Rouy (2007) de *praxéologie à trous avec un niveau de rationalité zéro* car ces deux auteurs considèrent que ces cours d'analyse en général sont des cours avec des approches de type universitaire dans lesquels les élèves n'ont aucun moyen de réfléchir sur la pertinence des résultats proposés, l'accent étant mis sur leur utilisation de ces résultats pour résoudre les tâches proposées. De notre point de vue, la manière dont les manuels abordent la dérivée notamment l'existence d'un discours technologique implicite en appui aux ostensifs symboliques ne peut que renforcer les préférences des élèves pour la manipulation algébrique.

Au sujet de la tangente, les activités développées dans les manuels ne semblent pas dépasser la conception qu'auraient les élèves de la droite tangente vue dans les cours de géométrie et dont la recherche a abondamment documenté les manifestations qui affectent la compréhension des élèves lorsqu'il est question d'étudier la tangente dans un cours d'analyse, où la tangente à un autre statut (Biza et al., 2006; Castela, 1995; Vivier, 2010, 2013b). Finalement, on peut relever que les auteurs des manuels utilisés par les élèves et les enseignants sont conformes aux attentes du programme et ceci traduit le rapport institutionnel à la dérivée.

5.1.2- Rapport personnel des enseignants et utilisation des ressources

Dans le cadre de cette étude, nous avons questionné trois enseignants aux parcours différents, chacun ayant un rapport aux mathématiques qui détermine sa façon de faire ou de percevoir son travail d'enseignant. Selon nos analyses, les trois enseignants ayant participé à cette étude ont un rapport à la dérivée qui diffère par moment les uns des autres. Les différents aspects de la dérivée comprenant la pente, la vitesse et la limite du taux de variation ressortent dans ces rapports même si l'on peut constater que la dérivée associée à la pente de la droite tangente semble être le plus représentatif du rapport de ces enseignants. Quelques différences sont dégagées entre ces différents rapports. Par exemple, la dérivée vue comme vitesse est relevée dans le discours d'Alex et de Bernard tandis que la dérivée associée à la limite du taux de variation y est absente mais apparait dans le discours de Charles. De même que ces trois enseignants ont bien conscience des problèmes d'optimisation qui exerceraient une influence sur la compréhension approfondie de la dérivée. Sur ces problèmes d'optimisation, le manuel scolaire n'y accorde pas assez d'importance et de ce fait les enseignants n'y accordent pas non plus de l'importance puisqu'ils considèrent tous que les contenus des manuels qu'ils utilisent sont conformes à leurs attentes en lien avec le programme de mathématiques.

S'agissant de la vision de ces enseignants de l'enseignement et de l'apprentissage de la dérivée, les propos tenus par les enseignants et qui ressortent dans nos analyses contenues dans le chapitre 4 de cette thèse témoignent de leurs choix qui sont conditionnés d'une part par le programme officiel et également par le manuel unique homologué par l'institution Ministère des enseignements secondaires. Nous soulignons dans ce cas l'alignement étroit du rapport personnel des enseignants au rapport institutionnel dans la mesure où selon ces enseignants, le but de l'enseignement de la dérivée est d'amener les élèves à calculer la fonction dérivée d'une fonction donnée pour étudier le signe de la dérivée, et enfin tracer une esquisse du graphe de la fonction. En guise d'exemple, les auteurs du programme de mathématiques recommandent la mobilisation des ostensifs symboliques et graphiques pour enseigner les concepts mathématiques. Cependant, les enseignants quant à eux estiment que les ostensifs graphiques ne sont pas nécessaires pour aider les élèves à conceptualiser la dérivée. Ceci constitue le premier point de tension entre le rapport personnel des enseignants et le rapport institutionnel. Le deuxième élément qui témoigne d'une possible tension entre le rapport personnel des enseignants et le rapport institutionnel se situe au niveau de l'introduction de la notion d'approximation et d'optimisation. Pour les auteurs du programme, il est important, à la fin de l'année scolaire, que l'élève puisse être capable de résoudre les problèmes d'optimisation dans des situations concrètes. Or, les enseignants de cette étude trouvent qu'enseigner l'approximation à ce niveau semble difficile et pour cette raison, ils y accordent moins d'importance dans leurs pratiques d'enseignement. À ce niveau, il nous semble également évident que le rapport institutionnel lui-même semble ambigu sur ce point vu que l'approximation n'est pas évaluée finalement dans les examens nationaux, ce qui peut légitimer la décision des enseignants de ne pas y accorder une place importante. Nous avons aussi relevé à cette fin que les enseignants justifiaient ces choix par les exigences liées aux examens de fin d'année car la finalité c'est d'aider les élèves à réussir d'une part aux examens nationaux mais également de ne pas être identifiés comme de mauvais enseignants. De ce point de vue, nous avons effectivement observé dans les sujets des dix dernières années que les principaux aspects évalués dans les examens externes sont ceux que priorisent les enseignants. Du coup, une tension émerge entre le rapport personnel de l'enseignant et le rapport institutionnel dont la résultante est que l'enseignant se présente comme un « bon sujet » de l'institution scolaire et sociale. Ces différents rapports personnels des enseignants ont des incidences sur la manière dont ils utilisent les ressources institutionnelles. Les enseignants choisissent les ressources pour préparer les notes de cours, proposer des exercices de travaux dirigés selon les exigences du programme et des examens ministériels, proposer d'autres exercices qui ne sont pas présents dans le manuel au programme, préparer les évaluations, introduire la dérivée en un point et introduire la dérivée sur un intervalle. Lorsque les objectifs poursuivis par les enseignants s'apparentent à des gestes récurrents, ils sont considérés comme des règles d'action, autrement dit, la manière de se servir d'une ressource pour satisfaire un but précis. Les enseignants ont déclaré avoir recours à plusieurs types de ressources pour enseigner la dérivée. Il apparait finalement dans leurs discours et dans les pratiques observées que le manuel scolaire de mathématiques est la principale ressource qui se situe au cœur du travail documentaire des enseignants. La question de savoir comment les enseignants choisissent le manuel avec lequel ils travaillent ne se pose pas dans le contexte camerounais puisque c'est le gouvernement qui arrête en dernier ressort le manuel à utiliser par la politique du « livre unique ». Même s'il est apparu que le manuel n'est pas la seule ressource des enseignants, l'intention d'aller vers d'autres ressources à l'instar des ressources issues d'internet ne semble pas avoir plus d'influence sur le travail de ces enseignants. En effet, comme le relèvent certains auteurs, les usages que font les enseignants des différentes ressources sont différents d'un enseignant à l'autre (Gueudet & Lebaud, 2016) et de nombreux enseignants accordent plus d'importance aux exercices proposés dans le manuel comme principal critère de choix d'un manuel. De nos analyses il ressort que le programme officiel et le manuel scolaire constituent les deux principales ressources sur lesquelles s'appuient les enseignants pour planifier et enseigner en classe dans le contexte camerounais. Même quand ils vont à la recherche d'autres ressources pour enrichir leur enseignement, ils s'assurent que ces ressources s'alignent sur les ressources institutionnelles et qu'elles leur permettent en même temps de mieux préparer leurs élèves aux examens ministériels. À cet effet la principale raison pour laquelle les enseignants avaient une préférence pour ces deux ressources était liée à l'examen ministériel de fin d'année.

Une autre de forme de ressources dont se servent les enseignants est la participation aux forums des enseignants. Ces derniers ont déclaré que leur participation dans ces forums avait pour but d'améliorer les enseignements et les apprentissages de leurs élèves. Les trois enseignants de cette étude accordent de l'intérêt aux discussions issues des forums des enseignants. Cependant, cet intérêt pour le travail collaboratif se résume à l'utilisation et à une collaboration limitée dans la construction des ressources d'enseignement. Les enseignants harmonisent donc leurs visions de l'enseignement des concepts et donc de la dérivée. Certains membres de la communauté produisent des notes de cours, et partagent avec d'autres enseignants : il s'agit dans ce cas d'une mutualisation des ressources (mise en commun de ressources élaborées séparément) et non d'un travail collaboratif et coopératif (Gueudet & Trouche, 2009a). Nous émettons donc l'hypothèse que tous ces enseignants sont des utilisateurs de ces ressources produites par quelques enseignants et ne sont pas inscrits dans une démarche de communauté de pratique. La genèse documentaire des enseignants est un processus qui fonctionne à double sens entre l'enseignant et les ressources. Ce processus s'organise autour des concepts d'instrumentation et d'instrumentalisation. Nous avons noté que les enseignants de cette étude pouvaient sélectionner les ressources, ils pouvaient les adapter ou les réorganiser afin de planifier et de réaliser leur processus d'enseignement (instrumentalisation), par contre, nos résultats indiquent que bien que les enseignants se situent dans une approche d'instrumentalisation, ils sont soumis aux contraintes des ressources, notamment le manuel de mathématiques qui ne permet pas aux enseignants de modifier leurs rapports personnels et la manière d'utiliser ces ressources. Ce qui nous amène à penser que le processus d'instrumentation est implicite, autrement dit, les règles d'action qui se sont construites tout au long de leurs années d'expérience d'enseignement de la dérivée se focalisent davantage sur l'instrumentalisation des ressources.

Nos observations ont conduit à la constatation selon laquelle le programme officiel et le manuel sont deux ressources fondamentales du travail des enseignants et ils influencent leur activité de préparation de cours et même au niveau de l'enseignement. Par exemple, nous avons observé que les enseignants apprennent de l'utilisation de ces ressources dans la mesure où ils peuvent par moment trouver que certaines parties du manuel ne sont pas adaptées à leurs besoins et pour cela ils vont à la recherche de nouvelles ressources. Leurs connaissances de ces ressources se développent et évoluent. Le processus d'instrumentation est donc observable dans ce que font ces enseignants car leur travail est effectivement conditionné par ces ressources puisque leur rapport personnel même ne résiste pas aux influences de celles-ci. Au niveau du processus d'instrumentalisation nous avons observé comment les enseignants pouvaient tenter de façonner les spécificités des ressources en les adaptant à leurs besoins en fonction de leur rapport personnel. Cependant, très vite, on constate que les contraintes des ressources prennent le dessus et obligent les enseignants à développer davantage l'aspect concernant l'instrumentalisation.

5.1.3- Influence du rapport personnel sur l'utilisation des ressources et les pratiques d'enseignement de la dérivée

Les résultats obtenus et présentés dans cette section tentent de répondre à la question de savoir « Comment les invariants opératoires identifiés dans les discours des enseignants influencent-t-ils leur utilisation des ressources et leurs pratiques d'enseignement de la dérivée? » Autrement dit, l'objectif est d'analyser les pratiques d'enseignement des enseignants de l'étude au regard de leurs schèmes d'utilisation des ressources, des praxéologies mathématiques et didactiques présentes lors de l'enseignement de la dérivée. Pour répondre à cette question nous avons analysé le travail des enseignants en classe en portant un regard sur les praxéologies mathématiques et didactiques développées pendant l'enseignement. Comme la mise en place de ces différentes praxéologies nécessite des interactions permanentes avec les différentes ressources d'enseignement, cette analyse permet donc d'établir dans quelle mesure ces ressources et le rapport personnel des enseignants modifient le développement de ces praxéologies. Globalement, les praxéologies didactiques développées en classe par ces trois enseignants mettent l'emphase sur quatre des six moments didactiques : le moment de la rencontre avec la nouvelle organisation mathématique, le travail de la technique, le moment de l'institutionnalisation et le moment de l'évaluation. Le moment du travail de la technique se retrouve en général dans les autres moments.

S'agissant du moment de la première rencontre avec l'organisation mathématique, nos analyses contenues dans le chapitre 4 section 4.5 nous ont permis de relever d'une part que les enseignants utilisaient régulièrement avec quelques légères modifications les activités proposées par les auteurs du manuel. Ces activités, constituant des ressources importantes pour ces enseignants, leur ont permis dans certains cas d'aborder l'introduction du nombre dérivé et des autres sous-tâches liées à la dérivée. Les enseignants, guidés par leur rapport personnel lourdement influencé par le rapport institutionnel se sont heurtés par moment à la complexité de ces activités qui servaient de moment de première rencontre avec la dérivée. Dans les trois classes observées, les activités ayant servi à présenter le premier moment aux élèves provenaient essentiellement du manuel de l'enseignant. Comme observé dans les manuels, ces ressources ne répondaient pas à la question de la raison d'être des apprentissages engagés. La phase d'institutionnalisation qui a été fortement présente dans le travail des enseignants a été amplement soutenue par les ressources institutionnelles. En effet, l'organisation mathématique observée dans les pratiques enseignantes était parfois résumée à la phase d'institutionnalisation, notamment une définition ou une propriété tirée du manuel de mathématique. En général, c'est après avoir achevé l'activité et en présence de la définition que les élèves pouvaient se rendre compte de la nouvelle notion en jeu. Dans certains cas, par exemple le cas de l'enseignant Alex, nous avons observé qu'au niveau de l'activité proposée aux élèves lors de la première rencontre, il y avait trois types d'ostensifs : un ostensif algébrique, un ostensif graphique en appui de la tâche décrite et appuyée par le discours de l'enseignant qui reprenait l'énoncé et finalement un autre ostensif, cette fois-ci un ostensif verbal oral.

Le choix des ressources utilisées par certains enseignants est expliqué de différentes manières par les enseignants. Pour l'enseignant Bernard, le fait de choisir des activités issues des ressources institutionnelles vise à *« faire comprendre que la notion de dérivée en fait part de la notion de taux de variation qu'ils ont vue en classe de seconde C ».* On observe ici que l'enseignant se situe dans les orientations véhiculées par les programmes officiels et le manuel scolaire. Cette première observation fait donc de cet enseignant un bon sujet de l'institution. Par ailleurs le rapport personnel de l'enseignant Charles au sujet de la tangente par exemple laisse observer que *« la dérivée et la tangente sont intimement liées, il y a une relation qu'il faut bien établir »* et pour l'enseignant, il est important de faire le lien entre les différents aspects de la dérivée. L'enseignant fait le choix d'une ressource qui permet d'articuler les ostensifs graphique et algébrique. Le rapport personnel de Charles selon les données d'entretien a permis de constater que sa vision de la dérivée, de son enseignement et de son apprentissage s'aligne au rapport institutionnel contenu dans le programme et dans le manuel utilisé. Cependant, au moment de l'enseignement de la tangente, l'enseignant fait le choix d'introduire la tangente comme un moyen de faire comprendre le lien entre la droite tangente et le nombre dérivé et pas simplement comme une interprétation du nombre dérivé. En le faisant, l'enseignant a opérationnalisé la distance entre son rapport personnel et le rapport institutionnel. Revenant sur l'introduction du nombre dérivé lors de la discussion que nous avons eue après ce premier cours d'introduction du nombre dérivé, Charles a relevé qu'il aurait bien voulu introduire la dérivée à l'aide de la droite tangente; cependant, le choix opéré lors de l'enseignement, à savoir introduire la dérivée comme limite du taux de variation, lui est imposé par le programme officiel comme il le souligne dans cet extrait : *« on pouvait justement introduire le cours sur la dérivée avec cette notion de tangente. Mais à cause de l'exigence du programme je me suis confiné sur la limite du taux de variation ».* Pendant l'enseignement, la fonction dérivée a été introduite comme la limite d'un taux de variation, cependant, au moment de l'institutionnaliser, la fonction dérivée ne faisait plus référence à la limite qui a servi à l'introduire, c'est du moins ce qui a été observé dans les pratiques enseignantes d'Alex et de Bernard. Les enseignants se contentent d'offrir aux élèves des formules de dérivation considérées comme des recettes qui permettront aux élèves de calculer les fonctions dérivées tout simplement en appliquant ces formules. C'est à ce moment que s'observe le travail de la technique. Les enseignants n'insistent pas sur la manière d'obtenir les différentes formules de dérivation, ce qui peut être interprété comme quoi le but principal poursuivi ici par les enseignants est de préparer rapidement les élèves à l'étude des variations d'une fonction. De plus, lors de nos discussions sur leur rapport personnel au sujet de l'importance de l'apprentissage de la dérivée, les enseignants de cette étude étaient unanimes sur le fait que le plus important pour les élèves était de pouvoir étudier les variations des fonctions comme l'exigeait l'examen ministériel de fin d'année. Nous considérons que le choix fait par ces enseignants à ce niveau de leurs pratiques d'enseignement est justifié par cet examen ministériel de fin d'année.

Par ailleurs, la pratique enseignante développée par Charles semble différente de celle des deux autres enseignants de l'étude. Comme dans le cas des deux autres enseignants, Charles fait remplacer dans la formule $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ le x_0 par un x. L'enseignant va plus loin et par un changement de variable dans lequel $h = x - x_0$ l'enseignant parvient à établir la formule $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$. Bien que cette dernière formule puisse permettre d'obtenir directement l'expression de la fonction dérivée, nous n'avons pas noté la mise en application de cette formule dans des exemples, néanmoins elle présente la fonction dérivée aussi comme la limite d'un taux de variation. Donc il y a évidemment dans la pratique de Charles une réelle tentative de généralisation du nombre dérivé par la fonction dérivée même s'il ne l'explicite pas dans son discours, ni ne l'exemplifie pas pour permettre aux élèves de se rendre compte de son fonctionnement. Charles va plutôt annoncer un tableau récapitulatif qui va permettre de calculer la dérivée de tout type de fonction comme l'illustre cet extrait : *« Toutes ces formules ont été établies avec le nombre dérivé, vous pouvez les retenir et les appliquer simplement ».* De cette manière, cette technique de calcul sera utilisée pour établir toutes les autres formules de dérivation des fonctions élémentaires, des fonctions polynomiales, rationnelles et des fonctions irrationnelles. Les élèves vont donc appliquer les formules de dérivation sur des exemples choisis par l'enseignant, ce qui correspond une fois de plus au moment du travail de la technique. Nous émettons l'hypothèse que le but ultime de l'enseignant serait de permettre aux élèves d'atteindre rapidement les formules de calcul des dérivées et qu'ils soient capables de les utiliser car ces formules sont nécessaires dans l'étude des variations des fonctions. Contrairement aux deux autres enseignants, on peut voir chez Charles des actions liées à sa propre vision de l'enseignement de la dérivée, cependant, la présence des contraintes institutionnelles l'oblige à focaliser son attention sur les aspects qu'exige ce programme, notamment le calcul des dérivées à l'aide des formules de dérivation. Le rapport personnel de cet enseignant semble prendre le dessus sur le rapport institutionnel et nous pouvons conjecturer l'existence d'un lien avec la formation continue de cet enseignant qui rappelons-le était étudiant de maitrise en didactique des mathématiques. Ce qui nous permet de formuler l'hypothèse selon laquelle une meilleure connaissance des résultats de recherche en didactique peut permettre de modifier le rapport personnel des enseignants.

5.2- Discussion avec d'autres résultats de recherche

Dans cette section du chapitre 5, nous reviendrons sur les résultats des principaux travaux de recherche que nous avons évoqués dans le chapitre 1 pour situer nos résultats parmi les résultats connus. Dans cette thèse, le rapport institutionnel, l'utilisation des ressources et leurs influences respectives sur les pratiques d'enseignement ont fait l'objet d'analyse et les résultats obtenus ont été présentés dans la section 5.1 de ce chapitre. Comme nous l'avons relevé dans la section 5.1, les rapports personnels des enseignants observés ne sont pas tous identiques même si on peut retrouver quelques ressemblances, ceci correspond aux observations faites par González-Martín et al. (2018) en lien avec les rapports personnels de cinq enseignants de cégep avec le concept de série numérique. Ces rapports personnels au sujet de la dérivée comprennent les aspects de la dérivée comme la pente, la vitesse et la limite du taux de variation. Par ailleurs, nos résultats indiquent que l'aspect de la dérivée en un point le plus dominant dans le rapport des enseignants de cette étude est la limite du taux de variation. Nos observations semblent s'aligner avec les résultats de certains travaux notamment ceux de Zandieh (2000) qui ont permis de classifier les aspects de la dérivée les plus dominants dans les apprentissages réalisés par les étudiants. Nous ne pouvons pas déduire que les représentations des enseignants de cette étude au sujet de la dérivée traduisent effectivement les préférences de leurs élèves puisque nous n'avons pas évalué les apprentissages des élèves enseignés par les enseignants de cette étude. Autant nous ne pouvons établir que le fait que les auteurs des programmes ou des manuels aient été informés des résultats des travaux de Zandieh (2000) sur l'apprentissage de la dérivée. Néanmoins, nous pouvons relever que les différents aspects de la dérivée évoqués par les enseignants observés constituent un mélange de leur propre rapport personnel et du rapport institutionnel au sujet de la dérivée avec une forte représentation de l'aspect véhiculé par les ressources institutionnelles.

L'analyse du rapport institutionnel a pris en compte l'analyse des programmes, des manuels, des examens ministériels et des pratiques enseignantes. Les ressources des enseignants sont constituées principalement des programmes de mathématiques et des manuels scolaires, avec une place prépondérante pour le manuel scolaire, en concordance avec le travail de (Sträßer, 2009). Il ne s'agit pas simplement de souligner la prépondérance du manuel dans l'environnement scolaire ou simplement celui de la salle de classe. Le manuel peut aussi être considéré comme un des artefacts avec lesquels l'enseignant déploie un enseignement et de ce fait il joue un rôle particulier en mathématique en tant que discipline comparée à d'autres disciplines scolaires (Sträßer, 2009). Notre thèse laisse observer que les enseignants participants, en tant que médiateurs entre le contenu du manuel et les élèves, modifient très légèrement le manuel de mathématiques et cela peut laisser penser à un faible travail documentaire puisque ces enseignants se limitent majoritairement à une seule ressource. Aussi, nous avons observé que les enseignants utilisent le contenu du manuel avec souvent très peu de modifications, ce qui peut avoir pour effet de modifier le style d'enseignement qu'ils auraient pu développer tenant en compte leur propre vision de l'enseignement. . C'est ce qui semble justifier le lien que nous avons pu établir entre le style d'enseignement choisi par les enseignants et le contenu du manuel utilisé (Lithner, 2004) vu que les trois enseignants ont utilisé la même organisation des contenus tels que proposés dans le manuel. Le contenu du manuel, entre autres éléments, a donc pour effet de façonner de quelle manière l'enseignant enseigne la dérivée (González-Martín, 2015, p. 2124). Les trois manuels analysés dans cette thèse véhiculent la même vision de la dérivée, à savoir la limite du taux de variation. Cette observation nuance les résultats obtenus par Raman (2004) dans une étude où l'auteure a observé qu'a propos de l'introduction de la notion de continuité dans trois manuels utilisés aux États-Unis, chacun des manuels analysés véhiculait une vision différente de la continuité et ces visions étaient parfois contradictoires, ce qui aurait pour effet de changer la perception de ce que les élèves peuvent avoir de ce concept (Raman, 2004). Dans cette thèse, la vision commune véhiculée par les trois manuels fait de la dérivée la limite d'un taux de variation, et cette vision est elle-même soutenue par le contenu du programme de mathématiques.

De plus, les contenus de ces manuels analysés ont développé des organisations mathématiques qui mettent l'emphase sur le bloc pratique en ce qui concerne l'introduction du nombre dérivé. Cependant, nous avons observé qu'en ce qui concerne les autres parties des contenus associés à la dérivée, c'est le bloc théorique qui est le plus en vue puisque c'est à travers des propriétés que le lecteur découvre la technique en jeu. En d'autres termes, la technologie contient en elle-même la technique. Dans le chapitre portant sur la problématique, nous avons évoqué les résultats de González-Martín et al. (2013) qui ont observé que dans l'institution enseignement secondaire, l'organisation mathématique en jeu dans les manuels de mathématiques au sujet des nombres réels et irrationnels est axée sur le bloc pratique, le bloc technologico-théorique est presqu'absent. Nos résultats apportent un autre éclairage à ce phénomène et pour cela, nous pouvons dire que selon le contexte institutionnel, l'un des blocs qui constituent la praxéologie mathématique peut être privilégié au détriment de l'autre. De tels phénomènes semblables sont observés sur la dérivée puisque s'agissant de l'enseignement de la dérivée, nous notons que certains choix institutionnels opérés dans les manuels et les programmes constituent des contraintes significatives pour les choix des autres ressources et la manière d'enseigner la dérivée en classe.

En plus, nous avons noté que les manuels utilisés par les enseignants de cette étude avaient une préférence pour l'utilisation du taux de variation comme moyen d'introduire la dérivée en un point et aussi sur un intervalle. Il est vrai que la définition formelle de la dérivée n'existe pas dans ces manuels, néanmoins, l'étude de Zandieh (1997) nous donne des idées sur la nécessité pour les auteurs des manuels et pour les enseignants de considérer la définition de la dérivée à partir du taux de variation tout en mettant un accent sur les liens entre cette définition et les autres aspects ou représentations de la dérivée. Selon nos observations, les auteurs du manuel ont focalisé leur attention sur la limite du taux de variation. Le calcul du taux de variation en lui-même est sous-entendu ou alors supposé être connu, pourtant de nombreuses études tendent à éclairer notre compréhension des difficultés à conceptualiser cette notion afin de pouvoir la réinvestir dans l'étude des dérivées. Par exemple, les manuels dans la manière d'introduire la dérivée en un point ne prennent pas en compte l'idée de covariation concomitante, pourtant, selon Passaro (2020), l'étude des accroissements permet un approfondissement du travail sur la covariation qui pourrait notamment favoriser l'introduction de la notion de dérivée. Ainsi, selon elle, le travail sur la covariation pourrait permettre, chez les élèves, la mise en place des liens qualitatifs et intuitifs entre les comportements d'une fonction et de sa dérivée (Passaro, 2020), ce qui ne nous semble pas visible dans les manuels analysés et qui pour nous peut sembler peu propice à une conceptualisation de la dérivée. Pour cela, comme l'indique la recherche, il nous semble que la compréhension véhiculée par le manuel ne peut que renforcer la difficulté à comprendre et à interpréter le taux de variation instantané comme limite du taux de variation moyen (Hackworth, 1994).

Selon nos résultats, le programme de mathématiques évoque les ostensifs symboliques et graphiques pour conceptualiser les notions mathématiques et comme nous l'avons observé, aucune indication n'est apportée sur l'intérêt d'articuler ces ostensifs. Par ailleurs, les auteurs des manuels emboitent le pas et mettent en avant les ostensifs symboliques en laissant de côté les ostensifs graphiques. Les manuels ont mis en avant le nombré dérivé en utilisant l'ostensif symbolique $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ puis son interprétation a permis de dire que $f'\ (x_0)$ est la pente de la tangente au graphe de f en $(x_0, f\ (x_0))$, mais il manque ici une autre interprétation selon laquelle $f'\ (x_0)$ est également le taux de variation instantanée. La mise en commun de ces différents éléments du faisceau sémiotique favorise la construction de sens du concept dérivé (de Almeida & da Silva, 2018). Même si Presmeg (1985) a pu expliquer une faible corrélation entre l'utilisation des ostensifs visuels pour l'enseignement et les apprentissages des élèves, il n'en demeure pas moins que cette auteure pense qu'en général les élèves reproduisent ce que font leurs enseignants. Pour cela, dans cette étude, les manuels étant fortement ancrés dans les pratiques des enseignants, la mise en avant des ostensifs symboliques au détriment des ostensifs graphiques montre bien que la vision des auteurs du manuel, et dans une certaine mesure celle des enseignants, situe les ostensifs algébriques au cœur de leurs pratiques. Hardy (2009) précise à cet effet que ce sont les institutions et les personnes qui occupent des positions dans celles-ci qui façonnent ces préférences. Cette conception des ostensifs ne peut que prêter à une interprétation selon laquelle les élèves peuvent manipuler des formules sans en comprendre l'intérêt à les utiliser pour des situations qui donnent du sens au concept (Dufour, 2019). On peut donc observer que les auteurs des manuels et les enseignants dans leurs pratiques font usage de quelques types d'ostensifs dans leur travail et comme nous l'avons indiqué ces ostensifs jouissent d'un caractère institutionnel comme c'est le cas des ostensifs algébriques et une absence est observée au niveau des pratiques des enseignants participants pour conduire leurs élèves vers la reconnaissance et la production d'autres ostensifs ou simplement la coordination entre ces ostensifs.

Le travail documentaire des enseignants de cette thèse s'inscrit dans la lignée de plusieurs travaux précédents (González-Martín et al., 2018; Gueudet, 2017; Gueudet & Trouche, 2012; Pepin et al., 2013; Trouche et al., 2019). Par exemple, nous avons observé que le rapport personnel des enseignants était relié aussi à la manière dont ils utilisaient leur manuel. L'étude de González-Martín et al. (2018) a abouti sur l'interprétation selon laquelle certains des éléments présents dans les relations personnelles des enseignants deviennent des éléments qu'ils valorisent dans le manuel, comme par exemple la manière dont le contenu sur la dérivée est organisé dans le manuel et les types d'exercices qu'ils y retrouvent. Dans nos résultats, nous avons observé que les enseignants trouvent le contenu des manuels et la manière de présenter ces contenus dans le programme adéquats à leurs attentes. Pour cela, ils utilisent le manuel où ils tirent des exercices pour vérifier l'apprentissge en classe et préparer aussi les évaluations. Un élément fort de ce lien entre le rapport personnel des enseignants et l'utlisation du manuel est le fait pour les enseignants de résoudre d'abord les travaux dirigés dans le manuel au programme. Dans l'ensemble, nous avons observé que dans les rapports personnels des enseignants, certains éléments étaient considérés comme relevant du rapport personnel des enseignants tandis que d'autres relevaient du rapport institutionnel bien que faisant partie du rapport personnel de l'enseignant. Pour cette fin, les enseignants pouvaient choisir des ressources en fonction de leurs propres attentes et selon leurs objectifs personnels poursuivis. Ce constat a été déjà fait par Mesa et Griffiths (2012) dans leur travail au niveau universitaire où les enseignants universitaires pouvaient choisir dans leurs manuels utilisés des contenus qui les facilitaient la tâche d'enseignement. D'autres aspects du travail documentaire des enseignants émergent de nos observations.

D'abord, les enseignants de cette étude participent aux forums de discussion sur les cours, ce qui correspond pour nous à une simple intention de travail documentaire de nature sociale, il apparaît que leur participation aux forums de discussion entre enseignants vise à rendre leurs cours utiles pour améliorer les apprentissages de leurs élèves. Il s'agit plus d'une mutualisation des ressources que d'un travail documentaire qui s'inscrit dans une réelle communauté de pratique (Gueudet & Trouche, 2009a). Ensuite, il faut noter comme l'a fait Gueudet (2017) que les dimensions du travail documentaire de ces trois enseignants ne peuvent être observées que sur les éléments tels que le but de l'activité, les règles d'action et les invariants opératoires. Comme nous l'avons observé, les enseignants se donnent des buts à atteindre selon les notions mathématiques à enseigner. Leur dépendance aux deux principales ressources à savoir le programme officiel et le manuel unique déterminent ce qu'ils font effectivement lors de l'élaboration de leurs cours. Pendant cette phase de construction des cours, ces enseignants apprennent de leur utilisation antérieure des ressources en choisissant uniquement les parties du manuel qui répondent aux exigences du programme. Les apprentissages qu'ils font de leurs ressources leur permettent de savoir ce qu'ils auront à utiliser du contenu de leurs ressources (instrumentation). En même temps, en voulant mettre les ressources à leurs pieds, ces enseignants se heurtent à deux contraintes institutionnelles à savoir les ressources institutionnelles d'une part et les examens ministériels d'autre part; notre thèse aboutit sur la conclusion selon laquelle le travail documentaire des enseignants dans cette étude est dominé par le processus d'instrumentation à cause des contraintes exercées par les ressources institutionnelles et les examens ministériels. On se situe ainsi dans la lignée des autres auteurs qui nous ont précédé et pour qui les rapports institutionnels pourraient affecter les rapports personnels des enseignants (González-Martín, 2015; González-Martín et al., 2018). Une question demeure néanmoins, celle de savoir de quelle manière les expériences passées des enseignants dans leur parcours d'étudiant de mathématiques, d'enseignant en formation initiale ou d'enseignants chevronnés masquent ou renforcent leurs rapports personnels. Autrement dit, les rapports à la dérivée observés sont-ils du fait de leurs expériences multiples? Les expériences passées des enseignants peuvent justifier, modifier ou permettre à ces derniers de renforcer leurs pratiques. Selon Mathieu-Soucy (2019), plusieurs expériences peuvent façonner les pratiques et les choix des enseignants : les expériences des formations implicites, les formations explicites et les expériences en relation avec les mathématiques universitaires. Dans les analyses réalisées dans cette thèse, les enseignants parlent à peine des expériences de formations explicites et développent des arguments en provenance des expériences des formations implicites tirées des discussions informelles avec des collègues, des élèves lors de l'enseignement ou dans d'autres cadres et des expériences en relation avec les mathématiques universitaires. Leurs expériences quand ils étaient étudiants les aident à appliquer aisément les démarches qui leur ont été enseignées. Ces observations nous amènent à penser que la formation des enseignants qui a été remise en cause dans la littérature et les stratégies de développement professionnel implicitement formulées peuvent constituer des freins à des pratiques attendues. Pour cela, cette formation des enseignants et leur développement professionnel pourraient être conçus pour tenir compte de la manière dont ces enseignants racontent leurs expériences et leurs pratiques en relation avec l'enseignement, l'apprentissage et les mathématiques elles-mêmes (Mathieu-Soucy, 2019).

