

Université de Montréal

Études sur la gravitation en théorie des champs
classiques et quantiques

par

Victor Massart

Département de physique
Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée en vue de l'obtention du grade de
Philosophiæ Doctor (Ph.D.)
en Physique

31 Aout 2021

Université de Montréal

Faculté des arts et des sciences

Cette thèse intitulée

Études sur la gravitation en théorie des champs classiques et quantiques

présentée par

Victor Massart

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Richard MacKenzie

(président-rapporteur)

Manu Paranjape

(directeur de recherche)

George Azielos

(membre du jury)

Gabor Kunstatter

(examineur externe)

Radu Ion Iftimie

(représentant du doyen de la FESP)

Résumé

Cette thèse porte sur la gravitation et certains de ses liens avec la théorie des champs. Le point de départ de cette recherche a été l'étude de la limite newtonienne de la relativité générale. Très vite, notre intérêt s'est porté sur l'effet du temps retardé et son rôle dans l'absence d'aberration. Ce manque d'aberration est la raison pour laquelle la force pointe dans la direction instantanée (extrapolée) pour des sources sans accélération, malgré la vitesse finie de la gravitation (c'est aussi le cas pour l'électromagnétisme). Ceci nous a conduit à calculer le champ résultant entre deux masses accélérées avec la présence d'aberration. Nous avons en particulier considéré le mouvement de deux masses de telle façon que la force totale de Newton à une position s'annule alors que les effets du temps retardé soient bien différents de zéro. Nous avons pu calculer ces derniers et proposer deux situations où ils pourraient être observés dans le futur.

L'étude de la linéarisation de la relativité générale a naturellement porté notre intérêt sur la physique du graviton, la version quantifiée de la théorie classique linéaire. Plusieurs travaux sur l'impossibilité d'observer directement ce graviton [1,2] ainsi que des expériences de pensée sur la possibilité de le quantifier ou non [3] ont piqué notre curiosité. C'est ce qui a lancé la recherche de la section efficace (et du potentiel) dans le cas d'une diffusion gravitationnelle sur une particule initialement dans une superposition spatiale.

En parallèle de ces recherches, des discussions avec mon collègue Kévin Nguyen et la lecture de son article [4], ont attiré mon attention sur le problème de la constante cosmologique et l'élégante solution proposée. Cette dernière est basée sur l'ajout d'un scalaire couplé non minimalement avec la gravité et permet d'expliquer la valeur minuscule de la constante cosmologique par certains très petits paramètres du champ scalaire. Leur solution était cependant encore très théorique, car elle n'était valable que dans un univers sans matière. Nous avons donc analysé l'effet de la matière sur l'évolution du champ scalaire et montré que dans une partie de l'espace des paramètres, la théorie considérée résolvait le problème de la constante cosmologique tout en restant indistinguable de la relativité générale.

Mots-clés: bruit newtonien, temps retardé, théorie scalaire-tenseur, problème constante cosmologique, diffusion gravitationnelle.

Abstract

This thesis concerns gravitation and some of its connections with field theory. The starting point of this research was the study of the Newtonian limit of general relativity. Our interest was focused on the effect of retarded time and its role in the absence of aberration. Lack of aberration is the reason why the gravitational force points in the instantaneous (extrapolated) direction for unaccelerated sources, despite the finite speed of propagation of gravity (this also holds true for electromagnetism). Naturally this led us to compute the resulting gravitational field of accelerating masses, where aberration is not absent. In particular, we considered the motion of two masses such that their total Newtonian force at a position vanished but the retarded gravitational effects were non-zero. We were able to calculate these retarded effects and to propose two situations where they could be observed in the future.

The study of the linearization of general relativity naturally arouse our interest toward the physics of gravitons, the quantized version of the linear classical theory. In particular, there has been much thought and literature on the impossibility of directly observing a graviton [1, 2] as well as thought experiments on the possibility of quantizing gravity or not [3]. This led to the calculation of the cross section (and gravitational potential) in the case of the gravitational scattering off a massive particle that is in a spatially non-local quantum superposition.

In parallel with this research, some discussions with my colleague Kévin Nguyen about his article [4] on the problem of the cosmological constant, focussed my interest on this problem and the elegant solution proposed. The solution is based on the addition of a non-minimally coupled scalar and makes it possible to explain the tiny value of the cosmological constant through some small parameters of the scalar field. The solution is however very theoretical as it was only done in a matter free universe. We therefore examined at the effect of different kinds of matter on the evolution of the scalar field. We show that in one part of the parameter space, the theory we considered resolved the cosmological constant problem while being indistinguishable from general relativity.

Keywords: Newtonian noise, retarded time, scalar-tensor theory, cosmological constant problem, gravitational scattering.

Table des matières

Résumé	5
Abstract	7
Remerciements	13
Introduction	15
Chapitre 1. Relativité générale	17
1.1. Géométrie Différentielle	17
1.2. Équations d'Einstein	23
Chapitre 2. Linéarisation	27
2.1. Équations d'Einstein linéarisées	27
2.2. Équations de Maxwell pour la gravitation	29
2.2.1. Potentiels de Liénard-Wiechert	30
2.2.2. Équations géodésiques et force de Lorentz	31
Premier article. Near-Zone Dynamical Effects in Gravity	33
1. Introduction	35
2. Theoretical background	36
2.1. Weak field gravitation	36
2.2. Effective gravitational force	38
2.3. Conservation of momentum in Newtonian mechanics	39
3. Experimental proposals	41
3.1. First proposal	41
3.1.1. Lack of aberration	42
3.1.2. Cancellation due to momentum conservation	42
3.1.3. Expression in terms of the instantaneous time	42
3.1.4. Lagrange inversion theorem	44

3.1.5.	Application to the first proposal	44
3.1.6.	Measurement	46
3.1.7.	Optimization	47
3.2.	Second proposal	48
3.2.1.	Gravitational earthquake detection	49
4.	Conclusion	51
5.	Acknowledgements	52
6.	Appendix A	52
	Appendix B : Detailed Computation for Harmonic Motion	56
Chapitre 3.	Cosmologie	59
3.1.	Métrie de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	59
3.2.	Équations de Friedmann	61
3.3.	Constante cosmologique	63
Deuxième article.	Robustness of the Cosmological Constant Damping	
	Mechanism Through Matter Eras	69
1.	Introduction	70
2.	Cosmological evolution	75
2.1.	Background attractor	77
2.2.	Friedmann's equation	78
2.3.	Linear perturbations	79
3.	Fifth force constraint	81
3.1.	Gravitational coupling between test masses	81
3.2.	Post-Newtonian parameters	82
4.	Discussion	83
Chapitre 4.	Diffusion Gravitationnelle	87
4.1.	Règles de Feynman du Graviton	89
4.2.	Généralisation de la section efficace	92
4.3.	Diffusion d'une onde plane sur une superposition spatiale	93

4.4. Potentiel gravitationnel d'une particule superposée	95
Troisième article. What is the Gravitational Field of a Mass in a Spatially Nonlocal Quantum Superposition?	97
1. Introduction	98
2. Scattering on a spatially nonlocal wave packet	99
3. The 1-graviton exchange scattering amplitude	100
4. The scattering cross section	101
5. Multipole expansion of the scattering cross section	102
6. Discussion and Conclusions	103
Conclusion	107
Références bibliographiques	109

Remerciements

Quatre années de doctorat et une thèse ne se font heureusement pas toutes seules. Des remerciements sont donc de mises aux personnes qui ont rendu cette expérience possible et si enrichissante.

Ma gratitude va en premier lieu à mon superviseur, Manu Paranjape, pour les nombreuses opportunités qu'il m'a offertes. La première est le simple fait d'avoir rendu cette thèse possible. J'ai aussi pu profiter de ses connaissances et son expérience, et ce pour chaque étape difficile de ce processus. Il m'a permis de découvrir le monde de la recherche à travers différents colloques et ce tout autour du monde. Rencontrer des physiciens de toutes les cultures, mais avec la même passion est une expérience très enrichissante que je souhaite à chacun de mes confrères.

Je tiens aussi à remercier particulièrement mon ami (et parrain d'université) Kévin de m'avoir donné la chance de travailler avec lui sur un sujet captivant. Cela a été une excellente expérience et je suis sûr qu'il fera partie des sommités de la physique dans les prochaines années. Comme la covid nous l'a appris à nos dépens, il n'est pas aussi agréable de travailler seul que bien accompagné. Et j'ai été bien accompagné à l'université :

- Mirjam a égayé beaucoup de dîners de discussions passionnantes.
- Antoine a été le meilleur compagnon de conférences et de cours.
- Éric a été l'instigateur de lectures communes très formatrices.
- Et le dernier mais non le moindre, Benjamin a tenu un rôle à la fois d'ami et de mentor : il n'est pas facile de s'adapter à la fois à un doctorat et à un système universitaire totalement différent, mais ton aide a été précieuse à cet égard.

Une autre partie importante de mon expérience du doctorat n'est pas liée directement à la physique, mais concerne plutôt la part extra-académique de la vie universitaire. Parmi celles-ci, les plus enrichissantes qui m'ont été données de vivre furent celles avec le club de ski de fond de l'université. Tous ses membres ont tenu une place particulière dans mon expérience québécoise. J'ai découvert les émotions attachées à la pratique régulière du trail l'été et du ski de fond sur la neige. L'hiver passe très vite quand on peut skier à Montréal et aux alentours. Comment mieux profiter des couleurs de l'été indien qu'en allant courir dans un parc de la sepaq ?

Ces deux dernières années n'auraient pas été les mêmes sans toutes les expériences partagées avec ma blonde, Sarah. Nos fins de semaines en chalet furent le meilleur des ressourcements pour me permettre de garder ma motivation entière. Montréal est aussi une ville exceptionnelle pour la culture, et la culture ça se partage. Des rétrospectives de la cinémathèque aux musées des Beaux-Arts, on aura fait de superbes découvertes ensemble : merci pour ça ! Ma famille enfin m'a toujours soutenu en faisant, par exemple, semblant de s'intéresser à la gravitation pour l'occasion. Je tiens à spécialement remercier ma grand-mère pour s'être rendue disponible en très peu de temps afin de relire cette thèse sans trop rien y comprendre.

Introduction

La théorie de la relativité générale est l'une des sphères de la physique les plus étudiées depuis sa découverte par Albert Einstein en 1915. Et cependant, malgré plus d'une centaine d'années de recherche, il reste encore beaucoup de sujets à comprendre et à étudier. Les domaines rattachés à la relativité générale sont très nombreux et différents. Ils vont de la cosmologie à la gravitation quantique, de la recherche de la matière sombre à la théorie de l'information des trous noirs.

Les articles de cette thèse ont pour objectif de modestement contribuer à la compréhension de certains de ces domaines passionnants. Ils sont encadrés ici par des chapitres visant la familiarisation du lecteur avec les concepts sur lesquels ils se fondent. Cette thèse, malgré l'exposition des concepts clefs des articles, s'adresse aux personnes possédant un niveau équivalent au baccalauréat en physique ou mathématiques et ayant suivi une introduction à la relativité générale ainsi qu'à la théorie des champs. Dans le cas contraire, l'étude en parallèle d'ouvrages de références plus complets, comme ceux de Carroll «Spacetime and Geometry» [5] et de Peskin et Schroeder «An Introduction to Quantum Field Theory» [6], s'avèrera nécessaire. Tout au long de ces introductions aux articles, l'auteur se permettra de conseiller certains ouvrages de références et résumés particuliers afin de permettre aux lecteurs curieux de facilement creuser ces sujets.

Cette thèse se compose de quatre chapitres et trois articles. La première partie introduira les concepts de la géométrie riemannienne nécessaires à la compréhension des équations d'Einstein. Ces dernières seront dérivées au moyen d'une démarche intuitive.

Le deuxième chapitre se consacrera à la linéarisation des équations d'Einstein pour introduire le premier article : «Near Zone Dynamical Effects in Gravity» [7]. Il y sera question de l'équation d'Einstein linéarisée, de la comparaison entre la gravité et l'électromagnétisme entre autres.

Le troisième chapitre traitera de la cosmologie. Il y sera d'abord question des équations de Friedmann qui décrivent l'évolution de l'univers, avant qu'une discussion assez complète ne traite de la constante cosmologique et de son problème de réglage fin. Cette partie servira de préambule au deuxième article : «Cosmological Constant Damping Scenario» [8].

Le dernier chapitre considérera le cas du graviton et donc de la relativité générale en tant

que théorie des champs (quantiques). Une attention particulière sera accordée au processus de diffusion ainsi qu'une discussion sur la généralisation de la section efficace pour une particule en superposition. Le calcul du potentiel d'une particule superposée sera aussi proposé comme complément au troisième et dernier article de cette thèse : «Scattering Of Superposed Quantum Matter Through Gravitational Interaction» [9].

Chapitre 1

Relativité générale

La gravitation est un des quatre types d'interactions fondamentales. Elle a néanmoins un statut à part des trois autres.

En effet, d'un côté c'est la principale force qui régit le monde macroscopique. Elle permet de décrire une variété de phénomènes allant du simple mouvement d'objets sur la terre à l'étude de la Cosmologie (*i.e.* : l'évolution de l'univers).

De l'autre côté, elle est, d'un point de vue fondamental, de très nombreux ordres de grandeur plus faible que toutes les autres, environ 10^{35} fois plus faible que la force faible. Ceci la rend totalement négligeable dans la grande majorité des situations microscopiques.

Ce double jeu s'explique par plusieurs particularités. Sa faible puissance comparativement aux autres forces n'est pas, à ce jour, totalement expliquée. Elle est due à la valeur de la constante gravitationnelle mais celle-ci n'est pas prédite par le Modèle Standard (ni d'ailleurs par la théorie des cordes ou la gravitation quantique à boucles). Son importance au niveau macroscopique cependant est bien comprise. Elle est due à la portée (supposée) infinie de la force ainsi qu'à l'absence de toute charge (masse) négative qui pourrait agir comme écran.

Cette différence fondamentale entre la gravitation et les autres forces se trouve au cœur de la physique moderne. En effet la physique théorique a été marquée au vingtième siècle par deux révolutions distinctes, la mécanique quantique et la relativité générale. Depuis lors, cependant, toutes les tentatives de les décrire dans un cadre commun se heurtent à de nombreuses difficultés.

1.1. Géométrie Différentielle

Pour comprendre cette différence fondamentale il est nécessaire d'étudier le socle mathématique sur lequel repose la relativité générale. Pour cela, il est nécessaire de faire un détour du côté de la géométrie et de l'étude des variétés différentiables.

Le principe d'équivalence (faible) semble être l'idée qui a finalement mené Einstein à sa théorie de la gravité. Ce principe affirme, comme cela avait été observé par Galilée, que la masse inertielle est égale à la masse gravitationnelle. Cela implique que l'accélération d'un objet dépend uniquement du gradient du champ gravitationnel :

$$m_i = m_g \implies \mathbf{a} = -\nabla\Phi. \quad (1.1.1)$$

mais pas de ses caractéristiques propres. Autrement dit l'accélération due à la gravité est la même pour tout objet. C'est bien sûr très différent pour d'autres forces tel l'électromagnétisme par exemple, où le comportement des charges positives est opposé à celui des charges négatives. Ce principe est presque équivalent à celui d'Einstein (Einstein Equivalence Principle) qui dit que localement les lois de la physique se restreignent à la relativité restreinte et donc que le champ gravitationnel ne peut pas être mesuré localement. C'est de là que vient l'idée que la gravitation est le phénomène physique dû à la courbure de l'espace-temps.

D'un point de vue mathématique, cette situation est de façon naturelle reliée au concept de variété (*manifold*). Cette dernière peut être définie comme un espace topologique (potentiellement compliqué), mais qui ressemble localement à \mathbb{R}^n . De façon plus rigoureuse,

Définition 1. *M est une variété différentiable de dimension m si*

- (i) *M est un espace topologique;*
- (ii) *M est muni d'une famille de paires $\{(U_i, \varphi_i)\}$;*
- (iii) *$\{U_i\}$ est une famille d'ouvert qui couvre M, $\cup_i U_i = M$. Et φ_i est un homéomorphisme de U_i à U_i' un sous-ensemble ouvert de \mathcal{R}^m ;*
- (iv) *Pour tout U_i et U_j telles que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, on demande que la carte $\psi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ de $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ à $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ soit infiniment différentiable, C^∞ .*

Le dernier axiome est important, il impose que le passage d'un système de coordonnées à un autre soit lisse (*smooth*) ce qui est primordial pour la gravitation. On va même restreindre notre étude au cas des difféomorphismes entre variétés.

Définition 2. *Soit $f : M \implies N$ un homéomorphisme. f est un difféomorphisme si $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x)$ est inversible et qu'à la fois $y = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x)$ et $x = \varphi \circ f \circ \psi^{-1}(y)$ sont infiniment différentiable, C^∞ .*

Ce concept de difféomorphisme est essentiel à la relativité générale qui est une théorie invariante sous ceux-ci.

Une fois ce type de variété introduit, on veut pouvoir construire des structures dessus comme des vecteurs et pour cela on introduit un espace tangent en chaque point $p \in M$ de la façon suivante. Considérons une courbe $\gamma : M \implies \mathcal{R}$ paramétrisé par λ . On peut définir au point p une dérivée directionnelle sur une fonction f appartenant à l'ensemble des fonctions lisses sur M

$$\frac{d}{d\lambda} : f \longrightarrow \frac{df}{d\lambda} \quad (1.1.2)$$

L'espace créé par l'ensemble de ces dérivées directionnelles au point p est ensuite identifié comme l'espace tangent $T_p M$. Le fait qu'on puisse réécrire ces dérivées directionnelles en termes de simples dérivées partielles nous fournit une bonne base pour cet espace. On a, en effet, $\frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \partial_\mu$ ¹. et donc les dérivées partielles $\{\partial_\mu\}$ fournissent bien une base de l'espace tangent. Les lois de transformations sous changement de coordonnées sont assez immédiates à trouver. Elles s'écrivent

$$\partial'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu. \quad (1.1.3)$$

On peut aussi exprimer un vecteur V dans cette base comme $V = V^\mu \partial_\mu$ et, en imposant que le vecteur soit invariant sous changement de coordonnées, ils se transforment comme $V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu$.

Une fois ces vecteurs bien définis, il est utile d'étudier l'espace dual, $T_p^*(M)$ à l'espace tangent, celui des 1-formes $\omega : T_p \rightarrow \mathcal{R}$. Une base pour cet espace est l'ensemble des gradients de x^μ tel que $dx^\mu(\partial_\nu) = \delta_\nu^\mu$. Leurs lois de transformation sont très similaires à celles des vecteurs; en effet

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad \longrightarrow \quad \omega'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \omega_\nu. \quad (1.1.4)$$

On a maintenant les outils pour introduire les tenseurs et leurs lois de transformations sous changement de coordonnées peuvent être déduites de celle des vecteurs et des 1-formes. On peut décomposer un tenseur T , de type (k,l) comme

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_k} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_l}. \quad (1.1.5)$$

Ces tenseurs et les calculs associés sont un outil extrêmement puissant pour écrire les équations de la relativité générale. Un de ces tenseurs a d'ailleurs un rôle prépondérant au point qu'il a une notation propre à lui : la métrique. C'est un tenseur d'ordre $(0,2)$ et dénoté $g_{\mu\nu}$ (ou $\eta_{\mu\nu}$ dans le cas particulier d'une métrique de Minkowski).

Elle permet de faire quantité de choses. En particulier, elle permettra d'avoir une notion de passé et de futur ainsi que d'établir une causalité entre deux événements. Elle permet aussi de mesurer des distances et donc d'obtenir un concept de «plus petites distances». Dans le cas de la linéarisation (voir chapitre suivant) elle a aussi le rôle de potentiel de Newton.

Enfin elle permet de définir un produit scalaire entre deux vecteurs V^μ et W^ν : $V \cdot W = g_{\mu\nu} V^\mu W^\nu$.

Les définitions d'espaces tangents et de leurs espaces duals ont permis de définir des tenseurs en un point $p \in M$, de prendre leurs dérivées, de les comparer grâce à un produit scalaire et à la métrique. Cependant, il n'y a pas encore de concept de dérivée directionnelle

¹Notons dès à présent que tout au long de cette thèse nous utiliserons la notation d'Einstein sur les indices. Quand un indice est répété, il est sous-entendu qu'une somme s'applique dessus. C'est une somme de 0 à 3 pour les lettres grecs et de 1 à 3 pour les lettres latines.

qui peut s'appliquer à ces tenseurs. De la même façon, il n'est pas possible de calculer un volume ou la longueur d'une courbe. Pour cela il est nécessaire d'introduire une connexion qui va permettre, entre autres, de spécifier comment un tenseur se déplace le long d'une courbe. Cette connexion est assez naturellement exprimée en termes de la métrique. On impose comme condition que le transport parallèle dû à cette connexion laisse le produit scalaire invariant. Cela suffit à définir² les symboles de Christoffel, qui est la connexion de Levi-Civita de la relativité générale,

$$\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}). \quad (1.1.6)$$

Cette connexion permet de définir une dérivée covariante qui permettra par exemple de généraliser la conservation de l'énergie-impulsion, $\partial_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$ à un espace courbe. La dérivée covariante est définie comme

$$\nabla_{\mu}V^{\rho} = \partial_{\mu}V^{\rho} + \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}V^{\nu} \quad (1.1.7)$$

et ce afin d'être réduite aux dérivées partielles dans un espace plat (Minkowski) et que $\nabla_W V$, la dérivée covariante de V dans la direction de W , se comporte comme un vecteur.

Ces symboles de Christoffel apparaissent aussi dans la définition des géodésiques, la courbe (le chemin) la plus courte entre deux points (l'équivalent des lignes droites dans un espace plat). Une courbe $c(t)$ est une géodésique si $\nabla_V V = 0$ où V est le vecteur tangent à cette courbe, $V = \frac{dx^{\mu}(c(t))}{dt}\partial_{\mu}$. En termes des composantes x^{μ} cela donne

$$\frac{d^2x^{\mu}}{dt^2} + \Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho}\frac{\partial x^{\nu}}{dt}\frac{\partial x^{\rho}}{dt} = 0. \quad (1.1.8)$$

Cette connexion est très utile, mais elle n'est pas un tenseur et n'est donc pas invariante sous les difféomorphismes. L'objet fondamental de la courbure est le tenseur de Riemann, $R(X, Y, Z) \equiv \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$, que l'on peut écrire en termes des composantes comme

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda}. \quad (1.1.9)$$

Il représente donc intuitivement à quel point les dérivées covariantes ne commutent pas entre elles. En tant que représentation de la courbure, il sera bien sûr nul dans le cas d'un espace plat.

Géométriquement, le tenseur de courbure de Riemann calcule la différence entre deux transports parallèles différents d'un même vecteur. En effet, considérons un vecteur $V_0 \in T_p M$ que l'on transpose parallèlement, par un chemin C , $x^{\mu} \rightarrow x^{\mu} + \epsilon^{\mu} \rightarrow x^{\mu} + \epsilon^{\mu} + \delta^{\mu}$ et comparons-le avec le même vecteur déplacé par un chemin C' , $x^{\mu} \rightarrow x^{\mu} + \delta^{\mu} \rightarrow x^{\mu} + \epsilon^{\mu} + \delta^{\mu}$. On peut montrer que la différence entre le vecteur passé par C et celui passé par C' est proportionnelle

²C'est un léger abus, en effet la définition n'est pas unique. La connexion est celle-ci plus des termes de torsion que l'on choisira nuls par simplicité et, car ils n'apparaissent pas (souvent) dans les espaces étudiés en relativité générale, mais ils sont par exemple importants en supergravité [10].

au tenseur de Riemann,

$$V_{C'}{}^\rho - V_C{}^\rho = V_0{}^\sigma R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} \epsilon^\mu \delta^\nu. \quad (1.1.10)$$

Le tenseur de Riemann, de par sa forme, possède plusieurs caractéristiques utiles pour calculer ses composantes. Il est antisymétrique sous deux permutations d'indices différentes par exemple,

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu} \quad \text{et} \quad R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu}. \quad (1.1.11)$$

Ce tenseur satisfait aussi une série d'identités fondamentales : les identités de Bianchi. Elles s'écrivent

$$\nabla_{[\lambda} R_{\rho\sigma]\mu\nu} = \nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu} = 0 \quad (1.1.12)$$

Elles s'avèrent très utiles dans les preuves et la simplification des expressions générales. Toute une série de tenseurs de courbure peut être calculée à partir de celui de Riemann. Les deux plus importants car apparaissant dans les équations d'Einstein, sont le tenseur et le scalaire de Ricci qui sont de simples contractions du tenseur de Riemann³. Le tenseur de Ricci est simplement la contraction des indices un et trois du tenseur de Riemann,

$$R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu}, \quad (1.1.13)$$

et le scalaire de Ricci est la contraction du tenseur de Ricci

$$R = R^\mu{}_\mu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (1.1.14)$$

Considérons un exemple qui sera utile lorsque l'on traitera de la cosmologie : La métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). On a

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (1.1.15)$$

où l'on utilise la notation usuelle $dt^2 = dt \otimes dt$, ce qui est toujours fait en physique.

On veut calculer les tenseurs de Riemann et de Ricci ainsi que le scalaire de Ricci associé aux symboles de Christoffel. Commençons donc par calculer ces derniers. Une première méthode consiste simplement à utiliser leur définition (1.1.6) ce qui donne par exemple

$$\begin{aligned} \Gamma^0{}_{00} &= g^{00}(\partial_0 g_{00} + \partial_0 g_{00} - \partial_0 g_{00}) = 0 \\ \Gamma^0{}_{ij} &= g^{00}(\partial_i g_{0j} + \partial_j g_{0i} - \partial_0 g_{ij}) = a \dot{a} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (1.1.16)$$

³Des invariants plus compliqués tel le scalaire de Kretschmann, $R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}$, peuvent aussi être importants par exemple pour vérifier si une singularité est fondamentale ou juste due à un (mauvais) choix de coordonnées.

Une autre manière plus intéressante consiste à considérer les variations⁴ de l'intégrale suivante

$$I = \frac{1}{2} \int g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} d\tau. \quad (1.1.17)$$

Évaluons la variation de l'intégrale par rapport au changement $x^i \rightarrow x^i + \delta x^i$.

$$\begin{aligned} \delta I &= \int (a^2(t) \frac{dx^i}{d\tau} \frac{d\delta x^j}{d\tau}) \delta_{ij} d\tau \\ &= - \int \left(a^2(t) \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + 2a \frac{da}{d\tau} \frac{dx^i}{d\tau} \right) \delta_{ij} \delta x^j d\tau \\ &= - \int a^2 \left(\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \frac{2}{a} \frac{da}{dt} \frac{dx^i}{d\tau} \right) \delta_{ij} \delta x^j d\tau \end{aligned} \quad (1.1.18)$$

où l'on a fait une intégration par partie pour trouver la deuxième ligne. On voit apparaître l'équation géodésique avec le coefficient du deuxième terme qui implique que le symbole non nul pour cette variation est

$$\Gamma^i_{j0} = \Gamma^i_{0j} = \frac{\dot{a}}{a} \delta^i_j. \quad (1.1.19)$$

Les deux symboles de Christoffel (équations 1.1.16 et 1.1.19) sont les deux seuls non nuls pour ce choix de métriques. On sait dorénavant comment faire des dérivées covariantes dans cet espace et on peut bien sûr calculer les composantes du tenseur de Riemann. Vu leurs nombres, considérons un seul cas et le reste peut par exemple être calculé à l'aide de Mathematica. On a par exemple

$$R^0_{i0j} = \partial_0 \Gamma^0_{ij} - \Gamma^\lambda_{0i} \Gamma^0_{j\lambda} = a\ddot{a} \delta_{ij}. \quad (1.1.20)$$

Et par symétrie on connaît aussi immédiatement $R^0_{ij0} = -R^0_{i0j} = -a\ddot{a} \delta_{ij}$ par exemple. En contractant le premier et le troisième indice, on trouve les composantes (non nulles) du tenseur de Ricci

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \quad \text{et} \quad R_{ij} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) \delta_{ij}. \quad (1.1.21)$$

Le scalaire de Ricci est ensuite facilement calculable,

$$R = g^{00} R_{00} + g^{ij} R_{ij} = 3\frac{\ddot{a}}{a} + 3a^{-2}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \dot{a}^2 \right) \quad (1.1.22)$$

où l'on a utilisé l'inverse de la métrique défini tel que $g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho$.

Ceci achève cette rapide description de la géométrie différentielle qui va nous permettre d'introduire et de comprendre les équations d'Einstein. Concernant la géométrie différentielle avec une approche physicienne, on peut trouver plus de précisions et de détails, comme d'autres exemples, dans le livre de Nakahara [11].

⁴On peut montrer que la variation de cette intégrale s'annule pour les mêmes valeurs que celle de la distance. Cela équivaut à dire que les variations de cette intégrale nous donnent aussi les géodésiques desquels on peut déduire les symboles de Christoffel.

1.2. Équations d'Einstein

Nous avons maintenant tous les outils géométriques pour dériver les équations d'Einstein. Nous savons que ces équations doivent reproduire l'équation de Poisson du potentiel newtonien, la démarche informelle, mais intuitive la plus simple consiste donc à tenter de généraliser relativistiquement cette fameuse équation de Poisson

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho. \quad (1.2.1)$$

Le membre de droite est simplement la constante gravitationnelle, G fois la densité de masse. Or on sait, grâce à l'étude de la relativité restreinte, que la généralisation naturelle de cette densité est le tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$ avec $T^{00} = \rho$ dans le cas d'un fluide parfait. Ce tenseur est bien sûr conservé, à cause de la conservation de l'énergie et de l'impulsion, et cette conservation devient dans un espace courbé,

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0 \implies \nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0. \quad (1.2.2)$$

Comme nous l'avons mentionnée précédemment, l'idée fondamentale de la relativité générale est que la gravitation est une caractéristique de fond de l'espace (*background*). Or le tenseur de base de description d'un espace est la métrique et il semble donc naturel que les équations de la gravitation soient de la forme

$$[\nabla^2 g]_{\mu\nu} \sim 4\pi G T_{\mu\nu}. \quad (1.2.3)$$

Le tenseur le plus logique d'ordre 2, en terme de dérivée de la métrique, serait celui de Riemann, $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$. Cependant on peut naïvement constater que le nombre d'indices ne correspond pas. Le second choix le plus évident est le tenseur de Ricci, $R_{\mu\nu}$, qui a le bon nombre d'indices et est bien d'ordre deux par rapport à la métrique. Le membre de gauche doit cependant satisfaire une autre contrainte : être conservé. C'est-à-dire qu'on veut que le tenseur du membre de gauche, nommé le tenseur d'Einstein $G_{\mu\nu}$, respecte de la même manière que le tenseur énergie impulsion,

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0. \quad (1.2.4)$$

Or de manière générale le tenseur de Ricci n'est pas conservé et sa dérivée est en fait proportionnelle au dérivé (covariante) du scalaire de Ricci,

$$\nabla^\mu R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\nabla_\nu R. \quad (1.2.5)$$

Cette égalité peut être dérivée trivialement en contractant deux fois les identités de Bianchi du tenseur de Riemann (1.1.12). La solution la plus simple, respectant les contraintes, pour le tenseur d'Einstein est

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}. \quad (1.2.6)$$

Ce tenseur est donc bien notre membre de gauche à un point près, il est défini à une constante près. En effet, rien n'empêche d'ajouter un terme de la forme constante fois la métrique à ce tenseur et il restera bien conservé. Ce point crucial est la raison de l'existence de la fameuse constante cosmologique, point qui sera discuté dans le chapitre trois.

Les équations d'Einstein s'écrivent donc

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (1.2.7)$$

où l'on a inclus la constante cosmologique Λ . Le facteur κ correspond à la constante de couplage et vaut $\kappa = 8\pi G$ avec G la constante gravitationnelle de Newton. Sa valeur exacte est déduite de la comparaison entre l'approximation de champs faibles et non-relativistique des équations d'Einstein avec le potentiel de Newton.

Il existe des formulations équivalentes de ces équations dont une en particulier est très utile pour les généraliser et les incorporer à la théorie des champs : l'action d'Einstein-Hilbert. Elle s'écrit comme

$$S_{E-H} = \frac{1}{2\kappa} \int \sqrt{-g}(R - 2\Lambda)d^4x \quad (1.2.8)$$

avec g le déterminant de la métrique. Cette action implique les équations d'Einstein. En effet, la variation de cette action par rapport à la métrique⁵ donne les équations d'Einstein dans le vide.

Si on considère de la matière, il faut ajouter une action qui décrit cette matière et la façon dont elle interagit avec la gravitation. Usuellement on ajoute une action, dite minimalement couplée à la gravitation, comme

$$S_M = \int \sqrt{-g}\mathcal{L}_M\Psi_i \quad (1.2.9)$$

où $\mathcal{L}_M\Psi_i$ est le lagrangien décrivant le comportement de cette matière, par exemple celui du modèle standard. Le couplage (minimal) avec la gravitation se fait à travers le facteur $\sqrt{-g}$. Il est bien sûr possible d'ajouter des termes de matières couplés différemment avec la gravitation, couplés non minimalement, comme nous le verrons dans le deuxième article.

