

Université de Montréal

Règles de fusion pour certains modules remarquables
de l'algèbre quantique $U_q\mathfrak{sl}_2$

par

Philippe Robitaille-Grou

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en Mathématiques

18 août 2021

Université de Montréal

Faculté des arts et des sciences

Ce mémoire intitulé

Règles de fusion pour certains modules remarquables de l'algèbre quantique $U_q\mathfrak{sl}_2$

présenté par

Philippe Robitaille-Grou

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Abraham Broer

(président-rapporteur)

Yvan Saint-Aubin

(directeur de recherche)

Luc Vinet

(membre du jury)

Résumé

Ce mémoire porte sur la théorie des représentations de l'algèbre quantique $U_q\mathfrak{sl}_2$ en q une racine de l'unité. Il étudie plus précisément certains modules de l'algèbre $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$, l'extension de Lusztig de $U_q\mathfrak{sl}_2$, lorsque q^2 est une p -racine primitive de l'unité pour p un entier supérieur ou égal à 2. Quatre familles de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules de dimension finie, qualifiés de *modules remarquables*, sont identifiées : les modules simples et projectifs ainsi que les modules et comodules de Weyl. L'algèbre $U_q\mathfrak{sl}_2$ possède une structure d'algèbre de Hopf ; cette dernière peut être étendue sur $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$. L'antipode découlant de cette structure permet de définir la notion de dualité de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules, à partir de laquelle sont construits les comodules de Weyl, tandis que le coproduit permet de définir le produit tensoriel de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules, aussi appelé la fusion de modules. Le mémoire détermine les règles de fusion des modules remarquables : le produit tensoriel de toute paire de modules remarquables est exprimé comme une somme directe de modules indécomposables. Quoique les règles de fusion entre modules simples et projectifs aient été obtenues par Bushlanov, Feigin, Gainutdinov et Tipunin (cf. [7]), celles impliquant au moins un module ou comodule de Weyl sont nouvelles.

Au chapitre 1 sont définies certaines notions préalables, à commencer par les algèbres $U_q\mathfrak{sl}_2$ et $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ ainsi que les $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules remarquables. Certaines propriétés jouant un rôle clé dans la théorie des représentations de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ y sont présentées. Au chapitre 2 sont prouvés à nouveau et généralisés à toute racine q de l'unité les résultats de Bushlanov et coll. Au chapitre 3 sont obtenues les décompositions des produits tensoriels des modules remarquables avec un module de Weyl ainsi qu'avec un comodule de Weyl. Dans ce chapitre est également construite une nouvelle famille de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules, nommés *modules zigzags*. Ces modules (resp. leurs duals) apparaissent dans la règle de fusion d'un module simple avec un module de Weyl (resp. avec un comodule de Weyl).

Mots clés : théorie des représentations d'algèbres, groupes et algèbres quantiques, algèbres de Hopf, extension de Lusztig, règles de fusion, modules simples et projectifs, modules et comodules de Weyl.

Abstract

This thesis is devoted to the representation theory of the quantum algebra $U_q\mathfrak{sl}_2$ for q a root of unity. More precisely it studies some modules of the algebra $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$, the Lusztig extension of $U_q\mathfrak{sl}_2$, when q^2 is a primitive p -root of unity for p an integer greater than or equal to 2. Four families of finite dimensional $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules, called *remarkable modules*, are identified: simple and projective modules as well as Weyl modules and comodules. The algebra $U_q\mathfrak{sl}_2$ has a Hopf algebra structure; the latter can be extended to $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$. The antipode of this structure is used to define a duality of $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules, from which the Weyl comodules are built, while the coproduct is used to define a tensor product of $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules, also called fusion of modules. This thesis determines the fusion rules of remarkable modules: the tensor product of any pair of remarkable modules is expressed as a direct sum of indecomposable modules. Although the fusion rules between simple and projective modules were obtained by Bushlanov, Feigin, Gainutdinov and Tipunin (cf. [7]), those involving at least one Weyl module or comodule are new.

In chapter 1, certain preliminary notions are defined, starting with the algebras $U_q\mathfrak{sl}_2$ and $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ as well as the remarkable $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules. Some properties playing a key role in the representation theory of $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ are presented there. In chapter 2, the results of Bushlanov *et al.* are proved again and generalized to any root of unity q . In chapter 3, the decompositions of the tensor products of remarkable modules with a Weyl module as well as with a Weyl comodule are obtained. In this chapter, a new family of $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules, named *zigzag modules*, is also built. These modules (resp. their duals) appear in the fusion rule of a simple module with a Weyl module (resp. with a Weyl comodule).

Keywords: representation theory of algebras, quantum groups and algebras, Hopf algebras, Lusztig extension, fusion rules, simple and projective modules, Weyl modules and comodules.

Table des matières

Résumé	5
Abstract	7
Liste des tableaux	11
Table des figures	13
Notation	15
Remerciements	19
Introduction	21
Chapitre 1. Théorie des représentations de l'algèbre $U_q\mathfrak{sl}_2$ en q une racine de l'unité	25
1.1. Les q -nombres	25
1.2. L'algèbre quantique $U_q\mathfrak{sl}_2$	26
1.2.1. Formes rationnelles et intégrales	26
1.2.2. Spécialisation en un paramètre complexe	28
1.3. Spécialisation en une racine de l'unité	29
1.3.1. L'algèbre $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$	30
1.3.2. Base, générateurs et affinités avec $U\mathfrak{sl}_2$	31
1.3.3. Antipode et coproduit	32
1.4. Modules remarquables de l'extension de Lusztig	33

1.4.1. Modules de Weyl et modules simples	33
1.4.2. Modules projectifs	35
1.4.3. Dualité	43
1.4.4. Structure des modules	47
Chapitre 2. Règles de fusion pour les modules simples et projectifs	51
2.1. Produit tensoriel de deux modules simples	52
2.1.1. Simplification du problème	52
2.1.2. Les cas de base	55
2.2. Produits tensoriels avec un module projectif	61
Chapitre 3. Règles de fusion pour les modules et comodules de Weyl	71
3.1. Modules zigzags	71
3.1.1. Groupes Hom et Ext^1	72
3.1.2. Construction des modules	75
3.1.3. Noyaux des couvertures projectives	79
3.2. Produits tensoriels avec un module de Weyl	83
3.3. Dualité et produit tensoriel	93
3.4. Conclusion	95
Références bibliographiques	97
Annexe A. Vocabulaire et notation	99

Liste des tableaux

3.1	Groupes Hom pour les $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules remarquables.	72
3.2	Groupes Ext^1 pour les $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules remarquables.	73

Table des figures

1.1	Diagramme de Loewy du module de Weyl $\Delta_q(j)$ lorsque $i \geq p$ et $d < p - 1$	47
1.2	Diagramme de Loewy du comodule de Weyl $\nabla_q(j)$ lorsque $i \geq p$ et $d < p - 1$	48
1.3	Diagramme de Loewy du module projectif $P_q(i)$ lorsque $i < p$ et $d < p - 1$	48
1.4	Diagramme de Loewy du module projectif $P_q(i)$ lorsque $i \geq p$ et $d < p - 1$	49
3.1	Diagramme de Loewy du module zigzag \mathbb{T}_i^k respectivement pour k pair et pour k impair.	78
3.2	Structure du module associé à la couverture projective de \mathbb{T}_i^6	83
3.3	Structure du module associé à la couverture projective de \mathbb{T}_i^7	83
3.4	Diagramme de Loewy de \mathcal{T}_{d,c_1,c_2} lorsque $c_1 \geq c_2$	84
3.5	Diagramme de Loewy de \mathcal{T}_{d,c_1,c_2} lorsque $c_1 < c_2$	84
3.6	Diagramme de Loewy de \mathcal{D}_{d,c_1,c_2} lorsque $c_1 \geq c_2$	94
3.7	Diagramme de Loewy de \mathcal{D}_{d,c_1,c_2} lorsque $c_1 < c_2$	94

Notation

Quelques notations qui seront fréquemment utilisées sont résumées ici. Les notions algébriques non élémentaires associées seront plus précisément définies au fil du mémoire.

- $*$ et $*^2$: respectivement l'endofoncteur dual et bidual sur $\text{mod } \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ (voir section 1.4.3) ;
- M^* : l'espace vectoriel $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(M, \mathbb{C})$ muni de la structure de module gauche via l'antipode S (voir section 1.4.3) ;
- \oplus' , \oplus'' et \oplus''' : quelques sommes directes particulières (voir proposition 2.1.4 et théorèmes 2.2.5 et 2.2.7) ;
- $\{x\}_2$: la notation mod 2 pour l'entier x (voir lemme 2.1.7) ;
- $[n]_q$, $[n]_q!$ et $\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}_q$: respectivement le q -nombre, la q -factorielle et le coefficient q -binomial (voir section 1.1) ;
- $\delta_{a,b}$: le delta de Kronecker, valant 1 si $a = b$ et 0 sinon ;
- Δ : le coproduit sur $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ (voir section 1.3.3) ;
- $\Delta_q(i)$ et $\nabla_q(i)$: respectivement le $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -module et le $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -comodule de Weyl d'indice i , tous deux qualifiés de modules remarquables (voir proposition 1.4.1 et définition 1.4.21) ;
- \mathbb{C}^\times : l'ensemble des nombres complexes non nuls ;
- \mathcal{D}_{d,c_1,c_2} : le dual du module zigzag \mathcal{T}_{d,c_1,c_2} (voir section 3.3) ;
- $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(M, N)$: le groupe d'extension de N par M , pour \mathcal{A} une algèbre et M et N des \mathcal{A} -modules (l'indice \mathcal{A} est omis lorsque le contexte ne porte pas à confusion) ;
- $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N)$: le groupe des morphismes de M vers N , pour \mathcal{A} une algèbre et M et N des \mathcal{A} -modules (l'indice \mathcal{A} est omis lorsque le contexte ne porte pas à confusion) ;
- id : l'élément identité d'une algèbre ;
- id_X : le morphisme identité sur un module, une algèbre ou une catégorie X ;
- $\mathbf{J}[M]$: l'enveloppe injective du module M ;

- $L_q(i)$: le $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -module simple d'indice i , qualifié de module remarquable (voir proposition 1.4.2) ;
- $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$: l'extension de Lusztig sur \mathbb{C} (voir section 1.3.1) ;
- $\mathcal{L}U_t\mathfrak{sl}_2$: la forme intégrale de Lusztig (voir section 1.2.1) ;
- $\text{Mod } \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ et $\text{mod } \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$: respectivement la catégorie de tous les $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules et de tous les $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules de dimension finie ;
- $\mathbf{P}[M]$: la couverture projective du module M ;
- $P_q(i)$: le $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -module projectif d'indice i , qualifié de module remarquable (voir proposition 1.4.8) ;
- $\text{rad}(M)$: le radical de Jacobson du module M ;
- S : l'antipode sur $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ (voir section 1.3.3) ;
- $\text{soc}(M)$: le socle du module M ;
- $\text{top}(M)$: la coiffe du module M ;
- T_i^k et \mathcal{T}_{d,c_1,c_2} : deux différentes notations des $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules zigzags (voir proposition 3.1.4 et section 3.2) ;
- $T_q(i)$: un $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -module isomorphe à $P_q(i)$ (voir proposition 1.4.14) ;
- U^{res} et U : respectivement la forme intégrale restreinte et non restreinte de la déformation quantique de l'algèbre $U\mathfrak{sl}_2$ (voir section 1.2.1) ;
- $U\mathfrak{sl}_2$: l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie \mathfrak{sl}_2 sur \mathbb{C} (voir section 1.2.2) ;
- $U_t\mathfrak{sl}_2$: la forme rationnelle de la déformation quantique de l'algèbre $U\mathfrak{sl}_2$ (voir section 1.2.1) ;
- $\mathfrak{X}_{d,c}$ et $\mathfrak{X}'_{d,c}$: deux $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules isomorphes à $L_q(i)$ (voir proposition 1.4.4 et remarque 1.4.5) ;
- $\mathbb{Z}_{\geq n}$: l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à n .

*Madge, la logique et le bon sens
n'ont pas de place dans cette maison.*

– Brett Montgomery

Remerciements

Voilà venu le moment de rendre à César la salade qui lui appartient. Dans l'ombre de ce mémoire se cachent diverses personnes à qui je dois une fière chandelle, et à qui je dois même tout un lustre d'études universitaires des plus trépidantes. Je prends le temps de souligner l'apport de quelques-uns de ces êtres d'exception, dont le nom restera à jamais gravé dans mon mémoire.

Je remercie d'abord mon directeur de recherche Yvan Saint-Aubin, qui a recueilli ma maturité mathématique lorsqu'elle était haute comme trois epsilons et qui l'a fait croître au point de lui permettre aujourd'hui de jouer dans les modules pour grands. Yvan, merci pour ton implacable rigueur, avec laquelle tu m'aurais sans doute fait constater que l'épsilon de ma dernière phrase est piètrement défini. Merci pour les éclairantes discussions, pour les judicieux conseils et pour les incalculables heures que tu m'as accordées, permettant ainsi à mon projet de maîtrise de devenir de moins en moins projet et de plus en plus maîtrise.

J'en profite pour saluer tous les membres de la troupe du général Yvan, communément appelée la *q*-Cauchy gang dans les ruelles du pavillon, que j'ai eu le privilège de côtoyer au fil des années. Merci pour ces captivants ateliers et ces enrichissantes conversations, qui ont été il faut le dire bien souvent ramenées aux mathématiques par nos *q*-déformations professionnelles. Théo, merci de m'avoir pointé le droit chemin lorsque j'étais dans un cul-de-sac, pour « cul » une racine de l'unité quelconque. Très honorable Alexis Langlois-Rémillard, merci d'avoir saupoudré ces pages de tes savoureux mais non moins pertinents commentaires. Inspiré par un grand homme dont le nom m'échappe qui avait truffé ses remerciements de mémoire de suggestions littéraires, j'ose à mon te proposer une lecture à l'image de ton apport significatif à la vie de plusieurs : *L'entraide : l'autre loi de la jungle* par Gauthier Chapelle et Pablo Servigne.

Dans cette optique d'entraide, une multitude de rencontres fortuites ont permis à mes études universitaires d'être réalisées en solidaire plutôt qu'en solitaire. Ben, merci pour ces aussi nombreuses que précieuses heures de procrastination assistée m'ayant permises de conserver une certaine santé d'esprit. Antoine, merci de rendre n'importe quel concept mathématique plus palpitant encore que les quatorze saisons de *Watatatow* réunies (et Dieu sait que quatorze

saisons, ça en fait de la palpitation). Vanessa et Jérémy, merci pour ces moult rebondissements et ces malt-rafraîchissements. Rosalie et Jonathan, merci pour ce chaleureux accueil dans votre appartement meublé une pièce situé en plein cœur du centre-ville *aissenstadtien* à une minute à pied du local d'association étudiante. Votre compagnie au bureau était des plus agréables et je tiens d'ailleurs à te remercier, Jonathan, pour ta généreuse lecture et annotation de ce mémoire. Plus généralement, à tous ces gens inspirants que j'ai eu le privilège de côtoyer au sein de l'AECSMS, de l'AEMSUM, du projet Femmes en maths ou encore de *L'Axiomatique*, à toutes celles et tous ceux qui ont choisi la voie des mathématiques pures et impliquées, je lève mon chapeau bas (acte que j'ai l'avantage de pouvoir effectuer grâce à ma petite taille).

Merci au Fonds de recherche du Québec – Nature et technologies ainsi qu'au Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada d'avoir accordé un appui financier à mes laborieuses recherches, me permettant ainsi d'avoir labeur et l'argent de labeur. Je remercie également les membres du jury Abraham Broer et Luc Vinet d'avoir accepté de lire le fruit de ces recherches qui, je l'espère, ne leur réservera pas trop de pépins.

Ont aussi indirectement contribué au processus de fermentation de ce mémoire quelques amitiés de longue date qui me sont chères, quoiqu'acquises à prix fort abordable. Fiona, Karl, Patrick, Richard et Yvan, merci de m'avoir fourni des ingrédients essentiels à toute agréable maîtrise : motivation, entrain, folie et beaucoup de melons d'eau. Émile, merci de toujours me faire voir le verre amitié plein et la vie en prose.

Ce mémoire m'aura permis de développer une relation privilégiée avec les familles remarquables de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules de dimension finie. Lorsque l'on m'arrête dans la rue, toutefois, pour me demander laquelle des famille est à mon avis la plus remarquable, je réponds à tout coup : « Nulle famille n'est plus remarquable que celle dans laquelle j'ai eu le bonheur de grandir. » En ce sens, je tiens à remercier du fond du cœur ma remarquable mère Lorraine, mes remarquables sœurs Marie-Christine et Viviane ainsi que mon remarquable frère Bertrand pour leur inconditionnel support pour le moins remarqué. « Tout ce qui compte, la famille », proclamerait un certain collectif de rappers québécois ; merci de m'avoir toujours permis de *tout-ce-qui-compter* sur vous. À ma mère, celle à qui je dois la naissance et tout ce qui a suivi, celle qui ne se doutait probablement guère que son enfant ne ferait toujours pas ses nuits à 23 ans, je ne saurais dire suffisamment « merci » pour tout. Maman, je te dédie ce mémoire, en espérant que tu en comprendras tous les détails.

Trivialement vôtre.

Introduction

La théorie des groupes quantiques s'est développée à la croisée des mondes mathématique et physique. Elle a été introduite à travers l'étude de la méthode de diffusion inverse par le physicien Luttinger et l'école de Leningrad, aux alentours de 1980 (cf. [28, 30]). Le concept a alors mené à l'élaboration d'une vaste famille de techniques permettant la résolution de systèmes intégrables quantiques. L'apport de plusieurs mathématiciens au cours de la même décennie a fourni une base algébrique rigoureuse de cette théorie, éveillant du même coup plus largement l'intérêt de la communauté mathématique pour le sujet. Drinfeld et Jimbo ont indépendamment découvert une structure d'algèbre de Hopf des groupes quantiques étroitement reliée aux les algèbres de Lie (cf. [10, 11, 15]). Woronowicz a quant à lui jeté les bases de la théorie des groupes de matrices quantiques compacts (cf. [31]), alors que Manin a détaillé une différente approche reposant sur la géométrie non commutative (cf. [23]).

Quelques années plus tard, ce sont cette fois différents travaux orchestrés par Etingof, Gelaki, Nikshych, Ostrik, Bakalov et Kirillov qui ont mené à de nouvelles avancées (cf. [5, 12, 13]). Les recherches en question portaient sur les catégories monoïdales, c'est-à-dire des catégories admettant un produit tensoriel entre les objets, ce qui est le cas pour la catégorie des modules d'une algèbre de Hopf (comme il sera expliqué au début du chapitre 2). L'étude des groupes quantiques décrits par Jimbo et Drinfeld s'est ainsi vue bénéficier de la large littérature portant sur les propriétés de telles catégories élaborée au début du XXI^e siècle.

Aujourd'hui encore, la théorie des groupes quantiques suscite un vif engouement pour ses liens de prime abord insoupçonnées avec une kyrielle de concepts physico-mathématiques. Elle intervient notamment dans la topologie en basses dimensions (cf. [26]), dans la théorie des noeuds (cf. [16]) et dans le calcul différentiel sur des espaces non commutatifs (cf. [32]). De par sa relation avec l'équation de Yang-Baxter quantique, elle apparaît également dans la théorie conforme des champs (cf. [24]) ainsi qu'en informatique quantique (cf. [17]).

Notons que le terme *groupe quantique*, qui était à l'origine utilisé et demeure à ce jour communément admis, est propice à maintes confusions. Celui-ci désigne des algèbres et non des groupes et ces dernières ne relèvent pas de la mécanique quantique. Le mot *quantique*

rappelle plutôt ici le processus de quantification en physique. Ce processus fait intervenir une constante h , nommée *constante de Planck* : lorsque h tend vers zéro, les structures de mécanique quantique prennent la forme de leur structure analogue de mécanique classique. Similairement, les groupes quantiques font intervenir un paramètre complexe q . Pour une algèbre de Lie \mathfrak{g} et q de forme $q = e^\epsilon$ (où e désigne l'exponentielle), le groupe quantique $U_q(\mathfrak{g})$ devient l'algèbre enveloppante universelle $U(\mathfrak{g})$ lorsque ϵ tend vers 0. Les groupes quantiques, au sens défini par Drinfeld et Jimbo, représentent ainsi des familles d'algèbres obtenues par déformation d'algèbres de Lie via leur algèbre enveloppante universelle. Le terme *algèbre quantique* sera de ce fait plutôt utilisé dans les pages qui suivent.

Ce mémoire porte plus spécifiquement sur $U_q\mathfrak{sl}_2$, l'exemple le plus simple d'algèbre quantique. Il s'agit d'une famille d'algèbres associatives unitaires paramétrées par la constante complexe q . Cette famille a été introduite par Kulish et Reshetikhin en 1981 (cf. [19]). Sa théorie des représentations est aujourd'hui bien connue (cf. [14, 18]). Le cas où q est une racine de l'unité s'avère particulièrement important, celui-ci étant en lien direct avec la théorie des représentations d'algèbres de Lie affines (cf. [27]) et la théorie des groupes semisimples sur des corps de caractéristique positive (cf. [21]). Or, tel qu'expliqué à la section 1.3.1 du présent mémoire, la théorie des représentations de l'extension $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ de $U_q\mathfrak{sl}_2$, dite *extension de Lusztig*, est plus riche encore.

Quatre familles de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules de dimension finie sont décrites notamment par Andersen et Tubbenhauer (cf. [3]) : les modules simples et projectifs ainsi que les modules et comodules de Weyl. Ceux-ci sont ici qualifiés de *modules remarquables*. À partir de la structure d'algèbre de Hopf de $U_q\mathfrak{sl}_2$, un produit tensoriel peut être défini entre ces modules. En découle ainsi l'étude des règles de fusion, c'est-à-dire l'étude de la décomposition du produit tensoriel entre deux modules.

Dans [7], Bushlanov, Feigin, Gainutdinov et Tipunin décrivent pour q une racine de l'unité d'une certaine forme la décomposition de quelques-uns de ces produits tensoriels de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules, à savoir celle d'un simple avec un simple, d'un simple avec un projectif et d'un projectif avec un projectif. Ce mémoire démontre les règles de fusion deux-à-deux de chacun des modules remarquables, et ce pour q une racine de l'unité quelconque.

Au chapitre 1 est effectué un survol des notions nécessaires à l'étude de ces règles de fusion. Les algèbres $U_q\mathfrak{sl}_2$ et $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ sont introduites, quelques-unes de leurs propriétés classiques sont présentées et les $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules remarquables sont définis. Ces notions sont tirées de la littérature déjà existante sur le sujet et tout particulièrement de [22, 25].

Au chapitre 2 sont généralisés les résultats de l'article de Bushlanov et coll. Il est démontré que les règles de fusion obtenues dans cet article restent valides pour q une racine de l'unité quelconque.

Au chapitre 3 sont présentés plusieurs résultats originaux. Les principaux sont les décompositions des produits tensoriels d'un module remarquable avec un module de Weyl ainsi qu'avec un comodule de Weyl. Les modules zigzags, une nouvelle famille de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules intervenant dans ces règles de fusion, sont d'abord construits.

Finalement, quelques éléments de vocabulaire et choix de notation sont décrits dans l'annexe A : les modules de type 1, l'appellation de « modules projectifs » et le choix d'étiquetage des racines de l'unité.

Des connaissances élémentaires en algèbre, en théorie des représentations ainsi qu'en théorie des catégories sont nécessaires à la bonne compréhension de ce mémoire. Il sera entre autres question de modules projectifs et injectifs, de suites exactes courtes et longues, de propriétés usuelles de foncteurs ainsi que de socles, coiffes et radicaux de modules. Une plus ample description de ces différents concepts peut par exemple être trouvée dans [4].

Chapitre 1

Théorie des représentations de l'algèbre $U_q\mathfrak{sl}_2$ en q une racine de l'unité

Bien que $U_q\mathfrak{sl}_2$ soit l'exemple le plus simple d'algèbre quantique, quiconque entame l'étude de sa théorie des représentations en découvrira les maintes subtilités. La classification des modules simples (ici au sens de modules irréductibles), notamment, est tout autre lorsque le nombre complexe q paramétrant l'algèbre est une racine de l'unité. En une telle valeur de q , la théorie des représentations de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$, l'extension de Lusztig de $U_q\mathfrak{sl}_2$, s'avère nettement plus riche que celle de l'algèbre quantique.

Ce chapitre fait le survol des quelques notions nécessaires à l'étude en une racine de l'unité des modules de dimension finie de l'algèbre $U_q\mathfrak{sl}_2$ via son extension de Lusztig. La section 1.1 décrit les q -nombres, à partir desquels sont définis la q -factorielle et le coefficient q -binomial. Dans les sections 1.2 et 1.3 sont présentées les algèbres $U_q\mathfrak{sl}_2$ et $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ ainsi que certaines de leurs propriétés classiques. Ces algèbres sont toutes deux construites en définissant d'abord une $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -algèbre dépendant d'une indéterminée t , puis en spécialisant cette dernière en $t = q$. Finalement, la section 1.4 introduit les $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules remarquables dont il sera question aux chapitres 2 et 3.

1.1. Les q -nombres

Les entiers, la factorielle et le coefficient binomial ont tous leur q -analogue, des quantités dépendant d'un paramètre complexe q omniprésentes dans la théorie des algèbres quantiques. On présente ici ces analogues.

Pour $q \in \mathbb{C}^\times$ et $n \in \mathbb{Z}$, le q -nombre et la q -factorielle associés à n sont respectivement définis par

$$[n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} \quad \text{et} \quad [n]_q! = \begin{cases} [1]_q [2]_q \cdots [n]_q & \text{si } n \geq 1; \\ 1 & \text{si } n = 0; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lorsque $q = \pm 1$, le dénominateur $q - q^{-1}$ est nul et donc il faut plutôt comprendre ces définitions à l'aide d'un passage à la limite. De plus, pour $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, le coefficient q -binomial associé est défini par :

$$\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}_q = \begin{cases} \frac{[n_1]_q!}{[n_2]_q! [n_1 - n_2]_q!} & \text{si } n_1 \geq n_2; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On remarque que

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} = n, \quad \text{et donc} \quad \lim_{q \rightarrow 1} [n]_q! = n! \quad \text{et} \quad \lim_{q \rightarrow 1} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}_q = \binom{n_1}{n_2}.$$

La notion de q -analogue prend alors tout son sens.

Par définition du q -nombre, si $p \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ et q^2 est une p -racine primitive de l'unité, alors $[n]_q = 0$ si et seulement si n est un multiple de p . Ainsi, certains q -nombres nuls sont susceptibles d'apparaître au dénominateur dans la définition du coefficient q -binomial lorsque q est une racine de l'unité. Le calcul du coefficient en une telle valeur de q est toutefois toujours possible avec la proposition suivante.

Proposition 1.1.1 ([29]). *Soient $p \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $q \in \mathbb{C}$ tel que q^2 soit une p -racine primitive de l'unité et $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tels que $x_2, y_2 < p$. Alors,*

$$\lim_{t \rightarrow q} \begin{bmatrix} x_1 p + x_2 \\ y_1 p + y_2 \end{bmatrix}_t = q^{p(y_1 p (y_1 - x_1) - x_2 y_1 - x_1 y_2)} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}_q,$$

où $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ est considéré nul lorsque $x_1 < y_1$. En particulier, l'expression ci-haut est nulle si et seulement si $x_1 < y_1$ ou $x_2 < y_2$.

1.2. L'algèbre quantique $U_q \mathfrak{sl}_2$

On introduit dans cette section la \mathbb{C} -algèbre $U_q \mathfrak{sl}_2$ ainsi que les formes rationnelles et intégrales permettant de la définir.

1.2.1. Formes rationnelles et intégrales

On décrit d'abord la forme rationnelle $U_t \mathfrak{sl}_2$ et les formes intégrales U , U^{res} et $\mathcal{L}U_t \mathfrak{sl}_2$.

Soient $\mathcal{Z} = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ l'anneau des polynômes en une indéterminée et son inverse et $\mathbb{Q}(t)$ le corps de fractions associé. La $\mathbb{Q}(t)$ -algèbre définie à l'aide des générateurs E, F, K et K^{-1} et des relations

$$K^{\pm 1} K^{\mp 1} = \text{id}, \quad K E K^{-1} = t^2 E, \quad K F K^{-1} = t^{-2} F \quad \text{et} \quad E F - F E = \frac{K - K^{-1}}{t - t^{-1}} \quad (1.2.1)$$

sera notée $U_t \mathfrak{sl}_2$ et nommée *forme rationnelle*. Si la relation $E F - F E = (K - K^{-1})/(t - t^{-1})$ est réécrite $(t - t^{-1})(E F - F E) = (K - K^{-1})$, alors il est aussi possible de considérer la \mathcal{Z} -algèbre U engendrée par ces mêmes générateurs et relations, appelée *forme intégrale non restreinte*. Pour $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, les *puissances divisées* $E^{(r)}, F^{(r)} \in U_t \mathfrak{sl}_2$ sont définies par

$$E^{(r)} = \frac{E^r}{[r]_t!} \quad \text{et} \quad F^{(r)} = \frac{F^r}{[r]_t!}$$

si $r \geq 1$ et $E^{(0)} = F^{(0)} = 1$. On nomme *forme intégrale restreinte* la \mathcal{Z} -algèbre U^{res} ayant comme générateurs les puissances divisées et les éléments $K^{\pm 1}$.

Soit finalement la \mathcal{Z} -algèbre $\mathcal{L}U_t \mathfrak{sl}_2$ engendrée par l'ensemble $\{E^{(r)}, F^{(r)}, K^{\pm 1}, \begin{bmatrix} K; u \\ r \end{bmatrix}_t \mid r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, u \in \mathbb{Z}\}$ et les relations

- (1) $K^{\pm 1} K^{\mp 1} = \text{id}, K E^{(r)} = t^{2r} E^{(r)} K$ et $K F^{(r)} = t^{-2r} F^{(r)} K$;
- (2) $(t - t^{-1}) \begin{bmatrix} K; 0 \\ 1 \end{bmatrix}_t = K - K^{-1}$ et $\begin{bmatrix} K; u \\ 0 \end{bmatrix}_t = \text{id}$;
- (3) $\begin{bmatrix} r + s \\ r \end{bmatrix}_t \begin{bmatrix} K; 0 \\ r + s \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} K; 0 \\ r \end{bmatrix}_t \begin{bmatrix} K; -r \\ s \end{bmatrix}_t$;
- (4) $\begin{bmatrix} K; -u'' \\ r \end{bmatrix}_t = \sum_{s=0}^r (-1)^s t^{u''(r-s)} \begin{bmatrix} u'' + s - 1 \\ s \end{bmatrix}_t K^s \begin{bmatrix} K; 0 \\ r - s \end{bmatrix}_t$;
- (5) $\begin{bmatrix} K; u' \\ r \end{bmatrix}_t = \sum_{s=0}^{\min(r, u')} t^{u'(r-s)} \begin{bmatrix} u' \\ s \end{bmatrix}_t K^{-s} \begin{bmatrix} K; 0 \\ r - s \end{bmatrix}_t$;
- (6) $E^{(r)} F^{(n)} = \sum_{s=0}^{\min(r, n)} F^{(n-s)} \begin{bmatrix} K; 2s - r - n \\ s \end{bmatrix}_t E^{(r-s)}$;
- (7) $E^{(r)} E^{(n)} = \begin{bmatrix} r + n \\ r \end{bmatrix}_t E^{(r+n)}$ et $F^{(r)} F^{(n)} = \begin{bmatrix} r + n \\ r \end{bmatrix}_t F^{(r+n)}$;
- (8) $\begin{bmatrix} K; u \\ r \end{bmatrix}_t E^{(r)} = E^{(n)} \begin{bmatrix} K; u + 2n \\ r \end{bmatrix}_t$ et $\begin{bmatrix} K; u \\ r \end{bmatrix}_t F^{(n)} = F^{(n)} \begin{bmatrix} K; u - 2n \\ r \end{bmatrix}_t$

pour tout $u \in \mathbb{Z}, n, r, s, u' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et $u'' \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Comme le font plusieurs autres auteurs, on utilise la lettre \mathcal{L} pour souligner le rôle clé de George Lusztig dans la définition de $\mathcal{L}U_t \mathfrak{sl}_2$. L'algèbre est à cet effet nommée *forme intégrale de Lusztig*.

Théorème 1.2.1 (Lusztig, [22]). *Les \mathcal{Z} -algèbres U^{res} et $\mathcal{L}U_t \mathfrak{sl}_2$ sont isomorphes.*

L'isomorphisme du théorème précédent associe naturellement les éléments $E^{(r)}$ et $F^{(r)}$ de $\mathcal{L}U_t\mathfrak{sl}_2$ aux puissances divisées correspondantes dans U^{res} . Par abus de notation, les éléments $E^{(1)}$ et $F^{(1)}$ de la forme intégrale de Lusztig seront donc respectivement notés E et F . De plus, les générateurs $\left[\begin{smallmatrix} K; u \\ r \end{smallmatrix} \right]_t$ prennent une forme relativement simple dans U^{res} .

Corollaire 1.2.2. *Soit $r, u \in \mathbb{Z}$ avec $r \geq 0$. Alors*

$$\left[\begin{smallmatrix} K; u \\ r \end{smallmatrix} \right]_t = \prod_{s=1}^r \frac{Kt^{u+1-s} - K^{-1}t^{s-1-u}}{t^s - t^{-s}}.$$

Le corollaire assure en particulier que le membre de droite, malgré son dénominateur apparent, est un élément de la \mathbb{Z} -algèbre U^{res} .

1.2.2. Spécialisation en un paramètre complexe

Soit q un paramètre complexe. Le prochain but est d'introduire l'algèbre quantique $U_q\mathfrak{sl}_2$ comme spécialisation de la forme intégrale non restreinte en $t = q$. Pour ce faire, on considère le morphisme d'anneaux

$$ev_q : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{tel que} \quad ev_q(t^{\pm 1}) = q^{\pm 1}.$$

Une structure de \mathbb{Z} -module droit est conférée à \mathbb{C} avec l'action $\diamond : \mathbb{C} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\alpha \diamond p(t, t^{-1}) = \alpha ev_q(p(t, t^{-1})) = \alpha p(q, q^{-1}).$$

Le foncteur $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} - : \text{Mod } \mathbb{Z} \rightarrow \text{Mod } \mathbb{C}$ induit par cette action permet de définir la \mathbb{C} -algèbre $U_q\mathfrak{sl}_2 = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} U$, avec comme multiplication

$$(\alpha_1 \otimes_{\mathbb{Z}} x_1)(\alpha_2 \otimes_{\mathbb{Z}} x_2) = \alpha_1 \alpha_2 \otimes_{\mathbb{Z}} x_1 x_2,$$

pour $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ et $x_1, x_2 \in U$. Afin d'alléger la notation, le symbole $\otimes_{\mathbb{Z}}$ sera omis et l'élément $\alpha \otimes_{\mathbb{Z}} x \in U_q\mathfrak{sl}_2$ sera noté αx . La \mathbb{C} -algèbre $U_q\mathfrak{sl}_2$ est ainsi engendrée par les éléments E, F et $K^{\pm 1}$ soumis aux relations (1.2.1) dans lesquelles la variable t est remplacée par le paramètre q , d'où le qualificatif de spécialisation de U en $t = q$. Elle est également étroitement reliée à l'algèbre enveloppante $U\mathfrak{sl}_2$ sur \mathbb{C} , engendrée par les éléments e, f et h tels que

$$he - eh = 2e, \quad hf - fh = -2f \quad \text{et} \quad ef - fe = h. \quad (1.2.2)$$

Si l'on remplace E par e, F par f, K par l'exponentielle $e^{h\epsilon}$ et t par l'exponentielle $q = e^{\epsilon}$, les deuxième, troisième et quatrième relations de (1.2.1) deviennent respectivement les première, deuxième et troisième relations de (1.2.2) lorsque ϵ tend vers 0. Ainsi, $U_q\mathfrak{sl}_2$ est dite l'*algèbre quantique* obtenue par la déformation de $U\mathfrak{sl}_2$ et l'élément K peut être interprété comme l'exponentielle de h .

Une classification complète des $U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules simples de dimension finie est effectuée dans [14]. Cette dernière est facilitée lorsque q n'est pas une racine de l'unité, auquel cas les modules simples de dimension finie de type 1 sont décrits dans le théorème qui suit. La définition d'un module de type 1 ainsi que la justification du choix de considérer uniquement ce type de modules sont plutôt techniques et non nécessaires à la compréhension du présent mémoire. Les détails associés se trouvent dans l'annexe A.

Théorème 1.2.3 ([14]). *Soit $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et V_i le \mathbb{C} -espace vectoriel de base $\{v_0, v_1, \dots, v_i\}$. L'action de $U_q\mathfrak{sl}_2$ donnée par*

$$Kv_k = q^{i-2k}v_k, \quad Ev_k = [i - k + 1]_q v_{k-1} \quad \text{et} \quad Fv_k = [k + 1]_q v_{k+1}$$

confère à V_i une structure de $U_q\mathfrak{sl}_2$ -module. De plus, si q n'est pas une racine de l'unité, l'ensemble $\{V_i \mid i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ est un ensemble complet de $U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules simples de type 1 non isomorphes entre eux et de dimension finie.