Les pratiques d'enseignement de la dérivée n'échappent pas aux contraintes institutionnelles. En effet, nous avons analysé dans le cadre de ce travail l'introduction du nombre dérivé et le passage du nombre dérivé à la fonction dérivée tout comme l'avait fait Park (2015) dans son étude avec une approche théorique basée sur la communication. Nos analyses sont basées sur la TAD, laquelle nous a permis d'identifier principalement quatre moments didactiques prépondérants dans le travail des enseignants. Le moment du travail de la technique quant à lui est présent mais les techniques présentées ne sont pas justifiées. On apprend aux élèves à dériver les fonctions sans qu'ils ne sachent en réalité pourquoi, ou alors sans qu'ils ne sachent au préalable quel est le problème à résoudre quand ils s'engagent dans une nouvelle activité. Même si par moment les enseignants tendent à faire émerger une technique, ces tentatives ne semblent pas fonctionner à priori étant donné que les élèves rencontrent des difficultés avec les expressions contenant les radicaux, les fractions et les techniques de factorisation. Il semble donc que l'enseignant se situe dans un cycle dans lequel il est difficile d'en sortir, ce cycle comprend l'exploration de la tâche ↔ une technique embryonnaire implicite ↔ l'institutionnalisation ↔ l'évaluation. Comme l'ont observé Barbé et al (2005), les pratiques des enseignants développent des praxéologies qui favorisent la routinisation des techniques implicites et dans un tel contexte, les organisations mathématiques construites sont incomplètes et non structurées. Ces techniques ne peuvent être justifiées de prime abord, la phase d'institutionnalisation cède rapidement la place à une évaluation dont le but principal est de s'assurer que la routine fonctionne. Cette préférence pour les aspects relatifs aux routines des techniques implicites de calcul de la dérivée pousse les enseignants à faire leurs choix des ressources sémiotiques pour enseigner la dérivée. Ainsi, comme Park (2015) l'a observé dans son étude, l'absence des liens explicites entre les différents aspects de la dérivée n'a contribué qu'à accentuer l'utilisation des ostensifs algébriques. De plus, nous avons relevé dans le chapitre 4 de quelle manière les trois enseignants ont introduit la dérivée en un point et comment s'est déroulé le passage de la dérivée en un point à la dérivée sur un intervalle.

Le processus d'enseignement des trois enseignants laisse observer un style direct, c'est-à-dire un cours magistral avec quelques interactions élèves-enseignant. Dans un tel contexte, le discours de l'enseignant dans la classe était plus dominant que celui des élèves (Güçler, 2014). Dans les interactions observées entre l'enseignant et ses élèves, l'ostensif algébrique était dominant avec une présence aussi importante de l'ostensif verbal. Comme observé dans l'étude de Dufour (2011), le travail sur les ostensifs graphiques est rare, une fois présenté dans l'activité de mise en route, c'est à peine que les autres activités font revenir les ostensifs graphiques. Comme dans l'étude de Dufour (2011), les ostensifs dont se servaient les enseignantes étaient le plus souvent des ostensifs institutionnels et que ces ostensifs utilisés tant au niveau algébrique que graphique étaient des ostensifs assez formels que l'on pouvait retrouver dans le manuel utilisé par ces enseignants (Dufour, 2011).

5.3- Contributions et retombées de la thèse

Cette thèse prend pour cause le fait que dans un contexte comme celui du Cameroun où se posent les enjeux liés au développement, l'enseignement des sciences en général et celui des mathématiques en particulier vise à améliorer les compétences des élèves en sciences. L'enseignement secondaire dans un tel cas apparaît comme le niveau où se structurent les connaissances et les habiletés nécessaires pour les études universitaires. En prenant appui sur le concept de dérivée, nous avons ainsi identifié en second lieu tous les autres concepts mathématiques qui interviennent à ce niveau. L'étude, par son intérêt sur le plan social permet de comprendre les caractéristiques du milieu qui structurent et conditionnent le déroulement de l'enseignement et de l'apprentissage de la dérivée. Cette connaissance du contexte est nécessaire en didactique pour envisager des pistes qui visent une amélioration des ressources existantes. . À ce jour, aucune recherche sur le plan africain n'a évoqué la problématique de l'enseignement de la dérivée en prenant en compte de manière globale les pratiques d'enseignement, les perceptions des enseignants au sujet de la dérivée, les praxéologies didactiques et mathématiques et plus globalement les schèmes d'utilisation des ressources utilisées par les enseignants pour enseigner la dérivée. Face aux nombreuses études connues jusqu'ici en Amérique du Nord et en Europe sur l'apprentissage de la dérivée, cette thèse apporte un autre éclairage sur l'enseignement de la dérivée dans un contexte où les enseignants ont peu de marges de manœuvre, parfois même, ils ne sont même pas conscients de certaines marges de manœuvres existantes. La connaissance d'un tel contexte permet de nuancer certains résultats de recherche obtenus dans d'autres contextes. La problématique que soulèvent les enjeux liés aux ressources d'enseignement est une contribution importante de cette thèse. La modification des curricula et leur mise en pratique s'accompagnent en général de réticences de la part des acteurs de l'enseignement que sont les enseignants. Dans notre contexte, nous constatons que les enseignants se comportent comme de bons sujets de leur institution. Une institution qui offre des ressources limitées, parfois très critiquées dans le domaine de la recherche du fait de leur faible qualité didactique (Belinga, 2009). Une contribution qu'offre cette thèse est donc de permettre de mieux saisir ces enjeux liés aux ressources, puis de leur utilisation du point de vue de l'anthropologie des savoirs et de nourrir la réflexion sur la construction de nouvelles ressources institutionnelles, ou mieux de l'amélioration de celles qui existent. Sur le plan scientifique, nous avons exploré de nombreux articles scientifiques en lien avec l'objectif général de cette thèse. De nombreux travaux de recherche ont soulevé les questions en lien avec les difficultés des élèves/étudiants en calcul (Bressoud et al., 2016; Ferrini-Mundy & Graham, 1994; Rasmussen & Ellis, 2013; Rasmussen et al., 2014; Tall, 1993). Certaines études ont porté sur les difficultés des élèves/étudiants au sujet de la dérivée (Asiala et al., 1997; Aspinwall et al., 1997; Byerley et al., 2012; Nemirovsky & Rubin, 1992; Orton, 1983; Park, 2012, 2013; Zandieh, 1997, 2000). D'autres auteurs ont mis un accent sur les difficultés liées aux notions mathématiques connexes à la notion de dérivée (Biza et al., 2006; Byerley et al., 2012; Monaghan, 1991; Orton, 1984; Russo, 1962; Schneider, 1992; Sierpinska, 1985, 1992; Thompson & Carlson, 2017; Weller et al., 2004; Williams, 2001).

Au sujet de l'enseignement, on a noté quelques études dans lesquelles des interventions sont proposées pour améliorer l'apprentissage de la dérivée (Gantois & Schneider, 2008; Giraldo & Carvalho, 2006; Giraldo et al., 2003) alors que d'autres auteurs ont mis en évidence les pratiques d'enseignement de la dérivée en classe (Dufour, 2011, 2019; Hitt & Dufour, 2021; Park, 2015) ou même l'introduction de la dérivée dans les manuels scolaires (de Almeida & da Silva, 2018; Park, 2016). Lorsqu'on essaie d'identifier des études qui portent sur l'enseignement de la dérivée, on en trouve très peu autant celles qui portent sur l'utilisation des ressources en général sont inexistantes même si quelques auteurs ont analysé l'introduction de la dérivée dans le manuel considéré comme principale ressource des enseignants. Même lorsque des études existent, elles se focalisent sur certains aspects des pratiques enseignantes. Par exemple, Dufour (2011) a étudié les représentations utilisées par deux enseignantes lors de l'enseignement de la dérivée. Dans cette thèse nous avons le mérite de combler à notre niveau certaines de ces lacunes en apportant de l'éclairage sur les contraintes qui obstruent les pratiques des enseignants dans l'enseignement de la dérivée et aussi sur leur utilisation des ressources y compris les ostensifs. Finalement, nous avons relevé que les recherches qui ont été identifiées sur l'apprentissage et l'enseignement de la dérivée ont eu principalement comme cadre d'analyse des théories psycho-cognitives (Amit & Vinner, 1990; Biza et al., 2006; Castela, 1995; Dufour, 2011; Ferrini-Mundy & Graham, 1994; Habre & Abboud, 2006;

Orton, 1983; Park, 2012, 2013, 2015, 2016; Tall, 1993; Tsamir et al., 2006; Tyne, 2014; Weigand, 2014; Zandieh, 1997, 2000). Selon Arzarello, Bosch, Lenfant et Prediger (2007), la diversité des approches dans la communauté scientifique et notamment dans les recherches en éducation constitue un défi au moins pour trois raisons. D'abord, sur le plan de la communication, les chercheurs issus des cadres théoriques différents ont parfois des difficultés à se comprendre en profondeur en raison de leurs parcours, de leur langue et des hypothèses implicites différentes. Ensuite se pose le problème de l'intégration des résultats empiriques puisque différents chercheurs utilisant différentes perspectives théoriques abordent les phénomènes empiriques sous différents angles et aboutissent à des résultats différents. Enfin, l'un des défis des progrès observés dans le domaine de la recherche se manifeste par le fait que plusieurs études sont portées par des perspectives théoriques différentes, de ce fait il devient impossible de faire le lien entre ces études, ce qui entrave l'amélioration des pratiques d'enseignement et d'apprentissage (Arzarello et al., 2007). Faire usage de plusieurs théories permet à celles-ci d'entrer en interaction et peut aider à exploiter plus conséquemment la richesse de la diversité des théories (Prediger et al., 2008). À travers la combinaison d'une analyse du point de vue des institutions (Chevallard, 1999) et aussi suivant l'approche documentaire du didactique (Gueudet & Trouche, 2010b) cette étude a permis de contribuer à une meilleure compréhension des pratiques des enseignants dans l'enseignement et l'utilisation des ressources pour enseigner la dérivée.

5.4- Limites et implications de la recherche

Étant donné notre approche méthodologique qui est de type qualitatif, il n'est pas possible de parler d'une généralisation de ces résultats de recherche. Cependant, bien que nous ne visions une validité statistique, on observe que les trois enseignants choisis ont des caractéristiques presque similaires à un grand nombre d'enseignants dans le même contexte, ceci nous permet de faire quelques observations générales. Ils travaillent dans la même région et participent aux mêmes forums où plusieurs enseignants discutent de leurs difficultés professionnelles, où ils produisent des notes de cours qu'ils partagent ensuite dans leur forum et que les autres enseignants peuvent utiliser. Compte tenu également du fait qu'ils ont reçu la même formation initiale que les enseignants de la région (ils sont les trois des anciens étudiants de l'Université de Yaoundé) et qu'ils sont assujettis aux mêmes contraintes institutionnelles que l'ensemble des enseignants du Cameroun, il nous semble donc raisonnable d'émettre l'hypothèse que d'autres analyses portant sur un grand nombre d'enseignants pourraient contribuer à valider à plus grande échelle les résultats obtenus. Néanmoins, des hypothèses peuvent être formulées quant à la possibilité de retrouver les mêmes caractéristiques auprès d'autres enseignants de ce contexte. Ces remarques appellent à l'intérêt qu'il y a de mener d'autres études sur les contraintes que subissent les enseignants dans le contexte camerounais (ainsi que dans d'autres pays africains avec des contextes institutionnels semblables) dans le choix, l'utilisation et les raisons d'utiliser les ressources. Ainsi, ces études permettraient d'enrichir davantage la littérature internationale sur la formation et la pratique des enseignants pré-universitaires, fortement dominée par des études menées dans le contexte européen et nord-américain.

S'agissant d'autres limites de l'étude, nos hypothèses à l'idée de voir émerger des biais dus au contexte de la recherche semblent partiellement validées. Nous avons trouvé sur le terrain d'investigation des enseignants très motivés à partager leurs pratiques avec nous. Le comportement de méfiance qui était attendu n'a pas pu être perceptible. Les enseignants ont parlé avec aisance de leur quotidien et de leur travail de préparation pour enseigner la dérivée. Cependant, il nous est apparu par moment lors des entretiens que certains enseignants nous parlaient des aspects de leur travail qui permettraient de les valoriser et de les dédouaner d'éventuels manquements observés lors de leurs enseignements. Bien plus, notre thèse constitue une étude exploratoire qui vise à analyser les pratiques des enseignants et leur utilisation des ressources dans les activités de préparation et d'enseignement de la dérivée, nous avons fait le choix d'une étude de cas qui a permis de travailler avec trois enseignants tous situés dans une seule région du pays; le nombre d'enseignants choisis pour participer à cette étude constitue une limite.

Chacun des trois enseignants ayant sa vision personnelle de la dérivée et de son enseignement, d'autres investigations méritent d'être faites sur les contraintes observées ou évoquées par les enseignants eux-mêmes. Par exemple, on pourrait leur demander comment ils envisageraient un cours sur la dérivée si les contraintes liées à l'examen et aux ressources institutionnelles n'existaient plus. Ensuite, il serait aussi pertinent de questionner les personnes qui dans l'institution façonnent les décisions en lien avec l'élaboration des programmes et des manuels qu'utilisent les enseignants. Comme mentionné plus haut, ces enseignants sont issus de la même école de formation initiale des enseignants. Bien qu'ayant des cursus mathématiques différents, les éléments qui justifient leurs rapports personnels à la dérivée peuvent trouver source dans leurs expériences multiples. Ces dernières peuvent être reliées à leur formation en mathématique universitaire, leur formation initiale en enseignement ou à leurs expériences acquises dans la pratique enseignante au quotidien. Nous pourrons donc émettre l'hypothèse selon laquelle la formation initiale ou continue des enseignants influence leur rapport personnel à la dérivée et la manière dont ils auront à construire leur système de ressources nécessaires à l'enseignement de la dérivée. Finalement, nous notons des différences dans les rapports personnels des trois enseignants, dans la manière d'utiliser les ressources ainsi que dans la manière d'enseigner la dérivée en classe et que le seul moment où les pratiques de ces trois enseignants se rejoignent c'est la manière d'introduire la dérivée en un point ou sur un intervalle; cette manière est d'ailleurs dictée par le programme de mathématiques et le manuel unique utilisé par les enseignants. Nous pensons qu'analyser tout ce qui constitue la noosphère entourant l'enseignement de la dérivée serait une belle avenue pour les didacticiens des mathématiques. Sur le plan méthodologique, nous avons fait usage de deux approches théoriques et nous estimons qu'elles ont été efficaces pour nous aider à comprendre le processus de planification et d'enseignement de la dérivée. Cependant, nous n'avons pas été capable de caractériser à l'aide de l'ADD les quatre éléments qui structurent le travail documentaire des enseignants ceci à cause des contraintes liées au cadre des études doctorales. L'observation des enseignants a été faite sur une période courte. Le temps limité dans le cadre de cette thèse n'a pas permis d'explorer l'inférence que ces enseignants auraient faite de leurs ressources utilisées dans le cadre de cette recherche. Une telle démarche aurait prolongé nos études d'au moins une année supplémentaire. Un prolongement de ce travail serait d'aller sur le terrain ultérieurement pour voir comment le travail documentaire précédent de ces enseignants s'est vu amélioré notamment dans le cas de l'enseignant Charles dont la formation en didactique des mathématiques pourrait avoir pour effet de modifier sa vision de l'utilisation des ressources et comment s'est fait l'inférence sur d'autres contextes d'enseignement. Pour cela, d'autres études sont nécessaires pour pouvoir valider les résultats obtenus dans cette thèse.

Également, lors des observations en classe, l'un des aspects non contenus dans nos objectifs de recherche était relié à la manière dont l'enseignant assurait la gestion des apprentissages des élèves. Cet aspect n'a pas été assez documenté lors des entretiens réalisés après l'enseignement pendant lesquels l'objectif poursuivi était d'avoir une réaction de l'enseignant sur sa prestation en classe. Pendant ces rencontres brèves d'environ 30 minutes, l'enseignant revenait sur le cours qu'il venait de réaliser en classe de manière brève. Ces éléments supplémentaires ont été incorporés dans le corpus des données d'entretiens préalables et les analyses ont abouti aux résultats ci-dessus mentionnés. Si nous avions pris en compte la manière dont l'enseignant gérait les difficultés d'apprentissage des élèves, cela nous aurait permis de mieux comprendre comment les enseignants à partir de leurs connaissances des contenus à enseigner et en fonction des contraintes évoquées parviennent à surmonter les difficultés d'apprentissage de la dérivée. C'est une limite importante que de s'intéresser uniquement au travail de l'enseignant. Même si nous sommes conscient du fait que ce choix porté essentiellement sur le travail des enseignants était guidé par les objectifs de la recherche, il peut être également intéressant de porter un regard sur la manière dont les élèves utilisent les ressources mises à leur disposition en classe et à la maison pour apprendre la dérivée en particulier dans le contexte africain. Donc, une autre piste de recherche en lien avec cette thèse serait d'aller investiguer dans un cadre plus large, avec plusieurs enseignants les liens entre leurs processus de préparation des cours, leurs utilisations des ressources, leurs pratiques d'enseignement et les apprentissages de leurs élèves.

Nous avons déjà observé que le rapport personnel de l'enseignant s'aligne avec le rapport institutionnel dans la mesure où l'activité qui a permis d'introduire le nombre dérivé provient du manuel. De plus, la définition proposée également est tirée du manuel. Il y a donc lieu de s'assurer que l'élève aussi a son rapport personnel identique à ce qu'attend de lui l'institution. D'ailleurs comme le précise Chevallard (1999), derrière l'évaluation du rapport personnel de l'élève se cache l'évaluation du rapport institutionnel en lui-même. La question de l'efficacité ou de la pertinence de la technique n'a pas été posée jusqu'ici. L'hypothèse est que cette technique trouvera des limites à un moment donné et il faudra bien trouver une autre façon de procéder. En d'autres termes, quelle technique permettant d'introduire la dérivée serait la meilleure avenue pour favoriser la conceptualisation de la dérivée?

Lors des entretiens, l'enseignant Bernard a partagé la réflexion dont voici un extrait : *« À l'ENS on passe le temps à nous bourrer des mathématiques pures, algèbre, analyse. On touche du doigt l'enseignement quand on part en stage ».* Cette affirmation corrobore aussi les écrits de certains auteurs camerounais pour qui la formation initiale des enseignants ne les prépare pas aux réalités du terrain professionnel (Maingari, 2004). En plus, dans nos analyses, nous avons relevé que l'enseignant Charles, qui était inscrit dans un programme de formation continue en didactique, avait une pratique singulière par rapport aux deux autres enseignants. Ces deux faits évoqués posent le problème de la formation initiale et continue dans l'efficacité des enseignants dans leurs pratiques enseignantes. Selon les éléments que nous avons évoqués en lien avec le contexte de l'étude, nous avons par exemple relevé que les enseignants reçoivent une formation à l'enseignement dans une institution où les contenus en mathématiques occupent une grande partie des enseignements contrairement aux contenus en lien avec l'enseignement des mathématiques. Ainsi dans un tel contexte, les futurs enseignants ne sont pas préparés adéquatement aux compétences et aux connaissances qui sont véhiculées dans le programme officiel, et cette lacune au niveau de la formation initiale peut constituer une difficulté à pouvoir implémenter le contenu du programme et à assumer leurs responsabilités d'enseignant. Nous pensons de ce point de vue que dans le prolongement de cette thèse, nous allons regarder du côté de la formation continue et aussi de la formation initiale des enseignants afin de voir d'une part comment le rapport à la dérivée des enseignants chevronnés a évolué au cours des années d'expérience et d'autre part nous souhaitons creuser davantage sur les rapports personnels à la dérivée qui se créent lors de la formation initiale, ainsi que sur les besoins professionnels qui émergent et seraient pertinents à être abordés lors de cette formation initiale.

Finalement, tel que mentionné précédemment, cette thèse apporte quelques éléments de réponse sur ce qui se passe dans des contextes autres qu'européen ou nord-américain. Le contexte camerounais en particulier a permis de relever que les pratiques enseignantes sont soumises à de fortes contraintes d'ordre institutionnel, notamment le programme de mathématiques, le manuel de mathématiques unique et les examens ministériels de fin d'année. De cette façon, nous avons une compréhension de la manière dont les auteurs au Cameroun présentent le concept de dérivée dans les manuels destinés à l'enseignement et à l'apprentissage de la dérivée au niveau secondaire. Au niveau des pratiques enseignantes, nous avons noté l'importance du rapport personnel des enseignants dans la prise de décisions pouvant influencer leurs actions au moment d'enseigner la dérivée. En général, nous relevons quelques éléments spécifiques du travail des enseignants qui sont liés au contexte camerounais et qui permettent de faire le lien avec ce qui est fait dans d'autres contextes, notamment européen et nord-américain. Nos observations vont nous permettre d'envisager d'autres pistes de réflexions. Par exemple, notre travail doctoral a permis de mieux connaître comment les enseignants préparent leurs leçons et de quelle manière ils mettent en application leurs préparations quand ils sont face aux élèves. Il serait donc logique de nous questionner sur les compétences et les connaissances développées par les élèves après de telles opérations de planification et d'enseignement. À ce stade de notre thèse, nous pensons que la formation initiale et continue sont des principaux leviers sur lesquels il serait possible d'agir afin que les enseignants puissent prendre conscience des choix de leurs ressources et des conséquences de leurs planifications sur leurs pratiques d'enseignement et finalement sur les apprentissages de leurs élèves.

Références bibliographiques

Adler, J. (2010). La conceptualisation des ressources. Apports pour la formation des professeurs de mathématiques. In G. Gueudet & L. Trouche (Eds.), *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (pp. 7-18). Presses Universitaires de Rennes et INRP.

Altet, M. (2003). Caractériser, expliquer et comprendre les pratiques enseignantes pour aussi contribuer à leur évaluation. *Les dossiers des sciences de l'éducation*, *10*(1), 31-43. https://doi.org/10.3406/dsedu.2003.1027

Amit, M., & Vinner, S. (1990). Some misconceptions in calculus - Anecdotes or the tip of an iceberg? In G. Booker, P. Cobb, & T. d. Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the Fourteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. I, pp. 3-10). Organizing Committee of the 14th Annual PME Meeting.

Anadón, M. (2006). La recherche dite « qualitative » : de la dynamique de son évolution aux acquis indéniables et aux questionnements présents. *Recherches qualitatives*, *26*(1), 5-31.

Anadón, M., & Guillemette, F. (2006). La recherche qualitative est-elle nécessairement inductive? [http://www.recherche-qualitative.qc.ca/documents/files/revue/hors_serie/hors_serie_v5/RQ-HS-5-Numero-complet.pdf]. Actes du colloque de l'Association pour la recherche qualitative (ARQ) organisé dans le cadre du congrès de l'ACFAS, Université McGill, Montréal.

Andreani, J.-C., & Conchon, F. (2005). Méthodes d'analyse et d'interprétation des études qualitatives : état de l'art en marketing. *ESCP-EAP*, Paris.

Apkarian, N., Kirin, D., Bressoud, D., Rasmussen, C., Larsen, S., Ellis, J., Ensley, D., & Johnson, E. (2017). *Progress through calculus: census survey technical report* Presentation in MAA Session on Research in Undergraduate Mathematics Education (RUME), IV at Joint Mathematics Meetings 2017, Atlanta, GA.

Arzarello, F., Bosch, M., Lenfant, A., & Prediger, S. (2007). Different theoretical perspectives in research from teaching problems to research problems. Proceedings of the 5 th congress of European society for research in mathematics education (CERME5), Asiala, M., Cottrill, J., Dubinski, E., & Schwingendorf, K. E. (1997). The Development of Students' Graphical Understanding of the Derivative. *Journal of Mathematical Behavior*, *16*(4), 399-431.

Aspinwall, L., Shaw, K. L., & Presmeg, N. C. (1997). Uncontrollable Mental Imagery: Graphical Connections Between A Function And Its Derivative. *Educational Studies in Mathematics*, *33*, 301-317. https://doi.org/10.1023/A:1002976729261

Assude, T., & Margolinas, C. (2005). Aperçut sur les rôles des manuels dans la recherche en didactique des mathématiques. In E. Bruillard (Ed.), *Manuels scolaires, regards croisés* (pp. 231-241). CRDP Basse-Normandie.

Audigier, F. (1988). Savoirs enseignés-savoirs savants : troisième Rencontre nationale sur la didactique de l'histoire, de la géographie et des sciences économiques et sociales, 2, 3 et 4 mars 1988 : actes du colloque. In S. e.-s. savants (Ed.), *Rencontre nationale sur la didactique de l'histoire, de la géographie et des sciences économiques et sociales* (pp. 55-69 et 449-460). INRP.

Balhan, K., KrysinsKa, M., & schneider, M. (2015). Quelle définition du concept de tangente ? Pour quelles raisons ? *reperes - irem*, *101*.

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L., & Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice: the case of limits of functions in Spanish high schools. *Educational Studies in Mathematics*, *59*, 235-268.

Barthes, R. (1966). Introduction à l'analyse structurale des récits. *Communications*, *8*(1), 1-27. https://doi.org/10.3406/comm.1966.1113

Baumann, P. (2004). Histoire des mathématiques. Cours préparé par une équipe d'enseignants à partir de l'ouvrage «The Calculus in the Eighteenth Century I : Foundations, cours d'histoire des mathématiques de la Open University, fascicule « Origins and development of the Calculus 4 » préparé par H. J. M. Bos, Milton Keynes. *The Open University Press, 1975. Disponible sur le site http://www-irma.u-strasbg.fr/~baumann/polyh.pdf*, .

Beaucher, C., Beaucher, V., & Moreau, D. (2013). Contribution à l'opérationnalisation du concept de rapport au savoir. In C. Nafti-Malherbe & G. Samson (Eds.), *Rapport au savoir* (Vol. 17, pp. 70-93). Revue Internationale de Sociologie et de sciences sociales.

Beaugrand, J. (1988). Observation directe du comportement. In M. Robert (Ed.), *Fondements et étapes de la recherche scientifique en psychologie* (pp. 277-310). Edisem.

Beillerot, J. (1989). *Savoir et rapport au savoir*. Ed Universitaires.

Beillerot, J. (2000). Le rapport au savoir. In N. Mosconi, J. Beillerot, & C. Blanchart-Laville (Eds.), *Formes et formations du rapport au savoir* (pp. 39-57). L'Harmattan.

Belinga, B. S. (2009). Du statut épistémique de l'enseignement secondaire au Cameroun *Human et Social Science Series*, *1*(1), 140–152.

Benbasat, I., Goldstein, D., & Mead, M. (1984). The Case research Strategy in Studies of information Systems. *MIS Quarterly*, *11*(3), 369-386.

Bernard, J.-M., Nkengne Nkengne, A. P., & Robert, F. (2007). La relation entre réformes des programmes scolaires et acquisitions à l'école primaire en Afrique : réalité ou fantasme ? L'exemple de l'approche par les compétences. In.

Bernard, J.-M., Tiyab, B. K., & Vianou, K. (2004). Profils enseignants et qualité de l'éducation primaire en Afrique subsaharienne francophone : Bilan et perspectives de dix années de recherche du PASEC. *PASEC/CONFEMEN*.

Bingolbali, E., Monaghan, J., & Roper, T. (2007). Engineering students' conceptions of the derivative and some implications for their mathematical education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *38(6)*, 763-777. https://doi.org/10.1080/00207390701453579

Biza, I., Christou, C., & Zachariades, T. (2006). Students' thinking about the tangent line. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 177-184). PME.

Biza, I., Nardi, E., & Zachariades, T. (2008). Persistent images and teacher beliefs about visualisation: the tangent at an inflection point. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (Vol. 2, pp. 177-184). Cinvestav-UMSNH.

Bkouche, R. (2000). Quelques remarques autour des cas d'égalité des triangles. *Bulletin de l'APMEP*, *430*, 613-629

Blais, M., & Martineau, S. (2006). L'analyse inductive générale : description d'une démarche visant à donner un sens à des données brutes. *Recherches qualitatives*, *26*(2), 1-18.

Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(1), 77-123.

Bosch, M., & Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In A. Mercier & C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 107-122). La Pensée Sauvage.

Bosch, M., & Gascón, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transposition. *ICMI Bulletin*, *58*, 51-65.

Bourgeois, É., & Piret, A. (2006). L'analyse structurale contenu. Une démarche pour l'analyse des représentations. In L. Paquay & D. Ketele (Eds.), *L'analyse qualitative en éducation : des pratiques de recherche aux critères de qualité* (pp. 179-191). De Boeck Supérieur. https://doi.org/10.3917/dbu.paqua.2006.01.0179

Boyer, C. (1949). *The history of the calculus and its conceptual development*. Dover publications.

Bressoud, D., Ghedamsi, I., Martinez-Luaces, V., & Törner, G. (2016). Teaching and Learning of calculus. *ICME*, *13 Topical surveys*. https://doi.org/101007/978-3-319-32975-8_1

Bressoux, P. (2001). Réflexions sur l'effet-maître et l'étude des pratiques enseignantes. *Les Dossiers des Sciences de l'Éducation*, *5*, 35-52.

Bressoux, P. (2002). Les stratégies de l 'enseignant en situation d'interaction. In *Rapport de recherche pour Cognitique, Programme École et Sciences Cognitives*. Ministère de la Recherche.

Brousseau, G. (2001). Les erreurs des élèves en mathématiques. Étude dans le cadre de la théorie des situations didactiques. *«petit x »*, *57*, 5-30.

Bru, M., & Talbot, L. (2001). Les pratiques enseignantes: une visée, des regards. *Les Dossiers des Sciences de l'Éducation*, *5*, 9-33.

Byerley, C., Hatfield, N., & Thompson, P. W. (2012). Calculus students' understandings of division and rate. In S. Brown, S. Larsen, K. Marrongelle, & M. Oehrtman (Eds.). *Proceedings of the 15th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, pp. 358–363 Portland, OR: SIGMAA/RUME.

Castela, C. (1995). Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures. Un exemple concret, celui de la tangente. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, *15*(1), 7-47.

Catel, L., Coquidé, M., & Gallezot, M. (2002). Rapport au savoir et apprentissage différencié de savoirs scientifiques de collégiens et de lycéens: quelles questions? *Hétérogénéité et différenciation, INRP*, *35*, 123-148.

Chaachoua, H. (2007). L'analyse des manuels dans l'approche anthropologique. *Actes International Organisation for Science and Technology Education IOSTE. Hammamet (Tunisia)*, 16 pages.