Ce système d'équations est un formidable outil pour comprendre la gravitation. Il est cependant nécessaire de fixer d'abord un cadre pour les étudier. On peut, dans un premier temps, étudier le cas de métrique et de distribution de matière particulières. C'est ce que nous ferons avec le cas de la Cosmologie où l'on choisit à la fois une métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker et en même temps on approxime le tenseur énergie-impulsion général par celui d'un fluide parfait.

Néanmoins la première méthode que nous allons considérer, la plus intéressante pour étudier les phénomènes dans le système solaire, consiste à linéariser les équations autour d'une

⁵C'est-à-dire les équations de Lagrange.

solution statique. C'est ce que nous allons voir dans le chapitre suivant, car c'est à la base du premier article de cette thèse.

Chapitre 2

Linéarisation

Il existe un autre type de solution analytique des équations d'Einstein que le choix d'une métrique spécifique : la linéarisation de celles-ci. Elle consiste à considérer le régime faible de la relativité générale (*weak-field approximation*).

L'idée est de considérer que la métrique générale peut s'écrire comme une métrique de base constante (souvent Minkowski) plus une petite perturbation,

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x) \quad \text{avec} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (2.0.1)$$

On peut ensuite réécrire les équations d'Einstein en termes de cette perturbation, $h_{\mu\nu}$, en négligeant tous les termes d'ordre deux et plus en $h_{\mu\nu}$. Par contre, nos solutions ne seront valables que dans cette approximation faible. Pour donner un ordre de grandeur, les phénomènes décrits s'étendent du vide jusqu'au système solaire. L'approximation ne sera par contre pas pertinente pour traiter des régions proches des trous noirs par exemple.

2.1. Équations d'Einstein linéarisées

On va donc chercher les équations d'Einstein dans cette approximation. Pour cela, on suit la démarche usuelle évoquée dans le chapitre précédent. On commence par calculer les symboles de Christoffel, et on trouve

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}\eta^{\rho\lambda}(\partial_{\mu}h_{\nu\lambda} + \partial_{\nu}h_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda}h_{\mu\nu}). \quad (2.1.1)$$

Ensuite, on calcule le tenseur de Riemann,

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \eta_{\mu\lambda}\partial_{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \eta_{\mu\lambda}\partial_{\sigma}\Gamma_{\nu\rho}^{\lambda} = \frac{1}{2}(\partial_{\rho}\partial_{\nu}h_{\mu\sigma} + \partial_{\sigma}\partial_{\mu}h_{\nu\rho} - \partial_{\sigma}\partial_{\nu}h_{\mu\rho} - \partial_{\rho}\partial_{\mu}h_{\nu\sigma}). \quad (2.1.2)$$

On cherche, dès lors, le tenseur de Ricci, $R_{\mu\nu}$ qui est la première partie du tenseur d'Einstein. On l'obtient en contractant (à l'aide de la métrique) le premier et le troisième indice du

tenseur de Riemann,

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\sigma\partial_\nu h_\mu^\sigma + \partial_\sigma\partial_\mu h_\nu^\sigma - \partial_\mu\partial_\nu h - \square h_{\mu\nu}), \quad (2.1.3)$$

avec $h = h_\mu^\mu$ la trace de $h_{\mu\nu}$.

Finalement, la courbure de Ricci est simplement la contraction du tenseur de Ricci, et a la forme, particulièrement simple, suivante :

$$R = \partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu} - \square h. \quad (2.1.4)$$

Ces résultats se combinent et donnent le tenseur d'Einstein linéarisé :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R = \frac{1}{2}(\partial_\sigma\partial_\nu h_\mu^\sigma + \partial_\sigma\partial_\mu h_\nu^\sigma - \partial_\mu\partial_\nu h - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial_\rho\partial_\lambda h^{\rho\lambda} + \eta_{\mu\nu}\square h). \quad (2.1.5)$$

On a donc trouvé la forme des équations d'Einstein dans notre approximation et en considérant une constante cosmologique nulle¹. Le système d'équations reste assez compliqué, mais il y a encore un élément que l'on n'a pas utilisé, l'invariance de jauge. En effet, la décomposition que nous avons faite, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, n'est pas unique. Autrement dit, elle ne fixe pas complètement notre système de coordonnées. On peut faire le changement suivant

$$h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \partial_\alpha\xi_\beta - \partial_\beta\xi_\alpha, \quad (2.1.6)$$

où ξ^α sont 4 fonctions arbitraires, mais «petites», et conserver la même physique (*i.e.* : le tenseur de Riemann est invariant sous cette transformation).

Il y a une infinité de choix de jauges, mais dans notre contexte la plus utile est la jauge dite de Lorenz (ou harmonique) :

$$\partial_\mu(h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h) = 0. \quad (2.1.7)$$

On a bien quatre équations qui fixent les 4 degrés de liberté dus à la jauge ξ^α .

Notre choix de jauge (2.1.7) permet de simplifier le tenseur d'Einstein (2.1.5). On trouve en effet que certains termes s'annulent entre eux et le tenseur prend la forme compacte suivante

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\square(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h) = -\frac{1}{2}\square\bar{h}_{\mu\nu}, \quad (2.1.8)$$

où on a défini pour plus de facilité

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h. \quad (2.1.9)$$

Les équations d'Einstein, dans l'approximation faible, sont donc simplement,

$$\square\bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi GT_{\mu\nu}. \quad (2.1.10)$$

On comprend mieux maintenant la popularité de cette approche, car à partir d'ici toutes les solutions sont connues et souvent analytiques. En particulier, dans le vide, on s'attend,

¹Il est bon de noter que l'effet de la constante cosmologique, bien que très important au niveau de l'univers comme on le verra dans le chapitre suivant, est négligeable localement ou au niveau du système solaire.

naturellement, à l'existence des ondes gravitationnelles, mais aussi à la correspondance avec l'électromagnétisme.

2.2. Équations de Maxwell pour la gravitation

La résolution de l'équation d'onde (2.1.10) sera discutée dans la section suivante. Il est intéressant, avant de le faire, de comparer les composantes de la perturbation de la métrique avec les potentiels électromagnétiques. On peut ainsi commencer par dériver les équations de Maxwell du gravito-électromagnétisme. Pour cela, supposons que l'on néglige les termes en h_{ij}^2 et que les parties de la métrique s'écrivent comme suit, en termes des potentiels Φ et \mathbf{A} ,

$$\bar{h}_{00} = \frac{4\Phi}{c^2} \quad (2.2.1)$$

$$\bar{h}_{0l} = 2\frac{A_l}{c^2} \quad (2.2.2)$$

Il est utile de réexprimer les résultats dérivés ci-dessus, en particulier la condition de jauge de Lorentz équation (2.1.7), en terme de potentiels Φ et \mathbf{A} . On trouve

$$\partial_t \Phi + \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (2.2.3)$$

Cette équation est l'équivalent gravitationnel de l'équation de continuité pour la densité de charge et de courant en électromagnétisme. La seule différence vient de la présence du facteur 1/2. Ce facteur de différence va apparaître dans les équations de Maxwell pour nos champs gravito-électromagnétiques que l'on va dériver. Définissons dans un premier temps les champs gravito-électrique et gravito-magnétique, \mathbf{E}_G et \mathbf{B}_G , comme

$$\mathbf{E}_G = -\nabla \Phi - \frac{1}{2} \partial_t \mathbf{A}, \quad (2.2.4)$$

$$\mathbf{B}_G = \frac{1}{2} \nabla \wedge \mathbf{A}. \quad (2.2.5)$$

L'analogie avec l'électromagnétisme est évidente. Il est ensuite intéressant de trouver les équations que ces champs satisfont. Les deux premières équations sont de simples conséquences mathématiques de ces définitions. En effet, si l'on se rappelle que la divergence du rotationnel ($\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{u}) = 0$) et le rotationnel d'un gradient ($\nabla \wedge (\nabla u) = 0$) sont toujours nuls, on trouve

$$\nabla \wedge \mathbf{E}_G = -\partial_t \mathbf{B}_G, \quad (2.2.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_G = 0. \quad (2.2.7)$$

²Cela vient du fait que l'on assume des vitesses beaucoup plus petites que celles de la lumière, ce qui implique que $\bar{h}_{00} \gg \bar{h}_{0i} \gg \bar{h}_{ij}$.

Voilà les deux premières équations de Maxwell que l'on cherchait. Les deux suivantes se trouvent en partant de (2.1.10). On utilise les propriétés du laplacien, $\Delta\Phi = \nabla \cdot (\nabla\Phi)$ et $\Delta\mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A})$ ainsi que l'équation de continuité dérivée ci-dessus ³ et on obtient

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_G = -\square\phi = 4\pi GT_{00}, \quad (2.2.8)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B}_G = \partial_t \mathbf{E}_G + 8\pi G[T_{0i}]. \quad (2.2.9)$$

Ce sont donc exactement les équations de Maxwell à l'exception du facteur 1/2 qui apparaît devant \mathbf{A} dans la définition des champs. On retrouve même le fait que le terme devant le $[T_{0i}]$, divisé par le terme devant le T_{00} , est égale à 1/2. C'est l'équivalent gravitationnel du fait que $\mu_0\epsilon_0 = 1$ en électromagnétisme avec le choix de $c = 1$. On y retrouve encore cette différence d'un facteur 2 (ou 1/2). Ce facteur 2 de différence peut s'interpréter comme le fait que la gravitation est une théorie de spin 2 tandis que le photon est un boson de spin 1.

2.2.1. Potentiels de Liénard-Wiechert

Reprenons l'équation d'Einstein linéaire (2.1.10) et continuons de négliger la partie spatiale-spatiale. On cherche une solution générale à cette équation. Et l'on va, pour cela, pouvoir utiliser les résultats et dérivations de l'électromagnétisme. En effet, ce que l'on a est extrêmement similaire à la formule du potentiel électromagnétique de Maxwell,

$$\square A^\nu = 4\pi j^\nu. \quad (2.2.10)$$

La solution générale du potentiel est [12],

$$A^\nu = 4\pi \int D_r(x - x') J^\nu(x') d^4x', \quad (2.2.11)$$

où D_r est la fonction de Green retardé associé au d'alembertien, \square . On en déduit que

$$\bar{h}^{0\nu}(x) = -16\pi G \int D_r(x - x') T^{0\nu}(x') d^4x', \quad (2.2.12)$$

où $T^{0\nu} \sim J^\mu \cdot M/e$ est égale à $\int d\tau V^\mu(\tau) \delta^4(x' - r(\tau))$ avec $V^\mu = (1, \boldsymbol{\beta})$ le quadri-vecteur de la source. En considérant le cas d'une source et courant ponctuels, on obtient les potentiels de Liénard-Wiechert. On peut donc utiliser les résultats bien connus de l'électromagnétisme [12],

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \left[\frac{e}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})R} \right] \Bigg|_{ret}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \left[\frac{e\boldsymbol{\beta}}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})R} \right] \Bigg|_{ret}. \quad (2.2.13)$$

³On utilise aussi le fait que $\partial_t \bar{h}^{0i} = 0$, qui est la «deuxième équation de continuité», ie: la composante $0i$ de la condition de jauge de Lorentz (2.1.7).

pour écrire les potentiels du côté gravitationnel ⁴ :

$$\phi_G(\mathbf{x}, t) = \left[\frac{-GM}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})R} \right] \Big|_{ret}, \quad \mathbf{A}_G(\mathbf{x}, t) = \left[\frac{-GM\boldsymbol{\beta}}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})R} \right] \Big|_{ret}. \quad (2.2.14)$$

Ce sont donc les potentiels de Lienard-Wiechert évalués aux temps retardés.

On sait ensuite trouver la forme des champs gravito-électrique et magnétique :

$$\mathbf{E}_G = -GM \left[\frac{\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})R} \right] \Big|_{ret} - GM \left[\frac{\mathbf{n} \wedge ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}})}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3 R} \right] \Big|_{ret} \quad (2.2.15)$$

$$\mathbf{B}_G = [\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_G] \Big|_{ret}. \quad (2.2.16)$$

C'est un résultat important, car il nous permet de calculer assez facilement les forces et ce dans des systèmes générales, tant qu'ils satisfont aux hypothèses de champ faible et non relativiste.

2.2.2. Équations géodésiques et force de Lorentz

La pièce manquante de ce raisonnement est l'expression d'une force. Elle vient naturellement du calcul de l'équation géodésique, car ce sont les déviations par rapport à la ligne droite qui sont interprétées comme l'influence due à une force en relativité générale. L'équation géodésique peut donc être vue comme la généralisation du fameux $\vec{F} = m\vec{a}$ de Newton. Elle permet ainsi de trouver la force gravitationnelle «fictive».

On considère l'équation géodésique générale (1.1.8) afin de calculer sa valeur pour notre métrique particulière. Il est, néanmoins, intéressant de la réécrire en termes de la quadri-impulsion $p^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau}$ pour pouvoir faire apparaître masse fois l'accélération. L'équation géodésique dans ce cas correspond à la force gravitationnel fictive exercée. On trouve,

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = -\Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{p^\rho p^\sigma}{m}. \quad (2.2.17)$$

La quadri-impulsion s'exprime en termes de l'énergie $E = \gamma m$ et de la vitesse $v^i = \frac{dx^i}{dt}$ comme

$$p^0 = m \frac{dt}{d\tau} = \gamma m = E, \quad p^i = E v^i. \quad (2.2.18)$$

Et donc l'équation géodésique (2.2.17) prend la forme

$$\frac{dp^\mu}{dt} = -\Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{p^\rho p^\sigma}{E}. \quad (2.2.19)$$

La première équation ($\mu = 0$) décrit l'évolution de l'énergie :

$$\frac{dE}{dt} = -E[\partial_0\phi + 2(\partial_k\phi)v^k - \frac{1}{2}(\partial_{(j}A_{k)} - \partial_0 h_{jk})v^j v^k].$$

⁴Rappelons-nous que $\bar{h}_{00} = 4\phi$

Les trois dernières équations ⁵ sont

$$\frac{dp_i}{dt} = -E \left[\partial_i \Phi + \frac{1}{2} \partial_0 A_i + (\partial_{[i} A_{j]}) v^j + \left(\partial_{(j} h_{k)i} - \frac{1}{2} \partial_i h_{jk} \right) v^j v^k \right]. \quad (2.2.20)$$

La comparaison avec l'électromagnétisme et la force de Lorentz n'est pas encore évidente, mais elle va le devenir. On peut définir un quadri-potentiel (ϕ, \mathbf{A}) similaire au quadri-potentiel électromagnétique. Comme précédemment, on définit un champ gravito-électrique,

$$G^i \equiv -\partial^i \Phi - \frac{1}{2} \partial_0 A^i, \quad (2.2.21)$$

de façon similaire au champ électrique [12] ainsi qu'un champ gravito-magnétique

$$H^i \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \partial_j A_k. \quad (2.2.22)$$

Tous les deux sont donc des vecteurs en trois dimensions, analogues à leur équivalent électromagnétique. La force de «gravitation» en termes de ces champs est

$$\frac{dp^i}{dt} = E \left[G^i + (\vec{v} \times H)^i - 2(\partial_0 h_{ij}) v^j - \left(\partial_{(j} h_{k)i} - \frac{1}{2} \partial_i h_{jk} \right) v^j v^k \right]. \quad (2.2.23)$$

On a donc une force tout à fait similaire à la force de Lorentz où E joue le rôle de la charge. La seule nuance vient de ce qu'on a des contributions supplémentaires dues à h_{ij} .

Néanmoins dans l'approximation non relativiste, tous ces derniers termes peuvent être négligés et $E \sim m$. C'est un résultat en accord avec notre intuition. En effet cela montre simplement que la masse est la «charge électrique» de la gravitation. On retrouve la force de Newton dans la limite de petite masse et non-relativiste comme attendu.

⁵Les symboles de Christoffel se calculent assez facilement à partir de (2.1.1)

Premier article.

Near-Zone Dynamical Effects in Gravity

par

Victor Massart¹ et Manu Paranjape¹

(¹) Groupe de physique des particules, Département de physique
Université de Montréal, Montréal Québec, Canada

Cet article a été soumis dans Physical Review D.

Les principales contributions de Victor Massart à cet article sont présentées.

- Ensemble des calculs;
- Vérification avec Mathematica;
- Première rédaction de l'article;

RÉSUMÉ. Des effets dynamiques en relativité générale ont finalement été observés par LIGO [13]. Ces effets correspondent à des ondes gravitationnelles créées par la coalescence de trous noirs ou d'étoiles à neutrons il y a des milliards d'années. Pour pouvoir mesurer ces signaux, un grand soin doit être pris pour minimiser toutes les sources de bruit dans le détecteur. L'une des sources de bruit est appelée bruit newtonien, nom basé sur l'idée que des sources proches créeraient des champs gravitationnels newtoniens essentiellement instantanés. Dans cet article, nous présentons une analyse de la nature dynamique (dépendante du temps) du bruit newtonien. A cet égard, il est abusif de l'appeler bruit newtonien, la théorie newtonienne n'apportant aucune notion dynamique du champ gravitationnel. Nous ferons en fait notre analyse dans le contexte de la relativité générale d'Einstein. Les aspects dynamiques de la nature du bruit newtonien ont jusqu'à présent été ignorés car ils sont considérés comme négligeables. Cependant, nous démontrons qu'ils ne sont en effet pas loin d'être mesurables. Ils pourraient être utilisés pour valider la relativité générale ou pour donner des informations précieuses sur la véritable nature dynamique de la gravité. Une question fondamentale, par exemple, est une mesure directe de la vitesse de propagation des effets gravitationnels et la vérification qu'elle est bien la même que la vitesse de la lumière. Nous proposons une expérience de laboratoire simple qui pourrait affirmer ou infirmer cette proposition. Nous analysons également la possibilité de détection de grands événements géophysiques, tels que les tremblements de terre. Nous constatons que les grands événements sismiques semblent être facilement observables avec l'ensemble des détecteurs d'ondes gravitationnelles.

Mots clés : Temps retardé, bruit newtonien dynamique

ABSTRACT. Dynamical effects in general relativity have been finally, relatively recently observed by LIGO [13]. These effects correspond to gravitational waves created by the coalescence of black holes or neutron stars billions of years ago and billions of light years away from their sources. To be able to measure these signals, great care has to be taken to minimize all sources of noise in the detector. One of the sources of noise is called Newtonian noise, the name based on the notion that close by sources would create essentially instantaneous Newtonian gravitational fields. In this article we present an analysis of the dynamical (time dependent) nature of the Newtonian noise. In that respect, it is a misnomer to call it Newtonian noise, the Newtonian theory does not afford any dynamical notion of the gravitational field. We will in fact do our analysis in the context of Einsteinian general relativity. The dynamical aspects of the nature of the Newtonian noise have heretofore been disregarded as they were considered negligible. However, we demonstrate that they are indeed not far from the realm of being measurable. They could be used to validate Einsteinian general relativity or to give valuable information on the true dynamical nature of gravity. One fundamental question, for example, is a direct measurement the speed of propagation of gravitational effects and the verification that it is indeed the same as the speed of light. We propose a simple laboratory experiment that could affirm or deny this proposition. We also analyze the possibility of the detection of large geophysical events, such as earthquakes. We find that large seismic events seem to be easily observable with the present ensemble of gravitational wave detectors,. The ensemble of gravitational wave detectors could easily serve as a system of early warning for otherwise catastrophic seismic events.

Keywords: Retarded Time, Dynamical Newtonian noise

1. Introduction

In the quest for observing dynamical gravitational signals, Newtonian noise, often called gravity gradient noise, originating from seismic gravitational disturbances will give the ultimate noise threshold, beyond which no signals could ever be observed [14]. Newtonian noise of anthropogenic origin or of other controllable origin has heretofore been analyzed [15], however the focus has been to eliminate this source of noise so that astronomically sourced gravitational waves could be observed. On the other hand, it is clearly imaginable that we could try to create strong enough and observable Newtonian signals and measure their time dependent, dynamical properties. Such measurements could give rise to a stunning verification or refutation of Einsteinian general relativity.

This paper is the continuation of an analysis [16] which gave rise to a computation and a proposal for measuring the speed of gravity, which we will call c_g , in the near-field zone, in a laboratory setting where all aspects are under direct control. The idea enunciated in [16] observed that a finite propagation speed could give rise to measurable relative aberration of the effects of gravity on a detector and subsequently the ability to measure that speed. Only recently the best limit on the speed of gravity was set in conjunction with the simultaneous observation of the arrival times of gravitational waves by LIGO [17] and of gamma rays [18]

from the same source. It was found that the speed of gravity, c_g , and the speed of light, c , were identical to one part in 10^{15} . However, it should be noted that these observations are not done in a controlled environment and rely on the assumption that both signals were emitted at the same time. They are in fact an indirect measurement of the speed of gravity. They are also observations in the radiation zone, a totally different regime from the proposed measurement [16] here, which is in the near zone. As expounded upon by Saulson [19], the creation of gravitational waves in the laboratory, where we could control the amplitude, frequency and polarization would make possible an unequivocal test of general relativity, akin to Heinrich Hertz's experiments which verified Maxwell's prediction of electromagnetic waves. It would be important to create a gravitational disturbance and measure its arrival at a spatially distanced detector all under the scrutiny of direct, controlled, laboratory experiment.

In the next section we will discuss the theoretical background. First we will discuss the weak field limit of the Einstein equations [5, 20] underlining the connections with the equations of electrodynamics. Then we will discuss the conservation of momentum and analyze its implications for human created gravity gradient noise [15]. In the following section we will apply these considerations to the question of measuring the velocity of the propagation of gravitation. We will use the Lagrange inversion theorem which will be exposed and explained (briefly). Finally we will discuss the possibility for the observation of the calculated effects including the gravity gradient signal that could be created by large enough earthquakes [21, 22].

2. Theoretical background

2.1. Weak field gravitation

We begin with the full Einstein equations,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

We are interested in the weak-field approximation, which corresponds to a restriction to coordinate systems in which we can write the expansion of the metric, $g_{\mu\nu}$, around a (Minkowski) background, as $\eta_{\mu\nu}$ plus a small perturbation, $h_{\mu\nu} \ll 1$ ⁶. Then we can compute the connections (the Christoffel symbols), the Riemann tensor, the Ricci tensor and curvature scalar, while neglecting at each step the terms $o(h^2)$ and higher. We do not record the corresponding expressions here, they are well known, see for example [20]. We also make the harmonic gauge choice,

$$\partial^\mu (h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^\lambda{}_\lambda) = \partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (2.2)$$

⁶ $\eta_{\mu\nu}$ (diagonal) and our signature are chosen as $(-1, 1, 1, 1)$

Expressing all quantities in terms of $\bar{h}_{\mu\nu}$ simplifies the notation considerably.

In the harmonic gauge, the linearized approximation to the Einstein equations (2.1) gives simply

$$\square \bar{h}^{\mu\nu} = -16\pi G T^{\mu\nu}. \quad (2.3)$$

We note that $\bar{h}^{\mu\nu}$ is dimensionless which requires that $G \rightarrow G/c_g^4$, however powers of c_g are suppressed in most equations that follow. The set of equations in Eqn.(2.3) describe dynamical gravitational phenomena and are in fact very similar to the equations for the electromagnetic potentials in Lorenz gauge, $\square A^\nu = 4\pi j^\nu$. This similarity is very useful since the dynamics of electromagnetism is well understood, in particular we know the physical (retarded) solution,

$$\bar{h}^{\mu\nu}(x) = 16\pi G \int D_r(x - x') T^{\mu\nu}(x') d^4x'. \quad (2.4)$$

where $D_r(x - x')$ is the retarded Green function of the d'Alembertian.

We will consider point sources giving rise to gravitational phenomena. The energy momentum tensor of a gravitational point source is well understood, [23, 24], and can be written as

$$T^{\mu\nu} = \frac{M}{\sqrt{1 - \beta^2}} \beta^\mu \beta^\nu \delta^3[\mathbf{x} - \mathbf{r}[t]] = M \gamma \beta^\mu \beta^\nu \delta^3[\mathbf{x} - \mathbf{r}[t]] \quad (2.5)$$

where $\mathbf{r}[t]$ is the position of the point source, $\beta^\mu = (1, \boldsymbol{\beta}) = (1, \frac{1}{c_g} \frac{d}{dt} \mathbf{r}[t])$ is its four velocity. M contains a suppressed factor of c_g^2 , $M \rightarrow M c_g^2$. Corrections to the gravitational field from the non-point like nature of the sources will involve the higher multipoles and will be assumed to be negligible. The solutions to (2.4) are well known, and in electrodynamics are called the Lienard-Wiechert potentials [25]. Correspondingly, the gravitational fields $\bar{h}^{\mu\nu}(x)$ are then given by

$$\bar{h}^{\mu\nu}[\mathbf{x}, t] = \left[\frac{4GM \gamma \beta^\mu \beta^\nu}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}) R} \right]_{ret}, \quad (2.6)$$

where $\mathbf{R}[t] = \mathbf{x} - \mathbf{r}[t]$, $R[t] = |\mathbf{R}[t]|$ and $\mathbf{n}[t] = \mathbf{R}[t]/R[t]$. $\mathbf{R}[t]$ is the vector pointing from the (point) source at $\mathbf{r}[t]$ to the observer at \mathbf{x} . The subscript *ret* means evaluated at the retarded time t_r , *i.e.* $\beta[t] \rightarrow \beta[t_r]$ etc. The retarded time t_r is the time at which a source must emit a signal so that it reaches an observer at a given time t , explicitly

$$t = t_r + R[t_r]/c_g. \quad (2.7)$$

c_g is the speed of propagation of gravitational effects, surely the same as the speed of light c , however, one of the points of this paper is that this should be experimentally measured and confirmed.

2.2. Effective gravitational force

The expression for the effective force on test bodies results from the geodesic equation

$$\frac{dp^\mu}{dt} = -\Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{p^\rho p^\sigma}{E} \quad \text{with } p^\mu = EV^\mu. \quad (2.8)$$

The force can be expanded to second order in the source velocities and we will also expand it to zeroth order in the body velocity *i.e.*, we will neglect any velocity dependent forces (effective magnetic type forces). For a body with momentum $\mathbf{p} = m\mathbf{V}$ [5], we find (note that all temporal derivatives come with an unwritten factor of $1/c_g$)

$$\begin{aligned} \frac{dp^i}{dt} &= -E\Gamma_{00}^i = -m \left[-\frac{1}{2}\partial_i h_{00} + \partial_0 h_{0i} \right] + \mathcal{O}(V) \\ &= -m \left[-\frac{1}{4}\partial_i \bar{h}_{00} + \partial_0 \bar{h}_{0i} - \frac{1}{4}\partial_i \bar{h}_j^j \right] + \mathcal{O}(V) \end{aligned} \quad (2.9)$$

We note here that the derivatives which appear in (2.9) are with respect to x^μ while the gravitational fields are functions of the retarded time t_r , as in (2.6) and hence for both temporal and spatial derivatives one has to take this change of variables into account.

Then for a given motion of a point source, we find

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= -GmM \left[\gamma \frac{\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}}{\kappa^2 R^2} - \frac{\mathbf{R}}{\kappa^3 R^3} (\dot{R} + \beta^2 - \mathbf{R} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{4\boldsymbol{\beta}}{R^2} (\dot{R} + \beta^2 - \mathbf{R} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) - \frac{4\dot{\boldsymbol{\beta}}}{R} + \frac{\mathbf{n}}{R^2} \beta^2 \right]_{ret} \end{aligned} \quad (2.10)$$

where $\kappa = 1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}$ and it is understood that only terms up to β^2 and $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ up to $1/c_g^2$ should be kept inside the bracket. This gravitational field can be created by moving macroscopic sized masses in the neighbourhood of a detector, such as the mirror in the LIGO experiment [13] and it does seem likely that dynamical predictions of Einsteinian general relativity could be measured.

Examining this formula a little critically, if the motion is uniform, *i.e.* $\dot{\boldsymbol{\beta}} = 0$, we find

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -GmM \left[\frac{\gamma}{\kappa^2 R^2} \left(1 - \frac{1}{2}(3(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 - \beta^2) \right) \boldsymbol{\eta} - \left(\frac{2\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}}{R^2} \right) \boldsymbol{\beta} + \mathcal{O}(\beta^3) \right]_{ret} \quad (2.11)$$

where the direction of $\boldsymbol{\eta}$ is the direction of the retarded position quadratically extrapolated to the instantaneous direction, given by

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta} &= \mathbf{n} + R \frac{d\mathbf{n}}{dt} + \frac{1}{2} R^2 \frac{d^2\mathbf{n}}{dt^2} \\ &= \frac{1}{\kappa} \left[\left(1 + \frac{1}{2}(3(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 - \beta^2) \right) \mathbf{n} - (1 + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\beta} + \mathcal{O}(\beta^3) \right] \end{aligned} \quad (2.12)$$

and again it is understood that κ should be expanded to order β^2 . We wish to emphasize that formula in Eqn.(2.11) is strictly valid for unaccelerated motion. Our formula is not

identical to that found in Carlip [26], however the energy-momentum tensor that he considered corresponds to the Kinnersley photon rocket [27] which is slightly different from the energy-momentum used here.

The first term in Eqn.(2.11) is the special term that shows that the electric field for uniform motion is in the direction of the instantaneous position of the charge, something required by Lorentz invariance. Of course the full gravitational field of a uniformly moving mass is not given only by Eqn.(2.11), but will also contain gravitomagnetic type fields and the full set of fields can be obtained exactly by a simple Lorentz transformation of the Schwarzschild metric [28].

It should also be pointed out that Eqn.(2.10) is the calculation of the gravitational field of a single point mass. A single point mass can actually only effect uniform, straightline motion as momentum must be conserved, and thus the RHS of Eqn.(2.10) can never be created except in the case Eqn.(2.11). If we want to consider more complicated motion, such as simple harmonic oscillations, we must add the field produced by a compensatory mass which is required by momentum conservation. In the linear approximation, the fields simply superpose linearly. We turn to the analysis of momentum conservation in the next section.

2.3. Conservation of momentum in Newtonian mechanics

We have obtained the gravitational fields of a prescribed motion of a point source in Eqn.(2.10). However, if the motion is to be physical, as we have noted, there has to be a compensatory movement of a different source that maintains conservation of momentum. Generally speaking the fields of the compensatory source will remove any dipole like gravitational fields that appear to have been created by the original source. However the multipole expansion is made with respect to a fixed coordinate system common for both the system and the compensatory mass.

We consider a system comprised of point sources whose center of mass is at position ξ . The compensatory mass or counterweight is also comprised of point sources whose center of mass is at position ζ . These masses create gravitational fields which are detected/affect a point body located at position \mathbf{x}_0 . For details, see Appendix A and especially Fig.(3) which appears there. The Newtonian definition of the center of mass is sufficient for our analysis as the radiation reaction terms are assumed to be completely negligible. However, it is clear that the positions of the masses could be such that it may not be possible to use the multipole expansion for the created gravitational fields as it may not be possible to satisfy simultaneously the required assumptions $|\xi| \ll |\mathbf{x}_0|$ and $|\zeta| \ll |\mathbf{x}_0|$ in any given coordinate system. For example, the system may be close to the detector but the compensatory mass is by far the furthest away. Then we would have $|\xi| \ll |\mathbf{x}_0|$ but $|\zeta| \gg |\mathbf{x}_0|$, and for this case, the multipole expansion is not sensible, does not converge and cannot be made. This

will happen for example, if the centre of mass of the compensatory system is not close to the detector or if the compensatory mass is spread out over a relatively large region. Such is the case when the oscillating mass is bolted to the earth, the compensatory mass being the somewhat large part of the earth that reacts to the motion of the oscillating mass. If we think of oscillations at time scales of a 10 Hertz to a 10^4 Hertz [29], the LIGO frequency band, the sound speed on the surface of the earth being in the range of a ~ 500 to ~ 2000 metres/second [14], the compensatory mass would be spread out over a volume with linear dimensions of a few metres (the distance to the floor from the detector to a ~ 200 metres). The oscillating mass can be brought as close to the detector as possible, say ~ 1 cm, then the oscillatory mass would be close to the detector but the compensatory mass would be far, $|\boldsymbol{\xi}| \ll |\boldsymbol{x}_0|$ but $|\boldsymbol{\zeta}| \gg |\boldsymbol{x}_0|$ and the multipole expansion would fail. This scenario has been analyzed in Thorne and Winstein [15] for the case of humans walking near the detector, and where the compensatory mass is treated as the local part of the floor and the earth below the building. The reaction of the floor and earth is treated using elasticity theory. As the compensatory mass is found at all different distances from the detector, and these distances are much greater than the distance between the detector and the human, one does not get the exact cancellation of the dipole terms as in Eqn.(6.19) in Appendix A.

The conclusion to draw from this analysis is that for a physical, complete gravitating system (system and counter weight) made up of only positive masses, the total dipole moment can at most be a linear function of time due to momentum conservation and can be made exactly zero by choosing the appropriate, inertial, coordinate system. However, the multipole expansion is dependent on the coordinate system, and the expansion only converges and is useful if the observation point \boldsymbol{x}_0 is the largest relevant distance in the expansion. If this is not the case, then it can be that higher multipoles dominate, and the multipole expansion is not useful, even though it always remains true in any inertial coordinate system that the total dipole can at most be a linear function of time.