La démonstration du dernier théorème repose sur la structure des espaces propres associés à l'action de l'élément inversible K sur un module M . Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et

$$M_\lambda = \{m \in M \mid Km = \lambda m\},$$

les deuxième et troisième relations de (1.2.1) impliquent que $EM_\lambda = M_{q^2\lambda}$ et $FM_\lambda = M_{q^{-2}\lambda}$. Ainsi, si M est un module simple et $M_\lambda \neq 0$, alors $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_{q^{2n}\lambda}$. Lorsque q n'est pas une racine de l'unité, les $M_{q^{2n}\lambda}$, pour $n \in \mathbb{Z}$, sont tous distincts. Pour M de dimension finie et $M_\lambda \neq 0$, il doit donc exister des entiers ℓ et ℓ' tels que $M_{q^{2\ell}\lambda}$ et $M_{q^{2\ell'}\lambda}$ ne soient pas nuls, mais que $M_{q^{2(\ell-1)}\lambda}$ et $M_{q^{2(\ell'+1)}\lambda}$ le soient et $M = \bigoplus_{n=\ell}^{\ell'} M_{q^{2n}\lambda}$. Il est prouvé au chapitre 2 de [14] que pour M de type 1 et $i = \ell' - \ell$, $M \simeq \bigoplus_{n=0}^i M_{q^{i-2n}\lambda}$ où chaque $M_{q^{i-2n}\lambda}$, $0 \leq n \leq i$, correspond à $\mathbb{C}v_n$ dans le module V_i défini plus tôt. La preuve rappelle la classification des $U\mathfrak{sl}_2$ -modules simples, cette dernière s'effectuant à partir des espaces propres associés à l'action de l'élément h .

1.3. Spécialisation en une racine de l'unité

Cette section jette les bases de la théorie des représentations en dimension finie de la spécialisation des algèbres U et $\mathcal{L}U_t\mathfrak{sl}_2$ en une racine de l'unité q .

Lorsque q est une racine de l'unité, la théorie des représentations de $U_q\mathfrak{sl}_2$ s'avère plus riche. Par exemple, pour une classe de modules simples, dits cycliques, l'action de l'élément E sur tout vecteur propre de K engendre le module entier. Une classification des $U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules simples pour q une racine de l'unité est effectuée dans [14, 18]. Quoique celle-ci ne soit pas triviale, elle est simplifiée par la relation

$$FE^r = E^rF - [r]_v E^{r-1} \frac{Kt^{r-1} - K^{-1}t^{-r+1}}{t - t^{-1}}$$

qui découle directement de $[E, F] = (K - K^{-1})/(t - t^{-1})$.

Lemme 1.3.1. *Si q est une racine primitive p -ième de l'unité avec $p \geq 3$, alors E^p, F^p, K^p et K^{-p} sont centraux dans $U_q \mathfrak{sl}_2$.*

Ce résultat vient d'abord du fait que le q -nombre $[p]_q$ est nul en une telle racine de l'unité et puis des relations de définition de $U_q \mathfrak{sl}_2$, impliquant par exemple que

$$K^p E K^{-p} = q^{2p} E = E \quad \text{et} \quad K E^p K^{-1} = q^{2p} E^p = E^p.$$

Ce calcul montre aussi que si p est pair et donc $p = 2p'$ pour un certain entier p' , alors $E^{p'}, F^{p'}$ et $K^{\pm p'}$ sont aussi centraux. Pour cette raison, plusieurs auteurs se limitent à étudier les racines p -ièmes primitives de 1 pour $p \geq 3$ impair. Puisque le cas $q^2 = 1$ est habituellement omis (les relations sont alors mal définies), le choix des p impairs seulement omet le cas non trivial $q^4 = 1$ mais $q^2 \neq 1$. Nous n'imposerons donc pas que p soit impair.

Les éléments centraux décrits dans le lemme ci-dessus auront une seule valeur propre sur un module simple. À l'aide d'une base de type Poincaré–Birkhoff–Witt (cf. [8]), il est alors possible de montrer que l'action engendrée par les seuls éléments $E^{r_1} K^{r_2} F^{r_3}$ avec $0 \leq r_1, r_2, r_3 < p$ suffit pour obtenir un ensemble générateur (fini) de tout module simple. On en déduit la proposition suivante.

Proposition 1.3.2 ([18]). *Tout module simple de $U_q \mathfrak{sl}_2$ lorsque q est une racine de l'unité est de dimension finie.*

1.3.1. L'algèbre $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$

Pour un paramètre complexe q , la spécialisation en q de $\mathcal{L}U_t \mathfrak{sl}_2$ est obtenue de manière analogue à celle de U . On définit $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2 = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{L}U_t \mathfrak{sl}_2$ la \mathbb{C} -algèbre avec comme multiplication

$$(\alpha_1 \otimes_{\mathbb{Z}} x_1)(\alpha_2 \otimes_{\mathbb{Z}} x_2) = \alpha_1 \alpha_2 \otimes_{\mathbb{Z}} x_1 x_2,$$

pour $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ et $x_1, x_2 \in \mathcal{L}U_t \mathfrak{sl}_2$. À nouveau, le symbole \otimes_A est omis dans la notation des éléments lorsque le contexte ne porte pas à confusion. L'algèbre ainsi construite est appelée *extension de Lusztig*.

Malgré l'intérêt de la théorie des représentations de $U_q \mathfrak{sl}_2$, il fut rapidement réalisé que la spécialisation de la \mathbb{Z} -algèbre $\mathcal{L}U_t \mathfrak{sl}_2$ en une racine de l'unité q est plus riche que celle de U , car les puissances divisées $E^{(p)}$ et $F^{(p)}$ n'appartiennent plus au centre. Ainsi, la spécialisation des relations définissant U n'est pas équivalente à la spécialisation de celles définissant $\mathcal{L}U_t \mathfrak{sl}_2$ pour une telle valeur de q . Les travaux d'Andersen, Polo et Kexin (voir [2]) ont montré une grande parenté entre la théorie des représentations des algèbres de Lie simples \mathfrak{g} , comme \mathfrak{sl}_2 , (ou de leur algèbre enveloppante) et celle des algèbres $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{g})$ obtenues par spécialisation en une racine de l'unité, même si l'algèbre résultante n'est habituellement pas semisimple.

L'étiquetage du paramètre q varie dans la littérature portant sur l'extension de Lusztig en une racine de l'unité. Pour des raisons techniques, Andersen, Polo et Kexin restreignent encore plus les racines considérées : leurs racines p -ièmes sont telles que $p = \tilde{p}^\ell$ où $\ell \geq 1$ et où \tilde{p} est entier premier impair. On considérera plutôt q tel que q^2 soit une p -ième racine primitive de l'unité, comme justifié dans l'annexe A. Pour toutes les pages qui suivent, on fixe donc une telle racine de l'unité $q \neq \pm 1$ et $p = \min\{\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid q^{2^\ell} = 1\} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$.

1.3.2. Base, générateurs et affinités avec $U\mathfrak{sl}_2$

On énonce quelques propriétés de l'extension de Lusztig démontrées dans [25] ou dans [20] qui s'avéreront fort utiles. On considère d'abord $e, f, h \in \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$, définis par

$$e = K^p E^{(p)}, \quad f = (-1)^{p+1} q^p F^{(p)} \quad \text{et} \quad h = ef - fe.$$

Proposition 1.3.3 ([25]). *Les éléments e, f et h de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ décrits ci-haut respectent les relations (1.2.2). Pour ainsi dire, la sous-algèbre de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ engendrée par ces derniers est isomorphe à $U\mathfrak{sl}_2$.*

Proposition 1.3.4 ([25]). *L'ensemble $\{E, F, K, e, f\}$ engendre $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$.*

Il sera généralement pratique de travailler avec ce nouvel ensemble de générateurs, celui-ci ne comportant que cinq éléments plutôt qu'une infinité.

Pour Φ_p le p -ième polynôme cyclotomique en t , on définit également

$$\varepsilon_t = \frac{\Phi_p(t^2)}{t^{2p} - 1} \in \mathbb{C}(t) \quad \text{et} \quad H_t = \frac{K^{2p} - \text{id}}{\Phi_p(t^2)} \in U_t\mathfrak{sl}_2.$$

Il est démontré dans [20] que H_t appartient à $U^{\text{res}} \simeq \mathcal{L}U_t\mathfrak{sl}_2$. De plus, les numérateur et dénominateur de ε_t ont respectivement pour développement

$$\Phi_p(t^2) = \prod_{\substack{1 \leq n \leq p \\ \text{pgcd}(n,p)=1}} (t^2 - e^{2i\pi \frac{n}{p}}) \quad \text{et} \quad (t^2)^p - 1 = \prod_{1 \leq n \leq p} (t^2 - e^{2i\pi \frac{n}{p}}),$$

ce qui implique que

$$\varepsilon_t = \prod_{\substack{1 \leq n \leq p \\ \text{pgcd}(n,p) \neq 1}} \frac{1}{t^2 - e^{2i\pi \frac{n}{p}}}.$$

Puisque q^2 est une p -racine primitive de l'unité, $q^2 = e^{2i\pi \frac{n}{p}}$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tel que $n \leq p$ et $\text{pgcd}(n,p) = 1$. Le nombre complexe $\varepsilon_q = \lim_{t \rightarrow q} \varepsilon_t$ est donc bien défini et il en va de même pour $H = \varepsilon_q \otimes_{\mathbb{Z}} H_t \in \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$. Cet élément sera utilisé dans la prochaine section pour décrire les modules de plus haut poids de l'extension de Lusztig.

Il est finalement à noter que l'existence d'une \mathbb{C} -base

$$\{(F^{(p)})^{\ell_1} F^{\ell_2} K^{\ell_3} \begin{bmatrix} K; 0 \\ p \end{bmatrix}_t^{\ell_4} (E^{(p)})^{\ell_5} E^{\ell_6} \mid \ell_1, \dots, \ell_6 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \ell_2, \ell_6 < p \text{ et } \ell_3 < 2p\} \quad (1.3.1)$$

de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$, rappelant les bases de Poincaré–Birkhoff–Witt, est démontrée dans [20].

1.3.3. Antipode et coproduit

Une structure d’algèbre de Hopf est décrite dans [22] sur la forme rationnelle $U_t\mathfrak{sl}_2$ et sur la forme intégrale non restreinte U . En utilisant la définition des puissances divisées et en spécialisant en $t = q$, on déduit également une structure d’algèbre de Hopf pour $U_q\mathfrak{sl}_2$ et pour $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$. Une définition précise du concept d’algèbre de Hopf ne sera pas nécessaire ici, mais on utilisera deux applications sur $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ issues de cette structure : l’antipode et le coproduit.

L’antipode est l’anti-automorphisme d’algèbres $S : \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2 \rightarrow \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2^{\text{op}}$ tel que

$$S(E) = -K^{-1}E, \quad S(F) = -FK \quad \text{et} \quad S(K) = K^{-1}. \quad (1.3.2)$$

La valeur de l’antipode sur les éléments $E^{(r)}$ et $F^{(r)}$ pour $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ s’obtient en utilisant la définition des puissances divisées, ce qui donne

$$\begin{aligned} S(E^{(r)}) &= \lim_{t \rightarrow q} \frac{1}{[r]_t!} S(E)^r = \lim_{t \rightarrow q} \frac{1}{[r]_t!} (-K^{-1}E)^r = \lim_{t \rightarrow q} \frac{1}{[r]_t!} (-1)^r \left(\prod_{m=1}^{r-1} t^{2m} \right) K^{-r} E^r \\ &= \lim_{t \rightarrow q} \frac{1}{[r]_t!} (-1)^r t^{(r-1)r} K^{-r} E^r = (-1)^r q^{(r-1)r} K^{-r} E^{(r)}, \end{aligned}$$

et similairement $S(F^{(r)}) = (-1)^r q^{-(r-1)r} F^{(r)} K^r$. La troisième égalité de la première ligne ci-haut est obtenue en appliquant récursivement la relation $EK^{-1} = t^2 K^{-1}E$ de (1.2.2) sur chaque occurrence de EK^{-1} dans l’expression $(-K^{-1}E)^r = (-1)^r K^{-1}EK^{-1}E \cdots K^{-1}E$. Pour donner la valeur de S sur les éléments e et f , une propriété supplémentaire de K sera utilisée.

Proposition 1.3.5 ([25]). *L’élément K de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ satisfait la relation $K^{2p} = \text{id}$.*

L’antipode des éléments e et f prend alors la forme

$$\begin{aligned} S(e) &= S(K^p E^{(p)}) = S(E^{(p)}) S(K)^p = (-1)^p q^{(p-1)p} K^{-p} E^{(p)} K^{-p} \\ &= (-1)^p q^{(p-1)p} K^{-2p} e K^{-p} = (-1)^p q^{(p-1)p} e K^{-p} \end{aligned}$$

$$\text{et } S(f) = (-1)^{p+1} q^p S(F^{(p)}) = (-1)^{p+1} q^p (-1)^p q^{-(p-1)p} F^{(p)} K^p = (-1)^p q^{-(p-1)p} f K^p.$$

On a ainsi l’antipode de chaque élément de l’ensemble générateur $\{E, F, K, e, f\}$ de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ et un calcul élémentaire de l’image de S^2 sur ces éléments permet de vérifier que $S^2(u) = K^{-1}uK$ pour tout $u \in \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$.

Le coproduit est le morphisme d’algèbres $\Delta : \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2 \rightarrow \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2 \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ tel que

$$\Delta(E) = E \otimes \text{id} + K \otimes E, \quad \Delta(F) = \text{id} \otimes F + F \otimes K^{-1} \quad \text{et} \quad \Delta(K) = K \otimes K. \quad (1.3.3)$$

À nouveau par la définition des puissances divisées,

$$\Delta(E^{(r)}) = \sum_{\ell=0}^r q^{\ell(r-\ell)} E^{(r-\ell)} K^\ell \otimes E^{(\ell)} \quad \text{et} \quad \Delta(F^{(r)}) = \sum_{\ell=0}^r q^{-\ell(r-\ell)} F^{(\ell)} \otimes K^{-\ell} F^{(r-\ell)}$$

comme obtenu dans [22]. Le calcul de l'image des éléments e et f sous le coproduit, quant à lui, est effectué dans [25] alors que celui de l'image de l'élément H est décrit dans [20].

Proposition 1.3.6 ([20, 25]). *Le coproduit des éléments e , f et H de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ est donné par*

$$\begin{aligned} \Delta(e) &= \text{id} \otimes e + e \otimes K^p + \frac{1}{[p-1]_q!} \sum_{\ell=1}^{p-1} \frac{q^{\ell(p-\ell)}}{[\ell]_q} (-q^p)^{\ell-1} E^\ell K^{-\ell} \otimes K^p E^{p-\ell}, \\ \Delta(f) &= \text{id} \otimes f + f \otimes K^p + \frac{(-1)^p}{[p-1]_q!} \sum_{\ell=1}^{p-1} \frac{q^{-\ell(p-\ell)}}{[\ell]_q} (-q^p)^\ell F^{p-\ell} \otimes K^{\ell+p} E^{p-\ell} \end{aligned}$$

$$\text{et } \Delta(H) = H \otimes \text{id} + \text{id} \otimes H.$$

1.4. Modules remarquables de l'extension de Lusztig

Quatre familles de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules seront étudiées : les modules et comodules de Weyl ainsi que les modules simples et projectifs. Tous ces modules sont dits remarquables en raison de l'important rôle qu'ils jouent dans la théorie des représentations de l'extension de Lusztig (voir [2, 3]). La présente section se base principalement sur le chapitre 3 de [25] afin de décrire chacune des quatre familles. Ces dernières sont toutes paramétrées par un nombre $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. On fixe en ce sens un certain

$$i = cp + d \text{ pour } c, d \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ tels que } d < p. \quad (1.4.1)$$

On considère également l'entier

$$j = i + 2(p - d - 1) = (c + 1)p + (p - d - 2), \quad (1.4.2)$$

apparaissant dans plusieurs suites exactes courtes où interviennent les modules remarquables.

1.4.1. Modules de Weyl et modules simples

Cette sous-section se veut un bref survol de propriétés clés des $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules de Weyl ainsi que des modules simples. Les démonstrations ne seront pas explicitées, mais chacune d'entre elles peut être trouvée dans [3] ou dans [25].

Proposition 1.4.1 ([3, 25]). *Soit $\Delta_q(i)$ le \mathbb{C} -espace vectoriel de base $\{m_0, m_1, \dots, m_i\}$. L'action de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ donnée par*

$$\begin{aligned} E^{(n)} m_k &= \begin{bmatrix} i - k + n \\ n \end{bmatrix}_q m_{k-n}, & F^{(n)} m_k &= \begin{bmatrix} k + n \\ n \end{bmatrix}_q m_{k+n}, \\ Km_k &= q^{i-2k} m_k & \text{et} & \quad Hm_k = (i - 2k) m_k \end{aligned}$$

confère à $\Delta_q(i)$ une structure de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -module, appelé module de Weyl.

Comme $E^{(1)} = E$ et $F^{(1)} = F$, on remarque que les relations de la proposition précédente généralisent celles du théorème 1.2.3. Cette nouvelle proposition souligne également pourquoi la spécialisation $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ est plus riche que $U_q\mathfrak{sl}_2$. En effet, la définition des puissances divisées spécialisées en une racine de l'unité donnerait $E^p = [p]_q!E^{(p)} = 0$. Donc, même si l'action de E^p est triviale sur le module de Weyl, celle de $E^{(p)}$ ne l'est pas.

Les modules V_i du théorème 1.2.3 permettent une classification des modules simples de l'algèbre quantique $U_q\mathfrak{sl}_2$ lorsque q n'est pas une racine de l'unité. Leur généralisation $\Delta_q(i)$ sur $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ en q une racine de l'unité, quant à elle, n'est pas nécessairement simple. Les coiffes des modules de Weyl permettent néanmoins la classification complète des $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules simples de type 1 et de dimension finie.

Proposition 1.4.2 ([3]). *Soit $L_q(i)$ la coiffe du module $\Delta_q(i)$. Alors, $L_q(i)$ est simple. De plus,*

(1) *si $i < p$ ou $d = p - 1$, alors $\Delta_q(i) = L_q(i)$;*

(2) *si $i \geq p$ et $d < p - 1$, alors $L_q(i)$ est le socle de $\Delta_q(j)$ et il existe une suite exacte courte non scindée*

$$0 \rightarrow L_q(i) \rightarrow \Delta_q(j) \rightarrow L_q(j) \rightarrow 0;$$

(3) *l'ensemble $\{L_q(i) \mid i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ est un ensemble complet de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules simples de type 1 non isomorphes entre eux et de dimension finie.*

La dernière proposition ne donne toutefois pas l'action de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ sur les modules simples. Les modules V_j , $\mathfrak{X}_{d,c}$ et $\mathfrak{X}'_{d,c}$ définis ci-après fournissent à cet égard des présentations plus explicites de $L_q(i)$.

Proposition 1.4.3 ([25]). *Le sous-espace V_j de $\Delta_q(j)$ obtenu en restreignant la base $\{m_0, m_1, \dots, m_i\}$ de la proposition 1.4.1 à l'ensemble*

$$\{m_{ap+b} \mid 0 \leq a \leq c, p-d-1 \leq b \leq p-1\}$$

est stable sous l'action de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$.

En particulier, par les propositions 1.4.2 et 1.4.3, V_j est isomorphe à $L_q(i)$ et $\dim L_q(i) = \dim V_j = (c+1)(d+1)$.

Proposition 1.4.4 ([25]). *Soit $\rho_c = q^{cp} \in \{\pm 1\}$. Le \mathbb{C} -espace vectoriel de base $\mathcal{B} = \{a_{\ell,k} \mid \ell, k \in \mathbb{Z}, 0 \leq \ell \leq d \text{ et } 0 \leq k \leq c\}$ forme un $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -module lorsque muni de la $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -action donnée par*

$$Ea_{\ell,k} = \rho_c [\ell]_q [d - \ell + 1]_q a_{\ell-1,k}; \quad Fa_{\ell,k} = a_{\ell+1,k}; \quad Ka_{\ell,k} = \rho_c q^{d-2\ell} a_{\ell,k}$$

$$ea_{\ell,k} = k(c - k + 1)a_{\ell,k-1}; \quad fa_{\ell,k} = a_{\ell,k+1} \quad \text{et} \quad ha_{\ell,k} = (c - 2k)a_{\ell,k},$$

où $a_{\ell,k} = 0$ si $a_{\ell,k} \notin \mathcal{B}$ (*c'est-à-dire* si $\ell < 0$, $\ell > d$, $k < 0$ ou $k > c$). Ce module est noté $\mathfrak{X}_{d,c}$ et est isomorphe à $L_q(i)$.

Remarque 1.4.5. On obtient de manière similaire un $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -module $\mathfrak{X}'_{d,c}$ en prenant la \mathbb{C} -base $\mathcal{B}' = \{a'_{\ell,k} \mid \ell, k \in \mathbb{Z}, 0 \leq \ell \leq d \text{ et } 0 \leq k \leq c\}$ et l'action

$$\begin{aligned} Ea'_{\ell,k} &= \rho_c [\ell]_q [d - \ell + 1]_q a'_{\ell-1,k}; & Fa'_{\ell,k} &= a'_{\ell+1,k}; & Ka'_{\ell,k} &= \rho_r q^{d-2\ell} a'_{\ell,k} \\ ea'_{\ell,k} &= -k(c - k + 1)a'_{\ell,k-1}; & fa'_{\ell,k} &= -a'_{\ell,k+1} \quad \text{et} \quad ha'_{\ell,k} &= (c - 2k)a'_{\ell,k}, \end{aligned}$$

où $a'_{\ell,k} = 0$ si $a'_{\ell,k} \notin \mathcal{B}'$. Avec l'isomorphisme $\mathfrak{X}_{d,c} \rightarrow \mathfrak{X}'_{d,c}$ donné par $a_{\ell,k} \mapsto (-1)^k a'_{\ell,k}$, on déduit que $\mathfrak{X}'_{d,c} \simeq \mathfrak{X}_{d,c} \simeq L_q(i)$.

Les modules simples ont été initialement définis comme les coiffes des modules de Weyl. On termine en décrivant plus généralement la forme que prendront les modules simples dans la coiffe des $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules dits *de plus haut poids*.

Définition 1.4.6 ([25]). Soit M un $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -module et $\lambda \in \mathbb{C}^\times$. Un élément x de M est un vecteur de plus haut poids λ si $Hx = \lambda x$ et $E^{(n)}x = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Si de surcroît x engendre M , M est appelé module de plus haut poids λ .

Ainsi, $\Delta_q(j)$ est un module de plus haut poids j pour lequel m_0 est un vecteur de plus haut poids et $L_q(i) \simeq V_j$ est un module de plus haut poids $j - 2(p - d - 1) = i$ pour lequel m_{p-d-1} est un vecteur de plus haut poids. Le plus haut poids du module simple $L_q(j)$ constituant la coiffe de $\Delta_q(j)$ concorde de ce fait avec le plus haut poids de $\Delta_q(j)$. Ce constat est généralisé par la proposition qui suit.

Proposition 1.4.7 ([25]). Soit M un $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -module de type 1, de plus haut poids $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et de dimension finie. Alors, la coiffe de M est une somme directe finie de copies de $L_q(i)$.

1.4.2. Modules projectifs

On caractérise maintenant les modules projectifs de l'extension de Lusztig. Rappelons que les entiers i et j sont liés par les relations $i = cp + d$ et $j = (c + 1)p + (p - d - 2)$.

Proposition 1.4.8 ([3]). Soit $P_q(i)$ le module correspondant à la couverture projective de $L_q(i)$. Alors, $P_q(i)$ est un $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -module indécomposable de type 1. De plus,

$$(1) \text{ si } d = p - 1, \text{ alors } P_q(i) \simeq \Delta_q(i) \simeq L_q(i);$$

$$(2) \text{ si } d < p - 1, \text{ alors } P_q(i) \text{ est de dimension } 2p(c + 1) \text{ et on a une suite exacte courte non scindée}$$

$$0 \rightarrow \Delta_q(j) \rightarrow P_q(i) \rightarrow \Delta_q(i) \rightarrow 0;$$

(3) si M est un $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -module projectif de type 1, alors chaque sommant direct de M est isomorphe à $P_q(i)$ pour un certain $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Remarque 1.4.9. L'appellation « modules projectifs » pour qualifier les modules $P_q(i)$ représente dans les faits un abus de langage. Cette subtilité n'aura toutefois pas d'incidence dans le cadre du présent mémoire et les propriétés usuelles associées aux modules projectifs seront utilisées. Voir l'annexe A pour de plus amples explications.

Proposition 1.4.10 ([25]). Si $d < p - 1$, alors $\text{Ext}^1(\Delta_q(i), \Delta_q(j))$ est isomorphe à \mathbb{C} comme espace vectoriel sur \mathbb{C} .

À nouveau, on souhaite construire une présentation donnant concrètement l'action de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ sur $P_q(i)$. Par la proposition précédente, il suffit de définir un module qui soit une extension non triviale de $\Delta_q(j)$ par $\Delta_q(i)$ pour conclure que celui-ci est isomorphe à $P_q(i)$. On construit un tel module $T_q(i)$ à l'aide des éléments $\gamma_{\ell,v}(t)$ et $\beta_{\ell,v}(t)$ de $\mathbb{Q}(t)$ décrits dans les lemmes suivants.

Lemme 1.4.11 ([25]). Pour des entiers $0 \leq \ell \leq i$ et $v \geq 1$, on définit $\gamma_{\ell,v}(t) \in \mathbb{Q}(t)$ récursivement de la manière suivante :

$$\gamma_{\ell,v}(t) = \begin{cases} \begin{bmatrix} p+\ell-d-2 \\ \ell \end{bmatrix}_t & \text{si } v = 1; \\ \frac{1}{[v]_t!} \sum_{u=0}^{v-1} \gamma_{\ell-u,1}(t) \left(\prod_{a=1}^u [i-\ell+a]_t \right) \left(\prod_{b=u+1}^{v-1} [i+p-d-\ell+b]_t \right) & \text{si } v > 1. \end{cases}$$

Lorsque $\ell < 0$ ou $\ell > i$, $\gamma_{\ell,v}(t)$ est considéré nul. Les éléments $\gamma_{\ell,v}(t)$ sont spécialisables en $t = q$ quel que soit $q \in \mathbb{C}^\times$.

Lemme 1.4.12. Pour des entiers $\ell \geq 0$ et $v \geq 1$, on définit $\beta_{\ell,v}(t) \in \mathbb{Q}(t)$ de la manière suivante :

$$\beta_{\ell,v}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \leq i - v; \\ \frac{1}{[(c+1)p]_t} \begin{bmatrix} p-d+\ell+v-1 \\ \ell+v \end{bmatrix}_t \begin{bmatrix} \ell+v \\ v \end{bmatrix}_t & \text{si } \ell > i - v. \end{cases}$$

Lorsque $p - d + \ell + v - 1 \leq j$, les éléments $\beta_{\ell,v}(t)$ sont spécialisables en $t = q$ quel que soit $q \in \mathbb{C}^\times$.

DÉMONSTRATION. La proposition 1.1.1 assure que les deux coefficients t -binomiaux sont bien définis lorsque $t \rightarrow q$. Ainsi, le seul facteur risquant de faire en sorte que $\beta_{\ell,v}(t)$ soit mal défini lorsque t tend vers q est le t -nombre $[(c+1)p]_t$ au dénominateur qui s'annule en $t = q$. Puisque le zéro de $[(c+1)p]_t$ en $t = q$ est de multiplicité 1, il suffit de montrer que

$$\begin{bmatrix} p-d+\ell+v-1 \\ \ell+v \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} \ell+v \\ v \end{bmatrix}_q = 0$$

lorsque $\ell + v > i$ et $p - d + \ell + v - 1 \leq j$. Pour ce faire, on note $\ell = \ell_1 p + \ell_2$ et $v = v_1 p + v_2$ avec $v_1, v_2, \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tels que $\ell_2, v_2 < p$.

Supposons d'abord que $\ell_2 + v_2 \geq p$. Alors,

$$\begin{bmatrix} \ell + v \\ v \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} (\ell_1 + v_1 + 1)p + (\ell_2 + v_2) - p \\ v_1 p + v_2 \end{bmatrix}_q = 0$$

par la proposition 1.1.1, car $0 \leq \ell_2 + v_2 - p < v_2 < p$.

On suppose maintenant que $\ell_2 + v_2 < p$. Si $\ell_1 + v_1 > c$, alors

$$\begin{aligned} p - d + \ell + v - 1 &= (\ell_1 + v_1 + 1)p + (\ell_2 + v_2 - d - 1) \\ &\geq (c + 2)p + (\ell_2 + v_2 - d - 1) \\ &> (c + 2)p - d - 2 = j \end{aligned}$$

et ce cas est exclu par hypothèse. On considère donc $\ell_1 + v_1 \leq c$. Alors $\ell_2 + v_2 > d$, puisque sinon on aurait

$$\ell + v = (\ell_1 + v_1)p + (\ell_2 + v_2) \leq cp + d = i.$$

Conséquemment,

$$\begin{bmatrix} p - d + \ell + v - 1 \\ \ell + v \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} (\ell_1 + v_1 + 1)p + (\ell_2 + v_2 - d - 1) \\ (\ell_1 + v_1)p + (\ell_2 + v_2) \end{bmatrix}_q = 0$$

à nouveau par la proposition 1.1.1, car $0 \leq \ell_2 + v_2 - d - 1 < \ell_2 + v_2 < p$. Ainsi, dans tous les cas, le produit des coefficients t -binomiaux dans $\beta_{\ell,v}(t)$ est nul en $t = q$. \square

Remarque 1.4.13. Lorsque $1 \leq \ell \leq i$,

$$\begin{aligned} \beta_{\ell,1}(t) &= \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \leq i - 1; \\ \frac{1}{[(c+1)p]_t} \begin{bmatrix} p-d+\ell \\ \ell+1 \end{bmatrix}_t [\ell+1]_t & \text{si } \ell > i - 1; \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \leq i - 1; \\ \frac{1}{[(c+1)p]_t} \frac{[(c+1)p]_t!}{[cp+d+1]_t! [p-d-1]_t!} [cp+d+1]_t & \text{si } \ell = i = cp + d; \end{cases} \\ &= \delta_{\ell,i} \frac{[(c+1)p-1]_t!}{[cp+d]_t! [p-d-1]_t!} = \delta_{\ell,i} \beta(t), \quad \text{pour } \beta(t) = \begin{bmatrix} (c+1)p-1 \\ cp+d \end{bmatrix}_t. \end{aligned}$$

Le module $T_q(i)$ peut maintenant être défini. La description de ce dernier se base sur la proposition 3.23 de [25], mais les termes dépendant du facteur $\beta_{\ell,v}(q)$ ont été ajoutés afin d'assurer que l'action sur l'élément n_i soit bien compatible (ce cas devra être traité séparément, comme justifié dans ce qui suit).

Proposition 1.4.14 ([25]). Soit $T_q(i)$ le \mathbb{C} -espace vectoriel de base $\mathcal{E} = \{m_0, \dots, m_j, n_0, \dots, n_i\}$. L'action de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ donnée par

$$\begin{aligned} Km_k &= q^{j-2k}m_k; & Kn_\ell &= q^{i-2\ell}n_\ell; \\ Em_k &= [j-k+1]_q m_{k-1}; & En_\ell &= [i-\ell+1]_q n_{\ell-1} + \gamma_{\ell,1}(q)m_{p-d+\ell-2}; \\ E^{(v)}m_k &= \begin{bmatrix} j-k+v \\ v \end{bmatrix}_q m_{k-v}; & E^{(v)}n_\ell &= \begin{bmatrix} i-\ell+v \\ v \end{bmatrix}_q n_{\ell-v} + \gamma_{\ell,v}(q)m_{p-d+\ell-v-1}; \\ Fm_k &= [k+1]_q m_{k+1}; & Fn_\ell &= [\ell+1]_q n_{\ell+1} + \beta_{\ell,1}(q)m_{p-d+\ell}; \\ F^{(v)}m_k &= \begin{bmatrix} k+v \\ v \end{bmatrix}_q m_{k+v}; & F^{(v)}n_\ell &= \begin{bmatrix} \ell+v \\ v \end{bmatrix}_q n_{\ell+v} + \beta_{\ell,v}(q)m_{p-d+\ell+v-1}, \end{aligned}$$

avec m_k et n_ℓ nuls s'ils ne sont pas dans \mathcal{E} , est bien définie et donne à $T_q(i)$ une structure de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -module.

DÉMONSTRATION. La $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -action décrite dans l'énoncé est bien définie par les lemmes 1.4.11 et 1.4.12. Il suffit donc de montrer que $T_t(i)$ forme un $\mathcal{L}U_t\mathfrak{sl}_2$ -module. Pour ce faire, on montre que l'action de l'énoncé en l'indéterminée t respecte les relations (1.2.1) avec $E^{(v)}x = \frac{E^v}{[v]_t!}x$ et $F^{(v)}x = \frac{F^v}{[v]_t!}x$ pour tout $x \in T_t(i)$ et $v \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. L'isomorphisme du théorème 1.2.1 permettra alors de conclure.

L'action sur les m_k , pour $0 \leq k \leq j$, coïncide avec celle sur la base du module $\Delta_q(j)$ donnée dans la proposition 1.4.1. La vérification des relations sur $T_t(i)$ n'a donc qu'à être faite sur les éléments de base n_ℓ , pour $0 \leq \ell \leq i$.

Affirmation 1 : l'action des éléments E , F et K sur $T_t(i)$ respecte les relations (1.2.1).

L'inversibilité de l'action de K est évidente. Pour ce qui est des deuxième et troisième relations de (1.2.1), on a

$$\begin{aligned} KEK^{-1}n_\ell &= t^{2\ell-i}K([i-\ell+1]_t n_{\ell-1} + \gamma_{\ell,1}(t)m_{p-d+\ell-2}) \\ &= t^{2\ell-i}([i-\ell+1]_t t^{i-2\ell+2}n_{\ell-1} + \gamma_{\ell,1}(t)t^{i+2(p-d-1)-2(p-d+\ell-2)}m_{p-d+\ell-2}) \\ &= [i-\ell+1]_t t^2 n_{\ell-1} + \gamma_{\ell,1}(t)t^2 m_{p-d+\ell-2} = t^2 En_\ell \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} et \quad KFK^{-1}n_\ell &= t^{2\ell-i}K([\ell+1]_t n_{\ell+1} + \beta_{\ell,1}(q)m_{p-d+\ell}) \\ &= t^{2\ell-i}([\ell+1]_t t^{i-2\ell-2}n_{\ell+1} + \beta_{\ell,1}t^{i+2(p-d-1)-2(p-d+\ell)}m_{p-d+\ell}) \\ &= [\ell+1]_t t^{-2} n_{\ell+1} + \beta_{\ell,1}t^{-2} m_{p-d+\ell} = t^{-2} Fn_\ell \end{aligned}$$

pour $0 \leq \ell \leq i$. De plus,

$$\frac{1}{t-t^{-1}}(K - K^{-1})n_\ell = \frac{1}{t-t^{-1}}(t^{i-2\ell} - t^{2\ell-i})n_\ell = [i-2\ell]_t n_\ell.$$

On souhaite donc montrer que $(EF - FE)n_\ell = [i - 2\ell]_t n_\ell$. Puisque l'action de E et celle de F peuvent faire intervenir des n_ℓ et m_k à l'extérieur de \mathcal{E} qui sont alors nuls, certains cas devront être considérés à part.

Supposons d'abord que $i = 0$. Alors, $\ell = 0$ et

$$\begin{aligned} (EF - FE)n_0 &= E \left(\begin{bmatrix} p-1 \\ 0 \end{bmatrix}_t m_p \right) - F \left(\begin{bmatrix} p-2 \\ 0 \end{bmatrix}_t m_{p-2} \right) \\ &= ([2p-2] - p + 1]_t - [p-1]_t m_{p-1} = 0 = [i - 2\ell]_t n_\ell. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $i \neq 0$. Dans le cas où $\ell = 0$,

$$\begin{aligned} (EF - FE)n_0 &= En_1 - F\gamma_{0,1}(t)m_{p-d-2} \\ &= En_1 - F \left(\begin{bmatrix} p-d-2 \\ 0 \end{bmatrix}_t m_{p-d-2} \right) \\ &= [i]_t n_0 + \left(\begin{bmatrix} p-d-1 \\ 1 \end{bmatrix}_t - \begin{bmatrix} p-d-2 \\ 0 \end{bmatrix}_t [p-d-1]_t \right) m_{p-d-1} \\ &= [i]_t n_0, \end{aligned}$$

car $p-d-1 < 1$ si et seulement si $p-d-2 < 0$ et donc l'intérieur de la parenthèse de l'avant-dernière ligne est nul. Dans le cas où $\ell = i$ et $d \leq p-2$,

$$\begin{aligned} (EF - FE)n_i &= E\beta(t)m_{(c+1)p} - F(n_{i-1} + \gamma_{i,1}(t)m_{(c+1)p-2}) \\ &= \beta(t) [p-d-1]_t m_{(c+1)p-1} - [i]_t n_i - \gamma_{i,1}(t) [(c+1)p-1]_t m_{(c+1)p-1} \\ &= \left(\begin{bmatrix} (c+1)p-1 \\ cp+d \end{bmatrix}_t [p-d-1]_t - \begin{bmatrix} (c+1)p-2 \\ cp+d \end{bmatrix}_t [(c+1)p-1]_t \right) m_{(c+1)p-1} - [i]_t n_i \\ &= \left(\frac{[(c+1)p-1]_t!}{[cp+d]_t! [p-d-1]_t!} [p-d-1]_t - \frac{[(c+1)p-2]_t!}{[cp+d]_t! [p-d-2]_t!} [(c+1)p-1]_t \right) m_{(c+1)p-1} \\ &\quad + [-i]_t n_i \\ &= [-i]_t n_i, \end{aligned}$$

avec $m_{(c+1)p} \in \mathcal{E}$ puisque $d \leq p-2$ et donc $(c+1)p \leq j = (c+1)p + (p-d-2)$. Si $d = p-1$, $m_{(c+1)p}$ et $\begin{bmatrix} (c+1)p-2 \\ cp+d \end{bmatrix}_t$ sont tous deux nuls dans le calcul précédent et donc, à nouveau, le résultat est $[-i]_t n_i$. Enfin, lorsque $0 < \ell < i$,

$$\begin{aligned} (EF - FE)n_\ell &= E[\ell+1]_t n_{\ell+1} - F([i-\ell+1]_t n_{\ell-1} + \gamma_{\ell,1}(t)m_{p-d+\ell-2}) \\ &= [\ell+1]_t ([i-\ell]_t n_\ell + \gamma_{\ell+1,1}(t)m_{p-d+\ell-1}) - [i-\ell+1]_t [\ell]_t n_\ell \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\gamma_{\ell,1}(t) [p-d+\ell-1]_t m_{p-d+\ell-1} \\
& = ([\ell+1]_t [i-\ell]_t - [\ell]_t [i-\ell+1]_t) n_\ell \\
& \quad + \left(\begin{bmatrix} p+\ell-d-1 \\ \ell+1 \end{bmatrix}_t [\ell+1]_t - \begin{bmatrix} p+\ell-d-2 \\ \ell \end{bmatrix}_t [p-d+\ell-1]_t \right) m_{p-d+\ell-1}.
\end{aligned}$$

Si $p+\ell-d-1 < \ell+1$, alors $\begin{bmatrix} p+\ell-d-1 \\ \ell+1 \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} p+\ell-d-2 \\ \ell \end{bmatrix}_t = 0$. Sinon,

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} p+\ell-d-1 \\ \ell+1 \end{bmatrix}_t [\ell+1]_t - \begin{bmatrix} p+\ell-d-2 \\ \ell \end{bmatrix}_t [p-d+\ell-1]_t \\
& = \frac{[p+\ell-d-1]_t!}{[\ell+1]_t! [p-d-2]_t!} [\ell+1]_t - \frac{[p+\ell-d-2]_t!}{[\ell]_t! [p-d-2]_t!} [p-d+\ell-1]_t = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
(EF - FE)n_\ell & = ([\ell+1]_t [i-\ell]_t - [\ell]_t [i-\ell+1]_t) n_\ell \\
& = \frac{(t^{\ell+1} - t^{-\ell-1})(t^{i-\ell} - t^{\ell-i}) - (t^\ell - t^{-\ell})(t^{i-\ell+1} - t^{i-\ell-1})}{(t-t^{-1})^2} n_\ell \\
& = \frac{-t^{2\ell-i+1} - t^{i-2\ell-1} + t^{-i+2\ell-1} + t^{i-2\ell+1}}{(t-t^{-1})^2} n_\ell \\
& = \frac{(t-t^{-1})(t^{i-2\ell} - t^{2\ell-i})}{(t-t^{-1})^2} n_\ell = [i-2\ell]_t n_\ell.
\end{aligned}$$

Affirmation 2 : $E^v n_\ell = [v]_t! E^{(v)} n_\ell$ pour $0 \leq \ell \leq i$ et $v \geq 1$.