Charbonneau, L. (1987a). Chronique : l’histoire des mathématiques. Deuxième partie : fonction : un personnage en quête d’auteur, le XVIIIème siècle. *Bulletin de l’AMQ*, 5-8.

Charbonneau, L. (1987b). Chronique : l’histoire des mathématiques. Première partie : fonction : du statisme grec au dynamisme du début du XVIIIème siècle. *Bulletin de l’AMQ*, 5-10.

Charlot, B. (1997). *Du rapport au savoir: éléments pour une théorie*. Anthropos.

Charlot, B. (1999). *Le rapport au savoir en milieu populaire. Une recherche dans les lycées professionnels de banlieue*. Économica.

Charron, A., Montésinos-Gelet, I., & Morin, M.-F. (2009). Description et catégorisation des pratiques déclarées en orthographes approchées chez des enseignantes du préscolaire. *Revue des sciences de l'éducation*, *35*(3), 85-106. https://doi.org/https://doi.org/10.7202/039857ar

Chasles, M. (1889). *Apercu historique sur l’origine et le développement des méthodes en géométrie* (Vol. 3). Gauthier-Villars.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1989). Le concept de rapport au savoir, rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. *Séminaire de didactique des Mathématiques et de l’informatique*, 211-235.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *12*(1), 73-112.

Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques*, *17*(3), 17-54.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en theorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(2), 221-226.

Chevallard, Y. (2002a). Organiser l’étude 1. Structures et Fonctions. In J.-L. Dorier & Al. (Eds.), *Actes de la 11ème école d’été de didactique des mathématiques –Corps, 21-30 Août 2001* (pp. 3-22). La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2002b). Organiser l’étude. 3. Ecologie & régulation. In J.-L. Dorier (Ed.), *Actes de la 11ème école d’été de didactique des mathématiques* (pp. 41-56). La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2003a). Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. In S. Maury & M. Caillot (Eds.), *Rapport au savoir et didactiques* (pp. 81-104). Faber.

Chevallard, Y. (2003b). Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. In S. Maury & M. Caillot (Eds.), *Rapport au savoir et didactiques* (pp. 81-104). Faber.

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la TAD. In L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. aportaciones de la teoría antropológica de la didáctico* (pp. 705-746). Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Chevallard, Y. (2012). "Sur le rapport aux mathématiques". *Journal du séminaire TAD/IDD*.

Chevallard, Y. (2017). La TAD et son devenir : rappels, reprises, avancées. In G. Cirade, M. Artaud, M. Bosch, J.-P. Bourgade, Y. Chevallard, C. Ladage, & T. Sierra (Eds.), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société. https://citad4.sciencesconf.org* (pp. 27-65). https://citad4.sciencesconf.org

Chorlay, R. (2007). La multiplicité des points de vue en Analyse élémentaire comme construit historique. In E. Barbin & B. Dominique (Eds.), *Histoire et enseignement des mathématiques : rigueurs, erreurs, raisonnements* (pp. 203-227). Institut national de recherche pédagogique: Université Blaise-Pascal.

Collette, J. P. (1973). *Histoire des mathématiques. 1*. Éditions du Renouveau pédagogique.

CONFEMEN. (2008). « Enseignement secondaire et perspectives ». Document de reflexion et d'orientation de la 53ème session de la Caraquet (Canada/Nouveau-Brunswick). *Conférence des ministres de l'Éducation des pays ayant le français en partage*, 239 pages. https://www.confemen.org/wp-content/uploads/2012/08/ENS_SECONDAIRE1.pdf

Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 135–164.

Confrey, J., Smith, E., Piliero, S., & Rizzuti, J. (1991). The use of contextual problems and multirepresentational software to teach the concept of functions. *Final Project Report to the National Science Foundation (MDR-8652160) and Apple Computer, Inc*.

Contamines, J., George, S., & Hotte, R. (2003). Approche instrumentale des banques de ressources éducatives. *Sciences et Techniques Educatives*, *10, hors série*, p. 157-178. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00298189

Cornu, L., & Vergnioux, A. (1992). *La didactique en questions*. Hachette.

Coulet, J.-C. (2009). Un modèle de la compétence pour la conception, la mise en œuvre et l'évaluation de dispositifs pédagogiques et didactiques. Actes de la conférence EIAH,

Dany, L. (2016). Analyse qualitative du contenu des représentations sociales. In G. L. Monaco, S. Delouvée, & P. Rateau (Eds.), *Les représentations sociales* (pp. 85-102). de Boeck.

De-Léonardis, M., Laterrasse, C., & Hermet, I. (2002). Le rapport au savoir: concepts et opérationnalisations. In C. Laterrasse (Ed.), *Du rapport au savoir à l'école et à l'université* (pp. 13-42). L'Harmattan.

de Almeida, L. M. W., & da Silva, K. A. P. (2018). A semiotic interpretation of the derivative concept in a textbook. *Zdm*, *50*(5), 881-892. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0975-8

De Weerd-Nederhof, P. C. (2001). Qualitative case study research. The case of a Ph.D. research project on organising and managing new product development systems. *Management decision*, *13*(7), 513-539.

Deaudelin, C., Lefebvre, S., Brodeur, M., Mercier, J., Dussault, M., Richer, J., Noël-Gaudreault, M., Kalubi, J.-C., & Bru, M. (2005). Évolution des pratiques et des conceptions de l'enseignement, de l'apprentissage et des TIC chez des enseignants du primaire en contexte de développement professionnel. *Revue des sciences de l'éducation*, *31*(1), 79-110. https://doi.org/10.7202/012359ar

Demazière, D. (2003). *Matériaux qualitatifs et perspectives longitudinales. La temporalité des parcours professionnels saisis par les entretiens biographiques* 10es Journées d'études Céreq – Lasmas-Idl, « Les données longitudinales dans l'analyse du marché de travail », Caen, 21, 22 et 23 mai.

DeSaint-André, M. D., Montésinos-Gelet, I., & Morin, M. (2010). Avantages et limites des approches méthodologiques utilisées pour étudier les pratiques enseignantes. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, *13*(2), 159-176. https://doi.org/https://doi.org/10.7202/1017288ar

Diffo-Lambo, L., & Feugueng, D. M. (2016). Quels savoirs enseignables en didactique des mathématiques en formation d'enseignants? Le cas de l'École Normale Supérieure (ENS) de Yaoundé. *Actes du premier colloque de l'Association de Didacticiens des Mathématiques Africains. École Normale Supérieure de Yaoundé (Cameroun)*, *1*, 324-336.

Douady, R. (1986). Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques. . 7*(2), 5-31.

Drapeau, M. (2004). Les critères de scientificité en recherche qualitative. Science-like criteria in qualitative research. *Société française de psychologie*, *10*, 79–86.

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1983). The function concept in college students: Linearity, smoothness and periodicity. *Focus on Learning Problems in Mathematics 5*, 119-132.

Ducos, C. (2009). A propos de l'introduction du concept de nombre dérivé d'une fonction en un point par l'approche cinématique en classe de première S. *REPERES- IREM*, *N° 74*.

Dufour, S. (2011). *L'utilisation des représentations par deux enseignantes du collégial pour l'introduction de la dérivée* Université du Québec]. Montréal.

Dufour, S. (2019). *Des processus de compréhension sous l'angle des représentations : un Teaching Experiment autour de la dérivée* Université du Québec à Montréal]. WorldCat.org. Montréal (Canada). http://archipel.uqam.ca/12668/1/D3592.pdf

Duplessis, P. (2007). L objet d'étude des didactiques et leurs trois heuristiques : épistémologique, psychologique et praxéologique.

Duval, R. (1991). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *. Annales de didactique et de sciences cognitives*, *5*, 37-65.

Eisenberg, T., & Dreyfus, T. (1991). On the Reluctance to Visualize in Mathematics. In W. Zimmermann & S. Cunnigham (Eds.), *Visualization in Teaching Mathematics* (pp. 25-37). Math. Assoc. of America.

Falappa, P. (2015). *Le Travail D'une Enseignante en Lien Avec Le Développement Du Sens Du Nombre Chez Les Enfants de Maternelle Au Québec: Une Étude de Cas* Université de Sherbrooke].

Ferrini-Mundy, J., & Graham, K. (1994). Research in calculus learning: Understanding of limits, derivatives, and integrals. In J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research issues in undergraduate Mathematics learning: Preliminary analyses and results* (pp. 29-45). The Mathematical Association of America.

Fortin, F., Côté, J., & Filion, F. (2006). *Fondements et étapes du processus de recherche*. Chenelière éducation.

Fredette, I. (2010). *L'histoire des mathématiques: un outil pour l'humanisation des mathématiques au secondaire* Université du Québec]. à Montréal.

Gagnon, Y.-C. (2012). *L'étude de cas comme méthode de recherche* (2e ed.). Presses de l'Université du Québec.

Gantois, J.-Y. (2012). *Un milieu graphico-cinématique pour l'apprentissage des dérivées dans une praxéologie "modélisation" : potentialités et limites* Université de Liège]. Belgique.

Gantois, J.-Y., & Schneider, M. (2008). Introduire les dérivées par les vitesses. Pour qui ? Pourquoi ? Comment ? . *Petit x*, *79*(1), 5-21.

Gauthier, C., & Dembélé, M. (2004). Qualité de l'enseignement et qualité de l'éducation. Revue des résultats de recherche. *Document préparé pour EFA Global Monitoring Report, UNESCO*.

Giraldo, V., & Carvalho, L. M. (2006). A generic organizer for the enrichment of the concept image of derivative. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 185-192).

Giraldo, V., González-Martín, A. S., & Santos, F. (2009). An analysis of the introduction of the notion of continuity in undergraduate textbooks in Brazil. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 81-88). PME.

Giraldo, V., Tall, D., & Carvalho, L. M. (2003). Using theoretical-computational conflicts to enrich the concept image of derivative. *Research in Mathematics Education*, *5(1)*, 63-78. https://doi.org/10.1080/14794800008520115

Goigoux, R. (2002). Analyser l'activité d'enseignement de la lecture : une monographie. *Revue française de pédagogie*, *138*, 125-134.

González-Martín, A. S. (2013). Students' personal relationship with series of real numbers as a consequence of teaching practices. In B. Ubuz, Ç. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2326-2335). CERME8.

González-Martín, A. S. (2014). Pre-university students' personal relationship with the visualisation of series of real numbers. In P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle & D. Allan (Eds.). *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Vol. 3*, pp. 201-208 Vancouver (Canada): PME.

González-Martín, A. S. (2015). The use of textbooks by pre-university teachers: An example with Infinite series of real numbers. In N. Vondrovà & K. Krainer (Eds.), *Proceedings of the 9th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME9)* (pp. 2124-2130).

González-Martín, A. S., Giraldo, V., & Souto, A. M. (2013). The introduction of real numbers in secondary education: an institutional analysis of textbooks. *Research in Mathematics Education*, *15*(3), 230-248. https://doi.org/10.1080/14794802.2013.803778

González-Martín, A. S., Nardi, E., & Biza, I. (2011). Conceptually-driven and visually-rich tasks in texts and teaching practice: the case of infinite series. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *42*(5), 565-589.

González-Martín, A. S., Nardi, H., & Biza, I. (2018). From resource to document: scaffolding content and organising student learning in teachers' documentation work on the teaching of series. *Educational Studies in Mathematics*, *98*(3), 231-252. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9813-8

González-Martín, A. S., & Nseanpa, C.-J. (2020). Teachers' practices and resource use to teach Derivatives. A study in the African context: the Case of Cameroon. Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Khon Kaen, Thailand.

Goupil, G., & Lusignan, G. (1999). Des théories de l'apprentissage à l'enseignement. *Sciences humaines, Mensuel*(98).

Grabiner, J.-V. (1983). The Changing Concept of Change: The Derivative from Fermat to Weierstrass. *Mathematics Magazine*, *56*(4), 195-206.

Güçler, B. (2014). The role of symbols in mathematical communication: the case of the limit notation. *Research in Mathematics Education*, *16*(3), 251-268. https://doi.org/10.1080/14794802.2014.919872

Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary–tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*, *67(3)*, 237-254. https://doi.org/<10.1007/s10649-007-9100-6>. <hal-00459435>

Gueudet, G. (2015). University teachers' resources and documentation work. In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of CERME9* (pp. 2138–2144). Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.

Gueudet, G. (2017). University Teachers' Resources Systems and Documents. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *3*(1), 198-224. https://doi.org/10.1007/s40753-016-0034-1

Gueudet, G., Buteau, C., Mesa, V., & Misfeldt, M. (2014). Instrumental and documentational approaches: From technology use to documentation systems in university mathematics education. *Research in Mathematics Education*, *16*(2), 139-155.

Gueudet, G., & Lebaud, M.-P. (2016). Comment les enseignants de mathématiques choisissent les manuels ? Étude sur le cas des manuels de seconde. *reperes - irem*, *102*.

Gueudet, G., & Pepin, B. (2018). Didactic Contract at the Beginning of University: a Focus on Resources and their Use. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *4*(1), 56-73. https://doi.org/10.1007/s40753-018-0069-6

Gueudet, G., Pepin, B., & Trouche, L. (2012). *From Text to 'Lived' Resources : Mathematics Curriculum Materials and Teacher Development*. Springer.

Gueudet, G., Pepin, B., & Trouche, L. (2015). Manuels scolaires et ressources numériques: vers de nouvelles conceptualisations. *EM TEIA | Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, *5*(3).

Gueudet, G., Pepin, B., & Trouche, L. (2016). Manuels scolaires et ressources numériques: vers de nouvelles conceptualisations. *EM TEIA | Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, *6*(3), 1-23. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01346646

Gueudet, G., & Trouche, L. (2008). Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés: Le cas des mathématiques. *Éducation et didactique*, *2*(3), 7-33. https://doi.org/10.4000/educationdidactique.342

Gueudet, G., & Trouche, L. (2009a). Conceptions et usages de ressources pour et par les professeurs, développement associatif et développement professionnel. *Dossiers de l'ingénierie éducative*, *65*, 76-80. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00459434

Gueudet, G., & Trouche, L. (2009b). Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics*, *71*(3), 199-218. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9159-8

Gueudet, G., & Trouche, L. (2009c). Vers de nouveaux systèmes documentaires des professeurs de mathématiques? In I. B. e. F. Conne (Ed.), *Nouvelles perspectives en didactique des* *mathématiques. Cours de la XIVe école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 109-133). La Pensée Sauvage. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00459440

Gueudet, G., & Trouche, L. (2010a). Des ressources aux documents, travail du professeur et genèses documentaires. In G. Gueudet & L. Trouche (Eds.), *Ressources vives, le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (Vol. , pp. 57-74). Presses Universitaires de Rennes et INRP.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2010b). Ressources vives : le travail documentaire des professeurs en mathématiques. In G. Gueudet & L. Trouche (Eds.), *Ressources vives, le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (pp. 57-74). Presses universitaires de Rennes.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2010c). *Ressources vives : le travail documentaire des professeurs en mathématiques*. Presses universitaires de Rennes.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2012). Teachers' Work with Resources: Documentational Geneses and Professional Geneses. In G. Gueudet, B. Pepin, & L. Trouche (Eds.), *From Text to 'Lived' Resources : Mathematics Curriculum Materials and Teacher Development*. Springer.

Habre, S., & Abboud, M. (2006). Students' conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *Journal of Mathematical Behavior*, *25(1)*, 57-72. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.11.004

Hackworth, J. A. (1994). *Calculus Students' Understanding of Rate* [Doctoral dissertation, San Diego State University].

Halté, J.-F. (1993). *La didactique du français* (2e corrigée ed.). Presses universitaires de France.

Hardy, N. (2009). Students' perceptions of institutional practices: the case of limits of functions in college level Calculus courses. *Educational Studies in Mathematics*, *72*(3), 341-358. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9199-8

Harris, D. N., & Sass, T. R. (2011). Teacher training, teacher quality and student achievement. *Journal of Public Economics*, *95*(7-8), 798-812. https://doi.org/10.1016/j.jpubeco.2010.11.009

Herbert, S., & Pierce, R. (2012). Revealing educationally critical aspects of rate. *Educational Studies in Mathematics*, *81*, 85-101.

Hitt, F. (1998). Systèmes sémiotiques de représentation liés au concept de fonction. *Annales de didactique et de sciences cognitives, IREM-Strasbourg.*, *6*, pp. 7-26.

Hitt, F., & Dufour, S. (2021). Introduction to calculus through an open-ended task in the context of speed: representations and actions by students in action. *ZDM – Mathematics Education*, *53*(3), 635-647. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01258-x

Hitt, F., & González-Martín, A. S. (2016). Generalization, covariation, functions, and Calculus. In A. Gutiérez, G. L. Leder, & P. Boero (Eds.), *Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics education. The journey Continues.* (pp. 3-38). Sense Publishers.

Hofstetter, R., Schneuwly, B., & Borer, V. L. (2009). Une formation professionnelle universitaire pour tous les enseignants L'exemple de la Suisse au xxe siècle. *Recherche & formation*(60), 25-38. https://doi.org/10.4000/rechercheformation.563

Hong, Y. Y., & Thomas, M. (2013). Graphical construction of a local perspective on derived functions. In In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 81-88). PME.

Houssaye, J. (2014). *Le triangle pédagogique : les différentes facettes de la pédagogie*. Le Café pédagogique.

Huberman, A. M., & Miles, M. B. (1994). Data management and analysis methods. In N.-K. Denzin & Y. S. Lincoln. (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (pp. 428-444). Sage Publications.

Hudon, M. (2013). *Analyse et représentation documentaires : introduction à l'indexation, à la classification et à la condensation des documents*. Québec (Québec) : Presses de l'Université du Québec. https://ebookcentral.proquest.com/lib/umontreal-ebooks/detail.action?docID=3290223

INS. (2015). *Annuaire Statistique du Cameroun 2015. Chapitre 6 : éducation*. Yaoundé (Cameroun): Institut National de la Statistique. Retrieved from http://www.stat.cm/downloads/2016/annuaire2016/CHAPITRE6_EDUCATION.pdf

Irem-de-basse-Normandie. (1999). *Aux origines du calcul infinitésimal.* Ellipses.

Jameau, A. (2012). *Les connaissances mobilisées par les enseignants dans l'enseignement des sciences: analyse de l'organisation de l'activité et de ses évolutions* Brest].

Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathemtaics* (pp. 27-32). Eribaum.

Jones, S. R. (2017). An exploratory study on student understandings of derivatives in real-world, non-kinematics contexts. *The Journal of Mathematical Behavior*, *45*, 95-110. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.11.002

Katz, V. (2000). Using History to teach Mathematics. An International Perspective. *ZDM 2001*, *33*(ZDM 2001 Vol. 33 (5)), (5).

Kidron, I., & Tall, D. (2015). The role of visualization and symbolism in the potential and actual infinity of the limit process. *Educational Studies in Mathematics*, *88*, 183-199.

Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. Univ. Press.

Kuzel, A. (1999). Sampling in qualitative inquiry. In B. Crabtree & W. Miller (Eds.), *Doing Qualitative Research* (pp. 33-46). Sage Publications.

Lacroix, S. F. (1908). *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*. J.B.M. Duprat.

Le Pellec, J., Marcos Alvarez, Violette, Audigier, François. (1991). *Enseigner l'histoire : un métier qui s'apprend*. Hachette ; Centre régional de documentation pédagogique. http://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb35488912t

Lessard-Hébert, M., Goyette, G., & Boutin, G. (1996). *La recherche qualitative : Fondements et pratiques* (2e édition. ed.). Éditions Nouvelles.

Lew, K., Fukawa-Connelly, T. P., Mejia-Ramos, J. P., & Weber, K. (2016). Lectures in Advanced Mathematics: Why Students Might Not Understand What the Mathematics Professor Is Trying to Convey. *Journal for Research in Mathematics Education*, *47*(2), 162-198.

Lithner, J. (2004). Mathematical reasoning in calculus textbook exercises. *Journal of Mathematical Behavior*, *23*, 405-427.

Maingari, D. (2004). *Formation et professionnalisation des enseignants au Cameroun*. L'Harmattan.

Marcel, J.-F., Olry, P., Rothier-Bautzer, É., & Sonntag, M. (2002). Les pratiques comme objet d'analyse. *Revue française de pédagogie*, *138*, 135-170.

Markovits, Z., Eylon, B., & Bruckheimer, M. (1986). Functions today and yesterday. *For the Learning of Mathematics*, *6*(2), 18-24.

Marmoz, L. (2005). La formation des enseignants en Afrique sub-saharienne : essai d'analyse de la situation. In K. F. Seddoh, M. Sourang, & J. Shabani (Eds.), *Les institutions de formation* *des enseignants en Afrique sub-saharienne pour un renforcement des capacités*. http://unesdoc.unesco.org/images/0014/001406/140665m.pdf. http://unesdoc.unesco.org/images/0014/001406/140665m.pdf

Maronne, S. (2007). *La théorie des courbes et des équations dans la Géométrie cartésienne : 1637-1661* Université Paris-Diderot - Paris VII]. France.

Mathieu-Soucy, S. (2019). *Becoming a Teacher: An Inquiry Into the Experiences of Novice Teachers of Mathematics in Cegep* Concordia University]. Canada.

MEES. (2017a). *Programme d'études préuniversitaires. Sciences informatiques et mathématiques. 200.CO*. Québec, Canada Retrieved from http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/enseignement-superieur/200.C0__2008__Sciences_informatiques_et_mathematiques_-_2018.pdf

MEES. (2017b). *Programme d'études préuniversitaires. Histoire et civilisation (700.B0)*. Québec, Canada Retrieved from http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/enseignement-superieur/collegial/700.B0_Histoire_civilisation_VF.pdf

MEES. (2017c). *Programme d'études préuniversitaires. Sciences de la nature (200.B0)*. Québec, Canada Retrieved from http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/enseignement-superieur/200.B0_Sciences_nature_VF.pdf

MEES. (2017d). *Programme d'études préuniversitaires. Sciences humaines (700.A0)*. Québec, Canada Retrieved from http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/enseignement-superieur/300.A0_Sciences_humaines_VF.pdf

MEES. (2017e). *Programme d'études préuniversitaires. Sciences, Lettres et Arts (700.A0)*. Québec, Canada Retrieved from http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/enseignement-superieur/collegial/700.A0_Sciences_lettres_arts_VF.pdf

MÉQ. (1999). *Regard sur l'enseignement collégial*. Québec: Gouvernement du Québec

Merriam, S. B. (1988). *Case study in education : A qualitative approach*. Jossey-Bass.

Mesa, V. (2004). Characterizing Practices Associated with Functions in Middle School Textbooks: An Empirical Approach. *Educational Studies in Mathematics*, *56*(2-3), 255-286. https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000040409.63571.56

Mesa, V., & Griffiths, B. (2012). Textbook mediation of teaching: an example from tertiary mathematics instructors. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(1), 85-107.

Miles, M. B., & Huberman, A. M. (2003). *Analyse des données qualitatives. Traduction de la 2e édition américaine*. Université De Boeck.

MINEDUC. (1998). *Programme de mathématiques des classes du second cycle des lycées et collèges d'enseignement général*. Yaoundé-Cameroun: Ministère de l'Éducation Nationale

MINESEC. (2014a). *Programmes d'études en Mathématiques des classes de 4èmes et 3èmes* Cameroun: Ministère des Enseignements Secondaires

MINESEC. (2014b). *Programmes d'études en Mathématiques des classes de premières A, C & E*. Yaoundé-Cameroun: Ministère des Enseignements Secondaires

MINESEC. (2014c). *Programmes d'études en Mathématiques des classes de secondes*. Cameroun: Ministère des Enseignements Secondaires

MINESEC. (2018). *Programmes de physique de l'enseignement secondaire général – Classe de seconde C* Yaoundé-Cameroun: Ministère des enseignements secondaires

Monaghan, J. (1991). Problems with the language of limits. For the Learning of Mathematics. *11*(3), 20-24.

Monk, G. S. (1994). Students' understanding of functions in calculus courses. *Humanistic Mathematics Network Journal*, *9*, 21-27.

Montes, M., Carrillo, J., & Ribeiro, C. M. (2014). Teachers' knowledge of infinity, and its role in classroom practice. In P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle & D. Allan (Eds.). *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education*, *Vol. 4*, pp. 233-240 Vancouver, Canada: PME.

Montoya Delgadillo, E., Páez Murillo, R., Vandebrouck, F., & Vivier, L. (2018). Deconstruction with Localization Perspective in the Learning of Analysis [journal article]. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *4*(1), 139-160. https://doi.org/10.1007/s40753-017-0068-z

Mosconi, N. (2000). Pour une clinique du rapport au savoir à fondation anthropologique. In N. Mosconi, J. Beillerot, & C. Blanchard-Laville (Eds.), *Formes et formations du rapport au savoir* (pp. 59-116). L'Harmattan.

Mourji, F., & Abbaia, A. (2013). Les déterminants du rendement scolaire en mathématiques chez les élèves de l'enseignement secondaire collégial au Maroc : une analyse multiniveaux [The Determinants of Mathematics Performances of Moroccan Secondary School Students: a Multilevel Analysis]. *Revue d'économie du développement*, *21*(1), 127-158. https://doi.org/10.3917/edd.271.0127

Mucchielli, A. (1996). *Dictionnaire des méthodes qualitatives en sciences humaines et sociales*. Colin.

Mvomo, C. O., Elandi, J. R. E., Tchetgna, F., Nkoule, S. H., Fouda, S. D., Oumarou, I., Minali, B. E., Monevondo, B. E., & Ayissi, R. (2015). Asva Education.

Nafti-Malherbe, C., & Samson, G. (2013). *Rapport au savoir*. Revue Internationale de Sociologie et de sciences sociales.

Nemirovsky, R., & Rubin, A. (1992). *Students' Tendency To Assume Resemblances between a Function and Its Derivative*. TERC Communications, MA.

Nongni Siake, G. (2020). *Intégration des ressources documentaires numériques dans la planification de l'enseignement de la statistique par des futurs enseignants au secondaire* (Publication Number 35535) Université Laval]. Québec.

Nseanpa, C. J. (2013). L'implication parentale et performances scolaires des apprenants en mathématiques : le cas des élèves de la classe de première D du lycée de Tsinga. *http://cirnef.normandie-univ.fr/wp-content/uploads/files/DER/nseanpa_casimir-jojo_21210776_2013_1.pdf*.

Nseanpa, C. J. (2015). *Pratiques évaluatives des apprentissages par les enseignants en mathématiques et performances des élèves de classe de premières : une étude menée dans les établissements prives laïcs et confessionnels du Mfoundi* [didactique des mathématiques, Université de Yaoundé 1]. Yaoundé.

Nseanpa, C. J., & Tcheuffa-Nziatcheu, J. (2018). Formation initiale des enseignants de mathématiques à l'école normale supérieure de Yaoundé 1 : des pratiques actuelles aux perspectives futures. In M. Abboud (Ed.), *Colloque de L'Espace Mathématiques Francophone (EMF 2018)*. Espace mathématique Francophone.

O'callaghan, B. R. (1998). Computer-Intensive Algebra and Students' Conceptual Knowledge of Functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*, 21-40.

OCDE. (2001). *Connaissances et compétences : des atouts pour la vie : premiers résultats de PISA 2000*. Paris : Organisation de coopération et de développement économiques. http://new.sourceocde.org/9264296719

ODD4. (2015). Objectif 4 de Développement Durable. *Organisation des Nations Unies.* Retrieved 2022/03/15, from https://www.un.org/sustainabledevelopment/fr/education/

Oehrtman, M. C., Carlson, M. P., & Thompson, P. W. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' understandings of function. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), Making the connection: Research and practice in undergraduate mathematics. *Washington, DC: Mathematical Association of America.*, 27-42.

Oliveira, A. (2005). *Tendances actuelles de la recherche brésilienne portant sur les pratiques enseignantes: analyse critique de la production scientifique, 1985-2004* [Mémoire, Université de Sherbrooke]. Québec.

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation [journal article]. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(3), 235-250. https://doi.org/10.1007/bf00410540

Orton, A. (1984). Understanding rate of change. *Mathematics in School*, *13*(5), 23-26.

Paillé, P. (2011). Les conditions de l'analyse qualitative. Réflexions autour de l'utilisation des logiciels. *SociologieS [En ligne], La recherche en actes, Champs de recherche et enjeux de terrain, mis en ligne le 06 juillet 2011 et consulté le 18 mai 2019*. http://journals.openedition.org/sociologies/3557

Paillé, P., & Mucchielli, A. (2003). *L'analyse qualitative en sciences humaines et sociales*. Armand-Colin.

Paillé, P., & Mucchielli, A. (2012). Chapitre 11 - L'analyse thématique. In P. Paillé & A. Mucchielli (Eds.), *L'analyse qualitative en sciences humaines et sociales* (pp. 231-314). Armand Colin. https://www.cairn.info/l-analyse-qualitative-en-sciences-humaines--9782200249045-page-231.htm

Park, J. (2012). Students' Understanding of the Derivative - Literature Review of English and Korean Publications. *Journal of the Korean School Mathematics Society*, *15*, 331-348.

Park, J. (2013). Is the derivative a function? If so, how do students talk about it? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *44*(5), 624-640. https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.795248

Park, J. (2015). Is the derivative a function? If so, how do we teach it ? *Educational Studies in Mathematics*, *89*(2), 233-250. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9601-7

Park, J. (2016). Communicational approach to study textbook discourse on the derivative. *Educational Studies in Mathematics*, *91*(3), 395-421. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9655-6

Passaro, V. (2020). Analyse du déploiement d'un raisonnement covariationnel en situation chez des élèves de 15 à 18 ans. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *20*(3), 462-484. https://doi.org/10.1007/s42330-020-00101-x

Patton, M. Q. (1980). *Qualitative evaluation methods*. Beverly Hills : Sage Publications.

Pepin, B., Gueudet, G., & Trouche, L. (2013). Investigating textbooks as crucial interfaces between culture, policy and teacher curricular practice : two contrasted case studies in France and Norway. *ZDM : The International Journal on Mathematics Education*, *45*(5), 685-698.

Perrin-Glorian, M. J. (2002). Chapitre 8 : Didactique des mathématiques. In P. Bressoux (Ed.), *Les stratégies de l'enseignant en situation d'interaction. Note de synthèse pour Cognitique* (pp. 203-239). Programme Ecole et Sciences cognitive.

Poisard, C., Bueno-Ravel, L., & Gueudet, G. (2011). Comprendre l'intégration de ressources technologiques en mathématiques par des professeurs des écoles. *Recherches en didactique des mathématiques*, *31*(2), 151-189.

Popp, W., & Bruckheimer, M. (1978). *History of mathematics topics for schools*. Open University Press.

Pourtois, J.-P., & Desmet, H. (1988). *Épistémologie et instrumentation en sciences humaines*. Pierre Mardaga.

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. *Zdm*, *40*(2), 165-178.

Presmeg, N. C. (1985). *The role of visually mediated processes in high school mathematics: a classroom investigation* University of Cambridge]. Unpublished PhD dissertation.

Presmeg, N. C. (2006). Research on Visualization in Learning and Teaching Mathematics Emergence from Psychology. In *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 205-235). ROTTERDAM / TAIPEI: SENSE PUBLISHERS, 2006. https://doi.org/10.1163/9789087901127_009

Presmeg, N. C. (2019). Visualization and Learning in Mathematics Education. In *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 1-5). Springer International Publishing : Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_161-4

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.

Raman, M. (2004). Epistemological messages conveyed by three high-school and college mathematics textbooks. *Journal of Mathematical Behavior*, *24(4)*, 389-404.

Rasmussen, C., & Ellis, J. (2013). *Students Who Switch out of Calculus and the Reasons They Leave*. North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. e-mail: pmena.steeringcommittee@gmail.com; Web site: http://www.pmena.org/.