For the sake of simplicity, let us imagine that the oscillating mass m is attached to the compensatory mass M by a long, thin, rigid rod, coupled with a spring, all in the horizontal direction. Let the rod be of length $N|\boldsymbol{\xi}|$ such that $\boldsymbol{\zeta} = N\boldsymbol{\xi}$, and making the assumption that the oscillating mass and the compensatory mass can both be taken as concentrated at their respective centres of mass, the Newtonian potential at the detector is given by

$$\phi_{\text{Newton}}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}^i, \boldsymbol{y}^A) \approx -\frac{Gm}{|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{\xi}|} - \frac{GM}{|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{\zeta}|} = -\frac{Gm}{|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{\xi}|} - \frac{GM}{|\boldsymbol{x}_0 - N\boldsymbol{\xi}|}. \quad (2.13)$$

It is clear that the multipole expansion is not convergent and hence not useable for large enough N , but we can obviously see

$$\begin{aligned}\phi_{\text{Newton}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}^i, \mathbf{y}^A) &\approx -\frac{Gm}{|\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\xi}|} + o\left(\frac{1}{N}\right) \\ &= -Gm\frac{1}{|\mathbf{x}_0|} - \frac{G\mathbf{x}_0}{|\mathbf{x}_0|^3} \cdot (m\boldsymbol{\xi}) + o\left(\frac{1}{N}\right) + \dots\end{aligned}\quad (2.14)$$

Neglecting the terms that are $o\left(\frac{1}{N}\right)$ we see that a dipole-like contribution of the motion of the oscillating mass does indeed give a non-vanishing contribution that in fact dominates over the quadrupole-like contribution.

3. Experimental proposals

3.1. First proposal

In this subsection we offer a (corrected) detailed analysis of the proposed system of [16]⁷. The system analyzed in [16] corresponds to the following experimental configuration: a detector of gravitational phenomena (forces, waves, etc) has on each side (left and right), masses (which move) such that the Newtonian (instantaneous) gravitational forces produced at the detector exactly cancel (*i.e.* the ratios of mass over distance squared to the detector for each side are chosen to be equal). The simplest motion one can imagine is harmonic oscillation, with the left side mass M at a distance $R_0 + \Delta(t)$ and the right side mass $4M$ at distance $2R_0 + 2\Delta(t)$ (see Fig. 1). The amplitude of the oscillation is Δ on the left and 2Δ on the right with $\Delta \ll R_0$. The oscillation is synchronous so that's the Newtonian gravitational terms exactly cancel. The actual dynamical terms are in fact different and do not cancel, as we will see, and this affords the possibility of measuring the speed of propagation of gravitational effects. The Newtonian theory is incomplete because it does not encompass

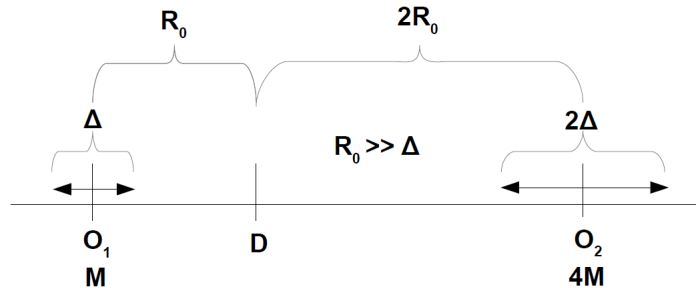


FIG. 1. Schema of the experiment with two oscillators (O_1 , O_2) of respective mass (M , $4M$) and oscillating at distances (R_0 , $2R_0$) with amplitudes (Δ , 2Δ).

⁷In [16], both the lack of aberration and the necessity of conservation of momentum were not taken into account.

any dynamical, time dependent effects of gravitation. It posits instantaneous action at a distance, which is surely not accurate. Any dynamical theory of gravitation, and we will be exclusively concerned with Einsteinian general relativity, will suggest that gravitational effects have a finite propagation speed, and for any relativistically invariant theory, that propagation speed will be equal to the speed of light. Consequently, any dynamical effects of gravitation will be perceived by an observer at what is termed the “instantaneous time” corresponding to the creation of those effects at the position of the source at what is termed the “retarded time”. The retarded time t_r and the instantaneous time t , are defined implicitly by the equation

$$t_r = t - |R[t_r]|/c_g, \quad (3.1)$$

where $R[t_r]$ is the position of the source at the retarded time, and is graphically represented on Fig. (2).

3.1.1. Lack of aberration. A naive analysis of the notion of retarded time would lead one to believe that to an observer, sources of gravitation always point back to their retarded position. For example, on this basis, Laplace [30] (in 1799 no less) concluded the speed of gravity must be greater than $10^8 c$ based on the instability of the solar system as angular momentum was no longer conserved, or more recently van Flandern [31] computed from experimental data that the speed of gravity should be greater than $2 \times 10^{10} c$. This conundrum is known as aberration, or more precisely, the lack thereof for unaccelerated motion. The claims in [30] and [31] have been debunked, the actual physics is well understood and explained by Carlip [26] and Will [32]. Our analysis has to take into account this subtlety to compute the true effect of the moving masses at the detector.

3.1.2. Cancellation due to momentum conservation. A further subtlety arises due to momentum conservation. The arbitrary motion of a given mass, say as in our proposal of simple harmonic motion, is simply unphysical. There has to be a compensatory mass whose motion takes into account energy-momentum conservation. The effect of such a compensatory mass, however large or complicated in its spread, is to remove the total dipole contribution to the gravitational forces. On general grounds the total dipole contribution must be absent. However, if the compensatory mass can be placed very far away from the detector, then its contribution can be taken as negligible. The multipole expansion of both the oscillating mass and the compensatory mass does not make sense, and just the dipole contribution of the oscillating mass can contribute. This is the import of the previous section on the conservation of momentum.

3.1.3. Expression in terms of the instantaneous time. Finally, a further complication arises from the fact that the two masses have different retarded times for a given instantaneous time, as their positions $R[t_r]$ and the corresponding retarded times t_r are different

for the two sides. Hence to combine their contributions at the detector, one must express each contribution in terms of the instantaneous time. This requires inverting the expression for the retarded time, and any functions thereof, in terms of the instantaneous time. To do this inversion, we make use of the Lagrange inversion theorem [33]. The fundamental time dependent function that we must express in terms of the instantaneous time is the distance from the source to the observer/detector (placed at the origin of the coordinate system)

$$\mathbf{R}[t_r] = -\mathbf{r}[t_r] \equiv R_0(1 + \alpha \sin(\omega t_r), 0, 0). \quad (3.2)$$

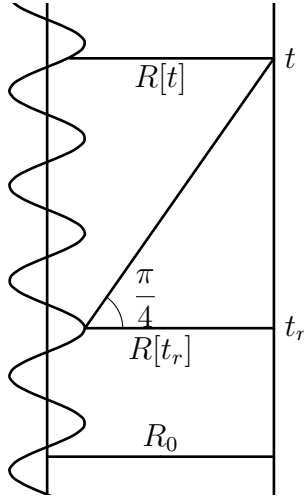


FIG. 2. Sketch of the different times and distances and the links between them for an oscillating motion.

We define the dimensionless retarded time, z , as

$$z := \frac{c_g t_r}{R_0}, \quad (3.3)$$

where R_0 is a fiducial distance, taken as in Fig.(1), the distance from the left side mass to the detector at $t_r = 0$. We imagine a harmonic motion as $R(t_r) = R_0 + \Delta \sin(\omega t_r)$ where we impose that $\Delta \ll R_0$, then $\alpha = \Delta/R_0 \ll 1$ can act as the expansion parameter. Then the motion is given by

$$R[z] = R_0(1 + \alpha f[z]), \quad (3.4)$$

where $f[z]$ describes the oscillation around R_0 . The retarded time equation $t_r = t - |R[t_r]|/c_g$ defining $y = \frac{c_g t}{R_0} - 1$ becomes

$$z = y - \alpha f[z] \quad (3.5)$$

The minus 1 in the definition of y just corresponds to the light travel time for the distance R_0 and correspondingly, α becomes the expansion parameter. Eqn.(3.5) is seen as an equation implicitly defining the retarded time z in terms of the instantaneous time y . The inversion

of Eqn.(3.5) for z , or in fact any function $g(z)$ in terms of y is given in a series expansion by the Lagrange inversion theorem.

3.1.4. Lagrange inversion theorem. To combine the effects of the motion of different sources located at different positions at different retarded times, we must express their effects in terms of the instantaneous time. The Lagrange inversion theorem is a perfectly suited formula for this goal and gives an expansion of functions of the retarded time in terms of the instantaneous time. Although we will only use the first few terms of the expansion in this article, we think it is useful to the reader to know the full expansion. The proof of the theorem and all details can be found, for example, in Whittaker and Watson [34].

Theorem 3.1. *Let $f(z)$ be a function of z which is analytic on and inside a contour \mathbf{C} surrounding a point y , and let α be such that the inequality*

$$|\alpha f[z]| < |z - y|$$

is satisfied at all points z on the perimeter of \mathbf{C} ; then the equation

$$z = y + \alpha f[z] \tag{3.6}$$

regarded as an equation in z has one root in the interior of \mathbf{C} ; and further any function $g(z)$ analytic on and inside \mathbf{C} can be expanded in a power series in α by the formula

$$g[z] = g[y] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}} (g'[y] f^n[y]). \tag{3.7}$$

This is the general theorem, we will use this expansion only to second order in this article.

3.1.5. Application to the first proposal. We will apply the theorem to the motion and effects of the mass on the left, O_1 . We have the retarded position

$$\mathbf{R}[z] \equiv R_0(1 + \alpha \sin(vz), 0, 0), \tag{3.8}$$

where $v = \frac{\omega R_0}{c_g} \ll 1$ is the dimensionless speed and evidently $vz = \frac{\omega R_0}{c_g} \cdot \frac{c_g t_r}{R_0} = \omega t_r$ and the acceleration produced from Eqn.(2.11) is given

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{-GmM\hat{\mathbf{x}}}{R_0^2} \left[\frac{1 + \alpha v \cos(vz) - 3\alpha v^2 \sin(vz) - 3\alpha^2 v^2 \sin^2(vz) - 3\alpha^2 v^2 \cos^2(vz)}{(1 + \alpha \sin(vz))^2 (1 + \alpha v \cos(vz))^3 \sqrt{1 - \alpha^2 v^2 \cos^2(vz)}} \right]. \tag{3.9}$$

The gravitational force is all expressed in the retarded time here, the application of the Lagrange inversion theorem is then quite straightforward but tedious. The detailed computation is found in Appendix B, however, the general idea is clear. We apply the theorem to the RHS of Eqn.(3.9), and re-express it in terms of y the instantaneous time. Throughout the computation we Taylor expand in v and α . Subsequently we write the trigonometric functions of vy in terms of ωt note that there is a shift by -1 given in Eqn.(3.5) in the definition of the instantaneous time and y . Finally, Eqn.(3.9) as a function of the instantaneous

time t , is found to be

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{p}}{dt}[t] &= -GmM\hat{\mathbf{x}} \left[\frac{1}{R[t]^2} - \frac{1}{R_0^2} (4\alpha v^2 \sin(\omega t) + \frac{5}{2}\alpha^2 v^2 \cos^2(\omega t) - 4\alpha^2 v^2 \sin^2(\omega t)) \right] \\ &= -GmM\hat{\mathbf{x}} \left[\frac{1}{R[t]^2} - \frac{1}{R_0^2} \left(4a[t] + \frac{5}{2}\beta[t]^2 - 4a[t]\Delta[t] \right) \right]\end{aligned}\quad (3.10)$$

where the velocity is given by $\beta[t] = \alpha v \cos(\omega t)$ and the acceleration is given by $a[t] = \alpha v^2 \sin(\omega t)$. The expression in terms of $\beta[t]$, $a[t]$ and $\Delta[t]$ is only valid for the harmonic motion that is considered.

The first term is the Newtonian instantaneous term arriving because of Lorentz invariance in the absence of acceleration and relativistic corrections. The next term is proportional to the acceleration $a[t] = \alpha v^2 \sin(\omega t)$. This term comes from the dipole moment of the oscillating mass. However, the motion of a single, simple harmonic oscillator does not conserve momentum and simply does not occur physically. This is solved by adding a compensating mass moving synchronously in the opposite direction. For example, if O_1 is bolted to the floor, the compensatory mass is effectively the Earth. For the sake of simplicity and clarity, consider just a very heavy mass, O_H , moving in the opposite direction to O_1 , then $M\dot{\Delta}[t] + M_H\dot{\Delta}_H[t] = 0$ for momentum conservation. Taking the compensatory mass at a distance R_H with vibrational amplitude $R_H\alpha_H$, we get

$$MR_0\alpha - M_H R_H \alpha_H = 0 \quad (3.11)$$

giving

$$\alpha_H = \frac{MR_0}{M_H R_H} \alpha. \quad (3.12)$$

Then for the gravitational effect of the heavy mass, we can simply use the same formula as Eqn.(3.10) replacing $\alpha \rightarrow \alpha_H = -\frac{MR_0}{M_H R_H} \alpha$ and $v \rightarrow v_H = \frac{\omega R_H}{c_g}$ we find that the dipole term of the compensating mass is given by

$$\frac{GM_H}{R_H^2} \hat{\mathbf{x}} 4\alpha_H (v_H)^2 \sin(\omega t) = \left(\frac{R_0}{R_H} \right) \frac{GM\hat{\mathbf{x}} 4\alpha v^2}{R_0^2} \sin(\omega t) = \left(\frac{R_0}{R_H} \right) \frac{GM\hat{\mathbf{x}}}{R_0^2} 4a[t]. \quad (3.13)$$

Hence for $\left(\frac{R_0}{R_H} \right)$ taken small enough, we can drop the dipole contribution of the compensating mass. Thus only the dipole term of the oscillating mass gives the dominant contribution. We would like to stress that this in no way means that the total dipole moment is contributing to the oscillating gravitational field at the detector. Its contribution, because of momentum conservation, has to be trivial in any inertial coordinate system. The contribution of the subsequent terms in the multipole expansion due to the compensatory mass are smaller by an additional factor of α_H and hence are in principle utterly negligible. Therefore the only contribution of the compensatory mass that we will keep is its instantaneous Newtonian monopole term. Thus we find for the acceleration of the detector due to the masses on the

left is given by

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -m\hat{\mathbf{x}} \left[\frac{GM_H}{R_H[t]^2} + \frac{GM}{R[t]^2} - \frac{GM}{R_0^2} \left(4a[t] + \frac{5}{2}\beta[t]^2 - 4a[t]\Delta[t] \right) \right] \quad (3.14)$$

This is the net effect of the left-side oscillating masses (M and M_H) on a detector placed at the distances R_0 and R_H respectively from the detector.

The system on the other side of the detector is composed of mass $4M$ at a distance $2R_0$ with oscillation amplitude 2Δ and of course a compensatory mass $4M_H$ placed at $2R_H$. The choice of the right side masses is made in order to cancel the instantaneous Newtonian force of all the masses on the detector. The computation of the right side system is identical to the left side system since the dimensionless parameters all have the same values and only the direction of the forces created are in the opposite direction and the values of the dimensionless velocities are doubled. Then total acceleration of the detector is given by

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt}[t] &= -m\hat{\mathbf{x}} 4 \left(\frac{GM}{R_0^2} \right) \left(4a[t] + \frac{5}{2}\beta[t]^2 - 4a[t]\Delta[t] \right) + m\hat{\mathbf{x}} \left(\frac{GM}{R_0^2} \right) \left(4a[t] + \frac{5}{2}\beta[t]^2 - 4a[t]\Delta[t] \right) \\ &= -m\hat{\mathbf{x}} \frac{GM}{R_0^2} \left(12a[t] + \frac{15}{2}\beta[t]^2 - 12a[t]\Delta[t] \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

We note that that the result we have obtained is quite different from that obtained for the field in the wave zone, which corresponds to distances much larger than the size of the source and the wavelength of the radiation produced. In the wave zone the metric perturbations drop off like $\sim \frac{1}{r}$ while the corresponding gravitational fields then fall off as $\sim \frac{1}{r^2}$. This behaviour is simply not valid in our case. Our result is not proportional to the third time derivative of the quadrupole moment, which is the result obtained as the leading term in the wave zone. Here we are well inside a single wavelength, we are computing what is normally called Newtonian noise.

3.1.6. Measurement. The effect of the oscillating gravitation field on a detector will be to force oscillations, simply according to Newton's law. We have

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d^2 \mathbf{X}}{dt^2} = -m\hat{\mathbf{x}} \frac{GM}{R_0^2} \left(12a[t] + \frac{15}{2}\beta[t]^2 - 12a[t]\Delta[t] \right). \quad (3.16)$$

As expected the mass of the detector m cancels from this equation as dictated by the Principle of Equivalence. Then the spatial motion of the detector is obtained by integrating Eqn.(3.16) twice. We note that $a \sim 1/c_g^2$ and $\beta \sim 1/c_g$ all terms in Eqn.(3.16) contain factors of $1/c_g$. Hence if there was truly no aberration and the propagation speed was infinite, *i.e.* $c_g \rightarrow \infty$, our result would of course vanish. Hence the actual measurement of any effect would confirm a finite propagation speed for gravity, while precision measurements could be used to determine c_g . Our calculation is the first for the dynamical effects of gravitation at laboratory sized distances, the instantaneous effects have been designed to exactly cancel.

Previous calculations have always neglected the finite propagation speed of gravitational effects at these distances. As we will see, the dynamical effects are not utterly negligible.

3.1.7. Optimization. The motion we have studied allows for the choice of a number of parameters, Δ, ω, M, R_0 , and ρ, r_s the density and size of the oscillating masses. This gives a window for optimizing the resulting force on the detector. However, there are different constraints that must be taken into account. We will not analyze the compensatory masses, they must exist, but their net effect on the detector are taken to be vanishing or negligible.

The first constraint comes from imposing the cancellation of the Newtonian terms (and has already been imposed in obtaining Eqn.(3.15)) and leads to

$$\frac{M}{R_0^2} = \frac{M'}{R_0'^2}, \quad \frac{\Delta}{R_0} = \alpha = \frac{\Delta'}{R_0'} \quad \text{and} \quad \omega = \omega' \quad (3.17)$$

where the unprimed and primed quantities are specific to the systems on either side of the detector. We also impose that $\alpha \ll 1$, especially since we neglect terms of order α^3 in the computation⁸.

The second constraint is due to physical considerations. The masses, which were taken as point masses during the computation, should actually be spherical bodies made of the some material with density ρ . Therefore physically, for a spherical mass of density ρ its radius r_s must be smaller than the distance to the detector, R_0 :

$$r_s = \zeta R_0 \quad \text{with} \quad \zeta < 1.$$

The ζ 's of the two masses are different but linked by the equality $\zeta'^3 = \zeta^3 \cdot R_0/R_0' = \zeta^3 \cdot \Delta/\Delta'$ from imposing the cancellation of the instantaneous Newton force.

Then our expression for the force becomes

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt}[t] &= -mG \frac{4\pi\rho R_0^3 \zeta^3}{3} \frac{\alpha\omega^2}{c_g^2} \hat{\mathbf{x}} \left(12 \sin(\omega t) + \alpha \left(\frac{15}{2} \cos^2(\omega t) - 12 \sin^2(\omega t) \right) \right) \\ &= -mG \frac{4\pi\rho R_0^3 \zeta^3}{3} \frac{\alpha\omega^2}{c_g^2} \hat{\mathbf{x}} \left(12 \sin(\omega t) + \alpha \left(\left(6 + \frac{15}{4} \right) \cos(2\omega t) \right) - \left(6 - \frac{15}{4} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Dropping the terms proportional to α^2 , we have an oscillating driving force on the mirror that is a consequence of the relative delay between the signal propagating from the sources to the mirror. The Newton equation for the motion of the mirror is simply

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = G \frac{4\pi\rho\zeta^3 R_0^3 \alpha\omega^2}{3c_g^2} 12 \sin(\omega t) \quad (3.19)$$

which integrates trivially by taking out the factor of ω^2 in the numerator

$$X[t] = -G \frac{4\pi\rho\zeta^3 R_0^3 \alpha}{3c_g^2} \sin(\omega t). \quad (3.20)$$

⁸It is easy to take into account higher orders terms in α .

Interestingly, the frequency plays no role in the observability of the effect. Writing $M_0 = \frac{4\pi\rho R_0^3}{3}$ we have

$$X[t] = -G \frac{\zeta^3 M_0 \alpha}{c_g^2} \sin(\omega t). \quad (3.21)$$

Taking nominally $\zeta = .9$, $\alpha = .1$, we find the overall numerical factor gives

$$X[t] = -0.72G \frac{M_0}{c_g^2} \sin(\omega t). \quad (3.22)$$

Taking $c_g = c = 2.99 \times 10^8$ and $G = 6.67 \times 10^{-11}$ in MKS units we get in metres

$$X[t] = -0.72 \times 7.46 \times 10^{-28} M_0 \sin(\omega t). = 5.05 \times 10^{-28} M_0 \sin(\omega t). \quad (3.23)$$

For a large mass of say 10 metric tons, $M_0 = 10^4 kg$, the amplitude of the oscillations of the mirror are $X[t] \sim 10^{-24} m$. This is outside of the range of present technology which allows the measurement of amplitudes of $\sim 10^{-21} m$. However we do not see our predicted amplitude as totally out of the realm of possibility, in the hopefully not too distant future. It should be noted that recent analyses [35, 36] of the possibility of observing gravitational quantum fluctuations, that would establish unequivocally the existence of quantum gravitons, require observations at the level of $10^{-35} m$, which is substantially smaller than our projection. We speculate that the handful of orders of magnitude improvement in measurement capability could be surpassed in future generation gravitational wave detectors.

3.2. Second proposal

Here we explore the possibility that the acceleration of the source system could give rise to the dominant effect. If we neglect all velocity dependent terms, we are left with, from Eqn. (2.10), dropping all terms that cancel with the mass on the other side and the compensatory masses

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -mGM \left[\frac{\mathbf{R}}{R^3} (\mathbf{R} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) - \frac{4\dot{\boldsymbol{\beta}}}{R} \right]_{ret} = -mGM \left[\frac{\mathbf{n}}{R} (\mathbf{n} \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}) - \frac{4}{R} \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right]_{ret}. \quad (3.24)$$

Then the geodesic equation for the detector (mirror in LIGO), dropping the vectorial notation as we take everything to move in one direction and the κ factor, will be

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = mGM \left[\frac{3}{R} \frac{d^2 x}{dt^2} \right]_{ret}. \quad (3.25)$$

If we imagine that the system suffers an impulse, a large acceleration for a short period of time followed by a period of coasting, such as a steel ball bearing bouncing between two fixed walls with a relatively large and essentially constant retardation time, for example, then we can estimate the effect on the detector by integrating this equation with the retarded time

put in the right hand side. As both sides are identical in time derivatives, we get

$$X[t] = 3GM \left[\frac{x[t]}{R} \right]_{ret}. \quad (3.26)$$

Noting that there is a $1/c_g^2$ implicit in the right hand side, we find in metres

$$|X| \sim 7.46 \times 10^{-28} M\alpha \quad (3.27)$$

where α is the fractional amplitude of the accelerated motion. This expression is of course only the contribution of one side, and at the corresponding retarded time, however, it is not cancelled by the other side due to the retardation effects. It is still rather small, and with $\alpha = .1$, and a mass of $10^4 kg$, which is very large but not absolutely impossible, we have

$$|X| \sim 7.46 \times 10^{-25} m. \quad (3.28)$$

This amount of disturbance is again, not yet measurable, however, it is also not completely out of the realm of possibilities in the future.

3.2.1. Gravitational earthquake detection. An even more serendipitous potential observation has to do with earthquakes. Here the analysis of small seismic disturbances done in [14] may not be relevant. In magnitude 8 and higher earthquakes, a huge mass, part of a tectonic plates can move of the order of several tens of meters in a short period of time. Although the accelerations experienced are not large, the mass is so that the effect can be observationally large. Indeed it may well be possible to detect large magnitude earthquakes, gravitationally, much before the seismic signal arrives.

Consider a magnitude 9 or higher earthquake, where a tectonic plate which has normally a thickness of around 100km can move of the order of 40 metres [22, 37]. The thickness of the plate can vary, however, around 100km is a reasonable estimate. Tectonic plates cover huge areas of the earth, thus when an earthquake happens, most of the plate does not really move, only built up stresses in the local region are released and only the part of the plate in the local region of the earthquake actually moves. The motion of the mass corresponds to the liberation of slowly built up strains and stresses over the years. Being part of a large jigsaw puzzle that covers the surface of the earth, any motion is highly constrained. However, stresses between the tectonic plates do build up and when they finally release, rather large masses actually move releasing the stress in the plate. This movement can be quite dramatic. The subduction (one plate moving under a neighbouring plate) of the Pacific plate during the recent (April, 2011) earthquake in Fukushima, Japan corresponded to a motion locally of about 40 metres. Did the whole Pacific plate move by 40 metres? Of course not, only a small, local portion of the plate and corresponding mass, moved this distance, that region which is called the subduction zone for this type of earthquake.

For a magnitude 8 earthquake, a quake can last several tens of seconds and mass moves along about 100km. For a magnitude 9 or higher earthquake, stresses can be released over a 1000km fault and the quake can last for up to 5 minutes [38]. For the example of the Fukushima earthquake, which was the second largest ever recorded (after the 1960 Chile earthquake) the mass in the subduction zone of the Pacific plate moved of the order of 40 metres under the Eurasian plate. Let us estimate the volume of the part of the plate that moved as having length 100km, a thickness of 100km and a width of 40 metres, which gives 4×10^{11} cubic metres. The density of the lithosphere (the solid crust of the earth, made up of the tectonic plates) is approximately 2800kg per cubic metre [21], therefore we get a mass of 1.12×10^{15} kg. Using the above analysis for the effect on the mirror caused by the acceleration, we find from Eqn.(3.26)

$$X[t] = -\frac{3G}{c_g^2} M \left[\frac{x[t]}{R} \right]_{ret} \sim \frac{3 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 1.12 \times 10^{15}}{(2.99 \times 10^8)^2} \left[\frac{x[t]}{R} \right]_{ret} = 2.51 \times 10^{-11} \left[\frac{x[t]}{R} \right]_{ret} \quad (3.29)$$

Taking $\left| \left[\frac{x[t]}{R} \right]_{ret} \right| \sim 40/10^6$ for a magnitude 9 or greater earthquake with a movement of 40m and occurring at $R \sim 1000$ km away, we have

$$|X| \sim 1.00 \times 10^{-15} m. \quad (3.30)$$

which is very, easily observable. Of course the estimated mass and other parameters could vary considerably, however, we can afford a diminution of our estimate by several orders of magnitude, but the effect is still observable. We have not taken into account the effect of the compensatory mass, which in this case would be the rest of the earth. But applying, the rule of thumb that can be obtained from the calculations using elasticity theory for the reaction of the rest of the earth to humans walking, as done in [15], to the motion due to the earthquake, we can imagine that the cancelling effect of the movement of the rest of the earth will only be an order 1 effect, *i.e.* we would expect that our calculated gravitational effect would be modified, by terms which would be of the same order of magnitude, but which would not exactly cancel it. Therefore the effect calculated in Eqn.(3.29) would only be affected by terms of the same order of magnitude, changing the amplitude by at most a factor of order 1.

It would seem that the LIGO type detector is an ideal early warning sensor for large earthquakes, gravitational effects presumably propagate at the speed of light which is much faster than the speed of seismic waves. Having many such detectors situated around the globe, as is the actual case, would allow for quick referencing data on the actual position of the earthquake.

4. Conclusion

We have proposed an experiment that could observe dynamical effect of the general relativity and be used to measure the speed of gravity in a directly controllable laboratory setting. It would be important to be able to do this measurement as up to now, the measurement of the speed of gravitational propagation is solely based on production at astronomically distant sources and the subsequent indirect measurement by comparison with the arrival time of electromagnetic radiation, in principle produced simultaneously by the same source. Such an indirect measurement is surely perfectly good, especially as it confirms that the speed of gravity and the speed of light are equal to one part in 10^{15} . However, an incontrovertible measurement would correspond to the production of the propagating gravitational disturbance in the laboratory and the measurement of the elapsed time before its subsequent arrival at a detector also in the laboratory. The experimental proposals that we have analyzed are not possible at the present, however, they are neither beyond the horizon of future possibilities.

In the process of our calculation, we analyzed the role of instantaneous and retarded time and focused on how to pass from one to the other. We use a mathematical result, the Lagrange inversion theorem, that could be very useful in future computation. It could also be easily adapted to be used even for pure electromagnetism.

Two subtleties have been addressed which are at the heart of the reason why the dynamical effects of gravitation are so difficult, apart from the intrinsic weakness of gravity due to the relatively small coupling constant. First the fact that there is no aberration in the gravitational fields for uniformly moving sources (masses). This is a subtle consequence of Lorentz invariance. Therefore, only accelerated motion can give rise to dynamical retardation effects of the gravitational fields, and consequently the observable effects are extremely small. Second is the fact that energy-momentum conservation denies the possibility of a dipolar dynamical field. The gravitational dipole must be time independent. Therefore the first non-zero dynamical effects can only be observed in the quadrupole fields which results in a further diminution of the potentially observable effects. The usual higher power decay of the quadrupole for the far zone, is not valid in the near zone, hence there is some hope that the effects in the near zone, are not suppressed into oblivion. Nevertheless, although too weak at the present time, we still hope that the dynamical effects of gravity could be observed in special purpose, extremely high precision detectors of gravitational acceleration, in the not too distant future.

Finally, we have given an analysis of the signal measured due to the acceleration of different masses. Controlled masses in a laboratory setting again do not give signals that are presently measurable. However, enormous mass movement that occurs in some earthquakes would seem to give signals that are observable in interferometric gravitational wave detectors.

Indeed, the ensemble of such detectors could serve as an early warning system for large earthquakes, with location information available if there are many such detectors.

5. Acknowledgements

We thank NSERC of Canada and the Facult des tudes suprieures et postdoctorales and the Dpartement de physique of the Universit de Montral for financial support. We thank Steven Carlip, Richard MacKenzie and Kip Thorne for useful correspondence. This work received honourable mention in the 2012 Gravity Research Fondation Essay Competition where it was first enunciated.

6. Appendix A

We will first consider the case of a set of particles (atoms, treated as point particles) with masses and positions $\{m_i, \mathbf{x}^i\}$ which correspond to our system that is creating the Newtonian noise. These masses are compensated by a counter weight which is comprised also of a set of particles (also atoms, treated as point particles) with masses and positions $\{m_A, \mathbf{y}^A\}$. \mathbf{x}^i and \mathbf{y}^A are the coordinates of the mass points with respect to a fixed origin. The system could correspond to a human walking or a mass oscillating or any system of gravitational sources creating a desired, time dependent gravitational field. However the required motion can require compensating movement of masses in order that momentum is conserved. For example, an oscillating pendulum could be in a housing that is mounted on the ground. In that the case, the counter weight would correspond to all the particles that make up the ground in a reasonable sized region around the spot where the housing is mounted. The motion of a pendulum alone does not conserve momentum, and indeed, the housing and through the mounting, the particles in the ground supply the required momentum for conservation. The counter weight could also be a specific macroscopic mass attached to the system, designed in such a way (usually, a very large mass) so that its motion will allow for conservation of momentum, however, its dynamical gravitational fields would be negligible. We will see how this is possible in our example.