La démonstration se fait par induction sur v . Pour $v=1$, le résultat est obtenu directement par définition de l'action. Soit $v \geq 2$ et supposons l'affirmation vraie pour $v-1$. Pour $0 \leq \ell \leq i$,

$$\begin{aligned}
E^v n_\ell & = [v-1]_t! E E^{(v-1)} n_\ell \\
& = [v-1]_t! E \left(\begin{bmatrix} i-\ell+v-1 \\ v-1 \end{bmatrix}_t n_{\ell-v+1} + \gamma_{\ell,v-1} m_{p-d+\ell-v} \right) \\
& = [v-1]_t! \begin{bmatrix} i-\ell+v-1 \\ v-1 \end{bmatrix}_t ([i-\ell+v]_t n_{\ell-v} + \gamma_{\ell-v+1,1} m_{p-d+\ell-v-1}) \\
& \quad + [v-1]_t! \gamma_{\ell,v-1} [(c+1)p-\ell+v-1]_t m_{p-d+\ell-v-1} \\
& = E_1 n_{\ell-v} + E_2 m_{p-d+\ell-v-1},
\end{aligned}$$

avec

$$E_1 = [v-1]_t! \frac{[i-\ell+v-1]_t!}{[i-\ell]_t! [v-1]_t!} [i-\ell+v]_t = [v]_t! \frac{[i-\ell+v]_t!}{[i-\ell]_t! [v]_t!} = [v]_t! \begin{bmatrix} i-\ell+v \\ v \end{bmatrix}_t$$

et

$$\begin{aligned}
E_2 &= [v-1]_t! \gamma_{\ell-v+1,1}(t) \frac{[i-\ell+v-1]_t!}{[i-\ell]_t! [v-1]_t!} \\
&\quad + [(c+1)p - \ell + v - 1]_t \sum_{u=0}^{v-2} \gamma_{\ell-u,1}(t) \left(\prod_{a=1}^u [i-\ell+a]_t \right) \left(\prod_{b=u+1}^{v-2} [(c+1)p - \ell + b]_t \right) \\
&= \gamma_{\ell-v+1,1}(t) \prod_{a=1}^{v-1} [i-\ell+a]_t + \sum_{u=0}^{v-2} \gamma_{\ell-u,1}(t) \left(\prod_{a=1}^u [i-\ell+a]_t \right) \left(\prod_{b=u+1}^{v-1} [(c+1)p - \ell + b]_t \right) \\
&= \sum_{u=0}^{v-1} \gamma_{\ell-u,1}(t) \left(\prod_{a=1}^u [i-\ell+a]_t \right) \left(\prod_{b=u+1}^{v-1} [(c+1)p - \ell + b]_t \right) = [v]_t! \gamma_{\ell,v}.
\end{aligned}$$

Donc, $E^v n_\ell = [v]_t! E^{(v)} n_\ell$.

Affirmation 3 : $F^v n_\ell = [v]_t! F^{(v)} n_\ell$ pour $0 \leq \ell \leq i$ et $v \geq 1$.

On procède à nouveau par induction sur v , avec le cas $v = 1$ découlant de la définition de l'action dans la proposition. Soit $v \geq 2$ et supposons l'affirmation vraie pour $v - 1$. Pour $0 \leq \ell \leq i$,

$$\begin{aligned}
F^v n_\ell &= [v-1]_t! F(F^{(v-1)} n_\ell) \\
&= [v-1]_t! F \left(\begin{bmatrix} \ell + v - 1 \\ v - 1 \end{bmatrix}_t n_{\ell+v-1} + \beta_{\ell,v-1}(t) m_{p-d+\ell+v-2} \right) \\
&= [v-1]_t! \begin{bmatrix} \ell + v - 1 \\ v - 1 \end{bmatrix}_t ([\ell + v]_t n_{\ell+v} + \delta_{\ell+v-1,i} \beta(t) m_{p-d+\ell+v-1}) \\
&\quad + [v-1]_t! \beta_{\ell,v-1}(t) [p-d+\ell+v-1]_t m_{p-d+\ell+v-1} \\
&= F_1 n_{\ell+v} + F_2 m_{p-d+\ell+v-1},
\end{aligned}$$

avec

$$F_1 = [v-1]_t! \frac{[\ell+v-1]_t!}{[\ell]_t! [v-1]_t!} [\ell+v]_t = [v]_t! \frac{[\ell+v]_t!}{[\ell]_t! [v]_t!} = [v]_t! \begin{bmatrix} \ell+v \\ v \end{bmatrix}_t$$

et

$$F_2 = [v-1]_t! \left(\delta_{\ell+v-1,i} \begin{bmatrix} \ell+v-1 \\ v-1 \end{bmatrix}_t \beta(t) + [p-d+\ell+v-1]_t \beta_{\ell,v-1}(t) \right).$$

Si $\ell + v - 1 = i$, alors $\ell = i - (v - 1)$ et donc $\beta_{\ell,v-1}(t) = 0$, ce qui implique que

$$\begin{aligned}
F_2 &= [v-1]_t! \begin{bmatrix} \ell+v-1 \\ v-1 \end{bmatrix}_t \begin{bmatrix} p+\ell+v-d-2 \\ \ell+v-1 \end{bmatrix}_t \\
&= [v-1]_t! \frac{[\ell+v-1]_t!}{[\ell]_t! [v-1]_t!} \frac{[p+\ell+v-d-2]_t!}{[\ell+v-1]_t! [p-d-1]_t!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [v]_t! \frac{1}{p + \ell + v - d - 1} \frac{[\ell + v]_t! [p + \ell + v - d - 1]_t!}{[\ell]_t! [v]_t! [\ell + v]_t! [p - d - 1]_t!} \\
&= [v]_t! \frac{1}{p + i - d} \begin{bmatrix} \ell + v \\ v \end{bmatrix}_t \begin{bmatrix} p - d + \ell + v - 1 \\ \ell + v \end{bmatrix}_t = [v]_t! \beta_{\ell, v}(t).
\end{aligned}$$

Si $\ell > i - v + 1$,

$$\begin{aligned}
F_2 &= [v - 1]_t! [p - d + \ell + v - 1]_t \frac{1}{[(c + 1)p]_t} \frac{[p + \ell + v - d - 2]_t!}{[\ell + v - 1]_t! [p - d - 1]_t!} \frac{[\ell + v - 1]_t!}{[\ell]_t! [v - 1]_t!} \\
&= [v]_t! \frac{1}{[(c + 1)p]_t} \frac{[p - d + \ell + v - 1]_t! [\ell + v]_t!}{[\ell + v]_t! [p - d - 1]_t! [\ell]_t! [v]_t!} = [v]_t! \beta_{\ell, v}(t).
\end{aligned}$$

Si $\ell < i - v + 1$, alors $F_2 = 0 = [v]_t! \beta_{\ell, v}(t)$.

Ainsi, dans tous les cas, $F^v n_\ell = [v]_t! F^{(v)} n_\ell$ et la démonstration est complète. \square

Remarque 1.4.15. Par définition de $H \in \mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$, l'action de cet élément sur $T_q(i)$ ne dépend que de celle de K sur le module. Puisque l'action de K sur les éléments $\{m_0, \dots, m_j\}$ et $\{n_0, \dots, n_i\}$ de $T_q(i)$ coïncide avec celle de K respectivement sur les bases de $\Delta_q(j)$ et de $\Delta_q(i)$ données à la proposition 1.4.1, on a

$$Hm_k = (j - 2k)m_k \quad \text{et} \quad Hn_\ell = (i - 2\ell)n_\ell$$

pour $0 \leq k \leq j$ et $0 \leq \ell \leq i$.

Théorème 1.4.16. Pour $d < p - 1$, les $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$ -modules $T_q(i)$ et $P_q(i)$ sont isomorphes.

DÉMONSTRATION. On note $\{m'_0, \dots, m'_j\}$ et $\{n'_0, \dots, n'_i\}$ les bases respectives de $\Delta_q(j)$ et de $\Delta_q(i)$ décrites à la proposition 1.4.1 et $\{m_0, \dots, m_j, n_0, \dots, n_i\}$ la base de $T_q(i)$ de la proposition précédente. Par les définitions de $T_q(i)$ et de $\Delta_q(i)$, le sous-espace de $T_q(i)$ engendré sur \mathbb{C} par $\{m_0, \dots, m_j\}$ est un $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$ -module isomorphe à $\Delta_q(j)$ et $T_q(i)$ quotienté par ce sous-module est isomorphe à $\Delta_q(i)$. On a donc la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \Delta_q(j) \xrightarrow{\iota} T_q(i) \xrightarrow{\pi} \Delta_q(i) \rightarrow 0, \quad (1.4.3)$$

où $\iota(m'_k) = m_k$ pour $0 \leq k \leq j$. Par la proposition 1.4.10, il suffit alors de montrer que cette suite exacte ne scinde pas.

Supposons qu'il existe un morphisme injectif $\tilde{\pi} : \Delta_q(i) \rightarrow T_q(i)$ tel que $\pi \circ \tilde{\pi} = \text{id}_{\Delta_q(i)}$. On pose

$$\tilde{\pi}(n'_0) = \sum_{k=0}^j \mu_k m_k + \sum_{\ell=0}^i \nu_\ell n_\ell, \quad \text{pour certains } \mu_k, \nu_\ell \in \mathbb{C}.$$

Par linéarité de $\tilde{\pi}$,

$$0 = \tilde{\pi}(Hn'_0) - H\tilde{\pi}(n'_0) = i\tilde{\pi}(n'_0) - \left(\sum_{k=0}^j \mu_k Hm_k + \sum_{\ell=0}^i \nu_\ell Hn_\ell \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^j \mu_k (i - (i + 2(p-d-1) - 2k)) m_k + \sum_{\ell=0}^i \nu_\ell (i - (i - 2\ell)) n_\ell \\
&= \sum_{k=0}^j 2\mu_k (k - (p-d-1)) m_k + \sum_{\ell=0}^i 2\ell \nu_\ell n_\ell.
\end{aligned}$$

Donc, $\mu_k = 0$ pour $k \neq p-d-1$ et $\nu_\ell = 0$ pour $\ell \neq 0$, ce qui signifie que $\tilde{\pi}(n'_0) = \mu_{p-d-1} m_{p-d-1} + \nu_0 n_0$. De plus, puisque $En'_0 = 0$,

$$\begin{aligned}
0 &= \tilde{\pi}(En'_0) = E\tilde{\pi}(n'_0) = \mu_{p-d-1} E m_{p-d-1} + \nu_0 E n_0 \\
&= [(c+1)p]_q \nu_{p-d-1} + \nu_0 \gamma_{0,1}(q) m_{p-d-2} = \nu_0 m_{p-d-2},
\end{aligned}$$

car $[(c+1)p]_q$ est nul et $\gamma_{0,1}(q) = 1$ par le lemme 1.4.11. Puisque $d < p-1$, $m_{p-d-2} \neq 0$. Ainsi, $\nu_0 = 0$ et $\tilde{\pi}(n'_0) = \mu_{p-d-1} m_{p-d-1}$. Or, $m_{p-d-1} = \iota(m'_{p-d-1}) \in \text{Ker } \pi$, par l'exactitude de la suite. Alors, $\pi \circ \tilde{\pi}(n'_0) = 0$, ce qui contredit $\pi \circ \tilde{\pi} = \text{id}_{\Delta_q(i)}$. On en conclut que la suite exacte (1.4.3) est non scindée et que $T_q(i) \simeq P_q(i)$. \square

1.4.3. Dualité

La structure des algèbres de Hopf permet de définir la notion de module dual à partir de l'antipode. La dualité dans le cas des modules de l'algèbre $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$ est étudiée dans les prochaines pages.

Pour un $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$ -module M , l'espace dual $M^* = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(M, \mathbb{C})$ a une structure de $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$ -module gauche avec comme action

$$(u \cdot f)(m) = f(S(u)m) \quad \text{pour tout } f \in M^*, m \in M, u \in U,$$

où S est l'antipode décrit à la section 1.3.3. Il s'agit bien d'un $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$ -module gauche, car pour tout $u_1, u_2 \in \mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$, $f \in M^*$ et $m \in M$, on a $(\text{id} \cdot f)(m) = f(S(\text{id})m) = f(m)$ et

$$\begin{aligned}
(u_1 \cdot (u_2 \cdot f))(m) &= (u_2 \cdot f)(S(u_1)m) = f(S(u_2)S(u_1)m) \\
&= f(S(u_1 u_2)m) = ((u_1 u_2) \cdot f)(m).
\end{aligned}$$

Proposition 1.4.17. *Le module $L_q(i)^*$ est isomorphe à $L_q(i)$.*

DÉMONSTRATION. Rappelons que $c, d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ sont tels que $d < p$ et $i = cp + d$. Pour $0 \leq \ell \leq d$ et $0 \leq k \leq c$, on pose

$$\mu_{\ell,k} = (-\rho_c q^{d-\ell-1})^\ell (-\rho_c q^{p+d+1})^{pk} \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad w_{\ell,k} = \mu_{\ell,k} a_{d-\ell, c-k} \in \mathfrak{X}_{d,c},$$

où ρ_c et $a_{\ell,k}$ sont tels que décrits dans la proposition 1.4.4. Comme les facteurs $\mu_{\ell,k}$ sont tous non nuls et $\{a_{\ell,k} \mid 0 \leq \ell \leq d \text{ et } 0 \leq k \leq c\}$ forme une \mathbb{C} -base de $\mathfrak{X}_{d,c} \simeq L_q(i)$, alors $\{w_{\ell,k} \mid 0 \leq \ell \leq d \text{ et } 0 \leq k \leq c\}$ forme également une base du même module. Ainsi, les éléments $w_{\ell,k}^* \in \mathfrak{X}_{d,c}^*$ tels que $w_{\ell,k}^*(w_{\ell',k'}) = \delta_{\ell,\ell'} \delta_{k,k'}$ forment une \mathbb{C} -base de $\mathfrak{X}_{d,c}^* \simeq L_q(i)^*$. Les

facteurs $\mu_{\ell,k}$, quant à eux, sont définis de manière à avoir

$$\frac{\mu_{\ell,k}}{\mu_{\ell-1,k}} = \frac{(-1)^\ell \rho_c^\ell q^{\ell(d-\ell-1)}}{(-1)^{\ell-1} \rho_c^{\ell-1} q^{(\ell-1)(d-\ell)}} = -\rho_c q^{d-2\ell},$$

pour $0 < \ell \leq d$ et

$$\frac{\mu_{\ell,k}}{\mu_{\ell,k-1}} = (-\rho_c q^{p+d+1})^p$$

pour $0 < k \leq c$. Ainsi, pour $0 \leq \ell, \ell' \leq d$ et $0 \leq k, k' \leq c$, l'action des générateurs K, E, F, e et f de $\mathcal{LU}_q \mathfrak{sl}_2$ sur $w_{\ell,k}^*$ est donnée par :

$$\begin{aligned} (K \cdot w_{\ell,k}^*)(w_{\ell',k'}) &= w_{\ell,k}^*(S(K)w_{\ell',k'}) = w_{\ell,k}^*(\mu_{\ell',k'} K^{-1} a_{d-\ell',c-k'}) \\ &= w_{\ell,k}^*(\mu_{\ell',k'} \rho_c q^{d-2\ell'} a_{d-\ell',c-k'}) = w_{\ell,k}^*(\rho_c q^{d-2\ell'} w_{\ell',k'}) \\ &= \delta_{\ell,\ell'} \delta_{k,k'} \rho_c q^{d-2\ell} = \rho_c q^{d-2\ell} w_{\ell,k}^*(w_{\ell',k'}), \\ (E \cdot w_{\ell,k}^*)(w_{\ell',k'}) &= -w_{\ell,k}^*(\mu_{\ell',k'} K^{-1} E a_{d-\ell',c-k'}) \\ &= -w_{\ell,k}^*(\mu_{\ell',k'} [d-\ell']_q [\ell'+1]_q q^{d-2\ell'-2} a_{d-\ell'-1,c-k'}) \\ &= -w_{\ell,k}^*(\mu_{\ell',k'} \mu_{\ell'+1,k'}^{-1} [d-\ell']_q [\ell'+1]_q q^{d-2\ell'-2} w_{\ell'+1,k'}) \\ &= -\delta_{\ell-1,\ell'} \delta_{k,k'} \mu_{\ell-1,k} \mu_{\ell,k}^{-1} [d-\ell+1]_q [\ell]_q q^{d-2\ell} \\ &= \delta_{\ell-1,\ell'} \delta_{k,k'} \rho_c [d-\ell+1]_q [\ell]_q = \rho_c [d-\ell+1]_q [\ell]_q w_{\ell-1,k}^*(w_{\ell',k'}) \end{aligned}$$

si $\ell > 0$, alors que $E \cdot w_{0,k}^* = 0$, et

$$\begin{aligned} (F \cdot w_{\ell,k}^*)(w_{\ell',k'}) &= -w_{\ell,k}^*(\mu_{\ell',k'} F K a_{d-\ell',c-k'}) = -w_{\ell,k}^*(\mu_{\ell',k'} \rho_c q^{2\ell'-d} a_{d-\ell'+1,c-k'}) \\ &= -w_{\ell,k}^*(\mu_{\ell',k'} \mu_{\ell'+1,k'}^{-1} \rho_c q^{2\ell'-d} w_{\ell'+1,k'}) = -\delta_{\ell+1,\ell'} \delta_{k,k'} \mu_{\ell+1,k} \mu_{\ell,k}^{-1} \rho_c q^{2\ell+2-d} \\ &= \delta_{\ell+1,\ell'} \delta_{k,k'} = w_{\ell+1,k}^*(w_{\ell',k'}) \end{aligned}$$

si $\ell < d$, alors que $F \cdot w_{d,k}^* = 0$. Finalement,

$$\begin{aligned} (e \cdot w_{\ell,k}^*)(w_{\ell',k'}) &= (-1)^p q^{(p-1)p} w_{\ell,k}^*(\mu_{\ell',k'} e K^{-p} a_{d-\ell',c-k'}) \\ &= (-1)^p q^{(p-1)p} w_{\ell,k}^*(\mu_{\ell',k'} \rho_c^{-p} q^{p(d-2\ell')}(c-k')(k'+1) a_{d-\ell',c-k'-1}) \\ &= (-1)^p q^{(p-1)p} w_{\ell,k}^*(\mu_{\ell',k'} \mu_{\ell'+1,k'}^{-1} \rho_c^p q^{pd}(c-k')(k'+1) w_{\ell',k'+1}) \\ &= \delta_{\ell,\ell'} \delta_{k-1,k'} (-1)^p q^{p(p+d-1)} \mu_{\ell,k-1} \mu_{\ell,k}^{-1} \rho_c^p (c-k+1) k \\ &= \delta_{\ell,\ell'} \delta_{k-1,k'} k(c-k+1) = k(c-k+1) w_{\ell,k-1}^*(w_{\ell',k'}) \end{aligned}$$

si $k > 0$, alors que $e \cdot w_{\ell,0}^* = 0$, et

$$\begin{aligned} (f \cdot w_{\ell,k}^*)(w_{\ell',k'}) &= (-1)^p q^{p(1-p)} w_{\ell,k}^*(\mu_{\ell',k'} f K^p a_{d-\ell',c-k'}) \\ &= (-1)^p q^{p(1-p)} w_{\ell,k}^*(\mu_{\ell',k'} \rho_c^p q^{p(2\ell'-d)} a_{d-\ell',c-k'+1}) \\ &= (-1)^p q^{p(1-p)} w_{\ell,k}^*(\mu_{\ell',k'} \mu_{\ell',k'-1}^{-1} \rho_c^p q^{pd} w_{\ell',k'-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \delta_{\ell,\ell'} \delta_{k+1,k'} (-1)^p q^{p(1-p+d)} \mu_{\ell,k+1} \mu_{\ell,k}^{-1} \rho_c^p \\
&= \delta_{\ell,\ell'} \delta_{k+1,k'} = w_{\ell,k+1}^* (w_{\ell',k'})
\end{aligned}$$

si $k < c$, alors que $f \cdot w_{\ell,c}^* = 0$. Les calculs ci-haut montrent que l'application $\mathfrak{X}_{d,c} \rightarrow \mathfrak{X}_{d,c}^*$ qui envoie $a_{\ell,k}$ vers $w_{\ell,k}^*$ est un morphisme de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules. Puisque cette application est par définition bijective, $L_q(i) \simeq \mathfrak{X}_{d,c} \simeq \mathfrak{X}_{d,c}^* \simeq L_q(i)^*$. \square

Pour un morphisme de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules $g : M \rightarrow N$, le morphisme dual $g^* : N^* \rightarrow M^*$ est défini par $g^*(h) = h \circ g$ pour tout $h \in N^*$. Il s'agit bien d'un morphisme, puisque pour $u \in \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$, $h \in N^*$ et $m \in M$,

$$\begin{aligned}
(u \cdot (g^*(h)))(m) &= (u \cdot (h \circ g))(m) = (h \circ g)(S(u)m) = h(S(u)g(m)) \\
&= (u \cdot h)(g(m)) = (g^*(u \cdot h))(m).
\end{aligned}$$

On obtient ainsi un foncteur contravariant $*$: $\text{mod } \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2 \rightarrow \text{mod } \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ associant chaque objet $M \in \text{mod } \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ à M^* et chaque morphisme g à g^* . En effet, pour $L, M, N \in \text{mod } \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$, $g : L \rightarrow M$, $h : M \rightarrow N$ et $f \in N^*$, l'identité et l'associativité sont respectées :

$$\text{id}_N^*(f) = f \circ \text{id}_N = f$$

et

$$(g^* \circ h^*)(f) = g^*(f \circ h) = f \circ h \circ g = (h \circ g)^*(f).$$

On démontre quelques propriétés de base de ce foncteur, à commencer par le fait qu'il s'agit bien d'une dualité au sens catégorique du terme.

Proposition 1.4.18. *Le foncteur $*$ est une dualité.*

DÉMONSTRATION. On note $*^2 : \text{mod } \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2 \rightarrow \text{mod } \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ le double dual et \cdot^2 l'action induite par ce foncteur. Le but est de montrer qu'un isomorphisme naturel $\eta : \text{id}_{\text{mod } \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2} \xrightarrow{\sim} *^2$ existe. À tout objet M de $\text{mod } \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ on associe l'application $\eta_M : M \rightarrow M^{*^2}$ définie par $(\eta_M(m))(f) = f(K^{-1}m)$ pour tout $m \in M$ et $f \in M^*$. Il s'agit bien d'un morphisme de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules, car pour $u \in \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$, $M \in \text{mod } \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$, $f \in M^*$ et $m \in M$,

$$\begin{aligned}
(u \cdot^2 \eta_M(m))(f) &= \eta_M(m)(S(u) \cdot f) = (S(u) \cdot f)(K^{-1}m) = f(S^2(u)K^{-1}m) \\
&= f(K^{-1}um) = (\eta_M(um))(f),
\end{aligned}$$

où la première égalité de la seconde ligne vient du fait que $S^2(u) = K^{-1}uK$. Puisque l'isomorphisme d'espaces vectoriels $M \rightarrow M^{*^2}$ et l'action de K^{-1} sur M forment tous deux des applications bijectives, chaque η_M est un isomorphisme de modules. Il ne reste donc qu'à vérifier que la collection des η_M forme une transformation naturelle. Soient $M, N \in \text{mod } \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$

et $g : M \rightarrow N$ un morphisme. Il faut montrer que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\eta_M} & M^{*2} \\ \downarrow g & & \downarrow g^{*2} \\ N & \xrightarrow{\eta_N} & N^{*2} \end{array}$$

commute. Pour tout $m \in M$ et $f \in N^*$,

$$\begin{aligned} (g^{*2}(\eta_M(m)))(f) &= (\eta_M(m) \circ g^*)(f) = \eta_M(m)(f \circ g) = (f \circ g)(K^{-1}m) \\ &= f(K^{-1}g(m)) = (\eta_N(g(m)))(f). \end{aligned}$$

Conséquemment, $g^{*2} \circ \eta_M = \eta_N \circ g$ comme il se doit et la transformation η définie à partir des η_M est un isomorphisme naturel. □

La démonstration du prochain résultat s'inspire de celle du corollaire 2.3 dans [25].

Proposition 1.4.19. *Le foncteur $*$ est exact.*

DÉMONSTRATION. Par un résultat classique de la théorie des catégories, un foncteur entre deux catégories abéliennes est exact à gauche s'il est adjoint à droite et est exact à droite s'il est adjoint à gauche. Ainsi, il suffit de montrer que l'endofoncteur $*$ est auto-adjoint, c'est-à-dire qu'il existe une bijection $\text{Hom}(M^*, N) \rightarrow \text{Hom}(N^*, M)$ naturelle en $M, N \in \text{mod } \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$. Pour de tels M et N , on définit $\eta_{M,N} : \text{Hom}(M^*, N) \rightarrow \text{Hom}(N^*, M)$ tel que pour $h \in \text{Hom}(M^*, N)$, $\eta_{M,N}(h) = \eta_M^{-1} \circ h^*$, où η_M^{-1} est l'inverse de l'isomorphisme construit dans la démonstration précédente : puisque $M^* \xrightarrow{h} N$, alors la composition $N^* \xrightarrow{h^*} M^{*2} \xrightarrow{\eta_M} M$ est bien un élément de $\text{Hom}(N^*, M)$. Comme une dualité est un foncteur plein, dense et fidèle (voir [4], théorème 6.2) et η_M^{-1} est un isomorphisme, chaque $\eta_{M,N}$ est bijectif. Il ne reste donc qu'à montrer que l'application est naturelle en M et en N . Soient $L, M, N \in \text{mod } \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$, $g \in \text{Hom}(M, L)$ et $f \in \text{Hom}(N, L)$. Il faut vérifier que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(M^*, N) & \xrightarrow{\eta_{M,N}} & \text{Hom}(N^*, M) \\ \downarrow \text{Hom}(g^*, N) & & \downarrow \text{Hom}(N^*, g) \\ \text{Hom}(L^*, N) & \xrightarrow{\eta_{L,N}} & \text{Hom}(N^*, L) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \text{Hom}(M^*, N) & \xrightarrow{\eta_{M,N}} & \text{Hom}(N^*, M) \\ \downarrow \text{Hom}(M^*, f) & & \downarrow \text{Hom}(f^*, M) \\ \text{Hom}(M^*, L) & \xrightarrow{\eta_{M,L}} & \text{Hom}(L^*, N) \end{array}$$

commutent, où $\text{Hom}(g^*, N)$ et $\text{Hom}(f^*, M)$ sont respectivement la précomposition par g^* et par f^* , alors que $\text{Hom}(N^*, g)$ et $\text{Hom}(M^*, f)$ sont respectivement la postcomposition par g et par f . Pour $h \in \text{Hom}(M^*, N)$,

$$\eta_{M,L}(\text{Hom}(M^*, f)(h)) = \eta_{M,L}(f \circ h) = \eta_M^{-1} \circ (f \circ h)^* = \eta_M^{-1} \circ h^* \circ f^*$$

$$= \text{Hom}(f^*, M)(\eta_M^{-1} \circ h^*) = \text{Hom}(f^*, M)(\eta_{M,N}(h))$$

où l'égalité $(f \circ h)^* = h^* \circ f^*$ découle de la contravariance du foncteur $*$. De plus, puisque $\eta_L^{-1} \circ g^{*2} = g \circ \eta_M^{-1}$ par la naturalité de l'isomorphisme de la démonstration précédente,

$$\begin{aligned} \eta_{L,N}(\text{Hom}(g^*, N)(h)) &= \eta_{L,N}(h \circ g^*) = \eta_L^{-1}(h \circ g^*)^* = \eta_L^{-1} \circ g^{*2} \circ h^* = g \circ \eta_M^{-1} \circ h^* \\ &= \text{Hom}(N^*, g)(\eta_M^{-1} \circ h^*) = \text{Hom}(N^*, g)(\eta_{M,N}(h)). \end{aligned}$$

Conséquemment, les diagrammes plus haut commutent et $\eta_{M,N}$ est naturel en M et en N . \square

Corollaire 1.4.20. *La suite exacte courte $0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$ dans $\text{mod } \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ est scindée si et seulement si la suite $0 \rightarrow N^* \xrightarrow{g^*} M^* \xrightarrow{f^*} L^* \rightarrow 0$ l'est.*

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que la suite exacte courte $0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$ dans $\text{mod } \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ scinde. Alors, il existe un morphisme $\tilde{f} : M \rightarrow L$ tel que $\tilde{f} \circ f = \text{id}_L$. Conséquemment, pour la suite exacte courte $0 \rightarrow N^* \xrightarrow{g^*} M^* \xrightarrow{f^*} L^* \rightarrow 0$, le morphisme dual $\tilde{f}^* : L^* \rightarrow M^*$ de \tilde{f} est tel que $f^* \circ \tilde{f}^* = (\tilde{f} \circ f)^* = (\text{id}_L)^* = \text{id}_{L^*}$ et cette dernière suite exacte scinde.

Si la suite exacte $0 \rightarrow N^* \xrightarrow{g^*} M^* \xrightarrow{f^*} L^* \rightarrow 0$ scinde, alors par l'argument du dernier paragraphe $0 \rightarrow L^{*2} \xrightarrow{f^{*2}} M^{*2} \xrightarrow{g^{*2}} N^{*2} \rightarrow 0$ scinde également et par l'isomorphisme naturel de la proposition 1.4.18, il en va de même pour $0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$. \square

1.4.4. Structure des modules

Les résultats des sous-sections 1.4.2 et 1.4.3 permettent de construire les diagrammes de Loewy associés aux $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules remarquables et de donner ainsi une meilleure idée de la structure de ces modules.

Pour un entier $\ell \geq 0$, on note par un point d'indice ℓ le module simple $L_q(\ell)$ dans les figures qui suivent. Dans le cas du module $\Delta_q(j)$, la proposition 1.4.2 implique que le diagramme de Loewy pour $i \geq p$ et $d < p - 1$ est celui de la figure 1.1.

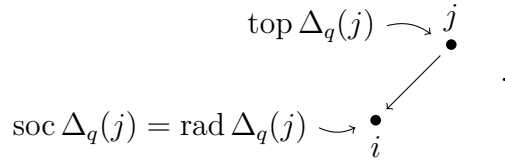


Figure 1.1 – Diagramme de Loewy du module de Weyl $\Delta_q(j)$ lorsque $i \geq p$ et $d < p - 1$.

On définit également le comodule de Weyl comme le dual du module de Weyl. Il s'agit de la dernière famille de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules qualifiés de *remarquables*.

Définition 1.4.21. Quatre familles de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules, chacune paramétrée par le nombre $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ appelé l'indice, sont dites remarquables : le module de Weyl $\Delta_q(i)$ (voir la proposition 1.4.1), le module simple $L_q(i)$ (voir la proposition 1.4.2), le module projectif $P_q(i)$ (voir la proposition 1.4.8) et le comodule de Weyl $\nabla_q(i) = \Delta_q(i)^*$. Pour un indice négatif, on définit ces modules comme étant nuls.

Pour $i < p$ ou $d = p - 1$, $\nabla_q(i) = L_q(i)^* \simeq L_q(i)$. Si $i \geq p$ et $d < p - 1$, le corollaire 1.4.20 implique qu'il existe une suite exacte courte non scindée

$$0 \rightarrow L_q(j) \rightarrow \nabla_q(j) \rightarrow L_q(i) \rightarrow 0, \quad (1.4.4)$$

avec $\text{soc } \nabla_q(j) \simeq L_q(j)$ et $\text{top } \nabla_q(j) \simeq L_q(i)$. Le diagramme de $\nabla_q(j)$ pour ces valeurs de i est alors celui de la figure 1.2.

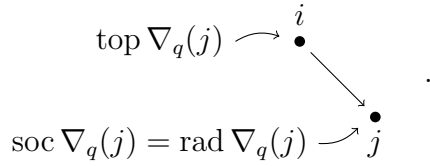


Figure 1.2 – Diagramme de Loewy du comodule de Weyl $\nabla_q(j)$ lorsque $i \geq p$ et $d < p - 1$.

On pose à nouveau $d < p - 1$. L'existence d'une suite exacte non scindée

$$0 \rightarrow \nabla_q(i) \rightarrow P_q(i) \rightarrow \nabla_q(j) \rightarrow 0 \quad (1.4.5)$$

est alors démontrée dans [3]. Si $i < p$, les suites exactes des propositions 1.4.8 et 1.4.2 et le fait que $\Delta_q(i) = L_q(i)$ (ou encore les suites exactes (1.4.5) et (1.4.4) et le fait que $\nabla_q(i) \simeq L_q(i)$) impliquent que $P_q(i)$ a pour diagramme de Loewy celui de la figure 1.3.

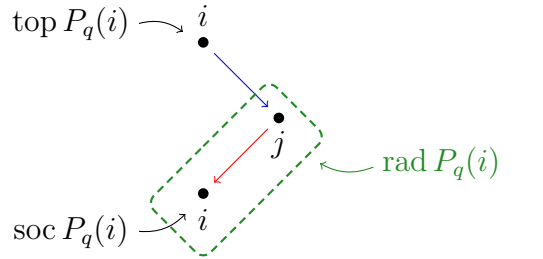


Figure 1.3 – Diagramme de Loewy du module projectif $P_q(i)$ lorsque $i < p$ et $d < p - 1$.

Dans la figure ci-haut, la **flèche bleue** correspond à celle du diagramme de $\nabla_q(j)$ (figure 1.2) et la **flèche rouge** correspond à celle du diagramme de $\Delta_q(j)$ (figure 1.1) . Si $i \geq p$, on pose $i' = (c - 1)p + (p - d - 2) \geq 0$ de manière à ce que $L_q(i')$ soit le socle de $\Delta_q(i)$ et la coiffe

de $\nabla_q(i)$. Alors, par les suites exactes (1.4.5) et (1.4.4) ainsi que celles des propositions 1.4.8 et 1.4.2, le diagramme de Loewy de $P_q(i)$ est donné par la figure 1.4.

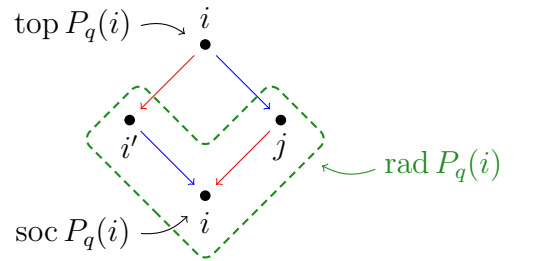


Figure 1.4 – Diagramme de Loewy du module projectif $P_q(i)$ lorsque $i \geq p$ et $d < p - 1$.

Les **flèches bleues** de la figure ci-haut correspondent à celles des diagrammes de Loewy de $\nabla_q(i)$ et $\nabla_q(j)$ et les **flèches rouges** correspondent à celles des diagrammes de Loewy de $\Delta_q(i)$ et $\Delta_q(j)$.

Une conséquence du corrolaire 1.4.20 est que pour un $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -module M , le diagramme de Loewy de M^* est obtenu en renversant toutes les flèches dans celui de M . Or, en renversant chacune des flèches dans le diagramme de Loewy de $P_q(i)$, on obtient le même diagramme. La proposition qui suit découle de ce constat.

Proposition 1.4.22. *Le module $P_q(i)$ est auto-dual pour tout $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$: $P_q(i)^* \simeq P_q(i)$. Ainsi, le module projectif $P_q(i)$ est aussi injectif.*

Chapitre 2

Règles de fusion pour les modules simples et projectifs

Pour une algèbre \mathcal{A} quelconque, le produit tensoriel $M_1 \otimes_{\mathcal{A}} M_2$ est défini lorsque M_1 est un module droit et M_2 , un gauche. En général, ce produit n'est pas un \mathcal{A} -module. L'algèbre $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ est une algèbre de Hopf; son coproduit Δ décrit à la section 1.3.3 permet de définir un produit tensoriel de deux $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules gauches qui est lui-même un module gauche.