Rasmussen, C., Marrongelle, K., & Borba, M. C. (2014). Research on calculus: what do we know and where do we need to go? *ZDM Mathematics Education*, *46*(4), 507-515. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0615-x

Reuter, Y., Cohen-Azria, C., Daunay, B., Delcambre, I., & Lahanier-Reuter, D. (2013). Système didactique — triangle didactique. In Y. Reuter, C. Cohen-Azria, B. Daunay, I. Delcambre, & D. Lahanier-Reuter (Eds.), *Dictionnaire des concepts fondamentaux des didactiques* (pp. 203-210). De Boeck Supérieur. https://www.cairn.info/dictionnaire-des-concepts-fondamentaux-des-didacti--9782804169107-page-203.htm

Rezat, S. (2006). A model of textbook use In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (Vol. 4, pp. 409-416). PME.

Rezat, S. (2010). The utilization of mathematics textbooks as instruments for learning. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the 6th Conference of European Research in Mathematics Education* (pp. 1260–1269). INRP Lyon.

Rivkin, S. G., Hanushek, E. A., & Kain, J. F. (2005). Teachers, Schools, and Academic Achievement. *Econometrica*, *73*(2), 417-458.

Roorda, G., Vos, G., Drijvers, P., & Goedhart, M. (2014). Graphing calculator supported instrumentation schemes for the concept of derivative: a case study. In P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle & D. Allan (Eds.) [1. (2014). ,).]. *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education*, *Vol. 5*, pp. 57-64 Vancouver, Canada: PME.

Ross, A. (2001). Zénon, les paradoxes. *Bulletin de l'AMQ*, *XLI*(4), 46-53.

Rouy, E. (2007). *Formation initiale des professeurs de l'enseignement secondaire supérieur et changements de rationalité mathématique entre l'institution secondaire et l'institution universitaire. Le cas éclairant du thème des dérivées* Université de Liège]. Belgique.

Rozenwajn, E., & Dumay, X. (2014). Les effets de l'évaluation externe sur les pratiques enseignantes : une revue de la littérature. *Revue française de pédagogie*, *189*(4), 105.

Rozenwajn, E., & Dumay, X. (2016). Les évaluations externes à faibles enjeux: les enseignants confrontés à eux-mêmes? *Revue française de pédagogie. Recherches en éducation*(194), 71-90.

Russo, F. (1962). Pascal et l'analyse infinitésimale. In *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications* (Vol. Tome 15, pp. 303-320). Pascal et les mathématiques.

Savoie-Zajc, L. (2000). La recherche qualitative / interprétative en éducation. In D. T. Karsenti & L. Savoie-Zajc (Eds.), *Introduction à la recherche en éducation* (pp. 171 - 198). éditions du CRP.

Savoie-Zajc, L. (2003). L'entrevue semi-dirigée. In B. Gauthier (Ed.), *Recherche sociale: de la problématique à la collecte des données* (4' édition ed., pp. 293-316). Presses de l'Université du Québec. (1" éd. 1984).

Savoie-Zajc, L. (2004). La recherche qualitative/interprétative en éducation. In T. Karsenti & L. Savoie-Zajc (Eds.), *La recherche en éducation: étapes et approches* (pp. 123-150). Éditions du CRP.

Schneider-Gillot, M. (1988). *Des objets mentaux « aire » et « volume » au calcul des primitives*. Louvain-la-Neuve.

Schneider, M. (1992). À propos de l'apprentissage du taux de variation instantané. *Educational Studies in Mathematics*, *23*(4), 317-350.

Schneider, M. (2007). Entre recherche et développement: quel choix de valeurs pour l'ingénierie curriculaire? Intervention aux journées mathématiques organisées par l'INRP, 12 juin 2007. In.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on process and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1-36.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification–The case of function In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 59-84). Mathematical Association of America.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en didactique des mathématiques*, *6*(1), 5-68.

Sierpinska, A. (1992). On Understanding the Notion of Function In E. Dubinsky & G. Harel. (Eds.), *The Concept of Function : Aspects of Epistemology and Pedagogy* (Vol. 25, pp. 25-58).

Soussi, A., Ducrey, F., Ferrez, E., Nidegger, C., & Viry, G. (2006). Pratiques d'évaluation: ce qu'en disent les enseignants (à l'école obligatoire et dans l'enseignement postobligatoire général). *Rapport du service de la recherche en éducation, Université de Genève. Disponible sur Internet à l'adresse:< http://edudoc. ch/record/36003/>(consulté en mars 2012)*.

Speer, N. M. (2008). Connecting beliefs and practices: a fine-grained analysis of a college mathematics teacher's collections of beliefs and their relationship to his instructional practices. *Cognition and instruction*, *26*(2), 218-267. https://doi.org/1080/07370000801980944

Speer, N. M., & Firouzian, S. S. (2014). Current and future faculty members' mathematical knowledge for teaching calculus. In T. Fukawa-Connolly, G. Karakok, K. Keene, & M. Zandieh (Eds.), *Proceedings of the 17th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 1052-1056). RUME.

Speer, N. M., Smith, J. P., & Horvath, A. (2010). Collegiate mathematics teaching: An unexamined practice. *The Journal of Mathematical Behavior*, *29*(2), 99-114. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2010.02.001

Speer, N. M., SmithIII, J. P., & Horvath, A. (2010). Collegiate mathematics teaching: An unexamined practice. *The Journal of Mathematical Behavior*, *29(2)*, 99-114. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2010.02.001

Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. Thousand Oaks : Sage Publications.

Stewart, J. (2010). *Calculus* (8th ed.). Brooks/Cole Cengage Learning.

Sträßer, R. (2009). Instruments for learning and teaching mathematics. An attempt to theorise about the role of textbooks, computers and other artefacts to teach and learn mathematics. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 67-81). Aristotle University of Thessaloniki.

Tall, D. (1993). Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus. *ICME-7 1992*, *Québec, Canada, 13-28.*

Tall, D. (1996). Functions and Calculus. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education: Part 1* (pp. 289-325). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1465-0_9

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151-169.

Tamghe, C. D. D. K. (2020). Pilotage de la performance sociale des enseignants dans l’enseignement secondaire public au Cameroun : Rôle de la formation continue et de la gestion des carrières. *Revue africaine de management - African management review*, *5*(3), 24-37. http://revues.imist.ma/?journal=RAM

Tavignot, P. (1995). À Propos de la transposition didactique en didactique des mathématiques. *Revue de Recherches en Éducation*, *15*, 31-60.

Tchamabe, M. D. (2015). La formation pratique des enseignants au Cameroun. *Chronique Internationale*, *23*, 1-12.

Tcheuffa, J. (2015). Étude des situations paradigmatiques dans l'introduction du concept de la dérivée au collégial. *Mémoire présenté comme exigence partielle de la maitrise en didactique des mathématiques*, 177.

Tegninko, V., Sielenou, D., Bouda, A., Pokam, R., & Boudy, R. (2014). *L'Excellence en Mathématiques*. Nmi Education.

Therriault, G., Bader, B., & Angoué, C. N. (2013). L'apport de la notion de rapport(s) au(x) savoir(s) en éducation aux sciences et en formation initiale et continue des enseignants du secondaire : des exemples au Québec et au Gabon. In C. Nafti-Malherbe & G. Samson (Eds.), *Rapport au savoir* (Vol. 17, pp. 267). Revue internationale de sociologie et de sciences sociales.

Thompson, P. W. (1994). Students, functions and the undergraduate curriculum. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (Eds.), . *Research in Collegiate Mathematics Education*, *vol. 4*(1 (Issues in Mathematics Education)), pp. 21-44 Providence, RI: American Mathematical Society.

Thompson, P. W., & Carlson, M. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of mathematical thinking. To appear in J. Cai (Ed.). *Third handbook of research in mathematics education. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics*.

Thouin, M. (2014). *Réaliser une recherche en didactique*. Editions Multimondes.

Touré, S., Akele, C., Baye, O. H. A., Bendiman, K. M., Conde, K., Djiguiba, O., Don, A. P., Neulat, J.-L., & Traoré, S. (2015). *Collection Inter Africaine de Mathématiques, Premières Sciences Mathématiques*. Edicef.

Trouche, L. (2004). Environnements informatisés et mathématiques: quels usages pour quels apprentissages? *An international journal*, *55*(1), 181-197. https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000017674.82796.62

Trouche, L., Gitirana, V., Miyakawa, T., Pepin, B., & Wang, C. (2019). Studying mathematics teachers interactions with curriculum materials through different lenses: Towards a deeper understanding of the processes at stake. *International Journal of Educational Research*, *93*, 53-67. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ijer.2018.09.002

Tsafak, G. (2000). *L'enseignement secondaire au Cameroun : tendances organisationnelles et résultats d'apprentissage des élèves*. Presses universitaires de Yaoundé.

Tsamir, P., Rasslan, S., & Dreyfus, T. (2006). Prospective teachers' reactions to Right-or-Wrong tasks: The case of derivatives of absolute value functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *25*(3), 240-251. https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.09.001

Tupin, F. (2003). Jalons pour une problématique générale. *Les Dossiers des Sciences de l'Éducation*, *10*, 5-15.

Tyne, J. G. (2014). Slope and derivative: calculus students' understanding of rates of change In T. Fukawa-Connolly, G. Karakok, K. Keene, & M. Zandieh (Eds.), *Proceedings of the 17th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 299-310).

Van der Maren, J.-M. (1993). Savoirs enseignants et professionnalisation de l'enseignement. *Revue des sciences de l'éducation*, *19*(1), 159-173.

Van der Maren, J.-M. (1996). *Méthodes de recherche pour l'éducation* (2e édition. ed.). Montréal : Presses de l'Université de Montréal. http://www.pum.umontreal.ca/catalogue/methodes-de-recherche-pour-leducation

http://hdl.handle.net/1866/4688

Van Der Maren, J.-M. (2003). Chapitre 7. La quête d'informations contextualisées. In J.-M. Van Der Maren (Ed.), *La recherche appliquée en pédagogie* (pp. 137-158). De Boeck Supérieur. https://www.cairn.info/la-recherche-appliquee-en-pedagogie--9782804143084-page-137.htm

Van Manen, M. (1990). *Researching lived experience : human science for an action sensitive pedagogy*. Althouse Press.

Vandebrouck, F. (2011). *Des technologies pour l'enseignement et l'apprentissage des fonctions du lycée à l'université : activités des élèves et pratiques des enseignants* [HDR, Université Paris Diderot]. Paris.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, *10*(2-3), 133-170.

Vergnaud, G., & Récopé, M. (2000). De Revault d'Allonnes à une théorie du schème aujourd'hui. *Psychologie Française*, *45*(1), 35-50. https://hal.uca.fr/hal-01898034 (La Société Française de Psychologie a cent ans)

Verley, J. L. (1991). Leibniz et l'école continentale. In IREM (Ed.), *Mnemosyne* (Vol. 6). Mathématiques Approche par les textes historiques.

Viholainen, A. (2011). Critical features of formal and informal reasoning in the case of the concept of derivative. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 305-312). PME.

Vinner, S. (1982). Conflicts between definitions and intuition - the case of tangent. In A. Vermandel (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 24-28). Universitaire Instelling.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, *14*, 293-305.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definition for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*, 356-366.

Vivier, L. (2010). Un milieu théorique pour la notion de tangente dans l'enseignement secondaire. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *13*, 167–193. http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/articles/annales_de_didactique_et_de_sciences_cognitives/

Vivier, L. (2013a). Without derivatives or limits: from visual and geometrical points of view to algebraic methods for identifying tangent lines. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *44*, 711-717. https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.785607

Vivier, L. (2013b). Without derivatives or limits: from visual and geometrical points of view to algebraic methods for identifying tangent lines. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *44(5)*, 711-717. https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.785607

Vounda-Etoa, M. (2016). *Livre et Manuel scolaires au Cameroun. La dérive mercantiliste*. PUY.

Wagner, D. (2012). Opening mathematics texts: Resisting the seduction. *Educational Studies in Mathematics*, *80(1-2)*, 153-169.

Weber, K. (2004). Traditional instruction in advanced mathematics courses : a case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course *The Journal of Mathematical Behavior*, *23*(2), 115-133. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2004.03.001

Weigand, H.-G. (2014). A discrete approach to the concept of derivative. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, *46*, 603-619. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0595-x

Weller, K., Brown, A., Dubinsky, E., McDonald, M., & Stenger, C. (2004). Intimations of infinity. *Notices of the American Mathematical Society*, *51*(7), 741-750.

Williams, S. R. (2001). Predications of the limit concept: An application of repertory grids. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(4), 341-367.

Yerly, G. (2017). Évaluation des apprentissages en classe et évaluation à grande échelle : quels sont les effets des épreuves externes sur les pratiques évaluatives des enseignants ? *Mesure et évaluation en éducation*, *40*(1), 33-60. https://doi.org/https://doi.org/10.7202/1041003ar

Yilmaz, R., & Argun, Z. (2018). Role of Visualization in Mathematical Abstraction: The Case of Congruence Concept.

Yin, R. K. (2014). *Case study research : design and methods* (5 edition ed.). SAGE.

Youschkevitch, A. P. (1981). Le concept de fonction jusqu'au milieu du 19ème siècle. Fragments d'histoire des mathématiques. *Brochure APMEP*, *41*, 7-68.

Zandieh, M. (1997). *The evolution of student understanding of the concept of derivative* [Dissertation, oregon state university]. ScholarsArchive@OSU.

Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education* (Vol. IV, pp. 103–127). Providence, RI: American Mathematical Society

Annexes

Annexe 1 : Rapport personnel de l'enseignant Alex

Invariants opératoires	Exemples	Code
	Perception au sujet de la dérivée	
La dérivée a plusieurs sens : C'est la pente, la vitesse ou le taux de variation	« la dérivée a plusieurs significations. C'est la pente de la tangente… la dérivée représente [...] la vitesse de déplacement de cette particule-là » … « c'est à partir du taux de variation et de certaines propriétés des limites qu'on a fait avant qu'on a pu déterminer la pente qui est en même temps la dérivée »	PS
	Perception au sujet de l'apprentissage de la dérivée	
Les élèves doivent apprendre la dérivée comme pente de la tangente	« Dans le contexte camerounais, les enfants doivent beaucoup plus maitriser la dérivée comme le coefficient directeur de la tangente de la fonction en un point »	DP
Les problèmes de modélisation sont difficiles pour les élèves	« Dans le cas pratique les enfants sont généralement perdus parce qu'ils ne sont pas familiers avec ….les problèmes de modélisation…. pour des situations de vie »	MD
Les problèmes d'approximation sont difficiles pour les élèves	« Bon le problème de l'approximation est aussi touffu car les élèves ne sont pas familiers avec les problèmes d'approximation et aussi parce que c'est un peu compliqué de mettre l'approximation en application »	AD
Les applications de la dérivée servent à motiver les élèves	« Ma vision sur le cas particulier de la dérivée en un point a beaucoup changé quand j'ai commencé à enseigner. Mais quand j'ai commencé à me cultiver moi-même, j'ai commencé à voir les applications de la dérivée par moi-même. Je tenais un enfant en 1ère D en cours du soir, un jour quand on faisait la dérivabilité, il m'a posé la question de savoir à quoi peut même servir la dérivée. Je n'avais rien à dire, je ne savais rien.…Bon du coup j'ai pris sur moi de chercher à quoi ça pouvait servir, c'est à partir de ça que j'ai commencé à voir qu'on pouvait appliquer la dérivée… et quand même je suis revenu discuter avec l'enfant, j'ai constaté que le message passait plus, il était motivé il avait envie de… »	AM
	Perception au sujet de l'enseignement de la dérivée	
Dans l'enseignement, il est important de voir que la dérivée sert à représenter les fonctions	« Dans le contexte camerounais ce qui importe plus c'est l'utilisation de la dérivée pour construire des fonctions » … « ce qui est universel c'est l'utilisation de la dérivée pour construire les fonctions, pour étudier les signes des fonctions, pour utiliser la tangente »	RF

La tangente sert à introduire la dérivée	« Je pense plutôt que c'est pour enseigner la dérivée en un point, on passe par une tangente on cherche sa position limite pour vraiment l'appeler tangente et à partir de là…généralement on appelle ça aux enfants taux de variation de la fonction. Maintenant on calcule la limite de ce taux de variation qu'on appelle le coefficient directeur de la tangente en ce point ».	TID
	RESSOURCES UTILISÉES PAR LES ENSEIGNANTS	
	Ressources pour la préparation des cours sur la dérivée	
Les contenus sur la dérivée sont bien organisés dans le programme	« L'ordre de présentation de la dérivée dans le programme officiel est très bien articulé (OPB) » …« tel que prévoit le programme, les objectifs, il y a l'équation de la tangente qui n'est pas laissé au hasard »	OPB
Il est important de suivre le programme	« Les plus pertinents dans le contexte camerounais c'est l'utilisation des dérivées…c'est ce que demande le programme camerounais, de prouver qu'une fonction est dérivable en un point » … « Le contenu du manuel et des ressources utilisées sur la dérivée me permettent de mieux élaborer le cours (des petites leçons pour des objectifs avec des bonnes situations problème et activités d'apprentissage) pour faciliter une meilleure compréhension des apprenants »	SP
Le manuel au programme est bien ordonné Le manuel est un support, mais l'enseignant doit aller au-delà du manuel	« C'est vrai qu'*Excellence* est un peu bien structuré, on ne peut pas le nier » . « Je prends *Excellence* juste comme un support qui me permet donc de préparer mon cours, donc ça m'aide dans ce sens que dans ses activités et dans les objectifs à atteindre je dois être dans les mêmes objectifs. Mais je peux changer les activités par rapport aux activités qu'ils proposent, les situations problèmes par rapport aux situations problèmes qu'ils proposent. Donc c'est juste une fondation qui nous permet maintenant de préparer un bon cours, de créer d'autres situations problèmes, d'autres exercices qui visent les mêmes objectifs »	OMB
	Ressources pour l'enseignement	
Le fait de travailler des exemples aide pour l'apprentissage	« la méthode qui passe le plus c'est donner la définition et donner beaucoup d'exemples, traiter avec eux en classe ».	EA
Le but ce niveau scolaire c'est de réussir à l'examen ministériel	« Et sur ce, le but pour les élèves c'est de valider leur examen de fin d'année. Donc tout ce qui a trait à la dérivée doit être ce qui vient souvent à l'examen ou bien ce que le programme officiel demande, c'est beaucoup plus ça. Et avec cette technique, si vous voyez dans leur livre au programme, c'est le type d'activité comme ça, c'est à partir de ça, parce que même au début du cours les objectifs de la dérivation, leçon numéro un, objectif principal, déterminer le nombre dérivé en un point, deux, construire l'équation de la tangente à Cf à ce point »	EM
Certaines difficultés des élèves avec la dérivée se retrouvent dans les prérequis	« il y a eu des petites difficultés, bon mais ces difficultés pour moi étaient beaucoup plus dans les prérequis » … « par exemple quand j'ai posé la question sur le taux de variation certains ne s'en souvenaient plus pourtant c'est un cours qu'ils ont vu en seconde. C'est beaucoup plus au niveau des prérequis qu'ils avaient des problèmes ».	DPR
Le regard des enseignants du	« Les discussions avec les collègues mais aussi avec peut-être les amis qui sont un peu au supérieur nous amènent à voir que ce qu'on appelle nombre	RES

supérieur sur mes cours me permet de mieux contextualiser la dérivée	dérivé là c'est un peu vaste, c'est très vaste même. Même quand je cause avec les physiciens ils me donnent les applications là où je n'ai pas encore touché, j'essaie aussi de voir et je me dis c'est puissant, ça touche un peu de domaines, ça touche beaucoup de chose »	
	Autres ressources utilisées par les enseignants	
L'internet offre des ressources intéressantes pour les enseignants	« Mon premier support pour préparer mes cours c'est l'internet d'abord. Dans internet il y a des recherches sur Google puis les groupes dans lesquels nous échangeons les documents, les points de vue, les stratégies avec les enseignants ».	RI
Le forum de mathématiques permet d'améliorer l'enseignement	« Le GPM c'est un groupe de collectif d'enseignants de mathématiques camerounais qui a été mis sur pied pour essayer d'uniformiser les cours. …Le tout c'est d'être de meilleurs enseignants pour ces enfants, de mieux les préparer à leur examen de fin d'année »	FE
Les connaissances didactiques et pédagogiques aident à planifier et à enseigner	« Ma formation à l'ENS me permet de savoir comment détacher les questions en petits objectifs pour atteindre mon but. Maintenant ma formation que j'ai faite aux supérieures me permet de savoir que tel problème que je peux adapter à tel niveau scolaire pour qu'un enfant puisse comprendre [...] Le tri des documents et la préparation des cours pour des objectifs qu'on s'est fixés, ma formation de l'ENS m'aide beaucoup dans la façon dont je prépare mes enseignements »	CDP
L'expérience des années précédentes permet d'améliorer les enseignements	« Si par exemple cette année j'ai des difficultés à enseigner le nombre dérivé, je relève généralement cette difficulté au niveau des apprenants, l'année qui vient maintenant j'essaie de corriger ça [...] je dois chercher des ressources qui me donnent par exemple des exercices que je pourrais adapter avec mon expérience d'ancien étudiant en enseignement pour l'enfant qui pourrait le galvaniser à mieux comprendre »	EX
Les observations des élèves sur le cours permettent de les aider à mieux apprendre	« Dans ma façon d'enseigner j'aime écouter des enfants. J'aime envoyer un enseignant intermédiaire aller demander aux élèves qu'est-ce que je fais et qui ne les arrange pas…Et c'est à partir de ces difficultés … j'essaie de trouver des pistes de solutions »	OE

Annexe 2 : Rapport personnel de l'enseignant Bernard

Invariants opératoires	Exemples	CODE
	Perception au sujet de la dérivée	
La dérivée a plusieurs sens : c'est la pente, la vitesse ou le taux de variation	« La dérivée, je l'associe plus à une vitesse… On enseigne le taux de variation par exemple en seconde et en 1ère maintenant on approche la limite avec le taux de variation…Oui pas seulement la vitesse. La dérivée peut être une pente d'une courbe ».	PS
	Perception au sujet de l'apprentissage de la dérivée	
La tangente est une conséquence de la définition	« pour moi la tangente apparait comme une conséquence. Donc je cherche la dérivabilité en un point et que cette dérivabilité existe en ce point-là, alors en ce point-là on aura une tangente ».	TC
La dérivée est plus difficile au supérieur qu'au secondaire mais ma formation mathématique me rassure	« La dérivée est plus brute au supérieur, trop savante que la dérivée au secondaire » …« En plus avec les mathématiques que j'ai faites en faculté, tout ça me permet de pouvoir engager les exercices de recherche sans avoir peur avec les apprenants... « Je vois rapidement les solutions et dans ma tête je crée des petits chemins pour permettre à l'apprenant de mieux saisir ».	DDS
Les applications de la dérivée servent à motiver les élèves	« Pour les motiver à apprendre la dérivée, je parlais ici de la physique, les applications physiques parce que pour qu'ils comprennent vraiment la notion de dérivée, on va entrer un peu en physique pour leur montrer que le nombre dérivé c'est la pente. »	AM
	Perception au sujet de l'enseignement de la dérivée	
Dans l'enseignement, il est important de voir que la dérivée sert à représenter les fonctions	« …dans le cours sur la dérivée ce qui est plus important à enseigner c'est comment dériver des fonctions polynômes, rationnelles. Parce que ça va nous aider dans l'étude des fonctions »	RF
Les représentations graphiques peuvent alourdir le cours sur la dérivée	« C'est aussi bien de faire avec les représentations graphiques mais j'ai vu qu'en le faisant le cours serait plus lourd… Quand je vais voir le cours sur les fonctions toutes ces représentations graphiques je vais les faire ».	RG
	RESSOURCES UTILISÉES POUR LES ENSEIGNANTS	
	Ressources pour la préparation des cours sur la dérivée	
Les contenus sur la dérivée sont bien organisés dans le programme	« c'est vrai que premièrement enseigner la dérivée en 1ère C déjà c'est d'abord le programme. Tout ce qu'on fait est toujours en référence au livre programme. Donc on ne va pas aller puiser dans un document, dans un programme autre qu'on nous a assigné depuis le depuis de l'année ».	OPB
Il est important de suivre le programme	« Vous savez tout ce qu'on fait est toujours en référence au livre programme. Donc on ne va pas aller puiser dans un document, dans un programme autre qu'on nous a assigné depuis le début de l'année. « Vous savez on a beaucoup d'élève dont les parents sont des enseignants. De peur que tu enseignes un truc, ou bien une	SP

	notion puis l'inspecteur peut appeler le principal pour lui dire qu'il y a un enseignant qui n'enseigne pas selon le programme, il va plus loin selon la pensée des enfants. C'est pour ça que je fais des efforts pour rester dans le livre programme. S'il y a même des exercices de recherche que je donne aux enfants ce sont des exercices d'application. Pas d'application dans mon cours. Quand on fait les TD, Je fais d'abord les TD dans le livre au programme et puis il y a deux ou trois exercices que je donne à faire à la maison, ils vont chercher puis un jour en fonction du temps disponible nous débattons ».	
Le manuel est bien ordonné Le manuel est un support, mais l'enseignant doit aller au-delà	Pour moi le manuel est un complément. Ce que je recherche dans ces autres documents c'est la manière de formuler des exemples et des exercices et dans la formulation des sujets d'évaluation. Donc toutes ces informations quand je les prends vous voyez un peu, j'essaie toujours de les ramener dans le sens du livre programme. si je prends le livre au programme, c'est beaucoup de ressources concentrées. Il faut maintenant prendre ces ressources et puis les travailler pour faciliter l'apprentissage de la dérivée chez les élèves	OMB
	Ressources pour l'enseignement	
Le manuel d'élève de l'enseignant est une ressource importante	J'ai d'abord mon ancien livre de $1^{\text{ère}}$ C, CIAM que j'ai toujours. Avec ce livre j'ai commencé la notion de dérivée, j'ai appris la notion de dérivée avec ce livre. Quand je regarde ce livre, je me rappelle la manière dont l'enseignant enseignait la notion de dérivée et ce que j'ai retenu puis j'essaie d'aller vers le même sens que lui.	ME
Le but ce niveau scolaire c'est de réussir à l'examen ministériel	ce qui parait plus important pour moi c'est d'abord leur examen car vous savez si un élève ne réussit pas son examen le parent dira que le professeur a mal fait son travail. Mais pour l'instant la dérivée c'est pour faciliter l'accession à leur examen et pour leurs études futures en terminale et puis à l'université.	EM
Le contenu du manuel au programme sur la dérivée est vaste et les activités sont lourdes	vous savez le manuel qu'on a au programme est tellement vaste. C'est-à-dire que si tu dis que tu vas approcher la notion de dérivée en regardant le livre excellence, tu vas perdre trois heures sans finir la première leçon. Quand je lis ça, leurs activités qui sont tellement lourdes là, j'essaie de les contracter en deux ou trois lignes	AL
Certaines difficultés des élèves avec la dérivée se retrouvent dans les prérequis	« Il y a les problèmes de conjugaison avec les radicaux, les problèmes de factorisation. ces deux éléments sont reliés aux problèmes d'équation et non à la dérivée, calculer le discriminant, factoriser ».	DPR
	Autres ressources utilisées par les enseignants	
L'internet offre des ressources intéressantes pour les enseignants	Je me sers aussi des cours que des collègues postent … par exemple on peut avoir un cours qu'un collègue a utilisé au Mali, au Sénégal en $1^{\text{ère}}$ S sur internet et avec tout ça je peux sortir	RI

	quelque chose pour laquelle l'enfant ne doit pas souffrir pour comprendre	
Le forum de mathématiques permet d'améliorer l'enseignement	« J'ai aussi des collègues qui sont un peu de partout avec qui on échange des cours pendant les congés…Au nord, au sud, à l'ouest… on s'échange des cours, on fait des cours uniformes qu'on partage. Quand on finit de les concevoir, un collègue se charge alors de les unifier et puis on a maintenant tout le cours. Maintenant avec tout ça je peux sortir quelque chose pour laquelle l'enfant ne doit pas souffrir pour comprendre ».	FE
Les connaissances didactiques et pédagogiques aident à planifier et à enseigner	« À l'ENS on passe le temps à nous bourrer des mathématiques pures, algèbre, analyse. On touche du doigt l'enseignement quand on part en stage ».	CDP
L'expérience des années précédentes permet d'améliorer les enseignements	« Mon expérience d'enseignement me permet de modifier chaque fois mon cours pour l'adapter pour la compréhension des élèves »	EX

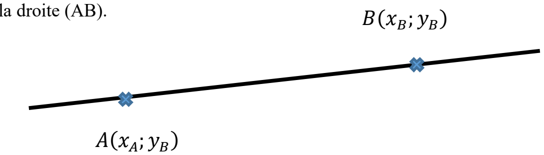
Annexe 3 : Rapport personnel de l'enseignant Charles

Invariants opératoires	Exemples	CODE
	Perception au sujet de la dérivée	
La dérivée a plusieurs sens : c'est la pente, la vitesse ou le taux de variation	« Pour moi la dérivée… c'est d'abord le résultat de la limite du taux de variation. Donc je vois ça comme la limite du taux de variation d'une fonction »…« Moi c'est ce que je pense pour l'instant, la dérivée est associée à la vitesse ». … « la dérivée et la tangente sont intimement liées, il y a une relation qu'il faut bien établir »	PS
	Perception au sujet de l'apprentissage de la dérivée	
Dans l'enseignement, il est important de voir que la dérivée sert à représenter les fonctions	« Au vu du programme éducatif camerounais pour le cas de la classe de 1ère. Je pense que l'élève doit être principalement capable de déterminer l'équation de la tangente à une fonction en un point, étudier le sens de variation… dresser le tableau de variation d'une fonction ».	RF
Interpréter la dérivée semble difficile pour les élèves	« Les élèves ont des difficultés au niveau de l'interprétation géométrique de la notion de dérivée »	IDD
Faire les liens entre les notions de la dérivée est important	Si l'élève ne peut pas comprendre les différents liens qu'il y a entre la dérivée, la tangente et le sens de variation, il aura beaucoup de difficulté quand il s'agira de les appliquer au supérieur	FL
	Perception au sujet de l'enseignement de la dérivée	
La tangente est une conséquence de la définition	pour moi la tangente apparait comme une conséquence. La tangente ne sert pas à introduire la dérivée «la tangente n'intervient pas dans la présentation de ce que c'est que le nombre dérivé…pour moi la tangente est une conséquence de la définition »	TC
L'enseignement de la dérivée n'est pas facile	« L'enseignement de la dérivée n'est pas facile. Je vais ailleurs dans le but de trouver des méthodes plus faciles, plus abordables pour pouvoir transmettre cette notion. Donc me contenter uniquement du livre programme et du livre au programme serait une mauvaise conduite intellectuelle. Il faut rechercher d'autres moyens pour faciliter l'enseignement de la dérivée ».	DPF
Les applications mathématiques de la dérivée donnent du sens à l'enseignement de la dérivée.	ce qui est plus important dans l'enseignement de la dérivée ce sont ses applications, savoir à quoi ça peut servir… quand je parle des applications, il s'agit des applications dans le cadre du cours. Notamment la recherche des extrema, la recherche des sens de variation des fonctions.	AS
Les représentations graphiques peuvent alourdir le cours	« Le graphe pour moi représente… du moins j'utilise le graphe lorsqu'il s'agit de faire l'application sur des variations des fonctions » … « Pour moi le graphe intervient beaucoup plus dans le sens de variation et aussi pour construire la tangente ». Je n'ai pas pensé à l'approche graphique dans la définition, oui parce que	RG