The position of the centre of mass of the entire system and counter weight \mathbf{X} is given by

$$\mathbf{X} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{x}^i + \sum_A m_A \mathbf{y}^A}{\sum_i m_i + \sum_A m_A}. \quad (6.1)$$

Let the mass of the system be $m = \sum_i m_i$ and the mass of the counter weight $M = \sum_A m_A$. We define $\boldsymbol{\xi}$ and $\boldsymbol{\zeta}$ to be the centre of mass of the system and the counter weight respectively

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{x}^i}{m} \quad \boldsymbol{\zeta} = \frac{\sum_A m_a \mathbf{y}^A}{M}. \quad (6.2)$$

These should be identified as proportional to the dipole moment of the system and of the counter weight respectively. The deviation of the particles making up the system and the

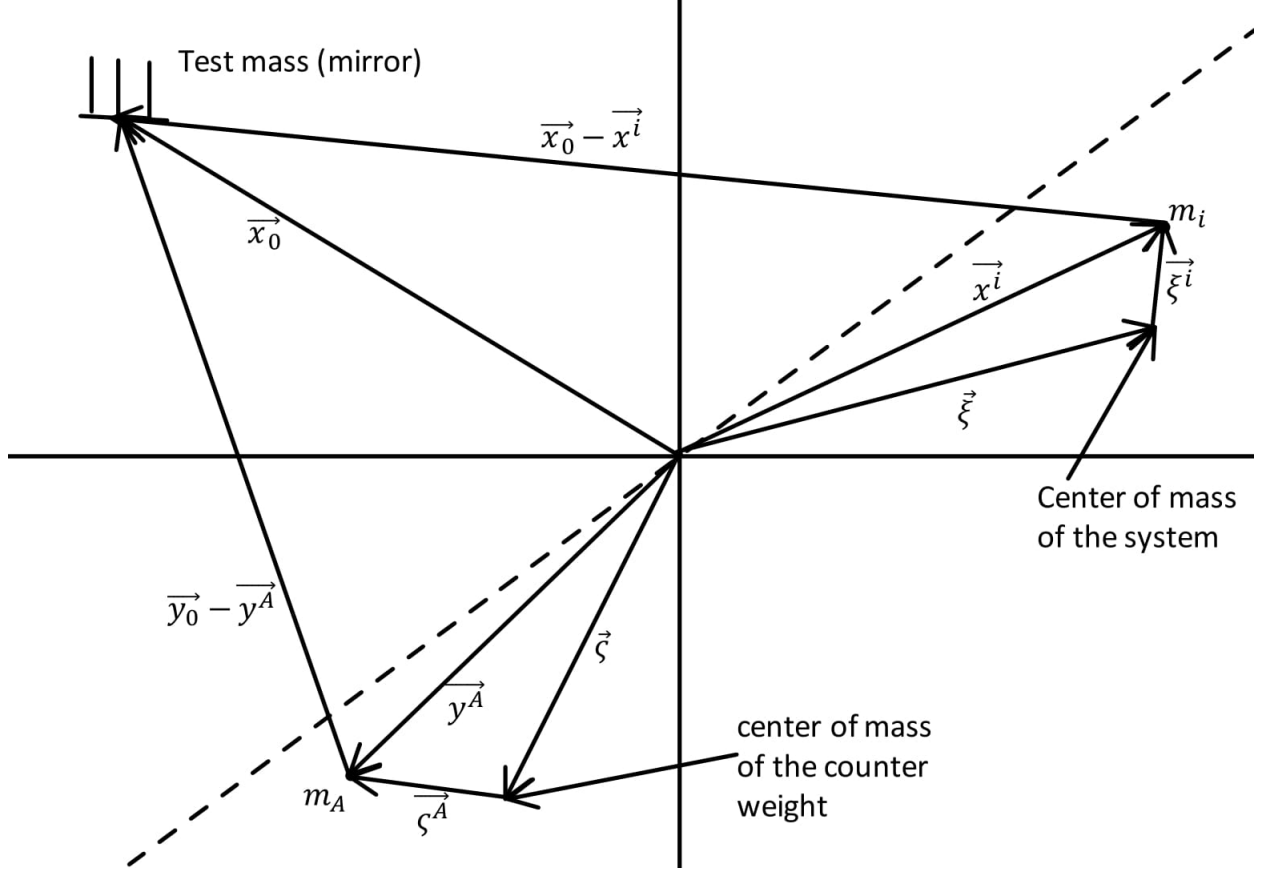


FIG. 3. The scheme of the test mass (mirror), the system and the counter weight.

counter weight from their respective centre of mass is defined as $\mathbf{x}^i = \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi}^i$ and $\mathbf{y}^A = \boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\zeta}^A$. Then it is easy to find

$$\mathbf{X} = \frac{m\boldsymbol{\xi} + M\boldsymbol{\zeta}}{m + M} + \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{\xi}^i + \sum_A m_A \boldsymbol{\zeta}^A}{m + M}. \quad (6.3)$$

Now the dipole moment of the system is given by

$$\sum_i m_i \mathbf{x}^i = \sum_i m_i \boldsymbol{\xi} + \sum_i m_i \boldsymbol{\xi}^i = m\boldsymbol{\xi} + \sum_i m_i \boldsymbol{\xi}^i = m \frac{\sum_i m_i \mathbf{x}^i}{m} + \sum_i m_i \boldsymbol{\xi}^i = \sum_i m_i \mathbf{x}^i + \sum_i m_i \boldsymbol{\xi}^i. \quad (6.4)$$

therefore

$$\sum_i m_i \boldsymbol{\xi}^i = 0 \quad (6.5)$$

and correspondingly

$$\sum_A m_A \boldsymbol{\zeta}^A = 0 \quad (6.6)$$

i.e. the contributions of the deviations of the particles of the system from its centre of mass does not contribute to the dipole moment of the system, and correspondingly for the counter

weight. Then clearly

$$\mathbf{X} = \frac{m\boldsymbol{\xi} + M\boldsymbol{\zeta}}{m + M}. \quad (6.7)$$

Total momentum of the system and the counter weight together must be conserved, therefore

$$\dot{P} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}^i + \sum_A m_A \dot{\mathbf{y}}^A \right) = \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_i m_i \mathbf{x}^i + \sum_A m_A \mathbf{y}^A \right) = m\ddot{\boldsymbol{\xi}} + M\ddot{\boldsymbol{\zeta}} = 0 \quad (6.8)$$

i.e.

$$\ddot{\mathbf{X}} = 0. \quad (6.9)$$

Thus we can write

$$\mathbf{X} = \mathbf{V}t + \mathbf{X}_0 \quad (6.10)$$

and in the centre of mass system with the appropriate choice of origin, $\mathbf{V} = 0$ $\mathbf{X}_0 = 0$, so that indeed we can take

$$\mathbf{X} = 0. \quad (6.11)$$

We assume that the deviations $\boldsymbol{\xi}^i$ and $\boldsymbol{\zeta}^A$ are small when compared to the respective centres of mass $\boldsymbol{\xi}$ and $\boldsymbol{\zeta}$ respectively. Then any function of the coordinates can be expanded in a Taylor series about the undeviated coordinates. We will specialize to functions that can be written as a linear superposition of a contribution coming from each mass point, as it is the kind of function that is relevant:

$$f(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^A) = \sum_i f_i(\mathbf{x}^i) + \sum_A f_A(\mathbf{y}^A). \quad (6.12)$$

Then writing the coordinates of \mathbf{x}^i as x_α^i where the greek index takes the values $\alpha = 1, 2, 3$ and summation over repeated greek indices is assumed, etc. we have

$$\begin{aligned} f(x_\alpha^i, y_\beta^A) &= f(\xi_\alpha + \xi_\alpha^i, \zeta_\beta + \zeta_\beta^A) = f(\xi_\alpha, \zeta_\beta) + \sum_i \partial_{\xi_\gamma} f_i(\xi_\alpha) \xi_\gamma^i + \sum_A \partial_{\zeta_\gamma} f_A(\zeta_\beta) \zeta_\gamma^A + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\sum_i \partial_{\xi_\gamma} \partial_{\xi_\epsilon} f_i(\xi_\alpha) \xi_\gamma^i \xi_\epsilon^i + \sum_A \partial_{\zeta_\gamma} \partial_{\zeta_\epsilon} f_A(\zeta_\beta) \zeta_\gamma^A \zeta_\epsilon^A \right) + \dots \end{aligned} \quad (6.13)$$

Applying this to the Newtonian potential at a position \mathbf{x}_0 , the position of a detector for example, we have

$$\phi_{\text{Newton}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}^i, \mathbf{y}^A) = - \sum_i \frac{Gm_i}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^i|} - \sum_A \frac{Gm_A}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}^A|}. \quad (6.14)$$

Thus $f_i(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi}) = -\frac{Gm_i}{|\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\xi}|}$ and then we have $\partial_{\xi_\gamma} f_i(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi}) = -Gm_i \frac{x_{0\gamma} - \xi_\gamma}{|\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\xi}|^3}$ and $\partial_{\xi_\gamma} \partial_{\xi_\epsilon} f_i(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi}) = Gm_i \left(\frac{\delta_{\gamma\epsilon}}{|\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\xi}|^3} - \frac{3(x_{0\gamma} - \xi_\gamma)(x_{0\epsilon} - \xi_\epsilon)}{|\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\xi}|^5} \right)$. Therefore we have

$$\begin{aligned} \phi_{\text{Newton}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}^i, \mathbf{y}^A) &= \phi_{\text{Newton}}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta}) - \sum_i Gm_i \frac{x_{0\gamma} - \xi_\gamma}{|\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\xi}|^3} \xi_\gamma^i - \sum_A Gm_A \frac{x_{0\gamma} - \zeta_\gamma}{|\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\zeta}|^3} \zeta_\gamma^A + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\sum_i Gm_i \left(\frac{\delta_{\gamma\epsilon}}{|\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\xi}|^3} - \frac{3(x_{0\gamma} - \xi_\gamma)(x_{0\epsilon} - \xi_\epsilon)}{|\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\xi}|^5} \right) \xi_\gamma^i \xi_\epsilon^i + \right. \\ &+ \left. \sum_A Gm_A \left(\frac{\delta_{\gamma\epsilon}}{|\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\zeta}|^3} - \frac{3(x_{0\gamma} - \zeta_\gamma)(x_{0\epsilon} - \zeta_\epsilon)}{|\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\zeta}|^5} \right) \zeta_\gamma^A \zeta_\epsilon^A \right) + \dots \end{aligned} \quad (6.15)$$

Clearly the terms linear in ξ_γ^i and ζ_γ^A , the dipole terms vanish simply because

$$\sum_i m_i \boldsymbol{\xi}^i = 0 \quad \sum_A m_A \boldsymbol{\zeta}^A = 0. \quad (6.16)$$

Therefore, we find the quadrupole terms are the first non-trivial terms contributing to the potential.

$$\begin{aligned} \phi_{\text{Newton}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}^i, \mathbf{y}^A) &= \phi_{\text{Newton}}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta}) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\sum_i Gm_i \left(\frac{\delta_{\gamma\epsilon}}{|\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\xi}|^3} - \frac{3(x_{0\gamma} - \xi_\gamma)(x_{0\epsilon} - \xi_\epsilon)}{|\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\xi}|^5} \right) \xi_\gamma^i \xi_\epsilon^i + \right. \\ &+ \left. \sum_A Gm_A \left(\frac{\delta_{\gamma\epsilon}}{|\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\zeta}|^3} - \frac{3(x_{0\gamma} - \zeta_\gamma)(x_{0\epsilon} - \zeta_\epsilon)}{|\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\zeta}|^5} \right) \zeta_\gamma^A \zeta_\epsilon^A \right) + \dots \end{aligned} \quad (6.17)$$

However there are other ways of obtaining dipole-like contributions, and we will show that these do not necessarily have to cancel, as exposed in Thorne and Winstein [15]. These contributions are dipole-like, but in fact do not correspond to the total dipole moment of the combined system and the compensatory mass. The total dipole moment is of course constant or at most linearly time dependent. Consider the approximation where all the mass of the system and of the compensatory mass can be taken to be concentrated at their respective centres of mass. Then, making the assumption that the origin of the coordinate system can be taken such that $|\boldsymbol{\xi}|, |\boldsymbol{\zeta}| \ll |\mathbf{x}_0|$ we can expand as

$$\begin{aligned} \phi_{\text{Newton}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}^i, \mathbf{y}^A) &\approx -\frac{Gm}{|\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\xi}|} - \frac{GM}{|\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\zeta}|} = -G(m + M) \frac{1}{|\mathbf{x}_0|} - \frac{G\mathbf{x}_0}{|\mathbf{x}_0|^3} \cdot (m\boldsymbol{\xi} + M\boldsymbol{\zeta}) \\ &+ \frac{G}{2|\mathbf{x}_0|^5} \left(m \left(3(\mathbf{x}_0 \cdot \boldsymbol{\zeta})^2 - |\boldsymbol{\xi}|^2 |\mathbf{x}_0|^2 \right) + M \left(3(\mathbf{x}_0 \cdot \boldsymbol{\zeta})^2 - |\boldsymbol{\zeta}|^2 |\mathbf{x}_0|^2 \right) \right) \end{aligned} \quad (6.18)$$

However, once again, $m\boldsymbol{\xi} + M\boldsymbol{\zeta} = (m + M)\mathbf{X} \ll (m + M)\mathbf{x}_0$ and the coordinate system can be chosen so that the centre of mass occurs at $\mathbf{X} = 0$, giving

$$\begin{aligned} \phi_{\text{Newton}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}^i, \mathbf{y}^A) &\approx -G(m + M)\frac{1}{|\mathbf{x}_0|} \\ &+ \frac{G}{2|\mathbf{x}_0|^5} \left(m \left(3(\mathbf{x}_0 \cdot \boldsymbol{\zeta})^2 - |\boldsymbol{\xi}|^2 |\mathbf{x}_0|^2 \right) + M \left(3(\mathbf{x}_0 \cdot \boldsymbol{\zeta})^2 - |\boldsymbol{\zeta}|^2 |\mathbf{x}_0|^2 \right) \right). \end{aligned} \quad (6.19)$$

Therefore we see that, in the centre of mass system and if the assumption $|\boldsymbol{\xi}|, |\boldsymbol{\zeta}| \ll |\mathbf{x}_0|$ is valid, these dipole terms also must vanish, because of conservation of momentum. The system may correspond to motions of high accelerations such as jerks, but because of momentum conservation, the counter weight must respond in an identical, compensatory manner, and the combined, total contribution certainly will not exhibit the potentially complicated time dependence of say the system alone.

Appendix B : Detailed Computation for Harmonic Motion

The detailed computation for the \hat{x} harmonic oscillator is given in this appendix. We consider the O_1 harmonic oscillator (on the left) which motion is described by

$$\mathbf{R}[z] = -\mathbf{r}[z] = R_0(1 + \alpha \sin(vz), 0, 0), \quad (6.20)$$

where $\alpha \equiv \frac{\Delta}{R_0} \ll 1$ is the expansion parameter and $v \equiv \frac{\omega R_0}{c} \ll 1$ is the dimensionless speed such that $vz = \frac{\omega R_0}{c} \cdot \frac{ct_r}{R_0} = \omega t_r$.

This motion of a point mass creates a gravitational field, evaluated at the retarded time, is given by Eqn.(2.10) reproduced here

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -GmM \left[\gamma \frac{\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}}{\kappa^2 R^2} - \frac{\mathbf{R}}{\kappa^3 R^3} (\dot{R} + \beta^2 - \mathbf{R} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) + \frac{4\boldsymbol{\beta}}{\kappa^3 R^2} \dot{R} - \frac{4\dot{\boldsymbol{\beta}}}{\kappa^2 R} + \frac{\mathbf{n}}{\kappa^2 R^2} \beta^2 \right] \Bigg|_{ret}, \quad (6.21)$$

where $\kappa = (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})$ is to be expanded to keep terms of order less than β^3 , α^3 and $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}[z]}{R[z]}$. We also have $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{x}}$, $\boldsymbol{\beta} = -\alpha v \cos(vz)\hat{\mathbf{x}}$ and $\dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\alpha v^2}{R_0} \sin(vz)\hat{\mathbf{x}}$. It's important to note that, along the computation we are going to neglect the terms proportional to β^3 , α^4 and higher. Then the dynamical equation then is given by

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}[z] = \frac{-GmM\hat{\mathbf{x}}}{R_0^2} \left[\frac{1 + \alpha v \cos(vz) - 3\alpha v^2 \sin(vz) - 3\alpha^2 v^2 \sin^2(vz) - 3\alpha^2 v^2 \cos^2(vz)}{(1 + \alpha \sin(vz))^2 (1 + \alpha v \cos(vz))^3 \sqrt{1 - \alpha^2 v^2 \cos^2(vz)}} \right] \Bigg|_{ret}. \quad (6.22)$$

To express the field given as a function of z , the dimensionless retarded time, as a function y , the dimensionless instantaneous time (up to a constant shift) we apply the Lagrange inversion

theorem with $g[z] = \frac{dp}{dt}[z]$ where p is the norm of \mathbf{p} as all vectors are in one direction :

$$\frac{dp}{dt}[z] = \frac{dp}{dt}[y] - \alpha \sin(vy) \partial_y \frac{dp}{dt}[y] + \frac{\alpha^2}{2} \partial_y \left(\sin^2(vy) \partial_y \frac{dp}{dt}[y] \right) + \mathcal{O}(\alpha^3, v^3)$$

and with

$$\begin{aligned} \partial_y \frac{dp}{dt}[y] &= \frac{-GmM}{R_0^2} \left(-2 \frac{\alpha v \cos(vy)}{(1 + \alpha \sin(vy))^3 (1 + \alpha v \cos(vy))^2} + 2 \frac{\alpha v^2 \sin(vy)}{(1 + \alpha \sin(vy))^2} \right) \\ \partial_y^2 \frac{dp}{dt}[y] &= \frac{-GmM}{R_0^2} \left(\frac{6\alpha^2 v^2 \cos^2(vy)}{(1 + \alpha \sin(vy))^4} + 2 \frac{\alpha v^2 \sin(vy)}{(1 + \alpha \sin(vy))^3} \right), \end{aligned}$$

where we have included the second derivative just for completeness, but it does not contribute at the order we are interested in. Correspondingly all denominators should be expanded to order v^2 and α^2 . After some algebra, we find (suppressing the argument of the trigonometric functions to avoid an unwieldy equation)

$$\frac{-GmM \hat{\mathbf{x}}}{R_0^2} \left(\frac{1 - 2\alpha v \cos - 3\alpha v^2 \sin + 2\alpha^2 v \cos \sin - 5\alpha^2 v^2 \sin^2 + (1/2)\alpha^2 v^2 \cos^2}{(1 + \alpha \sin)^2} \right) + \mathcal{O}(\alpha^3, v^3).$$

Every trigonometric function is expressed in terms of $vy = \omega t - v$ however we want our expression to be in terms of t directly. We use a simple trigonometric identities and then Taylor expand up to the second order in v ,

$$\begin{aligned} \sin(vy) &= \sin(\omega t - v) = \sin(\omega t)(1 - v^2/2) - v \cos(\omega t) \\ \cos(vy) &= \cos(\omega t - v) = \cos(\omega t) + v \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Again we Taylor expand everything and neglect the terms of order v^3 , α^3 and higher. Then we obtain Eqn.(3.10) in terms the instantaneous time t :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt}[t] &= -GmM \hat{\mathbf{x}} \left[\frac{1}{R[t]^2} - \frac{1}{R_0^2} (4\alpha v^2 \sin(\omega t) + \frac{5}{2} \alpha^2 v^2 \cos^2(\omega t) - 4\alpha^2 v^2 \sin^2(\omega t)) \right] \\ &= -GmM \hat{\mathbf{x}} \left[\frac{1}{R[t]^2} - \frac{1}{R_0^2} \left(4a[t] + \frac{5}{2} \beta[t]^2 - 4a[t] \Delta[t] \right) \right] \end{aligned} \quad (6.23)$$

Chapitre 3

Cosmologie

*"On dit l'univers infini.
On dit aussi qu'il s'étend.
Alors dans quoi s'étend-il ?"*

Nekfeu

La Cosmologie est l'étude de notre univers (observable). Il existe plusieurs modèles cosmologiques basés sur la relativité générale ou même d'autres théories dont le but est de décrire le mieux possible l'univers visible.

Dans cette introduction, seules les quelques grandes lignes et caractéristiques du modèle principal, le modèle Λ CDM, seront présentées. Il existe bien sûr une large variété de références sur ce sujet, mais un résumé concis de la cosmologie peut être trouvé chez Carroll [5]. Pour approfondir le sujet, il existe plusieurs livres entièrement consacrés à la cosmologie, parmi lesquels je recommanderais celui de Peter et Uzan [39].

Pour étudier le modèle Λ CDM, il faut commencer par discuter du choix de métrique. Ensuite, nous verrons comment les équations d'Einstein nous donnent les équations de Friedmann qui décrivent le comportement du paramètre principal de notre métrique, le facteur d'échelle. Enfin nous discuterons d'un des problèmes de ce modèle, celui de la constante cosmologique. Le deuxième article tente d'y apporter une solution.

3.1. Métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

La métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker a déjà été présentée en tant qu'exemple dans le chapitre 1 pour calculer les différentes quantités géométriques. Il est cependant utile de comprendre les raisons derrière ce choix particulier. Notre univers semble être isotropique (*i.e.* : le même dans chaque direction, invariant sous les rotations), mais aussi spatialement homogène (*i.e.* : le même partout, invariant sous les translations) au moins à grande échelle. Il est raisonnable de choisir une métrique présentant ces symétries.

On peut donc considérer une métrique de la forme

$$ds_{FLRW}^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) d\sigma^2 \quad (3.1.1)$$

où $d\sigma^2$ est la partie spatiale de notre métrique qui est maximale-ment symétrique (due au fait que l'on considère un univers spatialement homogène).

Une métrique maximale-ment symétrique est naturellement très contrainte et on peut montrer que la partie spatiale doit être de la forme

$$d\sigma^2 = \frac{1}{1 - k\tilde{r}^2} d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\Omega^2 \quad (3.1.2)$$

où $k = 0, \pm 1$ et est la courbure totale (c'est en fait un sixième du scalaire de Ricci, R , normalisé). On ne considérera par la suite que le cas où la partie spatiale est plate¹, c'est-à-dire $k = 0$.

La métrique de FLRW de courbure nulle s'écrit

$$ds_{FLRW}^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) (d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\Omega^2). \quad (3.1.3)$$

Les symétries imposées restreignent donc le nombre de paramètres indépendants à un seul : le facteur d'échelle $a(t)$.

Une fois ce choix de métriques fait, son tenseur d'Einstein associé peut être calculé comme cela a été fait en exemple dans le chapitre 1. Il est aussi nécessaire de considérer un tenseur énergie-impulsion particulier afin de résoudre les équations d'Einstein. En cosmologie on décrit généralement les particules par un fluide parfait.

Cela correspond à considérer un tenseur énergie-impulsion de la forme

$$T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(-\rho, p, p, p). \quad (3.1.4)$$

où ρ est la densité et p est la pression. La contrainte due à la conservation de l'énergie nous donne une première relation entre la densité ρ et la pression P . Le tenseur énergie-impulsion est conservé, et la conservation de l'énergie dans le cas d'une métrique générale s'écrit en termes de la dérivée covariante. Dans le cas d'un fluide parfait, la conservation de l'énergie revient à

$$\nabla_{\mu} T_0^{\mu} = -\dot{\rho} - 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \quad (3.1.5)$$

Nous avons donc une première équation pour décrire l'évolution de notre système, c'est-à-dire l'univers. Néanmoins d'autres informations sont nécessaires. On va considérer les équations d'Einstein dans le cas de notre ansatz de métrique et trouver quelles équations régissent l'évolution du paramètre d'échelle.

¹C'est aussi une très bonne approximation. En effet, la valeur expérimentale de Ω_k , la densité d'énergie du à la courbure, est de 0.001 ± 0.002 [40], ce qui est en accord avec un univers plat et permet de simplifier les expressions par la suite.

3.2. Équations de Friedmann

Le tenseur d'Einstein pour la métrique de FLRW, éq. (3.1.3), est ensuite séparé entre la composante zéro-zéro et la partie spatiale-spatiale. On trouve

$$G_{00} = 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \equiv 3H^2 \quad G_{ij} = - \left(2 \frac{\ddot{a}}{a} + H^2 \right) g_{ij} \quad (3.2.1)$$

où l'on a défini le paramètre de Hubble, $H = \frac{\dot{a}}{a}$.

Les équations d'Einstein deviennent, pour une métrique FLRW et un gaz parfait, les équations de Friedmann

$$H^2 = \frac{\kappa}{3} \rho + \frac{\Lambda}{3} \quad (3.2.2)$$

$$\dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{a}}{a} = - \frac{\kappa}{6} (\rho + 3P) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (3.2.3)$$

Les deux équations de Friedmann et l'équation de conservation d'énergie, éq. (3.1.5), nous donne donc trois équations pour trois paramètres : $a(t)$, ρ et p . Cependant les trois équations ne sont pas indépendantes. La deuxième équation de Friedmann peut facilement être déduite des deux autres.

Pour résoudre complètement notre système il est donc nécessaire d'introduire une dernière donnée, l'équation d'état de notre fluide parfait. En effet, les fluides satisfont, en général, une équation d'état comme

$$p = \omega \rho.$$

La conservation de l'énergie implique donc que la densité se comporte comme

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1 + \omega) \frac{\dot{a}}{a} \implies \rho \sim a^{-3(1+\omega)}. \quad (3.2.4)$$

Ce résultat est très important, car il permet de calculer et de comprendre l'évolution de la densité pour chaque type de matière en fonction de son paramètre d'équation d'état, ω .

L'équation (principale) de Friedmann nous donne donc l'évolution de facteur d'échelle

$$H^2 = \frac{\kappa}{3} \sum_i \rho_i, \quad (3.2.5)$$

où $\sum_i \rho_i$ est la somme des densités de tous les (types de) fluides présents. Notons que la contribution de la constante cosmologique a été incluse dans le $\sum_i \rho_i$. En effet, cette constante cosmologique correspond à l'énergie du vide, mais peut aussi être décrite comme un fluide parfait avec $\omega = -1$. Ce sujet est approfondi dans la prochaine section qui est consacrée à cette fameuse constante cosmologique et aux problèmes qui y sont liés.

L'équation de Friedmann 3.2.5 permet, pour n'importe quelle valeur de densité et espèce (*i.e.*: type de fluide associé à un ω_i constant), de résoudre numériquement et donc d'avoir l'histoire complète de l'évolution du facteur d'échelle. On peut néanmoins avoir une bonne idée de cette évolution analytiquement en considérant qu'une espèce contribue majoritairement à

un moment de l'univers et en résolvant l'équation pour celle-ci (c'est-à-dire en négligeant la contribution des autres espèces). Pour cela il faut d'abord discuter des différents types d'espèces et de leur ω associé. Or la thermodynamique nous apprend qu'on peut séparer en essentiellement trois classes d'espèces : l'énergie du vide, la radiation et la matière non-relativistique (N.R.). On exprime généralement leur quantité en termes de paramètres de densité défini comme

$$\Omega_i = \frac{\kappa}{3H_0^2} \rho_i = \frac{\rho_i}{\rho_{crit}} \quad \text{avec} \quad \sum_i \Omega_i = 1, \quad (3.2.6)$$

et ρ_{crit} est la densité totale actuelle. Il est intéressant de noter qu'à l'heure actuelle, dénoté par un indice 0, on observe que la densité de notre univers est principalement due à la densité du vide, $\Omega_{\Lambda 0} \sim 0.7$ et à celle de la matière (non relativistique)², $\Omega_{M0} \sim 0.3$, avec un effet très faible de la radiation (et, bien sûr, de la courbure que nous négligeons dans le cadre de cette introduction).

Comme mentionné précédemment on peut calculer l'évolution d'un univers composé d'un type unique d'espèces et ainsi calculer l'évolution de son facteur d'échelle et de sa densité. On trouve les résultats affichés dans le tableau ci-dessous.

Espèces :	ω	facteur d'échelle	densité
Radiation	1/3	$a(t) \sim t^{1/2}$	$\rho \sim t^{-2}$
Matière N.R.	0	$a \sim t^{2/3}$	$\rho \sim t^{-2}$
Énergie du vide	-1	$a \sim e^{H_0 t}$	$\rho \sim t^0$

Il est aisé de voir qu'un univers composé uniquement d'une constante cosmologique positive (Univers de de Sitter) sera en perpétuelle expansion. Cela explique aussi pourquoi le scénario préféré de notre univers consiste en une densité de matière non-relativistique diminuant alors que celle due à la constante cosmologique elle restera identique. Et donc notre univers semble tendre vers un espace de de Sitter qui sera en expansion perpétuelle.

Ceci est donc la base théorique de notre modèle cosmologique. Ce n'est en aucun cas exhaustif tant s'en faut. En particulier, il est nécessaire pour comprendre notre univers d'étudier l'évolution des perturbations à travers l'équation d'Einstein. En effet, notre univers bien qu'homogène par rapport à de larges distances n'est pas une distribution de matière continue. On pense que des fluctuations, éventuellement quantiques, sont à l'origine de l'existence des galaxies. On peut calculer leurs évolutions en regardant l'évolution des perturbations aux équations d'Einstein autour d'une métrique FLRW. C'est ce type de calcul qui permet ensuite d'expliquer les petites variations du fond diffus cosmologique (CMB), certainement l'observation la plus importante de la cosmologie. Ces explications ainsi que la description

²Noter que c'est dans cette valeur que se cache la proposition d'existence de matière noire. En effet, on peut évaluer la quantité de matière "classique" de l'univers, c'est-à-dire essentiellement l'hydrogène et l'hélium, et ce par différentes méthodes, mais il semble en manquer pour arriver à produire un univers semblable au nôtre. C'est pour cela qu'on postule l'existence d'une matière noire, qui n'interagit pas (ou très faiblement) électromagnétiquement mais qui pourrait expliquer l'existence des galaxies et leur répartition.

de modèle(s) d'inflation, une courte période d'accélération très rapide de l'univers nécessaire pour expliquer certaines caractéristiques de celui-ci, et bien d'autres se retrouvent par exemple dans le livre de Peter et Uzan, mais sont au-delà du propos de cette introduction.

3.3. Constante cosmologique

La constante cosmologique est l'une des caractéristiques les plus fascinantes du modèle Λ CDM résumé ci-dessus, et l'un de ses principaux problèmes d'un point de vue théorique. Une proposition de solution à ce problème est l'objet du **deuxième** article. L'objectif de cette section est donc d'abord de discuter de l'observation de cette constante avant de revenir sur sa prédiction théorique. L'essentiel du matériel présenté ici est basé sur une excellente introduction au problème de la constante cosmologique par Jérôme Martin [41] dont je ne peux qu'encourager la lecture. Une motivation supplémentaire à traiter ce sujet c'est qu'il fait apparaître la plus grande contradiction entre prédiction théorique et observation expérimentale de la physique et même,

"Le paradoxe le plus flagrant de la physique contemporaine."

A. Zee [42]

Commençons par un petit mot sur le côté expérimental de la constante cosmologique avant de se tourner vers la partie théorique et de comprendre vraiment le problème.

L'observation expérimentale de l'accélération de l'univers fut la preuve nécessaire de l'existence d'une constante cosmologique non nulle (et positive) [43]. En effet la seconde équation de Friedmann implique

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6} \sum_i (\rho_i + 3p_i). \quad (3.3.1)$$

Une accélération de l'univers correspond à une seconde dérivée du facteur d'échelle plus grande que zéro, c'est-à-dire $\ddot{a} > 0$. Ce qui est le cas lorsque l'inégalité

$$\sum_i (\rho_i + 3p_i) < 0 \quad (3.3.2)$$

est respectée. Le seul type de matière connue qui permet de résoudre cette inégalité est celui dû à une énergie du vide et donc à une constante cosmologique positive et non nulle.

Cette accélération de l'univers a entre autres été observée grâce à la comparaison entre des supernovas situées à différentes distances (redshift) de nous [44].

Le meilleur ajustement des données semble correspondre à $\Omega_\Lambda \simeq 0.7$, ce qui donne une densité de l'ordre de

$$\rho_{vac}^{obs.} \simeq 10^{-47} \text{GeV}^4. \quad (3.3.3)$$

Quel est donc le problème de cette constante cosmologique ?

Du point de vue purement de la relativité générale, il n'y en a pas. En effet, la constante

cosmologique qui apparaît dans le terme de gauche de l'équation d'Einstein (1.2.7) est un paramètre qui peut prendre n'importe quelle valeur sans "préférences". Le(s) problème(s) survient(ent) lorsque l'on ajoute la théorie des champs quantiques³ au tableau !

Le problème (ou paradoxe) de la constante cosmologique provient des infinités inhérentes à la théorie des champs. En effet, une théorie de champs libres peut être vue comme une collection infinie d'oscillateurs harmoniques. Elle aura donc un état fondamental (*ground state*) d'énergie infinie. Pour les autres interactions que la gravitation ce n'est pas un problème, car elles ne sont sensibles qu'à des différences d'énergie. Néanmoins ce n'est pas le cas de la gravitation qui est sensible à la valeur "absolue" de l'énergie. La constante cosmologique correspond exactement à cette énergie de l'état fondamental que l'on ne considère d'habitude pas. Cette énergie devra donc être renormalisée dans le cas gravitationnel. La procédure de renormalisation, qui est présentée ci dessous dans le cas d'un champ scalaire, est bien connue. Cependant, il n'y a pas, contrairement aux cas habituels de QFT, d'accord entre la théorie renormalisée et l'expérience. La constante cosmologique effective, dénotée Λ_{eff} , est, et c'est un euphémisme, très loin de correspondre à l'observation. C'est le problème, ou paradoxe, de la constante cosmologique.

Il est nécessaire, pour bien comprendre paradoxe, de calculer la constante cosmologique renormalisée. Le calcul de cette valeur théorique se fait de la façon suivante. L'action se décompose en

$$S_T = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda_B) + S_M[\Phi, g_{\mu\nu}], \quad (3.3.4)$$

où le premier terme est l'action d'Einstein-Hilbert dont les équations du mouvement sont les équations d'Einstein et $S_M[\Phi, g_{\mu\nu}]$ est l'action qui décrit la matière présente. Cette dernière peut par exemple être celle du modèle standard, $S_{SM} = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{SM}$. Il y a une dépendance à la métrique due au $\sqrt{-g}$. C'est la dépendance la plus simple avec la métrique et on dit que la matière est couplée minimalement avec la gravitation. Comme toujours en théorie des champs, les paramètres qui apparaissent dans le lagrangien non renormalisé sont des paramètres "nus" (*bare parameter*) qui ne sont pas, a priori, les quantités physiques observées. Donc Λ_B est la "bare" constante cosmologique alors que R est simplement le scalaire de Ricci.