Si M_1 et M_2 sont deux modules de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$, $M_1 \otimes_{\mathbb{C}} M_2$ possède naturellement une structure de module de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ avec l'action \mathbb{C} -linéaire

$$(a_1 \otimes a_2)(m_1 \otimes m_2) = a_1 m_1 \otimes a_2 m_2$$

pour $a_1, a_2 \in \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$, $m_1 \in M_1$ et $m_2 \in M_2$. Le coproduit permet dès lors de considérer $M_1 \otimes_{\mathbb{C}} M_2$ comme un $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -module via l'action

$$a \star (m_1 \otimes m_2) = \Delta(a)(m_1 \otimes m_2)$$

pour $a \in \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$, $m_1 \in M_1$ et $m_2 \in M_2$. La notation $M_1 \otimes M_2$ (sans le \mathbb{C} sur le symbole $\otimes_{\mathbb{C}}$) désignera dorénavant ce $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -module. Le produit tensoriel ainsi décrit est associatif. Il est aussi commutatif, au sens où les modules $M_1 \otimes M_2$ et $M_2 \otimes M_1$ sont isomorphes (voir [8] où ces propriétés sont démontrées).

Le reste du mémoire sera consacré à l'étude de ce produit tensoriel sur $\text{mod } \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$. Plus spécifiquement, l'objectif sera de trouver les règles de fusion des modules remarquables décrits à la section 1.4, c'est-à-dire d'exprimer le produit tensoriel de toute paire de modules remarquables comme une somme directe de modules indécomposables.

En s'inspirant du chapitre précédent, on pose pour ce qui suit

$$i_1 = c_1 p + d_1, \quad j_1 = i_1 + 2(p - d_1 - 1),$$

$$i_2 = c_2p + d_2 \quad \text{et} \quad j_2 = i_2 + 2(p - d_2 - 1),$$

avec $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tels que $d_1, d_2 < p$.

Dans le présent chapitre, on s'attarde à la décomposition de quatre produits tensoriels : $L_q(i_1) \otimes L_q(i_2)$, $L_q(i_1) \otimes P_q(i_2)$, $\Delta_q(i_1) \otimes P_q(i_2)$ et $P_q(i_1) \otimes P_q(i_2)$. Les résultats obtenus généraliseront ceux présentés dans [7], où le paramètre q a la forme spécifique de $q = e^{i\pi/p}$.

2.1. Produit tensoriel de deux modules simples

On décompose dans cette section le produit tensoriel de deux modules simples. À la manière de [7], le problème sera d'abord réduit à l'étude de deux cas de base.

2.1.1. Simplification du problème

L'approche consistera à simplifier le problème afin que seule l'étude des cas

$$(A) \quad d_1 = d_2 = 0 \quad \text{et} \quad (B) \quad c_1 = c_2 = 0$$

soit nécessaire pour trouver la décomposition de $L_q(i_1) \otimes L_q(i_2)$. Pour ce faire, la situation $d_1 = c_2 = 0$ est d'abord étudiée.

Lemme 2.1.1. *Si $d_1 = c_2 = 0$, le produit tensoriel de $L_q(i_1)$ et $L_q(i_2)$ est donné par*

$$L_q(c_1p) \otimes L_q(d_2) \simeq L_q(c_1p + d_2).$$

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que $q^{d_2p} = -1$. Par la proposition 1.4.4 et la remarque 1.4.5, il suffit de montrer que $\mathfrak{X}_{d_2, c_1} \simeq \mathfrak{X}'_{0, c_1} \otimes \mathfrak{X}'_{d_2, 0}$. On note $\{a'_{0,0}, a'_{0,1}, \dots, a'_{0, c_1}\}$ la base décrite dans cette dernière remarque pour \mathfrak{X}'_{0, c_1} , $\{\alpha'_{0,0}, \alpha'_{1,0}, \dots, \alpha'_{d_2, 0}\}$ celle pour $\mathfrak{X}'_{d_2, 0}$ et $\{b_{0,0}, \dots, b_{d_2, c_1}\}$ celle pour \mathfrak{X}_{d_2, c_1} . On définit l'application

$$\phi' : \mathfrak{X}'_{0, c_1} \otimes \mathfrak{X}'_{d_2, 0} \rightarrow \mathfrak{X}_{d_2, c_1} \quad \text{telle que} \quad \phi'(a'_{0,k} \otimes \alpha'_{\ell, 0}) = b_{\ell, k}.$$

Cette dernière est naturellement bijective et l'action des éléments E, F, K, e, f de $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$ permet d'obtenir

$$\phi'(\Delta(E)(a'_{0,k} \otimes \alpha'_{\ell, 0})) = \phi'(Ka_{0,k} \otimes E\alpha'_{\ell, 0}) = \rho_{c_1} [\ell]_q [d_2 - \ell + 1]_q \phi'(a_{0,k} \otimes \alpha'_{\ell-1, 0}) = Eb_{\ell, k};$$

$$\phi'(\Delta(F)(a'_{0,k} \otimes \alpha'_{\ell, 0})) = \phi'(a'_{0,k} \otimes F\alpha'_{\ell, 0}) = \phi'(a'_{0,k} \otimes \alpha'_{\ell+1, 0}) = Fb_{\ell, k};$$

$$\phi'(\Delta(K)(a'_{0,k} \otimes \alpha'_{\ell, 0})) = \phi'(Ka'_{0,k} \otimes K\alpha'_{\ell, 0}) = \rho_{c_1} q^{d_2 - 2\ell} \phi'(a'_{0,k} \otimes \alpha'_{\ell, 0}) = Kb_{\ell, k};$$

$$\begin{aligned} \phi'(\Delta(e)(a'_{0,k} \otimes \alpha'_{\ell, 0})) &= \phi'(ea'_{0,k} \otimes K^p \alpha'_{\ell, 0}) = -q^{p(d_2 - 2\ell)} k (c_1 - k + 1) \phi'(a'_{0, k-1} \otimes \alpha'_{\ell, 0}) \\ &= k (c_1 - k + 1) \phi'(a'_{0, k-1} \otimes \alpha'_{\ell, 0}) = eb_{\ell, k}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \phi'(\Delta(f)(a'_{0,k} \otimes \alpha'_{\ell, 0})) &= \phi'(fa'_{0,k} \otimes K^p \alpha'_{\ell, 0}) = -q^{p(d_2 - 2\ell)} \phi'(a'_{0, k+1} \otimes \alpha'_{\ell, 0}) \\ &= \phi'(a'_{0, k+1} \otimes \alpha'_{\ell, 0}) = fb_{\ell, k}; \end{aligned}$$

pour tout $k, \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tels que $k \leq c_1$ et $\ell \leq d_2$. L'ensemble $\{E, F, H, e, f\}$ engendre $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ et donc ϕ' est bien l'isomorphisme souhaité.

Si $q^{d_2 p} = 1$, en notant $\{a_{0,0}, a_{0,1}, \dots, a_{0,c_1}\}$ la base de \mathfrak{X}_{0,c_1} et $\{\alpha_{0,0}, \alpha_{1,0}, \dots, \alpha_{d_2,0}\}$, celle de $\mathfrak{X}_{d_2,0}$, on montre de la même manière que l'application

$$\phi : \mathfrak{X}_{0,c_1} \otimes \mathfrak{X}_{d_2,0} \rightarrow \mathfrak{X}_{d_2,c_1}, \quad \text{telle que} \quad \phi(a_{0,n} \otimes \alpha_{\ell,0}) = b_{\ell,n},$$

est un isomorphisme de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules. La proposition 1.4.4 permet alors de conclure. \square

La proposition suivante, qui n'est pas prouvée ici mais dont la démonstration est effectuée par Pinet, permettra d'obtenir un résultat similaire au lemme précédent lorsque le module simple $L_q(i_2)$ est remplacé par le module projectif $P_q(i_2)$.

Proposition 2.1.2 ([25]). *Soient P et M deux $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules, avec P projectif. Alors, $P \otimes M$ est également un $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -module projectif.*

Lemme 2.1.3. *Si $d_1 = c_2 = 0$, le produit tensoriel de $L_q(i_1)$ et $P_q(i_2)$ est donné par*

$$L_q(c_1 p) \otimes P_q(d_2) \simeq P_q(c_1 p + d_2).$$

DÉMONSTRATION. On note $M = L_q(c_1 p) \otimes P_q(d_2)$, $\{m'_{p-1}, m'_{2p-1}, \dots, m'_{(c_1+1)p-1}\}$ la base de $V_{j_1} \simeq L_q(c_1 p) \subset \Delta_q(j_1)$ définie à la proposition 1.4.3 et $\{m_0, \dots, m_{j_2}, n_0, \dots, n_{d_2}\}$, celle de $T_q(i_2) \simeq P_q(d_2)$ définie à la proposition 1.4.14. Soit $w = m'_{p-1} \otimes m_{p-d_2-1} \in M$; alors $Hw = (c_1 p + d_2)w$. Pour $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, on a

$$\begin{aligned} E^{(n)} \cdot w &= \sum_{\ell=0}^n q^{\ell(n-\ell)} E^{(n-\ell)} K^\ell m'_{p-1} \otimes E^{(\ell)} m_{p-d_2-1} \\ &= K^n m'_{p-1} \otimes E^{(n)} m_{p-d_2-1} \\ &= q^{ni_1} \begin{bmatrix} j_2 - p + d_2 + n + 1 \\ n \end{bmatrix}_q m'_{p-1} \otimes m_{p-d_2-n-1}. \end{aligned}$$

Si $n \geq p - d_2$, alors $m_{p-d_2-n-1} = 0$. Si $n < p - d_2$, alors $0 \leq n - 1 < p - 1$ et puisque $j_2 = 2p - d_2 - 2$,

$$\begin{bmatrix} j_2 - p + d_2 - n + 1 \\ n \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} p + (n - 1) \\ n \end{bmatrix}_q = 0,$$

par la proposition 1.1.1. De ce fait, w est un vecteur de plus haut poids $c_1 p + d_2$. Le prochain but est de montrer que $\langle w \rangle \simeq L_q(c_1 p + d_2)$, où $\langle w \rangle$ est le sous-module engendré par w . Pour ce faire, on prouve d'abord que $\dim \langle w \rangle \leq \dim L_q(c_1 p + d_2)$. Les éléments $K, E^{(p)}$ et E de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ agissent tous diagonalement sur w . De plus, quelle que soit la racine de l'unité q , les éléments $\begin{bmatrix} K; 0 \\ p \end{bmatrix}_t$ sont des polynômes en K à coefficients dans \mathbb{Q}^\times . Ainsi, de l'action diagonale de K sur w découle une action diagonale de $\begin{bmatrix} K; 0 \\ p \end{bmatrix}_t$ sur w . La base de Poincaré–Birkhoff–Witt de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ établie à la section 1.3.2 permet alors de déduire que $\langle w \rangle$ est engendré sur \mathbb{C} par

l'ensemble

$$\{w_{n_1p+n_2} = \Delta \left((F^{(p)})^{n_1} (F)^{n_2} \right) w \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, n_2 < p\}.$$

Soit $n = n_1p + n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ avec $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et $n_2 < p$. Alors,

$$\begin{aligned} (F^{(p)})^{n_1} F^{n_2} &\stackrel{1}{=} \left(\prod_{a=1}^{n_1} \begin{bmatrix} ap \\ p \end{bmatrix}_q F^{(n_1p)} \right) [n_2]_q! F^{(n_2)} \\ &\stackrel{2}{=} [n_2]_q! \left(\prod_{a=1}^{n_1} \begin{bmatrix} ap \\ p \end{bmatrix}_q F^{(n_1p)} \right) \begin{bmatrix} n_1p + n_2 \\ n_1p \end{bmatrix}_q F^{(n)} \\ &\stackrel{3}{=} [n_2]_q! \left(\prod_{a=1}^{n_1} q^{p^2(1-a)} a \right) q^{-n_1n_2p} F^{(n)} \\ &= [n_2]_q! n_1! \left(q^{\sum_{a=1}^{n_1} p^2(1-a)} \right) q^{-n_1n_2p} F^{(n)} \\ &= [n_2]_q! n_1! q^{\frac{1}{2}p^2n_1(1-n_1)} q^{-n_1n_2p} F^{(n)}, \end{aligned}$$

où les égalités 1 et 2 sont obtenues en utilisant la relation (7) de la section 1.2.1 et l'égalité 3 découle de la proposition 1.1.1. Soit $\sigma_n = \frac{1}{n_1! [n_2]_q!} q^{\frac{1}{2}p^2n_1(n_1-1) + p n_1 n_2} \neq 0$, qui est bien défini puisque $n_2 < p$. Par le calcul précédent,

$$\begin{aligned} \sigma_n w_n &= F^{(n)} \cdot w \\ &= \sum_{\ell=0}^n q^{-\ell(n-\ell)} F^{(\ell)} m'_{p-1} \otimes K^{-\ell} F^{(n-\ell)} m_{p-d_2-1} \\ &= \sum_{\ell=0}^n q^{-\ell(n-\ell)} \begin{bmatrix} p-1+\ell \\ \ell \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} p-d_2+n-\ell-1 \\ n-\ell \end{bmatrix}_q m'_{p-1+\ell} \otimes K^{-\ell} m_{p-d_2+n-\ell-1}. \end{aligned}$$

Dans la somme ci-haut, pour que $m'_{p-1+\ell}$ ne soit pas nul, il faut avoir $\ell = ap$ pour un entier a tel que $0 \leq a \leq c_1$. Or, pour que $m_{p-d_2+n-\ell-1}$ ne soit pas nul, il faut avoir $p-d_2+n-\ell-1 \leq j_2 = 2p-d_2-2$, c'est-à-dire $\ell \geq n-p+1$, et donc

$$(n_1-1)p < (n_1-1)p + (n_2+1) = n-p+1 \leq \ell \leq n = n_1p + n_2 < (n_1+1)p.$$

On en déduit que $\ell = ap = n_1p$ et conséquemment, la condition $0 \leq n_1 \leq c_1$ est requise pour que la somme ne soit pas nulle. De plus, si $n_2 > d_2$, l'égalité $\ell = n_1p$ implique que

$$\begin{bmatrix} p-d_2+n-\ell-1 \\ n-\ell \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} p+(n_2-d_2-1) \\ n_2 \end{bmatrix}_q = 0,$$

à nouveau par la proposition 1.1.1. Ainsi, l'ensemble $\{w_{n_1p+n_2} \mid 0 \leq n_1 \leq c_1 \text{ et } 0 \leq n_2 \leq d_2\}$ engendre $\langle w \rangle$ sur \mathbb{C} et $\dim \langle w \rangle \leq (c_1+1)(d_2+1) = \dim L_q(c_1p+d_2)$. Par la proposition 1.4.7, la coiffe du module $\langle w \rangle$ contient au moins une copie de $L_q(c_1p+d_2)$, ce qui laisse comme seule possibilité $\langle w \rangle \simeq L_q(c_1p+d_2)$.

Le produit tensoriel M contient alors un sous-module isomorphe à $L_q(c_1p+d_2)$. De plus, M est projectif, par la proposition 2.1.2. La proposition 1.4.8 et le diagramme de Loewy des

modules projectifs (figures 1.3 et 1.4) impliquent donc que le sommant direct de M contenant $L_q(c_1p + d_2)$ ne peut être que $P_q(c_1p + d_2)$. Or,

$$\begin{aligned} \dim M &= (\dim L_q(c_1p))(\dim P_q(d_2)) \\ &= \begin{cases} 2(c_1 + 1)p & \text{si } d_2 < p - 1; \\ (c_1 + 1)p & \text{si } d_2 = p - 1; \end{cases} \\ &= \dim P_q(c_1p + d_2), \end{aligned}$$

d'où $M \simeq P_q(c_1p + d_2)$. □

Par le lemme 2.1.1 et la commutativité du produit tensoriel,

$$L_q(i_1) \otimes L_q(i_2) \simeq (L_q(c_1p) \otimes L_q(c_2p)) \otimes (L_q(d_1) \otimes L_q(d_2)),$$

où la première parenthèse de l'expression du côté droit correspond au cas de base (A) et la seconde, au cas (B). En exprimant $L_q(c_1p) \otimes L_q(c_2p)$ et $L_q(d_1) \otimes L_q(d_2)$ comme sommes directes de modules simples et projectifs, les lemmes 2.1.1 et 2.1.3 permettront dès lors de réassembler le côté droit de la dernière équation afin trouver la décomposition souhaitée.

2.1.2. Les cas de base

On procède à l'étude des cas de base afin de déterminer la règle de fusion de deux modules simples d'indices quelconques. Le cas (A) est d'abord résolu dans la proposition suivante.

Proposition 2.1.4. *Si $d_1 = d_2 = 0$, le produit tensoriel de $L_q(i_1)$ et $L_q(i_2)$ est donné par :*

$$L_q(c_1p) \otimes L_q(c_2p) \simeq \bigoplus'_{c=|c_1-c_2|}^{c_1+c_2} L_q(cp),$$

où, pour k et ℓ des entiers de même parité, la somme \bigoplus' de k à ℓ est définie par

$$\bigoplus'_{a=k}^{\ell} f(a) = \begin{cases} f(k) \oplus f(k+2) \oplus \cdots \oplus f(\ell) & \text{si } k \leq \ell; \\ 0 & \text{si } k > \ell. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. On utilise les bases de \mathfrak{X}_{0,c_1} et de \mathfrak{X}_{0,c_2} données respectivement par $\{a_{0,0}, a_{0,1}, \dots, a_{0,c_1}\}$ et $\{\alpha_{0,0}, \alpha_{0,1}, \dots, \alpha_{0,c_2}\}$. L'action de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ sur le produit tensoriel de ces modules est donnée par

$$\Delta(E)(a_{0,k_1} \otimes \alpha_{0,k_2}) = 0;$$

$$\Delta(F)(a_{0,k_1} \otimes \alpha_{0,k_2}) = 0;$$

$$\Delta(K)(a_{0,k_1} \otimes \alpha_{0,k_2}) = \rho_{c_1} \rho_{c_2} a_{0,b} \otimes \alpha_{0,k_2};$$

$$\begin{aligned} \Delta(e)(a_{0,k_1} \otimes \alpha_{0,k_2}) &= a_{0,k_1} \otimes e\alpha_{0,k_2} + ea_{0,k_1} \otimes K^p \alpha_{0,k_2} \\ &= k_2(c_2 - k_2 + 1)a_{0,k_1} \otimes \alpha_{0,k_2-1} + \rho_{c_2}^p k_1(c_1 - k_1 + 1)a_{0,k_1-1} \otimes \alpha_{0,k_2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta(f)(a_{0,k_1} \otimes \alpha_{0,k_2}) &= a_{0,k_1} \otimes f\alpha_{0,k_2} + fa_{0,k_1} \otimes K^p \alpha_{0,k_2} \\ &= a_{0,k_1} \otimes \alpha_{0,k_2+1} + \rho_{c_2}^p a_{0,k_1+1} \otimes \alpha_{0,k_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \Delta(h)(a_{0,k_1} \otimes \alpha_{0,k_2}) &= \Delta(ef - fe)(a_{0,k_1} \otimes \alpha_{0,k_2}) \\ &= \Delta(e)(a_{0,k_1} \otimes \alpha_{0,k_2+1} + \rho_{c_2}^p a_{0,k_1+1} \otimes \alpha_{0,k_2}) \\ &\quad - \Delta(f)(k_2(c_2 - k_2 + 1)a_{0,k_1} \otimes \alpha_{0,k_2-1} + \rho_{c_2}^p k_1(c_1 - k_1 + 1)a_{0,k_1-1} \otimes \alpha_{0,k_2}) \\ &= (k_2 + 1)(c_2 - k_2)a_{0,k_1} \otimes \alpha_{0,k_2} + \rho_{c_2}^p k_1(c_1 - k_1 + 1)a_{0,k_1-1} \otimes \alpha_{0,k_2+1} \\ &\quad + \rho_{c_2}^p k_2(c_2 - k_2 + 1)a_{0,k_1+1} \otimes \alpha_{0,k_2-1} + (k_1 + 1)(c_1 - k_1)a_{0,k_1} \otimes \alpha_{0,k_2} \\ &\quad - k_2(c_2 - k_2 + 1)(a_{0,k_1} \otimes \alpha_{0,k_2} + \rho_{c_2}^p a_{0,k_1+1} \otimes \alpha_{0,k_2-1}) \\ &\quad - k_1(c_1 - k_1 + 1)(\rho_{c_2}^p a_{0,k_1-1} \otimes \alpha_{0,k_2+1} + a_{0,k_1} \otimes \alpha_{0,k_2}) \\ &= (c_1 - 2k_1 + c_2 - 2k_2)a_{0,k_1} \otimes \alpha_{0,k_2} \\ &= ha_{0,k_1} \otimes \alpha_{0,k_2} + a_{0,k_1} \otimes h\alpha_{0,k_2}. \end{aligned}$$

Les générateurs E, F et K agissent donc trivialement sur le produit $\mathfrak{X}_{0,c_1} \otimes \mathfrak{X}_{0,c_2}$, alors que l'action des e, f et h coïncide avec celle des générateurs usuels de \mathfrak{sl}_2 sur un produit tensoriel de \mathfrak{sl}_2 -modules. Il suit que le produit tensoriel des $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules \mathfrak{X}_{0,c_1} et \mathfrak{X}_{0,c_2} se décompose de la manière usuelle comme celui de \mathfrak{sl}_2 -modules :

$$\mathfrak{X}_{0,c_1} \otimes \mathfrak{X}_{0,c_2} \simeq \bigoplus'_{c=|c_1-c_2|}^{c_1+c_2} \mathfrak{X}_{0,c} \simeq \bigoplus'_{c=|c_1-c_2|}^{c_1+c_2} L_q(cp).$$

□

On s'attarde maintenant au cas (B). Pour ce faire, les règles de fusion obtenues dans [25] lorsque $i_2 = 1$ sont utilisées.

Proposition 2.1.5 ([25]). *Si $i_2 = 1$, le produit tensoriel de $L_q(i_1)$ et $L_q(i_2)$ est donné par*

$$L_q(i_1) \otimes L_q(1) \simeq \begin{cases} L_q(i_1 + 1) & \text{si } d_1 = 0; \\ L_q(i_1 - 1) \oplus L_q(i_1 + 1) & \text{si } 0 < d_1 < p - 1; \\ P_q(i_1 - 1) & \text{si } d_1 = p - 1. \end{cases}$$

Proposition 2.1.6 ([25]). *Si $d_1 < p - 1$ et $i_2 = 1$, le produit tensoriel de $L_q(i_1)$ et $P_q(i_2)$ est donné par*

$$P_q(i_1) \otimes L_q(1) \simeq (1 + \delta_{d_1, p-2})P_q(i_1 + 1) \oplus (1 - \delta_{c_1, 0}\delta_{d_1, 0})P_q(i_1 - 1) \oplus \delta_{d_1, 0}P_q(i_1 + 2p - 1).$$

La résolution du cas (B) peut dès lors être faite inductivement, d'abord pour $d_2 = p - 1$, puis dans le cas général.

Lemme 2.1.7. *Si $d_1 = p - 1$ et $c_2 = 0$, le produit tensoriel de $L_q(i_1)$ et $L_q(i_2)$ est donné par*

$$L_q(i_1) \otimes L_q(d_2) \simeq \bigoplus'_{i=i_1-d_2}^{i_1-\{d_2\}_2} P_q(i),$$

où pour un entier x ,

$$\{x\}_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est pair;} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. La démonstration est faite par induction sur d_2 . Les cas de base sont donnés par $L_q(i_1) \otimes L_q(0) \simeq L_q(i_1) \simeq P_q(i_1)$ et $L_q(i_1) \otimes L_q(1) \simeq P_q(i_1 - 1)$, la dernière équivalence découlant de la proposition 2.1.5. Le lemme est ainsi démontré lorsque $p = 2$. Soient maintenant $p > 2$ et $2 \leq d_2 \leq p - 1$. Supposons l'énoncé vrai pour $d_2 - 1$ et $d_2 - 2$. Alors,

$$\begin{aligned} L_q(i_1) \otimes (L_q(d_2 - 1) \otimes L_q(1)) &\simeq L_q(i_1) \otimes (L_q(d_2 - 2) \oplus L_q(d_2)) \\ &\simeq \begin{cases} P_q(i_1 - d_2 + 2) \oplus P_q(i_1 - d_2 + 4) \oplus \cdots \oplus P_q(i_1) \oplus L_q(i_1) \otimes L_q(d_2) & \text{si } \{d_2\}_2 = 0; \\ P_q(i_1 - d_2 + 2) \oplus P_q(i_1 - d_2 + 4) \oplus \cdots \oplus P_q(i_1 - 1) \oplus L_q(i_1) \otimes L_q(d_2) & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Également,

$$\begin{aligned} (L_q(i_1) \otimes L_q(d_2 - 1)) \otimes L_q(1) \\ &\simeq \begin{cases} (P_q(i_1 - d_2 + 1) \oplus P_q(i_1 - d_2 + 3) \oplus \cdots \oplus P_q(i_1 - 1)) \otimes L_q(1) & \text{si } \{d_2\}_2 = 0; \\ (P_q(i_1 - d_2 + 1) \oplus P_q(i_1 - d_2 + 3) \oplus \cdots \oplus P_q(i_1)) \otimes L_q(1) & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Or, si $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ est tel que $\ell \leq d_2 - 3$, on obtient $i_1 - d_2 + 1 + \ell = c_1p + (p - d_2 + \ell)$ avec

$$1 = p - (p - 1) \leq p - d_2 + \ell \leq (p - d_2) + (d_2 - 3) = p - 3.$$

Pour ainsi dire, $i_1 - d_2 + 1, i_1 - d_2 + 2, \dots, i_1 - 2$ peuvent tous être écrits sous la forme $cp + d$ avec $1 \leq d \leq p - 3$, alors que $d = p - 2$ pour $i_1 - 1$ et $d = p - 1$ pour i_1 . De ce fait, la

proposition 2.1.6 implique que

$$(L_q(i_1) \otimes L_q(d_2 - 1)) \otimes L_q(1) \simeq \begin{cases} P_q(i_1 - d_2) \oplus 2P_q(i_1 - d_2 + 2) \oplus 2P_q(i_1 - d_2 + 4) \oplus \cdots \oplus 2P_q(i_1) & \text{si } \{d_2\}_2 = 0; \\ P_q(i_1 - d_2) \oplus 2P_q(i_1 - d_2 + 2) \oplus 2P_q(i_1 - d_2 + 4) \oplus \cdots \oplus 2P_q(i_1 - 1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par comparaison des expressions équivalentes obtenues pour $L_q(i_1) \otimes (L_q(d_2 - 1) \otimes L_q(1))$ et pour $(L_q(i_1) \otimes L_q(d_2 - 1)) \otimes L_q(1)$, le produit $L_q(i_1) \otimes L_q(d_2)$ a la forme souhaitée. \square

Proposition 2.1.8. *Si $c_1 = c_2 = 0$, le produit tensoriel de $L_q(i_1)$ et $L_q(i_2)$ est donné par*

$$L_q(d_1) \otimes L_q(d_2) \simeq \bigoplus'_{d=|d_1-d_2|}^{\min(d_1+d_2, 2p-d_1-d_2-4)} L_q(d) \oplus \bigoplus'_{d=2p-d_1-d_2-2}^{p-1-\{d_1+d_2+p+1\}_2} P_q(d) \quad (2.1.1)$$

DÉMONSTRATION. Pour $d_1 = 0$,

$$\bigoplus'_{d=|d_1-d_2|}^{\min(d_1+d_2, 2p-d_1-d_2-4)} L_q(d) \oplus \bigoplus'_{d=2p-d_1-d_2-2}^{p-1-\{d_1+d_2+p+1\}_2} P_q(d) = L_q(d_2) \simeq L_q(0) \otimes L_q(d_2)$$

et pour $d_1 = 1$, le côté droit de (2.1.1) correspond à $L_q(1) \otimes L_q(d_2)$, par la proposition 2.1.5. L'équivalence est donc vérifiée lorsque $d_1 = 0$ ou $d_1 = 1$, et de même lorsque $d_2 = 0$ ou $d_2 = 1$. Ainsi, le cas $p = 2$ est démontré. De plus, si $d_1 = p - 1$, le résultat correspond au lemme 2.1.7 en prenant $c_1 = 0$ et similairement si $d_2 = p - 1$. Soient donc $p > 2$ et $d_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ tels que $d_1 \leq p - 2$. Sans perte de généralité, la preuve se fait par induction sur tous les $d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tels que $d_2 \leq d_1$. Soit $d_2 \in \mathbb{Z}$ tel que $2 \leq d_2 \leq d_1$. Supposons la proposition vraie pour $d_2 - 1$ et $d_2 - 2$. Alors,

$$\begin{aligned} L_q(d_1) \otimes (L_q(d_2 - 1) \otimes L_q(1)) &\simeq L_q(d_1) \otimes L_q(d_2 - 2) \oplus L_q(d_1) \otimes L_q(d_2) \\ &\simeq L_1 \oplus P_1 \oplus L_q(d_1) \otimes L_q(d_2) \end{aligned}$$

pour

$$\begin{aligned} L_1 &= \bigoplus'_{d=d_1-d_2+2}^{\min(d_1+d_2-2, 2p-d_1-d_2-2)} L_q(d) \\ &= \begin{cases} L_q(d_1 - d_2 + 2) \oplus L_q(d_1 - d_2 + 4) \oplus \cdots \oplus L_q(2p - d_1 - d_2 - 2) & \text{si } d_1 + d_2 \geq p + 1; \\ L_q(d_1 - d_2 + 2) \oplus L_q(d_1 - d_2 + 4) \oplus \cdots \oplus L_q(d_1 + d_2 - 2) & \text{si } d_1 + d_2 \leq p; \end{cases} \end{aligned}$$

et

$$P_1 = \bigoplus'_{d=2p-d_1-d_2}^{p-1-\{p+d_1+d_2+1\}_2} P_q(d)$$

$$= \begin{cases} P_q(2p - d_1 - d_2) \oplus P_q(2p - d_1 - d_2 + 2) \oplus \cdots \oplus P_q(p - 1) \\ \quad \text{si } d_1 + d_2 \geq p + 1 \text{ et } \{d_1 + d_2 + p + 1\}_2 = 0; \\ P_q(2p - d_1 - d_2) \oplus P_q(2p - d_1 - d_2 + 2) \oplus \cdots \oplus P_q(p - 2) \\ \quad \text{si } d_1 + d_2 \geq p + 2 \text{ et } \{d_1 + d_2 + p + 1\}_2 = 1; \\ 0 \quad \text{si } d_1 + d_2 \leq p. \end{cases}$$

De surcroît,

$$(L_q(d_1) \otimes L_q(d_2 - 1)) \otimes L_q(1) \simeq L_2 \oplus P_2$$

pour

$$\begin{aligned} L_2 &= \left(\bigoplus'_{d=d_1-d_2+1}^{\min(d_1+d_2-1, 2p-d_1-d_2-3)} L_q(d) \right) \otimes L_q(1) \\ &= \begin{cases} (L_q(d_1 - d_2 + 1) \oplus L_q(d_1 - d_2 + 3) \oplus \cdots \oplus L_q(2p - d_1 - d_2 - 3)) \otimes L_q(1) \\ \quad \text{si } d_1 + d_2 \geq p; \\ (L_q(d_1 - d_2 + 1) \oplus L_q(d_1 - d_2 + 3) \oplus \cdots \oplus L_q(d_1 + d_2 - 1)) \otimes L_q(1) \\ \quad \text{si } d_1 + d_2 \leq p - 1; \end{cases} \\ &\simeq \begin{cases} L_q(d_1 - d_2) \oplus 2(L_q(d_1 - d_2 + 2) \oplus \cdots \oplus L_q(2p - d_1 - d_2 - 4)) \oplus L_q(2p - d_1 - d_2 - 2) \\ \quad \text{si } d_1 + d_2 \geq p; \\ L_q(d_1 - d_2) \oplus 2(L_q(d_1 - d_2 + 2) \oplus \cdots \oplus L_q(d_1 + d_2 - 2)) \oplus L_q(d_1 + d_2) \\ \quad \text{si } d_1 + d_2 \leq p - 1; \end{cases} \\ \text{et } P_2 &= \left(\bigoplus'_{d=2p-d_1-d_2-1}^{p-1-\{d_1+d_2+p\}_2} P_q(d) \right) \otimes L_q(1) \\ &= \begin{cases} (P_q(2p - d_1 - d_2 - 1) \oplus P_q(2p - d_1 - d_2 + 1) \oplus \cdots \oplus P_q(p - 2)) \otimes L_q(1) \\ \quad \text{si } d_1 + d_2 \geq p + 1 \text{ et } \{d_1 + d_2 + p + 1\}_2 = 0; \\ (P_q(2p - d_1 - d_2 - 1) \oplus P_q(2p - d_1 - d_2 + 1) \oplus \cdots \oplus P_q(p - 1)) \otimes L_q(1) \\ \quad \text{si } d_1 + d_2 \geq p \text{ et } \{d_1 + d_2 + p + 1\}_2 = 1; \\ 0 \quad \text{si } d_1 + d_2 \leq p - 1; \end{cases} \end{aligned}$$

$$\simeq \begin{cases} P_q(2p - d_1 - d_2 - 2) \oplus 2(P_q(2p - d_1 - d_2) \oplus \cdots \oplus P_q(p - 1)) \\ \quad \text{si } d_1 + d_2 \geq p + 1 \text{ et } \{d_1 + d_2 + p + 1\}_2 = 0 \\ P_q(p - 2); \\ \quad \text{si } d_1 + d_2 = p \text{ et } \{d_1 + d_2 + p + 1\}_2 = 1; \\ P_q(2p - d_1 - d_2 - 2) \oplus 2(P_q(2p - d_1 - d_2) \oplus \cdots \oplus P_q(p - 2)) \\ \quad \text{si } d_1 + d_2 \geq p + 2 \text{ et } \{d_1 + d_2 + p + 1\}_2 = 1; \\ 0 \quad \text{si } d_1 + d_2 \leq p. \end{cases}$$

En prenant les sommants directs de L_2 et P_2 , desquels on retranche ceux de L_1 et de P_1 , on obtient comme valeur de $L_q(d_1) \otimes L_q(d_2)$

$$\begin{cases} L_q(d_1 - d_2) \oplus L_q(d_1 - d_2 + 2) \oplus \cdots \oplus L_q(2p - d_1 - d_2 - 4) \\ \oplus P_q(2p - d_1 - d_2 - 2) \oplus \cdots \oplus P_q(p - 1) \\ \quad \text{si } d_1 + d_2 \geq p + 1 \text{ et } \{d_1 + d_2 + p + 1\}_2 = 0; \\ L_q(d_1 - d_2) \oplus L_q(d_1 - d_2 + 2) \oplus \cdots \oplus L_q(2p - d_1 - d_2 - 4) \\ \oplus P_q(2p - d_1 - d_2 - 2) \oplus \cdots \oplus P_q(p - 2) \\ \quad \text{si } d_1 + d_2 \geq p + 2 \text{ et } \{d_1 + d_2 + p + 1\}_2 = 1; \\ L_q(d_1 - d_2) \oplus L_q(d_1 - d_2 + 2) \oplus \cdots \oplus L_q(p - 4) \oplus P_q(p - 2) \\ \quad \text{si } d_1 + d_2 = p; \\ L_q(d_1 - d_2) \oplus L_q(d_1 - d_2 + 2) \oplus \cdots \oplus L_q(p - 3) \oplus P_q(p - 1) \\ \quad \text{si } d_1 + d_2 = p - 1; \\ L_q(d_1 - d_2) \oplus L_q(d_1 - d_2 + 2) \oplus \cdots \oplus L_q(d_1 + d_2) \\ \quad \text{si } d_1 + d_2 \leq p - 2. \end{cases}$$

Cette dernière expression correspond précisément au côté droit de (2.1.1). \square

La décomposition du produit tensoriel de deux modules simples dans le cas général découle directement de ces derniers résultats.

Théorème 2.1.9. *Pour $i_1, i_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ quelconques,*

$$L_q(i_1) \otimes L_q(i_2) \simeq \bigoplus'_{c=|c_1-c_2|}^{c_1+c_2} \left(\bigoplus'_{d=|d_1-d_2|}^{\min(d_1+d_2, 2p-d_1-d_2-4)} L_q(cp + d) \oplus \bigoplus'_{d=2p-d_1-d_2-2}^{p-1-\{d_1+d_2+p+1\}_2} P_q(cp + d) \right).$$

DÉMONSTRATION. La commutativité et l'associativité du produit tensoriel permettent d'obtenir

$$\begin{aligned}
& L_q(c_1p + d_1) \otimes L_q(c_2p + d_2) \\
& \simeq (L_q(c_1p) \otimes L_q(c_2p)) \otimes (L_q(d_1) \otimes L_q(d_2)), \\
& \text{par le lemme 2.1.1;} \\
& \simeq \left(\bigoplus'_{c=|c_1-c_2|}^{c_1+c_2} L_q(cp) \right) \otimes \left(\bigoplus'_{d=|d_1-d_2|}^{\min(d_1+d_2, 2p-d_1-d_2-4)} L_q(d) \oplus \bigoplus'_{d=2p-d_1-d_2-2}^{p-1-\{d_1+d_2+p+1\}_2} P_q(d) \right), \\
& \text{par les propositions 2.1.4 et 2.1.8;} \\
& \simeq \bigoplus'_{c=|c_1-c_2|}^{c_1+c_2} \left(\bigoplus'_{d=|d_1-d_2|}^{\min(d_1+d_2, 2p-d_1-d_2-4)} L_q(cp+d) \oplus \bigoplus'_{d=2p-d_1-d_2-2}^{p-1-\{d_1+d_2+p+1\}_2} P_q(cp+d) \right), \\
& \text{par les lemmes 2.1.1 et 2.1.3.}
\end{aligned}$$

□

2.2. Produits tensoriels avec un module projectif

L'étude du produit tensoriel d'un module projectif avec un autre $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -module est facilitée par la proposition 2.1.2, stipulant que le résultat sera un module projectif. Cette propriété sera utilisée de pair avec les suites exactes courtes données à la section 1.4 afin de déterminer la forme des produits tensoriels $L_q(i_1) \otimes P_q(i_2)$, $\Delta_q(i_1) \otimes P_q(i_2)$, puis $P_q(i_1) \otimes P_q(i_2)$. Deux lemmes seront d'abord nécessaires.