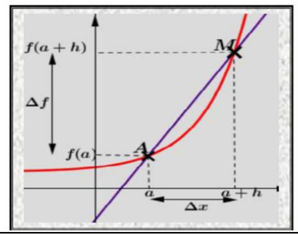
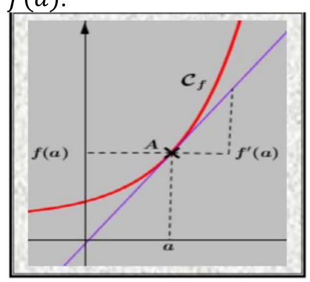
	par rapport à mon expérience mathématique moi je sais que la définition de la dérivée a un lien étroit avec l'approche théorique de la limite du taux d'accroissement »	
	RESSOURCES UTILISÉES POUR LES ENSEIGNANTS	
	Ressources pour la préparation des cours sur la dérivée	
Les contenus sur la dérivée sont bien organisés dans le programme	« je pense que dans le programme c'est même trop clair. Chercher une autre définition serait aller à l'encontre du livre programme » «. La première difficulté c'est que le programme d'abord est exigeant, donc le programme se fond dans un champ et il faut trouver des ressources pour permettre de satisfaire au programme, ça c'est la première difficulté.»… «je pense qu'on pouvait justement introduire le cours sur la dérivée avec cette notion de tangente. Mais à cause de l'exigence du programme je me suis confiné sur la limite du taux de variation ».	OPB
Il est important de suivre le programme	« Les ressources institutionnelles c'est le cadre délimité, l'État délimite la manière dont on doit enseigner la dérivée, nous n'avons pas le choix de changer les méthodes »	SP
Le manuel est bien ordonné Le manuel est un support, mais l'enseignant doit aller au-delà	« je pense que l'ordre dans ces manuels est presque le même. Pour ma part l'ordre est tout simplement au niveau des prérequis. Pour ma part c'est juste une façon logique, il faut simplement suivre pour faciliter la compréhension »…« Il y a plusieurs livres. Pour l'instant le livre au programme c'est excellence et des livres par le passé il y avait CIAM, il y a aussi le livre Majors, ce sont les livres que parfois je feuillette pour essayer d'approfondir ou bien de voir les différentes façons ou les différentes approches pour introduire la dérivée »	OMB
	Ressources pour l'enseignement	
Le contenu du manuel au programme sur la dérivée est vaste et les activités sont lourdes	«En plus du livre au programme et du programme officiel, je me base sur ma propre expérience et sur mes recherches personnelles. Dans le cadre de faciliter l'apprentissage de la dérivée. Oui, parce que Quand je regarde même le livre au programme je me rends compte que parfois leurs activités sont lourdes ou bien elles sont difficilement compréhensibles pour un élève moyen »	AL
Le but ce niveau scolaire c'est de réussir à l'examen ministériel	« Au vu du programme éducatif camerounais pour le cas de la classe de 1ère. Je pense que l'élève doit être principalement capable de déterminer l'équation de la tangente à une fonction en un point également d'étudier le sens… dresser le tableau de variation d'une fonction. Je commence par les aspects qui sont nécessaires pour l'examen.»	EM
Certaines difficultés des élèves avec la dérivée se retrouvent dans les prérequis	« j'ai constaté que beaucoup ne maitrisaient pas ce qu'est la continuité » …« j'ai eu quelques difficultés qu'ils ont rencontrées notamment la première difficulté c'est le calcul de la limite. Je me suis rendu compte que pour les élèves il est plus facile de montrer qu'une fonction est dérivable que de montrer qu'elle n'est pas dérivable »	DPR
	Autres ressources utilisées par les enseignants	

L'internet offre des ressources intéressantes pour les enseignants	«Le plus souvent je les rencontre sur internet. la valeur ajoutée est au niveau des applications dans la société puisqu'il y a des documents qui font le lien entre la dérivée et même la croissance économique. Il y a des applications ou on voit directement les applications de la dérivée dans la vie active, des choses qu'on ne développe pas dans les manuels ici au Cameroun »	RI
Le forum de mathématiques permet d'améliorer l'enseignement	«J'ai même déjà écrit des cours dans ce groupe-là. La principale difficulté c'est qu'il y a des enseignants qui postent les activités, des cours et quand on critique parfois ils ne modifient pas entièrement et vu que comme nous sommes nombreux là-bas, c'est la voix de la démocratie. Mais sinon j'ai mes propres convictions en matière de didactique »	FE
Les connaissances didactiques et pédagogiques aident à planifier et à enseigner	Ma formation à l'ENS me prépare, ça m'influence beaucoup dans mes enseignements. Donc l'ENS m'a aidé sur le plan méthodologique, l'organisation, la préparation et la dispensation d'un cours. Je n'avais pas une visibilité de la notion de dérivée mais quand je suis entré à l'école normale, on m'a appris la notion d'objectif, comment faire pour atteindre un objectif. C'est à partir de tout ça que maintenant je sais quand je suis en face de la dérivée avant de commencer je dois définir tous les contours, comment dois-je procéder pour enseigner cette dérivée, qu'est-ce que l'enfant doit retenir à la fin de la formation, dans quel domaine je peux appliquer la dérivée et quelles sont les ressources que je peux utiliser pour atteindre ces objectifs-là.	CDP
Mon expérience d'élève m'aide à enseigner	Quand j'étais en première la notion de dérivée était trop abstraite. Quand l'enseignant commence à faire les limites, il ne nous montre pas le lien entre la limite et le taux de variation vu en seconde, c'était abstrait.	EX

Annexe 4 : Introduction du processus didactique / Alex

Épisode	Moment didactique	Acteur principal	Objets mathématiques	Activités didactiques observées
Rappel d'un prérequis		**Enseignant**	Points, droite, quotient différentiel $\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$	**Enseignant** : L'enseignant commence par représenter une droite au tableau puis il demande aux élèves de donner la règle et de calculer le coefficient directeur de la droite (AB).  **Elèves** : Certains élèves donnent la bonne réponse, cependant d'autres et la majorité a des difficultés à retrouver cette formule
Annonce de l'objectif du cours				L'enseignant inscrit le numéro du chapitre et le titre au tableau, puis il annonce les objectifs : Nous allons aborder un nouveau chapitre aujourd'hui qui porte sur les dérivations. Et dans ce chapitre que nous allons faire en deux leçons, la première leçon portera sur la dérivation en un point. Il sera question pour vous de savoir quand est ce qu'on parle de dérivation en un point, quand dit-on qu'une fonction est dérivable en un point et par la suite on va aussi voir à quoi ça sert de déterminer le nombre dérivé en un point. Pour y parvenir, il y a certaines choses que vous devez vous rappeler comme la limite d'une fonction et le taux de variation.
	Premier moment didactique : rencontre avec la tâche T11 : Calculer le nombre dérivé d'une fonction en un point	Enseignant	Fonction, Coefficient directeur Limite Tangente	• L'enseignant dicte en partie l'activité en l'écrivant au tableau, • Il dessine ensuite la courbe de la fonction puis il place les points A (- 2 ; 3) et un point M (x; y) qui appartient à Cf. • Il porte les différentes questions au tableau en les dictant. • L'activité portée au tableau est le même que celui qui a été utilisée dans le manuel de l'enseignant La courbe (C)ci-contre est la représentation graphique de la fonction f définie par f(x) $= -\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}$. On désigne par A le point de (C_f) de coordonnées $(-3; 2)$. a) vérifier par calcul que le point $A\ (-3\ ;\ 2)$ appartient à la courbe de f. b) justifier que pour x différent de – 3 le coefficient directeur de la droite (AM) est $\frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)} = -\frac{x+1}{2}$. c) calculer la limite de $\frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)}$ lorsque x tend vers -3. d) vers quel point se rapproche le point M lorsque x tend vers – 3 ? En déduire la position limite de la droite (AM) lorsque x tend vers -3. e) Représenter la droite (T) position limite de M quand x tend vers -3.
		Enseignant	Point Courbe	Enseignant : qu'est-ce qu'on fait pour vérifier qu'un point appartient à une courbe ?
		Élève	Fonction Image d'un nombre	Élève : on va calculer l'image de – 3 et vérifier que c'est égal à 2
	Micro-institutionnalisation	Enseignant	Fonction Image d'un nombre Courbe	Enseignant : Donc on doit vérifier que f (-3) nous donne 2. Si ça donne 2 ça veut dire que le point A appartient à cf et si cela ne donne pas 2 ça veut dire que le point A n'appartient pas à cf.
Introduction du nombre dérivé en un point		Enseignant	Point Pente Abscisse Taux de variation	Enseignant : Je prends un point M qui se ballade. On peut demander de justifier que la pente de la droite (AM) est $-\frac{x+1}{2}$. Quelqu'un a-t-il calculé ? Le quotient $\frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)}$ vous donne combien ? Il laisse le temps aux élèves de faire ce calcul au brouillon.
		Élève	Point	Les élèves effectuent les calculs de façon individuelle

	Moment technique	Enseignant	Pente Abscisse Taux de variation	L’enseignant circule et vérifie les calculs des élèves.
		Élève Enseignant	Forme canonique Factorisation Identités remarquables	$\frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)} = \frac{-\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{1}{2}-2}{x+3} = \frac{-\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{3}{2}}{x+3}$ Enseignant : un demi moins deux donne combien ? Élève : Moins trois demis Enseignant : Je peux factoriser par un demi $= \frac{-\frac{1}{2}(x^2+4x+3)}{x+3}$ Enseignant : Maintenant quelle est la forme factorisée de x^2+4x+3? On peut utiliser la forme canonique $x^2+4x+3 = (x+\frac{4}{2})^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 + 3$ Élève : est-ce que ça ne donne pas $(a+b)^2$? Enseignant : je ne pense pas. Ça ne respecte pas cette forme. Pour appliquer cette forme on doit avoir $a^2+2ab+b^2$ Est-ce que j’ai cette forme ici ? a C’est x, est ce que j’ai $2\times x\times 2$? est ce que j’ai 2 au carré ici? Ça ne marche pas, d’accord, même avec la racine ça ne marche pas. Enseignant : $x^2+4x+3 = (x+\frac{4}{2})^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 + 3 = (x+2)^2-4+3 = (x+2)^2-1 = (x+2-1)(x+2+1) = (x+1)(x+3)$ d,accord, donc on peut dircetement remplacer x^2+4x+3 par $(x+1)(x+3)$. Donc $\frac{-\frac{1}{2}(x^2+4x+3)}{x+3} = \frac{-\frac{1}{2}(x+1)(x+3)}{x+3}$ Elève : on simplifie par $x+3$ Enseignant : On simplifie ce qui est égale à $-\frac{1}{2}(x+1)$. Pour appliquer les identités remarquables, il faut toujours vérifier si la propriété est vérifiée. On n’applique pas ça au hasard, généralement avec les racines carrées ça marche quand on a la forme a^2-b^2. Mais quand il y a déjà les puissances décroissantes de x il faut être vigilent.
		Enseignant	Limite Taux de variation	Enseignant : on demande maintenant la limite de $\frac{f(x)-f(-3)}{x+3}$ quand x tend vers -3. Tout le monde arrête d’écrire, vous allez écrire à la fin, on doit d’abord corriger. Au petit b on a trouvé que $\frac{f(x)-f(-3)}{x+3} = -\frac{(x+1)}{2}$, on peut simplement remplacer cette fonction $\frac{f(x)-f(-3)}{x+3}$ par $-\frac{(x+1)}{2}$. On a $\lim_{x\to-3}\frac{f(x)-f(-3)}{x+3} = \lim_{x\to-3}(-\frac{(x+1)}{2})$… on remplace simplement x par – 3 et on a $-\frac{(-3+1)}{2} = 1$ donc $\lim_{x\to-3}\frac{f(x)-f(-3)}{x+3} = 1$
		Enseignant	Courbe Point Limite	Enseignant : la question suivante, vers quel point se rapproche le point le point M lorsque x tend vers – 3 ? L’enseignant se réfère à son graphe en pointant sur le point M. lorsque x se rapproche de – 3 le point M se rapproche du point A car x va suivre un déplacement. Enseignant : Donc le point M se rapproche du point A lorsque x tend vers – 3. La position limite du point M est A.
		Enseignant Élève	Droite Tangente Point Coefficient directeur	Enseignant : on demande de représenter la droite (T) position limite du point M sur la courbe. Tout le monde sait ici… quelle est la pente de la droite (AM), quel est son coefficient directeur d’après tout ce qu’on a fait ? Élève : C’est égal à 1. Enseignant : Donc son coefficient directeur est 1. C’est donc la droite qui va passer par le point A et qui va toucher le point A en un seul point. Voici la droite (T). L’enseignant trace la droite (T) au tableau Enseignant : Vous voyez que ça touche la courbe en un seul point, elle est aussi appelée la tangente de la courbe au point d’abscisse – 3. Maintenant qui peut me faire le rapprochement entre ce qu’on appelle le coefficient directeur de la droite (AM) qu’on a trouvé égale à 1 qui est quoi ? la pente de la droite (T) qui est la tangente à la courbe au point d’abscisse – 3.

Définition du nombre dérivé en un point	Institutionnalisation	Enseignant Élève	Fonction Intervalle Taux de variation Limite	Enseignant : A la ligne, résumé. On va donc résumer ce qu'on vient de faire. L'enseignant note la définition au tableau Soit f une fonction définie sur un intervalle K de $\mathbb{R}$, $a \in K$. On dit que f est dérivable en a si $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. Cette limite est appelée nombre dérivé de f au point a et est noté f'(a). On a donc $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ L'enseignant continue en expliquant Enseignant : C'est-à-dire pour signifier que la fonction est dérivable au point d'abscisse a et que son nombre dérivé est $f'(a)$, c'est pour cela que cette limite doit être finie. Par exemple pour le cas que nous avons fait précédemment quel est le nombre dérivé de la fonction quand x tend vers – 3 ? Élèves : le nombre dérivé quand x tend vers – 3 est égal à 1 Enseignant : qui est aussi le coefficient de la tangente au point d'abscisse – 3. 
Equation de la tangente en un point	Institutionnalisation	Enseignant	Equation Tangente	Enseignant : Graphiquement une fonction est dérivable en un réel a lorsque (C_f) admet une tangente non parallèle à l'axe des ordonnées au point d'abscisse a. en posant (T) cette tangente, elle est l'unique tangente à (C_f) au point A d'abscisse a et de pente $f'(a)$. Ainsi son équation réduite est de la forme $(T) : y = f'(a)(x-a) + f(a)$.  L'enseignant continue en questionnant les élèves Si $f'(a) = 0$ qu'est ce qui se passe ? Élève : $y = f(a)$ Enseignant : alors l'équation de la tangente se réduit à $y = f(a)$ qui est une droite qui est comment ?

				Élève : parallèle à l'axe des abscisses Enseignant : qui est une droite qui est parallèle à l'axe des abscisses. Quand c'est parallèle à l'axe des abscisses on dit que c'est comment, c'est vertical ou c'est horizontal ? Élève : c'est horizontal Enseignant : Remarque 2 : Si $f'(a) = 0$ alors $(T) : y = f(a)$ qui est une droite parallèle à l'axe des abscisses, on la représente souvent par une double flèche (↔).
Exercice d'application	Evaluation	Enseignant Élève	Nombre dérivé Equation de la tangente	L'enseignant écrit un exercice d'application au tableau On donne les fonctions $g(x) = \frac{2x+3}{x-2}$ et $h(x) = \sqrt{x}$ 1) Montrer que g est dérivable en $x_0 = 1$ puis écrire une équation de la tangente (D) à (C_g) au point d'abscisse $x_0 = 1$. 2) Montrer que h est dérivable en $x_0 = 2$ puis écrire une équation de la tangente (D) à (C_h) au point d'abscisse $x_0 = 2$. Les élèves essaient de résoudre l'exercice L'enseignant circule pour observer le travail fait par les élèves. Les élèves ont de la difficulté à résoudre ces deux questions car elles contiennent des fractions et des radicaux. L'enseignant doit donc résoudre l'activité.
Étudier la dérivabilité et la continuité en un point	Premier moment didactique : rencontre avec la tâche T13 : Déterminer l'équation de la tangente à la courbe d'une fonction en un point	Enseignant	Fonction Dérivabilité Continuité	L'enseignant porte l'activité au tableau Activité d'apprentissage. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $a \in I$. a) Pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, vérifier que $f(x) = f(a) + (x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ b) On suppose que f est dérivable en a, montrer que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ c) f est – elle continue en a ? Conclure. Enseignant : Pour prouver que $a = b$ on peut commencer par a et arriver à b ou bien commencer par b pour arriver à a. a) Soit donc $x \in I \setminus \{a\}$ on a : $f(a) + (x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f(a) + f(x) - f(a)$ après simplification ce qui me donne $f(x)$. b) On suppose que f est dérivable en a, alors $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$. Parce qu'on a supposé que c'est dérivable. On demande de prouver que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. je remplace f(x) par son expression $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} \left[f(a) + (x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]$ comme il n'y a pas x dans f(a), la limite agit sur le reste de la somme ce qui donne $f(a) + \lim\limits_{x \to a}(x - a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f(a) + 0 \times f'(a) = f(a)$ donc $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>c) Si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ alors la fonction est continue. Dans cette fonction on est parti d'une fonction dérivable et on est arrivé à une fonction continue. Donc si une fonction est dérivable en un point alors elle est aussi continue en ce même point.
Donc ceci est la première relation entre une fonction dérivable et une fonction continue. Une fonction dérivable en un point elle est aussi continue en ce point, on va aussi essayer de voir maintenant si la continuité peut entrainer la dérivabilité.</td></tr>
<tr><td></td><td>Institutionnalisation</td><td>Enseignant</td><td>Fonction
Dérivabilité
Continuité</td><td>Si une fonction est dérivable en un point a, alors elle est aussi continue en a.</td></tr>
<tr><td></td><td>Premier moment didactique : rencontre avec les tâches T14 : Calculer le nombre dérivé d'une fonction à gauche et à droite d'un point et
T15 : Déterminer les équations des demi-tangentes aux axes des ordonnées</td><td>Enseignant
Élève</td><td>Fonction
Continuité
Dérivabilité à gauche
Dérivabilité à droite</td><td>L'enseignant porte l'activité au tableau
Activité d'apprentissage 2
Soit f la fonction définie par $f(x) = x|x-1|$
1. Montrer que f est continue en 1
2. a) Écrire f sans symboles de valeurs absolue.
b) Calculer $\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ et $\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$
c) La fonction $g(x) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ admet-elle une limite en 1 ?
d) En déduire que f n'est pas dérivable en 1.
Enseignant : on a
1. $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} x|x-1| = 1|1-1| = 1 \times 0 = 0$. Comme $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$ alors f est continue en 0.
2.a) $|x-1| = \begin{cases} x-1 \ si \ x-1 \geq 0 \\ -(x-1) \ si \ x-1 \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} x-1 \ si \ x \geq 1 \\ -x+1 \ si \ x \leq 1 \end{cases}$ donc j'ai deux fonctions définies sur deux intervalles
$|a| = a$ si a est positif et – a si a est négatif. Donc $f(x) = \begin{cases} x-1 \ si \ x \geq 1 \\ -x+1 \ si \ x \leq 1 \end{cases}$
b) $\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{x(-x+1)-0}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{x(-x+1)}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{-x(x-1)}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} (-x) = -1$
$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{x(x-1)-0}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{x(x-1)}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} (x) = 1$
c) La fonction $g(x) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ admet-elle une limite en 1 ?
Élève : oui monsieur…
Enseignant : pourquoi ? On a trouvé à gauche – 1 et à droite 1. Est-ce que ça admet une limite?
Élève : non monsieur
Enseignant : donc ça n'admet pas de limite car elle admet deux limites différentes. Quand la limite existe elle est unique, d'accord ?
Donc cette fonction $g(x) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ n'admet pas de limite car il fallait que la limite à gauche soit égale à la limite à droite. Et comme elle n'admet pas de limite alors la fonction f n'est pas dérivable. Qu'est qu'on a fait à la première question ?
Élève : on a vu que la fonction est continue en 1
Enseignant : et maintenant on trouve que la fonction n'est pas dérivable en 1. Par conséquent on peut trouver des fonctions qui soient continues et qui ne sont pas dérivables en ce point. Cependant toute fonction dérivable en un point est forcément continue en ce point.
d) Comme $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ n'admet pas de limite en 1 alors la fonction f n'est pas dérivable en 1.</td></tr>
</table>

	Institutionnalisation	Enseignant	Fonction Continuité Dérivabilité à gauche Dérivabilité à droite	Toute fonction continue en un point a n'est pas toujours dérivable en ce point a. 3. Dérivabilité à gauche et à droite d'un point Soit f une fonction définie sur un intervalle I, C_f sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. Soit x_0 un élément de I. Définition : dérivabilité à gauche. On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si f est définie sur un intervalle de la forme $]a; x_0]$ et si la fonction : $x \longmapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie à gauche de x_0. Cette limite est appelée nombre dérivée à gauche au point d'abscisse x_0 et notée $f'_g(x_0)$. La courbe de f admet alors un demie-tangente à gauche au point d'abscisse x_0 d'équation $y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ pour tout $x \in]a; x_0]$. Définition : dérivabilité à droite. On dit que f est dérivable à droite en x_0 si f est définie sur un intervalle de la forme $[x_0; a[$ et si la fonction : $x \longmapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie à droite de x_0. Cette limite est appelée nombre dérivée à droite au point d'abscisse x_0 et notée $f'_d(x_0)$. La courbe de f admet alors une demie-tangente à droite au point d'abscisse x_0 d'équation $y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ pour tout $x \in [x_0; a[$. Pour ce qui est de la fonction de l'exemple, elle est dérivable à gauche et à droite mais elle n'est pas dérivable en 1. On pourra déterminer les équations des demi tangentes.
	Evaluation	Enseignant	Nombre dérivé Equation de la tangente Fonction Continuité Dérivabilité à gauche Dérivabilité à droite	Exercices à domicile : *1a et 1b page 239* *1g, 1h, 1i page 246*
Introduire la fonction dérivée sur un intervalle	Premier moment didactique : rencontre avec les tâches T21 : Calculer la fonction dérivée d'une fonction	Enseignant	Taux de variation Limite	L'enseignant fait un bilan des apprentissages du précédent cours sur le nombre dérivé Enseignant : La dernière fois on a vu comment on calcule la dérivée en un point. Aujourd'hui nous allons voir comment on calcul la fonction dérivée d'une fonction avec les calculs des dérivées. L'enseignant note l'activité d'apprentissage au tableau **Activité d'apprentissage :** On considère les fonctions f et g définies respectivement par : $f(x) = -3x^2 + 5x - \frac{1}{2}$ et $g(x) = \sqrt{x-2}$. 1. Soit x_0 un nombre réel. a. Montrer que pour tout $x \neq x_0$, on a $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -3(x + x_0) + 5$ b. En déduire la limite de $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ en fonction de x_0 2. Soit x_0 un nombre réel choisi dans le domaine de définition de g. a. Montrer que $\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x_0-2}}$ b. En déduire la limite de $\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ en fonction de x_0. Enseignant : On va voir comment on trouve la fonction. Vous voyez qu'en tout moment il faut maitriser la notion de limite, on ne peut pas se passer de la notion de limite. On commence toujours par le domaine de définition de la fonction. Quel est le domaine de définition de cette fonction ? Élève : IR Enseignant :

				1) Soit x_0 un nombre réel. $a)\ \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{-3x^2+5x-\frac{1}{2}-\left(-3x_0^2+5x_0-\frac{1}{2}\right)}{x-x_0} = \frac{-3x^2+5x-\frac{1}{2}+3x_0^2-5x_0+\frac{1}{2}}{x-x_0}$ $= \frac{-3x^2+5x+3x_0^2-5x_0}{x-x_0} = \frac{-3(x^2-x_0^2)+5(x-x_0)}{x-x_0} = \frac{-3(x-x_0)(x+x_0)+5(x-x_0)}{x-x_0}$ $= -3(x+x_0)+5$ $b)\ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} [-3(x+x_0)+5] = -3(x_0+x_0)+5 = -6x_0+5$ Si je vous pose la question de savoir quelle est la fonction dérivée de la fonction f en x_0? Élève : $-6x_0+5$ Enseignant : ok, on prend d'abord ceci, je vais vous montrer une autre façon de trouver ça rapidement. Vous voyez que la limite intervient un peu partout. Il faut bien maitriser les propriétés de la limite, comment on manipule ça d'accord? J'ai envie que chacun me dise quel est le domaine de définition de la fonction g? Élèves : $[2;+\infty[$ Enseignant : je prends donc $x_0 \in [2;+\infty[$. La technique c'est quoi, je dois calculer $a)\ \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} =$ $\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \frac{(\sqrt{x-2}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x-2}+\sqrt{x_0-2})}{(x-x_0)(\sqrt{x-2}+\sqrt{x_0-2})} = \frac{(\sqrt{x-2})^2-(\sqrt{x_0-2})^2}{(x-x_0)(\sqrt{x-2}+\sqrt{x_0-2})}$ $\frac{x-2-(x_0-2)}{(x-x_0)(\sqrt{x-2}+\sqrt{x_0-2})} = \frac{x-x_0}{(x-x_0)(\sqrt{x-2}+\sqrt{x_0-2})} = \frac{1}{(\sqrt{x-2}+\sqrt{x_0-2})}$ $b)\ \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{(\sqrt{x-2}+\sqrt{x_0-2})} = \frac{1}{\sqrt{x_0-2}+\sqrt{x_0-2}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}$ donc g'(x)= $\frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}$ Enseignant : Donc quand il faut des contraintes pour la fonction qu'on a trouvé, on parle de domaine de dérivabilité parce qu'il faut que cette fonction soit continue. Si on nous demande de donner le domaine de dérivabilité de la fonction g'(x) alors on a $]2;+\infty[$. Le domaine de dérivabilité est toujours une partie du domaine de définition, on enlève le cas où on peut avoir 0 au dénominateur. Si je reviens sur le premier cas, quel est le domaine de dérivabilité de la fonction $f'(x)$? Élèves : IR Enseignant : donc avec les fonctions homographiques ou bien les fonctions sinus ou cosinus, vous pouvez toujours utiliser les formules d'addition comme on vous a appris en trigonométrie. Donc l'idée c'est qu'il y a la formule que vous devez toujours manipuler $\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ ensuite on calcule sa limite quand x tend vers x zéro, on trouve une nouvelle fonction qui va nous donner le domaine de dérivabilité et la fonction dérivée en chaque point de ce domaine
	Institutionnalisation	Enseignant	Fonction Fonction dérivée Domaine de dérivabilité	Soit f une fonction définie sur un intervalle I. -L'ensemble de dérivabilité de f est l'ensemble des nombres réels x_0 de D_f en lesquels f est dérivable. -La fonction $x \mapsto f'(x)$ est appelée fonction dérivée ou dérivé de f On va souvent appeler ça $f'(x)\ et\ g'(x)$ pour dire que c'est la dérivée de f ou de g.
Calculer la dérivée des fonctions élémentaires	Premier moment didactique : rencontre avec la tâche T22 : Calculer la dérivée d'une fonction élémentaire	Enseignant	Fonction constante Fonction racine carrée Fonction inverse Fonction sinus Fonction cosinus	Activité d'apprentissage 1. Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes : a. Pour tout réel x , $f(x)=k, k \in IR, g(x)=x\ et\ h(x)=x^2$ b. Pour tout réel $x \in [0;+\infty[,\ p(x)=\sqrt{x}$ c. Pour tout réel $x \in]-\infty;0[\cup]0;+\infty[, q(x)=\frac{1}{x}$ 2. Soit x_0 un élément de IR. Pour tout nombre réel x différent de x_0

				a. Montrer que $\sin x - sinx_0 = 2\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\sin(\frac{x-x_0}{2})$ et $\cos x - cosx_0 = -2\sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\sin(\frac{x-x_0}{2})$ b. En déduire que $\frac{\sin x - sinx_0}{x-x_0} = \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \times \frac{\sin(\frac{x-x_0}{2})}{\frac{x-x_0}{2}}$ et $\frac{\cos x - cosx_0}{x-x_0} = -\sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \times \frac{\sin(\frac{x-x_0}{2})}{\frac{x-x_0}{2}}$ c. Montrer que $\lim_{x\to x_0} \frac{\sin x - sinx_0}{x-x_0} = -\sin(x_0)$ et que $\lim_{x\to x_0} \frac{\cos x - cosx_0}{x-x_0} = \cos(x_0)$ En déduire la fonction dérivée des fonctions suivantes : $x \mapsto \sin(x)\ \ et\ \ x \mapsto \cos(x)$
		Enseignant	Fonction constante Fonction racine carrée Fonction inverse Fonction sinus Fonction cosinus	Enseignant : 1.a. Soit $f(x) = k$, soit $x_0 \in IR$ tel que $x_0 \neq x$. $\frac{\mathrm{f(x)-f(x_0)}}{\mathrm{x-x_0}} = \frac{k-k}{\mathrm{x-x_0}} = 0$ Donc $\lim_{x\to x_0} \frac{\mathrm{f(x)-f(x_0)}}{\mathrm{x-x_0}} = 0$ ainsi la dérivée de toute constante est égale à zéro. On note $f'(x) = 0$ * $g(x) = x$ soit $x_0 \in IR$ tel que $x_0 \neq x$. $\frac{\mathrm{g(x)-g(x_0)}}{\mathrm{x-x_0}} = \frac{x-x_0}{\mathrm{x-x_0}} = 1$. On peut s'amuser à évoluer un peu, si je prends un $g_1(x) = -2x$, $\lim_{x\to x_0} \frac{g_1(x)-g_1(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{-2x+2x_0}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{-2(x-x_0)}{x-x_0} = -2$. Précédemment j'ai trouvé 1 et maintenant je trouve -2. Cela veut dire que la dérivée d'un monôme de degré un est simplement son coefficient. * , $\lim_{x\to x_0} \frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^2-{x_0}^2}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}(x+x_0) = 2x_0$. Donc si $h(x) = x^2$ alors $h'(x) = 2x$. $h'(x) = (x^2)' = 2x^{2-1}$= 2x $h_1(x) = 4x^3$ alors $h_1'(x) = 4x^{3-1} = 4x^2$. $h_2(x) = -x^3 + 2x^2 + 7$ alors $h_2'(x) = -3x^2 + 4x$. * soit $x \in [0; +\infty[$, $p(x) = \sqrt{x}$. soit $x_0 \in [0; +\infty[$, $x_0 \neq x$ $\lim_{x\to x_0} \frac{p(x)-p(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$. Donc si $p(x) = \sqrt{x}$ alors $p'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. En réalité c'est la dérivée de la quantité qui se trouve sous le radical qui est au numérateur. Donc si on vous donne par exemple une fonction $p_1(x) = \sqrt{w(x)}$, sa dérivée est $p_1(x) = \frac{w\prime(x)}{2\sqrt{w(x)}}$. Pour $w(x) = -2x + 1$. Sa dérivée est -2 donc la dérivée de $p_1(x) = \frac{-2}{2\sqrt{-2x+1}} = -\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$. On donc passer au dernier cas. * Pour tout réel $x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[, q(x) = \frac{1}{x}$, soit $x_0 \in D_q$ tel que $x_0 \neq x$. $\frac{\mathrm{q(x)-q(x_0)}}{\mathrm{x-x_0}} = \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{\mathrm{x-x_0}} = \frac{-x_0+x}{xx_0(x-x_0)} = -\frac{1}{xx_0}$. Donc $\lim_{x\to x_0} \frac{\mathrm{q(x)-q(x_0)}}{\mathrm{x-x_0}} = \lim_{x\to x_0} \frac{-1}{xx_0} = \frac{-1}{x_0^2}$ donc la fonction dérivée de la fonction $q(x) = \frac{1}{x}$ est $q'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Enseignant : Pour la deuxième partie ce sera un petit devoir qui vous fera des bonus. Comment déterminer les fonctions dérivées de sinus et de cosinus, tout ce qu'il faut retenir c'est que la dérivée de sinus c'est cosinus et la dérivée de cosinus c'est moins sinus. On va maintenant donner les résultats sous forme d'un petit tableau dans le but de recapituler tout ce qu'on venait de faire.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Institutionnalisation</td>
<td>Enseignant</td>
<td>Fonction constante
Fonction racine carrée
Fonction inverse
Fonction sinus
Fonction cosinus</td>
<td>Résumé2
Le tableau ci-dessous donne un récapitulatif des fonctions dérivées élémentaires et leur domaine de dérivabilité.
<table>
<tr><th>Fonctions</th><th>Fonction dérivée</th><th>Ensemble de dérivabilité.</th></tr>
<tr><td>$x \mapsto k$</td><td>$x \mapsto 0$</td><td>$\mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>$x \mapsto x$</td><td>$x \mapsto 1$</td><td>$\mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>$x \mapsto x^2$</td><td>$x \mapsto 2x$</td><td>$\mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>$x \mapsto \frac{1}{x}$</td><td>$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$</td><td>$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$</td></tr>
<tr><td>$x \mapsto \sqrt{x}$</td><td>$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$</td><td>$[0; +\infty[$</td></tr>
<tr><td>$x \mapsto \sin(x)$</td><td>$x \mapsto \cos(x)$</td><td>$\mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>$x \mapsto \cos(x)$</td><td>$x \mapsto -\sin(x)$</td><td>$\mathbb{R}$</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Institutionnalisation de la tâche T23 : Calculer la dérivée d’une somme, d’un produit, d’un quotient, de l’inverse, de la composée et de la racine carrée d’une fonction</td>
<td>Enseignant</td>
<td>Fonction</td>
<td>Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle IK. On note u’ la dérivée de u sur IK et v’ la dérivée de v sur IK. On a le tableau suivant :
<table>
<tr><th>Opération</th><th>Dérivée</th><th>Valable pour tout x de</th></tr>
<tr><td>u + v</td><td>u ' + v '</td><td>IK</td></tr>
<tr><td>k × u (k constante)</td><td>ku '</td><td>IK</td></tr>
<tr><td>u × v</td><td>u ' v + uv '</td><td>IK</td></tr>
<tr><td>u^2</td><td>2u'u</td><td>IK</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{v}$ où v non nulle sur IK</td><td>$-\frac{v'}{v^2}$</td><td>IK</td></tr>
<tr><td>$\frac{u}{v}$ où v non nulle sur IK</td><td>$\frac{u'v-uv'}{v^2}$</td><td>IK*</td></tr>
<tr><td>U^n, n entier naturel</td><td>$n \times u^{n-1}$</td><td>IK</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{u}$</td><td>$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$</td><td></td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Evaluation</td>
<td>Enseignant</td>
<td>Dérivée de la somme, produit, quotient, racine carrée et composée des fonctions</td>
<td>On donne les fonctions suivantes. $f(x) = 2x^2 - x + 2;\ g(x) = -x + 4$; $h(x) = \sqrt{2x-1}$. Calculer les dérivées suivantes : $(f+h)', (kf)', (fg)', \left(\frac{1}{g}\right)', (\frac{f}{g})'$.
On pose $w(x) = h\big(g(x)\big)$. Calculer $w'(x)$
Exercice 2g et 2h page 258</td>
</tr>
</table>