On trouve donc les équations d'Einstein comme équations du mouvement. Il y a néanmoins un changement dû au fait que le tenseur énergie-impulsion n'est pas nul dans l'état vide (*vacuum state*), on a plutôt

$$T_{\mu\nu} = \langle 0 | T_{\mu\nu} | 0 \rangle + T_{\mu\nu}^{\text{matière}} = -\rho_{\text{vac}} g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{\text{matière}}. \quad (3.3.5)$$

³La compréhension de cette introduction suppose une certaine connaissance de la théorie des champs qui peut s'acquérir dans un (très) grand nombre de livres de référence parmi lesquels on peut citer celui de Peskin et Schroeder [6], le tome consacré à la théorie des champs de la série "In the Nutshell" de Zee [42] ou même les notes de cours (accessibles gratuitement) de Tong [45].

On se retrouve donc avec l'équation d'Einstein en termes de la constante cosmologique effective (ou renormalisé)

$$G_{\mu\nu} + \Lambda_{\text{eff.}} = \kappa T_{\mu\nu}^{\text{matière}} \quad \text{avec} \quad \Lambda_{\text{eff.}} = \Lambda_B + \kappa\rho_{\text{vac}}. \quad (3.3.6)$$

Le problème vient du fait que $\kappa\rho_{\text{vac}}$ est composé de termes très grands qui dépendent de la physique à haute énergie alors que $\Lambda_{\text{eff.}}$, la valeur mesurée expérimentalement, est très petite. Pour calculer cette valeur théorique il faut étudier les contributions au tenseur énergie impulsion dans le vide. On peut les séparer en deux catégories : classiques et quantiques. La contribution classique provient des transitions de phase, autrement de brisures de symétrie dont le mécanisme de Higgs (c'est-à-dire la transition de phase électrofaible). Nous n'allons pas rentrer dans les calculs spécifiques de cette brisure de symétrie, mais l'idée est que si le minimum du potentiel est fixé à zéro avant la transition de phase il ne l'est plus après, comme on peut le voir sur la figure 1. Il peut être fixé originellement à zéro grâce au paramètre "bare", Λ_B , mais ce paramètre a une seule valeur et ne peut donc pas annuler à nouveau l'effet de ce potentiel après la brisure de symétrie. Autrement dit on peut fixer une fois le zéro du potentiel mais plus ensuite. Le mécanisme de Higgs est bien connu et depuis

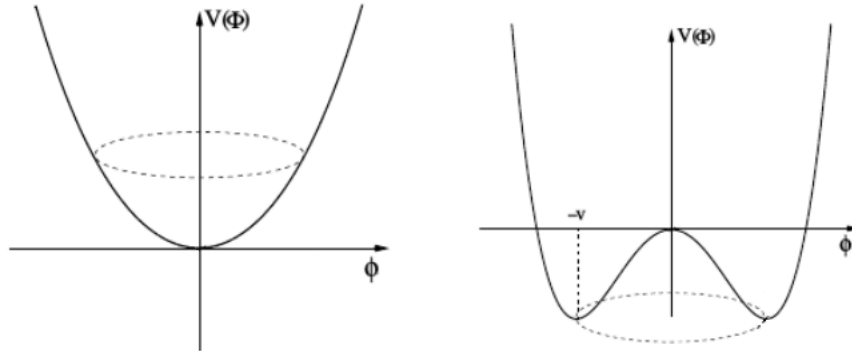


FIG. 1. Transition de phase électrofaible (mécanisme de Higgs) qui met en avant le changement de V_0 et donc la constante cosmologique.

la découverte du boson associé, on connaît la valeur de tous les paramètres dont sa masse. La contribution du minimum du potentiel à la densité d'énergie du vide s'écrit

$$\rho_{vac}^{EW} = -\frac{\sqrt{2} m_H^2}{16 G_F^2} \quad (3.3.7)$$

où m_H est la masse du boson de Higgs et vaut 125GeV et G_F est la constante de Fermi. Au total la contribution de la transition électrofaible vaut

$$\rho_{vac}^{EW} = -1.2 \times 10^8 \text{GeV}^4 = -10^{55} \rho_{vac}^{\text{obs.}} \quad (3.3.8)$$

Ce résultat implique un désaccord de 55 ordres de grandeur entre la théorie et l'expérience, ce qui est énorme. Bien sûr, on pourrait choisir le potentiel centré sur zéro (ou plutôt sur la valeur actuelle observée), mais cela ne ferait que déplacer le problème. En effet, cela impliquerait qu'avant cette transition de phase la constante cosmologique était gigantesque. De plus cela pose la question du réglage fin (*fine-tuning*) d'un tel choix.

Notons aussi que cet effet est valable pour chaque transition de phase. Il y aura aussi une contribution provenant de la transition de phase de la Quantum ChromoDynamique (QCD), mais aussi d'éventuelles théories de grande unification ou autres théories de hautes énergies.

Deuxièmement, il y a aussi des contributions quantiques venant des fluctuations du vide. Chaque champ quantique, c'est-à-dire particule, va contribuer à la densité de l'énergie du vide comme nous allons le montrer dans le cas d'un scalaire libre.⁴

Un scalaire libre est décrit par un lagrangien et un tenseur énergie-impulsion de la forme

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad \text{et} \quad T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2. \quad (3.3.9)$$

Bien sûr, le champ scalaire peut être décomposé en terme des opérateurs de création et annihilation

$$\phi_0 = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\omega(k)} (a_k e^{ikx} + a_k^\dagger e^{-ikx}) \quad (3.3.10)$$

avec $\omega(k) = \sqrt{m^2 + |\mathbf{k}|^2}$ et $[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$.

On peut donc calculer la valeur moyenne dans l'état fondamental du tenseur énergie-impulsion pour un scalaire ce qui donnera sa contribution à la densité d'énergie du vide.

On trouve

$$\langle 0|T_{00}|0\rangle = \langle \rho \rangle = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^3k \sqrt{m^2 + |\mathbf{k}|^2} \quad (3.3.11)$$

qui diverge. Une divergence n'est pas un problème en théorie des champs, on peut simplement renormaliser en utilisant une régularisation dimensionnelle qui permet de préserver les symétries.

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle &= \frac{\mu^{4-d}}{(2\pi)^{(d-1)/2}} \int d^{d-1}k \omega(k) \\ &= \frac{m^4}{64\pi^2} \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

où on introduit une échelle (*scale*) μ de sorte que les dimensions soient correctes. La dernière égalité est dans le schéma de renormalisation \overline{MS} qui revient à retirer les divergences et les constantes qui apparaissent avec la renormalisation dimensionnelle.

⁴On supposera que la métrique est simplement celle de Minkowski. Il se fait que la contribution de la courbure de l'espace est très faible pour ce problème.

Un point important est que toutes les particules du modèle standard (et au-delà) contribuent similairement, à l'exception d'une différence importante, les fermions contribuent de façon "négative" alors que les bosons contribuent "positivement". Un des attraits de la supersymétrie est qu'elle supprime exactement la contribution des fluctuations quantiques à la densité d'énergie du vide en additionnant les contributions positives et négatives des bosons et fermions. Malheureusement, ces partenaires supersymétriques n'ont jamais été observés et quand bien même ils existeraient à des masses beaucoup plus élevés, leurs contributions seraient proportionnelles à la différence de masses et ne s'annuleraient donc pas.

Afin de calculer l'apport exact de ces fluctuations il faut choisir une valeur de l'échelle μ . Ce choix est discuté et il semblerait que la valeur choisie soit celle de l'énergie des photons avec lesquels on mesure justement la constante gravitationnelle. Dans ce cas on trouve, pour les particules⁵ du modèle standard $\rho_{\text{vac}}^{SM} = -2 \times 10^8 (\text{GeV})^4$. La densité totale du vide, la somme de la contributions des particules du modèle standard et des transitions de phases est donc

$$\rho_{\text{vac}} \simeq -3.2 \times 10^8 (\text{GeV})^4 + \dots$$

où les trois petits points expriment les contributions éventuelles provenant de la physique au-delà du modèle standard. Cette densité est donc toujours quelques 55 ordres de grandeur plus grands que la valeur observée. Bien sûr, que ce soit le choix de μ , le choix du zéro du potentiel après brisure de symétrie ou simplement le choix du paramètre "nu", ρ_B , cela reste un gros problème. Il est même double. En premier lieu, il y a le réglage fin (*fine tuning*). Ce problème est presque philosophique, et tient au fait qu'il est extrêmement improbable qu'une constante (ou plusieurs) totalement libre annule à une part sur 10^{55} d'une quantité prédite. Toute théorie reposant sur une telle "chance" ne peut pas être jugée comme se suffisant à elle-même. D'autre part, cette valeur change en fonction de la physique à haute énergie. Que ce soit l'existence de particules très massives et donc qui n'ont pas encore pu être observées à l'existence d'autres transitions de phases comme c'est le cas pour les théories de grande unification, ce problème empirerait avec la découverte de cette physique. Cela pose aussi un gros problème au concept important de théorie effective (des champs). Le consensus scientifique actuel veut que la relativité générale ainsi que le modèle standard soient des théories effectives, c'est-à-dire des approximations à faible énergie de théories plus complètes comme par exemple une théorie des cordes. La gravitation de Newton ou l'électromagnétisme de Maxwell sont justement des théories effectives de la relativité générale et de l'électrodynamique quantique (QED) respectivement. Or un prérequis de cette idée de théorie effective c'est que leurs prédictions ne doivent pas dépendre de la théorie à plus hautes énergies et il semble que ce ne soit pas le cas pour cette constante cosmologique. Ce problème est donc extrêmement intéressant, car il se trouve au croisement de la cosmologie, relativité

⁵La contribution principale vient de la particule la plus lourde, le quark top. Comme c'est un fermion, il aura une contribution négative.

générale et théorie des champs. Il nous fait nous poser plusieurs questions qui mélangent tous ces domaines de la physique. L'article 2 propose justement un modèle assez simple, l'introduction d'un scalaire couplé non minimalement à la gravité, qui pourrait résoudre ce problème de constante cosmologique du point de vue de la théorie (des champs) effective.

Deuxième article.

Robustness of the Cosmological Constant Damping Mechanism Through Matter Eras

par

Oleg Evnin¹, Victor Massart² et Kévin Nguyen³

- (¹) Department of Physics, Faculty of Science, Chulalongkorn University, Bangkok, Thailand
Theoretische Natuurkunde, Vrije Universiteit Brussel and The International Solvay Institutes, Brussels, Belgium
- (²) Groupe de physique des particules, Département de physique
Université de Montréal, Montréal Québec, Canada
- (³) Black Hole Initiative, Harvard University, Cambridge, USA
Department of Mathematics, King's College London, London, United Kingdom

Cet article a été soumis dans Classical and Quantum Gravity.

Les principales contributions de Victor Massart à cet article sont présentées.

- Calculs et Simulations pour chaque sous-région de l'espace des paramètres;
- Une partie de la revue de la littérature;
- Première écriture du corps du texte.

RÉSUMÉ. Une résolution dynamique du problème de réglage fin de la constante cosmologique a été précédemment proposée. Elle est basée sur une théorie gravitationnelle du tenseur scalaire possédant des solutions d’attracteurs de de Sitter caractérisées par un faible taux d’expansion de Hubble, indépendamment d’une énergie du vide initialement élevée. Nous montrons qu’une sous-région techniquement naturelle de l’espace des paramètres produit une évolution cosmologique, à travers des ères dominées par le rayonnement et la matière, qui est essentiellement indistinguable de celle prédite par la relativité générale. De la même façon, le modèle proposé satisfait automatiquement les contraintes observationnelle d’une cinquième force médiée par ce nouveau degré de liberté scalaire.

Mots clés : Théorie scalaire-tenseur, réglage fin de la constante cosmologique

ABSTRACT. A dynamical resolution to the cosmological constant fine-tuning problem has been previously put forward, based on a gravitational scalar-tensor theory possessing de Sitter attractor solutions characterized by a small Hubble expansion rate, irrespective of an initially large vacuum energy. We show that a technically natural subregion of the parameter space yields a cosmological evolution through radiation- and matter-dominated eras that is essentially indistinguishable from that predicted by General Relativity. Similarly, the proposed model automatically satisfies the observational constraints on a fifth force mediated by the new scalar degree of freedom.

Keywords: Scalar-Tensor theory, Cosmological Constant Fine Tuning

1. Introduction

The naturalness problem associated with the cosmological constant Λ remains one of the great puzzles faced by theoretical physics. The huge discrepancy between theoretical estimates and actual observations also places this puzzle among the most striking ones. The origin of the problem lies in the gravitational effects of the vacuum energy associated with quantum fields when considered in conjunction with General Relativity (GR). Indeed, the framework of Quantum Field Theory (QFT) in curved spacetime predicts that any such vacuum energy precisely behaves as the cosmological constant introduced long ago by Einstein, and entering the standard Λ CDM model of cosmology as a free parameter; see the excellent review [41]. Assuming that General Relativity fully describes the dynamics of spacetime on cosmological scales, one is led to the conclusion that the late-time value of the Hubble expansion rate $H(t)$ observed in the Universe is linked directly to the value of the cosmological constant Λ ,

$$H_0^2 \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} H(t)^2 = \frac{\Lambda}{3}. \quad (1.1)$$

Hence, the value of the vacuum energy density ρ_Λ may be inferred from measurements of the Hubble expansion rate, yielding [40]

$$\rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{8\pi G} \sim 10^{-47} \text{ GeV}^4, \quad (1.2)$$

where G is Newton’s constant. Such a small value appears *unnatural* from the low-energy standpoint of Effective Field Theory (EFT). In this framework, one expects physics beyond the Standard Model to appear at some ultra-violet (UV) energy scale M_{UV} , and the predictive power of the low-energy theory at hand should not depend on fine details of the theory at this much higher UV scale. Thus, one relies on a decoupling of energy scales in the study of physical phenomena. A simple way to estimate the dependence of any observable quantity on the physics at the scale M_{UV} is to compute radiative corrections with explicit UV cutoff given by M_{UV} . In particular, any massive particle with mass m gives a loop correction to the vacuum energy density, of the form

$$\delta\rho_\Lambda \sim c_1 M_{\text{UV}}^4 + c_2 m^2 M_{\text{UV}}^2 + c_3 m^2 \ln \frac{m}{M_{\text{UV}}} + \dots, \quad (1.3)$$

where c_i are $O(1)$ constants. Since the scale of new physics is necessarily above the electro-weak scale, the above loop correction is at least of order

$$\delta\rho_\Lambda \gtrsim 10^8 \text{ GeV}^4. \quad (1.4)$$

This quantum contribution appears much larger than the observed value (1.2), and it looks like only an incredible amount of fine-tuning in the UV-complete theory – if such a thing even exists – can explain this observed small value. Although one cannot rule out the possibility of fine-tuning entirely, it shows at least that the sensitivity of the cosmological constant to the physics at high energies is extremely strong. This has motivated the search for cosmological models achieving a dynamical *self-tuning* of the Hubble expansion rate to the small observed value, even in the presence of a large vacuum energy density; for some recent work in this direction, see [46–53]. We also refer the reader to the review [54] for a discussion of the cosmological constant problem from the EFT viewpoint, and to the literature on effective field theories of dark energy and quintessence [55–61] for a complementary perspective.

It appears extremely hard, if not impossible, to come up with an EFT which would avoid large quantum contributions to the vacuum energy density, as in (1.4). However, one should keep in mind that only the Hubble expansion rate is actually measured, rather than the vacuum energy itself. In a previous publication [4], we introduced an EFT which yields a *dynamical relaxation* of the Hubble expansion rate from a Planckian value towards the observed small value. The model relies on a non-minimally coupled scalar field ϕ , and is described by the Lagrangian⁶

$$L = L_{EH} + L_\phi + L_m, \quad (1.5)$$

⁶We use slightly different conventions than those of [4], related by $16\pi G|_{\text{here}} = G|_{\text{there}}$ and $\lambda_R|_{\text{here}} = 16\pi\lambda_R|_{\text{there}}$.

where

$$L_{EH} = \frac{1}{16\pi G} (R - 2\Lambda), \quad (1.6)$$

$$L_\phi = -\frac{1}{2} \left[(\partial_\mu \phi)^2 + m^2 \phi^2 + \xi R \phi^2 + \lambda \phi^4 + G \lambda_R R \phi^4 \right],$$

and L_m accounts for conventional minimally coupled matter. It is characterized by the dimensionless parameters $G\Lambda, Gm^2, \xi, \lambda$ and λ_R , where $G\Lambda \sim 1$ is considered in order to avoid any fine-tuning problem associated with the cosmological constant. In addition, the model requires

$$\xi < 0 \quad \text{and} \quad 0 \leq Gm^2, \lambda, \lambda_R \ll |\xi|, \quad (1.7)$$

where it is understood that λ, λ_R cannot both vanish. When this is satisfied, (1.5) was shown to possess de Sitter *attractor solutions* characterized by a constant scalar field and Hubble expansion rate [4],

$$H(t) \rightarrow H_0, \quad \phi(t) \rightarrow \phi_0. \quad (1.8)$$

Crucially, the value of the expansion rate H_0 is controlled by small ratios of parameters like $\lambda_R/|\xi| \ll 1$. This provides a cosmological scenario in which its small observed value is explained by small values of the coupling constants m, λ, λ_R , rather than by a small value of the cosmological constant Λ itself as usually suggested by (1.2). This attractor behavior simply follows from the tendency of the scalar field to roll down towards the minimum of its potential. Indeed, although initially the spacetime curvature R may be arbitrarily large (and possibly Planckian), the condition (1.7) ensures a transient runaway behavior of ϕ accompanied by a decrease in potential energy, until the latter settles to its true minimum and becomes time-independent. Through Friedmann's equation, this decrease in potential energy implies a decrease in curvature, or equivalently, a decrease of the Hubble expansion rate $H(t)$. Equivalently, the scalar field ϕ adjusts its negative energy density in order to cancel most of the initially large vacuum energy, leaving only a small and positive remaining total energy density which is entirely controlled by the value of the coupling constants and accounts for the observed Hubble expansion. Figure 2 reproduces some of the numerical solutions originally presented in [4], displaying the approach to the constant attractor solutions. Finally, note that the action (1.5) is a modification of the one put forward by Dolgov [62] and Ford [63], through the addition of the quartic couplings λ, λ_R . These are indeed crucial in order to avoid the unrealistic late-time vanishing of the gravitational interaction caused by an unbounded runaway behavior of ϕ present in the earlier model [62, 63] and modifications thereof [64, 65]; we refer the reader to [4] for further details and comments on related work [66–73].

The interest of the EFT (1.5) is that it describes a small Hubble expansion rate while being *technically* natural [74]. Although it involves small dimensionless couplings, these do not require fine cancellations between various contributions in the UV, as one may assess by considering loop corrections to the small parameters m, λ, λ_R . In contrast to $\delta\rho_\Lambda$ in (1.4),

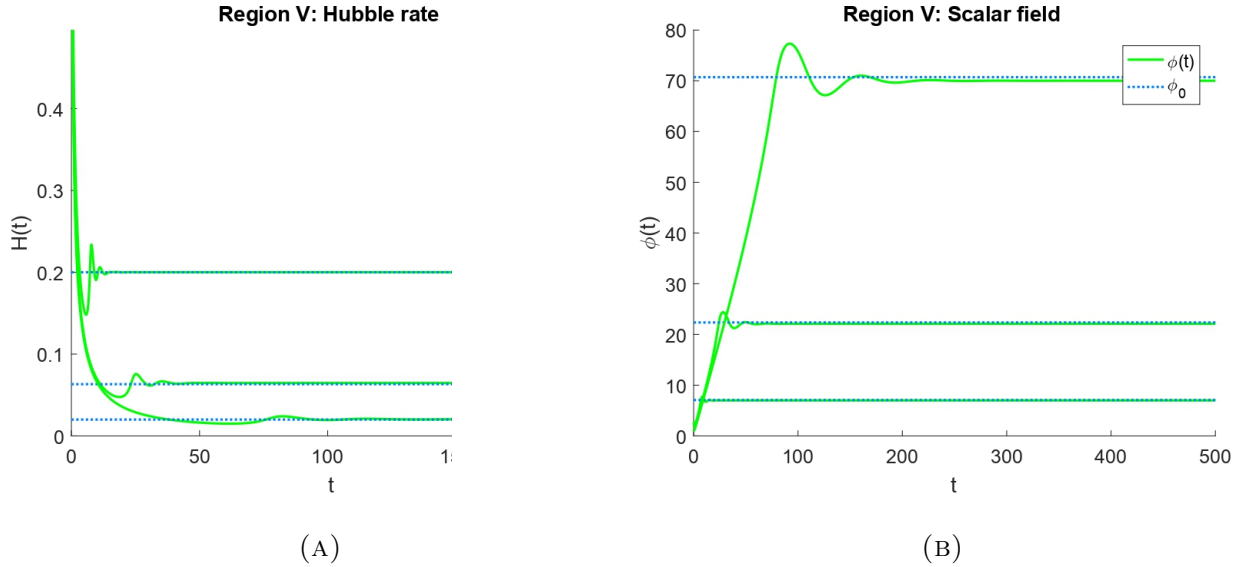


FIG. 2. Examples of dynamical solutions originally presented in [4]. Quantities are measured in *bare* Planck units ($G = 1$), and the natural value for the vacuum energy, $G\Lambda = 1$, has been assumed for concreteness. The solutions display a constant late-time behavior characterized by the constants H_0, ϕ_0 given in (1.10) that are independent from the choice of initial conditions. Each green curve corresponds to a different value of the parameters satisfying (1.7) and (1.9), and therefore asymptotes to different attractor values H_0, ϕ_0 represented by the corresponding dashed blue line. (a) Dynamical behavior of the Hubble rate $H(t)$. (b) Dynamical behavior of the non-minimally coupled scalar field $\phi(t)$.

these are proportional to the quartic couplings λ and λ_R themselves and are therefore as small (or smaller) than their tree-level values. Some of the corresponding one-loop Feynman diagrams are displayed in figure 3. One may view the smallness of these quantum corrections as a pattern resulting from a *weakly broken shift symmetry* $\phi \rightarrow \phi + c$. Indeed, quantum corrections to the symmetry-breaking terms m, λ, λ_R must be proportional to interaction couplings that also break shift symmetry.⁷

In this paper, we extend our previous work and present a cosmological scenario based on the scalar-tensor theory (1.5), which features

- an early cosmological era during which the attractor solution is reached,
- a subsequent realistic cosmology through radiation- and matter-dominated eras,
- a gravitational interaction between massive bodies essentially indistinguishable from that of General Relativity,⁸

⁷Note that ξ does not need to be small since it only contributes to the propagator of the scalar field, and we will consider $|\xi| \sim 1$ for simplicity.

⁸Relaxation of the scalar-tensor theory (1.5) towards a state indistinguishable from General Relativity, in the limiting case where $\Lambda = m = \lambda = 0$, follows from an analysis performed by Damour and Nordtvedt [75].

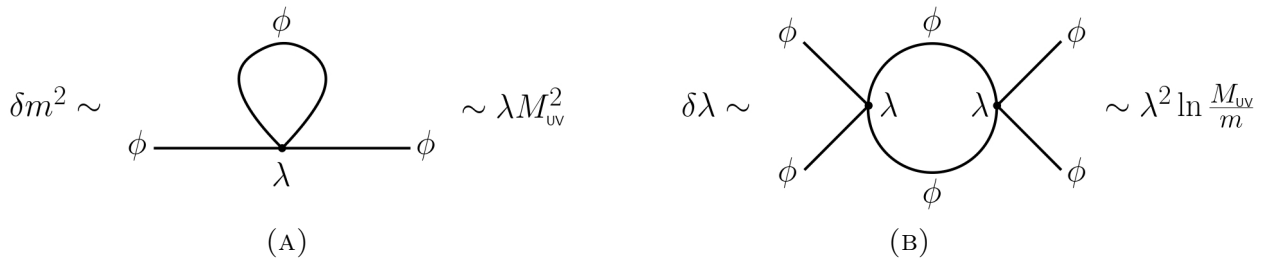


FIG. 3. One-loop Feynman diagrams giving corrections to (a) the scalar mass m and (b) the quartic coupling λ .

- a small Hubble expansion rate at late-time as experimentally observed, without unnatural fine-tuning of parameters.

The dynamical approach towards the attractor solution during the early cosmological era is the one described in [4] and depicted in figure 2. In particular, any pre-existing minimally coupled matter completely dilutes by the time the attractor solution is reached. We assume a subsequent transition between this early attractor phase and radiation-domination, whose detailed description is beyond the scope of this work. One should expect it to include inflation and reheating as parts of it,⁹ upon which we further comment in the discussion. In practice, at this point of the cosmological history we simply insert the matter components appropriate to the description of matter-dominated eras, taking the attractor value ϕ_0 as initial condition for the subsequent dynamical evolution of the scalar field (on the other hand the Hubble expansion rate is algebraically determined by the matter energy density through the modified Friedman equation). What we are left to show is that this dynamical evolution yields realistic cosmology and gravitational interaction between massive bodies, which is a priori highly non-trivial for a scalar-tensor theory such as the one described by (1.5). For this to be the case, it will be necessary to impose a refinement of the condition (1.7), namely

$$\xi < 0, \quad \text{and} \quad 0 \leq Gm^2, \lambda \ll \lambda_R \ll |\xi|, \quad (1.9)$$

which was referred to as “region 5” of the parameter space in [4]. In this case, it was shown that the attractor values are given by

$$\phi_0^2 = \frac{|\xi|}{2G\lambda_R} + O(Gm^2, \lambda), \quad H_0^2 = \left(1 + \frac{2\pi\xi^2}{\lambda_R}\right)^{-1} H_\Lambda^2 \ll H_\Lambda^2, \quad (1.10)$$

where $H_\Lambda^2 \equiv \Lambda/3$ is the late-time Hubble expansion rate that one would obtain within General Relativity, but the present model yields the much lower value H_0 . As mentioned before, we will consider $G\Lambda, |\xi| \sim 1$ for simplicity. A measurement of the Hubble expansion rate then

However, these authors did not consider the effect of a (large) cosmological constant, and the realization that a minimal modification of the same theory provides a resolution to the cosmological constant fine-tuning problem is new.

⁹It would be very appealing if inflation could be described by the early attractor phase itself, in the model described here or a modification thereof.

amounts to a measurement of the non-minimal coupling λ_R , which will be shown to yield

$$\lambda_R \sim 10^{-60}. \quad (1.11)$$

With this parameter value, the model produces the observed Hubble expansion while accommodating for $G\Lambda \sim 1$, in stark contrast to the usual situation encountered within General Relativity. As previously discussed, such a small value is radiatively stable and is therefore *technically* natural. One might wonder whether a more general class of models share the same attractive features and although this is very well possible, the present model is likely the simplest one of them. It is worth exploring how far one can go with this minimalistic scenario.

The paper is organized as follows. We start with an analysis of the evolution of the Hubble expansion rate $H(t)$ during matter eras in section 2, assuming that the attractor value ϕ_0 was (approximately) reached following an early attractor phase as described in [4]. In particular, we derive (1.9) and (1.11) as consistency conditions for a realistic cosmology, and show that $\phi(t) \approx \phi_0$ persists as stable solution of the equations of motion during matter eras. In section 3, we consider the observational constraints on a ‘fifth force’ mediated by the non-minimally coupled scalar field and show that these are automatically satisfied. In particular, we compute the post-Newtonian parameters γ, β parametrizing the gravitational field of massive objects, as well as the effective gravitational strength measured between test masses, and show that they coincide with standard results obtained within General Relativity. We end with a discussion of the results in section 4, and point towards some open problems.

2. Cosmological evolution

We assume spatial flatness, homogeneity and isotropy on cosmological scales, such that the system is described by a time-dependent scalar field $\phi(t)$, and a scale factor $a(t)$ of a Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker metric

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 d\vec{x}^2, \quad H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (2.1)$$

The evolution of the scale factor is governed by¹⁰

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho_\phi + \rho_m) + H_\Lambda^2, \quad H_\Lambda^2 \equiv \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.2)$$

¹⁰The modified Einstein equations also yield a second order differential equation for $a(t)$ that is automatically satisfied as it is identical to the conservation of the stress-energy tensor, a feature shared with General Relativity.

where ρ_m is the energy density of conventional matter, and ρ_ϕ is the energy density of the non-minimally coupled scalar field,

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \left[(\partial_t \phi)^2 + m^2 \phi^2 + \lambda \phi^4 \right] + (3H^2 + 3H\partial_t)(\xi \phi^2 + G\lambda_R \phi^4). \quad (2.3)$$

The equation of motion of the scalar field is given by

$$\left[\partial_t^2 + 3H\partial_t + m^2 + 6\xi (\dot{H} + 2H^2) \right] \phi = -2 \left[\lambda + 6G\lambda_R (\dot{H} + 2H^2) \right] \phi^3. \quad (2.4)$$

As usual, conventional matter includes various components, each of which has energy density ρ_i and pressure p_i that are related through an equation of state $p_i = w_i \rho_i$. The resulting total energy density takes the form

$$\rho_m(t) = \sum_i \rho_i(t) = \sum_i \rho_i(t_0) a(t)^{-n_i}, \quad (2.5)$$

with $n_i = 3(1 + w_i)$. In particular, non-relativistic matter and radiation obey $w = 0$ and $w = 1/3$, respectively.

We also assume that the attractor value ϕ_0 in (1.10) has been reached long before the matter-dominated eras of interest, and determine the conditions under which $\phi(t) \approx \phi_0$ continues to be a stable solution of the system up until the present epoch of accelerated expansion. Below we find that these conditions automatically yield a cosmological evolution of the Hubble rate $H(t)$ essentially identical to that predicted by GR. For this we adopt the following parametrization of the scalar field,

$$\phi(t) = \phi_0 (1 - \delta\phi(t)), \quad (2.6)$$

where $\delta\phi(t)$ will be understood as a dynamical perturbation of the attractor value ϕ_0 . We will show that such perturbations decay even after transition to radiation-domination, therefore ensuring stability of the proposed scenario.

As with any scalar-tensor theory, the effective Newton constant G_{eff} differs from the constant G appearing in the action (1.5), and is simply identified with the term multiplying the scalar curvature,

$$\frac{1}{16\pi G_{\text{eff}}} = \frac{1}{16\pi G} - \frac{1}{2} (\xi \phi_0^2 + G\lambda_R \phi_0^4). \quad (2.7)$$

Note that this simple identification only makes sense once the scalar field reaches a constant value ϕ_0 such that the form of the Lagrangian (1.5) indeed reduces to that of General Relativity. In particular, scalar fluctuations $\delta\phi(t)$ induce a nonzero time variation \dot{G}_{eff} that is highly constrained. Using the appropriate generalization of (2.7) to time-dependent situations, we prove in section 3 that such time variations stay well within observational bounds. Although not immediately obvious, we also show that G_{eff} is the physical Newton constant measured in small-scale experiments between massive bodies. In turn, one should keep in mind that physical quantities ought to be measured in physical Planck units. In particular,

observation of the Hubble expansion rate amounts to

$$G_{\text{eff}}H_0^2 \sim 10^{-120}, \quad (2.8)$$

a seemingly unnaturally small value at the root of the cosmological constant problem. In the present model however, this will be accounted for by natural values of the parameters.

The success of the Λ CDM model of cosmology suggests that the Hubble expansion rate should approximately satisfy Friedmann's equation sourced by conventional matter and a small 'cosmological constant' parametrized by H_0 ,

$$H^2(t) \approx \frac{8\pi G_{\text{eff}}}{3} \rho_m(t) + H_0^2, \quad (2.9)$$

where G_{eff} and H_0 do not have to coincide with the constants G and H_Λ appearing in the action. This equation looks rather different from (2.2) at first sight due to the presence of an additional energy component ρ_ϕ , but we will demonstrate that they actually agree within the cosmological scenario proposed here.

2.1. Background attractor

Setting the linear scalar perturbation $\delta\phi$ to zero for the moment, (2.4) results in

$$\phi_0^2 = -\frac{1}{2} \frac{6\xi(\dot{H} + 2H^2) + m^2}{6G\lambda_R(\dot{H} + 2H^2) + \lambda}. \quad (2.10)$$

Since $H(t)$ is time-dependent, the only region in parameter space which is possibly consistent with the approximately constant solution $\phi(t) \approx \phi_0$ up to a small time-dependent deviation $\delta\phi(t)$, corresponds to

$$\xi < 0, \quad Gm^2, \lambda \ll \lambda_R \ll |\xi|. \quad (2.11)$$

This was referred to as "region 5" of the parameter space in [4]. We will restrict our attention to this parameter space region from now on. The dimensionless couplings Gm^2, λ will be used as expansion parameters characterizing the scalar perturbation $\delta\phi$. For simplicity, we use the generic notation $\varepsilon = \{Gm^2, \lambda\}$ as expansion parameter. Note also that $\varepsilon = 0$ is a perfectly acceptable theory. At zeroth order, we therefore recover the attractor value (1.10) obtained in [4],

$$\phi_0^2 = \frac{|\xi|}{2G\lambda_R}. \quad (2.12)$$

The attractor solution is unperturbed by the presence of matter density $\rho_m \neq 0$ at this order, since it is independent of $H(t)$.