Lemme 2.2.1. *Soient \mathbb{K} un corps et \mathcal{A} une \mathbb{K} -algèbre. Soient M, N, P des \mathcal{A} -modules avec P projectif et $g : M \rightarrow N \oplus P$ une surjection. Alors, il existe un \mathcal{A} -module M' tel que $M \simeq M' \oplus P$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\pi_P : N \oplus P \rightarrow P$ la projection naturelle. La composition $\pi_P \circ g$ est alors surjective. On considère les morphismes du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
& & P \\
& & \downarrow \text{id}_P \\
M & \xrightarrow{\pi_P \circ g} & P \longrightarrow 0.
\end{array}$$

Comme P est projectif, il existe un morphisme $f : P \rightarrow M$ tel que $\text{id}_P = \pi_P \circ g \circ f$. Ainsi, la fonction f est injective (car elle possède un inverse à gauche) et la suite exacte

$$0 \rightarrow P \xrightarrow{f} M \rightarrow \text{coker } f \rightarrow 0$$

scinde. En posant $M' = \text{coker } f$, on obtient $M \simeq M' \oplus P$ tel que souhaité. \square

Remarque 2.2.2. Si M est un module gauche d'une algèbre \mathcal{A} sur \mathbb{K} , le foncteur $- \otimes_{\mathcal{A}} M$ n'est habituellement pas exact sur la catégorie des \mathcal{A} -modules droits. Il en va de même pour le foncteur $M \otimes_{\mathcal{A}} -$ sur la catégorie des \mathcal{A} -modules gauches lorsque M est un module droit. Cependant, le produit tensoriel défini à l'aide du coproduit Δ l'est, comme le montre le prochain résultat.

Lemme 2.2.3. Soit M un $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -module. Les endofoncteurs $- \otimes M$ et $M \otimes -$ de $\text{mod } \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$, définis de la manière usuelle, sont exacts.

DÉMONSTRATION. La vérification des propriétés fonctorielles de $- \otimes M$ et de $M \otimes -$ est directe. L'exactitude sera démontrée pour $- \otimes M$ et celle de $M \otimes -$ découlera alors de la commutativité (au sens défini plus tôt) du produit tensoriel. Supposons donc que la suite de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules de dimension finie

$$N \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} Q \quad (2.2.1)$$

soit exacte. Montrons que

$$N \otimes M \xrightarrow{f \otimes \text{id}_M} P \otimes M \xrightarrow{g \otimes \text{id}_M} Q \otimes M \quad (2.2.2)$$

l'est également. Si $n \in N$ et $m \in M$, alors

$$(g \otimes \text{id}_M)(f \otimes \text{id}_M)(n \otimes m) = g \circ f(n) \otimes m = 0,$$

par l'exactitude de (2.2.1). Ainsi, $\text{Im}(f \otimes \text{id}_M) \subset \text{Ker}(g \otimes \text{id}_M)$. Pour montrer l'inclusion inverse, on considère le sous-module $P \otimes M$ comme espace vectoriel sur \mathbb{C} , noté $P \otimes_{\mathbb{C}} M$. En choisissant des bases $\{p_k \mid 1 \leq k \leq \pi\}$ de P et $\{m_\ell \mid 1 \leq \ell \leq \mu\}$ de M pour certains $\pi, \mu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, tout élément x de $\text{Ker}(g \otimes \text{id}_M)$ peut être écrit sous la forme

$$x = \sum_{k=1}^{\pi} b_{k,1} p_k \otimes_{\mathbb{C}} m_1 + \sum_{k=1}^{\pi} b_{k,2} p_k \otimes_{\mathbb{C}} m_2 + \cdots + \sum_{k=1}^{\pi} b_{k,\mu} p_k \otimes_{\mathbb{C}} m_\mu,$$

pour certains $b_{k,\ell} \in \mathbb{C}$, de manière à ce que l'action de $g \otimes \text{id}_M$ donne

$$(g \otimes \text{id}_M)(x) = g \left(\sum_{k=1}^{\pi} b_{k,1} p_k \right) \otimes_{\mathbb{C}} m_1 + g \left(\sum_{k=1}^{\pi} b_{k,2} p_k \right) \otimes_{\mathbb{C}} m_2 + \cdots + g \left(\sum_{k=1}^{\pi} b_{k,\mu} p_k \right) \otimes_{\mathbb{C}} m_\mu = 0.$$

Puisque $\{p_k \otimes_{\mathbb{C}} m_\ell \mid 1 \leq k \leq \pi, 1 \leq \ell \leq \mu\}$ est une base de $P \otimes_{\mathbb{C}} M$, on conclut que $g(\sum_{k=1}^{\pi} b_{k,\ell} p_k) = 0$ pour tout ℓ tel que $1 \leq \ell \leq \mu$. Alors, pour ces valeurs de ℓ , $\sum_{k=1}^{\pi} b_{k,\ell} p_k \in \text{Ker } g = \text{Im } f$, c'est-à-dire que $\sum_{k=1}^{\pi} b_{k,\ell} p_k = f(n_\ell)$ pour un $n_\ell \in N$. On obtient

$$(f \otimes \text{id}_M) \left(\sum_{\ell=1}^{\mu} n_\ell \otimes_{\mathbb{C}} m_\ell \right) = \sum_{\ell=1}^{\mu} \sum_{k=1}^{\pi} b_{k,\ell} p_k \otimes_{\mathbb{C}} m_\ell = x,$$

d'où l'inclusion $\text{Ker}(g \otimes \text{id}_M) \subset \text{Im}(f \otimes \text{id}_M)$ et l'exactitude de la suite (2.2.2). \square

On considère d'abord $i_1 = c_1p + d_1$ et $i_2 = c_2p + d_2$ pour $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tels que $d_1, d_2 < p$. Par les lemmes 2.1.1 et 2.1.3, le produit tensoriel $L_q(i_1) \otimes P_q(i_2)$ peut être exprimé de la manière suivante :

$$L_q(c_1p + d_1) \otimes P_q(c_2p + d_2) \simeq (L_q(c_1p) \otimes L_q(c_2p)) \otimes (L_q(d_1) \otimes P_q(d_2)).$$

Le produit $L_q(c_1p) \otimes L_q(c_2p)$ a déjà été étudié à la dernière section ; il ne reste qu'à s'attarder sur $L_q(d_1) \otimes P_q(d_2)$ à partir des lemmes 2.2.1 et 2.2.3 pour décomposer le produit tensoriel entre modules projectifs et injectifs. Le cas $d_2 = p - 1$ n'a pas à être pris en compte, puisque dans cette situation, $P_q(i_2) = L_q(i_2)$, et donc les règles de fusion de $L_q(i_1)$ et $P_q(i_2)$ sont données par le théorème 2.1.9.

Proposition 2.2.4. *Si $c_1 = c_2 = 0$ et $d_2 < p - 1$, le produit tensoriel de $L_q(i_1)$ et $P_q(i_2)$ est donné par*

$$L_q(d_1) \otimes P_q(d_2) \simeq \bigoplus'_{d=|d_1-d_2|}^{\min(d_1+d_2, 2p-d_1-d_2-4)} P_q(d) \oplus 2 \bigoplus'_{d=2p-d_1-d_2-2}^{p-1-\{d_1+d_2+p+1\}_2} P_q(d) \oplus \bigoplus'_{d=p-d_1+d_2}^{p-1-\{d_1+d_2+1\}_2} P_q(p+d).$$

DÉMONSTRATION. Le module $M = L_q(d_1) \otimes P_q(d_2)$ à étudier est de dimension $2p(d_1 + 1)$. Par la proposition 2.1.2, M est projectif. De plus, puisque la suite

$$0 \rightarrow L_q(d_2) \rightarrow P_q(d_2) \rightarrow P_q(d_2)/L_q(d_2) \rightarrow 0,$$

est exacte, celle donnée par

$$0 \rightarrow L_q(d_1) \otimes L_q(d_2) \rightarrow M \rightarrow L_q(d_1) \otimes P_q(d_2)/L_q(d_2) \rightarrow 0$$

l'est également par le lemme 2.2.3. Les sous-modules

$$L_1 = \bigoplus'_{d=|d_1-d_2|}^{\min(d_1+d_2, 2p-d_1-d_2-4)} L_q(d) \quad \text{et} \quad P_2 = \bigoplus'_{d=2p-d_1-d_2-2}^{p-1-\{d_1+d_2+p+1\}_2} P_q(d),$$

du produit $L_q(d_1) \otimes L_q(d_2)$ (proposition 2.1.8) sont tous deux des sous-modules de M . Tout sommant direct de P_2 est également sommant direct de M , car chaque $P_q(d)$ est un module injectif. De plus, puisque M est projectif, chaque sommant $L_q(d)$ de L_1 doit appartenir au socle d'un sommant $P_q(\ell)$ de M pour un $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Or, par la proposition 1.4.8, le socle de $P_q(\ell)$ est $L_q(\ell)$ et il faut donc que M contienne un sommant

$$P_1 = \bigoplus'_{d=|d_1-d_2|}^{\min(d_1+d_2, 2p-d_1-d_2-4)} P_q(d).$$

De façon semblable, la coiffe de $P_q(d_2)$ est $L_q(d_2)$ et le foncteur $L_q(d_1) \otimes -$ appliqué à la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{rad } P_q(d_2) \rightarrow P_q(d_2) \rightarrow L_q(d_2) \rightarrow 0$$

donne

$$0 \rightarrow L_q(d_1) \otimes \text{rad } P_q(d_2) \rightarrow M \rightarrow L_q(d_1) \otimes L_q(d_2) \rightarrow 0.$$

La proposition 2.1.8 et le lemme 2.2.1 permettent donc d'obtenir une seconde copie de P_2 dans M (nécessairement distincte de la première, puisque l'une est obtenue à partir du socle de $P_q(d_2)$ et l'autre, à partir de sa coiffe). En appliquant plutôt le foncteur $L_q(d_1) \otimes -$ à la suite exacte

$$0 \rightarrow L_q(d_2) \rightarrow \Delta_q(p + (p - d_2 - 2)) \rightarrow L_q(p + (p - d_2 - 2)) \rightarrow 0$$

de la proposition 1.4.2, on a que le terme $L_q(d_1) \otimes L_q(p + (p - d_2 - 2))$ de la suite obtenue contient

$$P_3 = \bigoplus'_{d=p-d_1+d_2}^{p-1-\{d_1+d_2+1\}_2} P_q(p+d),$$

dont les sommants directs sont alors sommants directs de $L_q(d_1) \otimes \Delta_q(p + (p - d_2 - 2))$. Or, par la suite exacte

$$0 \rightarrow \Delta_q(p + (p - d_2 - 2)) \rightarrow P_q(d_2) \rightarrow \Delta_q(d_2) \rightarrow 0$$

de la proposition 1.4.8 et le foncteur $L_q(d_1) \otimes -$, $L_q(d_1) \otimes \Delta_q(p + (p - d_2 - 2))$ est inclus dans $L_q(d_1) \otimes P_q(d_2)$. Les sommants directs de P_3 sont donc des sommants directs de M et sont distincts de ceux déjà trouvés, car ils sont obtenus cette fois à partir du facteur de composition occupant l'étage du milieu du diagramme de Loewy de $P_q(d_2)$. Ainsi, $P_1 \oplus 2P_2 \oplus P_3$ est inclus dans M (où $2P_2$ désigne la somme directe $P_2 \oplus P_2$). Il ne reste qu'à vérifier que $\dim P_1 \oplus 2P_2 \oplus P_3 = \dim M$. Pour des modules N_ℓ de dimension n et $a, b \in \mathbb{Z}$ de même parité tels que $a \leq b$, la dimension de $\bigoplus'_{\ell=a}^b N_\ell$ est $n(\frac{1}{2}(b-a) + 1)$. Le calcul des dimensions de P_1 , P_2 et P_3 donne donc

$$\dim P_1 = \begin{cases} 2p(\frac{1}{2}((d_1 + d_2) - (d_1 - d_2)) + 1) & \text{si } d_1 > d_2 \text{ et } d_1 + d_2 < p - 1; \\ 2p(\frac{1}{2}((2p - d_1 - d_2 - 4) - (d_1 - d_2)) + 1) & \text{si } d_1 > d_2 \text{ et } d_1 + d_2 \geq p - 1; \\ 2p(\frac{1}{2}((d_1 + d_2) - (d_2 - d_1)) + 1) & \text{si } d_1 \leq d_2 \text{ et } d_1 + d_2 < p - 1; \\ 2p(\frac{1}{2}((2p - d_1 - d_2 - 4) - (d_2 - d_1)) + 1) & \text{si } d_1 \leq d_2 \text{ et } d_1 + d_2 \geq p - 1; \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2p(d_2 + 1) & \text{si } d_1 > d_2 \text{ et } d_1 + d_2 < p - 1; \\ 2p(p - d_1 - 1) & \text{si } d_1 > d_2 \text{ et } d_1 + d_2 \geq p - 1; \\ 2p(d_1 + 1) & \text{si } d_1 \leq d_2 \text{ et } d_1 + d_2 < p - 1; \\ 2p(p - d_2 - 1) & \text{si } d_1 \leq d_2 \text{ et } d_1 + d_2 \geq p - 1; \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\dim P_2 &= \begin{cases} 0 & \text{si } d_1 + d_2 < p - 1; \\ 2p(\frac{1}{2}((p-2) - (2p - d_1 - d_2 - 2)) + 1) & \text{si } d_1 + d_2 \geq p - 1 \text{ et } \{d_1 + d_2 + p + 1\}_2 = 1; \\ 2p(\frac{1}{2}((p-3) - (2p - d_1 - d_2 - 2)) + 1) + p & \text{si } d_1 + d_2 \geq p - 1 \text{ et } \{d_1 + d_2 + p + 1\}_2 = 0; \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } d_1 + d_2 < p - 1; \\ p(d_1 + d_2 - p + 2) & \text{si } d_1 + d_2 \geq p - 1; \end{cases} \\
\dim P_3 &= \begin{cases} 0 & \text{si } d_1 \leq d_2; \\ 4p(\frac{1}{2}((2p-2) - (2p - d_1 + d_2)) + 1) & \text{si } d_1 > d_2 \text{ et } \{d_1 + d_2 + 1\}_2 = 1; \\ 4p(\frac{1}{2}((2p-3) - (2p - d_1 + d_2)) + 1) + 2p & \text{si } d_1 > d_2 \text{ et } \{d_1 + d_2 + 1\}_2 = 0; \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } d_1 \leq d_2; \\ 2p(d_1 - d_2) & \text{si } d_1 > d_2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Alors,

$$\dim P_1 \oplus 2P_2 \oplus P_3$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} 2p(d_2 + 1) + 2p(d_1 - d_2) & \text{si } d_1 > d_2 \text{ et } d_1 + d_2 < p - 1; \\ 2p(p - d_1 - 1) + 2p(d_1 + d_2 - p + 2) + 2p(d_1 - d_2) & \text{si } d_1 > d_2 \text{ et } d_1 + d_2 \geq p - 1; \\ 2p(d_1 + 1) & \text{si } d_1 \leq d_2 \text{ et } d_1 + d_2 < p - 1; \\ 2p(p - d_2 - 1) + 2p(d_1 + d_2 - p + 2) & \text{si } d_1 \leq d_2 \text{ et } d_1 + d_2 \geq p - 1; \end{cases} \\
&= 2p(d_1 + 1) = \dim M,
\end{aligned}$$

d'où $M \simeq P_1 \oplus 2P_2 \oplus P_3$. □

Théorème 2.2.5. *Pour $i_1, i_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ quelconques tels que $d_2 < p - 1$,*

$$\begin{aligned}
L_q(i_1) \otimes P_q(i_2) &\simeq \bigoplus'_{c=|c_1-c_2|}^{c_1+c_2} \left(\bigoplus'_{d=|d_1-d_2|}^{\min(d_1+d_2, 2p-d_1-d_2-4)} P_q(cp+d) \oplus 2 \bigoplus'_{d=2p-d_1-d_2-2}^{p-1-\{d_1+d_2+p+1\}_2} P_q(cp+d) \right) \\
&\quad \oplus 2 \bigoplus''_{c=|c_1-c_2|-1}^{c_1+c_2+1} \bigoplus'_{d=p-d_1+d_2}^{p-1-\{d_1+d_2+1\}_2} P_q(cp+d),
\end{aligned}$$

où, pour k et ℓ des entiers de même parité, la somme \bigoplus'' de k à ℓ est définie par

$$\bigoplus_{a=k}^{\ell} f(a) = \bigoplus_{a=k}^{\ell} (1 - \frac{1}{2}\delta_{a,k} - \frac{1}{2}\delta_{a,\ell}) f(a).$$

DÉMONSTRATION. Le calcul est direct et n'utilise que les lemmes précédents. Les termes de correction dans la somme \bigoplus'' seront expliqués à la fin. La commutativité et l'associativité du produit tensoriel permettent d'obtenir

$$\begin{aligned} & L_q(c_1p + d_1) \otimes P_q(c_2p + d_2) \\ & \simeq (L_q(c_1p) \otimes L_q(c_2p)) \otimes (L_q(d_1) \otimes P_q(d_2)), \end{aligned}$$

par les lemmes 2.1.1 et 2.1.3 ;

$$\begin{aligned} & \simeq \left(\bigoplus_{c=|c_1-c_2|}^{c_1+c_2} L_q(cp) \right) \\ & \otimes \left(\bigoplus_{d=|d_1-d_2|}^{\min(d_1+d_2, 2p-d_1-d_2-4)} P_q(d) \oplus 2 \bigoplus_{d=2p-d_1-d_2-2}^{p-1-\{d_1+d_2+p+1\}_2} P_q(d) \oplus \bigoplus_{d=p-d_1+d_2}^{p-1-\{d_1+d_2+1\}_2} P_q(p+d) \right), \end{aligned}$$

par les propositions 2.1.4 et 2.2.4 ;

$$\begin{aligned} & \simeq \bigoplus_{c=|c_1-c_2|}^{c_1+c_2} \left(\bigoplus_{|d_1-d_2|}^{\min(d_1+d_2, 2p-d_1-d_2-4)} P_q(cp+d) \oplus 2 \bigoplus_{d=2p-d_1-d_2-2}^{p-1-\{d_1+d_2+p+1\}_2} P_q(cp+d) \right) \\ & \oplus \bigoplus_{c=|c_1-c_2|}^{c_1+c_2} \bigoplus_{d=p-d_1+d_2}^{p-1-\{d_1+d_2+1\}_2} (L_q(cp) \otimes L_q(p)) \otimes P_q(d), \end{aligned}$$

par le lemme 2.1.3 ;

$$\begin{aligned} & \simeq \bigoplus_{c=|c_1-c_2|}^{c_1+c_2} \left(\bigoplus_{|d_1-d_2|}^{\min(d_1+d_2, 2p-d_1-d_2-4)} P_q(cp+d) \oplus 2 \bigoplus_{d=2p-d_1-d_2-2}^{p-1-\{d_1+d_2+p+1\}_2} P_q(cp+d) \right) \\ & \oplus 2 \bigoplus_{c=|c_1-c_2|-1}^{c_1+c_2+1} \bigoplus_{d=p-d_1+d_2}^{p-1-\{d_1+d_2+1\}_2} L_q(cp) \otimes P_q(d). \end{aligned}$$

par la proposition 2.1.4 ;

$$\begin{aligned} & \simeq \bigoplus_{c=|c_1-c_2|}^{c_1+c_2} \left(\bigoplus_{|d_1-d_2|}^{\min(d_1+d_2, 2p-d_1-d_2-4)} P_q(cp+d) \oplus 2 \bigoplus_{d=2p-d_1-d_2-2}^{p-1-\{d_1+d_2+p+1\}_2} P_q(cp+d) \right) \\ & \oplus 2 \bigoplus_{c=|c_1-c_2|-1}^{c_1+c_2+1} \bigoplus_{d=p-d_1+d_2}^{p-1-\{d_1+d_2+1\}_2} P_q(cp+d), \end{aligned}$$

à nouveau par le lemme 2.1.3. Le produit $L_q(cp) \otimes L_q(p)$ est isomorphe à $L_q((c+1)p) \oplus L_q((c-1)p)$ selon la proposition 2.1.4. Si $c_1 \neq c_2$, tous les termes $L_q(cp)$ pour $|c_1 - c_2| - 1 \leq c \leq c_1 + c_2 + 1$, apparaîtront deux fois sauf les termes extrêmes qui ne seront présents qu'une fois,

ce qui explique les termes de correction dans \oplus'' . Une difficulté supplémentaire apparaît si $c_1 = c_2$. Alors la somme $\bigoplus_{c=|c_1-c_2|}^{c_1+c_2} L_q(cp) = \bigoplus_{c=0}^{c_1+c_2} L_q(cp)$ contient le produit $L_q(0) \otimes L_q(p) \simeq L_q(p)$. Le terme suivant est $L_q(2p) \otimes L_q(p) \simeq L_q(p) \oplus L_q(3p)$ et ainsi de suite. Le terme $L_q(p)$ apparaît bien deux fois, mais le premier terme de la somme $\bigoplus_{c=|c_1-c_2|-1}^{c_1+c_2+1} L_q(cp) = \bigoplus_{c=-1}^{2c_1+1} L_q(cp)$ n'est guère présent. Or, ce premier terme $L_q(-p)$ est justement nul par la définition 1.4.21 en raison de son indice négatif. \square

Les décompositions de $\Delta_q(i_1) \otimes P_q(i_2)$ et de $P_q(i_1) \otimes P_q(i_2)$ découlent du dernier théorème. Comme détaillé ci-après, il suffit d'appliquer le foncteur $- \otimes P_q(i_2)$ sur une suite exacte courte bien choisie dont le module du milieu est respectivement $\Delta_q(i_1)$ et $P_q(i_1)$.

Théorème 2.2.6. *Soient $i_1, i_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ quelconques tels que $d_1 < p - 1$. Si $d_2 = p - 1$,*

$$\Delta_q(i_1) \otimes P_q(i_2) \simeq \left(\bigoplus_{c=|c_1-c_2-1|}^{c_1+c_2-1} \bigoplus_{d=d_1+1}^{p-1-\{d_1+p\}_2} P_q(cp+d) \right) \oplus \left(\bigoplus_{c=|c_1-c_2|}^{c_1+c_2} \bigoplus_{d=p-d_1-1}^{p-1-\{d_1\}_2} P_q(cp+d) \right).$$

Simon,

$$\begin{aligned} & \Delta_q(i_1) \otimes P_q(i_2) \\ & \simeq \bigoplus_{c=|c_1-c_2-1|}^{c_1+c_2-1} \left(\bigoplus_{d=|p-d_1-d_2-2|}^{p-|d_1-d_2|-2} P_q(cp+d) \oplus 2 \bigoplus_{d=p+d_1-d_2}^{p-1-\{d_1+d_2+1\}_2} P_q(cp+d) \right) \\ & \oplus \bigoplus_{c=|c_1-c_2|}^{c_1+c_2} \left(\bigoplus_{d=|d_1-d_2|}^{\min(d_1+d_2, 2p-d_1-d_2-4)} P_q(cp+d) \oplus 2 \bigoplus_{d=2p-d_1-d_2-2}^{p-1-\{d_1+d_2+p+1\}_2} P_q(cp+d) \right) \\ & \oplus 2 \left(\bigoplus_{c=|c_1-c_2-1|-1}^{c_1+c_2} \bigoplus_{d=d_1+d_2+2}^{p-1-\{p+d_1+d_2+1\}_2} P_q(cp+d) \oplus \bigoplus_{c=|c_1-c_2|-1}^{c_1+c_2+1} \bigoplus_{d=p-d_1+d_2}^{p-1-\{d_1+d_2+1\}_2} P_q(cp+d) \right). \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Supposons pour commencer que $c_1 = 0$. Alors, $i_1 < p$ et donc $\Delta_q(i_1) = L_q(i_1)$. Si $d_2 = p - 1$, les règles de fusion pour $\Delta_q(i_1) = L_q(i_1)$ et $P_q(i_2) = L_q(i_2)$ sont de ce fait décrites par le théorème 2.1.9 :

$$\begin{aligned} \Delta_q(i_1) \otimes P_q(i_2) & \simeq \bigoplus_{c=|c_1-c_2|}^{c_1+c_2} \left(\bigoplus_{d=|d_1-d_2|}^{\min(d_1+d_2, 2p-d_1-d_2-4)} L_q(cp+d) \oplus \bigoplus_{d=2p-d_1-d_2-2}^{p-1-\{d_1+d_2+p+1\}_2} P_q(cp+d) \right) \\ & = \bigoplus_{c=|c_1-c_2|}^{c_1+c_2} \bigoplus_{d=2p-d_1-d_2-2}^{p-1-\{d_1+d_2+p+1\}_2} P_q(cp+d), \end{aligned}$$

puisque

$$|d_1 - d_2| = p - d_1 - 1 > p - d_1 - 3 = 2p - d_1 - d_2 - 4 \geq \min(d_1 + d_2, 2p - d_1 - d_2 - 4).$$

L'expression ainsi obtenue est donc bien celle donnée dans l'énoncé du présent théorème pour $d_2 = p - 1$, car dans cette dernière la sommation $\bigoplus_{c=|c_1-c_2-1|}^{c_1+c_2-1} = \bigoplus_{c=c_2+1}^{c_2-1}$ est nulle. Si $d_2 < p - 1$, les

règles de fusion pour $\Delta_q(i_1)$ et $P_q(i_2)$ sont plutôt données par l'équation du théorème 2.2.5. Cette équation correspond tout autant à celle de l'énoncé du présent théorème, car dans cette dernière les sommations $\bigoplus'_{c=|c_1-c_2-1|}^{c_1+c_2-1} = \bigoplus'_{c=c_2+1}^{c_2-1}$ et $\bigoplus''_{c=|c_1-c_2-1|-1}^{c_1+c_2} = \bigoplus''_{c=c_2}$ sont nulles.

Supposons maintenant que $c_1 \geq 1$. Puisque $d_1 < p - 1$, la proposition 1.4.2 donne la suite exacte

$$0 \longrightarrow L_q((c_1 - 1)p + (p - d_1 - 2)) \longrightarrow \Delta_q(i_1) \longrightarrow L_q(i_1) \longrightarrow 0.$$

Par le lemme 2.2.3, la suite

$$0 \longrightarrow L_q((c_1 - 1)p + (p - d_1 - 2)) \otimes P_q(i_2) \longrightarrow \Delta_q(i_1) \otimes P_q(i_2) \longrightarrow L_q(i_1) \otimes P_q(i_2) \longrightarrow 0$$

est donc également exacte. Or, puisque $L_q(i_1) \otimes P_q(i_2)$ est projectif, la suite exacte scinde, c'est-à-dire que $\Delta_q(i_1) \otimes P_q(i_2) \simeq L_q((c_1 - 1)p + (p - d_1 - 2)) \otimes P_q(i_2) \oplus L_q(i_1) \otimes P_q(i_2)$. Par le théorème précédent, si $d_2 < p - 1$,

$$\begin{aligned} & L_q((c_1 - 1)p + (p - d_1 - 2)) \otimes P_q(i_2) \\ & \simeq \bigoplus'_{c=|c_1-c_2-1|}^{c_1+c_2-1} \left(\bigoplus'_{d=|p-d_1-d_2-2|}^{\min(p-d_1+d_2-2, p+d_1-d_2-2)} P_q(cp + d) \oplus 2 \bigoplus'_{d=p+d_1-d_2}^{p-1-\{d_1+d_2+1\}_2} P_q(cp + d) \right) \\ & \quad \oplus 2 \bigoplus''_{c=|c_1-c_2-1|-1}^{c_1+c_2} \bigoplus'_{d=d_1+d_2+2}^{p-1-\{p+d_1+d_2+1\}_2} P_q(cp + d) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & L_q(i_1) \otimes P_q(i_2) \\ & \simeq \bigoplus'_{c=|c_1-c_2|}^{c_1+c_2} \left(\bigoplus'_{d=|d_1-d_2|}^{\min(d_1+d_2, 2p-d_1-d_2-4)} P_q(cp + d) \oplus 2 \bigoplus'_{d=2p-d_1-d_2-2}^{p-1-\{d_1+d_2+p+1\}_2} P_q(cp + d) \right) \\ & \quad \oplus 2 \bigoplus''_{c=|c_1-c_2|-1}^{c_1+c_2+1} \bigoplus'_{d=p-d_1+d_2}^{p-1-\{d_1+d_2+1\}_2} P_q(cp + d), \end{aligned}$$

tel que dans l'énoncé. Si $d_2 = p - 1$, le résultat est obtenu de manière analogue en utilisant cette fois le théorème 2.1.9. Il est à noter que, dans ce dernier cas, la première somme directe du membre droit de ce théorème ne contribue jamais, car la borne supérieure est toujours plus petite que la borne inférieure. \square

Théorème 2.2.7. *Pour $i_1, i_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ quelconques tels que $d_1 < p - 1$ et $d_2 < p - 1$,*

$$\begin{aligned} P_q(i_1) \otimes P_q(i_2) & \simeq 2 \bigoplus'_{c=|c_1-c_2|}^{c_1+c_2} \left(\bigoplus'_{d=|d_1-d_2|}^{\min(d_1+d_2, 2p-d_1-d_2-4)} P_q(cp + d) \oplus 2 \bigoplus'_{d=2p-d_1-d_2-2}^{p-1-\{d_1+d_2+p+1\}_2} P_q(cp + d) \right) \\ & \quad \oplus 2 \bigoplus''_{c=|c_1-c_2|-1}^{c_1+c_2+1} \left(\bigoplus'_{d=|p-d_1-d_2-2|}^{p-|d_1-d_2|-2} P_q(cp + d) \oplus 2 \bigoplus'_{d=p-|d_1-d_2|}^{p-1-\{d_1+d_2+1\}_2} P_q(cp + d) \right) \end{aligned}$$

$$\oplus 4 \bigoplus_{c=|c_1-c_2|-2}^{c_1+c_2+2} \bigoplus'_{d=d_1+d_2+2}^{p-1-\{d_1+d_2+p+1\}_2} P_q(cp+d),$$

où, pour k et ℓ des entiers de même parité, la somme \bigoplus''' de k à ℓ est définie par

$$\bigoplus_{a=k}^{\ell} \bigoplus''' f(a) = \bigoplus_{a=k}^{\ell} \bigoplus' \left(1 - \frac{3}{4} \delta_{a,k} - \frac{1}{4} \delta_{a,k+2} (1 + \delta_{k,-2}) - \frac{1}{4} \delta_{a,\ell-2} - \frac{3}{4} \delta_{a,\ell} \right) f(a).$$

DÉMONSTRATION. Tel que dans la démonstration précédente, cette fois à partir de la suite exacte

$$0 \rightarrow \Delta_q((c_1+1)p + (p-d_1-2)) \rightarrow P_q(i_1) \rightarrow \Delta_q(i_1) \rightarrow 0$$

de la proposition 1.4.8 et du foncteur $- \otimes P_q(i_2)$, on obtient l'équivalence

$$P_q(i_1) \otimes P_q(i_2) \simeq \Delta_q((c_1+1)p + (p-d_1-2)) \otimes P_q(i_2) \oplus \Delta_q(i_1) \otimes P_q(i_2).$$

Par le théorème précédent, les deux produits tensoriels du côté droit de la dernière équation peuvent être développés de la manière suivante :

$$\begin{aligned} & \Delta_q((c_1+1)p + (p-d_1-2)) \otimes P_q(i_2) \\ & \simeq \bigoplus'_{c=|c_1-c_2|}^{c_1+c_2} (P_1 \oplus 2P_2) \oplus \bigoplus'_{c=|c_1-c_2+1|}^{c_1+c_2+1} (P_3 \oplus 2P_4) \oplus 2 \bigoplus''_{c=|c_1-c_2|-1}^{c_1+c_2+1} P_5 \oplus 2 \bigoplus''_{c=|c_1-c_2+1|-1}^{c_1+c_2+2} P_6 \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

et

$$\begin{aligned} \Delta_q(i_1) \otimes P_q(i_2) & \simeq \bigoplus'_{c=|c_1-c_2-1|}^{c_1+c_2-1} (P_3 \oplus 2P_4) \oplus \bigoplus'_{c=|c_1-c_2|}^{c_1+c_2} (P_1 \oplus 2P_2) \\ & \oplus 2 \bigoplus''_{c=|c_1-c_2-1|-1}^{c_1+c_2} P_6 \oplus 2 \bigoplus''_{c=|c_1-c_2|-1}^{c_1+c_2+1} P_5 \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

pour

$$\begin{aligned} P_1 &= \bigoplus'_{d=|d_1-d_2|}^{\min(d_1+d_2, 2p-d_1-d_2-4)} P_q(cp+d), & P_2 &= \bigoplus'_{d=2p-d_1-d_2-2}^{p-1-\{d_1+d_2+p+1\}_2} P_q(cp+d), \\ P_3 &= \bigoplus'_{d=|p-d_1-d_2-2|}^{p-|d_1-d_2|-2} P_q(cp+d), & P_4 &= \bigoplus'_{d=p+d_1-d_2}^{p-1-\{d_1+d_2+1\}_2} P_q(cp+d), \\ P_5 &= \bigoplus'_{d=p-d_1+d_2}^{p-1-\{d_1+d_2+1\}_2} P_q(cp+d) \quad \text{et} & P_6 &= \bigoplus'_{d=d_1+d_2+2}^{p-1-\{p+d_1+d_2+1\}_2} P_q(cp+d). \end{aligned}$$

De plus, P_4 est nul si $d_1 \geq d_2$ et P_5 est nul si $d_1 \leq d_2$, d'où

$$P_4 \oplus P_5 = P_7 \quad \text{pour} \quad P_7 = \bigoplus'_{d=p-|d_1-d_2|}^{p-1-\{d_1+d_2+1\}_2} P_q(cp+d).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
P_q(i_1) \otimes P_q(i_2) &\simeq 2 \bigoplus'_{c=|c_1-c_2|}^{c_1+c_2} (P_1 \oplus 2P_2) \oplus 2 \bigoplus''_{c=|c_1-c_2|-1}^{c_1+c_2+1} (P_3 \oplus 2P_4 \oplus 2P_5) \\
&\oplus 2 \bigoplus''_{c=|c_1-c_2+1|-1}^{c_1+c_2+2} P_6 \oplus 2 \bigoplus''_{c=|c_1-c_2-1|-1}^{c_1+c_2} P_6 \\
&\simeq 2 \bigoplus'_{c=|c_1-c_2|}^{c_1+c_2} (P_1 \oplus 2P_2) \oplus 2 \bigoplus''_{c=|c_1-c_2|-1}^{c_1+c_2+1} (P_3 \oplus 2P_7) \oplus 4 \bigoplus'''_{c=|c_1-c_2|-2}^{c_1+c_2+2} P_6. \quad (2.2.5)
\end{aligned}$$

Les lignes qui précèdent sont obtenues par la somme directe des expressions de (2.2.3) et de (2.2.4) et le terme $4 \bigoplus'''_{c=|c_1-c_2|-2}^{c_1+c_2+2} P_6$ provient de l'étude des différents cas possibles pour la sommation $2 \bigoplus''_{c=|c_1-c_2+1|-1}^{c_1+c_2+2} P_6 \oplus 2 \bigoplus''_{c=|c_1-c_2-1|-1}^{c_1+c_2} P_6$. Lorsque $c_1 \geq c_2 + 1$, les termes $c_1 - c_2 - 2$ et $c_1 + c_2 + 2$ apparaissent une fois dans cette dernière sommation, les termes $c_1 - c_2$ et $c_1 + c_2$ apparaissent trois fois et les termes entre $c_1 - c_2$ et $c_1 + c_2$ exclus apparaissent quatre fois. Lorsque $c_1 \leq c_2 - 1$, les termes $c_2 - c_1 - 2$ et $c_1 + c_2 + 2$ apparaissent une fois, les termes $c_2 - c_1$ et $c_2 + c_1$ apparaissent trois fois et les termes entre $c_2 - c_1$ et $c_2 + c_1$ exclus apparaissent quatre fois. Lorsque $c_1 = c_2$, le terme $c_1 + c_2 + 2$ apparait une fois, le terme $c_1 + c_2$ apparait trois fois, le terme 0 apparait deux fois et les termes entre 0 et $c_1 + c_2$ exclus apparaissent quatre fois. Dans tous les cas, le nombre d'apparitions de chacun des termes concorde avec la définition de \bigoplus''' et l'expression (2.2.5) correspond précisément à celle de l'énoncé du théorème. \square

Chapitre 3

Règles de fusion pour les modules et comodules de Weyl

Jusqu'à maintenant, les règles de fusion étudiées ont uniquement fait intervenir des modules appartenant aux familles remarquables introduites à la section 1.4. Ce ne sera pas le cas du produit tensoriel entre modules simple et de Weyl, pour lequel de nouveaux modules dits *modules zigzags* devront être considérés. Dans le présent chapitre sera d'abord introduite cette nouvelle famille de modules, puis la décomposition des produits $\Delta_q(i_1) \otimes L_q(i_2)$, $\Delta_q(i_1) \otimes \Delta_q(i_2)$ et $\Delta_q(i_1) \otimes \nabla_q(i_2)$ sera déterminée. On termine en présentant les règles de fusion entre comodule de Weyl et modules simple, projectif et de Weyl. Au mieux de notre connaissance, tous ces résultats sont nouveaux.

Puisque pour $d_1 = p - 1$, $L_q(i_1) = \Delta_q(i_1) = P_q(i_1)$ et de même pour $d_2 = p - 1$, les produits tensoriels $\Delta_q(i_1) \otimes L_q(i_2)$ et $\Delta_q(i_1) \otimes \Delta_q(i_2)$ dans ces situations ont déjà été explicités aux sections 2.1 et 2.2. Cette valeur de d_1 ou de d_2 n'aura donc pas à être prise en compte dans ce qui suit.

3.1. Modules zigzags

Dans cette section sont décrits les modules zigzags \mathbb{T}_i^k ainsi que la structure de leur couverture projective. Une telle construction de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules est nouvelle (à notre connaissance). Les démarches sont toutefois inspirées des sections 2 et 3 de [6], où des modules similaires sont définis pour les algèbres de Temperley-Lieb. Elles reposent sur quelques résultats concernant les groupes Hom et Ext^1 de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules, obtenus dans la prochaine sous-section.