Annexe 5 : Introduction du processus didactique / Bernard

Épisode	Moment didactique	Acteur principal	Objets mathématiques	Activités didactiques observées
Annonce de l'objectif du chapitre		Enseignant	Taux de variation	L'enseignant inscrit le numéro du chapitre et le titre au tableau. L'enseignant fait un rappel des connaissances antérieures et annonce les objectifs du cours Nous allons voir ce que c'est qu'un nombre dérivé, comment découvrir les propriétés d'un nombre dérivé, comment dériver une fonction, que ce soit une fonction polynôme, rationnelle, une fonction avec le radical. On sait que de nombreux objets dans la vie sont très souvent en mouvement rectiligne, circulaire… La détermination de la pente d'une courbe en un point, de la vitesse instantanée, l'accélération d'un objet, les variations d'une fonction, l'esquisse de la courbe représentative d'une fonction,… sont quelques fois préoccupant. En classe de seconde C nous avons utilisé le taux de variation pour déterminer le sens de variation, puis le tableau de variation d'une fonction. Ce chapitre donne des outils pour pouvoir le faire aisément. En trouvant la dérivée d'une fonction on a déjà beaucoup d'informations sur cette fonction, ici vous devez être capable de déterminer la limite d'une fonction en un point, le TV au voisinage d'un point (limite d'une fonction en un point).
				L'enseignant présente une situation problème **Situation problème :** L'élève Monti de la classe de 1ère C a l'IBB ayant lu son cours sur les limites a été confronté à des situations suivantes pour certaines limites. 1er cas : pour la fonction $g: x \mapsto \sqrt{x-2}$, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = +\infty$ 2ème cas : pour la fonction $f: x \mapsto x^2 - 4x$, $\lim\limits_{x \to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = 2$ 3ème cas : pour la fonction $h: x \mapsto x\|x-1\|$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = -1$ Que représente chacune de ces limites ? Quelle est l'interprétation géométrique de chacune de ces situations ?
Introduction du nombre dérivé en un point	Premier moment didactique : rencontre avec la tâche T11 : Calculer le nombre dérivé	Enseignant	Fonction Limite Valeur absolue	Activité d'apprentissage : Considérons les fonctions suivantes : Considérons les fonctions suivantes : $g(x) = \sqrt{x-2}$, $f(x) = x^2 - 4x$, $h(x) = x\|x-1\|$ 1. Déterminer les ensembles de définition des fonctions f et g 2. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{g(x)-g(2)}{x-2}$ et, $\lim\limits_{x \to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}$

<table>
<tr>
<td></td>
<td>d'une fonction en un point</td>
<td></td>
<td></td>
<td>3. Écrire h(x) sans symboles de valeur absolue et calculer les limites des quotients suivants : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ >}}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ <}}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}$</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>Élèves
Enseignant</td>
<td></td>
<td>
Les élèves vont au tableau pour travailler l'activité, l'enseignant circule entre les bancs pour orienter et aider les élèves.
1) Domaines de définition
$Df = IR$ car f est une fonction polynôme
$g(x)$ existe si et seulement si $x-2\geq 0$, $x\geq 2$ donc $D_g = [2;+\infty[$
2) Calculons les limites suivantes :
$\lim\limits_{\substack{x\to2\\ >}}\frac{g(x)-g(2)}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x\to2\\ >}}\frac{\sqrt{x-2}}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x\to2\\ >}}\frac{(\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x-2})^2} = \lim\limits_{\substack{x\to2\\ >}}\frac{\sqrt{x-2}}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x-2})} = \lim\limits_{\substack{x\to2\\ >}}\frac{1}{(\sqrt{x-2})} = +\infty$
$f(3) = 3^2-4(3) = 9-12 = -3$
$x^2-4x+3,\quad on\ a\ \Delta = (-4)^2-4(1)(3) = 16-12 = 4$
$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-4)\pm\sqrt{4}}{2(1)} = \frac{4\pm2}{2}$
$x_1 = \frac{4+2}{2} = 3\ et\ x_2 = \frac{4-2}{2} = 1$
$\lim\limits_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-4x+3}{x-3} = \lim\limits_{x\to3}\frac{(x-3)(x-1)}{x-3} = \lim\limits_{x\to3}(x-1) = 2$
3. $h(x) = x|x-1|$ Sans symboles de valeur absolue
$h(x) = x|x-1| = \begin{cases} x(x-1)\ si\ x\geq 1\\ -x(x-1)\ si\ x\leq 1\end{cases}$
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$x-1$</td><td colspan="2">-</td><td>+</td></tr>
<tr><td>$|x-1|$</td><td colspan="2">$-(x-1)$</td><td>$(x-1)$</td></tr>
</table>
$\lim\limits_{\substack{x\to1\\ >}}\frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to1\\ >}}\frac{x(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to1\\ >}}(x) = 1$
et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ <}}\frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to1\\ <}}\frac{-x(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to1\\ <}}(-x) = -1$
Enseignant : en classe de seconde que représentait le quotient $\frac{h(x)-h(1)}{x-1}$?
Élèves : taux d'accroissement
Enseignant : on appelait ça $T = \frac{h(x)-h(a)}{x-a}$ et si $T>0$ alors h est croissante, $T<0$ alors h est décroissante et si $T=0$ alors h est constante.
Enseignant : On commence de la fonction g à la fonction h.
Pour la fonction g, on voit que g n'admet pas une limite en 2 quand on applique la limite du taux de variation au point d'abscisse 2 on constate que g n'admet pas de nombre dérivé en 2 car on a trouvé l'infini. La fonction f admet un nombre dérivé en 3 qui est 2. Enfin la fonction h admet deux nombres
</td>
</tr>
</table>

				dérivés distincts qui sont – 1 et 1, à gauche ça vaut -1 et à droite c'est 1. On peut conclure que g n'est pas dérivable en 2, f est dérivable au point d'abscisse 3 et son nombre dérivé est 2, h est dérivable à gauche et à droite de 1 mais n'est pas dérivable en 1 car les deux nombres dérivés sont distincts.
Définition du nombre dérivé en un point	Institutionnalisation	Enseignant Élève	Fonction Intervalle Taux de variation Limite	**Définition**. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. **Définition** 1 : La fonction f est dite dérivable en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l \in IR$. l est appelé nombre dérivé de la fonction f en x_0 et on note $l = f'(x_0)$. **Définition** 2 : La fonction f est dite dérivable à gauche de x_0 si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in IR$ et son nombre dérivé à gauche est noté $f_g'(x_0)$. **Définition** 3 : La fonction f est dite dérivable à droite de x_0 si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in IR$ et son nombre dérivé à gauche est noté $f_d'(x_0)$.
Définition du nombre dérivé en un point	Institutionnalisation	Enseignant Élève	Fonction Intervalle Taux de variation Limite	Propriété 1 : Une fonction f est dite dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche de x_0 et le nombre dérivé à droite de x_0 est égal au nombre dérivé à gauche de x_0, i.e $f_d'(x_0) = f_g'(x_0)$.
Exemple	Evaluation	Enseignant	Nombre dérivé	L'enseignant porte un exemple au tableau Exemple : déterminer le nombre dérivé de chacune des fonctions f, g et h pour la valeur de a indiquée. $f(x) = x^2 + x, \quad a = -1$ $g(x) = \sqrt{x}, \quad a = 1$ $h(x) = \frac{2x+1}{x-2}, \quad a = 3$ 1. Étudier la dérivabilité en 0 de la fonction f définie par $f(x) = \|x\|$ **Solution :** **Enseignant : On va calculer les nombres dérivés pour ces nombres indiqués.** • $f(x) = x^2 + x$, $a = -1$. Je calcule d'abord $f(-1) = (-1)^2 + (-1) = 1 - 1 = 0$. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2+x-0}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1} \frac{x(x+1)}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1}(x) = -1$. Donc $f'(-1) = -1$ • $g(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$ g(1)= 1 et $\lim\limits_{x \to 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(x-1)} = \lim\limits_{x \to -1} \frac{x-1}{(\sqrt{x}+1)(x-1)} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2}$. • $f(x) = \|x\| = \begin{cases} x \; si \; x \geq 0 \\ -x \; si \; x \leq 0 \end{cases}$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}}(1) = 1 = f'_d(0)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{-x}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}}(-1) = -1 = f'_g(0)$…..essayez de faire comme moi.

				On a f n'est pas dérivable en 0 car $f'_d(0) \neq f'_g(0)$. Toutefois, f est dérivable à gauche et à droite de 0 car $f'_d(0) \in IR\ et\ \ f'_g(0) \in IR$..
Étudier la dérivabilité et la continuité en un point	Institutionnalisation	Enseignant	Fonction Dérivabilité Continuité	L'enseignant porte la propriété au tableau Soit f une fonction définie sur in intervalle ouvert I et $x_0 \in I$. Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0. la réciproque est fausse.
Equation de la tangente en un point	Institutionnalisation	Enseignant	Equation Tangente	L'enseignant porte la propriété au tableau Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I. (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé. • Si f est dérivable en x_0 alors la courbe (C_f) admet au point d'abscisse x_0 une tangente dont le coefficient directeur est $f'(x_0)$. Cette tangente a pour équation $(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. • Si f est dérivable à droite, respectivement à gauche de x_0 alors la courbe (C_f) admet au point d'abscisse x_0 une demi-tangente de coefficient directeur est $f_d{}'(x_0)$ respectivement $f_g{}'(x_0)$. Remarques : • Si $f'(x_0) = 0$ alors la courbe (C_f) admet une tangente horizontale d'équation y=f(x_0) • La tangente à (C_f) lorsqu'elle existe est unique • Si M_0 de coordonnées $(x_0; f(x_0))$ admet un nombre dérivée à gacuhe qui est différent du nombre dérivé à droite $(f'_d(0) \neq f'_g(0))$, alors le point $M_0(x_0; f(x_0))$ est un point anguleux c'est-à-dire lorsque les courbes prennent des sens inverses.
Introduire la fonction dérivée sur un intervalle	Premier moment didactique : rencontre avec les tâches T21 : Calculer la fonction dérivée d'une fonction	Enseignant	Taux de variation Limite	L'enseignant note l'activité d'apprentissage au tableau Activité : Considérons les fonctions f et g définies par $f(x) = 2x^2 - x + 1\ \ et\ g(x) = \sqrt{x}$, soit x_0 un nombre réel. Montrer que pour tout $x \neq x_0$ on a $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 2(x + x_0) - 1$ et que $\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$ En déduire $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ en fonction de x_0. Que peut-on conclure? Solution : Montrons que pour tout $x \neq x_0$ on a $\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$.

				On a $\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} = \frac{x-x_0}{(x-x_0)\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}$ d'où $\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$ Montrons que pour tout $x \neq x_0$ on a $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 2(x+x_0)-1$ $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{2x^2-x+1-(2x_0^2-x_0+1)}{x-x_0} = \frac{2x^2-x+1-2x_0^2+x_0-1}{x-x_0}$ $= \frac{2x^2-x-2x_0^2+x_0}{x-x_0} = \frac{2(x^2-x_0^2)-(x-x_0)}{x-x_0}$ $= \frac{2(x-x_0)(x+x_0)-(x-x_0)}{x-x_0} = \frac{(x-x_0)[2(x+x_0)-1]}{x-x_0}$ $= 2(x+x_0)-1$ Déduisons $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ en fonction de x_0. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} [2(x+x_0)-1] = 2(x_0+x_0)-1 = 4x_0-1$, de même $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ Conclusion Enseignant : On vous demande de conclure. Qu'est-ce qu'on pourra conclure ici? Que représentent $4x_0-1$ et $\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ Élèves : le nombre dérivé de f et g en x_0 On peut conclure que $4x_0-1$ et $\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$sont des dérivées des fonctions f et g au point x_0. Pour $x = x_0$ on a $4x-1$ et $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ sont les dérivées des fonctions f et g en x.
	Institutionnalisation	Enseignant	Fonction Fonction dérivée Domaine de dérivabilité	Soit f une fonction . • L'ensemble de dérivabilité de la fonction f est l'ensemble des nombres réels pour lesquels f est dérivable. • *f'* est appelée dérivée ou fonction dérivéede f. **Propriété :** Une fonction f est dérivable sur un intervalle ouvert I si et seulement si f est dérivable en tout point de I
Calculer la dérivée des	Institutionnalisation	Enseignant	Fonction constante	Le tableau ci-dessous résume les dérivées de quelques fonctions classiques. Soit une fonction dérivable, f'(x) l'image de x par la fonction dérivée f'

<table>
<tr>
<td>fonctions élémentaires</td>
<td></td>
<td></td>
<td>Fonction racine carrée
Fonction inverse
Fonction sinus
Fonction cosinus</td>
<td>
<table>
<tr><th>Fonction f(x)</th><th>Dérivées f'(x)</th><th>Ensenble de dérivabilité</th></tr>
<tr><td>$k\ (k \in IR)$</td><td>0</td><td>IR</td></tr>
<tr><td>$ax, a \in IR^*$</td><td>a</td><td>IR</td></tr>
<tr><td>$x^n\ (n \in \mathbb{N}^*)$</td><td>$nx^{n-1}$</td><td>IR</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{x}$</td><td>$\frac{-1}{x^2}$</td><td>IR^*</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{x}$</td><td>$\frac{1}{2\sqrt{x}}$</td><td>$]0; +\infty[$</td></tr>
<tr><td>sinx</td><td>cosx</td><td>IR</td></tr>
<tr><td>cosx</td><td>-sinx</td><td>IR</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Exemple</td>
<td>Evaluation</td>
<td>Enseignant</td>
<td>Dérivée des fonctions élémentaires</td>
<td>L'enseignant porte un exemple au tableau
Calculer les dérivées des fonctions suivantes et déterminer leur ensemble de dérivabilité.
$a)\ f(x) = 3 \quad b)\ f(x) = -5x \quad c)\ f(x) = x^6 \quad d)\ f(x) = 4x^3 \quad e)\ f(x) = \frac{2}{x}$
Solutions :
$a)\ f'(x) = 0$ et $Df' = IR$
$b)\ f'(x) = -5 \quad Df' = IR$
$c)\ f'(x) = 6x^5 \quad Df' = IR$
$d)\ f'^{(x)} = 4 \times 3x^2 = 12x^2 \quad Df' = IR$
$e)\ f'^{(x)} = -\frac{2}{x^2}$ et $Df' = IR^*$</td>
</tr>
<tr>
<td>Exercice d'application</td>
<td>Evaluation</td>
<td>Enseignant</td>
<td>Dérivée des fonctions élémentaires</td>
<td>Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :
$f(x) = 5x^2 + 4x - 3 \quad g(x) = x + 1 - \frac{1}{x} \quad h(x) = 2\sqrt{x}$
Solutions :
• $f(x) = 5x^2 + 4x - 3$ on a $f'(x) = 10x + 4$
• $g(x) = x + 1 - \frac{1}{x}$ on a $g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$
• $h(x) = 2\sqrt{x}$ on a $h'^{(x)} = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Institutionnalisation</td>
<td>Enseignant</td>
<td>Fonction polynôme
Fonction rationnelle
Fonction continue
Fonction sinus
Fonction cosinus</td>
<td>Remarques :
• Les fonctions polynômes sont dérivables sur IR et les fonctions rationnelles sont dérivables sur leur domaine de définition.
• Une fonction continue en un point n'est pas forcément dérivable en ce point.
Propriétés :
P1) La fonction $x \mapsto sinx$ est dérivable en 0 et $\lim_{x \to 0} \frac{sinx - sin0}{x - 0} = cos0 = 1$ d'où $\lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$
P2) La fonction $x \mapsto cosx$ est dérivable en 0 et $\lim_{x \to 0} \frac{cosx - cos0}{x - 0} = -sin0 = 0$ d'où $\lim_{x \to 0} \frac{cosx - 1}{x} = 0$</td>
</tr>
<tr>
<td>Dérivée et opérations</td>
<td>Institutionnalisation de la tâche T23 :</td>
<td>Enseignant</td>
<td></td>
<td>Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I. Le tableau ci-dessous nous donne les dérivées de quelques opérations sur les fonctions :</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>sur les fonctions</td>
<td>Calculer la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, de l'inverse, de la composée et de la racine carrée d'une fonction</td>
<td></td>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><th>Fonction</th><th>Dérivée</th></tr>
<tr><td>$u+v$</td><td>$u'+v'$</td></tr>
<tr><td>$ku \quad (k \in \mathbb{R})$</td><td>$k \times u'$</td></tr>
<tr><td>$u \times v$</td><td>$u' \times v + u \times v'$</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{v}$</td><td>$-\frac{v'}{v^2}$</td></tr>
<tr><td>$\frac{u}{v}$</td><td>$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$</td></tr>
<tr><td>$u^n \quad (n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})$</td><td>$n \times u' \times u^{n-1}$</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{u}$</td><td>$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$</td></tr>
<tr><td>$x \mapsto u(ax+b)$</td><td>$x \mapsto a \times u'(ax+b)$</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Evaluation</td>
<td>Enseignant</td>
<td>Dérivée de la somme, produit, quotient, racine carrée et composée des fonctions</td>
<td>Exercices : Calculer la dérivée des fonctions suivantes
$a)\ f(x) = x^3 - 3x$ $b)\ g(x) = 5x^4$ $c)\ f(x) = (x+2)(x^2-3x+2)$ $d)\ f(x) = (2x+5)^3$
$e)\ g(x) = \frac{2x^2-x+1}{x-2}$ $f)\ g(x) = \cos(2x+3)$ $g)\ f(x) = \frac{x+1}{x-2}$
Exercices à faire à domicile :
3c, 3d, page 264
2g, 2h, 2i page 258</td>
</tr>
</table>

Annexe 6 : Introduction du processus didactique / Claude

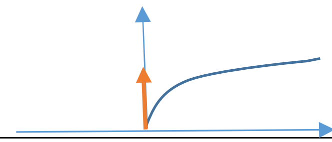
Épisode	Moment didactique	Acteur principal	Objets mathématiques	Activités didactiques observées
Annonce de l'objectif du cours		Enseignant		Il est divisé en plusieurs leçons, on va parler de la définition de la dérivée, on va voir leçon deux le calcul des dérivées et à la leçon trois les applications de la dérivée. J'espère que vous serez assez attentif pour suivre cette leçon. On va dire d'entrée de jeu que la dérivée est une notion nouvelle pour vous qui venez de la seconde. Mais il faut savoir que c'est très important puisque les applications sont multiples en mathématiques pour développer d'autres théories. On va prendre un exemple du calcul des vitesses instantanées en physique. Donc vous avez calculé la vitesse moyenne en 3e, on dit que c'est égal à la distance divisée par le temps. On peut même aller plus loin en calculant la vitesse d'un mobile en un instant précis, là on parle de la vitesse instantanée. Ce sont les notions qui utilisent la notion de dérivation. Plus tard en physique on va parler de déterminer la flèche d'un projectile, on lance un projectile en l'air et on cherche à savoir quelle est la hauteur maximale que cela atteint. Il y a beaucoup d'applications pour cela. Pour un début il faut savoir ce que c'est que la dérivée et quand est ce qu'on dit qu'une grandeur est dérivable. Nous allons commencer par un petit contrôle de prérequis, histoire de savoir quelles sont les notions que vous connaissez déjà. L'enseignant inscrit le numéro du chapitre et le titre au tableau.
Prérequis				L'enseignant inscrit un problème au tableau 1. Calculer $\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x+3}$ 2. On pose $f(x) = \sqrt{x-1}$ a. Montrer que $\frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ pour $x > 1$ b. Montrer que $\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \sqrt{x-1} = 0^+$ c. Déduire $\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ Voici donc un petit contrôle de prérequis. Qui peut donc aller au tableau ? Un élève se rend au tableau puis … 1. Calculons $\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x+3}$ $\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x+3} = \lim_{x\to -3} \frac{(-3)^2-9}{-3+3} = \frac{0}{0}$ (Forme indéterminée). Levons l'indétermination $\frac{x^2-9}{x+3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x+3} = x-3$ Donc $\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x+3} = \lim_{x\to -3} (x-3) = -3-3 = -6$. D'où $\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x+3} = -6$

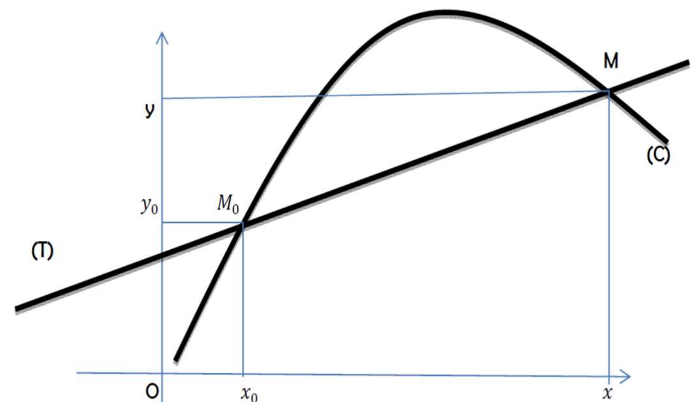
				Élève : quand on demande de calculer une telle limite est ce que c'est obligé de trouver une forme indéterminée ? **Enseignant** : en général quand on nous demande de calculer on remplace directement d'abord, mais si on trouve une forme indéterminée on doit lever l'indétermination. **Élève** : donc on doit d'abord trouver la forme indéterminée ? **Enseignant** : ce n'est pas toujours qu'on trouve la forme indéterminée. Mais si on trouve une FI on doit lever l'indétermination. Si on remplace directement et on ne trouve pas de FI on donne directement le résultat. **Élève** : si dans le cas si je factorise directement ? **Enseignant** : si tu factorise directement tu auras le résultat. Mais il y a les cas où on ne factorise pas. Pour savoir si on factorise il faut d'abord savoir de quel type de limite il s'agit. 2. On pose $f(x) = \sqrt{x-1}$ a. Montrons que pour $x > 1$, $\frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ **Enseignant** : On va faire comme on le faisait en classe de 3è. Quel est le conjugué de $\sqrt{x-1}$?..... Élève : $-\sqrt{x-1}$ on va donc multiplier par $-\sqrt{x-1}$ Au numérateur et au dénominateur. Cela fait $\frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \frac{(-\sqrt{x-1})(\sqrt{x-1})}{(x-1)(-\sqrt{x-1})} = \frac{-(x-1)}{(x-1)(-\sqrt{x-1})} = \frac{-1}{(-\sqrt{x-1})} = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ Donc pour > 1, $\frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ b. Montrons que $\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \sqrt{x-1} = 0^+$. C'est comme nous avons fait la dernière fois. $\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \sqrt{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \sqrt{1-1} = \sqrt{0} = 0^+$. c. Déduisons $\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ $\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{\sqrt{x-1}-0}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty$ Donc nous allons commencer la situation problème. Comme je disais tantôt les applications de la dérivée sont multiples.
		Enseignant		**Situation problème :** Un véhicule en mouvement rectiligne a une équation horaire $x(t) = 3t + 2$ où t est en seconde, déterminer sa vitesse à l'instant $t = 5min$. **Enseignant** : comment peut-on résoudre ce problème ? **Élève** : on peut faire par substitution de t dans l'équation. **Enseignant** : donc on va remplacer t par 5 dans l'expression de x. est qu'on va trouver la vitesse ? x est supposé être le déplacement. Si on remplace t par 5 dans l'expression de x(t) vous aurez comme ca la distance parcourue après 5min **Élève** : puisqu'on sait que la formule de la vitesse c'est la distance sur le temps, on va d'abord fait une substitution dans l'équation et ensuite…

				Enseignant : tu dis vitesse égale distance sur le temps $\frac{x(t)}{t}$ n'est-ce pas puis on fait quoi dans ls suite **Élève** : après avoir trouvé x(t) on divise par le temps pour trouver la vitesse **Enseignant** : donc $\frac{3t+2}{t}$…. Élève : on remplace la valeur de t dans l'équation et puis après avoir trouvé on divise par le temps donné Enseignant : beh je vois c'est une démarche logique. J'ai vu quand même en classe de 3è on parlait du mouvement uniforme, du mouvement non uniforme, il y a un moment où la vitesse est constante et un moment où la vitesse n'est pas constante. C'est intéressant ce que tu as dit, est ce que quelqu'un d'autre aurait une autre proposition ? D'accord nous pouvons commencer notre activité d'apprentissage, tu as raisonné comme un physicien. Alors : On va laisser cette activité entre parenthèse, on va vérifier tout à l'heure si ce qu'il a proposé est…
Introduction du nombre dérivé en un point	Premier moment didactique : rencontre avec la tâche T11 : Calculer le nombre dérivé d'une fonction en un point	Enseignant Élèves	Fonction, Coefficient directeur Limite Tangente Vitesse instantannée	**Activité d'apprentissage** Soient f et g deux fonctions définies par $f(x) = 3x + 2\ \ et\ g(x) = \sqrt{x}$ 1. Déterminer leurs domaines de définition 2. a. Calculer $\lim_{x\to 120} f(x)\ \ et\ \lim_{x\to 0} g(x)$ b. Les fonctions f et g sont-elles continues en 120 et 0 respectivement ? 3. a. Calculer $\lim_{x\to 120} \frac{f(x)-f(120)}{x-120}\ \ et\ \lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$ b. laquelle des deux limites est-elle un réel ? 4. En physique, la vitesse instantanée en un instant t_0 est définie par la grandeur $x'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}$ où $x(t)$ est le déplacement en fonction du temps t. a) Si $x(t) = 3t + 2$ et $t_0 = 5\ min$ alors déduire la vitesse du mobile $x'(t)$ après 5 min de mouvement. b) Que représente $x'(300)$ pour $x(t)$? **Solution :** Les élèves vont au tableau pour travailler l'activité, l'enseignant circule entre les bancs pour orienter et aider les élèves. 4. Domaines de définition Déterminons le domaine de définition. On a f(x) existe pour tout réel x car f est une fonction polynôme donc $Df = IR$. $g(x) = \sqrt{x}$ Existe si et seulement si $x \geq 0$, donc $D_g = [0; +\infty[$ 5. Calculons les limites suivantes : $\lim_{x\to 120} f(x) = \lim_{x\to 120} (3x + 2) = 3 \times 120 + 2 = 362$ $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 120} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$ b. Les fonctions f et g sont continues en x_0; f est continue en 120 car $\lim_{x\to 120} f(x) = f(120)$; g est continue en 0 car $\lim_{x\to 0} g(x) = g(0)$.

				3. a. Calculons : $\lim_{x\to 120}\frac{f(x)-f(120)}{x-12} = \lim_{x\to 120}\frac{3x+2-362}{x-120} = \lim_{x\to 120}\frac{3x-360}{x-120} = \lim_{x\to 120}\frac{3(x-120)}{x-120} = 3$; $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{\sqrt{x}\ -\sqrt{0}}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{\sqrt{x}(-\sqrt{x})}{x(-\sqrt{x})} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{-x}{-x\sqrt{x}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ b. Parmi les deux limites laquelle est réel? $\lim_{x\to 120}\frac{f(x)-f(120)}{x-120} = 3 \in IR$. Ce premier résultat est très important pour définir le concept de dérivation. $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = +\infty \notin IR$. 4. En physique, la vitesse instantanée en un instant t_0 est définie par la grandeur $x'(t_0) = \lim_{t\to t_0}\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}$ où $x(t)$ est le déplacement en fonction du temps t. a) Si $x(t) = 3t + 2$ et $t_0 = 5\ min$ alors on demande de calculer la vitesse du mobile $x'(t)$ après 5 min de mouvement. Comment est ce qu'on va procéder pour le faire ? Élève : on peut appliquer le théorème de l'énergie cinétique. Enseignant : c'est une approche physique avec le TEC mais là nous sommes dans une approche mathématique pour trouver cette limite. Encore que si tu prends le TEC tu auras besoin du travail des forces que tu n'as pas ici alors qu'avec l'approche mathématique tu peux trouver sans passer à une autre transformation. Nous allons calculer la vitesse instantanée pour voir si votre camarade avait raison. On a dit que $x'(t_0) = \lim_{t\to t_0}\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}$ on a donné $x(t) = 3t + 2$ et $t = 5\ min$. Dans cette formule notre t est en seconde. c) Qui peut nous calculer cette limite ? Déterminons la vitesse en $t = 5\ min$. Qu'est ce qu'il faut faire en premier ? Il faut convertir le temps en seconde. $t = 5\ min = 300\ secondes$. $x'(300) = \lim_{t\to 300}\frac{3t+2-x(300)}{t-300} = \lim_{t\to 300}\frac{3t+2-902}{t-300} = \lim_{t\to 300}\frac{3t-9}{t-300} = \lim_{t\to 300}\frac{3(t-300)}{t-30} = 3$. Donc $x'(300) = V = 3$. Votre camarade a dit tantôt que $V = \frac{x(300)}{300} = 3{,}006$. Pourquoi ce résultat est différent ? d) $x(120)$ Représente le nombre dérivé en 120, de même $x'(300)$ est le nombre dérivé de x en t=300. $x'(t)$ se lit x prime, il est le symbole de la dérivé. Le nombre dérivé est la limite du taux d'accroissement qui est la vitesse de ce mobile en mouvement. Votre camarade a trouvé un résultat différent car il a omis les conditions initiales, à savoir à quel instant débute le mouvement
Définition du nombre dérivé en un point	Institutionnalisation	Enseignant Élève	Fonction Intervalle Taux de variation Limite	Enseignant : A la ligne, résumé. On va donc résumer ce qu'on vient de faire. L'enseignant note la définition au tableau • Soit f une fonction continue sur un intervalle IK et $x_0 \in IK$. On dit que f est dérivable en x_0 à gauche si et seulement si $\lim_{\substack{x\to x_0\\ <}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in IR$ et on note $f_g{}'(x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ <}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ et est appelé nombre dérivé de f en x_0 à gauche.