From equation (2.7), we find the relation between the bare and effective Newton's constants,

$$G_{\text{eff}} = G \left(1 + \frac{2\pi\xi^2}{\lambda_R} \right)^{-1} \ll G. \quad (2.13)$$

Similarly, we deduce from (2.2) that the late-time Hubble expansion rate, when $\rho_m \sim 0$, is

$$H(t) \rightarrow H_0, \quad H_0^2 = \left(1 + \frac{2\pi\xi^2}{\lambda_R}\right)^{-1} H_\Lambda^2 \ll H_\Lambda^2. \quad (2.14)$$

When measured in effective Planck units, it yields

$$G_{\text{eff}} H_0^2 = \left(1 + \frac{2\pi\xi^2}{\lambda_R}\right)^{-2} G H_\Lambda^2. \quad (2.15)$$

Cosmological observations require this quantity to be of order 10^{-120} . Considering for simplicity $G H_\Lambda^2, |\xi| \sim 1$ as already mentioned, we thus infer the value of the non-minimal coupling λ_R to be

$$\lambda_R \sim 10^{-60}. \quad (2.16)$$

2.2. Friedmann's equation

We turn to Friedmann's equation (2.2) which we analyze up to first order in $\varepsilon = \{Gm^2, \lambda\}$. For this, we first compute the energy density of the scalar field,

$$\rho_\phi = \rho_{\phi_0} + \delta\rho_\phi + O(\varepsilon^2), \quad (2.17)$$

where

$$\rho_{\phi_0} = 3H^2 \left(\xi\phi_0^2 + G\lambda_R\phi_0^4\right) = -\frac{3\xi^2}{4G\lambda_R} H^2, \quad (2.18a)$$

$$\delta\rho_\phi = \phi_0^2 \left[\frac{1}{2} \left(m^2 + \lambda\phi_0^2\right) - \left(2\xi + 4G\lambda_R\phi_0^2\right) \left(3H^2 + 3H\partial_t\right) \delta\phi(t) \right] \quad (2.18b)$$

$$= \frac{1}{2G} \left(Gm^2 + \frac{|\xi|\lambda}{2\lambda_R}\right) \phi_0^2. \quad (2.18c)$$

Note that the term linear in $\delta\phi(t)$ explicitly disappears thanks to (2.12). Plugging this into Friedmann's equation (2.2), we find

$$H^2 = \frac{8\pi G_{\text{eff}}}{3} (\rho_m + \delta\rho_\phi) + H_0^2 + O(\varepsilon^2) = \frac{8\pi G_{\text{eff}}}{3} \rho_m + H_{\text{eff}}^2 + O(\varepsilon^2). \quad (2.19)$$

This takes the form of the standard Friedmann's equation with *renormalized* Newton constant G_{eff} , and effective 'cosmological constant' term H_{eff} given by

$$H_{\text{eff}}^2 \equiv H_0^2 \left(1 + \delta H_0^2\right), \quad (2.20)$$

with

$$\delta H_0^2 = \frac{8\pi G_{\text{eff}}}{3H_0^2} \delta\rho_\phi = \frac{2\pi|\xi|}{3\lambda_R G H_\Lambda^2} \left(Gm^2 + \frac{|\xi|\lambda}{2\lambda_R}\right). \quad (2.21)$$

The term δH_0^2 is an order $O(\varepsilon)$ correction to the leading value of the late-time Hubble expansion rate H_0 described in (2.14). It should be subleading for the perturbative expansion

to make sense, which requires

$$\lambda \ll \lambda_R^2 \sim 10^{-120}. \quad (2.22)$$

This condition further restricts the allowed parameter space.

In summary, given that the attractor value ϕ_0 was reached prior to the cosmological eras of interest, the evolution of the scale factor in the theory (1.5) satisfies the standard equation of Friedmann sourced by conventional matter. However, the effective parameters G_{eff} and H_{eff} entering the latter do not coincide with the bare parameters G and H_Λ appearing in the action. In particular, $G_{\text{eff}}H_{\text{eff}}^2 \sim 10^{-120}$ even though $GH_\Lambda^2 \sim 1$.

2.3. Linear perturbations

In order to assess the stability of the approximately constant solution $\phi(t) \approx \phi_0$, we have to make sure that scalar perturbations $\delta\phi(t)$ stay small at all times. These are governed by the evolution equation

$$\left[\partial_t^2 + 3H\partial_t + 12|\xi|(\dot{H} + 2H^2) \right] \delta\phi = m^2 + \frac{|\xi|\lambda}{G\lambda_R}, \quad (2.23)$$

obtained at linear order in ϵ from (2.4). To analyze this equation, it is useful to make a change of time variable¹¹

$$\tau = \int_0^t dt' w(t'), \quad w(t) = \sqrt{12|\xi|(\dot{H} + 2H^2)}, \quad (2.24)$$

such that (2.23) becomes

$$\left[\partial_\tau^2 + f(\tau)\partial_\tau + 1 \right] \delta\phi(\tau) = \delta\phi_p(\tau), \quad (2.25)$$

with

$$f \equiv 6|\xi|w^{-3}(\ddot{H} + 10H\dot{H} + 12H^3), \quad \delta\phi_p \equiv \frac{Gm^2 + |\xi|\lambda/\lambda_R}{12|\xi|G(\dot{H} + 2H^2)}. \quad (2.26)$$

This equation is that of a damped harmonic oscillator with time-dependent friction $f(\tau)$ and source $\delta\phi_p(\tau)$. We will show that $\delta\phi$ tends towards $\delta\phi_p$ as time evolves,

$$\delta\phi(t) \longrightarrow \delta\phi_p(t). \quad (2.27)$$

This linear correction $\delta\phi_p$ is identified with the order $O(\epsilon)$ time-dependent correction to the constant attractor value ϕ_0 , consistently with the expression (2.10), and decreases to a small constant in the late-time limit $H(t) \rightarrow H_0$. Showing the convergence (2.27) will therefore ensure stability of the attractor solution, and will actually directly follow from positivity of

¹¹ This change of variable is ill-defined if $\dot{H} + 2H^2 = 0$. A purely radiation-dominated era with $H = 1/2t$ is a particular case thereof, for which the general solution to (2.23) is given by

$$\delta\phi(t) = \frac{Gm^2 + |\xi|\lambda/\lambda_R}{5G} t^2 + C_1 t^{-1/2} + C_0,$$

where C_0, C_1 are integration constants. One can argue that a Universe filled with only radiation never occurred, such that the above discussion is purely academic.

the friction term $f(t)$ in (2.25). To show this, we first introduce the density parameters

$$\Omega_i(t) \equiv \frac{8\pi G_{\text{eff}}}{3H(t)^2} \rho_i(t), \quad \Omega_\Lambda(t) \equiv \frac{H_0^2}{H(t)^2}, \quad (2.28)$$

and we note that Friedmann's equation (2.19) implies

$$\sum_i \Omega_i(t) + \Omega_\Lambda(t) = 1 + O(\varepsilon). \quad (2.29)$$

Using (2.5), we can show that the friction term (2.26) may be rewritten

$$f(t) = \frac{1}{8\sqrt{24|\xi|}} \left(1 - \frac{1}{4} \sum_i n_i \Omega_i(t)\right)^{-\frac{3}{2}} \left[24\Omega_\Lambda(t) + \sum_i (n_i^2 - 10n_i + 24)\Omega_i(t)\right] + O(\varepsilon). \quad (2.30)$$

Each term in the sum within bracket is strictly positive if $n_i < 4$ for each matter constituent, such that $f(t) > 0$ at all times. This is equivalent to the condition on the equation of state $w_i < 1/3$, satisfied by conventional matter (the limiting case of pure radiation $w = 1/3$ is described in footnote 11).

Therefore, the 'energy'

$$E \equiv \frac{1}{2} [(\delta\phi - \delta\phi_p)^2 + (\partial_\tau \delta\phi)^2], \quad (2.31)$$

of this harmonic oscillator satisfies the evolution equation

$$\partial_\tau E = -f(\tau)(\partial_\tau \delta\phi)^2 - (\delta\phi - \delta\phi_p)\partial_\tau \delta\phi_p. \quad (2.32)$$

If this quantity was negative at all times, then the convergence $\delta\phi \rightarrow \delta\phi_p$ would directly follow. Indeed, one has

$$(\delta\phi - \delta\phi_p)^2 < E, \quad (2.33)$$

such that a continuous decrease in energy E implies that $|\delta\phi - \delta\phi_p|$ is bounded from above by an ever decreasing function asymptoting to zero. For $m = \lambda = 0$, one has $\delta\phi_p = 0$ such that only the first term on the right-hand side of (2.32) is present. Since the friction $f(\tau)$ is strictly positive for conventional matter, $\partial_\tau E < 0$ at all times and any scalar perturbation $\delta\phi$ eventually decays to zero. For $m, \lambda \neq 0$, the second term on the right-hand side of (2.32) can be either positive or negative. Although this might lead to very brief periods of energy increase when $\partial_\tau \delta\phi \sim 0$, its effect should still be negligible on average as it is of order $O(\varepsilon)$. We therefore expect $\partial_\tau E < 0$ and $\delta\phi \rightarrow \delta\phi_p$ in general.

In summary, small scalar perturbations generated during matter eras do not grow to eventually destabilize the constant attractor solution ϕ_0 , provided that $\delta\phi_p \ll 1$. This requires

$$\max \left\{ Gm^2, |\xi|\lambda/\lambda_R \right\} \ll |\xi|G \left(\dot{H} + 2H^2 \right), \quad (2.34)$$

or equivalently,

$$\max \left\{ Gm^2 \lambda_R, |\xi| \lambda \right\} \ll |\xi|^3 G_{\text{eff}} (\dot{H} + 2H^2). \quad (2.35)$$

This additional condition is easily satisfied by small enough Gm^2 and λ . At late times in particular, $H \rightarrow H_0$ and using (2.15), one can show that it simply reduces to the previous condition (2.22).

3. Fifth force constraint

We now turn to the study of gravitational effects associated with the scalar-tensor theory (1.5) that could be observed on small scales through solar system experiments, for example. Since there is no direct coupling between the scalar field ϕ and the matter sector, massive bodies made of conventional matter still satisfy the equivalence principle. However, the presence of the non-minimally coupled scalar field may alter the gravitational field sourced by any such massive body compared to the one predicted by General Relativity. To characterize such deviations, we will use the parametrized post-Newtonian (PPN) formalism, whose long history starts with the classic work of Eddington [76]; see the textbooks [77, 78] and references therein. This formalism has been applied to general scalar-tensor theories of gravity in [79]. Hence, we simply have to specialize the general results obtained in that work to the model at hand. We will follow the conventions and formulas of [80]. Gravitational experiments performed within the solar system result in constraints on the PPN parameters, and therefore in constraints on the “fifth force” mediated by the scalar degree of freedom.

The Lagrangian density (1.5) may be written as

$$L = \frac{1}{2} \left[F(\phi) R - (\partial_\mu \phi)^2 \right] - U(\phi) + L_m, \quad (3.1)$$

with

$$F(\phi) = \frac{1}{8\pi G} - (\xi \phi^2 + G \lambda_R \phi^4), \quad (3.2)$$

$$U(\phi) = \frac{\Lambda}{8\pi G} + \frac{1}{2} (m^2 \phi^2 + \lambda \phi^4). \quad (3.3)$$

We restrict the discussion to parameters satisfying the conditions (2.11), (2.22) and (2.35), since these yield a realistic cosmological evolution from radiation-dominated eras onward.

3.1. Gravitational coupling between test masses

The first important comment is that the effective gravitational coupling G'_{eff} between two test masses that does not necessarily coincide with the effective Newton constant G_{eff}

identified in (2.13) for the parameter space of interest, a common issue shared by scalar-tensor theories. Instead, it is given by [80]

$$G'_{\text{eff}} = \frac{1}{8\pi F} \left(\frac{2F + 4(dF/d\phi)^2}{2F + 3(dF/d\phi)^2} \right), \quad (3.4)$$

an expression valid over length scales l satisfying

$$l^{-2}H^{-2} \gg \max \left\{ 1, \left| \frac{d^2 F}{d\phi^2} \right|, H^{-2} \left| \frac{d^2 U}{d\phi^2} \right| \right\} \Big|_{\phi_0} \approx \max \left\{ 1, 4|\xi|, \frac{Gm^2 + 3|\xi|\lambda/\lambda_R}{GH^2} \right\}. \quad (3.5)$$

Hence, (3.4) holds on sub-Hubble scales. We want to evaluate it for the cosmological scenario at hand. For this, we first compute the field derivatives of F evaluated for the cosmological solution (2.6) at linear order in the scalar perturbation,

$$F = \frac{1}{8\pi G_{\text{eff}}} + O(\delta\phi^2), \quad (3.6)$$

$$\frac{dF}{d\phi} = 4|\xi|\phi_0 \delta\phi + O(\delta\phi^2). \quad (3.7)$$

Plugging this into (3.4), we find

$$G'_{\text{eff}} = G_{\text{eff}} + O(\delta\phi^2). \quad (3.8)$$

Hence, the two effective gravitational couplings essentially coincide within the considered cosmological scenario.

It also follows from (3.8) that G'_{eff} is constant up to linear order $\delta\phi$. This is another desirable property since no time variation of Newton's constant has been ever observed so far. The most stringent bounds come from measurements of Mars ephemeris, yielding $\dot{G}'_{\text{eff}}/G'_{\text{eff}} = 0.1 \pm 1.610^{-13} \text{ yr}^{-1}$ [81] and $-0.6 \pm 0.410^{-13} \text{ yr}^{-1}$ [82]. See [78] for an exhaustive review of various observational tests. Constraints on the parameters of the model can in principle be obtained by going to quadratic order in perturbation theory, but we do not pursue this here.

3.2. Post-Newtonian parameters

The first post-Newtonian corrections to the gravitational field of a massive source are parametrized by γ and β , which encode the leading deviations from the Schwarzschild metric in a $1/r$ radial expansion. In the context of scalar-tensor theories, they are given by [80]

$$\gamma = 1 - \frac{(dF/d\phi)^2}{2F + 2(dF/d\phi)^2}, \quad (3.9)$$

$$\beta = 1 + \frac{1}{4} \frac{F(dF/d\phi)}{2F + 3(dF/d\phi)^2} \frac{d\gamma}{d\phi}. \quad (3.10)$$

For the cosmological solution of interest and up to linear order in scalar perturbations, their values simply coincide with those of General Relativity,

$$\gamma = 1 + O(\delta\phi^2), \quad (3.11a)$$

$$\beta = 1 + O(\delta\phi^2). \quad (3.11b)$$

The best experimental constraint on post-Newtonian parameters comes from Doppler tracking of the Cassini spacecraft [78, 83],

$$\gamma - 1 = (2.1 \pm 2.3) \times 10^{-5}. \quad (3.12)$$

This constraint, together with a careful analysis of the quadratic corrections to (3.11), would put a precise bound on the amplitude of scalar perturbations $\delta\phi$ in the solar system. Roughly speaking, these quadratic corrections are of order

$$\gamma - 1 \approx G_{\text{eff}} \phi_0^2 \delta\phi^2 \approx \delta\phi^2. \quad (3.13)$$

We recall that $\delta\phi(t)$ tends to $\delta\phi_p(t) \ll 1$ described in (2.27), which does not yield a violation of the Cassini bound (3.12) provided that Gm^2, λ are sufficiently small. On the other hand, there is no guarantee that initially larger scalar perturbations cannot be generated at the present epoch. This offers some prospects of actually testing the model under consideration, which is otherwise indistinguishable from General Relativity.

4. Discussion

We have described a cosmological scenario based on the scalar-tensor theory (1.5), in which the attractor value of the scalar field ϕ_0 is assumed to be (approximately) reached long before radiation-dominated eras. Within the appropriate parameter regime (1.9), we have shown that the subsequent evolution of the scale factor satisfies Friedmann's equation sourced by conventional matter, and that post-Newtonian parameters characterizing the gravitational interaction on small scales are essentially identical to those of General Relativity. Importantly though, the late-time Hubble expansion rate H_0 can take the small observed value $G_{\text{eff}} H_0^2 \sim 10^{-120}$ even though the bare cosmological constant is Planckian (in bare units), i.e., $G\Lambda \sim 1$. In this way, it provides a potential resolution to the cosmological constant fine-tuning problem.

We have shown that linear scalar perturbations generically decay over the cosmological history. Identification of potential sources of scalar perturbations would offer the opportunity to further test the proposed model. In particular, measurements of the PPN parameter γ are sensitive to quadratic corrections $\delta\phi^2$, a fact which might be used to derive additional constraints in case that sizeable perturbations are being produced at the current epoch.

We have focused our attention to cosmological evolution for spatially homogeneous fields as a first approximation. Of course, it will be interesting to include inhomogeneities in view of their crucial relevance to large scale structure formation. In this regard, we anticipate that standard cosmology derived within General Relativity may again be recovered (as we have shown for spatially uniform solutions), provided that the damping phase has already occurred and that the attractor value ϕ_0 has been reached with high precision. Under this assumption, all we need to check is that this constant attractor value ϕ_0 continues to be a valid solution of the equations of motion even in the presence of inhomogeneities in the conventional matter sector and the metric. The general form of the Klein–Gordon equation (2.4) for arbitrary metric configurations is

$$\left(\square - m^2 - \xi R\right) \phi = 2(\lambda + G\lambda_R R) \phi^3. \quad (4.1)$$

Setting $m = \lambda = 0$ and inserting $\phi(t, x) = \phi_0$ given in (2.12), this equation is indeed satisfied for *any* metric configuration. At least for this ideal choice of parameters, we conclude that conventional cosmology may be embedded within the proposed scalar-tensor theory. Small deviations from standard cosmology may arise as a result of $O(Gm^2, \lambda)$ corrections or sources of inhomogeneous scalar fluctuations $\delta\phi(t, x)$ which would need to be identified. It will be interesting to study whether such small corrections stay within observational bounds and whether they could actually improve the Λ CDM cosmological model, for instance by resolving tensions between independent measurements of the Hubble expansion rate [84–86].

From the EFT perspective, naturalness of the scalar-tensor theory (1.5) holds since loop corrections to the small parameters m, λ, λ_R are suppressed by powers of λ and λ_R themselves. However, we have treated the gravitational field as purely classical and we have not considered the potential effect of quantum gravitational fluctuations. It is an interesting open question to assess whether one-loop gravitational corrections could generate new interactions terms - such as matter-scalar couplings - that would question the naturalness of the scalar-tensor theory under consideration. Note that if the vacuum energy parametrized by Λ is not Planckian (in bare units) as we have assumed throughout this paper, but at a significantly smaller scale like that of a Grand Unification for example, the proposed damping mechanism of the Hubble rate would still apply without being threatened by quantum gravitational corrections.

We view the present results as a strong case for further investigations of the model or modifications thereof, including more detailed comparisons against available data originating from various epochs of the Universe’s history. This would include big bang nucleosynthesis as the present analysis does not enable us to draw any conclusion in that respect. Another open problem is to connect the proposed cosmological scenario to the theory of inflation.¹²

¹²The scalar-tensor theory (1.5) restricted to $\lambda = \lambda_R = \Lambda = 0$, in conjunction with an inflaton field, has been recently considered in [87] as a way to generate the large observed hierarchy between the measured Planck

In particular, one should ensure that the inflationary paradigm is not in tension with some assumptions made here. We hope to get back to this important question in the future.

mass and Hubble expansion in a way analogous to (2.15). In contrast to the present work, a discussion of the cosmological constant fine-tuning problem is missing since this would require to consider a large (Planckian) Λ . It would be interesting to assess whether a construction along the same lines could incorporate the resolution of the cosmological constant fine-tuning problem proposed here.

Chapitre 4

Diffusion Gravitationnelle

La dernière partie de cette thèse traite de la relativité générale vue comme une théorie des champs quantiques. Cette approche se situe à mi-chemin des deux pierres angulaires de la physique moderne : la relativité générale et la théorie des champs (quantiques). Or, comprendre comment ces deux théories peuvent être combinées, intégrées à une théorie plus complète, est l'un des buts principaux de la physique théorique moderne sans qu'aucune solution totalement satisfaisante n'ait émergée. Cela est du à l'incompatibilité entre ces deux théories. D'un côté, la mécanique quantique, généralisée à la théorie quantique des champs, décrit de façon probabilistique le comportement des particules dans un espace fixe. Elle a permis d'atteindre une correspondance entre les prédictions et l'expérience sans pareil en particulier en électrodynamique quantique. La théorie des champs quantiques a aussi permis de combiner trois (des quatre) forces fondamentales connues sous un même formalisme et sous une théorie unifiée : Le Modèle Standard.

De l'autre côté, la relativité générale d'Albert Einstein est une théorie qui remplace le concept de force et de champs par celui de géométrie de l'espace-temps. Du point de vue de la théorie des champs la relativité générale existe mais elle est non-renormalisable. Des infinités apparaissent à chaque ordre de l'approche perturbative. Ce problème trouve son origine dans le fait que la constante de couplage de la gravitation, \sqrt{G} , à les unités de un sur masse. Il est donc possible, à chaque ordre de considérer des termes, comme $\sqrt{G}P_c$, qui divergent [88].

Plusieurs approches différentes ont été empruntées pour tenter de résoudre ce désaccord presque fondamental. La plus courante consiste à considérer la théorie quantique comme la plus fondamentale et à essayer de quantifier la gravité. Ce choix est également justifié par certaines preuves indirectes [89]. La position inverse, qu'il faudrait gravitiser la mécanique quantique, a cependant certains avocats célèbres avec des arguments intéressants, comme ceux de Penrose [90, 91] par exemple. La question reste donc ouverte.

Revenons sur l'évolution de ce champ très important de la physique contemporaine et

qui est à la base du troisième article de cette thèse. La quête d'une théorie quantique de la gravité commence dès les années trente [92] où différentes idées et formalismes sont formulés. Le premier formalisme, dénommé théorie canonique, est basé sur une formulation hamiltonienne de la gravité dans l'hypersurface de temps (x^0) constants. Elle est gouvernée par l'équation de Wheeler-DeWitt [93] et a principalement mené à la fameuse théorie des boucles quantiques [94].

La seconde est la théorie dite (manifestement) covariante [95–97]. Elle est bien adaptée à traiter les interactions gravitationnelles et les phénomènes microscopiques comme les diffusions. Elle est cependant limitée par la non-renormalisabilité de la relativité générale (GR). Cette approche covariante a conduit à plusieurs modèles célèbres comme la supergravité et ensuite la théorie des cordes. C'est cette théorie manifestement covariante que nous utiliserons dans le cadre des diffusions gravitationnelles.

L'intérêt pour ces théories primaires (*i.e.* : qui partent d'une théorie classique à laquelle on applique des règles de quantification) a connu une forte croissance ces dernières années. Beaucoup de raisons peuvent expliquer ce regain d'intérêt. Une forme d'échec des théories secondaires (*i.e.*: qui part d'une théorie fondamentale (quantique) à partir de laquelle on veut trouver la relativité générale, et la théorie des champs, comme cas limite) comme la théorie des cordes qui ne semble pas avoir de vacuum de de Sitter [98] ou les revers subis par les conjectures marécages (*swampland conjectures*)¹ en est une raison.

L'une des questions que l'on peut se poser dans le cadre de ces théories primaires est de savoir si la gravité doit être quantifiée ou, inversement, si la théorie quantique doit être "gravitatisée". La première approche est certainement la plus populaire. En effet la plupart des travaux, dans le cadre de théories primaires comme secondaires, ont utilisé ces hypothèses. Néanmoins la "gravitatisation" de la mécanique quantique a certains ardents défenseurs comme Penrose [90]. Le principal avantage de cette façon de penser semble être la possibilité d'expliquer la décohérence quantique grâce au champ gravitationnel (voir [91, 100, 101] et les références y figurant). Cela pourrait également être conforté par l'impossibilité apparente de faire une observation directe d'un graviton [1, 2] et ce dans une grande variété de situations. S'il est physiquement impossible d'observer un graviton, ce serait un argument contre la quantification de la gravitation. Une exception a cependant été proposée par Krauss et Wilczek [102]. L'observation (indirecte) de la quantification de la théorie linéarisée de la gravité pourrait provenir de la cosmologie, plus précisément dans l'effet des ondes gravitationnelles sur la polarisation du fond diffus cosmologique (CMB).

Une autre possibilité serait d'observer des effets quantiques dus au champ gravitationnel. En effet, à la suite des grandes améliorations théoriques et expérimentales de la théorie de l'information quantique, la percée pourrait venir de l'étude de l'intrication à travers le champ

¹Un poisson d'avril récent [99] mettait en lumière la quantité énorme de conjectures sans résultats concrets.

gravitationnel. Par exemple, l'effet de Bose-Marletto-Vedral (BMV) propose d'étudier le changement de phase dû à l'intrication gravitationnelle entre deux "particules" spatialement superposées [103–105]. L'observation d'un tel effet pourrait être considérée comme une preuve que le champ gravitationnel est quantifié, au moins dans un sens large. D'autres propositions émergent comme l'idée d'utiliser un appareil optomécanique à cavité pour observer l'effet d'un état superposé [106, 107]. Ce champ de la physique théorique, à la limite avec la phénoménologie quantique, continue de se développer rapidement.

C'est dans ce cadre que le troisième article de cette thèse prend place. On propose en effet d'étudier la section efficace de la diffusion d'un photon sur une particule superposée. Ce résultat permettrait d'évaluer les effets exacts de la superposition sur cette diffusion. Bien sûr l'observation de tels effets serait un point important en faveur de la quantification de la gravité.

Avant d'en arriver à ce troisième article, il est utile de redériver le formalisme, les règles de Feynman en particulier, de la gravitation linéarisée. Ensuite, il sera question de la généralisation de la section efficace pour des particules n'étant pas des ondes planes. Le cas du potentiel pour un choix de système sera enfin présenté.

4.1. Règles de Feynman du Graviton

La relativité générale, dans cette approximation linéaire, peut aussi être traitée comme la théorie des champs d'un boson sans masse de spin 2 : le Graviton. Nous allons démontrer cette affirmation en calculant le lagrangien de la relativité générale linéarisé libre, c'est-à-dire sans interactions. À partir de ce lagrangien, on peut calculer le propagateur du graviton. Ensuite nous ajouterons un terme d'interaction entre le graviton et la matière (sous-entendu le tenseur énergie-impulsion) afin de pouvoir calculer les différents vertex entre un graviton et une autre particule. Toutes ces démarches datent des travaux de De Witt et ont été reprises de nombreuses fois (voir par exemple [108–110] pour plus de détails).

Le lagrangien de la gravitation est calculé en termes de $h_{\mu\nu}$. Cependant il faut aller jusqu'à l'ordre deux en termes de h . Ceci, simplement, car l'on impose que la variation de ce lagrangien, par rapport à $h_{\mu\nu}$, nous donne les équations d'Einstein linéarisées, c'est-à-dire d'ordre 1 en h . Un autre argument vient du fait que le propagateur est le terme proportionnel à métrique au carré dans le lagrangien. Il est aussi possible d'étudier le lagrangien à des ordres supérieurs afin de pouvoir calculer l'effet de boucles [110, 111]. Ces termes d'ordres supérieurs vont d'ailleurs exprimer le fait que le graviton peut se coupler à lui-même. Ces auto-couplages vont ajouter à chaque ordre des termes divergents à l'énergie, et donc à la "charge" gravitationnelle. C'est une façon de voir le fait que la gravitation d'Einstein est non

renormalisable² et une de ces grandes différences avec les autres forces de la nature.

Pour trouver le lagrangien, on peut rechercher le scalaire de Ricci à l'ordre deux et multiplié par l'expansion de la racine du déterminant de la métrique, $\sqrt{-g} \simeq 1 + \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$. Il est cependant plus simple de déduire intuitivement ce Lagrangien en utilisant directement la contrainte que sa variation donne le tenseur d'Einstein linéarisé (2.1.5). Le lagrangien libre d'ordre 2 est

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \left[(\partial_\mu h^{\mu\nu})(\partial_\nu h) - (\partial_\mu h^{\rho\sigma})(\partial_\rho h_\sigma^\mu) + \frac{1}{2}(\partial^\nu h^{\rho\sigma})(\partial_\nu h_{\rho\sigma}) - \frac{1}{2}(\partial^\nu h)(\partial_\nu h) \right]. \quad (4.1.1)$$

De la même façon que pour les équations d'Einstein linéarisées, on peut faire un choix de jauge pour simplifier ces expressions. On va garder le même choix de jauge, la jauge harmonique $\partial^\mu h_{\mu\nu} = (1/2)\partial_\nu h$, que pour le gravito-électromagnétisme. Ce choix de jauge permet immédiatement de simplifier le premier et dernier terme de l'équation (4.1.1). Le lagrangien a donc la forme, relativement simple,

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \left[-(\partial_\mu h^{\rho\sigma})(\partial_\rho h_\sigma^\mu) + \frac{1}{2}(\partial^\nu h^{\rho\sigma})(\partial_\nu h_{\rho\sigma}) \right]. \quad (4.1.2)$$

Le propagateur de Feynman peut être trouvé assez facilement à partir de cette expression. On intègre ensuite par partie notre expression. Le lagrangien se réécrit, à une dérivée totale près, comme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4}h\partial^2 h - \frac{1}{2}h_{\mu\nu}\partial^2 h^{\mu\nu} \right] \\ &= \frac{1}{2}h_{\mu\nu} \left[\frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\partial^2 - \frac{1}{2}\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\partial^2 \right] h_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

Le propagateur de Feynman est la fonction de Green associé à l'opérateur entre $h_{\mu\nu}$ et $h_{\alpha\beta}$ qui est simplement ∂^2 fois un "facteur de forme". Le propagateur prend donc la forme

$$D_F(q) = \frac{f_{\mu\nu\alpha\beta}}{q^2 + i\epsilon}. \quad (4.1.4)$$

Il reste juste à trouver ce facteur de forme qui doit être symétrique sous l'échange $\mu \leftrightarrow \nu$ et $\alpha \leftrightarrow \beta$. En combinant ces informations on trouve que le propagateur de Feynman du graviton³ est

$$D_F^{\mu\nu\alpha\beta}(q) = \frac{1}{2} \frac{\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha} - \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}}{q^2 + i\epsilon}. \quad (4.1.5)$$

Une fois ce propagateur connu, il faut encore trouver le vertex entre un graviton et une particule avant de pouvoir calculer des amplitudes. Nous nous limiterons au cas particulier de l'interaction entre un scalaire et un graviton. Le vertex se trouve être la transformée de Fourier du terme multipliant $\phi\phi h_{\mu\nu}$ dans l'action. Ce terme provient du lagrangien

²Une autre façon consiste à noter que la constante de couplage \sqrt{G} a les unités de 1 sur une masse. Et donc, un terme sans dimensions, comme constante de couplage fois impulsion de coupure (*cutoff momentum*) $\sqrt{G}P_c$, peut apparaître à tous les ordres. C'est équivalent à avoir une infinité de divergences.

³Le calcul rigoureux peut se trouver dans l'article de Pasukonis [108].

d'interaction qui est

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{1}{2} h^{\mu\nu} T_{\mu\nu}(\phi, \eta_{\mu\nu}) \quad (4.1.6)$$

En précisant le lagrangien du champ scalaire libre, on peut calculer le tenseur énergie-impulsion associé. Ensuite il faut simplement intégrer par partie pour pouvoir mettre $\phi\phi h_{\mu\nu}$ en évidence et l'on trouve, en imposant comme toujours la symétrie du vertex sous le changement $\mu \leftrightarrow \nu$, l'expression suivante pour le vertex scalaire-graviton

$$V_{\mu\nu}(k, k') = -i\kappa(k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu - \eta_{\mu\nu}(k \cdot k')) \quad (4.1.7)$$

où il est important de noter que $\kappa = \sqrt{8\pi G}$ contrairement aux chapitres précédents où l'on avait $\kappa = 8\pi G$. Ce choix est fait pour suivre la notation de la littérature sur le sujet. Il s'explique par le fait que la constante de couplage est $\sqrt{8\pi G}$.