Soit $i = cp + d$ pour $c, d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tels que $d < p - 1$. Pour $\ell \in \mathbb{Z}$, on utilise la notation

$$i_{(\ell)} = \begin{cases} (c + \ell)p + d & \text{si } \ell \text{ est pair;} \\ (c + \ell)p + (p - d - 2) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il s'ensuit que $(i_{(\ell)})_{(-\ell)} = i$ pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$. De plus, si $c_\ell, d_\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ sont tels que $i_{(\ell)} = c_\ell p + d_\ell$ avec $0 \leq d_\ell < p - 1$, alors $i_{(\ell+1)} = i_{(\ell)} + 2(p - d_\ell - 1)$. Cette notation simplifie donc celle des suites exactes courtes données à la section 1.4, qui pour $i_{(\ell)} \geq 0$ deviennent

$$0 \rightarrow L_q(i_{(\ell)}) \rightarrow \Delta_q(i_{(\ell+1)}) \rightarrow L_q(i_{(\ell+1)}) \rightarrow 0$$

et

$$0 \rightarrow \Delta_q(i_{(\ell+1)}) \rightarrow P_q(i_{(\ell)}) \rightarrow \Delta_q(i_{(\ell)}) \rightarrow 0.$$

3.1.1. Groupes Hom et Ext¹

On détermine les groupes Hom associés aux $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules simples et projectifs ainsi qu'aux modules et comodules de Weyl. Ces résultats permettront ensuite de décrire les groupes d'extension.

Proposition 3.1.1. *Soient M et N deux modules appartenant à l'une des quatre familles remarquables de la définition 1.4.21 et d'indices respectifs i et k . Le tableau 3.1 donne les groupes Hom associés à ces modules lorsque $k = i_{(\ell)} \geq 0$ pour un entier ℓ . Si k n'est pas de cette forme, alors $\text{Hom}(M, N) \simeq 0$.*

Hom(M, N)		N			
		$L_q(i_{(\ell)})$	$\Delta_q(i_{(\ell)})$	$\nabla_q(i_{(\ell)})$	$P_q(i_{(\ell)})$
M	$L_q(i)$	$\delta_{\ell,0}\mathbb{C}$	$\delta_{\ell,1}\mathbb{C}$	$\delta_{\ell,0}\mathbb{C}$	$\delta_{\ell,0}\mathbb{C}$
	$\Delta_q(i)$	$\delta_{\ell,0}\mathbb{C}$	$(\delta_{\ell,0} + \delta_{\ell,1})\mathbb{C}$	$\delta_{\ell,0}\mathbb{C}$	$(\delta_{\ell,-1} + \delta_{\ell,0})\mathbb{C}$
	$\nabla_q(i)$	$\delta_{\ell,-1}\mathbb{C}$	$\delta_{\ell,0}\mathbb{C}$	$(\delta_{\ell,-1} + \delta_{\ell,0})\mathbb{C}$	$(\delta_{\ell,-1} + \delta_{\ell,0})\mathbb{C}$
	$P_q(i)$	$\delta_{\ell,0}\mathbb{C}$	$(\delta_{\ell,0} + \delta_{\ell,1})\mathbb{C}$	$(\delta_{\ell,0} + \delta_{\ell,1})\mathbb{C}$	$(\delta_{\ell,-1} + 2\delta_{\ell,0} + \delta_{\ell,1})\mathbb{C}$

Tableau 3.1 – Groupes Hom pour les $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules remarquables.

DÉMONSTRATION. Les groupes $\text{Hom}(M, N)$ se vérifient tous aisément à partir de la structure du diagramme de Loewy des modules et du lemme de Schur. Par exemple, lorsque $M = P_q(i)$ et $N = \Delta_q(k)$, un morphisme non nul $\phi : M \rightarrow N$ ne peut annuler $\text{top } P_q(i) \simeq L_q(i)$. Le paramètre k doit donc avoir la valeur de i ou de $i_{(1)}$ pour que $\text{Hom}(P_q(i), \Delta_q(k))$ ne soit pas nul, car autrement $L_q(i)$ ne ferait pas partie des facteurs de composition de $\Delta_q(k)$. Si $k = i_{(1)}$, ϕ doit envoyer $\text{top } P_q(i)$ sur $\text{soc } \Delta_q(i_{(1)}) \simeq L_q(i)$ et annuler les autres facteurs de composition, ce qui donne, par le lemme de Schur, $\text{Hom}(P_q(i), \Delta_q(i_{(1)})) \simeq \mathbb{C}$. Si $k = i$, ϕ doit envoyer $\text{top } P_q(i)$ sur $\text{top } \Delta_q(i) \simeq L_q(i)$, donc envoyer le facteur de composition $L_q(i_{(-1)})$ de $P_q(i)$ sur $\text{soc } \Delta_q(i)$ et annuler les autres facteurs de composition. Ainsi, $\text{Hom}(P_q(i), \Delta_q(i)) \simeq \mathbb{C}$ à nouveau par le lemme de Schur. De ce fait, $\text{Hom}(P_q(i), \Delta_q(i_{(\ell)})) \simeq (\delta_{\ell,0} + \delta_{\ell,1})\mathbb{C}$ et le groupe Hom associé aux autres modules est obtenu de manière similaire. \square

Proposition 3.1.2. *Soient M et N deux modules appartenant à l'une des quatre familles remarquables de la définition 1.4.21 et d'indices respectifs i et k . Le tableau 3.2 donne les groupes d'extension associés à ces modules lorsque $k = i_{(\ell)} \geq 0$ pour un entier ℓ . Si k n'est pas de cette forme, alors $\text{Ext}^1(M, N) \simeq 0$.*

$\text{Ext}^1(M, N)$		N			
		$L_q(i_{(\ell)})$	$\Delta_q(i_{(\ell)})$	$\nabla_q(i_{(\ell)})$	$P_q(i_{(\ell)})$
M	$L_q(i)$	$(\delta_{\ell, -1} + \delta_{\ell, 1})\mathbb{C}$	$\delta_{\ell, 2}\mathbb{C}$	$\delta_{\ell, -1}\mathbb{C}$	0
	$\Delta_q(i)$	$\delta_{\ell, 1}\mathbb{C}$	$(\delta_{\ell, 1} + \delta_{\ell, 2})\mathbb{C}$	0	0
	$\nabla_q(i)$	$\delta_{\ell, -2}\mathbb{C}$	0	$(\delta_{\ell, -2} + \delta_{\ell, -1})\mathbb{C}$	0
	$P_q(i)$	0	0	0	0

Tableau 3.2 – Groupes Ext^1 pour les $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules remarquables.

DÉMONSTRATION. Les dernières rangée et colonne du tableau découlent respectivement du fait que $P_q(i)$ est un module projectif et que $P_q(i_{(\ell)})$ est un module injectif. Pour le reste, on commence par le cas $M = \Delta_q(i)$ et $N = \Delta_q(k)$. La suite exacte courte

$$0 \rightarrow \Delta_q(i_{(1)}) \rightarrow P_q(i) \rightarrow \Delta_q(i) \rightarrow 0$$

et le foncteur $\text{Hom}(-, \Delta_q(k))$ permettent d'obtenir la suite exacte longue

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}(\Delta_q(i), \Delta_q(k)) &\rightarrow \text{Hom}(P_q(i), \Delta_q(k)) \rightarrow \text{Hom}(\Delta_q(i_{(1)}), \Delta_q(k)) \\ &\rightarrow \text{Ext}^1(\Delta_q(i), \Delta_q(k)) \rightarrow \text{Ext}^1(P_q(i), \Delta_q(k)) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

par un résultat classique démontré notamment dans [4]. Tel que mentionné plus tôt, $\text{Ext}^1(P_q(i), \Delta_q(k)) \simeq 0$. De plus, par la proposition 3.1.2, $\text{Hom}(\Delta_q(i_{(1)}), \Delta_q(k))$ est nul si $k \notin \{i_{(1)}, i_{(2)}\}$. Le groupe $\text{Ext}^1(\Delta_q(i_{(1)}), \Delta_q(k))$ ne peut donc être non nul que si $k = i_{(1)}$ ou $k = i_{(2)}$, auxquels cas la suite exacte précédente devient respectivement

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \text{Ext}^1(\Delta_q(i), \Delta_q(i_{(1)})) \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

et

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \text{Ext}^1(\Delta_q(i), \Delta_q(i_{(2)})) \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

Ainsi, par le principe d'Euler–Poincaré, $\text{Ext}^1(\Delta_q(i), \Delta_q(i_{(\ell)})) \simeq (\delta_{\ell, 1} + \delta_{\ell, 2})\mathbb{C}$. Tous les résultats des rangées $M = \Delta_q(i)$ et $M = \nabla_q(i)$ ainsi que des colonnes $N = \Delta_q(i_{(\ell)})$ et $N = \nabla_q(i_{(\ell)})$ du tableau sont obtenus de manière analogue, à partir de la suite exacte de la proposition 1.4.8 ou de sa suite duale. Pour $M = L_q(i)$ et $N = L_q(i_{(\ell)})$ tels que $i \geq p$ (si $i < p$, le résultat découle du fait que $L_q(i) = \Delta_q(i)$), on utilise toutefois plutôt la suite exacte courte

$$0 \rightarrow L_q(i_{(-1)}) \rightarrow \Delta_q(i) \rightarrow L_q(i) \rightarrow 0,$$

qui avec le foncteur $\text{Hom}(-, L_q(k))$, donne la suite exacte longue

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}(L_q(i), L_q(k)) &\rightarrow \text{Hom}(\Delta_q(i), L_q(k)) \rightarrow \text{Hom}(L_q(i_{(-1)}), L_q(k)) \\ &\rightarrow \text{Ext}^1(L_q(i), L_q(k)) \rightarrow \text{Ext}^1(\Delta_q(i), L_q(k)) \rightarrow \text{Ext}^1(L_q(i_{(-1)}), L_q(k)) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Si $k \notin \{i_{(-1)}, i_{(1)}\}$, alors $\text{Hom}(L_q(i_{(-1)}), L_q(k))$ et $\text{Ext}^1(\Delta_q(i), L_q(k))$ sont nuls et donc il en va de même pour $\text{Ext}^1(L_q(i), L_q(k))$. En particulier, si $k = i_{(1)}$, $\text{Ext}^1(L_q(i_{(-1)}), L_q(k)) \simeq 0$ et on obtient par la suite exacte précédente

$$0 \rightarrow \text{Ext}^1(L_q(i), L_q(i_{(1)})) \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow 0.$$

Ainsi, $\text{Ext}^1(L_q(i), L_q(i_{(1)})) \simeq \mathbb{C}$. Si $k = i_{(-1)}$, on a

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \text{Ext}^1(L_q(i), L_q(i_{(-1)})) \rightarrow 0$$

et alors $\text{Ext}^1(L_q(i), L_q(i_{(-1)})) \simeq \mathbb{C}$. Donc, $\text{Ext}^1(L_q(i), L_q(i_{(\ell)})) \simeq (\delta_{\ell, -1} + \delta_{\ell, 1})\mathbb{C}$ tel qu'attendu. \square

Un dernier lemme simplifie dans certains cas le calcul du groupe Ext^1 de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules. Il établit que lorsque les indices des facteurs de composition de deux modules sont « trop éloignés » (au sens défini ci-bas), leur groupe d'extension est nul.

Lemme 3.1.3. *Soient M et N des $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules dont tous les facteurs de composition sont de forme $L_q(i_{(\ell)})$ pour un $\ell \in \mathbb{Z}$. Si pour tout facteur $L_q(i_{(m)})$ de M et $L_q(i_{(n)})$ de N on a $|m - n| > 1$, alors $\text{Ext}^1(M, N) \simeq 0$.*

DÉMONSTRATION. Soient M et N des $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules non nuls respectant les conditions de l'énoncé (si l'un des modules est nul, le résultat est évident). On montre que $\text{Ext}^1(M, N) \simeq 0$ par une double induction : l'induction se fait sur le nombre de facteurs de composition de M , mais le cas de base nécessite une induction sur le nombre de facteurs de composition de N . Supposons donc pour commencer que M possède un seul facteur de composition $L_q(i_{(m)})$, $m \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire que $M \simeq L_q(i_{(m)})$. Si N a également un seul facteur de composition $L_q(i_{(n)})$, $n \in \mathbb{Z}$, alors $\text{Ext}^1(M, N) \simeq 0$ par la proposition précédente. On suppose maintenant que N ait $k \geq 2$ facteurs de composition et que l'énoncé du lemme soit vrai lorsque N en a moins de k . Soit I un sous-module simple de N . La suite exacte courte $0 \rightarrow I \rightarrow N \rightarrow N/I \rightarrow 0$ et le foncteur $\text{Hom}(M, -)$ donnent la suite exacte longue

$$\dots \rightarrow \text{Ext}^1(M, I) \rightarrow \text{Ext}^1(M, N) \rightarrow \text{Ext}^1(M, N/I) \rightarrow \dots$$

Puisque I et N/I ont tous deux moins de k facteurs de composition, $\text{Ext}^1(M, I) \simeq \text{Ext}^1(M, N/I) \simeq 0$ par hypothèse. Le groupe $\text{Ext}^1(M, N)$ est donc bien nul lorsque M n'a qu'un facteur de composition. Supposons que M ait $\ell \geq 2$ facteurs de composition et que l'énoncé soit vrai lorsque M en a moins de ℓ . Similairement, pour J un sous-module simple de M , la suite exacte courte $0 \rightarrow J \rightarrow M \rightarrow M/J \rightarrow 0$ et le foncteur $\text{Hom}(-, N)$ donnent la

suite exacte longue

$$\cdots \rightarrow \text{Ext}^1(M/J, N) \rightarrow \text{Ext}^1(M, N) \rightarrow \text{Ext}^1(J, N) \rightarrow \cdots$$

Puisque $\text{Ext}^1(M/J, N) \simeq \text{Ext}^1(J, N) \simeq 0$ par hypothèse, $\text{Ext}^1(M, N) \simeq 0$. \square

3.1.2. Construction des modules

Les modules zigzags sont construits comme extensions de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules, ce qui explique l'importance de la proposition 3.1.2 et du lemme 3.1.3 afin de montrer que de tels modules sont bien définis. Leur description formelle est donnée par la proposition qui suit. Le reste de la sous-section permettra toutefois de tirer un meilleur portrait de la structure de ces modules.

Proposition 3.1.4. *Soient \mathbb{T}_i^k les modules définis récursivement pour $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ par les deux étapes suivantes.*

(1) On pose $\mathbb{T}_i^0 = L_q(i)$ et $\mathbb{T}_i^1 = \Delta_q(i_{(1)})$.

(2) Pour $k \geq 2$, \mathbb{T}_i^k est défini comme l'extension non triviale de \mathbb{T}_i^{k-2} par $\Delta_q(i_{(k)})$.

L'extension décrite dans l'étape (2) est unique à isomorphisme près et a pour facteurs de composition $L_q(i_{(0)})$, $L_q(i_{(1)})$, \dots , $L_q(i_{(k)})$. Les modules \mathbb{T}_i^k sont donc bien définis et nommés modules zigzags.

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que $\text{Ext}^1(\mathbb{T}_i^{k-2}, \Delta_q(i_{(k)})) \simeq \mathbb{C}$ pour tout $k \geq 2$ et que cette unique extension a comme facteurs de composition $L_q(i_{(0)})$, $L_q(i_{(1)})$, \dots , $L_q(i_{(k)})$. La preuve est faite par induction sur k . Si $k = 2$ ou $k = 3$, \mathbb{T}_i^{k-2} correspond respectivement à $L_q(i)$ et à $\Delta_q(i_{(1)})$. Le résultat découle alors de la proposition 3.1.2 et des facteurs de composition des modules de Weyl. Soit $k \geq 4$ et supposons que \mathbb{T}_i^{k-2} soit bien défini comme l'unique extension

$$0 \rightarrow \Delta_q(i_{(k-2)}) \rightarrow \mathbb{T}_i^{k-2} \rightarrow \mathbb{T}_i^{k-4} \rightarrow 0, \quad (3.1.1)$$

ayant pour facteurs de composition $L_q(i_{(0)})$, $L_q(i_{(1)})$, \dots , $L_q(i_{(k-2)})$. La suite exacte courte $0 \rightarrow \Delta_q(i_{(k)}) \rightarrow P_q(i_{(k-1)}) \rightarrow \Delta_q(i_{(k-1)}) \rightarrow 0$ et le foncteur $\text{Hom}(\mathbb{T}_i^{k-2}, -)$ permettent d'obtenir la suite exacte longue

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{T}_i^{k-2}, \Delta_q(i_{(k)})) &\rightarrow \text{Hom}(\mathbb{T}_i^{k-2}, P_q(i_{(k-1)})) \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{T}_i^{k-2}, \Delta_q(i_{(k-1)})) \\ &\rightarrow \text{Ext}^1(\mathbb{T}_i^{k-2}, \Delta_q(i_{(k)})) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathbb{T}_i^{k-2}, P_q(i_{(k-1)})) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

Puisque $P_q(i_{(k-1)})$ est un module injectif, $\text{Ext}^1(\mathbb{T}_i^{k-2}, P_q(i_{(k-1)})) \simeq 0$. D'autre part, puisque $\text{soc } P_q(i_{(k-1)}) \simeq L_q(i_{(k-1)})$ n'est pas parmi les facteurs de composition de \mathbb{T}_i^{k-2} (par hypothèse), $\text{Hom}(\mathbb{T}_i^{k-2}, P_q(i_{(k-1)}))$ est également nul. Ainsi, $\text{Hom}(\mathbb{T}_i^{k-2}, \Delta_q(i_{(k-1)})) \simeq \text{Ext}^1(\mathbb{T}_i^{k-2}, \Delta_q(i_{(k)}))$. De plus, la suite exacte courte (3.1.1) et

le foncteur $\text{Hom}(-, \Delta_q(i_{(k-1)}))$ permettent d'obtenir la suite exacte longue

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{T}_i^{k-4}, \Delta_q(i_{(k-1)})) &\rightarrow \text{Hom}(\mathbb{T}_i^{k-2}, \Delta_q(i_{(k-1)})) \rightarrow \text{Hom}(\Delta_q(i_{(k-2)}), \Delta_q(i_{(k-1)})) \\ &\rightarrow \text{Ext}^1(\mathbb{T}_i^{k-4}, \Delta_q(i_{(k-1)})) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Or, les facteurs de composition de \mathbb{T}_i^{k-4} et $\Delta_q(i_{(k-1)})$ sont éloignés au sens du lemme 3.1.3 et donc $\text{Hom}(\mathbb{T}_i^{k-4}, \Delta_q(i_{(k-1)}))$ et $\text{Ext}^1(\mathbb{T}_i^{k-4}, \Delta_q(i_{(k-1)}))$ sont tous deux nuls. La proposition 3.1.1 permet quant à elle de conclure que $\text{Hom}(\Delta_q(i_{(k-2)}), \Delta_q(i_{(k-1)})) \simeq \mathbb{C}$. La suite précédente devient donc

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{T}_i^{k-2}, \Delta_q(i_{(k-1)})) \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

et $\text{Ext}^1(\mathbb{T}_i^{k-2}, \Delta_q(i_{(k)})) \simeq \text{Hom}(\mathbb{T}_i^{k-2}, \Delta_q(i_{(k-1)})) \simeq \mathbb{C}$. L'extension \mathbb{T}_i^k ainsi définie a pour facteurs de composition $L_q(i_{(0)}), L_q(i_{(1)}), \dots, L_q(i_{(k-2)})$ provenant de \mathbb{T}_i^{k-2} et $L_q(i_{(k-1)}), L_q(i_{(k)})$ de $\Delta_q(i_{(k)})$. \square

La définition de \mathbb{T}_i^k révèle ainsi tous ses facteurs de composition, mais ne précise pas l'emplacement de ces derniers dans le diagramme de Loewy du module. Or, par la proposition qui suit, ces facteurs se retrouvent tous dans la coiffe ou dans le socle. Pour un module M , la couverture projective et l'enveloppe injective de M (ici au sens des modules associés à l'enveloppe injective et à la couverture projective de M) sont notés respectivement $\mathbf{P}[M]$ et $\mathbf{J}[M]$.

Proposition 3.1.5. *Pour $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$,*

$$\text{top } \mathbb{T}_i^k \simeq \bigoplus'_{\ell=\{k\}_2}^k L(i_{(\ell)}) \quad \text{et} \quad \text{soc } \mathbb{T}_i^k = \text{rad } \mathbb{T}_i^k \simeq \bigoplus'_{\ell=\{k-1\}_2}^{k-1} L(i_{(\ell)}).$$

De plus, $\text{top } \mathbb{T}_i^0 = \text{soc } \mathbb{T}_i^0 = L_q(i)$ et $\text{rad } \mathbb{T}_i^0 = 0$.

DÉMONSTRATION. Pour $k = 0$, la proposition découle directement de la définition de \mathbb{T}_i^0 . Autrement, les équivalences

$$\text{soc } \mathbb{T}_i^{2m} \simeq \bigoplus'_{\ell=1}^{2m-1} L_q(i_{(\ell)}) \quad \text{et} \quad \text{soc } \mathbb{T}_i^{2m+1} \simeq \bigoplus'_{\ell=0}^{2m} L_q(i_{(\ell)}) \quad (3.1.2)$$

seront d'abord démontrées et étant donné les facteurs de composition de \mathbb{T}_i^k , il ne restera qu'à prouver que $\text{soc } \mathbb{T}_i^k = \text{rad } \mathbb{T}_i^k$ pour obtenir les coiffes escomptées. La vérification des socles des modules \mathbb{T}_i^{2m} pour $m \geq 1$ et \mathbb{T}_i^{2m+1} pour $m \geq 0$ s'effectue par induction sur m . Puisque $\mathbb{T}_i^1 = \Delta_q(i_{(1)})$, $\text{soc } \mathbb{T}_i^1 \simeq L_q(i_{(0)})$. De plus, par la suite exacte

$$0 \rightarrow \Delta_q(i_{(2)}) \rightarrow \mathbb{T}_i^2 \rightarrow L_q(i_{(0)}) \rightarrow 0,$$

le facteur de composition $L_q(i_{(0)})$ de \mathbb{T}_i^2 se situe dans la coiffe du module et $\text{soc } \mathbb{T}_i^2 \simeq \text{soc } \Delta_q(i_{(2)}) \simeq L_q(i_{(1)})$. Le pas d'induction sera explicité pour les modules de type \mathbb{T}_i^{2m} et celui pour les modules de type \mathbb{T}_i^{2m+1} s'effectue pratiquement de la même façon. Soit

$m \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ et supposons que le socle $\mathbb{T}_i^{2(m-1)}$ soit donné par l'équation de gauche de (3.1.2). Soit $\Omega_i^k = \{\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid L_q(i(\ell)) \subset \text{soc } \mathbb{T}_i^k\}$. Par les facteurs de composition de \mathbb{T}_i^{2m} , $\Omega_i^{2m} \subset \{0, 1, \dots, 2m\}$ et $\text{soc } \mathbb{T}_i^{2m} \simeq \bigoplus_{\ell \in \Omega_i^{2m}} L_q(i(\ell))$. Le but sera donc de montrer que $\Omega_i^{2m} = \Lambda_m$ pour $\Lambda_m = \{1, 3, \dots, 2m-1\}$. On a la suite exacte

$$0 \rightarrow \Delta_q(i_{(2m)}) \xrightarrow{\iota} \mathbb{T}_i^{2m} \xrightarrow{\pi} \mathbb{T}_i^{2(m-1)} \rightarrow 0.$$

Comme $\iota(\Delta_q(i_{(2m)}))$ est un sous-module de \mathbb{T}_i^{2m} ,

$$\iota(\Delta_q(i_{(2m)})) \cap \text{soc } \mathbb{T}_i^{2m} = \text{soc } \iota(\Delta_q(i_{(2m)})) \simeq \text{soc } \Delta_q(i_{(2m)}) \simeq L_q(i_{(2m-1)}).$$

Ainsi, $2m \notin \Omega_i^{2m}$, car autrement $L_q(i_{(2m)})$ serait dans $\text{soc } \mathbb{T}_i^{2m}$ et dans $\iota(\Delta_q(i_{(2m)}))$, contredisant l'équation précédente. De plus, si $2n$ était dans Ω_i^{2m} pour un certain $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tel que $n < m$, alors $L_q(i_{(2n)})$ serait dans le noyau de π puisque $\pi(\text{soc } \mathbb{T}_i^{2m}) \subset \text{soc } \mathbb{T}_i^{2(m-1)}$ et $L_q(i_{(2n)}) \not\subset \text{soc } \mathbb{T}_i^{2(m-1)}$ par hypothèse. Or, $\text{Ker } \pi \simeq \text{Im } \iota \simeq \Delta_q(i_{(2m)})$, qui n'a pas de tel facteur de composition $L_q(i_{(2n)})$. Donc, $\Omega_i^{2m} \subset \Lambda_m$ et comme l'enveloppe injective d'un module est la même que celle de son socle,

$$\begin{aligned} \mathbb{J}[\mathbb{T}_i^{2m}] &\simeq \mathbb{J}[\text{soc } \mathbb{T}_i^{2m}] \simeq \mathbb{J}\left[\bigoplus_{\ell \in \Omega_i^{2m}} L_q(i(\ell))\right] \simeq \bigoplus_{\ell \in \Omega_i^{2m}} \mathbb{J}[L_q(i(\ell))] \\ &\simeq \bigoplus_{\ell \in \Omega_i^{2m}} P_q(i(\ell)) \subset \bigoplus_{\ell \in \Lambda_m} P_q(i(\ell)). \end{aligned}$$

Si ℓ n'est pas dans Ω_i^{2m} pour un certain $\ell \in \Lambda_m$, alors $L_q(i(\ell))$ n'est pas un facteur de composition de $\bigoplus_{\ell \in \Omega_i^{2m}} P_q(i(\ell))$, étant donné les facteurs de chacun des $P_q(i(\ell))$ et l'inclusion de l'équation précédente. Cela implique que $L_q(i(\ell))$ est un facteur de composition de \mathbb{T}_i^{2m} mais pas de son enveloppe injective, une contradiction. De ce fait, $\Omega_i^{2m} = \Lambda_m$ tel que voulu.

Il ne reste qu'à montrer que pour $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $\text{soc } \mathbb{T}_i^k = \text{rad } \mathbb{T}_i^k$. Pour ce faire, il suffira de prouver que $\mathbb{T}_i^k / \text{soc } \mathbb{T}_i^k$ est semi-simple. Cela signifiera alors que le diagramme de Loewy de \mathbb{T}_i^k a précisément deux étages ($\text{top } \mathbb{T}_i^k \neq \text{soc } \mathbb{T}_i^k$ pour $k \geq 1$), celui du haut correspondant à sa coiffe et celui du bas correspondant à la fois à son socle et à son radical. Le diagramme de Loewy du module $\mathbb{J}[\mathbb{T}_i^k]$ a trois étages, par la première partie de la présente preuve et la structure des $P_q(i(\ell))$. Celui pour $\text{rad } \mathbb{J}[\mathbb{T}_i^k] / \text{soc } \mathbb{J}[\mathbb{T}_i^k]$ a donc un seul étage, signifiant que le module est semi-simple. Le reste de la preuve consistera dès lors à construire une injection

$$\tilde{f} : \mathbb{T}_i^k / \text{soc } \mathbb{T}_i^k \hookrightarrow \text{rad } \mathbb{J}[\mathbb{T}_i^k] / \text{soc } \mathbb{J}[\mathbb{T}_i^k].$$

Soit

$$f : \mathbb{T}_i^k \hookrightarrow \mathbb{J}[\mathbb{T}_i^k] \simeq \bigoplus_{\ell \in \Omega_i^k} P_q(i(\ell))$$

l'inclusion naturelle. La coiffe de $\mathbb{J}[\mathbb{T}_i^k]$ est constituée des modules simples $L_q(i(\ell))$ pour $\ell \in \Omega_i^k$ et tous les facteurs de composition de cette forme dans \mathbb{T}_i^k se trouvent dans $\text{soc } \mathbb{T}_i^k$.

Puisque $f(\text{soc } \mathbb{T}_i^k) \subset \text{soc } \mathbb{J}[\mathbb{T}_i^k]$, aucun des sommants directs de $\text{top } \mathbb{J}[\mathbb{T}_i^k]$ n'est donc dans l'image de f . Autrement dit, $\text{Im } f \subset \text{rad } \mathbb{J}[\mathbb{T}_i^k]$. Comme f est injective, $f(\text{soc } \mathbb{T}_i^k) = \text{soc } \mathbb{J}[\mathbb{T}_i^k]$ et l'application induit, par passage aux conoyaux, l'injection \tilde{f} souhaitée. \square

Le diagramme de Loewy des modules zigzags est donc composé de deux étages, celui du haut correspondant à la coiffe et celui du bas correspondant au socle et au radical. Leur structure peut alors être déduite de la proposition précédente.

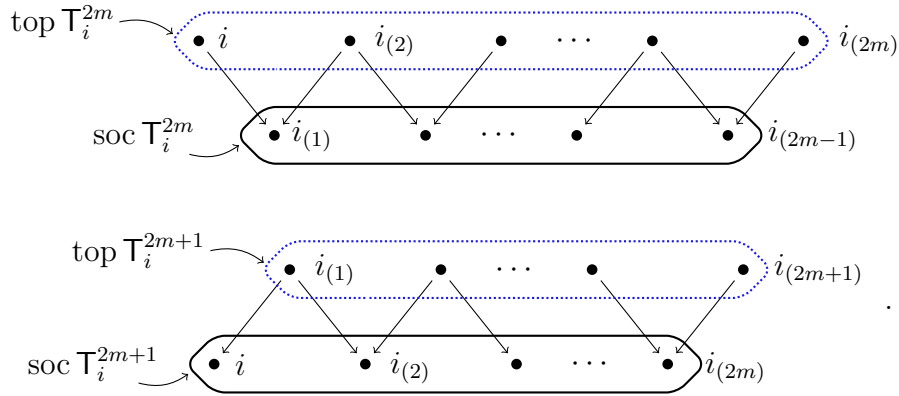


Figure 3.1 – Diagramme de Loewy du module zigzag \mathbb{T}_i^k respectivement pour k pair et pour k impair.

Les flèches des diagrammes ci-haut sont justifiées par le groupe d'extension de deux modules simples : la proposition 3.1.2 stipule qu'une flèche entre des modules simples d'indices $i_{(\ell)}$ et $i_{(\ell')}$ ne peut être établie que si $\ell' \in \{\ell \pm 1\}$. Aucune de ces flèche ne peut être retirée, car cela contredirait l'indécomposabilité de \mathbb{T}_i^k . Le terme « zigzag » pour qualifier ces modules prend alors tout son sens.

L'enveloppe injective des \mathbb{T}_i^k a été calculée dans la démonstration de la proposition précédente, du fait que $\mathbb{J}[M] \simeq \mathbb{J}[\text{soc } M]$ et $\mathbb{J}[M \oplus N] \simeq \mathbb{J}[M] \oplus \mathbb{J}[N]$ quels que soient les modules M et N . Puisque pour des modules M et N , $\mathbb{P}[M] \simeq \mathbb{P}[\text{top } M]$ et $\mathbb{P}[M \oplus N] \simeq \mathbb{P}[M] \oplus \mathbb{P}[N]$, la couverture projective des \mathbb{T}_i^k est aussi naturellement déduite.

Corollaire 3.1.6. *Pour $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$,*

$$\mathbb{P}[\mathbb{T}_i^k] \simeq \bigoplus_{\ell=\{k\}_2}^k P_q(i_{(\ell)}) \quad \text{et} \quad \mathbb{J}[\mathbb{T}_i^k] \simeq \bigoplus_{\ell=\{k-1\}_2}^{k-1} P_q(i_{(\ell)}).$$

De plus, $\mathbb{P}[\mathbb{T}_i^0] = \mathbb{J}[\mathbb{T}_i^0] = P_q(i)$.

3.1.3. Noyaux des couvertures projectives

Soit $g_i^k : \mathbb{P}[\mathbb{T}_i^k] \rightarrow \mathbb{T}_i^k$ la projection naturelle. Il sera démontré dans ce qui suit que $\text{Ker } g_i^k$ est également un module zigzag. Cette preuve sera faite par induction sur k et un lemme est avant toute chose nécessaire afin de vérifier l'un des cas de base.

Lemme 3.1.7. *Le radical de $P_q(i)$ est \mathbb{T}_i^1 si $i < p$ et $\mathbb{T}_{i(-1)}^2$ sinon.*

DÉMONSTRATION. Si $i < p$, la suite exacte $0 \rightarrow \Delta_q(i_{(1)}) \rightarrow P_q(i) \rightarrow \Delta_q(i) \rightarrow 0$ implique que $\text{rad } P_q(i) \simeq \Delta_q(i_{(1)}) = \mathbb{T}_i^1$, car $\text{top } P_q(i) \simeq L_q(i) = \Delta_q(i)$. Supposons que $i \geq p$. Par définition, $\mathbb{T}_{i(-1)}^2$ est l'unique extension de $L_q(i_{(-1)})$ par $\Delta_q(i_{(1)})$. Pour montrer que $\text{rad } P_q(i) \simeq \mathbb{T}_{i(-1)}^2$, il suffit donc de montrer que

$$0 \rightarrow \Delta_q(i_{(1)}) \rightarrow \text{rad } P_q(i) \rightarrow L_q(i_{(-1)}) \rightarrow 0 \quad (3.1.3)$$

forme une suite exacte non scindée. Dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & & & \\
 & & & & \downarrow & & & & \\
 & & & & \Delta_q(i_{(1)}) & & & & \\
 & & & & \downarrow & & & & \\
 0 & \dashrightarrow & \text{rad } P_q(i) & \dashrightarrow^{\tilde{\iota}} & P_q(i) & \dashrightarrow^{\tilde{\pi}} & L_q(i) & \dashrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \phi & & \downarrow \psi & & \downarrow \text{id} & & \\
 0 & \longrightarrow & L_q(i_{(-1)}) & \xrightarrow{\iota} & \Delta_q(i) & \xrightarrow{\pi} & L_q(i) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & & & \\
 & & & & 0 & & & &
 \end{array}$$

les suites exactes données par les flèches pleines sont celles décrites dans les propositions 1.4.2 et 1.4.8. Si l'on pose $\tilde{\pi} = \pi \circ \psi$, alors $\tilde{\pi}$ est surjective et le carré de droite commute. Puisqu'il y a une suite exacte

$$0 \rightarrow \text{rad } P_q(i) \rightarrow P_q(i) \rightarrow \text{top } P_q(i) \rightarrow 0$$

pour $\text{top } P_q(i) \simeq L_q(i)$ et que $\text{Hom}(P_q(i), L_q(i)) \simeq \mathbb{C}$, on peut définir une injection $\tilde{\iota} : \text{rad } P_q(i) \rightarrow P_q(i)$ telle que la ligne du haut soit exacte. Il existe alors $\phi : \text{rad } P_q(i) \rightarrow L_q(i_{(-1)})$ tel que tout le diagramme commute, par un résultat classique démontré notamment dans [4]. Comme $\text{Ker } \psi \simeq \Delta_q(i_{(1)})$ et $\text{Ker } \text{id} \simeq \text{coker } \psi \simeq 0$, le lemme du serpent donne la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Ker } \phi \rightarrow \Delta_q(i_{(1)}) \rightarrow 0 \rightarrow \text{coker } \phi \rightarrow 0 \rightarrow \text{coker } \text{id} \rightarrow 0.$$

Ainsi, $\text{Ker } \phi \simeq \Delta_q(i_{(1)})$ et $\text{coker } \phi \simeq 0$, ce qui permet d'obtenir la suite exacte (3.1.3). Supposons que cette suite scinde, c'est-à-dire qu'il existe une injection $\tilde{\phi} : L_q(i_{(-1)}) \rightarrow \text{rad } P_q(i)$ telle que $\phi \circ \tilde{\phi} = \text{id}_{L_q(i_{(-1)})}$. Alors, $\tilde{\iota} \circ \tilde{\phi} \neq 0$, car $\tilde{\iota}$ et $\tilde{\phi}$ sont tous deux injectifs. On a toutefois $\tilde{\iota} \circ \tilde{\phi} : L_q(i_{(-1)}) \rightarrow P_q(i)$, ce qui contredit la proposition 3.1.1 selon laquelle

$\text{Hom}(L_q(i_{(-1)}), P_q(i)) \simeq 0$. Par conséquent, la suite exacte courte non scindée (3.1.3) existe bel et bien. \square

Théorème 3.1.8. *Si $i < p$ et k est pair, alors $\text{Ker } g_i^k \simeq \mathbb{T}_i^{k+1}$. Autrement,*

$$\text{Ker } g_i^k \simeq \mathbb{T}_{i_{(2\{k\}_2-1)}}^{k+2\{k+1\}_2} = \begin{cases} \mathbb{T}_{i_{(-1)}}^{k+2} & \text{si } k \text{ est pair;} \\ \mathbb{T}_{i_{(1)}}^k & \text{sinon.} \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. On procède par induction sur $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Si $k = 0$, $\mathbb{T}_i^k = L_q(i)$ et $\mathbb{P}[\mathbb{T}_i^k] \simeq P_q(i)$. Puisque $\text{Hom}(P_q(i), L_q(i)) \simeq \mathbb{C}$, g_i^0 correspond au morphisme surjectif de la suite exacte courte $0 \rightarrow \text{rad } P_q(i) \rightarrow P_q(i) \rightarrow L_q(i) \rightarrow 0$. Ainsi, $\text{Ker } g_i^0 \simeq \text{rad } P_q(i)$ et le résultat découle du lemme précédent. Si $k = 1$, $\mathbb{T}_i^k = \Delta_q(i_{(1)})$ et $\mathbb{P}[\mathbb{T}_i^k] \simeq P_q(i_{(1)})$. D'autre part, par la suite exacte $0 \rightarrow \Delta_q(i_{(2)}) \rightarrow P_q(i_{(1)}) \rightarrow \Delta_q(i_{(1)}) \rightarrow 0$ et l'équivalence $\text{Hom}(P_q(i_{(1)}), \Delta_q(i_{(1)})) \simeq \mathbb{C}$, $\text{Ker } g_i^1 \simeq \Delta_q(i_{(2)}) = \mathbb{T}_{i_{(1)}}^1$. Soit maintenant $k \geq 2$ et supposons l'énoncé vrai pour la valeur $k - 2$. On suppose aussi pour commencer que $i \geq p$ ou que k est impair, donc que $\text{Ker } g_i^{k-2} \simeq \mathbb{T}_{i_{(2\{k\}_2-1)}}^{k+2\{k+1\}_2-2}$. En notant $f_i^{k'}$, $k' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, le morphisme injectif de la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Ker } g_i^{k'} \xrightarrow{f_i^{k'}} \mathbb{P}[\mathbb{T}_i^{k'}] \xrightarrow{g_i^{k'}} \mathbb{T}_i^{k'} \rightarrow 0, \quad (3.1.4)$$

on a les flèches pleines du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \dashrightarrow & \Delta_q(i_{(k+1)}) & \dashrightarrow^{\iota_3} & \text{Ker } g_i^k & \dashrightarrow^{\pi_3} & \text{Ker } g_i^{k-2} \simeq \mathbb{T}_{i_{(2\{k\}_2-1)}}^{k+2\{k+1\}_2-2} \dashrightarrow 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow f_i^k & & \downarrow f_i^{k-2} \\ 0 & \dashrightarrow & P_q(i_{(k)}) & \dashrightarrow^{\iota_2} & \mathbb{P}[\mathbb{T}_i^k] \simeq \bigoplus_{\ell=\{k\}_2}^k P_q(i_{(\ell)}) & \dashrightarrow^{\pi_2} & \mathbb{P}[\mathbb{T}_i^{k-2}] \simeq \bigoplus_{\ell=\{k\}_2}^{k-2} P_q(i_{(\ell)}) \dashrightarrow 0 \\ & & \downarrow g & & \downarrow g_i^k & & \downarrow g_i^{k-2} \\ 0 & \longrightarrow & \Delta_q(i_{(k)}) & \longrightarrow^{\iota_1} & \mathbb{T}_i^k & \longrightarrow^{\pi_1} & \mathbb{T}_i^{k-2} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array} \quad (3.1.5)$$

La colonne de gauche du diagramme est la suite exacte de la proposition 1.4.8, les colonnes du milieu et de droite sont la suite exacte (3.1.4) respectivement pour $k' = k$ et $k' = k - 2$ et la ligne du bas correspond à la définition de \mathbb{T}_i^k pour $k \geq 2$. Le but est de construire les morphismes ι_3 et π_3 de façon à ce que la rangée du haut forme une suite

exacte courte non scindée. Cela signifiera que $\text{Ker } g_i^k$ est l'extension de $\mathbb{T}_{i_{(2\{k\}_2-1)}}^{k+2\{k+1\}_2-2}$ par $\Delta_q(i_{(k+1)}) = \Delta_q(i_{(2\{k\}_2-1+k+2\{k+1\}_2)})$ et cette extension est $\mathbb{T}_{i_{(2\{k\}_2-1)}}^{k+2\{k+1\}_2}$ par définition des modules zigzags.