				• On dit que fonction f est dérivable à droite de x_0 si $\lim_{\substack{x\to x_0\\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in IR$ et on note $f_d{}'(x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ et est appelé nombre dérivé de f en x_0 à droite. Si vous remarquez bien on a parlé de la dérivabilité à gauche et à droite. Quelle est la condition pour qu'une fonction soit dérivable à gauche et à droite? **Élève** : il faut qu'il y'ait égalité entre les limites à gauche et à droite. Enseignant : il faut que ces limites soient les mêmes. **On dit que f est dérivable** en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche de x_0 et le nombre dérivé à droite de x_0 est égal au nombre dérivé à gauche de x_0, i.e $f_d{}'(x_0) = f_g{}'(x_0)$. On note alors $f'(x_0)$ le nombre dérivé de f en x_0
Exemple	Evaluation	Enseignant	Nombre dérivé	Exemple : $f(x) = 3x + 2,\ x_0 = 1$ Je calcule d'abord $f(1) = 3(1) + 2 = 3 + 2 = 5$. $\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{3x+2-5}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{3(x-1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} 3 = 3 = f'_g(1)$ $\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{3x+2-5}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{3(x-1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} 3 = 3 = f'_d(1)$ D'où $\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 3 \in IR$, en plus $f'(1) = 3$.
Equation de la tangente en un point	Institutionnalisation	Enseignant	Equation Tangente	Si $f'_d(0) \neq f'_g(0)$ alors f n'est pas dérivable en 0, on dit alors que f admet au point $A(x_0; y_0)$ un point anguleux, la courbe admettra en ce point deux demi tangentes  La remarque fondamentale que l'on fait c'est que la courbe admettra deux demis tangents, une à gauche et une à droite. En un point anguleux, la courbe de f admet deux demi tangentes T1 et T2 de coefficient directeur respectif $f'_d(0) et\ f'_g(0)$, on y reviendra à la leçon 3 pour faire le lien entre la notion de tangente et de dérivée. Si Si $f'_d \notin IR\ ou\ bien\ f'_g \notin IR$ cela veut dire égale l'infini (plus ou moins l'infini), on peut conclure que f n'est pas dérivable en x zéro.
Exemple	Evaluation	Enseignant Élève	Nombre dérivé Equation de la tangente	Exemple : pour $g(x) = \sqrt{x}$ on a $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = +\infty \notin IR.$

				Enseignant : est-ce qu'on peut dire ici que g est dérivable en 0? Élève : Non. Enseignant : comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = +\infty$ g n'est pas dérivable à droite de 0. Dans ce cas la tangente à Cg est verticale 
Étudier la dérivabilité et la continuité en un point	Institutionnalisation	Enseignant	Fonction Dérivabilité Continuité	Propriété : • Toute fonction dérivable en x_0 est continue en en x_0 alors que toute fonction continue en x_0 n'est pas forcément dérivable La continuité est liée à l'image • Une fonction est dérivable sur un intervalle IK si elle est dérivable en tout point de IK. Généralement on étudie la dérivabilité aux bornes,
Exercice d'application	Evaluation	Enseignant	Fonction Dérivabilité Continuité Nombre dérivé	Exercice d'application 1. Soit la fonction $f(x) = \frac{x^2+3x}{x+2}$ a. Déterminer le domaine de définition de f b. Étudier la continuité de g en 3 et en – 2 c. Étudier la dérivabilité de f en 3 puis en donner si possible le nombre dérivé de f en 3. d. F est-elle dérivable en – 2 ? Justifiez. 2. On définit une fonction g de la manière suivante : $f(x) = \begin{cases} -7x+9 \ \ si\ x > 1 \\ 5x-3 \ \ si\ x \leq 1 \end{cases}$ a. La fonction f est-elle continue en 1? b. Étudier la dérivabilité à droite et à gauche de 1 c. En déduire $f'_d(1) et\ f'_g(1)$ d. La fonction f est-elle dérivable en 1? e. Quelle est la nature du point A(1;2)
Prérequis			Nombre dérivé en un point	Hier nous étions sur la lecon 1 qui parlait de la définition de la dérivation. Pour commencer on va faire un petit rappel, un contrôle des prérequis. C'est tres simple je vais vous demander de rappeler la formule pour calculer le nombre dérivé d'une fonction f en x_0. Élève : $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ Enseignant : est ce correct? Le nombre dérivé d'une fonction f dérivable en x_0 est $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(x_0)$
				Situation problème : L'équation horaire du mouvement d'un mobile est $x(t) = 5t^2 + 1$ où t est en secondes. Exprimez sa vitesse à un instant quelconque.

				Qu'en pensez-vous ? Au précédent cours c'était à un instant précis, ce matin il s'agit à un instant quelconque. Élève` :il va falloir dériver par rapport au temps. Enseignant : en quoi faisant ? En calculant la dérivée. C'est ce que nous allons faire dans ce cours, on verra à la fin s'il a raison ou pas.
Introduire la fonction dérivée sur un intervalle	Premier moment didactique : rencontre avec les tâches T21 : Calculer la fonction dérivée d'une fonction	Enseignant	Taux de variation Limite	**Activité d'apprentissage** 1. Soient les fonctions f, g, h et t définies par $f(x) = 2x^2 - x + 1$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = \frac{1}{x}$ et $t(x) = ax + b$ où $a, b \in IR$. a. Soit $x_0 \in IR$, calculer $f'(x_0)$ puis déduire l'expression de $f'(x)$ pour tout réel x. b. Soit $x_0 \geq 0$, calculer $g'(x_0)$ puis déduire l'expression de $g'(x)$ pour tout réel x positif. c. Soit $x_0 \neq 0$, calculer $h'(x_0)$ puis déduire l'expression de $h'(x)$ pour tout réel x non nul. d. Soit $x_0 \in IR$, calculer $t'(x_0)$ puis déduire l'expression de $t'(x)$ pour tout réel x. 2. Soit (C_f) la courbe d'une fonction continue, soit (T) une droite qui coupe (C_f) en deux points M_0 et M d'abscisses respectives x_0 et x comme l'indique la figure ci-dessous dans un repère orthonormé. a. Justifier que le coefficient directeur de la droite (T) est $\frac{y-y_0}{-x_0}$ b. En déduire l'équation cartésienne de (T) c. Donnez la valeur de $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ d. En déduire la valeur de a lorsque x tend vers x_0. e. Comment appelle-t-on la droite (T) lorsque x tend vers x_0?  **Commentaires de l'enseignant** : voici l'activité d'apprentissage que je vous propose de traiter pour déboucher sur le calcul des dérivées, objet de ce cours. Je vous donne environs 2 min pour y réfléchir,

				déjà un volontaire passe au tableau pour la résolution. Vous pouvez le faire par table banc, travailler ensemble. Qui a déjà une idée de ce qu'il faut faire ? Solutions : 1. a. Calcul de $f'(x_0)$ Soit $x_0 \in IR$, $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{5x^2+1-(5x_0^2+1)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{5x^2-5x_0^2}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{5(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} 5(x+x_0) = 5(x_0+x_0) = 10x_0$ donc $f'(x_0) = 10x_0$. Généralisez cela avec un x quelconque. Que vaut f'(x) ? Soit x un réel, on aura $f'(x) = 10x$ b. Calcul de $g'(x_0)$ $g'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} = \frac{1}{(\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0})} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$. Donc $g'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$. Pour $x > 0$ $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. La fonction g n'est pas dérivable en 0 et son domaine de dérivabilité est est $]0;+\infty[$ tandis que son domaine de définition est $[0;+\infty[$ c. Calcul de $h'(x_0)$ pour $x \neq x_0$ $h'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{x_0-x}{xx_0}}{(x-x_0)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{-(x-x_0)}{(x-x_0)x_0} = \lim\limits_{x\to x_0}\left(-\frac{1}{xx_0}\right) = -\frac{1}{x_0^2}$ Donc $h'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$. Pour $x \neq x_0$ on a $h'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Il y a une infinité de fonctions qui sont dérivables, on ne peut pas avoir tout le temps pour établir pour chacune des fonctions qu'on rencontre. Ce qui est sûr par cette méthode on obtient des formules, on va déduire ce qui se passe avec les fonctions polynomiales et par après on va donner un tableau récapitulatif de toutes ces formules. d. Pour $t(x) = ax + b$ on aura $t'(x) = a$ 2. Ici il s'agit d'une approche graphique a. Justifions que le coefficient directeur de la droite (T) est $\frac{y-y_0}{x-x_0}$ Comment évalue-t-on le coefficient directeur d'une droite ? Comment ça se passe une droite passant par deux points $M\ et\ M_0$. Mais rappelez vous en classe de 3ème, on disait qu'une droite a pour équation y=ax+b. ceci est la forme affine et a est le coefficient directeur. Puisque la droite passe par les points $M\ et\ M_0$, on va écrire l'équation pour les deux points. On aura le système $\begin{cases} y = ax+b \\ y_0 = ax_0+b \end{cases}$. Les points $M\ et\ M_0$ appartiennent tous à la droite (T) donc leurs coordonnées vérifient l'équation de (T). Si on soustrait les deux équations, on obtient $y - y_0 = a(x-x_0)\ \ et\ \ donc\ a = \frac{y-y_0}{x-x_0}$ voilà le coefficient directeur de la droite vu en 3ème on appelle encore la pente.

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td>b. En déduire l'équation cartésienne de (T)
On a $y-y_0=a(x-x_0)$ donc $y=a(x-x_0)+y_0$
c. Donnez la valeur de $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$ car la fonction est dérivable en x_0
d. En déduire la valeur de a lorsque x tend vers x_0.
On veut calculer la limite de $\frac{y-y_0}{x-x_0}$ quand x tend vers x_0; $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{y-y_0}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$
Quand x tend vers x_0, $a=f'(x_0)$ qui est le coefficient directeur de la droite. Quand on dit que x se rapproche de x zéro cela signifie que le point M se rapproche aussi du point M_0, c'est en ce moment que le coefficient directeur devient $f'(x_0)$ quand les deux points sont très proches, alors en ce moment que représente la droite (T) pour la courbe ?
Élèves : la tangente.
e. Comment appelle-t-on la droite (T) lorsque x tend vers x_0?
Lorsque x tend vers x_0 (T) devient la tangente au point M_0. On vient de montrer que le nombre dérivé d'une fonction en x_0 est égal au coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse x_0.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Institutionnalisation</td>
<td>Enseignant</td>
<td>Fonction
Fonction dérivée
Domaine de dérivabilité</td>
<td>Soit f une fonction définie sur un ensemble IE. On appelle fonction dérivée de f, la fonction notée f' et définie par $f': IK\subseteq E\to IR$ qui à x on associe $f'(x)$. IK est appelé ensemble de dérivabilité de la fonction f. On a f dérivable sur IK
On a vu dans l'activité comme on pouvait passer de x zéro à la généralisation. En effet, pour $x_0\in IK$ $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Si on pose $h=x-x_0$ on a $x_0=x-h$. Quand x tend vers x_0 alors h tend vers 0. À partir du nombre dérivé, on sait que $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-(x_0)}{x-x_0}$ ainsi pour généraliser, pour tout $x\in IK$ $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Calculer la dérivée des fonctions élémentaires</td>
<td>Institutionnalisation</td>
<td>Enseignant</td>
<td>Fonction
Fonction dérivée
Domaine de dérivabilité</td>
<td><table>
<tr><td>Fonction f(x)</td><td>Dérivées f'(x)</td><td>Ensenble de dérivabilité</td></tr>
<tr><td>$k\ (k\in IR)$</td><td>0</td><td>IR</td></tr>
<tr><td>$ax, a\in IR^*$</td><td>a</td><td>IR</td></tr>
<tr><td>$x^n\ (n\in\mathbb{N}^*)$</td><td>nx^{n-1}</td><td>IR</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{x}$</td><td>$\frac{-1}{x^2}$</td><td>IR^*</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{x}$</td><td>$\frac{1}{2\sqrt{x}}$</td><td>$]0;+\infty[$</td></tr>
<tr><td>sinx</td><td>cosx</td><td>IR</td></tr>
<tr><td>cosx</td><td>-sinx</td><td>IR</td></tr>
<tr><td>tanx</td><td>$1+tan^2x$</td><td></td></tr>
</table></td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Dérivée et opérations sur les fonctions</td>
<td>Institutionnalisation de la tâche T23 : Calculer la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, de l'inverse, de la composée et de la racine carrée d'une fonction</td>
<td>Enseignant</td>
<td>Fonction</td>
<td>Toutes ces formules ont été établies avec le nombre dérivé, vous pouvez les retenir et les appliquer simplement. Nous avons aussi les fonctions définies par une somme etc…
Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert IK. Le tableau ci-dessous nous donne les dérivées de quelques opérations sur les fonctions :
<table>
<tr><th>Opération</th><th>Dérivée</th><th>valable pour tout x de</th></tr>
<tr><td>u + v</td><td>u ' + v '</td><td>IK</td></tr>
<tr><td>k × u (k constante)</td><td>ku '</td><td>IK</td></tr>
<tr><td>u × v</td><td>u ' v + uv '</td><td>IK</td></tr>
<tr><td>u^2</td><td>2u'u</td><td>IK</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{v}$ où v non nulle sur IK</td><td>$-\frac{v'}{v^2}$</td><td>IK</td></tr>
<tr><td>$\frac{u}{v}$ où v non nulle sur IK</td><td>$\frac{u'v - uv'}{v^2}$</td><td>IK^*</td></tr>
<tr><td>U^n, n entier naturel</td><td>$n \times u^{n-1}$</td><td>IK</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{u}$</td><td>$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$</td><td>$]0; +\infty[$</td></tr>
<tr><td>sin(ax+b)</td><td>asin(ax+b)</td><td>IR</td></tr>
<tr><td>cos(ax+b)</td><td>-asin(ax+b)</td><td>IR</td></tr>
<tr><td>tan(ax+b)</td><td>$a(1 + \tan^2 a)$</td><td>$\mathbb{R} /\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k\in \mathbb{Z}\}$</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Équation de la tangente</td>
<td>Institutionnalisation</td>
<td>Enseignant</td>
<td>Fonction</td>
<td>Soit f une fonction dérivable x_0. L'équation de la tangente au point d'abscisse x_0 est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ où $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Évaluation</td>
<td>Enseignant</td>
<td>Dérivée de la somme, produit, quotient, racine carrée et composée des fonctions</td>
<td>Exercice d'application :
1. On donne les fonctions suivantes. $f(x) = 3$; $g(x) = -5x^3$; $h(x) = \frac{-2}{x}$; $t(x) = \sqrt{3x - 1}$; $q(x) = \frac{7x^2+3x+2}{-x+5}$; $m(x) = 3x\sqrt{x}$; $n(x) = (-x + 2)^3$; $j(x) = \cos(3x - 4)$ et $i(x) = \sin(5x)$</td>
</tr>
</table>

2. Soit la fonction $f(x) = \frac{x^2-2x-2}{x+1}$, déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction en $x_0 = 3$

Solutions :

1) Calcul des dérivées

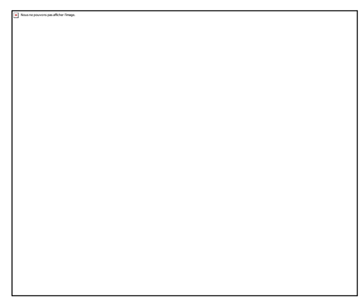
- $f(x) = 3$ alors $f'(x) = 0$
- $g(x) = -5x^3$ alors $g'^{(x)} = -5 \times 3x^2 = -15x^2$
- $h(x) = \frac{-2}{x}$ alors $h'(x) = \frac{2}{x^2}$
- $t(x) = \sqrt{3x-1}$ alors $t'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$
- $q(x) = \frac{7x^2+3x+2}{-x+5}$ alors on a $q'^{(x)} = \frac{(7x^2+3x+2)'(-x+5)-(7x^2+3x+2)(-x+5)'}{(-x+5)^2} = \frac{(14x+3)(-x+5)-(7x^2+3x+2)(-1)}{(-x+5)^2} = \frac{-14x^2+70x-3x+15+7\ \ ^2+3x+2}{(-x+5)^2} = \frac{-7x^2+70x+}{(-x+5)^2}$
- $m(x) = 3x\sqrt{x}$ alors $m'^{(x)} = 3\sqrt{x} + 3x\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = 3\sqrt{x} + \frac{3x}{2\sqrt{x}}$
- $n(x) = (-x+2)^3$ alors $n'^{(x)} = 3 \times (-1)(-x+2)^2 = -3(-x+2)^2$
- $j(x) = \cos(3x-4)$ alors $j'(x) = -3\sin(3x-4)$
- $i(x) = \sin(5x)$ alors $i'(x) = 5\cos(5x)$

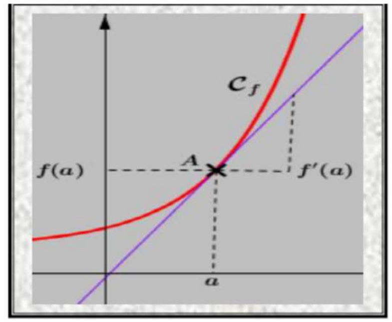
2. Soit la fonction $f(x) = \frac{x^2-2x-2}{x+1}$, l'équation de la tangente à la courbe de la fonction en $x_0 = 3$;

$f(3) = \frac{1}{4}$. $f'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$; $f'(3) = \frac{15}{16}$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = \frac{15}{16}(x-3) + \frac{1}{4}$$

Annexe 7 : Processus d'enseignement/Alain

Type de tâche mathématique	Technique mathématique	Éléments technologiques et théoriques	Moment et sous moment dominant	Liens
T11 : Calculer le nombre dérivé d'une fonction $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}$ en un point $A\ (-3\ ;\ 2)$		θ'_{11} : Un point $A\ (x_0; y_0) \epsilon (C_f)$ si $f(x_0) = y_0$	Première rencontre avec la tâche	Même activité que celle du manuel. Le type de tâche est implicite
	Calculer $\frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)}$ Factoriser au numérateur et simplifier par (x+3)	θ'_{12} : Le taux de variation d'une fonction f aux points $A\ (x_0; y_0)$ et $M\ (x\ ; y)$ est $\frac{f(\ \ )-f(x_0)}{x-x_0}$	Elaboration d'une technique embryonnaire	
	Calculer $\lim\limits_{x \to -3} \frac{f(x)-f(-3)}{x+3} = \lim\limits_{x \to -3} (-\frac{(x+1)}{2}) = 1$			
T'11 : Calculer le nombre dérivé d'une fonction en un point quelconque $(a; f(a))$	• Calculer $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ • Calculer $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ $f'(a)$ est le nombre dérivé	θ_{11}: « Soit f une fonction définie sur un intervalle K de $\mathbb{R}$, $a \in K$. On dit que f est dérivable en a si $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. Cette limite est appelée nombre dérivé de f au point a et est noté $f'(a)$. On a donc $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ » 	Institutionnalisation	Même définition que le manuel Le graphe n'illustre pas la définition Park (2015)
T12 : Interpréter graphiquement le nombre dérivé d'une fonction en un point		θ_{12} « Graphiquement une fonction est dérivable en un réel a lorsque (C_f) admet une tangente non parallèle à l'axe des ordonnées au point d'abscisse a. En posant (T) cette tangente, elle est l'unique tangente à (C_f) au point A d'abscisse a et de pente $f'(a)$. Ainsi son équation réduite est de la forme $(T) : y = f'(a)(x-a) + f(a)$ »		La tangente est une interprétation du nombre dérivé.

				
1) Montrer que $g(x) = \frac{2x+3}{x-2}$ est dérivable en $x_0 = 1$ puis écrire une équation de la tangente (D) à (C_g) au point d'abscisse $x_0 = 1$. 2) Montrer que $h(x) = \sqrt{x}$ est dérivable en $x_0 = 2$ puis écrire une équation de la tangente (D) à (C_h) au point d'abscisse $x_0 = 2$.			Evaluation	
T13 : Étudier la dérivabilité et la continuité d'une fonction en un point quelconque	Calculer $\lim_{x \to a} \left[f(x) - (x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \right] = f(a)$		Premier moment didactique : rencontre avec la tâche T13	L'activité de mise en route est extraite du manuel. Le niveau d'abstraction est élevé de type universitaire
	Calculer $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ Si $f'(a)$ est fini alors f est continue en a	θ_{13} : *« Si une fonction est dérivable en a alors elle est continue en a »*	Institutionnalisation	
T14 : Calculer le nombre dérivé à gauche et à droite	Calculer $\lim_{\substack{x \to a \\ <}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ et $\lim_{\substack{x \to a \\ >}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$	« On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si f est définie sur un intervalle de la forme $]a; x_0]$ et si la fonction : $x \longmapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie à gauche de x_0. Cette limite est appelée nombre dérivée à gauche au point d'abscisse x_0 et notée $f'_g(x_0)$. La courbe de f admet alors un demi-tangente à gauche	Première rencontre et Institutionnalisation	

		au point d'abscisse x_0 d'équation $y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ pour tout $x \in]a; x_0]$» ($\theta_{1.3.1}$). « On dit que f est dérivable à droite en x_0 si f est définie sur un intervalle de la forme $[x_0; a[$ et si la fonction : $x \longmapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie à droite de x_0. Cette limite est appelée nombre dérivée à droite au point d'abscisse x_0 et notée $f'_d(x_0)$. La courbe de f admet alors une demi-tangente à droite au point d'abscisse x_0 d'équation $y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ pour tout $x \in [x_0; a[$. » ($\theta_{1.3.2}$).		
		« Une fonction est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en x_0 et les nombres dérivés à gauche et à droite sont égaux » ($\theta_{1.3.3}$)		
T21 : Calculer la fonction dérivée de la fonction $f(x) = -3x^2 + 5x - \frac{1}{2}$	a) Calculer le taux de variation $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -3(x + x_0) + 5$ b) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ en fonction de x_0		Première rencontre avec la tâche T21	Le calcul de la fonction dérivée est identique à la technique qui a permit de calculer le nombre dérivé. Cependant elle ne permet pas de calculer directement la fonction dérivée. Il faut remplacer x_0 par x.
T21 : Calculer la fonction dérivée d'une fonction		« Soit f une fonction définie sur un intervalle I. -L'ensemble de dérivabilité de f est l'ensemble des nombres réels x_0 de D_f en lesquels f est dérivable. -La fonction $x \mapsto f'(x)$ est appelée fonction dérivée ou dérivé de f»	Institutionnalisation	Même définition que dans le manuel
T22 : Calculer la dérivée d'une fonction élémentaire	a) Calculer le taux de variation $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ b) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$		Première rencontre avec la tâche T22 et institutionnalisation	Même activité que dans le manuel et même définition

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>

Résumé2

Le tableau ci-dessous donne un récapitulatif des fonctions dérivées élémentaires et leur domaine de dérivabilité.

<table>
<tr><th>Fonctions</th><th>Fonction dérivée</th><th>Ensemble de dérivabilité.</th></tr>
<tr><td>$x \mapsto k$</td><td>$x \mapsto 0$</td><td>$\mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>$x \mapsto x$</td><td>$x \mapsto 1$</td><td>$\mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>$x \mapsto x^2$</td><td>$x \mapsto 2x$</td><td>$\mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>$x \mapsto \frac{1}{x}$</td><td>$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$</td><td>$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$</td></tr>
<tr><td>$x \mapsto \sqrt{x}$</td><td>$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$</td><td>$[0; +\infty[$</td></tr>
<tr><td>$x \mapsto \sin(x)$</td><td>$x \mapsto \cos(x)$</td><td>$\mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>$x \mapsto \cos(x)$</td><td>$x \mapsto -\sin(x)$</td><td>$\mathbb{R}$</td></tr>
</table>

</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>T23 : Calculer la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, de l'inverse, de la composée de la racine carrée et de la puissance d'une fonction</td>
<td></td>
<td>

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle IK. On note u' la dérivée de u sur IK et v' la dérivée de v sur IK. On a le tableau suivant :

<table>
<tr><th>Opération</th><th>Dérivée</th><th>Valable pour tout x de</th></tr>
<tr><td>u + v</td><td>u ' + v '</td><td>IK</td></tr>
<tr><td>k × u (k constante)</td><td>ku '</td><td>IK</td></tr>
<tr><td>u × v</td><td>u ' v + uv '</td><td>IK</td></tr>
<tr><td>u^2</td><td>2u'u</td><td>IK</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{v}$ où v non nulle sur IK</td><td>$-\frac{v'}{v^2}$</td><td>IK</td></tr>
<tr><td>$\frac{u}{v}$ où v non nulle sur IK</td><td>$\frac{u'v-uv'}{v^2}$</td><td>IK*</td></tr>
<tr><td>U^n, n entier naturel</td><td>$n \times u^{n-1}$</td><td>IK</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{u}$</td><td>$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$</td><td></td></tr>
</table>

</td>
<td>Institutionnalisation</td>
<td>Même activité que dans le manuel et même définition</td>
</tr>
<tr>
<td>T'23 : Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes : $(f+h)', (kf)', (fg)', \left(\frac{1}{g}\right)', (\frac{f}{g})'$.</td>
<td></td>
<td></td>
<td>Evaluation</td>
<td></td>
</tr>
</table>

$w(x) = h\big(g(x)\big)$ avec : $f(x) = 2x^2 - x + 2;\ g(x) = -x + 4$; $h(x) = \sqrt{2x - 1}$.				
Le moment dominant est celui de l'institutionnalisation. Même si au départ certaines activités permettent aux élèves de découvrir la nouvelle notion en jeu, il est à priori difficile pour les élèves d'indiquer vers où l'activité qu'ils résolvent les mène.				

Annexe 8 : Processus d’enseignement/Bernard

Type de tâche mathématique	Technique mathématique	Éléments technologiques et théoriques	Moment et sous moment dominant	Liens
T11 : Calculer le nombre dérivé d’une fonction Considérons les fonctions suivantes : Considérons les fonctions suivantes : $g(x) = \sqrt{x-2}$, $f(x) = x^2 - 4x$, $h(x) = x\|x-1\|$ 4. Déterminer les ensembles de définition des fonctions f et g 5. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{g(x)-g(2)}{x-2}$ et, $\lim\limits_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}$ Écrire h(x) sans symboles de valeur absolue et calculer les limites des quotients suivants : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{h(x)-h(1)}{x-1}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{h(x)-h(1)}{x-1}$	• Calculer $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ • Calculer $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{-a} = f'(a)$ $f'(a)$ est le nombre dérivé	θ_{11}: « Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. La fonction f est dite dérivable en x_0 si $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l \in IR$. l est appelé nombre dérivé de la fonction en x_0 et on note $l = f'(x_0)$»	Première rencontre avec la tâche **Institutionnalisation**	**Le calcul du taux de variation sert d’appui au calcul du nombre dérivé. Les élèves ont appris récemment à calculer la limite d’une fonction rationnelle. L’enseignant s’en sert pour calculer directement le nombre dérivé en rappelant aux élèves que le quotient $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ Représente le taux de variation**
T14 : Calculer le nombre dérivé à gauche et à droite		« La fonction f est dite dérivable à gauche de x_0 si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in IR$ et son nombre dérivé à gauche est noté $f_g'(x_0)$ » ($\theta_{1.3.1}$). « La fonction f est dite dérivable à droite de x_0 si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in IR$ et son nombre dérivé à gauche est noté $f_d'(x_0)$ » ($\theta_{1.3.2}$). « Une fonction f est dite dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche de x_0 et le nombre dérivé à droite de x_0 est égal au nombre dérivé à gauche de x_0, i.e $f_d'(x_0) = f_g'(x_0)$. » ($\theta_{1.3.3}$)	**Institutionnalisation**	
T13 : Étudier la dérivabilité et la continuité d’une fonction en un point quelconque		« *Soit* f une fonction définie sur in intervalle ouvert I et $x_0 \in I$. Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0. la réciproque est fausse. » ($\theta_{1.3.1}$).	**Institutionnalisation**	**Formulation de niveau universitaire**

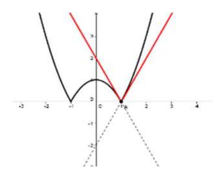
		« Les fonctions polynômes sont dérivables sur IR et les fonctions rationnelles sont dérivables sur leur domaine de définition » ($\theta_{1.3.2}$) « Une fonction continue en un point n'est pas forcément dérivable en ce point » ($\theta_{1.3.3}$)	**Institutionnalisation**	
T12 : Interpréter graphiquement le nombre dérivé d'une fonction en un point		« Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I. (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé. Si f est dérivable en x_0 alors la courbe (C_f) admet au point d'abscisse x_0 une tangente dont le coefficient directeur est $f'(x_0)$. Cette tangente a pour équation $(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ » ($\theta_{1.2}$) « Si f est dérivable à droite, respectivement à gauche de x_0 alors la courbe (C_f) admet au point d'abscisse x_0 une demi-tangente de coefficient directeur est ${f_d}'(x_0)$ respectivement ${f_g}'(x_0)$ » ($\theta_{1.3.2}$ et $\theta_{1.3.2}$)	**Institutionnalisation**	
T21 : Calculer la fonction dérivée des fonctions $f(x) = 2x^2 - x + 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$	a) Calculer le taux de variation $\frac{\mathrm{f(x)-f(x_0)}}{\mathrm{x-x_0}}$ et $\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ b) Calculer $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\mathrm{f(x)-f(x_0)}}{\mathrm{x-x_0}}$ et $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ en fonction de $\mathrm{x_0}$		**Première rencontre avec la tâche T21**	**Activité partielle du manuel**
T'21 : Calculer la fonction dérivée d'une fonction		« Soit f une fonction. L'ensemble de dérivabilité de la fonction f est l'ensemble des nombres réels pour lesquels f est dérivable. f' est appelée dérivée ou fonction dérivéede f» (θ_{21}) « Une fonction f est dérivable sur un intervalle ouvert I si et seulement si f est dérivable en tout point de I » (θ'_{21})	**Institutionnalisation**	**Manuel** Le calcul de la fonction dérivée est identique à la technique qui a permis de calculer le nombre dérivé. Cependant elle ne permet pas de calculer directement la fonction dérivée. Il faut remplacer $\mathrm{x_0}$ par x.