Ces règles de Feynman permettent de facilement calculer l'amplitude et ensuite la section efficace d'une diffusion gravitationnelle ou son potentiel. En effet, le potentiel peut être identifié à la transformée de Fourier de l'amplitude dans la limite non relativiste. Calculons donc cette dernière dans le cas d'une diffusion entre deux scalaires de masse et d'impulsion (m_1, \mathbf{k}_1) et (m_2, \mathbf{k}_2) qui diffusent vers (m_1, \mathbf{k}_3) et (m_2, \mathbf{k}_4) respectivement. L'amplitude est simplement la contraction de deux vertex avec le propagateur du graviton dans le cas gravitationnel,

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= V_{\mu\nu}(k_1, k_3) D^{\mu\nu\alpha\beta} V_{\alpha\beta}(k_2, k_4) \\ &= -\frac{\kappa^2}{2q^2} (k_{1\mu} k_{3\nu} + k_{1\nu} k_{3\mu} - \eta_{\mu\nu}(k_1 \cdot k_3)) D^{\mu\nu\alpha\beta}(q) (k_{2\alpha} k_{4\beta} + k_{2\beta} k_{4\alpha} - \eta_{\alpha\beta}(k_2 \cdot k_4)) \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

Le calcul est long de prime abord, mais on peut utiliser l'approximation non relativiste, pour en première approximation avoir $k_{1\mu} \simeq m_1 \eta_{0\mu}$ et pareillement pour les autres momenta. Elle prend dans ce cas la forme

$$\mathcal{M}_{NR}(\mathbf{q}) = -\frac{\kappa^2}{2|\mathbf{q}|^2} (2m_1^2 m_2^2). \quad (4.1.9)$$

Ce qui nous permet de retrouver le potentiel de Newton

$$V(r) = \frac{1}{4m_1 m_2} \int \mathcal{M}_{NR}(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3r = -\frac{\kappa^2 m_1 m_2}{8\pi|\mathbf{r}|} \quad (4.1.10)$$

où l'on a inclus la normalisation $\frac{1}{\sqrt{2E_1 2E_2 2E_3 2E_4}}$ qui donne le facteur $4m_1 m_2$ au dénominateur⁴. Un autre exemple intéressant pour vérifier la validité de cette approche consiste à calculer la déviation de la lumière par le soleil. On peut approximer le soleil par un champ scalaire non-relativistique de masse M et le photon par un scalaire sans masse d'énergie ω . L'amplitude

⁴Elle provient en fait de la normalisation que l'on a en théorie des champs ou chaque intégrale sur l'espace vient avec un facteur $(1/\sqrt{2E})$ pour être invariante de Lorentz.

se calcule de la même façon que précédemment

$$\mathcal{M}_{NR} = -\frac{8\kappa^2 M^2 \omega^2}{2(-4\omega^2 \sin^2(\theta/2))} = \kappa^2 \frac{4M^2}{\theta^2} \quad (4.1.11)$$

où l'on a supposé que le transfert d'impulsion est faible, autrement dit que le scalaire sans masse est dévié de son axe d'un très petit angle θ et que son énergie reste essentiellement la même $\omega' = \omega$. La section efficace différentielle $d\sigma$, c'est-à-dire la probabilité qu'un processus se déroule, donne la probabilité qu'un photon diffuse dans une fraction d'angle solide, $d\Omega$. Elle vaut

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\omega^2}{2^4 E_1 E_2 E_3 E_4} |\mathcal{M}|^2 \simeq \frac{16G^2 M^2}{\theta^4}. \quad (4.1.12)$$

Cette expression permet de calculer l'angle "classique" de déviation de la lumière par le soleil et est compatible avec les observations [109].

4.2. Généralisation de la section efficace

Cette expression est cependant valable uniquement dans le cas où les fonctions d'ondes des champs scalaires sont des ondes planes, c'est-à-dire bien centrées autour d'une impulsion. On approxime d'ailleurs les fonctions d'ondes par des fonctions delta.

Or notre intérêt porte sur les diffusions d'états spatialement superposés qui ne peuvent pas être approximés par une fonction delta sous peine de négliger totalement les effets de la superposition. Il est donc nécessaire de généraliser l'équation de la section efficace habituelle. Un groupe de chercheurs a creusé cette question à la suite d'une déviation entre les observations et les prédictions du bremsstrahlung à VEPP-4 [112]. Ce formalisme, généralisé par Karlovets et al. [113], utilise le concept de fonction de Wigner (fonctions de distributions quantiques) et le chevauchement de ces fonctions pour chaque particule. Les fonctions de Wigner, $n_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{k}_i, t)$, sont liées aux fonctions d'ondes de la façon suivante

$$\int \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} n_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{k}_i, t) = |\phi_i(\mathbf{r}_i, t)|^2 \quad \int d^3 r_i n_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{k}_i, t) = |\phi_i(\mathbf{k}_i, t)|^2 \quad (4.2.1)$$

$$\int \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} d^3 r_i n_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{k}_i, t) = 1. \quad (4.2.2)$$

Dans la limite où une fonction d'onde gaussienne tend vers une onde plane, sa fonction de Wigner tend vers

$$\lim_{PW} n(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) \longrightarrow \frac{\sigma^3}{\pi^{3/2}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \quad (4.2.3)$$

où $p = \langle k \rangle$ est la valeur moyenne de k . Cette approximation est très utile, car elle permet de vérifier que cette approche reproduit bien la formule habituelle de la section efficace pour des ondes planes.

Étudions ce formalisme dans le cas où deux particules, décrites par des fonctions de Wigner générale $n_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{k}_1, t)$ et $n_2(\mathbf{r}_2, \mathbf{k}_2, t)$ diffusent vers deux ondes planes finales \mathbf{p}_3 et \mathbf{p}_4 . Leur

probabilité de diffusion, dW , dépend de la section efficace (généralisé) $d\sigma(\mathbf{b}, \mathbf{k}_{1,2})$ et de l'interférence entre leurs fonctions de Wigner, le corrélateur des particules $\mathcal{L}(\mathbf{b}, \mathbf{k}_{1,2})$. Le paramètre b représente le paramètre d'impact et va prendre en compte le chevauchement entre les fonctions de Wigner. Cela donne

$$dW = \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \frac{d^3 b}{(2\pi)^3} d\sigma(\mathbf{b}, \mathbf{k}_{1,2}) \mathcal{L}(\mathbf{b}, \mathbf{k}_{1,2}) \quad (4.2.4)$$

avec

$$d\sigma(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{b}) = (2\pi)^4 \delta(\epsilon_1(\mathbf{k}_1 + \mathbf{b}/2) + \epsilon_2(\mathbf{k}_2 - \mathbf{b}/2) - \epsilon_f) \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_f) \quad (4.2.5)$$

$$\times T_{PW}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{b}/2, \mathbf{k}_2 - \mathbf{b}/2) T_{PW}^*(id.) \frac{1}{v(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)} \Pi_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \quad (4.2.6)$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{b}) = v(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \int d^3 r d^3 R dt e^{i\mathbf{b}\cdot\mathbf{R}} n_1(\mathbf{r}, \mathbf{k}_1, t) n_2(\mathbf{r} + \mathbf{R}, \mathbf{k}_2, t) \quad (4.2.7)$$

où l'on a défini T_{PW} comme étant l'amplitude avec ses termes de normalisation dans le cas du même processus pour des ondes planes. La section efficace effective, la généralisation de la section efficace à des fonctions d'onde non planes, correspond à cette probabilité de diffusion divisée par la luminosité totale, L ,

$$d\sigma_{\text{eff.}} = \frac{dW}{L}, \quad (4.2.8)$$

et la luminosité totale correspond à l'intégrale sur les impulsions du corrélateur des particules,

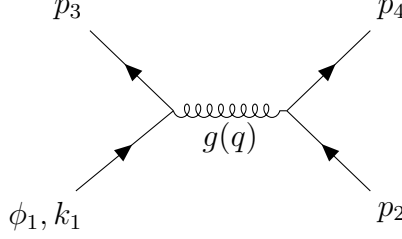
$$L = \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} dt d^3 r v(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) n_1(\mathbf{r}, \mathbf{k}_1, t) n_2(\mathbf{r}, \mathbf{k}_2, t). \quad (4.2.9)$$

Ces formules générales s'appliquent essentiellement à tous les cas possibles de fonctions d'ondes des particules physiques.

Il est cependant utile de considérer un cas particulier qui est celui traité dans le troisième article. Ce cas est celui de la diffusion d'un scalaire sans masse décrit par une onde plane sur une particule scalaire massive qui se trouve dans une superposition spatiale.

4.3. Diffusion d'une onde plane sur une superposition spatiale

Considérons ce cas de la diffusion gravitationnelle d'un scalaire sans masse, \mathbf{k}_2 centré en \mathbf{p}_2 , sur un scalaire massif, (M, \mathbf{k}_1) , dans une superposition spatiale décrite par la fonction d'onde $\phi_1(\mathbf{k}_1)$, comme représentée sur le diagramme de Feynman ci-dessous.



La fonction d'onde spatiale la plus simple d'une particule en superposition est la superposition de deux gaussiennes centrées en $+\mathbf{r}_0$ et $-\mathbf{r}_0$ respectivement. Elle est donc proportionnelle, dans l'espace des coordonnées, à ces deux gaussiennes

$$\phi_1(\mathbf{x}) \sim e^{-(\mathbf{x}-\mathbf{r}_0)^2/(2\sigma^2)} + e^{-(\mathbf{x}+\mathbf{r}_0)^2/(2\sigma^2)}. \quad (4.3.1)$$

La normalisation et la section efficace font appel à la fonction d'onde dans l'espace des impulsions. Une simple transformée de Fourier donne

$$\phi_1(\mathbf{k}_1) \sim e^{-\frac{\sigma^2}{2}|\mathbf{k}_1|^2} (e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_0} + e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_0}). \quad (4.3.2)$$

La normalisation est ensuite trouvée en imposant que la probabilité totale, c'est-à-dire l'intégrale de la norme au carré de ϕ_1 soit égale à un,

$$|\phi_1(\mathbf{k}_1)|^2 = \mathcal{N}(\sigma, \mathbf{r}_0) e^{-\sigma^2|\mathbf{k}_1|^2} (2 + e^{2i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_0} + e^{-2i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_0}). \quad (4.3.3)$$

$$\int |\phi_1(\mathbf{k}_1)|^2 \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} = 1 \quad \longrightarrow \quad \mathcal{N}(\sigma, \mathbf{r}_0) = \frac{(4\pi\sigma^2)^{3/2}}{2} \frac{1}{1 + e^{-r_0^2/\sigma^2}}. \quad (4.3.4)$$

Cette fonction d'onde au carré est paire, ce qui veut dire qu'elle est invariante sous le changement de signe de k_1 . Cela implique que

$$\int \mathbf{k}_1 |\phi_1(\mathbf{k}_1)|^2 d^3 k_1 = 0. \quad (4.3.5)$$

Cette symétrie va permettre de simplifier les expressions impaires en \mathbf{k}_1 .

Notre deuxième choix consiste à ce que la particule \mathbf{k}_2 soit une onde plane centrée en \mathbf{p}_2 . Ce choix permet de grandement simplifier l'expression de la section efficace effective, car la fonction de Wigner se réduit à une fonction delta (4.2.3). Le corrélateur des particules devient

$$\mathcal{L}(\mathbf{b}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{\sigma_2^3}{\pi^{3/2}} v(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{b}) |\phi_1(\mathbf{k}_1)|^2 (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_2). \quad (4.3.6)$$

La fonction de delta sur \mathbf{b} met en avant l'absence d'interférence entre les deux fonctions d'onde et simplifie grandement la probabilité de diffusion. Elle devient

$$dW = \frac{\sigma_2^3}{\pi^{3/2}} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} |T_{PW}(\mathbf{k}_1, \mathbf{p}_2)|^2 |\phi_1(\mathbf{k}_1)|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{d^3 p_3}{(2\pi^3)} \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3} \quad (4.3.7)$$

Il reste à calculer la luminosité totale dans notre cas afin d'obtenir la section efficace effective. La différence de vitesse vaut

$$v(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \simeq 1 - \frac{k_{1z}}{M} + \mathcal{O}(M^{-3}). \quad (4.3.8)$$

La luminosité totale se simplifie en

$$L = \frac{\sigma_2^3}{\pi^{3/2}} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} d^3 r \left(1 - \frac{k_{1z}}{M}\right) n_1(\mathbf{r}, \mathbf{k}_1, t) = \frac{\sigma_2^3}{\pi^{3/2}} \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \left(1 - \frac{k_{1z}}{M}\right) |\phi_1(\mathbf{k}_1)|^2 \quad (4.3.9)$$

$$= \frac{\sigma_2^3}{\pi^{3/2}} \quad (4.3.10)$$

où l'on a utilisé la normalisation de la fonction d'onde et sa parité.

La section efficace effective,

$$d\sigma_{\text{eff.}} = \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} |T_{PW}(\mathbf{k}_1, \mathbf{p}_2)|^2 |\phi_1(\mathbf{k}_1)|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3}. \quad (4.3.11)$$

est donc très proche de la forme usuelle. La seule différence vient de la dépendance explicite en la fonction d'onde de l'état superposé, $|\phi_1(\mathbf{k}_1)|^2$.

C'est cette formule qui est appliquée à la diffusion gravitationnelle dans l'article trois.

4.4. Potentiel gravitationnel d'une particule superposée

En complément de cette section efficace, il est instructif de calculer le potentiel d'un scalaire en superposition. Considérons le cas suivant : la forme de notre fonction d'onde d'état superposé reste inchangée par la diffusion du scalaire sans masse. C'est un cas logique, car le concept de potentiel ne décrit pas la source de ce potentiel et ne varie pas après qu'il y ait eu une diffusion dessus. Cela revient en fait à considérer l'approximation où très peu d'impulsions sont échangées entre les deux scalaires.

Les fonctions d'ondes de l'état superposé avant, ϕ_1 et après, ϕ_3 , sont donc identiques,

$$\phi_1(\mathbf{k}_1) = \frac{(4\pi\sigma^2)^{3/4}}{\sqrt{2}} \frac{e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_0} + e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_0}}{\sqrt{1 + e^{-|\mathbf{r}_0|^2/\sigma^2}}} e^{-\frac{\sigma^2}{2} |\mathbf{k}_1|^2} \quad (4.4.1)$$

$$\phi_3(\mathbf{k}_3) = \frac{(4\pi\sigma^2)^{3/4}}{\sqrt{2}} \frac{e^{i\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r}_0} + e^{-i\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r}_0}}{\sqrt{1 + e^{-|\mathbf{r}_0|^2/\sigma^2}}} e^{-\frac{\sigma^2}{2} |\mathbf{k}_3|^2}. \quad (4.4.2)$$

Dans la section précédente, on a calculé le potentiel de Newton en considérant la transformée de Fourier de l'amplitude d'une diffusion gravitationnelle. Néanmoins nous avons dû ajouter un facteur de normalisation pour reproduire ce potentiel. Le potentiel est déduit de l'approximation de Born et prend la forme générale

$$\langle \phi_f | iT | \phi_i \rangle = -i\tilde{V}(q)(2\pi)\delta(E_i - E_f) \quad (4.4.3)$$

avec q le momentum du graviton et $\phi_{i/f}$ les fonctions d'onde initiales/finales. Le choix particulier de ϕ_1 et de ϕ_3 fait ci-dessus et la deuxième particule, choisie comme étant juste

une onde plane, donnent l'équation

$$\begin{aligned}
\tilde{V}(q) &= \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \phi_1(\mathbf{k}_1) \phi_3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}) \frac{\langle k_1 - q, p_4 | k_1, p_2 \rangle}{4\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_4}} \Big|_{NR} \\
&\simeq -\kappa^2 \frac{M\omega}{2|\mathbf{q}|} \int d^3 k_1 (4\pi\sigma^2)^{3/2} \frac{(1 + e^{2i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_0}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_0} + (1 + e^{-2i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_0}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_0}}{1 + e^{-|\mathbf{r}_0|^2/\sigma^2}} e^{-\sigma^2|\mathbf{k}_1|^2} e^{-\sigma^2\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{q}} e^{-\sigma^2/2|\mathbf{q}|^2} \\
&= -\kappa^2 \frac{M\omega}{|\mathbf{q}|^2} \frac{\cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_0) + \cos(2\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_0) e^{-|\mathbf{r}_0|^2/\sigma^2}}{1 + e^{-|\mathbf{r}_0|^2/\sigma^2}} e^{-\frac{\sigma^2}{4}|\mathbf{q}|^2} \tag{4.4.4}
\end{aligned}$$

Le potentiel en termes des coordonnées spatiales est obtenu par une transformée de Fourier. On obtient

$$\begin{aligned}
V(r) &\simeq -\frac{\kappa^2 M\omega}{1 + e^{-|\mathbf{r}_0|^2/\sigma^2}} \int d^3 q \frac{e^{-\frac{\sigma^2}{4}|\mathbf{q}|^2}}{|\mathbf{q}|^2} \left(\frac{e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)} + e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}}{2} + \frac{e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} + 2\mathbf{r}_0)} + e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - 2\mathbf{r}_0)}}{2} e^{-|\mathbf{r}_0|^2/\sigma^2} \right) \\
&= -\frac{GM\omega}{1 + e^{-|\mathbf{r}_0|^2/\sigma^2}} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} + \mathbf{r}_0|} + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + \frac{e^{-|\mathbf{r}_0|^2/\sigma^2}}{|\mathbf{r} + 2\mathbf{r}_0|} + \frac{e^{-|\mathbf{r}_0|^2/\sigma^2}}{|\mathbf{r} - 2\mathbf{r}_0|} \right). \tag{4.4.5}
\end{aligned}$$

Le terme gaussien $e^{-\frac{\sigma^2}{4}|\mathbf{q}|^2}$ peut-être sorti de l'intégrale sous forme de'une exponentielle de laplacien. Celle-ci ne contribue pas "loin" de la charge, elle est égale à 1 plus des fonctions delta de Dirac et leurs dérivées.

Ce résultat est intrigant. L'exponentielle du Laplacien multiplie la solution et va contribuer comme juste l'identité plus une série infinie de fonctions delta et ses dérivées centrées en $\pm\mathbf{r}_0$ et $\pm 2\mathbf{r}_0$ et ce pour chaque terme respectivement.

Ce potentiel tend vers le potentiel de Schrödinger-Newton dans la limite où le rayon de la superposition est grand par rapport à la variance des gaussiennes. Il reste néanmoins différent, en particulier pour des cas plus limites où $|\mathbf{r}_0| \sim \sigma$.

Troisième article.

What is the Gravitational Field of a Mass in a Spatially Nonlocal Quantum Superposition?

par

Victor Massart¹, Rémi Ligez¹, Richard MacKenzie¹, Manu Paranjape¹ et Urjit Yajnik²

(¹) Groupe de physique des particules, Département de physique
Université de Montréal, Montréal Québec, Canada

(²) Department of Physics, Indian Institute of Technology Bombay, Powai, Mumbai - 400076

Cet article a été soumis dans Physical Review Letters.

Les principales contributions de Victor Massart à cet article sont présentées.

- Revue de la Littérature du sujet;
- Étude et compréhension du formalisme mathématique utilisé
- Ensemble des calculs à la main, et vérification avec Mathematica;

RÉSUMÉ. L'étude du champ gravitationnel produit par un état quantique spatialement superposé d'une particule massive est un domaine passionnant de la physique moderne. Une question à laquelle il faut répondre est de savoir si le champ gravitationnel se comporte comme la superposition classique de deux particules séparées par une distance spatiale avec la moitié de la masse située à chaque position ou si le système se comporte comme une superposition quantique avec un comportement beaucoup plus intéressant et subtil ? La théorie quantique des champs est le cadre théorique idéal pour explorer ce type de question. Nous étudions la diffusion d'un scalaire sans masse sur une telle superposition spatiale, quantique et non locale d'une particule massive. Nous calculons la section efficace de diffusion différentielle sous l'interaction provenant de l'échange d'un graviton. Nous constatons que la section efficace de diffusion n'est pas représentée par l'image classique, de diffusion potentielle de deux sources localisées avec la moitié de la masse à chaque source. Nous discutons comment ce résultat serait mortel pour la description de Schrödinger-Newton de la gravitation interagissant avec la matière quantique et serait propice à considérer le champ gravitationnel à quantifier. Nous commentons la faisabilité expérimentale de l'observation de tels effets.

Mots clés : Gravité Quantique, Champ gravitationnel superposé

ABSTRACT. The study of the gravitational field produced by a spatially superposed quantum state of a massive particle is a thrilling area of modern physics. One question to be answered is whether the gravitational field behaves as the classical superposition of two particles separated by a spatial distance with half the mass located at each position or does the system behave as a quantum superposition with a far more interesting and subtle behaviour? Quantum field theory is ideally suited to probe exactly this kind of question. We study the scattering of a massless scalar on such a spatially non-local, quantum superposition of a massive particle. We compute the differential scattering cross-section under the interaction coming from the exchange of one graviton. We find that the scattering cross-section is not remotely represented by the classical picture, of potential scattering from two localized sources with half the mass at each source. We discuss how this result would be lethal to the Schrödinger-Newton description of gravitation interacting with quantum matter and would be conducive to considering the gravitational field to be quantized. We comment on the experimental feasibility of observing such effects.

Keywords: Quantum Gravity, Superposed gravitational field

1. Introduction

At the core of modern physics lie the two most successful theories of physics : General Relativity (GR) on one side and Quantum Field Theory (QFT) on the other. Consistently combining these theories is one of the main goals of modern theoretical physics. The most common approach is to consider the quantum theory to be more fundamental and try to quantize gravity [88]. This choice is also justified by some indirect evidence [89]. The opposite direction has also been advocated, of “gravitizing” quantum mechanics, with some interesting arguments, see Penrose [90, 91].

However, we shall be interested in the standard ideas of a quantum theory of gravity. Indeed, quantum gravity as a low energy effective field theory makes perfect sense [114–117], although the directly observable predictions of such an effective quantum field theory are still not remotely experimentally observable. An intriguing possibility for the detection of noise due to quantum fluctuations in the gravitational field at gravitational wave detectors such as LIGO [118] has been suggested recently [119]. Within the effective field theory point of view, gravitation must be treated as a fully quantum mechanical field with all the complexities ensuing from the possibilities of arbitrary linear superpositions of quantum states. It is in this context that we examine the gravitational scattering of a massless particle from the effective quantum gravitational field of a massive particle in a spatially non-local quantum superposition.

2. Scattering on a spatially nonlocal wave packet

The usual formalism for scattering in quantum field theory corresponds to computing the amplitude for a given scattering process and converting the amplitude into an experimentally observable differential scattering cross section. The formalism is almost as old as the advent of quantum field theory, however, generally, certain assumptions are made so that the dependence on the initial and final wave packets disappears; see for example [6]. However, here we wish to consider a process where the cross section strongly depends on the wave packet of one of the initial states, a situation which is not usually considered.

We consider as the scatterer a particle of mass M in a linearly superposed state described by a spatially non-local wave function, which of course correspond to a particular momentum space wavefunction $\phi_1(\mathbf{k}_1)$, causing the scattering of a massless particle supposed to be in a state $\phi_2(\mathbf{k}_2)$. While $\phi_2(\mathbf{k}_2)$ is assumed to be sharply peaked at momentum \mathbf{p}_2 , the wavefunction $\phi_1(\mathbf{k}_1)$ is not peaked at any \mathbf{p}_1 , but nevertheless assumed for simplicity to be symmetrically distributed around $\mathbf{p}_1 = 0$, *i.e.* $\phi_1(-\mathbf{k}_1) = \phi_1(\mathbf{k}_1)$. This means that the calculation is done in the convenient reference frame where $\mathbf{p}_1 = 0$, *i.e.*, the “centre of mass” frame of the wavefunction.

The formula for the differential of the cross section is given by, :

$$d\sigma = \left(\prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \frac{|\mathcal{M}(k_1, k_2 \rightarrow \{p_f\})|^2}{2E_1 2E_2 |v_1 - v_2|} \quad (2.1)$$

$$\times |\phi_1(\mathbf{k}_1)|^2 |\phi_2(\mathbf{k}_2)|^2 (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 - \sum p_f). \quad (2.2)$$

For our needs, we will use the formalism of Kotkin et al [112] as elaborated in Karlovets [113] that employs the Wigner function formalism [120]. We will take the incident massless particles in on-shell momentum space wave packets $\phi_2(\mathbf{k}_2)$ centred and highly peaked on a momentum \mathbf{p}_2 . These massless particles will be incident on particles of mass M which are in on-shell, spatially nonlocal wave packets. When expressed in terms of momentum space

wave packets $\phi_1(\mathbf{k}_1)$, these wave packets are not highly peaked on any specific momentum as noted above. We will be interested in the inclusive scattering cross section for the massless particle, $p_2 \rightarrow p_4$, while the non-trivial wave packet will in principle scatter to all possible allowed final states, which will be integrated over.

It is most convenient to consider the wave function of the scattered massive particle, that was initially in the spatially nonlocal wave function, to be scattered to wave functions that are eigenstates of momentum \mathbf{p}_3 and to integrate over this momentum, as these do correspond to a complete set of final states. In practice, the integration is of course not required as energy-momentum conservation for given k_1, p_2, p_4 fixes the value of p_3 . Thus the scattering will give rise to final momenta $k_1 \rightarrow p_3$ and $p_2 \rightarrow p_4$ with integration over \mathbf{k}_1 smeared with wave function $\phi_1(\mathbf{k}_1)$ understood. Then straightforwardly simplifying the formula in [113], to the case of a particle in a momentum eigenstate scattering on a particle in a non-trivial wave packet, we find

$$d\sigma = \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} |T_{PW}(\{k_1, p_2\} \rightarrow \{p_3, p_4\})|^2 |\phi_1(\mathbf{k}_1)|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3} \quad (2.3)$$

where the plane wave amplitude $T_{PW}(\{k_1, p_2\} \rightarrow \{p_3, p_4\})$ is given by

$$T_{PW}(\{k_1, p_2\} \rightarrow \{p_3, p_4\}) = \frac{\mathcal{M}(\{k_1, p_2\} \rightarrow \{p_3, p_4\})}{\sqrt{2\epsilon_1 2\epsilon_2 2\epsilon_3 2\epsilon_4}} \quad (2.4)$$

with $\mathcal{M}(\{k_1, p_2\} \rightarrow \{p_3, p_4\})$ the invariant matrix element for the momentum space scattering process [6], and ϵ_i the energy of particle i . We note the usual factor of $|v_1 - v_2|$ in the particle flux simplifies to unity, the velocity of the massless particle, because of the assumed symmetry of the wave function $\phi_1(\mathbf{k}_1)$.

The normalized wave function for the particle of type 1, which is taken to be spatially nonlocal, in momentum space has the form

$$|\phi_1(\mathbf{k}_1)|^2 = 4 \left(\pi\sigma^2\right)^{3/2} e^{-\sigma^2|\mathbf{k}_1|^2} \frac{2 + e^{2i\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}_1} + e^{-2i\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}_1}}{1 + e^{-|\mathbf{r}|^2/(\sigma^2)}} \quad (2.5)$$

where σ is the width of a Gaussian wave packet that is superposed at spatial position \mathbf{r} and $-\mathbf{r}$.

3. The 1-graviton exchange scattering amplitude

The amplitude is easily computed using the linearized gravitational theory and subsequent graviton propagator and matter vertices, following Donoghue [115, 116] (see also [93, 95, 96, 109, 111, 117]), as prescribed by the Feynman diagram Fig. (1)

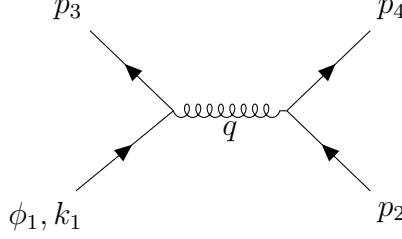


FIG. 1. 1-graviton exchange scattering

Applying momentum conservation, we get for the amplitude

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \frac{(-i)^2 \kappa^2 (k_1^\mu p_3^\nu + k_1^\nu p_3^\mu - (p_2 \cdot p_4) \eta^{\mu\nu}) (\eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta} \eta_{\nu\alpha} - \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta}) (p_2^\alpha p_4^\beta + p_2^\beta p_4^\alpha - (p_2 \cdot p_4) \eta^{\alpha\beta})}{2q^2} \\ &= \frac{\kappa^2 [2(k_1 \cdot p_2)(k_1 \cdot p_4) + (k_1 \cdot p_2)(p_2 \cdot p_4) - (k_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_4) - (p_2 \cdot p_4)^2]}{p_2 \cdot p_4} \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\kappa^2}{1 - \hat{p}_2 \cdot \hat{p}_4} \left[2M^2 - 2M \mathbf{k}_1 \cdot (\hat{p}_2 + \hat{p}_4) + M(\omega_2 - \omega_4)(1 - \hat{p}_2 \cdot \hat{p}_4) + 2|\mathbf{k}_1|^2 \right. \\ &\quad \left. + 2(\mathbf{k}_1 \cdot \hat{p}_2)(\mathbf{k}_1 \cdot \hat{p}_4) - \mathbf{k}_1 \cdot (\omega_2 \hat{p}_2 - \omega_4 \hat{p}_4)(1 - \hat{p}_2 \cdot \hat{p}_4) - \omega_2 \omega_4 (1 - \hat{p}_2 \cdot \hat{p}_4)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

where κ is the gravitational coupling constant, ω_2 and ω_4 are short hand notation for p_2^0 and p_4^0 and the momentum transfer is $q = p_3 - k_1 = p_2 - p_4$ with $q^2 = -2p_2 \cdot p_4 = -2\omega_2 \omega_4 (1 - \hat{\mathbf{p}}_2 \cdot \hat{\mathbf{p}}_4)$ as p_2 and p_4 are massless and on shell.

4. The scattering cross section

The amplitude must now be folded in with the wave function, the energy denominators and factors of 2π as in Eqn. (2.3) and then integrated over $d^3 p_3$ which removes the spatial delta functions and integrated over $d\omega_4$ which removes the temporal delta function yielding the differential scattering cross section

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_4} = \int \frac{d^3 k_1}{2^9 \pi^5} |\phi_1(\mathbf{k}_1)|^2 \frac{|\mathcal{M}|^2}{\epsilon_1 \omega_2 \epsilon_3 \omega_4} \frac{\omega_4^2}{|f'_\delta(\omega_4)|}. \quad (4.1)$$

The energy conserving delta function is given by $\delta(f_\delta(\omega_4)) = \delta(\epsilon_1 + \omega_2 - \epsilon_3 - \omega_4)$ where the complications arise because $\epsilon_3 = \sqrt{M^2 + (\mathbf{k}_1 + (\mathbf{p}_2 - \omega_4 \hat{\mathbf{p}}_4))^2}$, $\epsilon_1 = \sqrt{M^2 + \mathbf{k}_1^2}$ is the energy of the Fourier component corresponding to momentum \mathbf{k}_1 of the spatially nonlocal particle wave function and ω_2 is the energy of the incoming massless particle. The full expression for the cross section is a complicated, unenlightening jumble, however its multipole expansion does shed some light on the gravitational interaction.