Étant donné que $\mathbb{P}[\mathbb{T}_i^k]$ est un module projectif et que g_i^{k-2} est surjectif, il existe un morphisme $\pi_2 : \mathbb{P}[\mathbb{T}_i^k] \rightarrow \mathbb{P}[\mathbb{T}_i^{k-2}]$ tel que $g_i^{k-2} \circ \pi_2 = \pi_1 \circ g_i^k$. Supposons que π_2 ne soit pas surjectif. Alors, l'image de π_2 ne couvre pas toute la coiffe de $\mathbb{P}[\mathbb{T}_i^{k-2}]$, c'est-à-dire que pour un certain $\ell' \in \{\{k\}_2, \{k\}_2 + 2, \dots, k-2\}$, le facteur $L_q(i_{(\ell')})$ est dans la coiffe de $\mathbb{P}[\mathbb{T}_i^{k-2}]$, mais n'est pas dans $\text{Im } \pi_2$. Or, le seul autre facteur $L_q(i_{(\ell')})$ dans $\mathbb{P}[\mathbb{T}_i^{k-2}]$ se situe dans $\text{soc } \mathbb{P}[\mathbb{T}_i^{k-2}]$ et est annulé par g_i^{k-2} , par l'exactitude de la colonne de droite. De ce fait, $g_i^{k-2} \circ \pi_2$ annule les deux facteurs de composition $L_q(i_{(\ell')})$ de $\mathbb{P}[\mathbb{T}_i^k]$ et ce facteur de \mathbb{T}_i^{k-2} n'est pas couvert par $\text{Im } g_i^{k-2} \circ \pi_2$. Le morphisme $g_i^{k-2} \circ \pi_2 = \pi_1 \circ g_i^k$ n'est donc pas surjectif, ce qui représente une contradiction car π_1 et g_i^k le sont. On en conclut que π_2 est surjectif.

Étant donné que $P_q(i_{(k)})$ est un module projectif et que g_i^k est surjectif, il existe également un morphisme $\iota_2 : P_q(i_{(k)}) \rightarrow \mathbb{P}[\mathbb{T}_i^k]$ tel que $g_i^k \circ \iota_2 = \iota_1 \circ g$. Supposons que ι_2 ne soit pas injectif. Alors, le facteur $L_q(i_{(k)})$ de la coiffe de $\mathbb{P}[\mathbb{T}_i^k]$ n'est pas dans $\text{Im } \iota_2$ (s'il l'était, les quatre facteurs de composition de $P_q(i_{(k)})$ seraient dans $\text{Im } \iota_2$). Par l'exactitude de la colonne du milieu, le facteur $L_q(i_{(k)})$ de $\text{soc } \mathbb{P}[\mathbb{T}_i^k]$ est annulé par g_i^k . Donc, le facteur $L_q(i_{(k)})$ de \mathbb{T}_i^k n'est dans $\text{Im } g_i^k \circ \iota_2 = \text{Im } \iota_1 \circ g$. Ceci représente une contradiction, car $L_q(i_{(k)})$ est dans l'image de g (par surjectivité) et dans celle de ι_1 (par injectivité). On en conclut que ι_2 est injectif.

Par l'exactitude des colonnes de gauche et du milieu et par la commutativité du carré inférieur gauche, il existe $\iota_3 : \Delta_q(i_{(k+1)}) \rightarrow \text{Ker } g_i^k$ tel que le carré supérieur gauche du diagramme commute. Le lemme du serpent appliqué aux colonnes de gauche et centrale du diagramme donne alors la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Ker } \iota_3 \rightarrow 0 \rightarrow \dots,$$

puisque $\text{Ker } \iota_2 \simeq 0$. Donc, $\text{Ker } \iota_3 \simeq 0$. Similairement, on obtient $\pi_3 : \text{Ker } g_i^k \rightarrow \text{Ker } g_i^{k-2}$ tel que le carré supérieur droit commute. Le lemme du serpent appliqué aux colonnes centrale et de droite donne la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Ker } \pi_3 \rightarrow \text{Ker } \pi_2 \rightarrow \text{Ker } \pi_1 \rightarrow \text{Coker } \pi_3 \rightarrow \text{Coker } \pi_2 \rightarrow \text{Coker } \pi_1 \rightarrow 0.$$

Plusieurs de ces sous-modules sont connus. En effet, $\text{Ker } \pi_2 \simeq P_q(i_{(k)})$ (π_2 est une surjection sur un module projectif), $\text{Ker } \pi_1 \simeq \text{Im } \pi_2 \simeq \Delta_q(i_{(k)})$ et $\text{Coker } \pi_1 \simeq \text{Coker } \pi_2 \simeq 0$ (π_1 et π_2 sont des surjections). Ainsi, le lemme du serpent donne

$$0 \rightarrow \text{Ker } \pi_3 \rightarrow P_q(i_{(k)}) \rightarrow \Delta_q(i_{(k)}) \quad \text{et} \quad \text{Coker } \pi_3 \simeq 0.$$

Puisque $\text{Hom}(P_q(i_{(k)}), \Delta_q(i_{(k)})) \simeq \mathbb{C}$, la suite ci-dessus est celle de la proposition 1.4.8, $\text{Ker } \pi_3 \simeq \Delta_q(i_{(k+1)}) \simeq \text{Im } \iota_3$ et la première ligne du diagramme est exacte. Supposons que cette ligne scinde, c'est-à-dire qu'il existe une injection $\tilde{\pi}_3 : \text{Ker } g_i^{k-2} \rightarrow \text{Ker } g_i^k$ telle que $\pi_3 \circ \tilde{\pi}_3 = \text{id}_{\text{Ker } g_i^{k-2}}$. Comme $\mathbf{P}[\mathbb{T}_i^{k-2}]$ est un module projectif, il existe aussi une injection $\tilde{\pi}_2 : \mathbf{P}[\mathbb{T}_i^{k-2}] \rightarrow \mathbf{P}[\mathbb{T}_i^k]$ telle que $\pi_2 \circ \tilde{\pi}_2 = \text{id}_{\mathbf{P}[\mathbb{T}_i^{k-2}]}$. Par l'injectivité de $f_i^k \circ \tilde{\pi}_3$ et de $\tilde{\pi}_2 \circ f_i^{k-2}$, ces deux morphismes de $\text{Ker } g_i^{k-2}$ vers $\mathbf{P}[\mathbb{T}_i^k]$ sont non nuls. De surcroît,

$$\begin{aligned} \text{Hom}\left(\text{Ker } g_i^{k-2}, \mathbf{P}[\mathbb{T}_i^k]\right) &\simeq \text{Hom}\left(\mathbb{T}_{i_{(2\{k\}_2-1)}}^{k+2\{k+1\}_2-2}, P_q(i_{(k)})\right) \\ &\oplus \text{Hom}\left(\mathbb{T}_{i_{(2\{k\}_2-1)}}^{k+2\{k+1\}_2-2}, \bigoplus_{\{k\}_2}^{k-2} P_q(i_{(\ell)})\right). \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Les facteurs de composition de $\mathbb{T}_{i_{(2\{k\}_2-1)}}^{k+2\{k+1\}_2-2}$ sont $L_q(i_{(2\{k\}_2-1)}), L_q(i_{(2\{k\}_2)}), \dots, L_q(i_{(k-1)})$. Ainsi, aucun de ces facteurs ne correspond au socle $L_q(i_{(k)})$ de $P_q(i_{(k)})$ et donc le premier groupe Hom du côté droit de (3.1.6) est nul. Également, l'enveloppe injective de $\mathbb{T}_{i_{(2\{k\}_2-1)}}^{k+2\{k+1\}_2-2}$ est obtenue à partir du corollaire 3.1.6 pour k pair et pour k impair et cette dernière correspond à $\bigoplus_{\ell=\{k\}_2}^{k-2} P_q(i_{(\ell)})$ dans les deux cas. Par l'unicité des enveloppes injectives, le second groupe Hom du côté droit de (3.1.6) est équivalent à \mathbb{C} . Le groupe $\text{Hom}(\text{Ker } g_i^{k-2}, \mathbf{P}[\mathbb{T}_i^k])$ est donc également équivalent \mathbb{C} , ce qui implique que $f_i^k \circ \tilde{\pi}_3 = \tilde{\pi}_2 \circ f_i^{k-2}$ (il s'agit en fait d'une égalité à constante non nulle près, mais au besoin il suffit de redéfinir $\tilde{\pi}_3$ pour que le morphisme englobe cette constante). Les colonnes du milieu et de droite de 3.1.5 étant exactes, il existe donc un morphisme $\tilde{\pi}_1 : \mathbb{T}_i^{k-2} \rightarrow \mathbb{T}_i^k$ tel que $\tilde{\pi}_1 \circ g_i^{k-2} = g_i^k \circ \tilde{\pi}_2$. De ce fait,

$$g_i^{k-2} = g_i^{k-2} \circ \pi_2 \circ \tilde{\pi}_2 = \pi_1 \circ g_i^k \circ \tilde{\pi}_2 = \pi_1 \circ \tilde{\pi}_1 \circ g_i^{k-2}$$

et puisque g_i^{k-2} est surjectif, $\tilde{\pi}_1 \circ \pi_1 = \text{id}_{\mathbb{T}_i^{k-2}}$. Ceci contredit le fait que la rangée du bas du diagramme ne scinde pas. On conclut que la rangée du haut est non scindée et donc que $\text{Ker } g_i^k$ a la forme souhaitée. Dans le cas où $i < p$ et k est pair, il suffit pour le pas d'induction d'appliquer le même raisonnement en remplaçant $\text{Ker } g_i^{k-2} \simeq \mathbb{T}_{i_{(2\{k\}_2-1)}}^{k+2\{k+1\}_2-2}$ dans le coin supérieur droit du diagramme 3.1.5 par $\text{Ker } g_i^{k-2} \simeq \mathbb{T}_i^{k-1}$ afin d'obtenir $\text{Ker } g_i^k \simeq \mathbb{T}_i^{k+1}$. \square

Les diagrammes de Loewy associés aux couvertures projectives des modules zigzags permettent de visualiser plus aisément les noyaux des morphismes g_i^k . Par exemple, les diagrammes pour les modules $\mathbf{P}[\mathbb{T}_i^6] \simeq \bigoplus_{\ell=0}^6 P_q(i_{(\ell)})$ et $\mathbf{P}[\mathbb{T}_i^7] \simeq \bigoplus_{\ell=1}^7 P_q(i_{(\ell)})$ sont respectivement donnés par les figures 3.2 et 3.3.

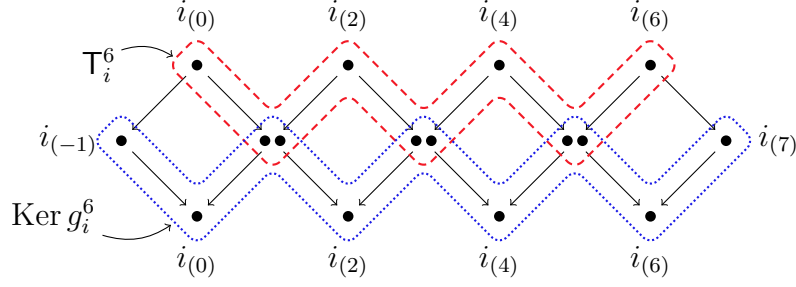


Figure 3.2 – Structure du module associé à la couverture projective de T_i^6 .

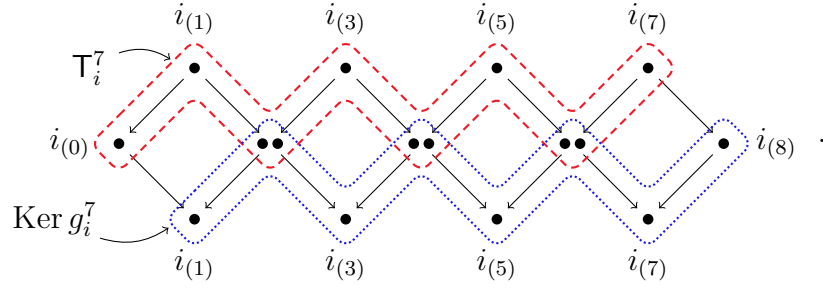


Figure 3.3 – Structure du module associé à la couverture projective de T_i^7 .

Ces diagrammes de Loewy sont construits à partir de ceux associés à chaque sommant direct $P_q(i_{(\ell)})$ des couvertures projectives (voir figures 1.3 et 1.4). Les facteurs de composition de multiplicité 2 y sont représentés par des points doubles. Leurs indices ne sont pas indiqués, mais sont facilement déduits. Les noyaux des morphismes g_i^k sont illustrés par les **lignes pointillées bleues** et leurs images par les **tirés rouges**. Lorsque ces lignes passent par des points doubles, l'image et le noyau contiennent chacun l'un des facteurs de composition de multiplicité 2. Tel qu'attendu, les noyaux de g_i^6 pour $i \geq p$ et de g_i^7 correspondent respectivement à $T_{i(-1)}^8$ et à $T_{i(1)}^7$. Lorsque $i < p$, le point d'indice $i(-1)$ du premier diagramme doit être retiré, ce qui donne bien $\text{Ker } g_i^6 \simeq T_i^7$.

3.2. Produits tensoriels avec un module de Weyl

Tous les modules intervenant comme sommants directs du produit tensoriel $L_q(i_1) \otimes \Delta_q(i_2)$ sont désormais connus, ce qui permettra d'explicitier la décomposition de ce produit ainsi que celles de $\Delta_q(i_1) \otimes \Delta_q(i_2)$ et de $\Delta_q(i_1) \otimes \nabla_q(i_2)$. Afin d'alléger la notation des modules zigzags dans les règles de fusion, on définit

$$\mathcal{T}_{d,c_1,c_2} = \begin{cases} T_{(c_1-c_2)p+(p-d-2)}^{2c_2} & \text{si } c_1 \geq c_2; \\ T_{(c_2-c_1-1)p+d}^{2c_1+1} & \text{si } c_1 < c_2; \end{cases}$$

pour $d, c_1, c_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tels que $d < p - 1$. Le diagramme de Loewy de $\mathcal{T}_{d, c_1, c_2}$ est donc donné par les figures 3.4 et 3.5.

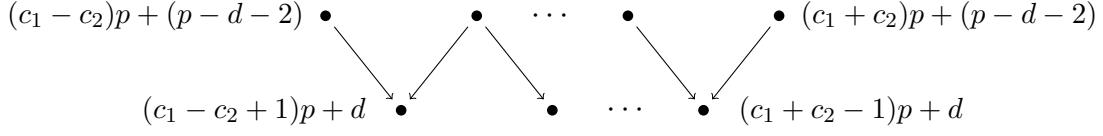


Figure 3.4 – Diagramme de Loewy de $\mathcal{T}_{d, c_1, c_2}$ lorsque $c_1 \geq c_2$.

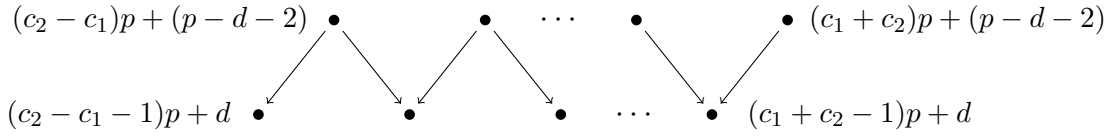


Figure 3.5 – Diagramme de Loewy de $\mathcal{T}_{d, c_1, c_2}$ lorsque $c_1 < c_2$.

Les indices omis dans les diagrammes ci-haut sont facilement déduits par la structure des modules zigzags. De plus,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[\mathcal{T}_{d, c_1, c_2}] &\simeq \begin{cases} \bigoplus'_{c=c_1-c_2}^{c_1+c_2} P_q(cp + (p-d-2)) & \text{si } c_1 \geq c_2; \\ \bigoplus'_{c=c_2-c_1}^{c_1+c_2} P_q(cp + (p-d-2)) & \text{si } c_1 < c_2; \end{cases} \\ &= \bigoplus'_{c=|c_1-c_2|}^{c_1+c_2} P_q(cp + (p-d-2)) \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

par le corollaire 3.1.6 et pour $\tilde{g}_{d, c_1, c_2} : \mathbf{P}[\mathcal{T}_{d, c_1, c_2}] \rightarrow \mathcal{T}_{d, c_1, c_2}$ la projection naturelle,

$$\begin{aligned} \text{Ker } \tilde{g}_{d, c_1, c_2} &\simeq \begin{cases} \mathbb{T}_{(c_1-c_2-1)p+d}^{2(c_2+1)} & \text{si } c_1 > c_2; \\ \mathbb{T}_{p-d-2}^{2c_1+1} & \text{si } c_1 = c_2; \\ \mathbb{T}_{(c_2-c_1)p+(p-d-2)}^{2c_1+1} & \text{si } c_1 < c_2; \end{cases} \\ &= \mathcal{T}_{p-d-2, c_1, c_2+1} \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

par le théorème 3.1.8. Les résultats principaux peuvent maintenant être démontrés.

Théorème 3.2.1. *Soient $i_1 = c_1p + d_1$ et $i_2 = c_2p + d_2$ pour $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tels que $d_1, d_2 < p - 1$. Alors,*

$$L_q(i_1) \otimes \Delta_q(i_2) \simeq \bigoplus'_{d=|d_1+d_2-p+2|}^{p-|d_1-d_2|-2} \mathcal{T}_{d, c_1, c_2} \oplus \bigoplus'_{c=|c_1-c_2+1|}^{c_1+c_2-1} \bigoplus'_{d=p-d_1+d_2}^{p-1-\{d_1+d_2+1\}_2} P_q(cp + d)$$

$$\bigoplus_{c=|c_1-c_2|}^{c_1+c_2} \bigoplus'_{d=2p-d_1-d_2-2}^{p-1-\{d_1+d_2+p+1\}_2} P_q(cp+d).$$

DÉMONSTRATION. Il sera montré par induction sur $c_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ que

$$L_q(c_1p+d_1) \otimes \Delta_q(c_2p+d_2) \simeq M_1 \oplus M_2 \oplus M_3$$

pour

$$\begin{aligned} M_1 &= \bigoplus'_{d=|d_1+d_2-p+2|}^{p-|d_1-d_2|-2} \mathcal{T}_{d,c_1,c_2}, \\ M_2 &= \bigoplus'_{c=|c_1-c_2+1|}^{c_1+c_2-1} \bigoplus'_{d=p-d_1+d_2}^{p-1-\{d_1+d_2+1\}_2} P_q(cp+d) \\ \text{et } M_3 &= \bigoplus'_{c=|c_1-c_2|}^{c_1+c_2} \bigoplus'_{d=2p-d_1-d_2-2}^{p-1-\{d_1+d_2+p+1\}_2} P_q(cp+d). \end{aligned}$$

Supposons pour commencer que $c_2 = 0$. Alors, $M_2 = 0$ et $M_1 \oplus M_2 \oplus M_3$ a la forme

$$\begin{aligned} & \bigoplus'_{d=|d_1+d_2-p+2|}^{p-|d_1-d_2|-2} \mathcal{T}_{d,c_1,0} \oplus \bigoplus'_{d=2p-d_1-d_2-2}^{p-1-\{d_1+d_2+p+1\}_2} P_q(c_1p+d) \\ &= \bigoplus'_{d=|d_1+d_2-p+2|}^{p-|d_1-d_2|-2} L_q(c_1p+(p-d-2)) \oplus \bigoplus'_{d=2p-d_1-d_2-2}^{p-1-\{d_1+d_2+p+1\}_2} P_q(c_1p+d) \\ &\stackrel{1}{=} \bigoplus'_{d=|d_1-d_2|}^{\min(2p-d_1-d_2-4, d_1+d_2)} L_q(c_1p+d) \oplus \bigoplus'_{d=2p-d_1-d_2-2}^{p-1-\{d_1+d_2+p+1\}_2} P_q(c_1p+d) \\ &\stackrel{2}{=} L_q(c_1p+d_1) \otimes L_q(d_2) = L_q(c_1p+d_1) \otimes \Delta_q(d_2). \end{aligned}$$

Dans l'équation ci-haut, l'égalité 2 vient du théorème 2.1.9 et l'égalité 1 vient du changement d'indice de sommation $d \leftrightarrow p-d-2 : |d_1+d_2-p+2| = \max(d_1+d_2-p+2, -d_1-d_2+p-2)$ devient $\min(2p-d_1-d_2-4, d_1+d_2)$, $p-|d_1-d_2|-2$ devient $|d_1-d_2|$ et les bornes doivent être interchangées. Soit maintenant $c_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ et supposons le théorème vrai pour c_2-1 . La suite exacte courte

$$0 \rightarrow \Delta_q(c_2p+d_2) \rightarrow P_q((c_2-1)p+(p-d_2-2)) \rightarrow \Delta_q((c_2-1)p+(p-d_2-2)) \rightarrow 0$$

de la proposition 1.4.8 et le foncteur $L_q(c_1p+d_1) \otimes -$ permettent d'obtenir la suite exacte $0 \rightarrow M \xrightarrow{\iota} P \xrightarrow{\pi} N \rightarrow 0$ pour

$$\begin{aligned} M &= L_q(c_1p+d_1) \otimes \Delta_q(c_2p+d_2), \quad P = L_q(c_1p+d_1) \otimes P_q((c_2-1)p+(p-d_2-2)) \\ \text{et } N &= L_q(c_1p+d_1) \otimes \Delta_q((c_2-1)p+(p-d_2-2)). \end{aligned}$$

Par hypothèse, $N \simeq N_1 \oplus N_2 \oplus M_2$ avec

$$N_1 = \bigoplus'_{d=|d_1-d_2|}^{\min(d_1+d_2, 2p-d_1-d_2-4)} \mathcal{T}_{d, c_1, c_2-1} \stackrel{3}{=} \bigoplus'_{d=|d_1+d_2-p+2|}^{p-|d_1-d_2|-2} \mathcal{T}_{p-d-2, c_1, c_2-1}$$

et $N_2 = \bigoplus'_{c=|c_1-c_2+2|}^{c_1+c_2-2} \bigoplus'_{d=2p-d_1-d_2-2}^{p-1-\{d_1+d_2+p+1\}_2} P_q(cp+d),$

où l'égalité 3 vient à nouveau du changement d'indice de sommation $d \leftrightarrow p-d-2$. Par le théorème 2.2.5, $P \simeq P_1 \oplus 2M_2 \oplus P_2$ avec

$$P_1 = \bigoplus'_{d=|d_1+d_2-p+2|}^{p-|d_1-d_2|-2} \bigoplus'_{c=|c_1-c_2+1|}^{c_1+c_2-1} P_q(cp+d)$$

et $P_2 = 2 \bigoplus'_{d=2p-d_1-d_2-2}^{p-1-\{d_1+d_2+p+1\}_2} \bigoplus''_{c=|c_1-c_2+1|-1}^{c_1+c_2} P_q(cp+d)$

$$\stackrel{4}{=} \bigoplus'_{d=2p-d_1-d_2-2}^{p-1-\{d_1+d_2+p+1\}_2} \left(\bigoplus'_{c=|c_1-c_2+1|-1}^{c_1+c_2} P_q(cp+d) \oplus \bigoplus'_{c=|c_1-c_2+1|+1}^{c_1+c_2-2} P_q(cp+d) \right)$$

$$= \begin{cases} \bigoplus'_{d=2p-d_1-d_2-2}^{p-1-\{d_1+d_2+p+1\}_2} \left(\bigoplus'_{c=c_1-c_2}^{c_1+c_2} P_q(cp+d) \oplus \bigoplus'_{c=c_1-c_2+2}^{c_1+c_2-2} P_q(cp+d) \right) & \text{si } c_1 \geq c_2 - 1; \\ \bigoplus'_{d=2p-d_1-d_2-2}^{p-1-\{d_1+d_2+p+1\}_2} \left(\bigoplus'_{c=c_2-c_1-2}^{c_1+c_2} P_q(cp+d) \oplus \bigoplus'_{c=c_2-c_1}^{c_1+c_2-2} P_q(cp+d) \right) & \text{si } c_1 \leq c_2 - 2; \end{cases}$$

$$\stackrel{5}{=} \begin{cases} \bigoplus'_{d=2p-d_1-d_2-2}^{p-1-\{d_1+d_2+p+1\}_2} \left(\bigoplus'_{c=c_1-c_2}^{c_1+c_2} P_q(cp+d) \oplus \bigoplus'_{c=c_1-c_2+2}^{c_1+c_2-2} P_q(cp+d) \right) & \text{si } c_1 \geq c_2; \\ \bigoplus'_{d=2p-d_1-d_2-2}^{p-1-\{d_1+d_2+p+1\}_2} \left(\bigoplus'_{c=1}^{c_1+c_2} P_q(cp+d) \oplus \bigoplus'_{c=1}^{c_1+c_2-2} P_q(cp+d) \right) & \text{si } c_1 = c_2 - 1; \\ \bigoplus'_{d=2p-d_1-d_2-2}^{p-1-\{d_1+d_2+p+1\}_2} \left(\bigoplus'_{c=c_2-c_1}^{c_1+c_2} P_q(cp+d) \oplus \bigoplus'_{c=c_2-c_1-2}^{c_1+c_2-2} P_q(cp+d) \right) & \text{si } c_1 \leq c_2 - 2; \end{cases}$$

$$= M_3 \oplus N_2,$$

où l'égalité 4 utilise le fait que $P_q(-1)$ est nul et l'égalité 5 repose sur la définition de \bigoplus'' et sur le fait que cette somme sur c contient ici au moins deux termes. En effet, le nombre de termes dans cette somme est $1 + \frac{1}{2}(c_1 + c_2 + 1 - |c_1 + c_2 + 1|) = 1 + \min(c_1 + 1, c_1) \geq 2$, car $c_2 \geq 1$.

Sans surprise, les sous-modules projectifs N_2 et M_2 de N se retrouvent dans P . En retirant ces termes au module P , il reste P_1 , M_3 et l'autre copie de M_2 ; en les retirant au module N , il ne reste que N_1 . Puisque π est surjectif, la coiffe $L_q(cp+d)$ de chacun des sommants $P_q(cp+d)$ de P_1 , M_2 et M_3 est donc soit dans le noyau de π , soit envoyée par π sur l'un des

facteurs de composition de la coiffe de N_1 . Cette dernière coiffe est formée des facteurs

$$L_q(|c_1 - c_2 + 1|p + d), L_q((|c_1 - c_2 + 1| + 2)p + d), \dots, L_q((c_1 + c_2 - 1)p + d) \quad (3.2.3)$$

pour $d \in \{|d_1 + d_2 - p + 2|, |d_1 + d_2 - p + 2| + 2, \dots, p - |d_1 - d_2| - 2\}$. Chaque facteur $L_q(cp + d)$ de la coiffe de M_3 a un paramètre c de parité différente de celle des facteurs c dans (3.2.3), ce qui implique que $M_3 \subset \text{Ker } \pi$. En outre, pour chaque facteur $L_q(cp + d)$ de la coiffe de M_2 on a $d \geq p - d_1 + d_2 \geq p - |d_1 - d_2| > p - |d_1 - d_2| - 2$, ce qui implique que la seconde copie de M_2 dans P est également dans $\text{Ker } \pi$. L'image de P_1 par π doit alors couvrir N_1 . Or, l'équation (3.2.1) implique que

$$\mathbf{P}[N_1] = \mathbf{P} \left[\bigoplus'_{d=|d_1+d_2-p+2|}^{p-|d_1-d_2|-2} \mathcal{T}_{p-d-2, c_1, c_2-1} \right] = \bigoplus'_{d=|d_1+d_2-p+2|}^{p-|d_1-d_2|-2} \mathbf{P}[\mathcal{T}_{p-d-2, c_1, c_2-1}] = P_1.$$

La couverture projective étant unique, $\pi|_{P_1}$ est nécessairement le morphisme de cette couverture et

$$\text{Ker } \pi|_{P_1} \simeq \bigoplus'_{d=|d_1+d_2-p+2|}^{p-|d_1-d_2|-2} \text{Ker } \tilde{g}_{p-d-2, c_1, c_2-1} \simeq \bigoplus'_{d=|d_1+d_2-p+2|}^{p-|d_1-d_2|-2} \mathcal{T}_{d, c_1, c_2} = M_1,$$

par l'équation (3.2.2). Il s'ensuit que $M \simeq \text{Ker } \pi \simeq M_1 \oplus M_2 \oplus M_3$. \square

La décomposition du produit $L_q(i_1) \otimes \Delta_q(i_2)$ est utilisée pour énoncer celles de $\Delta_q(i_1) \otimes \Delta_q(i_2)$ et de $\Delta_q(i_1) \otimes \nabla_q(i_2)$. Pour $c_2 \geq 1$, la suite exacte courte de la proposition 1.4.2 et le foncteur $\Delta_q(i_1) \otimes -$ permettent d'obtenir la suite exacte

$$0 \rightarrow \Delta_q(i_1) \otimes L_q((c_2 - 1)p + (p - d_2 - 2)) \xrightarrow{\hat{\iota}} \Delta_q(i_1) \otimes \Delta_q(i_2) \xrightarrow{\hat{\pi}} \Delta_q(i_1) \otimes L_q(i_2) \rightarrow 0.$$

Ainsi, puisque chaque module $P_q(cp + d)$ est projectif et injectif, les termes

$$M_4 = \bigoplus'_{c=|c_1-c_2|}^{c_1+c_2-2} \bigoplus'_{d=d_1+d_2+2}^{p-1-\{d_1+d_2+p+1\}_2} P_q(cp + d) \quad \text{et} \quad M_2 = \bigoplus'_{c=|c_2-c_1-1|}^{c_1+c_2-1} \bigoplus'_{d=p-d_1+d_2}^{p-1-\{d_1+d_2+1\}_2} P_q(cp + d)$$

dans $\Delta_q(i_1) \otimes L_q((c_2 - 1)p + (p - d_2 - 2))$ ainsi que

$$M_5 = \bigoplus'_{c=|c_2-c_1+1|}^{c_1+c_2-1} \bigoplus'_{d=p+d_1-d_2}^{p-1-\{d_1+d_2+1\}_2} P_q(cp + d) \quad \text{et} \quad M_3 = \bigoplus'_{c=|c_1-c_2|}^{c_1+c_2} \bigoplus'_{d=2p-d_1-d_2-2}^{p-1-\{d_1+d_2+p+1\}_2} P_q(cp + d)$$

dans $\Delta_q(i_1) \otimes L_q(i_2)$ sont tous des sommants de $\Delta_q(i_1) \otimes \Delta_q(i_2)$. De plus, le morphisme $\hat{\pi}$ restreint au sous-module obtenu en retirant $M_2 \oplus M_3 \oplus M_4 \oplus M_5$ de $\Delta_q(i_1) \otimes \Delta_q(i_2)$ doit avoir respectivement pour noyau et pour image

$$A = \bigoplus'_{d=|d_1-d_2|}^{\min(d_1+d_2, 2p-d_1-d_2-4)} \mathcal{T}_{d, c_2-1, c_1}$$

$$\text{et} \quad B = \bigoplus'_{d=|d_1+d_2-p+2|}^{p-|d_1-d_2|-2} \mathcal{T}_{d, c_2, c_1} = \bigoplus'_{d=|d_1-d_2|}^{\min(d_1+d_2, 2p-d_1-d_2-4)} \mathcal{T}_{p-d-2, c_2, c_1},$$

par le changement d'indice de sommation $d \leftrightarrow p - d - 2$. Les termes manquants permettant d'obtenir ce noyau et cette image sont

$$M_6 = \bigoplus'_{c=|c_1-c_2|}^{c_1+c_2-2} \bigoplus'_{d=|d_1-d_2|}^{\min(d_1+d_2, 2p-d_1-d_2-4)} P_q(cp+d) \quad \text{et} \quad M_7 = \bigoplus'_{d=|d_1-d_2|}^{\min(d_1+d_2, 2p-d_1-d_2-4)} \Delta_q((c_1+c_2)p+d),$$

tel que démontré dans la première partie du prochain théorème.

En partant à nouveau du foncteur $\Delta_q(i_1) \otimes -$ mais cette fois avec la suite exacte courte (1.4.4) de la section 1.4.4, on obtient la suite exacte

$$0 \rightarrow \Delta_q(i_1) \otimes L_q(i_2) \xrightarrow{\tilde{\nu}'} \Delta_q(i_1) \otimes \nabla_q(i_2) \xrightarrow{\tilde{\pi}'} \Delta_q(i_1) \otimes L_q((c_2-1)p + (p-d_2-2)) \rightarrow 0.$$

Les termes M_5 et M_3 de $\Delta_q(i_1) \otimes L_q(i_2)$ ainsi que M_4 et M_2 de $\Delta_q(i_1) \otimes L_q((c_2-1)p + (p-d_2-2))$ sont donc tous des sommants de $\Delta_q(i_1) \otimes \nabla_q(i_2)$. Toutefois, le morphisme $\tilde{\pi}'$ restreint au sous-module obtenu en retirant $M_2 \oplus M_3 \oplus M_4 \oplus M_5$ de $\Delta_q(i_1) \otimes \Delta_q(i_2)$ a maintenant B pour noyau et A pour image. La seconde partie du théorème montrera que les termes manquants permettant d'obtenir ce noyau et cette image sont alors

$$M_8 = \bigoplus'_{c=|c_1-c_2|+1}^{c_1+c_2-1} \bigoplus'_{d=|d_1+d_2-p+2|}^{p-|d_1-d_2|-2} P_q(cp+d) \quad \text{et} \quad M_9 = \bigoplus'_{d=|d_1-d_2|}^{\min(d_1+d_2, 2p-d_1-d_2-4)} W_q((c_1-c_2)p+d),$$

où

$$W_q(cp+d) = \begin{cases} \Delta_q(cp+d) & \text{si } c \geq 0; \\ \nabla_q(-cp+d) & \text{si } c \leq 0; \end{cases}$$

pour $c, d \in \mathbb{Z}$ tels que $0 \leq d < p$. À noter que $W_q(cp+d)$ est bien défini en $c = 0$, puisqu'alors $\Delta_q(cp+d) \simeq \nabla_q(cp+d) \simeq L_q(d)$.

Théorème 3.2.2. *Soient $i_1 = c_1p + d_1$ et $i_2 = c_2p + d_2$ pour $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tels que $d_1, d_2 < p - 1$. Alors,*

$$\Delta_q(i_1) \otimes \Delta_q(i_2) \simeq \left(\bigoplus_{\ell=2}^5 M_\ell \right) \oplus M_6 \oplus M_7 \tag{3.2.4}$$

et

$$\Delta_q(i_1) \otimes \nabla_q(i_2) \simeq \left(\bigoplus_{\ell=2}^5 M_\ell \right) \oplus M_8 \oplus M_9, \tag{3.2.5}$$

pour M_ℓ , $2 \leq \ell \leq 9$, tels que définis plus haut.