<table>
<tr>
<td>T22 : Calculer la dérivée d'une fonction élémentaire</td>
<td></td>
<td>Le tableau ci-dessous résume les dérivées de quelques fonctions classiques. Soit une fonction dérivable, f'(x) l'image de x par la fonction dérivée f' $(\theta_{2.2})$
<table>
<tr><th>Fonction f(x)</th><th>Dérivées f'(x)</th><th>Ensenble de dérivabilité</th></tr>
<tr><td>$k\ (k \in IR)$</td><td>0</td><td>IR</td></tr>
<tr><td>$ax, a \in IR^*$</td><td>a</td><td>IR</td></tr>
<tr><td>$x^n\ (n \in \mathbb{N}^*)$</td><td>$nx^{n-1}$</td><td>IR</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{x}$</td><td>$\frac{-1}{x^2}$</td><td>IR^*</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{x}$</td><td>$\frac{1}{2\sqrt{x}}$</td><td>$]0;+\infty[$</td></tr>
<tr><td>sinx</td><td>cosx</td><td>IR</td></tr>
<tr><td>cosx</td><td>-sinx</td><td>IR</td></tr>
</table>
</td>
<td>Institutionalisation</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Exercice:
1) calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :
$a)\ f(x) = 3$
$b)\ f(x) = -5x$ $c)\ f(x) = x^6$
$d)\ f(x) = 4x^3$ $e)\ f(x) = \frac{2}{x}$
2) Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :
$f(x) = 5x^2 + 4x - 3$
$g(x) = x + 1 - \frac{1}{x}$
$h(x) = 2\sqrt{x}$</td>
<td></td>
<td></td>
<td>Évaluation</td>
<td>Appliquer simplement les formules de ce tableau</td>
</tr>
<tr>
<td>T23 : Calculer la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, de l'inverse, de la composée de la racine carrée et de la puissance d'une fonction</td>
<td></td>
<td>Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I. Le tableau ci-dessous nous donne les dérivées de quelques opérations sur les fonctions :</td>
<td>Institutionnalisation</td>
<td></td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td></td><td><table>
<tr><th>Fonction</th><th>Dérivée</th></tr>
<tr><td>$u + v$</td><td>$u' + v'$</td></tr>
<tr><td>$ku \quad (k \in \mathbb{R})$</td><td>$k \times u'$</td></tr>
<tr><td>$u \times v$</td><td>$u' \times v + u \times v'$</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{v}$</td><td>$-\frac{v'}{v^2}$</td></tr>
<tr><td>$\frac{u}{v}$</td><td>$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$</td></tr>
<tr><td>$u^n \quad (n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})$</td><td>$n \times u' \times u^{n-1}$</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{u}$</td><td>$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$</td></tr>
<tr><td>$x \mapsto u(ax+b)$</td><td>$x \mapsto a \times u'(ax+b)$</td></tr>
</table></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>T'23 : Calculer la dérivée des fonctions suivantes
$a)\ f(x) = x^3 - 3$
$b)\ g(x) = 5x^4$
$c)\ f(x) = (x+2)(x^2-3x+2)$
$d)\ f(x) = (2x+5)^3$
$e)\ g(x) = \frac{2x^2-x+1}{x-2}$
$f)\ g(x) = \cos(2x+3)$
$g)\ f(x) = \frac{x+1}{x-2}$
Exercices à faire à domicile :
3c, 3d, page 264
2g, 2h, 2i page 258</td><td></td><td></td><td></td><td>Appliquer simplement les formules de ce tableau</td></tr>
<tr><td colspan="5">Le moment dominant est celui de l'institutionnalisation. Le moment de la première rencontre n'existe que pour la tâche d'introduction du nombre dérivé et ensuite la tâche d'introduction de la fonction dérivée. Les autres tâches et sous-tâches sont simplement institutionalisées.</td></tr>
</table>

Annexe 9 : Processus d'enseignement/Charles

Type de tâche mathématique	Technique mathématique	Éléments technologiques et théoriques	Moment et sous moment dominant	Liens
T11 : Calculer le nombre dérivé des fonctions $f(x) = 3x + 2\ \ et\ g(x) = \sqrt{x}$	• Calculer $\lim_{x \to 120} \frac{f(x)}{x}$ • Vérifier si chaque limite est réelle ou pas		Première rencontre avec la tâche	
T'11 : Calculer la vitesse instantanée d'un mobile d'équation horaire $(t) = 3t + 2$ à l'instant $t_0 = 5\ min$	Calculer $x'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}$ où $\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}$ est la vitesse moyenne du mobile	θ : « Le nombre dérivé est la limite du taux d'accroissement qui est la vitesse de ce mobile en mouvement ».		
T''11 : Calculer le nombre dérivé d'une fonction en un point quelconque $(a; f(a))$		« Soit f une fonction continue sur un intervalle IK et $x_0 \in IK$. On dit que f est dérivable en x_0 à gauche si et seulement si $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in IR$ et on note $f_g{}'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ et est appelé nombre dérivé de f en x_0 à gauche ». $(\theta_{1.1.1})$. « On dit que fonction f est dérivable à droite de x_0 si $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in IR$ et on note $f_d{}'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ et est appelé nombre dérivé de f en x_0 à droite ». $(\theta_{1.1.2})$. **« On dit que f est dérivable** en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche de x_0 et le nombre dérivé à droite de x_0 est égal au nombre dérivé à gauche de x_0, i.e $f_d{}'(x_0) = f_g{}'(x_0)$» $(\theta_{1.1.3})$. On note alors $f'(x_0)$ le nombre dérivé de f en x_0	Institutionnalisation	
T'''11 : Calculer le nombre dérivé de la fonction $f(x) = 3x + 2$ en $x_0 = 1$	Je calcule d'abord $f(1) = 3(1) + 2 = 3 + 2 = 5$.		Evaluation	

	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\<}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ $=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\<}}\frac{3x+2-5}{x-1}$ $=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\<}}\frac{3(x-1)}{x-1}$ $=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\<}}3=3$ $=f'_g(1)$ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\>}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ $=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\>}}\frac{3x+2-5}{x-1}$ $=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\>}}\frac{3(x-1)}{x-1}$ $=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\>}}3=3$ $=f'_d(1)$ D'où $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\<}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=$ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\>}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=$ $3\in IR$, en plus $f'(1)=3$.			
T12 : Interpréter graphiquement le nombre dérivé d'une fonction en un point		θ_{12} « Si $f'_d(0)\neq f'_g(0)$ alors f n'est pas dérivable en 0, on dit alors que f admet au point $M_0(x_0;y_0)$ un point anguleux, la courbe admettra en ce point deux demi tangentes »  θ_{12} « Soit f une fonction dérivable x_0. L'équation de la tangente au point d'abscisse x_0 est $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ où $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente »		La tangente est une interprétation du nombre dérivé.
T13 : Étudier la dérivabilité et la continuité d'une fonction en un point quelconque		θ_{13} : « Toute fonction dérivable en x_0 est continue en en x_0 alors que toute fonction continue en x_0 n'est pas forcément dérivable »	Institutionnalisation	
Exercice d'application				

<table>
<tr>
<td>1) Soit la fonction $f(x) = \frac{x^2+3x}{x+2}$
a) Déterminer le domaine de définition de f
b) Étudier la continuité de g en 3 et en – 2
c) Étudier la dérivabilité de f en 3 puis en donner si possible le nombre dérivé de f en 3.
d) F est-elle dérivable en – 2 ? Justifiez.
2) On définit une fonction g de la manière suivante :
$f(x) = \begin{cases} -7x+9 \ \ si\, x > 1 \\ 5x-3 \ \ si\, x \leq 1 \end{cases}$
a) La fonction f est-elle continue en 1?
b) Étudier la dérivabilité à droite et à gauche de 1
c) En déduire $f'_d(1) et\ f'_g(1)$
d) La fonction f est-elle dérivable en 1?
e) Quelle est la nature du point A(1;2)</td>
<td></td>
<td></td>
<td>Evaluation</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>T21 : Calculer le nombre dérivé de chacune des fonctions $f(x) = 2x^2 - x + 1$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = \frac{1}{x}$ $et\ t(x) = ax + b$ où $a, b \in IR$ en fonction de x_0</td>
<td>a) Calculer le taux de variation $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

b) Calculer $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ en fonction de x_0</td>
<td></td>
<td>Première rencontre avec la tâche T21</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>T'21 : Calculer la fonction dérivée d'une fonction</td>
<td></td>
<td>« Soit f une fonction définie sur un ensemble IE. On appelle fonction dérivée de f, la fonction notée f' et définie par $f' : IK \subseteq E \rightarrow IR$ qui à x on associe $f'(x)$. IK est appelé ensemble de dérivabilité de la fonction f. On a f dérivable sur IK
En effet, pour $x_0 \in IK$ $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Si on pose $h = x - x_0$ on a $x_0 = x - h$. Quand x tend vers x_0 alors h tend vers 0. À partir du nombre dérivé, on sait que $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ainsi pour généraliser, pour tout $x \in IK$ $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$ » θ_{21})</td>
<td>Institutionnalisation</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>T22 : Calculer la dérivée d'une fonction élémentaire</td>
<td></td>
<td><table>
<tr><td>Fonction f(x)</td><td>Dérivées f'(x)</td><td>Ensenble de dérivabilité</td></tr>
<tr><td>$k\ (k \in IR)$</td><td>0</td><td>IR</td></tr>
<tr><td>$ax, a \in IR^*$</td><td>a</td><td>IR</td></tr>
<tr><td>$x^n\ (n \in \mathbb{N}^*)$</td><td>$nx^{n-1}$</td><td>IR</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{x}$</td><td>$\frac{-1}{x^2}$</td><td>IR^*</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{x}$</td><td>$\frac{1}{2\sqrt{x}}$</td><td>$]0; +\infty[$</td></tr>
</table></td>
<td>Institutionnalisation</td>
<td></td>
</tr>
</table>

sinx	cosx	IR
cosx	-sinx	IR
tanx	$1 + tan^2x$	

$(\theta_{2,2})$

T23 : Calculer la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, de l'inverse, de la composée de la racine carrée et de la puissance d'une fonction

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert IK. Le tableau ci-dessous nous donne les dérivées de quelques opérations sur les fonctions :

Opération	Dérivée	valable pour tout x de
u + v	u ' + v '	IK
k × u (k constante)	ku '	IK
u × v	u ' v + uv '	IK
u^2	2u'u	IK
$\frac{1}{v}$ où v non nulle sur IK	$-\frac{v'}{v^2}$	IK
$\frac{u}{v}$ où v non nulle sur IK	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	IK*
U^n, n entier naturel	$n \times u^{n-1}$	IK
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$]0;+\infty[$
sin(ax+b)	asin(ax+b)	IR
cos(ax+b)	-asin(ax+b)	IR
tan(ax+b)	$a(1+\tan^2 a)$	$\mathbb{R}/\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

Institutionnalisation

Exercice d'application :

1) On donne les fonctions suivantes. $f(x) = 3$; $g(x) = -5x^3$; $h(x) = \frac{-2}{x}$; $t(x) = \sqrt{3x-1}$; $q(x) = \frac{7x^2+3x+2}{-x+5}$; $m(x) = 3x\sqrt{x}$; $n(x) = (-x+2)^3$; $j(x) = \cos(3x-4)$ et $i(x) = \sin(5x)$

2) Soit la fonction $f(x) = \frac{x^2-2x-2}{x+1}$, déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction en $x_0 = 3$

Evaluation

Annexe 10 : Formulaire de consentement

Université de Montréal
Faculté des Sciences de l'éducation
Département de didactique

FORMULAIRE D'INFORMATION ET DE CONSENTEMENT

Nom et prénom du participant : ________________________________ **Code**_____

<u>**Titre du projet**</u> : Analyse praxéologique des pratiques des enseignants et de leur utilisation des ressources pour l'enseignement de la dérivée. Une étude de cas dans l'enseignement secondaire général au Cameroun.

Chercheur étudiant: Casimir Jojo Nseanpa
Doctorant en Didactique des Mathématiques
Pavillon Marie-Victorin. Local F503

Courriel: casimir.jojo.nseanpa@umontreal.ca

Directeur de recherche
Alejandro González Martín
Département de Didactique
Faculté des sciences de l'éducation
Université de Montréal
Pavillon Marie-Victorin. Local D522

Courriel : a.gonzalez-martin@umontreal.ca

Ce projet de recherche n'est pas financé.

Vous êtes invité à participer à un projet de recherche. Avant d'accepter d'y participer, veuillez prendre le temps de lire et de comprendre les renseignements qui suivent. Ce document vous explique le but de ce projet de recherche, les procédures, les avantages, les risques et les inconvénients. Nous vous invitons à poser toutes les questions que vous jugez utiles à la personne qui vous présente ce document.

A. RENSEIGNEMENTS AUX PARTICIPANTS

1. Objectifs du projet de recherche

Ce projet de recherche vise à mieux comprendre le choix des ressources chez les enseignants de mathématiques, l'utilisation de ces ressources et leurs pratiques d'enseignement. De manière plus précise, il vise à mieux connaître le travail de l'enseignant, ses choix et ses pratiques, mais aussi les contraintes vécues. Les résultats obtenus dans cette thèse et qui feront l'objet des publications dans des revues scientifiques aideront les enseignants à réfléchir sur leurs pratiques et leurs choix, ainsi qu'à mieux comprendre les contraintes qui ont une influence majeure sur leurs pratiques.

Nous souhaitons recruter trois enseignants pour cette recherche. Le projet est autorisé par l'Université de Montréal.

Ce projet de recherche a été approuvé par le Comité d'éthique de la recherche en éducation et en psychologie de l'Université de Montréal. Projet n⁰ CEREP-19-087-D en date du 30 septembre 2019

2. Participation à la recherche

Vous êtes sollicités pour participer à ce projet, car vous êtes enseignant de mathématiques possédant une qualification légale d'enseigner et une expérience dans l'enseignement des élèves de la classe de première au Cameroun. Votre participation au projet de recherche est entièrement volontaire. Si vous y consentez, votre participation consiste à participer à trois activités principales résumées dans le tableau ci-dessous.

N^0	Activités	Participants	Durée	Type d'éléments
1	Entretiens préalables	Enseignants	Environ une heure	Programmes officiels, manuels scolaires, autres ressources, Audio
2	Observations	Enseignants	220 min	Vidéos
3	Entretiens d'explicitation	Enseignants	Environ une heure	Audio

Premièrement, votre participation consistera à réaliser une entrevue individuelle d'une heure avec le chercheur responsable du projet, à un moment et dans un lieu qui vous conviendront. Cette entrevue portera sur la manière dont vous sélectionnez vos ressources d'enseignement, les raisons de vos choix et sur votre vision de l'enseignement de la dérivée, son apprentissage, ses difficultés et son importance. Elle servira à identifier et à analyser votre processus d'interaction avec les ressources et votre rapport personnel à la dérivée. Avec votre consentement, l'entrevue sera enregistrée sur un support audio. L'entrevue devra être enregistrée. Si nous n'avons pas votre consentement favorable, nous craignons que votre participation ne puisse pas répondre totalement aux objectifs poursuivis dans cette recherche.

Deuxièmement, nous passerons aux observations. Le chercheur viendra vous observer lors de vos activités d'enseignement de la dérivée en classe et prendra des notes d'observation. Ces observations se dérouleront dans votre salle de classe et en présence de vos élèves pendant les périodes de cours où vous introduirez la dérivée en un point et le passage de la dérivée en un point à la dérivée sur un intervalle. Nous estimons à deux cours, soit 220 minutes la durée de ces observations. Ces observations auront pour but d'identifier vos pratiques réelles d'enseignement de la dérivée, elles permettront aussi d'identifier les décisions prises pendant l'enseignement et les différentes interactions que vous aurez avec les élèves. Pendant ces observations, le chercheur captera, avec une camera vidéo certains de vos gestes, les mots utilisés, les expressions et les explications en direction des élèves. Ces vidéos serviront à analyser vos pratiques d'enseignement de la dérivée et permettront de faire le lien entre vos intentions et vos pratiques réelles dans le but de dégager les contraintes auxquelles vous faites face.

Troisièmement, votre participation à la dernière activité consistera à réaliser une entrevue individuelle d'une heure avec le chercheur responsable du projet à la fin du cours et dans un lieu qui vous conviendra. Au cours de cette entrevue, nous attendons de vous que vous apportiez des observations sur votre prestation de l'enseignement, des difficultés que vous avez rencontrées, de l'apport de vos ressources d'enseignement sur votre enseignement, des difficultés rencontrées par vos élèves, des liens éventuels entre votre rapport personnel et vos utilisations des ressources et de vos perspectives pour améliorer cet enseignement. Elle servira à établir un fil conducteur entre vos choix des ressources, vos pratiques d'enseignement et les contraintes institutionnelles. Avec votre consentement, l'entrevue sera enregistrée sur un support audio. L'entrevue devra être enregistrée. Si nous n'avons pas votre consentement favorable, nous craignons que votre participation ne puisse pas répondre totalement aux objectifs poursuivis dans cette recherche.

Dans le cadre du projet, le chercheur étudiant recueillera et conservera dans un dossier de recherche des renseignements vous concernant. Ces renseignements seront nécessaires pour répondre aux objectifs scientifiques de la recherche. Nous tenons à vous préciser que vos déclarations sont fondamentales pour la fiabilité de cette recherche. Nous résumons dans le tableau ci-dessous les activités.

3. Avantages et bénéfices

Il n'y a pas d'avantage particulier à participer à ce projet de recherche. Néanmoins, votre participation à toutes les activités de cette recherche vous permettra de faire une analyse réflexive de votre propre pratique d'enseignement et vous y trouverez plus d'intérêt à tenir compte désormais de la place des ressources multiples et variées dans votre travail d'enseignement. De plus, votre interaction avec le chercheur vous permettra également d'enrichir vos connaissances des difficultés liées à l'apprentissage de la dérivée et du calcul en général. Enfin, vous aiderez ainsi les enseignants et les chercheurs à avoir une meilleure compréhension des pratiques des enseignants dans l'utilisation des ressources et aussi dans l'enseignement de la dérivée.

4. Risques et inconvénients

Votre participation à cette recherche vous expose à quelques inconvénients potentiels. Il est possible que vous ressentiez de la fatigue dû au fait que les entretiens de confrontation se dérouleront à la fin des cours. La présence des caméras dans votre salle de classe peut constituer une source de stress et même d'inconfort. Si jamais il vous arrivait de ressentir une quelconque sensation de fatigue ou de gêne, veuillez en informer le chercheur afin que celui-ci puisse prendre immédiatement des mesures pour vous apporter de l'aide. Vous pourrez à tout moment refuser de répondre à une question ou même mettre fin à l'entrevue. En cas de besoin, le chercheur pourra vous donner un moment de pause au milieu de l'entrevue.

5. Confidentialité et anonymat

Les renseignements personnels que vous nous donnerez demeureront confidentiels. Aucune information permettant de vous identifier d'une façon ou d'une autre ne sera publiée. De plus, chaque participant à la recherche se verra attribuer un code et seuls le chercheur et son directeur de recherche pourront connaître son identité. Les données audio et vidéos seront conservées dans un premier temps dans mon ordinateur protégé d'un mot de passe. Ensuite, ces données seront déposées sur le serveur des technologies de l'information de l'Université de Montréal dans un fichier accessible uniquement à mon directeur de thèse et moi-même. Les enregistrements seront transcrits et seront détruits sept ans après la fin de l'étude, ainsi que toute information personnelle. Seules les données ne permettant pas de vous identifier seront conservées après cette période.

7. **Compensation**

Les participants ne recevront aucune compensation pour leur participation à cette recherche.

8. **Droit de retrait**

Chaque participant à cette recherche a le droit de refuser de participer ou pas aux activités citées plus haut. Il a le droit de répondre à certaines questions, de désister et ceci en tout temps, s'il juge nécessaire de le faire, et ce, sans être obligé de donner les raisons de son retrait. S'il arrivait que vous décidiez de mettre fin à votre participation, il est recommandé de prévenir le chercheur dont les coordonnées sont indiquées dans la partie supérieure de ce document. Dans ce cas, tous les renseignements personnels vous concernant seront alors détruits. Cependant, après le déclenchement du processus de publication, il sera impossible de détruire les analyses et les résultats portant sur vos données.

9. **Diffusion de la recherche**

Les résultats principaux de la recherche seront présentés dans des congrès du domaine et publiés dans des revues scientifiques. Si vous le souhaitez, vous pourrez recevoir des copies des articles publiés. À la fin de la recherche, vous recevrez par courriel un résumé vulgarisé des résultats principaux, qui ne sera utilisé qu'à cette fin.

B. DÉCLARATION DU PARTICIPANT

- Je comprends que je peux prendre mon temps pour réfléchir avant de donner mon consentement à participer à la recherche aux conditions énoncées dans le présent formulaire.
- Je reconnais qu'on m'a expliqué clairement la nature de ma participation à la recherche.
- Je peux poser des questions à l'équipe de recherche et exiger des réponses satisfaisantes.
- Je comprends qu'en participant à ce projet de recherche, je ne renonce à aucun de mes droits ni ne dégage les chercheurs de leurs responsabilités.
- J'ai pris connaissance du présent formulaire d'information et de consentement. Je suis satisfait(e) des explications, précisions et réponses que le chercheur m'a fournies, le cas échéant, quant à ma participation à ce projet, j'accepte de participer au projet de recherche.
- Je consens à ce que le chercheur principal ou le chercheur étudiant ait accès à toutes mes ressources d'enseignement de la dérivée

Université de Montréal
Faculté des Sciences de l'éducation
Département de didactique

Acceptation de participer à des entrevues enregistrées sur un support audio

Acceptez-vous de participer aux entrevues enregistrées sur un support audio afin d'en faciliter l'analyse sachant que ces enregistrements audios ne seront jamais diffusés et qu'ils seront détruits sept ans après la fin du projet de recherche?

Cochez votre choix : oui [ ] non [ ].

Acceptation de participer à des entrevues enregistrées sur un support audio

Acceptez-vous d'être filmé lors de deux séances de cours pendant lesquelles vous enseignerez la dérivée afin d'en faciliter l'analyse sachant que ces enregistrements vidéo ne seront jamais diffusés et qu'ils seront détruits sept ans après la fin du projet de recherche?

Cochez votre choix : oui [ ] non [ ].

Je souhaite recevoir un résumé des résultats de cette étude une fois celle-ci complétée

Cochez votre choix : Oui [ ] Non [ ]

- J'autorise le chercheur principal à communiquer les principaux résultats avec moi en utilisant l'adresse courriel suivante :

  ____

Signature du participant : ____________________________ **Date** : ________________

Nom : ____________________________________**Prénom** : ________________________

C. **ENGAGEMENT DU CHERCHEUR ÉTUDIANT**

J'ai expliqué au participant les conditions de sa participation au projet de recherche. J'ai répondu au meilleur de ma connaissance aux questions posées et je me suis assuré de la compréhension du participant. Je m'engage sous la supervision de mon Directeur de recherche à respecter ce qui a été convenu au présent formulaire d'information et de consentement. Je certifie que je remettrai au participant une copie signée et datée du présent formulaire.

Signature du chercheur étudiant: ________________________Date : ___________

Nom : ____________________________________**Prénom** : ________________________

Ce projet de recherche a été approuvé par le Comité d'éthique de la recherche en éducation et en psychologie de l'Université de Montréal. Projet n^0 CEREP-19-087-D en date du 30 septembre 2019

D. PERSONNES-RESSOURCES

Pour toute question relative à l'étude, ou pour vous retirer de la recherche, veuillez communiquer avec Casimir Jojo Nseanpa à l'adresse courriel casimir.jojo.nseanpa@umontreal.ca

Pour toute préoccupation sur vos droits ou sur les responsabilités des chercheurs concernant votre participation à ce projet, vous pouvez contacter le Comité d'éthique de la recherche en éducation et en psychologie par courriel à l'adresse cerep@umontreal.ca ou par téléphone au 514 343-6111 poste 1896 ou encore consulter le site Web http://recherche.umontreal.ca/participants.

Toute plainte relative à votre participation à cette recherche peut être adressée à l'ombudsman de l'Université de Montréal en appelant au numéro de téléphone 514 343-2100 ou en communiquant par courriel à l'adresse ombudsman@umontreal.ca **(l'ombudsman accepte les appels à frais virés).**

□ ***Une copie signée du présent formulaire m'a été remise.***

Annexe 11 : Certificat d'éthique

Université de Montréal

Certificat no CEREP-19-087-D

Comité d'éthique de la recherche en éducation et en psychologie
30 septembre 2019

Objet: Approbation éthique – « Analyse praxéologique des pratiques des enseignants et de leur utilisation des ressources pour l'enseignement de la dérivée. Une étude de cas dans l'enseignement secondaire général au Cameroun »

M. Casimir Jojo Nseanpa,

Le Comité d'éthique de la recherche en éducation et en psychologie a étudié le projet de recherche susmentionné et a délivré le certificat d'éthique demandé suite à la satisfaction des exigences précédemment émises. Vous trouverez ci-joint une copie numérisée de votre certificat. Nous vous invitons à faire suivre ce document au technicien en gestion de dossiers étudiants (TGDE) de votre département.

Notez qu'il y apparaît une mention relative à un suivi annuel et que le certificat comporte une date de fin de validité. En effet, afin de répondre aux exigences éthiques en vigueur au Canada et à l'Université de Montréal, nous devons exercer un suivi annuel auprès des chercheurs et étudiants-chercheurs.

De manière à rendre ce processus le plus simple possible, nous avons élaboré un court questionnaire qui vous permettra à la fois de satisfaire aux exigences du suivi et de nous faire part de vos commentaires et de vos besoins en matière d'éthique en cours de recherche. Ce questionnaire de suivi devra être rempli annuellement jusqu'à la fin du projet et pourra nous être retourné par courriel. La validité de l'approbation éthique est conditionnelle à ce suivi. Sur réception du dernier rapport de suivi en fin de projet, votre dossier sera clos.

Il est entendu que cela ne modifie en rien l'obligation pour le chercheur, tel qu'indiqué sur le certificat d'éthique, de signaler au CEREP tout incident grave dès qu'il survient ou de lui faire part de tout changement anticipé au protocole de recherche.

Nous vous prions d'agréer l'expression de nos sentiments les meilleurs,

Anne-Marie Émond, Présidente
Comité d'éthique de la recherche en éducation et en psychologie
Université de Montréal

c. c. Gestion des certificats, BRDV
Alejandro González Martin, professeur titulaire, FSE - Département de didactique

p. j. Certificat #CEREP-19-087-D

adresse postale
C.P. 6128, succ. Centre-ville
Montréal QC H3C 3J7

adresse civique
3333, Queen Mary
Local 220-10
Montréal QC H3V 1A2

Téléphone : 514-343-6111 poste 1896
cerep@umontreal.ca
www.cerep.umontreal.ca

Université de Montréal

Certificat no CEREP-19-087-D

Comité d'éthique de la recherche en éducation et en psychologie

CERTIFICAT D'APPROBATION ÉTHIQUE

Le Comité d'éthique de la recherche en éducation et en psychologie, selon les procédures en vigueur, en vertu des documents qui lui ont été fournis, a examiné le projet de recherche suivant et conclu qu'il respecte les règles d'éthique énoncées dans la Politique sur la recherche avec des êtres humains *de l'Université de Montréal.*

Projet	
Titre du projet	**Analyse praxéologique des pratiques des enseignants et de leur utilisation des ressources pour l'enseignement de la dérivée. Une étude de cas dans l'enseignement secondaire général au Cameroun**
Étudiant requérant	**Casimir Jojo Nseanpa**, candidat au doctorat, FSE - Département de didactique

Sous la direction de: Alejandro González Martin, professeur titulaire, FSE - Département de didactique, Université de Montréal

Financement	
Organisme	Non financé

MODALITÉS D'APPLICATION

Tout changement anticipé au protocole de recherche doit être communiqué au Comité qui en évaluera l'impact au chapitre de l'éthique. Toute interruption prématurée du projet ou tout incident grave doit être immédiatement signalé au Comité. Selon les règles universitaires en vigueur, un suivi annuel est minimalement exigé pour maintenir la validité de la présente approbation éthique, et ce, jusqu'à la fin du projet. Le questionnaire de suivi est disponible sur la page web du Comité.

Anne-Marie Émond, Présidente
Comité d'éthique de la recherche en éducation et en psychologie
Université de Montréal

30 septembre 2019
Date de délivrance

1er octobre 2020
Date de fin de validité

1er octobre 2020
Date du prochain suivi

Annexe 12 : Entretiens préalables

Thème 1	**Identification du participant**
	Pouvez-vous nous parler de vous, votre parcours académique et professionnel ?
Thème 2	**Environnement de travail**
	Depuis quand travaillez-vous dans ce lycée ?
	Depuis quand enseignez -vous dans cette classe ?
	Pouvez-vous nous parler brièvement de votre lycée, des conditions de travail ?
Thème 3	**Rapport personnel de chaque enseignant avec la dérivée**
	Pour vous, que représente la dérivée ?
	Qu'est-ce-qui selon vous paraît plus important dans l'enseignement de la dérivée ?
	Pourquoi selon vous faut-il enseigner la dérivée ? Quelle est son importance ?
	Selon vous qu'est-ce que les élèves doivent apprendre d'important sur la dérivée ? Quelles sont les applications de la dérivée, les aspects les importants à retenir
Thème 4	**Préparation des cours**
	Quels sont les documents que vous recevez du lycée pour préparer vos cours?
	En dehors de ces documents reçus, avez-vous d'autres documents dont vous vous servez pour cette préparation ?
	Comment les obtenez-vous ces documents ?
	Dans l'utilisation des documents officiels, utilisez-vous les informations des manuels telles qu'elles sont inscrites ou bien y apportez-vous des modifications ?
	Par exemple lorsque vous constatez que le développement qui est fait sur la dérivée dans ces documents ne correspondent pas à vos attentes, que faites-vous ?
	L'ordre des notions proposés dans le manuel est-il suivi à la lettre ou bien vous décidez d'évoluer différemment ?
	Pensez-vous que ces autres documents vous apportent quelque chose de plus que vous décidez d'ajouter à votre préparation de cours ?
	Motivations dans le choix et l'utilisation des ressources d'enseignement
Thème 4	Qu'est ce qui selon vous justifie votre décision de prendre des nouvelles informations qui ne figurent pas dans les documents que l'on vous donne au lycée ?
	Que diriez-vous de votre formation par rapport à la manière de choisir vos ressources d'enseignement ? Vous prépare – t – elle à ce travail de préparation ?
	Diriez-vous que votre expérience personnelle est la principale source de motivation dans vos décisions de choix et d'utilisation des ressources pour préparer vos cours ?
	Autres
Thème 5	Est-ce que votre formation à l'École Normale Supérieure de Yaoundé vous a-t-elle permis de modifier votre rapport personnel à la dérivée ?
	Est-ce-que votre rapport personnel à la dérivée a-t-il changé après que vous ayez utilisé vos ressources pour préparer les cours ?
	Avez-vous autres choses à ajouter ?

Annexe 13 : Entretiens d'explicitation

Thème 1	**Observations de l'enseignant sur l'enseignement**
	Comment pensez-vous avoir abordé la notion de dérivée pour la première fois avec vos élèves ?
	Pour introduire le cours vous avez dit aux élèves….. pensez-vous que votre approche vous a permis de faire passer le message ?
	S'agissant de la tâche que vous avez choisie pour introduire le cours, quelle est la technique que vous attendiez de vos élèves ? Vous semble-t-elle efficace pour introduire la dérivée ?
	Existe-t-il selon vous d'autres techniques ?
	Comment justifiez-vous ces techniques auprès de vos élèves ?
	Qu'est ce qui a motivé vos choix des activités qui ont servi à introduire le cours sur la dérivée ?
Thème 2	**Utilisation des ressources pour l'enseignement et rapport personnel**
	Pourquoi avez-vous choisi d'utiliser telle ressource ?
	Pourquoi n'utilisez-vous pas d'autres ressources telles que…..
	À quel point diriez-vous que cette ressource a-t-elle déterminé votre préparation de cours et aussi votre pratique d'enseignement ?
	Pensez-vous modifier vos ressources et votre préparation de cours pour améliorer votre prochain enseignement ?
	Quels seraient selon vous les principaux aspects liés aux ressources et à l'enseignement sur lesquels vous reviendrez ?
Thème 3	**Pratiques d'enseignement, ressources et formation**
	Diriez-vous que ce cours a changé quelque chose de votre rapport personnel à la dérivée ?
	Votre formation d'enseignant ou de mathématicien a-t-elle joué un rôle particulier pour vous pendant ce cours ?
	Que seriez-vous prêt à changer si vous deviez reprendre ce cours ?
	Les ressources actuellement disponibles dans votre environnement sont-elles assez suffisantes et pertinentes pour vous aider à enseigner la dérivée ?
Thème 4	**Difficultés rencontrées par l'enseignant**
	Selon vous quels sont les points positifs et les points négatifs que vous pouvez dégager de votre présentation du cours ?
	Quelles sont les principales difficultés que vous avez rencontrées lors de la préparation de votre cours ?
	Quelles sont les principales difficultés que vous avez rencontrées pendant la mise en œuvre de l'enseignement ?
Thème 5	**Difficultés rencontrées par les élèves**
	Avez-vous identifié des difficultés de vos élèves pendant cet enseignement ?
	Selon vous à quoi seraient elles reliées ?
	Comment vous prendriez-vous pour réduire ces difficultés ?
Thème 6	**Autres**
	Avez-vous autres choses à ajouter ?