5. Multipole expansion of the scattering cross section

We can write the cross section Eqn.(4.1) as

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_4} = \int \frac{d^3k_1}{2^9\pi^5} |\phi_1(\mathbf{k}_1)|^2 g(\mathbf{k}_1) |\mathcal{M}|^2 \quad (5.1)$$

and then $g(\mathbf{k}_1) |\mathcal{M}|^2$ admits an expansion in powers of \mathbf{k}_1 as

$$g(\mathbf{k}_1) |\mathcal{M}|^2 = g(\mathbf{k}_1) |\mathcal{M}|^2 \Big|_{\mathbf{k}_1=0} + \frac{1}{2} \partial_{k_1^i} \partial_{k_1^j} \left(g(\mathbf{k}_1) |\mathcal{M}|^2 \right) \Big|_{\mathbf{k}_1=0} k_1^i k_1^j + \dots \quad (5.2)$$

where the terms odd in \mathbf{k}_1 are absent due to symmetry. Then the scattering cross section admits the multipole expansion

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_4} = \alpha \int |\phi_1(\mathbf{k}_1)|^2 \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} + \beta^{ij} \int k_{1i} k_{1j} |\phi_1(\mathbf{k}_1)|^2 \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \quad (5.3)$$

$$= \alpha + \frac{\beta^{ij} \delta_{ij}}{3} \int |\mathbf{k}_1|^2 |\phi_1(\mathbf{k}_1)|^2 \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} + \beta^{ij} \int \left(k_{1i} k_{1j} - \frac{|\mathbf{k}_1|^2}{3} \delta_{ij} \right) |\phi_1(\mathbf{k}_1)|^2 \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} + \dots \quad (5.4)$$

$$= \alpha + \frac{\beta^{ij} \delta_{ij}}{3} \left(\frac{3}{2\sigma^2} - \frac{|\mathbf{r}|^2}{\sigma^4} \frac{1}{1 + e^{|\mathbf{r}|^2/\sigma^2}} \right) + \beta^{ij} \left(\frac{|\mathbf{r}|^2}{3} \delta_{ij} - r_i r_j \right) \frac{1}{\sigma^4 (1 + e^{|\mathbf{r}|^2/\sigma^2})} \quad (5.5)$$

where evidently $\alpha = \frac{1}{2^6\pi^2} g(\mathbf{k}_1) |\mathcal{M}|^2 \Big|_{\mathbf{k}_1=0}$ and $\beta^{ij} = \frac{1}{2^7\pi^2} \partial_{k_1^i} \partial_{k_1^j} \left(g(\mathbf{k}_1) |\mathcal{M}|^2 \right) \Big|_{\mathbf{k}_1=0}$ and where we have used the integral

$$\int k_{1i} k_{1j} |\phi_1(\mathbf{k}_1)|^2 \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} = \frac{\delta_{ij}}{2\sigma^2} - \frac{r_i r_j}{\sigma^4} \frac{1}{1 + e^{|\mathbf{r}|^2/\sigma^2}}. \quad (5.6)$$

The leading terms in the expansion about $\mathbf{k}_1 = 0$ are found after a somewhat tedious calculation. For the second derivative we will use:

$$\begin{aligned} \partial_{k_1^i} \partial_{k_1^j} \left(g(\mathbf{k}_1) |\mathcal{M}|^2 \right) \Big|_{\mathbf{k}_1=0} &= \\ \mathcal{M}^2 \partial_{k_1^i} \partial_{k_1^j} g + 2\mathcal{M} (\partial_{k_1^i} g \partial_{k_1^j} \mathcal{M} + \partial_{k_1^j} g \partial_{k_1^i} \mathcal{M}) + 2g (\partial_{k_1^i} \mathcal{M} \partial_{k_1^j} \mathcal{M} + \mathcal{M} \partial_{k_1^i} \partial_{k_1^j} \mathcal{M}) \Big|_{\mathbf{k}_1=0} \end{aligned} \quad (5.7)$$

We will need the expression for ω_4 obtained from the energy conservation delta function $\omega_4 = \epsilon_1 + \omega_2 - \epsilon_3$, and its derivatives. We find that the leading terms in the expansion in

powers of $1/M$ of ω_4 and its derivatives are given by

$$\begin{aligned} \omega_4 &= \omega_2 - \frac{1}{M} \left(\omega_2^2 + \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - \omega_2(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_2) \cdot \hat{\mathbf{p}}_4 \right) + \\ &+ \frac{1}{M^2} \left(\omega_2^3 - 2\omega_2^2(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_2) \cdot \hat{\mathbf{p}}_4 + \omega_2(\mathbf{k}_1 \cdot \hat{\mathbf{p}}_4 + \mathbf{p}_2 \cdot \hat{\mathbf{p}}_4)^2 + (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{p}_2)(\omega_2 - \mathbf{k}_1 \cdot \hat{\mathbf{p}}_4 - \mathbf{p}_2 \cdot \hat{\mathbf{p}}_4) \right) \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\omega_4|_{\mathbf{k}_1=0} = \omega_2 \quad (5.9)$$

$$\partial_i \omega_4|_{\mathbf{k}_1=0} = \frac{\omega_2}{M} (\hat{p}_{4i} - \hat{p}_{2i}) \quad (5.10)$$

$$\partial_i \partial_j \omega_4|_{\mathbf{k}_1=0} = \frac{\omega_2}{M^2} (2\hat{p}_{4i}\hat{p}_{4j} - \hat{p}_{2i}\hat{p}_{4j} - \hat{p}_{2j}\hat{p}_{4i}). \quad (5.11)$$

Then we find, using the above, relatively easily, to leading order in powers of M

$$\mathcal{M}|_{\mathbf{k}_1=0} = \kappa^2 \frac{2M^2}{1 - \hat{\mathbf{p}}_2 \cdot \hat{\mathbf{p}}_4} \quad (5.12)$$

$$\partial_i \mathcal{M}|_{\mathbf{k}_1=0} = \frac{\kappa^2}{1 - \hat{\mathbf{p}}_2 \cdot \hat{\mathbf{p}}_4} (-2M(\hat{p}_{2i} + \hat{p}_{4i})) \quad (5.13)$$

$$\partial_i \partial_j \mathcal{M}|_{\mathbf{k}_1=0} = \frac{\kappa^2}{1 - \hat{\mathbf{p}}_2 \cdot \hat{\mathbf{p}}_4} (4\delta_{ij} + 2(\hat{p}_{2i}\hat{p}_{4j} + \hat{p}_{2j}\hat{p}_{4i})). \quad (5.14)$$

A lengthier and more tedious calculation, which includes the calculation of $1/|f'_\delta|$, gives g and its derivatives, again expanded in powers of $1/M$,

$$g(\omega_4, \mathbf{k}_1) = \frac{\omega_4}{M^2 \omega_2} \left(1 - \frac{\omega_2(1 - \hat{\mathbf{p}}_2 \cdot \hat{\mathbf{p}}_4) - \mathbf{k}_1 \cdot \hat{\mathbf{p}}_4}{M} + \frac{\omega_2^2 - |\mathbf{k}_1|^2 - 2\omega_2(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_2) \cdot \hat{\mathbf{p}}_4 + (\mathbf{k}_1 \cdot \hat{\mathbf{p}}_4 + \mathbf{p}_2 \cdot \hat{\mathbf{p}}_4)^2}{M^2} \right)$$

$$g|_{\mathbf{k}_1=0} = \frac{1}{M^2} \quad (5.15)$$

$$\partial_i g|_{\mathbf{k}_1=0} = \frac{1}{M^3} (2\hat{p}_{4i} - \hat{p}_{2i}) \quad (5.16)$$

$$\partial_i \partial_j g|_{\mathbf{k}_1=0} = \frac{2}{M^4} (3\hat{p}_{4i}\hat{p}_{4j} - \hat{p}_{2i}\hat{p}_{4j} - \hat{p}_{2j}\hat{p}_{4i} - \delta_{ij}) \quad (5.17)$$

Then putting all this together, we find

$$\alpha = \frac{\kappa^4 M^2}{16\pi^2 (1 - \hat{\mathbf{p}}_2 \cdot \hat{\mathbf{p}}_4)^2} \quad (5.18)$$

$$\beta^{ij} = \left(\frac{\kappa^4}{16\pi^2 (1 - \hat{\mathbf{p}}_2 \cdot \hat{\mathbf{p}}_4)^2} \right) (\delta_{ij} + 3\hat{p}_{2i}\hat{p}_{2j}) \quad (5.19)$$

The term α gives exactly the limiting small momentum transfer gravitational deflection of a massless particles from a massive particle, [109].

6. Discussion and Conclusions

The term proportional to α , the lowest order monopole term, correspond to the scattering cross section of a single point like mass M , the analog of the Rutherford/Thompson cross

section of a massless particle scattering from a point like Newtonian potential. We see that the higher order terms coming from the $\beta^{ij}\delta_{ij} = 6\left(\frac{\kappa^4}{16\pi^2(1-\hat{\mathbf{p}}_2\cdot\hat{\mathbf{p}}_4)}\right)$, contribute to the monopole. This means that the scattering cross section is able to probe the non point like nature of the monopole part of the scattering particle's wave function. This addition to the monopole contribution is given by

$$\left(\frac{\kappa^4}{16\pi^2(1-\hat{\mathbf{p}}_2\cdot\hat{\mathbf{p}}_4)}\right)^2\left(\frac{3}{2\sigma^2}-\frac{|\mathbf{r}|^2}{\sigma^4}\frac{1}{1+e^{|\mathbf{r}|^2/\sigma^2}}\right). \quad (6.1)$$

However the actual quadrupole-type contribution is interestingly nothing like what would be expected if the gravitational field behaved according to the Schrödinger-Newton prescription, [100, 121]. The Schrödinger-Newton prescription would have the corresponding gravitational field as if one half the mass were concentrated at each of the two spatially nonlocal points, [122], a configuration which has a quadrupole moment

$$M\left(\frac{|\mathbf{r}|^2}{3}\delta_{ij}-r_i r_j\right). \quad (6.2)$$

Such a gravitational field yields a contribution to the (gravitational) scattering cross section

$$\frac{\kappa^4 M^2 \omega_2^2}{16\pi^2(1-\hat{\mathbf{p}}_2\cdot\hat{\mathbf{p}}_4)^2}(\hat{p}_{4i}-\hat{p}_{2i})(\hat{p}_{4j}-\hat{p}_{2j})\left(\frac{|\mathbf{r}|^2}{3}\delta_{ij}-r_i r_j\right) \quad (6.3)$$

obtained from a presumed Newtonian potential scattering from two point sources of mass $M/2$ located at the two peaks of the spatially nonlocal wave function. This result is not at all what we find from, Eqn.(5.5)

$$\frac{\kappa^4}{16\pi^2\sigma^4(1+e^{|\mathbf{r}|^2/\sigma^2})}\frac{3\hat{p}_{2i}\hat{p}_{2j}}{(1-\hat{\mathbf{p}}_2\cdot\hat{\mathbf{p}}_4)^2}\left(\frac{|\mathbf{r}|^2}{3}\delta_{ij}-r_i r_j\right), \quad (6.4)$$

where $\kappa = \sqrt{8\pi G}$ which gives a coefficient $4G^2$. Indeed the quadrupole term from the calculation from one graviton exchange scattering is exponentially small as $|\mathbf{r}| \gg \sigma$ compared to the result expected from scattering from a potential where the mass is split between two postions as prescribed by the Newton-Schrödinger formalism. This is lethal to the Schrödinger-Newton formalism, the calculation corresponding to one graviton exchange is clearly more justifiable. Additionally, our result shows that the wave function is only probed by the incoming massless particle's direction relative to the direction of separation \mathbf{r} something that is hopefully experimentally verifiable.

Useful further calculations would be to compute the gravitational contribution to the self energy of a massive particle in a spatially nonlocal wave function. One would look for the amplitude and behaviour of the self energy as a function of the spatial separation r of the nonlocal wave function. A behaviour as $1/r$ of the self energy would correspond to the Newtonian potential and the corresponding $1/r^2$ law of attraction of the two non-local

lumps. A calculation of the amplitude would indicate how the two nonlocal lumps behave gravitationally with respect to each other.

It would be very interesting to measure any of these phenomena although probably not technically feasible presently. However, it is not out of the realm of possibility to have a spatially non-local superposition about a 10^9 atoms. A Bose condensate would be proposed, and it can be imagined that such condensates could be launched in a atom interferometer. Then the gravitational interactions of the two quantum superposed masses might be measurable [123].

Conclusion

Cette thèse a donc permis d'étudier trois différents liens entre la gravitation et la théorie des champs.

- Le premier sujet est issu de la comparaison entre gravitation et électromagnétisme. Cette analogie nous a conduit à l'étude du rôle du temps retardé dans les solutions des équations d'Einstein linéarisées. On a ainsi pu proposer deux expériences qui pourraient permettre d'observer un tel phénomène. Cette observation est importante pour deux raisons principales. Elle permettrait de confirmer des prédictions dynamiques de la relativité générale dans le régime de "zone proche". Elle amènerait une mesure de la vitesse de propagation de la gravitation, indépendante des observations actuelles. Ces observations ne sont pas parfaites car elles dépendent fortement des modèles astronomiques et cosmologiques.
- Le deuxième sujet concerne la cosmologie. Nous avons amélioré un modèle de scalaire non minimalement couplé à la gravitation. Ce modèle théorique a pour objectif de résoudre le plus grand paradoxe de la physique contemporaine, celui de la constante cosmologique. Il avait été développé dans le vide dans un article précédent. Nous avons amélioré ce modèle en prenant en compte l'effet de la matière, à travers les ères cosmologiques. Une partie de l'espace des paramètres, parmi les cinq parties considérées dans le premier article, permet toujours d'expliquer une petite constante cosmologique tout en étant indiscernable de la relativité générale et du modèle Λ CDM.
- Le dernier projet traite de la gravité quantique. Nous avons étudié le champ gravitationnel produit par une particule en superposition quantique. Ce travail s'inscrit dans ces nouvelles recherches d'effets observables de la gravité quantique, motivées par les avancées techniques et théoriques sur les systèmes quantiques. Nous avons trouvé l'effet de cette superposition spatiale sur la diffusion entre deux scalaires. Ce résultat est très différent de celui obtenu grâce à la théorie de Newton-Schrödinger, un formalisme concurrent.

Plusieurs pistes restent à explorer dans la continuité des trois articles présentés :

- Le premier article de cette thèse mettait en avant l'intérêt d'une mesure du bruit newtonien en tant qu'effet dynamique de la relativité générale. Il proposait aussi une mesure de la vitesse de la gravitation indépendante du modèle cosmologique. La continuité logique serait d'approfondir la possibilité concrète d'une expérience, en particulier dans le cas des tremblements de terre. Un travail numérique de mesure précise du bruit de fond serait essentielle à cet égard.
- Le modèle d'une théorie scalaire-tenseur pour résoudre le problème de la constante cosmologique présenté dans le deuxième article offre encore beaucoup d'opportunité de recherche. L'article originel à ce sujet [4] exposait seulement le mécanisme théorique en l'absence de matière. Dans cet article-ci, nous avons donc naturellement étudié l'effet de la matière sur le modèle et montré que pour une partie de l'espace des paramètres, les résultats étaient indistinguables de la relativité générale et du modèle Λ CDM. Nos calculs sont analytiques et assez généraux. Une simulation plus poussée permettrait d'étudier d'éventuels effets différents de la relativité générale pour certains choix de paramètres. En effet, nous avons montré qu'il est toujours possible de considérer des paramètres qui rendraient le modèle indistinguishable de la relativité générale, mais étudier les cas limites pourrait être très instructif.

Il serait aussi utile d'identifier des perturbations scalaires spécifiques afin de tester plus précisément ce modèle. Un autre point très intéressant serait d'inclure l'inflation et de voir si (et comment) cela pourrait influencer l'évolution de notre scalaire.

- Le dernier article de cette thèse, qui portait sur l'étude de la diffusion gravitationnelle, ouvre aussi de nombreuses perspectives. Les diffusions gravitationnelles ne représentent qu'un effet très faible. Cependant, le cas du fond diffus cosmologique est intéressant à cet égard, car il offre un laboratoire grandeur nature pour tester d'éventuelles asymétries provenant du nombre gigantesque d'interactions gravitationnelles qu'il doit avoir subies.

Une idée dans la continuité du troisième article consisterait à étudier l'auto-interaction d'une particule en superposition spatiale avec la gravitation.

Enfin, l'étude d'une interaction entre deux particules superposées et intriquées pourrait mettre en avant des phénomènes potentiellement complexes d'interaction entre les deux fonctions d'ondes de ces particules.

Références bibliographiques

- [1] Freeman Dyson. Is a graviton detectable? In *XVIIth International Congress on Mathematical Physics*, pages 670–682. World Scientific, 2014.
- [2] Tony Rothman and Stephen Boughn. Can gravitons be detected? *Foundations of Physics*, 36(12):1801–1825, 2006.
- [3] Alessio Belenchia, Robert M Wald, Flaminia Giacomini, Esteban Castro-Ruiz, Časlav Brukner, and Markus Aspelmeyer. Information content of the gravitational field of a quantum superposition. *International Journal of Modern Physics D*, 28(14):1943001, 2019.
- [4] Oleg Evnin and Kévin Nguyen. Graceful exit for the cosmological constant damping scenario. *Phys. Rev. D*, 98(12):124031, 2018.
- [5] Sean M Carroll. *Spacetime and geometry*. Cambridge University Press, 2019.
- [6] Michael E Peskin. *An introduction to quantum field theory*. CRC Press, 2018.
- [7] Victor Massart and MB Paranjape. Near zone dynamical effects in gravity. *arXiv preprint arXiv:1208.2293*, 2012.
- [8] Oleg Evnin, Victor Massart, and Kévin Nguyen. Robustness of the cosmological constant damping mechanism through matter eras. *Classical and Quantum Gravity*, 38(17):175012, 2021.
- [9] Rémi Ligez, R. B. MacKenzie, Victor Massart, M. B. Paranjape, and U. A. Yajnik. What is the gravitational field of a mass in a spatially nonlocal quantum superposition?, 2021.
- [10] Daniel Z Freedman and Antoine Van Proeyen. *Supergravity*. Cambridge university press, 2012.
- [11] Mikio Nakahara. *Geometry, topology and physics*. CRC press, 2018.
- [12] John David Jackson. *Classical electrodynamics*, 1999.
- [13] B. P. Abbott et. al. Prospects for Observing and Localizing Gravitational-Wave Transients with Advanced LIGO and Advanced Virgo. *Living Reviews in Relativity*, 19(1):1, February 2016.
- [14] Scott A. Hughes and Kip S. Thorne. Seismic gravity-gradient noise in interferometric gravitational-wave detectors. *Phys. Rev. D*, 58:122002, Nov 1998.
- [15] Kip S. Thorne and Carolee J. Winstein. Human gravity gradient noise in interferometric gravitational wave detectors. *Phys. Rev. D*, 60:082001, 1999.
- [16] MB Paranjape. How to measure the speed of gravity. *arXiv preprint arXiv:1208.2293*, 2012.
- [17] BP Abbott, LIGO Scientific Collaboration, Virgo Collaboration, M Sakellariadou, and Fermi Gamma-ray Burst. Gravitational waves and gamma-rays from a binary neutron star merger: Gw170817 and grb 170817a. *The Astrophysical Journal Letters*, 848(L13):27pp, 2017.
- [18] Neil Cornish, Diego Blas, and Germano Nardini. Bounding the speed of gravity with gravitational wave observations. *Phys. Rev. Lett.*, 119:161102, Oct 2017.
- [19] Peter R. Saulson. *Fundamentals of Interferometric Gravitational Wave Detectors*. World Scientific, 2nd. ed. edition, 2017.

- [20] Charles W Misner, Kip S Thorne, and John Archibald Wheeler. *Gravitation*. Princeton University Press, 2017.
- [21] Ben Craven. Kinetic energy of a drifting plate: <http://bencraven.org.uk/2017/05/22/the-kinetic-energy-of-a-drifting-tectonic-plate/>.
- [22] Quentin Bletery, Amanda M. Thomas, Alan W. Rempel, Leif Karlstrom, Anthony Sladen, and Louis De Barros. Mega-earthquakes rupture flat megathrusts. *Science*, 354(6315):1027–1031, 2016.
- [23] Steven Weinberg. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. 1972.
- [24] Lewis Ryder. *Introduction to general relativity*. Cambridge University Press, 2009.
- [25] John David Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley, 1998.
- [26] Steve Carlip. Aberration and the speed of gravity. *Physics Letters A*, 267(2-3):81–87, 2000.
- [27] William Kinnersley. Field of an Arbitrarily Accelerating Point Mass. *Phys. Rev.*, 186:1335–1336, 1969.
- [28] P. C. Aichelburg and R. U. Sexl. On the gravitational field of a massless particle. *General Relativity and Gravitation*, 2(4):303–312, 1971.
- [29] D.V. Martynov, E.D. Hall, B.P. Abbott, R. Abbott, T.D. Abbott, C. Adams, R.X. Adhikari, R.A. Anderson, S.B. Anderson, K. Arai, and et al. Sensitivity of the advanced ligo detectors at the beginning of gravitational wave astronomy. *Physical Review D*, 93(11), Jun 2016.
- [30] P.S. Laplace and J.B.M. Duprat. *Traité de mécanique céleste*. Traité de mécanique céleste /par P.S. Laplace ... ; tome premier [-quatrieme]. de l’Imprimerie de Crapelet, 1799.
- [31] Tom Van Flandern. The speed of gravity—what the experiments say. *Physics Letters A*, 250(1-3):1–11, 1998.
- [32] Clifford M. Will. Propagation speed of gravity and the relativistic time delay. *Astrophys. J.*, 590:683–690, 2003.
- [33] Joseph Louis Lagrange. *Nouvelle méthode pour résoudre les problèmes indéterminés en nombres entiers*. Chez Haude et Spener, Libraires de la Cour & de l’Académie royale, 1770.
- [34] Edmund Taylor Whittaker and George Neville Watson. *A course of modern analysis*. Cambridge university press, 1996.
- [35] Maulik Parikh, Frank Wilczek, and George Zahariade. The Noise of Gravitons. *Int. J. Mod. Phys. D*, 29(14):2042001, 2020.
- [36] Maulik Parikh, Frank Wilczek, and George Zahariade. Signatures of the quantization of gravity at gravitational wave detectors. arXiv: hep-th 2010.08208, 2020.
- [37] W.P. Schellart and N. Rawlinson. Global correlations between maximum magnitudes of subduction zone interface thrust earthquakes and physical parameters of subduction zones. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 225:41–67, 2013.
- [38] GNS Science. How long do earthquakes last: <https://www.gns.cri.nz/home/learning/science-topics/earthquakes/monitoring-earthquakes/other-earthquake-questions/how-long-does-an-earthquake-last>.
- [39] Patrick Peter and Jean-Philippe Uzan. *Primordial cosmology*. Oxford University Press, 2013.
- [40] N. Aghanim et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, 641:A6, 2020.
- [41] Jerome Martin. Everything You Always Wanted To Know About The Cosmological Constant Problem (But Were Afraid To Ask). *Comptes Rendus Physique*, 13:566–665, 2012.
- [42] Anthony Zee. *Quantum field theory in a nutshell*, volume 7. Princeton university press, 2010.
- [43] Pierre Astier and Reynald Pain. Observational evidence of the accelerated expansion of the universe. *Comptes Rendus Physique*, 13(6-7):521–538, 2012.

- [44] Saul Perlmutter, Goldhaber Aldering, Gerson Goldhaber, RA Knop, Peter Nugent, Patricia G Castro, Susana Deustua, Sebastien Fabbro, Ariel Goobar, Donald E Groom, et al. Measurements of ω and λ from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, 517(2):565, 1999.
- [45] D Tong. ” lecture notes on quantum field theory, 2006.
- [46] Lasma Alberte, Paolo Creminelli, Andrei Khmelnitsky, David Pirtskhalava, and Enrico Trincherini. Relaxing the Cosmological Constant: a Proof of Concept. *JHEP*, 12:022, 2016.
- [47] Stephen Appleby and Eric V. Linder. The Well-Tempered Cosmological Constant. *JCAP*, 07:034, 2018.
- [48] William T. Emond, Chunhao Li, Paul M. Saffin, and Shuang-Yong Zhou. Well-Tempered Cosmology. *JCAP*, 05:038, 2019.
- [49] Stephen Appleby and Eric V. Linder. The Well-Tempered Cosmological Constant: The Horndeski Variations. 9 2020.
- [50] Philippe Brax and Patrick Valageas. Cosmological cancellation of the vacuum energy density. *Phys. Rev. D*, 99(12):123506, 2019.
- [51] Lucas Lombriser. On the cosmological constant problem. *Phys. Lett. B*, 797:134804, 2019.
- [52] Daniel Sobral Blanco and Lucas Lombriser. Local self-tuning mechanism for the cosmological constant. *Phys. Rev. D*, 102(4):043506, 2020.
- [53] Eugeny Babichev and Gilles Esposito-Farese. Cosmological self-tuning and local solutions in generalized Horndeski theories. *Phys. Rev. D*, 95(2):024020, 2017.
- [54] Arthur Hebecker. Lectures on Naturalness, String Landscape and Multiverse. 8 2020.
- [55] Minjoon Park, Kathryn M. Zurek, and Scott Watson. A Unified Approach to Cosmic Acceleration. *Phys. Rev. D*, 81:124008, 2010.
- [56] Jolyon K. Bloomfield and Eanna E. Flanagan. A Class of Effective Field Theory Models of Cosmic Acceleration. *JCAP*, 10:039, 2012.
- [57] Giulia Gubitosi, Federico Piazza, and Filippo Vernizzi. The Effective Field Theory of Dark Energy. *JCAP*, 02:032, 2013.
- [58] Jolyon K. Bloomfield, Éanna É. Flanagan, Minjoon Park, and Scott Watson. Dark energy or modified gravity? An effective field theory approach. *JCAP*, 08:010, 2013.
- [59] Jerome Gleyzes, David Langlois, Federico Piazza, and Filippo Vernizzi. Essential Building Blocks of Dark Energy. *JCAP*, 08:025, 2013.
- [60] Joe Kennedy, Lucas Lombriser, and Andy Taylor. Screening and degenerate kinetic self-acceleration from the nonlinear freedom of reconstructed Horndeski theories. *Phys. Rev. D*, 100(4):044034, 2019.
- [61] Cyril Renevey, Joe Kennedy, and Lucas Lombriser. Parameterised post-Newtonian formalism for the effective field theory of dark energy via screened reconstructed Horndeski theories. 6 2020.
- [62] A.D. Dolgov. An attempt to get rid of the cosmological constant. In *Nuffield Workshop on the Very Early Universe*, pages 449–458, 1 1982.
- [63] L.H. Ford. Cosmological constant damping by unstable scalar fields. *Phys. Rev. D*, 35:2339, 1987.
- [64] A.D. Dolgov. Field model with a dynamic cancellation of the cosmological constant. *JETP Lett.*, 41:345–347, 1985.
- [65] Wai-Mo Suen and Clifford M. Will. Damping of the Cosmological Constant by a Classical Scalar Field. *Phys. Lett. B*, 205:447–450, 1988.
- [66] Stephen M. Barr. An Attempt at a Classical Cancellation of the Cosmological Constant. *Phys. Rev. D*, 36:1691, 1987.
- [67] Stephen M. Barr, Siew-Phang Ng, and Robert J. Scherrer. Classical cancellation of the cosmological constant re-considered. *Phys. Rev. D*, 73:063530, 2006.

- [68] A.D. Dolgov. Higher spin fields and the problem of cosmological constant. *Phys. Rev. D*, 55:5881–5885, 1997.
- [69] V.A. Rubakov and P.G. Tinyakov. Ruling out a higher spin field solution to the cosmological constant problem. *Phys. Rev. D*, 61:087503, 2000.
- [70] V. Emelyanov and F.R. Klinkhamer. Reconsidering a higher-spin-field solution to the main cosmological constant problem. *Phys. Rev. D*, 85:063522, 2012.
- [71] V. Emelyanov and F.R. Klinkhamer. Vector-field model with compensated cosmological constant and radiation-dominated FRW phase. *Int. J. Mod. Phys. D*, 21:1250025, 2012.
- [72] V. Emelyanov and F.R. Klinkhamer. Possible solution to the main cosmological constant problem. *Phys. Rev. D*, 85:103508, 2012.
- [73] A.D. Dolgov and F.R. Urban. Dynamical vacuum energy via adjustment mechanism. *Phys. Rev. D*, 77:083503, 2008.
- [74] Gerard 't Hooft. Naturalness, chiral symmetry, and spontaneous chiral symmetry breaking. *NATO Sci. Ser. B*, 59:135–157, 1980.
- [75] T. Damour and K. Nordtvedt. Tensor-scalar cosmological models and their relaxation toward general relativity. *Phys. Rev. D*, 48:3436–3450, 1993.
- [76] Arthur S. Eddington. *The Mathematical Theory of Relativity*. Cambridge University Press, 1922.
- [77] Eric Poisson and Clifford M. Will. *Gravity: Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic*. Cambridge University Press, 2014.
- [78] Clifford M. Will. *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. Cambridge University Press, 9 2018.
- [79] Thibault Damour and Gilles Esposito-Farese. Tensor multiscalar theories of gravitation. *Class. Quant. Grav.*, 9:2093–2176, 1992.
- [80] B. Boisseau, Gilles Esposito-Farese, D. Polarski, and Alexei A. Starobinsky. Reconstruction of a scalar tensor theory of gravity in an accelerating universe. *Phys. Rev. Lett.*, 85:2236, 2000.
- [81] A.S. Konopliv et al. Mars high resolution gravity fields from MRO. Mars seasonal gravity and other dynamical parameters. *Icarus*, 211:401–428, 2011.
- [82] E. V. Pitjeva and N. P. Pitjev. Relativistic effects and dark matter in the Solar system from observations of planets and spacecraft. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 432(4):3431–3437, 05 2013.
- [83] B. Bertotti, L. Iess, and P. Tortora. A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft. *Nature*, 425:374–376, 2003.
- [84] Adam G. Riess, Stefano Casertano, Wenlong Yuan, Lucas M. Macri, and Dan Scolnic. Large Magellanic Cloud Cepheid Standards Provide a 1% Foundation for the Determination of the Hubble Constant and Stronger Evidence for Physics beyond Λ CDM. *Astrophys. J.*, 876(1):85, 2019.
- [85] L. Verde, T. Treu, and A. G. Riess. Tensions between the Early and the Late Universe. *Nature Astron.*, 3:891, 7 2019.
- [86] Kenneth C. Wong et al. H0LiCOW – XIII. A 2.4 per cent measurement of H0 from lensed quasars: 5.3 σ tension between early- and late-Universe probes. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 498(1):1420–1439, 2020.
- [87] Christophe Ringeval, Teruaki Suyama, and Masahide Yamaguchi. Large mass hierarchy from a small nonminimal coupling. *Phys. Rev. D*, 99(12):123524, 2019.
- [88] Claus Kiefer. *Quantum Gravity*. Oxford University Press, New York, 2nd ed edition, 2007.
- [89] Don N Page and CD Geilker. Indirect evidence for quantum gravity. *Physical Review Letters*, 47(14):979, 1981.

- [90] Roger Penrose. On the gravitization of quantum mechanics 1: Quantum state reduction. *Foundations of Physics*, 44(5):557–575, 2014.
- [91] Steve Carlip. Is quantum gravity necessary? *Classical and Quantum Gravity*, 25(15):154010, 2008.
- [92] Matvei Bronstein. Republication of: Quantum theory of weak gravitational fields. *General Relativity and Gravitation*, 44(1):267–283, 2012.
- [93] Bryce S DeWitt. Quantum theory of gravity. i. the canonical theory. *Physical Review*, 160(5):1113, 1967.
- [94] Carlo Rovelli. *Quantum gravity*. Cambridge university press, 2004.
- [95] Bryce S DeWitt. Quantum theory of gravity. ii. the manifestly covariant theory. *Physical Review*, 162(5):1195, 1967.
- [96] Bryce S DeWitt. Quantum theory of gravity. iii. applications of the covariant theory. *Physical Review*, 162(5):1239, 1967.
- [97] Steven Carlip. Quantum gravity: a progress report. *Reports on Progress in Physics*, 64(8):885, 2001.
- [98] David Kutasov, Travis Maxfield, Iliarion Melnikov, and Savdeep Sethi. Constraining de sitter space in string theory. *Physical review letters*, 115(7):071305, 2015.
- [99] William H Kinney. The swampland conjecture bound conjecture. *arXiv preprint arXiv:2103.16583*, 2021.
- [100] Roger Penrose. On gravity’s role in quantum state reduction. *General relativity and gravitation*, 28(5):581–600, 1996.
- [101] C Anastopoulos and BL Hu. A master equation for gravitational decoherence: probing the textures of spacetime. *Classical and Quantum Gravity*, 30(16):165007, 2013.
- [102] Lawrence M Krauss and Frank Wilczek. Using cosmology to establish the quantization of gravity. *Physical Review D*, 89(4):047501, 2014.
- [103] Marios Christodoulou and Carlo Rovelli. On the possibility of laboratory evidence for quantum superposition of geometries. *Physics Letters B*, 792:64–68, 2019.
- [104] Sougato Bose, Anupam Mazumdar, Gavin W Morley, Hendrik Ulbricht, Marko Toroš, Mauro Paternostro, Andrew A Geraci, Peter F Barker, MS Kim, and Gerard Milburn. Spin entanglement witness for quantum gravity. *Physical review letters*, 119(24):240401, 2017.
- [105] Chiara Marletto and Vlatko Vedral. Gravitationally induced entanglement between two massive particles is sufficient evidence of quantum effects in gravity. *Physical review letters*, 119(24):240402, 2017.
- [106] Oriol Romero-Isart, Anika C Pflanze, Florian Blaser, Rainer Kaltenbaek, Nikolai Kiesel, Markus Aspelmeyer, and J Ignacio Cirac. Large quantum superpositions and interference of massive nanometer-sized objects. *Physical review letters*, 107(2):020405, 2011.
- [107] Matteo Carlesso, Angelo Bassi, Mauro Paternostro, and Hendrik Ulbricht. Testing the gravitational field generated by a quantum superposition. *New Journal of Physics*, 21(9):093052, 2019.
- [108] J Pašukonis. Gravitational scattering of massless scalars in qft and superstring theory. *Fortschritte der Physik: Progress of Physics*, 53(9):1011–1029, 2005.
- [109] Michael D Scadron. *Advanced quantum theory*. World Scientific Publishing Company, 2006.
- [110] Barry R Holstein. Graviton physics. *American journal of physics*, 74(11):1002–1011, 2006.
- [111] Martin JG Veltman. Quantum theory of gravitation. *Méthodes en théorie des champs*, pages 266–328, 1976.
- [112] GL Kotkin, VG Serbo, and A Schiller. Processes with large impact parameters at colliding beams. *International Journal of Modern Physics A*, 7(20):4707–4745, 1992.

- [113] Dmitry V Karlovets. Scattering of wave packets with phases. *Journal of High Energy Physics*, 2017(3):49, 2017.
- [114] John F. Donoghue. Leading quantum correction to the newtonian potential. *Phys. Rev. Lett.*, 72:2996–2999, May 1994.
- [115] John F. Donoghue. General relativity as an effective field theory: The leading quantum corrections. *Phys. Rev. D*, 50:3874–3888, Sep 1994.
- [116] John F. Donoghue. Introduction to the effective field theory description of gravity. In *Advanced School on Effective Theories*, 6 1995.
- [117] C. P. Burgess. Quantum gravity in everyday life: General relativity as an effective field theory. *Living Rev. Rel.*, 7:5–56, 2004.
- [118] Gregory M Harry, LIGO Scientific Collaboration, et al. Advanced ligo: the next generation of gravitational wave detectors. *Classical and Quantum Gravity*, 27(8):084006, 2010.
- [119] Maulik Parikh, Frank Wilczek, and George Zahariade. Quantum Mechanics of Gravitational Waves. *Phys. Rev. Lett.*, 127(8):081602, 2021.
- [120] E. Wigner. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. *Phys. Rev.*, 40:749–759, Jun 1932.
- [121] L. Diosi. Gravitation and quantum-mechanical localization of macro-objects. *Physics Letters A*, 105(4):199–202, 1984.
- [122] Lajos Diosi. Nonlinear schrödinger equation in foundations: summary of 4 catches. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 701, page 012019. IOP Publishing, 2016.
- [123] Marc Kasevich. Public communication. *Testing Gravity 2019, Simon Fraser University*, Vancouver, 2019.