DÉMONSTRATION. On procède par induction sur $c_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Supposons pour commencer que $c_2 = 0$. Alors, $\Delta_q(d_2) \simeq \nabla_q(d_2) \simeq L_q(d_2)$ et

$$\Delta_q(i_1) \otimes \Delta_q(i_2) \simeq \Delta_q(i_1) \otimes \nabla_q(i_2) \simeq L_q(d_2) \otimes \Delta_q(c_1p + d_1)$$

$$\begin{aligned}
&\simeq \bigoplus'_{d=|d_1+d_2-p+2|}^{p-|d_1-d_2|-2} \mathcal{T}_{d,0,c_1} \oplus \bigoplus'_{c=|-c_1+1|}^{c_1-1} \bigoplus'_{d=p-d_2+d_1}^{p-1-\{d_1+d_2+1\}_2} P_q(cp+d) \oplus \bigoplus'_{d=2p-d_1-d_2-2}^{p-1-\{d_1+d_2+p+1\}_2} P_q(c_1p+d) \\
&= \bigoplus'_{d=|d_1-d_2|}^{\min(d_1+d_2, 2p-d_1-d_2-4)} \mathcal{T}_{p-d-2,0,c_1} \oplus M_5 \oplus M_3, \tag{3.2.6}
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{p-d-2,0,c_1} &= \begin{cases} T_d^0 = L_q(d) & \text{si } c_1 = 0; \\ T_{(c_1-1)p+(p-d-2)}^1 = \Delta_q(c_1p+d) & \text{si } c_1 > 0; \end{cases} \\
&= \Delta_q(c_1p+d) = W_q(c_1p+d).
\end{aligned}$$

Le terme de gauche de (3.2.6) correspond donc à M_7 ainsi qu'à M_9 . Puisque $M_2 = M_4 = M_6 = M_8 = 0$, les première et deuxième formules du théorème sont vérifiées.

Soit maintenant $c_2 \geq 1$ et supposons le théorème vrai pour $c_2 - 1$. La formule (3.2.4) est d'abord démontrée. La suite exacte courte de la proposition 1.4.8 et le foncteur $\Delta_q(i_1) \otimes -$ permettent d'obtenir la suite exacte $0 \rightarrow M' \xrightarrow{\iota'} P' \xrightarrow{\pi'} N' \rightarrow 0$ pour

$$\begin{aligned}
M' &= \Delta_q(i_1) \otimes \Delta_q(i_2), \quad P' = \Delta_q(i_1) \otimes P_q((c_2 - 1)p + (p - d_2 - 2)) \\
\text{et } N' &= \Delta_q(i_1) \otimes \Delta_q((c_2 - 1)p + (p - d_2 - 2)).
\end{aligned}$$

Par hypothèse,

$$N' \simeq N'_2 \oplus M_2 \oplus N'_1 \oplus M_4 \oplus N'_3 \oplus N'_4,$$

où

$$\begin{aligned}
N'_1 &= \bigoplus'_{c=|c_1-c_2+1|}^{c_1+c_2-3} \bigoplus'_{d=p+d_1-d_2}^{p-1-\{d_1+d_2+1\}_2} P_q(cp+d), \quad N'_2 = \bigoplus'_{c=|c_1-c_2+2|}^{c_1+c_2-2} \bigoplus'_{d=2p-d_1-d_2-2}^{p-1-\{d_1+d_2+p+1\}_2} P_q(cp+d), \\
N'_3 &= \bigoplus'_{c=|c_1-c_2+1|}^{c_1+c_2-3} \bigoplus'_{d=|d_1+d_2-p+2|}^{p-|d_1-d_2|-2} P_q(cp+d) \quad \text{et} \quad N'_4 = \bigoplus'_{d=|d_1+d_2-p+2|}^{p-|d_1-d_2|-2} \Delta_q((c_1+c_2-1)p+d).
\end{aligned}$$

De surcroît, par le théorème 2.2.6,

$$P' \simeq M_6 \oplus 2M_4 \oplus P'_3 \oplus 2M_2 \oplus P'_1 \oplus P'_2,$$

avec

$$\begin{aligned}
P'_1 &= 2 \bigoplus''_{c=|c_1-c_2|-1}^{c_1+c_2-1} \bigoplus'_{d=p+d_1-d_2}^{p-1-\{d_1+d_2+1\}_2} P_q(cp+d), \\
P'_2 &= 2 \bigoplus''_{c=|c_1-c_2+1|-1}^{c_1+c_2} \bigoplus'_{d=2p-d_1-d_2-2}^{p-1-\{d_1+d_2+p+1\}_2} P_q(cp+d)
\end{aligned}$$

$$\text{et } P'_3 = \bigoplus'_{c=|c_1-c_2+1|}^{c_1+c_2-1} \bigoplus'_{d=|d_1+d_2-p+2|}^{p-|d_1-d_2|-2} P_q(cp+d).$$

Si $c_1 = 0$ et $c_2 = 1$, $P'_1 = N'_1 = M_5 = 0$. Autrement, la somme \bigoplus'' de P'_1 contient au moins deux termes et un argument semblable à celui de la fin de la preuve du théorème précédent donne

$$\begin{aligned} P'_1 &= \begin{cases} \bigoplus'_{d=p+d_1-d_2}^{p-1-\{d_1+d_2+1\}_2} \left(\bigoplus'_{c=c_1-c_2-1}^{c_1+c_2-1} P_q(cp+d) \oplus \bigoplus'_{c=c_1-c_2+1}^{c_1+c_2-3} P_q(cp+d) \right) & \text{si } c_1 \geq c_2; \\ \bigoplus'_{d=p+d_1-d_2}^{p-1-\{d_1+d_2+1\}_2} \left(\bigoplus'_{c=c_2-c_1-1}^{c_1+c_2-1} P_q(cp+d) \oplus \bigoplus'_{c=c_2-c_1+1}^{c_1+c_2-3} P_q(cp+d) \right) & \text{si } c_1 \leq c_2 - 1; \end{cases} \\ &= \begin{cases} \bigoplus'_{d=p+d_1-d_2}^{p-1-\{d_1+d_2+1\}_2} \left(\bigoplus'_{c=c_1-c_2-1}^{c_1+c_2-1} P_q(cp+d) \oplus \bigoplus'_{c=c_1-c_2+1}^{c_1+c_2-3} P_q(cp+d) \right) & \text{si } c_1 \geq c_2 + 1; \\ \bigoplus'_{d=p+d_1-d_2}^{p-1-\{d_1+d_2+1\}_2} \left(\bigoplus'_{c=1}^{2c_1-1} P_q(cp+d) \oplus \bigoplus'_{c=1}^{2c_1-3} P_q(cp+d) \right) & \text{si } c_1 = c_2; \\ \bigoplus'_{d=p+d_1-d_2}^{p-1-\{d_1+d_2+1\}_2} \left(\bigoplus'_{c=c_2-c_1+1}^{c_1+c_2-1} P_q(cp+d) \oplus \bigoplus'_{c=c_2-c_1-1}^{c_1+c_2-3} P_q(cp+d) \right) & \text{si } c_1 \leq c_2 - 1; \end{cases} \\ &= M_5 \oplus N'_1. \end{aligned}$$

De plus, l'équivalence $P'_2 \simeq N'_2 \oplus M_3$ a été prouvée dans la démonstration du théorème précédent (où N'_2 était noté N_2 et P'_2 était noté P_2) et $P'_3 \simeq N'_3 \oplus P''_3$ pour

$$P''_3 = \bigoplus'_{d=|d_1+d_2-p+2|}^{p-|d_1-d_2|-2} P_q((c_1 + c_2 - 1)p + d).$$

En retirant de P' les modules projectifs N_2, M_2, N'_1, M_4 et N'_3 de N' , il reste donc les termes $P''_3 \oplus M_2 \oplus M_3 \oplus M_4 \oplus M_5 \oplus M_6$; en retirant de N' ces mêmes modules, il ne reste que N'_4 . Qui plus est, les explications précédant l'énoncé du présent théorème démontrent que M_2, M_3, M_4 et M_5 sont inclus dans $M' \simeq \text{Ker } \pi'$. L'image des termes restants $M_6 \oplus P''_3$ de P' par π' est donc nécessairement incluse dans N'_4 . Or, par la suite exacte entre modules projectifs et de Weyl de la proposition 1.4.8, aucun des sommants $P_q(cp+d)$ de M_6 ne peut avoir un quotient de forme $\Delta_q((c_1 + c_2 - 1)p + d)$, puisque la valeur de c dans ces sommants est inférieure ou égale à $c_1 + c_2 - 2$. Le terme M_6 est donc également dans $\text{ker } \pi' \simeq M'$. Le morphisme π' étant surjectif, $\pi'(P''_3)$ doit alors couvrir N'_4 . De plus, pour tout $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ la proposition 1.4.8 donne la suite exacte

$$0 \rightarrow \Delta_q((c_1 + c_2)p + (p - d - 2)) \longrightarrow P_q((c_1 + c_2 - 1)p + d) \xrightarrow{\pi_d} \Delta_q((c_1 + c_2 - 1)p + d) \rightarrow 0$$

et la proposition 3.1.1 assure que π_d est l'unique morphisme non nul de $P_q((c_1 + c_2 - 1)p + d)$ vers $\Delta_q((c_1 + c_2 - 1)p + d)$ (à multiplication par une constante non nulle près). Conséquemment,

$$\text{Ker } \pi'|_{P'_3} \simeq \bigoplus'_{d=|d_1+d_2-p+2|}^{p-|d_1-d_2|-2} \text{Ker } \pi_d \simeq \bigoplus'_{d=|d_1+d_2-p+2|}^{p-|d_1-d_2|-2} \Delta_q((c_1 + c_2)p + (p - d - 2)) = M_7,$$

à nouveau par le changement d'indice de sommation $d \leftrightarrow p - d - 2$. On en conclut que $M' \simeq \text{Ker } \pi' \simeq \bigoplus_{\ell=2}^7 M_\ell$.

Le pas d'induction est fort similaire pour démontrer la seconde formule du théorème. La suite exacte courte (1.4.5) de la section 1.4.4 et le foncteur $\Delta_q(i_1) \otimes -$ permettent d'obtenir la suite exacte $0 \rightarrow M'' \xrightarrow{\iota''} P' \xrightarrow{\pi''} N'' \rightarrow 0$ pour

$$M'' = \Delta_q(i_1) \otimes \nabla_q((c_2 - 1)p + (p - d_2 - 2)), \quad P' = \Delta_q(i_1) \otimes P_q((c_2 - 1)p + (p - d_2 - 2))$$

et $N'' = \Delta_q(i_1) \otimes \nabla_q(i_2)$.

Par la première partie de la démonstration,

$$P' \simeq M_6 \oplus 2M_4 \oplus P'_3 \oplus 2M_2 \oplus M_5 \oplus N'_1 \oplus M_3 \oplus N'_2,$$

où tous les termes sont définis plus haut. De plus, par hypothèse,

$$M'' \simeq M_4 \oplus M_2 \oplus N'_1 \oplus N'_2 \oplus M''_1 \oplus M''_2$$

avec

$$M''_1 = \bigoplus'_{c=|c_1-c_2+1|+1}^{c_1+c_2-2} \bigoplus'_{d=|d_1-d_2|}^{\min(d_1+d_2, 2p-d_1-d_2-4)} P_q(cp+d) \quad \text{et} \quad M''_2 = \bigoplus'_{d=|d_1+d_2-p+2|}^{p-|d_1-d_2|-2} W_q((c_1-c_2+1)p+d).$$

Or,

$$P'_3 = \begin{cases} \bigoplus'_{d=|d_1+d_2-p+2|}^{p-|d_1-d_2|-2} \bigoplus'_{c=c_1-c_2+1}^{c_1+c_2-1} P_q(cp+d) & \text{si } c_1 \geq c_2; \\ \bigoplus'_{d=|d_1+d_2-p+2|}^{p-|d_1-d_2|-2} \bigoplus'_{c=0}^{c_1+c_2-1} P_q(cp+d) & \text{si } c_1 = c_2 - 1; \\ \bigoplus'_{d=|d_1+d_2-p+2|}^{p-|d_1-d_2|-2} \bigoplus'_{c=c_2-c_1-1}^{c_1+c_2-1} P_q(cp+d) & \text{si } c_1 < c_2 - 1; \end{cases}$$

$$= \begin{cases} M_8 & \text{si } c_1 \geq c_2; \\ M_8 \oplus \bigoplus'_{d=|d_1+d_2-p+2|}^{p-|d_1-d_2|-2} P_q(d) & \text{si } c_1 = c_2 - 1; \\ M_8 \oplus \bigoplus'_{d=|d_1+d_2-p+2|}^{p-|d_1-d_2|-2} P_q((c_2 - c_1 - 1)p + d) & \text{si } c_1 < c_2 - 1; \end{cases}$$

et

$$M_6 = \begin{cases} \bigoplus'_{d=|d_1-d_2|}^{\min(d_1+d_2, 2p-d_1-d_2-4)} P_q(cp+d) & \text{si } c_1 \geq c_2; \\ \bigoplus'_{d=|d_1-d_2|}^{\min(d_1+d_2, 2p-d_1-d_2-4)} P_q(cp+d) & \text{si } c_1 = c_2 - 1; \\ \bigoplus'_{d=|d_1-d_2|}^{\min(d_1+d_2, 2p-d_1-d_2-4)} P_q(cp+d) & \text{si } c_1 < c_2 - 1; \end{cases}$$

$$= \begin{cases} M_1'' \oplus \bigoplus'_{d=|d_1-d_2|}^{\min(d_1+d_2, 2p-d_1-d_2-4)} P_q((c_1 - c_2)p + d) & \text{si } c_1 \geq c_2; \\ M_1'' & \text{si } c_1 < c_2. \end{cases}$$

Ainsi, tel qu'attendu, les termes projectifs M_4 , M_2 , N'_1 , N'_2 et M_1'' de M'' se trouvent tous dans P' . De plus, tel que justifié dans l'argument précédant le présent théorème, M_2 , M_3 , M_4 et M_5 sont tous des sommants directs de N'' . Tous les termes de P' ont alors été identifiés à des projectifs de M'' et N'' sauf les termes suivants : le P'_3 et

$$\bigoplus'_{d=|d_1-d_2|}^{\min(d_1+d_2, 2p-d_1-d_2-4)} P_q((c_1 - c_2)p + d) \quad \text{si } c_1 \geq c_2,$$

qui provient du M_6 de P' . Similairement, le seul terme de M'' qui n'a pas été identifié à l'un des projectifs de P' est M_2'' . Ce module M_2'' peut-il être sous-module du $M_8 \subset P'_3$? La réponse est non. En effet, si $c_1 - c_2 + 1 \geq 0$, les $W_q((c_1 - c_2 - 1)p + d)$ du M_2'' sont tous des $\Delta_q((c_1 - c_2 - 1)p + d)$. Par la suite exacte courte de la proposition 1.4.8, ce module de Weyl est un sous-module du seul projectif $P_q((c_1 - c_2)p + (p - d - 2))$. Or, tous les projectifs $P_q(cp + d)$ de M_8 ont des c de parité différente de celle de $(c_1 - c_2)$. Si $c_1 - c_2 + 1 < 0$, alors $W_q((c_1 - c_2 + 1)p + d) = \nabla_q((c_2 - c_1 - 1)p + d)$ et, par la suite (1.4.5), ce comodule de Weyl est un sous-module du seul projectif $P_q((c_2 - c_1 - 1)p + d)$. Cependant, les indices c de la somme de M_8 commencent à $|c_1 - c_2| + 1 = c_2 - c_1 + 1$ et omettent la valeur $c_2 - c_1 - 1$. Ainsi, puisque $\text{Im } \iota'' \simeq \text{Ker } \pi''$ ne contient pas le sommant $M_8 \subset P'_3$, il faut que M_8 soit un sommant de N'' . Il reste donc à étudier le quotient des termes restants

$$\begin{cases} \bigoplus'_{d=|d_1-d_2|}^{\min(d_1+d_2, 2p-d_1-d_2-4)} P_q((c_1 - c_2)p + d) & \text{si } c_1 \geq c_2; \\ \bigoplus'_{d=|d_1+d_2-p+2|}^{p-|d_1-d_2|-2} P_q((c_2 - c_1 - 1)p + d) & \text{si } c_1 \leq c_2 - 1. \end{cases}$$

dans P' par l'image $\iota''(M_2'')$. Si $c_1 \geq c_2$, $\iota''(M_2'')$ doit être contenu dans $\bigoplus'_{d=|d_1-d_2|}^{\min(d_1+d_2, 2p-d_1-d_2-4)} P_q((c_1 - c_2)p + d)$. Par la proposition 1.4.8, la suite

$$0 \rightarrow \Delta_q((c_1 - c_2 + 1)p + (p - d - 2)) \rightarrow P_q((c_1 - c_2)p + d) \rightarrow \Delta_q((c_1 - c_2)p + d) \rightarrow 0$$

est exacte pour tout $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et la proposition 3.1.1 assure que le morphisme surjectif dans cette suite est le seul morphisme non nul $P_q((c_1 - c_2)p + d) \rightarrow \Delta_q((c_1 - c_2)p + d)$. De ce fait,

$$\bigoplus'_{d=|d_1-d_2|}^{\min(d_1+d_2, 2p-d_1-d_2-4)} \Delta_q((c_1 - c_2)p + d) = \bigoplus'_{d=|d_1-d_2|}^{\min(d_1+d_2, 2p-d_1-d_2-4)} W_q((c_1 - c_2)p + d) = M_9$$

est le sommant restant de N'' . Si $c_1 = c_2 - 1$, $\iota''(M_2'')$ doit être contenu dans

$$\bigoplus'_{d=|d_1+d_2-p+2|}^{p-|d_1-d_2|-2} P_q(d) = \bigoplus'_{d=|d_1-d_2|}^{\min(d_1+d_2, 2p-d_1-d_2-4)} P_q(p - d - 2).$$

Par l'exactitude de la suite

$$0 \rightarrow \nabla_q(p - d - 2) \rightarrow P_q(p - d - 2) \rightarrow \nabla_q(p + d) \rightarrow 0$$

et la proposition 3.1.1, le terme restant de N'' correspond à la somme

$$\bigoplus'_{d=|d_1-d_2|}^{\min(d_1+d_2, 2p-d_1-d_2-4)} \nabla_q(p + d) = \bigoplus'_{d=|d_1-d_2|}^{\min(d_1+d_2, 2p-d_1-d_2-4)} \nabla_q(p + d) = M_9.$$

Finalement, si $c_1 < c_2 - 1$, $\iota''(M_2'')$ doit être sous-module de

$$\bigoplus'_{d=|d_1+d_2-p+2|}^{p-|d_1-d_2|-2} P_q((c_2 - c_1 - 1)p + d) = \bigoplus'_{d=|d_1-d_2|}^{\min(d_1+d_2, 2p-d_1-d_2-4)} P_q((c_2 - c_1 - 1)p + (p - d - 2)).$$

Par l'exactitude de la suite

$$0 \rightarrow \nabla_q((c_2 - c_1 - 1)p + (p - d - 2)) \rightarrow P_q((c_2 - c_1 - 1)p + (p - d - 2)) \rightarrow \nabla_q((c_2 - c_1)p + d) \rightarrow 0$$

et à nouveau par la proposition 3.1.1, le terme restant de N'' correspond à la somme

$$\bigoplus'_{d=|d_1-d_2|}^{\min(d_1+d_2, 2p-d_1-d_2-4)} \nabla_q((c_2 - c_1)p + d) = \bigoplus'_{d=|d_1-d_2|}^{\min(d_1+d_2, 2p-d_1-d_2-4)} W_q((c_1 - c_2)p + d) = M_9.$$

Conséquent, dans tous les cas, $N'' \simeq M_2 \oplus M_3 \oplus M_4 \oplus M_5 \oplus M_8 \oplus M_9$. \square

3.3. Dualité et produit tensoriel

Les seules règles de fusion de modules remarquables restant à déterminer sont celles du comodule de Weyl avec les modules simples et projectifs et le comodules de Weyl. Or, celles-ci peuvent être aisément déduites des résultats déjà obtenus, par la relation entre dualité et produit tensoriel pour les $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules de dimension finie.

Lemme 3.3.1 ([5]). *Soit \mathcal{A} une algèbre de Hopf dont les modules ont un produit tensoriel défini par le coproduit de \mathcal{A} et un dual défini par l'antipode de \mathcal{A} . Si V et W sont deux \mathcal{A} -modules de dimension finie, alors $(V \otimes W)^* \simeq W^* \otimes V^*$.*

Remarque 3.3.2. *Il est en fait démontré dans [5] que la relation $(V \otimes W)^* \simeq W^* \otimes V^*$ est satisfaite pour toute catégorie monoïdale rigide \mathcal{C} , où V et W sont des objets de \mathcal{C} . Il y est également prouvé que pour \mathcal{A} une algèbre de Hopf, $\text{mod } \mathcal{A}$ muni d'un produit tensoriel défini par le coproduit de \mathcal{A} et d'un dual défini par l'antipode de \mathcal{A} est une telle catégorie.*

Naturellement, le dual d'une somme directe de modules est isomorphe à la somme directe de leurs duals. Ainsi, les règles de fusion pour les comodules de Weyl découlent directement de celles pour les modules de Weyl. On définit en ce sens les duals des modules zigzags $\mathcal{D}_{d,c_1,c_2} = \mathcal{T}_{d,c_1,c_2}^*$. Par le corollaire 1.4.20, le diagramme de Loewy de \mathcal{D}_{d,c_1,c_2} est obtenu en renversant les flèches du diagramme de Loewy de \mathcal{T}_{d,c_1,c_2} et est de ce fait donné par les figures 3.6 et 3.7.

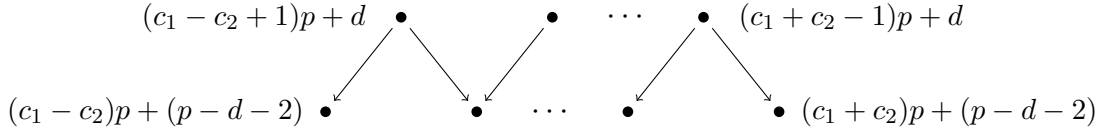


Figure 3.6 – Diagramme de Loewy de \mathcal{D}_{d,c_1,c_2} lorsque $c_1 \geq c_2$.

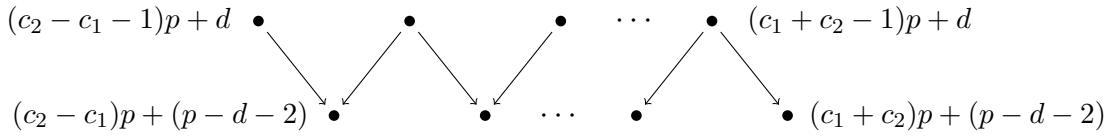


Figure 3.7 – Diagramme de Loewy de \mathcal{D}_{d,c_1,c_2} lorsque $c_1 < c_2$.

Rappelons également que $L_q(i)^* \simeq L_q(i)$ et $P_q(i)^* \simeq P_q(i)$. Les seuls changements à apporter dans les règles de fusion précédemment démontrées pour obtenir celles des comodules de Weyl sont donc les termes contenant des modules de Weyl ou des modules zigzags.

Théorème 3.3.3. *Soient $i_1 = c_1p + d_1$ et $i_2 = c_2p + d_2$ pour $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tels que $d_1, d_2 < p$. Les règles de fusion de $\nabla_q(i_1) \otimes P_q(i_2)$, $L_q(i_1) \otimes \nabla_q(i_2)$ et $\nabla_q(i_1) \otimes \nabla_q(i_2)$ coïncident respectivement avec celles de $\Delta_q(i_1) \otimes P_q(i_2)$ (théorème 2.2.6), $L_q(i_1) \otimes \Delta_q(i_2)$ (théorème 3.2.1) et $\Delta_q(i_1) \otimes \Delta_q(i_2)$ (théorème 3.2.2), à l'exception des changements suivants :*

- (1) les modules \mathcal{T}_{d,c_1,c_2} deviennent \mathcal{D}_{d,c_1,c_2} dans la première somme de $L_q(i_1) \otimes \nabla_q(i_2)$;
- (2) les modules $\Delta_q((c_1 + c_2)p + d)$ deviennent $\nabla_q((c_1 + c_2)p + d)$ dans la somme M_7 de $\Delta_q(i_1) \otimes \Delta_q(i_2)$.

3.4. Conclusion

Ce mémoire a approfondi l'étude de la théorie des représentation de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ lorsque q^2 est un p -racine primitive de l'unité pour $p \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Quatre familles de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules remarquables paramétrées par un indice $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ont été identifiées : les modules simples $L_q(i)$, les modules projectifs $P_q(i)$, les modules de Weyl $\Delta_q(i)$ et les comodules de Weyl $\nabla_q(i)$. Différentes présentations plus explicites des modules simples ont été décrites aux propositions 1.4.3 et 1.4.4 ainsi qu'à la remarque 1.4.5, tandis qu'une présentation plus explicite des modules projectifs a été donnée à la proposition 1.4.14. À partir des suites exactes courtes interreliaut les modules remarquables, la structure de ces derniers a été révélée dans les diagrammes de Loewy des figures 1.1 à 1.4. La dualité et le produit tensoriel de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules ont été définis respectivement avec l'antipode et le coproduit sur $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ découlant de la structure d'algèbre de Hopf de l'extension de Lusztig. Le principal résultat obtenu est l'expression du produit tensoriel de toute paire de modules remarquables comme une somme directe de modules indécomposables.

Pour $i_1, i_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, Bushlanov et coll. ont décrit dans [7] les décompositions des produits $L_q(i_1) \otimes L_q(i_2)$, $L_q(i_1) \otimes P_q(i_2)$ et $P_q(i_1) \otimes P_q(i_2)$ pour q de forme $e^{i\pi/p}$. Les théorèmes 2.1.9, 2.2.5 et 2.2.7 du présent mémoire ont respectivement montré que chacune de ces décompositions reste valide lorsque q est une racine de l'unité quelconque. La démarche employée pour obtenir les règles de fusion des paires de modules simple-simple et simple-projectif repose sur les lemmes 2.1.1 et 2.1.3, qui ont permis de n'étudier que les cas où les indices sont des multiples de p ou inférieurs à p . La règle de fusion pour $P_q(i_1) \otimes P_q(i_2)$ a été obtenue par induction à partir de celle pour $\Delta_q(i_1) \otimes P_q(i_2)$, décrite au théorème 2.2.6, qui a elle-même été obtenue par induction à partir de celle pour $L_q(i_1) \otimes P_q(i_2)$.

Les produits tensoriels $L_q(i_1) \otimes L_q(i_2)$, $L_q(i_1) \otimes P_q(i_2)$, $\Delta_q(i_1) \otimes P_q(i_2)$ et $P_q(i_1) \otimes P_q(i_2)$ ont tous été décomposés comme sommes directes de modules simples et projectifs. La décomposition du produit $L_q(i_1) \otimes \Delta_q(i_2)$ donnée au théorème 3.2.1 a toutefois fait intervenir une nouvelle famille de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules : les modules zigzags, construits à la proposition 3.1.4. Une analyse des socles, coiffes et radicaux de ces modules a expliqué le terme *zigzag* dans leur appellation, tel qu'illustré dans les diagrammes de Loewy de la figure 3.1. Les règles de fusion pour $\Delta_q(i_1) \otimes \Delta_q(i_2)$ et $\Delta_q(i_1) \otimes \nabla_q(i_2)$, données au théorème 3.2.2, ont subséquemment été obtenues à partir de celle pour $L_q(i_1) \otimes \Delta_q(i_2)$. Enfin, une propriété clé reliant dualité et produit tensoriel a été utilisée : pour V et W deux $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules, $(V \otimes W)^* \simeq W^* \otimes V^*$. De cette propriété a été déduit le théorème 3.3.3, décrivant la décomposition des trois produits tensoriels manquants : $\nabla_q(i_1) \otimes P_q(i_2)$, $L_q(i_1) \otimes \nabla_q(i_2)$ et $\nabla_q(i_1) \otimes \nabla_q(i_2)$.

Références bibliographiques

- [1] Henning Haahr ANDERSEN : Tensor products of quantized tilting modules. *Communications in mathematical physics*, 149(1):149–159, 1992.
- [2] Henning Haahr ANDERSEN, Patrick POLO et Wen KEXIN : Representations of quantum algebras. *Inventiones mathematicae*, 104(1):1–59, 1991.
- [3] Henning Haahr ANDERSEN et Daniel TUBBENHAUER : Diagram categories for Uq-tilting modules at roots of unity. *Transformation Groups*, 22(1):29–89, 2017.
- [4] Ibrahim ASSEM : *Algèbres et modules : cours et exercices*. Masson Paris, 1997.
- [5] Bojko BAKALOV et Alexander A KIRILLOV : *Lectures on tensor categories and modular functors*, volume 21. American Mathematical Soc., 2001.
- [6] Jonathan BELLETÈTE, David RIDOUT et Yvan SAINT-AUBIN : Restriction and induction of indecomposable modules over the Temperley–Lieb algebras. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 51(4):045201, 2017.
- [7] P.V. BUSHLANOV, B.L. FEIGIN, A.M. GAINUTDINOV et I.Yu. TIPUNIN : Lusztig limit of quantum $\mathfrak{sl}(2)$ at root of unity and fusion of $(1, p)$ Virasoro logarithmic minimal models. *Nuclear Physics B*, 818(3):179–195, 2009.
- [8] Vyjayanthi CHARI et Andrew PRESSLEY : A guide to quantum groups. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 29(139):506–507, 1997.
- [9] Vyjayanthi CHARI et Andrew PRESSLEY : Quantum affine algebras at roots of unity. *Representation Theory of the American Mathematical Society*, 1(12):280–328, 1997.
- [10] Vladimir Gershonovich DRINFELD : Quantum groups. *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI*, 155:18–49, 1986.
- [11] Vladimir Guerchonovitch DRINFEL'D : Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation. *In Yang-Baxter Equation in Integrable Systems*, pages 264–268. World Scientific, 1990.
- [12] Pavel ETINGOF, Shlomo GELAKI, Dmitri NIKSHYCH et Victor OSTRIK : *Tensor categories*, volume 205. American Mathematical Soc., 2016.
- [13] Pavel ETINGOF et Viktor OSTRIK : Finite tensor categories. *arXiv preprint math/0301027*, 2003.
- [14] Jens Carsten JANTZEN : *Lectures on quantum groups*, volume 6. American Mathematical Soc., 1996.
- [15] Michio JIMBO : A q-difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation. *Letters in Mathematical Physics*, 10(1):63–69, 1985.
- [16] Christian KASSEL, Marc ROSSO et Vladimir TURAEV : Quantum groups and knot invariants. 1997.

- [17] Louis H KAUFFMAN et Samuel J LOMONACO JR : Braiding operators are universal quantum gates. *New Journal of Physics*, 6(1):134, 2004.
- [18] Anatoli KLIMYK et Konrad SCHMÜDGEN : *Quantum groups and their representations*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [19] Petr Petrovich KULISH et Nikolai Yur'evich RESHETIKHIN : Quantum linear problem for the sine-Gordon equation and higher representations. *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI*, 101:101–110, 1981.
- [20] Simon LENTNER : The unrolled quantum group inside Lusztig's quantum group of divided powers. *Letters in Mathematical Physics*, 109(7):1665–1682, 2019.
- [21] George LUSZTIG : Finite dimensional Hopf algebras arising from quantized universal enveloping algebras. *Journal of the American Mathematical Society*, 3(1):257–296, 1990.
- [22] George LUSZTIG : Quantum groups at roots of 1. *Geometriae Dedicata*, 35(1):89–113, 1990.
- [23] Yuri I MANIN, Theo RAEDSCHELDERS et Michel VAN DEN BERGH : *Quantum groups and non-commutative geometry*. Springer, 1988.
- [24] V PASQUIER et H SALEUR : Common structures between finite systems and conformal field theories through quantum groups. *Nuclear Physics B*, 330(2-3):523–556, 1990.
- [25] Théo PINET : La structure des représentations des algèbres de Temperley-Lieb affines sur la chaîne de spins XXZ. 2020.
- [26] Nicolai RESHETIKHIN et Vladimir G TURAEV : Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups. *Inventiones mathematicae*, 103(1):547–597, 1991.
- [27] Wolfgang Ansgar SCHNIZER : Roots of unity : representations of quantum groups. *Communications in mathematical physics*, 163(2):293–306, 1994.
- [28] Evgeny Konstantinovich SKLYANIN, Leon Armenovich TAKHTADZHIAN et Lyudvig Dmitrievich FADDEEV : Quantum inverse problem method. I. *Theoretical and Mathematical Physics*, 40(2):688–706, 1979.
- [29] Bernard Le STUM et Adolfo QUIRÓS : On quantum state of numbers. *arXiv preprint arXiv :1310.8143*, 2013.
- [30] Leon Armenovich TAKHTADZHIAN et Lyudvig Dmitrievich FADDEEV : The quantum method of the inverse problem and the Heisenberg XYZ model. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 34(5):13–63, 1979.
- [31] Stanisław L WORONOWICZ : Compact matrix pseudogroups. *Communications in Mathematical Physics*, 111(4):613–665, 1987.
- [32] Stanisław L WORONOWICZ : Differential calculus on compact matrix pseudogroups (quantum groups). *Communications in Mathematical Physics*, 122(1):125–170, 1989.

Annexe A

Vocabulaire et notation

Cette section explique des éléments de vocabulaire ainsi que certains choix de notation effectués dans le cadre de l'étude de la théorie des représentations des algèbres quantiques.

Les modules de la \mathcal{Z} -algèbre $\mathcal{L}U_t\mathfrak{sl}_2$ considérés dans [2] consistent en ceux pour lesquels l'action sur la sous-algèbre $U_0 \subset \mathcal{L}U_t\mathfrak{sl}_2$ engendrée par $K^{\pm 1}$ et les $\begin{bmatrix} K; c \\ r \end{bmatrix}_t$, $c \in \mathbb{Z}$ et $r \geq 0$, induit un morphisme d'algèbres $\chi_{\sigma, \lambda} : U_0 \rightarrow \mathcal{Z}$ donné par

$$\chi_{\sigma, \lambda}(K) = \sigma v^\lambda \quad \text{et} \quad \chi_{\sigma, \lambda}\left(\begin{bmatrix} K; c \\ r \end{bmatrix}_t\right) = \sigma^t \begin{bmatrix} \lambda + c \\ r \end{bmatrix}_t.$$

Ici $\sigma \in \{+1, -1\}$ et $\lambda \in \mathbb{Z}$. Les modules pour lesquels $\sigma = +1$ sont dits de *type 1*. Soit maintenant un choix d'une racine q de l'unité et, à nouveau, notons par $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ la spécialisation de la \mathcal{Z} -algèbre $\mathcal{L}U_t\mathfrak{sl}_2$ en cette racine. Soit \mathcal{C}_f la catégorie des modules de dimension finie de type 1 (et donc pour lesquels l'action de U_0 est donnée par un certain morphisme $\chi_{+1, \lambda}$). Andersen et ses collaborateurs ont montré que cette catégorie est abélienne. De plus elle est fermée sous le produit \otimes obtenu à l'aide de la comultiplication Δ . Leurs résultats principaux montrent que cette catégorie « contient suffisamment d'objets projectifs ». Ceci implique l'existence d'objets $P \in \text{Obj}(\mathcal{C}_f)$ tels que les foncteurs $\text{Hom}_{\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2}(P, -)$ soient exacts et que les groupes d'extension $\text{Ext}_{\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2}^1(P, -)$ soient nuls au sein de cette catégorie et que, pour tout objet $M \in \text{Obj}(\mathcal{C}_f)$, il existe un objet projectif P et une suite exacte $0 \rightarrow L \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$ (cette dernière condition est la généralisation de l'exigence que tout module ait une couverture projective). Ce résultat n'assure pas que les modules P soient projectifs au sens habituel, c'est-à-dire que le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2}(P, -)$ transforme toute suite exacte $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ en une suite exacte, que les modules L, M et N soient ou non de dimension finie et que K y soit ou non diagonalisable. Malgré cela, plusieurs auteurs nomment le module P un « module projectif » si le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2}(P, -)$ qui lui est associé est exact lorsque restreint à la catégorie \mathcal{C}_f . Nous adopterons cet abus de langage.

Un dernier avertissement est de mise. Tel qu'il a été dit à la sous-section 1.3.1, Andersen et coll. limitent leur analyse dans [2] aux racines primitives p -ièmes de l'unité avec $p = \tilde{p}^\ell$, où \tilde{p} est un entier premier supérieur ou égal à 3 et $\ell \geq 1$. Depuis, d'autres articles ont obtenu les groupes d'extension des modules simples en d'autres racines de l'unité, confirmant la structure des objets (modules) projectifs de \mathcal{C}_f (par exemple, dans [7], Bushlanov et coll. obtiennent ces groupes pour les racines de la forme $q = e^{i\pi/n}$ pour tout entier $n \geq 2$). En plus d'étendre les résultats à d'autres racines, les articles récents ont aussi changé la façon d'étiqueter ces racines. En effet, les résultats sont maintenant énoncés en termes de $q \in \mathbb{C}$ tel que q^2 soit une racine primitive p -ième de l'unité de 1. Ainsi $p \geq 2$ est le plus petit entier tel que $q^{2p} = 1$ (les racines $q = \pm 1$ demeurent cependant toujours exclues). Ce choix a priori étrange est partiellement justifié par les deux observations suivantes. Premièrement $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ et $U_{-q}(\mathfrak{sl}_2)$ sont isomorphes. Deuxièmement, le théorème de Schur-Weyl possède une généralisation reliant les produits tensoriels des représentations de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ (et $\mathcal{L}U_q(\mathfrak{sl}_n)$) et les algèbres de Hecke et de Temperley-Lieb. Or ces familles d'algèbres dépendent d'une indéterminée t et les algèbres associées à t et $-t$ sont aussi isomorphes. Conséquemment, là aussi, les résultats sont habituellement formulés en termes de racines q avec p le plus petit entier positif tel que $q^{2p} = 1$. C'est de cette façon que le présent mémoire identifiera les racines de 1.

Des articles récents d'Andersen et collaborateurs ([1, 3]) adoptent cette façon d'énumérer les racines de 1 et donnent explicitement l'action d'une famille importante de modules de type 1, les modules de Weyl. Pinet ([25]) en a déduit une action sur les modules simples et les modules projectifs de type 1. Ces formes explicites joueront un rôle important dans ce mémoire et il sera possible, au besoin, de vérifier si les sous-modules, quotients et produits tensoriels de ces modules sont de type 1, comme il se doit.